

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

Ударно-
волновые
процессы
в двухкомпонентных
и двухфазных
средах

Ответственный редактор

член-корреспондент РАН *Ю. И. Шокин*



ВО «НАУКА»

НОВОСИБИРСК

1992

УДК 532.5 + 533.6.011 + 539.2

А в т о р ы

**С. П. Киселев, Г. А. Руев, А. П. Трунев,
В. М. Фомин, М. Ш. Шавалиев**

Ударно-волновые процессы в двухкомпонентных и двухфазных средах/С. П. Киселев, Г. А. Руев, А. П. Трунев и др.— Новосибирск: ВО «Наука», Сибирская издательская фирма, 1992.— 261 с.
ISBN 5—02—030196—5.

В монографии изложены вопросы математического моделирования ударно-волновых процессов в многофазных средах. Получены уравнения и найдена структура ударной волны в смеси газов. Дан вывод соотношения на комбинированном разрыве в смеси газ — частицы и изучены каустики в псевдогазе частиц. Рассмотрена задача об эрозии тел в двухфазном потоке газ — частицы. Исследовано распространение ударной волны в пористом твердом теле.

Книга рассчитана на научных работников, аспирантов и студентов, специализирующихся в области механики многофазных и пористых сред.

Табл. 3. Ил. 104. Библиогр.: 248 назв.

Р е ц е н з е н т ы

доктор физико-математических наук *В. Ф. Несгеренко*
доктор технических наук *А. Д. Рычков*

Утверждено к печати
Институтом теоретической
и прикладной механики СО РАН

У $\frac{1603040000-177}{042(02)-92}$ 215—92 II полугодие

ISBN 5—02—030196—5

© С. П. Киселев, Г. А. Руев, А. П. Трунев и др., 1992
© Российская Академия наук, 1992

ПРЕДИСЛОВИЕ

Последние 20 лет интенсивно развивается новый раздел механики сплошных сред — механика многофазных, многокомпонентных сред. Это вызвано важными практическими приложениями в авиационной и ракетной технике, атомной энергетике, турбостроении, химической технологии и т. д. Характерной особенностью многофазных, многокомпонентных течений является наличие в потоке нескольких фаз или компонентов: смеси газов с различными массами, газ — твердые частицы, газ — жидкие капли, жидкость — пузырьки газа и т. д. Между фазами может происходить интенсивный обмен массой, энергией, импульсом, что существенно сказывается на движении смеси.

Изучение течений многофазных сред представляет собой сложную проблему и развивается по нескольким направлениям, каждое из которых имеет свои характерные особенности. В настоящее время в нашей стране и за рубежом опубликовано большое число монографий и обзорных статей по различным аспектам газодинамики многофазных сред.

Данная монография посвящена изучению ударно-волновых процессов в многофазных, многокомпонентных средах. Исследование этой проблемы имеет важное научное и практическое значение, поскольку ударно-волновые процессы широко используются в различных областях науки и техники. Сюда относятся, например, распространение ударных волн в смесях газ — частицы, насыщенных грунтах, сверхзвуковое движение летательных аппаратов в запыленном газе. Двухфазные потоки газ — частицы в ракетных двигателях приводят не только к потерям удельного импульса, но и к эрозии стенок сопла. Другим примером, имеющим важное технологическое значение для получения материалов с заданными свойствами, является компактирование порошков энергией взрыва. В этом процессе по порошку распространяется ударная волна, за фронтом которой происходит спекание частиц. На распространение ударной волны и характер спекания существенное влияние оказывает не только взрывная нагрузка, но и физические процессы, протекающие в частице порошка. Отсюда следует, что при моделировании ударно-волновых процессов в гетерогенных средах должны учитываться явления, протекающие как на микро-, так и на макроуровне. Это

привело к возникновению большого числа моделей для различных многофазных сред и, по-видимому, их число будет увеличиваться и в дальнейшем.

В данной работе представлены результаты многолетних исследований ударно-волновых процессов в многофазных средах, проводимых в ИТПМ СО РАН. Эти исследования были начаты по инициативе академика Н. Н. Янсенко и выполнены сотрудниками института под руководством и с участием В. М. Фомина. Для данной работы характерно сочетание различных методов исследования, включающих построение физико-математической модели явления, теоретический анализ особенностей модели и численный расчет на ЭВМ. Результаты расчетов, как правило, сравниваются с экспериментом либо с аналитическим решением, что позволяет определить достоверность математической модели и область ее применимости.

В монографии дан обзор математических моделей, используемых для расчета двухфазных течений газ — частицы. В основу этих моделей положена идея о взаимопроникающих континуумах, один из которых связан с газовой фазой, а другой — с фазой частиц. Обе фазы описываются уравнениями механики сплошных сред, которые следуют из законов сохранения массы, энергии, импульса либо из кинетических уравнений. Рассмотрены модели смеси газа и твердых частиц при малой и большой объемной концентрации частиц, а также модель пористой насыщенной среды. Приведены соотношения на тонких разрывах, характеристики и законы сохранения для уравнений двухфазной смеси газ — частицы.

Методами кинетической теории получена система уравнений, описывающая течение смеси газов с сильно различающимися массами в многоскоростном, многотемпературном приближении. Доказано, что эта система уравнений удовлетворяет второму закону термодинамики и найдены для нее все законы сохранения. Методами качественной теории дифференциальных уравнений изучена структура ударной волны в смеси газов в эйлеровском приближении. С помощью численного метода установления решена задача о структуре ударной волны в бинарной смеси газов с сильно различающимися массами в приближении Навье — Стокса. Численные решения хорошо описывают экспериментальные данные, приведенные в литературе.

Для смеси газ — твердые частицы получены соотношения на комбинированном разрыве с учетом конечного размера частиц. Показано, что этот разрыв имеет поверхностную массу и является, как правило, нестационарным. Предложена континуально-дискретная модель, в рамках которой исследованы каустики в псевдогазе частиц. Отмечено, что в двухфазной среде масса частиц на каустике не превосходит некоторой величины, которая определяется отношением длины скоростной релаксации к диаметру частицы. Решена задача о разлете оболочки с учетом разрушения и истечения продуктов детонации между осколками.

Рассмотрены задачи эрозии тонкого тела, клина, затупленного тела в двухфазном потоке газ — частицы. Отмечены характерные особенности эрозии, связанные с эффектами экранировки эродируемой поверхности продуктами эрозии и влиянием длины скоростей релаксации падающих частиц. Предложена упругопластическая модель деформирования пористого материала. Проанализированы процессы в окрестности поры при ее схлопывании за фронтом ударной волны. Дано объяснение эффекта холодного слоя, имеющего место при взрывном компактировании порошков с центральным телом. В одномерном приближении получено численное решение задачи о распространении ударной волны в пористом материале, результаты расчетов сравниваются с экспериментом. Численно решена задача об отскоке пористого цилиндра от твердой преграды.

Материал, представленный в монографии, не претендует на полноту и отражает круг интересов авторов.

Отметим, что везде в пределах каждого параграфа используется самостоятельная нумерация формул. Ссылки на формулы внутри главы, но в другом параграфе имеют двойную нумерацию, а ссылки на формулы из другой главы — тройную. Первая цифра указывает номер главы, вторая — номер параграфа, а третья — номер формулы в параграфе.

Авторы выражают искреннюю благодарность В. Д. Ивановой и Р. Д. Токаревой за большую помощь в оформлении рукописи.

ГЛАВА 1

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДВУХФАЗНЫХ СРЕД

Под многофазными потоками будем понимать такие потоки, составляющие которых существенно отличаются друг от друга своими физическими свойствами и в процессе совместного движения обмениваются массой, импульсом и энергией. В качестве примера можно указать системы типа газ — твердые частицы, газ — капли, жидкость — пузыри газа, пар — капли и другие.

В современной технике встречается достаточно большое число различных типов многофазных течений, полную классификацию которых в настоящее время дать затруднительно. Это связано в первую очередь со сложностью установления общих закономерностей движения таких систем и, как следствие, отсутствием критериев, по которым можно осуществить такую классификацию.

В связи с разнообразием физических явлений, имеющих место в многофазных потоках, представляется целесообразным последовательное изучение отдельных вопросов на основе тщательного сопоставления теоретических и экспериментальных данных. Круг вопросов, рассмотренных в этой главе, ограничен в основном исследованием высокоскоростных многофазных потоков типа газ — твердые частицы. Такие системы являются существенно гетерогенными, поскольку каждая фаза в этом случае занимает в фиксированный момент времени свой объем. При изучении многофазной системы типа газ — твердые частицы можно выделить две предельные формы ее существования:

— фильтрация газа в плотно упакованном слое твердых частиц;

— движение одиночной частицы в газовом потоке.

Следует заметить, что между этими двумя предельными случаями в зависимости от концентрации частиц существует большое количество промежуточных состояний.

§ 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ МНОГОФАЗНЫХ СРЕД

Многофазные системы представим в виде совокупности большого числа различных групп частиц (молекул, атомов, ионов, капель, пузырей и др.), находящихся в непрерывном хаотическом дви-

жении. Одной из важных задач газодинамики многофазных сред является изучение движения таких систем и их взаимодействия с другими физическими объектами. Для того чтобы охарактеризовать состояние системы в определенный момент времени, нужно задать положение и скорость каждой частицы. Однако ввиду большого числа частиц и невозможности определить их начальные данные (скорость, координату и т. д.) этот метод математического описания является неприемлемым. Поэтому в многофазных системах используют осредненное описание движения. Вводятся понятия многоскоростного континуума и взаимопроникающего движения его составляющих.

Многоскоростной континуум состоит из совокупности отдельных континуумов, каждый из которых относится к определенной фазе вещества и заполняет фиксированный объем всей системы. Тогда для каждого из континуумов, входящих в состав системы, в любой точке объема можно определить среднюю плотность ρ_i (масса i -й составляющей, отнесенной ко всему объему), скорость $\vec{v}_i$, температуру T_i и другие кинематические и динамические параметры. Таким образом, в каждой точке объема, занятого многофазной системой, имеем k плотностей ρ_i , k скоростей $\vec{v}_i$ и других параметров, определяемых как функции четырехмерного пространства $f_4(x, y, z, t)$.

Исходя из общих физических представлений можно определить также основные параметры, характеризующие многофазную систему в целом, т. е. плотность смеси ρ и среднемассовую скорость $\vec{v}$:

$$\rho = \sum_{i=1}^k \rho_i, \quad \vec{v} = \sum_{i=1}^k \rho_i \vec{v}_i / \sum_{i=1}^k \rho_i, \quad \rho_i = \rho_{ii} m_i,$$

где ρ_{ii} — истинная плотность фазы, m_i — объемная концентрация. Величину $w_i = \vec{v}_i - \vec{v}$ принято называть диффузионной скоростью относительно центра масс системы. При этом легко показать, что $\sum_{i=1}^k \rho_i w_i \equiv 0$.

В настоящее время существуют два принципиально различных подхода к описанию многофазных систем. Первый основывается на физических законах сохранения массы, импульса и энергии, которые записываются отдельно для каждой фазы с применением гипотезы о взаимопроникающих континуумах [1—7, 37—40]. При этом существенно учитывается тот факт, что фазы присутствуют в объеме смеси в виде макроскопических включений, размеры которых существенно больше молекулярных. Движение газовзвесей в указанном приближении описывается уравнениями, приведенными в работах [1—7]. При этом авторы справедливо отмечают, что выписывание только одних балансовых соотношений в общем виде не представляет в настоящее время интереса для механики смесей. Основной труд-

ностью в данном случае являются конкретизация сил теплового и скоростного взаимодействия фаз друг с другом и определение зависимостей, описывающих фазовые переходы.

Во втором подходе для вывода уравнений движения используем методы статистической физики, а именно: кинетической теории газов, осреднения по пространству, времени, ансамблям и т. д. В отличие от предыдущего, феноменологического подхода при осреднении микроуравнений для макроскопических параметров получаются соотношения, позволяющие детальнее представить их структуру.

Остановимся более подробно на первом подходе. Рассматриваемая модель связана с представлением средних величин (ρ_i , $\vec{v}_i$, T_i и др.), как непрерывно распределенных в занимаемом объеме τ , ограниченном поверхностью s . Полная масса вещества в объеме τ остается постоянной, а сам объем τ зависит от времени. При этом $\tau(t)$ считается достаточно малым, но содержащим большое число различных групп частиц, что позволяет отождествить этот физический объем с «материальной точкой».

В основу вывода уравнений, определяющих законы движения средних величин, положен известный принцип «отвердевания», который для случая взаимопроникающих континуумов можно сформулировать следующим образом: изменение количества движения и энергии любого компонента внутри объема τ происходит за счет не только внешних воздействий по отношению к τ , но и обмена импульсом и энергией между компонентами внутри τ . Масса каждого компонента изменяется только в результате обмена массой между компонентами в τ . Применяя этот принцип, запишем законы сохранения массы, импульса и энергии в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\tau(t)} \rho_i d\tau &= \int_{\tau(t)} \left(\sum'_{ij} \kappa_{ij} \right) d\tau, \\ \frac{d}{dt} \int_{\tau(t)} \rho_i \vec{v}_i d\tau &= \int_{s(t)} \vec{\sigma}_i^n ds + \int_{\tau(t)} \rho_i \vec{F}_i d\tau + \int_{\tau(t)} \left(\sum'_{ij} \vec{p}_{ji} \right) d\tau, \\ \frac{d}{dt} \int_{\tau(t)} (\rho_i E_i) d\tau &= \int_{s(t)} (\vec{\sigma}_i^n \vec{v}_i) ds + \int_{\tau(t)} (\rho_i \vec{F}_i \vec{v}_i) d\tau + \\ &+ \int_{\tau(t)} \left(\sum'_{ij} E_{ij} \right) d\tau + \int_s Q_i^n ds, \\ \sum' &= \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq j)}}^k, \quad i = 1, \dots, k, \quad j = 1, \dots, k. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $\vec{\sigma}_i^n$ — тензор напряжения поверхностных сил, $\vec{F}_i$ — вектор внешних сил, $\vec{p}_{ij}$ и E_{ij} — силы и энергия, учитывающие интен-

сивность обмена между i -й и j -й составляющими многофазной системы, Q_i^n — приток тепла. Заметим, что уравнения (1) будут выполняться для любого движущегося объема $\tau(t)$ с достаточно гладкой границей $s(t)$ и в любой момент t . Из физических соображений следует, что

$$\kappa_{ij} = -\kappa_{ji}, \quad \kappa_{ii} = 0, \quad \vec{p}_{ii} = 0, \quad E_{ii} = 0. \quad \text{а}$$

Если ввести определение тензора поверхностных сил и полной энергии всей системы по формулам

$$\vec{\sigma}^* = \sum_{i=1}^k \vec{\sigma}_i, \quad \rho E = \sum_{i=1}^k \rho_i E_i, \quad \rho \vec{F} = \sum_{i=1}^k \rho_i \vec{F}_i,$$

то по аналогии с предыдущим легко записать законы сохранения всей системы суммированием (1) по i .

В случае если неизвестные функции $\vec{v}_i$, ρ_i , T_i и др. в области $\tau \in J_4$ непрерывны вместе с их первыми производными, от системы интегральных уравнений после дифференцирования и применения формулы Остроградского — Гаусса переходим к дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \vec{\nabla} \rho_i \vec{v}_i &= \sum_{j=1}^k \kappa_{ij}, \\ \rho_i \frac{d_i \vec{v}_i}{dt} &= \vec{\nabla} \vec{\sigma}_i + \rho_i \vec{F}_i + \sum_{j=1}^k (\vec{p}_{ji} - \kappa_{ji} \vec{v}_i), \\ \rho_i \frac{d_i E_i}{dt} &= \vec{\nabla} (\vec{\sigma}_{ji} \vec{v}_i + Q_i) + \rho_i \vec{F}_i \vec{v}_i + \sum_{j=1}^k [E_{ji} - \kappa_{ji} E_i], \\ \vec{\sigma}_i &= \sigma_{kl} \vec{e}_k \otimes \vec{e}_l, \quad \sigma_{kl} = \sigma_{lk}, \quad k, l = 1, 2, 3, \\ \frac{d_i (\quad)}{dt} &= \frac{\partial (\quad)}{\partial t} + \vec{v}_i \vec{\nabla} (\quad), \end{aligned} \quad (2)$$

где $\vec{e}_i$ — единичные базисные векторы, а $\vec{e}_k \otimes \vec{e}_l$ — соответствующая диада. Полученные балансовые уравнения могут быть применены для описания многоскоростной сплошной среды как в гомогенном, так и в гетерогенном приближениях. Принципиальное различие этих приближений состоит в конкретизации величин $\vec{\sigma}_i$, $\vec{p}_{ji}$, E_{ji} и учете условия [8], сущность которого сводится к тому, что для гомогенных смесей каждая компонента занимает весь объем смеси, а в гетерогенной системе — лишь некоторую часть от общего объема системы. Вывод данных уравнений проведен в пренебрежении флуктуационным переносом импульса и энергии, а также моментом и энергией пульсационного движения. Мелкомасштабные движения в многофазной системе легко учесть, используя результаты работы [4]. В качестве области приложения, где обязательно требуется учет этих эффек-

тов, можно указать на течения газожидкостных и микрополярных сред.

Другой подход, являющийся более строгим, основывается на локальных уравнениях сохранения для каждой составляющей системы с последующим осреднением по контрольному объему и стягиванием его к нулю. Преимущество такого подхода состоит в том, что осредненные члены уравнений определяются через локальные характеристики поля течения и имеют более наглядный вид. Так, Р. Пэнтоном [9] были получены уравнения, описывающие одномерные стационарные движения системы газ — твердые частицы, а для более общего случая — Р. И. Нигматулиным [4]. Данный подход требует знания скоростей, температур, напряжений около отдельной частицы, которые можно определить из решения краевой задачи на ячейке. Однако точное задание граничных условий и «сшивка» решений на контуре локальной ячейки представляют значительные трудности, что существенно ограничивает возможности данного метода.

Рассмотрим замыкание системы уравнений (2) в частном случае двухфазной среды газ — твердые частицы. Будем предполагать, что частицы являются твердыми сферами одинакового диаметра, концентрация частиц мала и столкновениями между частицами можно пренебречь, объемные силы и обмен массой между газом и частицами отсутствуют, вязкость и теплопроводность учитываются только в обмене импульсом и энергией между газом и частицами. В этих предположениях замыкающие соотношения имеют вид [2—4, 13—16]

$$\begin{aligned} \sigma_{kl1} &= -p\delta_{kl}, \quad \sigma_{kl2} = 0, \quad \kappa_{ij} = 0, \quad F_i = Q_i = 0, \\ \vec{p}_{12} &= -m_2 \vec{\nabla} p + \vec{f}_{12}, \quad E_{21} = -m_2 \vec{v}_2 \vec{\nabla} p + \vec{v}_2 \vec{f}_{12} + q_{12}, \\ m_2 &= \frac{\pi d^3}{6} \cdot n, \quad \vec{f}_{12} = n \vec{f}_p, \quad q_{12} = n q_p, \\ \vec{f}_p &= m_p \left(\frac{3}{4} \frac{\text{Re}_{12} \mu}{\rho_{22} d^2} C_d(\text{Re}_{12}, M_{12}) (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) + \frac{1}{2} \frac{\rho_{11}}{\rho_{22}} \frac{d(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)}{dt} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{9}{d \rho_{22}} \left(\frac{\rho_{11} \mu}{\pi} \right)^{1/2} \int_0^t \frac{d(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)}{dt'} \left/ \sqrt{(t - t')} \right. dt' \right), \quad m_p = \frac{\pi d^3}{6} \rho_{22}, \\ q_p &= \text{Nu}(M_{12}, \text{Re}_{12}, \text{Pr}_{12}) \pi d \lambda (T_1 - T_2), \quad T_i = e_i / c_{vi}, \\ p &= \rho_{11} R T_1, \quad \rho_{22} = \text{const}, \quad M_{12} = |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| / c_1, \\ c_1 &= \sqrt{\gamma p / \rho_{11}}, \quad \text{Re}_{12} = |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| \rho_{11} d / \mu, \quad \text{Pr}_{12} = c_p \mu / \lambda, \end{aligned} \quad (3)$$

где ρ_{11} , T_1 , c_{v1} , e_1 , p , γ , c_1 , μ , λ — плотность, температура, удельная теплоемкость, удельная внутренняя энергия, давление, показатель адиабаты, скорость звука, вязкость, теплопроводность газа; d , ρ_{22} , T_2 , c_{v2} , e_2 , n — диаметр, плотность, температура, удельная теплоемкость, удельная внутренняя энергия, концент-

рация частиц; m_2 — доля единичного объема, занятая частицами; M_{12} , Re_{12} , Nu , Pr_{12} — числа Маха, Рейнольдса, Нуссельта и Прандтля. Выражения q_p , f_p для теплового потока и силы, действующей на одну частицу, представлены в многочисленных работах [2—6, 41—44]. Там же даны выражения для C_d и Nu при различных M_{12} , Re_{12} . Приведем для справок некоторые из этих формул:

$$C_d = \frac{24}{Re_{12}}, \quad Re_{12} \ll 1, \quad M_{12} \ll 1; \quad (a)$$

$$C_d = (1 + \exp(-0,427/M_{12}^{4,67})) \left(0,25 + \frac{24}{Re_{12}} + \frac{4}{\sqrt{Re_{12}}} \right); \quad (b)$$

$$C_d = \begin{cases} C_d^1(Re_{12}, M_{12}), & 0 \leq M_{12} < 1, \\ C_d^1(Re_{12}, M_{12}) + \frac{4}{3} (M_{12} - 1) (C_d^2(Re_{12}, 1,75) - C_d^1(Re_{12}, 1)), & 1 \leq M_{12} \leq 1,75, \\ C_d^2(Re_{12}, M_{12}), & M_{12} > 1,75; \end{cases} \quad (c)$$

$$C_d^1(Re_{12}, M_{12}) = 24/[Re_{12} + S \{4,33 + [(3,65 - 1,53T_2/T_1)/(1 + 0,353T_2/T_1)] \exp(-0,247(Re_{12}/S))\}] + \\ + \exp(-0,5M_{12}/\sqrt{Re_{12}}) [(4,5 + 0,38(0,03 Re_{12} + 0,48 \sqrt{Re_{12}}))/(1 + 0,03 Re_{12} + 0,48 \sqrt{Re_{12}}) + 0,1 M_{12}^2 + 0,2 M_{12}^8] + \\ + [1 - \exp(-M_{12}/Re_{12})] 0,6S,$$

$$C_d^2(Re_{12}, M_{12}) = 0,9 + 0,34/M_{12}^2 + 1,86 (M_{12}/Re_{12})^{1/2} [2 + 2/S^2 + (1,058/S)(T_2/T_1)^{1/2} - 1/S^4]/[1 + 1,86 (M_{12}/Re_{12})^{1/2}],$$

$$S = M_{12} \sqrt{0,5\gamma},$$

$$Nu = 2 + 0,6Re_{12}^{0,5} Pr^{0,33}, \quad (d)$$

$$Nu = 2 + 0,456 Re_{12}^{0,55} Pr^{0,33}, \quad (e)$$

$$Nu = 2 \left[\frac{\exp(-M_{12})}{1 + 17 M_{12}/Re_{12}} \right] + 0,459 Re_{12}^{0,55} Pr^{0,33} [0,666 + 0,333 \exp(-17M_{12}/Re_{12})], \quad (f)$$

$$0 < Re_{12} < 10^4, \quad 0 < M_{12} < 6, \quad M_{12}/Re_{12} < 0,5.$$

В уравнениях (3) формула для f_p разбивается на три слагаемых: силу Стокса, обобщенную на большие числа Re_{12} и M_{12} , силу присоединенных масс и силу Боссе. Сила, обусловленная градиентом давления на частице, выделена в виде отдельного слагаемого $m_2 \nabla p$. Подставляя замыкающие соотношения (3) в систему уравнений (2), получим

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \vec{\nabla} \rho_1 \vec{v}_1 = 0, \quad \rho_1 = \rho_{11} m_1,$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \vec{\nabla} \rho_2 \vec{v}_2 = 0, \quad \rho_2 = \rho_{22} m_2, \quad m_1 + m_2 = 1.$$

$$\rho_1 \frac{d_1 \vec{v}_1}{dt} = -m_1 \vec{\nabla} p - \vec{f}_{12}, \quad \frac{d_1}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla}),$$

$$\rho_2 \frac{d_2 \vec{v}_2}{dt} = -m_2 \vec{\nabla} p + \vec{f}_{12}, \quad \frac{d_2}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}_2 \cdot \vec{\nabla}), \quad (4)$$

$$\rho_1 \frac{d_1 E_1}{dt} = -\vec{\nabla} (\vec{v}_1 m_1 p) - p \frac{\partial m_1}{\partial t} - \vec{v}_2 \vec{f}_{12} - q_{12}, \quad E_1 = e_1 + \frac{(\vec{v}_1)^2}{2},$$

$$\rho_2 \frac{d_2 E_2}{dt} = -m_2 \vec{v}_2 \vec{\nabla} p + \vec{v}_2 \vec{f}_{12} + q_{12}, \quad E_2 = e_2 + \frac{(\vec{v}_2)^2}{2},$$

$$\rho_{22} = \text{const}, \quad p = \rho_{11} R T_1.$$

Первые четыре уравнения (неразрывности и движения) в (4), для баротропного газа, были впервые предложены Х. А. Рахматулиным [1]. В работе Клигеля — Никерсона в силе взаимодействия газа с частицами не учитывается член $m_2 \nabla P$. Полная система уравнений (4) впервые была приведена в статье Крайко — Стернипа [7]. Отметим, что для учета вязкости и теплопроводности в газе необходимо в уравнениях движения и энергии для газа (4) произвести замену $-p\delta_{kl} \rightarrow \sigma_{kl}$, $q_{12} \rightarrow q_{12} + q'_{12}$, где $\sigma_{kl} = -p\delta_{kl} + \lambda e\delta_{kl} + 2\mu e_{kl}$, $e_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_{1k}}{\partial x_l} + \frac{\partial v_{1l}}{\partial x_k} \right)$, $q'_{12} = \kappa \Delta T_1$, $\Delta = \nabla_k \nabla_k$, по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Система уравнений (4) применима для течений, в которых нет пересечений траекторий частиц. Если такие пересечения происходят, то ансамбль частиц нужно описывать кинетическим уравнением. При этом до конца удастся описать два предельных случая: $\text{Kn} \gg 1$ и $\text{Kn} \ll 1$, где $\text{Kn} \approx d/m_2 L$ — число Кнудсена для частиц, L — характерный размер изменения средних параметров двухфазного потока. В работе Киселева и Фомина [11] для описания фазы частиц в случае $\text{Kn} \gg 1$ предложено бесстолкновительное кинетическое уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}_2 (\vec{\nabla} f) + \frac{\partial}{\partial \vec{v}_2} \left(\frac{\vec{f}_p}{m_p} f \right) + \frac{\partial}{\partial T_2} (q_p f) = 0, \quad (5)$$

$$n = \int f dT_2 d\vec{v}_2, \quad \langle \vec{v}_2 \rangle = \frac{1}{n} \int \vec{v}_2 f dT_2 d\vec{v}_2, \quad \langle T_2 \rangle = \int T_2 f dT_2 d\vec{v}_2,$$

где $f = f(t, \vec{r}, \vec{v}_2, T_2)$ — функция распределения частиц. Для газовой фазы используются соответствующие уравнения из (4). Система уравнений (5) решалась в [11, 12] методом характеристик, где было показано, что пересечение траекторий частиц в данной модели не приводит к нефизическим бесконечностям в средней плотности частиц. Ранее, в работах Кроу [13, 14],

был предложен численный метод расчета течений с пересечением траекторий частиц, который представлял собой численную реализацию метода характеристик для уравнения (5). В [13, 14] и в последующих работах уравнение (5) нигде не выписывалось, а использовались сразу следствия уравнения (5). Это не позволило Кроу обнаружить каустики в двухфазном течении, так как при численном решении все особенности типа каустик размываются и становятся трудно различимыми. Каустики в псевдогазе частиц, возникающие при двухфазном течении, были обнаружены в работе [11] из решения уравнения (5). (Ранее каустики были исследованы в работах Я. Б. Зельдовича в псевдогазе частиц, движущихся только в потенциальном поле сил [15].)

В случае обратного неравенства $Kn \ll 1$ в кинетическом уравнении необходимо учитывать интеграл столкновений. В. П. Мясниковым [16] получено следующее кинетическое уравнение для псевдогаза частиц при $Kn \ll 1$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}_2 (\vec{\nabla} f) = & \left(\frac{1}{\rho_{22}} \vec{\nabla} p - \vec{g} \right) \frac{\partial f}{\partial v_2} + S(f, f_1) + \\ & + \frac{\partial}{\partial v_2} (\vec{f}_p \Phi f) + \frac{\partial^2 \dot{D} f}{\partial v_{2k} \partial v_{2k}}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $f = f(t, \vec{r}, \vec{v}_2)$ — одночастичная функция распределения частиц, g — массовая сила, S — интеграл столкновений частиц, Φ — коэффициент, учитывающий эффект стесненности при обтекании частицы. Последнее слагаемое в правой части уравнения (6) описывает диффузию в пространстве скоростей, обусловленную взаимодействием частицы с пульсациями газа, создаваемыми соседними частицами. Уравнение (6) решалось в [16] методом Чепмена — Энскога, в результате для псевдогаза частиц были получены уравнения типа Навье — Стокса, содержащие (в уравнении движения) градиент давления в псевдогазе частиц. Соответствующие уравнения являются достаточно громоздкими, поэтому здесь они не приводятся.

В работах М. А. Гольдштика [17, 18] предложен приближенный вывод уравнений для псевдогаза частиц при $Kn \ll 1$, основанный на методах элементарной кинетической теории газов. В этом подходе распределение частиц по скоростям заменяется дельта-функцией, отличной от нуля при $v_2 = c$, где c — скорость хаотического движения частиц. В результате получается система уравнений двухскоростной двухтемпературной газодинамики с давлением в псевдогазе частиц

$$p_2 = \rho_2 \mathcal{E}_2 / (\gamma_2 \eta), \quad (7)$$

где $\eta = 1 - (m_2/m_2^*)^{1/3}$, $\mathcal{E}_2 = \gamma_2 c^2$, m_2^* — объемная концентрация частиц при плотной упаковке, $\mathcal{E}_2$ — удельная энергия хаотического движения частиц. Отметим, что аналогичный

подход применительно к задачам обтекания тел двухфазным потоком развивается в работах С. К. Матвеева [19].

Уравнение (7) справедливо при выполнении неравенства $m_2 < m_2^*$. Если диссипация энергии происходит достаточно быстро, то $\mathcal{E}_2 \rightarrow 0$ и в псевдогазе частиц достигается плотная упаковка $m_2 \rightarrow m_2^*$. В этом случае для моделирования частиц необходимо использовать модель пористой газонасыщенной среды. Вследствие контактов частиц друг с другом в пористой среде будут возникать напряжения σ_{2ij} , связанные с деформацией пористой матрицы ε_{2ij} . К такого рода средам относятся засыпки, грунты, пористые металлы, керамики и т. д. Существенный вклад в построение модели пористой насыщенной среды был сделан в работах Био [21], Я. И. Френкеля [22], В. Н. Николаевского [20], Г. М. Ляхова [23]. Полная система уравнений для пористой насыщенной среды на основе двухфазного подхода приведена в работе [20] и в наших обозначениях имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \vec{\nabla} (\rho_1 \vec{v}_1) &= 0, \quad \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \vec{\nabla} (\rho_2 \vec{v}_2) = 0, \\ \rho_1 \frac{d_1 \vec{v}_1}{dt} &= -m_1 \vec{\nabla} p_1 - \vec{f}_{12} + \rho_1 \vec{g}, \quad p_1 = \rho_{11} R T_1, \\ \rho_2 \frac{d_2 \vec{v}_2}{dt} &= \vec{\nabla} (m_2 \vec{\sigma}_2) - p \vec{\nabla} m_1 + \vec{f}_{12} + \rho_2 \vec{g}, \\ \rho_1 \frac{d_1 e_1}{dt} + p_1 \frac{d_1}{dt} \left(\frac{1}{\rho_{11}} \right) &= -\dot{q}_{12} + \vec{f}_{12} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2), \quad e_1 = c_{v1} T_1, \\ \rho_2 \frac{d_2 e_2}{dt} &= \vec{\sigma}^f : \vec{\dot{\varepsilon}} - \rho_2 p \frac{d_2}{dt} \left(\frac{1}{\rho_{22}} \right) + \dot{q}_{12}, \quad e_2 = c_2 T_2, \\ \vec{\sigma}^f : \vec{\dot{\varepsilon}}_2 &= \sigma_{ij}^f \dot{\varepsilon}_{2ij}, \quad \dot{\varepsilon}_{2ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i v_{2j} + \nabla_j v_{2i}), \quad \varepsilon_{2ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i u_{2j} + \nabla_j u_{2i}), \\ v_{2i} &= \frac{\partial u_{2i}}{\partial t}, \quad \sigma_{ij}^f = m_2^0 (\lambda_1 \varepsilon_2 \delta_{ij} + 2\lambda_2 \varepsilon_{2ij} + \beta K p \delta_{ij} - \alpha K T_2 \delta_{ij}), \\ \sigma_{ij}^f &= m_2 (\sigma_{2ij} + p_1 \delta_{ij}), \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_{2kk}, \end{aligned} \quad (8)$$

где σ_{ij}^f — тензор фиктивных напряжений, $m_2^0 \lambda_1$, $m_2^0 \lambda_2$ — коэффициента Ламе пористой матрицы, K — модуль объемного сжатия, α — коэффициент теплового расширения. Величины λ_1 и β должны определяться из эксперимента либо решения на ячейке с учетом возможной переупаковки частиц. Линейная связь тензора напряжений σ_{ij}^f с тензором деформаций ε_{2ij} (закон Гука) справедлива при малых напряжениях, не превосходящих предела текучести матрицы Y_s . При более интенсивных нагрузках ($\sigma^f > Y_s$) происходит пластическое течение матрицы, которое сопровождается изменением пористости m_1 . В этом случае для замыкания системы (8) необходимо использовать упругопластическую модель,

дополненную уравнением на пористость $p_2 - p_1 = \varphi(m_1, \dot{m}_1, \ddot{m}_1)$. Построение упругопластической модели пористой среды представляет собой сложную задачу, которая полностью не решена до сих пор. В гл. 6 дан обзор литературы по этому вопросу и представлен один из вариантов упругопластической модели типа Прадтля — Рейсса, развиваемый авторами.

Во многих случаях области высокой концентрации частиц занимают малый пространственный объем, так что в расчетах их можно заменить поверхностями разрыва, несущими конечную массу. Такие разрывы были введены А. Н. Крайко [24, 25] в связи с анализом проблемы устойчивости двухфазных течений (см. гл. 4) и называются пеленами. В модели предполагается, что частицы на пелене уплотняются до плотной упаковки с объемной концентрацией m_2^* . Пелена описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями, а параметры газа испытывают скачок при пересечении пелены. Уравнения для газа и пелены являются следствием законов сохранения массы, энергии, импульса и, согласно [24, 25], записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dM_p}{dt} &= -[j_2], \quad \frac{d}{dt}(M_p D) = -[p + j_1(v_{1n} - D) + j_2(v_{2n} - D)], \\ \frac{d}{dt}(M_p \vec{V}_{p\tau}) &= -[j_1 \vec{v}_{1\tau} + j_2 \vec{v}_{2\tau}], \quad j_i = \rho_i(v_{in} - D), \quad i = 1, 2, \\ d(M_p(2E_p + V_{p\tau}^2))/dt &= [j_1(2H_1 + (v_{1n} - D)^2 + v_{1\tau}^2) + j_2(2H_2 + (v_{2n} - D)^2 + v_{2\tau}^2)], \\ [j_1] &= 0, \quad [\rho_1(v_{1n} - D)^2 + m_1 p] = -F_{pn}, \quad j_1[\vec{v}_{1\tau}] = -\vec{F}_{p\tau}, \quad (9) \\ j_1[2H_1 + (v_{1n} - D)^2 + v_{1\tau}^2] &= -2(M_p \dot{Q}_p - \vec{F}_{p\tau} \vec{V}_{p\tau}), \\ \frac{dx_p}{dt} &= D, \quad \vec{x}_p = x_p \vec{n}, \quad \vec{V}_p = \vec{n}D + \vec{V}_{p\tau}, \\ [\varphi] &= \varphi^+ - \varphi^-, \quad H_1 = e_1 + p/\rho_1, \end{aligned}$$

где M_p , $\vec{v}_p$, $\vec{x}_p$, E_p — масса, скорость, вектор положения и удельная внутренняя энергия пелены; ρ_1 , v_1 , e_1 , H_1 , p — средняя плотность, скорость, удельная внутренняя энергия, энтальпия, давление газа; $\vec{n}$ — единичный вектор, перпендикулярный к пелене; индексами n , τ отмечены нормальные и касательные компоненты скорости пелены D , $\vec{V}_{p\tau}$ и силы, действующие на пелену со стороны газа F_{pn} , $\vec{F}_{p\tau}$; j_1 , j_2 — потоки массы газа и частиц на пелену; $[\varphi]$ — скачок параметров газа и частиц на пелене, индексом «+» отмечены параметры справа, а индексом «—» — параметры слева от пелены. Вне пелены течение двухфазной среды газ — частицы описывается системой уравнений (4). При пересечении пелен друг с другом возникают жгуты, представляющие собой линии с конечной массой. Условия обра-

зования жгутов и их уравнения движения приведены в работе [26].

В данном кратком обзоре мы не касались моделей многофазных сред с фазовыми переходами газожидкостных пузырьковых сред. Эти вопросы выходят за пределы данной монографии, кроме того, они достаточно полно отражены в книгах [5, 6, 27, 28].

§ 2. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ВЗАИМОПРОНИКАЮЩЕГО ДВИЖЕНИЯ СМЕСИ ГАЗА И ТВЕРДЫХ ЧАСТИЦ

В этом параграфе будут найдены все законы сохранения, допускаемые математической моделью взаимопроникающих сред для смеси газ — твердые частицы. Для этого используется метод, предложенный в работе [29]. Аналогичным образом в работах [30, 31] найдена полная система дивергентных уравнений для трехмерной нестационарной газовой и электромагнитной динамики совершенного газа. Предварительно, следуя [32], введем необходимые в дальнейшем определения. Пусть дана система квазилинейных уравнений

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{l=1}^n \left(\Pi_{l,i}^1 \frac{\partial u_l}{\partial x} + \Pi_{l,i}^2 \frac{\partial u_l}{\partial y} + \Pi_{l,i}^3 \frac{\partial u_l}{\partial z} \right) = F_i, \quad (1)$$

где $\Pi_{l,i}^j$ и F_i — аналитические функции переменных t, x, y, z, u_i , $i = 1, \dots, n$, $j = 1, 2, 3$.

Определение 1. Соотношение

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial z} = E, \quad (2)$$

которое является следствием системы (1) для произвольных гладких решений, называется законом сохранения системы (1). Здесь A, B, C, D, E зависят от t, x, y, z и u_i , которые, в свою очередь, являются функциями от t, x, y, z . Закон сохранения (2) при $E \equiv 0$ называется *дивергентным*.

Определение 2. Если система (1) имеет n законов сохранения $A_1, \dots, A_n$, удовлетворяющих условию

$$\frac{\partial [A_1, \dots, A_n]}{\partial [u_1, \dots, u_n]} \neq 0, \quad (3)$$

то она называется *консервативной*.

Определение 3. Дивергентные законы сохранения называются *линейно независимыми*, если соответствующие им вектор-функции $\vec{A}_j(t, x, y, z, u_i) = (A_j, B_j, C_j, D_j)$ линейно-независимы для всех t, x, y, z, u_i из рассматриваемой области.

Рассмотрим систему уравнений, описывающую движение смеси газ — твердые частицы (1.4), которую представим в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_i \vec{u}_i &= 0, \quad \rho_i \frac{d_i \vec{u}_i}{dt} + m_i \vec{\nabla} P = K (\vec{u}_j - \vec{u}_i), \\ \rho_1 \frac{d_1 e_1}{dt} &= \frac{m_1 p}{\rho_{11}} \frac{d_1 \rho_{11}}{dt} + \kappa_1 K (\vec{u}_2 - \vec{u}_1)^2 + q (T_2 - T_1), \\ \rho_2 \frac{d_2 e_2}{dt} &= \kappa_2 K (\vec{u}_2 - \vec{u}_1)^2 + q (T_1 - T_2), \\ \rho_i &= m_i \rho_{ii}, \quad \rho_{22} = \rho_{22}^0 = \text{const}, \quad m_1 + m_2 = 1, \\ p &= R_1 \rho_{11} T_1, \quad e_1 = c_{v1} T_1, \quad e_2 = c_{p2} T_2, \\ \kappa_1 + \kappa_2 &= 1, \quad \frac{d_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}_i \vec{\nabla}, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j,\end{aligned}\tag{4}$$

где R_1 , c_{v1} , c_{p2} — постоянные. Здесь t — время; x, y, z — декартовы координаты; $\vec{u}_i = (u_i, v_i, w_i)$ — вектор скорости; e_i , T_i , m_i , ρ_{ii} — внутренняя энергия, температура, объемная концентрация, истинная плотность i -й фазы; κ_i , K и q — некоторые функции, не зависящие от производных искомых величин. Символ ∂/∂ в дальнейшем означает дифференцирование в системе независимых переменных t, x, y, z , а дифференцирование в системе переменных $t, x, y, z, u_i, v_i, w_i, e_i, m_2, \rho_{11}$ отмечается индексами, например:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \left(\frac{\partial A}{\partial t} \right)_{x,y,z}, \quad A_t = \left(\frac{\partial A}{\partial t} \right)_{x,y,z, \vec{u}_i, e_i, m_2, \rho_{11}}.$$

Совокупность переменных t, x, y, z будем обозначать через S , а совокупность u_i, v_i, w_i — через u_i .

Для нахождения законов сохранения продифференцируем неизвестные функции A, B, C, D в (2) и исключим производные от u_i, e_i, m_2, ρ_{11} по t с помощью (4). В результате получим соотношение, куда входят только уже независимые друг от друга производные по пространственным координатам и свободный член. Следовательно, равенство нулю этого уравнения для произвольных решений возможно лишь при обращении в нуль коэффициентов при этих производных и свободного члена. В итоге получим систему из 31 уравнения для определения 5 функций — A, B, C, D и E [32]:

$$\begin{aligned}& A_t + B_x + C_y + D_z + (A_{u_1}/\rho_1 - A_{u_2}/\rho_2) F_{11} + \\ & + (A_{v_1}/\rho_1 - A_{v_2}/\rho_2) F_{21} + (A_{w_1}/\rho_1 - A_{w_2}/\rho_2) F_{31} + \\ & + A_{e_1} Q_1/\rho_1 + A_{e_2} Q_2/\rho_2 = E, \\ & - u_1 A_{u_1} - \rho_{11} A_{\rho_{11}} - (\gamma - 1) e_1 A_{T_1} + B_{u_1} = 0, \\ & - u_1 A_{v_1} + B_{v_1} = 0, \quad - u_1 A_{w_1} + B_{w_1} = 0,\end{aligned}\tag{5}$$

$$\begin{aligned}
& -u_1 A_{\rho_{11}} - (\gamma - 1) e_1 A_{u_1} / \rho_{11} - (\gamma - 1) e_1 A_{u_2} / \rho_{22}^0 + B_{\rho_{11}} = 0, \\
& -(\gamma - 1) A_{u_1} - (\gamma - 1) \rho_{11} A_{u_2} / \rho_{22}^0 - u_1 A_{e_1} + B_{e_1} = 0, \\
& -m_2 A_{m_2} - m_2 \rho_{11} A_{\rho_{11}} / m_1 - u_2 A_{u_2} - m_2 (\gamma - 1) e_1 A_{e_1} / m_1 + B_{u_2} = 0, \\
& -u_2 A_{v_2} + B_{v_2} = 0, \quad -u_2 A_{w_2} + B_{w_2} = 0, \\
& -u_2 A_{m_2} + (u_1 - u_2) \rho_{11} A_{\rho_{11}} / m_1 + (u_1 - u_2) (\gamma - 1) e_1 A_{e_1} / m_1 + B_{m_2} = 0, \\
& -u_2 A_{e_2} + B_{e_2} = 0, \\
& \begin{array}{cccccccccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array} \\
& -w_2 A_{e_2} + D_{e_2} = 0,
\end{aligned}$$

$$F_{11} = K(u_2 - u_1), \quad F_{21} = K(v_2 - v_1), \quad F_{31} = K(w_2 - w_1),$$

$$Q_i = \kappa_i K(\vec{u}_i - \vec{u}_j)^2 + q(T_i - T_j), \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2.$$

Тридцать уравнений системы (5), начиная со второго, разделяются на три группы по десять уравнений. Две последние группы получаются из первых десяти уравнений соответствующей перестановкой $u_1 \rightleftharpoons v_1$, $u_2 \rightleftharpoons v_2$, $B \rightarrow C$ и $u_1 \rightleftharpoons w_1$, $u_2 \rightleftharpoons w_2$, $B \rightarrow D$. Из третьего, четвертого, восьмого, девятого и одиннадцатого уравнений системы (5) находим

$$B = u_1 A + \sigma_1(S, u_1, \rho_{11}, e_1, \vec{u}_2, m_2, e_2),$$

$$B = u_2 A + \sigma_2(S, \vec{u}_1, \rho_{11}, e_1, u_2, m_2).$$

Приравнявая правые части этих соотношений, имеем

$$\sigma_2 = \sigma_1 + (u_1 - u_2) A. \quad (6)$$

Исключая B во втором, пятом, шестом, седьмом и десятом уравнениях системы (5), получим

$$A - \rho_{11} A_{\rho_{11}} - (\gamma - 1) e_1 A_{e_1} + \sigma_1 u_1 = 0, \quad (7)$$

$$\sigma_1 \rho_{11} - (\gamma - 1) e_1 A_{u_1} / \rho_{11} - (\gamma - 1) e_1 A_{u_2} / \rho_{22}^0 = 0, \quad (8)$$

$$\sigma_1 e_1 - (\gamma - 1) A_{u_1} - (\gamma - 1) \rho_{11} A_{u_2} / \rho_{22}^0 = 0, \quad (9)$$

$$-m_2 A_{m_2} - m_2 (\rho_{11} A_{\rho_{11}} + (\gamma - 1) e_1 A_{e_1}) / m_1 + (u_1 - u_2) A_{u_2} + \sigma_1 u_2 = 0, \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
& (u_1 - u_2) \rho_{11} A_{\rho_{11}} / m_1 + (u_1 - u_2) (\gamma - 1) e_1 A_{e_1} / m_1 + \\
& + (u_1 - u_2) A_{m_2} + \sigma_1 m_2 = 0.
\end{aligned} \quad (11)$$

Умножая (8) на ρ_{11} , (9) — на e_1 и вычитая, находим $\rho_{11} \sigma_1 \rho_{11} - e_1 \sigma_1 e_1 = 0$. Общим интегралом этого уравнения будет

$$\sigma_1 = \delta(S, u_1, p, \vec{u}_2, m_2, e_2), \quad p = (\gamma - 1) \rho_{11} e_1. \quad (12)$$

Подставляя (12) в (7) — (9) и дифференцируя полученные уравнения соответственно по u_1 , ρ_{11} , e_1 , а затем исключая $A_{u_1 e_1}$, $A_{u_1 \rho_{11}}$, находим

$$p\rho_{11}A_{u_2 \rho_{11}} + p(\gamma - 1)e_1A_{u_2 e_1} - \gamma\rho_{22}^0 p^2 \delta_{pp} + (\gamma - 1)e_1\rho_{22}^0 \delta_{u_1 u_1} = 0. \quad (13)$$

Умножая (10) на $u_1 - u_2$, (11) — на m_2 , складывая и используя (12), имеем

$$(u_1 - u_2)^2 A_{u_2} + (u_1 - u_2) \delta_{u_2} + m_2 \delta_{m_2} = 0. \quad (14)$$

Из уравнения (14) следует, что $A_{u_2} = A_{u_2}(S, \vec{u}_1, p, \vec{u}_2, m_2, e_2)$. Тогда из (13) имеем

$$\delta = \delta_1(S, p, \vec{u}_2, m_2, e_2)u_1 + \delta_2(S, p, \vec{u}_2, m_2, e_2), \quad (15)$$

$$A_{u_2 p} = \rho_{22}^0 \delta_{pp}. \quad (16)$$

Дифференцируя (14) по p и подставляя (15) и (16) в полученное равенство, находим

$$\delta_{1pp} = 0, \quad \rho_{22}^0 \delta_{2pp} + \delta_{1u_2 p} = 0. \quad (17)$$

Дифференцируя (17) по u_2 , а затем — по p и учитывая при этом (15) — (17), получим

$$\delta_{pp} = 0. \quad (18)$$

Из соотношений (15) и (18) следует, что

$$\delta = p u_1 \varphi_1 + p \varphi_2 + (\gamma - 1) u_1 \varphi_3 + (\gamma - 1) \varphi_4, \quad (19)$$

где $\varphi_i = \varphi_i(S, \vec{u}_2, m_2, e_2)$. Дифференцируя (7) по u_2 и учитывая (16), (19), находим

$$A_{u_1} = \varphi_1 \rho_{11} u_1 + \rho_{11} \varphi_2 + \rho_{11} (\gamma - 1) (\rho_{11} e_1 \varphi_{1u_2} + \varphi_{3u_2}) / \rho_{22}^0, \quad \varphi_{1u_2} = 0. \quad (20)$$

Интегрируя (20) по u_1 имеем

$$A = \rho_{11} u_1^2 \varphi_1 / 2 + (\gamma - 1) \rho_{11} u_1 \varphi_{3u_2} / \rho_{22}^0 + \rho_{11} u_1 \varphi_2 + \\ + A_1(S, v_1, w_1, \rho_{11}, e_1, \vec{u}_2, m_2, e_2).$$

Подставляя это соотношение в (7), получим уравнение относительно A_1 в виде

$$-\rho_{11} A_{1\rho_{11}} + A_1 - (\gamma - 1) e_1 A_{1e_1} + p \varphi_1 + (\gamma - 1) \varphi_3 = 0,$$

интеграл которого известен [30], и представим в форме

$$A_1 = \rho_{11} e_1 \varphi_1 - (\gamma - 1) \varphi_3 + \rho_{11} \xi(S, v_1, w_1, L, \vec{u}_2, m_2, e_2),$$

где $L = \rho_{11} e_1^{-1/(\gamma-1)}$, следовательно, $A = (\rho_{11} u_1^2 / 2 + \rho_{11} e_1) \varphi_1 + \rho_{11} u_1 \varphi_2 + (\gamma - 1) \rho_{11} u_1 \varphi_{3u_2} / \rho_{22}^0 - (\gamma - 1) \varphi_3 + \rho_{11} \xi$. Подставляя

значения A и δ в (14) и приравнивая коэффициенты при линейно независимых комбинациях величин ρ_{11} , u_1 , e_1 , имеем

$$\begin{aligned} \rho_{22}^0 \varphi_{2u_2} + (\gamma - 1) \varphi_{3u_2 u_2} &= 0, \quad \xi_{u_2} = 0, \\ -u_2 \varphi_{2u_2} + m_2 \varphi_{2m_2} &= 0, \quad \varphi_{2u_2} + m_2 \varphi_{1m_2} = 0, \\ u_2 \varphi_{3u_2} + \varphi_{4u_2} + m_2 \varphi_{3m_2} &= 0, \quad u_2^2 \varphi_{3u_2} + u_2 \varphi_{4u_2} - m_2 \varphi_{4m_2} = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Интегралами третьего — шестого уравнений системы (21) соответственно будут

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= -\varphi_5(S, v_2, w_2, e_2) m_2 u_2 + \varphi_8(S, v_2, w_2, e_2), \\ \varphi_1 &= \varphi_5(S, v_2, w_2, e_2) m_2 + \varphi_6(S, v_2, w_2, e_2), \\ \varphi_4 &= -u_2 \varphi_3 + \varphi_9(S, \vec{u}_2, e_2), \end{aligned} \quad (22)$$

$$\varphi_3 = m_2 \varphi_{10}(S, \vec{u}_2, e_2) + \varphi_{11}(S, \vec{u}_2, e_2), \quad \varphi_9 u_2 - \varphi_{11} = 0.$$

Подставляя (22) в первое уравнение системы (21), находим

$$\begin{aligned} \varphi_{10} &= \rho_{22}^0 u_2^2 \varphi_5 / (2(\gamma - 1)) + u_2 \varphi_{12}(S, v_2, w_2, e_2) + \varphi_{13}(S, v_2, w_2, e_2), \\ \varphi_{11} &= u_2 \varphi_{14}(S, v_2, w_2, e_2) + \varphi_{15}(S, v_2, w_2, e_2), \\ \varphi_9 &= u_2^2 \varphi_{14} / 2 + u_2 \varphi_{15} + \varphi_{16}(S, v_2, w_2, e_2), \end{aligned}$$

что позволяет выразить φ_3 и φ_4 в форме

$$\begin{aligned} \varphi_3 &= \rho_2 u_2^2 \varphi_5 / (2(\gamma - 1)) + m_2 u_2 \varphi_{12} + m_2 \varphi_{13} + u_2 \varphi_{14} + \varphi_{15}, \\ \varphi_4 &= -\rho_2 u_2^3 \varphi_5 / (2(\gamma - 1)) - m_2 u_2^2 \varphi_{12} - m_2 u_2 \varphi_{13} - u_2^2 \varphi_{14} / 2 + \varphi_{16}, \\ \xi &= \xi(S, v_1, w_1, L, v_2, w_2, m_2, e_2). \end{aligned}$$

Исключая из (7) — (11) значения δ , A с учетом (12) и найденных зависимостей, а затем приравнивая к нулю коэффициенты при линейно независимых комбинациях величин ρ_{11} , e_1 , u_1 , u_2 , получим

$$\varphi_5 + \varphi_6 = 0, \quad \rho_{22}^0 \varphi_8 + (\gamma - 1)(\varphi_{12} + \varphi_{14}) = 0, \quad m_1 \xi_{m_2} + \xi = 0. \quad (23)$$

Из последнего уравнения (23) следует, что $\xi = m_1 \xi_1(S, v_1, w_1, L, v_2, w_2, e_2)$. Дифференцируя (6) последовательно по v_2 , w_2 , e_2 с учетом выражений для φ_1 , φ_2 , φ_3 , φ_4 и (23), будем иметь, что φ_5 , φ_6 , φ_8 , φ_{12} , φ_{14} , φ_{15} , φ_{16} зависят только от S ; ξ_1 — от v_1 , w_1 , L , S ; φ_{13} — от S , v_1 , w_1 , e_1 , т. е.

$$\begin{aligned} \varphi_6 &= -\varphi_5 = \psi_1(S), \quad \varphi_{12} = -\rho_{22}^0 \psi_2(S) / (\gamma - 1), \quad \varphi_{14} = -\psi_3(S) / (\gamma - 1), \\ \varphi_8 &= \psi_2 + \psi_3 / \rho_{22}^0, \quad \varphi_{15} = \psi_6(S), \quad \varphi_{16} = \psi_7(S), \\ \varphi_{13} &= \psi_4(S, v_2, w_2, e_2), \quad \xi_1 = \psi_5(S, v_1, w_1, L). \end{aligned}$$

Используя эти соотношения, преобразуем тождества для φ_1 , φ_2 ,

$\varphi_3, \varphi_4, A, B$ к виду

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= m_1 \psi_1(S), \quad \varphi_2 = m_2 u_2 \psi_1 + \psi_2(S) + \psi_3(S)/\rho_{22}^0, \\
\varphi_3 &= -\rho_2 u_2^2 \psi_1/(2(\gamma - 1)) - \rho_2 u_2 \psi_2/(\gamma - 1) - \\
&- u_2 \psi_3/(\gamma - 1) - m_2 \psi_4(S, u_2, w_2, e_2)/(\gamma - 1) + \psi_6(S), \\
\varphi_4 &= \rho_2 u_2^3 \psi_1/(2(\gamma - 1)) + \rho_2 u_2^2 \psi_2/(\gamma - 1) + \\
&+ m_2 u_2 \psi_4/(\gamma - 1) + u_2^2 \psi_3/(2(\gamma - 1)) + \psi_7(S), \\
A &= [\rho_1(e_1 + u_1^2/2) + \rho_2 u_2^2/2] \psi_1 + (\rho_1 u_1 + \rho_2 u_2) \psi_2 + \\
&+ u_2 \psi_3 + m_2 \psi_4 + \rho_1 \psi_5(S, v_1, w_1, L) + (\gamma - 1) \psi_6, \\
B &= [\rho_1 u_1(\gamma e_1 + u_1^2/2) + m_2 u_2(p + \rho_{22}^0 u_2^2/2)] \psi_1 + \\
&+ (\rho_1 u_1^2 + p + \rho_2 u_2^2) \psi_2 + m_2 u_2 \psi_4 + (u_2^2/2 + p/\rho_{22}^0) \psi_3 + \rho_1 u_1 \psi_5 + (\gamma - 1) \psi_7.
\end{aligned} \tag{24}$$

Учитывая сделанное замечание относительно структуры образования системы уравнений (5), находим

$$\begin{aligned}
A &= \alpha_1(S) [\rho_1(e_1 + v_1^2/2) + \rho_2 v_2^2/2] + \alpha_2(S) (\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2) + \\
&+ v_2 \alpha_3(S) + m_2 \alpha_4(S, u_2, w_2, e_2) + \rho_1 \alpha_5(S, u_1, w_1, L) - (\gamma - 1) \alpha_6(S), \\
C &= \alpha_1 [\rho_1 v_1(\gamma e_1 + v_1^2/2) + m_2 v_2(p + \rho_{22}^0 v_2^2/2)] + \\
&+ \alpha_2 (\rho_1 v_1^2 + p + \rho_2 v_2^2) + (p/\rho_{22}^0 + v_2^2/2) \alpha_3 + \\
&+ \alpha_4 m_2 v_2 + \alpha_5 \rho_1 v_1 + (\gamma - 1) \alpha_7(S);
\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
A &= \beta_1(S) [\rho_1(e_1 + w_1^2/2) + \rho_2 w_2^2/2] + \beta_2(S) (\rho_1 w_1 + \rho_2 w_2) + \\
&+ \beta_3(S) w_2 + m_2 \beta_4(S, u_2, v_2, e_2) + \rho_1 \beta_5(S, v_1, u_1, L) - (\gamma - 1) \beta_6(S), \\
D &= \beta_1 [\rho_1 w_1(\gamma e_1 + w_1^2/2) + m_2 w_2(p + \rho_{22}^0 w_2^2/2)] + \\
&+ \beta_2 (\rho_1 w_1^2 + p + \rho_2 w_2^2) + (p/\rho_{22}^0 + w_2^2/2) \beta_3 + m_2 w_2 \beta_4 + \\
&+ \rho_1 w_1 \beta_5 + (\gamma - 1) \beta_7(S).
\end{aligned} \tag{26}$$

Сравнивая правые части соотношения (25) и (26), имеем

$$\begin{aligned}
A &= \psi_1 [\rho_1(e_1 + U_1^2/2) + \rho_2 U_2^2/2] + \psi_2 (\rho_1 u_1 + \rho_2 u_2) + \\
&+ \alpha (\rho_2 v_2 + \rho_1 v_1) + \beta_2 (\rho_2 w_2 + \rho_1 w_1) + m_2 \eta(S, e_2) - \\
&- (\gamma - 1) \psi_4 + \rho_1 \Lambda(S, L), \\
B &= \psi_1 [\rho_1 u_1(\gamma e_1 + U_1^2/2) + m_2 u_2 p + \rho_2 u_2 U_2^2/2] + \\
&+ \psi_2 (\rho_1 u_1^2 + p + \rho_2 u_2^2) + \alpha_2 (\rho_1 u_1 v_1 + \rho_2 u_2 v_2) + \\
&+ \beta_2 (\rho_1 u_1 w_1 + \rho_2 u_2 w_2) + \eta m_2 u_2 + \rho_1 u_1 \Lambda + (\gamma - 1) \psi_7, \\
C &= \psi_1 [\rho_1 v_1(\gamma e_1 + U_1^2/2) + m_2 v_2 p + \rho_2 v_2 U_2^2/2] + \\
&+ \psi_2 (\rho_1 u_1 v_1 + \rho_2 u_2 v_2) + \alpha_2 (\rho_1 v_1^2 + p + \rho_2 v_2^2) + \\
&+ \beta_2 (\rho_1 v_1 w_1 + \rho_2 v_2 w_2) + \eta m_2 v_2 + \rho_1 v_1 \Lambda + (\gamma - 1) \alpha_7,
\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
D = & \psi_1 [\rho_1 w_1 (\gamma e_1 + U_1^2/2) + m_2 w_2 p + \rho_2 w_2 U_2^2/2] + \\
& + \psi_2 (\rho_1 u_1 w_1 + \rho_2 u_2 w_2) + \alpha_2 (\rho_1 v_1 w_1 + \rho_2 v_2 w_2) + \\
& + \beta (\rho_1 w_1^2 + p + \rho_2 w_2^2) + \eta m_2 w_2 + \rho_1 w_1 \Lambda + (\gamma - 1) \beta_7, \\
E = & A_t + B_x + C_y + D_z + (A_{v_1}/\rho_1 - A_{u_2}/\rho_2) F_{11} + (A_{v_1}/\rho_1 - A_{v_2}/\rho_2) F_{21} + \\
& + (A_{w_1}/\rho_1 - A_{w_2}/\rho_2) F_{31} + A_{e_1} Q_1/\rho_1 + A_{e_2} Q_2/\rho_2, \quad U_i^2 = u_i^2 + v_i^2 + w_i^2.
\end{aligned}$$

Формулы (27) дают полный набор законов сохранения системы (4).

Т е о р е м а 1. Система (4) не консервативна.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (27) для любого закона сохранения (2) системы (4) $A = A(A_i, S)$, $i = 1, \dots, 8$, где $A_1 = \rho_1(e_1 + U_1^2/2) + \rho_2 U_2^2/2$, $A_2 = \rho_1 u_1 + \rho_2 u_2$, $A_3 = \rho_1 v_1 + \rho_2 v_2$, $A_4 = \rho_1 w_1 + \rho_2 w_2$, $A_5 = m_2$, $A_6 = m_2 e_2$, $A_7 = \rho_1$, $A_8 = \rho_1 L$, и поэтому систему (4) нельзя записать в виде десяти законов сохранения, удовлетворяющих (3). Следовательно, система (4) не консервативна.

В случае зависимости искоемых функций от меньшего числа независимых переменных определение полной системы законов сохранения должно проводиться заново. Так, для системы одномерных нестационарных уравнений, которые получаются как частный случай из (4), полная форма законов сохранения

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial x} = E$$

имеет вид

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \{ \chi_1 [\rho_1 (e_1 + u_1^2/2) + \rho_2 u_2^2/2] + \chi_2 (\rho_1 u_1 + \rho_2 u_2) + u_2 \chi_3 + m_2 \chi_4 + \rho_1 \chi_5 \} + \\
& + \frac{\partial}{\partial x} \{ \chi_1 [\rho_1 u_1 (e_1 + u_1^2/2) + \rho_2 u_2^3/2 + p (m_1 u_1 + m_2 u_2)] + \\
& + \chi_2 (\rho_1 u_1^2 + p + \rho_2 u_2^2) + \chi_3 (u_2^2/2 + p/\rho_{22}^0) + m_2 u_2 \chi_4 + \rho_1 u_1 \chi_5 \} = \\
& = (\chi_{1t} + u_1 \chi_{1x}) \rho_1 (e_1 + u_1^2/2) + (\chi_{2t} + u_1 \chi_{2x}) \rho_1 u_1 + (\chi_{5t} + u_1 \chi_{5x}) \rho_1 + \\
& + (\chi_{1t} + u_2 \chi_{1x}) \rho_2 u_2^2/2 + (\chi_{2t} + u_2 \chi_{2x}) \rho_2 u_2 + \\
& + \chi_{3t} u_2 + \chi_{3x} (u_2^2/2 + p/\rho_{22}^0) + m_2 (\chi_{4t} + u_2 \chi_{4x}) + \\
& + p (m_1 u_1 + m_2 u_2) \chi_{1x} + p \chi_{2x} + (\chi_{4e_2} - \chi_1) [\kappa_2 K (u_2 - u_1)^2 + \\
& + q (T_2 - T_1)] + [\kappa_1 K (u_2 - u_1)^2 - q (T_2 - T_1)] \chi_{5e_1} + K (u_1 - u_2) \chi_3 / \rho_2,
\end{aligned} \tag{28}$$

где $\chi_i = \chi_i(t, x)$, $i = 1, 2, 3$, $\chi_4 = \chi_4(t, x, e_2)$, $\chi_5 = \chi_5(t, x, L)$.

Т е о р е м а 2. Система уравнений (4) в случае одномерных нестационарных течений консервативна.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (28) следует, что если выбрать одну из величин χ_i ($i = 1, \dots, 5$) равной единице либо $\chi_4 = e_2$, а остальные из этого набора положить равными нулю, то получим запись системы в консервативном виде. Условие (3) при этом проверяется непосредственно.

В случае плоскопараллельных нестационарных движений справедлива теорема 1. Доказательство ее аналогично приведенному.

Следствие 1. Нельзя получить на основании системы уравнений (4) замкнутых соотношений на поверхности сильного разрыва для трехмерных и плоскопараллельных нестационарных движений.

Следствие 2. Интегрирование системы уравнений, полученной при доказательстве теоремы 2 на поверхности сильного разрыва для одномерных движений, приводит к соотношениям, предложенным в [7].

Найдем полный набор дивергентных законов сохранения системы (4), предполагая, что K , κ_i , q — постоянные коэффициенты. Положим в (27) $E \equiv 0$, что дает дополнительное соотношение, которому должны удовлетворять произвольные функции, входящие в выражения для A , B , C , D . Приравнявая нулю коэффициенты при линейно независимых комбинациях величин u_1 , v_1 , w_1 , u_2 , v_2 , w_2 , ρ_{11} , m_2 , e_1 , e_2 , находим

$$\begin{aligned} \psi_{1t} = \psi_{1x} = \psi_{1y} = \psi_{1z} = 0, \quad \psi_{2x} = \alpha_{2y} = \beta_{2z} = 0, \quad \psi_{2t} + \Lambda_x = 0, \\ \alpha_{2t} + \Lambda_y = 0, \quad \beta_{2t} + \Lambda_z = 0, \quad \beta_{2x} + \psi_{2z} = 0, \quad \alpha_{2x} + \psi_{2y} = 0, \\ \beta_{2y} + \alpha_{2z} = 0, \quad \Lambda_t = \Lambda_L = 0, \quad -\psi_{4t} + \psi_{7x} + \alpha_{7y} + \beta_{7z} = 0, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\eta_{e_2} - \rho_{22}^0 \psi_1 = 0, \quad \psi_{2t} \rho_{22}^0 + \eta_x = 0, \quad \alpha_{2t} \rho_{22}^0 + \eta_y = 0, \quad \beta_{2t} \rho_{22}^0 + \eta_z = 0.$$

Интегралы первых шестнадцати уравнений системы (29) имеют вид

$$\begin{aligned} \psi_1 = C_1, \quad \psi_2 = C_8 y + C_9 z + C_5 t + C_2, \quad \alpha_2 = C_{10} z - C_8 x + C_6 t + C_3, \\ \beta_2 = C_9 x - C_{10} y + C_7 t + C_4, \quad \Lambda = C_{11} - C_5 x - C_6 y - C_7 z, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\psi_4 = \int (\psi_{7x} + \alpha_{7y} + \beta_{7z}) dt + \lambda(x, y, z),$$

а из последней группы уравнений находим

$$\eta = \rho_{22}^0 C_1 e_2 + C_{12} - \rho_{22}^0 C_5 x - \rho_{22}^0 C_6 y - \rho_{22}^0 C_7 z, \quad (31)$$

где C_i — произвольные постоянные. Подставляя в (2) соотношения (27) и учитывая (30), (31), находим полную форму дивергентных законов сохранения системы уравнений (4), выбирая в которой одну из C_i ($i = 1, \dots, 12$) не равной нулю (при остальных величинах из этого набора равных нулю), имеем 12 линейно независимых дивергентных законов сохранения, которые являются простыми следствиями законов сохранения массы каждой фазы, количества движения и энергии смеси

$$\begin{aligned} A_1 &= \rho_1 (e_1 + U_1^2/2) + \rho_2 (e_2 + U_2^2/2), \\ \vec{B}_1 &= \rho_1 \vec{u}_1 (\gamma e_1 + U_1^2/2) + \rho_2 \vec{u}_2 (e_2 + U_2^2/2) + m_2 p \vec{u}_2, \\ A_2 &= \rho_1 u_1 + \rho_2 u_2, \quad \vec{B}_2 = \rho_1 u_1 \vec{u}_1 + \rho_2 u_2 \vec{u}_2 + p \vec{l}_1, \\ A_3 &= \rho_1 v_1 + \rho_2 v_2, \quad \vec{B}_3 = \rho_1 v_1 \vec{u}_1 + \rho_2 v_2 \vec{u}_2 + p \vec{l}_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_4 &= \rho_1 w_1 + \rho_2 w_2, & \vec{B}_4 &= \rho_1 w_1 \vec{u}_1 + \rho_2 w_2 \vec{u}_2 + p \vec{l}_3, \\
A_5 &= A_2 t - \rho x, & \vec{B}_5 &= \vec{B}_2 t - (\rho_1 \vec{u}_1 + \rho_2 \vec{u}_2) x, \\
A_6 &= A_3 t - \rho y, & \vec{B}_6 &= \vec{B}_3 t - (\rho_1 \vec{u}_1 + \rho_2 \vec{u}_2) y, \\
A_7 &= A_4 t - \rho z, & \vec{B}_7 &= \vec{B} t - (\rho_1 \vec{u}_1 + \rho_2 \vec{u}_2) z, \\
A_8 &= A_2 y - A_3 x, & \vec{B}_8 &= \vec{B}_2 y - \vec{B}_3 x, \\
A_9 &= A_4 x - A_2 z, & \vec{B}_9 &= \vec{B}_4 x - \vec{B}_2 z, \\
A_{10} &= A_3 z - A_4 y, & \vec{B}_{10} &= \vec{B}_3 z - \vec{B}_4 y, \\
A_{11} &= \rho_1, & \vec{B}_{11} &= \rho_1 \vec{u}_1, & A_{12} &= \rho_2, & \vec{B}_{12} &= \rho_2 \vec{u}_2, & \vec{B}_i &= (B_i, C_i, D_i),
\end{aligned}$$

где $\vec{l}_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3})$, δ_{ij} — символ Кронекера, $i, j = 1, 2, 3$. Таким образом, если K, κ_i, q — некоторые положительные постоянные, то система (4) имеет 12 линейно независимых дивергентных законов сохранения: массы каждой фазы (A_{11}, A_{12}), количества движения ($A_2 - A_4$), момента количества движения ($A_8 - A_{10}$), центра масс ($A_5 - A_7$) (терминология работы [34]) и энергии (A_1) смеси.

Как отмечалось в случае зависимости искомых функций от меньшего числа независимых переменных, определение законов сохранения должно проводиться заново. Далее будут приведены все законы сохранения

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = D, \quad (32)$$

выполняющиеся при стационарных движениях смеси газа с твердыми частицами. Детальный вывод стационарных законов сохранения содержится в работе [33]. Полный набор законов сохранения (32) системы уравнений (4) в стационарном случае можно представить в виде

$$\begin{aligned}
A &= (\rho_2 u_2^2 + \rho_1 u_1^2 + p) a_1(\vec{x}) + (\rho_2 u_2 v_2 + \rho_1 u_1 v_1) a_2(\vec{x}) + \\
&+ (\rho_1 u_1 w_1 + \rho_2 u_2 w_2) a_3(\vec{x}) + m_2 u_2 \varphi_2(\beta_2, e_2, \vec{x}) + \\
&+ \rho_1 u_1 \varphi_1(\beta_1, L_1, \vec{x}) + a_4(\vec{x}), \\
B &= (\rho_1 u_1 v_1 + \rho_2 u_2 v_2) a_1 + (\rho_1 v_1^2 + p + \rho_2 v_2^2) a_2 + (\rho_1 v_1 w_1 + \rho_2 v_2 w_2) a_3 + \\
&+ m_2 v_2 \varphi_2 + \rho_1 v_1 \varphi_1 + a_5(\vec{x}), \\
C &= (\rho_1 u_1 w_1 + \rho_2 u_2 w_2) a_1 + (\rho_1 v_1 w_1 + \rho_2 v_2 w_2) a_2 + \\
&+ (\rho_1 w_1^2 + p + \rho_2 w_2^2) a_3 + m_2 w_2 \varphi_2 + \rho_1 w_1 \varphi_1 + a_6(\vec{x}), \\
D &= A_x + B_y + C_z + \varphi_2 \beta_2 K \vec{u}_2 (\vec{u}_1 - \vec{u}_2) + \varphi_1 \beta_1 (K \vec{u}_1 (\vec{u}_2 - \vec{u}_1) + Q_1) + \\
&+ \frac{1}{\rho_{22}^0} \varphi_2 e_2 Q_2 - \varphi_1 L_1 \frac{L_1}{(\gamma - 1) e_1} Q_1.
\end{aligned} \quad (34)$$

Здесь $\beta_1 = \gamma e_1 + \vec{u}_1^2/2$, $\beta_2 = p + \rho_{22}^0 \vec{u}_2^2/2$, $L_1 = \rho_{11} e_1^{-1/(\gamma-1)}$, $\vec{x} = (x, y, z)$, $\varphi_1, \varphi_2, a_i, i = 1, \dots, 6$, — произвольные функции указанных аргументов.

Найдем все дивергентные законы сохранения. Предположим, что K, κ_i, q — положительные постоянные. Подставляя (33) в уравнение (34) и полагая $D \equiv 0$, получим равенство, которому должны удовлетворять функции $a_i, \varphi_1, \varphi_2$. Приравнявая нулю коэффициенты при линейно независимых комбинациях величин $u_i, v_i, w_i, m_2, \rho_{11}, e_i, i = 1, 2$, находим

$$\begin{aligned} a_{4x} + a_{5y} + a_{6z} &= 0, \quad \varphi_{1x} = \varphi_{1y} = \varphi_{1z} = 0, \quad \varphi_{2x} = \varphi_{2y} = \varphi_{2z} = 0, \\ a_{1x} = a_{2y} = a_{3z} &= 0, \quad \varphi_{1L_1} = 0, \quad \varphi_{1\beta_1} = \varphi_{2\beta_2} = \varphi_{2e_1}/\rho_{22}^0, \\ a_{2z} + a_{3y} &= 0, \quad a_{2x} + a_{1y} = 0, \quad a_{1z} + a_{3x} = 0. \end{aligned}$$

Из полученных уравнений следует, что

$$\begin{aligned} a_1 &= C_2 y - C_3 z + C_5, \quad a_2 = C_1 z - C_2 x + C_4, \\ a_3 &= C_3 x - C_1 y + C_6, \quad \varphi_1 = C_1 + \beta_1 C_9, \\ \varphi_2 &= C_8 + C_9 (\rho_{22}^0 e_2 + \beta_2), \quad \text{где } C_i = \text{const.} \end{aligned}$$

Таким образом, если K, κ_i, q — положительные постоянные, то система уравнений (4) в случае стационарных течений имеет следующие линейно независимые дивергентные законы сохранения: массы каждой фазы, количества движения, момента количества движения и полной энергии смеси.

§ 3. ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ГАЗ — ЧАСТИЦЫ

Для постановки и решения начально-краевых задач необходимо знать тип системы, который определяется ее характеристиками. Следуя работе [7], вычислим характеристики системы уравнений (1.4), описывающей течение смеси газ — частицы при малой объемной концентрации частиц. Рассмотрим одномерные нестационарные течения с плоской, цилиндрической и сферической симметрией. В этом случае система уравнений (1.4) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_1 \frac{\partial v_1}{\partial r} + v_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial r} + \frac{v \rho_1 v_1}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \rho_2 \frac{\partial v_2}{\partial r} + v_2 \frac{\partial \rho_2}{\partial r} + \frac{v \rho_2 v_2}{r} &= 0, \\ \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial r} + \frac{1}{\rho_{11}} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\rho_2}{\rho_1} f_{12} &= 0, \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial r} + \frac{1}{\rho_{22}} \frac{\partial p}{\partial r} - f_{12} &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial H_1}{\partial r} - \frac{1}{\rho_{11}} \left(v_1 \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial t} \right) + \dot{Q} = 0,$$

$$\frac{\partial e_2}{\partial t} + v_2 \frac{\partial e_2}{\partial r} - \dot{q}_{12} = 0,$$

где $H_1 = e_1 + p/\rho_{11}$, $\dot{Q} = \frac{\rho_2}{\rho_1} (f_{12} (v_1 - v_2) + \dot{q}_{12})$, $m_1 + m_2 = 1$, $\rho_{22} = \text{const}$, $p = p(\rho_{11}, T_1)$, $\rho_i = \rho_{ii} m_i$, $H_1 = H_1(p, T_1)$, $e_2 = c_2 T_2$, $v = 0, 1, 2$. Обозначения параметров газа и частиц в (1) те же, что и в § 1. Из последних двух уравнений системы (1) следует, что характеристиками являются траектории газа и частиц, вдоль которых выполняются соотношения

$$dr = v_2 dt, \quad dH_1 - \frac{dp}{\rho_{11}} + \dot{Q} dt = 0, \quad (2)$$

$$dr = v_2 dt, \quad de_2 - \dot{q}_{12} dt = 0.$$

Оставшиеся уравнения (1) содержат производные от p , v_1 , v_2 , ρ_1 , ρ_2 . Производные от ρ_1 входят только в первое уравнение, поэтому их можно исключить с помощью замыкающих соотношений, в результате имеем

$$\rho_{11} c_0^2 \frac{\partial v_1}{\partial r} + v_1 \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial t} - v_1 \left(\frac{\rho_{11} c_0^2}{\rho_{22} \rho_1} \right) \frac{\partial \rho_2}{\partial r} - \left(\frac{\rho_{11}^2 c_0^2}{\rho_{22} \rho_1} \right) \frac{\partial \rho_2}{\partial t} -$$

$$- \left(\frac{c_0^2 \rho_{11,T}}{H_{1,T}} \right) \dot{Q} + \frac{v \rho_{11} c_0^2 v_1}{r} = 0,$$

$$\text{где} \quad c_0^{-2} = \rho_{11,p} + \frac{\rho_{11,T}}{H_{1,T}} (1/\rho_{11} - H_{1,p}), \quad \rho_{11,p} = \frac{\partial \rho_{11}}{\partial p}, \quad (3)$$

$$H_{1,p} = \frac{\partial H_1}{\partial p}, \quad \rho_{11,T} = \frac{\partial \rho_{11}}{\partial T_1}, \quad H_{1,T} = \frac{\partial H_1}{\partial T_1}.$$

Добавив к уравнению (3) и оставшимся уравнениям (1) тождества, выполняющиеся на характеристиках

$$\frac{\partial p}{\partial t} dt + \frac{\partial p}{\partial r} dr = dp, \quad \frac{\partial v_2}{\partial t} dt + \frac{\partial v_2}{\partial r} dr = dv_2,$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} dt + \frac{\partial v_1}{\partial r} dr = dv_1, \quad \frac{\partial \rho_2}{\partial t} dt + \frac{\partial \rho_2}{\partial r} dr = d\rho_2,$$

получим систему линейных алгебраических уравнений для определения $\frac{\partial p}{\partial r}$, $\frac{\partial p}{\partial t}$, $\frac{\partial v_1}{\partial r}$, $\frac{\partial v_1}{\partial t}$, $\frac{\partial v_2}{\partial r}$, $\frac{\partial v_2}{\partial t}$, $\frac{\partial \rho_2}{\partial r}$, $\frac{\partial \rho_2}{\partial t}$. Условие неоднозначного решения этой системы приводит к уравнениям

$$\left(v_2 - \frac{dr}{dt} \right)^2 \left(c_0^2 - \left(v_1 - \frac{dr}{dt} \right)^2 \right) - \left(\frac{m_2 \rho_{11} c_0^2}{m_1 \rho_{22}} \right) \left(v_1 - \frac{dr}{dt} \right)^2 = 0,$$

$$\left(v_2 - \frac{dr}{dt} \right)^2 \left\{ \frac{dv_1}{dt} - \frac{\left(v_1 - \frac{dr}{dt} \right)}{\rho_{11} c_0^2} \frac{dp}{dt} + \left(v_1 - \frac{dr}{dt} \right) \left(\frac{\rho_{11,T} \dot{Q}}{\rho_{11} H_{1,T}} - \frac{v v_1}{r} \right) + \right.$$

$$+ \frac{\rho_2}{\rho_1} f_{12} + \frac{m_2}{m_1} \frac{\left(v_1 - \frac{dr}{dt}\right)}{\left(v_2 - \frac{dr}{dt}\right)} \left[\frac{v_1 - \frac{dr}{dt}}{v_2 - \frac{dr}{dt}} \frac{dv_2}{dt} + (v_2 - v_1) \frac{d \ln \rho_2}{dt} - \right. \\ \left. - \frac{v_1 - \frac{dr}{dt}}{v_2 - \frac{dr}{dt}} f_{12} - \left(v_1 - \frac{dr}{dt}\right) \frac{vv_2}{r} \right] = 0. \quad (4)$$

Первое уравнение в (4) определяет характеристики, а второе — изменение параметров вдоль них. Разрешить уравнение характеристик относительно $\frac{dr}{dt}$ в общем виде не удастся, поэтому, раскладывая по малому параметру $\rho_{11}/\rho_{22} \ll 1$, найдем приближенные решения для характеристик

$$\frac{dr}{dt} \Big|_{1,2} = v_1 \pm c_0 \left(1 + \frac{\rho_{11} m_2 c_0^2}{2 \rho_{22} m_1 (v_2 - v_1 \pm c_0)^2} \right) + O((\rho_{11}/\rho_{22})^4), \\ \frac{dr}{dt} \Big|_{3,4} = v_2 \pm \frac{\rho_{11} (v_1 - v_2)}{\rho_{22} (\rho_1/\rho_2 ((v_1 - v_2)^2 - c_0^2))^{1/2}} + O((\rho_{11}/\rho_{22})^2). \quad (5)$$

Отсюда следует, что первые два корня являются действительными, а третий и четвертый действительны только при сверхзвуковом обтекании частиц $|v_1 - v_2| > c_0$. Таким образом, в общем случае система уравнений (1) будет составного типа, а при условии $|v_1 - v_2| > c_0$ — строго гиперболического. Из второго уравнения (4) следует, что вдоль действительных характеристик с точностью $O(\rho_{11}/\rho_{22})$ справедливы соотношения

$$\frac{dv_1}{dt} \pm \frac{1}{\rho_{11} c_0} \frac{dp}{dt} \mp \left(\frac{\rho_{11, T} \dot{Q}}{\rho_{11} H_{1, T}} - \frac{vv_1}{r} \right) + \frac{\rho_2}{\rho_1} f_{12} + \\ + \frac{m_2}{m_1} \frac{c_0}{(v_2 - v_1 \mp c_0)^2} \left(c_0 \frac{dv_2}{dt} \mp (v_2 - v_1) (v_2 - v_1 \mp c_0) \frac{d \ln \rho_2}{dt} - \right. \\ \left. - c_0 f_{12} - c_0 (v_2 - v_1 \mp c_0) \frac{vv_2}{t} \right) = 0.$$

Рассмотрим другой класс течений смеси газ — частицы, где параметры течения зависят только от двух пространственных переменных. К таким течениям относятся плоские и осесимметричные стационарные течения. В этом случае система уравнений (1.4) в проекциях на оси x и y декартовой системы координат имеет вид

$$\rho_1 \frac{\partial v_{1x}}{\partial x} + \rho_1 \frac{\partial v_{1y}}{\partial y} + v_{1x} \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + v_{1y} \frac{\partial \rho_1}{\partial y} + \frac{v \rho_1 v_{1y}}{y} = 0, \\ \rho_2 \frac{\partial v_{2x}}{\partial x} + \rho_2 \frac{\partial v_{2y}}{\partial y} + v_{2x} \frac{\partial \rho_2}{\partial x} + v_{2y} \frac{\partial \rho_2}{\partial y} + \frac{v \rho_2 v_{2y}}{y} = 0, \\ v_{1x} \frac{\partial v_{1x}}{\partial x} + v_{1y} \frac{\partial v_{1x}}{\partial y} + \frac{1}{\rho_{11}} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\rho_2}{\rho_1} f_{12x} = 0,$$

$$\begin{aligned}
v_{1x} \frac{\partial v_{1y}}{\partial x} + v_{1y} \frac{\partial v_{1y}}{\partial y} + \frac{1}{\rho_{11}} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\rho_2}{\rho_1} f_{12y} &= 0, \\
v_{2x} \frac{\partial v_{2x}}{\partial x} + v_{2y} \frac{\partial v_{2x}}{\partial y} + \frac{1}{\rho_{22}} \frac{\partial p}{\partial x} - f_{12x} &= 0, \\
v_{2x} \frac{\partial v_{2y}}{\partial x} + v_{2y} \frac{\partial v_{2y}}{\partial y} + \frac{1}{\rho_{22}} \frac{\partial p}{\partial y} - f_{12y} &= 0, \\
v_{1x} \frac{\partial H_1}{\partial x} + v_{1y} \frac{\partial H_1}{\partial y} - \frac{v_{1x}}{\rho_{11}} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{v_{1y}}{\rho_{11}} \frac{\partial p}{\partial y} + \dot{Q} &= 0, \\
v_{2x} \frac{\partial e_2}{\partial x} + v_{2y} \frac{\partial e_2}{\partial y} - \dot{q}_{12} &= 0,
\end{aligned} \tag{6}$$

где проекции сил и скоростей обозначены соответствующими индексами снизу, а параметр $\nu = 0, 1$. Замыкание (6) осуществляется аналогично замыканию системы (1). Определим тип системы уравнений (6), для этого найдем ее характеристики. Из последних двух уравнений системы (6) получим

$$\begin{aligned}
A_1 = v_{1x} dy - v_{1y} dx &= 0, \quad v_{1x} \frac{dH_1}{dx} - \frac{v_{1x}}{\rho_{11}} \frac{dp}{dx} + \dot{Q} = 0, \\
v_{1x} \frac{d(H_1 + v_1^2/2)}{dx} + (\vec{f}_{12} \vec{v}_2 + \dot{q}_{12}) \frac{\rho_2}{\rho_1} &= 0, \\
B_2 = v_{2x} dy - v_{2y} dx &= 0, \quad v_{2x} \frac{de_2}{dx} - \dot{q}_{12} = 0, \\
v_{2x} d(v_2^2/2 + p/\rho_{22})/dx - \vec{f}_{12} \vec{v}_2 &= 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

Следовательно, данные характеристики совпадают с линиями тока газа и частиц. В дальнейшем, как и для системы (1), исключим производные от ρ_1 . В результате вместо первого уравнения в системе (6) имеем

$$\begin{aligned}
(c_0^2 - v_{1x}^2) \frac{dv_{1x}}{dx} - v_{1x} v_{1y} \frac{\partial v_{1x}}{\partial y} - v_{1x} v_{1y} \frac{\partial v_{1y}}{\partial x} + (c_0^2 - v_{1y}^2) \frac{\partial v_{1y}}{\partial y} - \\
- \left(\frac{c_0^2 v_{1x}}{\rho_{22} m_1} \right) \frac{\partial \rho_2}{\partial x} - \left(\frac{c_0^2 v_{1y}}{\rho_{22} m_1} \right) \frac{\partial \rho_2}{\partial y} + \frac{\nu c_0^2 v_{1y}}{y} - K_1 &= 0, \\
K_1 = \frac{\rho_2}{\rho_1} \vec{f}_{12} \vec{v}_1 - \frac{\rho_{11,T} c_0^2}{\rho_{11} H_{1,T}} \dot{Q}.
\end{aligned}$$

К приведенному и оставшимся уравнениям системы (6) добавим соотношения на характеристиках $\frac{\partial \vec{z}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{z}}{\partial y} dy = d\vec{z}$, где $\vec{z}$ — вектор с компонентами $p, v_{1x}, v_{1y}, v_{2x}, v_{2y}, \rho_2$, которые образуют систему алгебраических уравнений для определения искомых производных. Выписывая условия неоднозначности определения

искомых производных, находим уравнение характеристик

$$B_2^2 \left(c_0^2 \left(1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right) - A_1^2 \right) + \left(\frac{m_2 \rho_{11}}{m_1 \rho_{22}} \right) c_0^2 \left(1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right) A_1^2 = 0.$$

Данное соотношение является уравнением четвертой степени относительно $\frac{dy}{dx}$. Для получения аналитического выражения корней этого уравнения воспользуемся разложением по степеням малого параметра ρ_{11}/ρ_{22} . Такое разложение позволяет найти

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{1,2} = \frac{dy_0}{dx} \Big|_{1,2} \pm \frac{m_2 \rho_{11} \left(v_{1y} - v_{1x} \frac{dy_0}{dx} \Big|_{1,2} \right)^4}{m_1 \rho_{22} c_0 \sqrt{v_1^2 - c_0^2} \left(v_{2y} - v_{2x} \frac{dy_0}{dx} \Big|_{1,2} \right)^2} + O((\rho_{11}/\rho_{22})^4), \quad (8)$$

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{3,4} = \frac{v_{2y}}{v_{2x}} \pm \frac{\rho_{11} c_0 |\vec{v}_2|^2 \sin \delta}{\rho_{22} v_{2x}^2} \left/ \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} (v_1^2 \sin^2 \delta - c_0^2) \right)^{1/2} \right. + O((\rho_{11}/\rho_{22})^2),$$

$$\frac{dy_0}{dx} \Big|_{1,2} = \frac{v_{1x} v_{1y} \pm c_0 \sqrt{v_1^2 - c_0^2}}{v_1^2 - c_0^2}.$$

Как следует из (8), корни $\frac{dy}{dx} \Big|_{1,2}$ действительны при $|v_1| > c_0$ и мнимы при $|v_1| < c_0$. В этом случае они соответствуют характеристикам первого и второго семейства для обычной газовой динамики. Корни $\frac{dy}{dx} \Big|_{3,4}$ будут уже действительны при выполнении условия $|\vec{v}_1| \sin \delta > c_0$. Таким образом, здесь, так же как и для нестационарных течений, система уравнений (6) составного типа и только при выполнении указанных выше условий гиперболична.

Найденные границы области гиперболичности (8) не являются строгими, а выполняются согласно точности разложения. В частности, при $|v_1| \approx c_0$ указанные разложения несправедливы. Для уточнения этой границы необходимо проводить разложение по другому малому параметру. Так, разложение по $\Delta = v_2/\sin \delta$, проведенное в работе [7], позволило установить наличие двух семейств характеристик, расположенных не симметрично относительно линий тока газа, а повернутых в сторону линий тока частиц.

§ 4. СООТНОШЕНИЯ НА ТОНКИХ РАЗРЫВАХ

Система уравнений многофазных смесей (1.2) получена из интегральных законов сохранения (1.1) в предположении о непрерывности средних параметров течения. Характерный размер изменения параметров v_i , ρ_i , e_i и т. д. в уравнениях (1.2) существенно превышает характерный размер неоднородности в систе-

ме. В некоторых областях, которые мы будем называть переходными, это условие не выполняется, поэтому данные области заменяются поверхностями разрыва, на которых справедливы интегральные законы сохранения (1.1). Соотношения на поверхностях разрыва для двухфазной среды газ — частицы впервые были получены в работе [7], где предполагалось, что масса частиц на разрыве равна нулю: $M = 0$. Разрывы с конечной поверхностной массой применительно к пеленам изучались в [24, 25]. Здесь рассмотрен общий случай разрыва с конечной поверхностной массой в двухфазной среде газ — частицы (комбинированный разрыв). Выберем систему координат, совпадающую в данный момент времени со скоростью движения поверхности разрыва и расположенную так, что одна из ее осей была нормальной к поверхности разрыва. Рассмотрим двухфазное течение смеси газ — частицы с замыкающими соотношениями (1.3). Так как малый элемент разрыва можно считать плоским, то из интегральных законов сохранения (1.1) можно получить

$$\begin{aligned} [\rho_1 u_1] &= 0, \quad [j_1 u_1 + p_1 m_1] = F^\sigma, \quad j_1 [H_1 + u_1^2/2] = Q^\sigma, \quad j_1 = \rho_1 u_1, \\ \frac{dM}{dt} + [\rho_2 u_2] &= 0, \quad \frac{d}{dt} (MD) + [j_2 u_2 + p_1 m_2 + p_2] = -F^\sigma, \quad j_2 = \rho_2 u_2, \\ \frac{d}{dt} (M(E_2 + D^2/2)) + [j_2 (H_2 + u_2^2/2)] &= -Q^\sigma, \quad E_2 = e_2 + \mathcal{E}_2, \\ u_i &= v_{in} - D, \end{aligned} \quad (1)$$

$$j_1 [v_{1\tau}] = 0, \quad j_2 [v_{2\tau}] = 0, \quad M = \rho_{22} m_2^\sigma h,$$

$$H_1 = e_1 + p_1/\rho_{11}, \quad H_2 = e_2 + p_1/\rho_{22} + \mathcal{E}_2 + p_2/\rho_2, \quad p_1 = p_1(\rho_{11}, T_1),$$

$$p_2 = p_2(\rho_2, \mathcal{E}_2), \quad e_2 = e_2(T_2), \quad \rho_{22} = \text{const}, \quad [\varphi] = \varphi^+ - \varphi^-,$$

где D — нормальная скорость движения разрыва; индексы n, τ относятся к нормальной и касательным составляющим скорости; p_1 — давление в газе; p_2 — давление в псевдогазе частиц, связанное с энергией хаотического движения частиц $\mathcal{E}_2$; F^σ, Q^σ — поверхностная сила и энергия, которые будут определены далее; M — масса разрыва; h — ширина переходной области; m_2^σ средняя объемная концентрация частиц в переходной области; остальные обозначения те же, что и в § 1.

В зависимости от природы переходной области величина h может быть порядка длины свободного пробега молекул в газе λ_* либо порядка диаметра частицы d . В первом случае $M \rightarrow 0$, а во втором масса разрыва конечна и определяется по соответствующей формуле из (1), где $h \simeq d$. На основе системы уравнений (1) проведем классификацию возможных разрывов.

Первый случай: $j_1 = 0, j_2 = 0, \frac{dM}{dt} = 0, \frac{dD}{dt} = 0$ — стационарный тангенциальный разрыв по газу и частицам. Из анализа соотношений (1) следует: $p^\sigma = p_1, F^\sigma = p_1 [m_1], Q^\sigma = 0, u_1 = 0, u_2 = 0$,

$[p_1] = 0$, $[p_2] = 0$, а значения $[v_{1\tau}]$, $[v_{2\tau}]$, $[e_1]$, $[e_2]$, $[\mathcal{E}_2]$ произвольны. Таким образом, газ и частицы движутся вдоль поверхности тангенциального разрыва, который является общим для обеих фаз.

Второй случай: $j_1 = 0$, $j_2 \neq 0$, $h \simeq \lambda_*$, $M = 0$ — тангенциальный разрыв в газе, а поток частиц пересекает этот разрыв. Из уравнений (1) следует справедливость следующих равенств: $u_1 = 0$, $[p_1] = 0$, $F^\sigma = 0$, $Q^\sigma = 0$, $[u_2] = 0$, $[p_2] = 0$, $[\mathcal{E}_2] = 0$, $[e_2] = 0$, $[\rho_2] = 0$, $[v_{2\tau}] = 0$, а значения $[e_1]$ и $[v_{1\tau}]$ произвольны. Из уравнений (1.4), (1.7), справедливых в силу непрерывности для частиц, этот разрыв будет слабым (испытывают скачок $\frac{\partial \varphi_2}{\partial n}$).

Третий случай: $j_1 \neq 0$, $j_2 \neq 0$, $h \simeq \lambda_*$, $M = 0$ — ударная волна, распространяющаяся по газу. Если плотность газа существенно меньше плотности частиц $\rho_{11}/\rho_{22} \ll 1$, $m_2 \ll 1$, то, как показано в [3, 5], можно пренебречь изменением температуры и скорости частиц: $[e_2] = 0$, $[u_2] = 0$, $[\mathcal{E}_2] = 0$, $[p_2] = 0$, $[\rho_2] = 0$, $[v_{2\tau}] = 0$, $Q^\sigma = 0$, $F^\sigma = 0$. Как следует из (1), для газа будут справедливы соотношения

$$[v_{1\tau}] = 0, [\rho_{11}u_1] = 0, [\rho_{11}u_1^2 + p_1] = 0, [H_1 + u_1^2/2] = 0,$$

которые совпадают с соотношениями на ударной волне в «чистом» газе. За фронтом ударной волны будет происходить процесс выравнивания скоростей и температур обеих фаз. Эта область называется зоной релаксации, и в ней справедливы уравнения (1.4), (1.7).

Четвертый случай: $j_1 \neq 0$, $j_2 \neq 0$, $p_2 = 0$, $h \simeq d$, $M \neq 0$ — нестационарный комбинированный разрыв. В этом случае на разрыве справедлива система уравнений

$$[\rho_1 u_1] = 0, [j_1 u_1 + p_1 m_1] = F^\sigma, j_1 [H_1 + u_1^2/2] = Q^\sigma,$$

$$\frac{dM}{dt} + [\rho_2 u_2] = 0, \frac{d}{dt} (MD) + [j_2 u_2 + p_1 m_2] = -F^\sigma,$$

$$\frac{d}{dt} (M(e_2 + D^2/2)) + j_2 [\bar{H}_2 + u_2^2/2] = -Q^\sigma, \bar{H}_2 = e_2 + p_1/\rho_{22},$$

$$[v_{1\tau}] = 0, [v_{2\tau}] = 0.$$

Отсюда следует, что нестационарные эффекты и поток частиц на поверхность ($dM/dt \neq 0$, $dD/dt \neq 0$, $j_2 \neq 0$) возникают под действием силы $f^\sigma = F^\sigma + [p_1 m_2]$. Замыкающие соотношения для F^σ и Q^σ получены в работе [35, 36] и приведены в гл. 4. Если в задаче структура переходной области не существенна, то для F^σ и Q^σ можно воспользоваться приближенными формулами $F^\sigma = p^\sigma [m_1]$, Q^σ , где p^σ выбирается в зависимости от режима течения на разрыве. Соотношения на комбинированном разрыве подробно проанализированы в гл. 4, где показано, что разрыв является стационарным только при дозвуковом вытекании из области больших m_2 ($M_{12} < 1$, $[m_2] < 0$). В остальных случаях он расплывается либо происходит уплотнение частиц до плотной

упаковки. Отметим, что описанная в § 1 пелена (уравнения (1.9)) представляет собой два комбинированных разрыва, имеющих место при втекании и вытекании газа из области с плотной упаковкой частиц.

Пятый случай: $j_1 \neq 0$, $j_2 = 0$, $p_2 \neq 0$, $h \simeq d$, $M \neq 0$, $\frac{dM}{dt} = 0$, $\frac{dD}{dt} = 0$ — стационарный комбинированный разрыв, контактный по псевдогазу частиц. Соотношения на разрыве легко получаются из системы уравнений (1)

$$\begin{aligned} [\rho_1 u_1] &= 0, \quad [j_1 u_1 + p_1 m_1] = F^\sigma, \quad [H_1 + u_1^2/2] = 0, \\ u_2 &= 0, \quad [p_1 m_2 + p_2] = -F^\sigma, \quad F^\sigma = p^\sigma [m_1], \quad Q^\sigma = 0, \\ [v_{1\tau}] &= 0, \text{ а } [v_{2\tau}], [H_2] \text{ произвольны.} \end{aligned}$$

Шестой случай: $j_1 \neq 0$, $j_2 \neq 0$, $h \simeq d$, $M \neq 0$, $p_2 \neq 0$ — комбинированный разрыв типа ударной волны в псевдогазе частиц. В силу того, что характерное время Δt изменения средних параметров M , D удовлетворяет, как правило, неравенству $\Delta t \gg d/D$, будут справедливы следующие оценки:

$$M \left(\frac{dD}{dt} \right) / [p_2] \sim \left(\frac{dM}{dt} \right) / [\rho_2 u_2] \sim d/(D\Delta t) \ll 1.$$

Поэтому в системе (1) можно пренебречь нестационарными слагаемыми, в результате чего соотношения на разрыве запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} [\rho_1 u_1] &= 0, \quad [j_1 u_1 + p_1 m_1] = F^\sigma, \quad j_1 [H_1 + u_1^2/2] = Q^\sigma, \\ [\rho_2 u_2] &= 0, \quad [j_2 u_2 + p_1 m_2 + p_2] = -F^\sigma, \quad j_2 [H_2 + u_2^2/2] = -Q^\sigma, \\ [e_2] &= 0, \quad [v_{1\tau}] = 0, \quad [v_{2\tau}] = 0, \end{aligned}$$

где F^σ , Q^σ определяются так же, как в четвертом случае. Отсюда следует, что ударная волна в псевдогазе частиц является для газа комбинированным разрывом. Пример такого разрыва рассмотрен в работе [45], где изучалось вскипание псевдоожиженного слоя частиц под действием ударной волны в псевдогазе частиц.

ГЛАВА 2

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ГАЗОВЫХ СМЕСЕЙ С СИЛЬНО РАЗЛИЧАЮЩИМИСЯ МАССАМИ МОЛЕКУЛ

Течения смеси газов с сильно различающимися массами молекул при резких ускорениях или торможениях потока и больших градиентах гидродинамических величин не могут быть описаны в рамках обычных, т. е. односкоростных и однотемператур-

ных, уравнений Навье — Стокса. (Под уравнениями Навье — Стокса подразумевается система уравнений, включающая собственно уравнения Навье — Стокса, т. е. уравнения непрерывности и импульса, и уравнение энергии; аналогично относительно уравнений Эйлера, Барнетта.) Примерами таких течений являются ударная волна, распространение высокочастотного звука, сверхзвуковое течение в сопле, струя и др. В них из-за большей инертности тяжелых молекул возникает скоростное «скольжение» между компонентами смеси, а в силу затрудненности обмена энергией между молекулами с большой разницей в массах внутри каждого компонента устанавливается своя температура. Когда, например, сверхзвуковой поток смеси проходит через ударный слой, легкий газ испытывает резкое торможение и нагревается, в то время как торможение и нагревание тяжелого газа происходят более плавно. В результате внутри волны возникает разделение компонентов по скоростям и температурам, которые затем релаксируют к общим для смеси скорости и температуре, определяемым соотношениями Рэнкина — Гюгонно. Возникающие разность гидродинамических скоростей компонентов смеси и разность их температур часто сравнимы по величине с самими скоростями и температурами. В то же время известно, что уравнения Навье — Стокса в смесях получены из уравнений Больцмана при условии, что разность скоростей компонентов (диффузионная скорость) мала и $\sim Kn a$ ($Kn \ll 1$ — число Кнудсена, a — скорость звука), а температуры компонентов вообще равны. Поэтому эти уравнения не могут дать корректное описание указанных выше течений. В таких случаях необходимо привлечь уравнения многоскоростной многотемпературной газодинамики смесей газов ^{*}), в которой каждый компонент смеси (или группа компонентов) характеризуется собственными гидродинамической скоростью и температурой.

В других случаях скоростные и температурные неравновесности между компонентами смеси создаются граничными условиями, геометрией задачи. Например, задачи о течении смеси в области смешения при столкновении двух струй различных газов, при проникновении струи в газовую среду.

Отметим еще один аспект введения парциальных температур и скоростей. При наличии диффузии описание смеси одной температурой означает, что в определение температуры включается наряду с энергией хаотического движения молекул кинетическая энергия их направленного (диффузионного) движения $\rho_i V_i^2/2$ (ρ_i , V_i — плотность и диффузионная скорость i -го компонента). Парциальные температуры T_i свободны от $\rho_i V_i^2/2$ и более соответствуют определению температуры как меры хаотического движения молекул. При малых диффузионных скоростях разница между парциальными температурами мала ($\sim Kn^2$) и лежит вне

^{*}) Употребляют также термин «многожидкостная» гидродинамика.

навье-стоксовского приближения. Однако при значительных диффузионной скорости и тепловом потоке (когда их отношения соответственно к гидродинамической скорости и конвективному потоку тепла являются конечными величинами) необходимо вводить парциальные скорости и температуры. О трудностях, возникающих в односкоростной однотемпературной гидродинамике при попытках отделить кинетическую энергию диффузионных движений из внутренней энергии многокомпонентной смеси, см. в [1] (гл. III, § 2).

Многоскоростная многотемпературная теория смесей газов была развита в работах [2—11]. В [2] получены уравнения нулевого (или эйлеровского) и первого (или навье-стоксовского) приближений для максвелловской модели молекул на основе специальных итераций к уравнениям Больцмана, разработанных еще Максвеллом для однокомпонентного газа. Навье-стоксовские поправки содержат ряд внепорядковых (по Kn) членов, а в эйлеровских членах отброшены некоторые слагаемые, нелинейные по разностям скоростей и температур. В [3] развит асимптотический метод вывода уравнений, основанный на предположении $I_{ij} \sim Kn I_{ii}$ ($j \neq i$, I_{ij} — интегралы столкновений). Уточнение уравнений навье-стоксовского приближения, вывод из уравнений Больцмана уравнения баланса энтропии многоскоростной многотемпературной газодинамики и разработка неравновесной термодинамики таких смесей даны в [4, 5]. Метод получил дальнейшее развитие в [6]. В [7—9] развит обобщенный метод Чепмена — Энскога решения уравнения Больцмана для получения уравнений многоскоростной многотемпературной смеси газов. Обобщение теории Чепмена — Энскога на двухжидкостный случай дано также в [10]. Одновременно получили развитие моментные методы. В [11] были найдены многоскоростные многотемпературные тринадцатимоментные (для каждого компонента смеси) уравнения для максвелловской модели молекул и в [12, 13] — для произвольного потенциала взаимодействия молекул. Аналогичные уравнения получены в плазме [14, 15], но мы здесь не будем касаться этого направления.

Далее дадим вывод уравнений многоскоростной многотемпературной газодинамики моментным методом Грэда. Вначале из системы уравнений Больцмана найдем систему моментных уравнений в приближении 13 моментов (для каждого компонента смеси). Затем из них в пределе малых чисел Кнудсена получим уравнения эйлеровского и навье-стоксовского уровней^{*)}. Далее, используя малость отношения масс молекул, $m_1/m_i \ll 1$, $i = 2, 3$, проведем упрощение уравнений для бинарной и тройной смесей. Одновременно исследуем уравнение баланса энтропии в многоскоростной многотемпературной газодинамике смесей газов.

^{*)} Такая терминология принята в силу того, что при переходе к односкоростному однотемпературному пределу эти уравнения переходят соответственно в уравнения Эйлера и Навье — Стокса.

§ 1. УРАВНЕНИЯ МНОГОСКОРОСТНОЙ МНОГОТЕМПЕРАТУРНОЙ ГАЗОДИНАМИКИ СМЕСЕЙ ГАЗОВ

1.1. Пяти- и тринадцатимоментные уравнения

Для описания движения N -компонентной газовой смеси на микроскопическом уровне используется система кинетических уравнений Больцмана [16, 17]

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \vec{v}_i \vec{\nabla} f_i = \sum_{j=1}^N I_{ij}(f_i, f_j), \quad i=1, 2, \dots, N. \quad (1)$$

Здесь $f_i(t, \vec{r}, \vec{v}_i)$ — парциальная (т. е. отдельного компонента смеси) функция распределения молекул по скоростям, $\vec{v}_i$ — скорость молекулы. Интеграл столкновений молекул сортов i и j имеет вид

$$I_{ij}(f_i, f_j) = \int \int \int (f'_i f'_j - f_i f_j) g_{ij} b db d\epsilon d\vec{v}_j, \quad (2)$$

где $f'_i \equiv f_i(t, \vec{r}, \vec{v}'_i)$, $\vec{v}'_i, \vec{v}'_j$ — скорости молекул после столкновения, $g_{ij} = |\vec{v}_i - \vec{v}_j|$, b, ϵ — параметры столкновения.

Введем следующие парциальные макроскопические величины (моменты парциальной функции распределения):

$$\vec{u}_i = \langle \vec{v}_i \rangle, \quad (3)$$

$$\frac{3}{2} kT = \frac{m_i}{2} \langle c_i^2 \rangle, \quad (4)$$

$$P_{i,\alpha\beta} = \rho_i \langle c_{i,\alpha} c_{i,\beta} \rangle, \quad (5)$$

$$\sigma_{i,\alpha\beta} = p_i \delta_{\alpha\beta} - P_{i,\alpha\beta}, \quad (6)$$

$$p_i = n_i kT_i, \quad (7)$$

$$\vec{q}_i = \frac{1}{2} \rho_i \langle c_{i,\alpha} c_i^2 \rangle. \quad (8)$$

Здесь $\vec{c}_i = \vec{v}_i - \vec{u}_i$, $\rho_i = n_i m_i$, $\langle \psi_i(\vec{v}_i) \rangle \equiv \frac{1}{n_i} \int \psi_i(\vec{v}_i) f_i(t, \vec{r}, \vec{v}_i) d\vec{v}_i$,

n_i, ρ_i — парциальные числовая и массовая плотности, k — постоянная Больцмана; в этой главе везде m_i употребляется для обозначения массы молекулы i -сорта. Моменты (3) — (8) — парциальные гидродинамическая скорость, температура, тензор напряжений, тензор вязких напряжений, давление и тепловой поток. Они составляют набор макроскопических величин многоскоростной многотемпературной газодинамики. Другой набор моментов вводится в методе Чепмена — Энскога решения уравнений Больцмана, приводящем к классическим (т. е. односкоростным однотемпературным) уравнениям Навье — Стокса [16, 17]. Это — гидродинамическая скорость, температура, давление, тензор вязких напряжений и тепловой поток всей смеси и диффу-

зионные скорости компонентов смеси, определяемые соотношениями:

$$\vec{u} = \frac{1}{\rho} \sum_i \rho_i \vec{u}_i, \quad (9)$$

$$\frac{3}{2} kT = \sum_i \frac{m_i}{2} \langle (\vec{v}_i - \vec{u})^2 \rangle, \quad (10)$$

$$P_{\alpha\beta} = \sum_i \rho_i \langle (\vec{v}_i - \vec{u})_\alpha (\vec{v}_i - \vec{u})_\beta \rangle \quad (11)$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = p\delta_{\alpha\beta} - P_{\alpha\beta}, \quad (12)$$

$$p = nkT, \quad (13)$$

$$\vec{q} = \frac{1}{2} \sum_i \rho_i \langle (\vec{v}_i - \vec{u}) (\vec{v}_i - \vec{u})^2 \rangle, \quad (14)$$

$$\vec{V}_i = \langle (\vec{v}_i - \vec{u}) \rangle. \quad (15)$$

Между двумя наборами моментов существуют следующие связи:

$$\rho \vec{u} = \sum_i \rho_i \vec{u}_i, \quad (16)$$

$$\frac{3}{2} nkT = \frac{3}{2} \sum_i n_i kT_i - \frac{1}{2} \sum_i \rho_i V_i^2, \quad (17)$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sum_i \left(\sigma_{i,\alpha\beta} - \rho_i \overset{\circ}{V}_{i,\alpha} V_{i,\beta} \right), \quad (18)$$

$$\vec{q} = \sum_i \left(\vec{q}_i + \frac{5}{2} p_i \vec{V}_i - \overset{\leftrightarrow}{\sigma}_i \vec{V}_i + \frac{1}{2} \rho_i \vec{V}_i V_i^2 \right), \quad (19)$$

$$\vec{V}_i = \vec{u}_i - \vec{u}, \quad (20)$$

где знак $\overset{\circ}{\leftrightarrow}$ означает симметричный бездивергентный тензор второго ранга $\left(\overset{\circ}{\vec{\Gamma}}_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2} (\Gamma_{\alpha\beta} + \Gamma_{\beta\alpha}) - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} \Gamma_{\gamma\gamma} \right)$.

Как уже отмечалось, уравнения многоскоростной многотемпературной газодинамики смесей газов могут быть выведены из системы уравнений Больцмана (1) несколькими способами. Далее использован моментный метод Грэда (в частности, из-за того, что здесь в отличие от других методов имеется более детальное изложение методики вычислений [12, 13, 15]). В моментных методах функцию распределения представляют в виде ряда по полиномам [13, 15, 18]

$$f_i(t, \vec{r}, \vec{v}_i) = f_i^{(0)}(t, \vec{r}, \vec{v}_i) \sum_{n=0}^M a_n(t, \vec{r}) H_n(t, \vec{r}, \vec{v}_i), \quad (21)$$

$f_i^{(0)}$ — нулевая аппроксимирующая функция, H_n — ортогональный полином, a_n — коэффициенты разложения, M — порядок ап-

проксимации. В методе Грэда в качестве H_n берутся полиномы Эрмита по $\vec{c}_i$, а в качестве $f_i^{(0)}$ — локально-максвелловская функция относительно парциальных гидродинамических скоростей и температур [12, 13]

$$f_i^{(0)}(t, \vec{r}, \vec{v}_i) = n_i (\pi v_{T,i}^2)^{-3/2} \exp(-c_i^2/v_{T,i}^2), \quad v_{T,i}^2 = 2kT_i/m_i. \quad (22)$$

В приближении 13 моментов (для каждого компонента смеси) уравнение (21) имеет вид

$$f_i = f_i^{(0)} \left(1 - \frac{1}{2} a_{i,\alpha\beta} H_{i,\alpha\beta} - a_{i,\alpha\alpha\beta} H_{i,\alpha\alpha\beta} \right), \quad (23)$$

где

$$H_{i,\alpha\beta} = \frac{2c_{i,\alpha}c_{i,\beta}}{v_{T,i}^2} - \delta_{\alpha\beta}, \quad a_{i,\alpha\beta} = \frac{2\sigma_{i,\alpha\beta}}{\rho_i v_{T,i}^2},$$

$$H_{i,\alpha\alpha\beta} = \frac{c_{i,\beta}}{v_{T,i}} \left(1 - \frac{2}{5} \frac{c_i^2}{v_{T,i}^2} \right), \quad a_{i,\alpha\alpha\beta} = \frac{4q_{i,\alpha}}{\rho_i v_{T,i}^3}.$$

Далее умножим уравнение Больцмана (1) на m_i , $m_i \vec{v}_i$, $\frac{1}{2} m_i c_i^2$, $m_i c_{i,\alpha} c_{i,\beta}$, $\frac{1}{2} m_i c_{i,\alpha} c_i^2$, заменим f_i выражением (23) и проинтегрируем по пространству скоростей $\vec{v}_i$. В результате получим соответственно уравнения непрерывности, импульса, энергии, тензора вязких напряжений и теплового для отдельного, i -го компонента смеси. Они составляют систему тринадцатимоментных уравнений многоскоростной многотемпературной газодинамики смесей газов. Запишем ее в следующей форме:

$$\frac{d_i}{dt} \rho_i + \rho_i \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_i = 0, \quad \left(\frac{d_i}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u_i \cdot \vec{\nabla} \right), \quad (24)$$

$$\rho_i \frac{d_i \vec{u}_i}{dt} + \vec{\nabla} p_i - \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}_i = - \sum_{j \neq i} (\vec{F}_{ij} + \vec{F}'_{ij}), \quad (25)$$

$$\frac{3}{2} n_i k \frac{d_i T_i}{dt} + p_i \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_i - \vec{\sigma}_i : \vec{\nabla} \vec{u}_i + \vec{\nabla} \cdot \vec{q}_i = - \sum_{j \neq i} (Q_{ij} + Q'_{ij}), \quad (26)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{\sigma}_i + \sum_j a_{ij} \vec{\sigma}_j = - \vec{A}_i - \vec{A}'_i, \quad (27)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{q}_i + \sum_j b_{ij} \vec{q}_j = \vec{B}_i + \vec{B}'_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (28)$$

где

$$\vec{F}_i = \frac{16}{3} \frac{\rho_i \rho_j}{m_i + m_j} \Omega_{ij}^{(1,1)} \left\{ \left(1 - X_{ij} \frac{u_{ij}^2}{v_{T,ij}^2} \right) \vec{u}_{ij} - \frac{2X_{ij}}{v_{T,ij}^2} \left(\frac{\vec{\sigma}_i}{\rho_i} + \frac{\vec{\sigma}_j}{\rho_j} \right) \cdot \vec{u}_{ij} - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{v_{T,ij}^2} \left[X_{ij} \vec{I} - \frac{7}{5v_{T,ij}^2} Y_{ij} (u_{ij}^2 \vec{I} + 2\vec{u}_{ij} \vec{u}_{ij}) \right] \cdot \left(\frac{\vec{q}_i}{\rho_i} - \frac{\vec{q}_j}{\rho_j} \right) \right\}, \quad (29)$$

$$Q_{ij} = \frac{16}{3} \frac{\rho_i \rho_j \kappa_{ij}}{m_i + m_j} \Omega_{ij}^{(1,1)} \left\{ -u_{ij}^2 + \Theta_{ij} \left[\frac{3}{2} v_{T,ij}^2 + u_{ij}^2 \left(1 - \frac{5}{2} X_{ij} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{8}{v_{T,ij}^2} \left[(1 - \Theta_{ij}) X_{ij} + \frac{7}{4} \Theta_{ij} Y_{ij} \right] \left(\frac{\vec{q}_i}{\rho_i} - \frac{\vec{q}_j}{\rho_j} \right) \cdot \vec{u}_{ij} - \frac{3X_{ij}}{p_i} \vec{q}_i \cdot \vec{u}_{ij} \right\}, \quad (30)$$

$$\vec{A}_i = 2p_i \left(\vec{\nabla} u_i + \sum_{j \neq i} E_{ij} \vec{u}_{ij} u_{ij} \right), \quad (31)$$

$$\vec{B}_i = \frac{5}{2} \frac{k p_i}{m_i} \left(\vec{\nabla} T_i + \sum_{j \neq i} H_{ij} \vec{u}_{ij} \right). \quad (32)$$

Здесь введены обозначения:

$$E_{ij} = \frac{16}{5} \frac{\rho_j M_{ij}}{k T_i} \left[M_{ji} \Omega_{ij}^{(2,2)} - \frac{10}{3} \kappa_{ij} \left(\Omega_{ij}^{(1,1)} - \frac{2}{5} \Theta_{ij} \Omega_{ij}^{(1,2)} \right) \right], \quad (33)$$

$$H_{ij} = \frac{64}{15} \frac{\rho_i M_{ij}}{k} \left\{ \Theta_{ij} \left[M_{ji} \Omega_{ij}^{(2,2)} - (M_{ji} \kappa_{ij} \Theta_{ij}) \Omega_{ij}^{(1,2)} \right] - \frac{5}{4} \kappa_{ij} (X_{ij} + \right. \\ \left. + 2\Theta_{ij}) \Omega_{ij}^{(1,1)} + M_{ji} \frac{u_{ij}^2}{v_{T,ij}^2} \left[\frac{2}{5} \left(\frac{M_{ji}}{\kappa_{ij}} + \frac{7}{2} \Theta_{ij} Z_{ij} \right) \Omega_{ij}^{(2,2)} - \right. \\ \left. - \left((2 - 9X_{ij} + 7Y_{ij}) \frac{M_{ji}}{\kappa_{ij}} + 8X_{ij} - \frac{21}{2} Y_{ij} + \frac{21}{4} \frac{\kappa_{ij}}{M_{ji}} Y_{ij} \right) \Omega_{ij}^{(1,1)} \right] \right\}, \quad (34)$$

$$\vec{u}_{ij} = \vec{u}_i - \vec{u}_j, \quad \kappa_{ij} = \frac{v_{T,i}^2}{v_{T,ij}^2}, \quad v_{T,i}^2 = \frac{2kT_i}{m_i}, \quad v_{T,ij}^2 = v_{T,i}^2 + v_{T,j}^2,$$

$$M_{ij} = \frac{m_i}{m_i + m_j}, \quad \Theta_{ij} = M_{ij} \left(1 - \frac{T_j}{T_i} \right), \quad X_{ij} = 1 - \frac{2}{5} \frac{\Omega_{ij}^{(1,2)}}{\Omega_{ij}^{(1,1)}},$$

$$Y_{ij} = 1 - \frac{4}{5} \frac{\Omega_{ij}^{(1,2)}}{\Omega_{ij}^{(1,1)}} + \frac{4}{35} \frac{\Omega_{ij}^{(1,3)}}{\Omega_{ij}^{(1,1)}}, \quad Z_{ij} = 1 - \frac{2}{7} \frac{\Omega_{ij}^{(2,3)}}{\Omega_{ij}^{(2,2)}},$$

где $\vec{I}$ — единичный тензор. Числа X , Y , Z равны нулю в случае максвелловской модели молекул. Ω -интегралы даются выражениями

$$\Omega_{ij}^{(l,s)} = \pi v_{T,ij} \int e^{-x^2} x^{2s+3} Q^{(l)} dx, \quad Q^{(l)} = \int (1 - \cos^l \chi) b db,$$

χ — угол рассеяния. Коэффициенты a_{ij} и b_{ij} в уравнениях для $\vec{\sigma}_i$ и $\vec{g}_i$ даются выражениями ($i, j = 1, 2, \dots, N, j \neq i$)

$$a_{ii} = \frac{8}{5} n_i \Omega_i^{(2,2)} + \frac{16}{5} \sum_{j=1(j \neq i)}^N n_j M_{ji} \left[M_{ji} \Omega_{ij}^{(2,2)} + \frac{10}{3} (M_{ij} - \right. \\ \left. - \kappa_{ij} \Theta_{ij} X_{ij}) \Omega_{ij}^{(1,1)} \right],$$

$$a_{ij} = \frac{16}{5} n_i M_{ij} \left[M_{ji} \Omega_{ij}^{(2,2)} - \frac{10}{3} \left(\Omega_{ij}^{(1,1)} - \frac{2}{5} \Theta_{ij} \Omega_{ij}^{(1,2)} \right) \right], \quad (35)$$

$$b_{ii} = \frac{16}{15} n_i \Omega_i^{(2,2)} + \frac{64}{15} \sum_{j=1(j \neq i)}^N n_j M_{ji}^2 \left\{ \left(M_{ij} - \frac{7}{2} \kappa_{ij} \Theta_{ij} V_{ij} \right) \Omega_{ij}^{(2,2)} + \right. \\ \left. + \frac{5}{4} M_{ji} \left[1 + 3 \frac{m_i}{m_j} - 2X_{ij} + \frac{7}{2} Y_{ij} + \left(5X_{ij} - 11 \frac{m_i}{m_j} X_{ij} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{21}{2} \kappa_{ij} \frac{\Theta_{ij}}{M_{ji}} Y_{ij} \right) \kappa_{ij} \frac{\Theta_{ij}}{M_{ji}} \right] \Omega_{ij}^{(1,1)} \right\}, \\ b_{ij} = \frac{64}{15} n_j M_{ij} M_{ji} \left\{ \left(M_{ji} + \frac{7}{2} \kappa_{ij} \Theta_{ij} V_{ij} \right) \Omega_{ij}^{(2,2)} - \right. \\ \left. - \frac{5}{4} M_{ji} \left[4 - 2X_{ij} + \frac{7}{2} Y_{ij} + \left(16X_{ij} + \frac{21}{2} \kappa_{ij} \frac{\Theta_{ij}}{M_{ji}} Y_{ij} \right) \kappa_{ij} \frac{\Theta_{ij}}{M_{ji}} \right] \Omega_{ij}^{(1,1)} \right\}.$$

Нашей целью является получение уравнений эйлеровского и навье-стоксовского уровней многоскоростной многотемпературной газодинамики из (24)–(28). Те члены в правых частях (25)–(28), которые дают вклады в названные уравнения, для удобства выделены в отдельные группы ($\vec{F}_{ij}$, Q_{ij} , $\vec{A}_i$ и $\vec{B}_i$). Штрихованные величины содержат более высокие степени по σ_i и q_i и вносят вклады в уравнения барнеттовского и супербарнеттовского уровней, поэтому здесь не приведены. Выражения для них можно найти в [13, 19].

Ввиду сложности и громоздкости здесь не изложены техника и детали вычислений. Техника вычислений разработана и приведена в [13] (см. также [5]). Отметим только, что основную трудность представляет вычисление членов, связанных с интегралами столкновений.

Если в выражении для f_i (23) опустим слагаемые, содержащие тензор вязких напряжений и тепловой поток, т. е. ограничимся пятимоментным приближением, то вместо (24)–(28) получим систему моментных уравнений в приближении 5 моментов:

$$\frac{d_i}{dt} \rho_i + \rho_i \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_i = 0, \quad (36)$$

$$\rho_i \frac{d_i \vec{u}_i}{dt} = - \vec{\nabla} p_i - \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}^{(0)}, \quad (37)$$

$$\frac{3}{2} n_{ik} \frac{d_i T_i}{dt} = - p_i \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_i - \sum_{j \neq i} (Q_{ij}^{(0)} - \kappa_{ij} \vec{F}_{ij}^{(0)} \cdot \vec{u}_{ij}), \quad (38)$$

$$\vec{F}_{ij}^{(0)} = \frac{16}{3} \frac{\rho_i \rho_j}{m_i + m_j} \Omega_{ij}^{(1,1)} \vec{u}_{ij}, \quad (39)$$

$$Q_{ij}^{(0)} = 16 \frac{\rho_i \rho_j}{(m_i + m_j)^2} k (T_i - T_j). \quad (40)$$

Здесь $\vec{F}_{ij}^{(0)}$ — сила взаимодействия между компонентами смеси, она описывает обмен количеством движения между компонентами и обусловлена отличием парциальных скоростей друг от друга; $Q_{ij}^{(0)}$ — теплообмен между компонентами смеси вследствие несовпадения их температур; $\vec{F}_{ij}^{(0)} \cdot \vec{u}_{ij}$ — работа силы взаимодействия, а κ_{ij} — ее доля, переходящая во внутреннюю энергию i -компонента ($\kappa_{ij} < 1$, $\kappa_{ij} + \kappa_{ji} = 1$).

При переходе к односкоростному однотемпературному описанию эти уравнения переходят в уравнения Эйлера для смеси газов. Систему (36) — (40) будем называть *уравнениями эйлеровского уровня многоскоростной многотемпературной газодинамики*.

Уравнения следующего, навье-стоксовского уровня могут быть получены из 13-моментных уравнений (24) — (28). Это сделано в следующем пункте данного параграфа.

1.2. Уравнения навье-стоксовского уровня для бинарной и тройной смесей газов

Построим решение уравнений (27) и (28) для $\vec{\sigma}_i$ и $\vec{q}_i$ при предположении, что характерное газодинамическое время течения $t^* \gg \lambda_{\min}^{-1}$ ($\lambda_{\min}$ — наименьшее собственное значение матриц a_{ij} и b_{ij} , оно связано с частотой столкновений молекул). Это предположение выполняется, например, если в качестве t^* взять характерное время выравнивания температур и скоростей компонентов смеси $\tau_{ij} m_2 / m_1$, $m_2 / m_1 \gg 1$, так как λ , как можно убедиться непосредственным вычислением, $\sim n_k \Omega_{kl}^{(r,s)} \sim \tau_{lk}^{-1}$ (τ_{lk} — набор времен свободного пробега молекул). Тогда, пренебрегая в первом приближении производными по времени ($\sim 1/t^*$), (27) и (28) преобразуем к виду

$$\vec{\sigma}_i = -\frac{1}{a} \sum_j |a|_{ji} (\vec{A}_j + \vec{A}'_j), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (41)$$

$$\vec{q}_i = \frac{1}{b} \sum_j |b|_{ji} (\vec{B}_j + \vec{B}'_j), \quad (42)$$

где a , b — определители матриц a_{ij} , b_{ij} и $|a|_{ji}$, $|b|_{ji}$ — алгебраические дополнения. В предположении, что гидродинамические величины $\vec{u}_i$, $\vec{p}_i$, $\vec{T}_i$ и их градиенты, а также разность скоростей $\vec{u}_{ij}$ являются величинами основного порядка, из (41), (42) следует, что $\vec{\sigma}_i$ и $\vec{q}_i$ порядка $\lambda_{\min}^{-1}$. В первом приближении по $\lambda_{\min}^{-1}$ получаются следующие выражения для парциальных тензоров вязких напряжений и тепловых потоков:

$$\vec{\sigma}_i = -\frac{1}{a} \sum_j |a|_{ji} \vec{A}_j, \quad (43)$$

$$\vec{q}_i = \frac{1}{b} \sum_j |b|_{ji} \vec{B}_j. \quad (44)$$

Для бинарной смеси $|a|_i = a_{ij}$, $|a|_{ji} = -a_{ij}$, $j \neq i$. Следуя [10], введем матрицы коэффициентов вязкости μ_{ij} и теплопроводности λ_{ij} и парциальные коэффициенты термодиффузии $k_{T,i}$:

$$\vec{\sigma}_i = 2 \sum_{j=1}^2 \mu_{ij} \overset{\circ}{\nabla} u_j + \gamma_i u_{12} u_{12}, \quad i = 1, 2, \quad (45)$$

$$\mu_{ii} = -\frac{p_i a_{jj}}{a}, \quad \mu_{ij} = \frac{p_j a_{ij}}{a}, \quad \gamma_i = 2(p_i \mu_{ii} E_{ij} + p_j \mu_{ij} E_{ji}),$$

$$E_{ij} = \frac{16}{5} \frac{\rho_i M_{ij}}{kT_i} \left[M_{ji} \Omega_{ij}^{(2,2)} - \frac{10}{3} \kappa_{ij} \left(\Omega_{ij}^{(1,1)} - \frac{2}{5} \Theta_{ij} \Omega_{ij}^{(1,2)} \right) \right], \quad j \neq i,$$

$$\vec{q}_i = - \sum_{j=1}^2 \lambda_{ij} \overset{\circ}{\nabla} T_j + p k_{T,i} \vec{u}_{12}, \quad p = p_1 + p_2, \quad i = 1, 2, \quad (46)$$

$$\lambda_{ii} = -\frac{5k p_i b_{jj}}{2m_i b}, \quad \lambda_{ij} = \frac{5k p_j b_{ij}}{2m_j b}, \quad k_{T,i} = (\lambda_{ij} H_{ji} - \lambda_{ii} H_{ij}) \frac{1}{p},$$

$$H_{ij} = \frac{64}{15} \frac{\rho_i M_{ij}}{k} \{ \Theta_{ij} [M_{ji} \Omega_{ij}^{(2,2)} - (M_{ji} - \kappa_{ij} \Theta_{ij}) \Omega_{ij}^{(1,2)} - \kappa_{ij} (X_{ij} + 2\Theta_{ij}) \Omega_{ij}^{(1,1)}] \}, \quad j \neq i.$$

Тензор напряжений и тепловой поток отдельного компонента зависят от градиентов скорости и температуры обоих компонентов смеси. Кроме того, они включают члены, зависящие от разности парциальных скоростей.

Согласно принятому приближению, в правых частях уравнений (25) и (26) надо опустить члены, квадратичные по $\vec{\sigma}_i$ и $\vec{q}_i$, т. е. принять $\vec{F}'_{ij} = 0$, $Q'_{ij} = 0$. Окончательно система уравнений навье-стоксовского уровня многоскоростной многотемпературной газодинамики имеет следующий вид:

$$\frac{d_i}{dt} \rho_i + \rho_i \overset{\circ}{\nabla} \cdot \vec{u}_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (47)$$

$$\rho_i \frac{d_i \vec{u}_i}{dt} = - \overset{\circ}{\nabla} p_i + \overset{\circ}{\nabla} \cdot \vec{\sigma}_i - \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}, \quad (48)$$

$$\frac{3}{2} n_i k \frac{d_i T_i}{dt} = - p_i \overset{\circ}{\nabla} \cdot \vec{u}_i - \overset{\circ}{\nabla} \cdot \vec{q}_i + \vec{\sigma}_i : \overset{\circ}{\nabla} \vec{u}_i - \sum_{j \neq i} Q_{ij}. \quad (49)$$

Здесь парциальные тензор вязких напряжений и тепловой поток определены выражениями (41), (42), а в случае бинарной смеси ($N=2$) — (45), (46) и

$$\vec{F}_{ij} = \frac{16}{3} \frac{\rho_i \rho_j}{m_i + m_j} \Omega_{ij}^{(1,1)} \left\{ \left(1 - X_{ij} \frac{u_{ij}^2}{v_{T,ij}^2} \right) \vec{u}_{ij} - \frac{2X_{ij}}{v_{T,ij}^2} \times \right. \\ \left. \times \left[\left(\frac{\vec{\sigma}_i}{\rho_i} + \frac{\vec{\sigma}_j}{\rho_j} \right) \cdot \vec{u}_{ij} + \vec{I} \cdot \left(\frac{\vec{q}_i}{\rho_i} - \frac{\vec{q}_j}{\rho_j} \right) \right] \right\}, \quad (50)$$

$$Q_{ij} = \frac{16}{3} \frac{\rho_i \rho_j}{m_i + m_j} \chi_{ij} \Omega_{ij}^{(1,1)} \left\{ -u_{ij}^2 + \Theta_{ij} v_{T,ij}^2 \left[\frac{3}{2} + \left(1 - \frac{5}{2} X_{ij} \right) \frac{u_{ij}^2}{v_{T,ij}^2} \right] + \right. \\ \left. + \frac{8}{v_{T,ij}^2} \left[X_{ij} (1 - \Theta_{ij}) + \frac{7}{4} Y_{ij} \Theta_{ij} \right] \left(\frac{\vec{q}_i}{\rho_i} - \frac{\vec{q}_j}{\rho_j} \right) \cdot \vec{u}_{ij} - \frac{3X_{ij}}{P_i} \vec{q}_i \vec{u}_{ij} \right\} \quad (51)$$

(в $\vec{F}_{ij}$ и Q_{ij} включены поправки к $\vec{F}_{ij}^{(0)}$ и $Q_{ij}^{(0)}$ как $\sim \text{Kn}$, так и $\sim u_{ij}^2/v_{T,ij}^2$, см. далее замечание 2).

Сделаем несколько замечаний относительно этих уравнений.

1. Как известно, область применимости по числу Кнудсена классических уравнений Навье — Стокса определяется условием $\text{Kn} \ll 1$. Однако для смеси с сильно различающимися массами молекул ($\varepsilon = m_1/m_2 \ll 1$) эта область определяется $\text{Kn} \ll \varepsilon$. При $\varepsilon \lesssim \text{Kn} \ll 1$ необходимо двухскоростное двухтемпературное описание. Полученные уравнения многоскоростной многотемпературной газодинамики свободны от ограничений на величину ε , т. е. они равномерно справедливы во всей области значений ε .

2. При выводе тринадцатимоментных уравнений считалось, что $|\vec{\sigma}_i|/\rho_i$, $q_i/(p_i u_i)$, $u_{ij}/v_{T,ij}$ и $|T_i - T_j|/(T_i + T_j)$ — конечные величины [12, 13]. Но при вычислении входящих в уравнения моментов интегралов столкновений приходится прибегать к разложению их в бесконечные ряды по $(u_{ij}/v_{T,ij})^2$ [5, 13]. В [13] показано, что члены этих рядов быстро убывают (для $u_{ij}^2/v_{T,ij}^2 < 1$), и оставлены несколько первых членов. В процессе решения уравнений (27), (28) на $\vec{\sigma}_i$ и q_i накладываются ограничения $|\vec{\sigma}_i|/\rho_i \sim q_i/(p_i u_i) \sim \tau_{ij}/t^* \ll 1$. При этом ограничений на величины $u_{ij}/v_{T,ij}$ и $|T_i - T_j|/(T_i + T_j)$ не возникает, так как времена их релаксации $\gg \tau_{ij}$. Отсюда следует, что уравнения многожидкостной гидродинамики получены при произвольном отношении парциальных температур и, строго говоря, при

$$(\vec{u}_{ij}/v_{T,ij})^2 \ll 1, \quad (52)$$

но на практике их можно использовать и для конечных значений $(\vec{u}_{ij}/v_{T,ij}) < 1$.

3. Возникает вопрос о граничных условиях к уравнениям многоскоростной многотемпературной газодинамики. В ряде задач (например, структура ударной волны) течение в граничной области является равновесным. Здесь естественны граничные условия, в которых парциальные скорости и температуры совпадают, т. е. $u_i|_\Gamma = u_0$, $T_i|_\Gamma = T_0$, $i = 1, 2, \dots, N$. Но в таких задачах, как столкновение и смешение струй, медленные течения ($\text{Re} \lesssim 1$), вызванные диффузионным скольжением или химическими реакциями на поверхности обтекаемого тела, на границе течения имеют место скоростная и температурная неравновесности между компонентами смеси.

В некоторых случаях может оказаться более удобным вводить плотность ρ , скорость $\vec{u}$ и температуру T смеси как целой, диффузионные скорости $\vec{V}_i$ и разности температур $T_{ij} = T_i - T_j$. Они связаны с парциальными величинами соотношениями (16) — (20).

Проведя суммирование по компонентам смеси в уравнениях (47) — (49), получим соответственно уравнения непрерывности, импульса и энергии всей смеси:

$$\frac{d}{dt} \rho + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad \left(\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right), \quad (53)$$

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = - \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}, \quad (54)$$

$$\frac{3}{2} nk \frac{dT}{dt} = - p \vec{\nabla} \cdot \vec{u} - \vec{\nabla} \cdot \vec{q} + \vec{\sigma} : \vec{\nabla} \vec{u} + \frac{3}{2} kT \vec{\nabla} \cdot \left(\sum_i n_i \vec{V}_i \right), \quad (55)$$

где тензор напряжений и тепловой поток смеси равны

$$\vec{\sigma} = \sum_i \left(\vec{\sigma}_i - \rho_i \vec{V}_i \vec{V}_i \right), \quad (56)$$

$$\vec{q} = \sum_i \left(\vec{q}_i + \frac{5}{2} p_i \vec{V}_i - \vec{\sigma}_i \cdot \vec{V}_i + \frac{1}{2} \rho_i \vec{V}_i V_i^2 \right), \quad (57)$$

$$p \equiv nkT, \quad p_i = n_i k \left(T' + \sum_j \frac{n_j}{n} T_{ij} \right).$$

Здесь использовано обозначение [11] $T' \equiv T - \sum \rho_i V_i^2 / (3kn)$.

Для получения уравнения для $\vec{V}_i$ вычтем уравнение импульса смеси (54) из уравнения (48):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{V}_i = & - \vec{V}_i \cdot \vec{\nabla} \vec{u} - \vec{V}_i \cdot \vec{\nabla} \vec{V}_i - \frac{1}{\rho_i} \vec{\nabla} p_i + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p - \frac{1}{\rho_i} \sum_j \vec{F}_{ij} + \\ & + \frac{1}{\rho_i} \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}_i - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}. \end{aligned} \quad (58)$$

Вычитая попарно уравнения энергии (49), получим уравнения для T_{ij} :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} T_{ij} = & - \frac{2}{3} T_{ij} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} - \vec{u}_{ij} \cdot \vec{\nabla} T' - \frac{2}{3} T' \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{ij} - \\ & - \sum_k \left[\vec{V}_i \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{n_k}{n} T_{ik} \right) - \vec{V}_j \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{n_k}{n} T_{jk} \right) + \frac{2}{3} \frac{n_k}{n} (T_{ik} \vec{\nabla} \cdot \vec{V}_i - \right. \\ & \left. - T_{jk} \vec{\nabla} \cdot \vec{V}_j) \right] - \frac{2}{3k} \sum_k \left(\frac{Q_{ik}}{n_i} - \frac{Q_{jk}}{n_j} \right) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2}{3k} \left[\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{q}_i - \vec{\sigma}_i : \left(\vec{\nabla} \vec{u} + \vec{\nabla} \vec{V}_i \right) \right) \frac{1}{n_i} - \right. \\
& \left. - \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{q}_j - \vec{\sigma}_j : \left(\vec{\nabla} \vec{u} + \vec{\nabla} \vec{V}_j \right) \right) \frac{1}{n_j} \right]. \quad (59)
\end{aligned}$$

Релаксационные уравнения для разностей скоростей и температур, подобные (58) и (59), ранее были выписаны в [11] в случае бинарной смеси для максвелловской модели молекул и в [5] для многокомпонентной смеси при пренебрежении некоторыми нелинейными членами.

Полученные уравнения многоскоростной многотемпературной газодинамики в условиях реализации односкоростного одготемпературного описания переходят в классические уравнения Навье — Стокса. Покажем это на примере бинарной смеси. Вначале найдем приближенные решения уравнений (58) и (59) аналогично тому, как было построено решение уравнений (27) и (28). Пусть газодинамическое время течения $\gg$ времен релаксации $\vec{V}_i$, T_i и макроскопические величины n_i , u , T и их градиенты являются величинами основного порядка. (Заметим, что если раньше требовалось $t^* \gg \tau_{ij}$, то теперь $t^* \gg \tau_{ij} m_2 / m_1$.) Тогда из (59) видно, что $|T_1 - T_2|$ является величиной второго порядка по градиентам макроскопических величин и $\sim \text{Kn}^2$, т. е. лежит вне пределов уравнений Навье — Стокса. Из (58) получаем

$$\rho_2 \vec{\nabla} (n_1 k T) - \rho_1 \vec{\nabla} (n_2 k T) = \rho \vec{F}_{12},$$

отсюда следует выражение для диффузионной скорости

$$\vec{V}_1 - \vec{V}_2 = -D_{12} \vec{d}, \quad \vec{d} = \vec{\nabla} \frac{n_1}{n} + k_p \vec{\nabla} \ln p + k_T \vec{\nabla} \ln T, \quad (60)$$

$$D_{12} = \frac{3(m_1 + m_2)kT}{16nm_1m_2\Omega_{12}^{(1,1)}}, \quad k_p = \frac{n_1}{n} - \frac{\rho_1}{\rho},$$

что совпадает с формулами теории Чепмена — Энскога [16]. Сохраняя в (56), (57) члены $\sim \text{Kn}$, получаем

$$\vec{\sigma} = 2\mu \vec{\nabla} u, \quad \mu = \sum_{i,j} \mu_{i,j}, \quad \lambda = \sum_{i,j} \lambda_{i,j}, \quad (61)$$

$$\vec{q} - \frac{5}{2} kT \sum_i n_i \vec{V}_i = -\lambda \vec{\nabla} T + p k_T (\vec{V}_1 - \vec{V}_2), \quad k_T = \sum_i k_{T,i}, \quad (62)$$

где коэффициенты вязкости μ , теплопроводности λ и термодиффузии k_T , как показывает сравнение, совпадают с соответствующими выражениями теории Чепмена — Энскога (см. [16], (8.34), (8.27) и (8.31)). После этого система (53) — (55), до-

полненная уравнением непрерывности одного из компонентов смеси

$$\frac{d}{dt} \rho_i + \rho_i \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_i \vec{V}_i) = 0, \quad (63)$$

становится тождественной системе уравнений Навье — Стокса для смеси газов.

Если бы не было такого перехода, то при расчетах течений приходилось бы использовать уравнения Навье — Стокса в той области течения, где смесь явно описывается едиными скоростью и температурой (например, начальный и конечный участки внутри ударной волны), и уравнения двухскоростной двухтемпературной газодинамики там, где нет равновесия по скоростям и температурам между компонентами (центральный участок в ударной волне), и проводить стыковку решений. Уравнения (47) — (49), (45), (46), (50), (51) единым образом описывают все поле течения. Если принять $\Omega_{ij}^{(r,s)} \sim \text{Kn} \Omega_i^{(r,s)}$ (как следствие допущения $I_{ij} \sim \text{Kn} I_{ii}$ [3]), то уравнения переходят в двухскоростные двухтемпературные уравнения [3, 5].

Сильные неравновесности по скоростям и температурам наиболее легко создаются в смесях с большой разницей в массах молекул. К тому же здесь возможно значительное упрощение уравнений.

Разложим выражения (35) для коэффициентов a_{ij} и b_{ij} в ряды по $\varepsilon_j = m_1/m_j \ll 1$ (для общего случая N компонентов, $j = 2, 3, \dots, N$) и опустим члены $\sim \varepsilon_j$ (но учтем члены $\sim \varepsilon_j n_1/n_j$ для случая $\rho_1 \sim \rho_j$):

$$\begin{aligned} a_{11} &\approx \frac{8}{5} n_1 \Omega_1^{(2,2)} + \frac{16}{5} \sum_{j=2}^N n_j \Omega_{1j}^{(2,3)}, \\ b_{11} &\approx \frac{16}{15} n_1 \Omega_1^{(2,2)} + \frac{16}{3} \sum_{j=2}^N n_j \left(1 - 2X_{1j} + \frac{7}{2} Y_{1j} \right) \Omega_{1j}^{(1,1)}, \\ a_{1j} &\approx \frac{16}{5} n_1 \varepsilon_j \left(\Omega_{1j}^{(2,2)} - \frac{10}{3} \Omega_{1j}^{(1,1)} \right), \quad a_{j1} = O(\varepsilon_j), \quad j = 2, 3, \dots, N, \\ a_{jj} &\approx \frac{8}{5} n_j \Omega_j^{(2,2)} + \frac{32}{3} n_1 \varepsilon_j \Omega_{1j}^{(1,1)} + \frac{16}{5} \sum_{\substack{k=2 \\ (k \neq j)}}^N [\dots], \\ b_{1j} &\approx \frac{64}{15} n_1 \varepsilon_j \left[\Omega_{1j}^{(2,2)} - \frac{5}{2} \left(2 - X_{1j} + \frac{7}{4} Y_{1j} \right) \Omega_{1j}^{(1,1)} \right], \quad b_{j1} = O(\varepsilon_j), \\ b_{jj} &\approx \frac{16}{15} n_j \Omega_j^{(2,2)} + 16 n_1 \varepsilon_j \Omega_{1j}^{(1,1)} + \frac{64}{15} \sum_{\substack{k=2 \\ (k \neq j)}}^N [\dots] \end{aligned} \quad (64)$$

(выражения в квадратных скобках и a_{jk} , b_{jk} , $j, k = 2, 3, \dots, N$, $k \neq j$, см. в (35)).

В принятом приближении получим следующие выражения для $\overset{\leftrightarrow}{\sigma}_i$, $\vec{q}_i$, F_{ij} , Q_{ij} в бинарной смеси:

$$\begin{aligned}\overset{\leftrightarrow}{\sigma}_i &= 2\mu_i \left(\overset{\circ}{\nabla} u + E_{ij} \overset{\circ}{u}_{ij} \right), \\ \mu_1 &= \frac{5}{8} kT_1 \left(\Omega_1^{(2,2)} + 2 \frac{n_2}{n_1} \Omega_{12}^{(2,2)} \right)^{-1}, \\ \mu_2 &= \frac{5}{8} kT_2 \left(\Omega_2^{(2,2)} + \frac{20}{3} \frac{\rho_1}{\rho_2} \Omega_{12}^{(1,1)} \right)^{-1}, \\ E_{12} &= \frac{16}{5} \left(\Omega_{12}^{(2,2)} - \frac{10}{3} \Omega_{12}^{(1,1)} \right) \frac{n_2 m_1}{kT_1}, \quad E_{21} = 0;\end{aligned}\tag{65}$$

$$\begin{aligned}\vec{q}_i &= -\lambda_i \left(\overset{\rightarrow}{\nabla} T_i + H_{ij} \vec{u}_{ij} \right), \\ \lambda_1 &= \frac{75}{32} \frac{k^2 T_1}{m_1} \left[\Omega_1^{(2,2)} + 5 \frac{n_2}{n_1} \left(1 - 2X_{12} + \frac{7}{2} Y_{12} \right) \Omega_{12}^{(1,1)} \right]^{-1}, \\ \lambda_2 &= \frac{75}{32} \frac{k^2 T_2}{m_2} \left(\Omega_2^{(2,2)} + 15 \frac{\rho_1}{\rho_2} \Omega_{12}^{(1,1)} \right)^{-1},\end{aligned}\tag{66}$$

$$\begin{aligned}H_{12} &= -\frac{16}{3} \frac{n_2 m_1}{k} X_{12} \Omega_{12}^{(1,1)}, \quad H_{21} = \frac{64}{15} \frac{\rho_1 m_1}{k m_2} \left[\left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right) (\Omega_{12}^{(2,2)} - \Omega_{12}^{(1,2)}) - \right. \\ &\quad \left. - \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right)^2 \cdot \frac{T_1}{T_2} \Omega_{12}^{(1,2)} - \frac{5}{2} \Omega_{ij}^{(1,1)} \left(1 - \left(1 + \frac{X_{12}}{2} \right) \cdot \frac{T_2}{T_1} \right) \right]; \\ \vec{F}_{12} &= \frac{16}{3} \rho_1 n_2 \Omega_{12}^{(1,1)} \left(\vec{u}_{12} - X_{12} \frac{\vec{q}_1}{\rho_1} \right), \quad \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12};\end{aligned}\tag{67}$$

$$\begin{aligned}Q_{12} &= Q_{12}^{(0)} - \kappa_{12} \vec{F}_{12} \cdot \vec{u}_{12}, \quad Q_{21} = -Q_{12}^{(0)} - \kappa_{21} \vec{F}_{12} \cdot \vec{u}_{12}, \\ Q_{12}^{(0)} &= 16 n_1 n_2 (m_1/m_2) k (T_1 - T_2) \Omega_{ij}^{(1,1)}.\end{aligned}\tag{68}$$

Как видно из (67), в силе межкомпонентного взаимодействия $\vec{F}_{ij}$ появляется новый член — термосила, создаваемая парциальным потоком тепла. Термосила впервые была получена в плазме [14]. Она исчезает в газе из максвелловских молекул и имеет разные знаки для жестких и мягких потенциалов межмолекулярных взаимодействий, что определяется множителем X_{ij} . Например, в случае молекул с жестким потенциалом на легкий компонент смеси действует термосила в направлении, противоположном потоку тепла этого компонента.

Здесь, несмотря на условие (52), которое принимает вид $(u_{12}/v_{T,1})^2 \ll 1$, в $\overset{\leftrightarrow}{\sigma}_i$ и Q_{ij} оставлен ряд членов $\sim u_{ij}^2$. Так, в $\overset{\leftrightarrow}{\sigma}_1$ отношение $|E_{12} \vec{u}_{12} \vec{u}_{12}|$ к $|\overset{\rightarrow}{\nabla} u_1|$ порядка $(L/l_{21}) (u_{12}/v_{T,1})^2 n_2/n_1$ (которое может быть ~ 1 при $n_2 \sim n_1$), аналогичное отношение в

$\leftrightarrow$ порядка $(L/l_{21}) (\vec{u}_{12}/v_{T,1})^2 \varepsilon \ll 1$ ($l_{ij} \sim (n_j \sigma_{ij})^{-1}$, L — характерный пространственный масштаб течения). Сравнение слагаемых в Q_{12} приводит к оценкам: $\kappa_{12} \vec{F}_{12} \cdot \vec{u}_{12} / Q_{12}^{(0)} \sim \varepsilon^{-1} (u_{12}/v_{T,1})^2 T_1 / |T_1 - T_2|$ и $\kappa_{21} \vec{F}_{12} \cdot \vec{u}_{12} / Q_{12}^{(0)} \sim (u_{12}/v_{T,1})^2 T_1 / |T_1 - T_2|$. Последняя величина $\sim (u_{12}/v_{T,1})^2 \ll 1$ при $|T_1 - T_2| \sim T_1$, но она становится конечной при $|T_1 - T_2| \ll T_1$. Поэтому в Q_{21} оставлен $\kappa_{21} \vec{F}_{12} \cdot \vec{u}_{12}$.

В односкоростном однотемпературном случае коэффициенты теплопроводности и термодиффузии смеси с сильно различающимися массами молекул, полученные в первом приближении по полиномам Сонина, определяются менее точно, чем другие коэффициенты [17]. Рекомендуется учет нескольких членов разложений по полиномам Сонина. Аналогичное замечание верно и относительно парциальных коэффициентов теплопроводности λ_i (они получены в первом приближении по полиномам Сонина).

Уравнения (47) — (49) и (65) — (68) имеют достаточно простой вид, чтобы быть использованными для решения практических задач.

Для вывода уравнения многоскоростной многотемпературной газодинамики из системы уравнений Больцмана наряду с моментным методом были разработаны и другие: асимптотический метод [3—5], обобщенный метод Чепмена — Энскога [7—9], двухжидкостная теория Чепмена — Энскога [10]. Проведем сравнение результатов, полученных различными методами.

Уравнения эйлеровского уровня, полученные в этих работах, совпадают с (36) — (40). Уравнения навье-стоксовского уровня [3—10] по структуре совпадают с уравнениями (47) — (49), (65) — (68), однако имеются различия в выражениях для парциальных коэффициентов вязкости и теплопроводности, а также в $\vec{F}_{ij}$ и Q_{ij} . Они устраняются при уточнении методики вычислений и исправлении опечаток в этих работах.

Таким образом, уравнения навье-стоксовского приближения двухскоростной двухтемпературной газодинамики для бинарной смеси с $m_1/m_2 \ll 1$, полученные четырьмя различными методами, совпадают между собой. Их можно считать надежно установленными.

Рассмотрим случай трехкомпонентной смеси, состоящей из легких молекул и тяжелых молекул двух сортов с близкими массами, $m_1 \ll m_2 \sim m_3$, в частности изотопных молекул ($m_2 \approx m_3$). Течения таких смесей имеют место в газодинамических методах разделения смесей газов и изотопов. Выведем уравнения трехскоростной трехтемпературной газодинамики для таких смесей.

Проведя разложение (43) и (44) по $\varepsilon_j = m_1/m_j$ ($j = 2, 3$) и оставаясь в рамках принятого при получении (65) — (68) приближения, выражения (43) и (44) при $N = 3$ приведем к виду

$$\leftrightarrow \sigma_1 = 2\mu_{11} \left(\overset{\circ}{\nabla} u_1 + \sum_{j=2}^3 E_{1j} \overset{\circ}{\nabla} u_{1j} u_{1j} \right), \quad (69)$$

$$\mu_{11} = \frac{p_1}{a_{11}} = \frac{5}{8} kT_1 \left(\Omega_1^{(2,2)} + 2 \sum_{j=2}^3 \frac{n_j}{n_1} \Omega_{1j}^{(2,2)} \right)^{-1};$$

$$\vec{\sigma}_j = 2 \sum_{k=2}^3 \mu_{jk} \left(\vec{\nabla} u_k + \sum_{l=1(l \neq k)}^3 E_{kl} u_{kl} u_{kl} \right), \quad j = 2, 3, \quad (70)$$

$$\mu_{jj} = \frac{p_j a_{kk}}{a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}}, \quad j, k = 2, 3, \quad k \neq j,$$

$$\mu_{jk} = - \frac{p_k a_{jk}}{a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}};$$

$$\vec{q}_1 = - \lambda_{11} \left(\vec{\nabla} T_1 + \sum_{j=2}^3 H_{1j} \vec{u}_{1j} \right), \quad (71)$$

$$\lambda_{11} = \frac{75 k^2 T_1}{32 m_1} \left[\Omega_1^{(2,2)} + 5 \sum_{j=2}^3 \frac{n_j}{n_1} \left(1 - 2X_{1j} + \frac{7}{2} Y_{1j} \right) \Omega_{1j}^{(1,1)} \right]^{-1};$$

$$\vec{q}_j = - \sum_{k=2}^3 \lambda_{jk} \left(\vec{\nabla} T_k + \sum_{l=1(l \neq k)}^3 H_{kl} \vec{u}_{kl} \right), \quad j = 2, 3, \quad (72)$$

$$\lambda_{jj} = \frac{5 k p_j}{2 m_j} \frac{b_{kk}}{b_{22} b_{33} - b_{23} b_{32}}, \quad j, k = 2, 3, \quad k \neq j,$$

$$\lambda_{jk} = - \frac{5 k p_k}{2 m_k} \frac{b_{jk}}{b_{22} b_{33} - b_{23} b_{32}}.$$

Величины $\vec{F}_{jk}$, Q_{jk} , E_{jk} , H_{jk} , a_{jk} , b_{jk} ($j, k = 2, 3, k \neq j$) определяются выражениями (50), (51), (45), (46), (35), а E_{1j} , E_{j1} , H_{1j} , H_{j1} , $\vec{F}_{1j}$, $\vec{F}_{j1}$, Q_{1j} , Q_{j1} ($j = 2, 3$) — выражениями (65) — (68).

Уравнения (47) — (49) при $N = 3$ совместно с определенными выше $\vec{\sigma}_i$, $\vec{q}_i$, E_{ij} , $\vec{F}_{ij}$, Q_{ij} , H_{ij} составляют систему уравнений трех-скоростной трехтемпературной газодинамики для тройной смеси с $m_1 \ll m_2 \sim m_3$.

Можно ожидать, что в подсистеме тяжелых газов в силу $m_2 \sim m_3$ быстро установятся общие для них гидродинамическая скорость и температура, отличные от скорости и температуры легкого газа, т. е. в тройной смеси реализуется двухскоростная двухтемпературная газодинамика. Выясним возможность такого описания и получим соответствующие уравнения.

Введем вместо $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ среднюю и диффузионные скорости

$$\vec{u}_h = (\rho_2 \vec{u}_2 + \rho_3 \vec{u}_3) / \rho_h, \quad \rho_h = \rho_2 + \rho_3, \quad \vec{V}_2 = \vec{u}_2 - \vec{u}_h = \frac{\rho_3}{\rho_h} \vec{u}_{23},$$

$\vec{V}_3 = -\rho_2 \vec{V}_2 / \rho_3$ (индекс h от английского слова heavy — тяжелый). Вычитая уравнения импульса для второго и третьего ком-

понентов смеси друг от друга, получаем

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \vec{u}_{23} + \vec{u}_h \cdot \vec{\nabla} \vec{u}_{23} + \vec{u}_{23} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}_h + \frac{\rho_3 - \rho_2}{\rho_h} \vec{u}_{23} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}_{23} + \\
 & + \frac{1}{2} \vec{u}_{23} \vec{u}_{23} \cdot \vec{\nabla} \frac{\rho_3 - \rho_2}{\rho_h} - \frac{1}{\rho_2} \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}_2 + \frac{1}{\rho_3} \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}_3 = - \frac{1}{\rho_2} \vec{\nabla} p_2 + \frac{1}{\rho_3} \vec{\nabla} p_3 + \\
 & + \frac{16}{3(m_2 + m_3)} \rho_h \Omega_{23}^{(1,1)} \vec{V}_2 + \frac{16 \rho_1}{3 m_2} \Omega_{12}^{(1,1)} [(\vec{u}_h - \vec{u}_1) + \vec{V}_2] - \\
 & - \frac{16 \rho_1}{3 m_3} \Omega_{13}^{(1,1)} [(\vec{u}_h - \vec{u}_1) + \vec{V}_3] + \frac{16 m_1}{3 k T_1} \left(\frac{X_{12}}{m_2} \Omega_{12}^{(1,1)} - \frac{X_{13}}{m_3} \Omega_{13}^{(1,1)} \right) \vec{q}_1 - \\
 & - \frac{32}{3(m_2 + m_3) v_{T,23}^2} X_{23} \Omega_{23}^{(1,1)} \left[\left(\frac{\vec{q}_2}{\rho_2} - \frac{\vec{q}_3}{\rho_3} \right) - \left(\frac{\vec{\sigma}_2}{\rho_2} + \frac{\vec{\sigma}_3}{\rho_3} \right) \cdot \vec{u}_{23} \right]. \quad (73)
 \end{aligned}$$

Как и при нахождении приближенных решений уравнений для $\vec{\sigma}_i$ и $\vec{q}_i$, примем, что характерное газодинамическое время течения $\gg$ времени релаксации для $\vec{u}_{23}$. Тогда в (73) можно пренебречь левой частью. Члены с X_{ij} являются аналогами термодиффузионных членов, для простоты их также опустим. В результате получим следующее выражение для диффузионной скорости:

$$\vec{u}_{23} = \frac{\left(-\frac{1}{\rho_2} \vec{\nabla} p_2 + \frac{1}{\rho_3} \vec{\nabla} p_3 \right) + \rho_1 \left(\frac{1}{m_2} \Omega_{12}^{(1,1)} - \frac{1}{m_3} \Omega_{13}^{(1,1)} \right) (\vec{u}_1 - \vec{u}_h)}{\frac{\rho_3}{m_2} \Omega_{12}^{(1,1)} + \frac{\rho_2}{m_3} \Omega_{13}^{(1,1)} + \frac{\rho_h}{m_2 + m_3} \Omega_{23}^{(1,1)}}. \quad (74)$$

Из (74) следует, что в рассматриваемой тройной смеси ($m_1 \ll m_2 \sim m_3$) диффузия между тяжелыми молекулами состоит из двух совершенно различных частей. Первая часть зависит от $\vec{\nabla} p_i$ ($i=2, 3$) и $\sim \text{Kn}$, при $T_i \rightarrow T_1$ она переходит в классическое выражение для диффузионной скорости, описывающее баро- и концентрационную диффузии. Вторая часть — это новый вид диффузии, обусловленный несовпадением гидродинамических скоростей легкого газа и бинарной смеси из тяжелых молекул и не имеющий аналога в односкоростном однотемпературном случае. Она возникает из-за того, что тяжелые молекулы сортов 2 и 3 отличаются между собой по массам и эффективным сечениям и по-разному взаимодействуют с легкими молекулами (рассеиваются на разные углы). Средний результат после многих столкновений выглядит как пространственное разделение компонентов 2 и 3. Столкновения между тяжелыми молекулами разных сортов, как видно из (74), уменьшают диффузионную скорость.

Ранее аналогичный механизм диффузии был предложен и исследован в [20, 21] в случае низкой плотности тяжелых молекул на основе уравнений, описывающих движение стдальной

молекулы. Эта диффузия является преобладающей: коэффициент при $\vec{u}_1 - \vec{u}_h$ не зависит от Kn и ~ 1 , а отношение второй части к первой в (74) является величиной $\sim \text{Kn}^{-1} \gg 1$ (предполагается, что u_1, u_h порядка скорости звука).

При $T_1 = T_2 = T_3$ и $|\vec{u}_1 - \vec{u}_h| \sim \text{Kn}$ (74) можно преобразовать в одно из соотношений Стефана — Максвелла (выражения для диффузионных скоростей, разрешенные относительно диффузионных сил).

Аналогично можно показать, что возникает также большое различие в температурах между тяжелыми компонентами смеси. Введем вместо T_2 и T_3 общую температуру T_h и разность температур T_{23}

$$T_h = (n_2 T_2 + n_3 T_3)/n_h + \rho_2 \rho_3 u_{23}^2 / (3k n_h \rho_h), \quad T_{23} = T_2 - T_3.$$

Вычитая уравнения энергии для второго и третьего компонентов друг от друга, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} T_{23} + \vec{u}_h \cdot \vec{\nabla} T_{23} + \vec{u}_{23} \cdot \vec{\nabla} T'_h + \frac{2}{3} T_{23} \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_h + \frac{2}{3} T'_h \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{23} + \\ & + \frac{n_3 \rho_3 - n_2 \rho_2}{n_h \rho_h} \left(\vec{u}_{23} \cdot \vec{\nabla} T_{23} + \frac{2}{3} T_{23} \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{23} \right) + T_{23} \vec{u}_{23} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{n_3}{n_h} + \frac{2}{3} \frac{\rho_3}{\rho_h} \right) - \\ & - \frac{2}{3k n_2} \left[\vec{\sigma}_2 : \left(\vec{\nabla} \vec{u}_h + \frac{\rho_3}{\rho_h} \vec{\nabla} \vec{u}_{23} + \vec{u}_{23} \vec{\nabla} \frac{\rho_3}{\rho_h} \right) + \frac{2}{3k n_3} \vec{\sigma}_3 : \left(\vec{\nabla} \vec{u}_h - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\rho_2}{\rho_h} \vec{\nabla} \vec{u}_{23} - \vec{u}_{23} \vec{\nabla} \frac{\rho_2}{\rho_h} \right) \right] + \frac{2}{3k} \left(\frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{q}_2}{n_2} - \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{q}_3}{n_3} \right) = \\ & = - \frac{32}{3} \rho_1 \left(\frac{1}{m_2} \Omega_{12}^{(1,1)} - \frac{1}{m_3} \Omega_{13}^{(1,1)} \right) (T_1 - T'_h) - \frac{32}{3} \left[n_h M_{23} M_{32} \Omega_{23}^{(1,1)} + \right. \\ & + \frac{\rho_1}{n_h} \left(\frac{n_3}{m_2} \Omega_{12}^{(1,1)} + \frac{n_2}{m_3} \Omega_{13}^{(1,1)} \right) \left. \right] T_{23} + \frac{64}{9(m_2 + m_3) v_{T,23}^2} \Omega_{23}^{(1,1)} \left\{ \left[(\rho_3 - \rho_2) T'_h + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{n_2 \rho_2 + n_3 \rho_3}{n_h} T_{23} \right] u_{23}^2 - \frac{4}{m_2 + m_3} \left(\frac{\rho_3 - \rho_2}{k n_2 n_3} X_{23} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{7}{v_{T,23}^2} Y_{23} T_{23} \right) (\rho_3 \vec{q}_2 - \rho_2 \vec{q}_3) \cdot \vec{u}_{23} - 3 X_{23} \left(\frac{\rho_3}{n_2} \vec{q}_2 + \frac{\rho_2}{n_3} \vec{q}_3 \right) \cdot \vec{u}_{23} \right\}. \quad (75) \end{aligned}$$

Здесь использовано обозначение [11] $T'_h = T_h - \rho_2 \rho_3 u_{23}^2 / (3k n_h \rho_h)$.

При допущениях и упрощениях, принятых при получении (74), из (75) следует

$$T_{23} = \frac{\rho_1 \left(\frac{1}{m_2} \Omega_{12}^{(1,1)} - \frac{1}{m_3} \Omega_{13}^{(1,1)} \right) (T_1 - T_h) - \frac{2}{3} \frac{\rho_3 - \rho_2}{m_2 + m_3} T'_h \Omega_{23}^{(1,1)} \frac{u_{23}^2}{v_{T,23}^2}}{n_h M_{23} M_{32} \Omega_{23}^{(1,1)} + \frac{\rho_1}{n_h} \left(\frac{n_3}{m_2} \Omega_{12}^{(1,1)} + \frac{n_2}{m_3} \Omega_{13}^{(1,1)} \right)}. \quad (76)$$

Здесь в числителе сохранено слагаемое с $u_{23}^2/v_{T,23}^2$, так как при достаточно близких значениях T_1 и T_h оно может быть сравнимым с первым членом. В знаменателе аналогичное слагаемое отброшено, поскольку по отношению к другим слагаемым оно всегда мало и $\sim u_{23}^2/v_{T,23}^2 \ll 1$. Из (76) видно, что разность температур тяжелых компонентов смеси вызывается двумя причинами. Первый член в (76) — это теплообмен (точнее, различие в теплообмене) между легким газом и тяжелыми компонентами смеси. Второй член учитывает изменения температур вследствие изменения кинетической энергии диффузионных движений.

Таким образом, вследствие обмена импульсом и энергией с легким газом в тяжелых компонентах рассматриваемой тройной смеси возникают большие (сравнимые с самими скоростями и температурами компонентов смеси) и не зависящие от числа Кнудсена разности скоростей и температур, даже если первоначально тяжелые компоненты имели одинаковые температуры и скорости. Поэтому одножидкостное описание подсистемы тяжелых газов становится некорректным. Необходимо вернуться к уравнениям трехскоростной трехтемпературной газодинамики.

В заключении этого параграфа приведем уравнения баланса энтропии в многоскоростной многотемпературной газодинамике смесей газов. Определим парциальные энтропии s_i с помощью соотношений

$$T_i ds_i = d e_i + p_i d\rho_i^{-1}, \quad (77)$$

где $e_i = \frac{3}{2} kT_i$. Далее дифференцируя выражение (77) по времени и исключая производные $\frac{\partial T_i}{\partial t}, \frac{\partial \rho_i}{\partial t}$ с помощью газодинамических уравнений для T_i и ρ_i , придем к уравнению баланса энтропии s и выражениям для $s_i, \vec{J}_s$ и σ , где $s = \sum_i \rho_i s_i$, $\vec{J}_s$ — плотность потока энтропии, σ — источник энтропии [22].

В частности, ограничиваясь эйлеровским приближением, получим уравнение баланса парциальной энтропии

$$\rho_i T_i \frac{d_i s_i}{dt} = \kappa_{ij} K (\vec{u}_i - \vec{u}_j)^2 - q (T_i - T_j), \quad i = 1, 2, \quad (78)$$

где $q = \frac{3k}{m_i + m_j} K = 16k \frac{\rho_i \rho_j}{(m_i + m_j)^2} \Omega_{ij}^{(1,1)}$. Проведя в (78) суммирование по компонентам смеси, получим уравнение баланса энтропии смеси

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho s) &= \vec{\nabla} \cdot \left(\sum_i \rho_i s_i \vec{u}_i + \vec{J}_s \right) + \sigma, \\ \rho s &= k \sum_i n_i \left[\frac{3}{2} - \ln \left(\frac{n_i}{e} \left(\frac{m_i}{2\pi k T_i} \right)^{3/2} \right) \right], \quad \vec{J}_s = 0, \\ \sigma &= \sum_{i < j} \sum Q_{ij} \left(\frac{1}{T_i} - \frac{1}{T_j} \right) + \sum_{i < j} \sum \vec{F}_{ij} \vec{u}_{ij} \left(\frac{\kappa_{ij}}{T_i} + \frac{\kappa_{ji}}{T_j} \right), \end{aligned} \quad (79)$$

где Q_i и $\vec{F}_i$ определяются выражениями (39), (40). Из (78) следует, что при определенных значениях величин u_{ij}^2 и $(T_i - T_j)$ возможна ситуация, когда энтропия одного из компонентов смеси возрастает, а энтропия другого — убывает. Но энтропия смеси s , как следует из (79), всегда возрастает.

§ 2. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРОВСКОГО УРОВНЯ ДВУХСКОРОСТНОЙ ДВУХТЕМПЕРАТУРНОЙ ГАЗОДИНАМИКИ СМЕСИ ГАЗОВ

В этом параграфе, так же, как в гл. 1 для смеси газа с твердыми частицами, будут найдены все законы сохранения вида (1.2.2) системы уравнений (1.36) — (1.40), которая после преобразования примет вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \rho_i + \vec{\nabla} (\rho_i \vec{u}_i) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho_i \vec{u}_i) + \vec{\Phi}_i + \vec{\nabla} p_i &= \vec{F}_i, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho_i e_i + \rho_i u_i^2/2) + \vec{\nabla} \left[\rho_i \vec{u}_i \left(e_i + \frac{u_i^2}{2} \right) + p_i \vec{u}_i \right] &= Q_i, \\ e_i = c_{vi} T_i, p_i = R_i \rho_i T_i, (R_i, c_{vi} = \text{const}), i &= 1, 2,\end{aligned}\tag{1}$$

где $\rho_i, \vec{u}_i = (u_i, v_i, w_i), T_i$ — плотность, вектор скорости и температура i -го компонента смеси

$$\begin{aligned}\vec{F}_i &= (F_{1i}, F_{2i}, F_{3i}) = K(\vec{u}_j - \vec{u}_i), Q_i = K\kappa_i(\vec{u}_j - \vec{u}_i)^2 + q(T_j - T_i), \\ \vec{\Phi}_i &= (\Phi_{1i}, \Phi_{2i}, \Phi_{3i}), \Phi_{1i} = \vec{\nabla} (\rho_i u_i \vec{u}_i), \Phi_{2i} = \vec{\nabla} (\rho_i v_i \vec{u}_i), \\ \Phi_{3i} &= \vec{\nabla} (\rho_i w_i \vec{u}_i), i, j = 1, 2, j \neq i \quad (\kappa_i = \beta_{ij}).\end{aligned}$$

Коэффициенты K, q, κ_i определены выражениями (1.39) — (1.40) и не зависят от производных искомых величин, т. е. от $\partial \rho_i / \partial t, \partial \rho_i / \partial x, \partial u_i / \partial t$ и т. д. Система уравнений (1) уже записана в виде законов сохранения, т. е. консервативна.

Далее, как и в гл. 1, символ ∂/∂ означает дифференцирование в системе независимых переменных t, x, y, z , а дифференцирование в системе переменных $t, x, y, z, u_i, v_i, w_i, e_i, \rho_i$ отмечается индексами. Совокупность переменных t, x, y, z будем обозначать через S , а совокупность u_i, v_i, w_i — через $\vec{u}_i$.

Для вывода законов сохранения продифференцируем (1.2.2) и исключим производные от $\rho_i, \vec{u}_i, e_i$ по t с помощью (1). В результате получим равенство, линейно зависящее от производных $\rho_i, \vec{u}_i, e_i$ по x, y, z . Приравнявая нулю коэффициенты при этих производных и свободный член, находим систему из 31 уравне-

ния для определения 5 функций — A, B, C, D, E :

$$\begin{aligned}
 & A_t + B_x + C_y + D_z + F_{11}A_{u_1}/\rho_1 + F_{12}A_{u_2}/\rho_2 + F_{21}A_{v_1}/\rho_1 + \\
 & + F_{22}A_{v_2}/\rho_2 + F_{31}A_{w_1}/\rho_1 + F_{32}A_{w_2}/\rho_2 + Q_1A_{e_1}/\rho_1 + Q_2A_{e_2}/\rho_2 = E, \\
 & B_{u_i} - u_iA_{u_i} - \rho_iA_{\rho_i} - e_i(\gamma_i - 1)A_{e_i} = 0, \\
 & B_{v_i} - u_iA_{v_i} = 0, \quad B_{w_i} - u_iA_{w_i} = 0, \\
 & B_{\rho_i} - e_i(\gamma_i - 1)A_{u_i}/\rho_i - u_iA_{\rho_i} = 0, \quad B_{e_i} - (\gamma_i - 1)A_{u_i} - u_iA_{e_i} = 0, \\
 & \dots \dots \dots \\
 & D_{e_i} - (\gamma_i - 1)A_{w_i} - w_iA_{e_i} = 0, \quad \gamma_i = R_i/c_{v_i} + 1, \quad i = 1, 2.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Тридцать уравнений системы (2), начиная со второго, разделяются на три группы по десять уравнений. Две последние группы получаются из первых десяти уравнений соответствующей перестановкой $u_i \rightleftharpoons v_i$, $B \rightarrow C$ и $u_i \rightleftharpoons w_i$, $B \rightarrow D$, $i = 1, 2$.

Общее решение для фиксированного i первой группы уравнений найдено в [23] и в нашем случае имеет вид

$$\begin{aligned}
 A &= \Theta_i(S, \rho_i, e_i, \vec{u}_i) \rho_j (\vec{u}_j^2/2 + e_j) + v_i(S, \rho_i, e_i, \vec{u}_i) \rho_j u_j + \\
 &+ \sigma_i(S, \rho_i, e_i, \vec{u}_i) \rho_j v_j + \omega_i(S, \rho_i, e_i, \vec{u}_i) \rho_j w_j - (\gamma_j - 1) \lambda_i(S, \rho_i, \\
 &e_i, \vec{u}_i) + \rho_j \Lambda_i(S, \rho_i, \vec{u}_i, e_i, L_j), \\
 B &= \Theta_i \rho_j u_j (\gamma_j e_j + \vec{u}_j^2/2) + v_i \rho_j (u_j^2 + (\gamma_j - 1) e_j) + \sigma_i \rho_j u_j v_j + \\
 &+ \omega_i \rho_j u_j w_j + (\gamma_j - 1) \mu_i(S, \rho_i, e_i, \vec{u}_i) + \rho_j u_j \Lambda_i, \\
 C &= \Theta_i \rho_j v_j (\gamma_j e_j + \vec{u}_j^2/2) + v_i \rho_j u_j v_j + \sigma_i \rho_j (v_j^2 + (\gamma_j - 1) e_j) + \\
 &+ \omega_i \rho_j v_j w_j + (\gamma_j - 1) \chi_i(S, \rho_i, e_i, \vec{u}_i) + \rho_j u_j \Lambda_i, \\
 D &= \Theta_i \rho_j w_j (\gamma_j e_j + \vec{u}_j^2/2) + v_i \rho_j u_j w_j + \sigma_i \rho_j w_j v_j + \omega_i \rho_j ((\gamma_j - 1) e_j + \\
 &+ w_j^2) + (\gamma_j - 1) \xi_i(S, \rho_i, e_i, \vec{u}_i) + \rho_j w_j \Lambda_i,
 \end{aligned}$$

где $i, j = 1, 2, i \neq j$, $L_i = \rho_i e_i^{-1/(\gamma_i - 1)}$.

Сравнивая выражения для A, B, C, D при разных i , находим

$$\begin{aligned}
 A &= a_1 \rho_1 (e_1 + \vec{u}_1^2/2) + a_2 \rho_1 u_1 + a_3 \rho_1 v_1 + a_4 \rho_1 w_1 + b_1 \rho_2 (e_2 + \vec{u}_2^2/2) + \\
 &+ b_2 \rho_2 u_2 + b_3 \rho_2 v_2 + b_4 \rho_2 w_2 + \rho_2 a_5 + \rho_1 b_5 + \varphi, \\
 B &= a_1 \rho_1 u_1 (\gamma_1 e_1 + \vec{u}_1^2/2) + a_2 \rho_1 (u_1^2 + (\gamma_1 - 1) e_1) + a_3 \rho_1 u_1 v_1 + \\
 &+ a_4 \rho_1 u_1 w_1 + b_1 \rho_2 u_2 (\gamma_2 e_2 + \vec{u}_2^2/2) + b_2 \rho_2 (u_2^2 + (\gamma_2 - 1) e_2) + \\
 &+ b_3 \rho_2 u_2 v_2 + b_4 \rho_2 u_2 w_2 + \rho_1 u_1 b_5 + \rho_2 u_2 a_5 + \eta_1, \\
 C &= a_1 \rho_1 v_1 (\gamma_1 e_1 + \vec{u}_1^2/2) + a_2 \rho_1 u_1 v_1 + a_3 \rho_1 (v_1^2 + (\gamma_1 - 1) e_1) + \\
 &+ a_4 \rho_1 v_1 w_1 + b_1 \rho_2 v_2 (\gamma_2 e_2 + \vec{u}_2^2/2) + b_2 \rho_2 u_2 v_2 + \\
 &+ b_3 \rho_2 (v_2^2 + (\gamma_2 - 1) e_2) + b_4 \rho_2 v_2 w_2 + \rho_1 v_1 b_5 + \rho_2 v_2 a_5 + \eta_2,
 \end{aligned} \tag{3}$$

$$D = a_1 \rho_1 w_1 (\gamma_1 e_1 + \vec{u}_1^2/2) + a_2 \rho_1 u_1 w_1 + a_3 \rho_1 v_1 w_1 + \\ + a_4 \rho_1 (w_1^2 + (\gamma_1 - 1) e_1) + b_1 \rho_2 w_2 (\gamma_2 e_2 + \vec{u}_2^2/2) + b_2 \rho_2 u_2 w_2 + \\ + b_3 \rho_2 v_2 w_2 + b_4 \rho_2 (w_2^2 + (\gamma_2 - 1) e_2) + \rho_2 w_2 a_5 + \rho_1 w_1 b_5 + \eta_3,$$

где $a_i(S)$, $b_i(S)$, $i=1, \dots, 4$, $\varphi(S)$, $\eta_i(S)$, $i=1, 2, 3$, $a_5(S, L_2)$, $b_5(S, L_1)$ — произвольные функции своих аргументов.

Формулы (3) в совокупности с первым уравнением (2) дают полный набор законов сохранения для системы (1).

Для получения дивергентных законов сохранения подставим (3) в первое уравнение системы (2), положив $E \equiv 0$. Приравняв нулю коэффициенты при линейно независимых комбинациях величин u_i , v_i , w_i , ρ_i , e_i , $i=1, 2$, находим

$$\begin{aligned} a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \quad a_3 = b_3, \quad a_4 = b_4, \quad a_5 L_2 = b_5 L_1 = 0, \\ a_{1x} = a_{1y} = a_{1z} = 0, \quad a_{2x} = a_{3y} = a_{4z}, \\ a_{1t} + 2a_{2x} = 0, \quad a_{1t} + 2a_{3y} = 0, \quad a_{1t} + 2a_{4z} = 0, \\ a_{2t} + a_{5x} = 0, \quad a_{3t} + a_{5y} = 0, \quad a_{4t} + a_{5z} = 0, \\ a_{3x} + a_{2y} = 0, \quad a_{4x} + a_{2z} = 0, \quad a_{4y} + a_{3z} = 0, \\ a_{5t} = 0, \quad -\varphi_t + \eta_{1x} + \eta_{2y} + \eta_{3z} = 0, \\ a_{1t} + (a_{2x} + a_{3y} + a_{4z})(\gamma_1 - 1) = 0, \quad b_{1t} + (b_{2x} + b_{3y} + b_{4z})(\gamma_2 - 1) = 0, \\ b_{5t} = 0, \quad a_{5x} = b_{5x}, \quad a_{5y} = b_{5y}, \quad a_{5z} = b_{5z}. \end{aligned} \quad (4)$$

При выводе (4) предполагалось, что K , κ и q — положительные постоянные.

Общее решение системы уравнений (4) при $\gamma_1 = \gamma_2 = 5/3$ имеет вид

$$\begin{aligned} a_1 &= 2(C_1 + C_{14}t^2 + C_{13}t), \\ a_2 &= C_2 - 2C_{14}tx - C_{13}x + C_8y - C_9z + C_5t, \\ a_3 &= C_3 - 2C_{14}ty - C_{13}y + C_{10}z - C_8x + C_6t, \\ a_4 &= C_4 - 2C_{14}tz - C_{13}z + C_8x - C_{10}y + C_7t, \\ a_5 &= C_{14}(x^2 + y^2 + z^2) - C_5x - C_6y - C_7z + C_{12}, \\ b_5 &= C_{14}(x^2 + y^2 + z^2) - C_5x - C_6y - C_7z + C_{11}, \end{aligned} \quad (5)$$

где C_i — произвольные постоянные. При невыполнении равенства $\gamma_1 = \gamma_2 = 5/3$ в (5) необходимо положить $C_{13} = C_{14} = 0$. Подставляя в (1.2.2) соотношение (3) и учитывая (4), (5), имеем искомую полную форму дивергентных законов сохранения системы (1), выбирая в которой одну из C_i ($i=1, \dots, 12$) не равной нулю, при остальных величинах из этого набора, равных нулю, и $C_{13} = C_{14} = 0$, получим полную систему линейно независимых дивергентных законов сохранения с составляющими

$$\begin{aligned} A_1 &= \rho_1 \left(e_1 + \vec{u}_1^2/2 \right) + \rho_2 \left(e_2 + \vec{u}_2^2/2 \right), \\ \vec{B}_1 &= \rho_1 \vec{u}_1 \left(\gamma_1 e_1 + \vec{u}_1^2/2 \right) + \rho_2 \vec{u}_2 \left(\gamma_2 e_2 + \vec{u}_2^2/2 \right), \end{aligned}$$

а $A_i, \vec{B}_i, i = 2, \dots, 12$, совпадают с соответствующими величинами, найденными в гл. 1 для системы (1.2.4). Если $\gamma_1 = \gamma_2 = 5/3$, то $C_{13} \neq 0, C_{14} \neq 0$ и дополнительно образуются дивергентные законы сохранения с составляющими

$$\begin{aligned} A_{13} &= 2A_1 t^2 - 2A_2 t x - 2A_3 t y - 2A_4 t z + \rho(x^2 + y^2 + z^2), \\ \vec{B}_{13} &= 2\vec{B}_1 t^2 - 2\vec{B}_2 t x - 2\vec{B}_3 t y - 2\vec{B}_4 t z + (\rho_1 \vec{u}_1 + \rho_2 \vec{u}_2)(x^2 + y^2 + z^2), \\ A_{14} &= 2A_1 t - A_2 x - A_3 y - A_4 z, \\ \vec{B}_{14} &= 2\vec{B}_1 t - \vec{B}_2 x - \vec{B}_3 y - \vec{B}_4 z, \quad \rho = \rho_1 + \rho_2. \end{aligned}$$

Таким образом, если K, κ, q — некоторые положительные постоянные, то система (1) имеет двенадцать линейно независимых дивергентных законов сохранения, аналогичных тем, что были найдены для системы (1.2.4), а если $\gamma_1 = \gamma_2 = 5/3$, — то четырнадцать. Следовательно, для газовой смеси одноатомных газов ($\gamma_1 = \gamma_2 = 5/3$) кроме классических законов сохранения имеются еще дополнительные дивергентные законы сохранения, как и в газовой динамике совершенного одноатомного газа [23, 24].

В случае нестационарных плоских течений дополнительные дивергентные законы сохранения имеют место при $\gamma_1 = \gamma_2 = 2$, а для нестационарных одномерных движений с плоскими волнами — при $\gamma_1 = \gamma_2 = 3$. Аналогично могут быть найдены и все законы сохранения вида

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = D$$

для стационарных течений газовых смесей. Опуская выкладки, будем иметь [25]

$$\begin{aligned} A &= (\rho_1 u_1^2 + p_1) a_1^{(2)}(\vec{x}) + \rho_1 u_1 v_1 a_2^{(2)}(\vec{x}) + \rho_1 u_1 w_1 a_3^{(2)}(\vec{x}) + \\ &+ \rho_1 u_1 \varphi_2(L_1, \alpha_1, \vec{x}) + (\rho_2 u_2^2 + p_2) a_1^{(1)}(\vec{x}) + \rho_2 u_2 v_2 a_2^{(1)}(\vec{x}) + \\ &+ \rho_2 u_2 w_2 a_3^{(1)}(\vec{x}) + \rho_2 u_2 \varphi_1(L_2, \alpha_2, \vec{x}) + a_4(\vec{x}), \\ B &= \rho_1 u_1 v_1 a_1^{(2)} + (\rho_1 v_1^2 + p_1) a_2^{(2)} + \rho_1 v_1 w_1 a_3^{(2)} + \rho_1 v_1 \varphi_2 + \\ &+ \rho_2 u_2 v_2 a_1^{(1)} + (\rho_2 v_2^2 + p_2) a_2^{(1)} + \rho_2 v_2 w_2 a_3^{(1)} + \rho_2 v_2 \varphi_1 + a_5(\vec{x}), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} C &= \rho_1 u_1 w_1 a_1^{(2)} + \rho_1 v_1 w_1 a_2^{(2)} + (\rho_1 w_1^2 + p_1) a_3^{(2)} + \\ &+ \rho_1 w_1 \varphi_2 + \rho_2 u_2 w_2 a_1^{(1)} + \rho_2 v_2 w_2 a_2^{(1)} + (\rho_2 w_2^2 + p_2) a_3^{(1)} + \\ &+ \rho_2 w_2 \varphi_1 + a_6(\vec{x}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= A_x + B_y + C_z + a_1^{(2)} F_{11} u_1 + a_2^{(2)} F_{21} v_1 + a_3^{(2)} F_{31} w_1 + a_1^{(1)} F_{12} u_2 + \\ &+ a_2^{(1)} F_{22} v_2 + a_3^{(1)} F_{32} w_2 + \varphi_2 \alpha_1 (Q_1 + \vec{F}_1 \vec{u}_1) + \varphi_1 \alpha_2 (Q_2 + \vec{F}_2 \vec{u}_2) - \\ &- \varphi_0 L_1 L_1 Q_1 / (e_1 (\gamma_1 - 1)) - \varphi_1 L_2 L_2 Q_2 / (e_2 (\gamma_2 - 1)), \end{aligned}$$

где $L_i = \rho_i e_1^{-1/(\gamma_i-1)}$, $\alpha_i = 2\gamma_i e_i + \vec{u}_i^2$, $i = 1, 2$, a_i^j , φ_i , a_i — произвольные функции указанных аргументов.

Пусть K , κ_i , q — положительные постоянные. Тогда для дивергентных законов сохранения получим

$$\begin{aligned} a_1^{(2)} = a_1^{(1)} = C_3 y - C_1 z + C_4, \quad a_2^{(2)} = a_1^{(2)} = C_2 z - C_3 x + C_5, \\ a_3^{(2)} = a_3^{(1)} = C_1 x - C_2 y + C_6, \quad \varphi_1 = C_7 \alpha_2 + C_8, \quad \varphi_2 = C_7 \alpha_1 + C_9. \end{aligned} \quad (7)$$

Если подставить (7) в (6), то получим все дивергентные законы сохранения. Следовательно, если K , κ_i , q — положительные постоянные, то система уравнений (1) в случае стационарных движений имеет следующие линейно независимые дивергентные законы сохранения: массы каждого компонента, количества движения, момента количества движения и полной энергии всей газовой смеси.

§ 3. ХАРАКТЕРИСТИКИ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРОВСКОГО УРОВНЯ. КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ

Для нахождения условий гиперболичности системы уравнений (2.1) удобнее записать ее в ином виде, используя понятие энтропии i -го компонента, введенное в § 1 с помощью соотношения

$$T_i dS_i = de_i + d(1/\rho_i). \quad (1)$$

Тогда уравнение сохранения энергии i -го газа примет вид уравнения баланса энтропии (1.77)

$$\rho_i T_i \frac{d_i S_i}{dt} = K \kappa_i (\vec{u}_j - \vec{u}_i)^2 + q (T_j - T_i). \quad (2)$$

Будем считать, что парциальное давление i -го компонента задается как функция ρ_i и S_i

$$p_i = p_i(\rho_i, S_i), \quad (3)$$

удовлетворяющая условию $\partial p_i / \partial \rho_i > 0$.

Введем обозначение $a_i^2 = \partial p_i / \partial \rho_i$. Величина a_i называется скоростью звука в i -м газе.

В результате исключения в уравнении неразрывности i -го компонента $d_i \rho_i / dt$ с помощью (2) система уравнений (2.1) примет вид

$$\begin{aligned} \rho_i \frac{d_i \vec{u}_i}{dt} + \nabla p_i = \vec{F}_i, \\ \frac{1}{\rho_i a_i} \frac{d_i p_i}{dt} + \vec{\nabla} \vec{u}_i = \Phi_i, \quad \frac{d_i S_i}{dt} = \tilde{Q}_i, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\vec{F}_i = K (\vec{u}_j - \vec{u}_i)$, $\Phi_i = \frac{\tilde{Q}_i}{\rho_i a_i^2} \frac{\partial p_i}{\partial S_i}$,

$$\tilde{Q}_i = [K \kappa_i (\vec{u}_j - \vec{u}_i)^2 + q (T_j - T_i)] / (\rho_i T_i).$$

Здесь, как и в предыдущем параграфе, K, κ_i, q — произвольные функции, не зависящие от производных. Пусть $\vec{N} = (\tau, n_1, n_2, n_3)$ — искомый характеристический вектор, а $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ — пространственная составляющая. Тогда характеристическая матрица системы (4) имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

$$A_i = \begin{pmatrix} \rho_i \chi_i & 0 & 0 & n_1 & 0 \\ 0 & \rho_i \chi_i & 0 & n_2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_i \chi_i & n_3 & 0 \\ n_1 & n_2 & n_3 & \chi_i / (\rho_i a_i^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \chi_i \end{pmatrix},$$

$$\chi_i = \tau + \vec{u}_i \vec{n}.$$

Характеристические векторы определяются из уравнения $\det A(\vec{N}) = 0$. Вычисление определителя дает

$$\rho_1^3 \rho_2^3 b_1 b_2 \chi_1^3 \chi_2^3 (\chi_1^2 - a_1^2 \vec{n}^2) (\chi_2^2 - a_2^2 \vec{n}^2) = 0. \quad (5)$$

Это уравнение десятой степени относительно τ имеет десять вещественных корней: два трехкратных корня $\chi_i = 0$ и четыре простых корня $\varphi_l^\pm = \chi_l^2 - a_l^2 \vec{n}^2 = 0$, $l = 1, 2$.

Таким образом, согласно [26, 27], система (4) при $\partial p_i / \partial \rho_i > 0$ гиперболического типа.

Следуя [26], назовем χ_i и φ_i контактными и звуковыми характеристиками соответственно. Считая, что одноименные характеристические поверхности не совпадают, выпишем условия совместности. Так как при каждом i левая часть системы (4) совпадает с левой частью уравнений газовой динамики, то соотношения на характеристиках легко выписываются.

На $\chi_i = 0$ имеем три соотношения: $d_i S_i / dt = \vec{Q}_i$ и для двух линейно независимых векторов $\vec{\lambda}_i$, удовлетворяющих уравнению

$$\vec{\lambda}_i \vec{n} = 0,$$

$$\vec{\lambda}_i \left(\rho_i \frac{d_i \vec{u}_i}{dt} + \vec{\nabla} p_i \right) = \vec{\lambda}_i \vec{F}_i,$$

а на $\varphi_i^\pm = 0$:

$$\rho_i a_i \left(\vec{n} \frac{d_i \vec{u}_i}{dt} \mp a_i |\vec{n}| \vec{\nabla} \vec{u}_i \right) \mp \left(|\vec{n}| \frac{d_i p_i}{dt} \mp a_i \vec{n} \vec{\nabla} p_i \right) =$$

$$= a_i \vec{n} \vec{F}_i - \rho_i a_i^2 |\vec{n}| \Phi_i, \quad i = 1, 2.$$

При совпадении некоторых характеристических поверхностей соответствующие соотношения объединяются.

Из (5) получим, что для стационарных течений условие гиперболичности имеет вид $|\vec{u}_i| > a_i$.

Система уравнений (2.1) консервативна и согласно результатам допускает дополнительный закон сохранения полной энергии смеси

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho_1 (e_1 + \vec{u}_1^2/2) + \rho_2 (e_2 + \vec{u}_2^2/2)] + \vec{\nabla} [\rho_1 \vec{u}_1 (e_1 + \vec{u}_2^2/2) + \rho_2 \vec{u}_2 (e_2 + \vec{u}_2^2/2) + p_1 \vec{u}_1 + p_2 \vec{u}_2] = 0. \quad (6)$$

Следовательно [28—30], при некоторых ограничениях она приводима к симметричному виду. Используя методику симметризации [28, 29], найдем v_i , на которые нужно умножить каждое уравнение системы (2.1) (в которой вместо третьего уравнения для i -го компонента взят закон сохранения энтропии S_i), чтобы получить (6). Для этого рассмотрим вариацию функции

$$\varphi(\rho_i, \rho_i \vec{u}_i, \rho_i S_i) = \sum_{i=1}^2 \rho_i (e_i + \vec{u}_i^2/2), \text{ где } e_i = e_i(\rho_i, S_i):$$

$$\begin{aligned} d\varphi = & (e_1 + \rho_1 e_{1\rho_1} - S_1 e_{1s_1} - \vec{u}_1^2/2) d\rho_1 + \vec{u}_1 d(\rho_1 \vec{u}_1) + \\ & + e_{1s_1} d(\rho_1 S_1) + (e_2 + \rho_2 e_{2\rho_2} - S_2 e_{2s_2} - \vec{u}_2^2/2) d\rho_2 + \\ & + \vec{u}_2 d(\rho_2 \vec{u}_2) + e_{2s_2} d(\rho_2 S_2). \end{aligned}$$

В результате умножения уравнения неразрывности на $e_i + \rho_i e_{i\rho_i} - S_i e_{is_i} - \vec{u}_i^2/2$, уравнения количества движения на $\vec{u}_i$ и уравнения сохранения энтропии i -го компонента на e_{is_i} и сложения их, с одновременным суммированием по i , получим (6). Следовательно, по аналогии с [28] можно записать систему (2.1) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} L_{v_i}^0 + \sum_{m=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_m} L_{v_i}^m = \mathcal{F}_i, \quad (7)$$

где v_i — множители, использованные для получения закона сохранения (6).

Для того чтобы система уравнений (7) была симметрично-гиперболической, необходимо [29], чтобы матрица

$$L_{v_i v_k}^0 = \begin{pmatrix} L_{v_i v_k}^{01} & 0 \\ 0 & L_{v_i v_k}^{02} \end{pmatrix}$$

была положительно определенной.

Условия положительной определенности матриц $L_{v_i v_k}$ имеют вид [29]

$$\frac{\partial p_i}{\partial \rho_i} = \rho_i e_i \quad v_i > 0, \quad e_{iv_i v_i} e_{is_i s_i} - e_{iv_i s_i}^2 > 0, \quad v_i = 1/\rho_i. \quad (8)$$

Следовательно, согласно [31, 32], задача Коши для системы (2.1) с достаточно гладкими начальными данными, заданными

на поверхности пространственного типа при выполнении (8), является локально корректной.

Аналогичный результат справедлив, если рассмотреть течение бинарной газовой смеси вязких, теплопроводных газов, описываемое системой уравнений

$$\frac{d_i \rho_i}{dt} + \rho_i \vec{\nabla} \vec{u}_i = 0, \quad (9)$$

$$\rho_i \frac{d_i \vec{u}_i}{dt} = - \vec{\nabla} p_i + \vec{F}_i + \vec{\nabla} \left(2\mu_i \vec{\nabla} \vec{u}_i \right) + \vec{\nabla} (\eta_i \vec{\nabla} \vec{u}_i),$$

$$c_{p_i} \rho_i \frac{d_i T_i}{dt} = Q_i + \mu_i \vec{\nabla} \vec{u}_i : \vec{\nabla} \vec{u}_i + \eta_i \vec{\nabla} \vec{u}_i + \vec{\nabla} (\lambda_i \vec{\nabla} T_i), \quad i = 1, 2$$

($\mu_i > 0$, $\eta_i \geq 0$, $\lambda_i > 0$ — парциальные коэффициенты вязкости и теплопроводности) при условии, что F_i и Q_i , определяющие обмен импульсом и энергией между компонентами, не зависят от производных искомых величин. Действительно, в этом случае при фиксированном i система (9) отличается от уравнений сжимаемого вязкого газа только членами, не содержащими производных, и поэтому выполнены условия I—III работы [32], откуда следует локальная корректность задачи Коши при достаточно гладких начальных данных для системы дифференциальных уравнений (9).

Однозначная разрешимость задачи Коши на конечном промежутке времени для системы (9) в случае одномерных движений доказана в работе [33].

Система уравнений навье-стоксовского уровня многоскоростной многотемпературной газодинамики смесей газов (1.47) — (1.49) сводится к системе (9) с $\eta_i = 0$, если пренебречь членами, тождественно равными нулю для максвелловской модели молекул, а также членами порядка $(u_{ij}^2 / v_{T,ij}^2)$.

В дальнейшем течение смеси вязких, теплопроводных газов будет рассматриваться на основе модели (9). Аналогичные уравнения на основе феноменологических законов сохранения предложены в работах [34—39].

ГЛАВА 3

УДАРНЫЕ ВОЛНЫ В ГАЗОВЫХ СМЕСЯХ

§ 1. СООТНОШЕНИЯ НА СИЛЬНОМ РАЗРЫВЕ

1.1. Классификация сильных разрывов

В гл. 2 было показано, что система уравнений двухскоростной двухтемпературной газодинамики смесей в эйлеровском приближении (2.3.1) гиперболического типа. Как известно из теории квазилинейных гиперболических уравнений [1, 2], в решениях

таких систем возможно наличие поверхностей, на которых макроскопические величины терпят разрыв. Рассмотрим движения с сильным разрывом бинарной смеси газов на основе уравнений эйлеровского уровня двухжидкостной гидродинамики (2 3 1)

Пусть существует поверхность сильного разрыва, которая перемещается с течением времени и на которой макроскопические параметры терпят разрыв первого рода, оставаясь непрерывными вне ее. Используя стандартную методику получения соотношений на сильном разрыве [3], предполагая при этом, что величины, описывающие обмен импульсом и энергией между компонентами, конечны на разрыве, получим следующие уравнения сильного разрыва [3]:

$$\begin{aligned} [J_i] &= 0, \quad J_i [\vec{u}_i^\sigma] = 0, \quad J_i [u_i^n] + [p_i] = 0, \\ J_i [e_i + \vec{u}_i^2/2] + [p_i u_i^n] &= 0, \quad J_i = \rho_i (u_i^n - D_n), \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь квадратными скобками обозначена разность значений стоящих в них параметров за и до разрыва, D_n — скорость перемещения поверхности разрыва в направлении внешней нормали к ней $\vec{n}$, $u_i^n = \vec{u}_i \cdot \vec{n}$, $\vec{u}_i^\sigma$ — составляющая вектора $\vec{u}_i$, лежащая в касательной плоскости к поверхности разрыва.

Соотношения $J_i [\vec{u}_i^\sigma] = 0$ в (1) позволяют дать следующую классификацию сильных разрывов:

1) $J_i = 0$ или $u_i^n = D_n$ ($\rho_i \neq 0$), $i = 1, 2$, т. е. через такой разрыв ни один из компонентов смеси не течет. Из (1) следует, что $[p_i] = 0$, $[u_i^n] = 0$. Однако в общем случае может быть $[\rho_i] \neq 0$, $[\vec{u}_i^\sigma] \neq 0$, $[T_i] \neq 0$. Разрывы этого типа называются контактными;

2) $J_1 = 0$, $J_2 \neq 0$, т. е. через разрыв протекает только один из компонентов смеси. Из (1) следует, что необходимо, чтобы $[p_1] = 0$, $[u_1^n] = 0$, $[\vec{u}_1^\sigma] = 0$, но может быть $[\vec{u}_1^\sigma] \neq 0$, $[p_2] \neq 0$, $[u_2^n] \neq 0$, $[\rho_i] \neq 0$, $[T_i] \neq 0$, $i = 1, 2$. Здесь имеет место контактный разрыв в газе 1 и ударный переход в газе 2. Такие разрывы, используя терминологию работ [4, 5], называются комбинированными. Противоположный случай $J_2 = 0$, $J_1 \neq 0$ получается взаимной заменой индексов 1 и 2;

3) $J_i \neq 0$, $i = 1, 2$. Через такой разрыв текут оба газа. В этом случае $[\vec{u}_i^\sigma] = 0$, но может быть $[u_i^n] \neq 0$, $[\rho_i] \neq 0$, $[p_i] \neq 0$, $[T_i] \neq 0$, $i = 1, 2$. Эти разрывы соответствуют ударным волнам.

1.2. Комбинированные разрывы

Введем относительные скорости компонентов $V_i = u_i^n - D_n$ и в дальнейшем будем обозначать $p = p_1 + p_2$ общее давление смеси, а индексами «—» и «+» соответственно значения параметров до и за поверхностью разрыва.

Будем использовать следующие уравнения состояния компонентов смеси:

$$p_i = R_i \rho_i T_i, \quad e_i = c_{vi} T_i, \quad (c_{vi}, R_i = \text{const}), \quad i = 1, 2. \quad (2)$$

Тогда уравнения (1) с учетом (2) для комбинированного разрыва примут вид

$$\begin{aligned} \rho_1^+ V_1^+ &= \rho_1^- V_1^- = 0, \quad p_1^+ = p_1^-, \quad [\vec{u}_1^\sigma] \neq 0, \\ [\rho_1] &\neq 0, \quad [\vec{u}_2^\sigma] = 0, \\ \rho_2^+ V_2^+ &= \rho_2^- V_2^-, \quad \rho_2^+ (V_2^+)^2 + p_2^+ = \rho_2^- (V_2^-)^2 + p_2^-, \\ \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_2^+}{\rho_2^+} + \frac{(V_2^+)^2}{2} &= \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_2^-}{\rho_2^-} + \frac{(V_2^-)^2}{2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь и в дальнейшем будем рассматривать смесь газов, для которой справедливы соотношения $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$, $\gamma_i = R_i/c_{vi} + 1$. Для смеси одноатомных газов $\gamma_1 = \gamma_2 = 5/3$. Исследуем вопрос о разрешимости уравнений (3).

Теорема 1. Для произвольного заданного движения перед фронтом комбинированного разрыва (т. е. известны параметры $u_i^{n-}, \rho_i^-, p_i^-, \vec{u}_i^{\sigma-}$, $i = 1, 2$) существует решение системы (3) при $|u_2^{n-} - u_1^{n-}| > \sqrt{p_2^- (\gamma - 1) / (2\rho_2^-)}$, в котором $\vec{u}_1^{\sigma+}, \rho_1^+$ произвольны, а величины $\rho_2^+, u_2^{n+}, p_i^+, \vec{u}_2^{\sigma+}, D_n$ определяются единственным образом. Кроме того, если $s_2^+ \geq s_2^-$, то $p_2^+ \geq p_2^-, \rho_2^+ \geq \rho_2^-, p^+ \geq p^-, |V^-| \geq a_2^-, |V_2^+| \geq a_2^+, T_2^+ \geq T_2^-$. (В формулировке теоремы a_2 и s_2 — скорость звука и энтропия второго компонента, введенные в гл. 2.)

Доказательство. Из уравнений $\rho_1^+ V_1^+ = \rho_1^- V_1^- = 0$ и $p_1^+ = p_1^-$ следует, что ρ_1^+ и ρ_1^- могут обратиться в нуль только одновременно, но тогда получается случай однокомпонентной среды. Следовательно, $V_1^- = V_1^+ = 0$. Разрешая систему уравнений (2), (3) с учетом последнего равенства, получим

$$p_2^+ = 2\rho_2^- [(u_2^{n-} - u_1^{n-})^2 - p_2^- (\gamma - 1) / (2\rho_2^-)] / (\gamma + 1),$$

$$p^+ = p^- + 2\rho_2^- [(u_2^{n-} - u_1^{n-})^2 - p_2^- \gamma / \rho_2^-] / (\gamma + 1),$$

$$p_1^+ = p_1^-, \quad D_n = u_1^{n-}, \quad u_1^{n+} = D_n,$$

$$\rho_2^+ / \rho_2^- = 1 + 2(p_2^+ - p_2^-) / [p_2^+ (\gamma - 1) + p_2^- (\gamma + 1)],$$

$$(V_2^+)^2 - (a_2^+)^2 = -(\gamma + 1)(p_2^+ - p_2^-) / (2\rho_2^+),$$

$$T_2^+ - T_2^- = (p_2^+ + p_2^-)(p_2^+ - p_2^-) / \{ [p_2^+ (\gamma + 1) + p_2^- (\gamma - 1)] c_{v2} \rho_2^- \}$$

$$\vec{u}_2^{\sigma+} = \vec{u}_2^{\sigma-}, \quad [\vec{u}_1^\sigma] \neq 0, \quad [e_1] \neq 0, \quad [\rho_1] \neq 0.$$

Из данных соотношений очевидно следует справедливость первого утверждения теоремы. Доказательство второго утверждения

может быть легко получено из этих соотношений и следующего неравенства:

$$ds_2^+/dp_2^+ = c_{v2}(\gamma - 1)(p_2^+ - p_2^-)^2 / \{p_2^+ [p_2^+(\gamma + 1) + p_2^-(\gamma - 1)] [p_2^+(\gamma - 1) + p_2^-(\gamma + 1)]\} \geq 0.$$

Таким образом, теорема доказана.

1.3. Разрывы, соответствующие ударным волнам

Предположим, что перед фронтом ударной волны имеет место скоростное и температурное равновесие между компонентами смеси, т. е. $V_1^- = V_2^- = V^-$, $T_1^- = T_2^- = T^-$, и направим нормаль в сторону перед фронтом, откуда смесь перетекает через разрыв. Тогда уравнения сильного разрыва (1) для ударных волн с учетом (2) примут вид

$$\begin{aligned} \rho_i^+ V_i^+ &= \rho_i^- V^-, \quad \rho_i^+ (V_i^+)^2 + p_i^+ = \rho_i^- (V^-)^2 + p_i^-, \\ \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_i^+}{\rho_i^+} + \frac{(V_i^+)^2}{2} &= \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_i^-}{\rho_i^-} + \frac{(V^-)^2}{2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Пусть задано состояние смеси перед фронтом

$$\rho_i^-, p_i^-, u_i^{n-}, \quad i = 1, 2. \quad (5)$$

Для замыкания (4) необходимо задать еще D_n или один из параметров за фронтом. Исследуем вопрос о разрешимости уравнений (4). Исключая в (4) V^- , ρ_i^+ , V_i^+ , получим уравнение, связывающее p_1^+ и p_2^+ ,

$$(p_1^+ - p_1^-)(p_2^+ - p_2^-) [(\gamma + 1)(p_1^+ \rho_2^- - p_2^+ \rho_1^-) + (\gamma - 1) \times \\ \times (p_1^- \rho_2^- - p_2^- \rho_1^-)] = 0.$$

Очевидно, это уравнение имеет три решения:

$$\begin{aligned} \text{а) } p_1^+ &= p_1^-, \quad \text{б) } p_2^+ = p_2^-, \quad \text{в) } p_1^+ = \rho_1^- p_2^+ / \rho_2^- + (\gamma - 1) \times \\ &\times (p_2^- \rho_1^- / \rho_2^- - p_1^-) / (\gamma - 1). \end{aligned} \quad (6)$$

Таким образом, возможны три типа ударных волн. Рассмотрим каждое решение по отдельности.

Теорема 2. Для любого заданного движения (5) существует в случае (6а) единственное решение системы (4), в котором одна из величин p^+ , p_2^+ , ρ_2^+ , D_n имеет произвольно заданное значение с ограничениями $p^+ \geq p_1^-$, $|V^-| > \sqrt{(\gamma - 1) p_2^- / (2 \rho_2^-)}$,

$$(\gamma - 1) \rho_2^- / (\gamma + 1) < \rho_2^+ < (\gamma + 1) \rho_2^- / (\gamma - 1).$$

Если к движению (5) дополнительно задано u_2^{n+} , то соответствующий ударный переход существует, но в зависимости от ве-

личины скачка $[u_2^{n+}]$ возможны одно (при этом $s_2^+ > s_2^-$) или два решения. В последнем случае одно решение соответствует $s_2^+ > s_2^-$, а другое — $s_2^+ < s_2^-$. При $s_2^+ \approx s_2^-$ справедливы неравенства

$$p_2^+ \geq p_2^-, p^+ \geq p^-, \rho_2^+ \geq \rho_2^-, |V^-| \geq a_2^-, |V_2^+| \leq a_2^+.$$

Доказательство. Пусть задано p^+ . Тогда из (4) в случае (6а) получим

$$p_1^+ = p_1^-, \rho_1^+ = \rho_1^-, u_1^{n+} = u_1^{n-}, p_2^+ = p^+ - p_1^-, \quad (7)$$

$$\rho_2^+ = \rho_2^- \frac{p^+(\gamma+1) + p_2^-(\gamma-1) - p_1^-(\gamma+1)}{p^+(\gamma-1) + p_2^-(\gamma+1) - p_1^-(\gamma-1)}, \quad (8)$$

$$(V^-)^2 = (u^{n-} - D_n)^2 = \frac{p^+(\gamma+1) + p_2^-(\gamma-1) - p_1^-(\gamma+1)}{2\rho_2^-}, \quad (9)$$

$$u_2^{n+} = \frac{\rho_2^- V^-}{\rho_2^+} + D_n, \quad (10)$$

$$(u_2^{n+} - u^{n-})^2 = \frac{2(p^+ - p^-)^2}{\rho_2^- [p^+(\gamma+1) + p_2^-(\gamma-1) - p_1^-(\gamma+1)]}. \quad (11)$$

Доказательство первого утверждения непосредственно следует из соотношений (7) — (10). Действительно, если задано $p^+ > p_1^-$, то из (7), (8) получим, что p^+ , ρ_2^+ , u_1^{n+} определяются единственным образом, а из (9) вытекает

$$D_n = u^{n-} \pm \sqrt{\frac{(\gamma+1)p^+ + p_2^-(\gamma-1) - p_1^-(\gamma+1)}{2\rho_2^-}}.$$

Так как $\vec{n}$ направлено в сторону перед фронтом, $u_1^{n-} - D_n = V^- < 0$. Поэтому перед корнем необходимо брать знак «+», т. е. D_n определяется однозначно, а следовательно, из (10) u_2^{n+} находится единственным образом. Если задана одна из величин ρ_2^+ , p_2^+ , D_n с соответствующими ограничениями, то из (7) — (9) однозначно можно найти $p^+ > p_1^-$ и, следовательно, все остальные параметры за разрывом.

Пусть задана u_2 , тогда из рис. 3.1 и формулы (11) можно заключить, что при $|u_2^{n+}| \leq \sqrt{2\rho_2^-/((\gamma-1)\rho_2^-)}$ существует два значения $p^+ \geq p_1^-$, в противном случае — одно. Так как

$$\frac{ds_2^+}{dp^+} = c_{v2} \frac{(\gamma-1)(p^+ - p^-)^2}{p_2^+ [p_2^+(\gamma+1) + p_2^-(\gamma-1)] [p_2^+(\gamma-1) + p_2^-(\gamma+1)]} \geq 0 \quad (12)$$

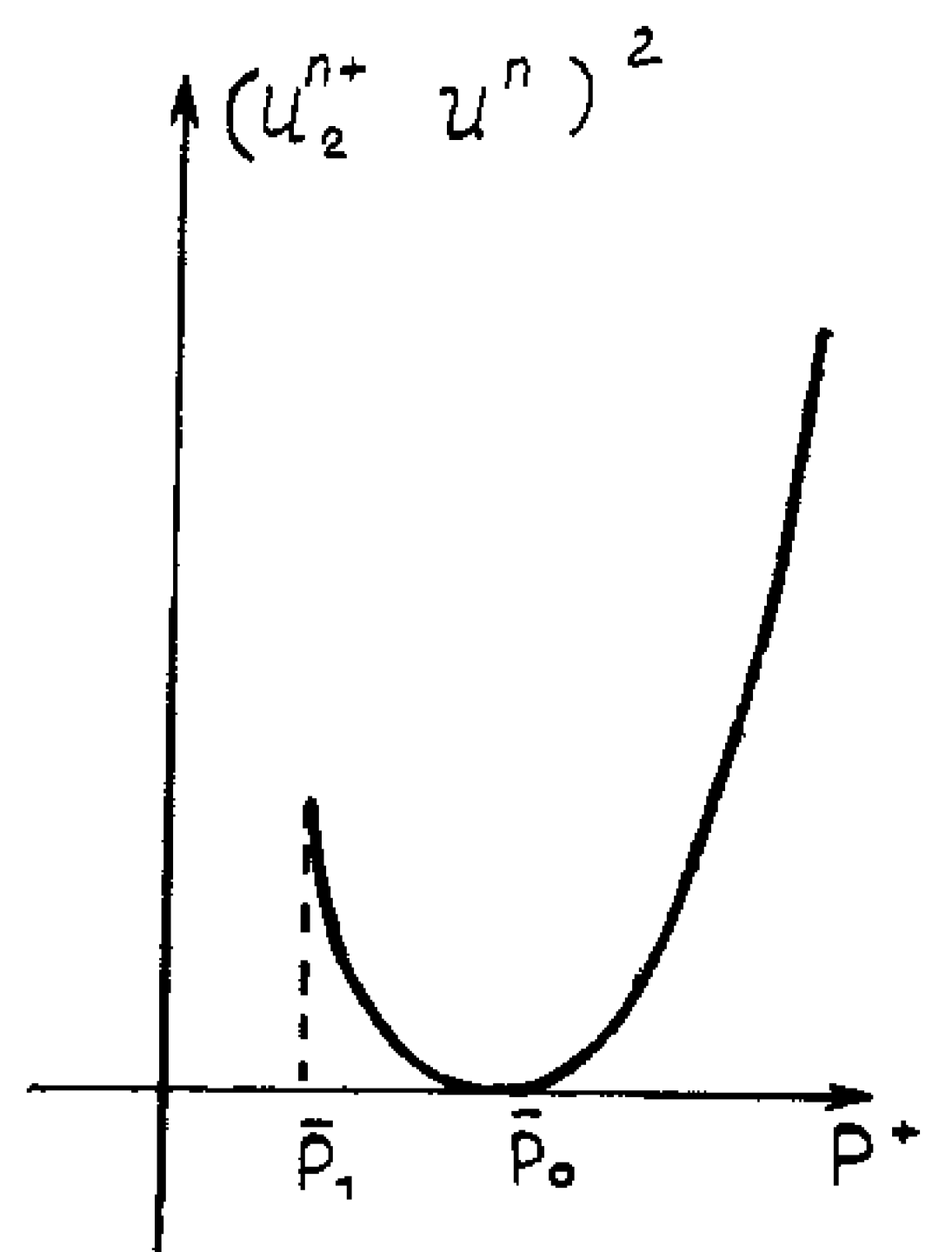


Рис 3.1.

и $s_2|_{p^+=p^-} = s_2^-$, то $p^+ \geq p^-$ при $s_2^+ \geq s_2^-$. Следовательно (см. рис. 3.1), при $|u_2^{n+}| \leq \sqrt{2p_2^-/((\gamma-1)\rho_2^-)}$ одно решение соответствует $s_2^+ < s_2^-$, а другое — $s_2^+ > s_2^-$.

Доказательство последнего утверждения теоремы легко получить из (12) и следующих неравенств:

$$\frac{dp_2^+}{dp^+} = 1, \quad \frac{d\rho_2^+}{dp^+} = \rho_2^- \frac{4\gamma p_2^-}{[p_2^+(\gamma-1) + p_2^-(\gamma+1)]^2} > 0,$$

$$(V^-)^2 - (a_1^-)^2 = \frac{(p^+ - p^-)(\gamma+1)}{2\rho_2^-}, \quad (V_2^+)^2 - (a_2^+)^2 =$$

$$= -\frac{(p^+ - p^-)(\gamma+1)}{2\rho_2^+}.$$

Таким образом, теорема доказана.

Случай (6б) получается из предыдущих результатов перестановкой индексов 1 $\rightleftharpoons$ 2.

В дальнейшем индексом 1 будем обозначать легкий газ.

Теорема 3. В случае (6в) справедливы следующие утверждения:

1) для любого заданного движения (5) существует единственное решение системы (4), в котором одна из величин p^+ , p_i^+ , ρ_i^+ , D_n ($i=1, 2$) имеет произвольно заданное значение с ограничениями

$$p^+ > p^* = (\gamma-1)p_2^-(M_2/M_1-1)/(\gamma+1), \quad p_2^+ > p^*,$$

$$(\gamma-1)\rho_1^-/(\gamma+1) < \rho_1^+ < (\gamma+1)\rho_1^-/(\gamma-1),$$

$$(\gamma^2-1)\rho_2^-/[(\gamma-1)^2+4\gamma M_1/M_2] < \rho_2^+ < (\gamma+1)\rho_2^-/(\gamma-1),$$

$$|V^-| > \sqrt{(\gamma-1)p_1^-/(2\rho_1^-)};$$

2) если задана u_1^{n+} или u_2^{n+} , то в зависимости от абсолютной величины скачка $[u_i^{n+}]$ возможно одно (при этом $s_i^+ > s_i^-$) или два решения. В последнем случае одно решение соответствует $s_i^+ > s_i^-$, а другое — $s_i^+ < s_i^-$;

3) если $s_i^+ > s_i^-$ ($i=1, 2$), то справедливы неравенства

$$p^+ > p^{(1)} = p^- + 2p_2^-\gamma(M_2/M_1-1)/(\gamma+1), \quad p_2^+ > p_1^-,$$

$$p_2^+ > p^{(1)} - p_1^-, \quad |V^-| > a_1^-, \quad |V_i^+| < a_i^+.$$

Если $s_1^+ \leq s_1^-$, $s_2^+ > s_2^-$ (противоположный случай $s_1^+ > s_1^-$, $s_2^+ \leq s_2^-$ не реализуется), то

$$p^{(1)} \geq p^+ > \max(p^{(2)}, p^*) = p^{(3)}, \quad p_1^- \geq p_1^+ > \rho_1^-(p^{(3)} - p^*)/\rho^-,$$

$$p^{(1)} - p_1^- \geq p_2^+ > p_2^-, \quad a_1^- \geq |V^-| > a_2^-, \quad |V_1^+| \geq a_1^+,$$

$$|V_2^+| < a_2^+, \quad p^{(2)} = p^- + 2\gamma p_1^-(M_1/M_2-1)/(\gamma+1).$$

Если $p^* < p^{(2)}$, то возможно, что $s_i^+ \leq s_i^-$ ($i = 1, 2$), и тогда

$$p^{(2)} > p^+ > p^*, \quad \rho_1^- (p^{(2)} - p^*) / \rho^- \geq p_1^+ > 0, \\ p_2^- \geq p_2^+ > p^*, \quad |V^-| \leq a_2^-, \quad |V_2^+| \geq a_2^+, \quad |V_1^+| > a_1^+,$$

где M_i — масса молекулы i -го компонента, $\rho^- = \rho_1^- + \rho_2^-$ — плотность смеси перед фронтом;

4) нормальная составляющая скорости и температура за разрывом легкого газа меньше соответственно нормальной составляющей скорости и температуры тяжелого газа $u_1^{n+} < u_2^{n+}$, $T_1^+ < T_2^+$.

Доказательство. В случае (6в) из системы (4) можно получить

$$p_1^+ = \frac{\rho_1^-}{\rho^-} (p^+ - p^*), \\ p_2^+ = \frac{\rho_2^- p^+ + \rho_1^- p^*}{\rho^-}, \\ \rho_1^+ = \rho_1^- \frac{(\gamma + 1) p^+ + (\gamma - 1) p^-}{(\gamma - 1) (p^+ + p^-) + 2p^{(1)}}, \\ \rho_2^+ = \rho_2^- \frac{(\gamma + 1) p^+ + (\gamma - 1) p^-}{(\gamma - 1) (p^+ + p^-) + 2p^{(2)}}, \quad (13) \\ (V^-)^2 = (u^{n-} - D_n)^2 = \frac{(\gamma + 1) p^+ + (\gamma - 1) p^-}{2\rho^-}, \\ (u_1^{n+} - u^{n-})^2 = \frac{2(p^+ - p^{(1)})^2}{\rho^- (p^+ (\gamma + 1) + (\gamma - 1) p^-)}, \\ (u_2^{n+} - u^{n-})^2 = \frac{2(p^+ - p^{(2)})^2}{\rho^- (p^+ (\gamma + 1) + (\gamma - 1) p^-)}, \\ V_i^+ = u_i^{n+} - D_n = \rho_i^- V^- / \rho_i^+.$$

Доказательство первого и второго утверждений теоремы, используя (13) и неравенства

$$\frac{ds_i^+}{dp^+} = c_{vi} (\gamma^2 - 1) (\rho_i^- / \rho^-)^3 (p^+ - p^{(i)})^2 / \{p_i^+ [p_i^+ (\gamma + 1) + p_i^- (\gamma - 1)] [p_i^+ (\gamma - 1) + p_i^- (\gamma + 1)]\} \geq 0, \quad (14) \\ s_i^+|_{p^+=p^{(i)}} = s_i^-, \quad i = 1, 2,$$

проводится аналогично случаю (6а) (теорема 2).

Справедливость третьего и четвертого утверждений легко вытекает из (13), (14) и следующих соотношений:

$$(v^-)^2 - (a_i^-)^2 = (p^+ - p^{(i)}) (\gamma + 1) / \rho^-, \\ (V_i^+)^2 - (a_i^+)^2 = - (p^+ - p^{(i)}) (\gamma + 1) \rho_i^- / (\rho_i^+ \rho^-),$$

$$\left| \frac{V_1^+}{V_2^+} \right| - 1 = \frac{4p_2^- \gamma}{p^- (\gamma + 1)} \frac{M_2/M_1 - 1}{p_2^+ (\gamma - 1) + p_2^- (\gamma + 1)} > 0,$$

$$|V_i^+| = D_n - u_i^{n+},$$

$$T_1^+ - T_2^+ = \frac{2(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2 (V^-)^2 R_2} [(V^-)^4 + \gamma R_1 R_2 (T^-)^2] \left(\frac{M_1}{M_2} - 1 \right) < 0.$$

З а м е ч а н и е. Решение типа (бв) допускает возможность существования разрыва, по обе стороны от которого давление смеси одинаково $p^+ = p^-$, а остальные параметры разрывны и имеет место поток обоих компонентов через поверхность разрыва. Необходимое условие существования такого разрыва имеет вид $p^- > p^*$ или $p^- (\gamma - 1) > (\gamma - 1) p_2^- (M_2/M_1 - 1)$. Так как $p^{(1)} > p^- > p^{(2)}$, то в данном случае $s_1^+ < s_1^-$, $s_2^+ > s_1^-$. Кроме того, абсолютная величина относительной скорости перед разрывом равна равновесной скорости звука в газовой смеси, т. е. $|V^-| = a^- = \sqrt{\gamma p^- / \rho^-}$. Для многокомпонентной смеси баротропных сред на возможность существования такого разрыва указывалось в [4].

Таким образом, уравнения сильного разрыва, соответствующего ударной волне, имеют в общем случае три решения. При этом в двух из них характеристики одного из компонентов непрерывны. Аналогичный результат справедлив и в случае, если смесь перед фронтом волны находится в неравновесном состоянии. Действительно, пусть известны движение смеси перед фронтом $(u_i^{n-}, \rho_i^-, p_i^-)$ и скорость распространения разрыва D_n . Тогда, разрешая уравнения сильного разрыва, получим три решения:

$$\text{а) } p_1^+ = p_1^-, p_2^+ = 2\rho_2^- (V_2^-)^2 / (\gamma + 1) - (\gamma - 1) p_2^- / (\gamma + 1),$$

$$\text{б) } p_2^+ = p_2^-, p_1^+ = 2\rho_1^- (V_1^-)^2 / (\gamma + 1) - (\gamma - 1) p_1^- / (\gamma + 1),$$

$$\text{в) } p_i^+ = 2\rho_i^- (V_i^-)^2 / (\gamma + 1) - (\gamma - 1) p_i^- / (\gamma + 1), \quad i = 1, 2.$$

Плотности компонентов и их скорости за разрывом для каждого случая определяются из уравнений

$$\rho_i^+ = \rho_i^- \frac{(\gamma + 1) p_i^+ + (\gamma - 1) p_i^-}{(\gamma - 1) p_i^+ + (\gamma + 1) p_i^-}, \quad u_i^{n+} = D_n + \frac{\rho_i^- V_i^-}{\rho_i^+}, \quad i = 1, 2.$$

Для того чтобы выяснить, какое решение реализуется в ударной волне, далее будет исследована задача о структуре ударной волны в бинарной смеси газов.

§ 2. СТРУКТУРА СТАЦИОНАРНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В БИНАРНОЙ СМЕСИ ГАЗОВ НА ОСНОВЕ ЭЙЛЕРОВСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Будем рассматривать модель многоскоростной многотемпературной газодинамики смесей (ММГС). Задача о структуре ударной волны относится к числу классических. Кроме разнообразных

практических приложений результатов исследований структуры ударных волн в силу относительно простой математической постановки эта задача играет важную роль в изучении свойств математических моделей. Это обусловлено тем, что в ударной волне имеется значительная неравновесность, отсутствуют особенности, связанные с выбором граничных условий, и есть возможность сравнения с данными экспериментов.

В этом параграфе будет качественно исследована структура ударной волны в бинарной смеси газов на основе эйлеровского приближения модели ММГС (2.3.1).

2.1. Постановка задачи. Анализ особых точек

Пусть ударная волна движется с постоянной скоростью D по покоящейся равновесной смеси, расположенной в положительном направлении оси x до $+\infty$, а состояние смеси, возникающее за ударной волной, простирается до $-\infty$ и характеризуется также постоянными значениями. Будем считать, что все искомые функции зависят от $\xi = x - Dt$, т. е. искать решение в системе координат, где профили изменения параметров стационарны. Тогда из системы уравнений (2.3.1), интегрируя уравнения сохранения массы каждого компонента, количества движения и энергии смеси, получим

$$\begin{aligned} \rho_i V_i &= c_i, \quad c_1 V_1 + c_2 V_2 + p = c_3, \\ c_1 (e_1 + V_1^2/2) + c_2 (e_2 + V_2^2/2) + p_1 V_1 + p_2 V_2 &= c_4, \\ c_1 \frac{dV_1}{d\xi} + \frac{dp_1}{d\xi} &= K (V_2 - V_1), \\ c_1 \frac{d(e_1 + V_1^2/2)}{d\xi} + \frac{dp_1 V_1}{d\xi} &= K V_1 (V_2 - V_1) + \\ &+ K \kappa_1 (V_2 - V_1)^2 + q (T_2 - T_1), \\ e_i &= c_{vi} T_i, \quad p_i = R_i \rho_i T_i, \end{aligned} \quad (1)$$

где $V_i = u_i - D$, c_i — постоянные интегрирования. В этом параграфе будем считать, что K , κ_1 , q — положительные постоянные.

Введем безразмерные переменные:

$$\begin{aligned} \bar{V}_i &= \frac{c_1 + c_2}{c_3} V_i, \quad \bar{T}_i = \frac{(R_1 c_1 + R_2 c_2) (c_1 + c_2)}{c_3^2} T_i, \\ \bar{p}_i &= \frac{p_i}{c_3}, \quad \bar{\rho}_i = \frac{c_3}{(c_1 + c_2)^2} \rho_i, \quad \bar{\xi} = \frac{c_1 + c_2}{\mu_*} \xi, \\ \bar{K} &= \frac{\mu_*}{(c_1 + c_2)^2} K, \quad \bar{q} = \frac{\mu_*}{(c_1 + c_2) (R_1 c_1 + R_2 c_2)} q, \end{aligned} \quad (2)$$

где μ_* — обезразмеривающий множитель, имеющий размерность вязкости. Подстановка (2) в (1) с учетом уравнений состояния

приводит к следующей системе уравнений (черта над безразмерными переменными опущена):

$$\begin{aligned}\rho_i V_i &= \alpha_i^0, \quad \alpha_1^0 V_1 + \alpha_2^0 V_2 + m_1^0 T_1/V_1 + m_2^0 T_2/V_2 = 1, \\ \frac{\gamma}{\gamma-1} m_1^0 T_1 + \frac{\gamma}{\gamma-1} m_2^0 T_2 + \frac{\alpha_1^0}{2} V_1^2 + \frac{\alpha_2^0}{2} V_2^2 &= A, \\ \alpha_1^0 \frac{dV_1}{d\xi} + m_1^0 \frac{d(T_1/V_1)}{d\xi} &= K(V_2 - V_1), \\ \alpha_1^0 V_1 \frac{dV_1}{d\xi} + \frac{\gamma}{\gamma-1} m_1^0 \frac{dT_1}{d\xi} &= KV_1(V_2 - V_1) + \\ &+ K\kappa_1(V_2 - V_1)^2 + q(T_2 - T_1),\end{aligned}\tag{3}$$

где $A = c_4(c_1 + c_2)/c_3^2$, α_i^0 и m_i^0 — массовая и объемная (молярная) концентрации i -го компонента перед ударной волной. Для системы уравнений (3) ставится задача:

найти решение системы уравнений (3), стремящееся на бесконечности к постоянным значениям, т. е.

$$\begin{aligned}V_i &\rightarrow V_i^0, \quad T_i \rightarrow T_i^0 \quad \text{при } \xi \rightarrow -\infty, \\ V_i &\rightarrow V_i^1, \quad T_i \rightarrow T_i^1 \quad \text{при } \xi \rightarrow +\infty.\end{aligned}\tag{4}$$

Необходимым условием существования такого решения является, очевидно, требование, чтобы $V_i = V_i^0$, $T_i = T_i^0$ и $V_i = V_i^1$, $T_i = T_i^1$ были стационарными решениями системы (3). Следовательно, $V_1^0 = V_2^0 = V^0$, $T_1^0 = T_2^0 = T^0$, $V_1^1 = V_2^1 = V^1$, $T_1^1 = T_2^1 = T^1$ и в силу первых двух уравнений эти состояния равновесия удовлетворяют соотношениям Гюгонио для равновесной смеси. Из (3) следует, что

$$V^1 = 2\gamma/(\gamma + 1) - V^0, \quad T^0 = V^0(1 - V^0), \quad T^1 = V^1(1 - V^1),\tag{5}$$

V^0 определяется состоянием перед фронтом и скоростью ударной волны D и заключена в пределах $\gamma/(\gamma + 1) < V^0 < 1$, где случай $V^0 = 1$ соответствует бесконечно сильным ударным волнам ($D \rightarrow \infty$), а $V^0 = \gamma/(\gamma + 1)$ — бесконечно слабым ударным волнам ($D = a^0 = \sqrt{\gamma p^0/\rho^0}$ — равновесная скорость звука в смеси перед волной).

Из (3) легко получить следующую зависимость T_1 и T_2 от V_1 и V_2 :

$$\begin{aligned}\frac{\gamma}{\gamma-1} m_2^0 (T_2 - T_1) &= A - \frac{\alpha_1^0}{2} V_1^2 - \frac{\alpha_2^0}{2} V_2^2 - \frac{\gamma}{\gamma-1} T_1, \\ \frac{\gamma}{\gamma-1} m_1^0 T_1 \left(\frac{V_2}{V_1} - 1 \right) &= \frac{\gamma}{\gamma-1} V_2 - A + \frac{\alpha_1^0}{2} V_1^2 - \\ &- \frac{\gamma}{\gamma-1} \alpha_1^0 V_1 V_2 - \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} \alpha_2^0 V_2^2.\end{aligned}\tag{6}$$

Из второго уравнения (6) в силу того, что $T_1 \rightarrow T^0$ при $V_i \rightarrow V^0$

и $T_i \rightarrow T^1$ при $V_i \rightarrow V^1$, следует

$$\frac{V_2 - V^l}{V_1 - V^l} \xrightarrow{V_i \rightarrow V^l} - \frac{\alpha_1^0 (V^l)^2 - \gamma m_1^0 T^l}{\alpha_2^0 (V^l)^2 - \gamma m_2^0 T^l} = k^l, \quad l = 0, 1. \quad (7)$$

Таким образом, в плоскости (V_1, V_2) нужно найти решение, выходящее по заданному направлению из особой точки (V^0, V^0) и приходящее в особую точку (V^1, V^1) также по заданному направлению. Для исследования поведения решения в окрестностях этих особых точек исключим T_i с помощью (6) в дифференциальных уравнениях системы (3). Записывая полученную систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений в виде, разрешенном относительно $dV_1/d\xi$ и $dV_2/d\xi$, и деля одно уравнение на другое, получим

$$\frac{dV_2}{dV_1} = \frac{\tilde{P}(V_1, V_2)}{\tilde{Q}(V_1, V_2)},$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}(V_1, V_2) &= \mathcal{L}_1 \varphi_2, \quad \tilde{Q}(V_1, V_2) = \mathcal{L}_2 \varphi_1, \\ \mathcal{L}_i(V_1, V_2) &= KV_i(V_j - V_i)^2 - K(\gamma - 1)\kappa_i(V_j - V_i)^3 - \\ &\quad - q(\gamma - 1)(\tilde{T}_j - \tilde{T}_i), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\varphi_i = \alpha_i^0 V_i(V_j - V_i) - \gamma m_i^0 \tilde{T}_i / V_i,$$

$$\tilde{T}_i = \frac{V_i}{m_i^0} \left(V_j - \frac{\gamma - 1}{\gamma} A + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \alpha_i^0 V_i^2 - \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \alpha_j^0 V_j^2 - \alpha_i^0 V_i V_j \right),$$

$$i = 1, 2, \quad i \neq j.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что все линейные члены разложения числителя и знаменателя уравнения (8) вблизи стационарных точек (V^l, V^l) равны нулю, т. е. эти точки являются сложными особыми точками и функции $\tilde{P}$ и $\tilde{Q}$ в окрестностях этих точек имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{P} &= d^l(V_2 - V^l)[b^l(V_1 - V^l) + c^l(V_2 - V^l)] + p_1(V_1, V_2) = \\ &= p_0(V_1, V_2) + p_1(V_1, V_2), \\ \tilde{Q} &= d^l(V_1 - V^l)[b^l(V_1 - V^l) + c^l(V_2 - V^l)] + Q_1(V_1, V_2) = \\ &= Q_0(V_1, V_2) + Q_1(V_1, V_2), \end{aligned}$$

где p_1, Q_1 — ряды, состоящие из членов более высокого порядка по $V_i - V^l$, $d^l = [(\gamma + 1)V^l - \gamma]q(\gamma + 1)V^l/(\gamma m_1^0 m_2^0)$, $b^l = \alpha_1^0 V^l - \gamma m_1^0(1 - V^l)$, $c^l = \alpha_2^0 V^l - \gamma m_2^0(1 - V^l)$. Очевидно, что низшие члены разложения обладают свойством: $(V_1 - V^l)p_0 - (V_2 - V^l) \times \times Q_0 = 0$. Следовательно, согласно теореме 64 из [6], для каждого неособого направления $((V_2 - V^l)/(V_1 - V^l) \neq \text{tg } \sigma^l = -b^l/c^l = k^l)$ существует в точности одна траектория, стремящаяся к точке (V^l, V^l) в этом направлении. Для особого же направления может оказаться, что не существует ни одной траектории, стремящейся к (V^l, V^l) в направлении σ^l , либо есть ко-

нечное число таких траекторий, либо, наконец, их бесчисленное множество.

Таким образом, поведение решения в окрестности особых точек (в частности, совпадение особого направления с σ^l) делает возможным постановку исходной задачи с условием (7). Для исследования особых направлений сложных особых точек применим преобразование, которое обычно используется при их анализе [6], а именно: если (V^l, V^l) — сложная особая точка, то совершается переход к новым переменным η_1, η_2 по формулам;

$$V_1 - V^l = \eta_1 \eta_2, \quad V_2 - V^l = \eta_2. \quad (9)$$

Исследование особого направления сводится к анализу уже простых особых точек в плоскости (η_1, η_2) .

Рассмотрим следующую замену переменных, представляющую собой суперпозицию преобразований (9) для точек (V^0, V^0) и (V^1, V^1) :

$$\begin{aligned} V_1 &= \theta v^2 + \theta v + v u^1 + V^0, \\ V_2 &= \theta v + V^0. \end{aligned} \quad (10)$$

Из (10) легко получить, что

$$\begin{aligned} V_i &\rightarrow V^0, \quad (V_2 - V^0)/(V_1 - V^0) \rightarrow k_0 \text{ при } \theta \rightarrow \theta^0, v \rightarrow 0, \\ V_i &\rightarrow V^1, \quad (V_2 - V^1)/(V_1 - V^1) \rightarrow k^1 \text{ при } \theta \rightarrow \theta^1, v \rightarrow v^1, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\theta^l = 2 [\gamma m_1^0 - (\gamma m_1^0 + \alpha_1^0) V^l] / (\gamma + 1)$, $v^1 = -u^1 / \theta^1$, $u^1 = V^0 - V^1 = 2\gamma (M_0^2 - 1) / [(\gamma + 1)(\gamma M_0^2 + 1)]$, $M_0^2 = D^2 / (a^0)^2$, $l = 0, 1$.

Отметим, что все точки оси $v = 0$ плоскости (θ, v) переходят в одну точку $V_1 = V_2 = V^0$ в плоскости (V_1, V_2) , а точки кривой $\theta v = -u^1$ — в точку $V_1 = V_2 = V^1$. В дальнейшем для упрощения дифференциальных уравнений удобнее пользоваться переменными ω, v , которые связаны с переменными θ, v следующим невырожденным преобразованием:

$$\theta = \frac{\omega - \alpha_1^0 u^1 v + \theta_0}{\alpha_1^0 (v + 1)^2 + \alpha_2^0}, \quad v = v. \quad (12)$$

При этом точке $\theta = \theta^0, v = 0$ соответствует точка $\omega = 0, v = 0$, а $\theta = \theta^1, v = v^1$ — $\omega = \omega^1, v = v^1$, где $\omega^1 = 2\gamma (m_1^0 - \alpha_1^0) u^1 / (\gamma + 1)$. Температуры компонент определяются через новые переменные следующим образом:

$$\begin{aligned} T_1 &= (\theta v^2 + \theta v + v u^1 + V^0) [\alpha_1^0 (\theta v + V^0) - (\gamma - 1) \alpha_1^0 \times \\ &\quad \times v (\theta v + u^1) / 2 + (\gamma + 1) \theta / 2] / (\gamma m_1^0), \\ T_2 &= (\theta v + V^0) [- (\gamma + 1) \alpha_1^0 v (\theta v + u^1) / 2 - \\ &\quad - (\gamma + \alpha_1^0) (\theta v + V^0) + \gamma - (\gamma + 1) \theta / 2] / (\gamma m_2^0). \end{aligned} \quad (13)$$

Подставляя (10), (12) в (3), получим систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений для определения ω и v :

$$\frac{d\omega}{d\xi} = -\frac{2\gamma}{\gamma+1} K v (\theta v + u^1), \quad \frac{dv}{d\xi} = -\frac{2}{\gamma+1} \frac{\psi}{\varphi_1 \cdot \varphi_2},$$

$$\psi = \mathcal{L}_2 [\alpha_1^0 (v+1)^2 + \alpha_2^0] + K \gamma v^2 (\theta v + u^1) \varphi_2,$$

$$\mathcal{L}_2 = K V_2 (V_1 - V_2) - (\gamma - 1) \kappa_2 \cdot K (V_2 - V_1)^2 - q (\gamma - 1) (T_2 - T_1), \quad (14)$$

$$\varphi_1 = \theta (\alpha_1^0 v^2 - 1) + \alpha_1^0 v u^1, \quad \varphi_2 = \theta (\alpha_1^0 v^2 + 2v + 1) + u^1 (1 + \alpha_1^0 v).$$

Для системы уравнений (14) ставится задача:

найти решение системы уравнений (14), удовлетворяющее граничным условиям:

$$\begin{aligned} \omega &\rightarrow 0 \text{ и } v \rightarrow 0 \text{ при } \xi \rightarrow -\infty, \\ \omega &\rightarrow \omega^1 \text{ и } v \rightarrow v^1 \text{ при } \xi \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (15)$$

Очевидно, что если существует единственное решение задачи (14), (15), то по формулам (10), (11) строится единственным образом решение исходной задачи (3), (4), удовлетворяющее условию (7).

Для системы уравнений (14) точки $(0, 0)$ и (v^1, ω^1) являются уже простыми особыми точками. Для их анализа достаточно [6] рассмотреть линейные члены разложения правых частей системы (14) вблизи этих точек. Характеристическое уравнение для определения типа особой точки $(0, 0)$ имеет вид

$$(v^0)^2 - \sigma^0 (v^0) + \Delta^0 = 0. \quad (16)$$

Откуда $v_{1,2}^0 = (\sigma^0 \pm \sqrt{(\sigma^0)^2 - 4\Delta^0})/2$, где

$$\begin{aligned} \sigma^0 &= \frac{1}{\theta^0 (\theta^0 + u^1)} \cdot \frac{2}{\gamma+1} \left[u^1 (K V^0 + q (\gamma - 1)^2 (1 - V^0)) - \right. \\ &\quad \left. - q (\gamma^2 - 1) \frac{\theta^0 (\theta^0 + u^1)}{2m_1^0 m_2^0} \right], \end{aligned}$$

$$\Delta^0 = -\frac{2}{\gamma+1} K u^1 \frac{1}{\theta^0 (\theta^0 + u^1)} \cdot \frac{q (\gamma - 1) V^0}{m_1^0 m_2^0}.$$

Заметим, что $\theta^0 + u^1 = \frac{2(\gamma m_1^0 + \alpha_1^0)}{\gamma+1} \left(V^0 - \frac{\gamma}{\gamma+1} + \frac{\gamma(\alpha_2^0 - m_2^0)}{(\gamma+1)(\gamma m_1^0 + \alpha_1^0)} \right) >$

> 0 , так как $V^0 > \gamma/(\gamma+1)$ и $\alpha_2^0 > m_2^0$. Кроме того, $\theta^0 \geq 0$, если

$V^0 \leq \frac{\gamma m_1^0}{\gamma m_1^0 + \alpha_1^0}$ или $V^0 \leq a_1^0$, где a_1^0 — безразмерная скорость зву-

ка в легком газе перед ударной волной. Следовательно, если $V^0 < a_1^0$, то $\Delta^0 < 0$ и точка $(0, 0)$ является седловой особой точкой.

Если же $V^0 > a_1^0$, то $\Delta^0 > 0$, $\sigma^0 < 0$, $(\sigma^0)^2 - 4\Delta^0 > 0$, поэтому точка $(0, 0)$ — узел, достигаемый при $\xi \rightarrow +\infty$. Таким образом, при $V^0 > a_1^0$ непрерывное решение задачи (14), (15) не существует,

так как состояние равновесия $(0, 0)$ не достижимо при $\xi \rightarrow -\infty$.

В достаточно малой окрестности точки $(0, 0)$ на фазовой плоскости (v, ω) интегральные кривые системы (14) близки к прямым:

$$\omega = k_{1,2}^0 v, \quad k_{1,2}^0 = -2\gamma K u^1 / ((\gamma + 1) v_{1,2}^0). \quad (17)$$

Проведя аналогичные выкладки вблизи точки (v^1, ω^1) , можно получить

$$v_{1,2}^1 = (\sigma^1 \pm \sqrt{(\sigma^1)^2 - 4\Delta^1})/2, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma^1 = & -\frac{1}{\theta^1 (\theta^1 - u^1)} \left[\frac{2}{\gamma + 1} u^1 (KV^1 + q(\gamma - 1)^2 (1 - V^1)) + \right. \\ & \left. + \frac{q(\gamma - 1)}{m_1^0 m_2^0} \theta^1 (\theta^1 - u^1) \right], \\ \Delta^1 = & 2Kq \frac{\gamma - 1}{(\gamma + 1) m_1^0 m_2^0} V^1 u^1 \frac{1}{\theta^1 (\theta^1 - u^1)}. \end{aligned}$$

Выписывая в явном виде выражение для

$$\theta^1 - u^1 = -\frac{2}{\gamma + 1} (\alpha_2^0 + \gamma m_2^0) \left(V^0 - 1 - \frac{(\gamma - 1) \alpha_2^0 - 2\gamma m_2^0}{(\gamma + 1) (\alpha_2^0 + \gamma m_2^0)} \right),$$

легко показать, что если $(\gamma - 1) \alpha_2^0 > 2\gamma m_2^0$ (при этом $V^1 > a_2^1$, a_2^1 — скорость звука в тяжелом газе за ударной волной), то $\theta^1 - u^1 > 0$, если же $(\gamma - 1) \alpha_2^0 < 2\gamma m_2^0$, то $\theta^1 - u^1 \geq 0$ при $V^1 \geq \gamma m_2 / (\gamma m_2^0 + \alpha_2^0)$ или $V^1 \geq a_2^1$. Кроме того, имеем $\theta^1 = \frac{2(\gamma m_1^0 + \alpha_1^0)}{(\gamma + 1)} \left[V^0 - \frac{\gamma}{\gamma + 1} + \frac{\gamma(m_1^0 - \alpha_1^0)}{(\gamma + 1)(\gamma m_1^0 + \alpha_1^0)} \right] > 0, V^1 < 1$. Из по-

лученных неравенств следует, что при $V^1 > a_2^1$ точка (v^1, ω^1) — узел, достигаемый при $\xi \rightarrow +\infty$, так как $\sigma^1 > 0$, $(\sigma^1)^2 - 4\Delta^1 > 0$, и седло при $V^1 < a_2^1$. В достаточно малой окрестности точки (v^1, ω^1) интегральные кривые системы (14) близки к прямым:

$$\begin{aligned} \omega - \omega^1 = & k_{1,2}^1 (v - v^1), \\ k_{1,2}^1 = & 2\gamma K u^1 / [2\gamma (v^1)^2 + (\gamma + 1) v_{1,2}^1 (\alpha_1^0 (v^1 + 1)^2 + \alpha_2^0)]. \end{aligned} \quad (19)$$

Легко показать, что для ударной волны любой интенсивности справедливы неравенства $V^0 > a_2^0$ и $V^1 < a_1^1$. Отсюда и из проведенного анализа особых точек следует, что качественное поведение интегральных кривых системы (14) в плоскости (v, ω) будет меняться в зависимости от того, происходит или нет в ударной волне переход через скорость звука в i -м компоненте.

С другой стороны, так как $\theta^0 = -\varphi_1(0, 0)$, $\theta^1 = -\varphi_1(v^1, \omega^1)$, $\theta^0 + u^1 = \varphi_2(0, 0)$, $\theta^1 - u^1 = \varphi_2(v^1, \omega^1)$, поведение интегральных кривых системы (14) в плоскости (v, ω) зависит от того, лежат ли точки $(0, 0)$ и (v^1, ω^1) по одну сторону от кривой $\varphi_i(v, \omega) = 0$ или расположены по разные ее стороны. (Точки расположены по разные стороны кривой, если значения φ_i в этих точках разного знака.)

Отметим некоторые свойства кривых $\varphi_i(v, \omega) = 0$, которые будут использованы в дальнейшем. Обозначая через $\omega_{\varphi_i}(v)$ решение уравнения $\varphi_i(v, \omega) = 0$, можно показать, что $d\omega_{\varphi_i}/dv > 0$, $i = 1, 2$. Прямые $v = \pm \sqrt{1/\alpha_1^0}$, $\omega = 2\alpha_1^0 V^1$ являются вертикальной и горизонтальной асимптотами функции $\omega_{\varphi_1}(v)$, а $v = (-1 \pm \sqrt{\alpha_2^0})/\alpha_1^0$, $\omega = 2\alpha_1^0 V^1 - u^1$ — соответствующими асимптотами функции $\omega_{\varphi_2}(v)$.

Система уравнений (14) имеет особые точки, не совпадающие с исследованными выше и определяемые из системы уравнений

$$\begin{cases} \varphi_2(v, \omega) = 0, \\ \mathcal{L}_2(v, \omega) = 0 \end{cases} \quad (20)$$

и

$$\begin{cases} \varphi_1(v, \omega) = 0, \\ \mathcal{L}_1(v, \omega) = 0. \end{cases} \quad (21)$$

В силу того, что в этих точках $d\omega/d\xi \neq 0$, они не являются положениями равновесия для системы (14) и достигаются при конечном ξ . Исследование особых точек типа (20), (21), а также решение поставленной задачи (14), (15) будут проведены далее при условии малости некоторых параметров.

2.2. Слабые ударные волны

Пусть $u^1 = V^0 - V^1 = 2\gamma(M_0^2 - 1)/[(\gamma + 1)(\gamma M_0^2 + 1)] \ll 1$ и при этом считаем, что $|v^1| = (\gamma + 1)u^1/[2(\gamma m_1^0 - (\gamma m_1^0 + \alpha_1^0)V^1)] \ll 1$. Очевидно, что $\omega^1 \ll 1$. Следовательно, точка (v^1, ω^1) принадлежит малой окрестности точки $(0, 0)$.

Разложение функции $\psi(v, \omega)$ при малых v и ω с точностью до членов более высокого порядка малости имеет вид

$$\begin{aligned} \psi(v, \omega) = & \left\{ -\frac{2\gamma^2 q(\gamma - 1)(m_1^0 - \alpha_1^0)^2}{(\gamma + 1)^3 m_1^0 m_2^0} + u^1 \left[\frac{\gamma}{\gamma + 1} K + \right. \right. \\ & + \frac{q(\gamma - 1)}{(\gamma + 1) m_1^0 m_2^0} (-\gamma(m_1^0 - \alpha_1^0)^2 - (\gamma + 1)m_1^0 m_2^0 + (m_1^0)^2 \gamma^2 \alpha_2^0 + \\ & \left. \left. + \gamma \alpha_1^0 (\alpha_2^0 + \gamma(m_2^0)^2)) \right] + o(u^1)^2 \right\} v - \frac{q(\gamma^2 - 1)}{2\gamma m_1^0 m_2^0} \left(\frac{\gamma}{\gamma + 1} + \frac{u^1}{2} \right) \omega + \dots \end{aligned}$$

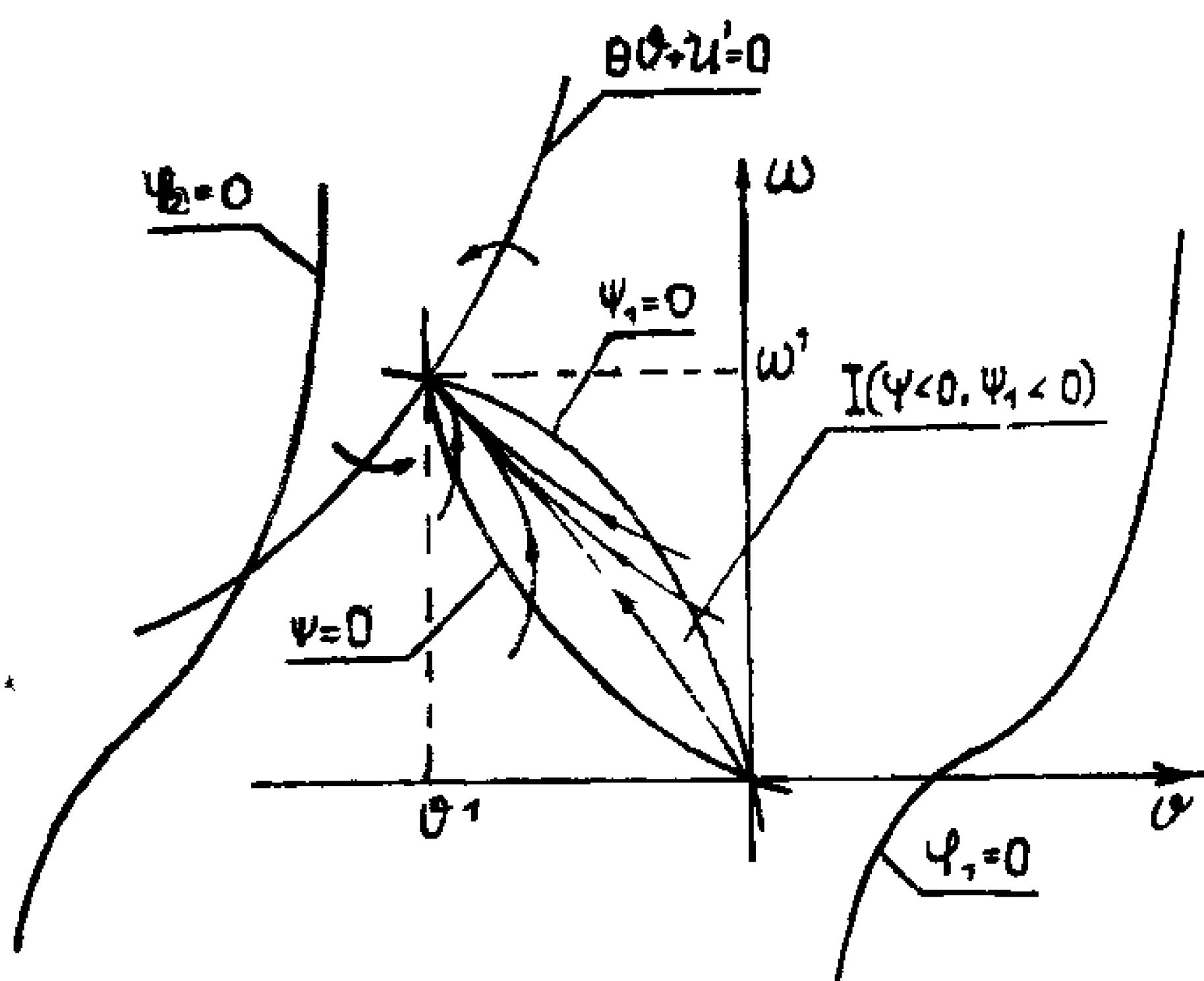


Рис. 3.2.

Очевидно, что $\partial\psi/\partial\omega < 0$, $\partial\psi/\partial v < 0$ при $u^1 \ll 1$, $v^1 < v < 0$ и $0 < \omega < \omega^1$. Следовательно, при малых v , ω график функции $\psi(v, \omega) = 0$ представляет собой монотонную кривую, проходящую через точки $(0, 0)$ и (v^1, ω^1) . Рассмотрим функцию $\psi_1(v, \omega) = \psi(v, \omega) + (\gamma+1)^3 \times K v (\theta v + u^1) \varphi_1 \varphi_2 / (2\gamma(m_1^0 - \alpha_1^0)^2)$. Легко показать, как и для $\psi(v, \omega) = 0$, что кривая $\psi_1(v, \omega) = 0$ монотонна

($\partial\psi_1/\partial\omega < 0$, $\partial\psi_1/\partial v < 0$) при малых u^1 , v , ω и имеет только две точки пересечения $(0, 0)$ и (v^1, ω^1) с кривой $\psi(v, \omega) = 0$ в рассматриваемой области. Пусть

$$k_{\psi}^0 = - \left(\frac{\partial\psi}{\partial v} / \frac{\partial\psi}{\partial\omega} \right) \Big|_{v=0, \omega=0}, \quad k_{\psi}^1 = - \left(\frac{\partial\psi}{\partial v} / \frac{\partial\psi}{\partial\omega} \right) \Big|_{v=v^1, \omega=\omega^1},$$

$$k_{\psi_1}^0 = - \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial v} / \frac{\partial\psi_1}{\partial\omega} \right) \Big|_{v=0, \omega=0}, \quad k_{\psi_1}^1 = - \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial v} / \frac{\partial\psi_1}{\partial\omega} \right) \Big|_{v=v^1, \omega=\omega^1}.$$

Тогда при малых u^1 можно получить

$$k_{\psi_1}^0 - k_{\psi}^0 = -2\Omega_1 u^1 + o(u^1)^2, \quad k_{\psi}^0 - k_1^0 = \Omega_1 u^1 + o(u^1)^2,$$

$$k_{\psi_1}^0 - k_1^0 = -\Omega_1 u^1 + o(u^1)^2, \quad k_{\psi_1}^1 - k_{\psi}^1 = 2\Omega_1 u^1 + o(u^1)^2,$$

$$k_1^1 - k_{\psi_1}^1 = -\Omega_1 u^1 + o(u^1)^2, \quad k_1^1 - k_{\psi}^1 = \Omega_1 u^1 + o(u^1)^2,$$

где $\Omega_1 = 2\gamma K m_1^0 m_2^0 / (q(\gamma^2 - 1))$. Здесь k_1^0 — угловой коэффициент направления, по которому интегральная кривая выходит из точки $(0, 0)$, соответствует положительному собственному значению v^0 , а k_1^1 — угловой коэффициент направления, по которому интегральные кривые входят в особую точку (v^1, ω^1) , соответствует минимальному по абсолютной величине собственному значению v^1 . Очевидно, что справедливы следующие неравенства:

$$k_{\psi_1}^0 < k_1^0 < k_{\psi}^0 < 0, \quad k_{\psi}^1 < k_1^1 < k_{\psi_1}^1 < 0. \quad (22)$$

С учетом сказанного кривые $\psi = 0$ и $\psi_1 = 0$ имеют вид, представленный на рис. 3.2. Наклон интегральных кривых системы уравнений (14) в точках кривой $\psi_1(v, \omega) = 0$ постоянен

$$\frac{d\omega}{dv} \Big|_{\psi_1=0} = - \frac{2\gamma^2 (m_1^0 - \alpha_1^0)^2}{(\gamma + 1)^3}.$$

В области, определенной неравенствами $v < 0$, $\theta v + u^1 > 0$, $\omega > 0$, при малых ω , v имеем

$$\frac{d\psi_1}{d\xi} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} K v (\theta v + u^1) \Big|_{\psi_1=0} \left(-\frac{q(\gamma-1)}{2m_1^0 m_2^0} + o(u^1) + o(v) \right) > 0.$$

Таким образом, $\psi_1(v, \omega) = 0$ представляет собой изоклину системы (14), не имеющую в рассматриваемой области контакта с траекториями, которые пересекают кривую $\psi_1(v, \omega)$, входя в область I при возрастании ξ (см. рис. 3.2). Стрелками на рисунке обозначено направление движения вдоль интегральной кривой при возрастании ξ . Следовательно, в силу неравенств (22) единственная траектория, выходящая из положения равновесия $(0, 0)$, не может покинуть область I и неминуемо приходит в состояние равновесия (v^1, ω^1) , т. е. существует единственное решение исходной задачи для слабых ударных волн. Следует заметить, что в данном случае внутренние особые точки (20), (21), если они существуют, не влияют на решение исходной задачи.

В случае слабых ударных волн можно построить асимптотическое решение задачи в виде ряда по степеням малого параметра u^1 . Для этого сделаем замену $v = \bar{v} \cdot v^1$, $\omega = \bar{\omega} \cdot \omega^1$, $\bar{\xi} = \xi \cdot u^1$ и будем искать решение в виде

$$\bar{\omega} = \omega_0 + u^1 \omega_1 + \dots, \quad \bar{v} = v_0 + u^1 v_1 + \dots \quad (23)$$

Подставляя (23) в систему уравнений (14) и приравнявая члены при одинаковых степенях u^1 , получим

$$\omega_0 = v_0, \quad \frac{dv_0}{d\bar{\xi}} = -K \frac{(\gamma+1)^2}{2\gamma(m_1^0 - \alpha_1^0)^2} v_0(v_0 - 1).$$

Интегрируя, при условии, что $v_0(0) = 0.5$, имеем

$$v_0(\bar{\xi}) = (1 + e^{-\bar{\xi}/\Omega})^{-1}, \quad \Omega = \frac{2\gamma(m_1^0 - \alpha_1^0)^2}{K(\gamma+1)^2}.$$

Из соотношений (10) следует, что

$$V_i = \gamma/(\gamma+1) + u^1(1/2 - v_0) + o(u^1)^2, \\ T_i = \gamma/(\gamma+1)^2 - (\gamma-1)u^1(1/2 - v_0)/(\gamma+1) + o(u^1)^2.$$

Используя следующие члены разложения, можно показать, что

$$V_1 - V_2 = (u^1)^2 \cdot 2(m_1^0 - \alpha_1^0) v_0(v_0 - 1)/(K\Omega) + o(u^1)^3, \\ T_2 - T_1 = (u^1)^3 \frac{m_1^0 m_2^0 (m_1^0 - \alpha_1^0)}{qK(\gamma+1)} \cdot \frac{1}{\Omega^2} v_0(v_0 - 1)(1 - 2v_0) + o(u^1)^4.$$

Из полученных соотношений следует, что разность температур компонентов в слабых ударных волнах — величина более высокого порядка малости по сравнению с разностью скоростей. Относительная скорость тяжелого компонента в ударной волне боль-

ше относительной скорости легкого компонента ($V_2 > V_1$), а разность температур меняет знак, причем на начальном участке ударной волны температура легкого газа больше температуры тяжелого ($T_1 > T_2$).

2.3. Малая концентрация тяжелого компонента

Пусть $m_2^0 \ll 1$. Функция $\psi(v, \omega)$ при малых m_2^0 представима в виде

$$\psi(v, \omega) = \frac{1}{m_1^0 m_2^0} \left\{ \frac{q(\gamma - 1)}{2} \cdot \frac{f_1(v, \omega) \cdot f_2(v, \omega)}{\alpha_1^0 (v + 1)^2 + \alpha_2^0} + o(m_2^0) \right\}, \quad (24)$$

где $f_1(v, \omega) = \omega v + \alpha_1^0 V^1 v^2 + 2\gamma(1 - \alpha_2^0 V^0) v / (\gamma + 1) + V^0$,
 $f_2(v, \omega) = -y_1(v) \omega + 2\gamma \alpha_1^0 \alpha_2^0 u^1 v^2 + 4\gamma \alpha_2^0 \times$
 $\times (-\gamma + (\gamma + \alpha_1^0) V^0) v / (\gamma + 1), \quad y_1(v) = \gamma + 1 +$
 $+ 2(\gamma + \alpha_1^0) v + (\gamma + 1) \alpha_1^0 v^2.$

Таким образом, при малых m_2^0 график функции $\psi(v, \omega) = 0$ близок к кривым $f_1(v, \omega) = 0$ и $f_2(v, \omega) = 0$. Качественное поведение кривой $f_2(v, \omega) = 0$ представлено на рис. 3.3 при $(\gamma + \alpha_1^0) \times \times V^0 < \gamma$ и $y_1(v_0^1) > 0$, на рис. 3.4 — при $(\gamma + \alpha_1^0) V^0 > \gamma$ и $y_1(v_0^1) > 0$, на рис. 3.5 — при $y_1(v_0^1) < 0$, где $v_0^1 = -(\gamma + 1) u^1 / (2(\gamma - (\gamma + \alpha_1^0) V^1))$, $v^1 = v_0^1 + o(m_2^0)$. Точки кривой $f_1(v, \omega) = 0$ лежат вне рассматриваемой области. На рис. 3.3—3.5 изображены графики функций $\varphi_i(v, \omega) = 0$, $i = 1, 2$. В данном приближении точки $(0, 0)$ и (v^1, ω^1) лежат всегда по одну сторону от кривой $\varphi_2(v, \omega) = 0$ ($\varphi_2(0, 0) > 0$ и $\varphi_2(v^1, \omega^1) = 2\alpha_2^0 V^1 / (\gamma + 1) + o(m_2^0) > 0$). Тогда как график функции $\varphi_1(v, \omega) = 0$ может проходить и между этими точками (см. рис. 3.4, 3.5). Следовательно, согласно (18), (19) состояние равновесия (v^1, ω^1) имеет тип узла. Угловой коэффициент k_1^1 направления, по ко-

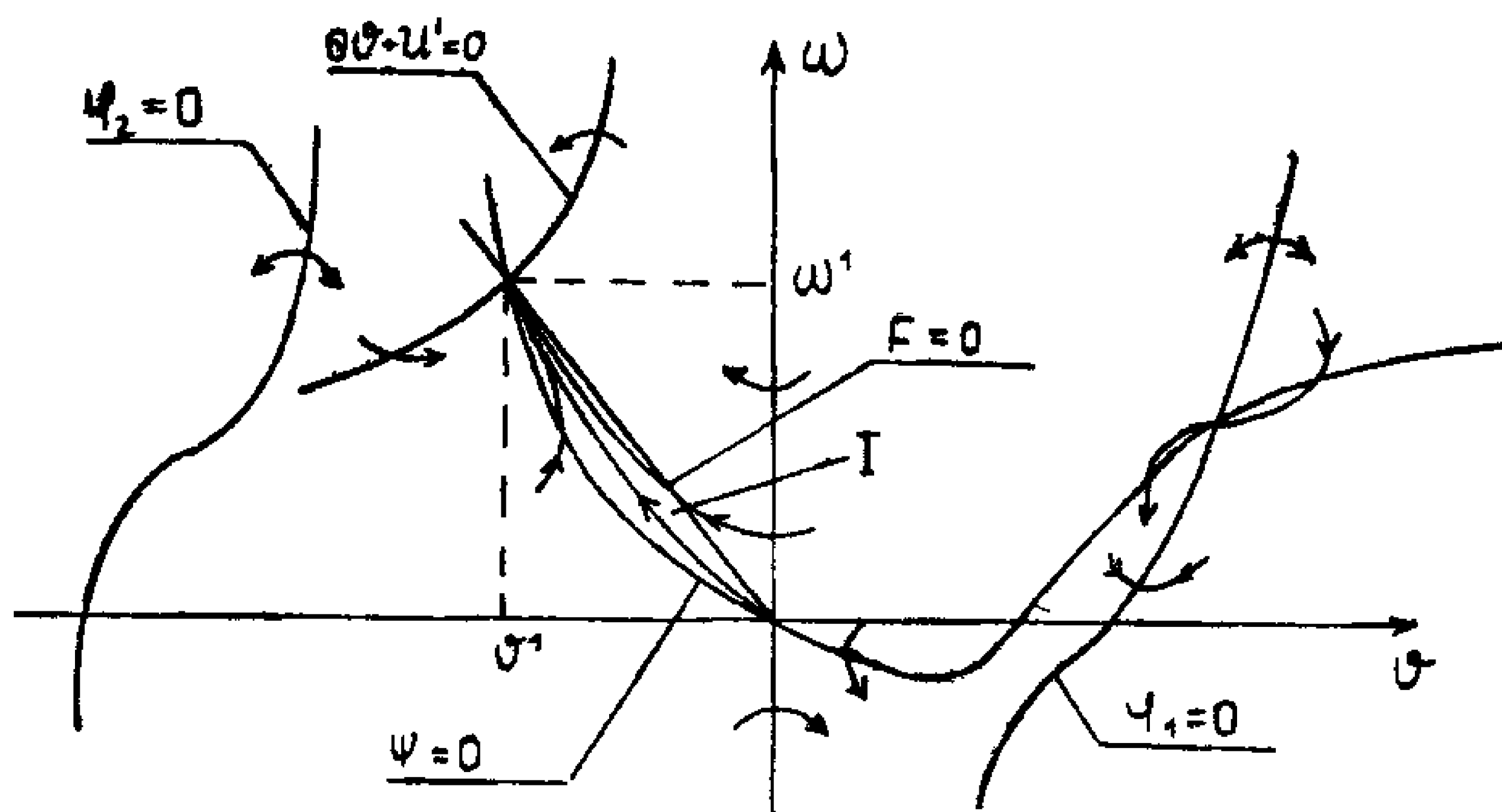


Рис. 3.3.

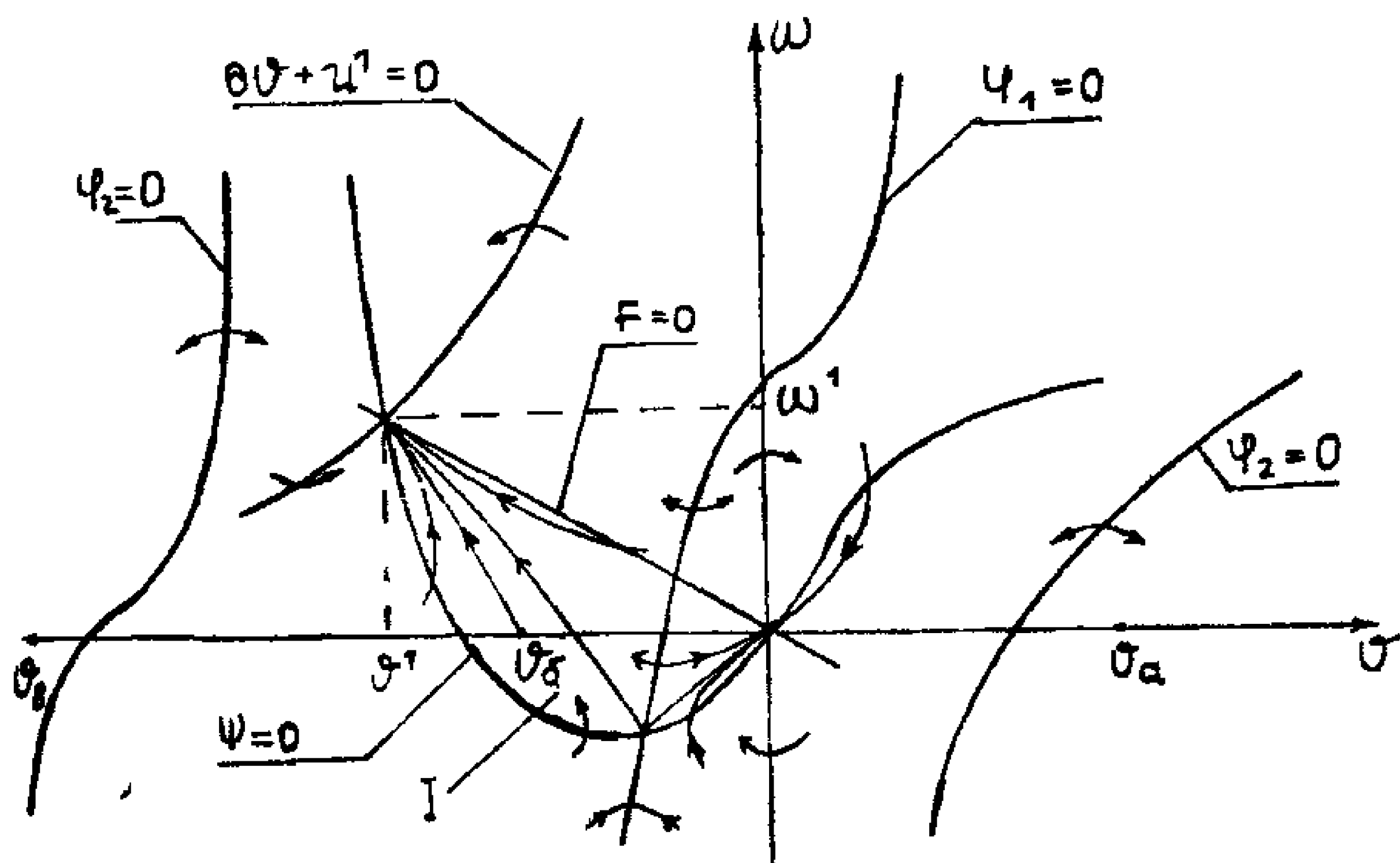


Рис. 3.4.

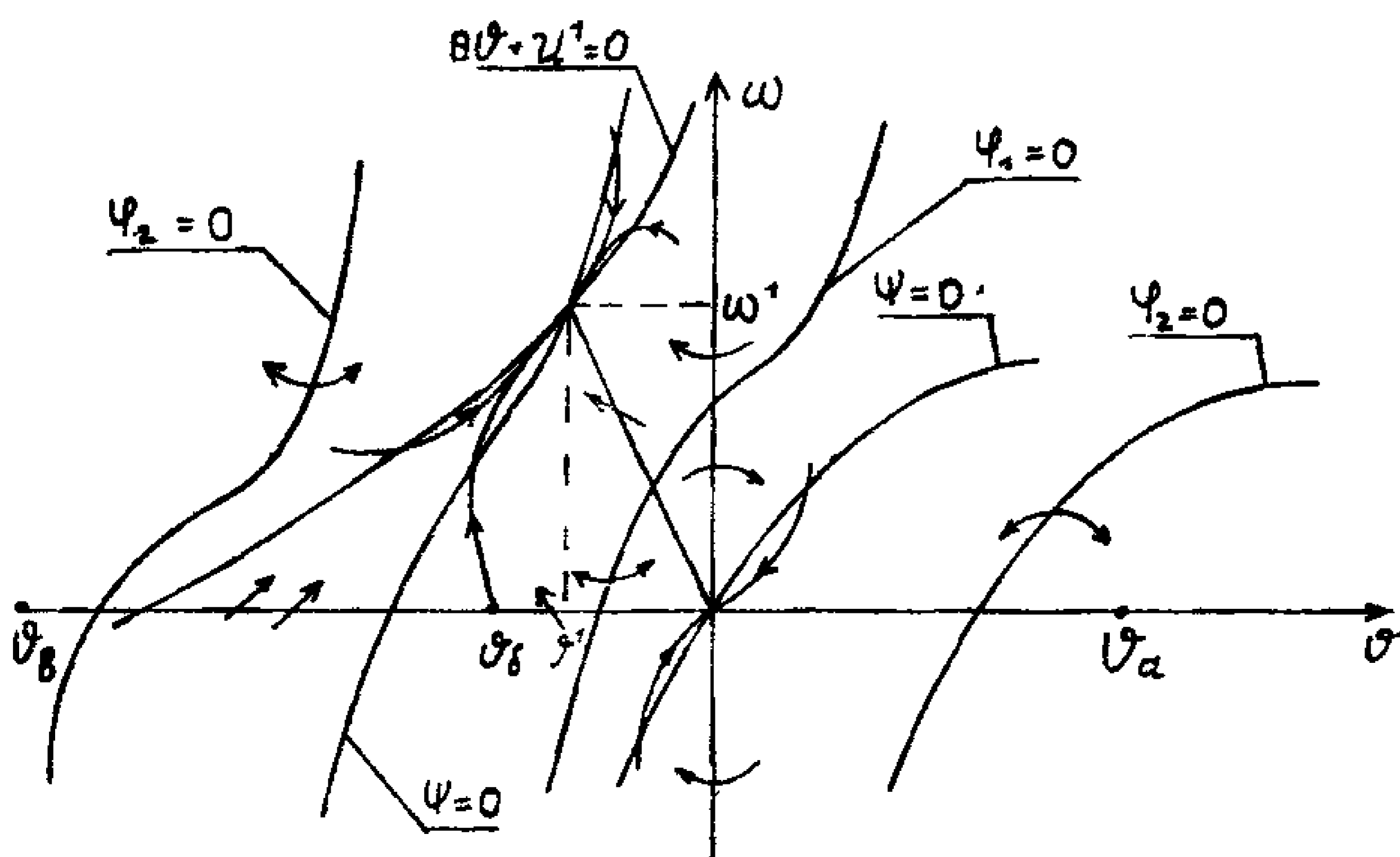


Рис. 3.5.

торому в данную особую точку входит бесчисленное множество траекторий, может быть представлен в виде

$$k_1^1 = 2\gamma\alpha_2^0 u^1 / (v_0^1 y_1(v_0^1)) + o(m_2^0).$$

Из характеристического уравнения (18), учитывая (19), легко показать, что

$$k_1^1 - k_\Phi^1 = -\gamma K \frac{\varphi_1^1 \varphi_2(v^1)^2}{k_1^1 [\alpha_1^0 (v^1 + 1)^2 + \alpha_2^0]} (k_1^1 - k_f^1) \frac{m_2^0}{\epsilon(\gamma-1)V^1 y_1(v_0^1)/2 + o(m_2^0)},$$

где $k_f^1 = -\left(\frac{\partial f}{\partial v} \middle| \frac{\partial f}{\partial \omega}\right) \bigg|_{v=v^1, \omega=\omega^1}$, $f = \theta v + u^1$, $\varphi_i^1 = \varphi_i(v^1, \omega^1)$,

$$k_1^1 - k_f^1 = \frac{(\gamma + 1) u^1 (\alpha_1^0 (v_0^1 + 1)^2 + \alpha_2^0)}{(-v_0^1) y_1(v_0^1)} + o(m_2^0).$$

Отсюда следует, что при $y_1(v_0^1) > 0$ $k_\Phi^1 < k_1^1 < 0 < k_f^1$, а если $y_1(v_0^1) < 0$, то $0 < k_f^1 < k_1^1 < k_\Phi^1$.

Положение равновесия $(0, 0)$ в зависимости от расположения его относительно $\varphi_1(v, \omega) = 0$ может быть согласно (16) либо седлом (см. рис. 3.3), либо узлом, достигаемым при $\xi \rightarrow +\infty$ (см. рис. 3.4, 3.5). В первом случае угловой коэффициент направления, по которому интегральная кривая выходит из точки $(0, 0)$, имеет вид

$$k_1^0 = -4\gamma\alpha_2^0(\gamma - (\gamma + \alpha_1^0)V^0)/(\gamma + 1)^2 + o(m_2^0).$$

При этом $k_1^0 < k_\psi^0$ при $\gamma > (\gamma + \alpha_1^0)V^0$, так как

$$k_1^0 - k_\psi^0 = \gamma Ku^1 \theta^0 (\theta^0 + u^1) / (k_1^0 (q(\gamma^2 - 1)V^0/2 + o(m_2^0))) m_2^0, \\ \theta^0 = 2(\gamma - (\gamma + \alpha_1^0)V^0)/(\gamma + 1) + o(m_2^0).$$

Рассмотрим прямую, задаваемую уравнением

$$F(v, \omega) = \omega - \omega^1 v / v^1 = 0. \quad (25)$$

Легко показать, что

$$\left(\frac{dF}{d\xi} \right) \Big|_{F=0} = \frac{2\omega^1}{(\gamma + 1)v^1} \frac{v(v - v^1)}{m_2^0 \varphi_1|_{F=0} \varphi_2|_{F=0}} \left\{ -\frac{\omega_0^1}{v_0^1} \left(v + \frac{\gamma + \alpha_1^0}{\alpha_1^0(\gamma + 1)} \right) \times \right. \\ \times (\gamma + \alpha_1^0) \frac{q(\gamma - 1)}{2} \left[(v - v_0^1) \frac{\omega_0^1}{v_0^1} \left(v - \frac{v^1}{\omega_0^1} \right) + \right. \\ \left. \left. + V^1(\alpha_1^0 + 1)^2 + \alpha_2^0 \right] + o(m_2^0) \right\}.$$

Так как справедливы следующие неравенства:

$$\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} < V^1 < \frac{\gamma}{\gamma + 1} < \frac{\gamma}{\gamma + \alpha_1^0}, \quad v_0^1 < 0, \quad \omega_0^1 = \frac{2\gamma\alpha_2^0}{(\gamma + 1)} u^1 + o(m_2^0) > 0,$$

$$v_0^1 + 2 \frac{\gamma + \alpha_1^0}{\alpha_1^0(\gamma + 1)} = \frac{\gamma + \alpha_1^0}{\alpha_1^0(\gamma + 1)} + \frac{\alpha_2^0(\gamma^2 - \alpha_1^0)}{\alpha_1^0(\gamma + 1)(\gamma - (\gamma + \alpha_1^0)V^1)} \times \\ \times \left(\frac{\gamma(\gamma + \alpha_1^0)}{(\gamma + 1)(\gamma^2 - \alpha_1^0)} + \frac{\gamma}{\gamma + 1} - V^1 \right) > 0,$$

то выражение в фигурных скобках положительно для всех $v^1 < v < 0$. Из рис. 3.3–3.5 следует, что на рассматриваемом отрезке прямой (25) $\varphi_2|_{F=0} > 0$. В результате справедливо следующее неравенство: $(dF/d\xi)|_{F=0} \geq 0$ при $v^1 < v < 0$, если $\varphi_1|_{F=0} \leq 0$. Следовательно, в случае, когда кривая $\varphi_1(v, \omega) = 0$ не проходит между точками $(0, 0)$ и (v^1, ω^1) (см. рис. 3.3), т. е. $\varphi_1|_{F=0} < 0$ при $v^1 < v < 0$, прямая (25) на указанном промежутке не имеет контакта с траекториями системы (14), которые пересекают ее, входя в область $I(\psi < 0, F < 0)$ при возрастании ξ , как показано на рис. 3.3. Отметим, что $k_1^0 - k_F^0 = 4\gamma\alpha_2^0(\gamma + \alpha_1^0)u^1/(\gamma + 1)^2 + o(m_2^0) > 0$. Поэтому единственная интегральная кривая системы

(14), выходящая (см. рис. 3.3) из состояния равновесия $(0, 0)$, не может покинуть область I и попадает в состояние равновесия (v^1, ω^1) , т. е. в данном случае существует единственное решение исследуемой задачи при малых m_2^0 . Если $\phi_1(v, \omega) = 0$ проходит между точками $(0, 0)$ и (v^1, ω^1) , то, как уже было отмечено, не существует непрерывного решения поставленной задачи и необходимо вводить разрыв. На рис. 3.4 и 3.5 точками v_a, v_b, v_v обозначены значения v за разрывом, соответствующие решениям типа а), б), в) из (1.6). Очевидно (см. рис. 3.4, 3.5), что существует единственное решение, имеющее разрыв с последующим непрерывным переходом в состояние равновесия (v^1, ω^1) , если разрыв определяется формулами типа б), т. е. характеристики тяжелого компонента (V_2, ρ_2, T_2) непрерывны на скачке.

Из второго уравнения системы (14) и вида функции (24) следует, что при $m_2^0 \rightarrow 0$ решение задачи стремится в плоскости (v, ω) к кривой $f_2(v, \omega) = 0$. Подстановка этого выражения в (10) позволяет получить в нулевом приближении по m_2^0

$$V_2 = V^0 - (\gamma + 1) \omega / (2\gamma \alpha_2^0) + o(m_2^0),$$

$$\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} \alpha_1^0 V_1^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \alpha_2^0 V_1 V_2 - \frac{\alpha_2^0}{2} V_2^2 - \frac{\gamma}{\gamma - 1} V_1 + A + o(m_2^0) = 0.$$

На рис. 3.6, а — в представлено решение исходной задачи в плоскости (V_1, V_2) , соответствующее рис. 3.3—3.5. В физической плоскости (рис. 3.7) имеем непрерывное решение при $\phi_1(v^1, \omega^1) < 0$ ($V^0 < a_1^0$) и решение с разрывом в противоположном случае.

Таким образом, при $m_2^0 \ll 1$ качественное поведение решения задачи о структуре ударной волны меняется в зависимости от того, имеет место или отсутствует переход через скорость звука в легком газе. В рассматриваемом случае для тяжелого газа реализуется сверхзвуковое течение. Если решение остается дозвуковым в легком газе, то существует непрерывное решение задачи. В противном случае решение содержит разрыв параметров легкого

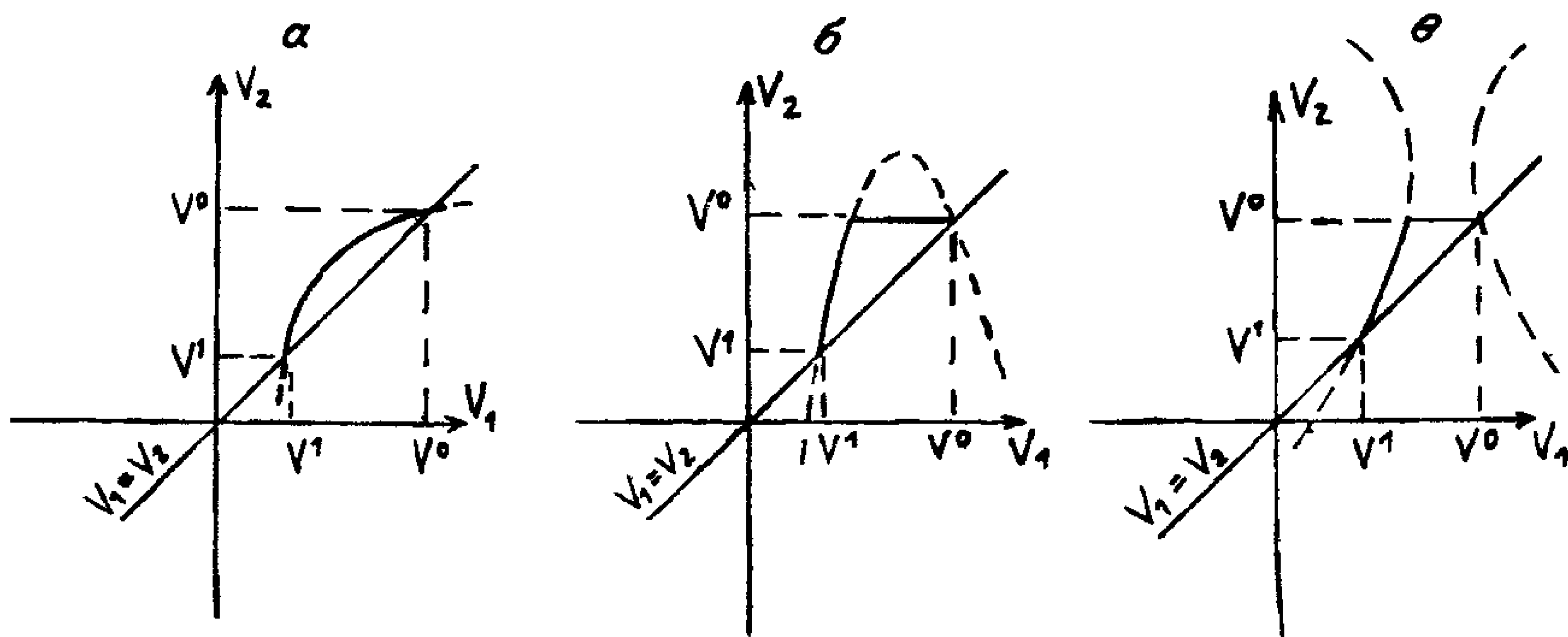


Рис. 3.6.

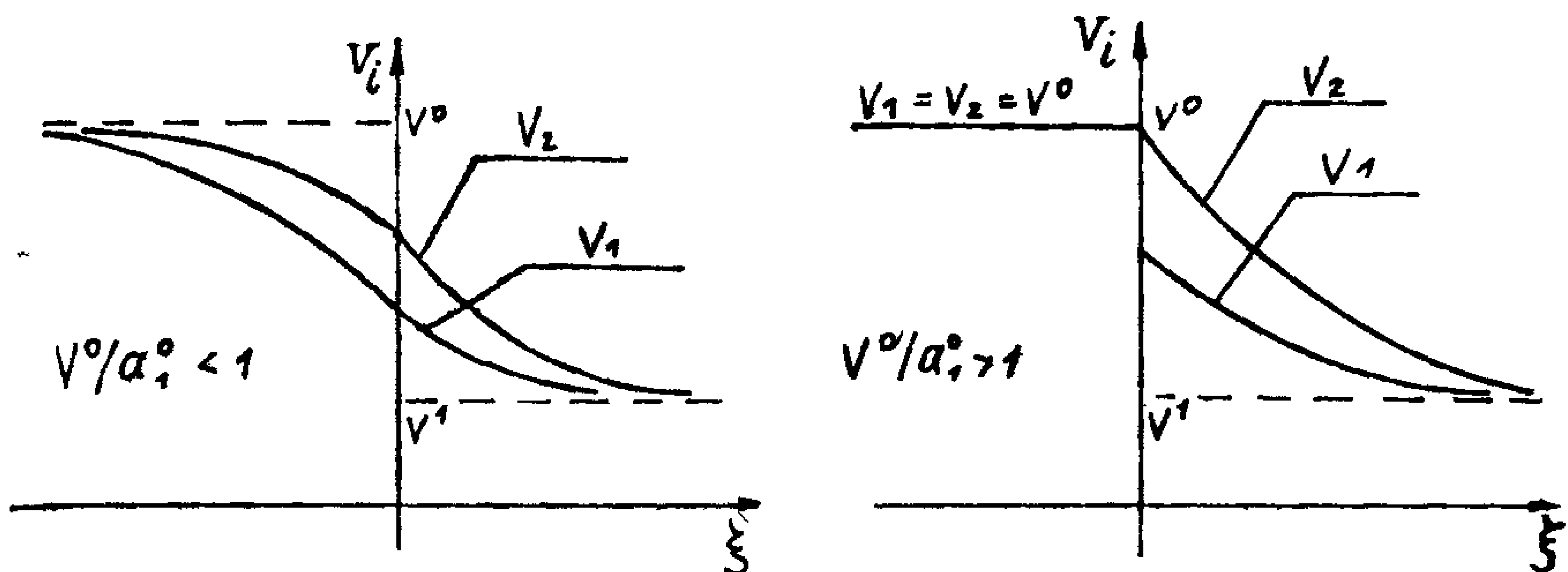


Рис. 3.7.

газа (параметры тяжелого компонента непрерывны), за которым следует зона релаксации, в которой смесь приходит в равновесное состояние.

2.4. Малая концентрация легкого компонента

Предположения, на основе которых в гл. 2 была получена система уравнений многоскоростных многотемпературных смесей газов, делает проблематичным использование этих уравнений при малой концентрации легкого компонента. Однако рассмотрение этого случая позволит определить, как меняется решение задачи о структуре ударной волны, если имеет место переход через скорость звука в тяжелом газе.

Пусть $m_1^0 \ll 1$. Так как $m_1^0 > \alpha_1^0$, то $\alpha_1^0 \ll 1$. Введем обозначение $\sigma = \alpha_1^0/m_1^0$. Ограничимся слабыми ударными волнами $u^1 \ll 1$. При этом будем считать, что $\delta = u^1/m_1^0 \sim 1$. Данный случай отличается от рассмотренного в п. 2.2 приближения слабых ударных волн, где предполагалось, что $m_1^0 \gg u^1$, т. е. $\delta \ll 1$. Выражение $\psi(v, \omega) = 0$ представляет собой квадратное уравнение относительно ω . Разрешая это уравнение для ветви, проходящей через начальную $(0, 0)$ и конечную (v^1, ω^1) особые точки, при малых m_1^0 получим

$$\omega = \left\{ \frac{2}{\gamma+1} \left(\gamma\sigma - 1 + \frac{\gamma K}{q(\gamma-1)} \right) v \left(\frac{2\gamma(1-\sigma)}{(\gamma+1)^2} v + \delta \right) - \frac{4\gamma^2}{(\gamma+1)^3} (1-\sigma)^2 v \right\} (m_1^0)^2 + o(m_1^0)^3. \quad (26)$$

При этом функция $\psi(v, \omega)$ представима в виде

$$\psi(v, \omega) = -\frac{q(\gamma^2-1)}{2\gamma m_1^0 m_2^0} \left[\omega v(v+1) + \frac{\gamma}{\gamma+1} + o(m_1^0) \right] \times \\ \times \left[\omega - (m_1^0)^2 \left(\frac{2}{\gamma+1} \left(\gamma\sigma - 1 + \frac{\gamma K}{q(\gamma-1)} \right) v \left(\frac{2\gamma(1-\sigma)}{(\gamma+1)^2} v + \delta \right) - \frac{4\gamma^2}{(\gamma+1)^3} (1-\sigma)^2 v \right) + o(m_1^0)^3 \right].$$

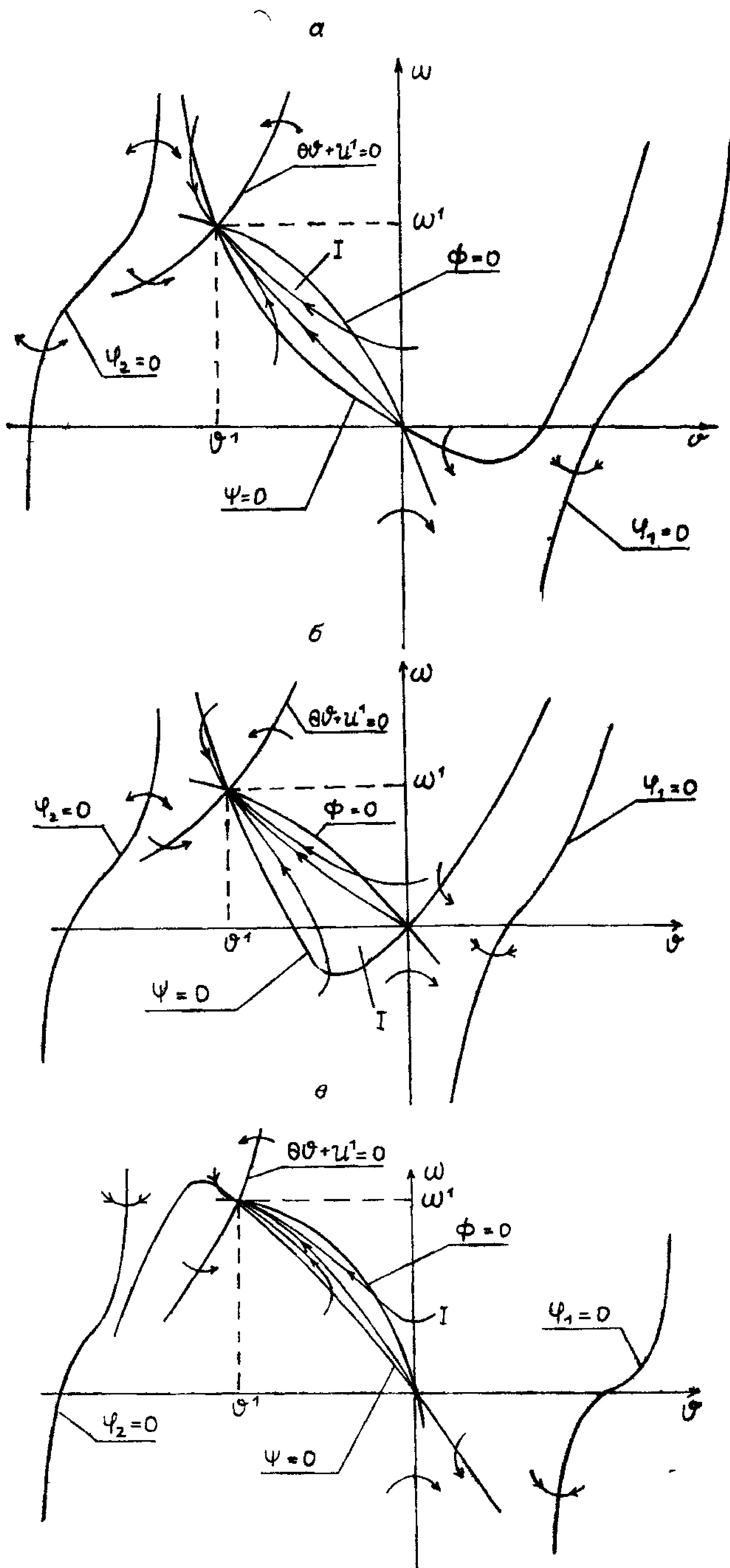
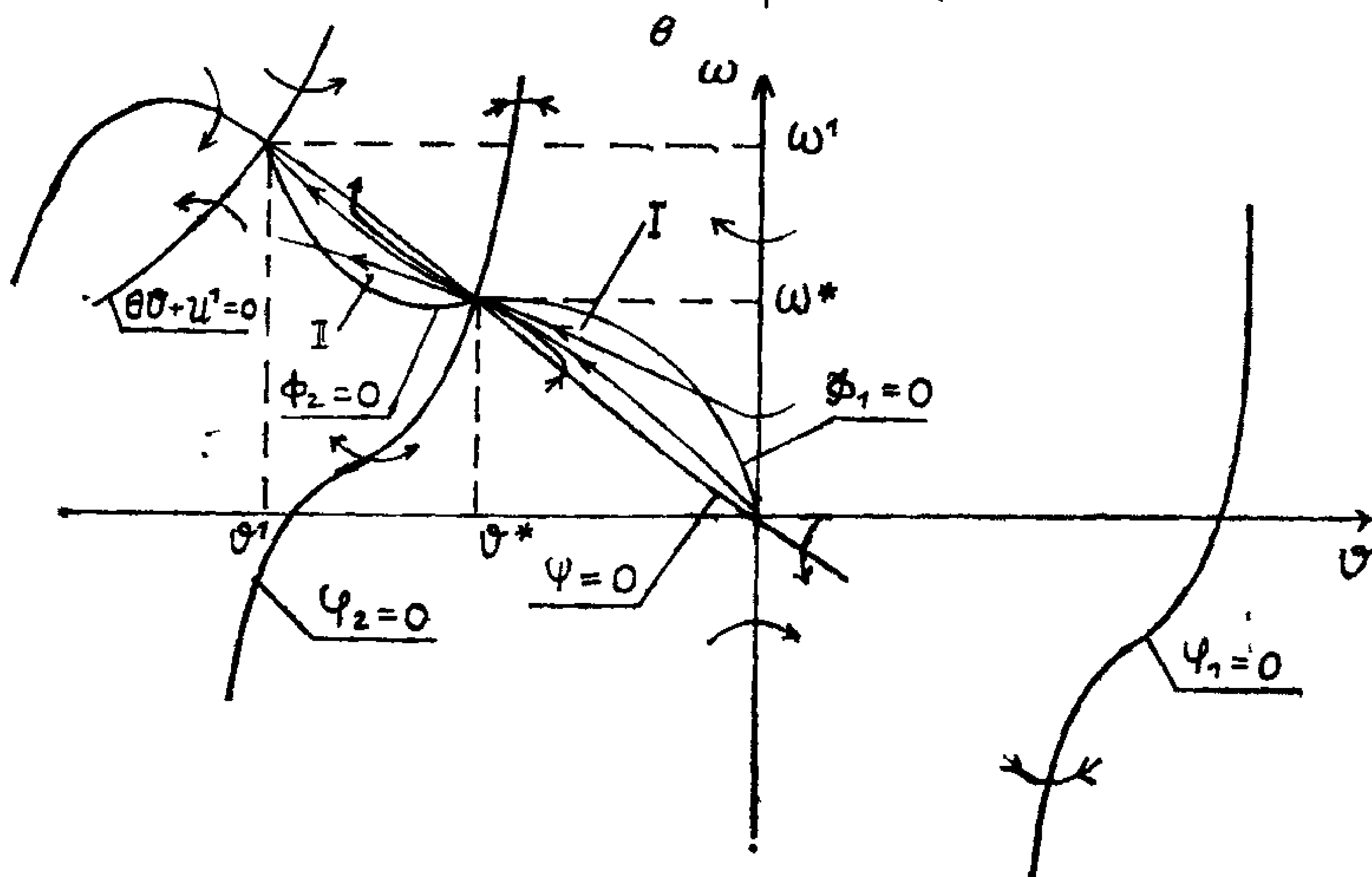
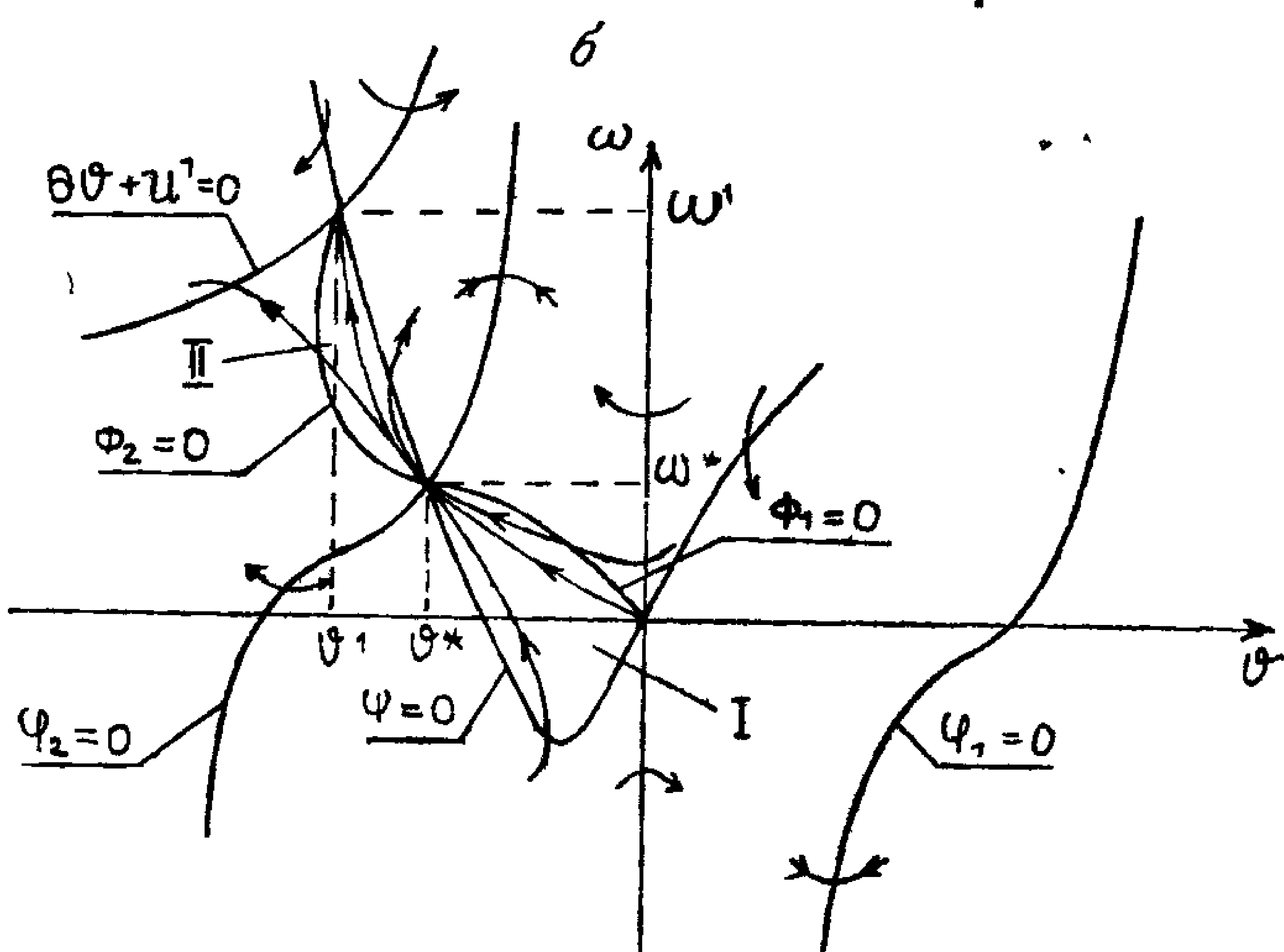
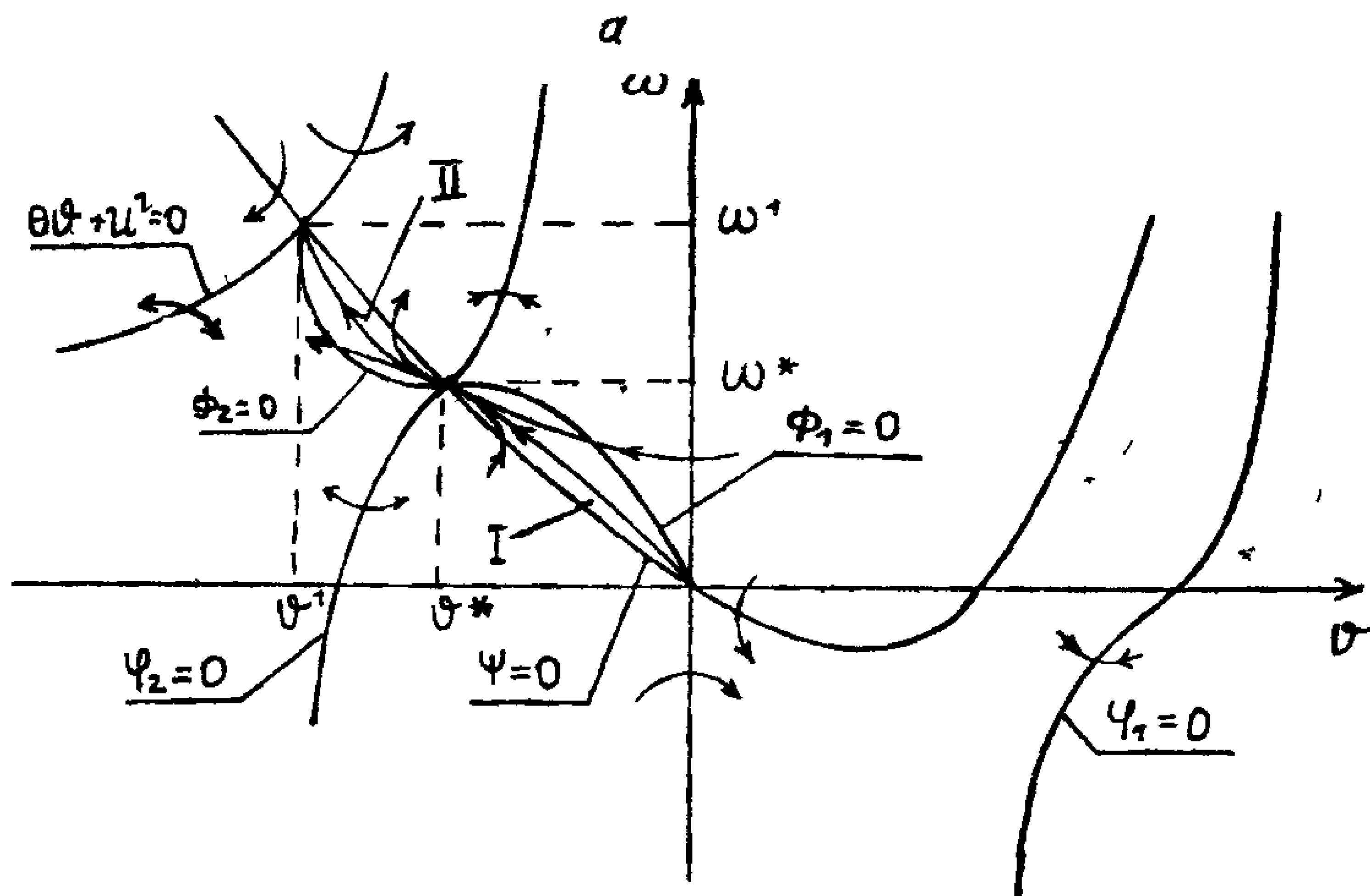


Рис. 3.8.



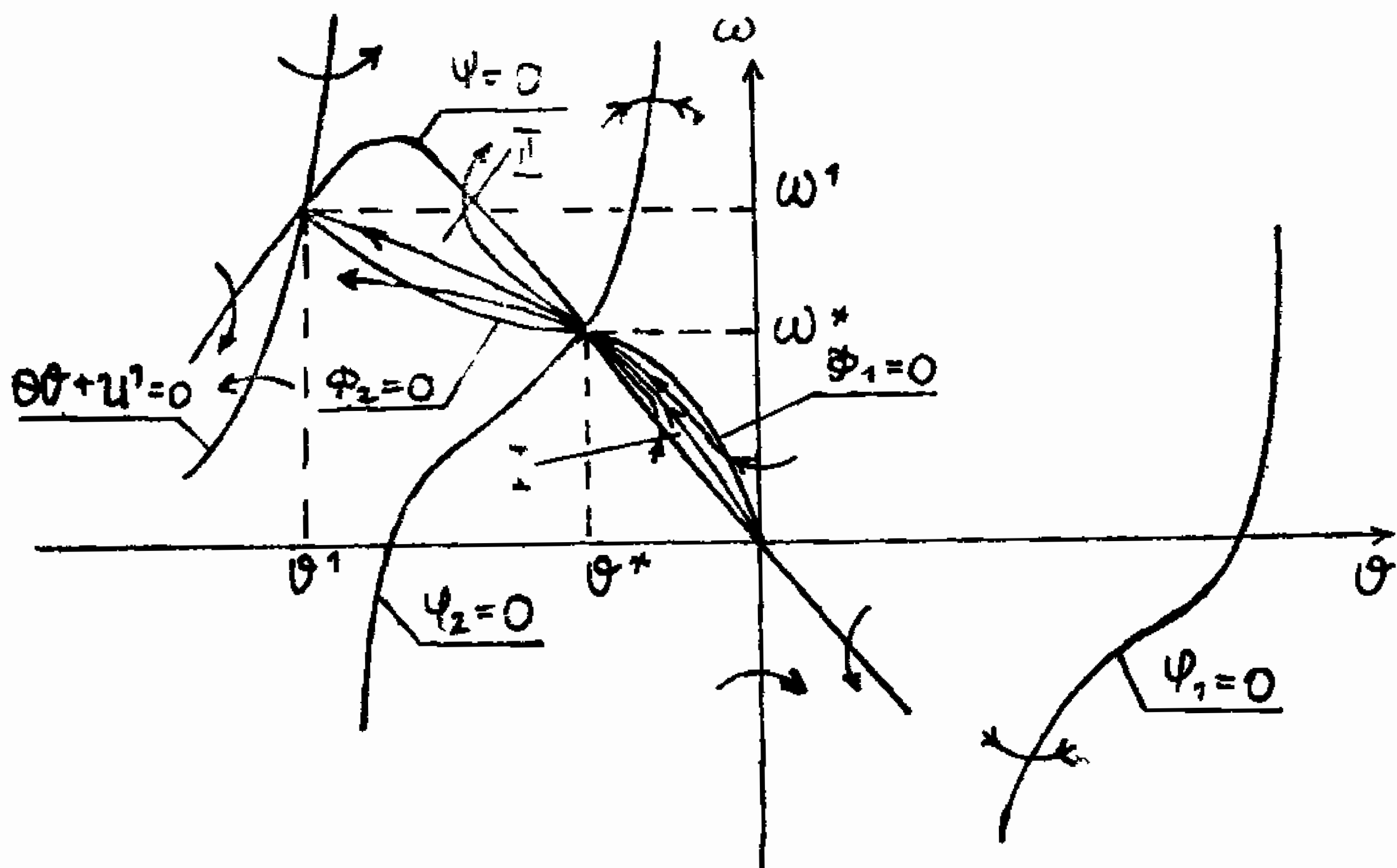


Рис. 3.9.

В рассматриваемом случае $v^1 = -(\gamma + 1)^2 \delta / (2\gamma(1 - \sigma)) + o(m_1^0)$, $\omega^1 = \frac{2\gamma(1 - \sigma)\delta}{\gamma + 1} (m_1^0)^2$. Качественное поведение кривой (26) при $\gamma\sigma - 1 + \gamma K / (q(\gamma - 1)) > 0$ представлено на рис. 3.8, а, 3.9, а, если $\gamma\sigma - 1 + \gamma K / (q(\gamma - 1)) - 2\gamma(1 - \sigma)^2 / (\gamma + 1)^2 > 0$, на рис. 3.8, б, 3.9, б при невыполнении последнего неравенства, а на рис. 3.8, в, 3.9, в, г, если $\gamma\sigma - 1 + \gamma K / (q(\gamma - 1)) < 0$. В рассматриваемом приближении кривая $\phi_1(v, \omega) = 0$ не проходит между точками $(0, 0)$ и (v^1, ω^1) , а кривая $\phi_2(v, \omega) = 0$ может проходить и между ними. Из соотношения (16) следует, что при малых m_1^0 состояние равновесия $(0, 0)$ — седло. Интегральная кривая системы (14) выходит из точки $(0, 0)$ в направлении, угловой коэффициент которого $k_1^0 = (m_1^0)^2 \bar{k}_1^0 + o(m_1^0)^3$, где $\bar{k}_1^0$ отрицательный корень квадратного уравнения

$$(\bar{k}^0)^2 - \frac{2}{\gamma + 1} \left\{ \left(\frac{\gamma K}{q(\gamma - 1)} + \gamma\sigma - 1 \right) \delta - \frac{2\gamma^2(1 - \sigma)^2}{(\gamma + 1)^2} \right\} \bar{k}^0 - \frac{2\gamma K \delta \theta_0 (\theta_0 + \delta)}{q(\gamma - 1)} = 0, \quad \theta_0 = \frac{2\gamma(1 - \sigma)}{(\gamma + 1)^2}.$$

Тип состояния равновесия (v^1, ω^1) определяется в зависимости от знака величины $\phi_2(v^1, \omega^1)$. Рассмотрим случай, когда точки $(0, 0)$ и (v^1, ω^1) лежат по одну сторону кривой $\phi_2(v, \omega) = 0$, т. е. $\phi_2(v^1, \omega^1) > 0$ или $\delta < \theta_0$. Из (18) следует, что положение равновесия (v^1, ω^1) имеет тип узла. Угловой коэффициент направления, по которому в особую точку (v^1, ω^1) входит бесчисленное множество траекторий системы (14), имеет вид $\bar{k}_1^1 = (m_1^0)^2 \bar{k}_1^1 + o(m_1^0)^3$, где $\bar{k}_1^1$ — наименьший отрицательный корень квадратно-

го уравнения

$$(\bar{k}^1)^2 + 2[\delta(\gamma K/(q(\gamma - 1)) + \gamma\sigma - 1) + (\gamma + 1)^2\theta_0/2] \times \\ \times \bar{k}^1/(\gamma + 1) + 2\gamma K\theta_0(\theta_0 - \delta)\delta/(q(\gamma - 1)) = 0. \quad (27)$$

Рассмотрим кривую, задаваемую уравнением

$$\Phi(v, \omega) = \omega - [2\theta_0(\gamma\sigma - 1 + \gamma K/(q(\gamma - 1)))/(\gamma + 1) + \\ + \theta_0 x]v(v - v^1)(m_1^0)^2 + \omega^1 v/v^1 = 0, \quad (28)$$

где x выбирается из соотношений

$$y_1(x) = \delta x^2 - x \left[(\gamma + 1)\theta_0^2 - \frac{2\delta}{\gamma + 1} \left(\gamma\sigma - 1 + \frac{\gamma K}{q(\gamma - 1)} \right) \right] - \\ - \frac{2K\gamma\theta_0(\theta_0 + \delta)}{q(\gamma - 1)} > 0, \quad (29)$$

$$y_2(x) = \delta x^2 + x \left[(\gamma + 1)\theta_0^2 + \frac{2\delta}{\gamma + 1} \left(\gamma\sigma - 1 + \frac{\gamma K}{q(\gamma - 1)} \right) \right] + \\ + \frac{2K\gamma\theta_0(\theta_0 + \delta)}{q(\gamma - 1)} < 0.$$

Для доказательства существования такого x обозначим через x_2 наименьший отрицательный корень уравнения $y_2(x) = 0$, а через x_1 — отрицательный корень уравнения $y_1(x) = 0$. Легко показать, что

$$y_1(x_2) = -2(\gamma + 1)\theta_0^2(x_2 + 2K\gamma/(q(\gamma - 1))), \\ y_2(-2K\gamma/(q(\gamma - 1))) = -4K\gamma\delta(\gamma - 1)/(q(\gamma + 1)^2) < 0.$$

Следовательно, $x_2 < -2K\gamma/(q(\gamma - 1))$, $y_1(x_2) > 0$, $x_1 > x_2$ и поэтому для любого x , $x_2 < x < x_1$, выполнены неравенства (29). Наклон интегральных кривых в каждой точке кривой $\Phi(v, \omega) = 0$ на интервале $(v^1, 0)$ больше наклона касательной к этой кривой в той же точке

$$\frac{d\omega}{dv} \Big|_{\Phi=0} + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial v} \Big/ \frac{\partial\Phi}{\partial\omega} \right) \Big|_{\Phi=0} = (m_1^0)^2 \left\{ \frac{2\gamma\theta_0}{q(\gamma - 1)x} (\theta_0(2v + 1) + \delta) + \right. \\ \left. + (2\theta_0 v + \delta) \left[\frac{2}{\gamma + 1} \left(\gamma\sigma - 1 + \frac{\gamma K}{q(\gamma - 1)} \right) + x \right] - 2(\gamma + 1)\theta_0^2 \right\} + \\ + o(m_1^0)^3 > 0$$

для всех v : $v^1 < v < 0$, так как выражение в фигурных скобках линейно относительно v и положительно как при $v = v^1$, так и при $v = 0$ в силу неравенств (29). Учитывая, что $(dv/d\xi) \Big|_{\Phi=0} = -2(\psi/(\varphi_1\varphi_2(\gamma + 1))) \Big|_{\Phi=0} < 0$ при $v^1 < v < 0$, так как на данном интервале

$$\psi \Big|_{\Phi=0} = \left[-q\gamma(\gamma - 1)(1 - \sigma)x/(\gamma + 1)^2 + o(m_1^0) \right] m_1^0 v(v - v^1) < 0,$$

$$\varphi_1 \Big|_{\Phi=0} = -2\gamma(1 - \sigma)m_1^0/(\gamma + 1)^2 + o(m_1^0)^2 < 0,$$

$$\varphi_2 \Big|_{\Phi=0} = (\theta_0(2v + 1) + \delta)m_1^0 + o(m_1^0)^2 > 0,$$

получим

$$\frac{d\Phi}{d\xi} \Big|_{\Phi=0} = \left(\frac{d\omega}{dv} + \frac{\partial\Phi}{\partial v} \Big/ \frac{\partial\Phi}{\partial\omega} \right) \Big|_{\Phi=0} \cdot \frac{dv}{d\xi} \Big|_{\Phi=0} < 0.$$

Следовательно, кривая (28) не имеет контакта с траекториями системы (14) при $v^1 < v < 0$, которые пересекают ее с ростом ξ из области, где $\Phi > 0$, в область, где $\Phi < 0$, как показано на рис. 38. Непосредственной проверкой можно убедиться, что

$$k_{\Phi}^0 < k_1^0 < 0, \quad k_2^1 < k_{\Phi}^1 < k_1^1 < 0,$$

$$k_1^0 < k_{\Psi}^0 < 0, \quad k_{\Psi}^1 < k_1^1 < 0,$$

где $k_{\Phi}^0 = - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial v} \Big/ \frac{\partial\Phi}{\partial\omega} \right) \Big|_{\substack{v=0 \\ \omega=0}}$, $k_{\Phi}^1 = - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial v} \Big/ \frac{\partial\Phi}{\partial\omega} \right) \Big|_{\substack{v=v^1 \\ \omega=\omega^1}}$. Поэтому, выходя единственным образом (см. рис. 38, а — в) из положения равновесия $(0, 0)$, интегральная кривая не может покинуть область $I(\psi < 0, \Phi < 0)$ и неминуемо приходит в положение равновесия (v^1, ω^1) . Таким образом, существует при малых m_1^0 и $\delta < \theta_0$ единственное непрерывно дифференцируемое решение задачи о структуре ударной волны

Если $\delta > \theta_0$, то состояние равновесия (v^1, ω^1) имеет тип седла. Интегральная кривая входит в него под направлением, угловым коэффициент которого $k_1^1 = (m_1^0)^2 \bar{k}_1^1 + o(m_1^0)^3$, где $\bar{k}_1^1$ — отрицательный корень уравнения (27). В этом случае между точками $(0, 0)$ и (v^1, ω^1) существует еще одна особая точка, определяемая из (20) разложением в ряд по m_1^0

$$\begin{aligned} v^* &= -(\delta + \theta_0)/(2\theta_0) + o(m_1^0), \\ \omega^* &= (m_1^0)^2 (\delta + \theta_0) [\gamma(1 - \sigma) - (\gamma\sigma - 1 + \\ &+ \gamma K/(q(\gamma - 1))) (\delta - \theta_0)/(2\theta_0)]/(\gamma + 1) + o(m_1^0)^3. \end{aligned} \quad (30)$$

Характеристическое уравнение для определения типа этой точки имеет вид

$$\begin{aligned} \lambda^2 - \sigma^* \lambda + \Delta^* &= 0, \\ \sigma^* &= -\theta_0 (\gamma K + q(\gamma - 1)^2) (m_1^0)^2 / (\gamma + 1) + o(m_1^0)^3, \\ \Delta^* &= -\gamma K q (\gamma - 1) \theta_0 (\theta_0^2 - \delta^2) / 4 (m_1^0)^4 + o(m_1^0)^5, \\ (\sigma^*)^2 - 4\Delta^* &= \gamma K q (\gamma - 1) \theta_0 (W^2 - \delta^2), \\ W^2 &= [\gamma K + q(\gamma - 1)^2 + 2Kq(\gamma - 1)\gamma^2(1 - \sigma)] 2(1 - \sigma) / \\ &\quad / (Kq(\gamma + 1)^4(\gamma - 1)). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что внутренняя особая точка при $\theta_0 < \delta < W$ имеет тип узла, который при $\delta > W$ становится фокусом. В случае узла, который, как было отмечено, достигается при конечном ξ , угловые коэффициенты $k_{1,2}^* = \bar{k}_{1,2}^* (m_1^0)^2 + o(m_1^0)^3$ направлений, вдоль которых интегральные кривые проходят через эту точку,

определяются из уравнения

$$(\bar{k}^*)^2 + \frac{2\theta_0}{\gamma+1} \left[\frac{\gamma K}{(\gamma-1)q} + \gamma - 1 \right] \bar{k}^* - \frac{\gamma K v^*}{q(\gamma-1)} (\delta - \theta_0) 2\theta_0^2 = 0.$$

Отметим, что $\bar{k}^* (\bar{k}^* - k_\psi^*) = \gamma K v^* (\delta - \theta_0) \theta_0^2 < 0$, $\bar{k}_{1,2}^* < 0$, т. е.

$$-\left(\frac{\partial \psi}{\partial v} / \frac{\partial \psi}{\partial \omega} \right) \Big|_{v=v^*, \omega=\omega^*} = k_\psi^* < k_1^* < k_2^* < 0.$$

Направлению с угловым коэффициентом k_1^* соответствует множество траектории системы (14), проходящих через точку (v^*, ω^*)

Рассмотрим кривые

$$\Phi_1(v, \omega) = \omega - \omega^* v / v^* - (m_1^0)^2 [2(\gamma\sigma - 1 + \gamma K / (q(\gamma - 1))) / (\gamma + 1) + 2x_1] \theta_0 v (v - v^*) = 0 \quad (31)$$

при $v^* < v < 0$,

$$\Phi_2(v, \omega) = \omega - \omega^* - (\omega^1 - \omega^*) (v - v^*) / (v^1 - v^*) - (m_1^0)^2 [2(\gamma\sigma - 1 + \gamma K / (q(\gamma - 1))) / (\gamma + 1) - 2\theta_0 x_2] \times \\ \times \theta_0 (v - v^1) (v - v^*)$$

при $v^1 < v < v^*$, где x_1 и x_2 удовлетворяют неравенствам

$$(\delta + \theta_0) x_1^2 + \left(\frac{2\delta}{\gamma+1} \left(\gamma\sigma - 1 + \frac{\gamma K}{q(\gamma-1)} \right) - (\gamma+1) \theta_0^2 \right) x_1 - \\ - \frac{2\gamma\theta_0 K}{q(\gamma-1)} > 0, \\ (\delta + \theta_0) x_1^2 + \frac{2\theta_0}{\gamma+1} \left(\gamma\sigma - 1 + \frac{\gamma K}{q(\gamma-1)} \right) x_1 + \frac{\gamma\theta_0 K}{q(\gamma-1)} (\delta - \theta_0) < 0, \quad (32)$$

$$(\delta - \theta_0) x_2^2 + \frac{2}{\gamma+1} \left(\gamma - 1 + \frac{\gamma K}{q(\gamma-1)} \right) x_2 + \frac{2\gamma K (\delta + \theta_0)}{q(\gamma-1) \theta_0} < 0,$$

$$(\delta - \theta_0) x_2^2 - \left[\frac{2\delta}{\theta_0(\gamma+1)} \left(\gamma\sigma - 1 + \frac{\gamma K}{q(\gamma-1)} \right) + (\gamma+1) \theta_0 \right] x_2 - \\ - \frac{2K\gamma\delta}{q(\gamma-1) \theta_0} > 0$$

Обозначим через x_1^0 отрицательный корень квадратного уравнения

$$y_3(x) = x^2 + \left[\frac{\gamma\sigma - 1 + \gamma K / (q(\gamma-1))}{\gamma+1} - \frac{\gamma+1}{2} \theta_0 \right] x - \frac{\gamma K \theta_0}{q(\gamma-1)} = 0.$$

Тогда, так как $y_3(x_1^* = -(\gamma K / (q(\gamma-1)) + \gamma - 1) / (\gamma + 1)) = (\gamma - 1) \theta_0 > 0$, то $x_1^* < x_1^0$. Следовательно, для всех x_1 и x_2 , удовлетворяющих неравенствам $x_1^* < x_1 < x_1^0$ и $\gamma K / (q(\gamma-1) x_1^*) < x_2 < 0$,

можно выбрать такое достаточно малое ε , чтобы при $\theta_0 < \delta < \theta_0 + \varepsilon$ выполнялись соотношения (32). Таким образом, при малых $\delta - \theta_0$ существуют x_1 и x_2 , удовлетворяющие неравенствам (32), из которых следует, что

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\omega}{dv} - k_{\Phi_1} \right) \Big|_{\Phi_1=0} &= (m_1^0)^2 \left\{ \frac{2\gamma\theta_0^2 K}{q(\gamma-1)x_1} \left(v + \frac{\delta}{\theta_0} \right) - \right. \\ &- \frac{2\theta_0}{\gamma+1} \left(\gamma\sigma - 1 + \frac{\gamma K}{q(\gamma-1)} \right) \left(2v + \frac{\delta}{\theta_0} \right) + (\gamma+1)\theta_0^2 - \\ &\left. - 2\theta_0 x_1 \left(2v + \frac{\delta + \theta_0}{2\theta_0} \right) \right\} + o(m_1^0)^3 > 0 \end{aligned}$$

при $v^* < v < 0$,

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\omega}{dv} - k_{\Phi_2} \right) \Big|_{\Phi_2=0} &= (m_1^0)^2 \left\{ - \frac{2\gamma\theta_0}{q(\gamma-1)} \frac{Kv}{x_2} - \frac{2\theta_0}{(\gamma+1)} \left(\gamma\sigma - 1 + \right. \right. \\ &+ \left. \frac{\gamma K}{q(\gamma-1)} \right) \left(2v + \frac{\delta}{\theta_0} \right) + (\gamma+1)\theta_0^2 + 2\theta_0^2 x_2 \left(2v + \frac{1}{2} + \frac{3\delta}{\theta_0} \right) \Big\} + \\ &+ o(m_1^0)^3 < 0 \end{aligned}$$

при $v^1 < v < v^*$. Здесь $k_{\Phi_i} = - \frac{\partial \Phi_i}{\partial v} / \frac{\partial \Phi_i}{\partial \omega}$.

Учитывая, что

$$\psi|_{\Phi_1=0} = [-\theta_0 q(\gamma-1)m_1^0 x_1 + o(m_1^0)^2] v(v-v^*) < 0,$$

$$\varphi_1|_{\Phi_1=0} = -\theta_0 m_1^0 + o(m_1^0)^2 < 0, \quad \varphi_2|_{\Phi_1=0} = m_1^0(2\theta_0 + o(m_1^0))(v-v^*) > 0$$

при $v^* < v < 0$,

$$\psi|_{\Phi_2=0} = [\theta_0^2 q(\gamma-1)x_2 + o(m_1^0)] m_1^0 (v-v^1)(v-v^*) > 0,$$

$$\varphi_1|_{\Phi_2=0} = -\theta_0 m_1^0 + o(m_1^0)^2 < 0,$$

$$\varphi_2|_{\Phi_2=0} = m_1^0(2\theta_0 + o(m_1^0))(v-v^*) < 0$$

при $v^1 < v < v^*$, получим

$$\frac{d\Phi_1}{d\xi} \Big|_{\Phi_1=0} = - \left(\frac{d\omega}{dv} - k_{\Phi_1} \right) \frac{2\varphi}{\varphi_1 \varphi_2 (\gamma+1)} \Big|_{\Phi_1=0} < 0, \quad v^* < v < 0,$$

$$\frac{d\Phi_2}{d\xi} \Big|_{\Phi_2=0} = - \left(\frac{d\omega}{dv} - k_{\Phi_2} \right) \frac{2\psi}{\varphi_1 \varphi_2 (\gamma+1)} \Big|_{\Phi_2=0} > 0, \quad v^1 < v < v^*.$$

Таким образом, кривые (31) не имеют на соответствующих интервалах контакта с траекториями системы (14), которые пересекают $\Phi_1(v, \omega) = 0$ при возрастании ξ из области, где $\Phi_1 > 0$, в область, где $\Phi_1 < 0$, а для $\Phi_2(v, \omega) = 0$ — наоборот. Учитывая, что кривые $\Phi_i(v, \omega) = 0$ не имеют других точек пересечения с $\psi(v, \omega) = 0$ на рассматриваемых промежутках кроме их концов

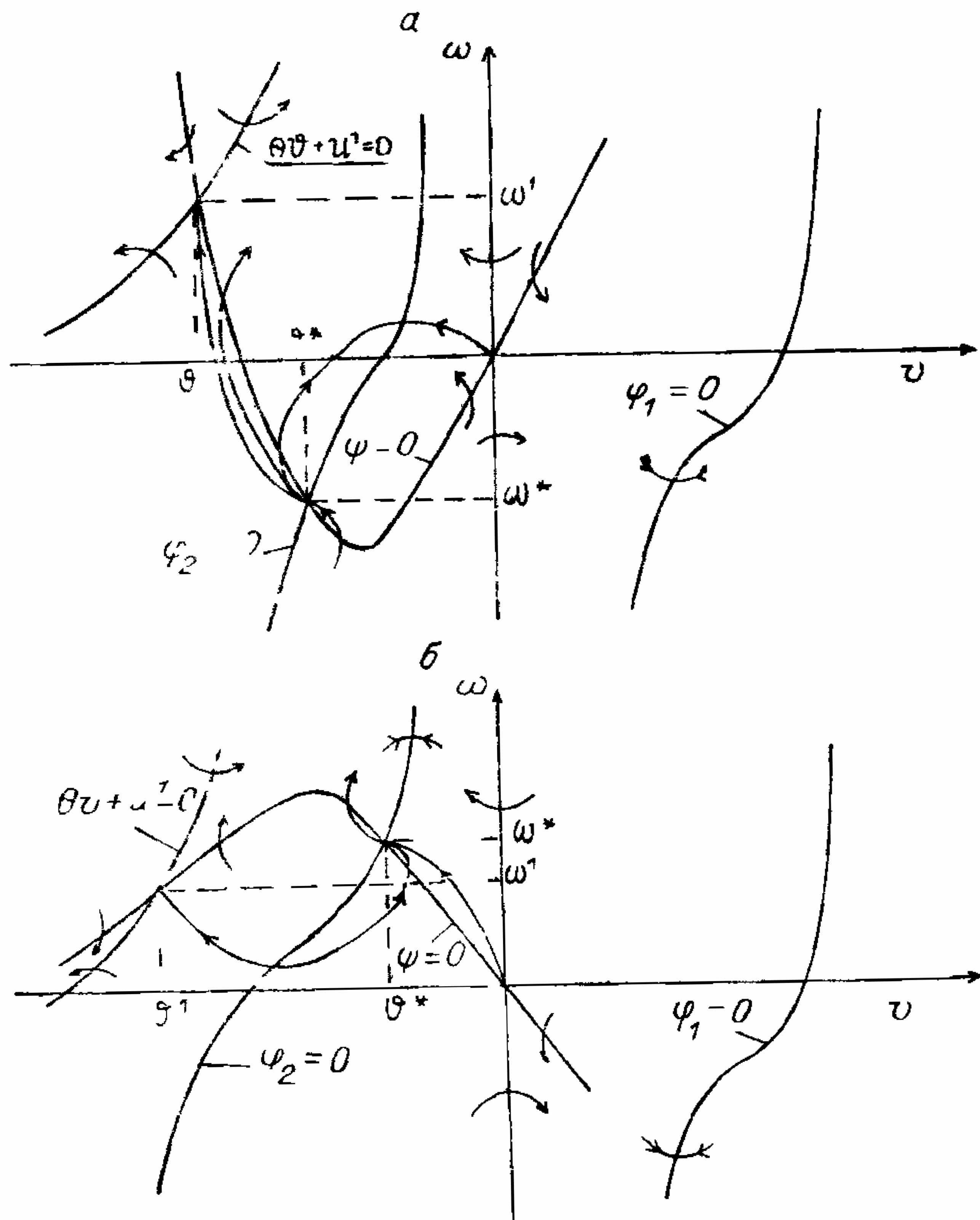


Рис. 3 10.

и расположение $\Phi_1(v, \omega) = 0$ относительно $\psi(v, \omega) = 0$, получим возможные качественные картины поведения траекторий, изображенные на рис 3 9. Интегральная кривая, выходящая из точки $(0, 0)$, не может покинуть область I ($\psi > 0, \Phi_1 < 0$, рис. 3 9) и приходит в точку (v^*, ω^*) вдоль направления k_1^* . Так как направлению с угловым коэффициентом k_1^* соответствует бесчисленное множество траекторий, проходящих через (v^*, ω^*) , то среди них в области II ($\psi < 0, \Phi_2 < 0$) существует такая траектория, которая приходит единственным образом в состояние равновесия (v^1, ω^1) . Таким образом, существует единственное непрерывно-дифференцируемое решение исходной задачи при малых m_1^0 и $\delta - \theta_0$, проходящее через внутреннюю особую точку. При увеличении δ точка (v^*, ω^*) может либо стать фокусом ($\delta > W$), либо не менять свой тип, но возникнут ситуации, изображенные на рис 3 10. В этих случаях интегральная кривая пересекает кривую $\varphi_2(v, \omega) = 0$ в точке, где $\mathcal{L}_2(v, \omega) \neq 0$, что приводит к неоднозначности параметров во фронте ударной волны и в решении необходимо вводить разрыв. Этот разрыв должен обладать свойством, что $\varphi_2(v^+, \omega^+) \cdot \varphi_2(v^-, \omega^-) < 0$, $\varphi_1(v^+, \omega^+) \cdot \varphi_1(v^-, \omega^-) > 0$,

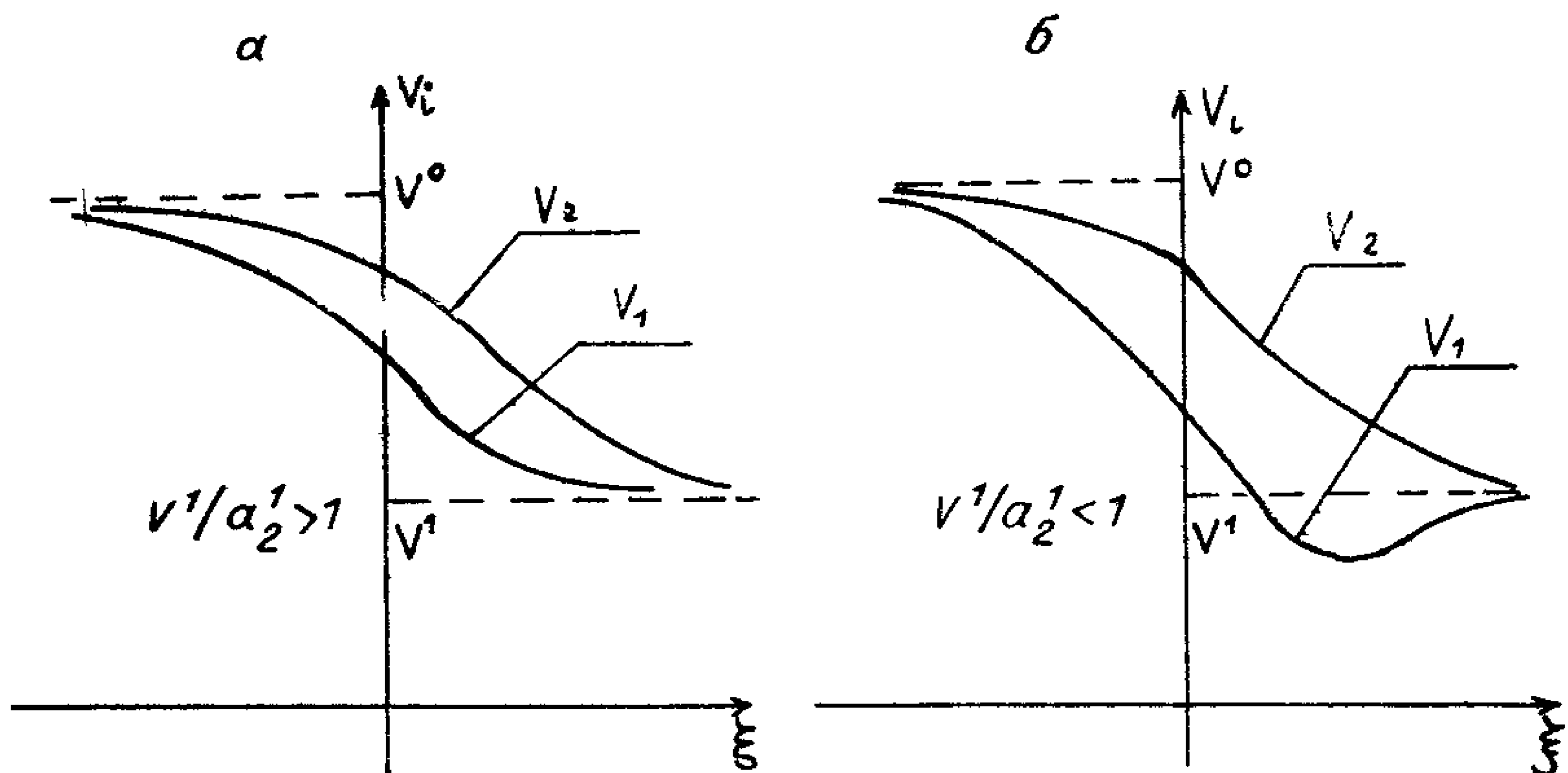


Рис. 3.11.

т. е. имеет место случай а) § 1. Однако для доказательства существования решения с таким разрывом необходимо привлекать более общую модель с учетом вязкости с последующим предельным переходом при стремлении коэффициентов вязкости к нулю, что будет рассмотрено в следующем параграфе.

Таким образом, если точки $(0, 0)$ и (v^1, ω^1) лежат по разные стороны кривой $\phi_2(v, \omega) = 0$ (имеет место переход через скорость звука в тяжелом газе), то до некоторого δ решение непрерывно и проходит через внутреннюю узловую особую точку. При дальнейшем увеличении δ в решении необходимо вводить разрыв. Учитывая, что непрерывное решение поставленной задачи $\omega(v)$ (когда оно существует) расположено между кривыми (26) и (28) или (31), то $\omega(v) \sim o(m_1^0)^2$. Тогда из соотношений (10) следует, что на решении

$$V_1 = \gamma/(\gamma + 1) + (\theta_0 v (v + 1) + \delta v + \delta/2) m_1^0 + o(m_1^0)^2,$$

$$V_2 = \gamma/(\gamma + 1) + (\theta_0 v + \delta/2) m_1^0 + o(m_1^0)^2.$$

Так как в рассмотренных случаях $dv/d\xi < 0$, то $dV_2/d\xi < 0$, $dV_1/d\xi = (2\theta_0 v + \theta_0 + \delta) dv/d\xi \leq 0$, если $v \geq v^* + o(m_1^0)$. Если $\delta < \theta_0$, что соответствует тому, что в ударной волне нет перехода через скорость звука в тяжелом газе, то $v^* < v^1 < 0$ и, следовательно, $dV_1/d\xi < 0$, т. е. скорости обоих компонентов монотонно убывают (рис 3.11, а). Если $\delta > \theta_0$, то $v^1 < v^* < 0$ и $dV_1/d\xi$ меняет знак, причем $dV_1/d\xi = 0$, когда $v = v^* + o(m_1^0)$ или $V_1 = V^1 - (\delta - \theta_0)^2/(4\theta_0) m_1^0 + o(m_1^0)^2$, т. е. профиль скорости легкого компонента является немонотонным. Скорость легкого газа сначала убывает до некоторого значения, меньшего равновесной скорости смеси за волной, а затем возрастает, стремясь к последней (см. рис. 3.11, б).

Таким образом, из рассмотренных приближений следует, что решение задачи о структуре ударной волны в смеси газов на основе эйлеровского приближения модели ММГС зависит от того, как расположены точки $(0, 0)$ и (v^1, ω^1) относительно кривых $\varphi_i(v, \omega) = 0$, $i = 1, 2$, или в силу следующих равенств:

$$\begin{aligned}\varphi_1(0, 0) &= \gamma m_1^0 (1 - V^0) ((M_1^0)^2 - 1), \quad \varphi_1(v^1, \omega^1) = \\ &= \gamma m_1^0 (1 - V^1) ((M_1^1)^2 - 1) < 0, \\ \varphi_2(0, 0) &= \gamma m_2^0 (1 - V^0) ((M_2^0)^2 - 1) > 0, \quad \varphi_2(v^1, \omega^1) = \\ &= \gamma m_2^0 (1 - V^1) ((M_2^1)^2 - 1),\end{aligned}$$

где $M_i^2 = V_i^2/a_i^2$ — число Маха по i -му газу, от того, происходит или нет в ударной волне переход через скорость звука в i -м компоненте. Во втором случае (дозвуковое течение легкого газа и сверхзвуковое течение тяжелого газа) существует непрерывное решение. Если состояние равновесия за ударной волной таково, что для его достижения необходимо перейти через скорость звука в легком компоненте, то в решении имеет место разрыв параметров легкого газа, а параметры тяжелого компонента не терпят скачка. Переход в ударной волне через скорость звука в тяжелом газе не приводит к разрыву до некоторого значения скорости ударной волны D (при этом профиль скорости легкого компонента является немонотонным). Однако при дальнейшем увеличении D в решении может возникнуть разрыв параметров тяжелого газа. На возможность существования решения с таким разрывом в смеси изотермических газов указывалось в [53].

Если ввести число Маха по смеси, характеризующее интенсивность ударной волны как отношение скорости набегающего равновесного потока в системе отсчета, перемещающейся с волной, к равновесной скорости звука в смеси перед фронтом $M_0 = V^0/a^0$, то условия перехода через скорость звука в i -м компоненте примут вид:

$$\begin{aligned}&\text{по легкому газу } M_0^2 > 1 + m_2^0(\chi - 1); \\ &\text{по тяжелому газу } (M_0^2 - 1)/(2\gamma M_0^2 - (\gamma - 1)) > m_1^0(1 - 1/\chi)/(\gamma + 1),\end{aligned}$$

где χ — отношение массы молекулы тяжелого газа к массе молекулы легкого газа.

Из полученных неравенств следует, что для любого состава газовой смеси перед ударной волной существует критическое значение числа Маха, начиная с которого в волне будет иметь место переход через скорость звука в легком газе, тогда как переход через скорость звука в тяжелом компоненте при достижении некоторого значения числа Маха возможен, только если выполнено неравенство $m_1^0 < 2\gamma(\chi - 1)/(\chi(\gamma + 1))$, и не осуществим в противном случае.

§ 3. УДАРНЫЕ ВОЛНЫ В БИНАРНОЙ СМЕСИ ВЯЗКИХ, ТЕПЛОПРОВОДНЫХ ГАЗОВ

В предыдущем параграфе было показано, что решение задачи о структуре ударной волны в смеси газов на основе эйлеровского приближения модели ММГС может содержать поверхности разрыва, т. е. зоны, в которых существенны эффекты вязкости и теплопроводности. В данном параграфе будут найдены асимптотические решения задачи о структуре ударной волны на основе навье-стоксовского приближения ММГС.

3.1. Постановка задачи. Анализ особых точек

Рассмотрим систему уравнений (2.1.47) — (2.1.49), которая для одномерных движений имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho_i u_i}{\partial x} &= 0, \quad \rho_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) + \frac{\partial p_i}{\partial x} = F_{ij} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\tilde{\mu}_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \right), \\ \rho_i \left(\frac{\partial e_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial e_i}{\partial x} \right) + p_i \frac{\partial u_i}{\partial x} &= Q_{ij} + \tilde{\mu}_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial x} \right), \\ F_{ij} &= K(u_j - u_i), \quad Q_{ij} = K\kappa_i(u_j - u_i)^2 + q(T_j - T_i), \\ p_i &= R_i \rho_i T_i, \quad e_i = c_{vi} T_i, \quad \kappa_1 + \kappa_2 = 1, \quad \tilde{\mu}_i = 4\mu_i/3, \\ i, j &= 1, 2, \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (1)$$

В этом параграфе будем полагать, что K , κ_i , q , μ_i , λ_i — положительные постоянные.

Предположим, что все искомые функции зависят от $\xi = x - Dt$, где D — скорость распространения ударной волны. Тогда из (1), интегрируя уравнения сохранения массы каждого компонента, количества движения и энергии смеси, получим [7]

$$\begin{aligned} \rho_i V_i &= c_i, \quad c_1 V_1 + c_2 V_2 + R_1 c_1 T_1/V_1 + R_2 c_2 T_2/V_2 = \\ &= c_3 + \tilde{\mu}_1 \frac{dV_1}{d\xi} + \tilde{\mu}_2 \frac{dV_2}{d\xi}, \\ c_1 (c_{v1} T_1 + V_1^2/2) + c_2 (c_{v2} T_2 + V_2^2/2) + R_1 c_1 T_1 + R_2 c_2 T_2 &= \\ &= c_4 + \tilde{\mu}_1 V_1 \frac{dV_1}{d\xi} + \tilde{\mu}_2 V_2 \frac{dV_2}{d\xi} + \lambda_1 \frac{dT_1}{d\xi} + \lambda_2 \frac{dT_2}{d\xi}, \\ c_1 \frac{dV_1}{d\xi} + R_1 c_1 \frac{dT_1}{d\xi} &= K(V_2 - V_1) + \frac{d}{d\xi} \left(\tilde{\mu}_1 \frac{dV_1}{d\xi} \right), \\ c_1 c_{v1} \frac{dT_1}{d\xi} + R_1 c_1 \frac{T_1}{V_1} \frac{dV_1}{d\xi} &= K\kappa_1 (V_2 - V_1)^2 + q(T_2 - T_1) + \\ &+ \tilde{\mu}_1 \left(\frac{dV_1}{d\xi} \right)^2 + \frac{d}{d\xi} \left(\lambda_1 \frac{dT_1}{d\xi} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

где c_i — постоянные интегрирования, $V_i = u_i - D$.

Введем безразмерные переменные по формулам (2.2) и $\tilde{\mu}_i = \mu_i/\mu_*$, $\tilde{\lambda}_i = \lambda_i/\lambda_*$, $\lambda_* = (R_1 c_1 + R_2 c_2) \mu_*/(c_1 + c_2)$, где μ_* —

обезразмеривающий множитель для вязкости, в частности, может совпадать с вязкостью смеси перед ударной волной.

Переходя в (1) к безразмерным переменным и опуская над ними черту, получим

$$\begin{aligned}
 \rho_i V_i &= \alpha_i^0, \quad \alpha_1^0 V_1 + \alpha_2^0 V_2 + m_1^0 T_1/V_1 + m_2^0 T_2/V_2 = \\
 &= 1 + \mu_1 \frac{dV_1}{d\xi} + \mu_2 \frac{dV_2}{d\xi}, \\
 \frac{\gamma}{\gamma-1} m_1^0 T_1 + \frac{\gamma}{\gamma-1} m_2^0 T_2 + \frac{\alpha_1^0}{2} V_1^2 + \frac{\alpha_2^0}{2} V_2^2 &= A + \mu_1 V_1 \frac{dV_1}{d\xi} + \\
 &+ \mu_2 V_2 \frac{dV_2}{d\xi} + \lambda_1 \frac{dT_1}{d\xi} + \lambda_2 \frac{dT_2}{d\xi}, \\
 \alpha_1^0 \frac{dV_1}{d\xi} + m_1^0 \frac{d(T_1/V_1)}{d\xi} &= K(V_2 - V_1) + \frac{d}{d\xi} \left(\mu_1 \frac{dV_1}{d\xi} \right), \\
 \frac{m_1^0}{\gamma-1} \frac{dT_1}{d\xi} + m_1^0 \frac{T_1}{V_1} \frac{dV_1}{d\xi} &= K\kappa_1 (V_2 - V_1)^2 + q(T_2 - T_1) + \\
 &+ \mu_1 \left(\frac{dV_1}{d\xi} \right)^2 + \frac{d}{d\xi} \left(\lambda_1 \frac{dT_1}{d\xi} \right).
 \end{aligned} \tag{3}$$

Для системы уравнений (3) поставим следующую краевую задачу: найти решение $V_i(\xi)$, $T_i(\xi)$ системы (3), которое на бесконечности стремится к постоянным значениям, т. е.

$$\begin{aligned}
 V_i \rightarrow V_i^0, \quad T_i \rightarrow T_i^0, \quad \frac{dV_i}{d\xi} \rightarrow 0, \quad \frac{dT_i}{d\xi} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow -\infty, \\
 V_i \rightarrow V_i^1, \quad T_i \rightarrow T_i^1, \quad \frac{dV_i}{d\xi} \rightarrow 0, \quad \frac{dT_i}{d\xi} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow +\infty.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Необходимым условием существования такого решения является, очевидно, требование, чтобы $V_i = V_i^0$, $T_i = T_i^0$ и $V_i = V_i^1$, $T_i = T_i^1$ были положениями равновесия системы (3). Аналогично, как и в § 2, получим, что $V_1^0 = V_2^0 = V^0$, $V_1^1 = V_2^1 = V^1$, $T_1^0 = T_2^0 = T^0 = V^0(1 - V^0)$, $T_1^1 = T_2^1 = T^1 = V^1(1 - V^1)$, $V^1 = 2\gamma/(\gamma + 1) - V^0$, $V^0 = \rho^0 D^2/(\rho^0 D^2 + p^0)$, где ρ^0 , p^0 — плотность и давление смеси перед ударной волной.

Представим систему уравнений (3) в виде, разрешенном относительно производных:

$$\begin{aligned}
 \mu_2 \frac{dV_2}{d\xi} &= \alpha_2^0 V_2 + m_2^0 \frac{T_2}{V_2} - W_1, \\
 \lambda_2 \frac{dT_2}{d\xi} &= \frac{m_2^0}{\gamma-1} T_2 - \frac{\alpha_2^0}{2} V_2^2 + V_2 W_1 - W_2, \\
 \mu_1 \frac{dV_1}{d\xi} &= W_1 + \alpha_1^0 V_1 + m_1^0 \frac{T_1}{V_1} - 1,
 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\lambda_1 \frac{dT_1}{d\xi} &= W_2 - \frac{\alpha_1^0}{2} V_1^2 + \frac{m_1^0}{\gamma - 1} T_1 - V_1 W_1 - A + V_1, \\ \frac{dW_1}{d\xi} &= K(V_1 - V_2), \\ \frac{dW_2}{d\xi} &= KV_2(V_1 - V_2) + K\kappa_2(V_2 - V_1)^2 - q(T_2 - T_1).\end{aligned}$$

В положениях равновесия имеем

$$\begin{aligned}W_1^l &= \alpha_2^0 V^l + m_2^0(1 - V^l), \\ W_2^l &= V^l(\gamma/(\gamma - 1)m_2^0 + V^l(\alpha_2^0/2 - \gamma/(\gamma - 1)m_2^0)), \quad l = 0, 1.\end{aligned}$$

Для исследования поведения решения в окрестности стационарных точек $(V^l, V^l, T^l, T^l, W_1^l, W_2^l)$ линеаризуем (5) вблизи этих точек и введем обозначения

$$\begin{aligned}v_i &= (1 - V^l)(V_i - V^l), \quad \tau_i = T_i - T^l, \quad \omega_1 = V^l(W_1 - W_1^l), \\ \omega_2 &= V^l(W_1 - W_1^l) - (W_2 - W_2^l), \quad l = 0, 1, \quad i = 1, 2.\end{aligned}$$

В результате получим

$$B \frac{d\vec{v}}{d\xi} = A_1 \vec{v}, \quad (6)$$

где

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\mu_2 V^l}{1 - V^l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mu_1 V^l}{1 - V^l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1 - V^l}{KV^l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/q \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_2^l & m_2^0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ m_2^0 & \frac{m_2^0}{\gamma - 1} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a_1^l & m_1^0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m_1^0 & \frac{m_1^0}{\gamma - 1} & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{v} = (v_2, r_2, v_1, \tau_1, \omega_1, \omega_2), \quad a_i^l = (\alpha_i^0 V^l - m_i^0(1 - V^l))/(1 - V^l).$$

Общим решением системы уравнений (6) является линейная комбинация частных решений вида

$$\vec{v} = \vec{v}_0 e^{\gamma t}. \quad (7)$$

Подставляя (7) в (6), получим

$$(A_1 - \gamma B) \vec{v}_0 = 0.$$

Следовательно, для определения γ имеем уравнение

$$\det(A_1 - \gamma B) = 0. \quad (8)$$

Так как A_1 — симметрическая матрица, B — симметрическая, положительно-определенная матрица, существует невырожденное ортогональное преобразование, приводящее одновременно A_1 и B к диагональному виду, т. е. если S — матрица преобразования, то $S(A_1 - \gamma B)S' = SAS' - \gamma(SRS') = \bar{A}_1 - \gamma E$,

$$\det(A_1 - \gamma B) = \det(\bar{A}_1 - \gamma E),$$

где $\bar{A}_1$ — диагональная матрица, E — единичная матрица. Следовательно, все γ , удовлетворяющие (8), действительны. В результате линейного невырожденного преобразования

$$z_1 = \tau_{20} + \frac{\gamma - 1}{m_2^0} (\omega_{20} + m_2^0 v_{20}), \quad z_2 = \tau_{10} + \frac{\gamma - 1}{m_1^0} (m_1^0 v_{10} - \omega_{20}),$$

$$z_3 = v_{20} + \frac{b_1^l}{b_1^l + b_2^l} (v_{10} - v_{20}), \quad z_4 = \omega_{20} - m_1^0 m_2^0 (v_{10} - v_{20}),$$

$$z_5 = \omega_{10} + \frac{1}{2} \left(\frac{b_1^l b_2^l}{b_1^l + b_2^l} + (\gamma - 1) m_1^0 m_2^0 + 1 \right) (v_{10} - v_{20}),$$

$$z_6 = \omega_{10} + \frac{1}{2} \left(\frac{b_1^l b_2^l}{b_1^l + b_2^l} + (\gamma - 1) m_1^0 m_2^0 - 1 \right) (v_{10} - v_{20}),$$

$$\left\| \frac{\partial \vec{z}}{\partial \vec{v}_0} \right\| = -1,$$

$$b_i^l = (\alpha_i^0 V^l - \gamma m_i^0 (1 - V^l)) / (1 - V^l), \quad \vec{v}_0 = (v_{20}, \tau_{20}, v_{10}, \tau_{10}, \omega_{10}, \omega_{20}),$$

квадратичная форма $(A_1 \vec{v}_0) \vec{v}_0$ представима в виде

$$(A_1 \vec{v}_0) \vec{v}_0 = \frac{m_2^0}{\gamma - 1} z_1^2 + \frac{m_1^0}{\gamma - 1} z_2^2 + (b_1 + b_2) z_3^2 - \frac{\gamma - 1}{m_1^0 m_2^0} z_4^2 + z_5^2 - z_6^2. \quad (9)$$

Так как, согласно теореме инерции квадратичных форм, число положительных и отрицательных коэффициентов в квадратичной форме, приведенной с помощью вещественного линейного невырожденного преобразования к каноническому виду, не зависит от выбора этого преобразования и среди множества таких преобразований, как уже отмечалось, существует такое, которое приводит

квадратичную форму к каноническому виду, коэффициенты в котором совпадают с собственными значениями, число положительных и отрицательных коэффициентов в квадратичной форме (9) совпадает с числом положительных и отрицательных собственных значений, удовлетворяющих (8). Следовательно, поскольку $b_1^l + b_2^l = ((\gamma + 1)V^l - \gamma)/(1 - V^l)$, $e = 0, 1$, $\gamma/(\gamma + 1) < V^0 < 1$, $V^1 < \gamma/(\gamma + 1)$, для особой точки $(V^0, V^0, T^0, T^0, W_1^0, W_2^0)$ имеем четыре положительных и два отрицательных собственных значения, а для $(V^1, V^1, T^1, T^1, W_1^1, W_2^1)$ — три положительных и три отрицательных.

Таким образом, необходимо найти решение в шестимерном фазовом пространстве, соединяющее две условно устойчивые седловидные особые точки. Такой характер особых точек делает возможным постановку задачи (3), (4).

Для исследования поставленной задачи рассмотрим асимптотические решения в предположении малости некоторых параметров. В общем случае задача о структуре ударной волны решается в § 4 численно.

3.2. Слабые ударные волны

Пусть $u^1 = V^0 - V^1 = 2\gamma(M_0^2 - 1)/((\gamma + 1)(\gamma M_0^2 + 1)) \ll 1$. Введем новые переменные v_i и τ_i по формулам

$$\begin{aligned} V_i &= \gamma/(\gamma + 1) + u^1 v_i/2, \\ T_i &= \gamma/(\gamma + 1)^2 + (\gamma - 1)u^1 \tau_i/(2(\gamma + 1)) - (u^1)^2/4. \end{aligned} \quad (10)$$

Из (10) следует, что если $V_i = V^0$, $T_i = T^0$, то $v_i = 1$, $\tau_i = -1$, а, если $V_i = V^1$, $T_i = T^1$, то $v_i = -1$, $\tau_i = 1$. Будем искать решение в виде ряда по степеням u^1

$$\begin{aligned} v_i &= v_{i0} + u^1 v_{i1} + (u^1)^2 v_{i2} + \dots, \\ \tau_i &= \tau_{i0} + u^1 \tau_{i1} + (u^1)^2 \tau_{i2} + \dots \end{aligned} \quad (11)$$

Подставляя (11) в (3) и приравнивая члены при одинаковых степенях u^1 , получим

$$\begin{aligned} v_{10} &= v_{20} = v_0, \quad \tau_{10} = \tau_{20} = \tau_0, \quad \tau_0 = -v_0, \\ \frac{4\gamma(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2} \Omega \frac{dv_0}{d\xi} &= v_0^2 - 1, \quad \bar{\xi} = \xi \cdot u^1, \\ v_{11} - v_{21} &= \frac{m_1^0 - \alpha_1^0}{K} \frac{(\gamma + 1)^2}{4\gamma(\gamma - 1)} \frac{1}{\Omega} (v_0^2 - 1), \\ \tau_{11} &= \tau_{21}, \\ \tau_{22} - \tau_{12} &= \left(\frac{m_1^0 m_2^0 (m_1^0 - \alpha_1^0)}{qK(\gamma - 1)} + \frac{\lambda_1 m_2^0 - \lambda_2 m_1^0}{q} \right) \times \\ &\times \frac{(\gamma + 1)^4}{8\gamma^2(\gamma - 1)^2} \frac{1}{\Omega^2} v_0 (v_0^2 - 1), \\ \Omega &= \frac{\mu_1 + \mu_2}{\gamma - 1} + \frac{\gamma - 1}{\gamma} (\lambda_1 + \lambda_2) + \frac{(m_1^0 - \alpha_1^0)^2}{(\gamma - 1)K}. \end{aligned} \quad (12)$$

Отсюда следует, как и в § 2, что разность температур компонент в слабой ударной волне величина более высокого порядка малости, чем разность скоростей. Кроме того, скорость тяжелого компонента в системе координат, движущейся с волной, больше скорости легкого компонента, а величина $T_2 - T_1$ меняет знак. Интегрируя уравнение для $v_0(\xi)$ при условии, что $v(0) = 0$, получим

$$v_0(\xi) = \text{th} \left(\frac{-(\gamma + 1)^2}{4\gamma(\gamma - 1)\Omega} \xi \right).$$

Формулы (3) при $\mu_i = \lambda_i = 0$ эквивалентны соответствующим выражениям для слабой ударной волны, найденным в § 2. Если определить, следуя Прандтлю, «эффективную толщину» ударной волны $l = (\rho^1 - \rho^0) / \max |d\rho/d\xi|$, где ρ — массовая плотность смеси, то в данном случае будем иметь

$$\frac{l}{L^*} = \frac{8\gamma(\gamma - 1)\Omega}{u^1(\gamma + 1)^2}, \quad L^* = \frac{\mu_*}{c_1 + c_2}. \quad (13)$$

Таким образом, толщина слабой ударной волны зависит от парциальных коэффициентов вязкости и теплопроводности каждого компонента и величины K , характеризующей интенсивность обмена импульсом между составляющими смеси.

Исследуем поведение энтропий компонент в слабой ударной волне. Из (2.1.77) и (3) легко получить, что

$$\alpha_i^0 T_i \frac{d\bar{s}_i}{d\xi} = K \kappa_i (V_j - V_i)^2 + q(T_j - T_i) + \mu_i \left(\frac{dV_i}{d\xi} \right)^2 + \frac{d}{d\xi} \left(\lambda_i \frac{dT_i}{d\xi} \right),$$

где $\bar{s}_i$ — безразмерное значение энтропии i -го компонента смеси,

$$\bar{s}_i = s_i(c_1 + c_2) / (R_1 c_1 + R_2 c_2).$$

Используя (12), найдем

$$\alpha_i^0 \frac{d\bar{s}_i}{d\xi} = (u')^2 \frac{(\gamma + 1)^3 m_i^0}{16\gamma^3(\gamma - 1)} \frac{1}{\Omega^2} \left(\frac{m_j^0(m_i^0 - \alpha_i^0)}{(\gamma - 1)K} - (\lambda_1 + \lambda_2) \right) v_0(v_0^2 - 1) + o(u^1)^3, \quad i = 1, 2, \quad i \neq j,$$

откуда следует, что энтропия тяжелого газа ($m_2^0 < \alpha_2^0$) имеет максимум в ударной волне, а энтропия легкого газа — минимум, если $\lambda_1 + \lambda_2 < m_2^0(m_1^0 - \alpha_1^0)/((\gamma - 1)K)$, и максимум, если $\lambda_1 + \lambda_2 > m_2^0(m_1^0 - \alpha_1^0)/((\gamma - 1)K)$.

3.3. Односкоростное приближение

Пусть $1/K \ll 1$. В этом случае реализуется односкоростной, но двухтемпературный режим течения. В дальнейшем в этом параграфе для упрощения будем считать, что коэффициентами теплопроводности можно пренебречь, т. е. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. В силу данных предположений система уравнений (3) в нулевом приближении

будет иметь вид [7]

$$V_1 = V_2 = V, \quad V + (m_1^0 T_1 + m_2^0 T_2)/V = 1 + \mu \frac{dV}{d\xi},$$

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} (m_1^0 T_1 + m_2^0 T_2) + \frac{V^2}{2} = \mu V \frac{dV}{d\xi} + A, \quad (14)$$

$$\frac{m_1^0}{\gamma-1} \frac{dT_1}{d\xi} + m_1^0 \frac{T_1}{V} \frac{dV}{d\xi} = q(T_2 - T_1) + \mu_1 \left(\frac{dV}{d\xi} \right)^2, \quad \mu = \mu_1 + \mu_2.$$

Интегрируя систему (14) при условии, что $V(0) = (V^0 + V^1)/2$, получим

$$\begin{aligned} \xi = \frac{2\mu}{(V^0 - V^1)(\gamma + 1)} (V^0 \ln(V^0 - V) - V^1 \ln(V - V^1)) - \\ - \frac{2\mu}{\gamma + 1} \ln \frac{V^0 - V^1}{2}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} T_2 - T_1 = \delta \left(\frac{V^2}{\gamma + 1} - \frac{2V}{\gamma + 1} + \frac{V^0 - V^1}{\gamma - 1} \right) - \\ - \delta \theta V^{-(\gamma-1)} e^{-\theta \xi} \int_{-\infty}^{\xi} e^{\theta \tau} f(V) d\tau, \end{aligned} \quad (16)$$

$$T_1 = V(1 - V) + \mu V \frac{dV}{d\xi} - m_2^0 (T_2 - T_1), \quad (17)$$

где

$$f(V) = V^{(\gamma-1)} \left(\frac{V^2}{\gamma + 1} - \frac{2V}{\gamma + 1} + \frac{V^0 - V^1}{\gamma - 1} \right), \quad \theta = \frac{q(\gamma - 1)}{m_1^0 m_2^0},$$

$$\delta = \frac{m_1^0 \mu - \mu_1}{2m_1^0 m_2^0 \mu} (\gamma^2 - 1).$$

Соотношение (16), используя (15), запишем в виде

$$T_2 - T_1 = \delta V^{-(\gamma-1)} \int_V^{V^0} u^{(\gamma-2)} \left(\frac{V^0 - u}{u - V} \right)^\beta \left(\frac{V - V^1}{u - V^1} \right)^\alpha (V^0 - u)(u - V^1) du, \quad (18)$$

где $\alpha = 2\mu V^1 \theta / ((\gamma + 1)(V^0 - V^1))$, $\beta = \alpha V^0 / V^1$.

Формулы (15) — (18) определяют решение системы (14), удовлетворяющее граничным условиям (4), что проверяется непосредственным переходом к пределу при $V \rightarrow V^0$ или $V \rightarrow V^1$. Интеграл в (18) в общем случае выражается через гипергеометрические функции двух переменных. Как видно из (18), если $\delta \geq 0$ ($m_1^0 \mu_2 \geq m_2^0 \mu_1$), то $T_2 \geq T_1$. Рассмотрим случай $\delta > 0$. Из последнего уравнения системы (14) следует, что $dT_1/d\xi > 0$, т. е. $T_1(\xi)$ — монотонно возрастающая функция при $-\infty < \xi < +\infty$. При малых $(V^0 - V)$ из (17) и (18) легко показать, что $T_2 - T_0 \sim \sim -K_1(V^0 - V)$, а при малых $(V - V^1)$ — $T_2 - T^1 \sim -K_1(V - V^1)$, если $\alpha > 1$, и $T_2 - T^1 \sim K_2(V - V^1)^\alpha$, если $\alpha < 1$, где K_1, K_2 — по-

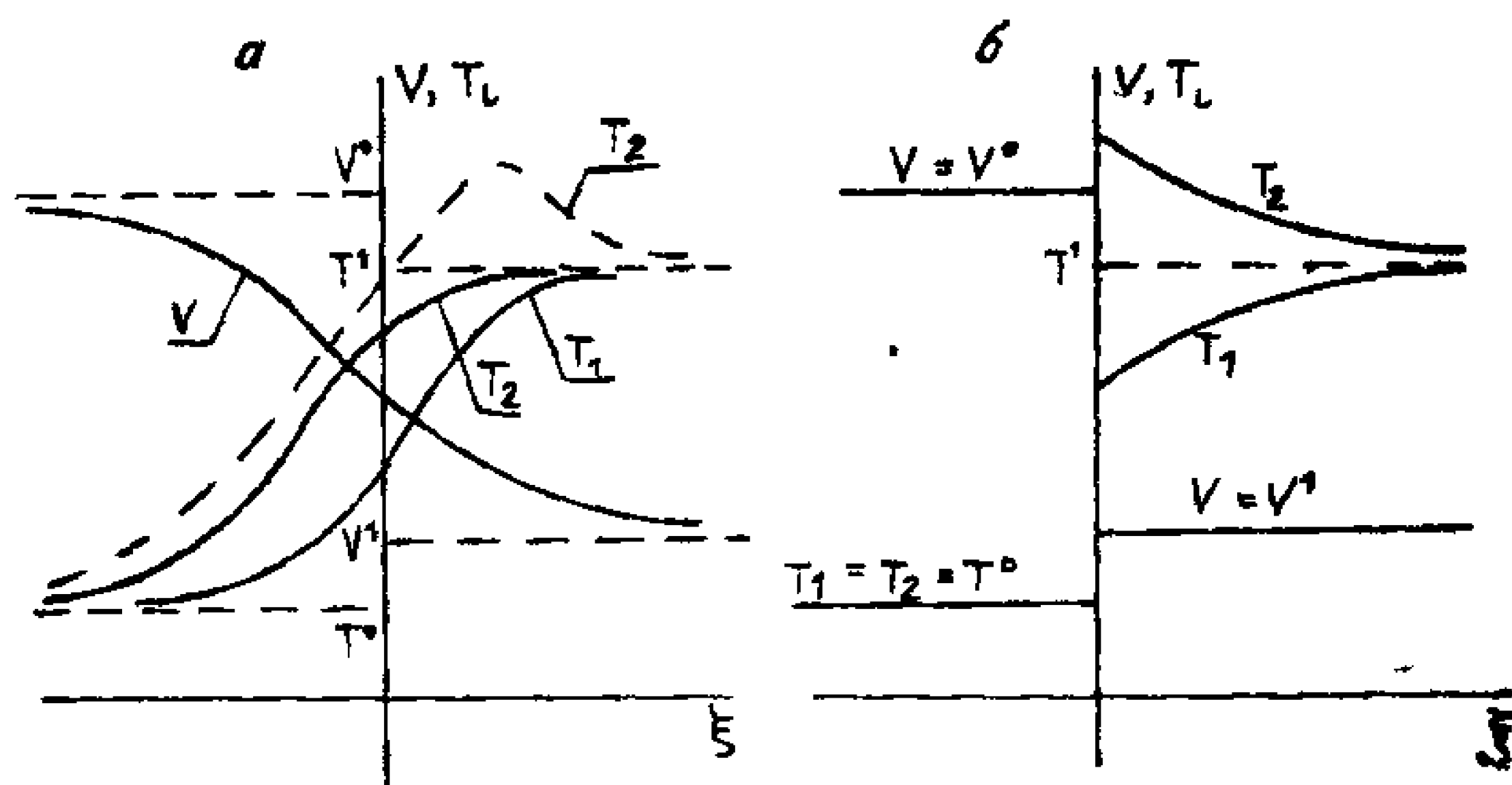


Рис. 3.12

ложительные постоянные. Следовательно, при $\alpha < 1$ $dT_2/d\xi$ меняет знак. На рис. 3.12, а показаны возможные качественные поведения функций $T_2(\xi)$, $T_1(\xi)$ и $V(\xi)$. Рассмотрим предельные зависимости $T_i(\xi)$, $V(\xi)$ при $\mu_i \rightarrow 0$. Положив в (16) $\mu_1/\mu_2 = k$, в пределе получим

$$V(\xi) = \begin{cases} V^0, & \xi < 0, \\ \frac{V^0 + V^1}{2}, & \xi = 0, \\ V^1, & \xi > 0; \end{cases} \quad T_1(\xi) = \begin{cases} T^0, & \xi < 0; \\ \varphi_1(\xi), & \xi > 0; \end{cases} \quad T_2(\xi) = \begin{cases} T^0, & \xi < 0, \\ \varphi_2(\xi), & \xi > 0; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \varphi_1(\xi) = T^1 - \frac{m_1^0 - km_2^0}{m_1^0(k+1)} (V^1)^{-(\gamma-1)} e^{-\theta\xi} [(V^1)^\gamma (1 - V^1) - \\ - (V^0)^\gamma (1 - V^0)], \\ \varphi_2(\xi) = 2T^1 - \varphi_1(\xi). \end{aligned}$$

Из этих формул при $\delta > 0$ следует, что $T^0 < T_1^* = \varphi_1(0) < T^1$, $T_2^* = \varphi_2(0) > T^1 > T^0$. Предельное поведение $T_2(\xi)$, $T_1(\xi)$, $V(\xi)$ при $\mu_i \rightarrow 0$ изображено на рис. 3.12, б. В случае, если $\delta < 0$, необходимо поменять местами T_2 и T_1 на рис. 3.12. Таким образом, в пределе при $\mu_i \rightarrow 0$ решение имеет разрыв с последующей непрерывной зоной релаксации для температур, причем величина разрыва зависит от отношения μ_1/μ_2 .

3.4. Малые концентрации

Пусть мала молярная концентрация одного из компонентов смеси. Для определенности положим, что мала концентрация компонента, обозначенного индексом 1, т. е. $m_1^0 \ll 1$. В данном пункте будем считать, что индексом 1 может быть обозначен как легкий газ, так и тяжелый. Пусть также мала массовая концентрация, т. е. $\alpha_1^0 \ll 1$. Введем обозначение $\sigma = \alpha_1^0/m_1^0$. Тогда если мала концентрация тяжелого газа, то $\sigma > 1$, в противном случае — $\sigma < 1$. Будем считать, что $\mu_1 \sim m_1^0$ или $\mu_1 \ll m_1^0$ и $K \sim m_1^0$. Если

$K \gg m_1^0$, то получим односкоростное приближение, рассмотренное в п. 3.3. Что касается величины q , характеризующей интенсивность теплообмена между компонентами, то рассмотрим два случая: $q \gg m_1^0$ и $q \sim m_1^0$.

Пусть $q \gg m_1^0$. Тогда система уравнений (3) в нулевом приближении по m_1^0 примет вид

$$V_2 + \frac{T}{V_2} = 1 + \mu_2 \frac{dV_2}{d\xi}, \quad \frac{V_2^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} T = A + \mu_2 V_2 \frac{dV_2}{d\xi}, \quad (19)$$

$$\sigma \frac{dV_1}{d\xi} + \frac{d(T/V_1)}{d\xi} = \tilde{K} (V_2 - V_1) + \tilde{\mu}_1 \frac{d^2 V_1}{d\xi^2},$$

$$T = T_1 = T_2, \quad \tilde{K} = K/m_1^0, \quad \tilde{\mu}_1 = \mu_1/m_1^0.$$

Таким образом, имеет место однотемпературный, но двухскоростной режим течения газовой смеси.

Интегрируя первые два уравнения системы (19), найдем

$$T = V_2(1 - V_2) - (\gamma + 1)(V^0 - V_2)(V_2 - V^1)/2,$$

а функция $V_2(\xi)$ определяется формулой (15), в которой μ нужно заменить на μ_2 . Решение третьего уравнения в (19) будем искать в предположении малости величины $u^1 = V^0 - V^1$, т. е. в приближении слабых ударных волн. В отличие от полученного ранее, в п. 3.2, решения для слабых ударных волн в данном случае $u^1 \gg m_1^0$. Введем новые безразмерные скорости v_i и температуру τ согласно формулам (10). В нулевом приближении по u^1 для v_1 , v_2 и τ будем иметь

$$\frac{(\gamma + 1)^2}{2\gamma\mu_2} u^1 \xi = \ln \frac{1 - v_2}{1 + v_2}, \quad \tau = -v_2, \quad (20)$$

$$\tilde{\mu}_1 \frac{d^2 v_1}{d\xi^2} - \frac{\gamma\sigma - 1}{\gamma} \frac{dv_1}{d\xi} + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{dv_2}{d\xi} + \tilde{K} (v_2 - v_1) = 0.$$

Интегрируя последнее уравнение в (20), найдем

$$v_1 = \frac{1}{\tilde{\mu}_1(v_1 - v_2)} \left\{ \left(\tilde{K} + \frac{\gamma-1}{\gamma} v_1 \right) e^{v_1 \xi} \int_{-\xi}^{+\infty} v_2 e^{-v_1 \eta} d\eta + \right. \\ \left. + \left(\tilde{K} + \frac{\gamma-1}{\gamma} v_2 \right) e^{v_2 \xi} \int_{-\infty}^{\xi} v_2 e^{-v_2 \eta} d\eta \right\}, \quad (21)$$

где v_i — корни квадратного уравнения $\tilde{\mu}_1 v^2 + (1 - \gamma\sigma)v/\gamma - \tilde{K} = 0$, причем $v_1 > 0$, $v_2 < 0$. Интегралы, входящие в (21), в общем случае выражаются через гипергеометрические функции. Рассмотрим некоторые предельные случаи.

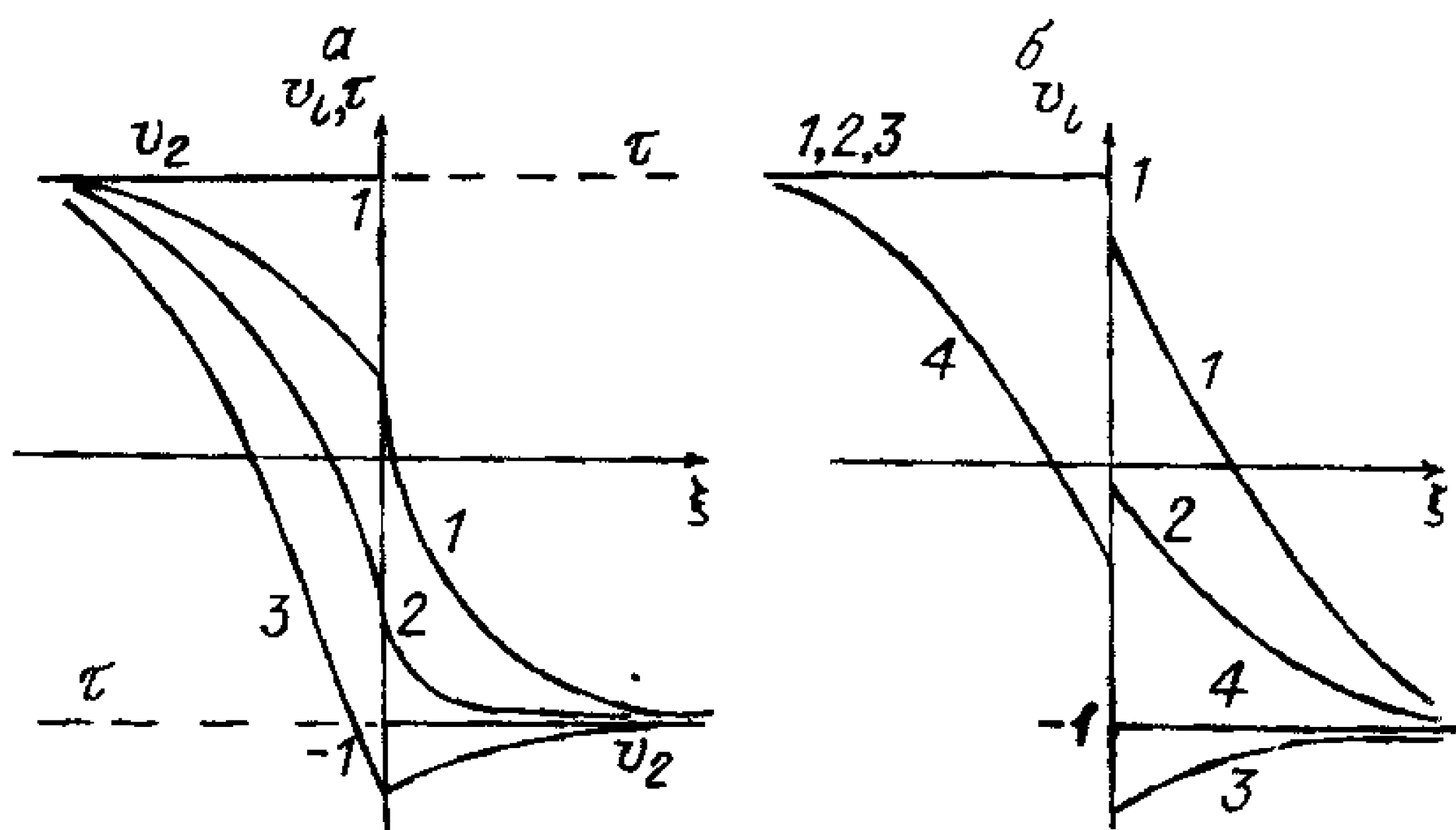


Рис. 3.13.

Перейдем в полученных формулах к пределу при $\mu_2 \rightarrow 0$ и конечному $\tilde{\mu}_1$. В результате получим

$$v_2 = \begin{cases} 1, & \xi < 0, \\ 0, & \xi = 0, \\ -1, & \xi > 0, \end{cases} \quad \tau = -v_2, \quad (22)$$

$$v_1 = \begin{cases} 1 - 2 \frac{\tilde{K}\gamma + (\gamma - 1)v_1}{\gamma\tilde{\mu}_1 v_1 (v_1 - v_2)} e^{v_1 \xi}, & \xi < 0, \\ -1 - 2 \frac{\tilde{K}\gamma + (\gamma - 1)v_2}{\gamma\tilde{\mu}_1 v_2 (v_1 - v_2)} e^{v_2 \xi}, & \xi > 0. \end{cases}$$

Из (22) легко получить, что $\lim_{\xi \rightarrow -0} v_1 = v_1^* = \lim_{\xi \rightarrow +0} v_1$, а $\lim_{\xi \rightarrow -0} dv_1/d\xi \neq \lim_{\xi \rightarrow +0} dv_1/d\xi$, где $v_1^* = 1 - 2(\tilde{K}\gamma + (\gamma - 1)v_1)/(\gamma\tilde{\mu}_1 v_1 (v_1 - v_2))$.

Качественный вид функций (22) представлен на рис. 3.13, а, где кривые 1, 2, 3 соответствуют возможным поведениям функции $v_1(\xi)$: 1 — при $\gamma\sigma > 2\gamma - 1$; 2 — при $\gamma\sigma < 2\gamma - 1$; 3 — при $\tilde{\mu}_1 K\gamma^2 + \gamma(\sigma - 1)(\gamma - 1) < 0$. Последнее неравенство, очевидно, может иметь место только при $\sigma < 1$, т. е. если мала концентрация легкого газа. В этом случае профиль скорости легкого компонента является немонотонным. Немонотонность с увеличением вязкости $\tilde{\mu}_1$ исчезает.

Если устремить $\mu_i \rightarrow 0$ ($i = 1, 2$), то для v_1 получим

$$v_1 = \begin{cases} 1, & \xi < 0, \\ -1 + 2\gamma(1 - \sigma)/(1 - \gamma\sigma) e^{v_2 \xi}, & \xi > 0 \text{ если } \gamma\sigma > 1, \end{cases}$$

$$v_1 = v_2 \text{ при } \gamma\sigma = 1, \quad v_1 = \begin{cases} 1 - 2\gamma(1 - \sigma)/(1 - \gamma\sigma) e^{v_1 \xi}, & \xi < 0, \\ -1, & \xi > 0, \text{ если } \gamma\sigma < 1. \end{cases}$$

На рис. 3.13, б кривыми 1, 2, 3, 4 представлена функция $v_1(\xi)$ при $\mu_i \rightarrow 0$ соответственно, если $\gamma\sigma > 2\gamma - 1$, $\gamma < \gamma\sigma < 2\gamma - 1$, $1 < \gamma\sigma < \gamma$ и $\gamma\sigma < 1$. Таким образом, при $\mu_i \rightarrow 0$ ударная волна

представляет собой разрыв с последующей непрерывной зоной релаксации при $\gamma\sigma > 1$, а при $\gamma\sigma < 1$ непрерывное решение заканчивается скачком.

Рассмотрим случай, когда $\tilde{\mu}_1 \sim 0$, $\mu_2 \gg \tilde{\mu}_1$. Выражая ξ через v_2 из (20), преобразуем (21) к следующему виду:

$$v_1 = v_2 + \frac{1}{\tilde{\mu}_1(v_1 - v_2)} \left\{ (\sigma - 1 - \tilde{\mu}_1 v_1) \left(\frac{1 - v_2}{1 + v_2} \right)^{\alpha v_1} \int_{-1}^{v_2} \left(\frac{1 - u}{1 + u} \right)^{-\alpha v_1} du + \right. \\ \left. + (\sigma - 1 - \tilde{\mu}_1 v_2) \left(\frac{1 - v_2}{1 + v_2} \right)^{\alpha v_2} \int_{v_2}^1 \left(\frac{1 - u}{1 + u} \right)^{-\alpha v_2} du \right\}, \quad (23)$$

где $\alpha = 2\gamma\mu_2/(u^1(\gamma + 1)^2)$. Устремляя в (23) $\tilde{\mu}_1 \rightarrow 0$, после несложных преобразований получим

$$v_1 = v_2 + \frac{\gamma(\sigma - 1)}{\gamma\sigma - 1} \left(\frac{1 - v_2}{1 + v_2} \right)^{-\beta\alpha} \int_{v_2}^1 \left(\frac{1 - u}{1 + u} \right)^{\beta\alpha} du, \text{ если } \gamma\sigma > 1, \\ v_1 = v_2 + \frac{\gamma(\sigma - 1)}{1 - \gamma\sigma} \left(\frac{1 - v_2}{1 + v_2} \right)^{-\beta\alpha} \int_{-1}^{v_2} \left(\frac{1 - u}{1 + u} \right)^{\beta\alpha} du, \text{ если } \gamma\sigma < 1, \quad (24) \\ v_1 = v_2 - \frac{\gamma - 1}{2\gamma\alpha\tilde{K}} (1 - v_2^2), \quad \text{если } \gamma\sigma = 1,$$

где $\beta = \gamma\tilde{K}/(\gamma\sigma - 1)$. При этом функция $v_1(v_2)$ удовлетворяет уравнению

$$(\gamma\sigma - 1) \frac{dv_1}{dv_2} = \frac{(\gamma - 1)(v_2^2 - 1) + 2\gamma\alpha\tilde{K}(v_1 - v_2)}{v_2^2 - 1}. \quad (25)$$

Вблизи особой точки $(1, 1)$ в плоскости (v_1, v_2) из (24) следует, что:

при $\gamma\sigma - 1 > 0$

$$1 - v_1 \approx \frac{\gamma\tilde{K}\alpha + \gamma - 1}{\gamma\tilde{K}\alpha + \gamma\sigma - 1} (1 - v_2);$$

при $\gamma\sigma - 1 < 0$

$$1 - v_1 \approx -\frac{\gamma(\sigma - 1)}{\gamma\sigma - 1} 2^{\beta\alpha} \int_{-1}^1 \left(\frac{1 - u}{1 + u} \right)^{\beta\alpha} du (1 - v_2)^{-\beta\alpha}, \text{ если } \beta\alpha > -1,$$

$$1 - v_1 \approx \gamma(\sigma - 1)(1 - v_2) \ln(1 - v_2), /(\gamma\sigma - 1), \quad \text{если } \beta\alpha = -1,$$

$$1 - v_1 \approx \left(1 - \frac{\gamma(\sigma - 1)}{1 - \gamma\sigma} \frac{1}{1 + \beta\alpha} \right) (1 - v_2), \quad \text{если } \beta\alpha < -1; \quad (26)$$

при $\gamma\sigma - 1 = 0$

$$1 - v_1 \approx \left(1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma\alpha\tilde{K}} \right) (1 - v_2).$$

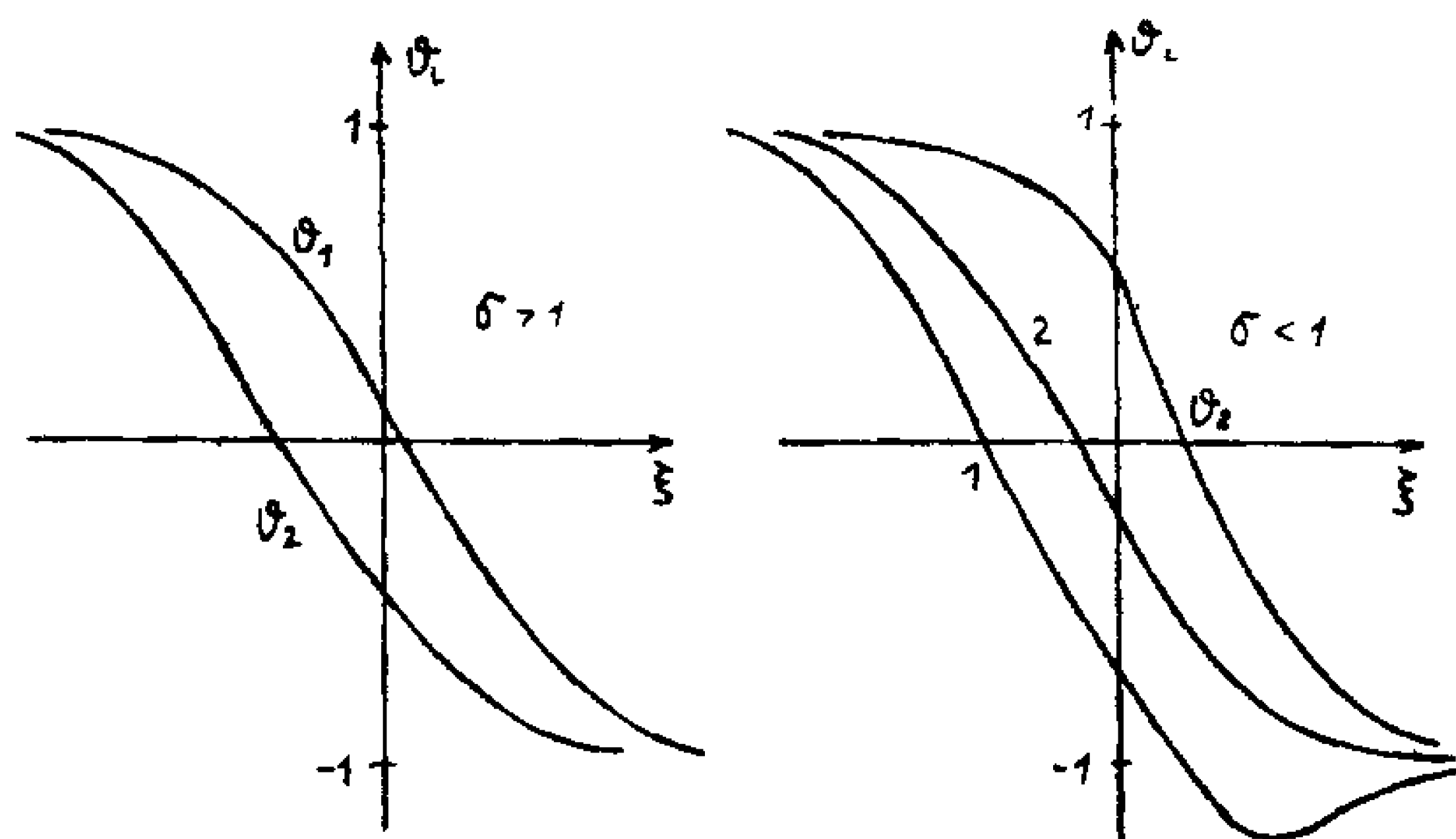


Рис. 3.14.

Аналогично, в окрестности особой точки $(-1, -1)$ имеем:
при $\gamma\sigma - 1 > 0$

$$v_1 + 1 \approx \frac{\gamma(\sigma - 1)}{\gamma\sigma - 1} 2^{-\beta\alpha} \int_{-1}^1 \left(\frac{1-u}{1+u} \right)^{-\beta\alpha} du (1 + v_2)^{\beta\alpha}, \text{ если } \beta\alpha < 1, \quad (27)$$

$$v_1 + 1 \approx -\frac{\gamma(\sigma - 1)}{\gamma\sigma - 1} (1 + v_2) \ln(1 + v_2), \quad \text{если } \beta\alpha = 1;$$

$$v_1 + 1 \approx \left(1 + \frac{\gamma(\sigma - 1)}{\gamma\sigma - 1} \frac{1}{\beta\alpha - 1} \right) (v_2 + 1), \quad \text{если } \beta\alpha > 1;$$

при $\gamma\sigma - 1 < 0$

$$v_1 + 1 \approx \frac{\gamma\tilde{K}\alpha - \gamma + 1}{1 - \gamma\sigma + \gamma\tilde{K}\alpha} (1 + v_2);$$

при $\gamma\sigma = 1$

$$v_1 + 1 \approx \left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma\alpha\tilde{K}} \right) (1 + v_2).$$

Результаты качественного исследования интегральных кривых уравнения (25) в плоскости (v_1, v_2) с учетом (26), (27) и зависимости $v_2(\xi)$ из (20) представлены на рис. 3.14, причем кривые 1, 2 соответствуют функции $v_1(\xi)$: 1 — при $\alpha\tilde{K}\gamma < \gamma - 1$, $\gamma\sigma \leq 1$ либо $\alpha\tilde{K}\gamma < \gamma\sigma - 1$, $1 < \gamma\sigma < 2\gamma$, а 2 — при невыполнении предыдущих неравенств.

Таким образом, профили изменения параметров в ударной волне непрерывны, если учитывать вязкость только в компоненте, концентрация которого не мала. В рассмотренных предельных случаях при малой концентрации легкого компонента $\sigma < 1$ возможно немонотонное поведение величины скорости легкого газа. Данная немонотонность исчезает при увеличении коэффициента вязкости одного из компонентов смеси.

Пусть $q \sim m_1^0$. В этом случае реализуется двухскоростной и двухтемпературный режим течения газовой смеси. Система урав-

нений (3) в нулевом приближении по m_1^0 примет вид

$$\begin{aligned} V_2 + \frac{T_2}{V_2} &= 1 + \mu_2 \frac{dV_2}{d\xi}, \quad \frac{\gamma}{\gamma-1} T_2 + \frac{V_2^2}{2} = A + \mu_2 V_2 \frac{dV_2}{d\xi}, \\ \sigma \frac{dV_1}{d\xi} + \frac{d(T_1/V_1)}{d\xi} &= \tilde{K} (V_2 - V_1) + \tilde{\mu}_1 \frac{d^2 V_1}{d\xi^2}, \\ \frac{1}{\gamma-1} \frac{dT_1}{d\xi} + \frac{T_1}{V_1} \frac{dV_1}{d\xi} &= \tilde{K} \kappa_1 (V_2 - V_1)^2 + \tilde{q} (T_2 - T_1) + \tilde{\mu}_1 \left(\frac{dV_1}{d\xi} \right)^2, \end{aligned} \quad (28)$$

где $\tilde{q} = q/m_1^0$, $\tilde{K} = K/m_1^0$, $\tilde{\mu}_1 = \mu_1/m_1^0$. Первые два уравнения системы (28) имеют тот же вид, что и в (19), и поэтому могут быть проинтегрированы. Найдем решение двух последних уравнений из (28) в случае слабых ударных волн. Перейдем к новым безразмерным скоростям и температурам по формулам (10). Подставляя (11) в (28) и отбрасывая члены более высокого порядка малости по u^1 , получим в нулевом приближении

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{1 - e^{\xi/\alpha}}{1 + e^{\xi/\alpha}}, \quad \tau_2 = -v_2, \quad \alpha = \frac{2\gamma\mu_2}{(\gamma+1)^2 u^1}, \\ \sigma \frac{dv_1}{d\xi} + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{d\tau_1}{d\xi} - \frac{1}{\gamma} \frac{dv_1}{d\xi} &= \tilde{K} (v_2 - v_1) + \tilde{\mu}_1 \frac{d^2 v_1}{d\xi^2}, \\ \frac{d\tau_1}{d\xi} + \frac{dv_1}{d\xi} &= -\tilde{q} (\gamma-1) (v_2 + \tau_1). \end{aligned} \quad (29)$$

Интегрируя два последних уравнения в (29) с учетом граничных условий (4), имеем

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{v_1 (\gamma\tilde{K} + \tilde{q} (\gamma-1)^2) + \gamma\tilde{K}\tilde{q} (\gamma-1)}{\gamma\tilde{\mu}_1 (v_3 - v_1) (v_3 - v_2)} e^{v_3 \xi} \int_{\xi}^{+\infty} v_2 e^{-v_3 t} dt - \\ &- \frac{v_2 (\gamma\tilde{K} + \tilde{q} (\gamma-1)^2) + \gamma\tilde{K}\tilde{q} (\gamma-1)}{\gamma\tilde{\mu}_1 (v_2 - v_1) (v_2 - v_3)} e^{v_2 \xi} \int_{-\infty}^{\xi} v_2 e^{-v_2 t} dt - \\ &- \frac{v_3 (\gamma\tilde{K} + \tilde{q} (\gamma-1)^2) + \gamma\tilde{K}\tilde{q} (\gamma-1)}{\gamma\tilde{\mu}_1 (v_1 - v_2) (v_1 - v_3)} e^{v_1 \xi} \int_{-\infty}^{\xi} v_2 e^{-v_1 t} dt, \\ \tau_1 &= -v_1 + \tilde{q} (\gamma-1) e^{-\tilde{q}(\gamma-1)\xi} \int_{-\infty}^{\xi} (v_1 - v_2) e^{\tilde{q}(\gamma-1)t} dt \end{aligned} \quad (30)$$

где $v_1 < v_2 < 0 < v_3$ — корни уравнения

$$\begin{aligned} y(v) &= v^3 + \left[(\gamma-1) \tilde{q} - \frac{\sigma-1}{\tilde{\mu}_1} \right] v^2 + \left[\frac{\tilde{K}}{\tilde{\mu}_1} + \frac{\tilde{q} (\gamma\sigma-1) (\gamma-1)}{\gamma\tilde{\mu}_1} \right] v - \\ &- \frac{(\gamma-1) \tilde{K}\tilde{q}}{\tilde{\mu}_1} = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Порядок расположения корней этого уравнения следует из следующих неравенств: $y(-\infty) < 0$, $y(v = -(\gamma - 1)\tilde{q}) > 0$, $y(0) < 0$, $y(+\infty) > 0$. Выражения для v_1 и τ_1 имеют сложный вид и в общем случае могут быть найдены численно или выражены через гипергеометрические функции.

Устремляя $\mu_i \rightarrow 0$ ($i = 1, 2$) в (30), получим

$$v_2(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi < 0, \\ 0, & \xi = 0, \\ -1, & \xi > 0, \end{cases} \quad \tau_2 = -v_2.$$

Если $\sigma > 1$, то

$$v_1(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi < 0, \\ -1 + \psi_1(\xi), & \xi > 0, \end{cases}$$

$$\psi_1(\xi) = \frac{2}{(1-\sigma)(v_1-v_3)} \left[\left(\frac{\tilde{K}\tilde{q}(\gamma-1)}{v_1} + \tilde{K} + \tilde{q} \frac{(\gamma-1)^2}{\gamma} \right) e^{v_1\xi} - \left(\frac{\tilde{K}\tilde{q}(\gamma-1)}{v_2} + \tilde{K} + \tilde{q} \frac{(\gamma-1)^2}{\gamma} \right) e^{v_2\xi} \right],$$

$$\tau_1(\xi) = \begin{cases} -1, & \xi < 0, \\ 1 + \psi_2(\xi), & \xi > 0, \end{cases}$$

$$\psi_2(\xi) = \frac{2v_1}{(1-\sigma)(v_2-v_1)(v_1+\tilde{q}(\gamma-1))} \left(\frac{\tilde{K}\tilde{q}(\gamma-1)}{v_1} + \tilde{K} + \tilde{q} \frac{(\gamma-1)^2}{\gamma} \right) e^{v_1\xi} - \frac{2v_2}{(1-\sigma)(v_2-v_1)(v_2+\tilde{q}(\gamma-1))} \left(\frac{\tilde{K}\tilde{q}(\gamma-1)}{v_2} + \tilde{K} + \tilde{q} \frac{(\gamma-1)^2}{\gamma} \right) e^{v_2\xi},$$

где $v_1 < v_2 < 0$ — корни уравнения

$$(\sigma - 1)v^2 + (\tilde{K} + \tilde{q}(\gamma\sigma - 1)(\gamma - 1)/\gamma)v + (\gamma - 1)\tilde{K}\tilde{q} = 0. \quad (32)$$

Если $\sigma < 1$, то

$$v_1(\xi) = \begin{cases} 1 - \frac{2}{(v_3-v_2)(1-\sigma)} \left(\frac{\tilde{K}\tilde{q}(\gamma-1)}{v_3} + \tilde{K} + \frac{\tilde{q}(\gamma-1)^2}{\gamma} \right) e^{v_3\xi}, & \xi < 0, \\ -1 + \frac{2}{(v_2-v_3)(1-\sigma)} \left(\frac{\tilde{K}\tilde{q}(\gamma-1)}{v_2} + \tilde{K} + \frac{\tilde{q}(\gamma-1)^2}{\gamma} \right) e^{v_2\xi}, & \xi > 0, \end{cases}$$

$$\tau_1(\xi) = \begin{cases} -1 + \frac{v_3}{v_3 + \tilde{q}(\gamma-1)} (1 - v_1), & \xi < 0, \\ 1 - \frac{v_3}{v_3 + \tilde{q}(\gamma-1)} (1 + v_1), & \xi > 0, \end{cases}$$

где $v_2 < 0$ и $v_3 > 0$ — корни уравнения (32) при $\sigma < 1$. Если $\sigma = 1$, то $v_2 = v_1$, $\tau_2 = \tau_1$. Качественное поведение функций $v_i(\xi)$, $\tau_i(\xi)$ при $\mu_i \rightarrow 0$ представлено на рис. 3.15, а, б соответственно при $\sigma > 1$ и $\sigma < 1$. Таким образом, при $\sigma > 1$ в случае малой концентрации тяжелого компонента (рис. 3.15, а) смесь вплоть до фронта удар-

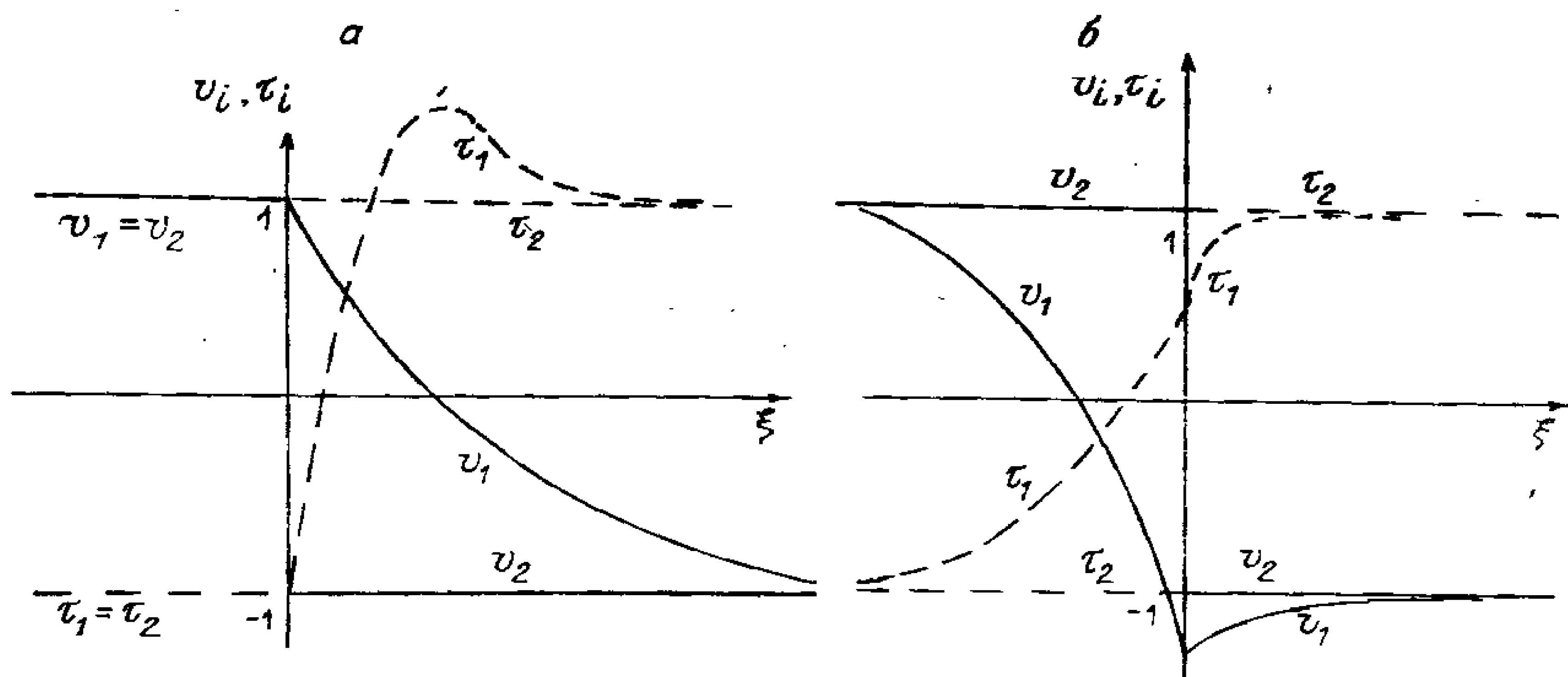


Рис. 3.15.

ной волны находится в равновесии, а затем скорость и температура тяжелого компонента, не претерпевая скачка, релаксируют к равновесным значениям. При этом существует немонотонность распределения температуры тяжелого компонента в ударной волне. В случае малой концентрации легкого компонента смесь по обе стороны ударного перехода находится в неравновесном состоянии, асимптотически стремясь к равновесию при $\xi \rightarrow \pm\infty$. Профиль скорости легкого компонента является немонотонным.

Рассмотренный предельный случай при $\sigma < 1$ соответствует тому, что внутренняя особая точка (v^*, ω^*) ($\varphi_2(v^*, \omega^*) = 0$, $\mathcal{L}_2(v^*, \omega^*) = 0$), исследованная в § 2, становится фокусом и в решение необходимо вводить разрыв. Как следует из рис. 3.15, б, этот разрыв определяется формулами а) из (1.6), т. е. имеет место сильный разрыв в тяжелом газе.

Устремляя $\mu_2 \rightarrow 0$ (при конечном $\tilde{\mu}_1$), из формул (30) получим, что при $\xi < 0$

$$v_1(\xi) = 1 - 2 \frac{v_3(\gamma\tilde{K} + \tilde{q}(\gamma-1)^2) + \gamma\tilde{K}\tilde{q}(\gamma-1)}{\gamma v_3 \tilde{\mu}_1 (v_3 - v_1)(v_3 - v_2)} e^{v_3 \xi},$$

а при $\xi > 0$

$$v_1(\xi) = -1 + 2 \frac{v_2(\gamma\tilde{K} + \tilde{q}(\gamma-1)^2) + \gamma\tilde{K}\tilde{q}(\gamma-1)}{v_2 \gamma \tilde{\mu}_1 (v_2 - v_1)(v_2 - v_3)} e^{v_2 \xi} + \\ + 2 \frac{v_1(\gamma\tilde{K} + \tilde{q}(\gamma-1)^2) + \gamma\tilde{K}\tilde{q}(\gamma-1)}{v_1 \gamma \tilde{\mu}_1 (v_1 - v_2)(v_1 - v_3)} e^{v_1 \xi},$$

где $v_1 < v_2 < 0 < v_3$ — корни уравнения (29). Из этих соотношений можно показать, что если $\mu_1 > (1 - \sigma)(\gamma\tilde{K} + q(\gamma-1)^2)/(\gamma\tilde{K}\tilde{q}(\gamma-1))$, то $dv_1/d\xi < 0$ для всех ξ : $-\infty < \xi < +\infty$.

Таким образом, при учете вязкости полученная немонотонность в профиле скорости легкого компонента может отсутствовать. Данный вывод подтверждается расчетами по полной модели, проведенными в § 4.

§ 4. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ О СТРУКТУРЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В БИНАРНОЙ СМЕСИ ОДНОАТОМНЫХ ГАЗОВ

4.1. Метод решения

В § 3 были найдены асимптотические решения задачи (3.3), (3.4) в предположении малости некоторых параметров. В общем случае найти решение поставленной задачи в явном виде не представляется возможным, поэтому необходимо привлекать численные методы. Как уже отмечалось, искомое решение в шестимерном фазовом пространстве должно соединять две условно устойчивые (седловидные) особые точки. Непосредственный расчет по какой-либо схеме, например по схеме типа Рунге — Кутты, требует знания асимптотики решения при $\xi \rightarrow -\infty$ (или при $\xi \rightarrow +\infty$) и такого выбора шага интегрирования, чтобы искомое решение одновременно находилось на пересечении неустойчивого многообразия начальной и устойчивого многообразия конечной особых точек. Однако указанные асимптотики и многообразия неизвестны, что делает проблематичным возможность получения решения данным способом. Поэтому для расчета задачи (3.3), (3.4) применяется итерационный метод установления. В сопутствующей ударной волне системе координат ищется решение нестационарных уравнений (3.1), удовлетворяющее граничным условиям (3.4) и некоторому произвольному начальному распределению искомых величин, согласованному с краевыми условиями, с последующим выходом на стационарный режим. Интервал интегрирования по пространственной переменной выбирается в результате численных экспериментов в каждом конкретном случае.

Таким образом, рассмотрим систему уравнений (3.1)

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho_i u_i}{\partial x} = 0,$$

$$\rho_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) = - \frac{\partial p_i}{\partial x} + F_{ij} + \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \right),$$

$$\rho_i \left(\frac{\partial e_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial e_i}{\partial x} \right) = - p_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + Q_{ij} + \kappa_i F_{ij} u_{ij} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial x} \right) + \frac{4}{3} \mu_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2, \quad (1)$$

$$F_{ij} = K u_{ij}, \quad Q_{ij} = q (T_j - T_i), \quad u_{ij} = u_j - u_i,$$

$$p_i = R_i \rho_i T_i, \quad \kappa_i = \frac{T_i}{M_i} \left/ \left(\frac{T_1}{M_1} + \frac{T_2}{M_2} \right) \right.,$$

$e_i = c_{vi} T_i$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$, M_i — масса молекулы i -го компонента. Коэффициенты K и q , характеризующие обмен импульсом и энергией между компонентами смеси, и парциальные коэффициенты

вязкости μ_i и теплопроводности λ_i имеют вид (2.1.45)

$$\begin{aligned} K &= \frac{16}{3} \frac{\rho_1 \rho_2}{M_1 + M_2} \Omega_{12}^{(1,1)}, \quad q = \frac{3k}{M_1 + M_2} K, \\ \mu_1 &= \frac{5}{8} kT_1 \left(\Omega_1^{(2,2)} + 2 \frac{n_2}{n_1} \Omega_{12}^{(2,2)} \right)^{-1}, \\ \mu_2 &= \frac{5}{8} kT_2 \left(\Omega_2^{(2,2)} + \frac{20}{3} \frac{\rho_1}{\rho_2} \Omega_{12}^{(1,1)} \right)^{-1}, \\ \lambda_1 &= \frac{75}{32} \frac{k^2 T_1}{M_1} \left(\Omega_1^{(2,2)} + 5 \frac{n_2}{n_1} \Omega_{12}^{(1,1)} \right)^{-1}, \\ \lambda_2 &= \frac{75}{32} \frac{k^2 T_2}{M_2} \left(\Omega_2^{(2,2)} + 15 \frac{\rho_1}{\rho_2} \Omega_{12}^{(1,1)} \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (2)$$

$n_i = \rho_i / M_i$, $k = R_i \cdot M_i$ — постоянная Больцмана.

Для моделирования кинетических коэффициентов (2) входящие в них Ω -интегралы выразим через коэффициенты вязкости и теплопроводности $[\mu_i]_1$ и $[\lambda_i]_1$ чистого газа сорта i и коэффициент диффузии смеси $[D_{ij}]_1$ по формулам, полученным в первом приближении по полиномам Сонина [8]. Примем, что потенциалы межмолекулярных взаимодействий являются степенными. В результате будем иметь

$$\begin{aligned} K &= \frac{R_1 R_2 (T^0)^2}{p^0 \rho^0 [D_{12}^0]_1} \left(\frac{T_2 + \chi T_1}{T^0} \right)^{\nu_{12}}, \quad q = \frac{3R_1 R_2}{R_1 + R_2} K, \\ \mu_1 &= [\mu_1]_1 \left(1 + \frac{3}{5} \frac{AK [\mu_1]_1}{p_1 \rho_1} \right)^{-1}, \quad \mu_2 = [\mu_2]_1 \left(1 + 6 \frac{K [\mu_2]_1}{\rho_2 p_2} \right)^{-1}, \\ \lambda_1 &= [\lambda_1]_1 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{K [\mu_1]_1}{p_1 \rho_1} \right)^{-1}, \quad \lambda_2 = [\lambda_2]_1 \left(1 + \frac{9}{2} \frac{K [\mu_2]_1}{\rho_2 p_2} \right)^{-1}, \\ [\mu_i]_1 &= [\mu_i^0]_1 (T_i / T^0)^{\nu_i}, \quad [\lambda_i]_1 = [\mu_i]_1 \frac{5}{2} \frac{R_i}{Pr_i}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$A = \Omega_{12}^{(2,2)} / \Omega_{12}^{(1,1)},$$

где Pr_i — число Прандтля i -го газа. Индексом 0 обозначены значения соответствующих параметров в пабегающем потоке. Показатели ν_i , ν_{12} выбирались из экспериментальных данных соответственно по вязкости газа сорта i и диффузии в смеси [8—10]: $\nu_1(\text{He}) = 0.647$, $\nu_2(\text{Ar}) = 0.816$, $\nu_2(\text{Xe}) = 0.93$, $\nu_{12}(\text{He} - \text{Ar}) = 0.25$, $\nu_{12}(\text{He} - \text{Xe}) = 0.32$. Величина A вычислялась для максвелловской модели молекул.

Для корректного сравнения с результатами, полученными методом прямого статистического моделирования Монте-Карло, расчеты проводились для модели молекул упругих твердых сфер ($\nu_i = \nu_{12} = 0.5$) с отношением эффективных диаметров молекул [11] $\sigma_{\text{He}} / \sigma_{\text{Ar}} = 2.19 / 3.66$, $\sigma_{\text{He}} / \sigma_{\text{Xe}} = 2.19 / 4.94$.

Требуется найти стационарное решение системы (1), удовлетворяющее граничным условиям

$$\begin{aligned}(\rho_i, u_i, T_i) &\rightarrow (\rho_i^0, u^0, T^0), \quad x \rightarrow -\infty, \\(\rho_i, u_i, T_i) &\rightarrow (\rho_i^1, u^1, T^1), \quad x \rightarrow +\infty.\end{aligned}\quad (4)$$

Величины с индексом 1 связаны с параметрами набегающего потока (индекс 0) соотношениями Гюгоньо для равновесной смеси.

Для проведения расчетов перейдем к безразмерным параметрам

$$\begin{aligned}\bar{\rho}_i &= \rho_i / \rho_i^0, \quad \bar{u}_i = u_i / \sqrt{R^0 T^0}, \quad \bar{T}_i = T_i / T^0, \\ \bar{p}_i &= p_i / (\rho_i^0 R^0 T^0), \quad \bar{R}_i = R_i / R^0, \quad \bar{x} = x / L^*,\end{aligned}\quad (5)$$

$$\bar{t} = t \sqrt{R^0 T^0} / L^*, \quad L^* = \mu^* / (\rho^0 u^0),$$

где u^0 — скорость набегающего потока, μ^* — коэффициент вязкости газовой смеси при звуковых условиях (т. е. при температуре $T^* = 2T^0(1 + (\gamma - 1)M_0^2/2)/(\gamma + 1)$, $M_0 = u^0/a_0$), который вычислялся по формуле Уилке [8]. (В случае модели молекул твердых сфер пространственная переменная обезразмеривалась на длину свободного пробега молекул в набегающем потоке смеси L^- , определенную в [11].)

Уравнения (1) и граничные условия (2) в переменных (5) примут вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{\rho}_i}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{\rho}_i \bar{u}_i}{\partial \bar{x}} &= 0, \\ \bar{\rho}_i \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{t}} + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}} \right) &= - \frac{\partial \bar{p}_i}{\partial \bar{x}} + \bar{K}_i \bar{u}_{ij} + \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\bar{\mu}_i \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}} \right), \\ \bar{\rho}_i \left(\frac{\partial \bar{e}_i}{\partial \bar{t}} + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{e}_i}{\partial \bar{x}} \right) &= - \bar{p}_i \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}} + \bar{q}_i (\bar{T}_j - \bar{T}_i) + \kappa_i \bar{K}_i \bar{u}_{ij}^2 + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\bar{\lambda}_i \frac{\partial \bar{T}_i}{\partial \bar{x}} \right) + \frac{4}{3} \bar{\mu}_i \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}} \right)^2,\end{aligned}\quad (6)$$

$$\bar{e}_i = \bar{c}_{vi} \bar{T}_i, \quad \bar{c}_{vi} = c_{vi} / R^0;$$

$$\begin{aligned}\bar{\rho}_i &= 1, \quad \bar{u}_i = \bar{u}^0 = \sqrt{\gamma} M_0, \quad \bar{T}_i = 1 \quad \text{при} \quad \bar{x} = -L, \\ \bar{u}_i &= \bar{u}^1, \quad \bar{T}_i = \bar{T}^1 \quad \text{при} \quad \bar{x} = L.\end{aligned}\quad (7)$$

Здесь введены безразмерные коэффициенты

$$\begin{aligned}\bar{K}_i &= KL^* / (\rho_i^0 \sqrt{R^0 T^0}), \quad \bar{q}_i = qL^* / (\rho_i^0 R^0 \sqrt{R^0 T^0}), \\ \bar{\mu}_i &= \mu_i / (\rho_i^0 \sqrt{R^0 T^0} L^*), \quad \bar{\lambda}_i = \lambda_i / (\rho_i^0 R^0 \sqrt{R^0 T^0} L^*)\end{aligned}$$

и безразмерные скорость и температура смеси за ударной волной

$$\bar{u}^1 = \frac{2\sqrt{\gamma}}{(\gamma+1)M_0} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_0^2 \right), \quad \bar{T}^1 = 1 + \frac{\gamma-1}{2\gamma} (\gamma M_0^2 - (u^1)^2).$$

Значение L выбирается на основе численных экспериментов таким образом, чтобы расширение области интегрирования не приводило к изменению результатов счета. В дальнейшем черту над безразмерными параметрами будем опускать.

Решение задачи (6), (7), как отмечалось, ищется методом установления. Для аппроксимации системы уравнений (6) используем неявную разностную схему расщепления по физическим процессам, предложенную в [12] для уравнений Навье — Стокса однокомпонентного газа.

По аналогии с [12] рассмотрим следующую неявную схему расщепления по физическим процессам:

$$C \frac{\vec{f}^{(n+1)} - \vec{f}^{(n)}}{\tau} = -D_h^n \vec{W}_{1h}^n + D_h^n \vec{W}_{2h}^n, \quad (8)$$

$$C = (E + \tau \alpha S_{1h}) (E + \tau \alpha S_{2h}) (E + \tau \alpha S_{3h})$$

или эквивалентную ей схему в дробных шагах

$$\begin{aligned} (E + \tau \alpha S_{1h}) \vec{\xi}^{n+1/3} &= -D_h^n \vec{W}_{1h}^n + D_h^n \vec{W}_{2h}^n, \\ (E + \tau \alpha S_{2h}) \vec{\xi}^{n+2/3} &= \vec{\xi}^{n+1/3}, \\ (E + \tau \alpha S_{3h}) \vec{\xi}^{n+1} &= \vec{\xi}^{n+2/3}, \\ \vec{f}^{n+1} &= \vec{f}^n + \vec{\xi}^{n+1}, \end{aligned} \quad (9)$$

где τ — временной шаг, $\vec{f} = (\rho_1, u_1, e_1, \rho_2, u_2, e_2)$,

$$\begin{aligned} S_{jh} &= \begin{pmatrix} S_{j1h} & 0 \\ 0 & S_{j2h} \end{pmatrix}, \quad S_{1ih} = \left(u_i^n \Delta_{\mp} - \frac{1}{\rho_i^n} \bar{\Delta} z_i^n \Delta \right) E, \\ S_{2ih} &= \begin{pmatrix} 0 & \rho_i^n \Delta_{\mp} & 0 \\ b_i \Delta_{\pm} / \rho_i^n & 0 & (\gamma_i - 1) \Delta_{\pm} \\ 0 & b_i^n \Delta_{\mp} & 0 \end{pmatrix}, \\ Z_i &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4\mu_i/3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i/c_{vi} \end{pmatrix}, \\ S_{3h} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K^n/\rho_i^n & 0 & 0 & -K^n/\rho_1^n & 0 \\ 0 & 0 & q^n/(\rho_1^n c_{v1}) & 0 & 0 & -q^n/(\rho_1^n c_{v1}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -K^n/\rho_2^n & 0 & 0 & K^n/\rho_2^n & 0 \\ 0 & 0 & -q^n/(\rho_2^n c_{v2}) & 0 & 0 & q^n/(\rho_2^n c_{v2}) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$D_h^n = \begin{pmatrix} D_{1h}^n & 0 \\ 0 & D_{2h}^n \end{pmatrix}, \quad D_{ih}^n = \frac{1}{\rho_i^n} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -u_i^n & 1 & 0 \\ -e_i + \frac{u_i^{n^2}}{2} & -u_i^n & 1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{W}_{1h}^n = (\vec{W}_{11h}^n, \vec{W}_{12h}^n),$$

$$\vec{W}_{1ih}^n = (\Delta^p(\rho_i^n u_i^n), \Delta^p(\rho_i^n (u_i^n)^2) + \Delta^{-p} p_i^n - \frac{4}{3} \bar{\Delta} \mu_i^n \Delta u_i^n,$$

$$\Delta^p(u_i^n (\rho_i^n (e_i^n + (u_i^n)^2/2) + p_i^n)) - \frac{4}{3} \bar{\Delta} \mu_i^n \Delta (u_i^n)^2/2 - \bar{\Delta} \lambda_i^n \Delta T_i^n),$$

$$\vec{W}_{2h}^n = (\vec{W}_{21h}^n, \vec{W}_{22h}^n),$$

$$\vec{W}_{2ih}^n = (0, K_i^n (u_j^n - u_i^n), K_i^n u_i^n (u_j^n - u_i^n) + K_i^n \kappa_i^n (u_j^n - u_i^n)^2 + \\ + q_i^n (T_j^n - T_i^n)), \quad i, j = 1, 2, i \neq j,$$

$$b_i^n = (\gamma_i - 1) e_i^n, \quad \Delta_{\mp} \varphi^n = \pm (\varphi_e - \varphi_{e-1})/h,$$

$$\bar{\Delta} \psi^n \Delta \varphi^n = (\psi_{l+1/2} (\varphi_{l+1} - \varphi_l) - \psi_{l-1/2} (\varphi_l - \varphi_{l-1})) / h^2,$$

$$\psi_{l\pm 1/2} = (\psi_{l\pm 1} + \psi_l) / 2, \quad l = 1, \dots, n,$$

n — количество разбиений по пространственной переменной, E — единичная матрица, $\Delta^p \varphi$ — разностная аппроксимация $\partial \varphi / \partial x$ с порядком p . В $\Delta_{\mp}$ знак «—» выбирается, если $u_i^n > 0$, „+“ — при $u_i^n < 0$.

Разностная схема (8) аппроксимирует систему уравнений (1) с порядком $o(\tau + h)$, а при установлении имеет порядок $o(h^p)$ и обладает свойством консервативности. В отличие от схем, рассмотренных в [12], здесь добавлен третий дробный шаг в связи с неявной аппроксимацией величин, описывающих обмен импульсом и энергией между компонентами.

Учитывая, что в установившемся течении имеют место соотношения $\rho_i u_i = u^0 > 0$ как следствия закона сохранения массы компонентов, схему можно упростить, исключив в ней ρ_i . Кроме того, в качестве Δ^p в (9) рассмотрим центральную разностную производную, т. е. $\Delta^p \varphi = (\varphi_{l+1} - \varphi_{l-1}) / 2h$. В результате получим следующие разностные уравнения, в которых учтено, что в ударной волне $u_j \geq 0$ [13]:

$$(\xi_{u_i}^1)_e + \tau \alpha u_{ie}^n \Delta^- (\xi_{u_i}^1) - \frac{4}{3} \tau \alpha u_{ie}^n \bar{\Delta} \mu_i^n \Delta (\xi_{u_i}^1) / u^0 = G_{ie}^1,$$

$$(\xi_{e_i}^1)_e + \tau \alpha u_{ie}^n \Delta^- (\xi_{e_i}^1) - \tau \alpha u_{ie}^n \bar{\Delta} \lambda_i^n \Delta (\xi_{e_i}^1) / (u^0 c_{vi}) = G_{ie}^2,$$

$$(\xi_{u_i}^2)_e - (\gamma_i - 1) e_{ie}^n \tau \alpha \Delta^+ (\xi_{u_i}^2) / u_i^n + (\gamma_i - 1) \tau \alpha \Delta^+ (\xi_{e_i}^2) = (\xi_{u_i}^1)_e,$$

$$(\xi_{e_i}^2)_e + (\gamma_i - 1) e_{ei}^n \tau \alpha \Delta^- (\xi_{u_i}^2) = (\xi_{e_i}^1)_e,$$

$$(\xi_{u_i}^3)_e + K_{ie}^n u_{ie}^n \tau \alpha ((\xi_{u_i}^3)_e - (\xi_{u_j}^3)_e) / u^0 = (\xi_{u_i}^2)_e,$$

$$\begin{aligned}
& (\xi_{e_i}^3)_e + q_{ie}^n u_{ie}^n \tau \alpha ((\xi_{e_i}^3)_e / c_{vi} - (\xi_{e_j}^3)_e / c_{vj}) / u^0 = (\xi_{e_i}^2)_e, \\
G_{ie}^1 &= -\tau u_{ie}^n \left(\Delta^0 (u^0 u_i + p_i)^n - \frac{4}{3} \bar{\Delta} \mu_i^n \Delta u_i^n \right) / u^0 + \tau (F_{ij}^n)_e u_{ie}^n / u^0, \quad (10) \\
G_{ie}^2 &= -u_{ie}^n G_{ie}^1 - \tau u_{ie}^n \left(\Delta^0 (u^0 (e_i + u_i^2/2) + p_i u_i)^n - \bar{\Delta} \mu_i^n \Delta (u_i^n)^2 / 2 - \right. \\
&\quad \left. - \bar{\Delta} \lambda_i^n \Delta e_i^n / c_{vi} \right) / u^0 + \tau u_{ie}^n (Q_{ij}^n + u_i^n F_{ij}^n) / u^0, \\
& u_i^{n+1} = u_i^n + \xi_{u_i}^3, \quad e_i^{n+1} = e_i^n + \xi_{e_i}^3, \\
\Delta^\mp \varphi &= \pm (\varphi_e - \varphi_{e \mp 1}) / h, \quad \Delta^0 \varphi = (\varphi_{e+1} - \varphi_{e-1}) / (2h), \\
\bar{\Delta} a^n \Delta \varphi &= (a_{e+1/2} \Delta^+ \varphi - a_{e-1/2} \Delta^- \varphi) / h, \quad a_{e \pm 1/2} = (a_e + a_{e \pm 1}) / 2, \\
h &= x_{e+1} - x_e, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j, \quad e = 1 \dots, n.
\end{aligned}$$

Разностная схема (10) аппроксимирует уравнения количества движения и энергии каждого компонента, в которых исключены плотности, с порядком $o(\tau + h)$, а при установлении — с порядком $o(h^2)$ и консервативна. Она реализуется скалярными прогонками. В линейном приближении разностная схема (10) устойчива при $\alpha \geq 0.5$.

Так как в (10) исключены плотности, граничные условия (7) примут вид

$$\begin{aligned}
u_i &= \sqrt{\gamma_i} M_0, \quad T_i = 1 \quad \text{при } x = -L, \\
u_i &= u^1, \quad T_i = T^1 \quad \text{при } x = L.
\end{aligned} \quad (11)$$

Для расчета методом установления необходимо задать начальное распределение параметров, которое возьмем в виде кусочно-линейных функций, согласованных с граничными условиями

$$\begin{aligned}
\vec{f}(0, x) &= \begin{cases} \vec{f}^0, & -L < x < L_1, \\ (\vec{f}^1 - \vec{f}^0)(x - L_1)/(L_2 - L_1) + \vec{f}^0, & L < x < L_2, \\ \vec{f}^1, & L_2 < x < L; \end{cases} \\
\vec{f} &= (u_1, T_1, u_2, T_2) = (f_1, \dots, f_4).
\end{aligned}$$

Условие выхода на стационарный режим бралось в виде

$$\max_{l,j} \left| \frac{f_{jl}^{n+1} - f_{jl}^n}{\tau f_{jl}^n} \right| < \varepsilon = 10^{-3} \div 10^{-4}, \quad l = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, 4.$$

Результаты тестового расчета, проведенного для однокомпонентного газа при постоянном значении коэффициента вязкости, числе Прандтля $Pr = 3/4$, $M_0^2 = 3$ и $\gamma = 5/3$, отличаются от аналитического решения меньше чем на 0.015 % для интервала интегрирования $2L = 2$ при числе точек $n = 200$, а «эффективная ширина» ударной волны, определенная по Прандтлю, равняется 0.217. Расширение области интегрирования не приводит к ухудшению точности расчета.

4.2. Результаты расчета и их анализ

Прежде чем перейти к обсуждению результатов расчета, приведем краткий обзор работ по структуре ударных волн в бинарных смесях газов.

Наиболее раннее исследование структуры ударной волны в бинарной смеси газов проведено Каулингом [14] на основе полученной методом Чэпмена — Энскога из уравнения Больцмана системы уравнений, в которой автор пренебрег вязкостью и теплопроводностью, учитывая только диффузию. Найдено непрерывное решение для слабых ударных волн. Дьяков [15] получил решение для слабой ударной волны с учетом вязкости, теплопроводности и диффузии, используя уравнения механики сплошной среды [16]. Шерман [17] исходя из уравнений смеси Чэпмена — Энскога численно нашел решение для ударной волны конечной интенсивности в бинарной смеси газов. При этом рассмотрены двухскоростные, но однотемпературные смеси. Показано, что в системе координат, в которой ударная волна покоится, при малой концентрации тяжелого газа (2 % Ar в смеси He — Ar) тяжелый компонент сначала ускоряется, а затем замедляется, достигая максимальной скорости, на $\approx 18\%$ превышающей скорость набегающего потока. Впоследствии Гольдман и Синович [18] на основе системы уравнений для многоскоростной и многотемпературной газовой смеси, полученной ими в [19, 20], исследовали структуру слабой ударной волны в смесях He — Ar и He — Xe. Немонотонное распределение скорости тяжелого компонента, найденное в работе Шермана, не обнаружено. В то же время авторы получили, что при малой концентрации легкого компонента скорость легкого газа убывает до некоторого значения, меньшего скорости смеси за волной, а затем возрастает, стремясь к равновесному значению.

Большое количество работ выполнено по исследованию структуры ударной волны в газовых смесях на основе уравнения Больцмана. Приближение Мотт-Смита [21] рассматривалось для смесей в работах [22—27]. В [24—26] функции распределения молекул по скоростям представлялись обобщенными функциями Мотт-Смита для каждого компонента смеси. Для определения неизвестных функций, входящих в бимодальные распределения, использовался метод моментов для максвелловских молекул и для модели твердых сфер. В [27] эти функции определялись на основе вариационного метода, изложенного, например, в [28]. При этом для описания межмолекулярного взаимодействия был принят потенциал Леннарда — Джонса. В [29—35] для исследования структуры ударной волны применялось обобщение БГК-модели уравнения Больцмана для газовых смесей. В работах [36, 37] для исследования данной задачи использовался метод моментов для максвелловских молекул. В [38] предложено расширение двухжидкостной модели Глансдорфа [39] для газовых смесей, на основе которой получено решение задачи о структуре

ударной волны в смеси He — Ar. Численное решение в смесях He — Ar и He — Xe найдено в работах [40—43] методом прямого моделирования Монте-Карло. В [44] авторы объединили метод моментов и приближение Мотт-Смита для легкого компонента с методом Монте-Карло для тяжелого компонента.

При исследовании структуры ударной волны в газовых смесях на основе уравнения Больцмана немонотонного поведения скорости тяжелого компонента не обнаружено. Однако получен немонотонный профиль температуры тяжелого компонента при его малой концентрации, т. е. температура тяжелого компонента в ударной волне сначала растет до значения, превышающего температуру смеси за фронтом, а затем убывает, стремясь к последней. В рамках приближения Мотт-Смита показано, что температура тяжелого газа всюду внутри волны больше температуры легкого. В то же время в расчетах по БГК-модели уравнения Больцмана получено, что на начальном участке ударной волны легкий газ имеет более высокую температуру, чем тяжелый. Затем температурные профили пересекаются и на конечном участке ударной волны температура тяжелого газа больше легкого. При этом оба стремятся к равновесному значению за ударной волной. Аналогичное поведение температур компонентов получено и в расчетах методом Монте-Карло.

Экспериментальные исследования структуры ударной волны в смесях проведены в работах [42, 45—51]. Аргон-гелиевые смеси рассмотрены в работах [45, 48, 49], в которых использовалась электронно-пучковая диагностика. Для чисел Маха вверх по потоку 1, 6 и 2 приведены распределения парциальных плотностей компонент и толщин ударной волны в зависимости от концентрации тяжелого газа. Экспериментальные исследования Сентера [45] показали отсутствие немонотонности профиля скорости тяжелого компонента, найденной Шерманом. В [49] получено монотонное возрастание парциальных плотностей обоих компонентов при 95 % Ar в смеси He — Ar в отличие от теоретических результатов Гольдмана и Сировича [18]. Интересные эксперименты проведены в [50], где авторы в смеси He — Xe при малых концентрациях тяжелого компонента Xe обнаружили немонотонное распределение плотности легкого компонента в ударной волне, т. е. плотность гелия сначала растет, а затем убывает, стремясь к значению за волной. В [51] был повторен эксперимент с тем же содержанием Xe в смеси, в котором уже отсутствует немонотонность профиля плотности легкого компонента, что, по мнению самих авторов, связано с недостаточной точностью проведенных экспериментов.

Таким образом, в задаче о структуре ударной волны в газовых смесях между результатами, полученными на основе макроскопических уравнений, с одной стороны, и экспериментальными данными и кинетическими расчетами методом Монте-Карло, с другой, имеются существенные различия. Поэтому остается важным моделирование данной задачи на основе макроскопиче-

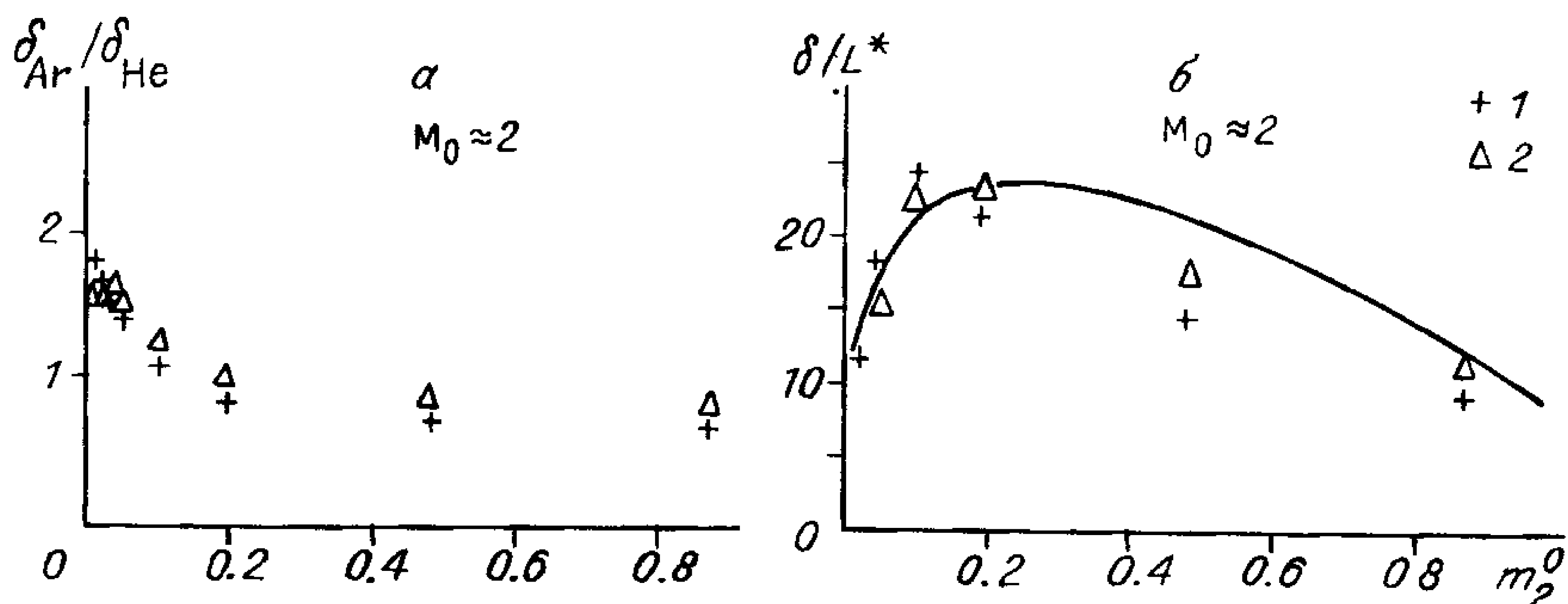


Рис. 3.16.

ских уравнений, способных описывать структуру ударной волны в области умеренных чисел Маха. Необходимо отметить, что макроскопические модели более просты по сравнению с уравнением Больцмана и при решении требуют гораздо меньших затрат машинного времени на ЭВМ.

Далее, следуя [52], будут представлены результаты расчетов структуры ударной волны в смеси газов He — Ar и He — Xe на основе уравнений многоскоростной и многотемпературной газодинамики смесей и проведено сравнение с экспериментальными и теоретическими данными, полученными по другим моделям.

Расчеты выполнялись в диапазоне чисел Маха в пабегающем потоке $M_0 = 1.58 \div 4$. При этом рассмотрены области малых (1.5—5 %), средних (10—25 %) и больших (~50 %) концентраций тяжелого компонента. Для рассмотренных газов $\gamma_1 = \gamma_2 = 5/3$.

Наиболее простым параметром, характеризующим структуру ударной волны (УВ), является «эффективная толщина» УВ, определяемая по максимальному наклону профиля плотности смеси $\Lambda = (\rho^1 - \rho^0) / (d\rho/dx)_{\max}$ (формула Прандтля). Вводят также «эффективную толщину» УВ в каждом компоненте смеси, определяемую по максимальному наклону парциальной плотности $\Lambda_i = (\rho_i - \rho_i^0) / (d\rho_i/dx)_{\max}$. На рис. 3.16 приведены расчетные и экспериментальные результаты по Λ и $\Lambda_{Ar}/\Lambda_{He}$ при $M_0 \approx 2$ и различных значениях концентрации Ar (1 — расчет, 2 — эксперимент [45]). Расчеты удовлетворительно описывают экспериментальные данные во всей области концентраций. Здесь же сплошной линией показано аналитическое решение для толщины слабой УВ (формула (3.2.13)). Видно, что оно, хотя и получено при $M_0 \rightarrow 1$, может быть использовано для определения «толщины» УВ в диапазоне значений M_0 вплоть до 2. Близкие результаты для слабой УВ найдены в работах [17, 18].

На рис. 3.17—3.29 представлены профили парциальных плотностей, скоростей и температур в УВ, определяемых в виде $\tilde{V}_i = (u_i - u^1) / (u^0 - u^1)$, $\tilde{T}_i = (T_i - 1) / (T^1 - 1)$, $\tilde{\rho}_i = (\rho_i - 1) / (\rho_i^1 - 1)$, $(\rho_i^1 = u^0 / u^1)$. Начало отсчета выбрано в точке, где числовая плотность смеси изменялась наполовину своего изменения

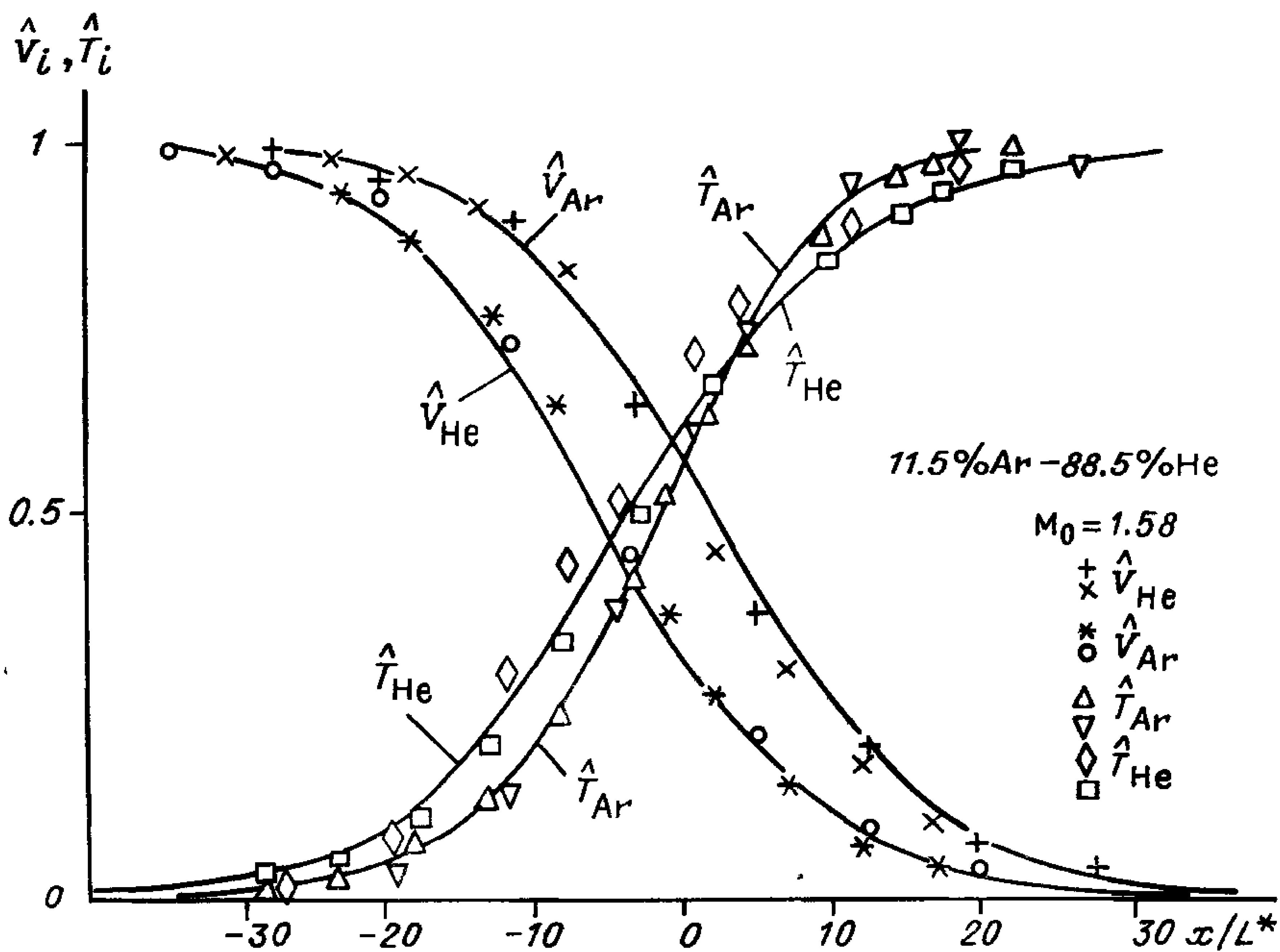


Рис. 3.17.

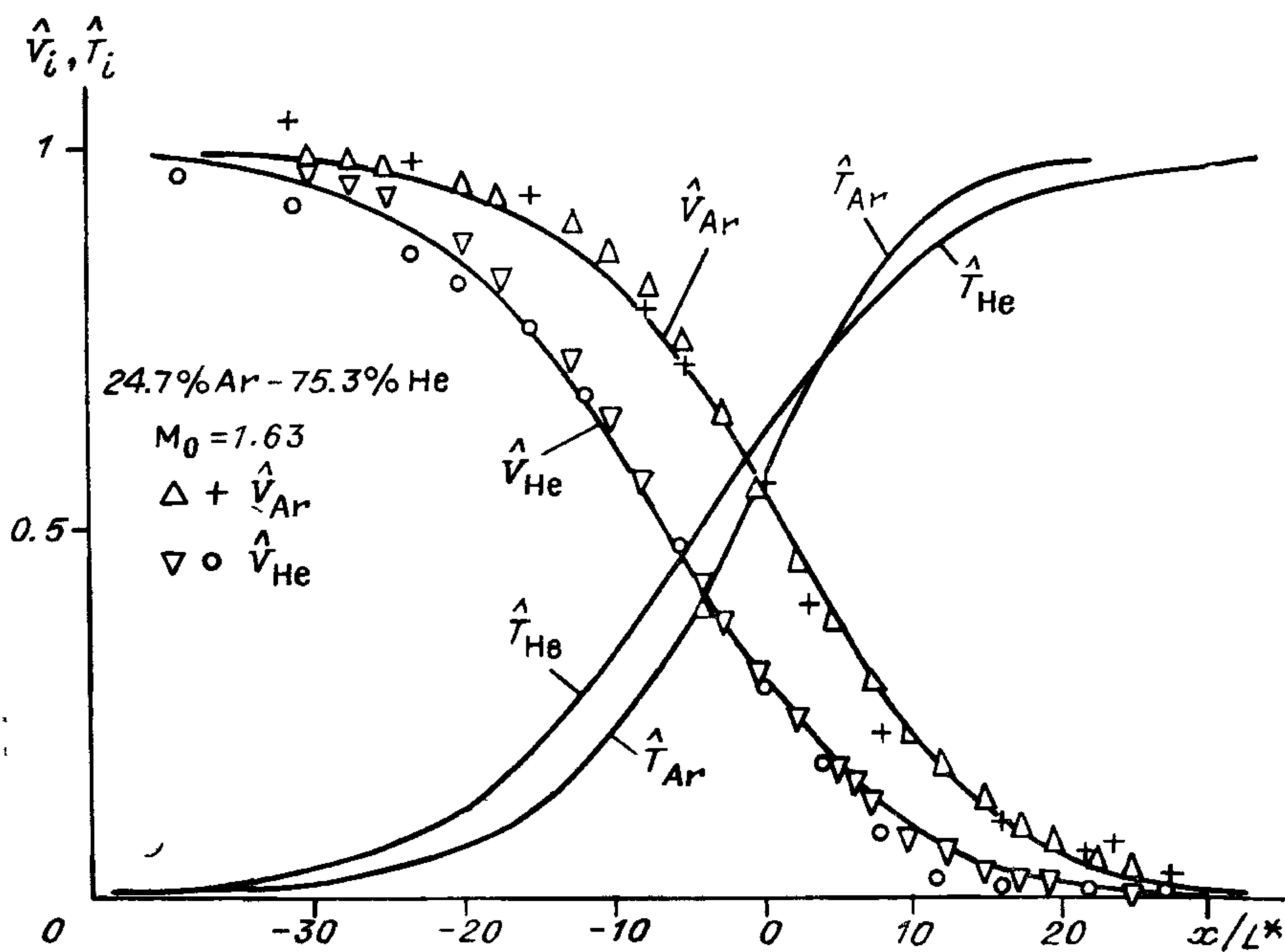


Рис. 3.18.

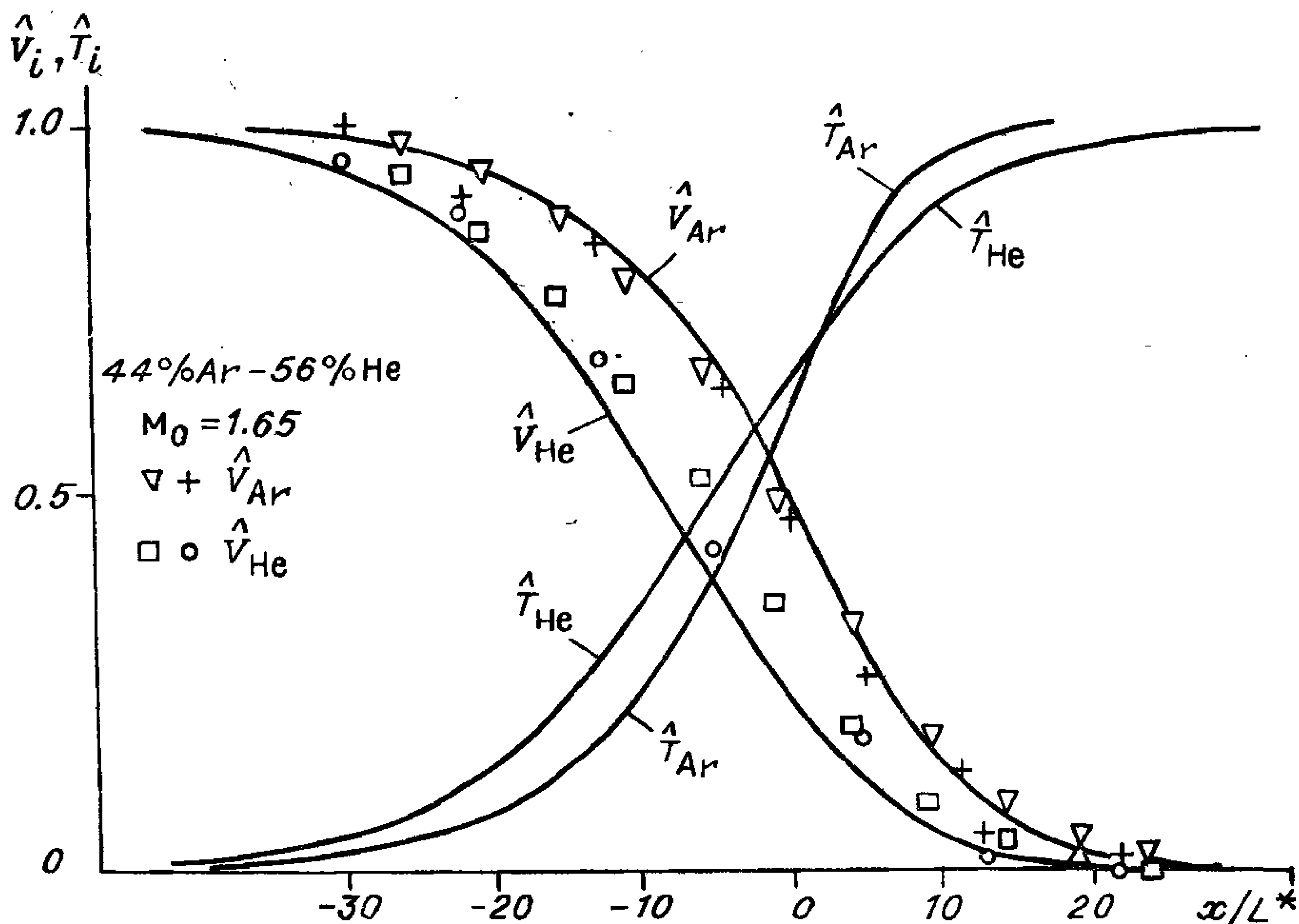


Рис. 3.19.

с УВ, т. е. $m_1^0 \hat{\rho}_1 + m_2^0 \hat{\rho}_2 = 0.5$ при $x = 0$. Результаты расчетов по модели (1), (3) приведены сплошными линиями.

На рис. 3.17—3.19: $+$, O , $\diamond$ — эксперимент [48]; $\times$, $*$, $\square$, ∇ , Δ — метод Монте-Карло (БГК-модель) [41].

Из рис. 3.17—3.19 видно, что поведение скоростей и температур компонентов в смеси He — Ar при числе Маха в набегающем потоке $M_0 \approx 1.6$ соответствует экспериментальным данным [48] и теоретическим, полученным в работе [41] методом Монте-Карло для БГК-модели уравнения Больцмана в широком диапазоне значений концентрации Ar (11,5; 24,7; 44 %). Эффекты разделения компонентов смеси по скоростям и температурам начинают проявляться с $M_0 \approx 2$ и особенно при малой концентрации тяжелого газа (рис. 3.20). Решение уравнений Навье — Стокса, показанное на рис. 3.20 штриховой линией, приводит к немонотонному профилю плотности тяжелого компонента [17]. Как уже отмечалось в литературе, такой профиль, означающий согласно соотношению $\rho_i u_i = \text{const}$ ускорение тяжелого газа на начальном участке УВ и последующее торможение, не имеет физического объяснения и противоречит экспериментальным данным [45]. Решение же по модели (1), (3) согласуется с экспериментом.

Для чисел Маха, близких к 2, расчеты при умеренных (13 %, рис. 3.21) и больших (48 %, рис. 3.22) концентрациях Ar приводят к более полному совпадению с экспериментом. Кроме того, при 48 % Ar уравнения (1), (3) и уравнения Навье — Стокса дают совпадающие результаты почти по всей ширине УВ. (На

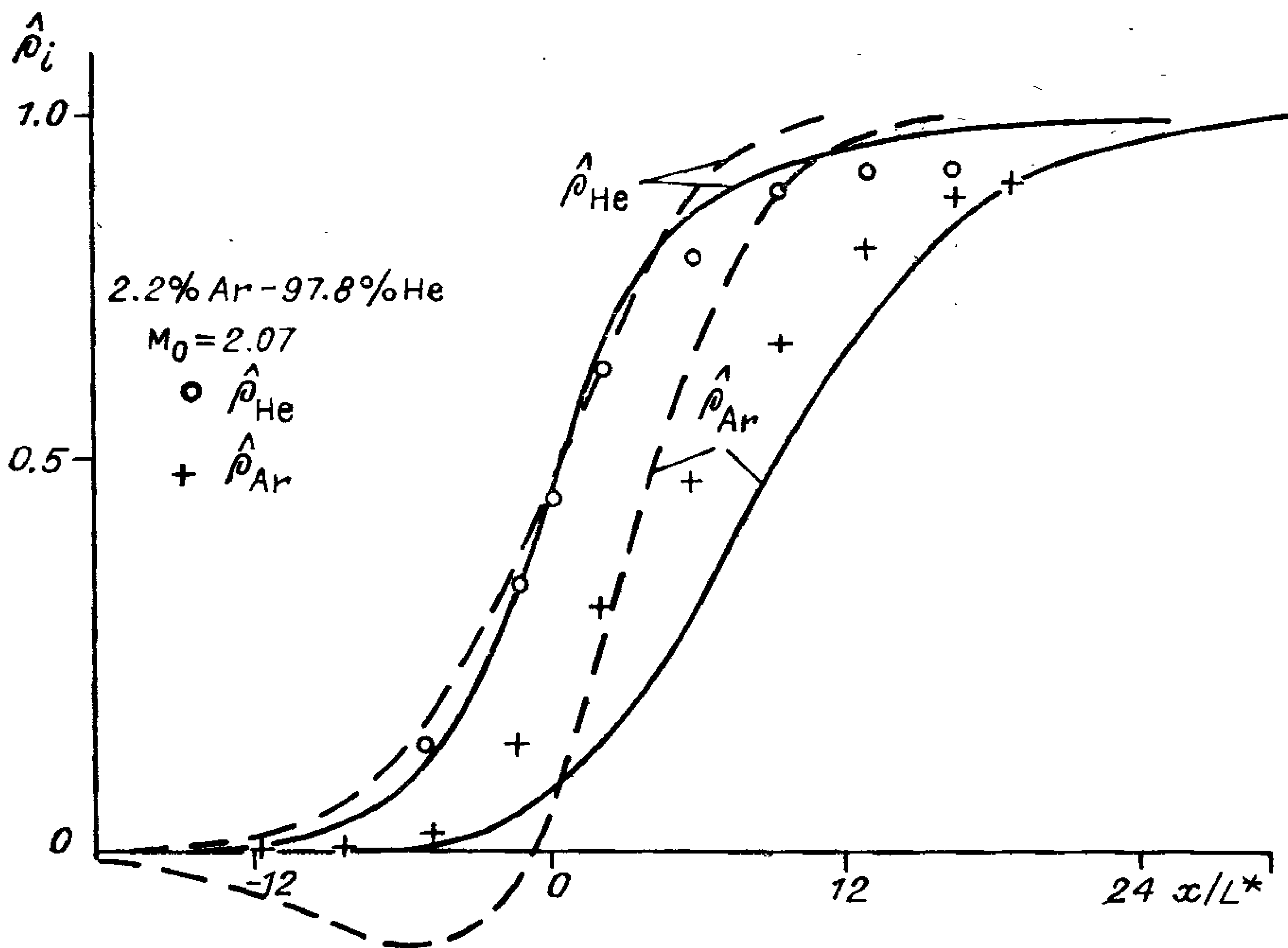


Рис. 3.20.

рис. 3.21 значками $+$, $\circ$ обозначен эксперимент [49], на рис. 3.22 $+$, $\circ$ — эксперимент [45], Δ , $\square$ — эксперимент [49], штрихом — уравнение Навье-Стокса [17].)

Отметим, что и при $M_0 = 3$ имеет место хорошее совпадение с результатами численного решения БГК-модели уравнения Больцмана [32] (рис. 3.23).

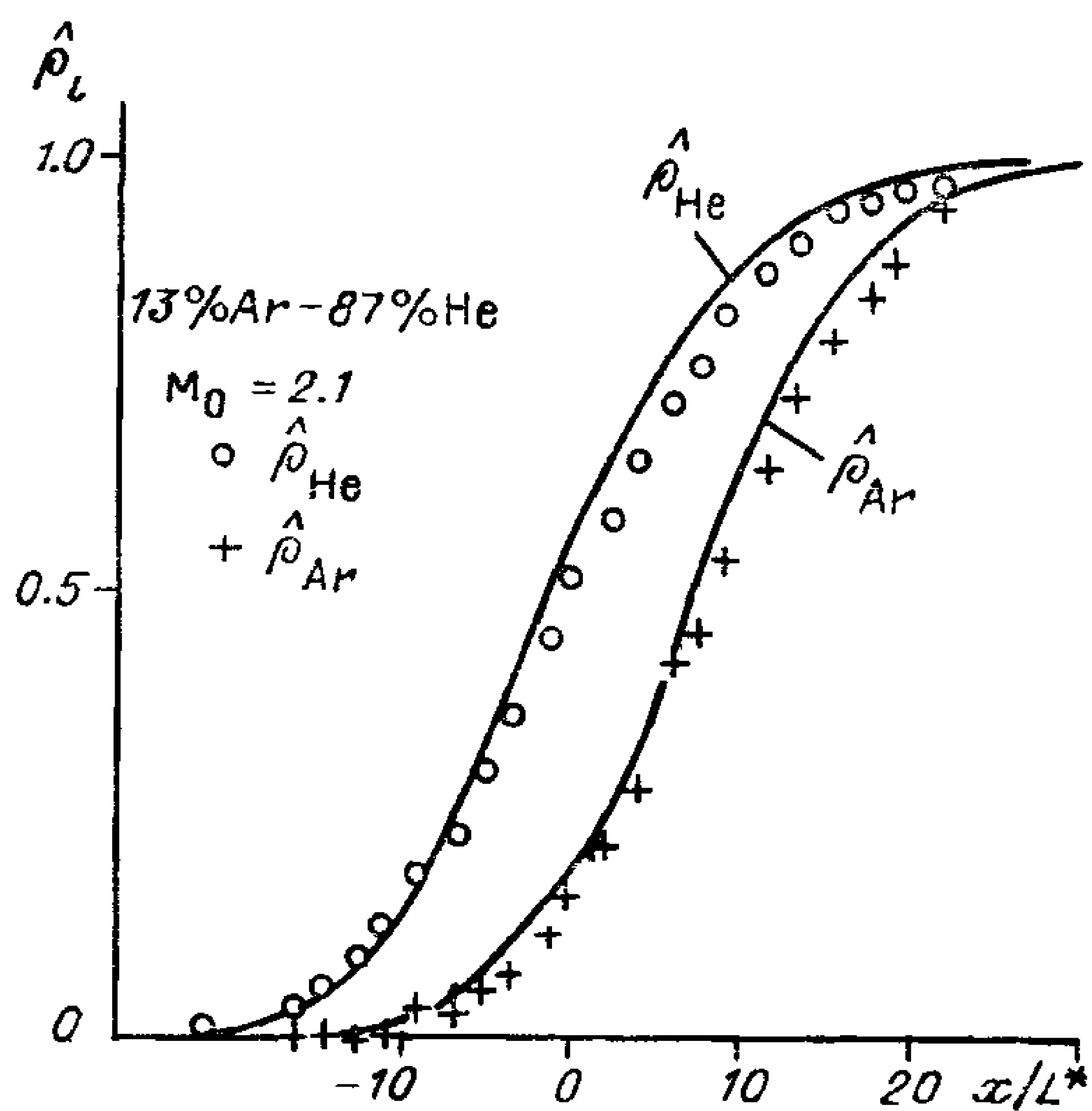


Рис. 3.21.

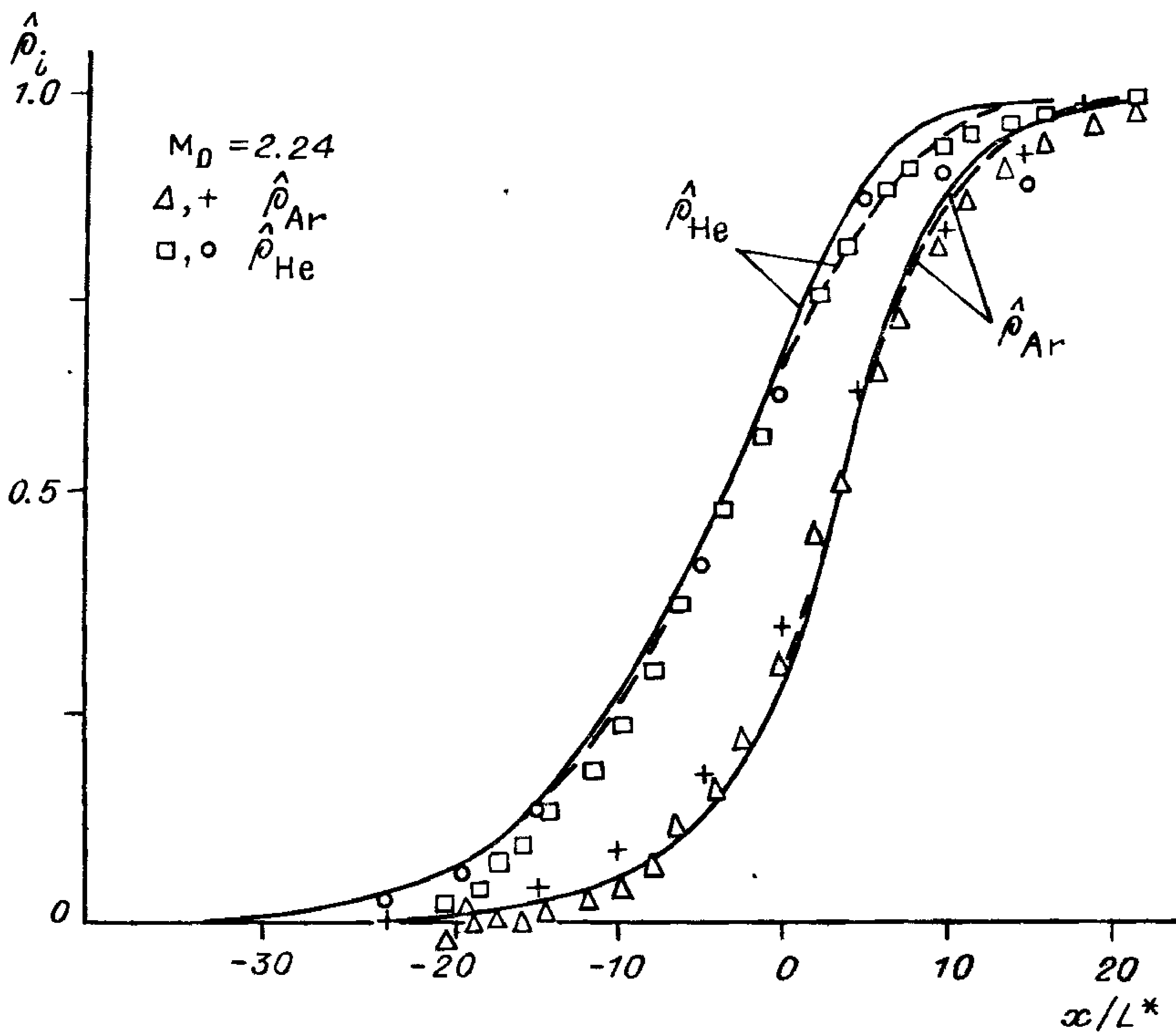


Рис. 3.22.

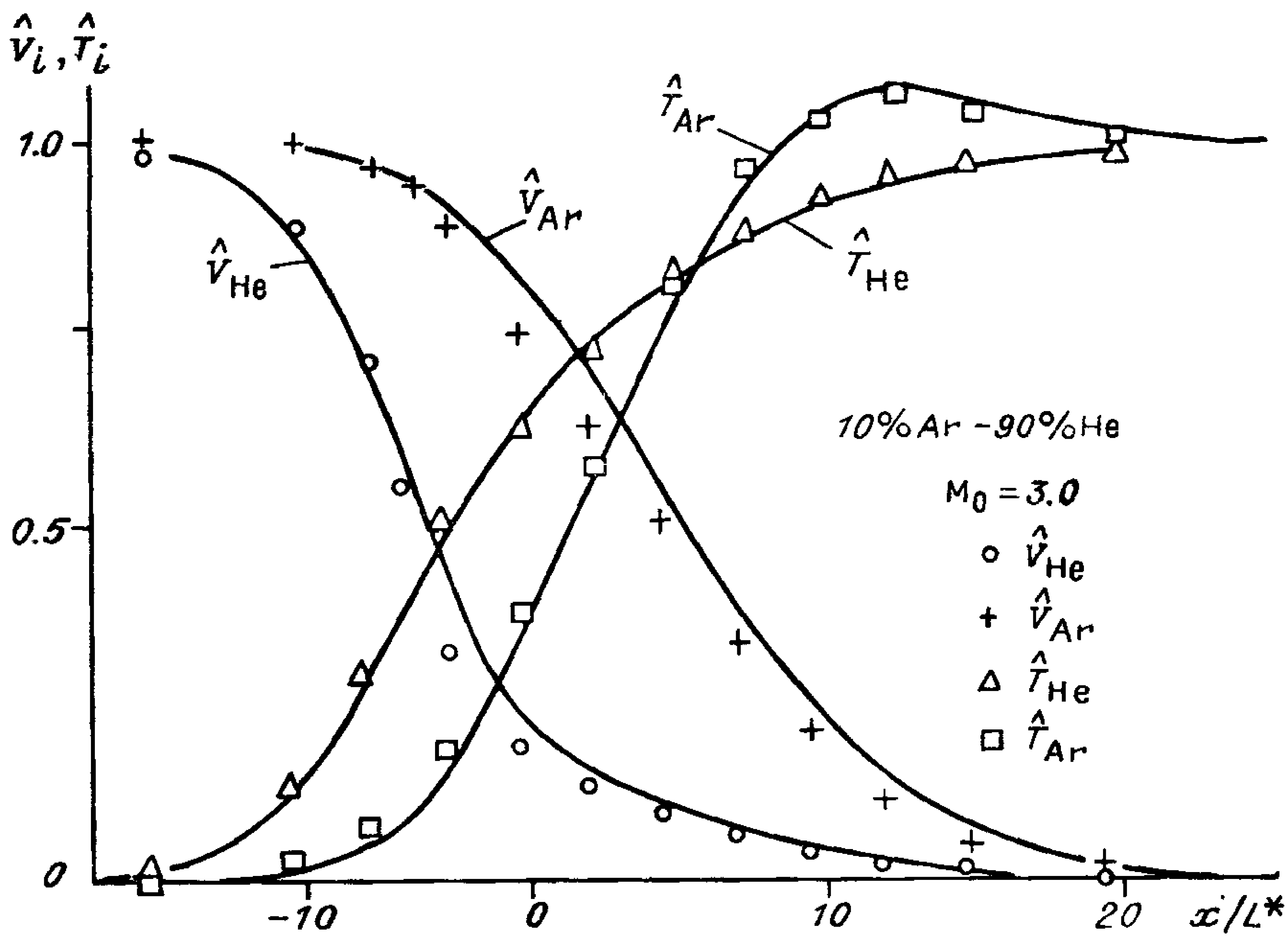


Рис. 3.23.

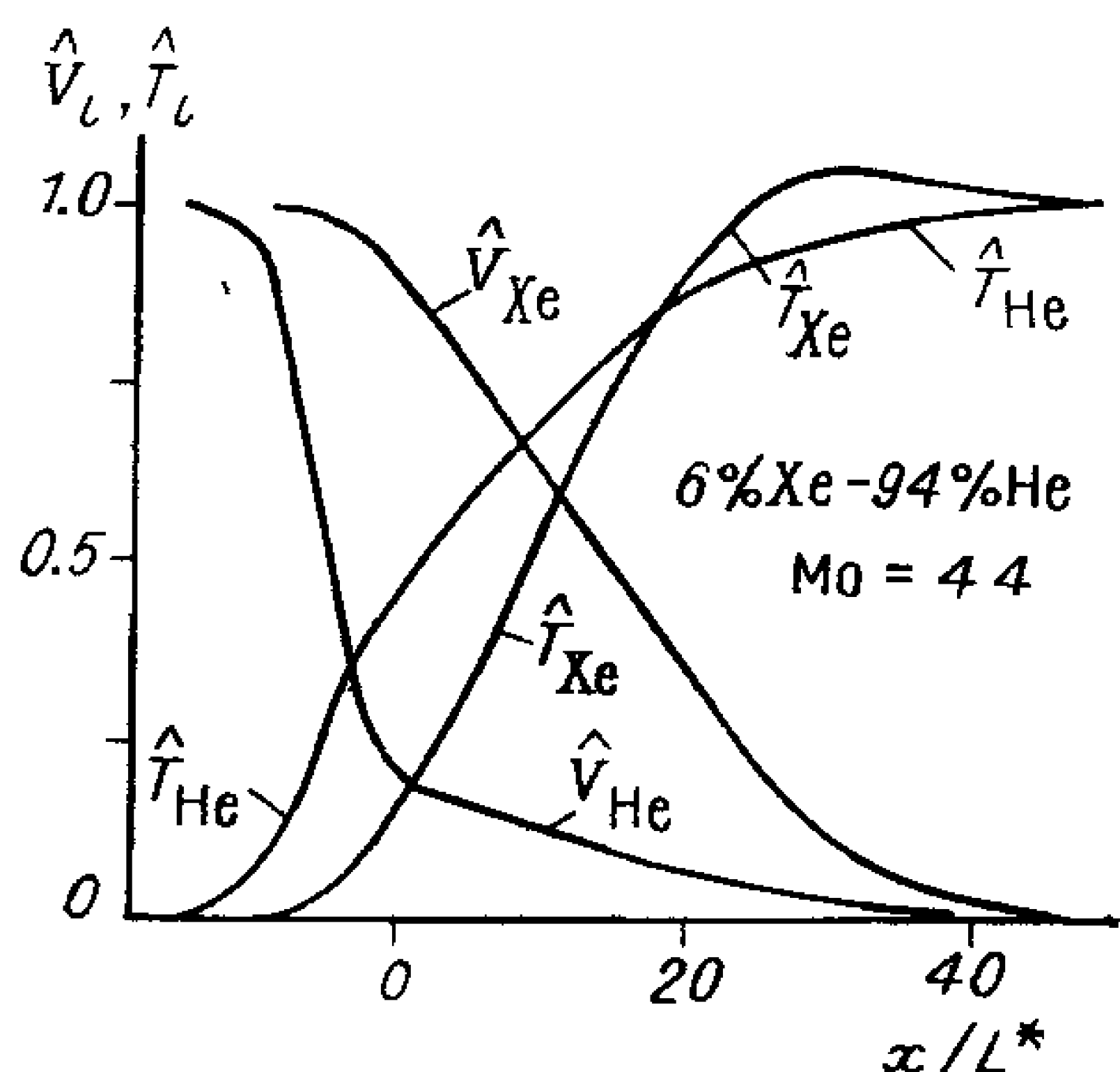


Рис. 3.24.

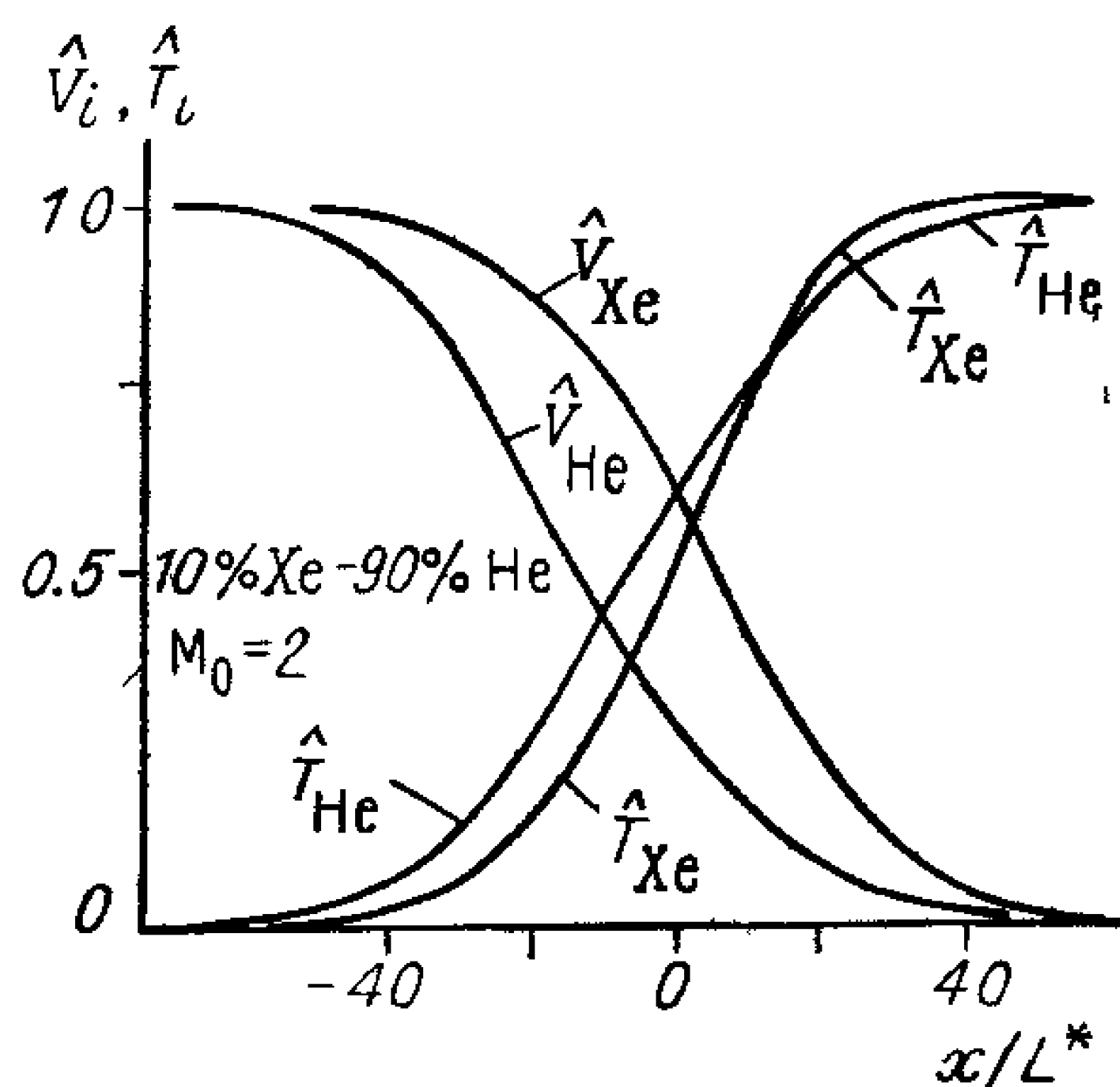


Рис. 3.25.

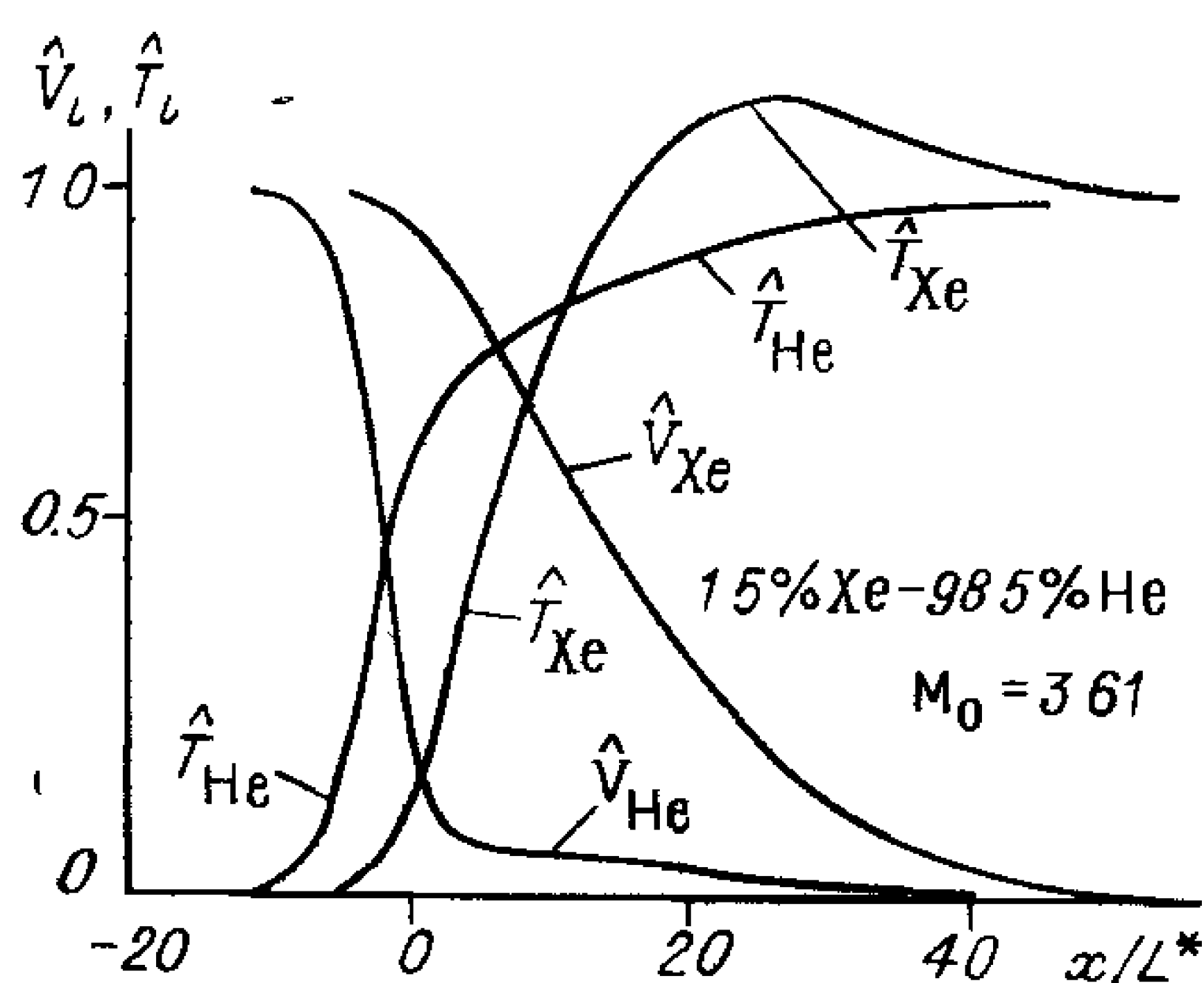


Рис. 3.26.

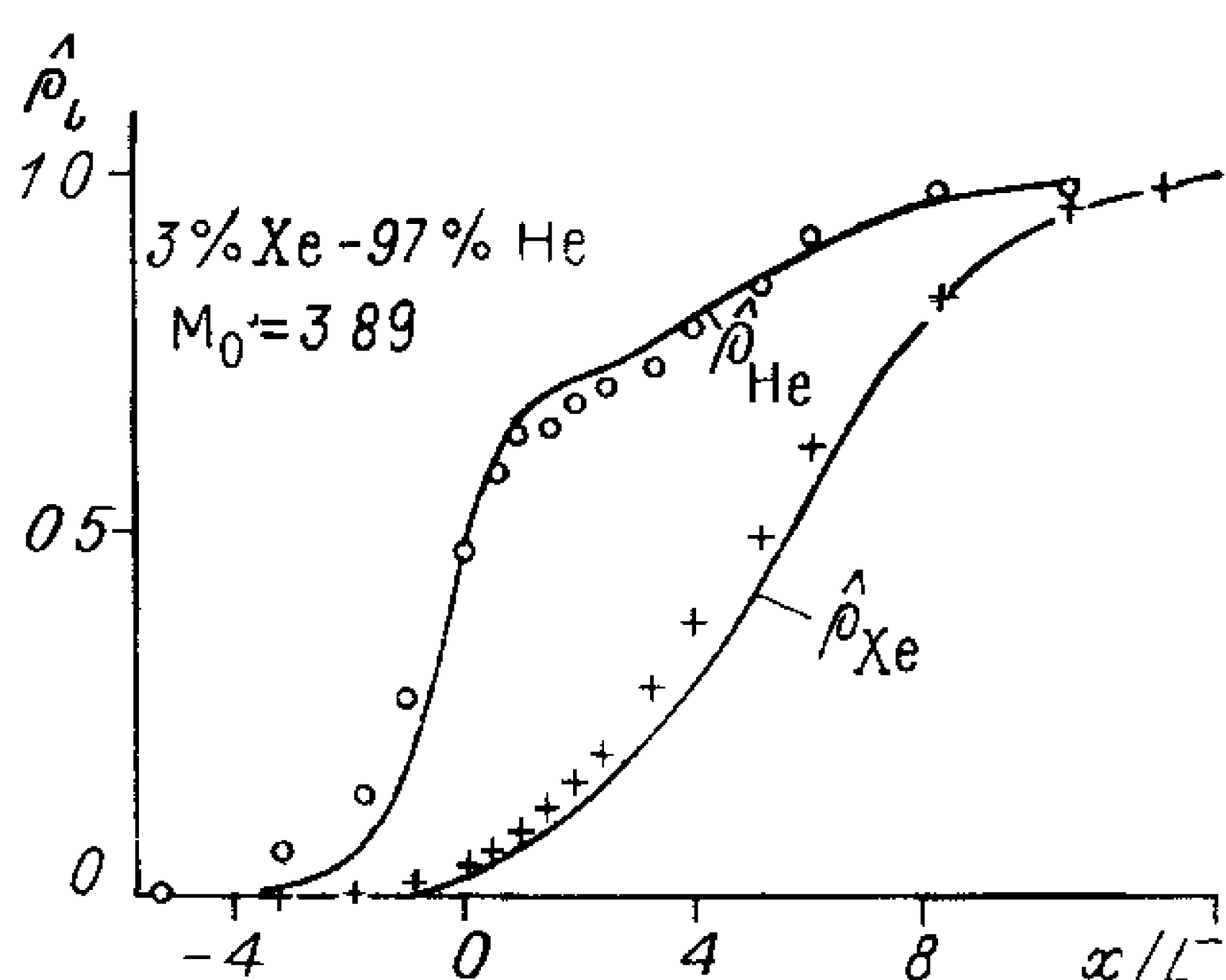


Рис. 3.27.

Аналогичные расчеты выполнены в смеси He — Xe, где можно ожидать, что эффекты, обусловленные разницей в массах молекул ($M_2/M_1 = 32.8$), проявятся еще сильнее. Некоторые результаты этих расчетов приведены на рис. 3.24—3.28. Данные по плотности при $M_0 = 3.89$ и 3 % Xe (рис. 3.27) достаточно близки к полученным методом Монте-Карло [42].

Из приведенных результатов можно установить некоторые особенности структуры УВ в смесях газов с большой разницей в массах молекул. Из графиков видно, что в УВ возникают значительные разность скоростей и разность температур компонентов смеси, что говорит о правомерности использования двухскоростных двухтемпературных уравнений.

В [40, 42] на основе численного моделирования кинетических уравнений обнаружен немонотонный профиль температуры тяжелого компонента смеси при его малом содержании. Температура тяжелого газа возрастает до некоторого значения, превышающего равновесную температуру за УВ, а затем убывает, стремясь к последней. Расчеты по модели (1), (3) также подтверждают наличие данной немонотонности. В частности, сравнение с ре-

результатами [42] показывает совпадение величины и положения температурного пика (см. рис. 3.23). С помощью детальных расчетов установлена зависимость температурного пика от концентрации, M_0 и отношения молекулярных масс $\varepsilon = M_1/M_2$. Он убывает при увеличении молярной концентрации тяжелого газа перед УВ при фиксированном M_0 , а при фиксированном значении молярной концентрации возрастает с ростом M_0 . Из сравнения результатов расчетов для смесей He — Ar и He — Xe следует, что с уменьшением ε при фиксированном значении концентрации тяжелого газа m_2^0 температурный пик уменьшается. Его максимальное значение смещается в область меньших значений концентраций газа. При фиксированной массовой концентрации максимальное значение температуры тяжелого компонента растет при увеличении как M_0 , так и M_2/M_1 , что качественно согласуется с [43].

Приведем некоторые соображения для выявления механизма образования температурного пика. В стационарной УВ скорость тяжелого компонента (в силу большей инерции его молекул) всегда превосходит скорость легкого. Более резкое торможение легкого компонента приводит, с одной стороны, к возрастанию его температуры, которая на начальном участке УВ всегда больше температуры тяжелого газа, а с другой — к обогащению смеси легким газом. В результате увеличивается энергоподвод к тяжелому газу за счет работы силы межкомпонентного взаимодействия F_{12} . Действительно, как вытекает из уравнений энергии системы (1), такой энергоподвод в расчете на одну молекулу равен $\kappa_2 F_{12} u_{12}/n_2$ в тяжелом газе и $\kappa_1 F_{12} u_{12}/n_1$ — в легком. Их отношение $\kappa_2 n_1/\kappa_1 n_2 \sim \rho_1/\rho_2$. Если концентрация тяжелого газа перед волной мала, так что $\rho_2^0 \leq \rho_1^0$, то внутри волны $\rho_1/\rho_2 = \rho_1^0 u_2/\rho_2^0 u_1 > 1$. Кроме того, при достаточном продвижении внутрь ударного слоя, где $|\nabla u_2| \gg |\nabla u_1|$, диссипация энергии из-за вязкости происходит в основном в тяжелом газе. Вследствие этих факторов, а также теплообмена из-за разности температур имеет место интенсивный рост температуры тяжелого газа. Это может привести к тому, что она превысит равновесную температуру за УВ. Основной вклад в формирование температурного пика вносит работа силы межкомпонентного взаимодействия. Как было показано в § 3, этот пик сохраняется и при стремлении коэффициентов вязкости к нулю.

Другой характерной особенностью структуры УВ при малой концентрации тяжелого компонента является то, что имеют место четко выраженная зона ударного перехода, в которой резко меняются параметры легкого компонента, а параметры тяжелого практически постоянны, и область релаксации, в которой смесь приходит в равновесное состояние за УВ (см., например, рис. 3.26—3.28).

В § 2 на основе эйлеровского приближения модели ММГС было показано, что профиль скорости легкого компонента немонотонен, если в ударной волне имеет место переход через скорость звука в тяжелом компоненте. В расчетах для указанных концентраций по полной модели (1), (3) этого не обнаружено

(см., например, рис. 3.9), т. е. данная немонотонность была обусловлена пренебрежением эффектами вязкости теплопроводности.

На рис. 3.28, 3.29 представлены также графики отношений тензора вязких напряжений p_{ixx} к давлению и теплового потока q_{ix} к конвективному потоку тепла в каждом компоненте смеси: $\bar{p}_{ixx} = p_{ixx}/p_i$, $\bar{q}_{ix} = q_{ix}/(\rho_i c_{pi} T_i u)$ ($c_{pi} = R_i + c_{vi}$). Рис. 3.28 соответствует $M_0 = 3.89$, смеси 3 % Хе — Не, где 1 — $\hat{V}_{He}$, 2 — $\hat{V}_{Xe}$, 3 — $\hat{T}_{He}$, 4 — $\hat{T}_{Xe}$, 5 — $\bar{p}_{He,xx}$, 6 — $\bar{p}_{Xe,xx}$, 7 — $\bar{q}_{He,x}$, 8 — $\bar{q}_{Xe,x}$. Рис. 3.29 соответствует $M_0 = 2.07$, смеси 2.2 % Аг — Не, где 1 — $\bar{p}_{He,xx}$, 2 — $\bar{p}_{Ag,xx}$, 3 — $\bar{q}_{He,x}$, 4 — $\bar{q}_{Ag,x}$, 5 — $\hat{T}_{He,\parallel}$, 6 — $\hat{T}_{Ag,\parallel}$, 7 — $\hat{T}_{He,\perp}$, 8 — $\hat{T}_{Ag,\perp}$. Они, с одной стороны, дают определенную информацию о поведении p_{ixx} и q_{ix} в УВ, с другой — позволяют определить область применимости по значению числа Маха уравнений (1), (3). Фактически $\bar{p}_{ixx}$ и $\bar{q}_{ix}$ есть отношение навье-стоксовских поправок в тензоре напряжений и тепловом потоке к соответствующим эйлеровским членам и поэтому должны оставаться малыми величинами порядка числа Кнудсена. В смеси Не — Аг они не превышают 0.2 при $M_0 = 2.07$ (см. рис. 3.29), но достигают 0.63 при $M_0 = 4$, а в смеси Не — Хе при $M_0 = 3.89$ достигают 0.4 (см. рис. 3.28). Эти данные указывают на то, что в рассмотренных смесях уравнения (1), (3) применимы до $M_0 = 3.5$.

Представляет интерес вопрос о величине анизотропии парциальных температур $(T_{i,\parallel} - T_{i,\perp})/T_i$ в УВ, где продольная и пер-

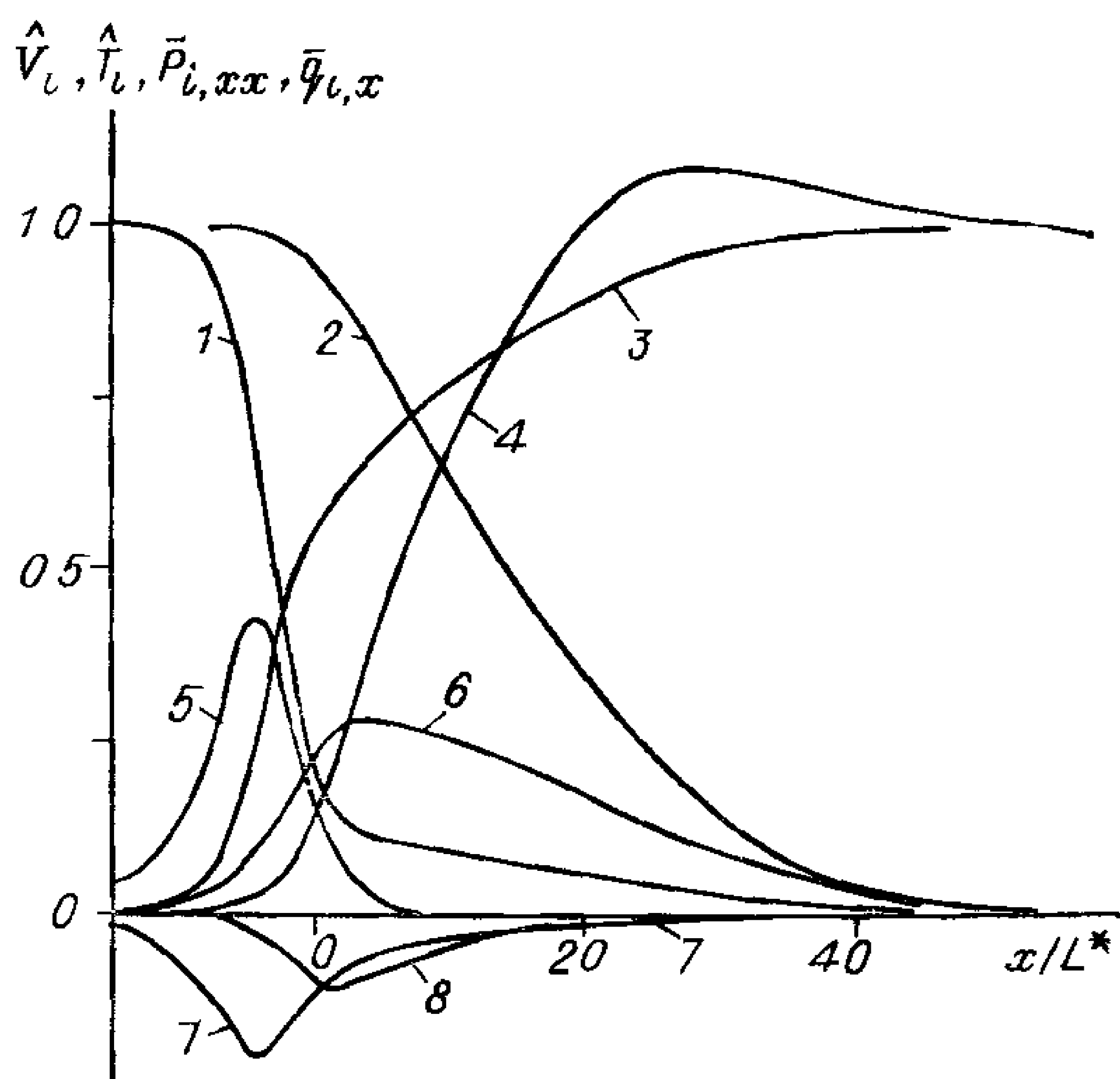


Рис. 3.28.

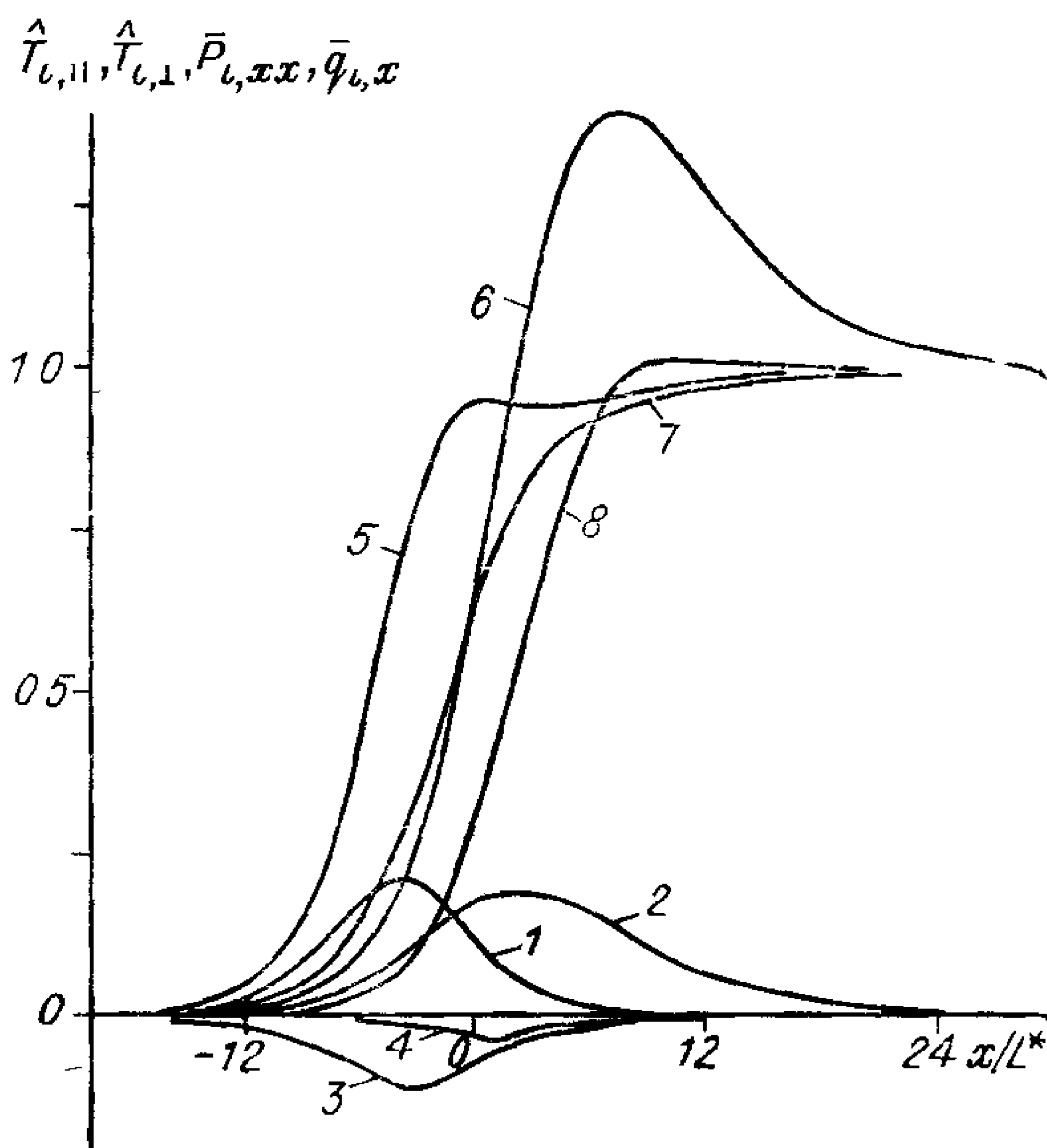


Рис. 3.29.

пендикулярная составляющие температур определяются с помощью соотношений

$$\bar{T}_{i, \parallel} = T_{i, \parallel} / T_i = 1 + \bar{p}_{i, xx}, \quad \bar{T}_{i, \perp} = T_{i, \perp} / T_i = 1 - \bar{p}_{i, xx} / 2.$$

(Такое определение $T_{i, \parallel}$ и $T_{i, \perp}$ не является строгим, но оно дает качественное описание и позволяет приближенно найти условия, когда их надо вводить.) При строгом подходе следовало бы ввести продольные и перпендикулярные температуры еще при выводе газодинамических уравнений. Отсюда анизотропия равна $\bar{T}_{i, \parallel} - \bar{T}_{i, \perp} = 3\bar{p}_{i, xx} / 2$ и мала в области применимости исходных уравнений. На рис. 3.29 представлены графики $\hat{T}_{i, \parallel}$, $\hat{T}_{i, \perp}$. Здесь большие отличия продольных температур от перпендикулярных обусловлены выбором $\hat{T}_{i, \parallel(\perp)}$ вместо $\bar{T}_{i, \parallel(\perp)}$. Температурный пик появляется на продольной составляющей температуры тяжелого компонента смеси.

Из полученных результатов и их сравнения с данными экспериментов и расчетов по кинетическим уравнениям следует, что уравнения двухскоростной, двухтемпературной газодинамики (1), (3) применимы к описанию структуры УВ в газовых смесях в диапазоне чисел Маха до 3.5 и в широкой области концентрации тяжелого компонента смеси (от 1 до 50 %).

ГЛАВА 4

ВОЛНЫ В ДВУХФАЗНЫХ СРЕДАХ ТИПА ГАЗА С ТВЕРДЫМИ ЧАСТИЦАМИ

§ 1. КОМБИНИРОВАННЫЙ РАЗРЫВ В СМЕСИ ГАЗ — ТВЕРДЫЕ ЧАСТИЦЫ

Уравнения двухфазной среды (1.1.4) справедливы в случае, когда характерный размер изменения средних параметров течения L существенно превосходит размер частицы d . В противном случае, по аналогии с газовой динамикой, вводятся поверхности разрыва. Классификация и вывод соотношений на разрывах приведены впервые в работе [1]. С математической точки зрения соотношения на разрывах получены следующим образом. Уравнения двухфазной среды (1.1.4) записываются в дивергентном виде и интегрируются по области, содержащей внутри себя разрыв. Затем толщина области устремляется к нулю, в результате чего объемные интегралы обращаются в нуль, и получается система алгебраических уравнений, связывающих параметры среды до и после разрыва:

$$\begin{aligned} [j_1] &= 0, & [j_2] &= 0, & j_1[u_{1n}] + j_2[u_{2n}] + [p] &= 0, \\ j_1[u_{1\tau}] &= 0, & j_2[u_{2\tau}] &= 0, \end{aligned}$$

$$j_1 \left[H_1 + \frac{u_1^2}{2} \right] + j_2 \left[H_2 + \frac{u_2^2}{2} \right] = 0, \quad (1)$$

$$j_1 = \rho_1 \cdot u_{1n}, \quad j_2 = \rho_2 \cdot u_{2n}, \quad \rho_1 = \rho_{11} \cdot m_1, \\ \rho_2 = \rho_{22} \cdot m_2, \quad m_1 + m_2 = 1,$$

где скобками обозначены скачки соответствующих величин на разрыве, индекс 1 относится к газу, 2 — к частицам, n соответствует нормальной компоненте скорости, индекс τ — тангенциальной; u_1 , p , H_1 , ρ_1 , ρ_{11} , m_1 — скорость, давление, энтальпия, средняя плотность, истинная плотность, объемная концентрация газа; u_2 , H_2 , ρ_2 , ρ_{22} , m_2 — скорость, энтальпия, средняя плотность, истинная плотность, объемная концентрация частиц. Первые два уравнения в (1) описывают сохранение потока массы, следующие три уравнения — сохранение полного потока импульса и шестое уравнение — сохранение потока полной энтальпии.

Как было показано, система уравнений (1.1.4) не является дивергентной, поэтому число соотношений на разрыве меньше числа неизвестных. Для замыкания системы (1) в работе [1] были предложены уравнения

$$[u_2^2]/2 + [p]/\rho_{22} = 0, \quad j_2 [\mathcal{E}_2] = 0, \quad (2)$$

следующие из уравнений движения и энергии для частиц.

Система уравнений (1) позволяет провести классификацию возможных разрывов:

- 1) $j_1 = 0$, $j_2 = 0$ — контактный разрыв по газу и по частицам,
- 2) $j_1 = 0$, $j_2 \neq 0$ — контактный разрыв по газу, по частицам нет разрыва;
- 3) $j_1 \neq 0$, $j_2 = 0$ — комбинированный разрыв;
- 4) $j_1 \neq 0$, $j_2 \neq 0$ — разрыв типа ударной волны.

Рассмотрим более подробно комбинированный разрыв, который для краткости будем обозначать КР. Соотношения (2) выражают тот факт, что частицы «быстро» пересекают поверхность разрыва, поэтому их внутренняя энергия и полный импульс остаются неизменными. Однако на КР частицы могут находиться достаточно долго, отсюда следует, что уравнения (2) не справедливы на КР. Для замыкания (1) на КР необходимо привлечь дополнительные гипотезы.

Так, в работах [2—4] использовалась аналогия между течением газа в окрестности КР и течением газа по трубе со скачком сечения. Следуя этой аналогии была введена поверхностная сила, действующая на частицы, находящиеся на КР в виде

$$F^\sigma = p^\sigma [m_1], \\ p^\sigma = \begin{cases} p^-, & [m_1] > 0, \quad M_{12} < 1, \\ p^+, & [m_1] > 0, \quad M_{12} > 1, \end{cases} \quad (3) \\ [s_1] = 0, \quad [m_1] < 0, \quad M_{12} < 1,$$

где s_1 — энтропия газа, $M_{12} = |u_1 - u_2|/c_1$, c_1 — скорость звука

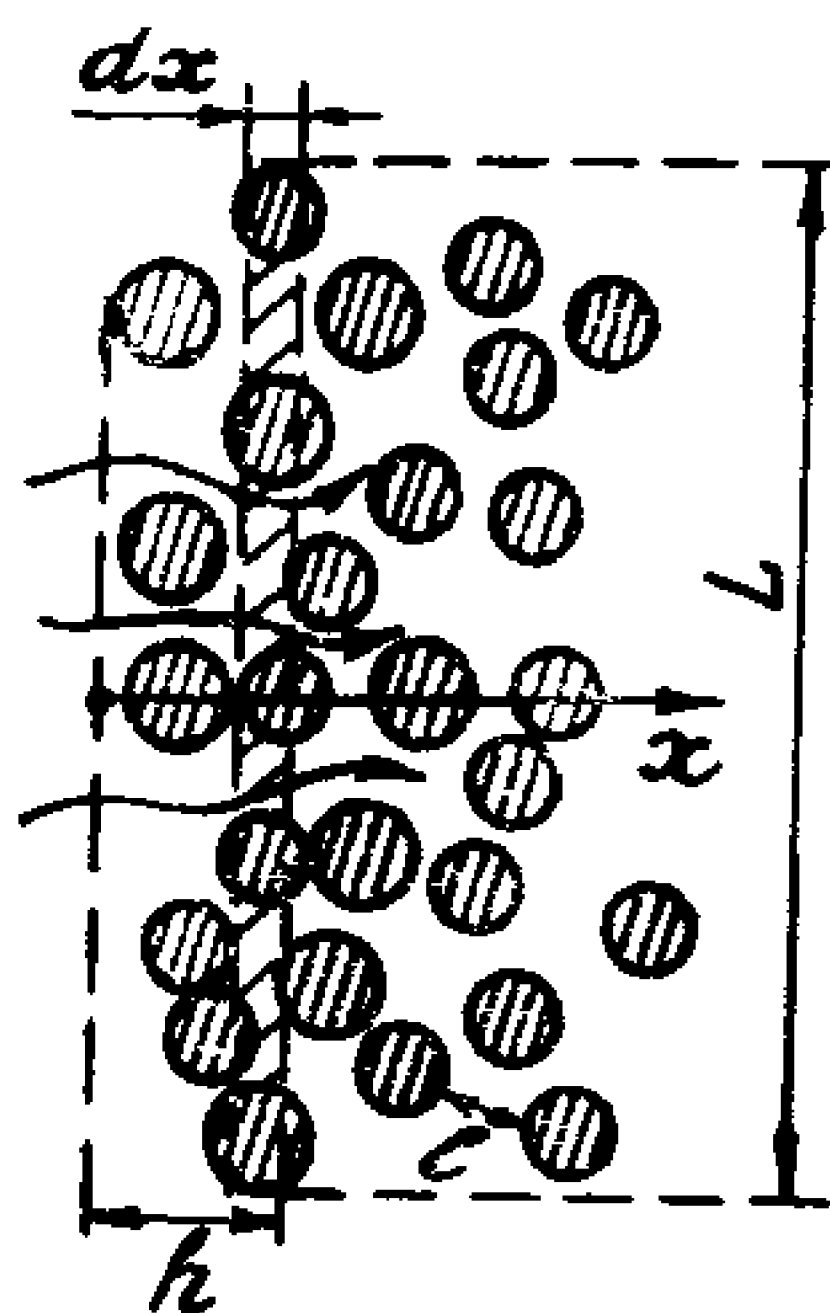


Рис. 4.1.

в газе. С учетом уравнений (3) замыкающие соотношения согласно [2—4] имеют вид

$$[(p + \rho_{11}u_1^2)m_1] = p^\sigma[m_1], \quad j_2[\mathcal{E}_2] = 0. \quad (4)$$

Отметим, что этот подход [2, 3] является скорее эмпирическим. Дальнейшее развитие этого вопроса было дано в работах [5, 6], где были не только обоснованы формулы (3), (4), но и обнаружена нестационарность КР. Далее будет дан вывод соотношений на КР, основанный на методе осреднения по поверхности. Коротко остановимся на узловых моментах предлагаемого в [5, 6] подхода.

Рассмотрим переходный слой с поперечным размером h , порядка расстояния между частицами l (рис. 4.1), на котором происходит значительное изменение объемной концентрации $\Delta m_2 \sim m_2$ и имеет место протекание газа через этот слой. (Рассматриваются течения газа с большими числами Рейнольдса $Re = |u_1 - u_2|d/\nu \gg 1$.) Характерный размер переходного слоя много меньше соответствующего размера изменения параметров течения во внешней области L . Используя осреднение по поверхности, найдем систему уравнений, справедливую в переходном слое. Интегрируя эту систему поперек слоя, получим соотношения, связывающие параметры смеси газ — частицы на краях переходного слоя. Поскольку $L \gg h$, переходный слой в расчетах можно заменить поверхностью разрыва — комбинированный разрыв. Соотношения на КР будут совпадать с соотношениями на концах переходного слоя. Аналогичный прием используется при расчете течения с пограничным слоем, когда параметры на стенке для внешнего течения совпадают с параметрами на бесконечности для пограничного слоя [7]. Перейдем к детальному выводу соотношений на КР.

Предполагая поперечный размер $L \gg h$, произведем осреднение микроуравнений для газа по площадям, перпендикулярным направлению быстрого изменения m_2 (ось x). Вводя элемент объема $dV = dxL^2$, $dx \ll h$ (см. рис. 4.1) и используя формулы осреднения по объему из [8], получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_1 u_1) &= 0, \quad m_1 + m_2 = 1, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho_1 u_1) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_1 u_1^2 + \rho_1 \langle u_1'^2 \rangle + m_1 p) &= \\ &= \frac{1}{dV} \int_{ds_{12}} (-p' n_x + \tau_x^{1k} n_x^k) d's, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_1 \left(\mathcal{E}_1 + \frac{u_1^2}{2} + \frac{\langle u_1'^2 \rangle}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho_1 u_1 \left(H_1 + \frac{u_1^2}{2} + \frac{3}{2} \langle u_1'^2 \rangle \right) \right) &= \\ &= -\frac{\partial}{\partial x}(m_1 p) + \frac{1}{dV} \int_{ds_{12}} (-p' u_n - q'^n + \tau'^{kl} n_1^k u_1'^l) d's, \end{aligned} \quad (5)$$

где τ'^{kl} — тензор вязких напряжений на поверхности частицы, p' , q'_1 — давление и тепловой поток на поверхности частицы, $\vec{n}$ — нормаль к поверхности частицы, ds_{12} — элемент поверхности частицы. Выражая интегралы $\int_{ds_{12}} \varphi' n_x d's/dV$ через среднеповерхностные величины, окончательно получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_1 u_1) &= 0, \quad m_1 + m_2 = 1, \quad \rho_1 = \rho_{11} m_1, \\ m_2 &= \int_{x-R}^{x+R} \pi R^2 n(y, t) \left(1 - \frac{(x-y)^2}{R^2} \right) dy, \quad u_1 = \langle u_{1x} \rangle, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho_1 u_1) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_1 u_1^2 + \bar{p} m_1) &= 2\pi R \int_{x-R}^{x+R} \left(\frac{x-y}{R} \right) n p^\sigma dy, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_1 \left(\bar{\mathcal{E}}_1 + \frac{u_1^2}{2} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho_1 u_1 \left(\bar{H}_1 + \frac{u_1^2}{2} \right) \right) &= 2\pi R \int_{x-R}^{x+R} u_2 p^\sigma \times \\ &\times \left(\frac{x-y}{R} \right) dy - 2\pi R \int_{x-R}^{x+R} n q^\sigma dy - Q_M, \\ \bar{\mathcal{E}}_1 &= \mathcal{E}_1 + \bar{\delta}_2 m_2^\alpha u_{12}^2/2, \quad \bar{p} = p + \bar{\delta}_1 m_2^\alpha \rho_{11} u_{12}^2, \\ \bar{H}_1 &= H_1 + \bar{\delta}_3 m_2^\alpha \frac{3}{2} u_{12}^2, \quad u_{12} = u_1 - u_2, \\ \alpha &\simeq \bar{\delta}_1 \simeq \bar{\delta}_2 \simeq \bar{\delta}_3 \simeq 1, \quad H_1 = \mathcal{E}_1 + p/\rho_{11}, \\ Q_M &= V \sqrt{30} \frac{\rho_{11}}{\rho_{22}} \rho_2 c^2 u_{12}/d, \quad Q_{\mathcal{E}} \simeq \frac{V \sqrt{3}}{14} c^3 \rho_2 \left(\frac{m_2}{m_2^*} \right)^{1/3} / (\eta' d), \\ \eta' &= 1 - (m_2/m_2^*)^{1/3}, \end{aligned} \tag{6}$$

где $d = 2R$, R — радиус частицы, c — скорость хаотического движения частиц, Q_M — работа силы Магнуса, $Q_{\mathcal{E}}$ — диссипация энергии при столкновении частиц [9], p^σ , q^σ — среднее давление и тепловой поток на поверхности частицы, определяемые по формулам

$$q_{12} = 2\pi R^2 \int_{-1}^1 q^\sigma (x + zR) dz, \quad f_{12} = 2\pi R^2 \int_{-1}^1 p^\sigma (x + zR) z dz, \tag{7}$$

где q_{12} , f_{12} — полный тепловой поток и сила, действующая на частицу, x — координата центра частицы. Появление интегральных слагаемых в правых частях уравнений (6) поясним на примере вычисления m_2 . Предположим, что необходимо вычислить m_2 в точке x . Выделим объем dV , ограниченный плоскостями x и $x + dx$, и рассмотрим частицы, пересекающие этот объем.

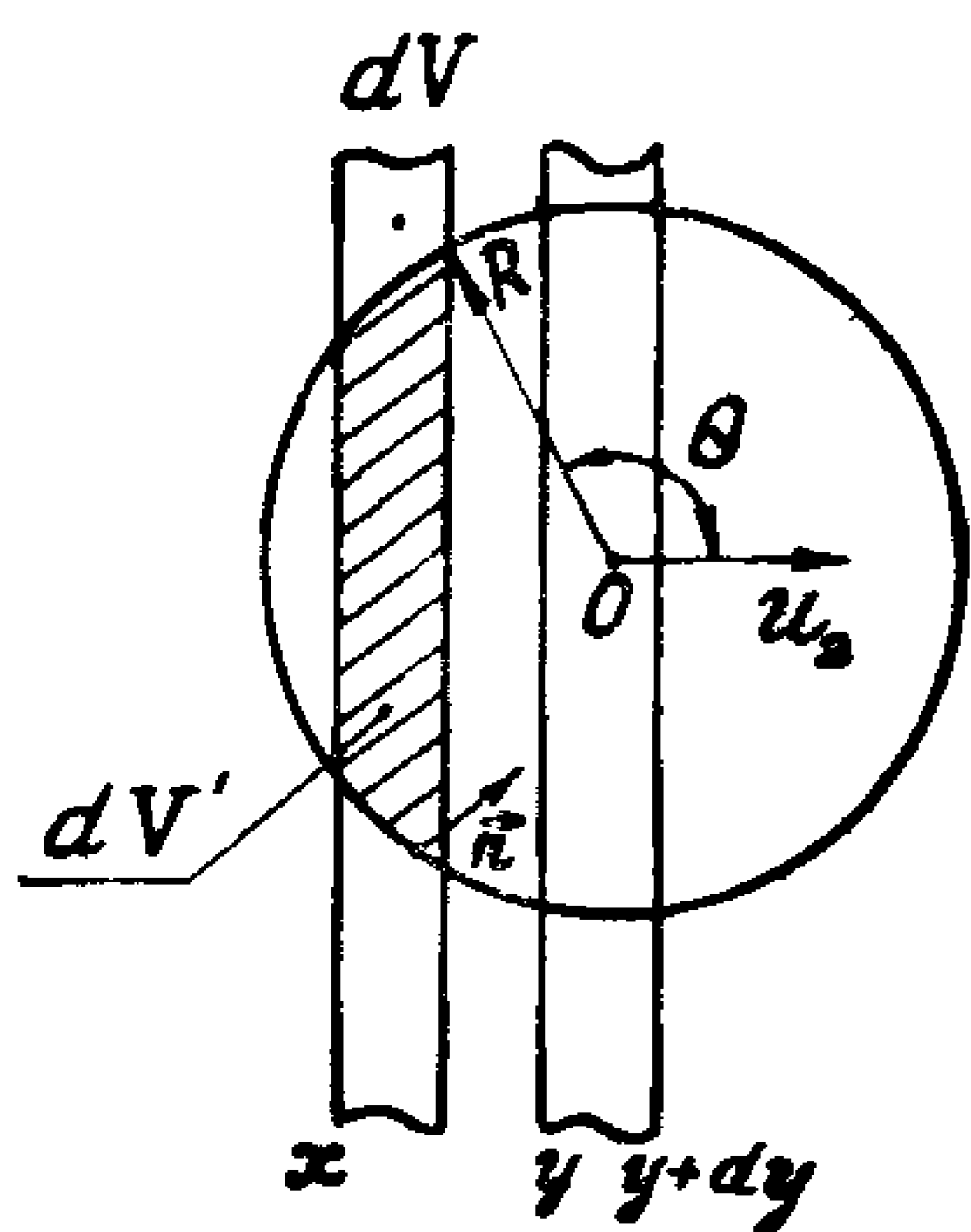


Рис. 4.2.

На рис. 4.2 показана частица, центр которой находится в точке 0 и пересекает объем dV . Частица занимает в объеме dV заштрихованный объем dV' . Для вычисления m_2 необходимо просуммировать dV' от всех частиц, для которых расстояние от центра 0 до объема dV не превышает R . Умножая число частиц $n(y)dy$ на объем $dV' = \pi R^2 \left(1 - \frac{(x-y)^2}{R^2}\right) dx$ и интегрируя по y от $-R$ до R , получим соответствующее уравнение для m_2 . При выводе уравнений для фазы частиц будем считать частицы несжимаемыми,

а движение их — связанным с движением центра масс. При этом размер частицы входит только в выражение для аэродинамической силы, действующей на нее. Рассматривая фазу частиц как ансамбль точечных частиц (представляющих центры масс частиц диаметром d) и производя осреднение по элементарному объему dV , который имеет форму «блина» (рис. 4.2), получим уравнения для средних в одномерном случае

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_2 + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_2 u_2) &= 0, \quad \rho_2 = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_{22} n, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho_2 u_2) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_2 u_2^2) &= F, \quad \rho_2 \frac{d_2 e_2}{dt} = n q_{12} + Q_D, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_2 \left(\mathcal{E}_2 + \frac{u_2^2}{2} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho_2 u_2 \left(\mathcal{E}_2 + \frac{u_2^2}{2} \right) \right) &= Q, \\ \mathcal{E}_2 &= \gamma c^2, \quad \langle u_2 \rangle_y = \langle u_2 \rangle_z = 0, \quad \frac{d_2}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_2 \frac{\partial}{\partial x}, \end{aligned} \quad (8)$$

где n — число частиц в единице объема (концентрация), u_2 , $\mathcal{E}_2$, c — средняя скорость, удельная энергия и скорость хаотического движения частиц, F , Q — сила и поток энергии хаотического движения. Легко видеть, что уравнения (8) представляют законы сохранения массы, энергии, импульса для объема dV , q_{12} — тепловой поток к частице примем равным [10] $q_{12} = (2 \exp(-M_{12}) + 0.3 \text{Re}^{0.55} \text{Pr}^{0.33}) \pi d \lambda (T_1 - T_2)$, $M_{12} = |u_1 - u_2|/c_0$, $c_0 = \sqrt{\gamma p / \rho_{11}}$, λ — коэффициент теплопроводности, $\text{Pr} = \frac{c_p \mu}{\lambda}$ — число Прандтля, $\mu = \rho_{11} \nu$ — вязкость газа, T_1 — температура газа, T_2 — температура частицы.

Представим F в виде $F = F_1 + F_2$, где F_1 обусловлена столкновениями частиц, а F_2 — взаимодействием частиц и газа. Столкновения между частицами приводят к возникновению силы давления, для вывода которой воспользуемся соотношениями из [9]

$$\begin{aligned} l/d &= \eta (m_2^*/m_2)^{1/3}, \quad \eta = 1 - (m_2/m_2^*)^{1/3}, \\ p_0 &= 2mc, \quad \nu' = c/2l, \end{aligned} \quad (9)$$

где ν — частота соударений частиц, m_2^* — объемная концентрация при плотной упаковке частиц, p_0 — импульс, передаваемый частицей при упругом столкновении, l — расстояние между частицами. Давление на левую стенку заштрихованного слоя dx создают половина частиц из объема, расположенного в точке $x - l - d$, а на правую стенку — половина частиц из объема с координатой $x + l + d$. Учитывая, что давление есть произведение $p_0 \nu' n$, и пренебрегая l по сравнению с d ($l/d < 1$), получим

$$F_1 = K^\sigma(x - d, t) - K^\sigma(x + d, t),$$

$$K^\sigma = \rho_2 c^2 / 2l, \quad (10)$$

где $x \pm d$ — аргумент функции K^σ . Используя значение p^σ , величину F_2 представим в виде

$$F_2 = -\frac{\pi d^2}{2} n(x, t) \int_{-1}^1 p^\sigma(x + zr, t) z dz, \quad (11)$$

что позволяет для Q получить формулу

$$Q = F_2 u_2 - (K^\sigma(x + d, t) u_2(x + d, t) - K^\sigma(x - d, t) \times \\ \times u_2(x - d, t)) + Q_M - Q_D.$$

Система уравнений (6) — (11) замыкается соотношением, связывающим p^σ со средними параметрами p , u_1 , u_2 , ... Система уравнений, аналогичная (6), для стационарного случая была получена в [5, 6] методом осреднения по площадям. В работе [11] для исследования устойчивости двухфазного течения к коротковолновым возмущениям использовались уравнения, аналогичные (6) — (11), полученные осреднением по площадям. В отличие от (6) — (11) в работе [11] не выведены уравнения энергии, не рассматривались хаотическое движение, столкновение частиц и не вводилась функция p^σ .

Функция p^σ не может быть найдена в рамках данной модели, для ее определения необходимо привлекать теоретические модели о характере обтекания частицы либо экспериментальные данные.

Рассмотрим систему уравнений (6) — (11) в случае, когда характерный размер изменения средних параметров потока $L \gg R$. Выберем аналогично [7] простейшую аппроксимацию для p^σ в виде

$$p^\sigma = p(t, x) + \Delta p^\sigma(\theta),$$

$$\Delta p^\sigma = \frac{1}{8} \rho_{11} u_{12}^2 (-5 + 9\zeta^2) - f \zeta \left(\frac{4}{3} \pi R^2 \right), \quad \zeta = -\cos \theta, \quad (12)$$

где f — сила, действующая на частицу $f = c_d \rho_{11} \pi R^2 \frac{|u_{12}| u_{12}}{2}$. Раскладывая функцию $n(y)$ вблизи точки x

$$n(y, t) = n(x, t) - \frac{\partial n}{\partial x} (y - x) + O\left(\frac{R^2}{L^2}\right) \quad (13)$$

и подставляя в (6), найдем с учетом (12) значение интеграла в правой части (6)

$$J_1 = 2\pi R \int_{x-R}^{x+R} dy p^\sigma n \left(\frac{x-y}{R} \right) = -\frac{4}{3} \pi R^3 \frac{\partial n}{\partial x} (p_1 + 3 \cdot 10^{-2} \rho_{11} u_{12}^2) - nf$$

и, пренебрегая членом, пропорциональным $10^{-2} \rho_{11} u_{12}^2$, получим

$$J_1 = -\frac{4}{3} \pi R^3 p_1 \frac{\partial n}{\partial x} - nf.$$

Используя (13), можно показать, что в этом случае

$$m_2 = \frac{4}{3} \pi R^3 n + O(R^2/L^2), \quad (14)$$

отсюда

$$2\pi R \int_{x-R}^{x+R} dy p^\sigma n \left(\frac{x-y}{R} \right) = p_1 \frac{\partial m_1}{\partial x} - m_2 f \left/ \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right) \right. + O(R^2/L^2). \quad (15)$$

Для вычисления интеграла

$$J_2 = 2\pi R \int_{x-R}^{x+R} dy p^\sigma u_2 n \left(\frac{x-y}{R} \right)$$

разложим функцию $u_2(y, t)$ вблизи точки x

$$u_2(y, t) = u_2(x, t) + \frac{\partial u_2}{\partial x} R \zeta + O(R^2/L^2) \quad (16)$$

и, используя (12), (13), (16), получим

$$J_2 = -p_1 u_2 \frac{\partial m_2}{\partial x} - p_1 m_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} - n f u_2 + O\left(\frac{R^2}{L^2}\right). \quad (17)$$

Подставляя (14), (15), (17) в (6) и производя тождественные преобразования, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_1 u_1) &= 0, \\ \rho_1 \frac{d_1 u_1}{dt} &= -m_1 \frac{\partial p}{\partial x} - nf, \quad \frac{d_1}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_1 \frac{\partial}{\partial x}, \\ \frac{d_1 \mathcal{E}_1}{dt} + p_1 \frac{d_1}{dt} \left(\frac{1}{\rho_{11}} \right) &= nf(u_1 - u_2) - Q_M - nq. \end{aligned} \quad (18)$$

Полученная система уравнений с точностью до членов, пропорциональных $O(R^2/L^2)$, совпадает с уравнениями для газа в [1]. Рассмотрим систему уравнений для частиц (8) в пределе $R/L \ll 1$, тогда с точностью до членов порядка $O(R^2/L^2, l/d)$ получим

$$F_1 = -\frac{\partial p_2}{\partial x}, \quad F_2 = nf - m_2 \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (19)$$

$$Q = n f u_{x2} - \left(u_2 \frac{\partial p_2}{\partial x} + p_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) - m_2 u_2 \frac{\partial p}{\partial x} + Q_M - Q_D,$$

где $p_2 = \rho_2 c^2 / \eta$ — давление в газе частиц [9]. Отсюда с указанной выше точностью из (8) найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_2 u_2) &= 0, \quad \rho_2 = \rho_{22} m_2, \quad m_2 = \frac{4}{3} \pi R^3 n, \\ \rho_2 \frac{d_2 u_2}{dt} &= -m_2 \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial p_2}{\partial x} + n f, \\ \frac{d_2 \mathcal{E}_2}{dt} + p_2 \frac{d_2}{dt} \left(\frac{1}{\rho_{22}} \right) &= Q_M - Q_D, \quad \rho_2 \frac{d_2 e_2}{dt} = n q_{12} + Q_D. \end{aligned} \quad (20)$$

Система уравнений (18), (20) совпадает с системой уравнений [1], если в (20) пренебречь теплообменом, диссипацией энергии хаотического движения частиц при столкновениях и работой силы Магнуса.

Используя уравнения (6), (7), получим соотношения на КР. Пусть существует система отсчета, движущаяся со скоростью D , в которой движение газа и частиц стационарно. В этом случае в (6) — (8) необходимо положить $\frac{\partial f'}{\partial t} = 0$, где $f' = (\rho_1, \rho_2, \dots)$, а скорости и координаты $u'_1 = u_1 - D$, $u'_2 = u_2 - D$, $x' = x - Dt$. Не ограничивая общности, опускаем штрихи и перепишем (6) в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (\rho_1 u_1) &= 0, \\ \frac{d}{dx} (\rho_1 u_1^2 + \bar{p} m_1) &= 2\pi R \int_{x-R}^{x+R} dy p^\sigma n \left(\frac{x-y}{R} \right), \\ \frac{d}{dx} \left(\rho_1 u_1 \left(\bar{H}_1 + \frac{u_1^2}{2} \right) \right) &= 2\pi R \int_{x-R}^{x+R} dy p^\sigma u_2 n \left(\frac{x-y}{R} \right) - Q_M + Q_D. \end{aligned}$$

Интегрируя полученную систему, имеем

$$\begin{aligned} \rho_1 u_1|_{+L} &= \rho_1 u_1|_{-L}, \\ (\rho_1 u_1^2 + \bar{p} m_1)|_{+L} - (\rho_1 u_1^2 + \bar{p} m_1)|_{-L} &= 2\pi R \int_{-L}^{+L} dx \int_{x-R}^{x+R} dy p^\sigma n \left(\frac{x-y}{R} \right), \\ \left(\rho_1 u_1 \left(\bar{H}_1 + \frac{u_1^2}{2} \right) \right) \Big|_{+L} - \left(\rho_1 u_1 \left(\bar{H}_1 + \frac{u_1^2}{2} \right) \right) \Big|_{-L} &= \\ &= 2\pi R \int_{-L}^{+L} dx \int_{x-R}^{x+R} dy p^\sigma u_2 n \left(\frac{x-y}{R} \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Аналогично рассмотрим в системе разрыва стационарные уравнения для фазы частиц в виде

$$\frac{d}{dx} (\rho_2 u_2) = 0,$$

$$\frac{d}{dx}(\rho_2 u_2^2) = K^\sigma(x-d) - K^\sigma(x+d) - \frac{\pi d^2}{2} n \int_{-1}^1 p^\sigma(x+zR) z dz, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\rho_2 u_2 \left(\mathcal{E}_2 + \frac{u_2^2}{2} \right) \right) &= K^\sigma(x-d) u_2(x-d) - K^\sigma(x+d) u_2(x+d) - \\ &- \frac{\pi d^2}{2} n u_2 \int_{-1}^1 p^\sigma(x+zR) z dz + Q_M - Q_D. \end{aligned}$$

Проинтегрировав эти уравнения по x и учитывая (21), получим соотношения на комбинированном разрыве

$$\begin{aligned} [\rho_1 u_1] &= 0, \quad [\rho_2 u_2] = 0, \\ [\rho_1 u_1^2 + \bar{p} m_1] &= F^\sigma, \quad [\rho_2 u_2^2 + p_2 + \bar{p} m_2] = -F^\sigma, \\ j_1 \left[\bar{H}_1 + \frac{u_1^2}{2} \right] &= Q^\sigma, \quad j_2 \left[\mathcal{E}_2 + \frac{u_2^2}{2} + \frac{(p_2 + \bar{p} m_2)}{\rho_2} \right] = -Q^\sigma, \end{aligned} \quad (23)$$

$$F^\sigma = 2\pi R \int_{-h/2}^{h/2} dx \int_{x-R}^{x+R} dy p^\sigma n \left(\frac{x-y}{R} \right),$$

$$\text{где } Q^\sigma = 2\pi R \int_{-h/2}^{h/2} dx \left\{ \int_{x-R}^{x+R} dy p^\sigma u_2 n \left(\frac{x-y}{R} \right) - Q_M + Q_D \right\},$$

$$j_1 = \rho_1 u_1, \quad j_2 = \rho_2 u_2, \quad [A] = A(h/2) - A(-h/2),$$

$h = |m_2(+\infty) - m_2(-\infty)| \left| \frac{\partial m_2}{\partial x} \right|_{\max}$ — толщина переходного слоя (по Прандтлю). Складывая соответствующие уравнения первой и второй фаз в (23), найдем

$$\begin{aligned} [\rho_1 u_1 + \rho_2 u_2] &= 0, \\ [\rho_1 u_1^2 + \rho_2 u_2^2 + \bar{p} + p_2] &= 0, \\ \left[j_1 \left(\bar{H}_1 + \frac{u_1^2}{2} \right) + j_2 \left(H_2 + \frac{u_2^2}{2} + \frac{\bar{p} m_2}{\rho_2} \right) \right] &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Соотношения (24) выражают сохранение полных потоков массы импульса и энергии двухфазной смеси. Соотношения (23), (24) выписаны в системе разрыва, поэтому $u_i = u_{li} - D$, где u_{li} — скорость i -й фазы в лабораторной системе.

Для комбинированного разрыва $u_1 \neq 0$, а скорость частиц может иметь значения: 1) $u_2 \neq 0$; 2) $u_2 = 0$. Первый случай соответствует стационарной ударной волне, бегущей по псевдогазу частиц, при этом соотношения на разрыве имеют вид (23). Этот тип комбинированного разрыва рассматривается в работе [14] для $[m_2]/m_2 \ll 1$. Бегущая по псевдогазу частиц ударная волна, когда газ отсутствует, $\rho_1 = 0$, рассматривалась в [15].

Рассмотрим второй случай, когда $u_2 = 0$. Полагая в уравнениях (23) $u_2 = 0$, получим

$$[\rho_1 u_1] = 0, \quad [\rho_1 u_1^2 + \bar{p} m_1] = F^\sigma, \quad \left[\bar{H}_1 + \frac{u_1^2}{2} \right] = 0, \quad (25)$$

$$[p_2 + p m_2] = -F^\sigma, \quad Q_M = Q_D.$$

Четвертое уравнение в (25) однозначно связывает скачок давления в газе частиц $[p_2]$ со скачком $[m_2]$, который является произвольным. Если скачок $[p_2]$ не удовлетворяет этой формуле, то комбинированный разрыв будет нестационарным.

Рассмотрим случай, когда хаотическое движение в газе частиц отсутствует $p_2 = 0$, а $m_2 < m_2^*$, где m_2^* — объемная концентрация частиц при плотной упаковке частиц. Докажем, что в этом случае не существует стационарного контактного по газу частиц комбинированного разрыва. Полагая в (23) $c = 0$, получим

$$[\rho_1 u_1] = 0, \quad [\rho_1 u_1^2 + \bar{p} m_1] = F^\sigma,$$

$$\left[H_1 + \frac{u_1^2}{2} \right] = 0, \quad [p m_2] = -F^\sigma, \quad (26)$$

$$F^\sigma = 2\pi R \int_{-h/2}^{h/2} dx \int_{x-R}^{x+R} dy p^\sigma n\left(\frac{x-y}{R}\right).$$

Изменяя порядок интегрирования в пятом уравнении (26), перепишем его в виде

$$F^\sigma = \frac{3}{2} \left(\frac{m_2^-}{R} \right) \int_{-h/2}^{h/2} dyn(y) \int_{-1}^1 p^\sigma(y + zR) z dz - [m_2 p]. \quad (27)$$

Подставляя уравнение (27) в пятое уравнение (26) и учитывая четвертое, найдем

$$\int_{-h/2}^{h/2} dyn \int_{-1}^1 p^\sigma(y + zR) z dz = 0. \quad (28)$$

Так как $n(y)$ — произвольная функция, удовлетворяющая лишь заданным условиям на $\pm h/2$, получим, что для выполнения равенства (28) необходимо выполнение условия

$$\int_{-1}^1 p^\sigma(y + zR) z dz = 0. \quad (29)$$

Условие (29) показывает, что стационарное течение смеси газ — частицы без учета столкновений между частицами возможно лишь при условии, что сила, действующая со стороны газа на частицу, равна нулю. Уравнение (29) может быть получено из уравнений движения газа частиц (6) — (8), если в них положить $\frac{\partial f'}{\partial t} = 0$, $u_2 = 0$, $p_2 = 0$. Очевидно, что для неоднородных течений,

которые реализуются на комбинированном разрыве, условие (29) не может быть выполнено. Для доказательства рассмотрим различные условия замыкания $p^\sigma(p, u_1 - u_2)$, которые могут реализоваться на комбинированном разрыве. Так как расчет обтекания частицы с учетом влияния через поле газа соседних частиц представляет сложную задачу, воспользуемся аналогией между течением с комбинированным разрывом и более изученным течением газа через пористую перегородку [2].

Будем считать, что дозвуковое втекание в область с большим m_2 происходит адиабатически, без отрыва пограничного слоя (далее — погранслоя), т. е. $[s^*] = 0$, где s^* — энтропия газа. В этом случае условие замыкания имеет вид

$$p^\sigma(t, x) = \tilde{p}(t, x) + \Delta p^\sigma, \quad 2 \int_{-1}^1 \Delta p^\sigma z dz = C'_d \frac{\rho_{11} u_1^2}{2}, \quad (30)$$

$$\tilde{p} = p = A_s \rho_{11}^\gamma, \quad A_s = \text{const}, \quad C'_d \leq C_d.$$

При определении параметров слева и справа от КР можно воспользоваться первым и третьим уравнениями из (26) и зависимостью $p = A_s \rho_{11}^\gamma$, а второе уравнение в (26) использовать для нахождения F^σ . Отметим, что энтропия сохраняется приближенно вследствие наличия теплообмена и вязкости. Поскольку увеличение m_2 приводит к сжатию трубки тока газа и течение адиабатическое, имеем [7] $p(h/2) > p(-h/2)$, следовательно, существуют точки x ($-h/2 < x < h/2$) такие, что в разложении $p(x + zR)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x содержатся нечетные степени (zR) . Подставляя ряд Тейлора функции $p(x + zR)$ в интеграл (29), найдем, что в этих точках x он отличен от нуля, что противоречит условию (29), т. е. система (26) несовместна.

В случае дозвукового вытекания из области с большим m_2 в область с меньшим m_2 , т. е. $M_{12} < 1$, $[m_2] < 0$, вследствие увеличения m_2 происходит рост p , что приводит к отрыву погранслоя на частице и образованию вихревых зон (аналог схемы Борда). В этом случае имеем

$$p^\sigma = \tilde{p} + \Delta p^\sigma,$$

$$\tilde{p} = p_{x_{p-h/2}}, \quad 2 \int_{-1}^1 \Delta p^\sigma (y + zR) z dz = C_d \frac{\rho_{11} u_1^2}{2}, \quad (31)$$

где $C_d \simeq 0.5$.

Есть в минимальном сечении достигается значение $M_{12} = 1$, то согласно [4] при вытекании из области с большим m_2 могут реализоваться два режима — с запертыми отрывными зонами и незапертыми. Существование первого режима связано с ростом $C_d(M_{12})$ (примерно в 2 раза) в связи с переходом через $M_{12} = 1$. Это приводит к увеличению $f \sim C_d(M_{12})$, торможению потока, который в некотором сечении становится дозвуковым. При дальнейшем увеличении давления в минимальном сечении торможе-

ние потока за счет f уже не может скомпенсировать его ускорение вследствие перепада давлений, и поток становится сверхзвуковым. В обоих случаях замыкание имеет вид

$$p^\sigma = \tilde{p}(t, x) + \Delta p^\sigma,$$

$$2 \int_{-1}^1 \Delta p^\sigma (y + zR) z dz = C_d (M_{12}, \text{Re}) \frac{\rho_{11} u_{12}^2}{2}, \quad (32)$$

$$C_d (M_{12}, \text{Re}) = \left(1 + e^{-0.427/M_{12}^{4.63}} \right) \left(0.25 + \frac{24}{\text{Re}} + \frac{4}{\sqrt{\text{Re}}} \right),$$

где $\tilde{p}(t, x) = p|_{x_p+h/2}$ для незапертых режимов $M_{12}|_{x_p-h/2} = 1$, $M_{12}|_{x_p+h/2} > 1$, $u_1 > 0$, в случае запертого режима $\tilde{p} = p$, $M_{12}|_{x_p-h/2} = 1$, $M_{12}|_{x_p+h/2} < 1$, функция $p(t, x)$ определяется из решения задачи.

Для оценки нестационарных эффектов на КР вычислим величину дополнительной силы, действующей на частицы, находящиеся на КР. Считая, что распределение концентрации частиц в системе разрыва задано в виде ступеньки

$$n(x) = [n] \theta'(x), \quad \theta'(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$

$$[n] = n^- - n^+, \quad n^- = n(x+0), \quad n^+ = n(x-0),$$

найдем соответствующую зависимость $m_1(x)$ (6)

$$m_1(x) = 1 - \frac{m_2^-}{2} - \frac{3}{4} m_2^- \left(\frac{x}{R} - \frac{1}{3} \left(\frac{x}{R} \right)^3 \right).$$

Рассмотрим дозвуковое втекание в область повышенной концентрации частиц. В этом случае из (26), (30) имеем

$$[u_1 m_1] = 0, \quad \left[p + \frac{\rho_{11} u_{12}^2}{2} \right] = 0, \quad \rho_{11} \simeq \text{const}, \quad M_{12} < 1.$$

Разрешая эти соотношения относительно p и используя линейную интерполяцию для $m_1(x) = 1,5(m_1^+ + m_1^-) + 0,5(m_1^+ - m_1^-) \times \frac{x}{R}$, получим

$$\Delta p(x) = \frac{\rho_{11} u_{12}^2}{2} \cdot \frac{[m_1]}{m_1} \cdot \frac{x}{R}, \quad -R \leq x \leq R, \quad \Delta p = p - p(x=0).$$

Величина дополнительной поверхностной силы может быть найдена из второго уравнения (26) либо из уравнений (7), (11). Подставляя $\Delta p(x)$ в (11) с учетом (30), $F_1 = 0$, найдем

$$F^\sigma = n \left(\frac{4}{3} \pi R^2 \frac{[m_1]}{m_1} \frac{\rho_{11} u_{12}^2}{2} \Big|_\sigma + \pi R^2 C_d' \frac{\rho_{11} u_{12}^2}{2} \Big|_\sigma \right)$$

— для частиц, находящихся на поверхности КР ($x = 0$),

$$F^- = n\pi R C_d \frac{\rho_{11} u_{12}^2}{2} \Big|_-$$

— для внутренних частиц ($x \geq d$). Используя соотношения $[p] = -\rho_{11} [u_{12}^2/2]$, $\left| \frac{C_d - C_d'}{C_d} \right| \leq \left| \frac{\Delta m_1}{m_1} \right| \simeq \frac{[m_2]}{2m_1}$ и уравнение (30) с точностью до членов $O([m_1]^2)$, получим

$$\rho_2 \frac{d}{dt} (u_2^\sigma - u_2^-) = n^- \pi R^2 \left(\frac{4}{3} - \frac{3}{2} C_d \right) [m_2] \rho_{11} u_{12}^2 / (2m_1), \quad (33)$$

где $C_d \simeq 0.5$, $\rho_2 = \frac{4}{3} \pi R^3 n^-$. В правой части (33) стоит дополнительная поверхностная сила $n^- \cdot f_l^\sigma$, где $f_l^\sigma > 0$. Проводя аналогичные вычисления для дозвукового (схема Борда) и сверхзвукового вытекания из области с большей объемной концентрацией, получим

$$f_R^\sigma = \begin{cases} \left(\frac{1}{M_{12}^2 - 1} + C_d^\sigma - C_d \right) \pi R^2 \rho_{11} [m_1] u_{12}^2 / 2, \\ M_{12} > 1, [m_1] > 0, C_d^\sigma \geq C_d, f_R^\sigma > 0, \\ (C_d^\sigma - C_d) \pi R^2 \rho_{11} u_{12}^2 / 2, C_d^\sigma \simeq C_d, \\ M_{12} < 1, f_R^\sigma \simeq 0. \end{cases} \quad (34)$$

Из уравнения (33) следует, что при дозвуковом втекании в область больших m_2 частицы, находящиеся на КР, догоняют внутренние частицы ($f_l^\sigma > 0$). Это приводит к увеличению плотности и формированию пелены, на которой реализуется плотная упаковка частиц. При сверхзвуковом вытекании из области больших m_2 $f_R^\sigma > 0$, поэтому частицы, находящиеся на КР, «убегают» от внутренних частиц, и происходит распыление (переходного слоя) до тех пор, пока m_2 не уменьшится до значений $m_2 \simeq 10^{-2}$. При дозвуковом вытекании $[m_1] > 0$, $M_{12} < 1$, $f_R^\sigma \simeq 0$, КР остается стационарным. Если частицы обладают хаотическим движением, на формирование пелены существенную роль может оказать давление в псевдогазе частиц p_2 . Согласно [14] при $m_2 \leq m_2^*$ и $Q_M = Q_D$ имеем формулу для давления в псевдогазе частиц

$$p_2 = \kappa' \rho_{11} u_{12}^2 \left(\frac{m_2^* - m_2}{m_2^*} \right), \quad \kappa' = 3 (14)^2 \frac{\rho_{11}}{\rho_{22}} m_2^*,$$

с учетом которого уравнение движения (33) переписется в виде

$$\rho_2 \frac{d}{dt} (u_2^\sigma - u_2) = \frac{3}{8} \rho_{11} \frac{[m_2]^2}{m_1} \cdot \frac{u_{12}^2}{d} - \kappa' \left(1 - \frac{[m_2]}{m_2^*} \right) \rho_{11} u_{12}^2 / d,$$

где $[m_2] \leq m_2^*$, $[m_2] > 0$. Отсюда следует, что при $\frac{[m_2]}{m_2^*} > 1 - \frac{3}{8\kappa'} \left(\frac{m_2^*}{m_1^*} \right)^2 m_1^*$ давлением p_2 можно пренебречь, и на пелене реализуется плотная упаковка ($f_l^\sigma > 0$), а для обратного неравенства КР размазывается ($f_l^\sigma < 0$). В случае $[m_2] < 0$ давление p_2 ускоряет размазывание КР ($f_R^\sigma > 0$). Как было отмечено (25), в принципе существует стационарный контактный КР с $p_2 \neq 0$. Покажем неустойчивость этого типа КР. Полагая в уравнении движения $\frac{d}{dt}(u_2^\sigma - u_2^-) = 0$, получим параметры стационарного КР с $p_2 \neq 0$,

$$\frac{[m_2]_e}{m_2^*} = 1 - \frac{3}{8\kappa'} \left(\frac{m_2^*}{m_1^*} \right)^2 m_1^*.$$

Отметим, что значение $[m_2]_e$ может быть получено из системы (25). Полагая в уравнении движения

$$[m_2] = [m_2]_e + \delta m_2^0, \quad u_2^\sigma - u_2^- = \delta u_2^0, \\ \delta u_2^0 = \text{const}, \quad \delta m_2^0 = \text{const},$$

что соответствует длинноволновому приближению $\lambda \gg d$, и, используя уравнение неразрывности для объема, ограниченного координатами $x = x_p$, $x = x_p + d$ (x_p — координата разрыва) $\frac{dm_2}{dt} d = m_2 (u_2^\sigma - u_2^-)$, найдем уравнение для возмущений

$$\frac{d^2 \delta m_2}{dt^2} = \left(\frac{3}{4} [m_2]_e + \frac{\kappa'}{m_2^*} \right) \frac{\rho_{11} u_{12}^2}{\rho_{21} d} \delta m_2.$$

Решение этого уравнения $\delta m_2 = 0.5 \left(\delta m_2^0 + m_2 \frac{t + \delta u_2^0}{d} \right) e^{t/\tau^+}$ определяет закон нарастания возмущений с характерным временем

$$\tau^+ = \frac{d}{u_{12}} \sqrt{\frac{\rho_{22}}{\rho_{11}} \left(\frac{3}{4} [m_2]_e + \frac{\kappa'}{m_2^*} \right)}.$$

Как следует из (33), поверхностная сила f^σ существенна при наличии скоростной неравновесности $u_{12} \neq 0$.

Определим характерные значения параметров газа и частиц, когда будут иметь место отмеченные нестационарные эффекты. Используя уравнение движения частицы на КР (33)

$$\frac{d^2 \delta x}{dt^2} \simeq \frac{\rho_{11}}{\rho_{22}} \frac{u_{12}^2}{2d} [m_2], \quad \delta x = x^\sigma - x^-,$$

и уравнение неразрывности в лагранжевой форме

$$m_2 \delta x = \text{const}, \tag{35}$$

найдем время t^* достижения плотной упаковки частиц $m_2 = m_2^*$. Полагая в (35) $m_2 = m_2^*$, $\delta x \simeq d$, $\delta x|_{t=0} = \Delta x + d$, $m_2|_{t=0} = m_2$ с учетом (33), получим

$$t^* = \sqrt{\frac{2\rho_{22}}{\rho_{11}} \frac{(m_2^* - m_2)}{m_2^2} \cdot \frac{d}{u_{12}}}. \quad (36)$$

Рассмотрим три характерных случая.

1. $\rho_{11}/\rho_{22} \ll 1$, $g = 0$ — объемные силы отсутствуют. В этом случае можно пренебречь смещением частиц на КР за характерное время скоростной релаксации

$$\tau \simeq \frac{d}{C_d u_{12}} \left/ \left(\frac{\rho_{11}}{\rho_{22}} + \frac{m_2}{m_1} \right) \right., \quad t^* > \tau, \quad (37)$$

где

$$\tau \simeq \frac{d}{C_d u_{12}} \frac{m_1}{m_2} \quad \text{при} \quad \frac{\rho_{11}}{\rho_{22}} \ll 1, \quad \frac{m_1}{m_2} \gtrsim 1.$$

Относительное смещение и изменение скорости частиц за время τ равны

$$\frac{\Delta D}{u_{12}} \simeq \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho_{11}}{\rho_{22}} m_2 \ll 1, \quad \frac{\Delta x}{d} \simeq \frac{1}{4} \frac{\rho_{11}}{\rho_{22}} \frac{m_1^2}{m_2} \ll 1.$$

За время $t = \tau$ происходит релаксация скорости газа к скорости частиц, прежде чем успеет произойти смещение частицы, поэтому параметры частиц можно считать фиксированными и равными своим значениям в момент $t = 0$. Для определения характера течения газа в окрестности КР определим число Струхала $Sh = L/vT$, которое при $T \simeq \tau$, $L \simeq d$, $v \simeq u_{12}$ равно

$$Sh \simeq m_2/m_1. \quad (38)$$

Отсюда следует, что в интервале $10^{-2} < m_2/m_1 < 2 \cdot 10^{-1}$ справедливо квазистационарное приближение (26), а при $m_2/m_1 > 2 \cdot 10^{-1}$ необходимо использовать нестационарные уравнения для газа (6) при фиксированных параметрах частиц.

2. $\rho_{11}/\rho_{22} \sim 1$, $g = 0$. В этом случае ($t^* \lesssim \tau$) существенны нестационарные эффекты в фазе частиц (формирование пелены и распыливание КР). Для их описания необходимо использовать нестационарные уравнения для фазы частиц (8). Выбор модели для газовой фазы определяется числом Струхала по времени $T = t^*$

$$Sh \simeq m_2 \left/ \sqrt{\frac{\rho_{22}}{\rho_{11}} (m_2^* - m_2)} \right., \quad \frac{\rho_{22}}{\rho_{11}} (m_2^* - m_2) \leq 1.$$

В случае $Sh \ll 1$ ($10^{-2} < m_2 < 10^{-1}$) можно использовать соотношения (26), а при $Sh \sim 1$ необходимо использовать нестационарные уравнения (6).

3. $g \neq 0$ — присутствуют объемные силы. В этом случае возможно существование стационарного решения с постоянной ско-

ростной неравновесностью. Для нахождения разности скоростей фаз u_{12}^0 приравняем силу тяжести силе аэродинамического сопротивления и получим

$$u_{12}^0 \simeq \sqrt{\frac{\rho_{22} g d}{\rho_{11} C_d}}, \quad C_d \simeq 1/2. \quad (39)$$

Отметим, что этот же результат может быть получен из полной системы уравнений. Подставляя (39) в (33) и используя уравнение (34), найдем добавочное ускорение, с которым будут двигаться частицы на КР:

$$a^\sigma \simeq \frac{g}{C_d} [m_2].$$

Под действием этого ускорения на КР за время $t^* = \sqrt{\frac{m_2^* - m_2}{m_2^2} \frac{d}{g}}$ сформируется пелена, движение которой описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями (приведены ниже). Газовая фаза на всем времени формирования пелены и при ее дальнейшем движении может быть описана соотношениями (26), поскольку

$$\text{Sh} \simeq m_2 \sqrt{\frac{\rho_{22}}{\rho_{11}} (m_2^* - m_2)} \ll 1, \quad \rho_{11}/\rho_{22} \ll 1.$$

Отметим, что случай 1 реализуется в задаче о взаимодействии ударной волны в газе с облаком частиц или с засыпкой, 2 — в задачах физики взрыва, 3 — в псевдоожигенном слое.

Во многих задачах не существенна информация о структуре КР, поэтому можно осреднить уравнения (8) по толщине переходного слоя. В результате получается система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} + [\rho_2 u_2'] &= 0, \quad u_2' = u_2 - D, \quad D = \frac{d \langle u_2 \rangle}{dt}, \\ M \frac{dD}{dt} + [\rho_2 (u_2')^2 + p_2 + \bar{p} m_2] &= -F^\sigma, \\ \frac{d}{dt} M \langle E_2 \rangle + \left[\rho_2 u_2' \left(H_2 + \frac{(u_2')^2}{2} \right) \right] &= -Q_2^\sigma(u_2'), \\ E_2 = e_2 + \mathcal{E}_2, \quad H_2 = E_2 + (p_2 + \bar{p} m_2)/\rho_2, \\ Q_2^\sigma = Q^\sigma + \int_{-h/2}^{h/2} nq dx, \quad Q^\sigma = Q^\sigma(u_2 - D). \end{aligned}$$

Пренебрегая в этих уравнениях энергией хаотического движения, получим

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} + [\rho_2 u_2'] &= 0, \quad M = \rho_{22} m_2^\sigma h, \quad \frac{dx_p}{dt} = \langle u_2 \rangle, \\ M \frac{dD}{dt} + [\rho_2 (u_2')^2 + p m_2] &= -F^\sigma, \quad u_2' = u_2 - \langle u_2 \rangle. \end{aligned} \quad (40)$$

Член $M \frac{dD}{dt}$ связан с нестационарностью КР, а $[\rho_2 u_2'^2]$ — с потоком массы частиц на КР. Отношение этих членов имеет порядок

$$\rho_2 u_2'^2 \left| \frac{d}{dt} \right| M \langle u_2 \rangle \simeq \Delta x / h,$$

где Δx — смещение частицы вследствие действия поверхностной силы f^σ (33). Если смещение частиц мало, что (как отмечалось выше) наблюдается при $g = 0$, $\rho_{11}/\rho_{22} \ll 1$, система (40) упрощается и имеет вид

$$M = \text{const}, \quad M \frac{d}{dt} \langle u_2 \rangle + [p m_2] = -F^\sigma. \quad (41)$$

Уравнения (40), (41) необходимо дополнить уравнением для толщины пелены $h(t)$, формирующейся на КР. Представим массу нестационарного КР (пелены) в форме

$$M = N m = \rho_{22} m_2^\sigma h, \quad (42)$$

где N — число частиц на пелене, $m = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_{22} = \text{const}$ — масса частицы, m_2^σ — объемная концентрация частиц на пелене. На этапе формирования пелены, когда $m_2^\sigma < m_2^*$, внутренние частицы движутся со скоростью u_2^+ , а частицы, находящиеся на КР, со скоростью $\langle u_2 \rangle$, поэтому

$$\dot{h} = u_2^+ - \langle u_2 \rangle. \quad (43)$$

Дифференцируя уравнения (43) по t и используя уравнения (40) с учетом уравнений

$$[p m_2] + F^\sigma \simeq \frac{3}{2} \frac{m_2^-}{R} \int_{-h/2}^{h/2} dy n \int_{-1}^1 p^\sigma z dz \simeq -N f = -N (f^\sigma + f^+),$$

$$\frac{du_2^+}{dt} = f^+ / m,$$

получим

$$\frac{d^2 h}{dt^2} = \frac{1}{M} [\rho_2 \times (u_2 - \langle u_2 \rangle)^2] - f^\sigma / m. \quad (44)$$

Уравнения (42), (44) справедливы до момента, когда $m_2^\sigma = m_2^*$, где m_2^* — объемная концентрация при плотной упаковке. После этого момента на пелене возникает плотная упаковка частиц, поэтому вместо (42), (44) имеем

$$M = \rho_{22} m_2^* h, \quad m_2^* = \text{const}. \quad (45)$$

Система уравнений (40) — (45) замыкается соотношениями на КР для газа (26). При этом имеют место КР на входе в пелену $[m_2]_1 = m_2^\sigma - m_2^-$ и КР на выходе из пелены $[m_2]_2 = m_2^+ - m_2^\sigma$, $m_2^+ \neq m_2^-$. Начальные условия для системы (40) — (45)

запишутся в виде

$$M|_{t=0} = \int_{-h^0/2}^{h^0/2} \rho_2^0 dx, \quad \langle u_2 \rangle|_{t=0} = \frac{1}{M} \int_{-h^0/2}^{h^0/2} \rho_2^0 u_2^0 dx,$$

$$h|_{t=0} = h^0, \quad \left. \frac{dh}{dt} \right|_{t=0} = 0, \quad x_p|_{t=0} = x_p^0.$$

§ 2. ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВУХЖИДКОСТНОЙ МОДЕЛИ К МАЛЫМ ВОЗМУЩЕНИЯМ

В [1, 12] отмечалось, что двухжидкостная модель без учета давления в псевдогазе частиц относится к составному типу. Характеристики системы уравнений двухжидкостной модели (1.3.5) в одномерном случае имеют вид [1, 12, 13]

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_i, \quad \lambda_{1,2} = u_1 \pm c_0 \pm \frac{c_0}{2} \frac{\chi}{1 - M_{12}^2}, \quad (1)$$

$$\lambda_{3,4} = u_2 \pm ic_0 M_{12} \sqrt{\chi} / \sqrt{1 - M_{12}^2},$$

$$\chi = \frac{m_2}{m_1} \frac{\rho_{11}}{\rho_{22}}, \quad M_{12} = (u_1 - u_2)/c_0.$$

В случае дозвукового обтекания частиц ($M_{12} < 1$) характеристики $\lambda_{3,4}$ являются комплексными. Согласно Адамару [16], это приводит к росту возмущений и некорректности задачи Коши. Впервые, применительно к системе (1.1.4), это было показано в работах [17, 18]. Поскольку результаты, полученные в [17], подробно описаны в монографии [19], остановимся только на принципиальных моментах, относящихся к данной проблеме.

Пусть на решение системы (1.1.4), зависящей от x [17] или от t [18], накладывается в момент $t = 0$ возмущение

$$\varphi_i'|_{t=0} = \delta\varphi_i e^{ikhx}, \quad (2)$$

$$\varphi' = (\rho_1, u_1, T_1, \rho_2, u_2, T_2).$$

Поскольку малые возмущения распространяются вдоль характеристик, решение для возмущений при $t > 0$ будет определяться по формуле

$$\varphi_i'(x, t) = \sum_j a_{ij} \delta\varphi_j e^{ikh(x - \lambda_j t)}.$$

Используя уравнения характеристик (1), получим, что малые возмущения растут по закону

$$\varphi_i' \sim \delta\varphi_i e^{\gamma kt}, \quad \gamma = c_0 M_{12} \frac{\sqrt{\chi}}{\sqrt{1 - M_{12}^2}}. \quad (3)$$

Физическая причина экспоненциальной неустойчивости состоит в следующем. Предположим, что в некоторой малой обла-

сти повысилась концентрация частиц. Тогда в этой области уменьшится проходное сечение, что приведет к увеличению скорости газа и уменьшению его давления. Понижение давления создаст дополнительную силу, пропорциональную градиенту давления и направленную к центру данной области. Под действием этой силы частицы сместятся к центру области, в результате чего произойдет дальнейшее увеличение концентрации частиц в этой области. На первый взгляд кажется, что в модели Клигеля — Никерсона, где сила, действующая на частицу, определяется только скоростным напором ($f_{12} \sim C_d \rho_{11} (u_1 - u_2)^2 / (2\rho_{22}d)$), эффект неустойчивости будет отсутствовать. Однако это не так. В работе [18] показано, что в модели Клигеля — Никерсона малые возмущения нарастают, хотя и по более медленному линейному закону

$$\rho_2' \sim \rho_2 \delta u_2 k t \cos k \zeta, \quad \zeta \approx x - u_2^0 t, \quad k \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Все остальные параметры возмущенного течения (2) остаются ограниченными. С математической точки зрения эта неустойчивость обусловлена негиперболичностью модели Клигеля — Никерсона (характеристики вещественны, однако две из них совпадают). С физической точки зрения неограниченный рост плотности связан с пересечением траекторий частиц. Это следует из уравнения неразрывности для фазы частиц, записанного в лагранжевых координатах

$$\rho_2 \Delta x = \Delta m, \quad \frac{dx}{dt} = u_2, \quad \Delta m = \text{const},$$

где Δm — масса частиц, заключенная между координатами x и $x + \Delta x$. В случае пересечения траекторий частиц $\Delta x \rightarrow 0$ и из уравнения неразрывности получим $\rho_2 \rightarrow \infty$.

Для преодоления указанных трудностей в [17] предлагается вводить давление в псевдогаз частиц, которое будет препятствовать пересечению траекторий. Другой подход развит в работе [18], где в точке пересечения вводится сгусток частиц, который представляет собой поверхность разрыва типа пелены. Пелена имеет конечную поверхностную плотность R_s и описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями [18]

$$\begin{aligned} \frac{dD_n}{dt} &= F_n / R_s, \quad \frac{d\vec{D}_\tau}{dt} = \vec{F}_\tau / R_s, \quad \frac{d\mathcal{E}_s}{dt} = \dot{Q}, \\ \frac{d\vec{x}_p}{dt} &= \vec{D}, \quad R_s = \text{const}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\vec{D} = (D_n, \vec{D}_\tau)$ — скорость пелены, $\vec{F} = (F_n, \vec{F}_\tau)$, $\dot{Q}$ — сила взаимодействия и скорость теплообмена между газом и пеленой, индекс n соответствует нормальной, а τ — касательной компоненте к пелене. В уравнениях (5) не рассматривается выпадение частиц на пелену. Уравнения пелены с учетом этого эффекта совпадают с уравнениями (1.40). Для газа пелена является по-

верхностью разрыва, на которой справедливы соотношения [3, 18]

$$\begin{aligned} [\rho_1(u_1^n - D_n)] &= 0, \quad [\rho_1(u_1^n - D_n)^2 + p] = -F_n, \\ [\rho_1(u_1^n - D_n)\vec{u}_1^\tau] &= -\vec{F}_\tau, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\left[\rho_1(u_1^n - D_n) \left(H_1 + \frac{(u_1^n - D_n)^2}{2} + \frac{(u_1^\tau)^2}{2} \right) \right] = -R_s \dot{Q} - \vec{F}_\tau \vec{D}_\tau.$$

Поскольку пелена описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями (5), задача Коши становится корректной.

Следует сказать, что возникновение пелены, так же как и включение давления в псевдогаз частиц, связано с учетом столкновений между частицами. Влияние столкновений характеризуется числом Кнудсена Kn . Если $Kn \ll 1$, то роль столкновений существенна и отмеченные выше эффекты будут иметь место. В обратном случае, $Kn \gg 1$, континуальное представление справедливо не всегда и для расчета псевдогаза частиц необходимо использовать бесстолкновительное кинетическое уравнение [20]. По-видимому, первая модель для расчета течений с пересечением траекторий частиц была предложена Кроу [21] задолго до того, как стали ясны трудности в двухжидкостной модели. Модель Кроу представляет собой по сути численный алгоритм решения бесстолкновительного кинетического уравнения методом характеристик. Причем кинетическое уравнение нигде не выписывается и фактически рассматривается частный случай, когда функция распределения по скоростям в данной точке есть комбинация дельта-функций.

§ 3. КОНТИНУАЛЬНО-ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ СМЕСИ ГАЗ — ТВЕРДЫЕ ЧАСТИЦЫ ПРИ МАЛОЙ ОБЪЕМНОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ ЧАСТИЦ

Уравнения, описывающие поведение ансамбля частиц в бесстолкновительном пределе $Kn \gg 1$, выпишем по аналогии с уравнениями разреженного газа [22]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \vec{u}_2 \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vec{r}} + \frac{\partial}{\partial \vec{u}_2} (\vec{F} \mathcal{F}) + \frac{\partial}{\partial T_2} (q \mathcal{F}) &= 0, \\ m_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F} d\vec{u}_2 dT_2, \quad \langle \vec{u}_2 \rangle = \frac{1}{m_2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \vec{u}_2 \mathcal{F} d\vec{u}_2 dT_2, \\ \langle T_2 \rangle &= \frac{1}{m_2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} T_2 \mathcal{F} d\vec{u}_2 dT_2, \quad m_2 = v_0 n, \quad v_0 = \frac{\pi d^3}{6}, \\ \vec{F} &= \vec{g} + (\vec{u}_1 - \vec{u}_2)/\tau - \frac{\vec{\nabla} p}{\rho_{22}}, \quad q = 2\pi\lambda d/v_0 (T_1 - T_2), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\mathcal{F}(t, \vec{r}, \vec{u}_2, T_2)$ — одночастичная функция распределения в конфигурационном пространстве $\vec{u}_2, t, T_2, \vec{r}$; τ — время релаксации. Система уравнений (1) замыкается уравнениями для газовой фазы, которые аналогичны соответствующим уравнениям двухжидкостной модели

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \vec{r}} (\rho_1 \vec{u}_1) &= 0, \quad \rho_1 = \rho_{11} m_1, \quad m_1 + m_2 = 1, \\ \rho_1 \frac{d_1 \vec{u}_1}{dt} &= \rho_1 \vec{g} - m_1 \vec{\nabla} p - \rho_2 \left(\frac{\vec{u}_1 - \langle \vec{u}_2 \rangle}{\tau} \right), \quad \frac{d_1}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}_1 \frac{\partial}{\partial \vec{r}}, \\ \frac{d_1 e_1}{dt} + p \frac{d_1}{dt} \left(\frac{1}{\rho_{11}} \right) + \dot{Q} &= 0, \quad e_1 = c_v T_1, \\ \dot{Q} &= \frac{\rho_2}{\rho_1} \left(\langle q \rangle - \frac{(\vec{u}_1 - \langle \vec{u}_2 \rangle)^2}{\tau} \right), \quad p = p(\rho_{11}, T_1). \end{aligned} \quad (2)$$

Найдем условия применимости уравнений (1).

Полагая сечение столкновения между частицами равным πd^2 , оценим число Кнудсена для псевдогаза частиц

$$\text{Kn} = \frac{d}{6m_2 L}, \quad (3)$$

где L — характерный размер течения. В случае гладких течений положим $L \simeq l_p$, $l_p \simeq u_{12} \tau$, где l_p — длина релаксации, τ определяется по формуле (1.37). Подставляя эти соотношения в (3), получим искомое условие

$$\frac{C_d}{6} \left(1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \gg 1, \quad (4)$$

где C_d определяется по формуле (1.32).

Рассмотрим общее решение системы (1). Для этого представим первое уравнение системы (1) в форме

$$\frac{D\mathcal{F}}{Dt} = -\mathcal{F} \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{u}_2} + \frac{\partial q}{\partial T_2} \right),$$

где $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}_2 \frac{\partial}{\partial \vec{r}} + \vec{f} \frac{\partial}{\partial \vec{u}_2} + q \frac{\partial}{\partial T_2}$. Общее решение данного уравнения имеет вид

$$\mathcal{F}(t, \vec{r}, \vec{u}_2, T_2) = \mathcal{F}^0 \exp \left(- \left(\int_0^t \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{u}_2} + \frac{\partial q}{\partial T_2} \right) dt' \right) \right), \quad (5)$$

где точки $t, \vec{r}, \vec{u}_2, T_2$ лежат на характеристике, определяемой уравнениями

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{u}_2, \quad \frac{d\vec{u}_2}{dt} = \vec{f}, \quad \frac{dT_2}{dt} = q$$

при следующих начальных условиях:

$$\vec{u}_2|_{t=0} = \vec{u}_2^*, \quad \vec{r}|_{t=0} = \vec{r}_2^*, \quad T_2|_{t=0} = T_2^*.$$

Интеграл в уравнении для $\mathcal{F}$ берется вдоль характеристики, а $\mathcal{F}$ — произвольная функция своих аргументов, удовлетворяющая условиям:

$$\mathcal{F}|_{\vec{u}_2=-\infty} = \mathcal{F}|_{\vec{u}_2=+\infty} = 0, \quad \vec{f}\mathcal{F}|_{\vec{u}_2=-\infty} = \vec{f}\mathcal{F}|_{\vec{u}_2=+\infty} = 0, \\ q\mathcal{F}|_{T_2=0} = q\mathcal{F}|_{T_2=+\infty} = 0.$$

Лемма. В частном случае, когда в области течения траектории частиц не пересекаются и хаотическое движение у частиц в начальный момент отсутствует, решение системы (1) — (2) совпадает с решением в двухжидкостной модели.

Доказательство. Поскольку в области нет пересечений траекторий частиц, возможно описание фазы частиц в рамках механики сплошной среды. Умножая уравнение (1) соответственно на 1, $\vec{u}_2$, T_2 и интегрируя по $\vec{u}_2$ от $-\infty$ до $+\infty$, а по T_2 от 0 до $+\infty$, получим

$$\frac{\partial m_2}{\partial t} + \sum_{\mathbf{v}} \frac{\partial}{\partial x_{\mathbf{v}}} (m_2 \langle u_2 \rangle_{\mathbf{v}}) = 0, \quad \rho_{22} = \text{const},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (m_2 \langle u_2 \rangle_i) + \sum_{\mathbf{v}} \frac{\partial}{\partial x_{\mathbf{v}}} (m_2 \langle u_{2i} u_{2\mathbf{v}} \rangle) = m_2 \left(g_i - \frac{1}{\rho_{22}} \frac{\partial p}{\partial x_i} + (u_{1i} - u_{2i})/\tau \right),$$

(6)

$$\frac{\partial}{\partial t} (m_2 \langle T_2 \rangle) + \sum_{\mathbf{v}} \frac{\partial}{\partial x_{\mathbf{v}}} (m_2 \langle u_{2\mathbf{v}} T_2 \rangle) = m_2 \langle q \rangle.$$

Учитывая условие леммы, функцию распределения в момент $t = 0$ можно представить в виде

$$\mathcal{F}^0 = m_2^0(\vec{r}_2^*) \delta(\vec{u}_2^* - \vec{u}_2^0(\vec{r}_2^*)) \delta(T_2^* - T_2^0(\vec{r}_2^*)).$$

Подставляя $\mathcal{F}$ в (5) и используя определение средних, находим

$$\langle u_{2i} u_{2\mathbf{v}} \rangle = \langle u_{2i} \rangle \langle u_{2\mathbf{v}} \rangle, \quad \langle u_{2\mathbf{v}} T_2 \rangle = \langle u_{2\mathbf{v}} \rangle \langle T_2 \rangle.$$

Отсюда следует, что система уравнений (6) тождественно совпадает с уравнениями двухжидкостной модели [1, 12], а следовательно, совпадают их решения.

В данной главе будут рассматриваться одномерные нестационарные течения. Поэтому в уравнениях (1), (2) надо положить

$$u_{1y} = u_{1z} = \langle u_{2y} \rangle = \langle u_{2z} \rangle = 0,$$

а средние параметры газа и частиц считать функциями от x и t . Для линейного закона сопротивления $F = (u_1 - u_2)/\tau$ имеет место разделение переменных. Подставляя решение $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1(t, x, u_{2x}) \mathcal{F}_2(t, u_{2y}) \cdot \mathcal{F}_3(t, u_{2z})$ в первое уравнение системы (1), по-

лучим

$$\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial t} + u_{2x} \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial x} + \frac{u_1 - u_{2x}}{\tau} \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial u_{2x}} - \frac{\mathcal{F}_1}{\tau} = 0.$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial t} - \frac{u_{2y}}{\tau} \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial u_{2y}} - \frac{\mathcal{F}_2}{\tau} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial t} - \frac{u_{2z}}{\tau} \frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial u_{2z}} - \frac{\mathcal{F}_3}{\tau} = 0.$$

Отсюда видно, что первое уравнение (1) распадается на три независимых уравнения. Второе и третье описывают затухание хаотических скоростей u_{2y} , u_{2z} , а первое — все особенности течения. В случае квадратичного закона сопротивления, соответствующего $Re_{12} \gg 1$, разделение переменных, строго говоря, не имеет места. Однако для «узких» функций распределения $\varepsilon \ll 1$ можно также использовать метод разделения переменных. Полученное приближенное решение будет отличаться от точного не более чем на ε , где $\varepsilon = \sigma / (u_1 - \langle u_{2x} \rangle)^2|_{t=0}$, σ — ширина функции распределения.

Рассмотрим одномерную нестационарную задачу Коши, в которой будет иметь место при $t > 0$ пересечение траекторий частиц. Объемную концентрацию частиц m_2 будем считать настолько малой, что можно пренебречь влиянием частиц на газ. Считая $u_1 = \text{const}$, $p = \text{const}$, $\rho_{11} = \text{const}$, $g = 0$, $T_1 = T_2$, с учетом разделения переменных преобразуем систему (1) к виду

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + u_2 \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{u_1 - u_2}{\tau} \mathcal{F} \right) = 0, \quad (7)$$

$$m_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F} du_2, \quad \langle u_2 \rangle = \frac{1}{m_2} \int_{-\infty}^{+\infty} u_2 \mathcal{F} du_2.$$

Для системы уравнений (7) в области D_z ставим следующие начальные условия:

$$\mathcal{F}^0 = \frac{m_2^0}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp \left(- \frac{(u_2 - u_2^0(x))^2}{2\sigma} \right),$$

$$u_2^0(x_2) = w_s - w \operatorname{arctg} \alpha x, \quad (8)$$

$$w_s = (w_1 + w_2)/2, \quad w = (w_1 - w_2)/\pi,$$

$$w_1 > w_2 > u_1 > 0, \quad \sigma/w^2 \ll 1,$$

где $D_z (-\infty < x < +\infty, t > 0, -\infty < u_2 < +\infty)$. Здесь $u_2^0(x)$ — «размазанная» ступенька с шириной $1/\alpha$ и параметрами $u_2^0 \rightarrow w_1$ при $x_2 \rightarrow -\infty$, $u_2^0 \rightarrow w_2$ при $x_2 \rightarrow +\infty$. Как видно, характеристики уравнения (7) находятся из уравнений

$$\frac{dx}{dt} = u_2, \quad \frac{du_2}{dt} = \frac{u_1 - u_2}{\tau}. \quad (9)$$

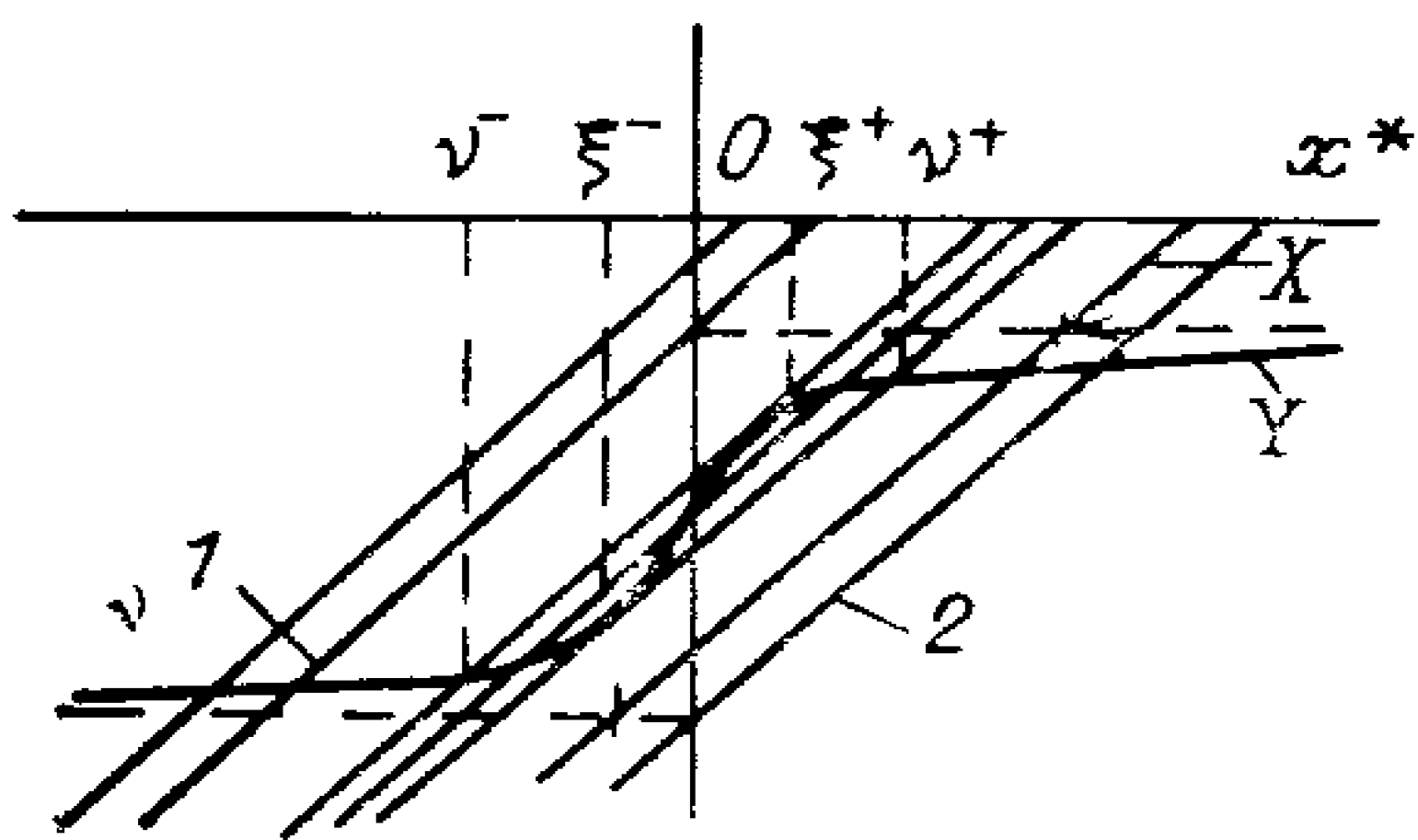


Рис. 4.3.

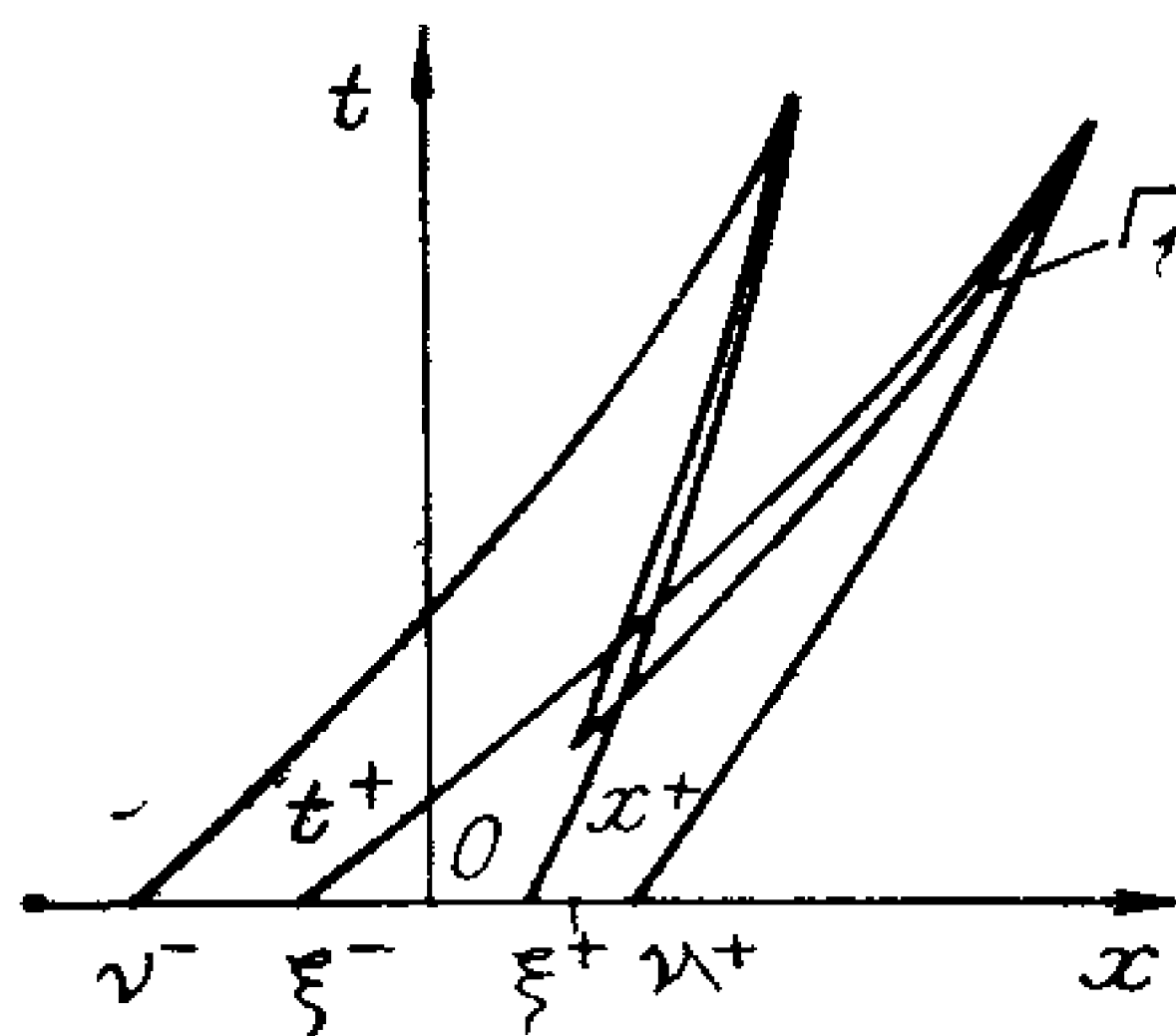


Рис. 4.4.

Вводя обозначения $u_2(t=0) = u_2^*$, $x(t=0) = x^*$ из (9), получим

$$\begin{aligned} u_2 &= u_1 + (u_2^* - u_1)e^{-t/\tau}, \\ x &= x^* + u_1 t + (u_2^* - u_1)K, \quad K = \tau(1 - e^{-t/\tau}). \end{aligned} \quad (10)$$

Подставляя (8) в (7) и делая замену переменной по формуле $du_2 = \frac{\partial u_2}{\partial u_2^*} du_2^* = e^{-t/\tau} du_2^*$, находим

$$m_2 = \frac{m_2^0}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(u_2^* - u_2^0(x^*))^2}{2\sigma}\right) du_2^*. \quad (11)$$

Для вычисления интеграла (11) воспользуемся методом перевала при фиксированных t , x . Функцию $\varphi(u_2^*, t, x) = (u_2^* - w_s + w \operatorname{arctg} \alpha x^*)^2$ раскладываем в ряд Тейлора до членов порядка $(y - u_2^*)^2$, где y определяется из системы уравнений

$$y - w_s + w \operatorname{arctg} \alpha x^* = 0, \quad x^* + u_1 t + (y - u_1)K - x = 0. \quad (12)$$

Подставляя (12) в (11), находим

$$m_2 = \sum_{i=1}^n m_2^0 \left| 1 - \frac{w\alpha K}{1 + (\alpha x^*)^2} \right|, \quad x = x^* + u_1(t - K) + u_2^0 K. \quad (13)$$

Здесь t , x фиксированы, n — число корней второго уравнения (13), которое решается графически (рис. 4.3), где введены обозначения: $Y = w \operatorname{arctg} \alpha x^* - w_s$, $X = (x^* - x + u_1(t - K))/K$. Корень определяется точкой пересечения прямой X и кривой Y , т. е. $Y = X$. Как следует из результатов, приведенных на рис. 4.3. в области, ограниченной прямыми, проходящими через точки v^- , ξ^+ и ξ^- , v^+ , число корней $n = 3$, во всей остальной области $n = 1$. Продифференцировав второе уравнение (13), получим

$$\left(\frac{\partial x}{\partial x^*} \right)_t = 1 - \alpha w K / (1 + (\alpha x^*)^2), \quad (14)$$

откуда

$$\frac{\partial x}{\partial x^*} > 0, \quad -\infty < x^* < \xi^-(t),$$

$$\frac{\partial x}{\partial x^*} < 0, \quad \xi^-(t) < x^* < \xi^+(t),$$

$$\frac{\partial x}{\partial x^*} > 0, \quad \xi^+(t) < x^* < +\infty,$$

$$\frac{\partial x}{\partial x^*} = 0, \quad x^* = \xi^+(t), \quad x^* = \xi^-(t),$$

где $\xi^\pm(t) = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\alpha w K - 1}$, $\alpha w K > 1$.

Таким образом, картина траекторий в плоскости (t, x) будет иметь вид, изображенный на рис. 4.4. Кривая Γ_1 является каустикой и определяется уравнениями

$$x = u_1(t - K) + wK \pm \left(\frac{1}{\alpha} \sqrt{w\alpha K - 1} - wK \operatorname{arctg} \sqrt{w\alpha K - 1} \right), \quad (15)$$

$$t^+ = -\tau \ln(1 - 1/(\alpha w \tau)), \quad x^+ = u_1 t^+ + (w_s - u_1)/(\alpha w).$$

На каустике выполняется условие $\partial x/\partial x^* = 0$, поэтому в силу условий (13)–(14) величина m_2 обращается в бесконечность на Γ_1 . Для определения решения на каустике проведем разложение ϕ до членов порядка $(y - u_2^*)^4$ (коэффициент перед $(y - u_2^*)^2$ на Γ_1 равен нулю) и, подставляя его в (11), получим на Γ_1

$$m_2 \approx \frac{m_2^0}{\sigma^{1/4}} \frac{\Gamma(1/4)}{\pi^{1/2} 2^{5/4}} \frac{(\alpha x^*)^2 + 1}{(\alpha^3 w K^2 x^*)^{1/2}}, \quad x^* = \xi^+(t), \quad (16)$$

где Γ — гамма-функция, а $\sigma/w^2 \ll 1$ (из условия сходимости ряда). Решение (16) справедливо на Γ_1 всюду, за исключением точки $O'(t^+, x^+)$, где $m_2 \rightarrow \infty$. По аналогии, удерживая в разложении ϕ члены порядка $(y - u_2^*)^9$, найдем решение в точке (t^+, x^+)

$$m_2 \approx \frac{m_2^0 (18)^{1/6}}{\sqrt{2\pi} \sigma^{1/3}} \frac{\Gamma(1/6)}{3} \left| (\alpha^3 w K^3)^{1/3} \right|, \quad \alpha w K = 1. \quad (17)$$

Решение данной задачи в рамках двухжидкостной модели [1] с начальным условием $u_2 = u_2^0(x)$, $m_2 = m_2^0$ вообще не может быть получено, так как внутри Γ через каждую точку проходит три траектории частиц. Если ввести дополнительно две фазы, связанные с частицами, то можно получить решение типа (13) всюду, за исключением Γ , где m_2 обращается в бесконечность.

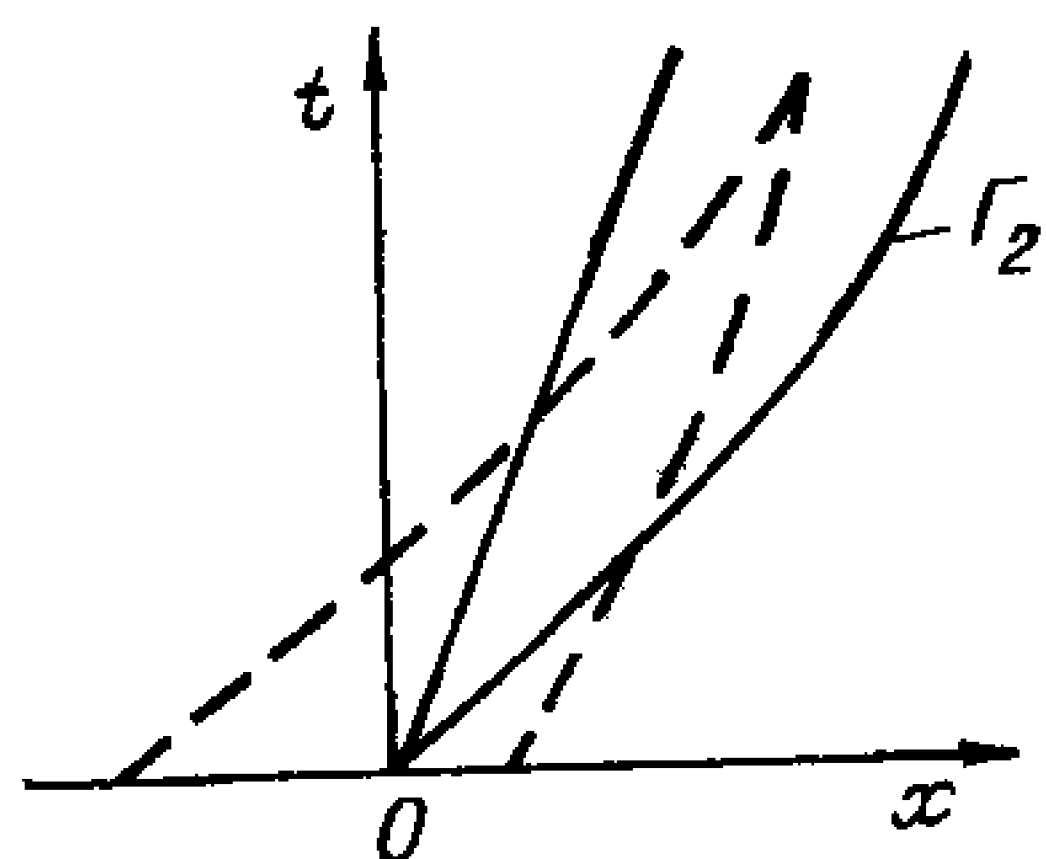


Рис. 4.5.

При моделировании ансамбля частиц сплошной средой в каждой точке определено одно значение скорости (для фиксированной фазы), поэтому $\sigma = 0$ и, как следует из (13), (16), (17), $m_2 \rightarrow \infty$ на Γ_1 . Это позволяет сделать вывод, что указанная бесконечность не устранима в рамках моделей бесстолкновительной сплошной среды. Используя неравенства $\sigma/w^2 \ll 1$, $\alpha w K \gtrsim K$ и решение

(14) — (17), легко показать, что максимум m_2 достигается на каустике, следовательно, на каустике формируется сгусток частиц. В отличие от [18] его формирование обусловлено не столкновениями между частицами, а особенностями поведения траекторий частиц. В том случае, когда ширина $\Delta x \sim 1/\alpha$ стремится к нулю (т. е. $\alpha \rightarrow \infty$) и $u_2^0(x)$ переходит в ступеньку, решение, как следует из (13), имеет вид

$$m_2 = \sum_{i=1}^m m_2^0, \quad x = x^* + u_1(t - K) + u_2^0(x^*)K, \quad (18)$$

$$u_2^0(x^*) = w_s \frac{2}{\pi} w \theta(x^*),$$

$$\theta(x^*) = \begin{cases} 0, & x^* < 0, \\ 1, & x^* > 0. \end{cases}$$

Функция $Y = -u_2^0(x^*)$ изображена на рис. 4.3 штриховой линией, что дает в области, ограниченной прямыми 1, 2, два корня (т. е. $m = 2$), а в остальной области $m = 1$. Соответствующая картина траекторий изображена на рис. 4.5, здесь положение кривых Γ_2 определяется уравнениями

$$x = u_1(t - K) + w_2K, \quad x = u_1(t - K) + w_1K.$$

В области, ограниченной Γ_2 , имеем $m_2 = 2m_2^0$, а в остальной $m_2 = m_2^0$.

§ 4. ИССЛЕДОВАНИЕ КАУСТИК В ПСЕВДОГАЗЕ ЧАСТИЦ

Рассмотрим более подробно поведение параметров псевдогаза частиц в окрестности каустики. Как отмечалось в § 3, важное влияние на параметры каустики оказывает дисперсия частиц по скоростям. Ясно, что из-за взаимодействия с газом заметное влияние будет оказывать и дисперсия частиц по размерам. Распределение частиц по размерам описывается, как правило, логарифмическим законом [23]

$$g_0(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r_0 \ln s}} \exp \left(- \left(\frac{\ln r - \ln r_0}{\sqrt{2} \ln s} \right)^2 \right),$$

где r — радиус частиц, $\ln s$ — логарифм дисперсии. Однако эта зависимость неудобна для аналитических вычислений. Если ограничиться узкими функциями распределения $\sigma^{1/2}/r_0 \ll 1$ ($\sigma^{1/2} = r_0 \ln s$), то, проведя разложение по степеням $\frac{\Delta r}{r_0} \leq \frac{\sigma^{1/2}}{r_0}$, получим

гауссову кривую, которая будет ниже использоваться в расчетах $g(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp \left(- \frac{(r - r_0)^2}{2\sigma} \right)$.

Другая особенность каустики состоит в том, что в ее окрестности градиенты среднего течения псевдогаза частиц очень большие. Поэтому при вычислении m_2 будем использовать более общую формулу (1.6), полученную методом осреднения по площади. С учетом сделанных замечаний, система уравнений (3.7) запишется в виде

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + u_2 \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{u_1 - u_2}{\tau} \mathcal{F} \right) = 0,$$

$$n = n_0 \int_0^{r_m} dr \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F} du_2, \quad \mathcal{F} = \mathcal{F}(t, x, r, u_2), \quad (1)$$

$$u_1 = \text{const}, \quad \tau = (\rho_{22}/\rho_{11}) \frac{2}{9} r^2/\nu,$$

$$m_2 = \pi r^2 \int_{x-r}^{x+r} n(t, y) \left(1 - \left(\frac{x-y}{r} \right)^2 \right) dy,$$

где r_m — максимальный радиус частиц. Оценим величину m_{2*} , до которой правомерно использование (1). Подставляя типичные значения $\rho_{22}/\rho_{11} \simeq 10^3$, $\text{Re}_{12} \simeq 0,1$ в условия

$$\text{Kn} = \frac{d}{6m_2 l_p} \gg 1, \quad l_p = \frac{\rho_{22}}{\rho_{11}} \frac{d}{18} \text{Re}_{12}, \quad d = 2r,$$

получим $m_{2*} \simeq 10^{-3}$.

Рассмотрим задачу Коши для системы (1) при наличии дисперсии частиц по размерам с начальными условиями

$$\mathcal{F}^0|_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp \left(-\frac{(r-r_0)^2}{2\sigma} \right) \delta(u_2 - u_2^0(x)), \quad (2)$$

$$u_2^0(x) = w_s - w \arctg \alpha x.$$

$$w_s = (w_1 + w_2)/2, \quad w = (w_1 - w_2)/\pi, \quad w_1 > w_2 > u_1 > 0.$$

Решение первого уравнения из (1) получим аналогично (3.3), (3.10) в виде

$$\mathcal{F}(t, x, r, u_2) = \mathcal{F}^0(x^*, r, u_2^*) e^{t/\tau},$$

$$u_2 = u_1 + (u_2^* - u_1) e^{-t/\tau},$$

$$x = x^* + u_1 t + (u_2^* - u_1) K, \quad x^* = x|_{t=0}, \quad u_2^* = u_2|_{t=0}, \quad (3)$$

$$n = \int_0^{r_m} \int_{-\infty}^{+\infty} dr du_2 \mathcal{F}^0(x^*, r, u_2^*) e^{t/\tau},$$

где t и x фиксированы.

Переходя в интеграле к новым переменным по формулам $du_2 = e^{-t/\tau} du_2^*$, $dr = \frac{\partial r}{\partial x} dx^*$ и вычисляя интеграл от дельта-функ-

ции, получим

$$n(t, x) = \int_0^{r_m} \frac{n_0}{V\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{(r-r_0)^2}{2\sigma}\right) \left/ (1 - \beta/(1 + (\alpha x^*)^2)) \frac{\partial r}{\partial x^*} \right|_{u_2^* = u_2^0(x^*)} dx,$$

$$\frac{\partial r}{\partial x^*} = -\left(1 - \frac{\beta}{1 + (\alpha x^*)^2}\right) / b, \quad \beta = w\alpha K,$$

$$b = \frac{2}{9} \frac{\rho_{22}}{\rho_{11}} \operatorname{Re}^0 \left(1 - e^{-t/\tau} - \frac{t}{\tau} e^{-t/\tau}\right),$$

$$\operatorname{Re}^0 = |u_2^0(x) - u_1| d/v.$$

Преобразуем интеграл к виду $n(t, x) = n_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{V\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(r-r_0)^2}{2\sigma}} \cdot \frac{dx^*}{b}$.

Этот интеграл вычисляется методом перевала, для чего разложим подэкспоненциальное выражение вблизи минимума в ряд по степеням $|x^* - y|/b\sigma^{1/2} < 1$, где y определяется из третьего уравнения (3) при $r = r_0$

$$y + u_1(t - K(t, r_0)) + (w_s - w \operatorname{arctg} \alpha y) K(t, r_0) - x = 0, \quad (4)$$

где t, x фиксированы. Разложение имеет вид

$$\frac{(r-r_0)^2}{2\sigma} = \sum_{i=2}^6 \tilde{A}_i \left(\frac{x^* - y}{b\sqrt{\sigma}}\right)^i. \quad (5)$$

Учитывая первый член в разложении, получим

$$n(t, x) = \sum_{i=1}^m n_0 \left| 1 - \frac{\beta}{1 + (\alpha x^*)^2} \right|, \quad \beta = w\alpha K, \quad (6)$$

или с учетом $\partial x/\partial x^* = 1 - \beta/(1 + (\alpha x^*)^2)$

$$n(t, x) = \sum_{i=1}^m n_0 \left| \frac{\partial x}{\partial x^*} \right|_{r=r_0},$$

где m — число траекторий, проходящих через данную точку t, x .

Величина $n(t, x)$ всюду конечна, за исключением кривой $\partial x/\partial x^* = 0$, которая называется каустикой. Из (6) следует, что каустика может возникнуть лишь при градиенте, превышающем критический $w\alpha\tau > 1$. Уравнение каустики получено в § 3, там же исследовано поведение траектории частиц вблизи каустики, которые приведены на рис. 4.4, где сплошной кривой Γ_1 обозначена каустика, а остальные — траектории частиц. В данном параграфе исследуется поведение концентрации частиц вблизи кау-

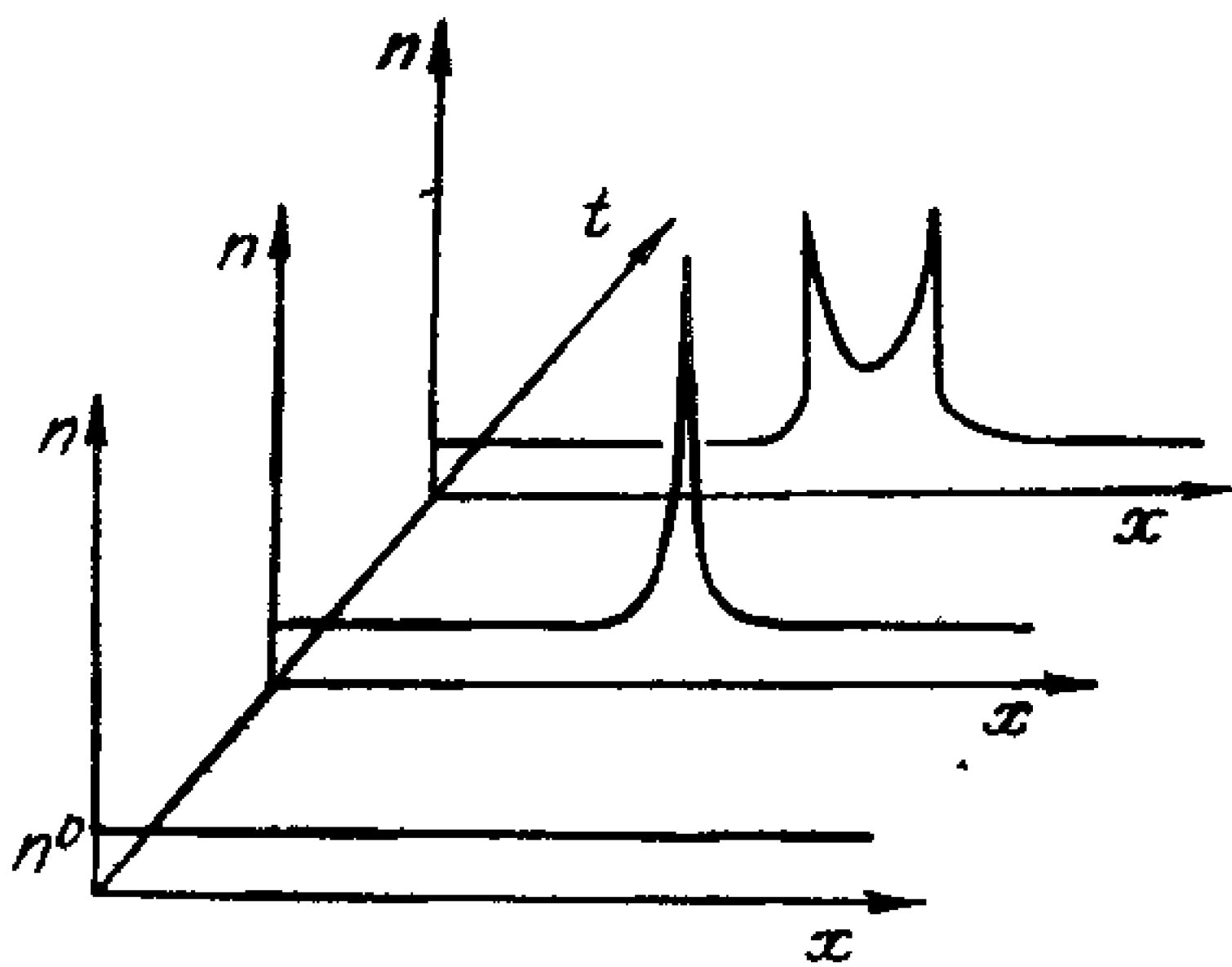


Рис. 4.6.

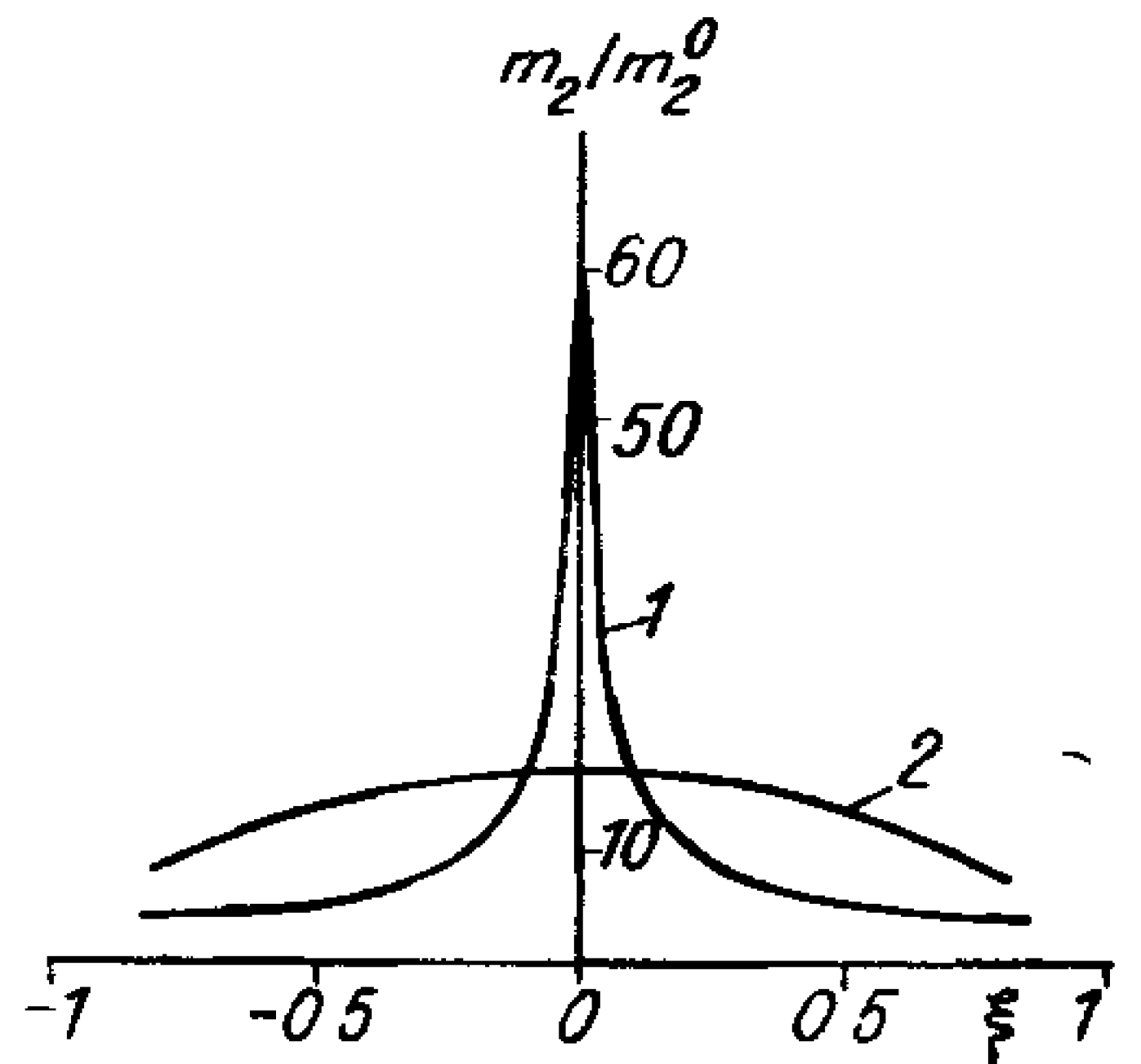


Рис. 4.7.

стики. Для этого в разложении (5) необходимо удерживать члены четвертого порядка малости

$$(r - r_0)^2/2 \simeq \frac{1}{b^2} \left(\frac{\partial^2 x}{\partial x^{*2}} \right)_{\xi}^2 \left(\frac{1}{8} (x^* - y)^4 + \frac{1}{2} (y - \xi)^2 (x^* - y)^2 \right),$$

$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial x^{*2}} \right)_{\xi} = 2\alpha^2 \xi / (1 + (\alpha \xi)^2),$$

и, вычисляя интеграл, найдем концентрацию частиц на каустике

$$n_{1,2}(t, x) = n_0 \frac{8^{1/4} \Gamma(1/4)}{4 \sqrt{\pi}} \cdot \beta^{1/2} \left(1 - 8^{1/4} \frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)} \times \right.$$

$$\times \left. \frac{|x - x_k|}{b\sigma^{1/2}} \right) \sqrt{b\alpha\sigma^{1/2}(\alpha|\xi^{\pm}|)}, \quad |x - x_k| < (1/4)\delta_1, \quad (7)$$

$$n_{1,2}(t, x) = \frac{1}{2} n_0 \sqrt{\beta} / (\alpha^2 |\xi^{\pm}| |x - x_k|)^{1/2},$$

$$\delta_1 < |x - x_k| < \delta_2, \quad \delta_1 = b\sigma^{1/2}, \quad \delta_2 = 0.5/\alpha, \quad \alpha b\sigma^{1/2} < 1,$$

где $x_k = x_k(t)$ — координата каустики.

Оценим максимальную концентрацию на каустике и ширину на полувысоте Δ (рис. 4.6). Полагая в (7) $\sigma^{1/2}/d \simeq 0.1$, $\rho_{22}/\rho_{11} \simeq 10^3$, $\alpha d \simeq 0.1$, $\beta \simeq 2$, получим

$$n/n_0 \simeq 4(1 - 5.7|x - x_k|/d), \quad 0 \leq |x - x_k| \leq 0.1d,$$

$$n/n_0 \simeq \sqrt{5}(|x - x_k|/d)^{1/2}, \quad d \leq |x - x_k| \leq 5d,$$

отсюда $n_{\max}/n_0 \simeq 4$, $\Delta \simeq d$.

Решение (7) несправедливо в окрестности точки O' . Для получения решения в окрестности этой точки в разложении (5) необходимо удерживать члены шестого порядка

$$\frac{(r - r_0)^2}{2\sigma} \simeq \frac{1}{b^2\sigma} \left(\frac{\partial^3 x}{\partial \xi^3} \right)_{\xi=0}^2 \left(\frac{1}{72} (x^* - y)^6 + (x^* - y)^4 y^2 \right), \quad \frac{\partial^3 x}{\partial \xi^3} = 2\alpha^2,$$

отсюда найдем

$$\frac{n}{n_0} = \frac{72^{1/6} \Gamma(1/6)}{6 \sqrt{\pi} (\alpha b \sigma^{1/2})^{2/3}} \left(1 - 19^{2/3} \frac{\Gamma(5/6)}{\Gamma(1/6)} \left(\frac{|x - x_k|}{b \sigma^{1/2}} \right)^{2/3} \right),$$

$$0 \leq |x - x_k| \leq (1/4) \delta_1, \quad (8)$$

$$\frac{n}{n_0} = 1/(3\alpha |x - x_k|)^{2/3}, \quad \delta_1 \leq |x - x_k| \leq \delta_2.$$

В случае когда $b\sigma^{1/2}/d \gtrsim 1$, из (1), (8) получим приближенное равенство, $\frac{m_2}{m_2^0} \simeq \frac{n}{n_0}$, если выполнено обратное неравенство $b\sigma^{1/2}/d \ll 1$, необходимо использовать точное выражение для m_2 из (1).

Используя (8) и третье уравнение системы (1), найдем распределение $m_2(x)$ в окрестности точки O' в случае

$$b\sigma^{1/2}/d \ll 1, \quad d = 2r, \quad (9)$$

$$\frac{m_2^2}{m_2^0} \simeq \frac{3}{4} \frac{1}{(\alpha d)^{2/3}} \left(5 - 4 \left(\frac{x - x_k}{r} \right)^2 \right) + O(b\sigma^{1/2}/d),$$

где $(x - x_k)^2/r^2 < 1$, x_k — координата точки O' . На рис. 4.7 приведена зависимость m_2/m_2^0 , вычисленная по формуле (9), — кривая 2, и по формулам (8) и $m_2 = \frac{\pi d^3}{6} n$, — кривая 1. При этом были приняты следующие параметры: $\alpha d \simeq 0.1$, $\sigma^{1/2}/d = 3 \cdot 10^{-3}$, $b\sigma^{1/2}/d \simeq 6.6 \cdot 10^{-2}$. Как следует из рис. 4.7, максимум кривой 2 существенно ниже, чем у кривой 1, это связано с тем, что особенность во втором уравнении (8) является интегрируемой, т. е. полное число частиц на каустике конечно. Это приводит к тому, что даже при $n/n_0 \gg 1$ на каустике число Кнудсена $\left(K_n \simeq \frac{d}{m_2 L} \right)$ может быть больше единицы и, следовательно, применимо бесстолкновительное уравнение (1). Поскольку α удовлетворяет неравенству $1/\alpha < l_p$, из (9) найдем максимально возможную m_2 на каустике $(m_2/m_2^0)_{\max} \simeq 1 \left| \left(\frac{d}{l_p} \right)^{2/3} \right|$, где l_p — длина релаксации.

Рассмотрим задачу Коши для системы (1) в случае дисперсии частиц по скоростям с начальным условием

$$\mathcal{F}^0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp \left(- \frac{(u_2 - u_2^0(x))^2}{2\sigma} \right) \delta(r - r_0),$$

где $u_2^0(x)$ определена в (2). Производя аналогичные вычисления, получим вне каустики

$$\frac{n}{n_0} = \sum_{i=1}^m 1 \left| 1 - \frac{\beta}{1 + (\alpha x^*)^2} \right|, \quad m = 1, 3. \quad (10)$$

На каустике

$$\frac{n_{1,2}}{n_0} = \frac{8^{1/4} \Gamma(1/4)}{4 \sqrt{\pi}} \left(1 - 8^{1/2} \frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)} \frac{\alpha |x - x_k|}{\beta (\sigma/w^2)^{1/2}} \right) / ((\beta - 1) \sigma/w^2)^{1/4} \quad (11a)$$

при $0 \leq |x - x_k| < \frac{1}{4} \frac{\sigma^{1/2}}{w} \bigg/ \alpha, \quad \sigma^{1/2}/w < 1;$

$$\frac{n_{1,2}}{n_0} = \sqrt{\beta} / ((\alpha^2 \xi^+ |x - x_k|)^{1/2} \cdot 2) \quad (11b)$$

при $\frac{\sigma^{1/2}}{w\alpha} \leq |x - x_k| \leq 0.5\alpha.$

В окрестности точки O'

$$\frac{n}{n_0} = \frac{48^{1/6} \Gamma(1/6)}{3 \sqrt{2\pi} (\sigma/w^2)^{1/3}} \left(1 - \frac{\Gamma(5/6)}{\Gamma(1/6)} \frac{0.2 (\alpha |x - x_k|)^{2/3}}{(\sigma/w^2)^{1/3}} \right) \quad (12a)$$

при $0 \leq |x - x_k| < \frac{1}{4} \delta_3, \quad \delta_3 = 10^{-3} \left(\frac{\sigma}{w^2} \right)^{3/2} \bigg/ \alpha;$

$$\frac{n}{n_0} = 1/(3\alpha |x - x_k|)^{2/3} \quad (12b)$$

при $\delta_3 \leq |x - x_k| \leq 5 \cdot 10^{-2}/\alpha.$

Оценим максимальную концентрацию на каустике и ширину Δ для случая дисперсии по скоростям. Полагая в (11a), (11b) $(\sigma/w^2)^{1/2} \simeq 0.1, \quad \alpha d \simeq 0.1, \quad \beta \simeq 2$, найдем

$$\frac{n}{n_0} \simeq 3 \left(1 - 0.95 \frac{\alpha |x - x_k|}{\beta \sigma^{1/2}/w} \right), \quad |x - x_k| \leq 2.5 \cdot 10^{-1} d,$$

$$\frac{n}{n_0} \simeq \sqrt{5} / (|x - x_k|/d)^{1/2}, \quad d \leq |x - x_k| \leq 5d,$$

отсюда получим $n_{\max}/n_0 \simeq 3, \quad \Delta \simeq 2.5.$

Оценим число столкновений между частицами на каустике. Как следует из рис. 4.4, имеется два сорта частиц: частицы первого сорта, пересекающие каустик с большой относительной скоростью $\Delta u \sim w$, и частицы второго, образующие каустик и движущиеся с маленькой относительной скоростью $\Delta u \simeq \sigma^{1/2} \ll w$. Число столкновений для частиц первого сорта при пересечении ими каустики находится по формуле

$$N_1 = \pi d^2 \int_{x_k}^{x_k + \xi^+} n dx.$$

Подставляя выражение $n(x)$ из (11a), (11b) и производя интегрирование, получим $N_1 \simeq \pi d^2 n_0 \sqrt{\frac{\beta}{2}} \bigg/ \alpha$. Полагая $\beta \simeq 2, \quad m_2^0 = \frac{\pi d^3}{6} n_0, \quad l_p \simeq w\tau, \quad l_p \alpha > 1$, найдем

$$N_1 \simeq \frac{6m_2^0}{\alpha d} \leq \frac{6m_2^0 l_p}{d} = \frac{1}{Kn^0} \ll 1, \quad \text{где } Kn^0 = \frac{d}{6m_2^0 l_p}.$$

Число столкновений для частиц второго сорта за время затухания скоростей хаотического движения $t = \tau$ определяется по формуле $N_2 \simeq \frac{1}{2} \pi d^2 n_k \sigma^{1/2} \tau$. Подставляя решение (12) $n_k \simeq n_0 \left(\frac{\sigma^{1/2}}{w} \right)^{1/2}$, $l_p \simeq w \tau$, найдем

$$N_2 \leq 0,5 \frac{6m_2^0 l_p}{d} \left(\frac{\sigma^{1/2}}{w} \right)^{1/2} \leq \frac{1}{K n^0} \left(\frac{\sigma^{1/2}}{w} \right)^{1/2} \ll 1.$$

Таким образом, число столкновений в каустике мало и, следовательно, континуально-дискретная модель (КДМ) применима на каустике. Единственным параметром, определяющим условие применимости КДМ, является $K n^0 \simeq \frac{d}{6m_2^0 l_p} \gg 1$. Этот любопытный

факт обусловлен двумя причинами. Во-первых, как следует из решения, к каустикам приводят не все возмущения, а лишь такие, длина волны для которых $1/\alpha$ меньше длины релаксации l_p . Во-вторых, особенности типа каустик являются интегрируемыми, поэтому число частиц на каустике конечно.

Образование каустик, как было показано, существенно зависит от вида функции $u_2^0(x)$ в момент $t = 0$. Поэтому исследуем зависимость $n(x)$ на каустике от малых возмущений. Произведем возмущение скорости частиц (2) по закону

$$u_2^0(x^*) = w_s - w \arctg \alpha x^*, \quad (13)$$

$$\alpha = \alpha_1 - \delta \alpha \arctg \bar{K} x^*, \quad \delta \alpha / \alpha_1 \ll 1, \quad \bar{K} / \alpha \sim 1.$$

На рис. 4.8 сплошной кривой представлена зависимость $u_2^0(x)$, описываемая формулой (2), а штрихпунктирной — для возмущенной скорости (формулы (13)). Мелкомасштабные возмущения $\bar{K} / \alpha \gg 1$ не рассматриваются, поскольку их влияние эквивалентно дополнительной дисперсии частиц.

Для доказательства выберем интервал Δx^* , удовлетворяющий неравенствам $1/\bar{K} \ll \Delta x^* \ll 1/\alpha$. Усреднив возмущенную скорость частиц, получим профиль средней скорости частиц, совпадающий с (2) и дисперсией $\sigma^{1/2} \sim \delta w$, где δw — возмущение $u_2^0(x)$. Используя формулы (3), (13) и условие $\partial x / \partial x^* = 0$, получим уравнение каустики

$$1 - \frac{\beta}{1 + (\alpha x^*)^2} \left(1 - \frac{\varepsilon \bar{K} x^*}{1 + (\bar{K} x^*)^2} \right) = 0, \quad \varepsilon = \delta \alpha / \alpha_1,$$

отсюда найдем $\xi^\pm$, относящиеся к 1-й и 2-й веткам каустики

$$\xi^\pm = \pm \frac{1}{\alpha} \sqrt{\beta - 1 - \varepsilon K \beta \left(2\alpha^2 \left(1 + \left(\frac{K}{\alpha} \right)^2 (\beta - 1) \right) \right)}. \quad (14)$$

Из формул (7), (14) следует, что наличие асимметрии в $u_2^0(x^*)$ приводит к отличию концентрации частиц на 1-й и 2-й ветках, имеющему тот же порядок: $\Delta n / n \simeq \varepsilon$, $\Delta n = n_2 - n_1$, $n_2 > n_1$, $\varepsilon > 0$.

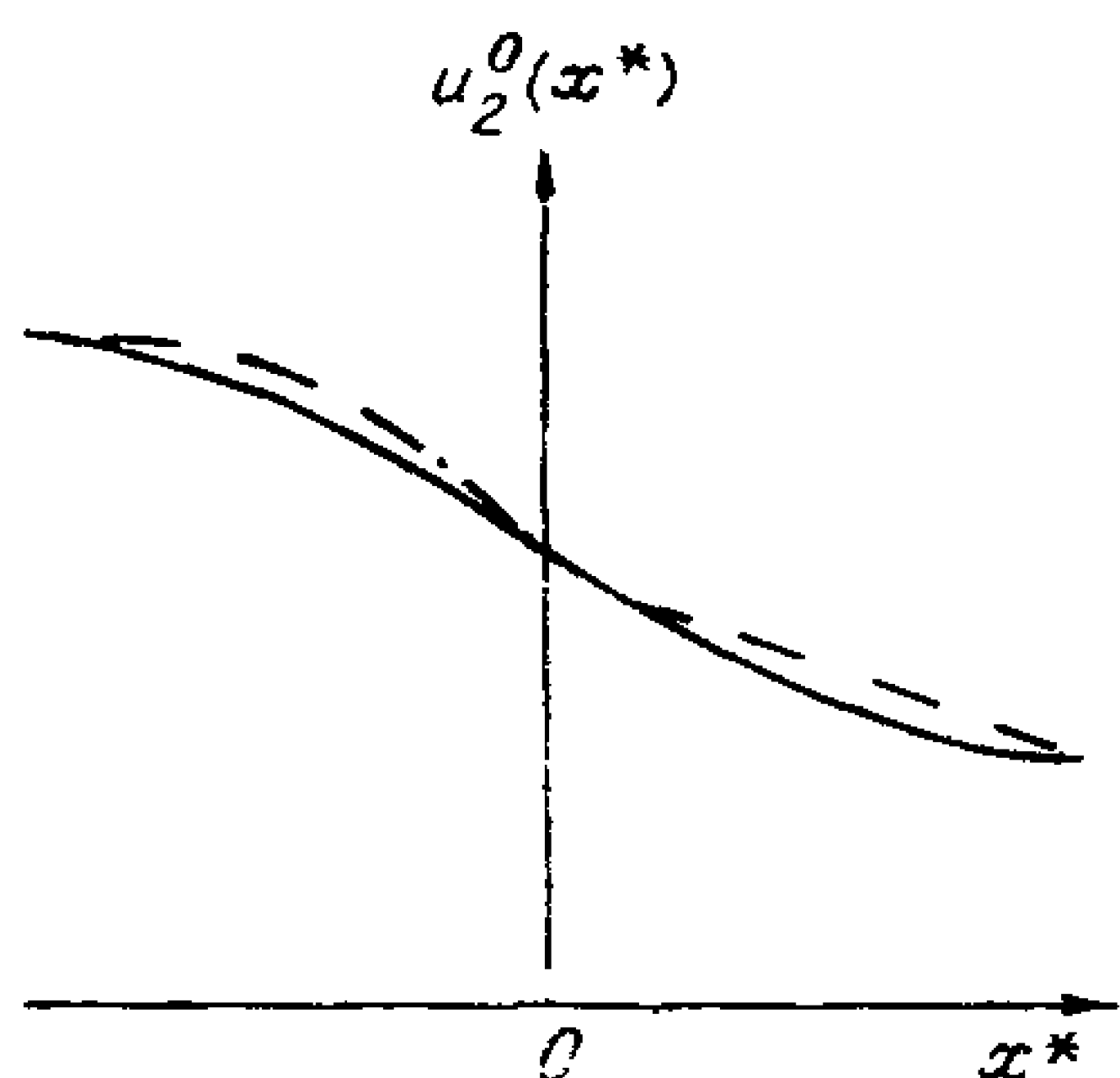


Рис. 48.

Рассмотрим течение смеси газа с частицами при больших числах Рейнольдса $Re_{12} = \frac{|u_1 - u_2| d}{\nu} \gg 1$. В этом случае уравнения движения частицы имеют вид

$$\frac{dx}{dt} = u_2, \quad \frac{du_2}{dt} = \frac{(u_1 - u_2)^2}{l_p},$$

$$l_p \simeq \frac{4}{3} \frac{\rho_{22}}{\rho_{11}} \frac{d}{C_d}, \quad C_d \simeq 0.5. \quad (15)$$

Найдем решение уравнений в случае $u_1 = \text{const}$

$$\begin{aligned} u_2 &= u_1 - (u_1 - u_2)^* / (1 + t(u_1 - u_2^*)/l_p), \\ x &= x^* + u_1 t - l_p \ln(1 + t(u_1 - u_2^*)/l_p), \\ u_1 &> u_2, \quad u_2^* = u_2(t=0), \quad x^* = x(t=0). \end{aligned} \quad (16)$$

Предположим, что в канале постоянного сечения длиной L находятся частицы, скорость которых равна нулю, плотность постоянна, а радиус зависит от расстояния по закону

$$r_0(x^*) = r_s + \Delta r \arctg \alpha x^*, \quad L \gg 1/\alpha. \quad (17)$$

Точка $x=0$ находится в середине канала так, что координаты левого и правого концов равны соответственно $-L/2$ и $L/2$. В некоторый момент по каналу в сторону положительных x проходит ударная волна, за фронтом которой газ движется со скоростью u_1 . Под действием газа частицы начинают ускоряться, при этом мелкие частицы догоняют более крупные, и в некоторый момент может возникнуть каустика. Найдем момент образования и расстояние между ветвями каустики в предположении $tu_1/l_p \ll 1$. Разлагая правую часть во втором уравнении (16) по степеням $\frac{tu_1}{l_p}$, найдем

$$x = x^* + \frac{u_1^2 t^2}{2l_p}, \quad (18)$$

отсюда с учетом (17) получим

$$\frac{\partial x}{\partial x^*} = 1 - \frac{t^2 u_1^2}{2l_p^2} \frac{\kappa \alpha \Delta r}{1 + (\alpha x^*)^2}, \quad \kappa = \frac{8}{3} \frac{\rho_{22}}{\rho_{11}} \left/ C_d. \quad (19) \right.$$

Используя (18), (19), получим уравнение каустики

$$\begin{aligned} x &= \frac{u_1^2 t^2}{2l_p} \pm \frac{1}{\alpha} \sqrt{(t/t^*)^2 - 1}, \\ t^* &= \frac{l_p}{u_1} \sqrt{2 \left| \left(l_p \alpha \frac{\Delta r}{r_s} \right) \right|}, \end{aligned} \quad (20)$$

а расстояние между ветвями каустики

$$\Delta x = \frac{2}{\alpha} \sqrt{(t/t^*)^2 - 1}. \quad (21)$$

Для того чтобы найти концентрацию частиц на каустике, докажем следующее тождество:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F} du_2 \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}^* du_2^*, \quad (22)$$

где t, x фиксированы.

Как следует из (3.3), решение уравнения (1) имеет вид

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}^* \exp \left(- \int_0^t \frac{\partial F}{\partial u_2} dt' \right),$$

$$\frac{du_2}{dt} = F(u_1 - u_2), \quad u_1 = \text{const}, \quad \frac{dx}{dt} = u_2. \quad (23)$$

Дифференцируя второе уравнение системы (23) по u_2^* , получим

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial u_2}{\partial u_2^*} \right) = \frac{\partial F}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial u_2^*} \quad (t, x \text{ фиксированы}),$$

отсюда

$$\frac{\partial u_2}{\partial u_2^*} = \left(\frac{\partial u_2}{\partial u_2^*} \right)_{t=0} \exp \left(\int_0^t \frac{\partial F}{\partial u_2} dt' \right).$$

Поскольку $u_2 = u_2^* + \int_0^t F dt'$, $\left(\frac{\partial u_2}{\partial u_2^*} \right)_{t=0} = 1$ (при условии, что F — гладкая функция), найдем

$$\frac{\partial u_2}{\partial u_2^*} = \exp \left(\int_0^t \frac{\partial F}{\partial u_2} dt' \right). \quad (24)$$

Подставляя $\mathcal{F}$ из (23) и $\frac{\partial u_2}{\partial u_2^*}$ из (24) в левую часть (22), получим требуемое тождество.

Тождество (22) выражает закон сохранения числа частиц, поскольку в левой и правой частях (22) записано выражение для числа частиц, лежащих на одних и тех же траекториях в моменты t и $t=0$. Полагая $\mathcal{F}^* = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp \left(-\frac{(r-r_0)^2}{2\sigma} \right) \delta(u_2^*)$ и используя (22), получим интеграл

$$n(t, x) = \int_0^{r_m} \frac{n_0}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp \left(-\frac{(r-r_0)^2}{2\sigma} \right) \frac{\partial r}{\partial x^*} dx^*, \quad (25)$$

который вычисляется аналогично (6).

Используя формулы (18), (19), найдем

$$\left. \frac{\partial^2 x}{\partial x^{*2}} \right|_{\xi} = \frac{2\alpha^2 \xi}{1 + (\alpha \xi)^2}, \quad \left. \frac{\partial^3 x}{\partial x^{*3}} \right|_{\xi=0} = 2\alpha^2, \\ \xi = \frac{1}{\alpha} \sqrt{(t/t^*)^2 - 1}, \quad (26)$$

где t^* дана в (20).

Сравнивая выражения (19), (26) с соответствующими формулами $\partial x / \partial x^*$, возникающими при вычислении интеграла (6), убеждаемся в их тождественности, где

$$\beta = (t/t^*)^2, \quad b = \beta / (\alpha \Delta r). \quad (27)$$

Отсюда следует, что для концентрации частиц на каустике справедливы формулы (7), (8), где b вычисляется по второй формуле в (27).

Оценим характерные размеры каустики в канале длиной $L = 10$ см. Пусть слева находятся частицы из бронзы $\rho_{22} = 8.6$ г/см³, $r_0 = 60$ мкм, а справа — частицы из бронзы $r_0 = 80$ мкм, отсюда получим $r_s = 70$ мкм, $\Delta r = 20$ мкм, $l_p = 84$ см ($\rho_{11} = 3.8 \cdot 10^{-3}$ г/см³). Область перехода от одного радиуса к другому выберем равной $1/\alpha \simeq 0.21$ см. Слева направо распространяется ударная волна с $M = 3$, за фронтом которой параметры газа равны: $u_1 = 7.4 \cdot 10^4$ см/с, $\rho_{11} = 3.8 \cdot 10^{-3}$ г/см³. Подставляя соответствующие величины в формулы (20), (21), найдем момент образования каустики $t^+ = 150$ мкс, $x_k(t^+) = 0.73$ см, а расстояние между ветвями каустики в точке $L/2$ будет $\Delta x \approx 1$ см.

Для определения концентрации частиц на каустике зададим $\sigma^{1/2}/d \simeq 0.02$, тогда, подставляя $\beta \simeq 6.8$, $b(L/2) \simeq 7 \cdot 10^2$, $b(t^+) \simeq 10^2$, $\alpha d \simeq 6.6 \cdot 10^{-2}$, $\alpha \xi \simeq 2.4$ в (7), (8), найдем $(n_{\max}/n_0)_k = 3.14$, $(n_{\max}/n_0)_{t^+} = 7.6$, а толщина сгустка $\Delta_k \simeq 3.5$, $\Delta(t^+) \simeq 0.5$, отсюда следует, что $m_2/m_2^0|_{t^+} = n/n_0|_{t^+}$.

Начальную концентрацию частиц выберем из условия отсутствия столкновений между частицами в объеме. Представляя число столкновений частицы в виде суммы столкновений на каустике и вне каустики

$$N^0 = \int_0^{1/2} 2\pi d^3 n(x) d(x/d) + \pi d^2 n L,$$

получим $N^0 \simeq 6m_2^0 (n/n_0|_{t^+} + L/d)$, $Kn^0 = \frac{10^{-3}}{6m_2^0}$. Отсюда, учитывая $n/n_0|_{t^+} \simeq 7$, $L/d \simeq 10^3$, найдем $N^0 \simeq \frac{1}{Kn^0}$. Полагая $Kn \simeq 10$, получим $m_2^0 \simeq 1.7 \cdot 10^{-5}$, $n \simeq 10$ см⁻³.

Полученные результаты можно обобщить на случай произвольной зависимости начальной скорости частиц от координаты $u_2^0(x)$ и произвольной зависимости $C_d(Re, M_{12})$ при постоянной

скорости газа $u_1 = \text{const.}$ Для простоты частицы будем считать монодисперсными, тогда с учетом (1), (22) получим формулу для вычисления концентрации частиц

$$\frac{n}{n_0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(u_2^* - u_2^0(x^*))^2}{2\sigma}\right) du_2^*,$$

где t, x фиксированы. Этот интеграл будем вычислять путем разложения подэкспоненциального выражения в ряд по степеням $\frac{u_2^* - u_2^0(\xi)}{\sqrt{\sigma}}$. Удерживая первый член в разложении, получим

$$\varphi^2 \approx \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u_2^0(\xi)}\right)^2 (u_2^* - u_2^0(\xi))^2, \text{ где } \varphi = (u_2^* - u_2^0(x^*)).$$

Для вычисления $\partial\varphi/\partial u_2^0(\xi)$ представим уравнение движения частицы в виде $x = x^* + \psi(t, u_2^*)$, тогда, учитывая, что t, x фиксированы, найдем $\partial x^*/\partial u_2^* = -\partial\psi/\partial u_2^*$, а

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u_2^*} \Big|_{u_2^0} = 1 - \frac{\partial u_2^0}{\partial x^*} \frac{\partial x^*}{\partial u_2^*} \Big|_{u_2^0} = 1 + \frac{\partial u_2^0}{\partial x^*} \frac{\partial\psi}{\partial u_2^0}, \quad \xi \equiv x^*.$$

С другой стороны, уравнение движения частицы с начальной скоростью $u_2^0(x^*)$ имеет вид $x = x^* + \psi(t, u_2^0(x^*))$, отсюда $(\partial x/\partial x^*) = 1 + \frac{\partial\psi}{\partial u_2^0} \frac{\partial u_2^0}{\partial x^*}$. Сравнение полученных формул дает $\frac{\partial\varphi}{\partial u_2^*} \Big|_{u_2^0} = \left(\frac{\partial x}{\partial x^*}\right)_t$,

что позволяет вычислить интеграл и найти концентрацию частиц $n/n_0 = 1 / \left| \frac{\partial x}{\partial x^*} \right|$. Это уравнение справедливо до тех пор, пока $\partial x/\partial x^*$ не обратится в нуль. Условие $\partial x/\partial x^* = 0$ определяет уравнение каустики в плоскости t, x^* . Продифференцировав левую часть этого уравнения по x^* , получим

$(\partial^2 x/\partial t \partial x^*) \frac{\partial t}{\partial x^*} + \frac{\partial^2 x}{\partial x^{*2}} = 0$. Поскольку в момент возникновения каустики $t = t^+$, $\frac{\partial t}{\partial x^*} \Big|_{t^+} = 0$, в этой точке имеем $\frac{\partial^2 x}{\partial x^{*2}} = 0$. Для

того чтобы найти решение в окрестности каустики $\partial x/\partial x^* = 0$, в разложении φ необходимо удержать члены более высокого порядка малости

$$\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial u_2^*} \Big|_{u_2^0} (u_2^* - u_2^0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial u_2^{*2}} \Big|_{u_2^0} (u_2^* - u_2^0)^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3\varphi}{\partial u_2^{*3}} \Big|_{u_2^0} (u_2^* - u_2^0)^3,$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_2^{*2}} \Big|_{\frac{\partial x}{\partial x^*}=0, u_2^*=u_2^0} = \frac{(\partial^2 x/\partial x^{*2})}{(\partial u_2^0/\partial x^*)} = -\frac{\partial\psi}{\partial u_2^0} \frac{\partial^2 x}{\partial x^{*2}},$$

$$\frac{\partial^3\varphi}{\partial u_2^{*3}} \Big|_{t^+, u_2^0} = \left(\frac{\partial^3 x}{\partial x^{*3}}\right) / \left(\frac{\partial u_2^0}{\partial x^*}\right) = \left(\frac{\partial\psi}{\partial u_2^0}\right) \left(\frac{\partial^3 x}{\partial x^{*3}}\right).$$

В окрестности точки $O'(t^+, x^*)$ два первых члена в разложении Φ равны нулю, в окрестности остальных точек каустики равен нулю лишь первый член. Найдем, для примера, концентрацию частиц вблизи каустики. Перепишем разложение для Φ в виде

$$\frac{1}{2} \Phi^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x}{\partial x^*} \right)^2 (v - u^*)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u_2^0} \right)^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial u_2^0} \right)^2 (v - u^*)^4,$$

где $v = u_2^0(x^*)$, $x = x^* + \psi(t, u_2^*)$, $\frac{\partial x}{\partial x^*} \Big|_{x^*=\xi} = 0$. Используя разложения $x = x_k + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 x}{\partial x^{*2}} \Big|_{\xi} (x^* - \xi)^2$, $\frac{\partial x}{\partial x^*} = \frac{\partial^2 x}{\partial x^{*2}} \Big|_{\xi} (x^* - \xi)$, найдем значение интеграла, определяющего n : $\frac{n}{n_0} = \sqrt{2}/(x_{\xi\xi}|x - x_k|)^{1/2}$ — внешнее разложение $|x - x_k| > \sigma^{1/2}/|du_2^0/dx^*|$, $\frac{n}{n_0} = \frac{8^{1/4}\Gamma(1/4)}{\sqrt{2\pi}} \Big| \zeta^{1/2}$ — внутреннее разложение $|x - x_k| < \frac{1}{4} \sigma^{1/2} \Big| \frac{du_2^0}{dx^*} \Big|$, где $\zeta = x_{\xi\xi} \sigma^{1/2} / \Big| \frac{du_2^0}{dx^*} \Big| \ll 1$. В частном случае $u_2^0(x^*) = w_s - w \arctg \alpha x^*$ и стоксовского режима обтекания $(u_1 - u_2)/\tau$ полученные формулы переходят в (11).

Из уравнения $\frac{\partial x}{\partial x^*} = 1 + \frac{\partial \psi}{\partial u_2^0} \frac{\partial u_2^0}{\partial x^*}$ следует, что каустика возникает при условии $\partial u_2^0 / \partial x^* < 0$, $\left| \frac{\partial u_2^0}{\partial x^*} \frac{\partial \psi}{\partial u_2^0} \right| > 1$, $\left(\frac{\partial \psi}{\partial u_2^0} > 0 \right)$. Найти величину $\frac{\partial \psi}{\partial u_2^0}$ в общем случае затруднительно, однако в наиболее важных случаях линейного и квадратичного законов сопротивления она соответственно равна K и $l_p/|u_1 - u_2^0|$. Полагая $\frac{\partial u_2^0}{\partial x^*} \simeq \frac{\Delta u_2^0}{L}$, $\frac{\partial \psi}{\partial u_2^0} \simeq \tau$, получим условие возникновения каустики в виде $(\partial u_2^0 / \partial x^*) \tau < -1$ или через характерные размеры задачи

$$St > 1, \quad (28)$$

где $St \simeq l_p/L$, $l_p \simeq \Delta u_2^0 \tau$, St — число Стокса. Это условие вместе с оценками

$$\frac{\partial x}{\partial x^*} \simeq 1 + \tau \frac{du_2^0}{dx^*}, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial x^{*2}} \simeq \tau \frac{d^2 u_2^0}{dx^{*2}} \simeq \frac{l_p}{L^2}, \quad \frac{\partial^3 x}{\partial x^{*3}} \simeq \frac{l_p}{L^3}$$

и полученным решением для концентрации n позволяет оценить максимальную концентрацию частиц на каустике

$$\left(\frac{m_2}{m_2^0} \right)_{1,2 \max} \simeq \left(\frac{l_p}{d} \right)^{1/2}, \quad \left(\frac{m_2}{m_2^0} \right)_{t^+ \max} \simeq \left(\frac{l_p}{d} \right)^{2/3}, \quad l_p \simeq \Delta u_2^0 \tau. \quad (29)$$

Образование каустик в псевдогазе частиц впервые было исследовано Я. Б. Зельдовичем [24, 25]. Существенным фактором в этих работах являлась консервативность системы частиц. В данном случае за счет взаимодействия с газом частицы теряют свою энергию, поэтому система не консервативна. В результате у каустик возникают новые свойства:

1) каустики образуются не всегда, а лишь при выполнении условия (28):

2) максимальное число частиц на каустике (пропорциональное m_2) определяется длиной релаксации l_r по формулам (29).

Коротко о соотношении теории каустик и ρ -слоя [26]. Теория ρ -слоя построена на основе двухжидкостной модели, поэтому ρ -слой следует понимать как предкаустическое состояние при $t \rightarrow t^+$ (см. рис. 4.6).

§ 5. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ К МАЛЫМ ВОЗМУЩЕНИЯМ В КОНТИНУАЛЬНО-ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ

Рассмотрим систему (3.1)–(3.2) в одномерном случае при условии равенства температуры между фазами и пренебрежении объемом, занимаемым частицами

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + u_2 \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u_2} F \mathcal{F} = 0, \quad F = \frac{u_1 - u_2}{\tau} - g,$$

$$m_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F} du_2, \quad \langle u_2 \rangle = \frac{1}{m_2} \int_{-\infty}^{+\infty} u_2 \mathcal{F} du_2, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = - \frac{1}{\rho_{11}} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\rho_2}{\rho_{11}} \left(\frac{(u_1 - \langle u_2 \rangle)}{\tau} - g \right),$$

$$\frac{\partial \rho_{11}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_{11} u_1) = 0, \quad p = p(\rho_{11}), \quad \tau = \frac{\rho_{22}}{\rho_{11}} \frac{d^2}{18\mu}, \quad \rho_{22} = \text{const.}$$

Стационарное (для средних параметров) решение системы (1) в пренебрежении сжимаемостью газа имеет вид

$$f^0 = (\rho_{11}^0, m_2^0, u_1^0, \langle u_2 \rangle) = \text{const},$$

$$\frac{u_1^0 - a}{\tau} = g, \quad \frac{dp^0}{dx} = -(\rho_{11}^0 + \rho_2^0)g, \quad a \equiv \langle u_2 \rangle^0. \quad (2)$$

В момент $t=0$ произведем возмущение стационарного решения

$$f = f^0(x) + f'(x), \quad f'(x) = \delta f \sin kx. \quad (3)$$

Поскольку основной интерес представляют коротковолновые возмущения, рассмотрим случай больших k , удовлетворяющих неравенству

$$1 \ll k\tau c_0 \ll \rho_{22}/\rho_{11}, \quad (4)$$

соответственно для длины волны возмущений получим неравенство $d \ll \lambda \ll l_c$, $l_c \simeq c_0 \tau$, где $\lambda = 2\pi/k$, c_0 — скорость звука в газе. Как следует из (1), уравнения для газовой фазы являются нелинейными, поэтому, представляя вектор решения для газа в виде суммы

$$\varphi = \varphi^0(x) + \varphi'(x, t), \quad (5)$$

где $\varphi^0(x) = (p^0, u_1^0, \rho_{11}^0)$, $\varphi'/\varphi^0 \ll 1$, линеаризуем уравнения для газа вблизи стационарного решения (2). Учитывая (2) — (5) из системы (1) с точностью до членов $O(m_2)$, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + u_2 \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u_2} F \mathcal{F} &= 0, \quad F = (a - u_1 + u_2')/\tau, \\ m_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F} du_2, \quad u_2 = \frac{1}{m_2} \int_{-\infty}^{+\infty} u_2 \mathcal{F} du_2, \quad u_2 = a + u_2', \\ \frac{du_2'}{dt} &= (u_1' - u_2')/\tau, \quad \frac{dx_2}{dt} = a + u_2', \quad a = \text{const}, \\ \frac{\partial u_1'}{\partial t} + u_1^0 \frac{\partial u_1'}{\partial x} + \frac{1}{\rho_{11}^0} \frac{\partial p'}{\partial x} &= 0, \quad p' = \rho_{11}' c_0^2, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_{11}'}{\rho_{11}^0} \right) + u_1^0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho_{11}'}{\rho_{11}^0} \right) + \frac{\partial u_1'}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Заметим, что последние три уравнения в (6) описывают распространение возмущения в газе и не зависят от параметров второй фазы. Это позволяет исследовать уравнения для частиц без предположения о малости возмущений, в то время как для газовой фазы достаточно ограничиться линеаризованными уравнениями для возмущений. Отметим, что u_2' — не возмущение u_2 , а отличие u_2 от a .

Начальные условия для системы (6) зададим в виде

$$\varphi'|_{t=0} = \delta\varphi \sin kx,$$

$$\mathcal{F}|_{t=0} = \frac{m_2^\alpha}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp \left(- (u_2 - (a + \delta u_2 \sin kx))^2 / 2\sigma \right), \quad (7)$$

$$m_2^\alpha = m_2^0 + \delta m_2 \sin kx,$$

где φ определено в (5).

Последние три уравнения системы (6) запишем в характеристическом виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial r'}{\partial t} + (u_1^0 + c_0) \frac{\partial r'}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial s'}{\partial t} + (u_1^0 - c_0) \frac{\partial s'}{\partial x} = 0, \\ s' &= u_1' - p' / (\rho_{11}^0 c_0), \quad r' = u_1' + p' / (\rho_{11}^0 c_0), \end{aligned}$$

откуда с учетом (7) имеем

$$\begin{aligned} u_1' &= \frac{1}{2} (\delta r \sin k(x - (u_1^0 + c_0)t) + \delta s \sin k(x - (u_1^0 - c_0)t)), \\ \delta r &= \delta u_1 + c_0 \delta \rho_{11} / \rho_{11}^0, \\ \frac{\rho_{11}'}{\rho_{11}^0} &= \frac{1}{2c_0} (\delta r \sin k(x - (u_1^0 + c_0)t) - \delta s \sin k(x - (u_1^0 - c_0)t)), \\ \delta s &= \delta u_1 - c_0 \delta \rho_{11} / \rho_{11}^0. \end{aligned} \quad (8)$$

Интегрируя уравнение движения частицы, получим

$$\begin{aligned} u_2' &= u_2'^* e^{-t/\tau} + e^{-t/\tau} \int_0^t \frac{u_1'(t', x_2(t'))}{\tau} e^{t'/\tau} dt', \\ x_2 &= x_2^* + at + u_1'^* K + \int_0^t dt' e^{-t'/\tau} \int_0^{t'} u_1'(t'', x_2(t'')) e^{t''/\tau} dt'', \end{aligned} \quad (9)$$

где $u_2'^* = u_2^* - u_2^0$, а $u_1'(t, x)$ определено в (8). Решение второго уравнения (9) будем искать методом итераций. В качестве нулевого приближения выберем

$$x_2^{(0)} = x_2^* + at + u_2'^* K. \quad (10)$$

Подставив $x_2^{(0)}$ в первое из уравнений (8), а полученный результат во второе, вычислим $x_2^{(1)}$ и, повторяя эту процедуру, вычисляем $x_2^{(2)}$ и т. д. Предположим, что $x_2^{(n)} = x_2^* + at + \varepsilon K$, тогда для вычисления $x_2^{(n+1)}$ необходимо найти интеграл вида

$$\begin{aligned} I &= \int_0^t dt e^{-t/\tau} \int_0^{t'} \frac{e^{t''/\tau}}{\tau} \left[\frac{\delta s}{2} \sin(kb^- t'' + k\varepsilon K(t'') + \alpha') - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\delta r}{2} \sin(kb^+ t'' - k\varepsilon K(t'') - \alpha') \right] dt, \end{aligned}$$

где $b^- = c_0 - (u_1^0 - a)$, $b^+ = c_0 + (u_1^0 - a)$, $kb^\pm \tau \gg 1$ (больше k), $\alpha' = kx_2^*$, $b > 0$ (дозвуковое по относительной скорости течение). Используя свойства интеграла от быстроосциллирующей функции [27], находим

$$I = (A - \varepsilon B) K \cos \alpha' + O(1/(\omega^+)^2 + 1/(\omega^-)^2), \quad (11)$$

где $\omega^\pm = kb^\pm \tau$, $A = \frac{\delta s}{2\omega^-} - \frac{\delta r}{2\omega^+}$, $B = \frac{\delta s}{2\omega^- b^-} + \frac{\delta r}{2\omega^+ b^+}$. Учитывая (9) и (11), определяем значение n -й итерации

$$x_2^{(n)} = x_2^{(0)} + K \left(A/B \sum_{k=1}^n (-1)^{(k-1)} \Delta^k + u_2'^* \sum_1^n (-1)^k \Delta^k \right), \quad (12)$$

где $\Delta = B \cos \alpha'$. Используя метод математической индукции,

легко доказать, что формула (12) справедлива, а ряд, составленный из $x_2^{(0)}, x_2^{(1)}, \dots, x_2^{(n)}$, является геометрической прогрессией и его сумма равна

$$x_2 = x_2^{(0)} + K(A/B - u_2'^*) \Delta / (1 + \Delta). \quad (13)$$

Так как интеграл (11) вычислен с точностью до члена $O\left(\frac{1}{(\omega^+)^2} + \frac{1}{(\omega^-)^2}\right)$, то с этой точностью находим окончательное выражение для x_2 , используя (13) в виде

$$x_2 = x_2^* + at + u_2'^* K + AK \cos \alpha' - Bu_2'^* K \cos \alpha'. \quad (14)$$

Следует заметить, что формула (14) может быть получена из (12), если положить $n=1$, т. е. когда достаточно ограничиться первой итерацией

Используя (8) и (14) из первого уравнения (9), имеем

$$u_2' = u_2'^* e^{-t/\tau} + e^{-t/\tau} \left(\frac{\delta s}{2} I_1 - \frac{\delta r}{2} I_2 \right) + O\left((\delta w)^2, \frac{u_2' \delta w}{c_0}\right),$$

$$I_1 = \frac{1}{\omega^+} \left(\left(1 + \frac{u_2'^*}{b^+} \right) \cos \alpha' - \left(e^{t/\tau} + \frac{u_2'^*}{b^+} \right) \cos (\omega^+ \varphi^+ - \alpha') \right) + O(1/(\omega^+)^2), \quad (15)$$

$$I_2 = \frac{1}{\omega^-} \left(\left(1 - \frac{u_2'^*}{b^-} \right) \cos \alpha' - \left(e^{t/\tau} - \frac{u_2'^*}{b^-} \right) \cos (\omega^- \varphi^- - \alpha') \right) + O(1/(\omega^-)^2),$$

$$\varphi^\pm = \frac{t}{\tau} \mp \frac{u_2'^*}{b^\pm \tau} K \mp \frac{\delta \tilde{u}_1}{b^\pm \tau} K,$$

что позволяет вычислить частные производные $\frac{\partial x_2'^*}{\partial u_2'^*}, \frac{\partial u_2'}{\partial u_2'^*}$ при фиксированных t, x_2 в форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_2^*}{\partial u_2'^*} &= -K + O(\delta u), \quad \delta w = \frac{1}{2} \left(\frac{\delta s}{b^-} - \frac{\delta r}{b^+} \right), \\ \frac{\partial u_2'}{\partial u_2'^*} &= e^{-t/\tau} + O\left(\frac{\delta u_1}{c_0 \omega^0} e^{-t/\tau}\right), \quad \omega^0 = kc_0 \tau. \end{aligned} \quad (16)$$

Как следует из (1), для определения m_2 и $\langle u_2 \rangle$ необходимо вычислить интеграл

$$\langle \Phi \rangle = \frac{m_2^\alpha}{m_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(u_2) \exp\left(\frac{t}{\tau} - \frac{(u_2'^* - \delta u_2 \sin \alpha')^2}{2\sigma}\right) du_2. \quad (17)$$

Подставляя (14) и (16) в (17), проводя замену переменных по формулам $du_2 = du_2'$, $du_2' = \frac{\partial u_2'}{\partial u_2'^*} du_2'^*$ и учитывая неравенство

$u_2'^*/c_0 \ll 1$, имеем

$$\langle \Phi \rangle = \frac{m_2^\alpha}{m_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(u_2) \exp\left(-\frac{(u_2'^* - \delta u_2 \sin \alpha')^2}{2\alpha}\right) du_2'^*, \quad (18)$$

$$x = x_2^* + at + u_2'^* K + \frac{\delta w}{k\tau} K \cos \alpha', \quad \alpha' = kx_2^*. \quad (19)$$

Разлагая аргумент экспоненты вблизи максимума, который определяется из уравнения

$$y - \delta u_2 \sin kx_2^*(y, t, x) = 0, \quad (20)$$

находим

$$f \approx (1 + \delta u_2 k K \cos kx_2^*(y, t, x))^2 (u_2'^* - y)^2, \quad (21)$$

где f — аргумент экспоненты в (18), $f = (u_2'^* - \delta u_2 \sin x_2^* k)^2$. Подставляя (21) в (18), получим

$$m_2 \langle \Phi \rangle = \sum_{i=1}^n m_2^\alpha \Phi(y_i, x_{2i}^*) / |1 + \delta u_2 k K \cos kx_2^*|, \quad (22)$$

где $\Phi = 1$, $\Phi = u_2$, n — число корней уравнений (19), (20). Полагая в (22) $\Phi = 1$, $n = 1$ и сравнивая с соответствующим выражением для m_2 , полученным в [18] для двухжидкостной модели, убеждаемся в их тождественности.

Если $\delta u_2 k \tau < 1$, то m_2 всюду конечна в полуплоскости $t \geq 0$, $-\infty < x < +\infty$, в случае обратного неравенства, $\delta u_2 k \tau > 1$, существуют точки, где $m_2 \rightarrow \infty$. Условие $\delta u_2 k \tau > 1$ означает $\lambda < l'_p$ где $l'_p = \delta u_2 \tau$ должно удовлетворять неравенству $l'_p \gg d$. Из этих неравенств получим условие на длину волны возмущений $d \ll \lambda < l'_p$. Полагая знаменатель в (22) равным нулю, находим уравнение кривой в плоскости t, x_2^* , на которой m_2 обращается в бесконечность, т. е.

$$1 + \delta u_2 k K \cos kx_2^* = 0. \quad (23)$$

Разрешая уравнение (23), имеем

$$x_2^* = \frac{\pi}{k} + \frac{2\pi m}{k} \pm \frac{1}{k} \arccos 1/(\delta u_2 k K), \quad m = 0, \pm 1, \dots \quad (24)$$

Подставляя (24) в (19), находим

$$x = \frac{\pi}{k} + \frac{2\pi m}{k} + at \pm \left(\frac{1}{k} \arccos(1/(\delta u_2 k K)) - \frac{1}{k} \sqrt{(\delta u_2 k K)^2} \right) - \delta w/(\delta u_2 k^2 \tau), \quad t > -\tau \ln(1 - 1/(\delta u_2 k \tau)). \quad (25)$$

Используя (18), (19), (23), получим, что на кривой, описываемой (25) с точностью до члена $O(\delta w)$, имеет место тождество

$$\frac{\partial x_2}{\partial x_2^*} \equiv 0. \quad \text{В § 3 было показано, что такие кривые называются}$$

каустиками. Расположение траекторий (штриховые линии) и

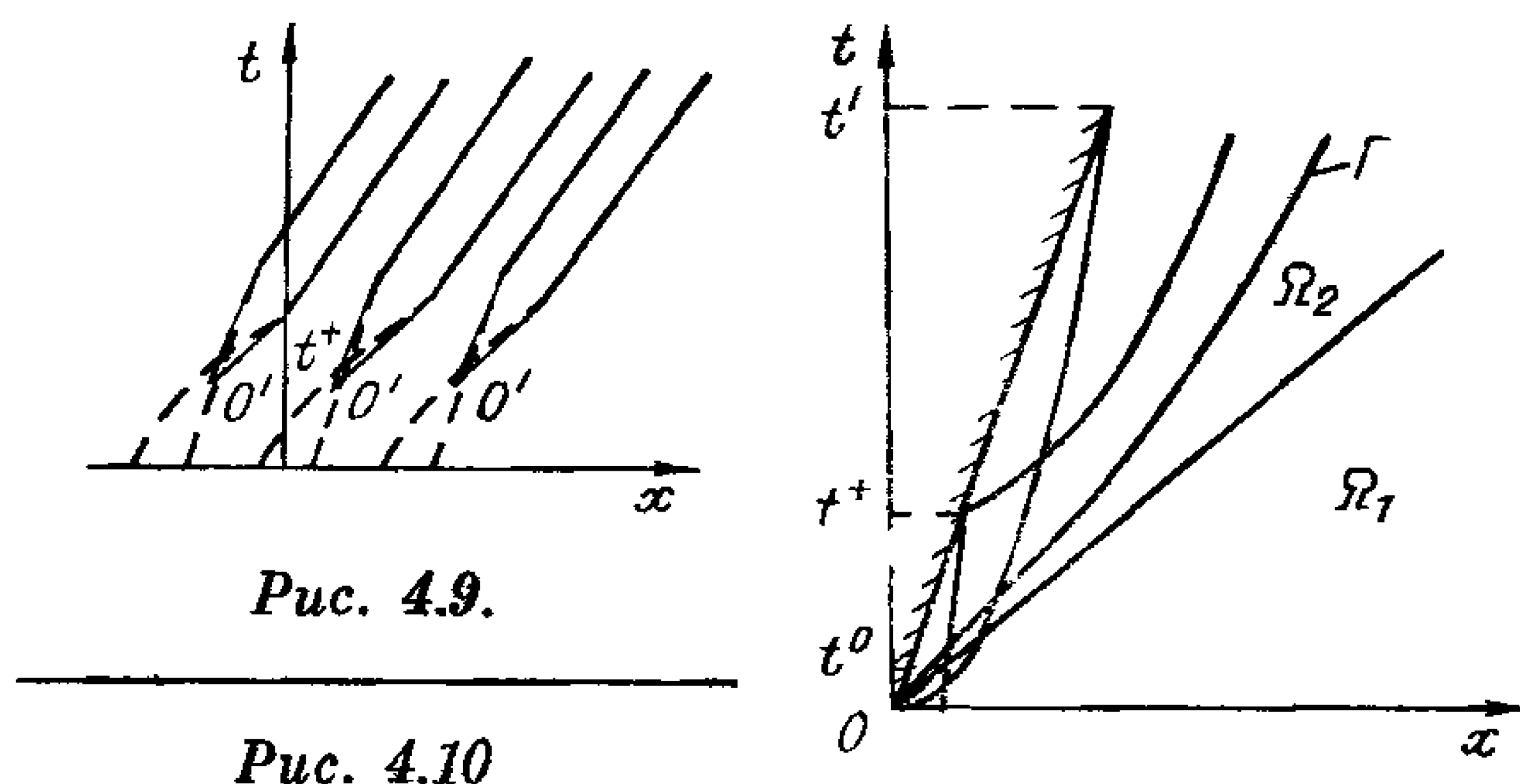


Рис. 4.9.

Рис. 4.10

каустик (сплошные) в нашем случае приведено на рис. 4.9, где $t^+ = -\tau \ln \left(1 - \frac{1}{\delta u_2 k \tau}\right)$. Для вычисления m_2 на каустике проведем разложение f до членов 4-й степени $(u_2'^* - y)^4$

$$f \approx \frac{1}{4} (kK)^2 ((\delta u_2 k K)^2 - 1) (u_2'^* - y)^4$$

и, подставляя в (18), найдем m_2 на каустике

$$m_2 \approx m_2^0 \Gamma \left(\frac{1}{4} \right) / \left(\sqrt{2\pi} \sigma^{1/4} (2 (kK)^2 ((\delta u_2 k K)^2 - 1))^{1/4} \right), \quad (26)$$

где Γ — гамма-функция. Эта формула справедлива всюду на каустике, кроме точки O' (и ее окрестности). В точке O' будет справедливо разложение $f \approx \frac{1}{36} (\delta u_2 (kK)^3)^2 (u_2'^* - y)^6$, что позволяет вычислить m_2 по формуле

$$m_2 \approx \frac{m_2^0}{\sigma^{1/3}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3\pi}} \cdot \Gamma \left(\frac{1}{6} \right) / (Kk (2\delta u_2)^{1/3}). \quad (27)$$

Таким образом, в континуально-дискретной модели, не учитывающей объема частиц, малые возмущения, возникшие в момент $t=0$ на $-\infty < x < +\infty$, остаются всюду конечными в полуплоскости $t > 0$, $-\infty < x < +\infty$. Максимум возмущений достигается на каустиках, определяемых уравнением (25), а их величина обратно пропорциональна ширине функции распределения в дробной степени (26) — (27), в то время как в двухжидкостной модели (без учета объема частиц) малые возмущения неограниченно растут на каустиках по закону (22) — (23).

§ 6. ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ОДНОМЕРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ О ПОРШНЕ В КОНТИНУАЛЬНО-ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ

Область течения смеси газ — частицы может быть ограничена поверхностями s . В этом случае возникает вопрос о постановке граничных условий системы (3.1) — (3.2). Для уравнений, опи-

сывающих газовую фазу на поверхности s , ставится условие непротекания

$$(\vec{u}_1 - \vec{u}_s) \vec{n} = 0, \quad (1)$$

где $\vec{u}_s$ — скорость поверхности, $\vec{n}$ — нормаль к поверхности. Для уравнений, описывающих частицы, необходимо задать на границе функцию распределения для частиц, покидающих поверхность $\mathcal{F}(t, \vec{x}, \vec{\xi}'')$ при $\vec{\xi}'' \vec{n} > 0$, где $\vec{\xi}''$ — скорость частиц. Поскольку уравнение (3.1) имеет тот же вид, что и для разреженного газа, воспользуемся формулами для граничной функции, описывающей поведение разреженного газа. Согласно [22], имеем

$$\mathcal{F}(t, \vec{x}, \vec{\xi}_r'') = \int_{(\vec{\xi}_i'' - \vec{u}_s) \vec{n} < 0} \mathcal{F}(t, \vec{x}, \vec{\xi}_i'') K(t, \vec{u}_s, \vec{\xi}_i, \vec{\xi}_r'') d\vec{\xi}_i'', \quad (2)$$

где $K(t, \vec{u}_s, \vec{\xi}_i'', \vec{\xi}_r'') = W(t, \vec{\xi}_i'' - \vec{u}_s, \vec{\xi}_r'' - \vec{u}_s) \frac{(\vec{u}_s - \vec{\xi}_i'') \vec{n}}{(\vec{\xi}_r'' - \vec{u}_s) \vec{n}}, \int W d\vec{\xi}_r'' = 1,$

$W(\vec{\xi}_i'', \vec{\xi}_r'')$ — вероятность того, что частица, подлетевшая к поверхности со скоростью $\vec{\xi}_i''$, отлетит от нее со скоростью $\vec{\xi}_r''$.

Для определения W необходимо знать характер взаимодействия частиц с поверхностью. По аналогии с газовой динамикой примем

$$K(\vec{\xi}_i', \vec{\xi}_r') = (1 - \alpha_\tau) \delta(\vec{\xi}_i' - (\vec{\xi}_r' - 2(\vec{n} \vec{\xi}_r') \vec{n})) + \alpha_\tau \frac{2h_r^2}{\pi} \exp(-h_r^2 (\vec{\xi}_r')^2) (\vec{\xi}_r' \vec{n}), \quad (3)$$

где $\vec{\xi}_i' = \vec{\xi}_i'' - \vec{u}_s$, $1 - \alpha_\tau$ — часть зеркально отраженных частиц, α_τ — часть диффузно отраженных частиц. В этом случае величина h_r определяется такими параметрами, как шероховатость, несферичность частиц и т. д.

Рассмотрим постановку и решение одномерной краевой задачи о поршне для системы (3.7). Пусть в полубесконечную трубу, заполненную газом с частицами в момент $t = 0$, начинает двигаться поршень с постоянной скоростью u_1 . Требуется найти движение смеси в последующие моменты времени $t > 0$. Будем считать начальную плотность частиц малой $\frac{\rho_2}{\rho_1} \ll 1$ так, что можно пренебречь влиянием частиц на газ. Поэтому течение газа является известным. Считая ударную волну сильной, из [7] получим

$$\rho_{11} = \rho_{11}^0 \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right), \quad D = \frac{(\gamma + 1)}{2} u, \quad u_1 = u,$$

$$p = \frac{(\gamma + 1)}{2} \rho_{11} u^2, \quad x < Dt, \quad \rho_{11} = \rho_{11}^0, \quad u_1 = 0, \quad x > Dt.$$

Область течения разбивается при этом на две подобласти: Ω_1 , Ω_2 (рис. 4.10). Систему уравнений, описывающую частицы, возьмем в виде (3.7)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + u_2 \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{u_1 - u_2}{\tau} \mathcal{F} \right) &= 0, \quad \frac{dx}{dt} = u_2, \\ \frac{du_2}{dt} &= \frac{u_1 - u_2}{\tau}, \quad m_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F} du_2, \quad \langle u_2 \rangle = \frac{1}{m_2} \int_{-\infty}^{+\infty} u_2 \mathcal{F} du_2 \end{aligned} \quad (4)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} u_2|_{t=0} &= u_2^*, \quad x|_{t=0} = x_2^*, \\ \mathcal{F}|_{t=0} &= m_2^0 \delta(u_2^*), \quad m_2^0 = \text{const}. \end{aligned} \quad (5)$$

Считая, что столкновение частиц с поршнем происходит упруго, из (3) получим

$$K = \delta(\xi_r + \xi_i - 2u). \quad (6)$$

Используя второе и третье уравнения системы (4), найдем траектории частиц:

в Ω_1 для $0 < t < t^0$

$$\begin{aligned} u_2 &= u_2^* e^{-t/\tau}, \\ x &= x_2^* + \tau u_2^* (1 - e^{-t/\tau}); \end{aligned} \quad (7)$$

в Ω_2 для $t^0 < t < t^+ - 0$,

$$\begin{aligned} u_2 &= u (1 - e^{-(t-t^0)/\tau}) + u_2^* e^{-t/\tau}, \\ x &= x_2^* + \tau u_2^* (1 - e^{-t/\tau}) + u(t - t^0) - \tau u (1 - e^{-(t-t^0)/\tau}); \end{aligned} \quad (8)$$

в Ω_2 для $t > t^+ + 0$ (отраженные частицы)

$$\begin{aligned} u_2 &= u + (\xi_r - u) e^{-(t-t^+)/\tau}, \\ x &= ut + \tau (\xi_r - u) (1 - e^{-(t-t^+)/\tau}). \end{aligned} \quad (9)$$

Решение первого уравнения (4) ищем в виде $\mathcal{F} = \mathcal{F}_i + \mathcal{F}_r$, где $\mathcal{F}_i = \delta(u_2^*) e^{t/\tau}$ — функция распределения (ФР) падающих частиц, $\mathcal{F}_r = \int \delta(\xi_i + \xi_r - 2u) e^{t^+/\tau} \delta(u_2^*) d\xi_i$ — ФР отраженных частиц. Соответствующие траектории для падающих частиц имеют вид

$$x = x_2^* + u \left(t - \frac{x_2^*}{D} \right) - \tau u \left(1 - e^{-\left(t - \frac{x_2^*}{D} \right) / \tau} \right), \quad (10)$$

а для отраженных

$$\begin{aligned} x &= ut + \tau (u - u_2^-) (1 - e^{-(t-t^+)/\tau}), \\ u_2^- &= x_2^* (1 - u/D) / \tau. \end{aligned} \quad (11)$$

Используя полученные решения (10), (11), найдем полную массу частиц, выпадающих на поршень. Полагая в (11) $x = ut$, получим время попадания частицы на поршень

$$t^+ = \frac{x_2^*}{D} - \tau \ln \left(1 - \frac{x_2^*}{\tau u} (1 - u/D) \right), \quad (12)$$

отсюда

$$M_p = m_2^0 x_2^+, \quad x_2^+ = \tau u / (1 - u/D). \quad (13)$$

Для $\gamma = 1.4$ получим $M_p = 5m_2^0 D\tau$.

Отметим возможность многократного столкновения частицы с поверхностью поршня. Это связано с тем, что частицы отражаются от поршня со скоростью, большей скорости D , обгоняют фронт ударной волны (УВ), тормозятся в Ω_1 и могут вторично столкнуться с поршнем. Используя решения (7)–(9) при $\gamma = 1.4$ и $x^* = 0$, найдем время второго столкновения частицы (см. рис. 4.10) $t' = 2\tau$. В случае $\gamma = 3$ все отраженные частицы лежат за фронтом УВ и сталкиваются с поршнем один раз. Используя выражения для ФР падающих и отраженных частиц и вычисляя соответствующие интегралы от дельта-функций, найдем $m_2(t, x)$ в подобласти $x(t)|_\Gamma < x < Dt$

$$m_2 = m_2^0 \left| \left(1 - \frac{u}{D} + \frac{u}{D} e^{-(t-t_1^0)/\tau} \right) \right|, \quad t_1^0 = \frac{x_2^*}{D}, \quad (14)$$

где x_2^* определяется из уравнения (10) (t, x фиксированы), а уравнение кривой Γ : $x(t)|_\Gamma = ut + \tau u (1 - e^{-t/\tau})$. В подобласти $ut < x < x(t)|_\Gamma$ решение имеет вид

$$m_2 = m_2^0 \left| \left(1 - \frac{u}{D} + \frac{u}{D} e^{-(t-t_1^0)/\tau} \right) \right| + m_2^0 \left| \left(1 - \frac{u}{D} + \frac{u}{D} e^{-(t-t_2^0)/\tau} \right) \right|, \quad (15)$$

где $t_2^0 = x_2^*/D$, x_2^* — корень системы (11), (12), а t_1^0 определяется так же, как для уравнения (14). В силу (13) величина t_2^0 ограничена, $(t_2^0)_{\max} = \frac{x_2^+}{D} = \frac{2\tau}{\gamma - 1}$, поэтому из (10), (12) можно получить асимптотику для m_2

$$m_2 = \begin{cases} 2m_2^0 \left| \left(1 - \frac{u}{D} \right) \right|, & ut < x < u(t + \tau), \\ m_2^0 \left| \left(1 - \frac{u}{D} \right) \right|, & u(t + \tau) < x < Dt - l_p, \\ m_2^0 \left| \left(1 - \frac{u}{D} + \frac{u}{D} e^{-(t-\frac{x}{D})/\tau} \right) \right|, & x \leq Dt - \varepsilon^0, \quad \varepsilon^0 \ll l_p, \\ m_2^0, & x > Dt, \end{cases} \quad (16)$$

где $t \gg \tau$, l_p — длина релаксации. Величина m_2 в области $u(t + \tau) < x < Dt - l_p$ может быть просто объяснена из условия,

что в этой области скорость частицы равна скорости газа, поэтому из закона сохранения массы $m_2^0 D = m_2 (D - u)$ получим $m_2 = m_2^0 \left(1 - \frac{u}{D}\right)$, что совпадает со вторым уравнением в (16).

§ 7. ЗАДАЧА О РАЗЛЕТЕ ОБОЛОЧКИ

С УЧЕТОМ РАЗРУШЕНИЯ И ИСТЕЧЕНИЯ ПРОДУКТОВ ДЕТОНАЦИИ МЕЖДУ ОСКОЛКАМИ

7.1. Физико-математическая постановка задачи

Теоретическому изучению разлета оболочки под действием продуктов детонации посвящено большое число работ [28—38]. Тем не менее вопрос о влиянии разрушения и истечения продуктов детонации до сих пор остается невыясненным. Основную трудность представляет расчет обтекания осколка продуктами детонации с учетом влияния соседних осколков. Идея предлагаемого подхода [39] состоит в том, что при большом числе осколков можно перейти к осредненному описанию течения и воспользоваться уравнениями, полученными в § 1 для переходного слоя. Физически это означает моделирование облака осколков пористым поршнем, сквозь который просачиваются продукты детонации. Пористость поршня не остается постоянной, а увеличивается при радиальном расширении осколков. Перейдем к постановке задачи.

Рассмотрим цилиндрическую оболочку с внутренним радиусом a^0 , внешним b^0 и толщиной H . Внутри оболочки находится заряд взрывчатого вещества, вне оболочки — воздух. После выхода детонационной волны на внешнюю поверхность оболочки она начинает быстро расширяться. В оболочке и продуктах детонации (ПД) наблюдается сложная ударно-волновая картина, условно изображенная на рис. 4.11 ломаными линиями. Здесь область D_1 занимает ПД, D_2 — сплошная оболочка, D_3 — разрушенная, D_4 — воздух, Γ_1 — границы разрушенной оболочки, на которых имеет место комбинированный разрез (КР), Γ_2 — контактный разрыв ПД — воздух, Γ_3 — ударная волна в воздухе. До разрушения оболочка описывается уравнениями идеальной упругопластической среды [40]

$$\rho_2 \frac{\partial u_2}{\partial t} = -\frac{\partial p_2}{\partial r} + \frac{\partial S_1}{\partial r} + (k-1) \frac{(S_1 - S_2)}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial t} = u_2,$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \rho_2 \frac{\partial u_2}{\partial r} + (k-1) \frac{\rho_2 u_2}{r} = 0,$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{E}_2}{\partial t} - \frac{p_2}{\rho_2^2} \frac{\partial \rho_2}{\partial t} - \left(S_1 \frac{\partial u_2}{\partial r} + (k-1) S_2 \frac{u_2}{r} \right) / \rho_2 &= 0, \\
p_2 &= (\gamma_2 - 1) \rho_2 \mathcal{E}_2 + c_0^2 (\rho_2 - \rho_2^0), \\
\frac{\partial S_1'}{\partial t} &= 2\mu \left(\frac{\partial u_2}{\partial r} + \frac{1}{3\rho_2} \frac{\partial \rho_2}{\partial t} \right), \\
\frac{\partial S_2'}{\partial t} &= 2\mu \left(\frac{u_2}{r} + \frac{1}{3\rho_2} \frac{\partial \rho_2}{\partial t} \right), \quad S_1' + S_2' + S_3' = 0, \\
S_i &= \begin{cases} S_i', & (S_1')^2 + (S_2')^2 + (S_3')^2 \leq \frac{2}{3} Y^2, \\ \sqrt{2/3} S_i' Y / \sqrt{(S_1')^2 + (S_2')^2 + (S_3')^2}, & \sigma_i = S_i - p, \end{cases}
\end{aligned} \tag{1}$$

где u_2 , ρ_2 , p_2 , $\mathcal{E}_2$, S_i , σ_i , c_0 , Y , μ — скорость, плотность, давление, удельная внутренняя энергия, компоненты девиатора и полного тензора напряжений, скорость звука, предел текучести и модуль сдвига оболочки; $k = 1, 2, 3$ — параметр симметрии. ПД и воздух в областях D_1 , D_4 описываются уравнениями идеального газа с $\gamma = 3$ для ПД и $\gamma = 1.4$ для воздуха:

$$\begin{aligned}
\rho_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} &= - \frac{\partial p_1}{\partial r}, \quad \frac{\partial r}{\partial t} = u_1, \quad \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_1 \frac{\partial u_1}{\partial r} + (k-1) \frac{\rho_1 u_1}{r} = 0, \\
\frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial t} - \frac{p_1}{\rho_1^2} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} &= 0, \quad p_1 = (\gamma_1 - 1) \rho_1 \mathcal{E}_1
\end{aligned} \tag{2}$$

(u_1 , ρ_1 , $\mathcal{E}_1$, p_1 — скорость, плотность, удельная внутренняя энергия, давление газа и ПД). Уравнения (1), (2) справедливы до момента разрушения t^* , определяемого из известного критерия Тейлора [29—31], согласно которому оболочка считается разрушенной, если в ней всюду действуют растягивающие напряжения $\sigma_2 > 0$. Разрушение происходит радиальными трещинами на ряд осколков, число которых может быть найдено из полуэмпирических формул [35]. Для рассмотренных в данной работе скоростей движения оболочек их число было порядка 60. В области D_3 разрушенная оболочка моделировалась несжимаемым пористым поршнем:

$$\begin{aligned}
\frac{d \langle u_2 \rangle}{dt} &= (p^+ - p^-) / (\rho_{22} h), \quad \frac{d \langle r_2 \rangle}{dt} = \langle u_2 \rangle, \\
p^\pm &= p_1 (\langle r_2 \rangle \mp h/2), \quad \rho_{22} = \text{const}, \quad m_2^* = (\langle r_2 \rangle (t^*) / \langle r_2 \rangle (t))^{(k-1)}, \\
m_1^* &= 1 - m_2^*,
\end{aligned} \tag{3}$$

где $\langle u_2 \rangle$, $\langle r_2 \rangle$, h , ρ_{22} — скорость, координата, толщина и истинная плотность поршня; $p^\pm$ — давление ПД слева и справа от поршня; m^* , m^* — минимальная пористость и максимальная объемная концентрация частиц в поршне. Скачок пористости на

входе и выходе из пористого поршня размазывался, так что

$$m_2(t, r) = \begin{cases} m_2^*(t) \frac{r + h' - \langle r_2 \rangle}{h' - l}, & \langle r_2 \rangle - h' \leq r \leq \langle r_2 \rangle - l, \\ m_2^*(t), & \langle r_2 \rangle - l < r < \langle r_2 \rangle + l, \\ m_2^*(t) \frac{h' + \langle r_2 \rangle - r}{h' - l}, & \langle r_2 \rangle + l < r < \langle r_2 \rangle + h' \end{cases} \quad (4)$$

($l = h/4$, $h' - l = h/4$ — ширина размазки). Физически это означает, что каждая пора моделируется соплом с кусочно-линейным профилем. Отметим, что при выполнении неравенства $h' - l \ll \ll \langle r_2 \rangle$ ширина размазки не влияет на течение ПД вне пористого поршня. Начальные условия для системы (3) при $t = t^*$ находятся по формулам

$$\langle u_2 \rangle = \int_{a(t^*)}^{b(t^*)} u_2 \rho_2 r dr \bigg| \int_{a(t^*)}^{b(t^*)} \rho_2 r dr, \quad \langle r_2 \rangle = (a(t^*) + b(t^*)) / 2.$$

Уравнения для ПД в пористом поршне получены из полной системы уравнений (1.6) с учетом (3), (4) и имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} (\rho_1 u_1) + (k - 1) \frac{\rho_1 u_1}{r} &= 0, \quad \rho_1 = \rho_{11} m_1, \quad m_1 + m_2 = 1, \\ \rho_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r} (p_1 m_1) &= p^\sigma \frac{\partial m_1}{\partial r}, \quad \frac{\partial r}{\partial t} = u_1, \\ \frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial t} + p_1 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho_{11}} \right) &= (\langle u_2 \rangle - u_1) \left(\frac{\rho^\sigma - p_1}{\rho_1} \right) \frac{\partial m_1}{\partial r}, \\ p^\sigma &= \begin{cases} p_1 & \text{при } \frac{\partial m_1}{\partial r} < 0, \quad M_{12} < 1, \quad \frac{\partial m_1}{\partial r} > 0, \quad M_{12} > 1, \\ p^- & \text{при } \frac{\partial m_1}{\partial r} > 0, \quad M_{12} < 1, \end{cases} \\ M_{12} &= |u_1 - \langle u_2 \rangle| / c_0, \quad c_0 = \sqrt{\gamma p_1 / \rho_{11}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Для системы уравнений (1) — (5) ставится задача в области $0 \leq t < \infty$, $0 \leq r < \infty$ с начальными условиями $u_1 = u_1(r)$, $\rho_1 = \rho_1(r)$, $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_1(r)$ при $0 \leq r < a^0$; $u_2 = 0$, $\rho_2 = \rho_2^0$, $\mathcal{E}_2 = 0$, $\sigma_1 = 0$ при $a^0 < r \leq b^0$; $u_1 = 0$, $\rho_1 = \rho_1^0$, $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_1^0$ при $b^0 < r$ и граничным условием $u_1(r = 0) = 0$. На контактных разрывах выполняется равенство скоростей и нормальных напряжений. Решение системы уравнений (1) — (5) находится численно по явной схеме «крест» с первым порядком точности $O(\tau, \Delta h)$, где τ , Δh — шаги по времени и пространству. При расчете «просачивания» ПД в каждой точке необходимо определить два континуума. Один относится к ПД, а другой — к пористому поршню. Обсудим на примере двухжидкостной модели особенности адаптации схемы «крест» для расчета движения взаимопроникающих континуумов.

7.2. Численная реализация метода взаимопроникающих континуумов

Уравнения двухжидкостной модели (1.18), (1.20) в одномерном случае без учета теплообмена между фазами имеют вид

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \rho_1 w + \frac{(k-1) \rho_1 w}{x} &= 0, \quad \rho_1 = \rho_{11} m_1, \\
 \rho_1 \frac{d_1 w}{dt} &= -m_1 \frac{\partial p}{\partial x} - \rho_1 m_2 f, \quad \frac{d_1}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + w \frac{\partial}{\partial x}, \\
 \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \rho_2 u + \frac{(k-1) \rho_2 u}{x} &= 0, \quad \rho_2 = \rho_{22} m_2, \\
 \rho_2 \frac{d_2 u}{dt} &= -m_2 \frac{\partial p}{\partial x} + \rho_1 m_2 f, \quad f = \kappa_f (w - u), \\
 m_1 + m_2 &= 1, \quad \frac{d_1 \mathcal{E}_1}{du} + p \frac{d_1}{dt} \left(\frac{1}{\rho_{11}} \right) = 0, \quad p_2 = Q_M = Q_D = 0, \\
 p &= (\gamma - 1) \rho_{11} \mathcal{E}_1, \quad \rho_{22} = \text{const}, \quad \frac{d_2}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x},
 \end{aligned} \tag{6}$$

где w , p , ρ_{11} , ρ_1 — скорость, давление, истинная плотность газа, средняя плотность газа; u , ρ_{22} , ρ_2 — скорость, истинная плотность, средняя плотность частиц.

Прежде чем выписать разностную схему для системы (6), введем сетку для газа x , и сетку для частиц x_i (рис. 4.12). С учетом сделанных замечаний разностная схема «крест» для системы (6) запишется на подвижной разностной сетке в виде

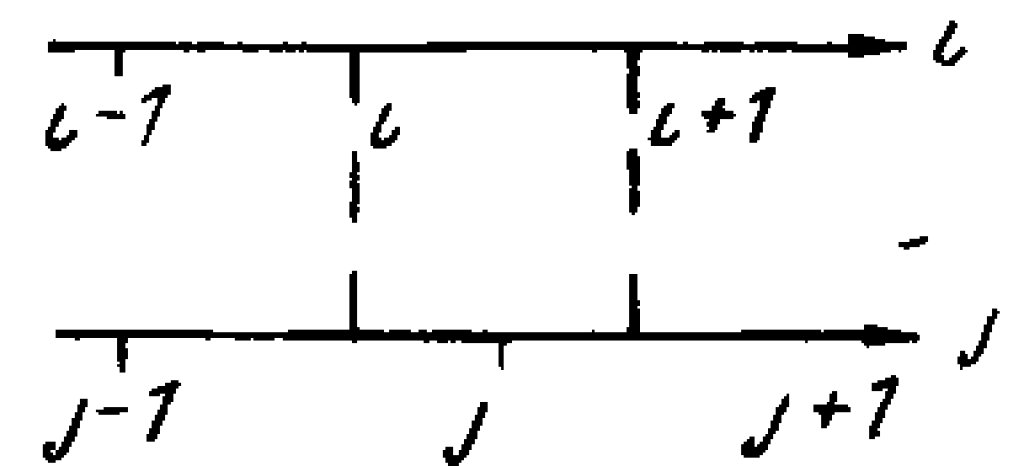


Рис. 4.12.

$$\begin{aligned}
 \frac{u_i^{n+1/2} - u_i^{n-1/2}}{\tau^n} &= - \frac{2(p_{si+1/2} - p_{si-1/2})}{\rho_{22}(x_{i+1}^n - x_{i-1}^n)} + \rho_{1s}^n f_i^n / \rho_{22}, \\
 f_i^n &= \kappa_f (w_{si}^{n-1/2} - u_1^{n-1/2}), \quad \frac{x_i^{n+1} - x_i^n}{\tau} = u_i^{n+1/2}, \\
 \rho_{2i+1/2}^{n+1} &= \rho_{2i+1/2}^n \frac{(x_{i+1}^n)^k - (x_i^n)^k}{(x_{i+1}^{n+1})^k - (x_i^{n+1})^k}, \quad k = 1, 2, 3, \\
 m_{2i+1/2}^{n+1} &= \rho_{2i+1/2}^{n+1} / \rho_{22}, \quad m_{1i+1/2}^{n+1} = 1 - m_{2i+1/2}^{n+1}, \\
 \frac{w_j^{n+1/2} - w_j^{n-1/2}}{\tau^n} &= - \frac{4(\bar{p}_{j+1/2}^n - \bar{p}_{j-1/2}^n)}{(\rho_{11j-1/2}^n + \rho_{11j+1/2}^n)(x_{j+1}^n - x_{j-1}^n)} - \\
 &\quad - \frac{1}{2} (m_{2sj-1/2}^n + m_{2sj+1/2}^n) f_j^n; \\
 f_j^n &= \kappa_f (w_j^{n-1/2} - u_{sj}^{n-1/2}), \quad \frac{x_j^{n+1} - x_j^n}{\tau^n} = w_j^{n+1/2}, \\
 \rho_{1j+1/2}^{n+1} &= \rho_{1j+1/2}^n \frac{(x_{j+1}^n)^k - (x_j^n)^k}{(x_{j+1}^{n+1})^k - (x_j^{n+1})^k}, \quad k = 1, 2, 3,
 \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
\rho_{11j+1/2}^{n+1} &= \rho_{1j+1/2}^{n+1} / m_{1sj+1/2}^{n+1}, \\
v_{j+1/2}^{n+1} &= 1 / \rho_{11j+1/2}^{n+1}, \\
\mathcal{E}_{1j+1/2}^{n+1} - \mathcal{E}_{1j+1/2}^n + \frac{1}{2} (\bar{p}_{j+1/2}^{n+1} + \bar{p}_{j+1/2}^n) (v_{j+1/2}^{n+1} - v_{j+1/2}^n) &= 0, \\
p_{j+1/2}^{n+1} &= (\gamma - 1) \rho_{11j+1/2}^{n+1} \mathcal{E}_{1j+1/2}^{n+1}, \\
\bar{p}_{j+1/2}^{n+1} &= p_{j+1/2}^{n+1} + \omega_{j+1/2}^{n+1}, \\
\omega_{j+1/2}^{n+1} &= \begin{cases} 0, & \Delta w > 0, \\ -C_1 \rho_{11j+1/2}^{n+1} a_{j+1/2}^{n+1} \Delta w + C_2 \rho_{11j+1/2}^{n+1} (\Delta w)^2, & \Delta w < 0, \end{cases} \quad (8) \\
\Delta w &= w_{j+1}^{n+1/2} - w_j^{n+1/2}, \quad a_{j+1/2}^{n+1} = (\gamma p_{j+1/2}^{n+1} / \rho_{11j+1/2}^{n+1})^{1/2}, \\
\rho_{2sj+1/2}^{n+1} &= \sum_i \rho_{2i+1/2}^{n+1} V_{i+1/2}^{n+1} / \sum_i V_{i+1/2}^{n+1}, \\
m_{2sj+1/2}^{n+1} &= \rho_{2sj+1/2}^{n+1} / \rho_{22}, \quad m_{1sj+1/2}^{n+1} = 1 - m_{2sj+1/2}^{n+1}, \\
u_{sj+1/2}^{n+1/2} &= \sum_i \rho_{2i+1/2}^{n+1} u_{i+1/2}^{n+1/2} V_{i+1/2}^{n+1} / \sum_i \rho_{2i+1/2}^{n+1} V_{i+1/2}^{n+1}, \\
u_{i+1/2}^{n+1/2} &= \frac{1}{2} (u_{i+1}^{n+1/2} + u_i^{n+1/2}), \\
u_{sj}^{n+1/2} &= \frac{1}{2} (u_{sj-1/2}^{n+1/2} + u_{sj+1/2}^{n+1/2}),
\end{aligned}$$

где $V_{i+1/2}^{n+1}$ — доля объема i ячейки, попадающей в j (см. рис. 3.12),

$$\begin{aligned}
\rho_{1si+1/2}^{n+1} &= \sum_j \rho_{1j+1/2}^{n+1} V_{j+1/2}^{n+1} / \sum_j V_{j+1/2}^{n+1}, \\
\rho_{11si+1/2}^{n+1} &= \rho_{1si+1/2}^{n+1} / m_{1i+1/2}^{n+1}, \quad w_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (w_j^{n+1/2} + w_{j+1}^{n+1/2}), \\
w_{si+1/2}^{n+1/2} &= \sum_j \rho_{1j+1/2}^{n+1} w_{j+1/2}^{n+1/2} V_{j+1/2}^{n+1} / \sum_j \rho_{1j+1/2}^{n+1} V_{j+1/2}^{n+1}, \\
\mathcal{E}_{1si+1/2}^{n+1/2} &= \sum_j \rho_{1j+1/2}^{n+1} \mathcal{E}_{1j+1/2}^{n+1} V_{j+1/2}^{n+1} / \sum_j \rho_{1j+1/2}^{n+1} V_{j+1/2}^{n+1}, \quad (9) \\
\bar{p}_{si+1/2}^{n+1} &= (\gamma - 1) \rho_{11si+1/2}^{n+1} \mathcal{E}_{1si+1/2}^{n+1/2} + \omega_{si+1/2}^{n+1}, \\
\omega_{si+1/2}^{n+1} &= \begin{cases} 0, & \Delta w_s > 0, \\ -C_1 \rho_{11si+1/2}^{n+1} a_{si+1/2}^{n+1} \Delta w_s + C_2 \rho_{11si+1/2}^{n+1} (\Delta w_s)^2, & \Delta w_s < 0, \end{cases} \\
\Delta w_s &= w_{si+1}^{n+1/2} - w_{si}^{n+1/2},
\end{aligned}$$

где $a_{si+1/2}^{n+1}$ — скорость звука в газе, τ — шаг по времени, который выбирался из условия Куранта

$$\tau^{n+1} = \min_{i,j} \left(\lambda_1 \frac{x_{j+1}^{n+1} - x_j^{n+1}}{a_{j+1/2}^{n+1}}, \quad \lambda_2 \frac{x_{i+1}^{n+1} - x_i^{n+1}}{u_{i+1/2}^{n+1/2}} \right), \quad \lambda_i < 1. \quad (10)$$

Система уравнений (7), (8) представляет собой явную схему «крест», записанную для системы (6). Формулы (9), с помощью

которых происходит интерполяция параметров с одной сетки на другую, являются следствием законов сохранения массы, импульса и энергии. Порядок вычислений по уравнениям (7) — (9) следующий: сначала по уравнениям (7) вычисляются параметры частиц на $n + 1$ слое, затем из первых трех уравнений (8) находят скорости, координаты узлов сетки газа и среднюю плотность ρ_1 . После этого, используя первые три уравнения (9), определяют m_1^{n+1} на новой сетке газа, что позволяет из (8) найти истинную плотность газа ρ_{11}^{n+1} и остальные параметры: $\mathcal{E}_1^{n+1}$, p^{n+1} . Последний этап состоит в вычислении параметров частиц на сетке газа (и наоборот) с использованием (9). Предложенная схема (7) — (9) имеет первый порядок точности $O(\tau, h)$ на гладких течениях. Для размазывания сильных разрывов в уравнениях (7) — (8) вводится искусственная комбинированная вязкость с коэффициентами, рекомендуемыми в [40]: $C_1 = 0.2$, $C_2 = 2$. Выбор таких коэффициентов обеспечивал размазывание фронта ударной волны на четыре ячейки.

Для отработки численного алгоритма рассмотрим классическую задачу о распаде разрыва в смеси газ — частицы.

Пример 1. Газ и частицы в момент $t = 0$ занимают область Ω : $0 \leq x \leq 1.98$ см.

Начальные условия: $w(x) = 0$, $\rho_{11}(x) = 1.001 \cdot 10^{-3}$ г/см³.

$$p(x) = \begin{cases} 1.6 \cdot 10^{-3} \text{ мбар,} & x < 0.98 \text{ см,} \\ 1.28 \cdot 10^{-3} \text{ мбар,} & x > 0.98 \text{ см,} \end{cases}$$

$$u(x) = 0, \quad \rho_{22} = 1 \text{ г/см}^3, \quad m_2 = 10^{-3}, \quad \gamma = 1.4.$$

Граничные условия: $w(0) = 0$, $u(0) = 0$, $w(1.98) = 0$, $u(1.98) = 0$.

Рассматривается два случая: а) $\kappa_f = 1$ мкс⁻¹; б) $\kappa_f = 10^2$ мкс⁻¹. В точке $x = 0.98$ см происходит распад разрыва, в сторону положительных x будет распространяться ударная волна, а в сторону отрицательных — волна разрежения. На рис. 4.13 точками показано распределение на момент $t = 0.312$ мкс, сплошной линией — точное решение задачи о распаде разрыва в чистом газе, вычисленное по формулам [41]

$$p = \left(\frac{p^+}{\rho_{11}^+ c^+} + \frac{p^-}{\rho_{11}^- c^-} \right) / \left(\frac{1}{\rho_{11}^+ c^+} + \frac{1}{\rho_{11}^- c^-} \right),$$

$$w = (p^- - p^+) / (\rho_{11}^- c^- + \rho_{11}^+ c^+),$$

где $p^\pm$, $\rho_{11}^\pm$, $c^\pm$ — давление, плотность и скорость газа соответственно слева и справа от разрыва. Для расчета ударной волны используется комбинированная искусственная вязкость. При расчете волны разрежения в точке $x = 0.6$ см (см. рис. 4.13) наблюдается провал давления порядка 5 %, который приводит к соответствующему росту скорости в этой точке (рис. 4.14). Эта нефизическая особенность присуща достаточно широкому классу

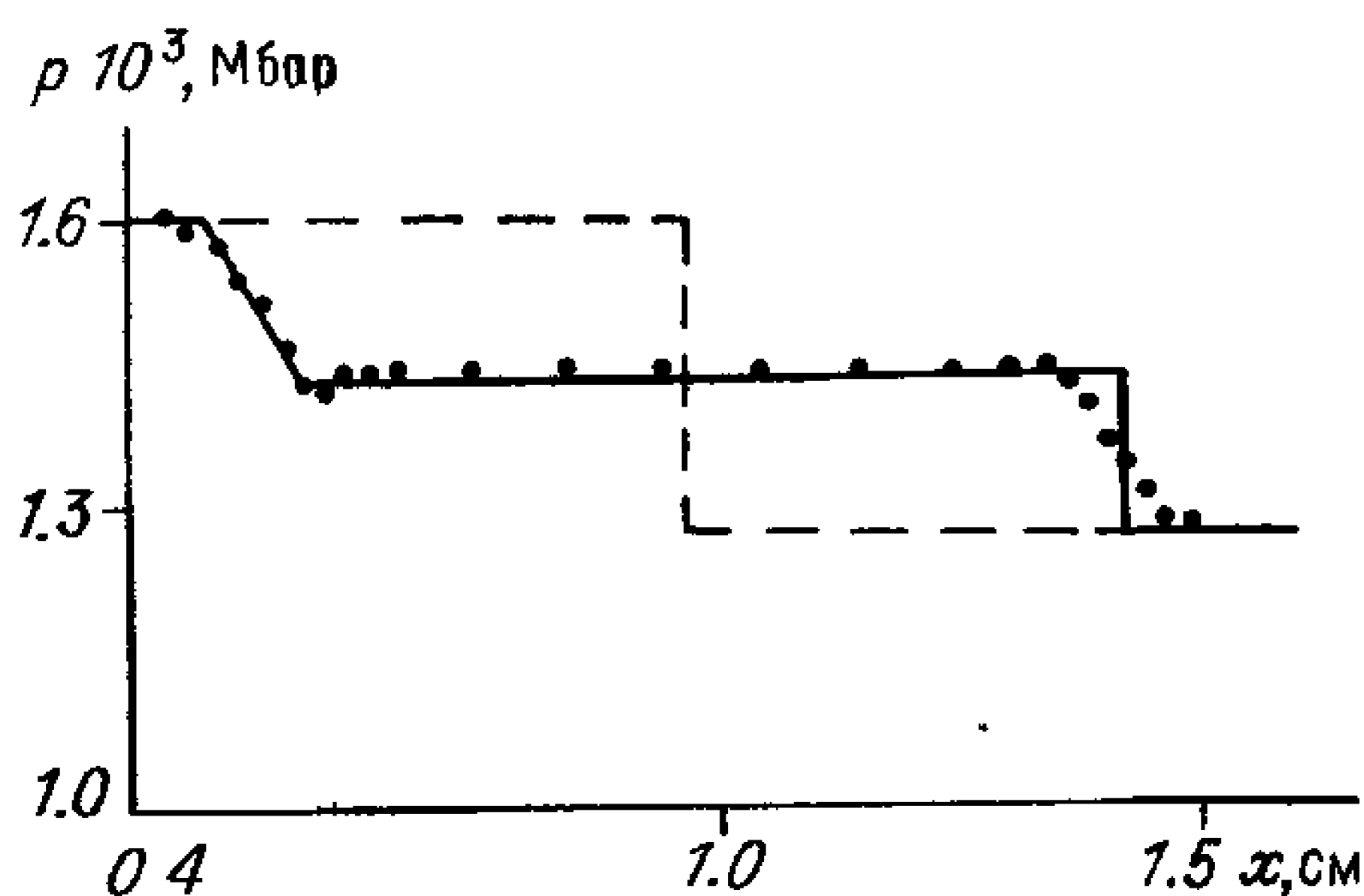


Рис. 4.13.

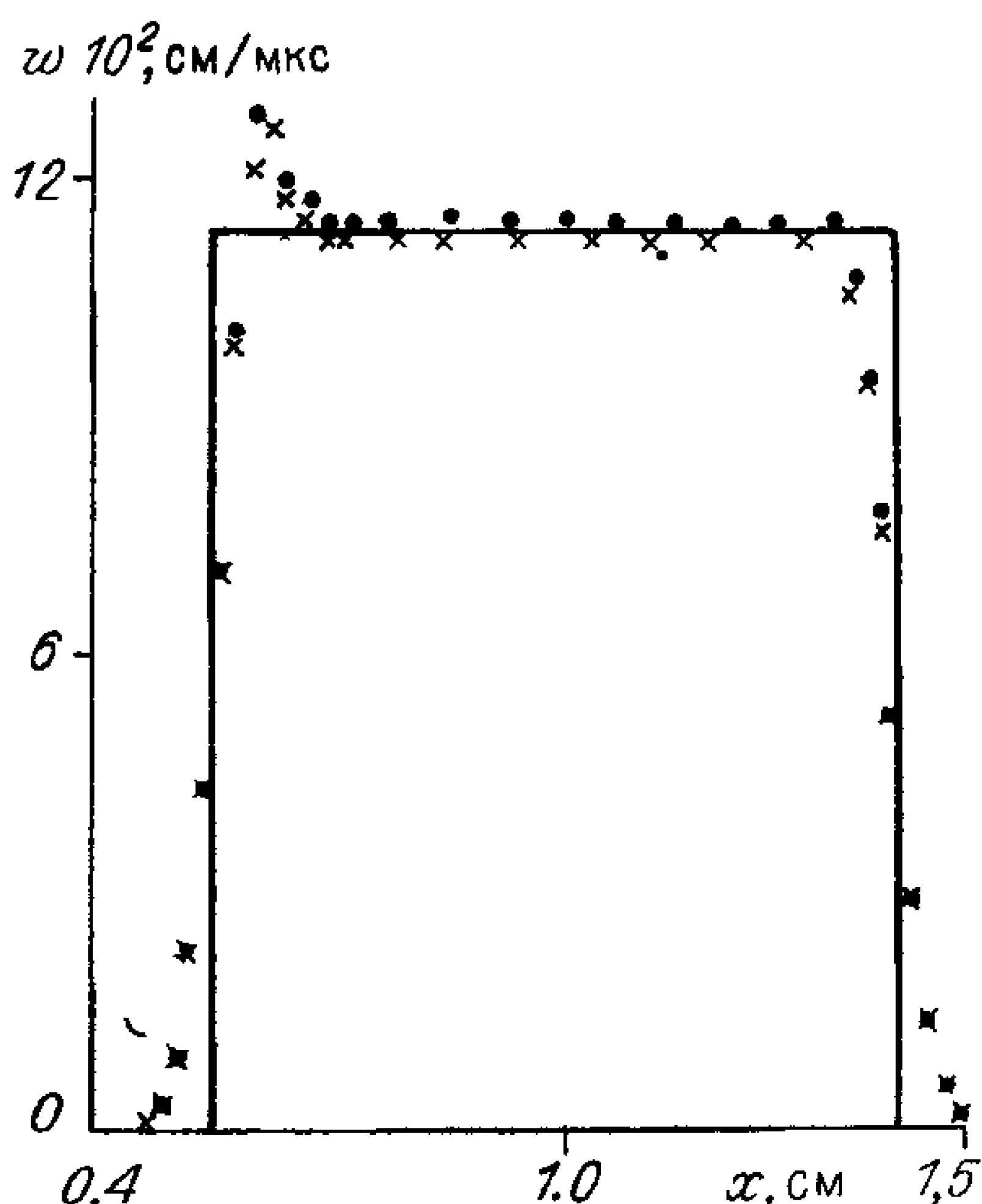


Рис. 4.14.

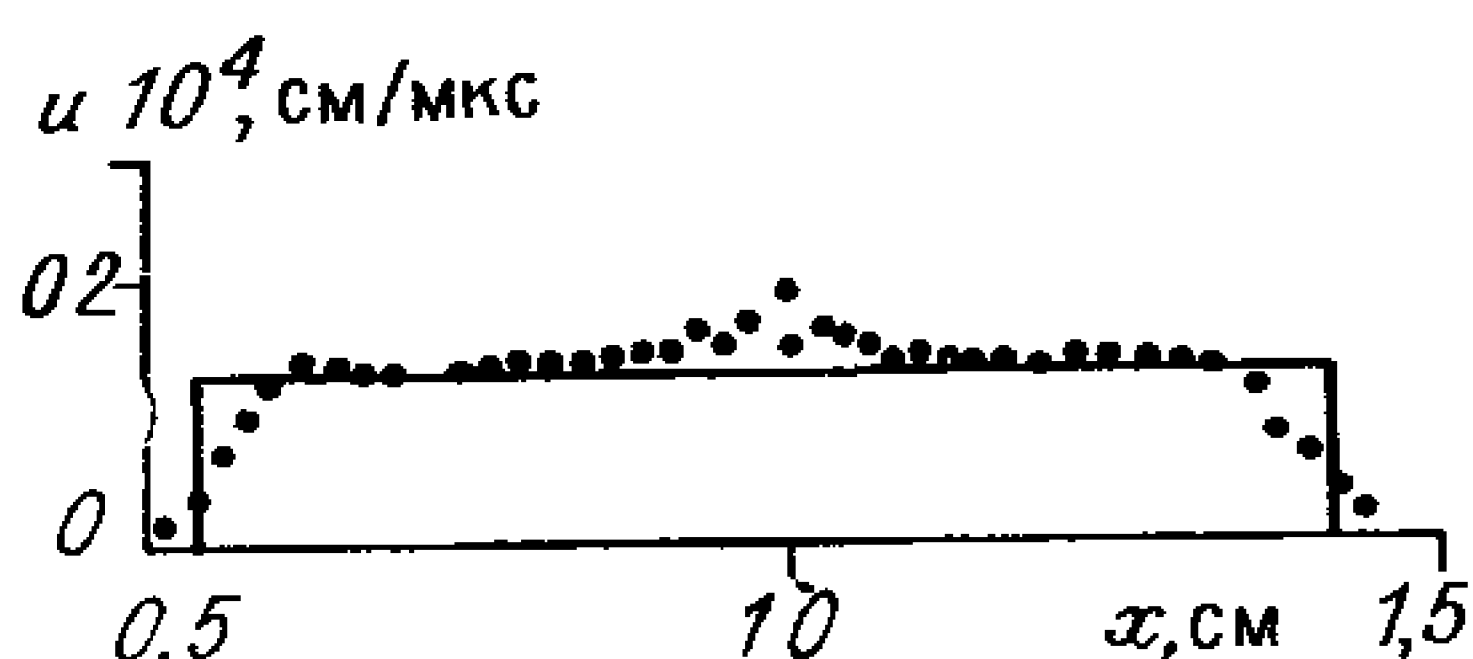


Рис. 4.15.

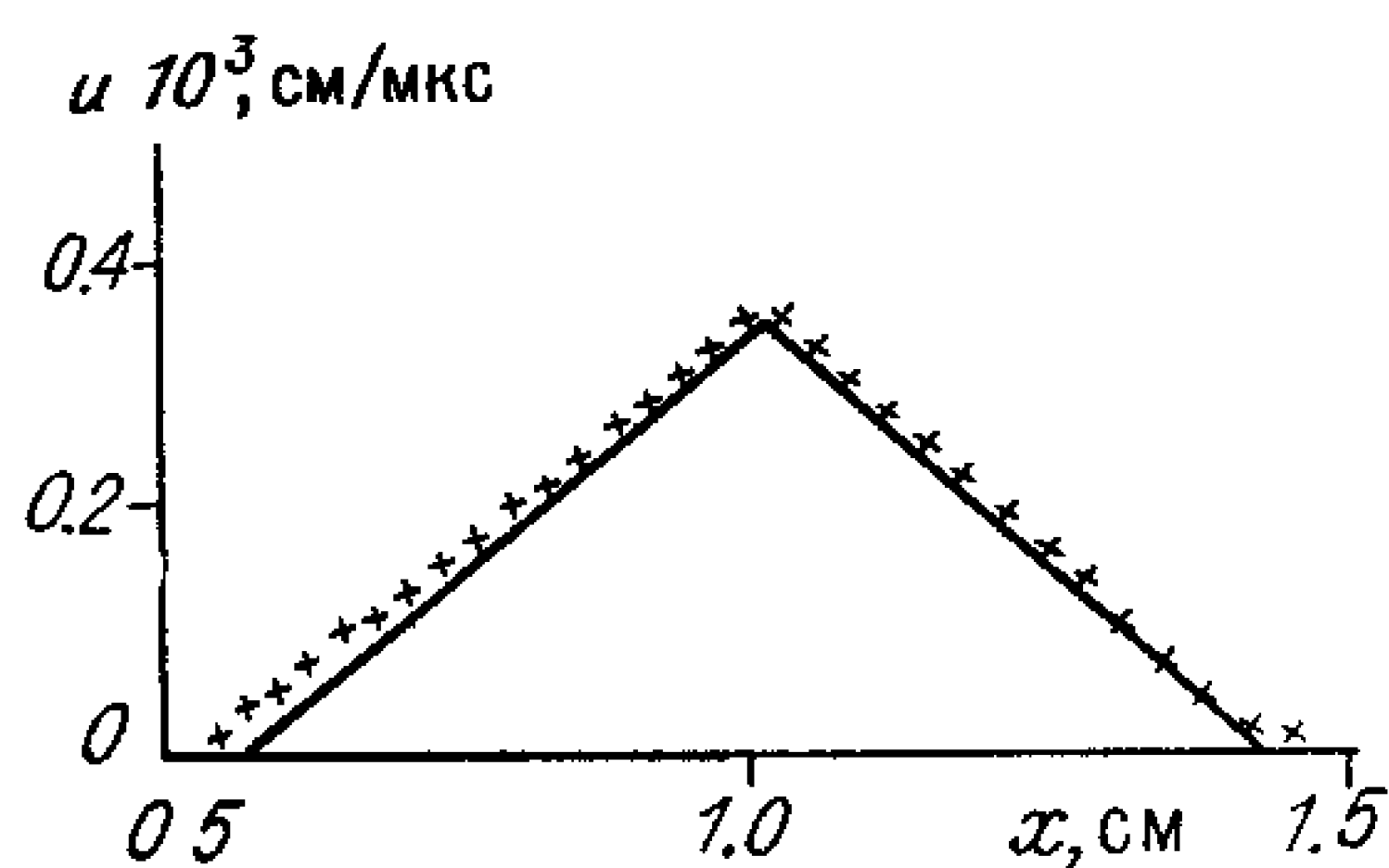


Рис. 4.16.

схем и связана, по-видимому, с совместным влиянием нелинейных и дисперсионных свойств схемы. Так как этот эффект локальный, его влияние на общее течение достаточно мало. Другим недостатком схемы «крест» является нефизический рост энергии и падение плотности газа вблизи контактных границ — энтропийный эффект, связанный с недивергентностью схемы [42]. Поскольку эффекты теплообмена в данной задаче не будут определяющими, этот счетный эффект также не должен существенно сказаться на результатах счета. На рис. 4.14 показана скорость газа v в зависимости от x на тот же момент времени. Сплошная кривая — точное решение при $m_2 = 0$, крестики соответствуют случаю «б», а точки — «а».

1. Рассмотрим поведение скорости частиц в случае «а» (рис. 4.15). Как следует из рис. 4.14 и 4.15, скорость частиц ведет себя подобно скорости газа и имеет место соотношение $u/w \approx 10^{-3}$. Это связано с тем, что при $\kappa_f = 1$ в уравнениях движения (6) влияние члена $\rho_1 m_2 f$ мало по сравнению с $m_2 \frac{\partial p}{\partial x}$ и уравнения движения для газа и частиц можно записать в виде

$$\frac{\partial w}{\partial t} \approx -\frac{1}{\rho_{11}} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \approx -\frac{1}{\rho_{22}} \frac{\partial p}{\partial x},$$

отсюда получим

$$u/w \simeq \rho_{11}/\rho_{22} \simeq 10^{-3}. \quad (11)$$

В данном случае ускорение частиц происходит только на фронте ударной волны и волны разрежения. Незначительное отличие $u(x)$ от (11) вблизи $x = 1$ см (см. рис. 4.15) связано с влиянием члена $\rho_1 m_2 f$.

2. Рассмотрим поведение скорости частиц в случае «б» (рис. 4.16). При этом справедливо обратное неравенство $|\rho_1 m_2 f| \gg \left| -m_2 \frac{\partial p}{\partial x} \right|$ и уравнение движения частиц имеет вид

$$\rho_2 \frac{d_2 u}{dt} = \rho_1 m_2 f, \quad f = \kappa_f (w - u). \quad (12)$$

Как следует из рис. 4.14, $u/w \simeq 10^{-2}$, поэтому уравнение (12) легко интегрируется

$$u = \kappa_f \frac{\rho_1}{\rho_{22}} w t', \quad (13)$$

где t' — время действия газа на частицы, находящиеся в точке x . Считая скорость ударной волны D постоянной, получим $t' = t - x/D$, $x_\Phi = Dt$, откуда следует уравнение $t' = t \left(1 - \frac{x}{x_\Phi}\right)$, используя которое преобразуем (13) к виду

$$u = \kappa_f \frac{\rho_1}{\rho_{22}} w t (1 - x/x_\Phi). \quad (14)$$

Полагая в (14) $\kappa_f = 10^2$, $\rho_1 = 10^{-3}$, $\rho_{22} = 1$ г/см³, $t = 3.21 \cdot 10^{-1}$ мкс, $w = 1.11 \cdot 10^{-1}$ см/мкс, $x_\Phi = 0.4$ см, найдем

$$u(x) = 3.46 \cdot 10^{-3} \left(1 - \frac{x}{0.4}\right) \text{ см/мкс}. \quad (15)$$

График функции $u(x)$, определенной уравнением (15), приведен на рис. 4.16 сплошными линиями, а крестиками отмечены численные значения u . Как видно, совпадение численного и аналитического решения вполне удовлетворительное.

Пример 2. В момент $t = 0$ газ занимает область $0 \leq x \leq 1.98$ см, а частицы — меньшую область $1 < x < 1.98$ см.

Начальные условия: $w(x) = 0$, $\rho_{11}(x) = 10^{-3}$ г/см³, $\gamma = 1.4$,

$$p(x) = \begin{cases} 1.6 \cdot 10^{-3} \text{ мбар}, & 0 \leq x < 0.78 \text{ см}, \\ 0.32 \cdot 10^{-3} \text{ мбар}, & 0.78 \leq x < 1.98 \text{ см}, \end{cases} \quad (16)$$

$$u(x) = 0, \quad \rho_2(x) = 1 \text{ г/см}^3, \quad \kappa_f = 5 \cdot 10^3 \text{ мкс}^{-1},$$

$$m_2(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \text{ см}, \\ 10^{-3}, & 1 < x < 1.98 \text{ см}. \end{cases}$$

Распределение давления на момент $t = 0.674$ мкс показано на рис. 4.17. Характерной особенностью данного процесса является

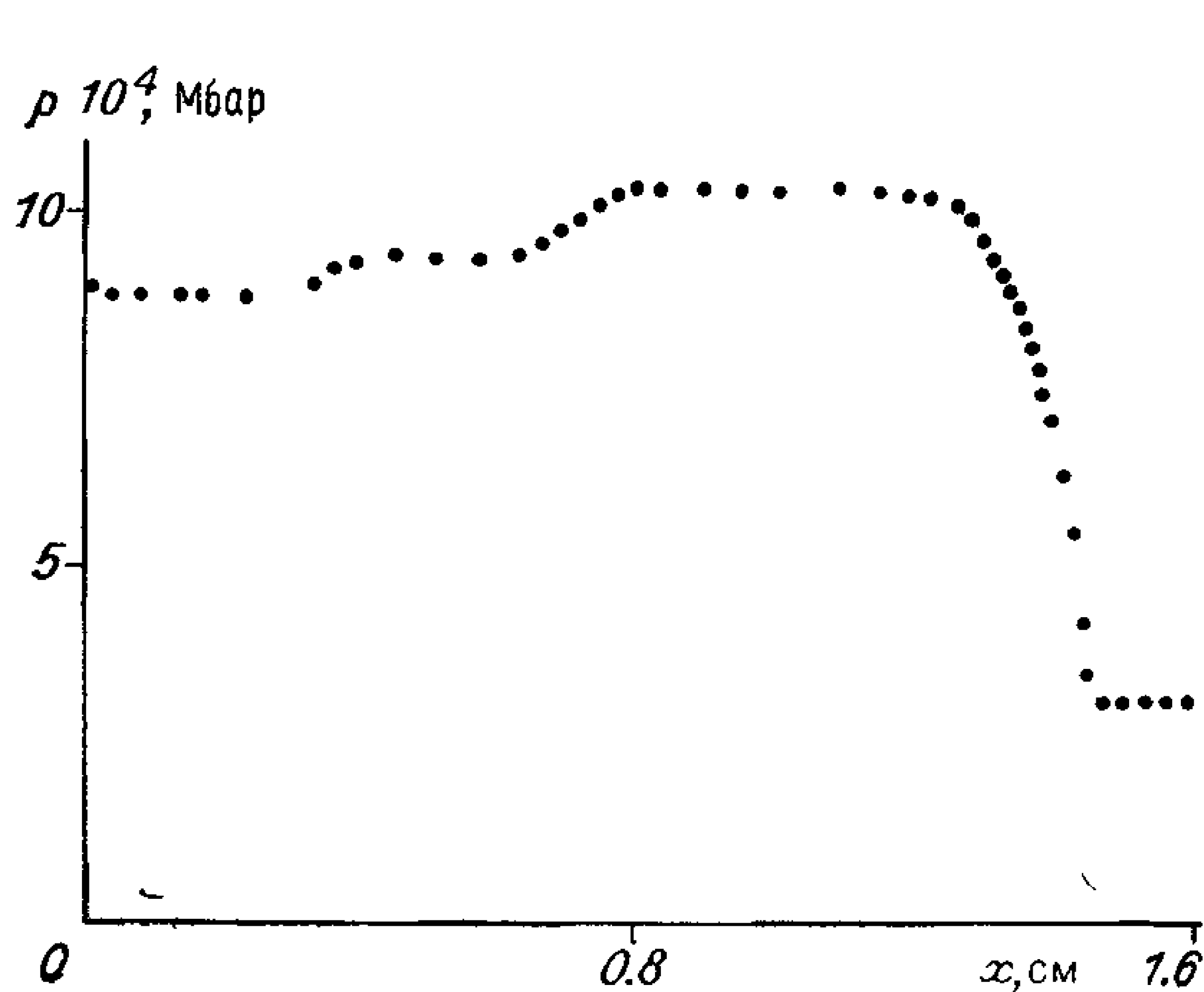


Рис. 4.17.

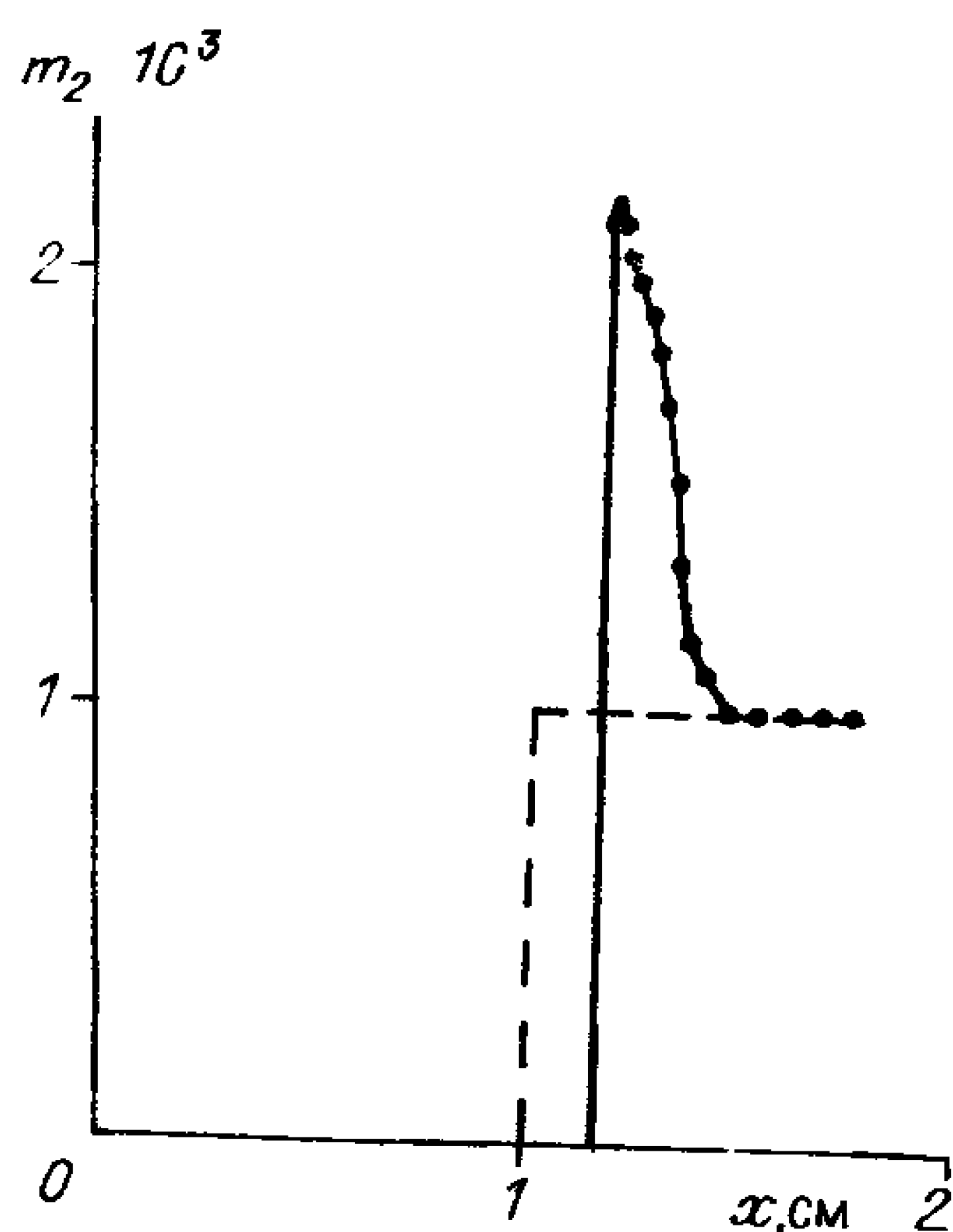


Рис. 4.18.

наличие отраженной от облака частиц волны сжатия, центр которой находится в точке $x = 0.72$ см и зоны релаксации за фронтом ударной волны, возникающей вследствие передачи импульса от газа к частицам $1.26 \leq x \leq 1.4$ см. После того как произошло выравнивание скоростей газа и частиц, давление остается постоянным при $0.7 \leq x \leq 1.26$ см, комбинированный разрыв (граница облака) находится в точке $x = 1.17$ см. Отметим отраженную от стенки $x = 0$ волну разрежения, образовавшуюся в момент $t = 0$, $x = 0.78$ см при распаде разрыва и находящуюся в момент $t = 0.674$ мкс в точке $x = 0.4$ см (рис. 4.17). Теоретически положение фронта этой волны определяется методом характеристик и хорошо согласуется с расчетом. Качественная картина распределения давления по x для аналогичной задачи приведена в работе [43] и находится в хорошем согласии с распределением $p(x)$, приведенным на рис. 4.17.

Распределение объемной концентрации частиц m_2 на момент $t = 0.674$ мкс показано на рис. 4.18 (штриховая линия — зависимость $m_2(x)$ в момент $t = 0$). Как видно, вблизи границы облака частиц формируется область повышенной концентрации частиц, на что также указывалось в [43]. Формирование такого слоя повышенной концентрации связано со скоростной неравномерностью между газом и частицами, отсутствием давления в газе частиц и имеет ту же физическую природу, что и явление каустик.

7.3. Решение краевых задач и их анализ

Рассмотрим разлет медной цилиндрической оболочки под действием ПД, образовавшихся после детонации октогена. Эта задача изучалась экспериментально в [34]. Оболочка представляла собой длинную трубку с $a^0 = 1.27$ см, $b^0 = 1.53$ см и длиной

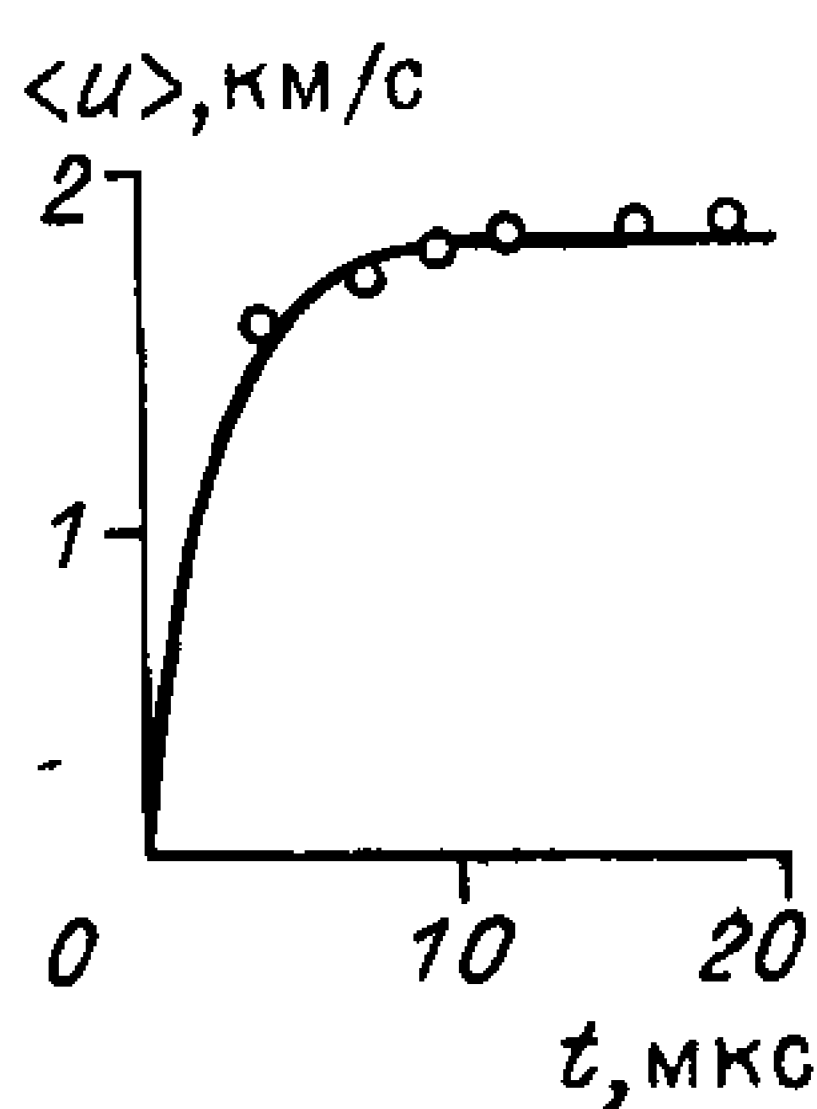


Рис. 4.19.

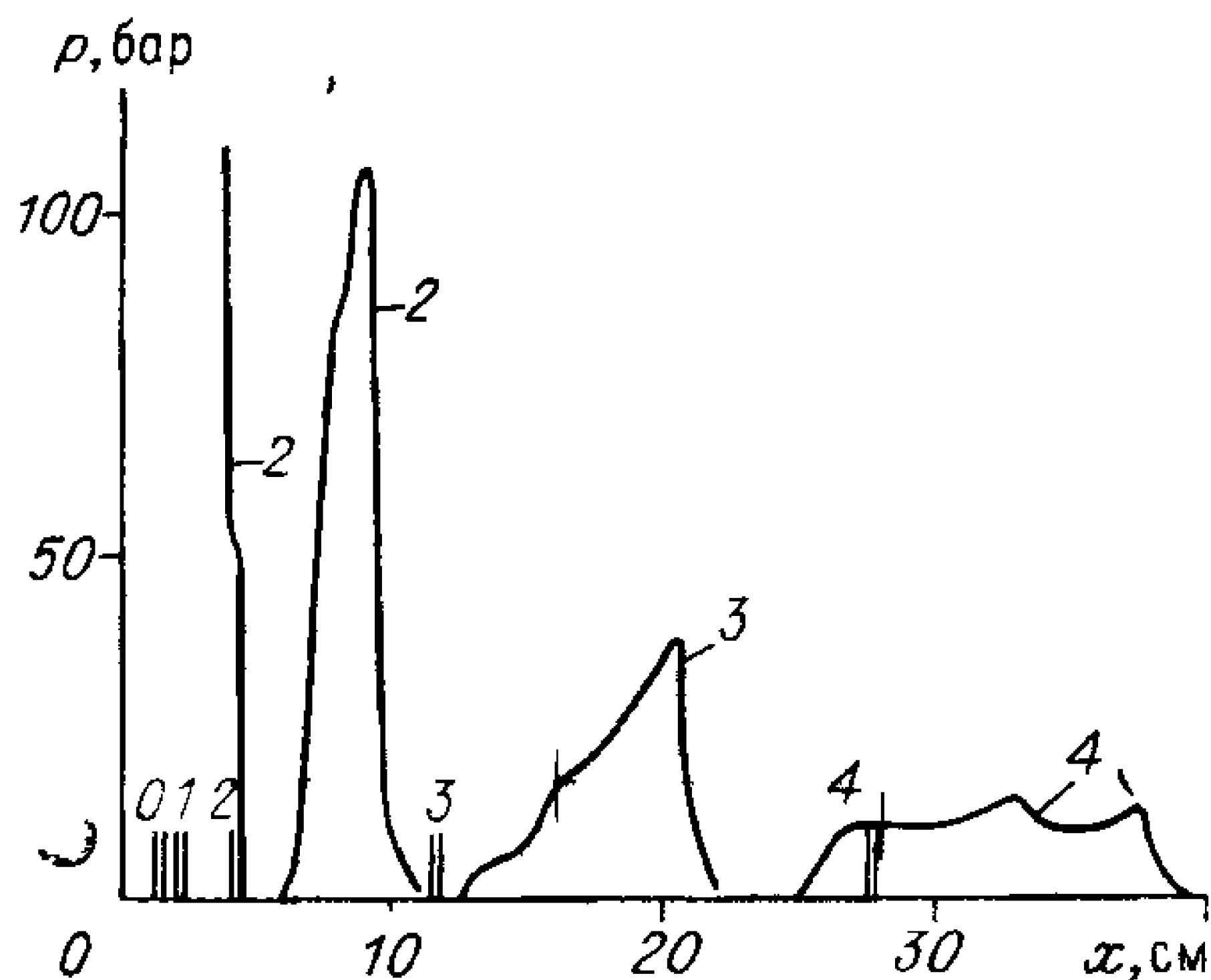


Рис. 4.20.

$L = 30$ см. Детонация инициировалась с одного конца, а регистрация скорости расширения оболочки производилась в среднем сечении на расстоянии 15 см от конца трубки. В данном случае можно пренебречь влиянием истечения ПД через торцы трубки на скорость ее расширения в среднем сечении. Это позволяет сравнить полученную экспериментально и рассчитанную зависимости скорости разлета оболочки от времени. Начальные условия в ПД задавались в режиме мгновенной детонации: $p_1^0 = (\gamma_1 - 1) \rho_1^0 \mathcal{E}_1^0$ ($p_1^0 = \text{const}$), $u_1^0 = 0$, $\gamma_1 = 3$, $\rho_1^0 = 1.89$ г/см³, $\mathcal{E}_1^0 = 5$ кДж/г. Для воздуха начальные условия имели вид $\rho_1 = 10^{-3}$ г/см³, $p_1 = 10^5$ Па, $\gamma_1 = 1.4$, $u_1 = 0$. В качестве материала оболочки выбиралась медь с параметрами: $\rho_2^0 = 8.93$ г/см³, $c_0 = 3.93$ км/с, $\gamma_2 = 2.69$, $\mu = 0.39 \cdot 10^2$ ГПа, $Y = 1.8$ ГПа, $\beta = 0.5$.

На рис. 4.19 показана зависимость усредненной по толщине оболочки скорости $\langle u \rangle$ от времени. Кривая соответствует нашему расчету, точки — эксперименту [34]. Оболочка разрушается в момент $t^* = 6$ мкс, после чего имеет место интенсивное истечение ПД в режиме запираания потока в каналах пористого поршня [39]. В минимальном сечении (минимум m_1) $M_{12} = 1$, слева $M_{12} < 1$, справа $M_{12} > 1$ ($u_1 - \langle u_2 \rangle > 0$). Учет разрушения и истечения ПД приводит к небольшому (на 5—6 %) уменьшению максимальной скорости оболочки $\langle u \rangle_{\text{max}}$ по сравнению со случаем без разрушения.

Исследуем влияние воздуха на скорость оболочки. Поскольку плотность воздуха на три порядка меньше плотности оболочки и ПД (в момент $t = 0$), его влияние будет существенным на больших временах. На рис. 4.20 приведена зависимость $p(r)$ и положение оболочки на три момента времени. Цифрой 2 обозначено положение оболочки и распределение $p(r)$ на момент $t = 20$ мкс, цифрой 3 — на момент $t = 60$ мкс, цифрой 4 — на момент $t = 160$ мкс. Оболочка показана двумя вертикальными линиями. Положение оболочки при $t = 0$ отмечено цифрой 0, а в момент разрушения — 1. Вертикальной чертой на кривых $p(r)$ отмечена контактная граница ПД — воздух. В момент $t = 20$ мкс происходит интенсивное истечение ПД сквозь разрушенную обо-

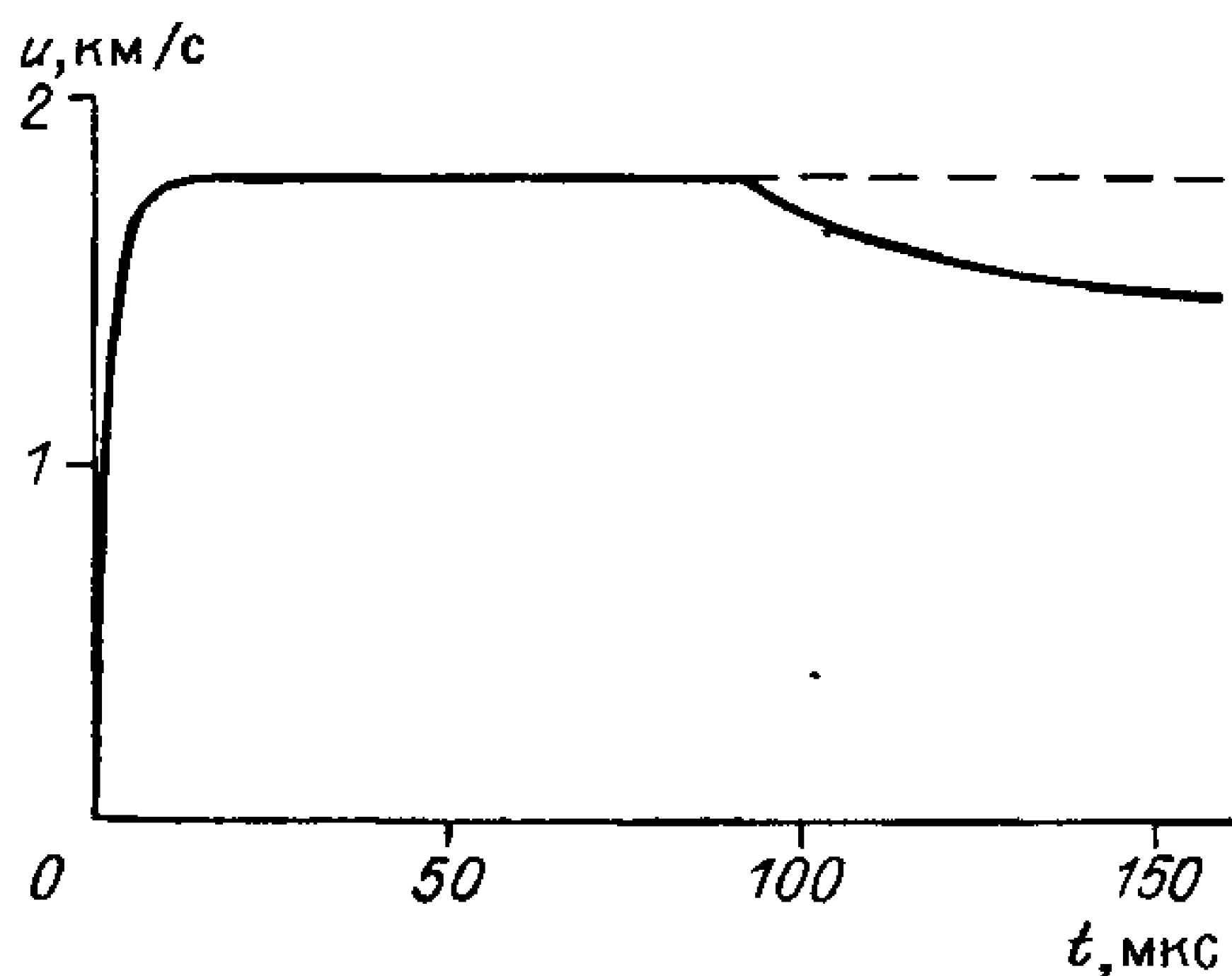


Рис. 4.21.

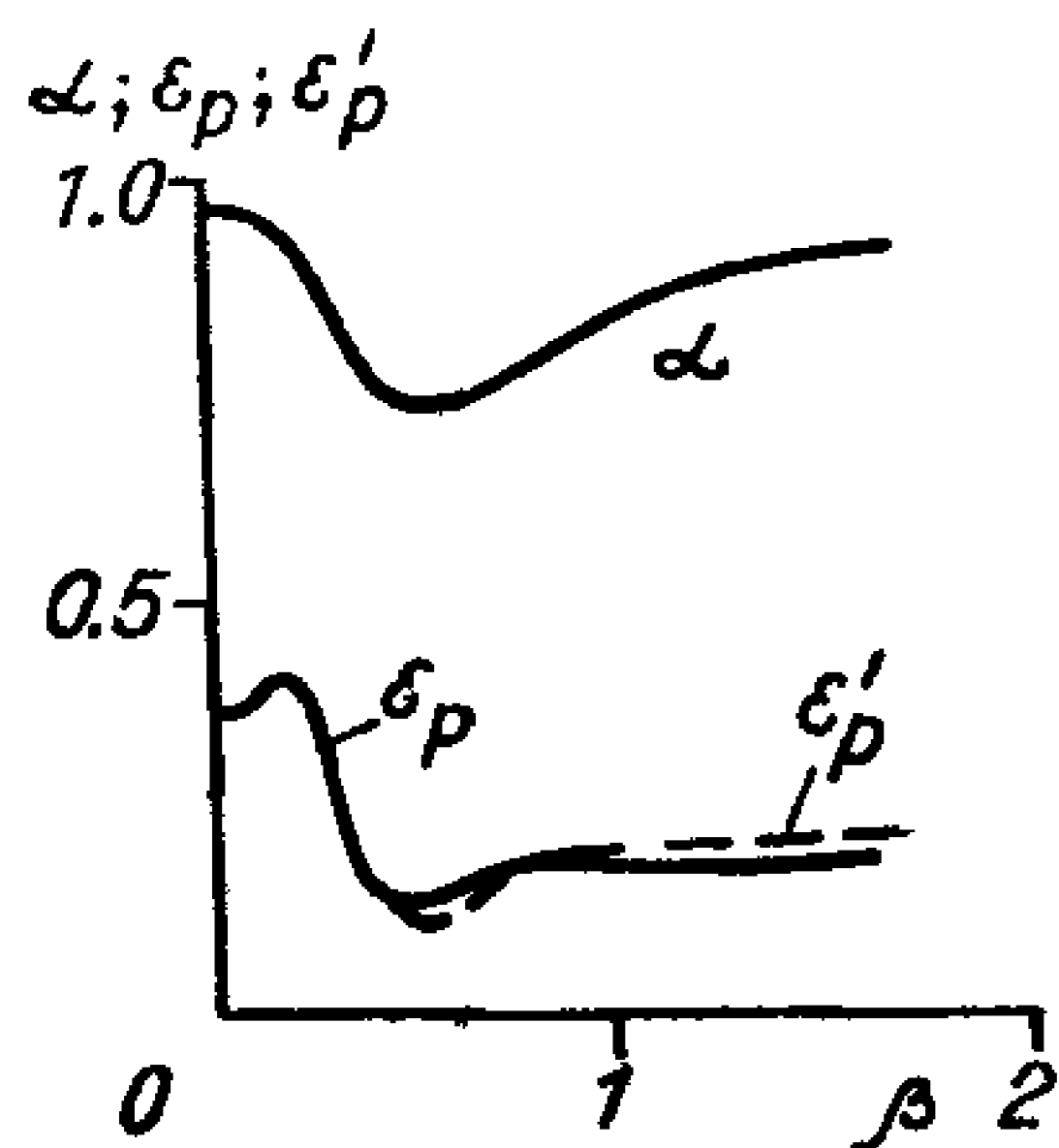


Рис. 4.22.

лочку в режиме запирания потока. При этом давление на выходе из оболочки ($4.7 < r < 6$ см) меньше атмосферного, а число Маха больше единицы. Сверхзвуковая зона заканчивается ударной волной в точке $r = 7.5$ см (УВ размазывается вследствие действия искусственной вязкости). В воздухе формируется «горячая» пробка, ограниченная слева контактной границей $r_k = 7.8$ см, а справа фронтом УВ с координатой $r = 9.4$ см. Ее образование связано с тем, что давление в сильной УВ растет в основном за счет увеличения температуры.

По мере расширения происходит быстрое уменьшение давления, скорости, температуры в ПД и УВ в воздухе. Из рис. 4.20 видно, что в момент $t = 60$ мкс давление во фронте УВ уменьшилось в 2.8 раза по сравнению с соответствующим давлением при $t = 20$ мкс. Скорость оболочки на этом отрезке времени ($20 < t < 60$ мкс) оставалась практически постоянной. Поэтому к моменту $t = 60$ мкс скорость оболочки и скорость ПД в окрестности оболочки становятся равными. В дальнейшем скорость оболочки превышает скорость ПД и начинается обратное затекание ПД в область, ограниченную оболочкой. Вследствие взаимодействия с ПД оболочка начинает тормозиться и «посылает» вперед волну сжатия, которая догоняет головную УВ и усиливает ее. Из рис. 4.20 видно, что к моменту $t = 160$ мкс волна сжатия трансформировалась в УВ и находится в точке $r = 33.5$ см. Оболочка догоняет контактную границу и при $t > 160$ мкс попадает в область, занятую воздухом. На рис. 4.21 показана зависимость скорости оболочки от времени $u(t)$. Штриховая линия — зависимость $u(t)$ без учета воздуха, а сплошная — с учетом влияния воздуха. Видно, что начиная с $t = 90$ мкс происходит заметное уменьшение скорости оболочки. Кинетическая энергия оболочки идет на поддержание ударной волны в воздухе.

Исследуем разлет медной оболочки в режиме, когда детонация инициирована на оси. Характеристики материала оболочки и геометрические параметры задачи те же, что и выше, ПД образованы при детонации октогена с добавками: $\rho^0 = 1.862$ г/см³, $D = 8.82$ км/с [28]. Начальные условия для ПД определялись

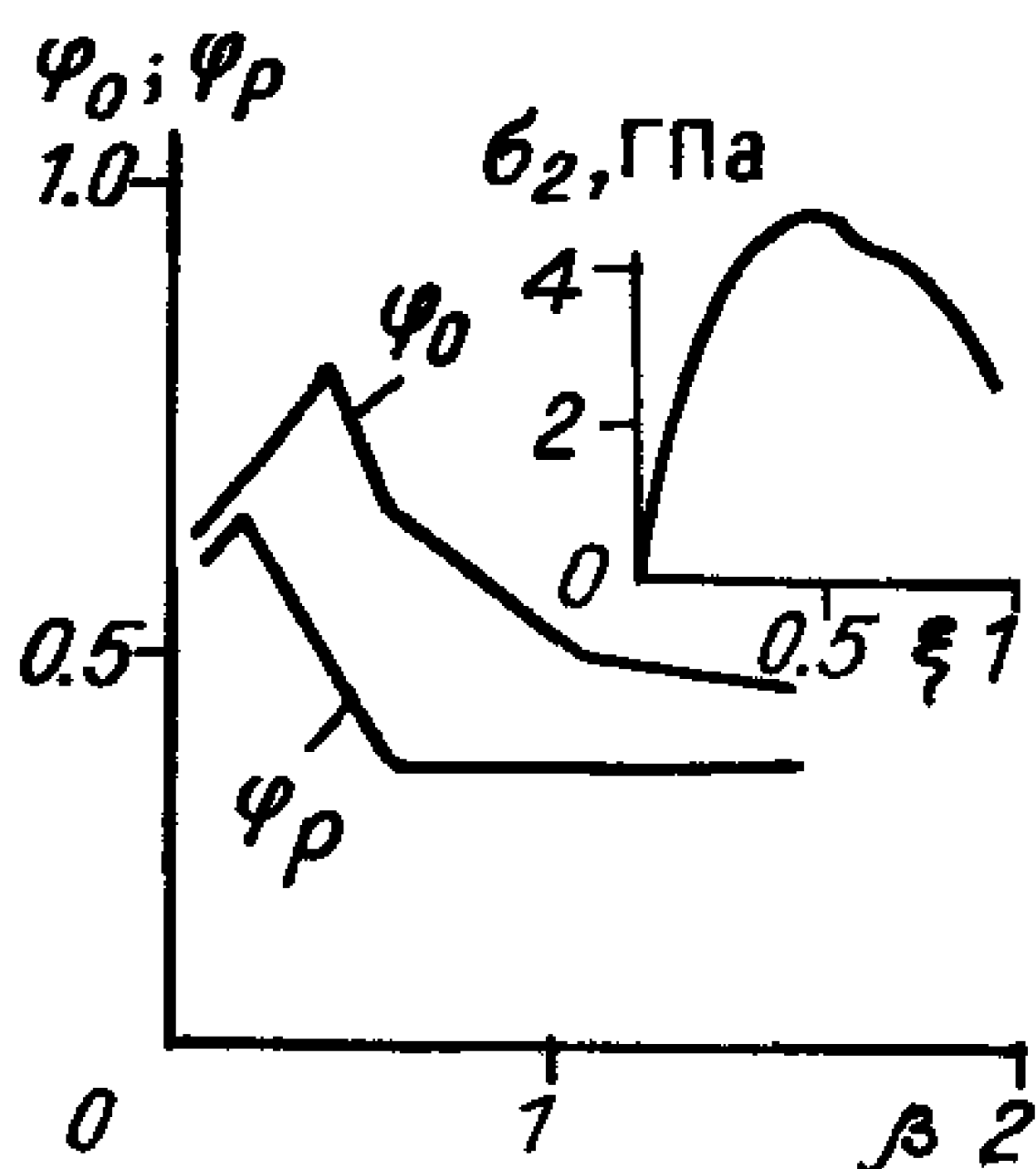


Рис. 4.23.

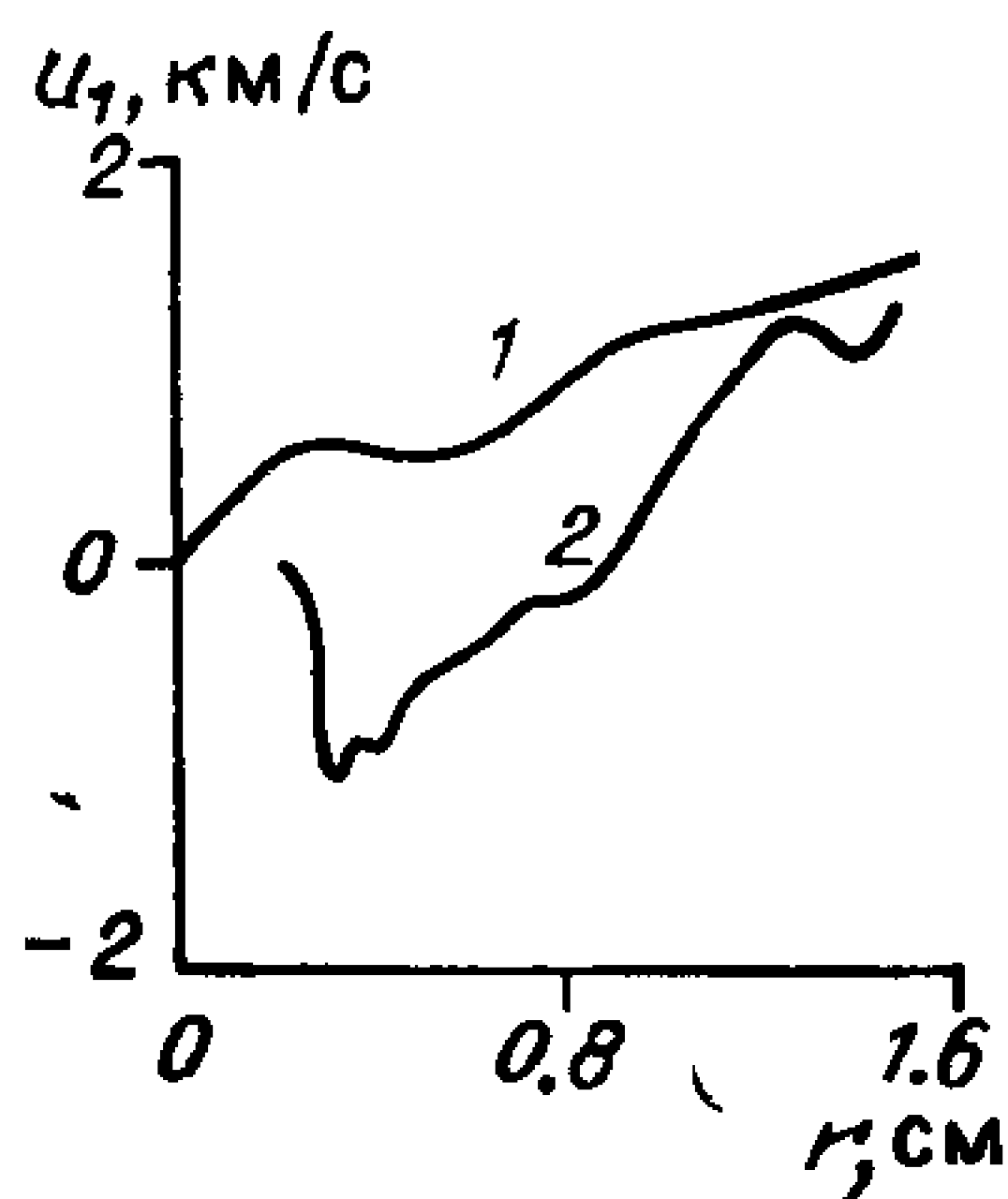


Рис. 4.24.

путем численного интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений (5.151), (5.152) из [28], описывающей соответствующее автомодельное решение. В данной постановке изучено влияние разрушения оболочки на скорость и степень отбора оболочкой энергии ПД. Расчеты проводились при нескольких значениях β , толщина оболочки варьировалась. Для каждого β рассчитывалась среднемассовая скорость оболочки с разрушением v_r и без разрушения v_0 на момент $t = 20$ мкс. К этому моменту времени оболочка успевает набрать максимальную скорость. Составим отношение $\alpha = v_r/v_0$ и построим α как функцию β (рис. 4.22). Оказывается, что на интервале $0.3 < \beta < 1$ имеется провал в α от 0.97 до 0.73. Таким образом, разрушение оболочки и истечение ПД между осколками приводят на этом интервале к существенному уменьшению скорости оболочки и степени отбираемой энергии $\varphi = Mu^2/(2m\mathcal{E}^0) = 8u^2/(\beta D^2)$.

На рис. 4.23 представлена зависимость $\varphi(\beta)$: $\varphi_0(\beta)$ — для оболочки без разрушения и $\varphi_r(\beta)$ — при разрушении. Видно, что пик кривой $\varphi_0(\beta)$ в точке $\beta = 0.4$ совершенно исчезает в случае разрушаемой оболочки. Причина сильного провала на кривой $\alpha(\beta)$ состоит в том, что при увеличении β от 0.2 до 0.4 резко падает (более чем в 2 раза) критическая деформация ε_r , которая находилась по формуле $\varepsilon_r = (a^+ - a^0)/a^0$ (a^+ — внутренний радиус оболочки, при котором происходит ее разрушение). Вместе с $\varepsilon_r(\beta)$ сильно уменьшается время разрушения. Так, при $\beta < 0.2$ характерное время разрушения $t^* \simeq 7-8$ мкс, а на интервале $0.3 < \beta < 1.66$ $t^* \simeq 1.3-2$ мкс. Уменьшение $\alpha(\beta)$ и $\varepsilon_r(\beta)$ при $0.3 < \beta < 0.4$ связано с волновыми процессами в ПД. При $\beta < 0.2$ отраженная от оболочки УВ успевает отразиться от оси и догнать оболочку, прежде чем произойдет ее разрушение. В результате в разгоне оболочки участвует вся масса ПД. При $\beta > 0.3$ оболочка разрушается раньше, чем отраженная от центра УВ догонит оболочку. После разрушения в область ПД распространяется волна разрежения, которая ослабляет отраженную от оси УВ, что приводит к уменьшению v_r и α . В интервале $\beta > 0.6$ отраженная от оси УВ не «догоняет» оболочку и в случае, когда

разрушение отсутствует, поэтому $\alpha(\beta)$ возрастает и $\alpha(\beta) \rightarrow 1$ для $\beta \gg 1$.

На рис. 4.24 приведены распределения скорости $u_1(r)$ в ПД для $\beta = 0.57$ на момент разрушения (кривая 1 — мгновенная детонация, 2 — осевая). При мгновенной детонации в разгоне оболочки участвует вся область ПД ($u_1 > 0$), а при осевой — лишь часть ПД, лежащая в слое $0.9 < r < 1.44$ см. В слое $0.25 < r < 0.9$ см ПД движутся к оси заряда ($u_1 < 0$), а в слое $0 < r < 0.25$ см ПД покоятся ($u_1 = 0$). Из данного анализа следует, что ϵ_p , α зависят от формы импульса давления в ПД и характеристик материала оболочки. Так, при мгновенной детонации $\epsilon_p = 0.37$, $\alpha = 0.89$, а при осевой $\epsilon_p = 0.14$, $\alpha = 0.72$, в обоих расчетах $\beta = 0.57$. Отметим, что в этих случаях существенно различаются волновые картины не только в ПД (см. рис. 4.24), но и в оболочке. При мгновенной детонации зависимость $\sigma_2(r)$ хорошо аппроксимируется линейной функцией, достигающей максимума на внешней поверхности оболочки [29]. Для осевой детонации эта зависимость сильно отличается от линейной.

На рис. 4.23 представлена также зависимость $\sigma_2(\xi)$ на момент $t = t^*$ ($\beta = 0.57$) ($\xi = (r - a)/h$). Максимум $\sigma_2(\xi)$ достигается внутри оболочки и более чем в 2 раза превышает предел текучести Y и разрушающее напряжение σ_p [28]. В предложенной модели пренебрегалось отколами в оболочке под действием радиальных растягивающих напряжений. Это связано с тем, что основное влияние на разрушение цилиндрической оболочки оказывают волновые процессы в ПД и предел текучести материала оболочки. Поэтому влияние откольных процессов на разрушение оболочки, по-видимому, будет мало.

Дадим теоретические оценки критической деформации и скорости оболочки при осевой детонации для произвольных β . В случае малых β скорость оболочки может быть рассчитана без учета прочности ($Y = 0$) $\langle u \rangle / D = \left(\frac{\beta}{8} \left(1 - \frac{a^0}{v} \right)^4 \right)^{1/2}$,

$$a^+ / a^0 = (p_0 / Y)^{1/(2\gamma_1)}, \quad p_0 = p_H / 2, \quad \epsilon_p = (a^+ - a^0) / a^0. \quad (17)$$

Формулы (17) получены в приближении мгновенной детонации, поэтому, как следует из расчетов, они справедливы для $\beta < 0.2$. При $\beta \geq 0.4$ становятся существенными волновые явления в ПД, для описания которых воспользуемся аналитическим решением о разгоне несжимаемого поршня детонационной волной в плоском случае [28]. Ясно, что для цилиндрической оболочки решение будет приближенным, тем не менее приближение в данном случае оказывается достаточно хорошим. Во-первых, это связано с тем, что распределения параметров ПД за фронтом детонационной волны в плоском и цилиндрическом случаях близки между собой. Во-вторых, из расчетов следует, что относительное расширение оболочки до разрушения мало ($\epsilon_p \leq 0.2$), поэтому мало и соответствующее изменение инварианта Римана. Соглас-

Т а б л и ц а 4.1

β	$\langle u \rangle$, см/мкс		β	$\langle u \rangle$, см/мкс	
	Теория	Расчет		Теория	Расчет
0.1	$8.2 \cdot 10^{-2}$	$7.35 \cdot 10^{-2}$	0.8	0.157	0.164
0.13	$9.4 \cdot 10^{-2}$	$8.4 \cdot 10^{-2}$	1.0	0.179	0.188
0.18	0.11	$1.04 \cdot 10^{-1}$	1.66	0.24	0.236
0.57	0.10	0.133	4.6	0.37	0.3

но [28], для цилиндрического случая и $\gamma = 3$ имеем $d(u_1 + c) = -(u_1 c/r) dt$, отсюда в области ABC (см. рис. 4.11) вдоль характеристики $dr = (u + c) dt$ получим $|\Delta(u_1 + c)/(u_1 + c)| \lesssim \langle u \rangle \Delta t/r \simeq \simeq \varepsilon_p \ll 1$. Прежде чем воспользоваться решением из [28], необходимо отметить, что отражение детонационной волны происходит не от жесткой стенки, а от медной оболочки, и давление в отраженной волне увеличивается в 1.56 раза. С учетом этого обстоятельства и цилиндрической симметрии задачи формулы из [28] переписутся в виде

$$c = a^0 \theta / t, \quad \theta = (1 + 2\eta(1 - a^0/Dt))^{-1/2}, \quad (18)$$

$$a = Dt(1 - (1 - \theta)/\eta\theta),$$

$$\langle u \rangle = D(1 - (1 - \theta)/\eta\theta) - a^0 \theta / t, \quad \eta = k' \beta / 2,$$

$$p = k' p_n (c/D)^3, \quad p_n = \rho_0 D^2 / (\gamma_1 + 1),$$

где c , p — скорость звука и давление на поверхности оболочки; $\langle u \rangle$, a — скорость и координата оболочки; k' — коэффициент отражения ударной волны. Момент разрушения оболочки определяем из условия Тейлора $p = Y$. Отсюда, используя (18), найдем

$$k' p_n (a^0/Dt')^3 / (1 + 2\eta(1 - a^0/Dt'))^{3/2} = Y, \quad (t' = t^* + a^0/D).$$

Разрешая это уравнение относительно t' , получим

$$t' = \frac{a^0}{D} \left(\sqrt{\eta^2 \zeta^{4/3} + (1 + 2\eta) \zeta^{2/3}} - \eta \zeta^{2/3} \right), \quad (\zeta = Y/k' p_n). \quad (19)$$

По формулам (17) — (19) для нескольких значений β были вычислены критическая деформация ε'_p и скорость оболочки $\langle u \rangle$. Для оболочек с $\beta < 0.2$, ε'_p вычислялась по формуле (17), а при $\beta \geq 0.4$ — по (18), (19), в которых полагалось $k' = 1.56$, $a^0 = 1.3$ см, $D = 0.882$ см/мкс, $p_n = 0.362 \cdot 10^2$ ГПа, $Y = 1.8$ ГПа, $\eta = 0.78 \beta$, $\zeta = 0.032$. Зависимость $\varepsilon'_p(\beta)$, показанная на рис. 3.22 штриховой линией, хорошо согласуется с $\varepsilon_p(\beta)$, полученной из численных расчетов. В табл. 4.1 приведена скорость оболочки $\langle u \rangle$ на момент разрушения для нескольких значений β , во втором столбце даны ее значения, найденные по (17) при $\beta \leq 0.18$ и по (18), (19) при $\beta \geq 0.57$, в третьем — значения, полученные из численных расчетов. Видно, что при фиксированном β обе ско-

рости достаточно близки друг к другу. После разрушения вследствие истечения ПД оболочка набирает не более 10 % максимальной скорости. Это позволяет использовать формулы (17) — (19) для оценки скорости оболочки в инженерных расчетах. Отметим, что использованный критерий разрушения Тейлора справедлив только для «толстых» оболочек [39].

ГЛАВА 5

ЭРОЗИОННОЕ РАЗРУШЕНИЕ ТЕЛ В ДВУХФАЗНЫХ ПОТОКАХ

Процессы эрозионного разрушения широко распространены в природных и искусственных системах. Хорошо известно, какой ущерб сельскому хозяйству наносит эрозия почв. Мировая экономика несет значительные потери из-за эрозии оборудования в энергетике и на транспорте. Что же такое эрозия? В широком смысле слова — это процесс разрушения поверхности материала под действием окружающей среды. В технике различают несколько видов эрозионного износа: кавитационную, абразивную, химическую эрозию и другие. Мы будем рассматривать лишь те виды износа, которые возникают при обтекании поверхностей газовыми потоками с инородными включениями — каплями жидкостей или твердыми частицами. Например, при прохождении через дождевое облако современного летательного аппарата элементы его конструкции могут подвергаться дождевой эрозии. В этом случае капли воды, достигающие тела, вызывают локальные повреждения поверхности, а при длительном воздействии — полное разрушение поверхностного слоя материала. Сходное явление наблюдается в паровых турбинах, где капли конденсата, воздействуя на турбинные лопатки, приводят их к значительному износу. Это серьезное препятствие на пути роста эффективности оборудования, особенно в ядерной энергетике, где в качестве рабочего тела используются пары щелочных металлов. При наличии в окружающей среде твердых взвешенных частиц наблюдается газопылевая эрозия. Таким путем разрушаются, например, кромки воздухозаборников летательных аппаратов, а также стенки сопел твердо-топливных агрегатов.

В связи с этими и другими инженерными задачами большое значение приобрели исследования ударной эрозии материалов, которые широко ведутся как в нашей стране, так и за рубежом. Эта глава посвящена теоретическому анализу и численному моделированию проблемы эрозии в типичных аэродинамических ситуациях. Особое внимание уделяется кинетике эрозионного разрушения, а также взаимному влиянию процессов разрушения и обтекания тел.

§ 1. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОБ ЭРОЗИИ ТЕЛ

Процесс эрозионного разрушения поверхности, обтекаемой двухфазным потоком, определяется в основном параметрами частиц, соударяющихся с ней. По существу это чисто механический процесс. При столкновении отдельной частицы с преградой объемы поврежденной и разрушенной областей возрастают пропорционально некоторой степени скорости соударения [1]. С другой стороны, накопление повреждений во всем поверхностном слое возрастает с ростом частоты столкновений, т. е. пропорционально потоку падающих частиц. Поэтому в слабо запыленных потоках скорость уноса возрастает линейно с ростом расхода конденсированной фазы. Эта область параметров, где действует конвективный механизм передачи энергии к разрушаемой поверхности, наиболее просто поддается анализу [2]. Однако результаты некоторых опытов по обтеканию тел в сверхзвуковых двухфазных струях и эрозионные эксперименты в аэродинамических трубах свидетельствуют о сильном влиянии продуктов эрозии (куда включаются и отраженные от поверхности частицы) на структуру течения, а также параметры силового, теплового и эрозионного воздействия [3—7]. Оказывается, что при сверхзвуковом обтекании затупленных тел отраженные прямо в невозмущенный поток частицы могут существенно нарушить гладкую структуру течения, создавая сложную волновую картину, снижая тем самым силовую нагрузку и увеличивая тепловую [3, 5, 6]. Необходимость принимать во внимание эти и другие вероятностные процессы при анализе проблемы эрозии создает ощутимые трудности ее математического описания. Известные континуальные модели двухфазных течений [8, 9], хорошо зарекомендовавшие себя при моделировании неравновесных потоков, оказываются мало пригодными в задачах эрозии тел, за исключением упомянутых случаев [2]. Чтобы распространить континуальный подход на потоки с отраженными частицами, необходимо вводить в рассмотрение сплошную среду продуктов эрозии или даже несколько таких сред [10—12]. Вместе с тем следует заметить, что континуальный подход вообще не применим для описания течений с ярко выраженными особенностями вблизи частиц. Чтобы исключить очень сложные ситуации, возникающие при выходе частиц за пределы сжатого слоя, будем предполагать, что толщина пылевого слоя меньше расстояния отхода ударной волны в любой точке поверхности. Таким образом, сосредоточим внимание на описании эффекта экранирования, впервые обнаруженного в опытах [4]. Суть его в том, что с ростом расхода конденсированной фазы скорость эрозии возрастает, достигает максимума, а затем убывает. Плотный пылевой слой, образующийся над эродированной поверхностью, препятствует ее разрушению. При этом конвективный механизм передачи энергии сменяется диффузионным, а давление в псевдогазе частиц начинает играть существенную роль в динамике многофазной смеси [13].

1.1. Уравнения гетерогенного течения с учетом отраженных частиц

Рассмотрим аэродинамическую ситуацию, возникающую при натекании сверхзвукового равновесного двухфазного потока на затупленное тело (рис. 5.1). Наряду с обычным сжатым слоем толщиной s имеется пылевой слой толщиной Δ , примыкающий непосредственно к поверхности тела. По условиям задачи считаем

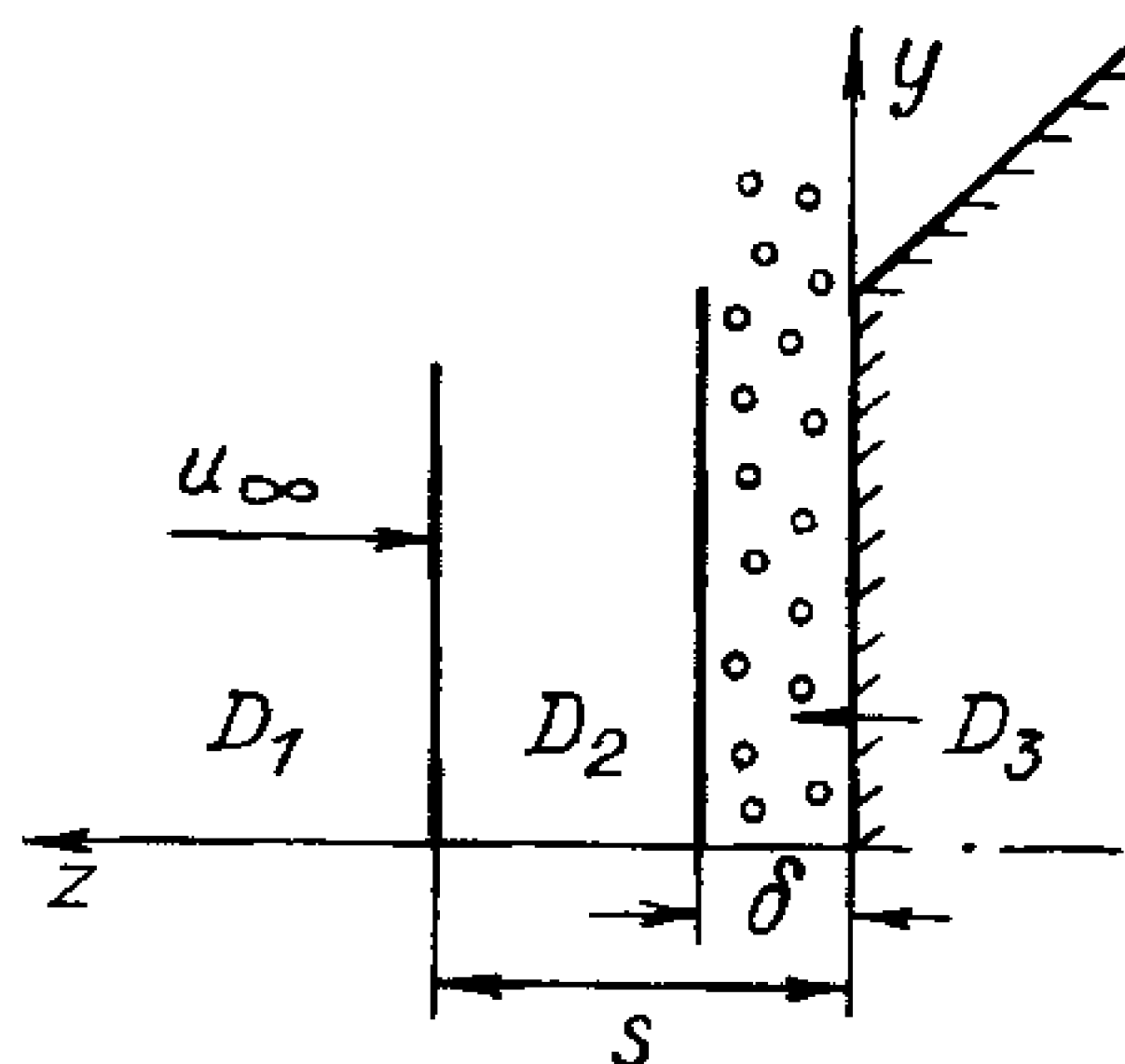


Рис. 5.1.

всюду $\Delta < s$. Область течения разбивается на три подобласти $D_1 - D_3$. В D_1 сохраняются постоянными параметры набегающего потока, в D_2 параметры конденсированной фазы релаксируют под влиянием сил межфазного обмена, наконец, в D_3 движутся, взаимодействуя друг с другом, три континуума — газ, частицы и продукты эрозии. Предполагается, что в области D_2 выполняются обычные уравнения двухфазного течения, а в области D_3 эта модель корректируется путем введения в правые части уравнения дополнитель-

ных слагаемых, описывающих взаимодействие газа и частиц с продуктами эрозии. Уравнения для частиц и газа согласно (1.1.4) имеют вид

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho_2 u_2^k) = J_{23},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_2 u_2^i) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho_2 u_2^i u_2^k) = \rho_2 \Phi_1^2 (u_1^i - u_2^i) + \rho_2 \Phi_2^3 (u_3^i - u_2^i),$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} + u_2^k \frac{\partial T_2}{\partial x_k} = \Phi_2^2 (T_1 - T_2) + \frac{J_{23}}{\rho_2} (T_3 - T_2),$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho_1 u_1^k) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_1 u_1^i) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho_1 u_1^i u_1^k) + (1 - m_3) \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho_2 \Phi_1^2 (u_1^i - u_2^i) - \rho_3 \Phi_1^3 (u_1^i - u_3^i),$$

$$\frac{\partial (\rho_1 e_1)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\rho_1 u_1^k \left(e_1 + \frac{p_1}{\rho_1} \right) \right) = \frac{\partial}{\partial x_k} (p_1 m_3 (u_1^k - u_3^k)) + \quad (1)$$

$$+ m_3 u_3^k \frac{\partial p}{\partial x_k} - \rho_2 \Phi_1^2 (u_1^k - u_2^k) u_2^k - \rho_3 \Phi_1^3 (u_1^k - u_3^k) u_3^k -$$

$$- c_s^2 \rho_2 \Phi_2^2 (T_1 - T_2) - c_s^3 \rho_3 \Phi_2^3 (T_1 - T_3) + 2\Theta \Phi_1^3 \rho_3,$$

где индекс 1 относится к газу, 2 — к частицам, 3 — к продуктам эрозии, m_3 — объемное содержание продуктов эрозии, J_{23} — потери массы частиц за счет эрозии и дробления, Θ — энергия хаотического движения эрозионных осколков, $c_s^{2,3}$ — удельная теплоемкость материала частиц, по k предполагается суммирование от

1 до 3, коэффициенты межфазного обмена $\varphi_{1,2}^j$ будут даны ниже в частных приложениях.

При выводе системы (1) кроме обычных гипотез, принятых при континуальном описании неоднородной среды [8], предполагается также, что объемное содержание частиц в набегающем потоке пренебрежимо мало и что газ идеальный с калорическим уравнением состояния в виде

$$p = \frac{\gamma - 1}{1 - m_3} \rho_1 \left(e - \frac{\vec{u}^2}{2} \right), \quad e = \frac{\vec{u}^2}{2} + \int c_v dT, \quad (2)$$

где c_v — удельная теплоемкость газа при постоянном объеме.

Рассмотрим балансные соотношения для сплошной среды продуктов эрозии. Поскольку продукты эрозии заведомо находятся в твердом или жидком состоянии, относительно среды продуктов эрозии принимаются все гипотезы гетерогенной модели [8]. Обычно продукты эрозии представляют собой смесь частиц различной формы и массы, т. е. смесь полидисперсного состава. Тем не менее для их описания будем использовать уравнения сплошной среды с эффективными средними параметрами. Имеем законы сохранения механических величин потока продуктов эрозии

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_3}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho_3 u_3^k) &= -J_{23}, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho_3 u_3^i) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho_3 u_3^i u_3^k + \pi_{ik}) &= \\ &= \rho_3 \varphi_1^3 (u_1^i - u_3^i) + \rho_3 \varphi_2^3 (\dot{u}_2^i - u_3^i) - m_3 \frac{\partial p}{\partial x_i}, \\ \frac{\partial T_3}{\partial t} + u_3^k \frac{\partial T_3}{\partial x_k} &= \varphi_2^3 (T_1 - T_3) + \frac{J_{23}}{\rho_3} (T_2 - T_3), \end{aligned} \quad (3)$$

где π_{ik} — эффективный тензор внутренних напряжений. Из предположения о равновесном столкновительном режиме течения продуктов эрозии следует

$$\pi_{ik} = \bar{\kappa} \rho_3 \Theta \delta_{ik}. \quad (4)$$

Здесь δ_{ik} — символ Кронекера, $\bar{\kappa}$ — численный коэффициент.

Уравнение переноса субстанции Θ было получено в [14] в рамках модели упругих шаров. С учетом вкладов межфазного трения и дробления частиц оно имеет вид [11, 13]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta}{\partial t} + u_3^k \frac{\partial \Theta}{\partial x_k} &= -\frac{2}{3} \Theta \frac{\partial u_3^k}{\partial x_k} - 2\Theta \varphi_1^3 + \varphi_2^3 (\vec{u}_3 - \vec{u}_2)^2 + \\ &+ J_{23} (\bar{\Theta} - \Theta) + \frac{\partial q_3^k}{\partial x_k}. \end{aligned} \quad (5)$$

Согласно [14], диффузионный поток субстанции Θ можно представить как

$$q_3^k = -\lambda_3 \frac{\partial \Theta}{\partial x_k}, \quad (6)$$

где λ_3 — коэффициент переноса, который для сферических частиц есть $\lambda_3 = 0.06\rho_{22}d_3\sqrt{\bar{\Theta}}$, ρ_{22} — плотность материала эрозионных осколков, d_3 — их диаметр. Величина $\bar{\Theta}$, фигурирующая в правой части (5) (удельная энергия разлета продуктов дробления), зависит в общем случае от параметров соударения частиц с эрозионными осколками.

1.2. Граничные условия

В наиболее простом случае, когда продукты эрозии не оказывают заметного влияния на течение смеси газа с частицами, процесс эрозии в среднем сводится к переносу поверхности тела в соответствии с уравнением [2]

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} = E\rho_2 (\vec{u}_2 \vec{n}) \sqrt{1 + (\vec{\nabla} h)^2}, \quad (7)$$

где ρ — плотность разрушаемого материала, $\vec{n}$ — внешняя нормаль к поверхности тела, уравнение которой имеет вид $z - h(x, y, t) = 0$. Величина E в правой части (7) есть коэффициент эрозии, который является функцией параметров соударения частиц с преградой и может быть получен расчетным или экспериментальным путем [1]. Он имеет смысл величины потери массы преград в расчете на одну частицу.

Соотношение (7) связывает параметры набегающего потока с изменением самой поверхности и параметрами разрушения. Задачи обтекания тел двухфазным потоком сводятся, таким образом, к задачам с изменяемой границей. Отметим, что уравнения, аналогичные (7), были получены в теории эрозии материалов при бомбардировке ионными пучками [15] и в задачах размывания морских берегов [16].

Дополняя (7) условиями вдува продуктов эрозии, находим

$$\begin{aligned} \rho_3 (\vec{u}_3 \vec{n}) &= -\rho_2 (1 + E) (\vec{u}_2 \vec{n}), \\ \rho_3 (\vec{u}_3 \vec{n})^2 &= \lambda_n \rho_2 (\vec{u}_2 \vec{n})^2, \\ \rho_3 (\vec{u}_3 \vec{n}) u_3^\tau &= -\lambda_\tau \rho_2 (\vec{u}_2 \vec{n}) u_2^\tau, \end{aligned} \quad (8)$$

где коэффициенты аккомодации нормальной и тангенциальной составляющих импульса частицы, т. е. λ_n , λ_τ , также являются функциями параметров соударения.

По мере роста плотности продуктов эрозии в слое может оказаться, что на поверхности тела $\rho_2 \vec{u}_2^2 = 0$ и весь эффект эрозии обусловлен только соударением с эрозионными осколками (вторичная эрозия). В этом случае моделирование по скорости и углу соударения уже не имеет смысла, так как эрозионные осколки движутся хаотически. Здесь уместна будет аналогия с тепловым

разрушением тела. Граничные условия тогда принимают вид

$$\begin{aligned} (\vec{q}_3 \vec{n}) &= 0 \text{ при } \Theta < \Theta^*, \\ \rho_3 (\vec{u}_3 \vec{n}) H_e &= -(\vec{q}_3 \vec{n}) \text{ при } \Theta = \Theta^*, \\ \rho \frac{\partial h}{\partial t} &= -\rho_2 (\vec{u}_2 \vec{n}) \sqrt{1 - (\vec{\nabla} h)^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $\vec{q}_3$ — поток энергии к разрушаемой поверхности; H_e — эн- тальпия эрозионного разрушения [17].

Граничные условия на внешней поверхности пылевого слоя подробно изучены в предыдущей главе. Здесь уместно будет от- метить следующую аналогию с моделью гиперзвукового обтекания аблирующего тела потоком излучающего газа. Если в уравнениях (3) — (5) устремить $J_{23} \rightarrow \infty$, а $\rho_1/\rho_3 \rightarrow 0$, предельная форма урав- нений будет совпадать с динамикой излучающего газа при гипер- звуковых условиях обтекания [13]. При этом и граничные усло- вия на внешней границе пылевого слоя имеют вид как в задачах гиперзвукового обтекания.

1.3. Упругопластическое поведение тела при ударе

Данные по динамике удара играют важную роль при построении моделей эрозии [1]. Несмотря на изменения топографии поверх- ности в процессе ее разрушения, именно случай соударения с плоской исходной поверхностью положен в основу теоретического анализа эрозии. Обобщения расчетных и экспериментальных дан- ных по соударению твердых частиц с однородными и неоднород- ными преградами даны, например, в [1, 18].

Имеются существенные различия в поведении преграды при соударении твердых частиц и капель жидкости с ней: при прочих равных условиях эрозия твердыми частицами является более ин- тенсивным процессом, и эти различия сохраняются вплоть до очень высокой скорости удара ~ 1 км/с.

Одно из первых решений задачи об ударе капли о полубеско- нечную упругую мишень было получено Блоуэрсом [19]. Он предположил, что эквивалентной на- грузкой при соударении с деформиро- ванной частицей является постоян- ное давление p , приложенное к пят- ну контакта, радиус которого увели- чивается со временем по закону $r = \sqrt{d_p u_2 t}$. В этом случае задача Лэм- ба о напряженно-деформированном состоянии упругой среды, заполняю- щей полупространство, имеет автомо- дельное решение, которое может быть получено в замкнутом виде. На рис. 5.2 представлен профиль

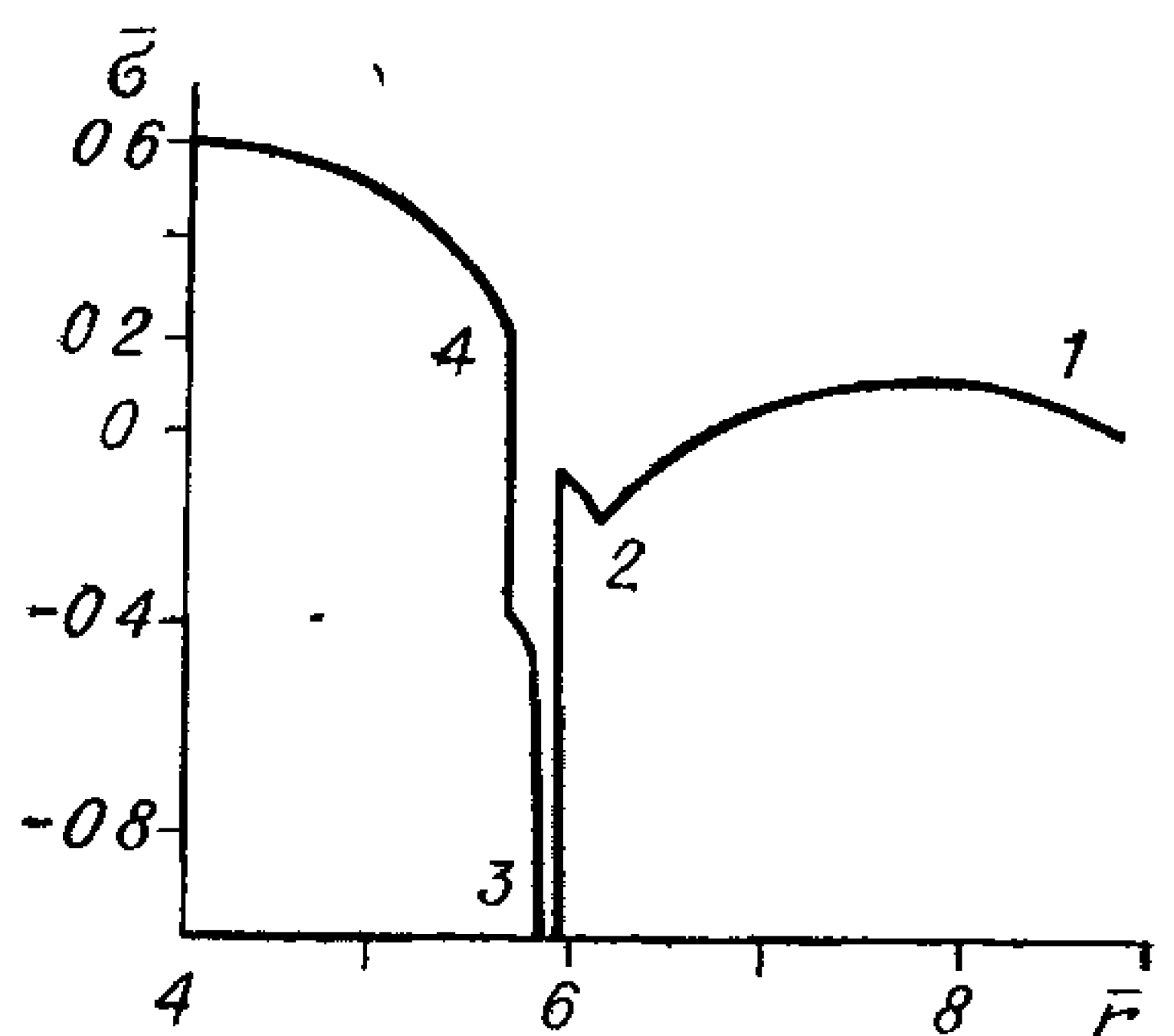


Рис. 5.2.

радиальной компоненты тензора напряжений на поверхности преграды в безразмерных координатах $\bar{\sigma} = \sigma_{rr}/p$, $\bar{r} = 4c_s r/u_2 d_p$, где c_s — скорость продольной упругой волны, u_2 — скорость соударения, d_p — диаметр капли. На этом графике выделены фронты продольной волны 1, поперечной 2, волны Рэлея 3 и упругопластической 4.

Обращает на себя внимание значительное по величине растягивающее напряжение, возникающее во фронте поверхностной волны Рэлея. В работе [19] высказана гипотеза, что эти волны играют ведущую роль в разрушении поверхности при капельно-ударном воздействии. Расчеты времени задержки разрушения по модели [20] подтверждают эту гипотезу (см. § 2, гл. 4). Более общие результаты о динамических напряжениях в упругих телах при произвольных нагрузках даны в [21]. Анализ упругих напряжений весьма полезен для оценок хрупкой эрозии, керамики и других сходных материалов, обладающих большим модулем упругости.

В общем случае при соударении с высокой скоростью частица может проникать в глубь материала, оставляя на поверхности царапину или кратер. Эти повреждения являются основной причиной вязкой эрозии металлов при ударном воздействии твердых частиц. Для нахождения глубины проникновения жесткой частицы в пластическую среду можно воспользоваться моделью [22], подправив ее на случай произвольной геометрии области взаимодействия в форме

$$m_p \frac{d\vec{u}_2}{dt} = - \sigma_b \int_{s_k} d\vec{s}_p - M \frac{d\vec{u}_2}{dt}, \quad (10)$$

где σ_b — сопротивление внедрению (динамическая твердость), M — присоединенная масса, $d\vec{s}_p$ — векторный элемент поверхности частицы, s_k — площадь контакта.

В работе [23] были выполнены расчеты зависимостей коэффициента эрозии от угла и скорости соударения в рамках модели, аналогичной (10). Полученные результаты неплохо согласуются с опытными данными. Другой тип повреждений среды, связанные с возникновением упругих трещин при ударе с низкой скоростью, рассмотрен в [18] на основе теории удара [24].

Значительное число работ посвящено численному исследованию высокоскоростного ударного взаимодействия тел. В численных экспериментах удалось установить некоторые детали взаимодействия волн в упругопластической среде [25]. На рис. 5.3 представлен вариант расчета проникновения сферического ударника в упругопластическую среду при скорости соударения $u_2 = 860$ м/с. Легко выявляются фронты упругой (1) и упругопластической волн (2), а также контактная граница (3). Вместе с рис. 5.2 это дает наглядное представление о волнах напряжений при ударных нагрузках. Задаваясь подходящим критерием разруше-

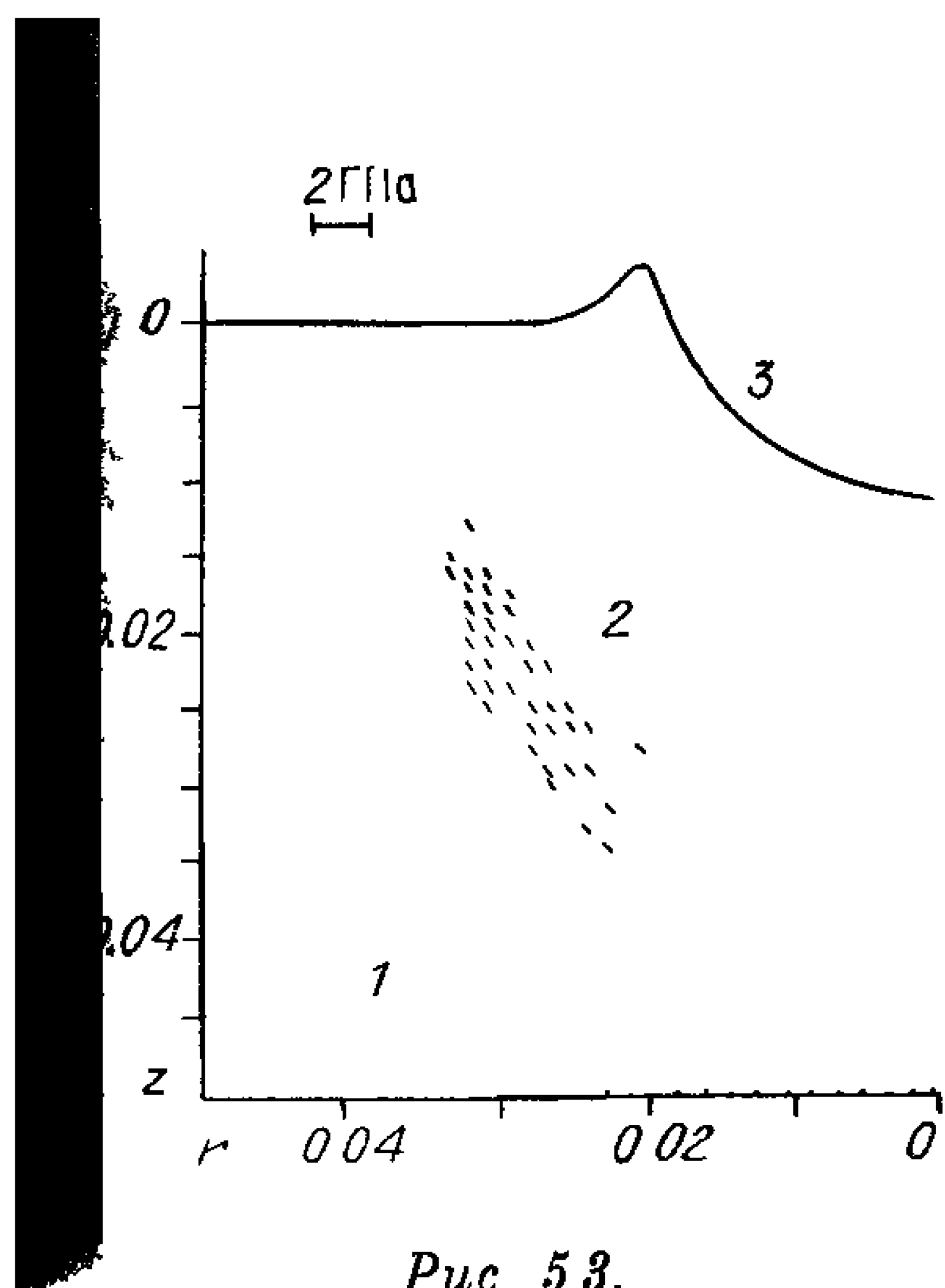


Рис 5.3.

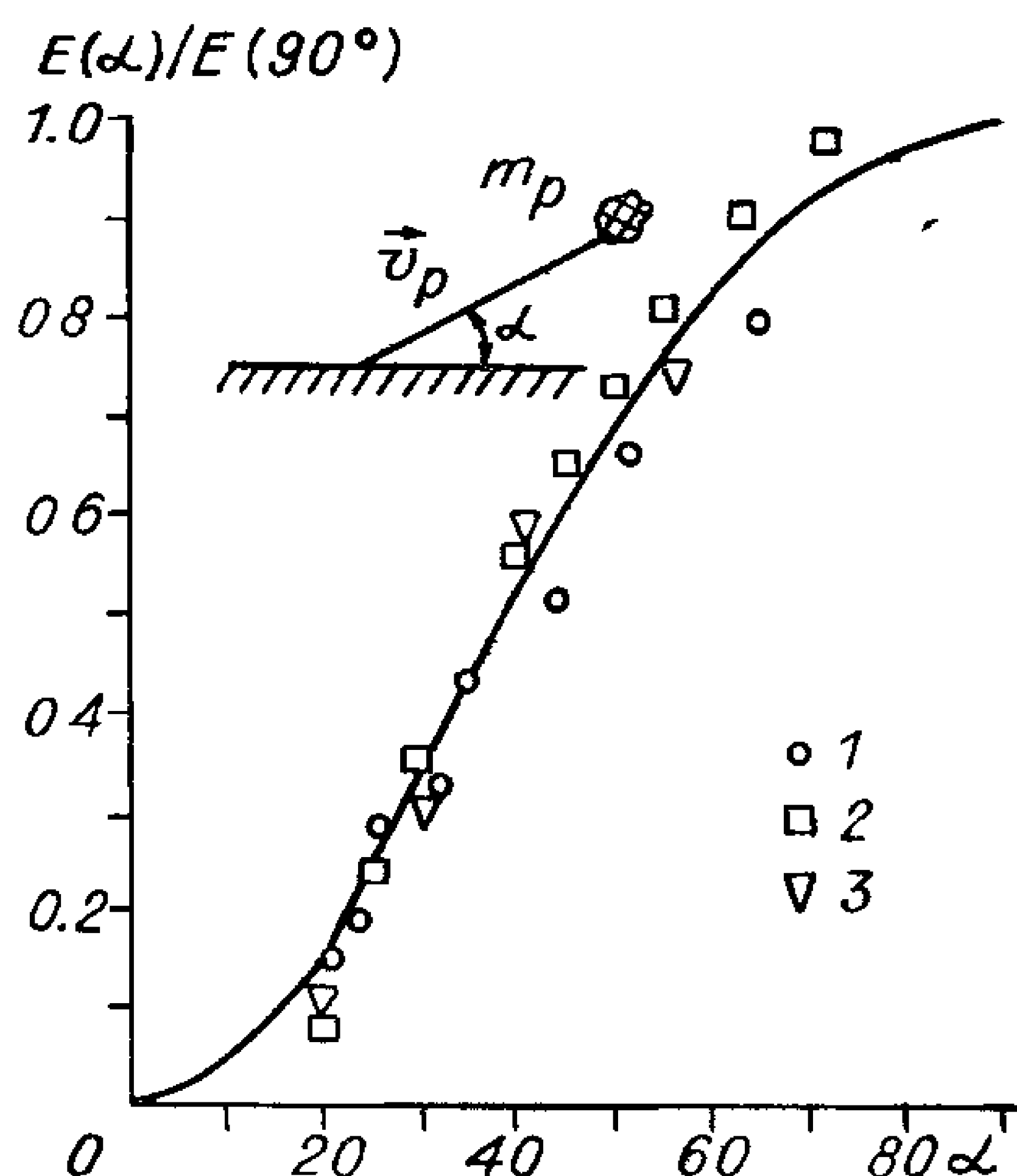


Рис. 5.4

ния, можно рассчитать распределение дефектов и микротрещин в объеме материала [1, 18, 21].

Однако эта задача является очень сложной и до сих пор отсутствует ее полное решение. Для замыкания модели (1) — (6) воспользуемся экспериментальными результатами [26], полученными при соударении стальных шариков миллиметрового диаметра о свинцовую мишень. На рис. 5.4 приведены данные эксперимента для скорости соударения (1 — 3.19; 2 — 3.81; 3 — 5.01 км/с) и интерполирующая их кривая, которая подчиняется уравнениям

$$E = \frac{\vec{u}_2^2}{2H_e} F(\alpha), \quad F(\alpha) = \begin{cases} \frac{4}{3} \left(\sin \left(\alpha - \frac{1}{4} \right) \right), & \alpha > 30^\circ, \\ \frac{4}{3} (\sin \alpha)^2, & \alpha \leq 30^\circ. \end{cases} \quad (11)$$

Такая зависимость эрозии от угла атаки является типичной в случае хрупкого износа.

§ 2. ЭРОЗИЯ ТОНКОГО ПРОФИЛЯ

Рассмотрим задачу обтекания тонкого, плоского, симметричного профиля под нулевым углом атаки сверхзвуковым потоком запыленного газа. Будем считать, что газ баротропный и движение частиц не оказывает влияния на параметры газового потока. В этом случае уравнения движения запыленного газа (1.1) разделяются на уравнения газовой динамики и уравнения движения частиц в газовом потоке. В силу симметрии рассмотрим только обтекание верхней половины профиля, уравнение которого $y = h_0(x)$, $0 \leq x \leq b$, $y(0) = y(b) = 0$. В отсутствие эрозии ре-

шение линеаризованных уравнений газовой динамики известно [2]:

$$\rho_1 = \rho_\infty \left(1 + \frac{M_\infty^2 v_1}{\omega u_\infty} \right), \quad u_1 = u_\infty - \frac{v_1}{\omega}, \quad v_1 = u_\infty h'_0(x - \omega y), \quad (1)$$

где $\omega = M_\infty^2 - 1$, M_∞ , ρ_∞ , u_∞ — число Маха, плотность и скорость набегающего потока. Уравнения для частиц следуют из (1.1) и имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\rho_2 u_2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_2 v_2) &= 0, \\ \left(u_2 \frac{\partial}{\partial x} + v_2 \frac{\partial}{\partial y} \right) u_2 &= \frac{3}{4} \frac{\rho_1 C_d}{\rho_{22} d} |\vec{V}_1 - \vec{V}_2| (u_1 - u_2), \\ \left(u_2 \frac{\partial}{\partial x} + v_2 \frac{\partial}{\partial y} \right) v_2 &= \frac{3}{4} \frac{\rho_1 C_d}{\rho_{22} d} |\vec{V}_1 - \vec{V}_2| (v_1 - v_2), \end{aligned} \quad (2)$$

где $c_d = c_d(\text{Re}_{12})$, $\text{Re}_{12} = \rho_1 |\vec{V}_1 - \vec{V}_2| d / \mu$. Граничные условия для уравнений (2) задаются на линии Маха

$$\rho_2 = \rho_{2\infty}, \quad u_2 = u_\infty, \quad v_2 = 0 \quad \text{при } x = \omega y. \quad (3)$$

Решение системы (2) с учетом (1) и (3) имеет вид

$$\begin{aligned} \rho_2 &= \rho_{2\infty} \left(1 - \frac{M_\infty^2 \eta}{\omega} \right)^{-1}, \quad u_2 = u_\infty - \frac{v_2}{\omega}, \quad v_2 = u_\infty \eta, \\ \eta' &= \frac{3}{4} \rho_1 M_\infty C_d (\text{Re}_{12}) |h'_0(\xi) - \eta| (h'_0(\xi) - \eta) / (\rho_{22} \omega d (1 - M_\infty^2 \eta / \omega)), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\xi = x - \omega y, \quad \text{Re}_{12} = \frac{du_\infty M_\infty \rho_1}{\mu \omega} |h'_0(\xi) - \eta|, \quad \varphi' = \frac{d\varphi}{d\xi}.$$

Считая, что частицы движутся в стоксовском режиме, и ограничиваясь линейным приближением из четвертого уравнения системы (4), найдем

$$\eta' = l_p^{-1} (h'_0(\xi) - \eta), \quad l_p = \rho_1 u_\infty d^2 / 18 \mu_\infty, \quad (5)$$

где l_p — длина релаксации.

Так как скорость перемещения профиля составляет малую величину $\sim \rho_2 / \rho \lesssim 10^{-3}$ от характерной скорости возмущений газового потока $u_\infty h'_0$, то можно пренебречь изменением профиля и в формулах (1), (5) положить $h = h(\xi, t)$. Поскольку угол соударения частицы с профилем является малым ($\alpha \ll 1$), для коэффициента эрозии (1.11) будет справедлива формула

$$E = \frac{2}{3} \frac{u_\infty^2}{H_e} \alpha^q, \quad q = 2, \quad \alpha = \frac{\partial h}{\partial x} - \eta. \quad (6)$$

Подставляя формулу (6) в уравнение (7), получим

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{dx_0}{dt} \frac{\partial h}{\partial x_1} - G \left(\frac{\partial h}{\partial x_1} - \eta \right)^{q+1}, \quad x_1 = x - x_0(t), \quad (7)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x_1} = l_p^{-1} \left(\frac{\partial h}{\partial x_1} - \eta \right), \quad \frac{dx_0}{dt} = G \left(\frac{\partial h}{\partial x_1}(0, t) \right)^q,$$

где $x_0(t)$ — положение передней кромки, $G = \frac{2}{3} \rho_{2\infty} u_{\infty}^3 / (\rho H_e)$. Система уравнений (7) решается в области $D(x_0) \leq x \leq X$, $0 \leq t \leq T$, при следующих начальных и граничных условиях:

$$h(x_1, 0) = h_0(x), \quad \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{t=0} = \Theta(x), \quad (8)$$

$$h(0, t) = 0, \quad \eta(0, t) = 0, \quad x_0(0) = 0.$$

Правая граница не входит в постановку задачи и находится в процессе решения как точка, в которой разность $h_x - \eta$ меняет знак. Будем искать решение поставленной задачи в виде

$$h(x, t) = g(t) f_1(x_1), \quad \eta(x_1, t) = g(t) f_2(x_1, t).$$

Подставляя эти выражения в (7) и разделяя переменные, находим

$$dg/dt = Ag^q, \quad f_2' = l_p^{-1} (f_1' - f_2), \quad (9)$$

$$G\theta_0^q f_1' - G(f_1' - f_2)^{q+1} - Af_1 = 0, \quad f' = \frac{df}{dx_1},$$

где $\theta_0 = \theta(0)$, a — постоянная интегрирования. Граничные и начальные условия для системы (9) имеют вид

$$g(0) = 1, \quad f_1(0) = f_2(0) = 0. \quad (10)$$

Окончательно решение задачи (7) — (8) в этом случае можно представить в виде

$$h(x, t) = f_1(x - x_0) (1 - qAt)^{-1/q}, \quad \eta(x, t) = f_2(x_1) (1 - qAt)^{-1/q},$$

$$x_0(t) = - \frac{G\theta_0}{qA} \ln(1 - qAt).$$

Как было показано в [2], системой уравнений (9) описывается семейство профилей с заданным наклоном и кривизной

$$f_1'(0) = \theta_0, \quad f_1''(0) = (q + 1) \theta_0 / q l_p - A / q G \theta_0^{q-1}.$$

На рис. 5.5 показаны некоторые особенности шлифования тонкого профиля: выпуклый профиль при эрозии становится еще более выпуклым и скорость его износа со временем возрастает — кривые 1—3, рассчитанные при $At = 0, 0.5, 1$ соответственно; вогнутый про-

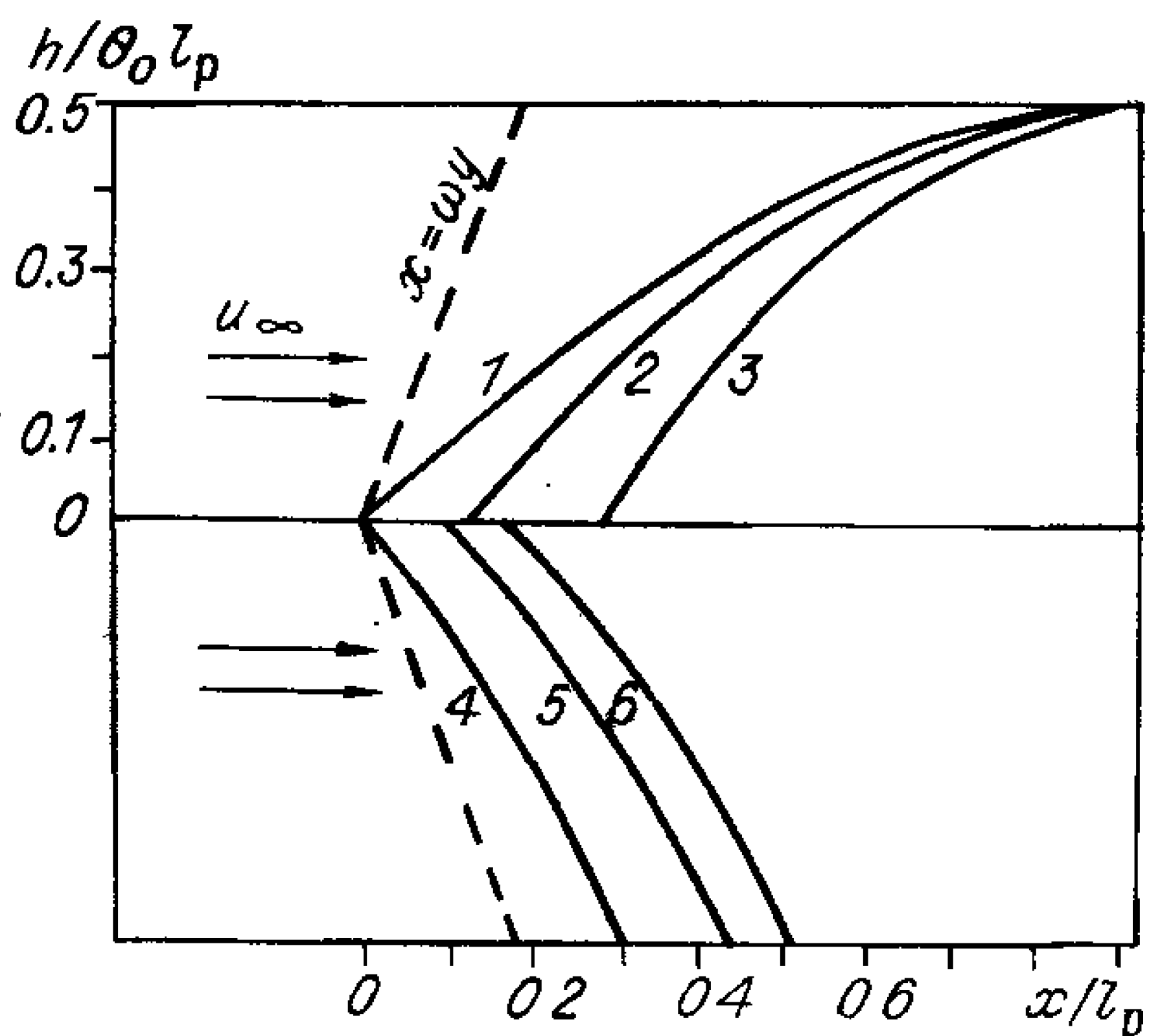


Рис. 5.5.

перемещение передней кромки асимметричного профиля описывается уравнениями

$$x_0(t) = \frac{-G\theta_1^2 + \theta_2^2}{qA\theta_1 + \theta_2} \ln(1 - qAt),$$

$$y_0(t) = -Gt\theta_1\theta_2 \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_1 + \theta_2} (1 - qAt)^{-1},$$

где θ_1, θ_2 — углы наклона поверхностей профиля в передней кромке до начала эрозии. Из этих выражений следует, что при $|A|t \ll 1$ отношение поперечной составляющей скорости эрозии к продольной имеет величину $\sim \theta$. Но если $A > 0$, то при $At \rightarrow 1$ это отношение становится сколь угодно большим. Этот результат является одним из проявлений неустойчивости эродируемой поверхности при малых углах соударения [27, 28]. Рассмотрим этот вопрос более подробно.

Полагая в первом уравнении системы (7) $x_0 = 0$, приведем ее путем перекрестного дифференцирования и замены переменных к виду

$$l_p \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial t} + G(q+1) l_p^{q+1} \left| \frac{\partial \eta}{\partial x} \right|^q \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0. \quad (11)$$

Основные свойства решений уравнения (11) могут быть установлены на основе анализа развития возмущений около начального состояния и поведения длинноволновых ($\lambda \gg l_p$) и коротковолновых ($\lambda \ll l_p$) возмущений конечной амплитуды.

Рассмотрим течение около профиля, часть поверхности которого до эрозии описывается куском параболы $h_0(x) = \Theta l_p x/R + \Theta x^2/2R$, $0 \leq x \leq L$, R — радиус кривизны, L — длина профиля. Легко показать, что в этом течении траектории частиц имеют постоянную кривизну, $\eta_x(x, 0) = \Theta/R$. Реально такая ситуация может иметь место на заданных кромках лопаток в газовых турбинах [29]. Положим $\eta = \eta(x, 0) + \tilde{\eta}(x, t)$, где $|\tilde{\eta}| \ll \eta(x, 0)$,

филь при эрозии становится еще более вогнутым и скорость его износа со временем падает — кривые 4, 5, 6 даны при $At = 0, 0.5, 1$ соответственно. Отметим, что в случае нулевого угла атаки или асимметричного профиля также могут быть получены точные решения задачи методом разделения переменных.

Поскольку движения верхней и нижней половины профиля взаимосвязаны, система уравнений (7) удваивается. Пе-

линеаризуем уравнение (11) в окрестности начального состояния, тогда получим

$$l_p \tilde{\eta}_{xt} + G_1 l_p \tilde{\eta}_{xx} + \tilde{\eta}_t = 0.$$

Здесь $G_1 = G(q+1)(l_p \Theta/R)^q$ — характерная скорость эрозии. Полагая $\tilde{\eta} \sim \exp(ikx - i\omega t)$, находим спектр монохроматических возмущений соответствующей линеаризованной системы

$$\omega(k) = G_1 l_p k^2 (i + l_p k) / (1 + l_p^2 k^2). \quad (12)$$

Поскольку $\text{Im } \omega(k) = G_1 l_p k^2 / (1 + l_p^2 k^2) \geq 0$, данное состояние является неустойчивым. Характерное время развития неустойчивости есть $\tau \approx l_p / G_1$. Уравнение (12) предсказывает, что в этом случае развивается коротковолновая неустойчивость, так как максимальный коэффициент нарастания возмущений реализуется при $k \rightarrow \infty$. Заметим, что в данной модели не принимается во внимание вязкое взаимодействие газа с обтекаемой поверхностью. Очевидно, пограничный слой будет демпфировать коротковолновые возмущения поверхности профиля. Кроме того, исходя из физического смысла величины η , необходимо потребовать $h_x > \eta$, что равносильно условию $\eta_x > 0$. Это дает ограничения на амплитуду коротковолновых возмущений в виде $A(k) \leq \Theta/kR$. При нарушении указанного ограничения необходимо исследовать нелинейную проблему.

Рассмотрим вопрос о поведении длинноволновых возмущений поверхности профиля. Положим $\varepsilon = l_p/R$ и рассмотрим предельную форму уравнений модели при $\varepsilon \rightarrow 0$. Согласно [28], в первом приближении по ε угол соударения равен $h_x - \eta = l_p h_{xx}$. Подставляя это выражение в первое уравнение (7), получим при $x_0 = 0$ $\frac{\partial h}{\partial t} = -G l_p^{q+1} \chi(h_{xx}) |h_{xx}|^q h_{xx}$. Здесь $\chi(h_{xx}) = (1 + \text{sign}(h_{xx}))/2$ (этот множитель введен, чтобы обеспечить условие положительной определенности угла соударения).

Данное уравнение описывает рост возмущений в нелинейном случае. В точках с положительной кривизной $h_{xx} > 0$ имеем $\partial h / \partial t < 0$, а при $h_{xx} < 0$ справедливо $\partial h / \partial t = 0$, т. е. на поверхности профиля происходит углубление «впадин», а «горбы» остаются на месте. Физическая причина неустойчивости состоит в том, что с повышением радиуса кривизны поверхности увеличивается угол соударения и, следовательно, возрастает местная скорость эрозии. Это приводит к росту радиуса кривизны поверхности и дальнейшему усилению скорости эрозии.

Рассмотрим противоположный случай, когда $l_p \gg R$. В уравнении (11) сделаем замену переменных $t' = Gt/R$, $x' = x/R$, тогда получим (штрихи опущены) $\varepsilon \eta_{xt} + (q+1)\varepsilon^{q+1} |\eta_x|^q \eta_{xx} + \eta_t = 0$. Можно видеть, что последнее слагаемое имеет порядок (ε^{-1}) . Так как в данном случае $\varepsilon \gg 1$, то, опуская ука-

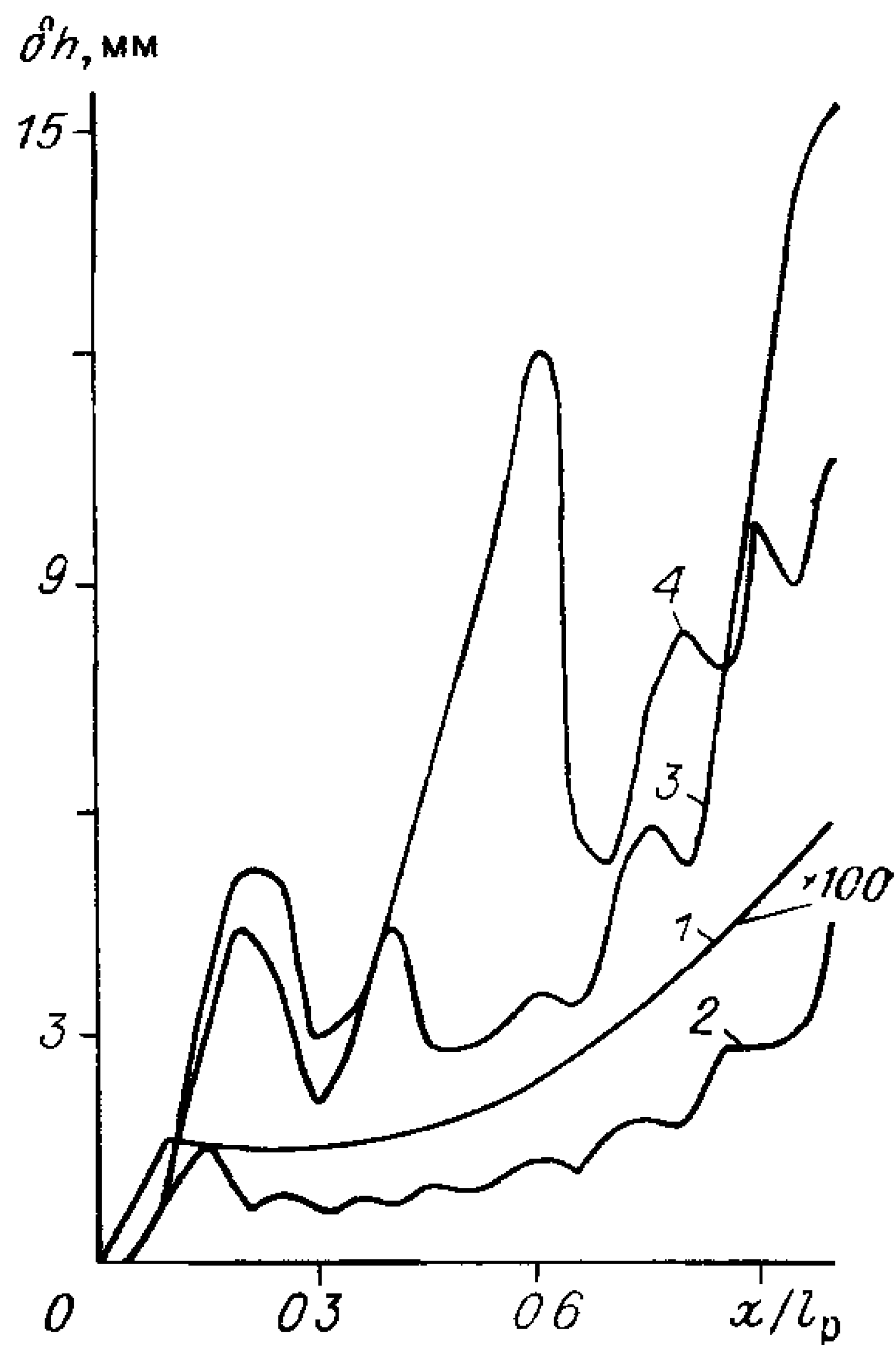
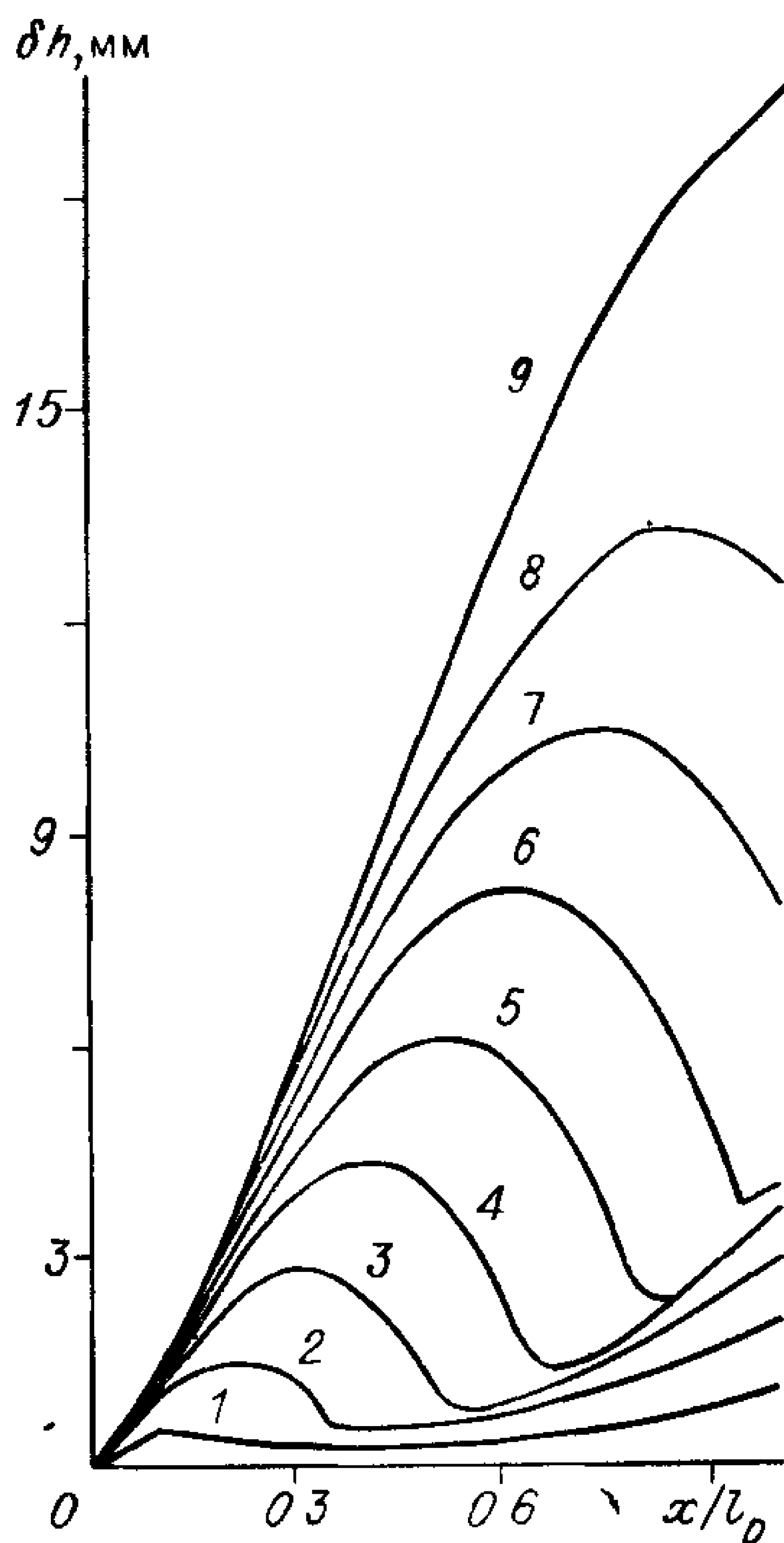


Рис. 5.7.

Рис. 5.6.

занное слагаемое, получим квазилинейное гиперболическое уравнение относительно функции $\psi(x, t) = \eta_x$: $\psi_t + (q + 1)\varepsilon^q \psi^q \psi_x = 0$. Свойства решений этого уравнения хорошо известны [30]. В частности, известно, что из-за нелинейных свойств оператора переноса возможно образование сильного разрыва на первоначально гладком решении. Соотношения на разрыве имеют вид

$$[\eta] = 0, \quad [h_x] = l_p [\eta_x], \quad Gl_p [\eta_x^{q+1}] = D_* [h_x],$$

где $[\eta_x] = \eta_x^+ - \eta_x^-$ — амплитуда, D_* — скорость распространения разрыва. Следовательно, скачок испытывает наклон контура профиля и кривизна траекторий частиц.

Суммируя все сказанное, можно сделать два важных вывода относительно свойств решения уравнения (11). Во-первых, из-за нарушения динамического равновесия в двухфазном потоке над искривленной поверхностью происходит усиление первоначальных возмущений. Во-вторых, из-за нелинейных свойств оператора переноса происходит опрокидывание первоначально гладких возмущений, что ведет к образованию изломов на эродируемом контуре.

Длинноволновую неустойчивость и образование изломов можно наблюдать в численных расчетах процессов эрозии в двухфазных потоках. На рис. 5.6 представлены результаты числен-

ных расчетов глубины эрозии профиля с параболической образующей $h_0(x) = y_0 + l_p x/R + x^2/2R$ при $R = 0.09$ м, $\varepsilon = l_p/R = 0.1$. Кривые 1—9 получены на моменты времени $t/\tau = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9$ соответственно. Закон эрозии задается в виде $E = E_0 \sin \alpha_p$. Постоянная времени $\tau = l_p \rho / (\rho_2 u_2 E_0)$ может быть задана в зависимости от параметров потока частиц. Из данных рис. 5.6 видно, что на первоначально гладкой поверхности образовалась промоина 2, которая со временем углубилась (3—6) и на выходе из промоины сформировался излом — кривые 5, 6 при $x > 0,9$ м. Уменьшая параметр ε , можно возбудить длинноволновую неустойчивость (рис. 5.7). На этом рисунке даны глубины уноса на различные моменты времени $t/\tau = 0.02; 1; 2; 2.23$ — кривые 1—4 соответственно, рассчитанные при $\varepsilon = 0.01$. Можно видеть, как первоначально гладкий контур (1) становится буквально изъеденным возмущениями конечной амплитуды — кривые 2—4. Таким образом, в данном случае оправдано само название этого явления — эрозия. Важно подчеркнуть, что неустойчивость эродируемой поверхности при малых углах соударения проявляется и в условиях обтекания полидисперсными потоками. В случае дискретного распределения частиц по размерам уравнение эрозии принимает вид [27]

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} = \sum_{a=1}^N \rho_a u_a E_a \left(\frac{\partial y_a}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial x} \right),$$

где суммирование осуществляется по всем фракциям частиц. Результаты расчетов эрозии параболического профиля в полидисперсном потоке представлены на рис. 5.8, где глубины уноса даны в зависимости от времени в различных сечениях контура $x = 0.1; 0.198; 0.284; 0.344; 0.442; 0.542; 0.66; 0.741; 0.852; 0.9$ м — кривые 1—10 соответственно. Наличие теневой зоны выявляется в виде характерных ступенек на кривых 8, 9, слева от которых $\delta h(t) = \text{const}$ в течение конечного промежутка времени. Интересно, что на начальном участке области эрозии (кривые 1, 2) хорошо выполняется автомодельный закон уноса, вытекающий из приведенных выше точных решений $h(x, t) = y_0 + h'_0 x + h''_0 (1 + \kappa t)^{-1/q} x^2/2$. Здесь κ зависит от начальной кривизны контура и параметров эродирующих частиц. Появление промоины

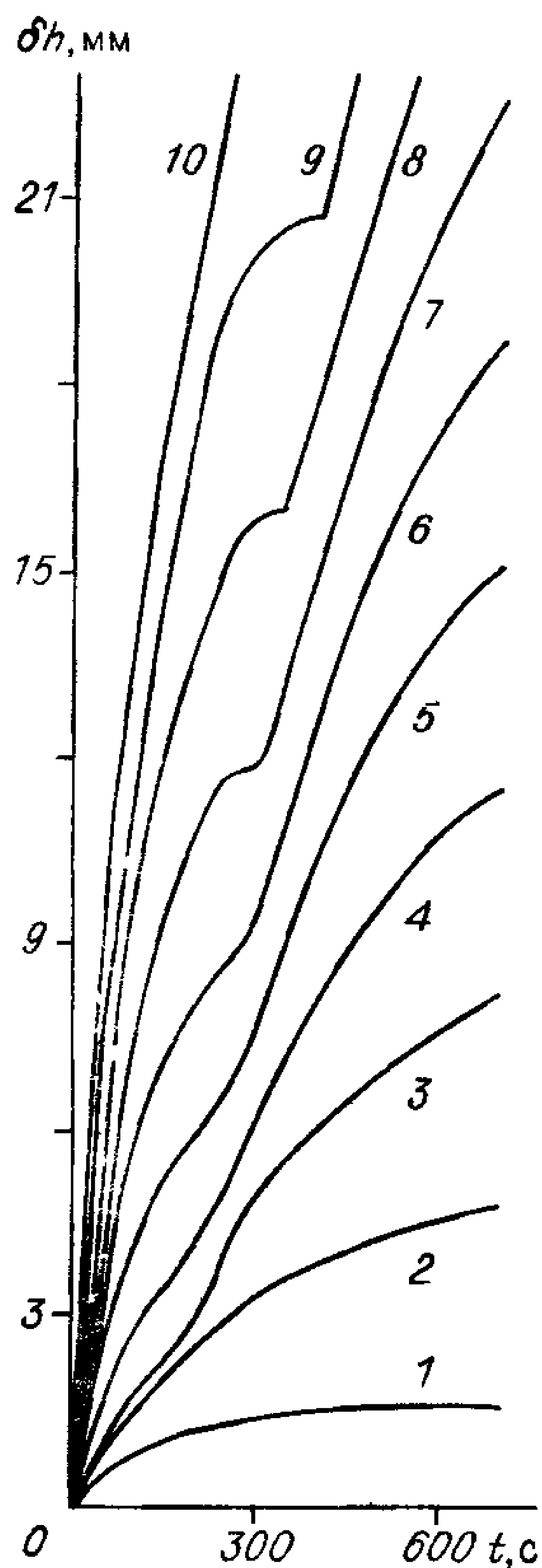


Рис. 5.8.

и теневой зоны нарушает эту закономерность. Тем не менее в конечном состоянии эродированный контур близок к прямой линии, что непосредственно вытекает из приведенного решения.

§ 3. РАЗРУШЕНИЕ КЛИНА

В СВЕРХЗВУКОВОМ ЗАПЫЛЕННОМ ПОТОКЕ

3.1. Движение пылевого облака

при сверхзвуковом течении около клина

Рассмотрим аэродинамическую ситуацию, возникающую при натекании сверхзвукового потока газозвеси на клин с углом полураствора, равным α ; это может быть и плоская пластина, тогда α есть угол атаки. Общая картина течения в случае малой примеси монодисперсных частиц показана на рис. 5.9. Сплошными линиями обозначены: положение косого (невозмущенного) скачка уплотнения — 1; линия тока газа в основном движении — 2; траектория частицы, не достигающей поверхности клина, — 3; предельная траектория, ниже которой движется облако отраженных частиц, — 4; траектория частицы, испытавшей соударение с клином, — 5. Через x , y обозначены оси декартовой системы координат. Положение возмущенного скачка уплотнения показано штрихом. Предполагая малой величиной относительный расход конденсированной фазы в набегающем потоке $\delta_0 = \rho_{2\infty} u_{2\infty} / \rho_{\infty} u_{\infty} \ll 1$, рассмотрим задачу о нахождении параметров сверхзвукового во всей области течения потока газозвеси. Данную задачу будем решать итерациями.

На первом шаге считаем газовый поток свободным от частиц. Тогда решение газодинамических уравнений сводится к условиям на косом скачке уплотнения. Движение частиц в этом приближении происходит на фоне постоянного течения газа и сводится к релаксации из одного состояния равновесия к другому. На следующем шаге «включается» взаимодействие газа с частицами, причем интенсивность взаимодействия определяется из условия выполнения законов сохранения массы, импульса и энергии для смеси в целом. На втором шаге движение частиц считается известным из решения, найденного на первом шаге. В силу ус-

ловия $\delta_0 \ll 1$, решение газодинамических уравнений может быть сведено к нахождению акустических возмущений, вызванных объемными источниками. В результате описанной процедуры газодинамические параметры и плотность потока частиц определяются с точностью $\sim \delta_0^2$, а температура и скорость конденсированной фазы — с точностью $\sim \delta_0$. Существенно, однако, что силы, действующие на клин в потоке газозвеси,

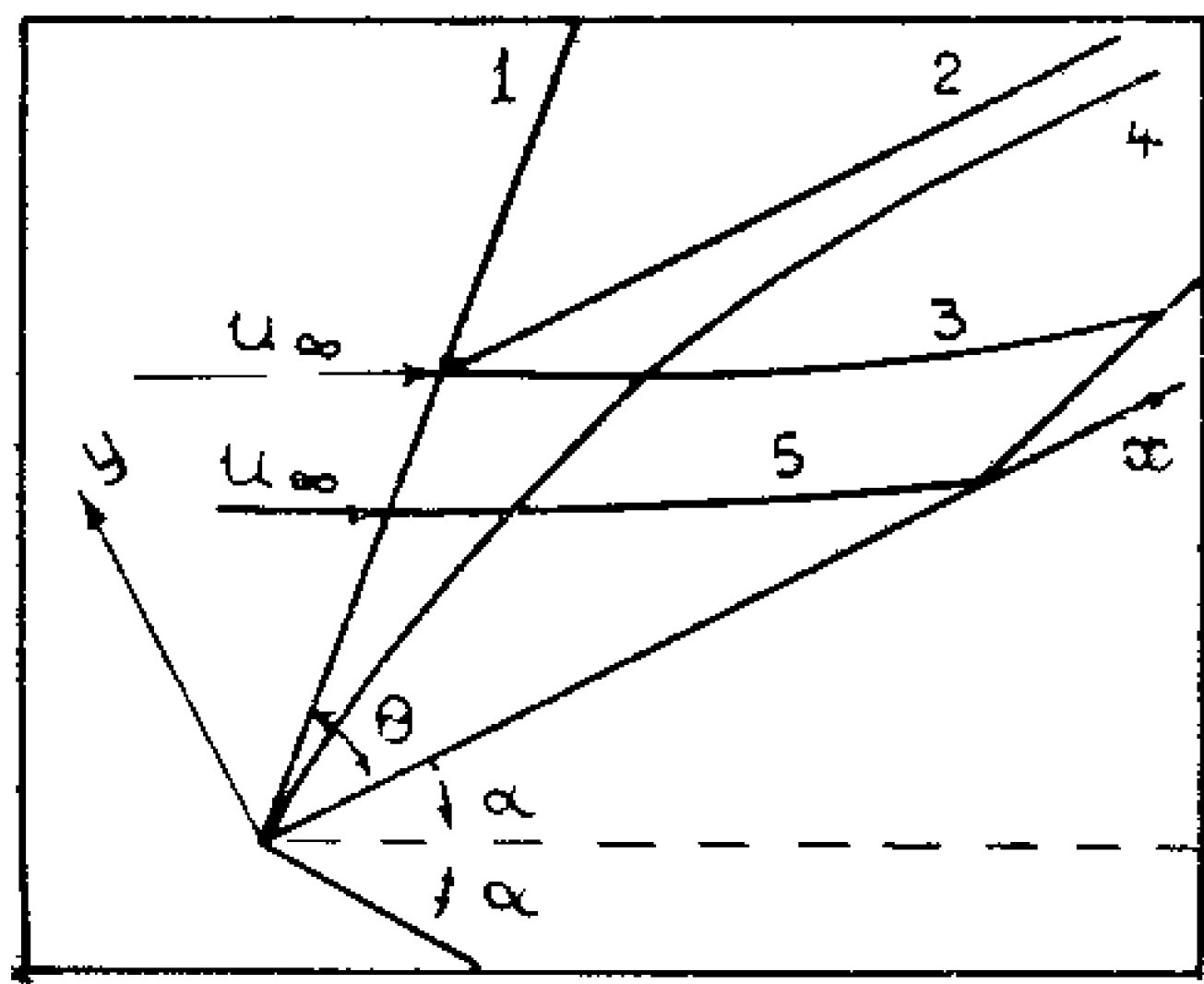


Рис. 5.9.

определяются с точностью $\sim \delta_0^2$, поскольку расход дискретной фазы есть величина $\sim \delta_0$. В рамках данной модели необходимо учитывать влияние отраженных частиц на состояние газового потока, но можно не учитывать соударения падающих и отраженных частиц, так как интенсивность их взаимодействия имеет порядок δ_0^2 .

Для описания частиц воспользуемся системой (2.2), дополнив ее уравнением для температуры частиц

$$\left(u_2 \frac{\partial}{\partial x} + v_2 \frac{\partial}{\partial y}\right) T_2 = (6c_p \mu_0 \text{Nu} / c_s \rho_{22} d^2 \text{Pr}) (T_1 - T_2), \quad (1)$$

где μ_0 — вязкость газа за косым скачком уплотнения; c_p — удельная теплоемкость газа; Nu — число Нуссельта; Pr — число Прандтля.

Далее предположим, что коэффициент сопротивления зависит только от числа Маха и Рейнольдса относительного движения $c_d = c_d(M_{12}, \text{Re}_{12})$, где $M_{12} = w/(\gamma R T_1)^{1/2}$, $\text{Re}_{12} = w d \rho_1 / \mu_0$, $w = \sqrt{(u_1 - u_2)^2 + v_2^2}$, а закон теплообмена имеет вид

$$\text{Nu} = \text{Nu}(M_{12}, \text{Re}_{12}, \text{Pr}).$$

Граничные условия для системы (2.2), (1) зададим на линии скачка уплотнения, предполагая, что пылевые частицы имеют скорость и температуру газа в набегающем потоке, т. е. речь идет о движении тела сквозь пылевое атмосферное облако. Таким образом, на линии $y = x \tan \Theta$ должно быть

$$\rho_2 = \rho_{2\infty}, \quad u_2 = q_\infty \cos \alpha, \quad v_2 = -q_\infty \sin \alpha, \quad T_2 = T_\infty, \quad (2)$$

где Θ — угол наклона ударной волны и поверхности клина; q_∞ , T_∞ — модуль скорости и температура газа в набегающем потоке соответственно.

Заметим, что первое и четвертое уравнения системы (2.2), (1) являются линейными относительно ρ_2 и T_2 соответственно. Необходимо, следовательно, решить нелинейную систему из двух оставшихся уравнений. Исследуемая система и соответствующие граничные условия не содержат произвольных функций и содержат один параметр с размерностью длины l_p . Поскольку координаты x и y равноправны в данной задаче, решение не может зависеть от x , y по отдельности, но зависит лишь от некоторой их линейной комбинации. Таковой является переменная $\xi = x \tan \Theta - y$. Из анализа размерностей следует, что решение задачи зависит от безразмерного отношения ξ/l_p . Это выполняется в действительности, но только в интегральной форме. Решение задачи (1), (2) и (2.2) представим в виде [2, 31]

$$\begin{aligned} \rho_2 &= \rho_{2\infty} / [\varepsilon + (1 - \varepsilon) \eta], \quad u_2 = u_0 + (q_\infty \cos \alpha - u_0) \eta, \\ v_2 &= -(q_\infty \sin \alpha) \eta, \quad T_2 = T_0 - (T_0 - (T_0 - T_\infty) e^{-J(\eta)}), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\varepsilon = \rho_\infty / \rho_0$ — отношение плотностей газа до и после скачка,

индексом «0» обозначены параметры газа за фронтом ударной волны. Функции $\eta(\xi)$ и $J(\eta)$ удовлетворяют уравнениям

$$\xi \sin \sigma / \sin (\theta + \alpha) = \int_{\eta}^1 [\varepsilon + (1 - \varepsilon) s] l_p(s) ds/s^2,$$

$$J(\eta) = (8c_p/c_s \operatorname{Re}_0 \operatorname{Pr}) \int_{\eta}^1 \operatorname{Nu}(s \operatorname{Re}_0, sM_0, \operatorname{Pr}) C_d^{-1}(s \operatorname{Re}_0, sM_0) ds/s^2, \quad (4)$$

$$\operatorname{Re}_0 = q_{\infty} d \rho_0 \sin \alpha / (\mu_0 \cos \Theta), \quad M_0 = M_{\infty} T_{\infty} \sin \alpha / (T_0 \cos \Theta), \\ l_p(s) = 4\rho_{22} d / (3\rho_0 c_d(s \operatorname{Re}_0, sM_0)).$$

Поясним происхождение сложных аргументов у подынтегральных функций в (4). Как отмечалось, для модуля скорости справедлива формула $w = ((u_2 - u_0)^2 + v_2^2)^{1/2} = \eta q_{\infty} \sin \alpha / \cos \theta$. Следовательно, $M_{12} = \eta M_0$, $\operatorname{Re}_{12} = \eta \operatorname{Re}_0$ и соответственно

$$c_d = c_d(\eta \operatorname{Re}_0, \eta M_0), \quad \operatorname{Nu} = \operatorname{Nu}(\eta \operatorname{Re}_0, \eta M_0, \operatorname{Pr}).$$

Далее заметим, что на поверхности клина частицы имеют нормальную к поверхности составляющую скорости, равную $v_2 = -q_{\infty} \sin \alpha \eta (x \operatorname{tg} \Theta)$. Эти частицы испытывают соударение с поверхностью и либо прилипают к ней, если это были, например, капли жидкости, либо отражаются и продолжают движение, если это были твердые частицы. Рассмотрим задачу о движении облака частиц, отраженных от поверхности зеркальным образом. Будем отличать параметры потока отраженных частиц штрихом, тогда граничные условия на поверхности клина для них имеют вид (условие зеркального отражения)

$$\rho'_2 = \rho_2, \quad u'_2 = u_2, \quad v'_2 = -v_2, \quad T'_2 = T_2. \quad (5)$$

Предположим, что движение отраженных частиц описывается системой уравнений (1), (2.2), в которой всем параметрам присвоены штрихи, после чего систему обозначим (1), (2.2). Можно заметить, что система уравнений (1), (2.2) инвариантна относительно одновременной замены $y \rightarrow -y$, $v_2 \rightarrow -v_2$. Отсюда и из вида граничных условий (5) следует, что решение задачи (1), (2.2) и (5) можно представить в виде (3), но с заменой ξ на «зеркальную переменную» $\xi' = x \operatorname{tg} \theta + y$ и одновременно $v_2 \rightarrow -v'_2$, т. е.

$$\rho'_2 = \rho_{2\infty} / [\varepsilon + (1 - \gamma) \eta'], \quad u'_2 = u_0 + (q_{\infty} \cos \alpha - u_0) \eta', \quad (6) \\ v'_2 = (q_{\infty} \sin \alpha) \eta', \quad T'_2 = T_0 - (T_0 - T_{\infty}) e^{-J'},$$

где обозначено $J' = J(\eta')$, а функция $\eta'(\xi')$ удовлетворяет уравнению

$$\xi' \sin \alpha / \sin (\alpha + \theta) = \int_{\eta'}^1 [\varepsilon + (1 - \varepsilon) s] l_p(s) ds/s^2. \quad (7)$$

Необходимо установить вид траекторий движения как для падающих, так и для отраженных частиц. Если обозначить через x_s , y_s координаты траекторий падающей частицы, тогда из (4) и из определения траектории имеем

$$dx_s \operatorname{tg} \theta - dy_s - [\varepsilon + (1 - \varepsilon)s] l_p(s) \sin(\theta + \alpha) ds/s^2 \sin \alpha = 0,$$

$$u_p dy_s - v_p dx_s = 0.$$

Отсюда находим в параметрическом виде выражение для траекторий

$$x_s = x_0 - \int_{s_0}^s u_2(s) l_p(s) \cos \theta ds / (s^2 q_\infty \sin \alpha),$$

$$y_s = y_0 - \int_{s_0}^s v_2(s) l_p(s) \cos \theta ds / (s^2 q_\infty \sin \alpha),$$
(8)

где $u_2(s) = u_2 + (q_\infty \cos \alpha - u_0)s$, $v_2(s) = -q_\infty \sin \alpha s$. Аналогично для траекторий отраженных частиц получим выражения

$$x'_s = x_1 + \int_s^{s_1} u'_2(s) l_p(s) \cos \theta ds / (s^2 q_\infty \sin \alpha),$$

$$y'_s = \int_{s_2}^{s_1} v'_2(s) l_p(s) \cos \theta ds / (s^2 q_\infty \sin \alpha).$$
(9)

Поскольку движение отраженной частицы зависит от предыстории ее движения до соударения с поверхностью, необходимо потребовать $x_s(s_1) = x_1$. С другой стороны, из того, что частица в своем движении прошла через скачок уплотнения, следует $y_0 = x_0 \operatorname{tg} \theta$, $s_0 = 1$.

Полагая в (9) $x_1 = 0$, $s_1 = 1$, находим уравнение предельной траектории $y_s^*(x)$, ниже которой движется облако отраженных частиц (кривая 4 на рис. 5 9). Наклон предельной траектории в окрестности носика клина есть $dy_s^*/dx = \operatorname{tg} \alpha$. Поэтому если наклон ударной волны к поверхности клина будет меньше наклона предельной траектории $\theta < \alpha$, то некоторая доля частиц будет отражаться прямо в набегающий поток. В этом случае решение задачи о движении отраженных частиц, полученное выше, уже не будет справедливым. Далее не будем учитывать такую возможность и просто положим $\theta \geq \alpha$.

3.2. Взаимодействие акустических возмущений с облаком частиц

Чтобы последовательно учесть влияние большого числа частиц на состояние газового потока, будем исходить из уравнений движения неоднородной смеси, записанных в форме законов

сохранения:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}(\rho_1 u_1 + \rho_2 u_2 + \rho'_2 u'_2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2 + \rho'_2 v'_2) &= 0, \\
\frac{\partial}{\partial x}(\rho_1 u_1^2 + p + \rho_2 u_2^2 + \rho'_2 u'^2_2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_1 u_1 v_1 + \rho_2 u_2 v_2 + \rho'_2 u'_2 v'_2) &= 0, \\
\frac{\partial}{\partial x}(\rho_1 u_1 v_1 + \rho_2 u_2 v_2 + \rho'_2 u'_2 v'_2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_1 u_1^2 + p + \rho_2 v_2^2 + \rho'_2 v'^2_2) &= 0, \\
\frac{\partial}{\partial x}(\rho_1 u_1 e_1 + \rho_2 u_2 e_2 + \rho'_2 u'_2 e'_2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_1 v_1 e_1 + \rho_2 v_2 e_2 + \rho'_2 v'_2 e'_2) &= 0, \\
e_1 = \gamma p / \rho_1 (\gamma - 1) + (u_1^2 + v_1^2) / 2, \quad e_2 = C_s T_2 + (u_2^2 + v_2^2) / 2. &(10) \\
e'_2 = c_s T'_2 + (u'^2_2 + v'^2_2) / 2.
\end{aligned}$$

Оценивая относительный вклад слагаемых с индексом 2 в динамику несущего газа, находим, что этот вклад пропорционален относительному расходу частиц, т. е. величина $\sim \delta_0$. Следовательно, при $\delta_0 \ll 1$ правомерно будет рассмотреть задачу о возмущенном движении газа в акустической постановке. Газодинамические параметры подвергнем линеаризации по формулам

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \rho_0(1 + \delta_0 \tilde{\rho}), \quad u_1 = u_0(1 + \delta_0 \tilde{u}), \quad v_1 = u_0 \delta_0 \tilde{v}, \\
p &= p_0 + \rho_0 u_0^2 \delta_0 \tilde{p}, \quad e_1 = e_0 + u_0^2 \delta_0 \tilde{e}.
\end{aligned}$$

Представим эти выражения в (10) и выразим слагаемые с индексом 2 в соответствии с принятой моделью расчета в виде (3) и (6). Тогда, после некоторых упрощений, опуская члены, квадратичные и более высокого порядка малости по δ_0 , получим известную систему уравнений сверхзвуковой акустики

$$\begin{aligned}
\partial \tilde{u} / \partial x + \partial \tilde{\rho} / \partial x + \partial \tilde{v} / \partial y &= 0, \\
\partial \tilde{u} / \partial x + \partial \tilde{p} / \partial x &= (\operatorname{tg}^2 \theta / u_2) (dv_2 / d\xi + \sigma dv'_2 / d\xi'), \\
\partial \tilde{v} / \partial x + \partial \tilde{p} / \partial y &= -(\operatorname{tg} \theta / u_0) (dv_2 / d\xi + \sigma dv'_2 / d\xi'), \\
\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} - \frac{1}{M^2 \gamma} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} &= -\frac{(\gamma - 1) \operatorname{tg}^2 \theta}{\gamma u_0^2} \left(\frac{de_2}{d\xi} + \sigma \frac{de'_2}{d\xi'} \right).
\end{aligned} \tag{11}$$

Здесь M — число Маха за косым скачком уплотнения; σ — единичная функция,

$$\sigma = \begin{cases} 1, & y \leq y_s^*(x), \\ 0, & y > y_s^*(x), \end{cases}$$

y_s^* — предельная траектория. Систему уравнений (11) необходимо дополнить граничными условиями на скачке уплотнения, на поверхности клина и, кроме того, на линии $y = y_s^*(x)$, являющейся поверхностью слабого разрыва газодинамических параметров. Условия на скачке уплотнения получаются путем линеари-

зации условий Рэнкина — Гюгонно [32]:

$$\begin{aligned}\tilde{\rho} &= \gamma M^2 \tilde{p} + (\gamma - 1) M^2 \tilde{u}, \quad \tilde{p} = n \tilde{v}, \\ \tilde{u} &= -[1 + (1/\varepsilon - 1)m] \tilde{v} \operatorname{tg} \theta, \quad \tilde{\theta} = m \tilde{v},\end{aligned}\quad (12)$$

где

$$\begin{aligned}m &= \frac{[2\varepsilon - (1 - \varepsilon)(\gamma - 1)M^2 \sin^2 \theta] \operatorname{tg} \theta}{\varepsilon + (M^2 - 1) \operatorname{tg}^2 \theta - (1 - \varepsilon) \gamma M^2 \sin^2 \theta}, \\ n &= \frac{n - 1 + [\gamma n - (\gamma + 1)M^2] \sin^2 \theta}{(1/\varepsilon - 1)[2 + (\gamma - 1)M^2] \sin^2 \theta \operatorname{tg} \theta},\end{aligned}$$

θ — возмущение угла наклона ударной волны. Два других условия имеют вид

$$\tilde{v} = 0 \text{ при } y = 0, \quad (13)$$

$$\begin{aligned}\tilde{v}(x, y_s^* + 0) &= \tilde{v}(x, y_s^* - 0), \quad \tilde{p}(x, y_s^* + 0) = \tilde{p}(x, y_s^* - 0), \\ \tilde{u}(x, y_s^* + 0) &= \tilde{u}(x, y_s^* - 0), \quad \tilde{\rho}(x, y_s^* + 0) = \tilde{\rho}(x, y_s^* - 0)\end{aligned}$$

при $y = y_s^*(x)$. Последние условия выражают свойство непрерывности газодинамических параметров при переходе через поверхность слабого разрыва. Вся область течения за косым скачком уплотнения естественным образом разбивается на две: область D_1 , где $\sigma = 0$, и область D_2 , где $\sigma = 1$. В области D_1 решение уравнений (11) для возмущений $\tilde{p}$ и $\tilde{v}$ можно представить в виде

$$\begin{aligned}\tilde{p} &= \Phi_1(\psi_+) + \Phi_2(\psi_-) + \hat{p}(\xi), \\ \tilde{v} &= \omega(\Phi_2(\psi_-) - \Phi_1(\psi_+)) + \hat{v}(\xi),\end{aligned}$$

где $\omega = \sqrt{M^2 - 1}$, $\psi_{\pm} = x \pm \omega y$, $\hat{p}(\xi)$, $\hat{v}(\xi)$ — частные решения задачи, которые легко находятся благодаря специальному виду правых частей в уравнениях (11). Полагая там все искомые функции зависящими только от ξ , находим

$$\begin{aligned}\hat{\rho}(\xi) &= \hat{v}(\xi) / \sin \theta \cos \theta, \quad \hat{u}(\xi) = -\hat{v}(\xi) \operatorname{tg} \theta, \\ \hat{p}(\xi) &= \hat{v}(\xi) \operatorname{tg} \theta + v_p(\xi) \operatorname{tg} \theta / u_0, \\ \hat{v}(\xi) &= \frac{(\gamma - 1)(e_2 - e_{20}) \operatorname{ctg} \theta + \gamma u_0 v_2}{u_0^2 [(M \sin \theta)^{-2} - 1]},\end{aligned}\quad (14)$$

где $e_{20} = c_s T_0 + u_0^2/2$.

Используя условия на ударной волне, выразим Φ_1 и Φ_2 через одну функцию, тогда получим

$$\begin{aligned}\tilde{p} &= \Phi(\psi_-) + \lambda_1 \Phi(\lambda_2 \psi_+) + \hat{p}(\xi) + C, \\ \tilde{v} &= \omega \Phi(\psi_-) - \omega \lambda_1 \Phi(\lambda_2 \psi_+) + \hat{v}(\xi) - \omega C,\end{aligned}\quad (15)$$

где $\lambda_1 = (\omega n - 1)/(\omega n + 1)$, $\lambda_2 = (1 - \omega \operatorname{tg} \theta)/(1 + \omega \operatorname{tg} \theta)$, $C = (n \tilde{v}(0) - \tilde{p}(0))/(1 + \omega n)$. В области D_2 решения для возмуще-

ний представляются формулами

$$\begin{aligned}\tilde{p} &= \varphi_1(\psi_+) + \varphi_2(\psi_-) + \widehat{p}(\xi) + \widehat{p}'(\xi'), \\ \tilde{v} &= \omega\varphi_2(\psi_-) - \omega\varphi_1(\psi_+) + \widehat{v}(\xi) + \widehat{v}'(\xi'),\end{aligned}$$

где частные решения $\widehat{p}'$ и $\widehat{v}'$ имеют вид

$$\widehat{p}'(\xi') = -\widehat{v}' \operatorname{tg} \theta - v_2' \operatorname{tg} \theta / u_0,$$

$$\widehat{v}'(\xi') = -[(\gamma - 1)(e_2' - e_{20}) \operatorname{ctg} \theta - \gamma u_0 v_2'] / [(M \sin \theta)^{-2} - 1] u_0^2.$$

Из условия непротекания на поверхности клина можно выразить φ_1 и φ_2 через одну функцию

$$\begin{aligned}\tilde{p} &= \varphi(\psi_+) + \varphi(\psi_-) + \widehat{p}(\xi) - \widehat{p}'(\xi'), \\ \tilde{v} &= \omega\varphi(\psi_-) - \omega\varphi(\psi_+) + \widehat{v}(\xi) + \widehat{v}'(\xi').\end{aligned}$$

Сшивая функции, определенные в областях D_1 и D_2 на линии $y = y_s^*(x)$, получим следующие функциональные уравнения:

$$\varphi(t) = \Phi(t) - 0,5\widehat{p}'(\xi_+) - \frac{1}{2\omega}\widehat{v}'(\xi_+),$$

$$\Phi(t) - \lambda\Phi(\lambda_2 t) = C + (\widehat{p}'(\xi_-) - \widehat{p}'(\xi_+))/2 + (\widehat{v}'(\xi_-) + \widehat{v}'(\xi_+))/2\omega, \quad (16)$$

$$\omega\xi_{\pm} = \pm t + x_{\pm}(\omega \operatorname{tg} \theta \mp 1), \quad x_{\pm} \pm \omega y_s^*(x_{\pm}) = t.$$

Если частицы прилипают к поверхности клина, то решение (15) справедливо во всей области течения. В этом случае определяющее функциональное уравнение имеет обычный для теории возмущений вид [32]

$$\Phi_0(x) - \lambda_1\Phi_0(\lambda_2 x) = C - \widehat{v}(x \operatorname{tg} \theta) / \omega, \quad (17)$$

где индекс «0» отличает случай неупругого соударения. Таким образом, решение задачи о взаимодействии акустических возмущений с облаком частиц при сверхзвуковом обтекании клина сводится к решению функциональных уравнений (15) — (17).

3.3. Некоторые результаты расчетов

В численных расчетах полагали, следуя [9], коэффициенты сопротивления и теплообмена равными

$$\begin{aligned}C_d(\operatorname{Re}_{12} M_{12}) &= C_d^0 (1 - 0.45 M_{12} + 4.84 M_{12}^2 - \\ &- 9.73 M_{12}^3 + 6.94 M_{12}^4) / (1 + 1.2 M_{12} C_d^0)^{1/2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Nu} &= \operatorname{Nu}^0 / (1 + 3.42 M_{12} \operatorname{Nu}^0 / \operatorname{Re}_{12} \operatorname{Pr}), \quad C_d^0 = 21.1 / \operatorname{Re}_{12} + \\ &+ 6.3 / \sqrt{\operatorname{Re}_{12}} + 0.25,\end{aligned}$$

$$\operatorname{Nu}^0 = 2 + 0.459 \operatorname{Re}_{12}^{0.55} \operatorname{Pr}^{0.33}.$$

На рис. 5.10 приведены результаты расчетов, иллюстрирующие влияние числа Re_0 на динамическую (1—3) и тепловую (4—6) релаксации частиц за косым скачком уплотнения. По оси ординат отложены функция $\eta(\xi)$ (кривые 1—3) и приведенная температура $\bar{T} = (T_2 - T_\infty)/(T_0 - T_\infty)$ — кривые 4—6. Расчеты выполнены при $c_p/c_s = 0.46$, $Pr = 0.65$, $M_\infty = 1.7$, $\alpha = 15^\circ$. Кривые (1—3) — (4—6) отвечают значениям числа Re_0 , равным 10, 10^2 , 10^3 соответственно. В качестве характерной длины здесь выбран параметр $l_p(1) = 4\rho_{22}d/3\rho_0 C_d(Re_0, M_0)$. Для нахождения функции $\Phi(t)$ или $\Phi_0(x)$ решение соответствующего уравнения представлялось в виде [32]

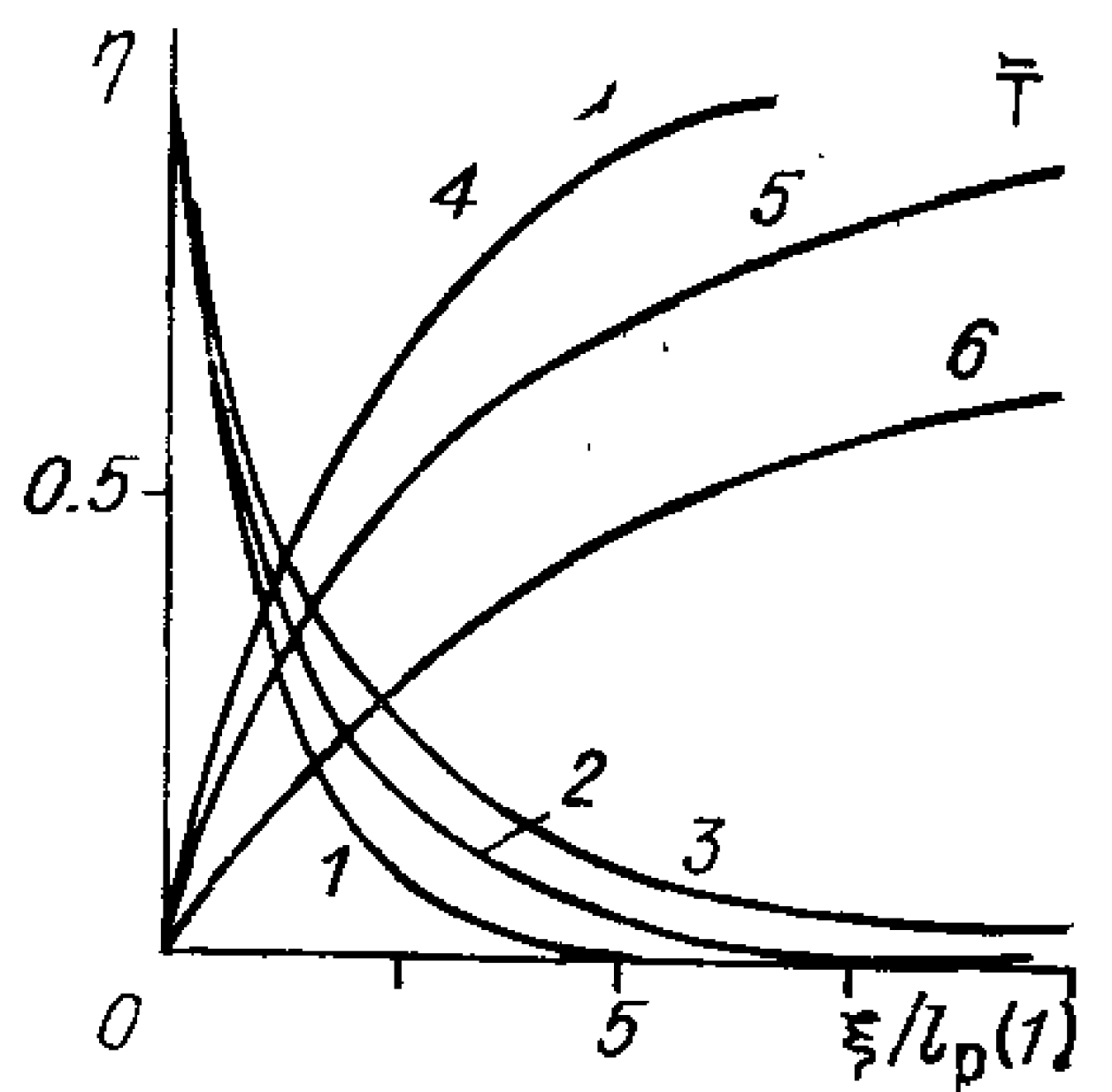


Рис. 5.10.

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_1^k Q(\lambda_2^k t), \quad (18)$$

где Q — правая часть уравнения (16) или (17). Хорошо известно, что коэффициент отражения возмущений от скачка уплотнения, т. е. λ_1 , имеет малое значение всюду, кроме особых точек, в окрестности которых $M \rightarrow 1$. Подробно этот вопрос исследован в [32]. При $\lambda_1 \ll 1$ для нахождения решения с требуемой точностью достаточно удержать лишь несколько членов ряда (18) (легко проверить, что Q является всюду ограниченной функцией). Для контроля точности расчетов использовались асимптотические формулы, справедливые и при отражении частиц, и в случае их прилипания

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \tilde{\theta} = \lim_{y \rightarrow \infty} \tilde{\theta}_0 = m\hat{v}(0),$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{p}(x, 0) = \lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{p}_0(x, 0) = (n - \operatorname{tg} \theta) \hat{v}(0) + \sin \theta \sin \alpha / \cos(\theta + \alpha), \quad (19)$$

$$\hat{v}(0) = [(\gamma - 1)(e_{2\infty} - e_{20}) \operatorname{ctg} \theta - \gamma u_0 q_\infty \sin \alpha] / [(M \sin \theta)^{-2} - 1] u_0^2,$$

где $e_{2\infty} = c_s T_\infty + q_\infty^2/2$. Плотность осевой компоненты силы, действующей на симметричный клин в сверхзвуковом потоке газовой взвеси, определяли по формуле

$$(\hat{F} - F_0)/2 = -p_n \sin \alpha + p_\tau \cos \alpha,$$

где $\hat{F}_0$ — плотность силы при $\rho_2 = 0$, $p_{n,\tau}$ — компоненты тензора напряжений. Согласно закону сохранения импульса частиц, имеем:

а) при упругом отражении

$$p_n = -(\delta_0 \rho_0 u_0^2) \tilde{p} - 2\rho_2 v_2^2, \quad p_\tau = 0;$$

б) для полного поглощения импульса частиц поверхностью

$$p_n = -(\delta_0 \rho_0 u_0^2) \tilde{p}_0 - \rho_2 v_2^2, \quad p_\tau = -\rho_2 u_2 v_2.$$

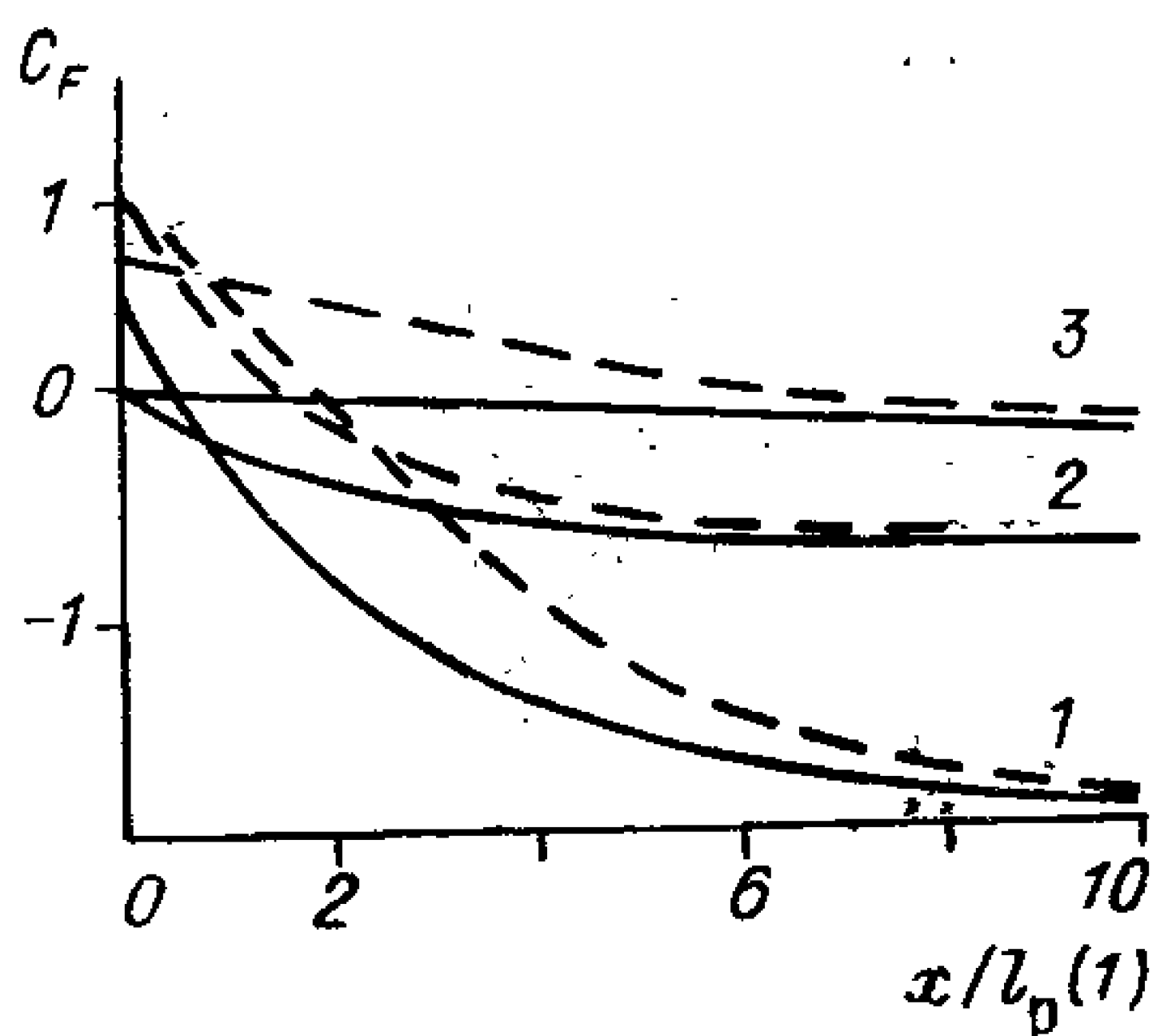


Рис. 5.11.

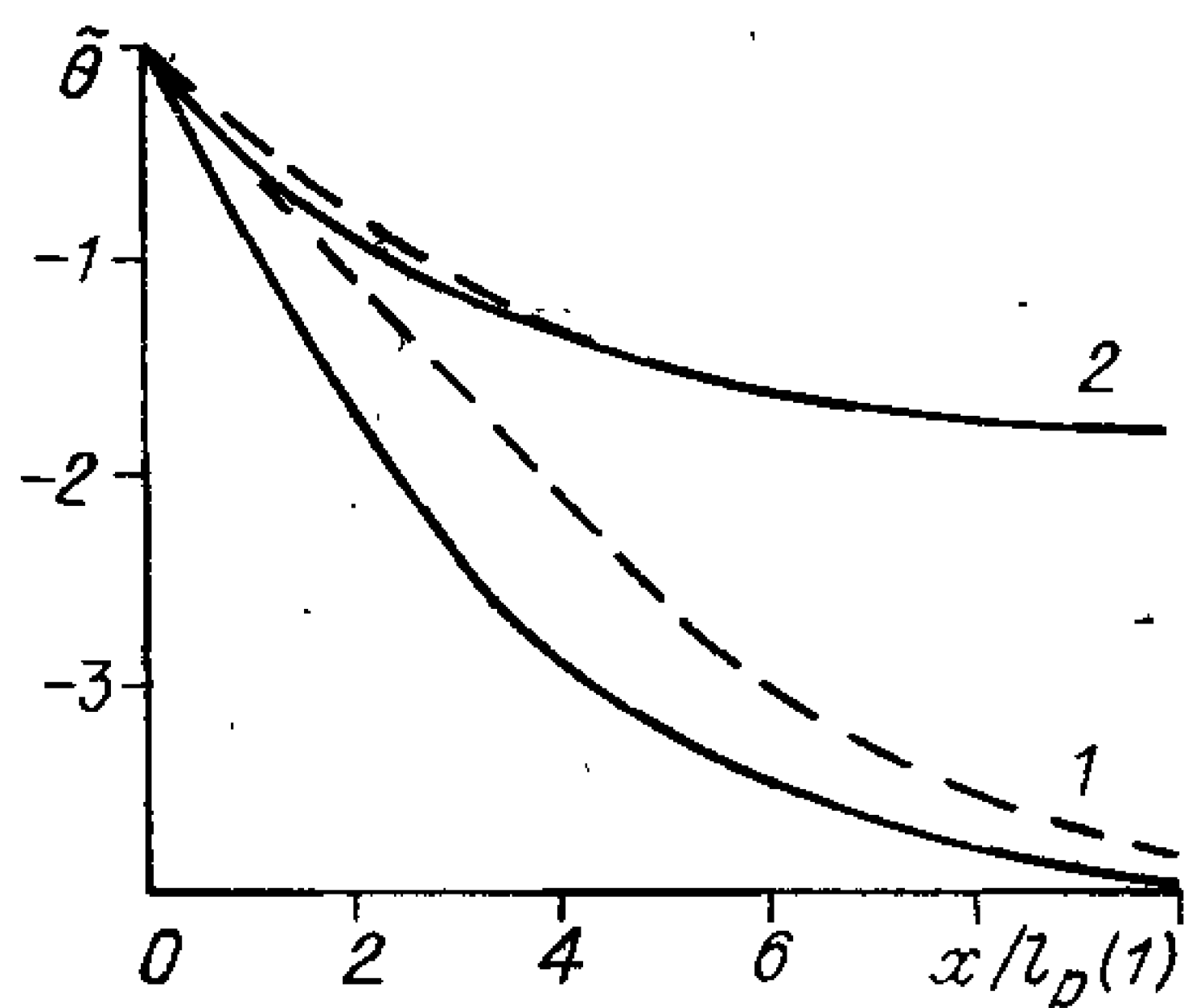


Рис. 5.12.

На рис. 5.11 представлены результаты расчета плотности силы в случае «а» — сплошные линии, в случае «б» — штриховые. Для удобства рассмотрения по оси ординат отложена безразмерная величина $C_F = (\bar{F} - \bar{F}_0)/(2\rho_0 u_0^2 \delta_0)$. Расчеты выполнены при $Re_0 = 10$, $Pr = 0.65$, $c_p/c_s = 0.46$; кривые 1 — $\alpha = 30^\circ$, $M_\infty = 2.6$; кривые 2 — $\alpha = 15^\circ$, $M_\infty = 1.7$; кривые 3 — $\alpha = 15^\circ$, $M_\infty = 2.5$. Можно видеть, что с увеличением расстояния от передней кромки плотность силы убывает вплоть до значения, определяемого из (19). Величина силы в случае неупругого соударения превосходит значение при упругом ударе, что обусловлено вкладом тангенциальной компоненты импульса частиц. Очевидно, наличие примеси частиц в сверхзвуковом потоке может приводить и к увеличению, и к уменьшению действующих сил в зависимости от линейного размера клина $\bar{L}$. Так, при $\bar{L} \lesssim l_p$ будет наблюдаться увеличение сопротивления, тогда как при $L \gg l_p$ сопротивление будет падать. Этот результат не является неожиданным, хотя он и противоречит интуитивному представлению о происхождении сопротивления в потоке частиц. При $L \gg l_p$ двухфазное течение является почти равновесным и в этих условиях роль частиц сводится к изменению теплофизических параметров двухфазной смеси. Например, $\gamma_{эф} = (c_p + \delta_0 c_s)/(c_v + \delta_0 c_s) \approx \gamma [1 + \delta_0 (1 - \gamma_s) c_s/c_p]$, т. е. эффективный показатель адиабаты уменьшается в присутствии частиц. Взаимодействие многих факторов приводит к падению давления за скачком уплотнения в запыленном газе по сравнению с чистым газом для данных условий обтекания.

Исследовалось влияние отраженных частиц на величину возмущения угла наклона ударной волны. На рис. 5.12 приведены результаты расчетов величины θ в зависимости от расстояния до носика клина. Сплошные линии соответствуют случаю зеркального отражения частиц. Расчеты выполнены при $Re_0 = 10$, $Pr = 0.65$, $c_p/c_s = 0.46$; кривые 1 — $\alpha = 30^\circ$, $M_\infty = 2.6$; кривые 2 — $\alpha = 15^\circ$, $M = 1.7$. Видно, что у носика клина, при $x \sim l_p(1)$, неравновесность течения в присутствии отраженных частиц усиливается (1), однако при малых углах раствора клина эффект является незначительным (2). На большом удалении от носика клина оба сравниваемых течения приходят к одному состоянию, что непосредственно следует и из асимптотических формул (19).

3.4. Начальная стадия разрушения клина

Рассмотрим эрозию клина в линейном по t приближении. Коэффициент эрозии возьмем в виде (1.11). Подставляя полученные решения (3) в уравнение (1.7) и интегрируя, находим

$$h(y', t) = y' \operatorname{ctg} \alpha + (E(\alpha, u_\infty) \rho_{2\infty} u_\infty / \rho) \frac{(1 - \eta)^3 t}{1 - (1 - \varepsilon) \eta}, \quad y' = y \cos \alpha + x \sin \alpha,$$

где функция η вычисляется на поверхности клина, т. е. при $\xi = x \operatorname{tg} \theta$. Так как $\eta(\xi)$ монотонно изменяется вдоль поверхности клина, максимальная эрозия будет иметь место у носика клина.

Скорость износа передней кромки $\frac{dx'_0}{dt} = \frac{\rho_{2\infty}}{\rho} u_\infty E(\alpha, u_\infty)$.

На рис. 5.13 представлены результаты расчета эрозии тонкого клина при следующих параметрах: $\alpha = 19^\circ$, $M_\infty = 5$. Сплошная линия указывает положение поверхности клина до начала эрозии, а последующее ее изменение — граунд-линия. Величина износа практически линейно убывает с расстоянием от передней кромки, так как параметр ξ/l_p изменяется здесь незначительно и не превышает 0.2. На рис. 5.14 показана эрозия поверхности клина с углом раствора $\alpha = 40^\circ$, $M_\infty = 5$ (обозначения те же, что на рис. 5.13). Можно отчетливо наблюдать неравномерный вдоль поверхности износ.

Вычислим средний коэффициент эрозии по формуле [2]

$$\langle E \rangle = \int_s E \rho_2 (\vec{v}_2 \vec{n}) ds \bigg/ \int_s \rho_2 (\vec{v}_2 \vec{n}) ds.$$

Для упрощения расчетов положим $c_d = c_n / \operatorname{Re}^n$. Используя полученные решения, находим

$$\langle E \rangle = E(u_\infty, \alpha) \frac{n}{2+n} \left(\frac{1 - (1 - \eta)^{2+n}}{1 - (1 - \eta)^n} \right)_{\xi=L},$$

где H — высота клина. Из полученного соотношения видно, что краевые эффекты значительно искажают характер поведения коэффициента эрозии при его осреднении, так как u_∞ и α влияют на значение $\eta(\xi)$ в краевой точке $\xi = L$ (рис. 5.15). Таким образом, измерения необходимо проводить либо на очень длинных клиньях ($L \gg l_p$), либо на коротких ($L \ll l_p$).

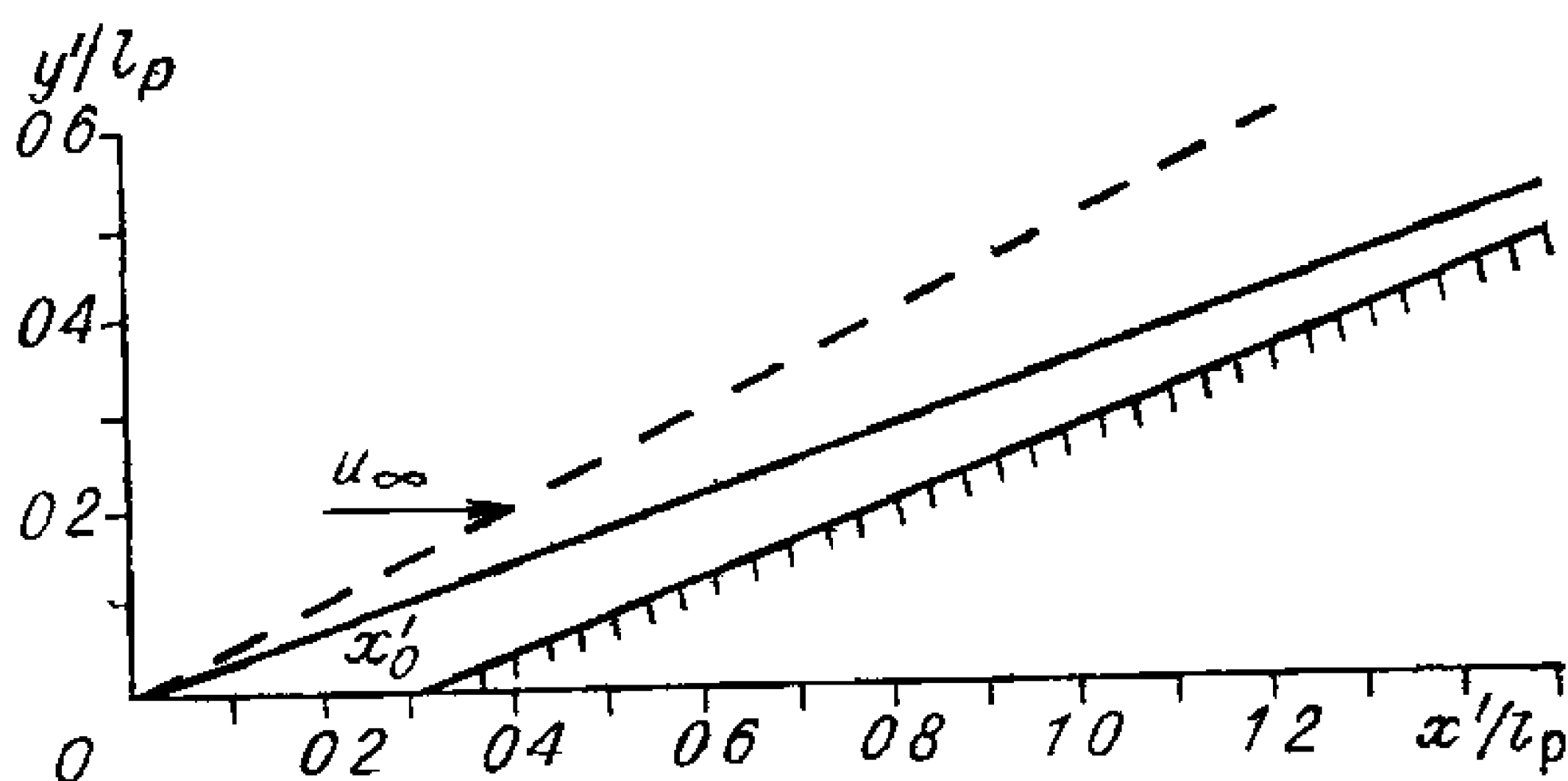


Рис. 5.13.

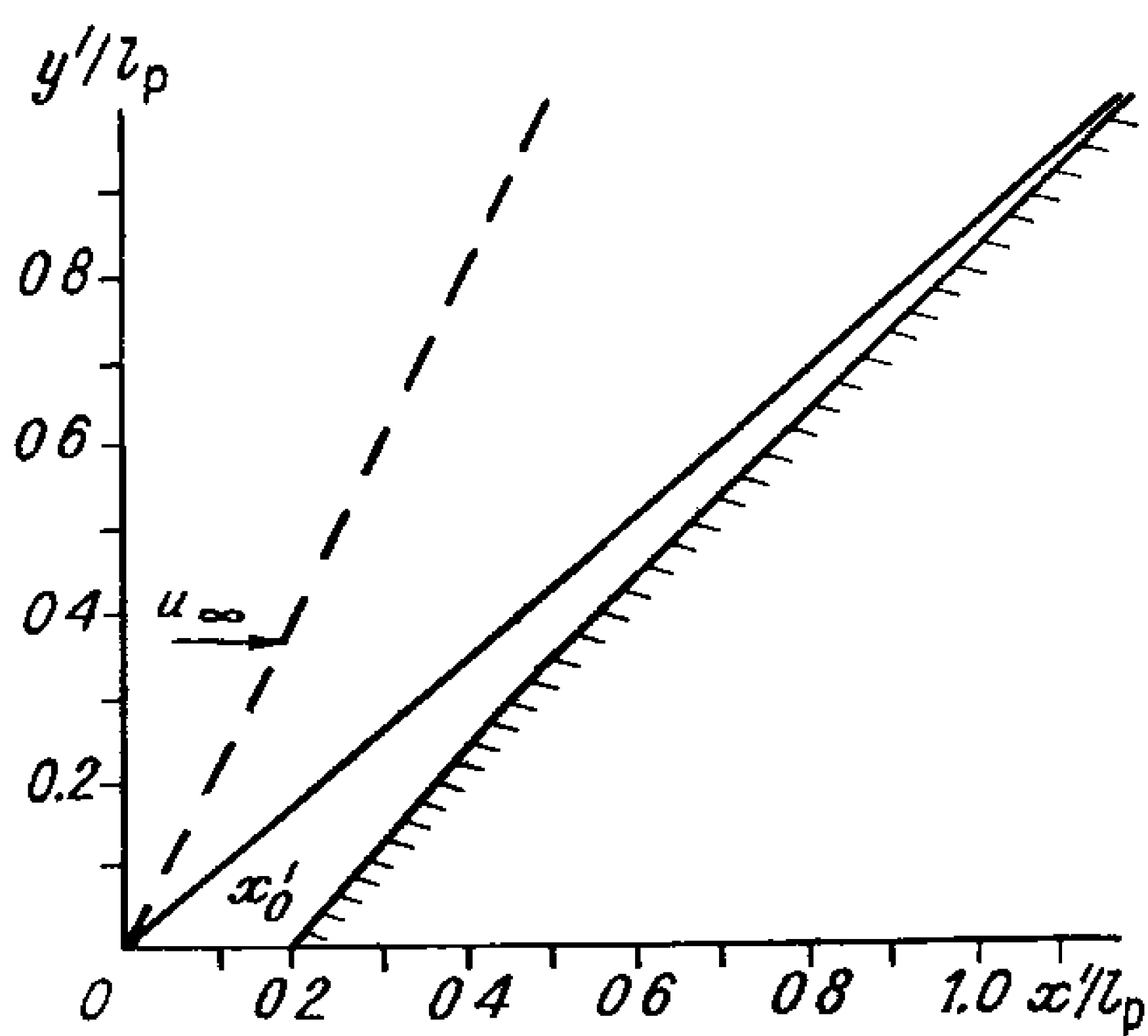


Рис. 5.14.

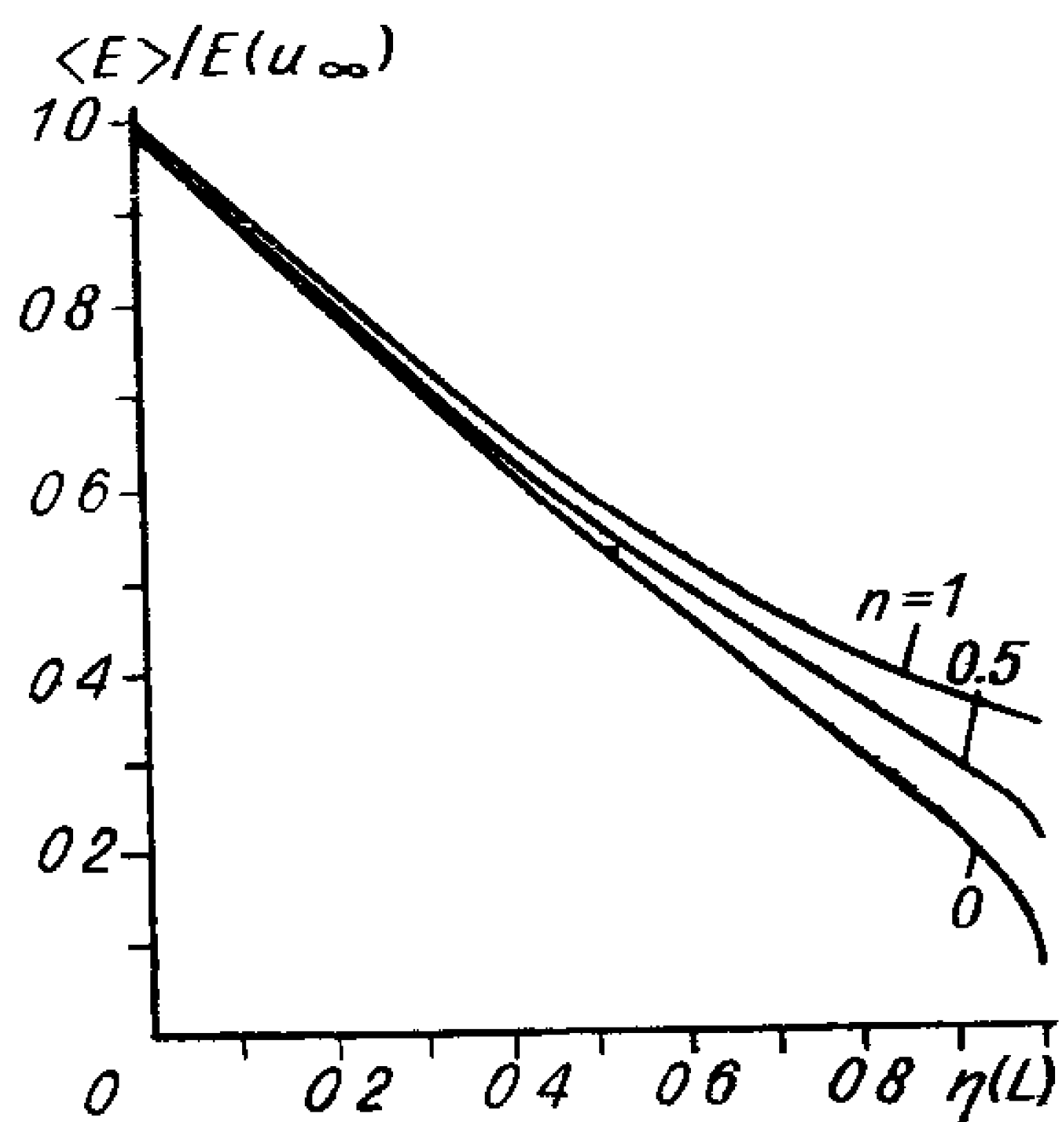


Рис. 5.15.

Как следует из приведенных результатов, клин затупляется при эрозии. Угол наклона поверхности клина в окрестности передней кромки определяется из соотношения

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha \left[1 + \frac{\dot{x}_0 t}{l_p} (2 + \varepsilon) (\operatorname{tg} (\alpha + \theta) - \operatorname{tg} \alpha) \right].$$

Возмущение параметров газового потока будет мало, если $\alpha_1 - \alpha \ll \alpha$. Это имеет место при условии $\tau = \dot{x}_0 t / l_p \ll 1$, поэтому погрешность линейной теории имеет порядок $G(\tau^2)$.

3.5. Влияние размера частиц

Экспериментальным путем была установлена независимость от размера частиц коэффициентов эрозии и сопротивления при обтекании тел в запыленном потоке. В работе [33] исследовалось влияние размера частиц на коэффициент эрозии плоских образцов и было обнаружено наличие критического диаметра d^* , выше которого эрозия практически не зависит от размера частиц. В [34] изучалось влияние размера частиц на коэффициент сопротивления плоского клина в двухфазном потоке и был сделан аналогичный вывод: существует критический размер, выше которого силы, действующие на клин, не зависят от размера частиц. Имеется точка зрения, что указанный эффект обусловлен изменением характера взаимодействия частиц с преградой при варьировании масштаба области взаимодействия [33].

Вычислим средние коэффициенты эрозии и сопротивления клина по формулам

$$\bar{E} = \int_0^L E dx / L, \quad \bar{C}_F = \int_0^L C_F dx / L.$$

(Введенный здесь коэффициент $\bar{E}$ отличается нормировкой от коэффициента $\langle E \rangle$, рассмотренного выше.)

Путем численного исследования влияния размера частиц на характеристики двухфазного обтекания клина установлено, что в зависимостях коэффициента эрозии $\bar{E}(d)$ и коэффициента сопротивления $\bar{C}_F(d)$ от размера частиц действительно имеется плато при $d > d^*$. Однако обнаруженный эффект никак не связан с характером взаимодействия частиц с преградой и целиком обусловлен динамической релаксацией частиц к состоянию равновесия с газовым

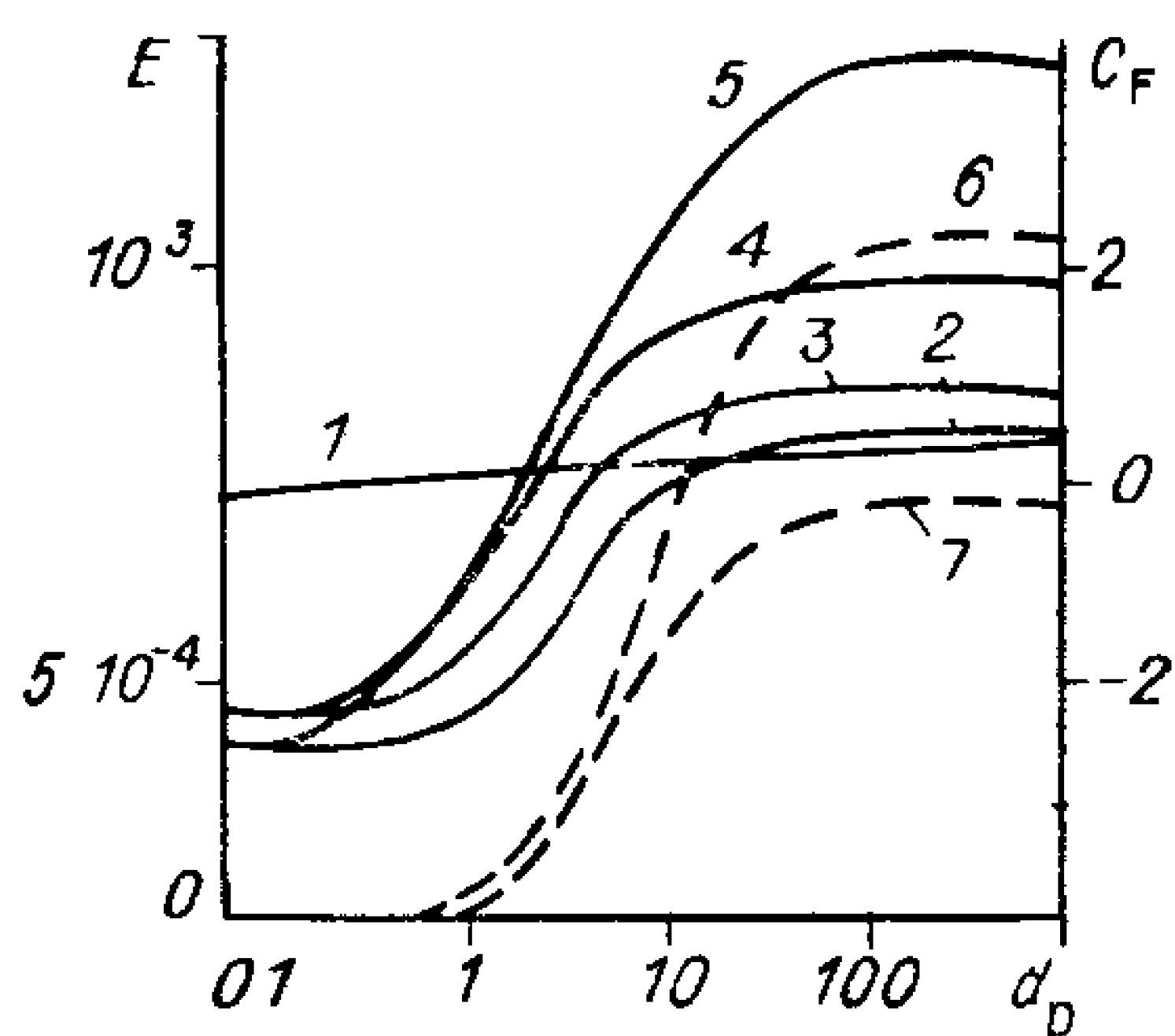


Рис. 5 16

потоком и конечным размером обтекаемого клина. На рис. 5 16 приведены расчеты зависимостей $\bar{C}_F(d)$ для случаев соударения твердых частиц (кривые 1—3) и каплей жидкости (4, 5) при различных углах раствора клина 2α и числах Маха набегающего потока M_∞ . Расчетные зависимости $\bar{E}$ при эрозии твердыми частицами нанесены штрихом. Можно видеть, что имеется две области автомодельности относительно размера частиц. Параметром, характеризующим динамическую релаксацию частиц, является линейный размер зоны релаксации l_p . Образует безразмерный параметр (число Стокса) $Sk = l_p/L$, L — характерный размер клина. При условии $Sk \ll 1$ имеем почти равновесный поток (левый автомодельный участок на кривой $\bar{C}_F(d_p)$). Напротив, при $Sk \gg 1$ частицы сохраняют параметры набегающего потока и сила сопротивления зависит только от величины миделя модели (правый участок автомодельности на кривой $\bar{C}_F(d)$). Наконец, при $L \sim l_p$ наблюдается переходная область. Следовательно, критический размер частиц удовлетворяет условию

$$d^* = L\rho_0 C_d (Re_*)/\rho_{22}.$$

Таким образом, обнаруженный в [33, 34] эффект обусловлен динамической релаксацией частиц и конечным размером клина. Влияние краевых эффектов на результаты эрозионных испытаний было отмечено выше. Здесь мы хотим подчеркнуть влияние масштабного фактора на результаты аэродинамических испытаний. Характеристики обтекания, полученные в опытах с небольшими моделями, могут быть перенесены на крупные модели лишь при условии совпадения чисел Стокса двухфазных течений.

§ 4. ЭФФЕКТ ЭКРАНИРОВАНИЯ ПРИ ЭРОЗИИ ЗАТУПЛЕННОГО ТЕЛА В СВЕРХЗВУКОВОМ ЗАПЫЛЕННОМ ПОТОКЕ

При обтекании затупленного тела высокоскоростным потоком с твердой примесью его поверхность разрушается вследствие ударного воздействия частиц. В процессе разрушения продукты эрозии выбрасываются в потоки и при определенных условиях скап-

ливаются в лобовой части тела (см. рис. 5.1). Образовавшийся таким образом пылевой слой является эффективной защитой поверхности от дальнейшего воздействия высокоскоростных частиц. Простая расчетная модель эрозионного разрушения затупленного тела, предложенная в [35], основывается на уравнениях типа (1.1), в которых взаимодействие с продуктами эрозии учитывается через осредненные по толщине пылевого слоя параметры. Используя приближения тонкого ударного слоя и еще более тонкого пылевого, т.е. условия $\Delta \ll s \ll R$, R — радиус затупления тела, удастся построить решение задачи в замкнутом виде.

Численные расчеты эрозии затупленного тела в сверхзвуковом запыленном потоке выполнены в [36], где были получены результаты по влиянию механизма уноса (вязкая или хрупкая эрозия) на распределение глубины эрозии по отводу тела. Исследование взаимодействия двухфазного потока с пылевым слоем в расчетах поперечного обтекания пластины, сделано в [12]. Вопросы устойчивости пылевого слоя без внутреннего давления изучены в [37], но еще раньше было установлено, что при стационарном обтекании пылевой слой устойчив лишь в ограниченном интервале изменения концентрации примеси в набегающем потоке [35].

Исследуем эрозионные процессы в окрестности критической точки осесимметричного тупого тела, обтекаемого гиперзвуковым потоком запыленного газа. Наряду с обычным ударным слоем толщиной s существует тонкий слой продуктов эрозии, примыкающий непосредственно к поверхности тела, толщина которого есть Δ . В системе координат с осью y вдоль образующей тела уравнения переноса массы и импульса полидисперсной смеси осредняются по толщине пылевого слоя. В односкоростном приближении имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \Delta) + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} (y \bar{\rho} v \Delta) &= J_e + \rho_c \left(\frac{d\Delta}{dt} - u(\Delta) \right), \\ \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \Delta v) + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} (y \bar{\rho} v^2 \Delta) + \Delta \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial y} &= \rho_c v(\Delta) \left(\frac{d\Delta}{dt} - u(\Delta) \right), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\bar{\rho} = \rho_c (1 - m_3) + \rho_3$, m_3 — объемное содержание продуктов эрозии.

В стационарном случае уравнения модели замыкаются выражениями для толщины слоя Δ , потока продуктов эрозии J_e , компонент скорости газового потока на внешней границе слоя $u(\Delta)$, $v(\Delta)$ и для градиента давления на поверхности тела. Соответствующие выражения, полученные из решения «внешней» задачи, имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta &= \Delta_0 e^{-\Phi}, \quad J_e = \rho_{2\infty} u_{2\infty} (1 + E_0 e^{-2\Phi}), \\ u(\Delta) &= -\frac{2\Delta}{y} \rho_c (1 - m_3) v, \quad v(\Delta) = k_c y, \quad \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial y} = -\rho_c k_c^2 y, \\ E_0 &= \frac{u_\infty^2}{2H_e} e^{-2s/l_p}, \quad \Delta_0 = \lambda_u \tau u_\infty e^{-s/l_p}. \end{aligned} \quad (2)$$

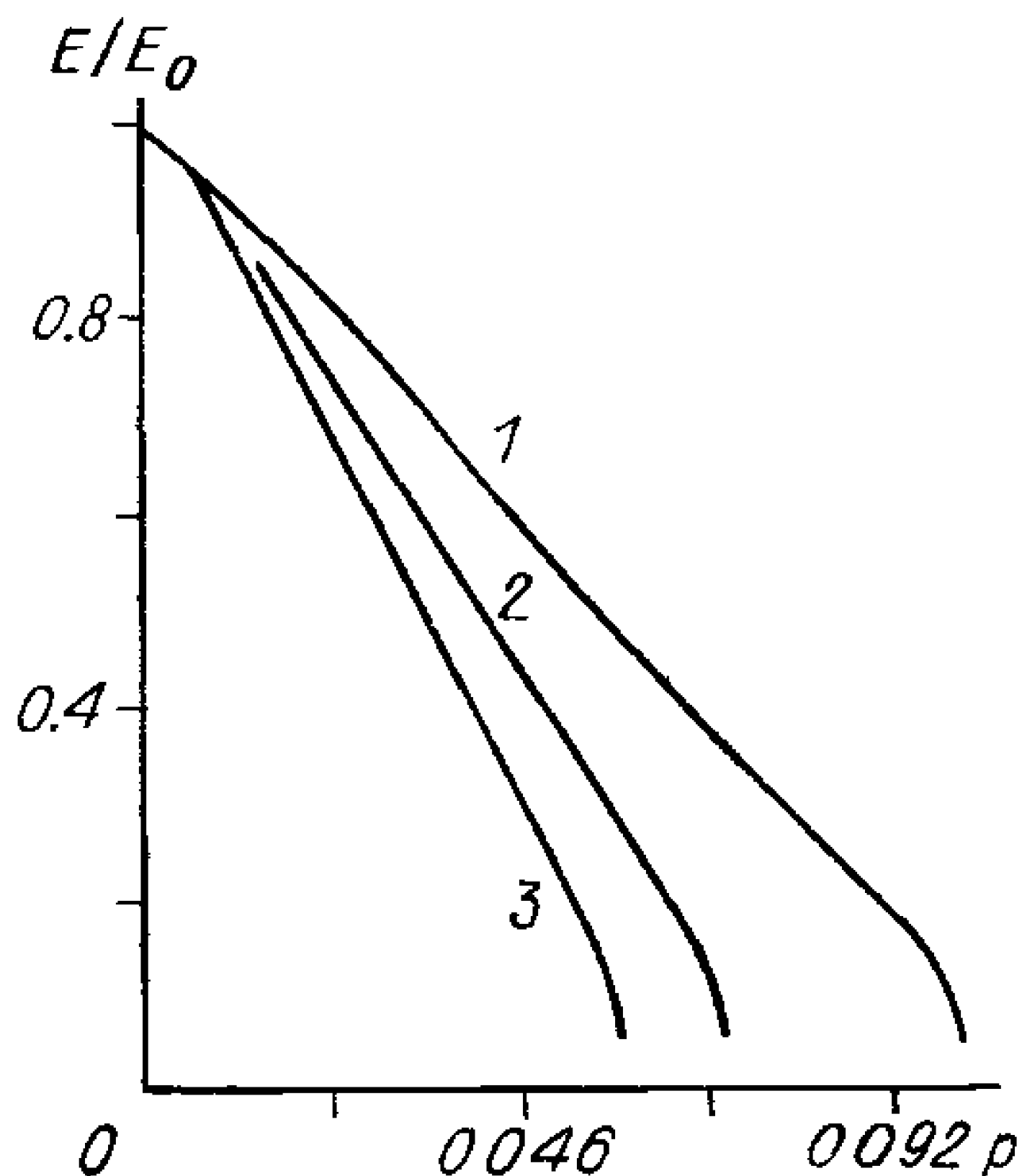


Рис. 5.17.

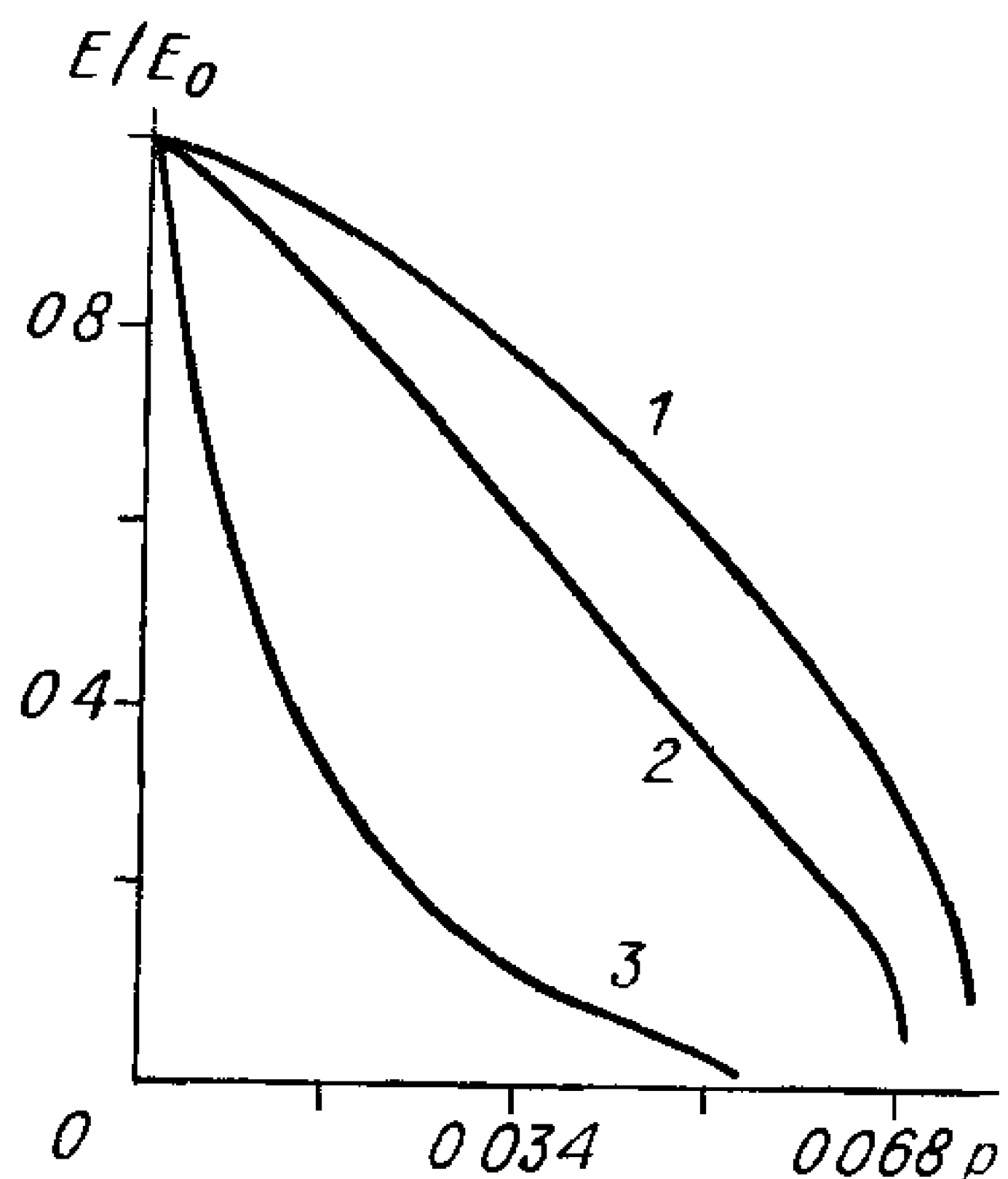


Рис. 5.18.

Здесь $l_p = 4\rho_{22}d/3\rho_c C_d$, $\tau = 1/\varphi_1^e$ — параметр релаксации эрозионных осколков, Φ — параметр экранирования, $\Phi = \frac{C_d \rho_3 \Delta}{C'_d \rho_c l_p}$.

Поскольку уравнения модели содержат лишь три характеристики ударного слоя (плотность газа за прямым участком ударной волны ρ_c и градиент скорости в окрестности критической точки k_c входят явно, тогда как влияние расстояния отхода s проявляется через параметры Δ_0 и E_0), выводы, полученные в рамках этой модели, оказываются пригодными для анализа эрозии тел с формой затупления от сферического носка до плоского торца.

Граничные условия для системы (1) задаются на оси симметрии

$$y = 0: \partial \bar{\rho} / \partial y = 0, \quad v = 0. \quad (3)$$

Решение задачи (1), (2) в стационарном случае имеет вид

$$\begin{aligned} \rho_3 &= \rho_c a \Phi e^\Phi, \quad v = \eta k_c y, \\ \eta &= \frac{1 + \sqrt{1 + 3(1 - m_3 + b\Phi e^\Phi)}}{3(1 - m_3 + a\Phi e^\Phi)}, \\ \Phi &= p(1 + E_0 e^{-2\Phi}) / \eta. \end{aligned} \quad (4)$$

Параметры a , p выражаются через длину релаксации частиц $l'_p = 4\rho_3 d / 3\rho_c C'_d$, определенную по коэффициенту сопротивления в потоке продуктов эрозии C'_d и через другие размерные параметры: $a = l'_p / \Delta_0$, $p = \rho_{2\infty} u_{2\infty} / 2k_c \rho_c l'_p$. Таким образом, получаем функциональную связь $\Phi = \Phi(p, a, E_0)$, при этом коэффициент эрозии $E = E_0 e^{-2\Phi}$, чем и объясняется эффект экранирования.

На рис. 5.17 приведены расчетные зависимости $E(p)$ для $a = 10; 20; 30$ (линии 1—3 соответственно) при $E_0 = 1$. Влияние начального значения коэффициента эрозии можно проследить на данных рис. 5.18, где расчеты зависимостей $E(p)$ выполнены при

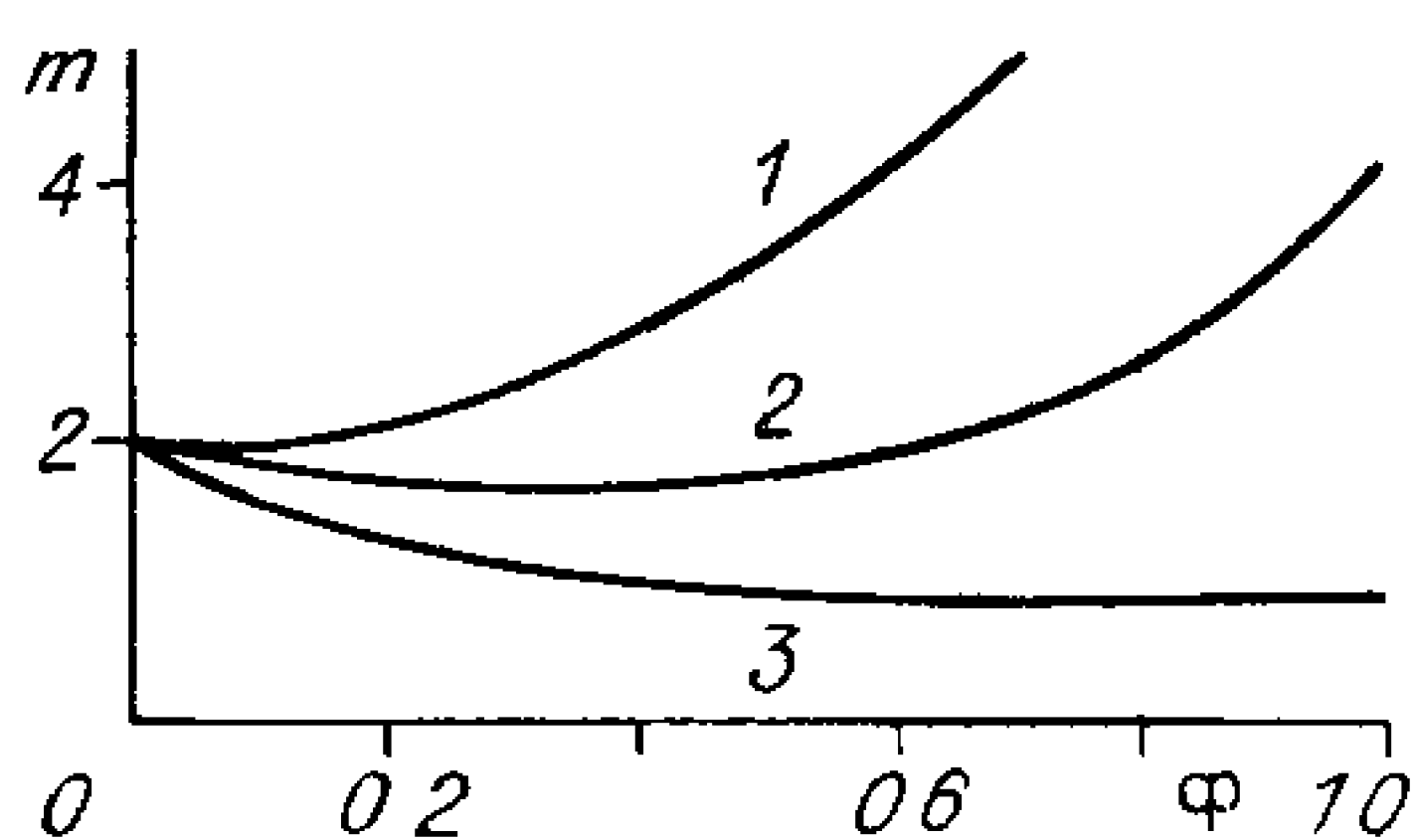


Рис. 5.19.

$a = 20$, $E_0 = 0.1$; 1.0; 10 (линии 1—3 соответственно). Можно отметить качественное согласие с результатами экспериментов [4], однако прямое количественное сравнение невозможно, поскольку в [4] обработка данных производилась с использованием критериальной зависимости $E = E(\rho_{2\infty}, u_{\infty}, \rho_c, d)$. Каждая из кривых на рис. 5.17, 5.18 определена

вплоть до критического значения $p = p_*(a, E_0)$. Анализируя эти данные, можно сделать вывод, что эффект экранирования усиливается с ростом p , a , E_0 .

Параметры E и E_0 различным образом зависят от скорости набегающего потока. Учитывая, что отношение s/l_p слабо зависит от u_{∞} (гиперзвуковая стабилизация), в общем случае положим $E_0 \sim u_{\infty}^n$ и, оценивая показатель степени в законе $E \sim u_{\infty}^m$ находим $m = n(1 - \partial\Phi/\partial \ln u_{\infty})$. Типичные кривые зависимостей $m = m(\Phi)$ представлены на рис. 5.19. Расчеты выполнены при $n = 2$, $a = 20$ и $E_0 = 0.1$; 1.0; 10 (линии 1—3 соответственно). Анализируя эти данные, отметим следующее: 1) при исследовании эрозионных стойких материалов эксперименты с запыленными потоками дают завышенное значение показателя степени в законе $E \sim u_{\infty}^m$; 2) при исследовании материалов с низкой эрозионной стойкостью ($E_0 \geq 1$) аналогичный показатель будет ниже стандартного значения при низкой запыленности потока ($p \ll p_*$) и выше стандартного значения при высокой запыленности ($p \sim p_*$). За стандартное значение берется показатель степени в законе $E_0 \sim u_{\infty}^n$, определенный в опытах по соударению одиночных частиц.

Определим влияние запыленности потока на силы, действующие на обтекаемое тело со стороны потока частиц. С учетом потока импульса эрозионных осколков, покидающих поверхность, имеем $F_p \sim \rho_2 u_2^2 (1 + \lambda_n (1 + E))$, где F_p — действующая сила. Используя полученные результаты, найдем

$$F_p/F_0 = p(1 + \lambda_n(1 + E_0 e^{-2\Phi}))e^{-\Phi},$$

где $F_0 = (C_d l_p / C_d' s) \rho_{\infty} u_{\infty}^2 e^{-s/l_p}$.

В условиях эрозии удар является почти неупругим ($\lambda_n \ll 1$), поэтому при $E_0 \ll 1$ имеем $F_p/F_0 = p e^{-\Phi}$. Таким образом, действующие силы могут иметь более низкое значение, чем при неупругом ударе.

Без ограничения общности, далее считаем $E_0 \ll 1$, $a \gg 1$. Объемное содержание частиц не превосходит единицы, $m_3 < 1$, поэтому при $\Phi \sim 1$ имеем

$$p = (\Phi e^{-\Phi} / 3a)^{1/2} + G(a^{-3/2}).$$

При $\Phi = 1$ p достигает максимального значения $p_* = 1/\sqrt{3ae}$

и далее убывает с ростом Φ . Отсюда следует, что функция ветвится в окрестности точки $p = p_*$ и что здесь следует ожидать кризисных явлений.

Рассмотрим возмущения параметров пылевого слоя такие, при которых структура решения (4) не нарушается. Этому условию отвечают возмущения с $\Phi = \Phi(t)$, $\eta = \eta(t)$. Кроме того, будем считать характерное число Струхала $Sh = \dot{\Delta}/u_\infty$ малым настолько, что замыкание модели в форме (2) сохраняет свой смысл. Таким образом, считаем $\rho_c = \text{const}$, $k_c = \text{const}$. Отбрасывая в уравнениях системы (1) малые при $\Phi \sim 1$ слагаемые, отвечающие переносу массы и импульса газовой фазы через границу пылевого слоя, имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_c} \frac{d\Phi}{dt} + 2\Phi\eta &= 2p, \\ \frac{1}{k_c} \frac{d}{dt} (\Phi\eta) + 3\Phi\eta^2 &= e^{-\Phi/a}. \end{aligned} \quad (5)$$

Стационарные точки динамической системы (5), удовлетворяющие условиям $\Phi_0 > 0$, $\eta_0 > 0$, находятся из решения системы алгебраических уравнений

$$\Phi_0 e^{-\Phi_0/a} = 3ap^2, \quad \eta_0 = 1/(3ap).$$

Исследуем устойчивость динамической системы (5) в окрестности стационарных точек. Корни характеристического уравнения соответствующей линейной системы есть

$$\lambda_{1,2} = -\frac{3pk_c}{\Phi_0} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2}{3} (\Phi_0 - 1)} \right).$$

Таким образом, состояния с $\Phi_0 < 1$ устойчивы, а соответствующая стационарная точка (Φ_0, η_0) является узлом. При $\Phi_0 > 1$ состояния неустойчивы и соответствующая точка (Φ_0, η_0) является седлом. Рассмотрим, каким образом система выходит из положения равновесия при $\Phi_0 = 1$. Удобно перейти от системы (5) к одному уравнению на функцию $\Phi(t)$

$$\Phi\Phi'' - \frac{3}{2} (\Phi' - 2p)^2 + \frac{2\Phi}{a} e^{-\Phi/a} = 0, \quad \Phi' = \frac{1}{k_c} \frac{d\Phi}{dt}. \quad (6)$$

(Из этого уравнения сразу видно, что стабилизирующее влияние градиента давления проявляется лишь при $\Phi < 1$.) Положим $p = p_* + \epsilon$, $\epsilon \ll p_*$, и разложим функцию $\Phi(t)$ в ряд по степеням ϵ :

$$\Phi = \Phi_0 + \epsilon\Phi_1 + \epsilon^2\Phi_2 + \dots \quad (7)$$

Будем искать решение уравнения (6) в виде (7) с начальными данными

$$\Phi(0) = 1, \quad \Phi'(0) = 2\epsilon. \quad (8)$$

Подставляя ряд (7) в уравнение (6) и приравнивая члены при

одинаковых степенях ε , получим цепочку уравнений

$$\begin{aligned}\Phi_1'' + 6p_*\Phi_1' - 12p_* &= 0, \\ \Phi_2'' + 6p_*\Phi_2' - 6 &= 3p_*^2\Phi_1 - 6\Phi_1' + \frac{2}{3}(\Phi_1')^2 - \Phi_1'\Phi_1'', \\ \dots &\dots\end{aligned}$$

Решение задачи (6) — (8) с точностью до членов $\sim \varepsilon^3$ имеет вид

$$\Phi(t) = 1 + 2\varepsilon k_c + \frac{\varepsilon^2}{36p_*} [18(p_*k_ct)^2 - 6p_*k_ct + 1 - e^{-6p_*k_ct}].$$

Таким образом, в области слабой надкритичности параметр экранирования возрастает со временем и система покидает положение равновесия. Когда $\Phi \gg 1$, в уравнении (6) можно отбросить член, отвечающий градиенту давления. После этого оно приводится к уравнению первого порядка, не разрешенному относительно производной:

$$\Phi = C(2p - \Phi')^{2/3} \exp \left[\frac{4p}{4(2p - \Phi')} \right], \quad C = \text{const.}$$

Решение этого уравнения имеет следующее параметрическое представление:

$$t = t_0 + \frac{2C}{3k_c} \int_{\xi_0}^{\xi} (2p - \xi)^{-4/3} \exp \left[\frac{4p}{3(2p - \xi)} \right] d\xi,$$

$$\Phi = C(2p - \xi)^{2/3} \exp \left[\frac{4p}{3(2p - \xi)} \right], \quad \xi < 2p.$$

Отсюда следует, что параметр экранирования монотонно возрастает со временем, причем $\Phi \rightarrow 2pk_ct$, когда $t \rightarrow \infty$. В силу этого толщина пылевого слоя убывает, а плотность дискретной фазы в слое возрастает со временем. Очевидно, этот процесс не может длиться неограниченно долго и завершается, когда ρ_z достигает некоторого предельного значения, после чего в лобовой части тела может, например, образоваться покрытие из плотно упакованных частиц.

Коэффициент эрозии сильно убывает с ростом параметра экранирования, поэтому в экспериментах на эрозию в гиперзвуковых потоках с запыленностью выше критической следует ожидать значительного снижения наблюдаемых разрушений по сравнению с теоретическими оценками, основанными на данных по единичному соударению. Пылевой слой, образующийся в лобовой части тела, может не только частично, но и полностью заэкранировать поверхность от воздействия высокоскоростных частиц. При этом результирующий объем эрозионных повреждений поверхности будет определяться начальным периодом формирования пылевого слоя с характерным временем $\Delta t_e \sim (2pk_c)^{-1}$ и «вторичной» эрозией, скорость которой сравнительно мала и определяется диффузионными процессами в пылевом слое.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В ПОРИСТЫХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕДАХ

§ 1. УПРУГОПЛАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПОРИСТОГО ТЕЛА

Рассмотрим упругопластический материал, содержащий достаточно большое число пор одинакового радиуса. Проводя осреднение по объему (см. гл. 1, § 1), перейдем от пористой среды к сплошной с некоторой средней плотностью и уравнением состояния, в котором учитывается наличие пор. Законы сохранения массы, энергии, импульса для пористой среды после осреднения следуют из общих уравнений (1.1.8), если в последних положить $\rho_1 = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_i \rho v_i &= 0, \quad \rho = \rho_s m_2, \quad m_1 + m_2 = 1, \\ \rho \frac{dv_i}{dt} &= \nabla_j \sigma_{ij} + \rho g_i, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_i \nabla_i, \quad \nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \\ \rho \frac{d\mathcal{E}}{dt} &= -\nabla_i q_i + \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}, \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i v_j + \nabla_j v_i), \\ \sigma_{ij} &= -p \delta_{ij} + S_{ij}, \quad q_i = m_2 \cdot \lambda \nabla_i \cdot T, \\ m_1 &= \frac{4}{3} \pi a^3 n, \quad i, j = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (1)$$

где a , n — радиус и концентрация пор, m_1 — объемная концентрация пор (пористость), ρ_s — плотность материала, ρ — средняя плотность, σ_{ij} , ε_{ij} — осредненные тензоры напряжений и скорости деформации, v_i — i -компонента скорости, q_i — тепловой поток, g_i — массовая сила, $\mathcal{E}$ — удельная внутренняя энергия, T — температура, p — давление, S_{ij} — девиатор тензора напряжений.

Таким образом, задача состоит в получении уравнений состояния пористого тела, которые позволят замкнуть систему уравнений (1). Для этого будем использовать ячеистую модель пористой среды (рис. 6.1). Рассмотрим пору радиусом a , окруженную сферой радиусом b (рис. 6.2). Предположим, что материал в поллой сфере $a \leq r \leq b$ является вязкопластическим, тогда сферически-симметричное движение материала описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \rho_s \frac{dv_r}{dt} &= \frac{\partial \sigma_r^s}{\partial r} + \frac{2(\sigma_r^s - \sigma_\varphi^s)}{r}, \quad \frac{\partial}{\partial r} r^2 v_r = 0, \\ \sigma_r^s - \sigma_\varphi^s &= Y_s + 2\eta \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

с граничными и начальными условиями

$$\sigma_r^s(a) = 0, \quad \sigma_r^s(b) = \sigma_r, \quad a|_{t=0} = a_0, \quad b|_{t=0} = b_0, \quad v_r|_{t=0} = 0,$$

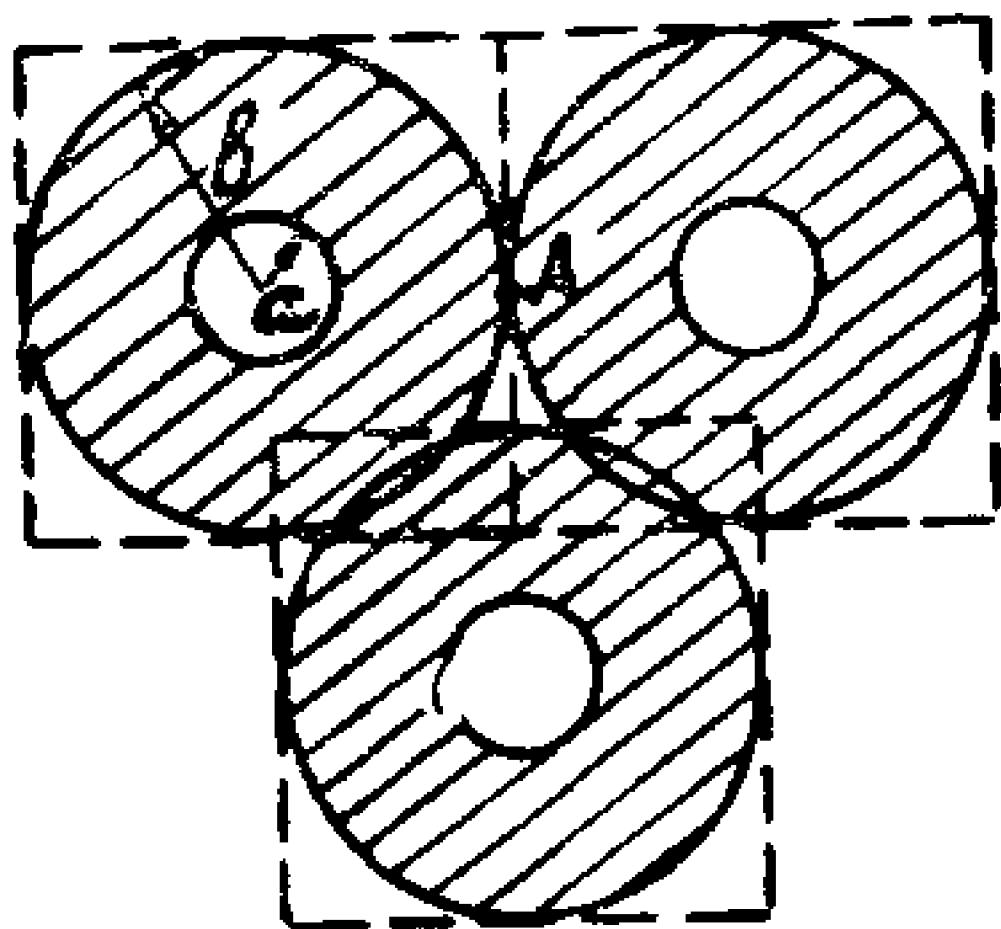


Рис. 6.1.

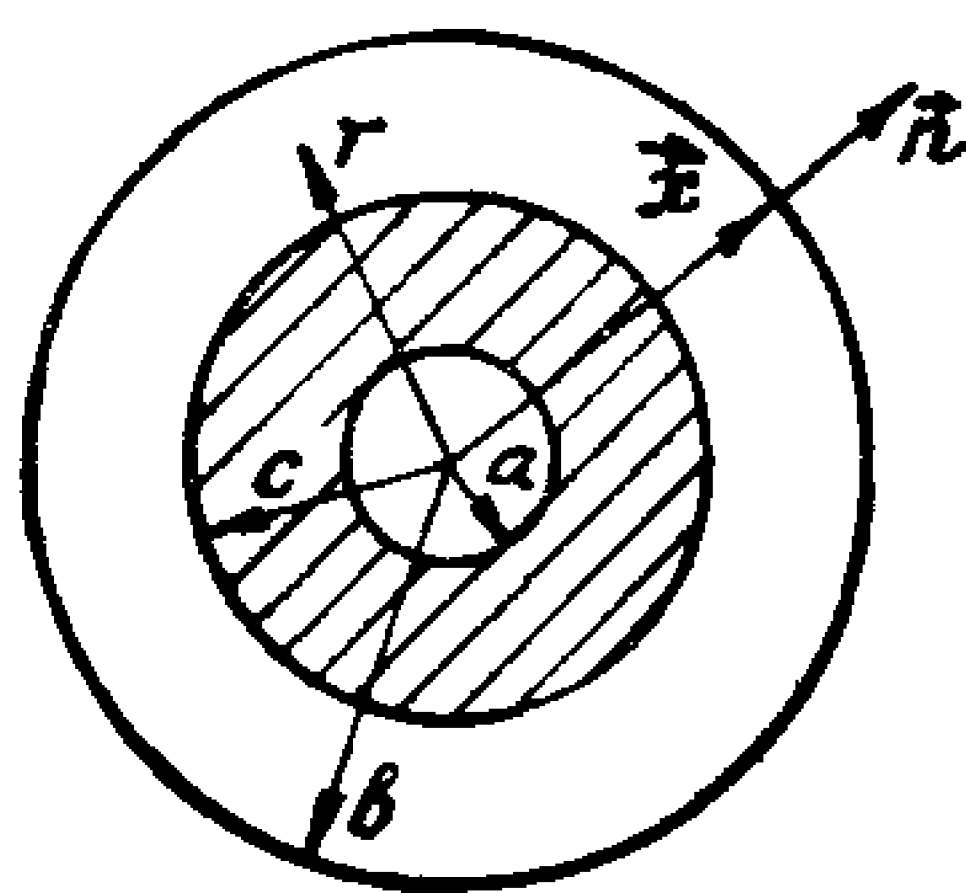


Рис. 6.2.

где индекс s относится к сплошному материалу, Y_s , η — предел текучести и вязкость материала. Предполагая материал несжимаемым, из уравнения неразрывности найдем

$$r^3 - r_0^3 = a^3 - a_0^3, \quad v_r = a_0^3 \dot{\alpha} / (3(\alpha_0 - 1)r^2), \quad (3)$$

$$\alpha = b^3 / (b^3 - a^3), \quad \alpha = 1/m_2.$$

Используя уравнения (3), проинтегрируем уравнение движения в (2) по r

$$\sigma_r^s = 2Y_s \ln \frac{a}{r} + \frac{4\eta a_0^3 \dot{\alpha}}{3(\alpha_0 - 1)} (a^{-3} - r^{-3}) + \frac{\rho_s a_0^3}{3(\alpha_0 - 1)} \left(\ddot{\alpha} (a^{-1} - r^{-1}) + \right.$$

$$\left. + \frac{a_0^3}{6(\alpha_0 - 1)} \dot{\alpha}^2 (r^{-4} - a^{-4}) \right). \quad (4)$$

Умножая левую и правую части уравнения (4) на $r^2 dr$ и интегрируя от a до b , получим

$$\frac{2}{3} Y_s \ln \frac{\alpha}{\alpha - 1} + \frac{\rho_s a_0^2}{\alpha (\alpha_0 - 1)^{2/3}} \left(\frac{\dot{\alpha}^2}{6(\alpha - 1)^{4/3}} - \frac{\ddot{\alpha}}{(\alpha - 1)^{1/3}} \right) -$$

$$- \frac{4}{3} \frac{\eta \dot{\alpha}}{\alpha (\alpha - 1)} - p = 0, \quad (5)$$

$$p = p_s / \alpha, \quad p_s = \frac{3}{b^3 - a^3} \int_a^b p' r^2 dr, \quad p' = -\frac{1}{3} (\sigma_r + 2\sigma_\phi).$$

При осреднении уравнения (4) были отброшены члены порядка $O(\dot{\alpha}^2 / (\alpha - 1)^{1/3}, \dot{\alpha} / \alpha^{1/3})$, поскольку при $\alpha \rightarrow 1$ они малы по сравнению с соответствующими слагаемыми в уравнении (5).

Отметим, что уравнение (5) было получено в работе [2] и затем использовалось многими авторами [1, 3—6]. В частном случае $\dot{\alpha} = \ddot{\alpha} = 0$ справедливо уравнение

$$p = \frac{2}{3} Y_s \ln \frac{\alpha}{\alpha - 1}, \quad (6)$$

которое описывает условие равновесия сферической оболочки в пластическом состоянии и хорошо известно в теории пластично-

сти [7, 8]. Отсюда следует, что уравнения (5) справедливы при выполнении неравенства

$$|p| \geq \frac{2}{3} Y_s \ln \frac{\alpha}{\alpha-1} \quad (7)$$

и позволяют описать изменение пористости со временем $\alpha = \alpha(t, \alpha_0, p)$. В конечном состоянии ($\alpha = \alpha = 0$) пористость определяется из уравнения (6) либо равна нулю при полном затекании пор ($\alpha = 1$). В первом случае ($\alpha > 1$) кинетическая энергия микродвижения материала к центру поры сразу переходит в тепло. Во втором случае ($\alpha = 1$) энергия микродвижения $\sim \rho_s \alpha^2 b^3$ сначала переходит в энергию упругопластических волн, излучаемых из точек схлопывания, а после их затухания — в тепло.

Выведем замыкающие соотношения, связывающие осредненные тензоры напряжений и деформаций, которые определяются по формулам

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{V} \int_v \varepsilon'_{ij} dV', \quad \sigma_{ij} = \frac{1}{V} \int_v \sigma'_{ij} dV',$$

где V — объем ячейки, ε'_{ij} , σ'_{ij} — микродеформации и микронапряжения. Используя теорему Остроградского — Гаусса, легко доказать следующие формулы [9]:

$$\varepsilon_{ij} = m_1 \varepsilon_{ij}^{\Pi} + m_2 \varepsilon_{ij}^s, \quad \sigma_{ij} = m_2 \sigma_{ij}^s, \quad \varepsilon_{ij}^{\Pi} = \frac{1}{V_{\Pi}} \int_{v_{\Pi}} \varepsilon'_{ij} dV',$$

$$\varepsilon_{ij}^s = \frac{1}{V_s} \int_{v_s} \varepsilon'_{ij} dV', \quad \sigma_{ij}^s = \frac{1}{V_s} \int_{v_s} \sigma'_{ij} dV', \quad (8)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2V} \int_{s_v} (u_i n_j + u_j n_i) ds, \quad \sigma_{ij} = \frac{1}{2V} \int_{s_v} (f_i x_j + f_j x_i) ds,$$

где x_i , n_i — координата и нормаль к поверхности сферической ячейки (см. рис. 6 2), V_{Π} , V_s — объем поры и материала в ячейке, u_i — смещение на границе ячейки, f_i — сила, приложенная к поверхности ячейки, индекс « Π » относится к поре, s — к материалу ячейки. Ввиду однородности в ячейке σ_{ij} и ε_{ij} сила и смещение на границе ячейки определяются по формулам

$$f_i = \sigma_{ij} n_j, \quad u_i = \varepsilon_{ij} x_j \quad (9)$$

Будем считать, что материал ячейки является упругопластическим, поэтому представим полную среднюю деформацию в виде суммы «упругой» ε_{ij}^e и пластической ε_{ij}^p деформаций, отсюда следует

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p. \quad (10)$$

Аналогично [9] предположим, что скорость пластической деформации определяется ассоциированным законом течения

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda}' \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (11)$$

где Φ — поверхность текучести, зависящая от среднего напряжения и пористости. Разделяя в Φ зависимость от S_{ij} и p :

$$\Phi = \frac{3}{2} S_{ij} S_{ij} - Y^2(p, m_1) = 0, \quad (12)$$

перепишем уравнение (11) в виде

$$\dot{e}_{ij}^p = \dot{\lambda} S_{ij}, \quad \dot{\epsilon}_{kk}^p = \frac{1}{3} \dot{\lambda} \frac{\partial Y^2}{\partial p}, \quad \dot{\lambda} = 3\dot{\lambda}',$$

$$e_{ij} = \epsilon_{ij} - \frac{1}{3} \epsilon_{kk} \delta_{ij}. \quad (13)$$

Для определения $Y^2(p, m_1)$ воспользуемся тем, что при пластическом течении микронапряжения в материале лежат на поверхности текучести Мизеса

$$\frac{3}{2} S'_{ij} S'_{ij} = Y_s^2, \quad (14)$$

где Y_s — предел текучести материала. Усредняя формулу (14) по объему материала, получим

$$\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij} + \frac{3}{2} m_2^2 \langle S''_{ij} S''_{ij} \rangle_s = m_2^2 Y_s^2, \quad (15)$$

$$S_{ij} = m_2 S_{ij}^s, \quad S''_{ij} = S'_{ij} - S_{ij}^s, \quad \langle S''_{ij} \rangle_s = 0,$$

где S''_{ij} — пульсационные напряжения, $\langle \rangle_s$ — осреднение по объему материала (см. (8)). Величину $\langle S''_{ij} S''_{ij} \rangle_s$ определим из решения на ячейке.

Рассмотрим сферическую ячейку (см. рис. 6.2), к внешней поверхности которой приложено давление p . Распределение напряжений и смещений по r приведено в [8]. В упругой области $a \leq r \leq c$ напряжения определяются по формулам

$$\sigma'_r = -p + p \left(1 - \frac{b^3}{r^3} \right) \left(1 - \frac{b^3}{a^3} \right),$$

$$\sigma'_\phi = -p + p \left(1 + \frac{b^3}{2r^3} \right) \left(1 - \frac{b^3}{a^3} \right), \quad (16)$$

$$p_s = -\sigma_{kk}/3 = pb^3/(b^3 - a^3),$$

$$S'_r = pa^3b^3/(b^3 - a^3)r^3, \quad S'_\phi = -\frac{1}{2} pa^3b^3/(b^3 - a^3)r^3.$$

В пластической области $c \leq r \leq b$ (см. рис. 6.2) имеем

$$\sigma'_r = \kappa Y_s 2 \ln \frac{r}{a}, \quad \sigma'_\phi = \kappa Y_s + \kappa Y_s 2 \ln \frac{r}{a},$$

$$p_s = -\frac{2}{3} \kappa Y_s - 2\kappa Y_s \ln \frac{r}{a}, \quad S'_r = -\frac{2}{3} \kappa Y_s, \quad S'_\varphi = \frac{1}{3} \kappa Y_s, \quad (17)$$

$$p < p_{\text{кр}}, \quad p_{\text{кр}} = \kappa 2Y_s \ln \frac{b}{a}, \quad \kappa = \begin{cases} 1 & \text{— растяжение,} \\ -1 & \text{— сжатие.} \end{cases}$$

Пренебрегая сжимаемостью материала, смещение u_r представим в виде [8]

$$u_r = \begin{cases} -\frac{p}{4\mu_s} \frac{b^3 a^3}{(b^3 - a^3) r^2}, & |p| \leq |p_*|, \\ \kappa \frac{Y_s}{6\mu_s} \frac{c^3}{r^2}, & |p| > |p_*|, \end{cases} \quad (18)$$

$$p_* = -\kappa \frac{2}{3} Y_s \left(1 - \frac{a^3}{b^3}\right), \quad -p = \kappa \frac{2}{3} Y_s \left(1 - \frac{c^3}{b^3} + 3 \ln \frac{c}{a}\right),$$

где из последнего уравнения определяется c . Из (16), (17) следует, что пульсационные напряжения находятся по формуле

$$S''_{ij} = n_{i1}n_{j1}S'_r + n_{i2}n_{j2}S'_\varphi + n_{i3}n_{j3}S'_\varphi, \quad (19)$$

где n_{ij} — направляющие косинусы между осями декартовой и сферической систем координат. (Легко проверить, что $\langle S''_{ij} \rangle_s = \frac{1}{3}(S'_r + 2S'_\varphi) = 0$.) Скалярная величина $\langle S''_{ij}S''_{ij} \rangle_s$ легко вычисляется в сферической системе координат

$$\langle S''_{ij}S''_{ij} \rangle_s = \begin{cases} \frac{3}{2} p^2 \frac{m_1}{m_2}, & |p| \leq |p_*|, \\ \frac{2}{3} Y_s^2 \left(1 - \frac{m_e^2}{m_2}\right), & |p_*| < |p| \leq |p_{\text{кр}}|, \end{cases} \quad (20)$$

где $m_e = (b^3 - c^3)/b^3$ — доля объема ячейки, занятого упругой областью. Подставляя (20) в формулу (15), получим поверхность текучести пористого материала

$$\frac{3}{2} S_{ij}S_{ij} = Y^2, \quad (21)$$

$$Y^2 = \begin{cases} Y_s^2 m_2^2 - \frac{9}{4} p^2 m_1, & |p| \leq |p_*|, \\ Y_s^2 m_2 m_e^2, & |p_*| < |p| \leq |p_{\text{кр}}|, \\ 0, & |p| > |p_{\text{кр}}|, \end{cases}$$

где $|p_{\text{кр}}| = \frac{2}{3} Y_s \ln \frac{1}{m_1}$, $|p_*| = \frac{2}{3} Y_s (1 - m_1)$. При выводе формулы (21) пренебрегалось вкладом девиаторных напряжений S_{ij} в пульсационные S''_{ij} . Учет этих напряжений приводит к поправке в (21) порядка $0,3m_1 S_{ij}S_{ij}$, которая при $m_1 \leq 0,3$ является малой.

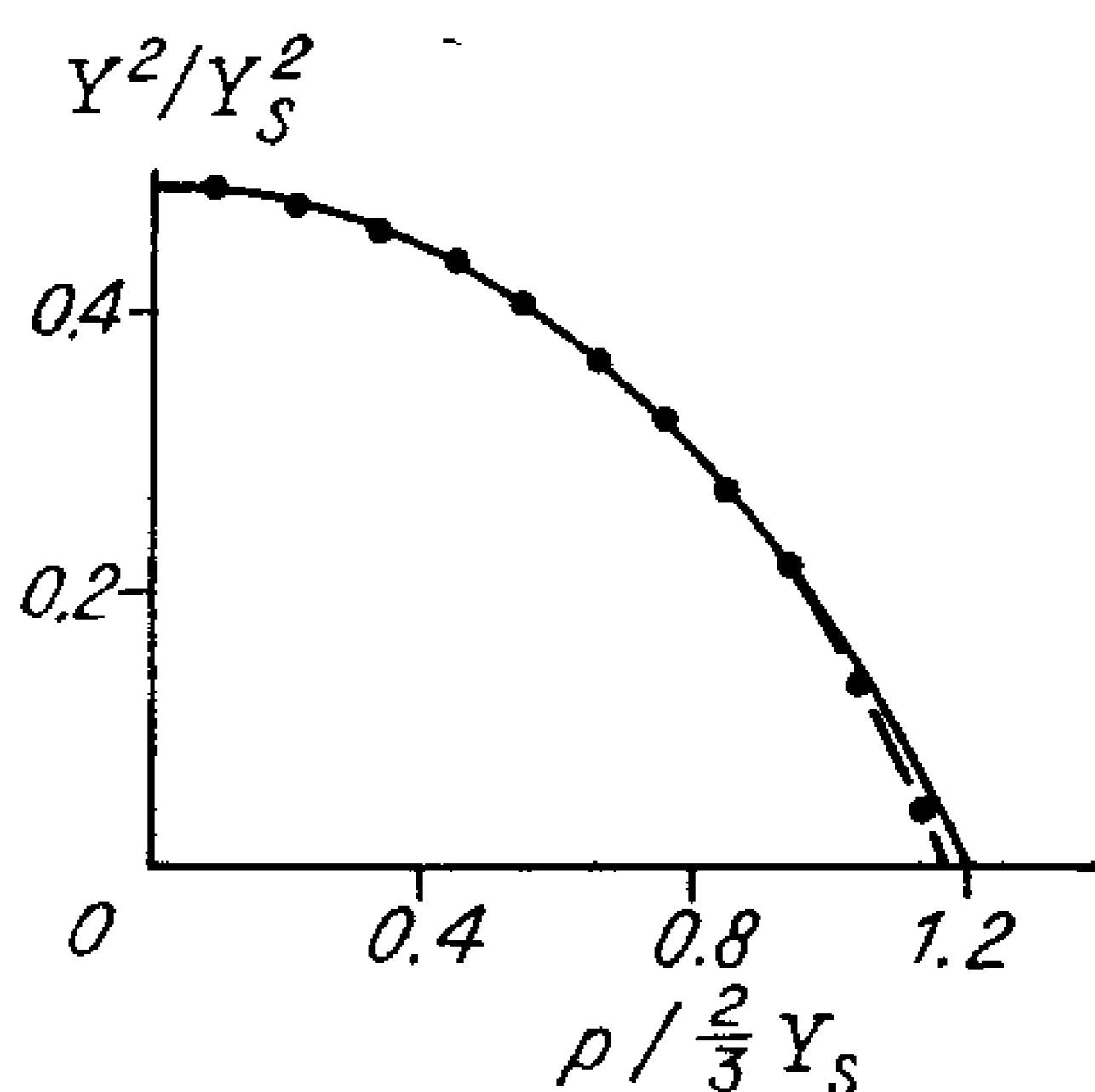


Рис. 6.3.

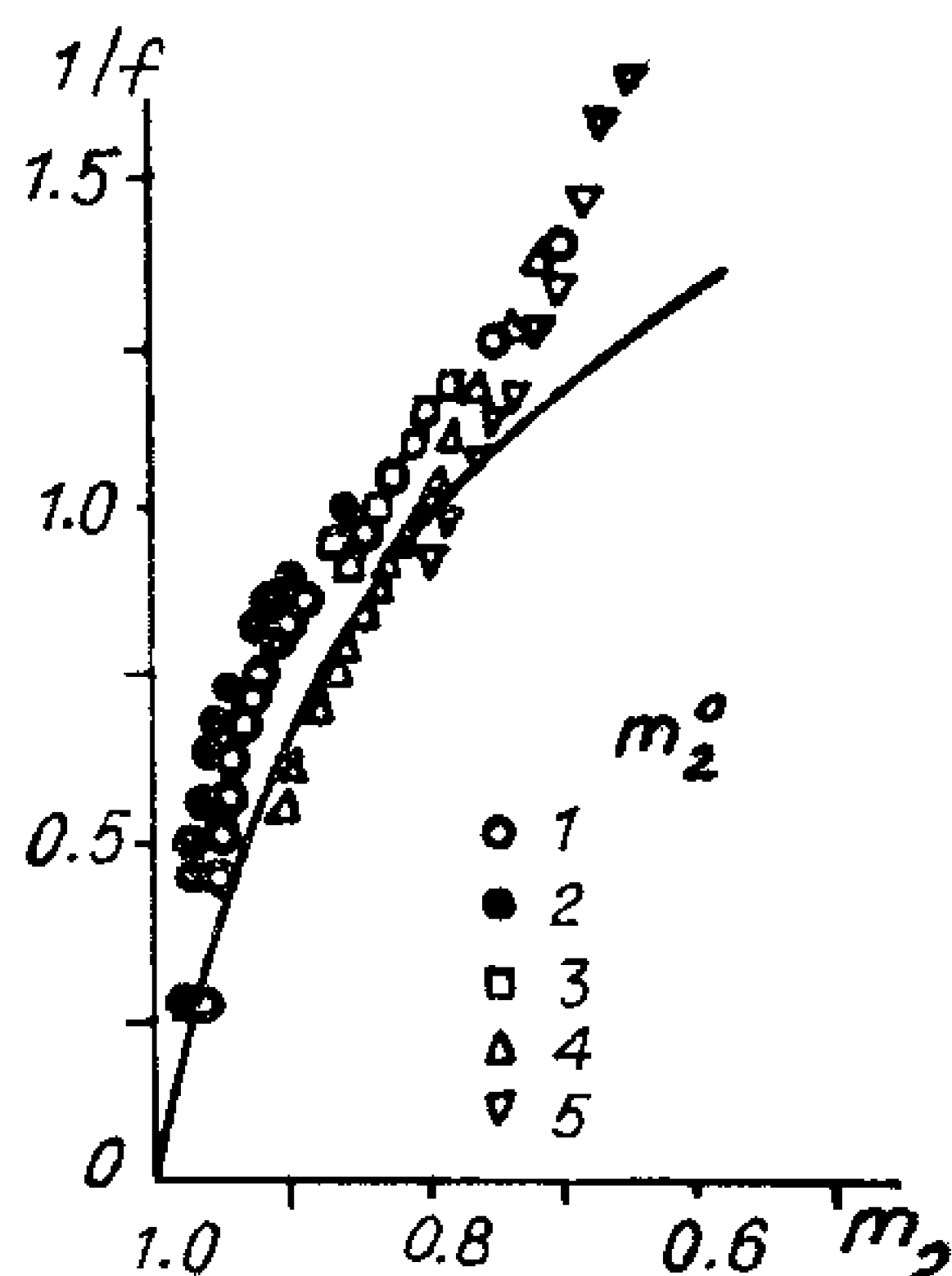


Рис. 6.4.

В настоящее время для определения поверхности текучести пористого материала широко используется формула Гарсона [9], полученная из условия минимума скорости диссипации энергии при пластическом течении и имеющая вид

$$Y^2 = Y_s^2 \left(1 + m_1^2 - 2m_1 \operatorname{ch} \left(-\frac{3p}{2Y_s} \right) \right). \quad (22)$$

На рис. 6.3 приведена зависимость предела текучести от давления при пористости $m_1 = 0.3$. Сплошная кривая соответствует пределу текучести, рассчитанному по формуле (21), а штрихпунктирная — по формуле Гарсона (22). Как видно, пределы текучести, найденные по формулам (21) и (22), практически совпадают друг с другом. Из формул (21), (22) следует, что при $p = p_{\text{кр}}$ предел текучести обращается в нуль. Этот эффект связан с влиянием пульсационных микронапряжений, под действием которых материал переходит в пластическое состояние. Реально пластическое состояние в ячейке может наступить несколько раньше, когда пластические области в соседних ячейках начнут касаться друг друга, например в точке А на рис. 6.1. В углах ячеек материал находится в упругопластическом состоянии, сложным образом зависящем от времени. Под действием микронапряжений в нем будут возникать пластические области, обеспечивающие его «подстройку» под радиальное движение материала в сферических областях. В результате в формулах (21), (22) нужно заменить максимальный радиус пластической области b на $\bar{b} = b/k^{1/3}$, а $m_1 \rightarrow \bar{m}_1 = km_1$, $m_2 \rightarrow \bar{m}_2 = 1 - km_1$. Впервые эта поправка была предложена в работе [10], где на основе численного моделирования двухмерного деформирования материала с периодически расположенными цилиндрическими пора́ми было найдено $k = 1.5$. В трехмерном случае величину k найдем из условия плотной упаковки шаров радиусом $\bar{b}$. Предполагая упаковку хаотической, для отношения объема шара к объему ячейки получим 0.6, отсюда $k = 1.7$. В экспериментальной работе [11] было изучено пластическое деформирование пористого тела при

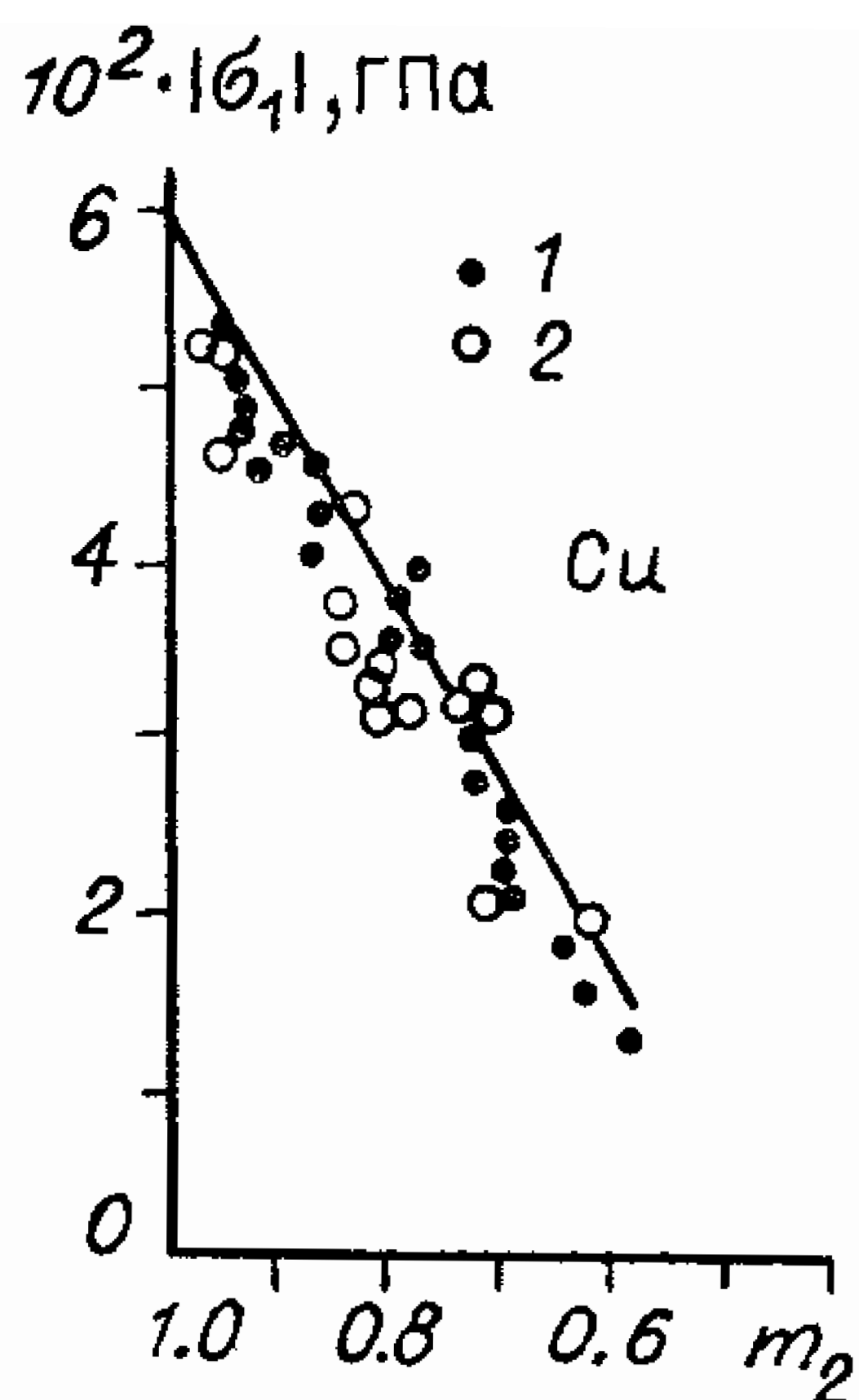


Рис. 6.5.

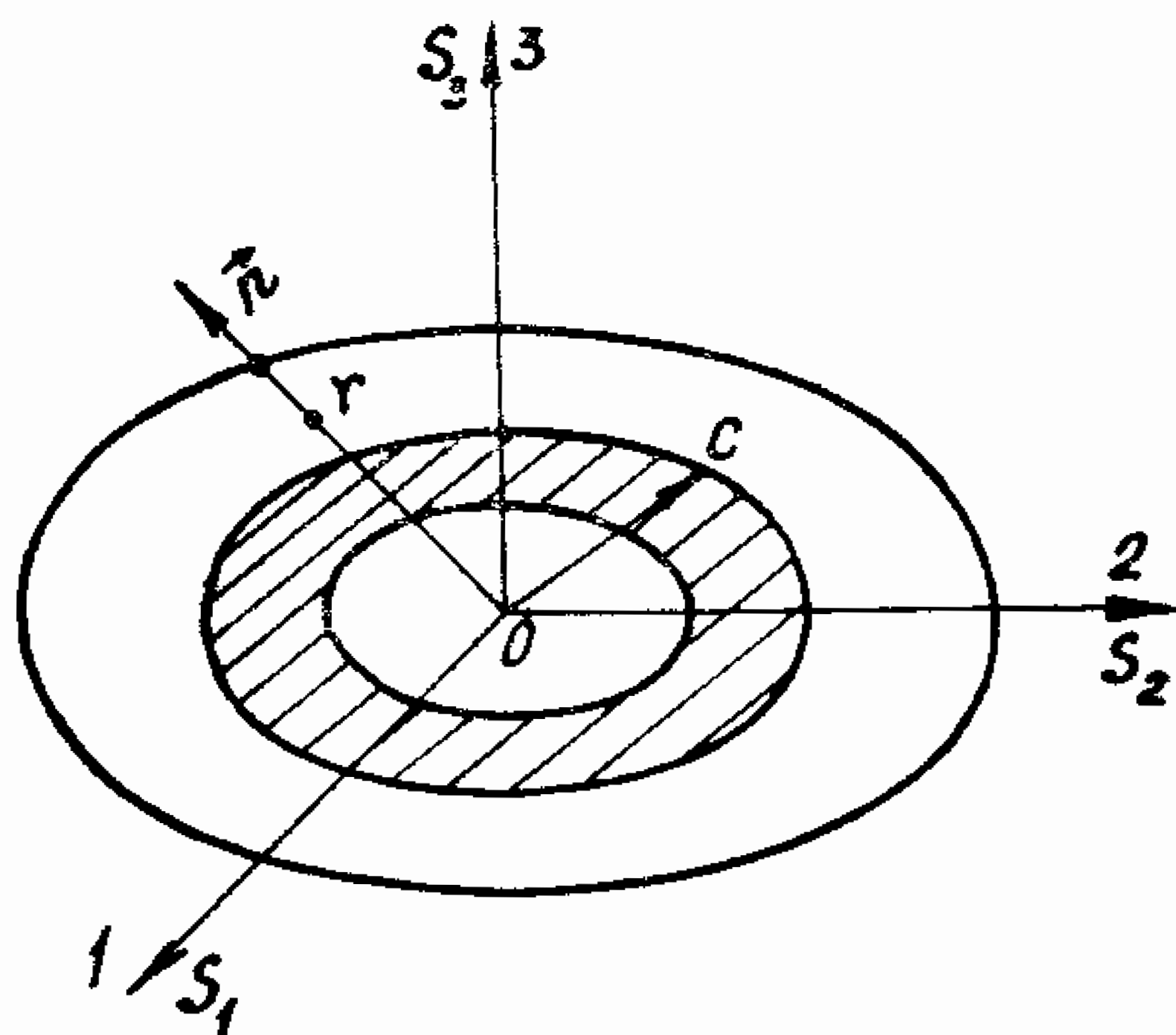


Рис. 6.6.

одноосном напряженном состоянии. Поэтому интересно сравнить следствия формул (13), (21) с экспериментом [11]. Полагая в формулах (13), (21) $\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, найдем: $\sigma_1^2 = Y^2$,

$$d\varepsilon_1^p = d\lambda \left(\sigma_1 + p + \frac{1}{9} \frac{\partial Y^2}{\partial p} \right), \quad d\varepsilon_2^p = d\lambda \left(p + \frac{1}{9} \frac{\partial Y^2}{\partial p} \right), \quad d\varepsilon_3^p = d\varepsilon_2^p,$$

отсюда

$$\frac{1}{f} \sqrt{\frac{9}{2} \frac{d\varepsilon_{kk}^p}{d\varepsilon_1^p - d\varepsilon_2^p}} = 1.5 k^{1/2} (1 - m_2)^{1/2}, \quad (23)$$

$$|\sigma_1| = Y_s \frac{(1 - km_1)}{\left(1 + \frac{1}{4} km_1\right)^{1/2}}, \quad k = 1, 7,$$

где $d\varepsilon_{kk}^p$ определяет изменение пористости при заданном пластическом течении. На рис. 6.5 сплошной линией показаны расчеты по первой формуле в (23), а значками — экспериментальные результаты [11], полученные при различных значениях m_2^0 . Соответствие между значками и m_2^0 следующее: 1 — 0.869; 2 — 0.830; 3 — 0.745; 4 — 0.680; 5 — 0.620. На рис. 6.4 кружками обозначены экспериментальные данные [11] (1 — сжатие, 2 — растяжение), а сплошной линией — расчеты по второй формуле в (23). Из рисунков видно, что совпадение является достаточно хорошим. Некоторое отличие в $1/f$ при $m_1 > 0.3$ связано, по-видимому, с существенной погрешностью, которую дает ячеечная модель при большой пористости, и дисперсией пор по размерам. Таким образом, формулы (13), (21) позволяют найти пластическую деформацию ε_{ij}^p .

Для определения ε_{ij}^e рассмотрим деформацию ячейки при трехосном нагружении (рис. 6.6). Имеется точное решение Эшелби об упругом деформировании матрицы со сферическим включением [12]. Однако это решение не учитывает возможности образо-

вания, под действием давления p , пластической зоны в окрестности поры (заштрихованная область на рис. 6.6). Ясно, что в этом случае деформирование не является упругим. Однако если средние напряжения лежат внутри области, ограниченной поверхностью текучести (21), то они оказываются пропорциональными средним деформациям, а коэффициенты пропорциональности зависят от давления p и пористости m_1 . Дадим вывод этих уравнений.

Предположим, что к поверхности сферической ячейки (см. рис. 6.6) приложены силы $f_i = \sigma_{ij}n_j$, $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + S_{ij}$. Под действием S_{ij} произойдет изменение формы ячейки, которая из сферы превратится в трехосный эллипсоид. Выберем систему координат, совпадающую с главными осями тензора S_{ij} . В силу изотропии материала эта система координат будет совпадать с главными осями тензора деформаций ϵ_{ij} , в результате σ_{ij} и ϵ_{ij}^e будут иметь вид

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} -p + S_1 & 0 & 0 \\ 0 & -p + S_2 & 0 \\ 0 & 0 & -p + S_3 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_{ij}^e = \begin{pmatrix} \epsilon_1^e & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2^e & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3^e \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Будем предполагать, что форма ячейки не сильно отличается от сферической. В этом случае для нахождения приближенного решения достаточно потребовать выполнения уравнения равновесия материала ячейки по r . Решение уравнения равновесия $\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0$ будет определяться по формулам (16) — (18), в которых для удовлетворения граничным условиям при $r = b$ нужно произвести замену $p \rightarrow \sigma_n = -p + S_1 n_1^2 + S_2 n_2^2 + S_3 n_3^2$, где n_i — компоненты вектора нормали n (см. рис. 6.6). Считая материал несжимаемым $\nu = 1/2$, из уравнений (18) найдем смещение поверхности поры вдоль i -й оси

$$u_i = \begin{cases} -\frac{p}{4\mu_s} \frac{b^3 a}{b^3 - a^3} + \frac{S_i}{4\mu_s} \frac{b^3 a}{b^3 - a^3}, & |p| \leq |p_*|, \\ \kappa \frac{Y_s}{6\mu_s} \left(\frac{c_i}{a}\right)^3 a, & |p| > |p_*|, \end{cases} \quad (25)$$

$$-p + S_i = \kappa \frac{2}{3} Y_s \left(1 - \left(\frac{c_i}{b}\right)^3 + \ln \left(\frac{c_i}{b}\right)^3 + \ln \left(\frac{b}{a}\right)^3\right).$$

Со смещением поверхности поры u_i связана дополнительная средняя деформация $\Delta \epsilon_i^e = m_1 u_i / a$, равная $\Delta \epsilon_i^e = \frac{1}{3} \Delta \epsilon_{kk}^e + \Delta e_i^e$,

$$\Delta e_i^e = \begin{cases} \frac{S_i}{4\mu_s} \cdot \frac{m_1}{m_2}, & |p| \leq |p_*|, \\ \frac{S_i}{4\mu_s} \frac{m_p}{m_e}, & |p| > |p_*|, \end{cases}$$

$$\Delta \varepsilon_{kk}^e = \begin{cases} -\frac{1}{2} \frac{m_1}{m_2} \frac{(1+\nu)}{(1-2\nu)} \frac{p}{K_s}, & |p| \leq |p_*|, \\ \frac{\kappa}{3} \frac{(1+\nu)}{(1-2\nu)} m_p \frac{Y_s}{K_s}, & |p| > |p_*|, \end{cases} \quad (26)$$

$$K = \frac{E_s}{3(1-2\nu)}, \quad m_e + m_p = 1, \quad m_e = (b^3 - c^3)/b^3,$$

где c определяется последним уравнением в (18). Система уравнений (26) справедлива при малых отклонениях поверхности, ограничивающей пластическую область, от сферической. Если $m_e \rightarrow 0$, то это условие нарушается, а возникающая ошибка в $\Delta \varepsilon_i^e$ может быть достаточно велика.

В уравнении для $\Delta \varepsilon_{kk}^e$ величина μ_s выражена через K_s и ν , и это уравнение будет использоваться при произвольных K_s и ν . Полная средняя деформация есть сумма однородной и дополнительной деформации $\varepsilon_i^e = \bar{\varepsilon}_i^e + \Delta \varepsilon_i^e$. Для однородной деформации справедливы формулы

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_i^e &= \frac{1}{3} \bar{\varepsilon}_{kk}^e + \bar{e}_i^e, \quad \bar{\varepsilon}_{kk}^e = -p/K_s m_2, \\ \bar{e}_i^e &= S_i/(2\mu_s m_2). \end{aligned} \quad (27)$$

Формулы (27) получены путем осреднения закона Гука по материалу ячейки. Используя формулы (26), (27) и переходя к произвольной системе координат, найдем искомые соотношения

$$\begin{aligned} e_{ij}^e &= S_{ij}/2\mu, \quad -\varepsilon_{kk}^e = p/K, \\ \mu &= \begin{cases} \mu_s m_2 / \left(1 + \frac{1}{2} m_1\right), & |p| \leq |p_*|, \\ \mu_s m_e / \left(\eta + \frac{1}{2} m_p\right), & |p| > |p_*|, \quad \eta = \frac{m_e}{m_2}, \end{cases} \\ K &= \begin{cases} K_s m_2 / \left(1 + \frac{m_1}{2} \frac{(1+\nu)}{(1-2\nu)}\right), & |p| \leq |p_*|, \\ K_s m_2 / \left(1 - \frac{\kappa}{3} \frac{(1+\nu)}{(1-2\nu)} \frac{Y_s}{p} m_p m_2\right), & |p| > |p_*|, \end{cases} \end{aligned} \quad (28)$$

где μ_s , K_s — константы упругости материала.

Как следует из (28), при $|p| < |p_*|$ материал деформируется упруго $\varepsilon_{ij}^e = \varepsilon_{ij}^y$. Для давлений $|p| > |p_*|$ в ячейке возникает пластическая область, поэтому деформации становятся упруго-пластическими. Несмотря на это, для тензора деформации сохраним обозначение ε_{ij}^e , если средние напряжения не лежат на поверхности текучести $I_2 < Y^2$, где $I_2 = \frac{3}{2} S_{ij} S_{ij}$. В области $|p| > |p_*|$ представим ε_{ij}^e в виде суммы упругих ε_{ij}^y и пластических

деформаций $\delta \varepsilon_{ij}^p$, которые определяются из уравнений

$$\varepsilon_{ij}^e = \varepsilon_{ij}^y + \delta \varepsilon_{ij}^p, \quad \varepsilon_{kk}^y = -p/K_1, \quad e_{ij}^y = S_{ij}/2\mu_1, \\ \mu_1 = \mu_s m_2 / (1 + m_1/2), \quad K_1 = K_s m_2 \left/ \left(1 + \frac{m_1}{2} \frac{(1+\nu)}{(1-2\nu)} \right) \right.,$$

Система (28) справедлива на стадии нагрузки ($I_1 > 0$, $I_1 = p^2$), при разгрузке ($I_1 < 0$) выполняется закон Гука:

$$\dot{e}_{ij} = S_{ij}/2\mu_1, \quad \dot{\varepsilon}_{kk} = -\dot{p}/K_1, \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^e = \dot{\varepsilon}_{ij}^y.$$

Запишем полученные упругие модели (28) в случае малой пористости $m_1 \ll 1$

$$\mu_1 = \mu_s \left(1 - \frac{3}{2} m_1 \right), \quad K_1 = K_s \left(1 - \frac{3}{2} m_1 \frac{(1-\nu)}{(1-2\nu)} \right). \quad (29)$$

Соответствующие средние упругие константы, полученные в том же приближении с использованием точного решения Эшелби, имеют вид [12—14]

$$\mu_T = \mu_s \left(1 - \frac{5}{3} m_1 \right), \quad K_T = K_s \left(1 - \frac{3}{2} m_1 \frac{(1-\nu)}{(1-2\nu)} \right), \quad (30)$$

где при вычислении μ_T было положено $\nu = 1/2$. Сравнение формул (29) и (30) показывает, что выражения для K_1 и K_T совпадают, а отличие в μ имеет порядок $(\mu_T - \mu_1)/\mu_1 \approx 0.16 m_1$, что составляет 6 % относительно поправки в μ , связанной с пористостью. Таким образом, использованное приближение является достаточно хорошим при $m_1 \ll 1$, кроме того, оно позволяет учесть влияние пластической области. Как и в уравнении (21), в системе (28) нужно учесть, что ячейка переходит в пластическое состояние при $s = \bar{b} = b/k^{1/3}$, когда $p \rightarrow p_{кр}$. В этом случае эффективный модуль сдвига стремится к нулю: $\mu \sim \mu_s (1 - m_p) \rightarrow 0$. Однако в силу (21) $S_{ij} \sim Y_s (1 - m_p) \rightarrow 0$, поэтому полные деформации будут конечными $e_{ij}^e \sim Y_s/\mu_s$, а упругие стремятся к нулю: $e_{ij}^y \sim Y_s (1 - m_p)/\mu_s \rightarrow 0$. С учетом данных оценок из уравнений (28) следует $e_{ij}^e \sim Y_s/\mu_s \ll 1$, $e_{kk}^e \sim Y_s/K_s \ll 1$, поэтому при $|p| < |p_{кр}|$ инерционными эффектами можно пренебречь.

Используя формулы (28) и уравнения [15, 16]

$$\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_x(\varepsilon_{kk}^y, e_{ij}^y), \quad p_x = -\rho \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial \varepsilon_{kk}^y}, \quad S_{ij} = \rho \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial e_{ij}^y}, \quad (31)$$

определим удельную упругую энергию пористого материала в виде

$$\mathcal{E}_x = \left(\frac{1}{2} K_1 (\varepsilon_{kk}^y)^2 + \mu_1 e_{ij}^y e_{ij}^y \right) / \rho. \quad (32)$$

Эта формула совпадает с соответствующим определением Эшелби для упругой энергии матрицы с порами [12]. Пренебрегая поверхностной энергией пор, представим полную энергию и давле-

ние в виде суммы холодных и тепловых [17]:

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \mathcal{E}_x + \mathcal{E}_T, \quad p = p_x + p_T, \quad p_T = \Gamma \rho \mathcal{E}_T, \\ \Gamma/\Gamma_s &= K/(m_2 K_s), \quad \Gamma \rho_s \approx \Gamma_0 \rho_{s0} = G,\end{aligned}\quad (33)$$

где Γ — коэффициент Грюнайзена, а p_x определяется из второй формулы в (31).

Уравнения (28) справедливы при $I_2 < Y_2$. Если напряжения S_{ij} лежат на поверхности текучести ($I_2 = Y^2$), то для определения S_{ij} и p_x необходимо воспользоваться ассоциированным законом течения (13). Дифференцируя уравнение (10) по времени, с учетом $\delta \dot{e}_{ij}^p \neq 0$ найдем $\dot{e}_{ij} = \dot{e}_{ij}^y + \dot{e}_{ij}^p$, $\dot{\epsilon}_{kk} = \dot{\epsilon}_{kk}^y + \delta \dot{\epsilon}_{kk}^p + \dot{\epsilon}_{kk}^p$. Подставляя сюда соотношения (13), (28), получим уравнения типа Прандтля — Рейсса для пористой среды

$$\begin{aligned}\dot{S}_{ij} &= -\dot{\lambda} 2\mu S_{ij} + 2\mu \dot{e}_{ij}, \quad \frac{3}{2} S_{ij} S_{ij} = Y^2, \\ \dot{\epsilon}_{kk} &= -(p_x/K) \cdot + \frac{1}{3} \dot{\lambda} \frac{\partial Y^2}{\partial p}, \quad (\cdot) = \frac{d}{dt} (\cdot), \\ \dot{S}_{ij} &= \dot{S}_{ij} - \omega_{ik} S_{jk} - \omega_{jk} S_{ik}, \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i v_j - \nabla_j v_i).\end{aligned}\quad (34)$$

Величина λ определяется из условия

$$d \left(\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij} - Y^2(p, m_1, Y_s) \right) = 0.$$

Дифференцируя Y^2 как функцию двух переменных, получим

$$3S_{ij} \frac{dS_{ij}}{d\lambda} - \frac{\partial Y^2}{\partial p} \frac{dp}{d\lambda} + \frac{\partial Y^2}{\partial m_1} \frac{dm_2}{d\lambda} = 0. \quad (35)$$

Из первого уравнения (34) следует

$$S_{ij} \frac{dS_{ij}}{d\lambda} = 2\mu S_{ij} \frac{de_{ij}}{d\lambda} - 2\mu S_{ij} S_{ij}. \quad (36)$$

Используя определение средней плотности $\rho = \rho_s m_2$, второе уравнение в (34), (27) и условие $d\epsilon_{s kk}^e = d\bar{\epsilon}_{kk}^e$, найдем

$$\begin{aligned}dm_2 &= m_1 \omega \frac{dp_x}{K_s} - d\lambda \frac{m_2}{3} \frac{\partial Y^2}{\partial p}, \\ \omega &= \begin{cases} \frac{3}{2} \frac{(1-\nu)}{(1-2\nu)}, & |p| \leq |p_*|, \\ -\frac{\kappa}{3} \frac{(1+\nu)}{(1-2\nu)} \frac{Y_s}{p} m_p m_2, & |p| > |p_*|, \end{cases}\end{aligned}\quad (37)$$

$$dp_x = -K(d\epsilon_{kk} - d\epsilon_{kk}^p), \quad d\epsilon_{kk}^p = \frac{d\lambda}{3} \frac{\partial Y^2}{\partial p}.$$

Дифференцируя второе уравнение системы (33), представим dp в виде суммы трех слагаемых

$$dp = dp_x + G dm_2 \mathcal{E}_T + G m_2 d\mathcal{E}_T. \quad (38)$$

Подставляя в закон сохранения энергии (1) уравнения (31), (33), получим

$$d\mathcal{E}_T = -\frac{p_T}{\rho} d\epsilon_{kk}^e + \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^p. \quad (39)$$

С помощью (37), (39) соотношение (38) преобразуется к виду

$$dp = \Gamma S_{ij} d\epsilon_{ij}^p + \frac{T_1}{\rho} d\rho + T_2 \frac{d\lambda}{3} \frac{\partial Y^2}{\partial p},$$

$$T_1 = K + \frac{m_1 \omega}{m_2} \frac{K}{K_s} p_T + \Gamma p_T, \quad T_2 = K + \frac{m_1 \omega}{m_2} \frac{K}{K_s} p_T - p_T - \Gamma p_x. \quad (40)$$

Подставляя формулы (36), (37), (40) в (35), получим уравнение для $d\lambda$

$$d\lambda = \left(6\mu S_{ij} d\epsilon_{ij} + \left(T_0 \frac{\partial Y^2}{\partial m_1} - T_1 \frac{\partial Y^2}{\partial p} \right) \frac{d\rho}{\rho} \right) / \left(Y^2 \left(4\mu + \frac{2}{3} \Gamma \frac{\partial Y^2}{\partial p} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3} \frac{\partial Y^2}{\partial p} \left(T_2 \frac{\partial Y^2}{\partial p} + T_3 \frac{\partial Y^2}{\partial m_1} \right) \right), \quad \dot{\lambda} = d\lambda/dt, \quad (41)$$

$$T_0 = m_1 \omega K / K_s, \quad T_3 = 1 - T_0.$$

Полученная замкнутая система уравнений должна удовлетворять второму закону термодинамики $d_i s \geq 0$, где $d_i s$ — изменение энтропии за счет внутренних источников тепла. Для определения энтропии будем использовать соотношение Гиббса [15, 16]

$$d\mathcal{E} = T ds + \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^e. \quad (42)$$

Подставляя формулу (42) в уравнение энергии (1)

$$d\mathcal{E} = -\frac{1}{\rho} \nabla_i q + \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}, \quad d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p,$$

получим

$$ds_e = -\frac{1}{\rho T} \nabla_i q dt, \quad ds_i = \frac{1}{\rho T} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^p, \quad (43)$$

где ds_e — изменение энтропии за счет теплопроводности. Используя уравнения (12), (13), запишем условие $d_i s \geq 0$ в виде

$$\frac{2}{3} Y^2 - \frac{p}{3} \frac{\partial Y^2}{\partial p} \geq 0. \quad (44)$$

Легко проверить, что для поверхности текучести (21) справедливо неравенство $p \frac{\partial Y^2}{\partial p} \leq 0$, поэтому условие (44) и $d_i s \geq 0$ всегда выполняются.

Коротко оценим влияние воздуха в порах. Рассмотрим два случая: 1) газ локализован в поре; 2) газ может перетекать из одной поры в другую (фильтрация газа). В первом случае средние скорости газа и матрицы равны между собой, а плотность и температура различаются [30, 31]. Давление в газе опреде-

ляется в зависимости от характера сжатия и теплообмена между матрицей и воздухом. Подробно эти вопросы изучены в работе [30]. Ограничимся для примера адиабатическим сжатием воздуха, тогда

$$p_{11} = p_{11}^0 (\rho_{11}/\rho_{11}^0)^\gamma, \quad \mathcal{E}_1 = \frac{p_{11}}{(\gamma - 1) \rho_{11}}, \quad \rho_{11} = \rho_1/m_1, \quad (45)$$

где ρ_{11} , p_{11} — истинная плотность и давление в газе, а ρ_1 определяется из первого уравнения в (1). Уравнения (45) должны решаться совместно с (1), (5) — (7), (21), (28), где нужно заменить: $p \rightarrow m_2(p_s - p_{11})$, $\sigma_{ij} \rightarrow m_2\sigma_{sij} - m_1p_{11}\delta_{ij}$, $\mathcal{E} \rightarrow (\rho_1\mathcal{E}_1 + \rho_2\mathcal{E}_2)/\rho$, $\rho = \rho_1 + \rho_2$, $\rho_1 = \rho_{11}m_1$, $\rho_2 = \rho_{22}m_2$.

Во втором случае необходимо учитывать фильтрацию газа в матрице. Полная система уравнений, описывающая газ и матрицу [31], приведена в гл. 1. В пластической области она должна быть дополнена уравнениями (5), (31) — (34), при этом в уравнениях (5), (21), (28) нужно заменить p на $m_2(p_s - p_{11})$.

§ 2. ДИНАМИКА, ПЛАВЛЕНИЕ И ТЕПЛООБМЕН В ОКРЕСТНОСТИ ПОРЫ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ПОРИСТОМ МАТЕРИАЛЕ

Рассмотрим динамику затекания поры за фронтом ударной волны. Выделим два характерных случая: инерционного и вязкого затекания пор. Из уравнения (1.5) найдем, что отношение инерционных слагаемых к вязким равно $Re = \rho_s a_0^2 \dot{\alpha}/\eta$, где Re — число Рейнольдса, a_0 — начальный радиус поры, η — вязкость. Оценку скорости затекания поры получим из уравнения (1.2). Выражая α через p , найдем, что инерционные силы преобладают при $Re \gg 1$, а вязкие — при $Re \ll 1$, где

$$Re = a_0 \sqrt{p\rho_s}/\eta. \quad (1)$$

В случае $Re \gg 1$ уравнение (1.5) имеет вид

$$p \approx \frac{\rho_s a_0^2}{\alpha (\alpha_0 - 1)^{2/3}} \left(\frac{\alpha^2}{6} \frac{1}{(\alpha - 1)^{4/3}} - \frac{\ddot{\alpha}}{(\alpha - 1)^{4/3}} \right) + \frac{2}{3} Y_s \ln \frac{\alpha}{\alpha - 1}, \quad (2)$$

$$\dot{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha_0} D \frac{d\alpha}{d\xi}, \quad \ddot{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha_0^2} D^2 \left(\alpha \frac{d^2\alpha}{d\xi^2} + \left(\frac{d\alpha}{d\xi} \right)^2 \right), \quad \xi = x - Dt.$$

Предполагая, что плотность ρ_s не меняется в процессе пластического затекания поры, а p_0 определяется из условия (1.6), получим

$$p = \rho_0 D^2 \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_0} \right) + \frac{2}{3} Y_s \ln \frac{\alpha_0}{\alpha_0 - 1}. \quad (3)$$

Система уравнений (2), (3) подробно проанализирована в работе

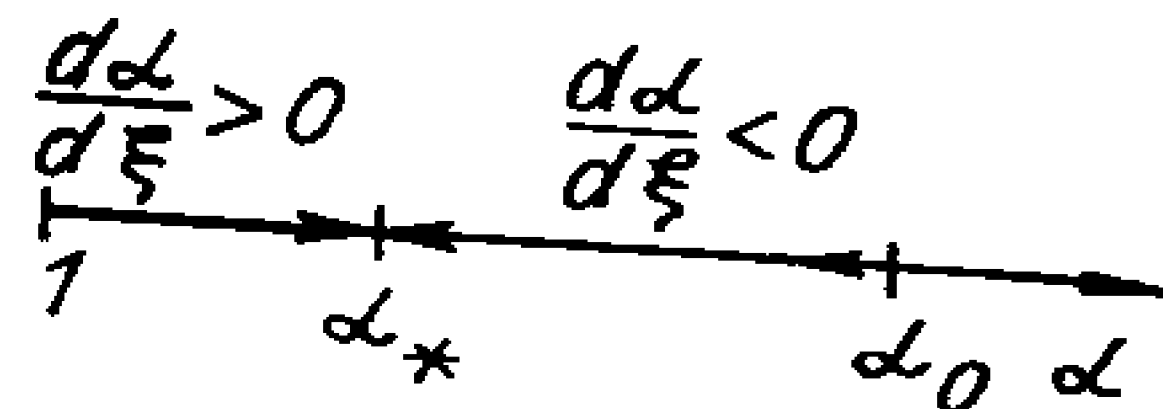
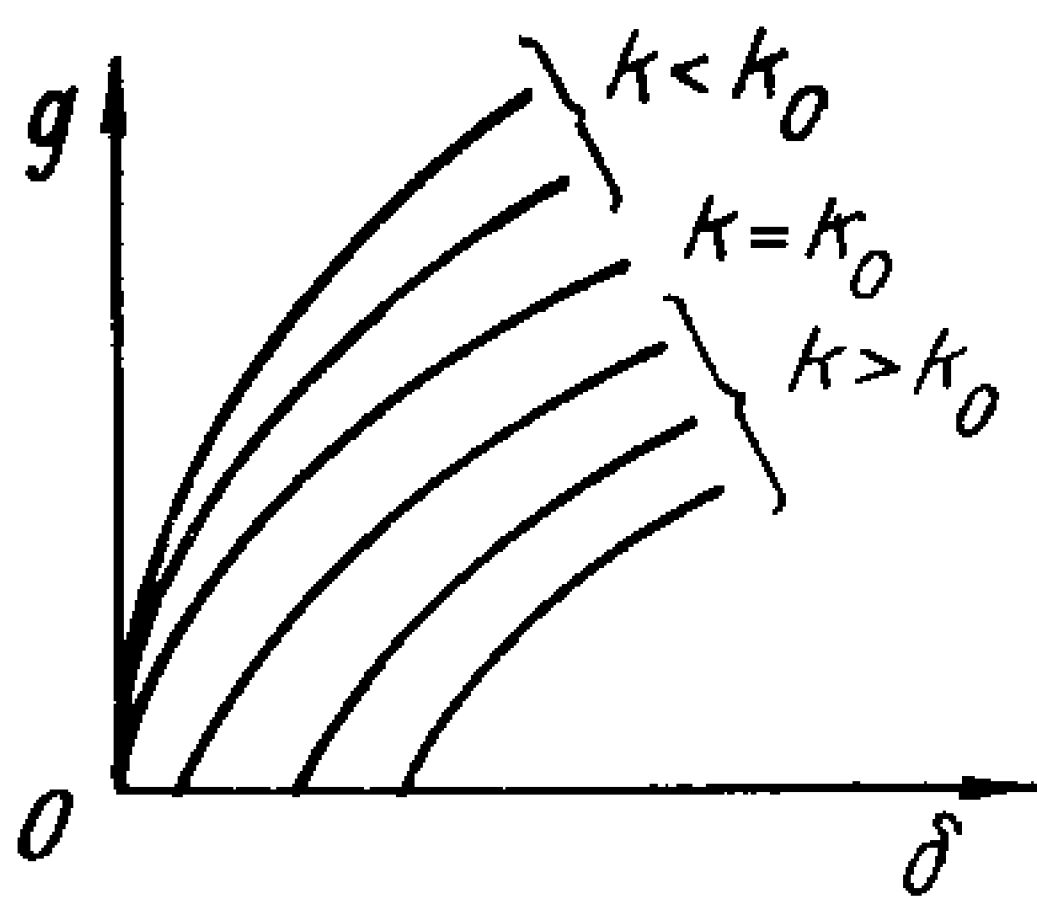


Рис. 6.8.

Рис. 6.7.

[4], где показано, что полное затекание (схлопывание) пор происходит при выполнении неравенства

$$D > \frac{\alpha_0}{\alpha_0 - 1} \left(\frac{2Y_s (\alpha_0 - 1 + \ln \alpha_0)}{\rho_s (\alpha_0 + 2)} \right)^{1/2}. \quad (4)$$

Поведение интегральных кривых в плоскости $g = \frac{d\alpha}{d\xi}$, $\delta = \alpha - 1$ показано на рис. 6.7, где $k^2 = Y/\rho_s D^2$,

$$k_0^2 = (\alpha_0 - 1)^2 (\alpha_0 + 2) / (2\alpha_0^2 (\alpha_0 - 1 + \ln \alpha_0)).$$

Величина $\frac{d^2\alpha}{d\xi^2} = g \frac{dg}{d\alpha}$ стремится к бесконечности при $\delta \rightarrow 0$, где $g \sim (\alpha - 1)^{1/6}$ (формула (13)). От центра схлопывания будет распространяться сферическая ударная волна. Со временем эта волна затухает, а ее энергия переходит в тепло. Характерное время схлопывания $t^* \simeq a_0 / \sqrt{p/\rho_s}$, за это время фронт волны переместится на расстояние $\Delta x_\Phi \simeq Dt^* \simeq a_0 \frac{\alpha_0}{\sqrt{\alpha_0 - 1}}$. Таким образом, ширина ударной волны имеет порядок радиуса поры.

В случае $Re \ll 1$ уравнение (1.5) с учетом (3) запишется в виде

$$\frac{d\alpha}{d\xi} = - \frac{3}{4} \frac{\alpha_0 (\alpha - 1)}{D\eta} \left(\frac{\rho_{s0} D^2}{\alpha_0^2} (\alpha_0 - \alpha) - \frac{2}{3} Y_s \ln \frac{\alpha (\alpha_0 - 1)}{(\alpha - 1) \alpha_0} \right). \quad (5)$$

Уравнение (5) имеет три стационарные точки: $\alpha = 1$, $\alpha = \alpha^*$, $\alpha = \alpha_0$ (рис. 6.8). Как видно, величина α непрерывно уменьшается от α_0 до α_* , которое определяется из условия $d\alpha/d\xi = 0$ и равно

$$\alpha_* = 1 / \left(1 - \exp \left(- \frac{3}{2} \left(\frac{\alpha_0 - 1}{\alpha_0} \right) \frac{\rho_0 D^2}{Y_s} \right) \right). \quad (6)$$

Из уравнения (6) следует, что при $Re \ll 1$ полного затекания пор не происходит — $\alpha_* > 1$. Однако, как показано в [4], учет плавления приводит к полному затеканию поры в случае $Re \ll 1$. Ширину ударной волны Δx_Φ оценим из уравнения (5). Разлагая логарифм по степеням $(\alpha_0 - \alpha)$, перепишем (5) в виде $d\alpha/d\xi = -(\alpha_0 - \alpha)/\Delta x_\Phi$, где

$$\Delta x_\Phi \simeq \frac{4}{3} D\eta / \left((\alpha_0 - 1) \rho_{s0} D^2 - \frac{2}{3} Y_s \right). \quad (7)$$

Давление за фронтом ударной волны определяется по уравнению (1.6). Минимальная скорость ударной волны находится из условия касания прямой (3) и кривой (1.6) в точке α_0

$$D_{\min} = \left(\frac{2}{3} \frac{Y_s}{\rho_s} \frac{\alpha_0}{\alpha_0 - 1} \right)^{1/2}. \quad (8)$$

Отметим, что в работе [4] формула (8) получена путем исследования фазового «портрета» уравнения (1.5) в плоскости g, α при $\alpha = \alpha_0$.

Рассмотрим температурные эффекты в окрестности поры. Из уравнения энергии системы (1.1) и второго уравнения в (1.2) получим формулу для скорости диссипации энергии

$$\dot{\mathcal{E}}_g = \frac{2}{3} \frac{(\sigma_r - \sigma_\varphi)}{\rho_s} \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right). \quad (9)$$

Используя распределение скоростей вблизи поры (1.3), проинтегрируем уравнение (9) по времени

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_g = & -\frac{2Y_s}{3\rho_s} \ln \left(1 - \frac{a_0^3 (\alpha_0' - \alpha)}{r_0^3 (\alpha_0 - 1)} \right) + \\ & + \frac{4\eta a_0^6}{3\rho_s} \int_{-\infty}^t \frac{\dot{\alpha}^2 dt}{(r_0^3 (\alpha_0 - 1) - a_0^3 (\alpha_0 - \alpha))^2}, \end{aligned} \quad (10)$$

где r_0 — начальный радиус, связанный с текущим соотношением $r^3 - r_0^3 = a^3 - a_0^3$. Отсюда видно, что чем меньше r_0 , тем больше $\mathcal{E}_g$. Максимальный разогрев происходит на поверхности поры. Полагая в (10) $r_0 = a_0$, найдем повышение температуры поверхности поры

$$c_p \Delta T_1 = -\frac{2}{3} \frac{Y_s}{\rho_s} \ln \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha_0 - 1} \right) + \frac{4}{3} \frac{\eta}{\rho_s} \int_{-\infty}^t \frac{\dot{\alpha}^2 dt}{(\alpha - 1)^2}. \quad (11)$$

При $\alpha \rightarrow 1$ член, связанный с прочностью, имеет логарифмическую особенность, поэтому, как правило, он мал по сравнению с вязким членом. Оценим вязкий член в инерционном случае.

Величину $\dot{\alpha}$ найдем из равенства кинетической энергии схлопывающейся поры $\mathcal{E}_k$ и работы давления A_p . Согласно (1.3) имеем

$$v = \frac{a_0^3 \dot{\alpha}}{3(\alpha_0 - 1)(r_0^3 + a^3 - a_0^3)^{2/3}}, \quad a^3 = a_0^3 \frac{\alpha - 1}{\alpha_0 - 1},$$

отсюда получим

$$\mathcal{E}_k = \int_{a_0}^{b_0} \frac{\rho_s v^2}{2} r_0^2 dr_0 = \frac{\rho_s a_0^5 \dot{\alpha}^2}{18(\alpha_0 - 1)^{5/3}} \left(\frac{1}{(\alpha - 1)^{1/3}} - \frac{1}{\alpha_0^{1/3}} \right). \quad (12)$$

(Формулы (10), (12) приведены, например, в [4].) Полагая $A_p = p \frac{a_0^3}{3} = \mathcal{E}_k$, с учетом (12) найдем

$$\dot{\alpha} = -\delta^{1/2} \frac{(\alpha_0 - 1)^{5/6}}{a_0} \sqrt{\frac{p}{\rho_s}} (\alpha - 1)^{1/6}. \quad (13)$$

Отметим, что из формул (1.3), (13) следует известное выражение Рэлея для скорости схлопывания пузырька $v \sim \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3/2} \sqrt{\frac{p}{\rho_s}}$. Подставляя выражение (13) в (11), получим

$$c_p \Delta T_1 \approx 4 (\alpha_0 - 1)^{5/6} \cdot \frac{\eta}{\rho_s a_0} \sqrt{\frac{p}{\rho_s}} \left(\frac{1}{(\alpha - 1)^{5/6}} - \frac{1}{(\alpha_0 - 1)^{5/6}} \right). \quad (14)$$

Из уравнения (14) следует, что имеет место степенная особенность в ΔT при $\alpha \rightarrow 1$.

В вязком случае $Re \ll 1$ из уравнения (8) найдем $\dot{\alpha}$

$$\dot{\alpha} = -\frac{3}{4} \alpha (\alpha - 1) \frac{p}{\eta}. \quad (15)$$

Используя уравнения (11), (15), получим

$$c_p \Delta T \approx \frac{3}{4} \frac{p^2}{\eta \rho_s} \tau_\eta = \frac{p}{\rho_s}, \quad (16)$$

где $\tau_\eta = \frac{4}{3} \frac{\eta}{p}$ — характерное время вязкого затекания поры.

Разогрев вещества вблизи поры может приводить к его расплавлению. На рис. 6.9 показана ячейка, содержащая расплавленную зону $a < r < r_p$. В области $a < r < r_p$ прочностные свойства отсутствуют, поэтому сдвиговые напряжения являются чисто вязкими

$$\sigma_r - \sigma_\phi = 2\eta_0 \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right), \quad (17)$$

где η_0 — вязкость расплавленного материала. Решение уравнений (1.2), (17), учитывающее наличие расплава, приведено в [4]

$$p = \frac{\rho_s a_0^2}{(\alpha_0 - 1)^{2/3}} \left(-A \frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} + B \frac{\dot{\alpha}^2}{6\alpha} \right) -$$

$$- \frac{4}{3} \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \left(\frac{(\eta - \eta_0)(1 - \delta_0)}{\delta + \alpha - 1} + \frac{\eta_0}{\alpha - 1} \right) + \frac{2}{3} Y_s \ln \frac{\alpha}{\delta + \alpha - 1},$$

$$A = (1/3) (\alpha - 1)^{1/3} + \frac{1}{2} ((\alpha - 1)^{2/3} - \alpha^{2/3}), \quad (18)$$

$$B = 1/\alpha^{1/3} - 1/(\alpha - 1)^{1/3} - \frac{1}{3} / (\alpha - 1)^{4/3}, \quad \delta = (r_p^3 - a^3)/(b^3 - a^3),$$

где δ — относительная доля расплавленного материала. Основное отличие уравнения (18) от (1.5) состоит в том, что давле-

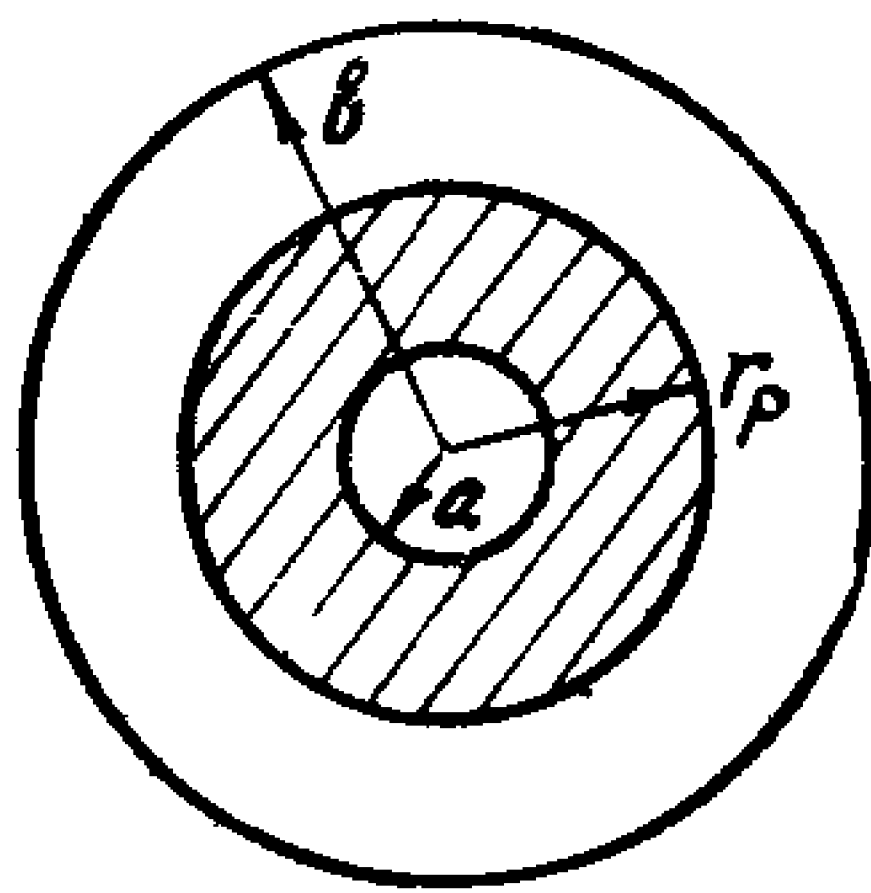


Рис. 6.9.

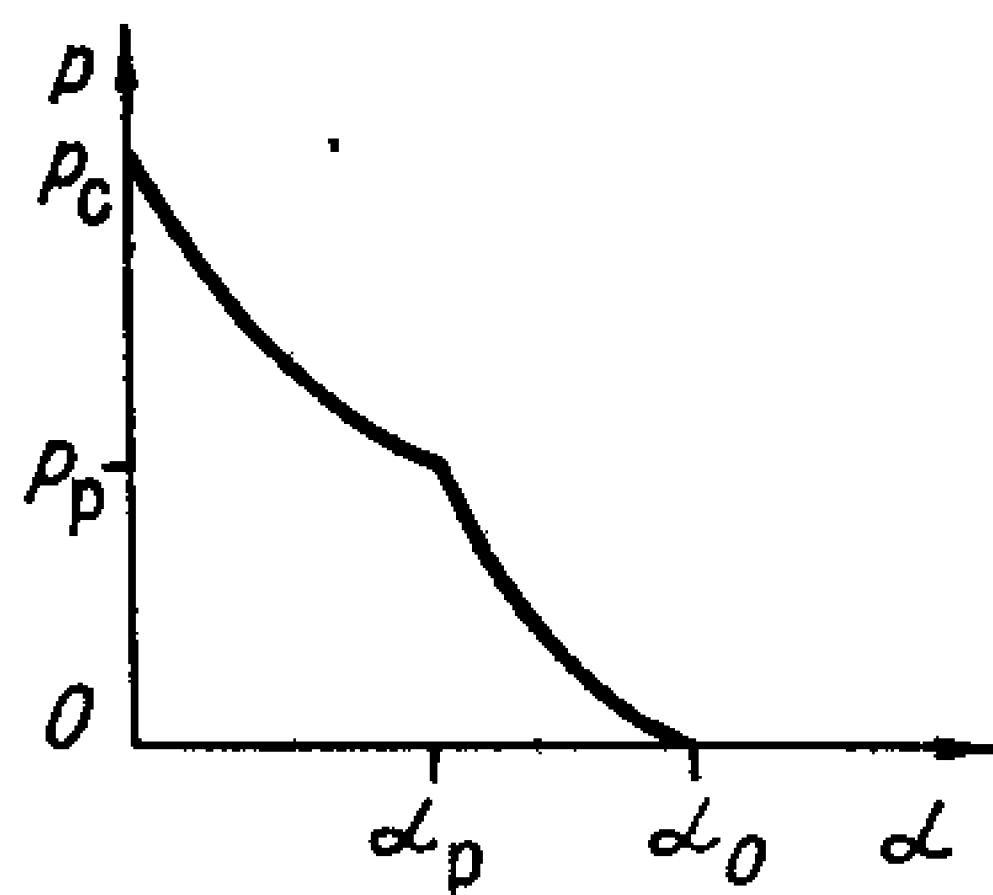


Рис. 6.10.

ние не имеет особенности, поэтому возможно полное затекание пор $\alpha = 1$, $\dot{\alpha} = \ddot{\alpha} = 0$. Полагая в (18) $\dot{\alpha} = \ddot{\alpha} = 0$, получим давление в конечном состоянии

$$p = \frac{2}{3} Y_s \ln \frac{\alpha}{\delta + \alpha - 1}. \quad (19)$$

В случае полного затекания пор

$$p_c = \frac{2}{3} Y_s \ln \frac{1}{\delta}, \quad (20)$$

где $\delta = \delta(\alpha_0)$.

Формула (19) может быть получена из следующих простых соображений. Рассмотрим равновесие ячейки, приведенной на рис. 6.9, к внешней границе которой приложено давление p . На поверхности поры $\sigma_r(a) = 0$, поэтому в области $a < r < r_p$ давление равно нулю. В силу непрерывности нормального напряжения на границе расплава $\sigma_r(r_p) = 0$. В результате имеем задачу о равновесии жесткопластической ячейки с граничными условиями

$$\sigma_r(r_p) = 0, \quad \sigma_r(b) = -p.$$

Решение этой задачи определяется формулой (1.4), где надо положить $a = r_p$, $\dot{\alpha} = \ddot{\alpha} = 0$, $r = b$

$$p = -\frac{2}{3} Y_s \ln \left(\frac{r_p}{b} \right)^3.$$

Подставляя сюда соотношение $\left(\frac{r_p}{b} \right)^3 = \left(\frac{r_p}{a} \right)^3 \left(\frac{a}{b} \right)^3$ и используя определения α и δ , получим уравнение (19). Зависимость $p(\alpha)$ для пористого вещества с учетом плавления (уравнения (1.6), (19)) показана на рис. 6.10. Как отмечалось в [4], наличие излома на кривой $p(\alpha)$ может привести к возникновению двухволновой конфигурации. Приведем формулы для α_p , p_p и δ , полученные в [4]. В случае вязкого затекания пор имеем

$$\begin{aligned} \alpha_p - 1 &= m(\alpha_0 - 1), \quad m = \exp(-E_0^{0,9}), \\ E_0 &= 3\mathcal{E}_p/2Y_s, \quad \mathcal{E}_p = \rho_s c_p (T_* - T_0) + \mathcal{E}_*, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\delta(\alpha) = Q(\alpha_v, \alpha_p)(\alpha_p - \alpha), \quad p_p = \frac{2}{3} Y_s \ln \frac{\alpha_p}{\alpha_p - 1},$$

где $\mathcal{E}_*$, T_* — теплота и температура плавления. Зависимость $\delta(p)$ при полном затекании пор определяется формулами

$$3(p - p_0)/2Y = (\mathcal{E}_p - M(\delta))/L(\delta),$$

$$M(\delta) = 2 \ln \frac{\delta + \alpha_0 - 1}{\delta \alpha_0} + (2\delta - 1) \left(\ln \frac{\alpha_0}{\alpha_0 - 1} \ln \frac{\delta}{\alpha_0 - 1 + \delta} + \int_1^{\alpha_0} \ln \frac{\alpha}{\alpha - 1} / (\delta + \alpha - 1) d\alpha \right), \quad (22)$$

$$L(\delta) = \frac{\alpha_0 - 1}{2} + 3\delta - 2 - ((2\delta - 1)(\delta + \alpha_0 - 1) - \delta(1 - \delta))/(\alpha_0 - 1) \times \\ \times \ln \frac{\delta - 1 + \alpha_0}{\delta}, \quad p_0 = \frac{2}{3} Y_s \ln \frac{\alpha_0}{\alpha_0 - 1}.$$

В случае неполного затекания пор $\alpha > 1$, $p \sim p_p$, $\delta \ll 1$
 $\delta = Q_1(\alpha_* - (\alpha_* - 1) \exp(3p/2Y_s))/(1 + (Q_1 - 1) \exp(3p/2Y_s)). \quad (23)$

Выше пренебрегалось эффектами теплопроводности, которые будут уменьшать максимальную температуру вблизи поры. Это приближение справедливо при условии

$$(4\kappa t)^{1/2}/b_0 \ll 1, \quad (24)$$

где t — характерное время затекания пор, κ — коэффициент температуропроводности. Считая $t \approx \frac{\Delta x_\Phi}{D}$, перепишем условие (24)

$$\frac{4\kappa \Delta x_\Phi (\alpha_0 - 1)^{2/3}}{Da_0^2 \alpha_0^{2/3}} \ll 1, \quad (25)$$

где Δx_Φ , D — ширина и скорость ударной волны. Если неравенства (24), (25) не выполняются, необходимо вместе с уравнениями движения (1.2) решать уравнение теплопроводности

$$c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{c_p \kappa}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{2}{3} \frac{(\sigma_r - \sigma_\Phi)}{\rho_s} \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) \quad (26)$$

с граничными и начальными условиями

$$\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=a} = \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=b} = 0, \quad T|_{t=0} = T_0. \quad (27)$$

Численное решение системы уравнений (1.2), (26) при сжатии поры в ударной волне приведено в работе [18]. В результате было показано, что на распределение температуры наряду с числом Рейнольдса Re , большое влияние оказывает число Прандтля Pr

$$Pr = \frac{\eta}{\kappa \rho_s}. \quad (28)$$

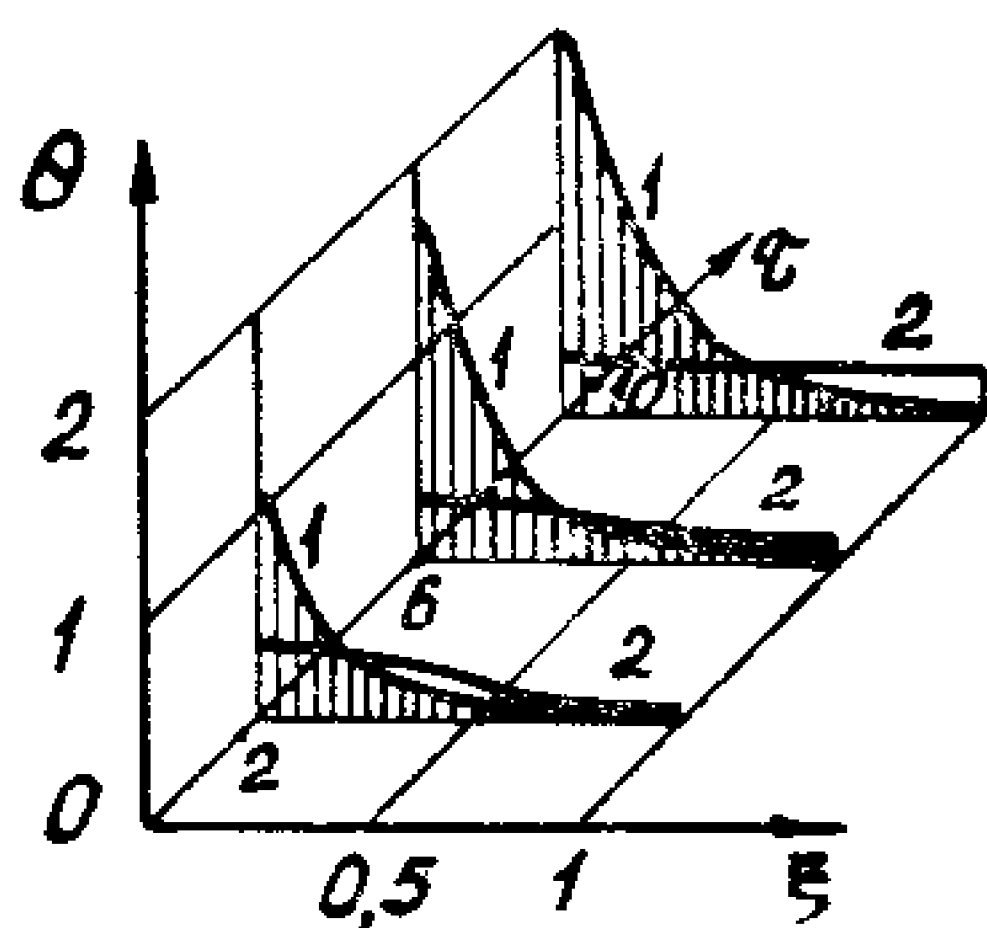


Рис. 6.11.

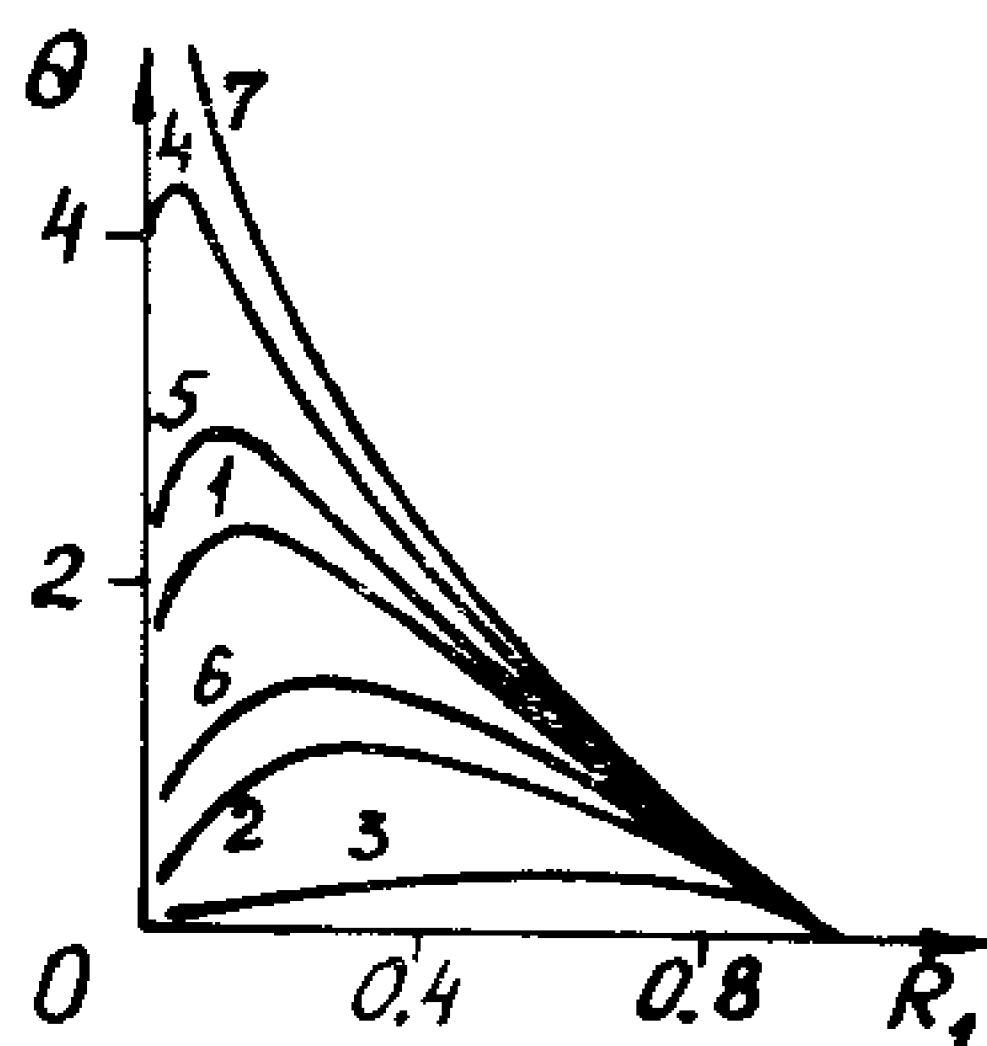


Рис. 6.12.

На рис. 6.11 приведена зависимость $\Theta(\tau, \xi)$ из работы [18] на три момента времени, соответствующих $R_1 = 0.6, 0.32, 0.2$, где

$$\xi = \frac{r-a}{b-a}, \quad R_1 = \frac{a}{a_0}, \quad \tau = \frac{t}{a_0} \sqrt{\frac{p}{\rho_s}}, \quad \Theta = (T - T_0). \quad \text{Расчеты проводи-}$$

лись при $\alpha = 1.11$, $\beta = \frac{Y_s}{p} = 0.1$, $Re = a_0 \sqrt{p \rho_s} / \eta = 1$, $Pr = 10^3$ (кривая 1), $Pr = 10$ (кривая 2). Видно, что при $Pr = 10^3$ преобладает процесс тепловыделения, что приводит к сильному локальному разогреву вблизи поры. При $Pr = 10$ скорость теплоотвода превышает скорость тепловыделения, поэтому материал поры разогревается равномерно. На рис. 6.12 показана зависимость температуры на поверхности поры Θ от радиуса поры R_1 [18]. Кривые 1—3 соответствуют $Re = 0.1$, 4—6 — 0.5. Кривые 1, 4 отвечают $Pr = 10^5$, кривые 2, 5 — 10^4 , кривые 3, 6 — 10^3 . Кривая 7 определяет максимальную температуру Θ при $Pr \rightarrow \infty$ (теплопроводность отсутствует). Из рис. 6.12 видно, что учет теплопроводности приводит к возникновению максимума на кривой $\Theta(R_1)$, который сдвигается вправо при уменьшении чисел Re и Pr . В работе [18] появление этого максимума никак не объясняется. Для объяснения этого эффекта оценим правую часть уравнения (26). С учетом формулы (1.3) скорость диссипации запишем в виде

$$\dot{\mathcal{E}}_\eta = \frac{2}{3} \frac{(\sigma_r - \sigma_\varphi)}{\rho_s} \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) = \frac{4}{3} \frac{\eta}{\rho_s} \frac{a_0^6}{a^6} \frac{\dot{\alpha}^2}{(\alpha_0 - 1)^2}. \quad (29)$$

В вязком случае $Re \ll 1$ $\dot{\alpha}$ определяется по формуле (15), в результате получим

$$\dot{\mathcal{E}}_\eta = \frac{3}{4} \frac{p^2}{\rho_s \eta}. \quad (30)$$

Скорость теплоотдачи при $r = a$ оценим по формуле

$$\dot{Q} = \frac{c_p \kappa}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) \Big|_{r=a} \simeq - \frac{4c_p \kappa}{a^2} \Delta T_1, \quad (31)$$

где ΔT_1 определяется уравнением (16), с учетом которого

$$\dot{Q} = - \frac{4\kappa}{a^2} \frac{p}{\rho_s}. \quad (32)$$

Таблица 6.1

Re	0.1			0.5		
Pr	10^3	10^4	10^5	10^3	10^4	10^5
Формула (34)	0.72	0.23	0.07	0.14	0.046	0.015
Рис. 6.12	0.7	0.3	0.12	0.22	0.12	0.08

Знак «минус» выбран потому, что вследствие теплопроводности температура вблизи поверхности поры понижается. Используя равенство $c_p \frac{dT}{dt} \Big|_{r=a} = c_p \dot{R}_1 \frac{dT_1}{dR_1}$, перепишем уравнение (26)

$$-c_p |\dot{R}_1| \frac{dT_1}{dR_1} \simeq \left(\frac{1}{\tau_\eta} - \frac{1}{\tau_\kappa} \right) \frac{p}{\rho_s}, \quad (33)$$

где $\tau_\kappa = \frac{a^2}{4\kappa}$, $\tau_\eta = \frac{4}{3} \eta/p$. Условие $\frac{dT_1}{dR_1} = 0$ приводит к соотношению $\frac{a^2}{4\kappa} = \frac{4}{3} \frac{\eta}{p}$,

отсюда
$$R_1^* = \frac{2.3}{\text{Re} \sqrt{\text{Pr}}}, \quad (34)$$

где Pr определяется формулой (28), а $\text{Re} = \frac{a_0 \sqrt{p\rho_s}}{\eta}$. Формула (34) качественно описывает результаты расчетов при $\text{Re} \ll 1$. В табл. 6.1 приведены значения R_1^* , рассчитанные по формуле (34) и найденные из рис. 6.12. Как видно, совпадение R_1^* при $\text{Re} = 0.1$ значительно лучше, чем при $\text{Re} = 0.5$.

На начальном этапе сжатия поры преобладает процесс тепловыделения (33)

$$\frac{dT_1}{dR_1} \simeq - \frac{p}{\tau_\eta c_p |\dot{R}_1| \rho_s} < 0.$$

Уменьшение радиуса поры приводит к уменьшению τ_κ и при достижении радиуса R_1^* скорость тепловыделения сравнивается со скоростью теплоотвода, поэтому $\frac{dT_1}{dR_1} \Big|_{R_1^*} = 0$. Дальнейшее сжатие приводит к увеличению скорости теплоотвода и к уменьшению температуры

$$\frac{dT_1}{dR_1} \simeq \frac{p}{\tau_\kappa c_p |\dot{R}_1| \rho_s} > 0.$$

В случае преобладания сил инерции $\text{Re} \gg 1$ эффект немонотонности $T_1(R_1)$ пропадает.

Используя уравнения (14), (31), оценим величину $\dot{Q}$

$$\dot{Q} \approx - \frac{16\kappa\eta}{\rho_s a_0^3} \sqrt{\frac{p}{\rho_s}} \left(\frac{\alpha_0 - 1}{\alpha - 1} \right)^{2/3} \left(\left(\frac{\alpha_0 - 1}{\alpha - 1} \right)^{5/6} - 1 \right). \quad (35)$$

Скорость тепловыделения найдем из уравнений (1.3), (9), (13) при $r_0 = a_0$, $r = a$

$$\dot{\mathcal{E}}_\eta = \frac{8\eta}{\rho_s a_0^2} \frac{p}{\rho_s} \left(\frac{\alpha_0 - 1}{\alpha - 1} \right)^{5/3}. \quad (36)$$

Поделив уравнение (36) на (35), получим

$$\left| \frac{\dot{\mathcal{E}}_\eta}{\dot{Q}} \right|_{r=a} \approx \frac{1}{2} \text{Re Pr} \left(\frac{\alpha_0 - 1}{\alpha - 1} \right)^{1/6} \gg 1, \quad (37)$$

где $\text{Re} \gg 1$, $\text{Pr} \gg 1$. Записав уравнение (26) в виде

$$\frac{dT_1}{dR_1} = - \frac{1}{c_p |R_1|} (\dot{\mathcal{E}}_\eta - \dot{Q}),$$

найдем искомое неравенство

$$\frac{dT}{dR_1} < 0, \quad 0 < R_1 < 1. \quad (38)$$

Оценим число Прандтля для металлов. Полагая в (28) $\rho_s = 10^4 \text{ кг/м}^3$, $\kappa = 10^{-4} - 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$, $\eta = 10^3 - 10^4 \text{ Па} \cdot \text{с}$, получим $\text{Pr} = 10^3 - 10^5$. Отсюда следует, что предположение $\text{Pr} \gg 1$, сделанное при выводе (37), хорошо выполняется для металлов.

§ 3. ИССЛЕДОВАНИЕ УДАРНЫХ ВОЛН В ПОРИСТОМ ТЕЛЕ С ПОМОЩЬЮ УДАРНЫХ АДИАБАТ

Рассмотрим распространение ударной волны в пористом материале. В случае сильной ударной волны ширина ее фронта имеет порядок размера поры (см. § 2 в данной главе), поэтому сильную ударную волну можно моделировать поверхностью разрыва. Соотношения на поверхности разрыва в гидродинамическом приближении следуют из законов сохранения массы, энергии, импульса и имеют вид [17]

$$\begin{aligned} \rho v &= \rho_0 D, \quad p - p_0 = \rho_0^2 D^2 \left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho} \right), \\ \mathcal{E} - \mathcal{E}_0 &= \frac{p + p_0}{2} \left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho} \right), \quad v = v_\pi - D, \end{aligned} \quad (1)$$

где D — скорость ударной волны, v , v_π — скорость среды за фронтом волны в системе волны и в лабораторной системе, $\rho = \rho_s m_2$, индексом «0» обозначены параметры перед фронтом

ударной волны, а без индекса — за фронтом, $\mathcal{E}$ — удельная энергия, p — давление. Подставляя формулы (1.32), (1.33) при $\mu = 0$, $K = K_s$ в последнее уравнение системы (1), получим ударную адиабату пористого тела [4]

$$V_1^2 \left(\frac{m_2^2}{m_2^0} h \right) + V_1 \left((hp + p_0)/K_s - m_2(h + 1) - (1 - h)m_2 p_{s0}^x/K_s \right) + \\ + m_2^0 + m_2^0(1 - h)p_{s0}^x/K_s - (p + p_0 h)/K_s = 0, \quad (2)$$

$V_1 = \rho_0/\rho$, $\rho = \rho_s m_2$, $h = 1 + 2/\Gamma$, $\alpha = 1/m_2$, $p_{s0}^x = p_0/m_2^0 - \rho_{s0}\Gamma\mathcal{E}_{\text{то}}$, $p_0 = \frac{2}{3} Y_s \ln 1/m_1^0$, где α определяется по формуле (1.6), либо $\alpha = 1$ в случае полного затекания пор. На рис. 6.13 показана качественная зависимость $p = p(\rho, m_2^0, \rho_s^0)$, которая описывается уравнением (2) при двух значениях начальной плотности ρ_0^1 и ρ_0^2 , ρ_s^0 — плотность сплошного материала. Прямые линии подчиняются второму уравнению в (1) и называются линиями Рэля — Михельсона. Конечное состояние в ударной волне определяется точкой пересечения линии Рэля — Михельсона и ударной адиабаты.

В интенсивной ударной волне происходит полное затекание пор. Полагая в уравнении (2) $m_2 = 1$, получим

$$p = (K_s(V_1(h + 1) - V_1^2 h/m_2^0 - m_2^0) + \\ + (1 - h)(V_1 - m_2^0)p_{s0}^x + p_0(h - V_1))/(hV_1 - 1). \quad (3)$$

Уравнение (3) подробно проанализировано в [17], где показано, что оно (как и уравнение (2)) имеет поворотную точку, показанную на рис. 6.13 буквой R . Полагая в уравнении (3) $V_1 = (m_2^0 \rho_{s0})/(m_2 \rho_s)$, $\rho_s = \rho_s^0 + \delta\rho$, $\delta\rho \ll \rho_s^0$, $p_0 = p_{s0}^x = 0$, из уравнения (3) найдем $p = K_s m_2^0 (h - 1) \frac{\delta\rho}{\rho_s^0} (h m_2^0 - 1)$. Отсюда следует,

что при $m_2^0 > 1/h$ $\rho > \rho_s^0$, а при $m_2^0 < 1/h$ плотность в конечном состоянии $\rho < \rho_s^0$. Уменьшение плотности ρ по сравнению с плотностью сплошного тела в начальном состоянии ρ_s^0 связано с расширением тела под действием большого теплового давления.

Воспользуемся ударными адиабатами пористого и сплошного материала для объяснения экспериментально наблюдаемого эффекта образования холодного слоя частиц при взрывном компактировании порошков.

В работе [19] при компактировании порошков с центральным телом обнаружено образование холодного слоя частиц (рис. 6.14, где буквами ВВ обозначено взрывчатое вещество, П — порошок, $\mathbf{z}$ — сплошной материал, образующийся после компактирования порошка, ХС — холодный слой, ЦТ — центральное тело (пластина из сплошного материала в плоском случае и

ОС и *ЕС*. Будем считать, что при переходе через фронт *УВ ОВ*, создаваемой бугорком, порошок сжимается до плотной упаковки $\rho_b \approx \rho_s$. На рис. 6.16 это состояние показано буквой *b* и лежит на ударной адиабате пористого материала p_n . В ударной волне *ОС* сжимается сплошной материал и конечное состояние лежит на ударной адиабате сплошного материала p_s в точке *d*. При сжатии в *УВ* удельная внутренняя энергия возрастает на величину [17]

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}(p + p_0)(V_0 - V), \quad V = 1/\rho, \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}_T + \mathcal{E}_x,$$

$$\mathcal{E}_x = \int_v^{v_0} p_x dV, \quad \mathcal{E}_T = c_p T, \quad p = p_T + p_x, \quad (4)$$

где $\mathcal{E}_x$, p_x — холодные энергия и давление, $\mathcal{E}_T$, p_T — тепловая энергия и давление, c_p — удельная теплоемкость, T — температура, индекс «*o*» соответствует начальному состоянию. Из (4) следует, что приращение удельной тепловой энергии во внутреннем слое $\mathcal{E}_T$ равно сумме площади треугольника *abs* и трапеции *bdl*.

Оценим площадь трапеции *bdl* в предположении, что сжатие сплошного материала в *УВ* при $p \sim 1-5$ ГПа не сильно отличается от адиабатического [17]. В этом случае справедливы формулы [17]

$$\mathcal{E}_{Td}/\mathcal{E}_{Tb} = (\rho_d/\rho_s)^{\Gamma_0}, \quad p_d \approx p_x, \quad p_x = c_0^2(\rho_d - \rho_s),$$

отсюда следует

$$(\mathcal{E}_{Td} - \mathcal{E}_{Tb})/\mathcal{E}_{Tb} \approx \Gamma_0 p_d / (\rho_0 c_0^2). \quad (5)$$

Подставляя в эту формулу $\Gamma_0 = 2$ и давление из экспериментов [19] $p_d \sim 1-5$ ГПа, для меди получим

$$(\mathcal{E}_{Td} - \mathcal{E}_{Tb})/\mathcal{E}_{Tb} \sim (1.4 \div 7) \cdot 10^{-2}. \quad (6)$$

Отметим, что нагрев в *УВ ОС* происходит равномерно во всем объеме частицы, а в *УВ ОА* и *ОВ* — на контактах частиц. Именно нагрев на контактах важен при «сваривании» частиц. Из формулы (6) следует, что нагревом сплошного материала в ударных волнах можно пренебречь, поэтому $\mathcal{E}_T$ равна площади треугольника *abs*, и с учетом $T_i = \mathcal{E}_T/c_p$ найдем

$$T_i \approx \frac{1}{2} \frac{p_b}{c_p \rho_s} \frac{(1 - m_2^0)}{m_2^0}, \quad (7)$$

где m_2^0 — объемная концентрация порошка до сжатия. Во внешнем слое порошок сжимается в *УВ ОА* (состояние *s* на ударной адиабате пористого вещества p_n) и в *УВ ОД* (состояние *t* на адиабате сплошного материала). Из условия непрерывности

давления при переходе через контактную поверхность OF следует, что давления в точках m и d равны (см. рис. 6.16). Как было показано (см. формулы (5), (6)), изменением тепловой энергии в УВ OD можно пренебречь, поэтому $\mathcal{E}_{te}$ равно площади ac/s и с учетом $\rho_c \approx \rho_s$ получим

$$T_e \approx \frac{1}{2} \frac{p_c}{c_p \rho_s} \frac{(1 - m_2^0)}{m_2^0}. \quad (8)$$

Давление в УВ OA найдем из условий на косом скачке [22]

$$p_c \approx \frac{2}{\kappa + 1} \rho_0 D^2 \sin^2 \varphi, \quad (9)$$

где $\kappa = 3$, D — скорость детонационной волны, φ — угол наклона УВ OA (см. рис. 6.15), $\rho_0 = \rho_s m_2^0$. Давление в УВ OB оценим по формуле [22]

$$p_b \approx \rho_0 D^2 \times \operatorname{tg} \gamma \alpha, \quad (10)$$

определяющей давление в УВ, возникающей при сверхзвуковом ($M \gg 1$) обтекании тонкого тела с углом $\alpha \ll 1$ (см. рис. 6.15), где $\sin \gamma = 1/M$, M — число Маха. Из экспериментов [20] следует $\alpha \ll \varphi$, а анализ ударной поляры приводит к неравенству $\gamma < \varphi$. Подставляя эти неравенства в (9), (10), с учетом (7) и (8) получим

$$\mathcal{E}_{ti}/\mathcal{E}_{te} = T_i/T_e \sim \alpha/\sin \varphi \ll 1. \quad (11)$$

Отметим, что сжатие в УВ EC и разгрузка в волнах разрежения происходит по адиабатам сплошного материала и в силу (6) не вызывают существенного изменения температуры и неравенства (11). Таким образом, причина возникновения ХС состоит в том, что во внутреннем слое необратимые потери энергии $\mathcal{E}_{ti}$, связанные с пластическим затеканием пор (формоизменением частиц), малы и поэтому частицы не «свариваются». Во внешнем слое, наоборот, при пластическом затекании пор выделяется значительная тепловая энергия $\mathcal{E}_{te}$, что приводит к «свариванию» частиц друг с другом.

§ 4. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ УДАРНЫХ ВОЛН В ПОРИСТОМ ТЕЛЕ

В данном параграфе исследуется распространение ударных волн в одно- и двумерных случаях на основе модели пористого тела, изложенной в § 1 данной главы. С помощью простых примеров выясняются особенности ударно-волновых процессов, которые, несмотря на большое число работ [1—4], мало обсуждались в литературе.

4.1. Задача о поршне [23]

Рассмотрим задачу о поршне, который вдвигается в пористое тело с постоянной скоростью. Уравнения неразрывности, движения и энергии следуют из (1.1) и имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial x}{\partial t} = v, \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_1}{\partial x} &= 0, \quad \rho \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} - \sigma_1 \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где обозначения те же, что в § 1.

Компоненты девиатора напряжений определим методом Уилкинса [24]

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -p + S_1, \quad p = m_2 p_s, \quad m_1 + m_2 = 1, \\ S_1 &= \begin{cases} S'_1, & T < \frac{2}{3} Y^2, \quad Y = m_2 Y_s, \\ S'_1 \sqrt{\frac{2}{3} Y^2 / T}, & T > \frac{2}{3} Y^2, \end{cases} \\ T &= \sum_{i=1}^3 (S'_i)^2, \quad S'_i = 2\mu e_i, \quad \sum_{i=1}^3 S'_i = 0, \\ e_i &= \varepsilon_i - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk}, \quad \dot{\varepsilon}_i = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \dot{\varepsilon}_2 = \dot{\varepsilon}_3 = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где S_i , ε_i — главные значения тензора девиатора напряжений и деформаций.

Уравнение состояния при сжатии пористого материала в ударной волне определяется формулами [23]. При малом давлении не происходит затекания пор (участок 1 на рис. 6.17) и уравнение состояния совпадает с $p(\rho, \mathcal{E})$ для сплошного материала:

$$\begin{aligned} p &= c_0^2 (\rho - \rho_0) + \Gamma \rho \mathcal{E}_T, \quad m_2 = m_2^0, \quad \dot{m}_2 = 0, \\ \rho &= m_2^0 \rho_s, \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}_x + \mathcal{E}_T, \quad \mathcal{E}_x = c_0^2 (\rho_s - \rho_{s0})^2 / (2\rho_{s0}), \end{aligned} \quad (3)$$

где $|p| < p_0$, $p_0 = \frac{2}{3} Y \ln 1/m_1^0$, $\mathcal{E}$ определяется из уравнения энергии системы (1). После того как давление превысит p_0 , начинается затекание пор (участок 2 на рис. 6.17). Будем предполагать, что до достижения плотной упаковки $m_2 = 1$ изменение плотности происходит только за счет изменения пористости. Зависимость $p = p(\rho)$ на участке 2 будем интерполировать прямой, которая сопрягается с ударной адиабатой пористого тела при $m_2 = 1$:

$$\begin{aligned} p &= p_0 (1 + \bar{\alpha} (\rho - \rho_0)), \quad \dot{\rho}_s = 0, \quad m_2^0 < m_2 < 1, \\ p_0 (1 + \bar{\alpha} (\rho - \rho_s)) &= \bar{p}(\rho_*, m_2^0, \rho_0), \\ \rho_* &= \rho_{s0} (1 + p_0 / (\rho_{s0} c_0^2)), \end{aligned} \quad (4)$$

где $p = \bar{p}(\rho, m_2^0, \rho_0)$ — уравнение ударной адиабаты (3.3).

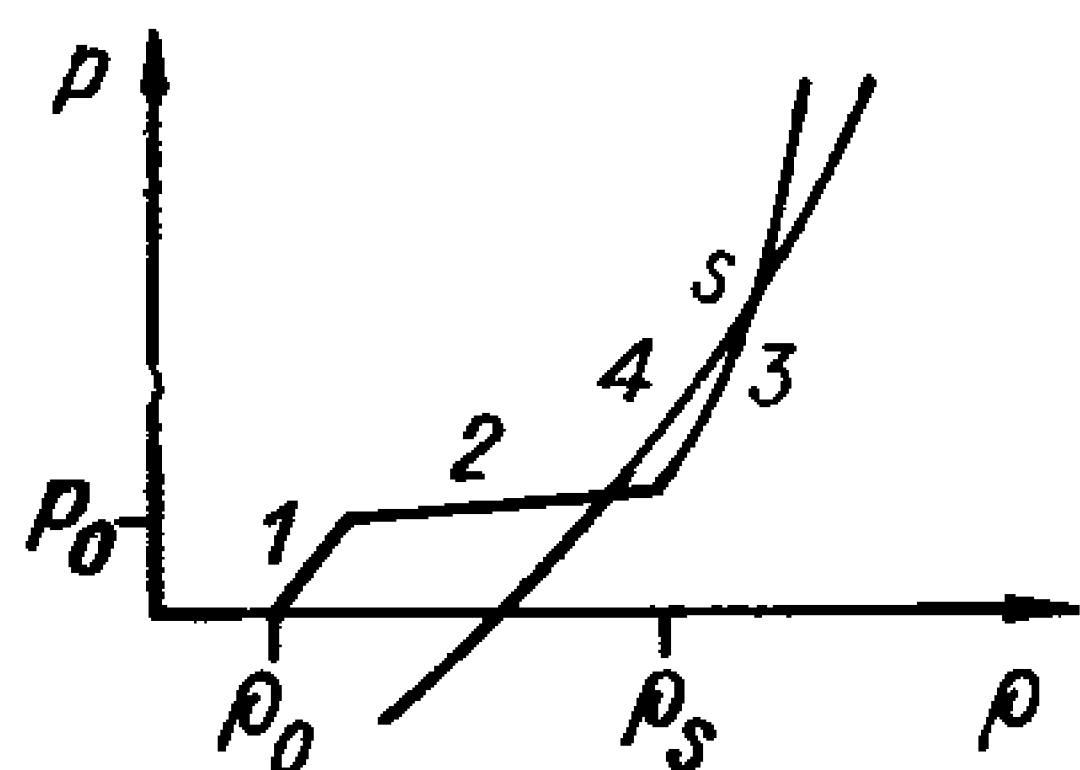


Рис. 6.17.

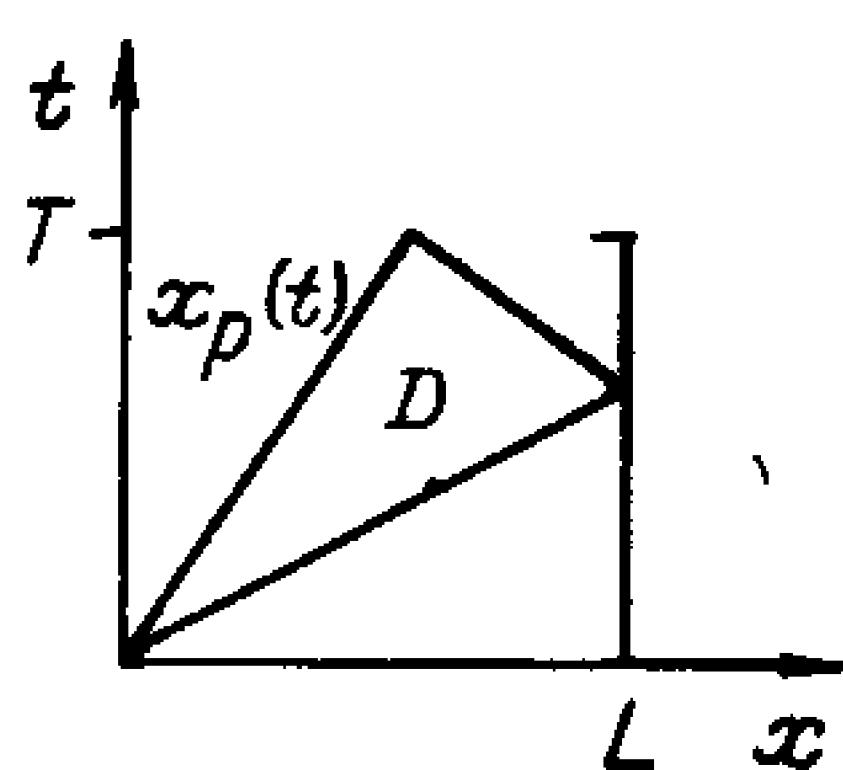


Рис. 6.18.

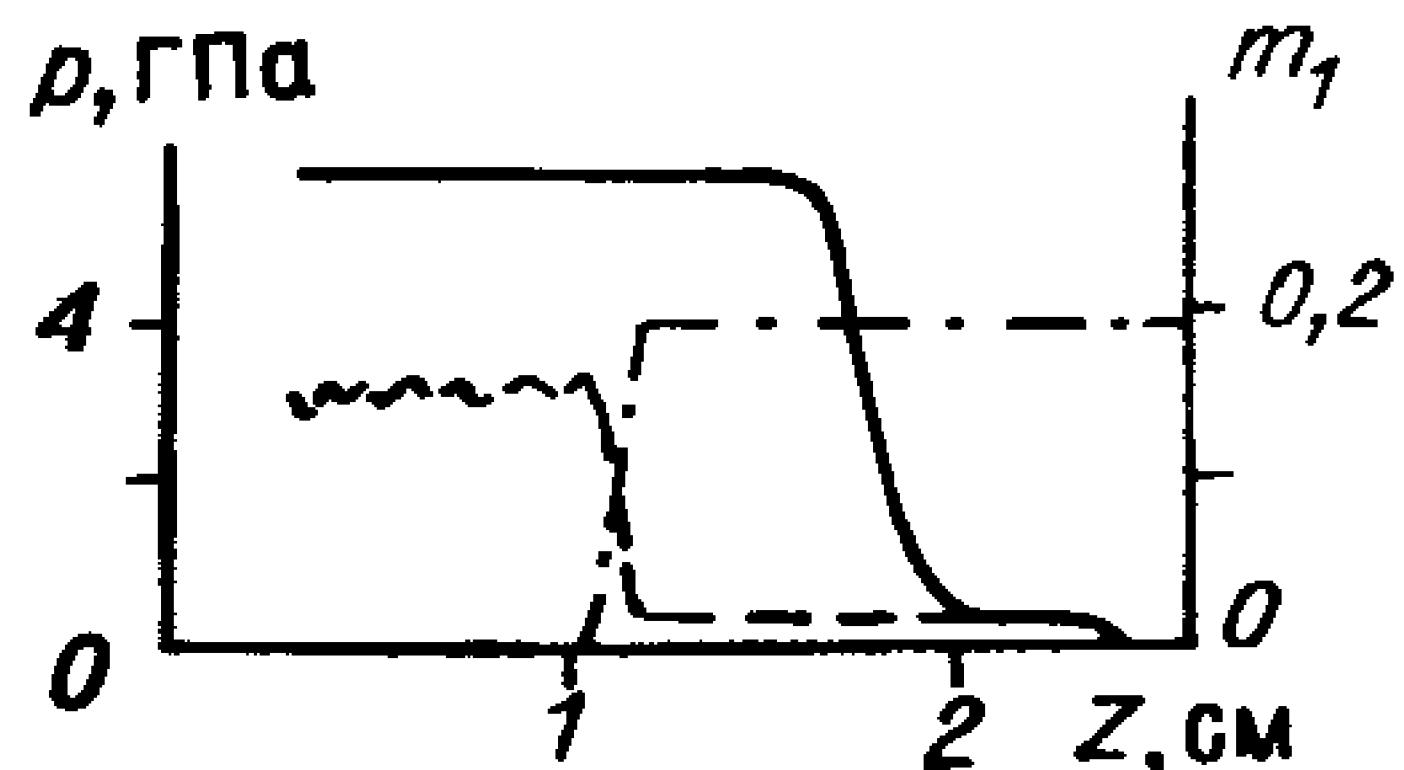


Рис. 6.19.

После того как достигнута плотная упаковка, давление определяется по ударной адиабате пористого тела (3.3) (кривая 3 на рис. 6.17):

$$p = \bar{p}(\rho, m_2, \rho_0), \quad m_2 = 1, \\ \bar{p} = (\rho_{s0} c_0^2 (V_1 (h + 1) - V_1^2 h / m_2^0 - m_2^0) + \\ + (1 - h) (V_1 - m_2^0) p_0 / m_2^0 + p_0 (h - V_1)) / (h V_1 - 1), \quad (5) \\ V_1 = \rho_0 / \rho, \quad h = 1 + 2/\Gamma.$$

Разгрузка и догрузка из состояния s (кривая 4 на рис. 6.17) описываются уравнением состояния сплошного материала

$$p/m_2 = c_0^2 (\rho_s - \rho_{s0}) + \Gamma \rho_s \mathcal{E}_T, \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}_T + \mathcal{E}_x, \quad \rho = \rho_s \cdot m_2, \\ \dot{m}_1 = \begin{cases} 0, & p \geq -p_0 \\ -\frac{3}{2} m_1 \dot{p} / Y_s, & p < -p_0, \end{cases} \quad (6)$$

где $p_0 = \frac{2}{3} Y \ln 1/m_1$, $\mathcal{E}$ определяется из уравнения энергии системы (1).

Математически задача формулируется следующим образом. В области $D(x_p(t) < x < L, 0 \leq t \leq T)$ (рис. 6.18) требуется найти функции $v, p, \rho, \sigma, \mathcal{E}, \varepsilon_1, S$, удовлетворяющие системе уравнений (1)–(6) при следующих начальных и граничных условиях:

$$\rho_{s0} = 1 \text{ г/см}^3, \quad \rho = \rho_0, \quad p, \quad v, \quad S_i = 0 \text{ при } t = 0;$$

$$v = 0.1 \text{ см/мкс при } x = vt \text{ и } v = 0 \text{ при } x = L = 1.7 \text{ см.}$$

Задача решается численно по схеме «крест» [24]. Характеристики материала: $c_0 = 0.5$ см/мкс, $\Gamma = 1.18$, $\mu = 0.25$ мбар, $Y_s = 3 \cdot 10^{-3}$ мбар. Для сравнения было рассчитано два варианта: в первом материал являлся сплошным $\rho_0 = 1$ г/см³, во втором — пористым с $m_2^0 = 0.8$, $\rho = 0.8$ г/см³. Зависимость $p(\rho, \mathcal{E})$ для сплошного материала описывается уравнением (3) при $m_2 = 1$.

На рис. 6.19 приведены распределение давления $p(x)$ для сплошного материала (сплошная кривая), пористого материала (штриховая) и зависимость $m_1(x)$ (штрихпунктирная кривая). Из рисунка видно, что скорость распространения ударной волны

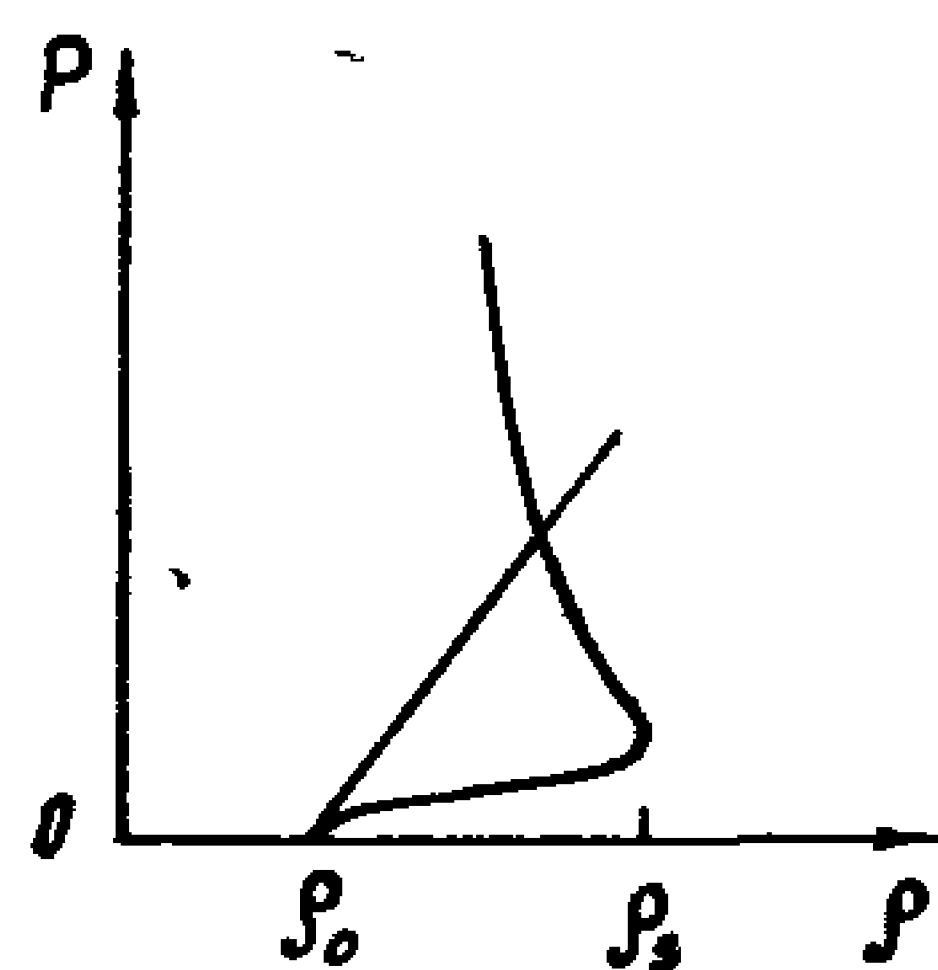
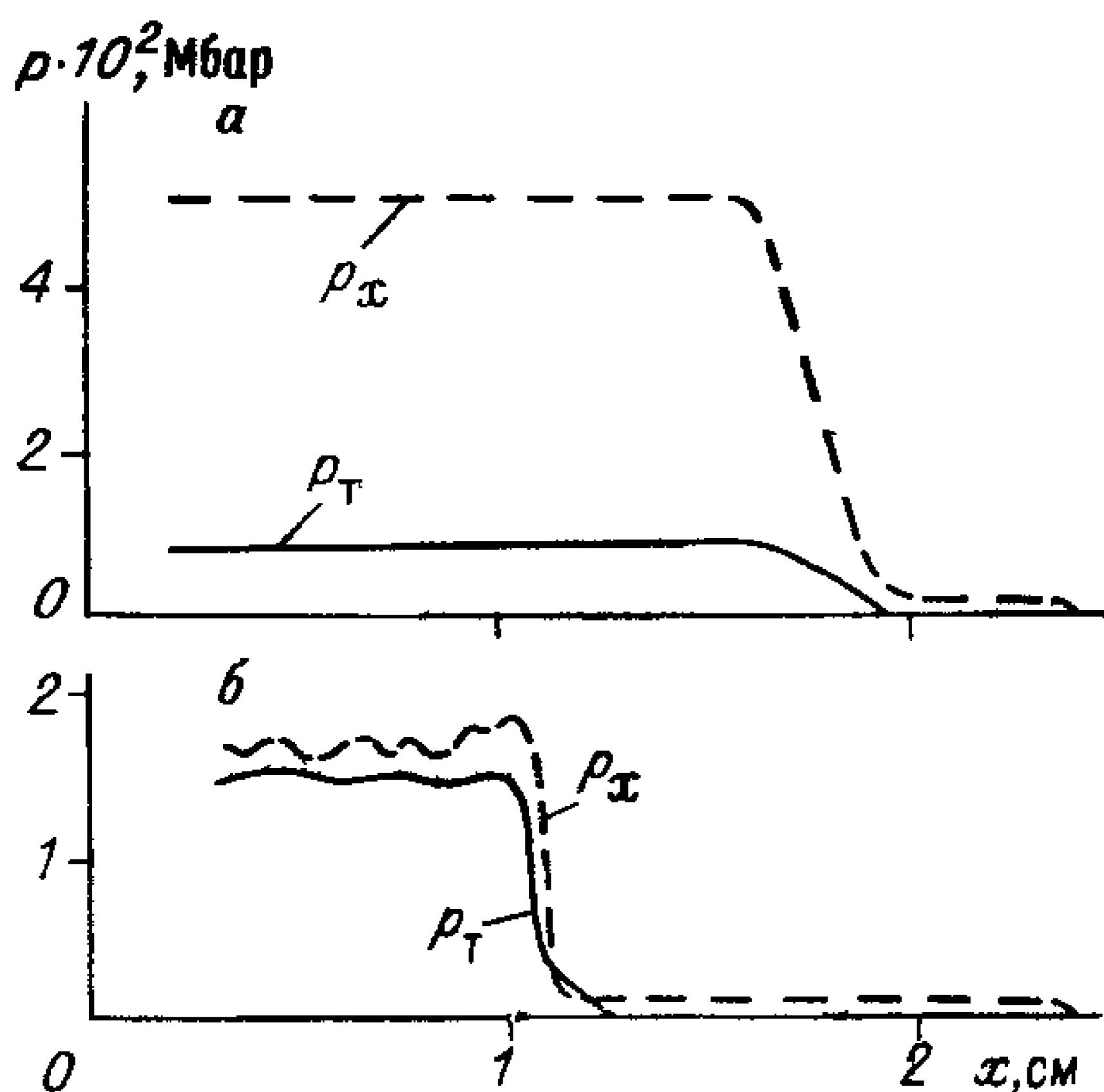


Рис. 6.21.

Рис. 6.20.

и давление в ударной волне меньше для пористого тела, чем для сплошного. Именно этим объясняется эффект демпфирования удара пористым материалом. Поскольку в модели пренебрегается упругой разгрузкой на порах, упругие предвестники в пористом и сплошном материалах совпадают. Зависимости холодного $p_x(x)$ и теплового давления $p_T(x)$ для сплошного материала показаны на рис. 6.20, а, а для пористого — на рис. 6.20, б. Отношение теплового давления к холодному за фронтом ударной волны в пористом теле равно $p_T/p_x \simeq 0.85$, а в сплошном — $p_T/p_x \simeq 0.15$. Отсюда следует, что в пористом теле тепловое давление одного порядка с холодным. Диссипация энергии при вязкопластическом затекании поры приводит к существенному повышению теплового давления в пористом теле.

Характерной особенностью зависимости $p(x)$ в пористом материале является наличие осцилляций, показанных на рис. 6.19, представляющих собой численный эффект. Длина волны осцилляций пропорциональна шагу сетки h , а амплитуда — скачку производной $\left[\frac{\partial p}{\partial \rho} \right]$ в точке ρ_s (см. рис. 6.17). Появление их свя-

зано с большой величиной третьей производной $\sim h^2 \frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} \rho, \frac{\partial^3 p}{\partial x^3}$ в первом дифференциальном приближении разностной схемы. Следует отметить, что сквозной метод расчета применим при малой начальной пористости $m_1^0 \leq 0.5$. Если начальная пористость велика $m_1^0 \geq 0.5$, на ударной адиабате появляется участок, где $\frac{\partial p}{\partial \rho} < 0$ (рис. 6.21). В этом случае в расчетах необходимо выделять фронт ударной волны, состояние за которым находится из пересечения ударной адиабаты и прямой Михельсона рис. 6.21.

4.2. Задача об ударной волне в порошке Al_2O_3 и порошке фторопласта [25]

Порошки в отличие от спеченных пористых материалов характеризуются малой начальной пористостью $m_1^0 \gtrsim 0.5$. Поэтому кажется, что они должны описываться аномальной ударной адиабатой (см. рис. 6.21), однако это не совсем так. Дело в том, что частицы порошка не связаны между собой, поэтому уплотнение порошка до состояния плотной упаковки $m_2^* = 0.7$ происходит без значительных напряжений и нагрева материала. После достижения плотной упаковки начинается процесс затекания пор, который сопровождается повышением давления и температуры. Отсюда следует, что сжатие порошка будет описываться формулами (1) — (6), однако при этом в уравнениях (3) — (5) нужно положить $m_2^0 = m^*$, где m_2^* — объемная концентрация при плотной упаковке. Для порошка Al_2O_3 уравнение холодного давления аппроксимируется зависимостью [17]

$$p_x = A_1 \left(\left(\frac{\rho_s}{\rho_{s0}} \right)^n - 1 \right), \quad (7)$$

где $n = 4.65$, $A_1 = 55.8$ ГПа, $\rho_{s0} = 3.99$ г/см³, а величину $\bar{p}$ нужно определять по более общей формуле [17]

$$\begin{aligned} \bar{p}(\rho, m_2^*, \rho_*) &= ((h - 1) p_x(\rho) V_1 - 2\mathcal{E}_x(\rho) \cdot \rho_*) / (hV_1 - 1), \\ \rho_* &= m_2^* \rho_{s0}, \quad m_2 = 1, \\ \mathcal{E}_x &= - \int p_x(V) dV, \quad V = 1/\rho, \quad V_1 = V\rho_*. \end{aligned} \quad (8)$$

На рис. 6.22 приведены экспериментальные (сплошные линии) и расчетные (кружки) зависимости массовой скорости от времени на различных глубинах. Численные расчеты проводились при $\mu = 1$ ГПа, $Y_s = 0.42$ ГПа, $\rho_0 = 1.24$ г/см³. На глубинах $L = 5$ мм (см. рис. 6.22, а) и $L = 10$ мм (б) передний фронт волны имеет одноволновую конфигурацию. За фронтом волны зависимость $p(x)$ имеет осциллирующий вид. На глубине 25 мм (см. рис. 6.22, в) передний фронт имеет четко выраженную двухволновую конфигурацию. Это связано с различием скоростей распространения упругого предвестника и пластической волны. Сравнение кривых дает хорошее качественное совпадение численных результатов с экспериментом. Незначительное количественное отличие обусловлено, по-видимому, влиянием боковых волн разгрузки. С этим связано и более быстрое затухание в экспериментах массовой скорости (см. рис. 6.22, в). На рис. 6.23 наблюдается вполне удовлетворительное совпадение расчетных и экспериментальных зависимостей $p(x)$ (а) и $m_1\sigma_1(x)$ (б).

Для порошка фторопласта выбирались уравнения состояния (3) — (5) с константами $c_0 = 1.8$ км/с, $\rho_{s0} = 2.19$ г/см³, $\rho_0 =$

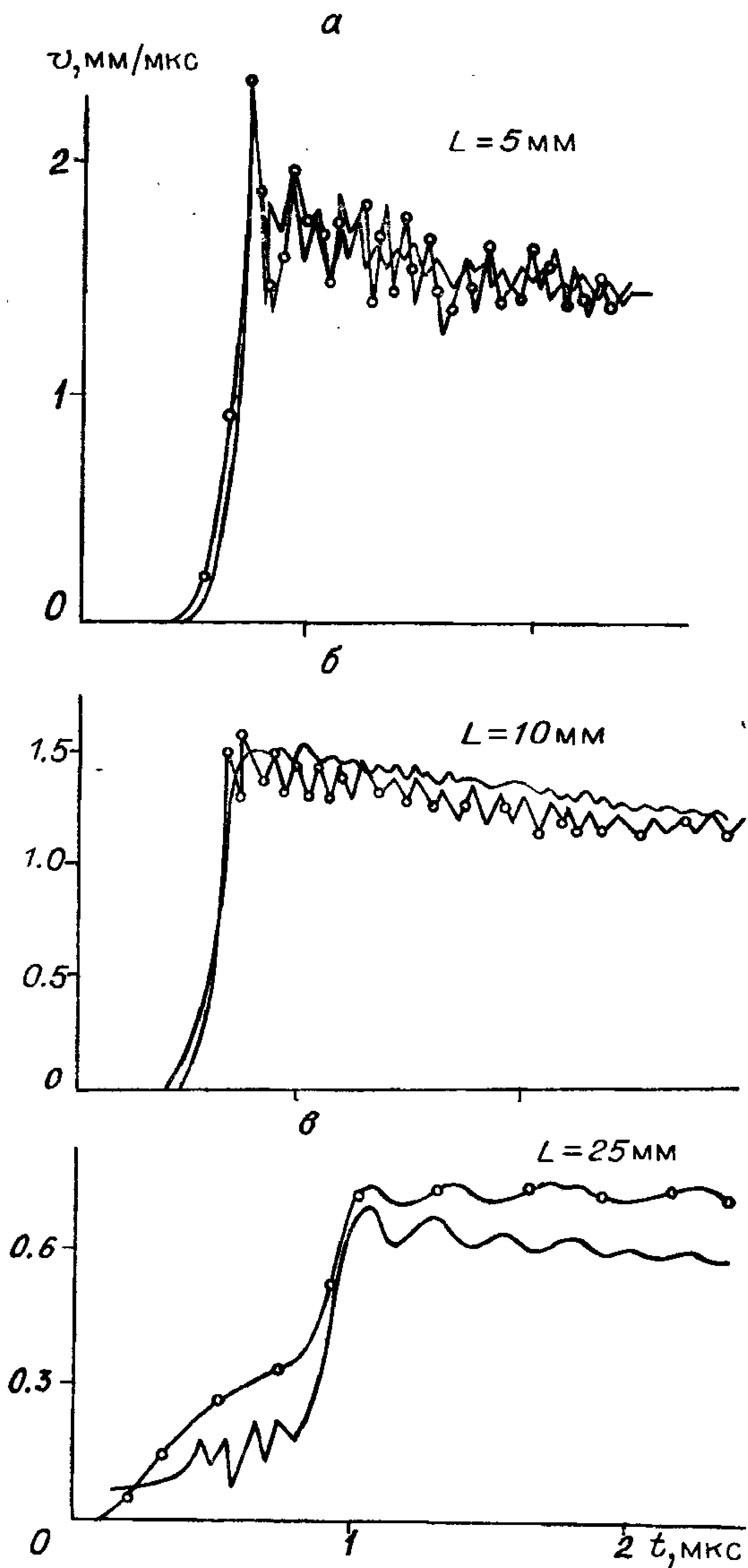


Рис. 6.22.

$= 1.17 \text{ г/см}^3$. На рис. 6.24 приведены зависимости массовой скорости от времени в порошке фторопласта. Кривая 1 соответствует численному решению, а кривая 2 — эксперименту [26]. Близость кривых показывает применимость модели (1) — (5) для описания распространения ударных волн интенсивностью 3—5 ГПа в сильносжимаемых порошках типа фторопласта.

4.3. Задача об ударной волне в слоистой системе из фторопласта [27]

В ряде работ [28, 29] было высказано предположение, что поведение пористого материала в ударной волне можно моделировать слоями материала, разделенными зазорами (рис. 6.25). В результате численных расчетов было показано, что конечное состояние лежит на ударной адиабате (5), которая получена в однородной модели. В связи с этим возникает вопрос о том, какая из двух моделей (однородная (1) — (5) или слоистая) более адекватно описывает сжатие пористого материала.

Рассмотрим поведение слоистой системы из фторопласта, показанной на рис. 6.25. Система нагружается ударной волной, образованной при взрыве ТГ 50/50, которая распространяется слева направо. Параметры фторопласта те же, что и в предыдущей задаче. Толщина пластин $\delta_1 = 1.5$ мм, толщина зазоров $\delta_2 = 1.4$ мм. При столкновении пластин граничное условие на свободной поверхности изменялось на граничное условие на контактной поверхности. Разрушением пластин пренебрегалось. Расчет проводился сквозным методом Уилкинса, искусственная вязкость выбиралась из условия размазки ударной волны на 3—4 ячейки.

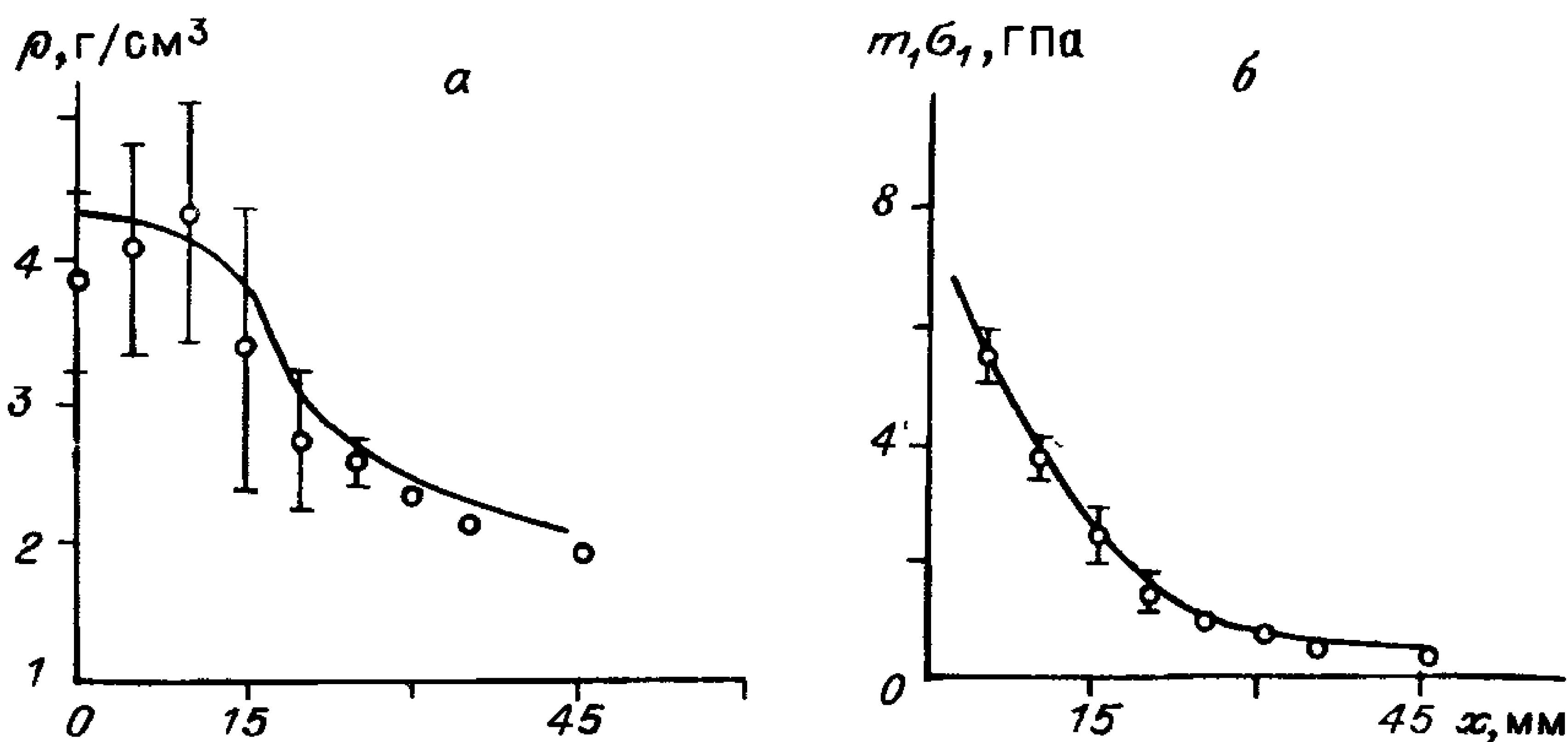


Рис 6.23.

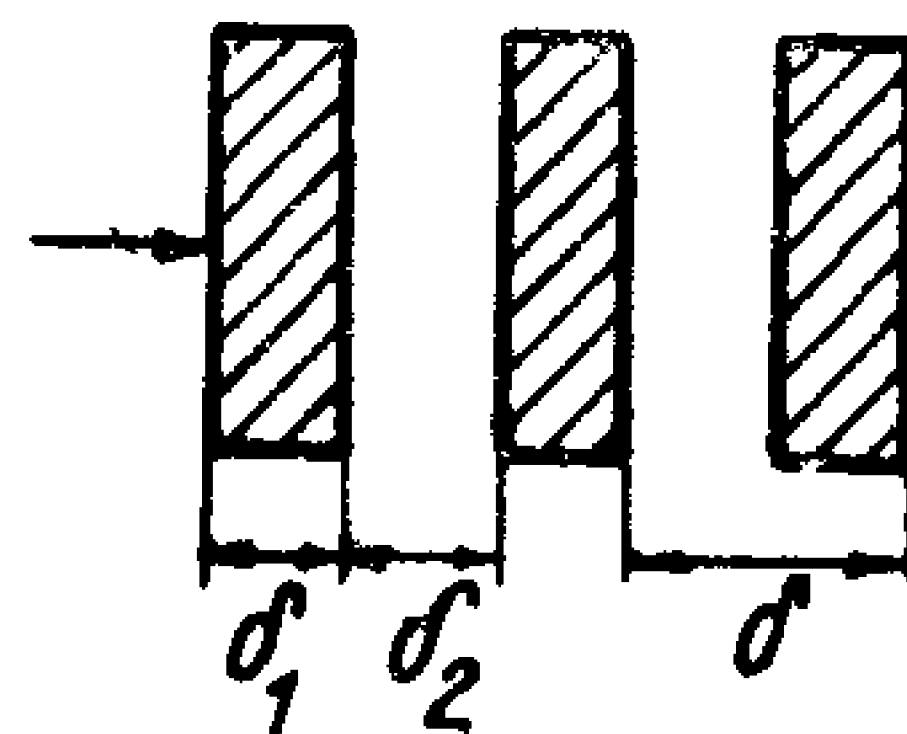
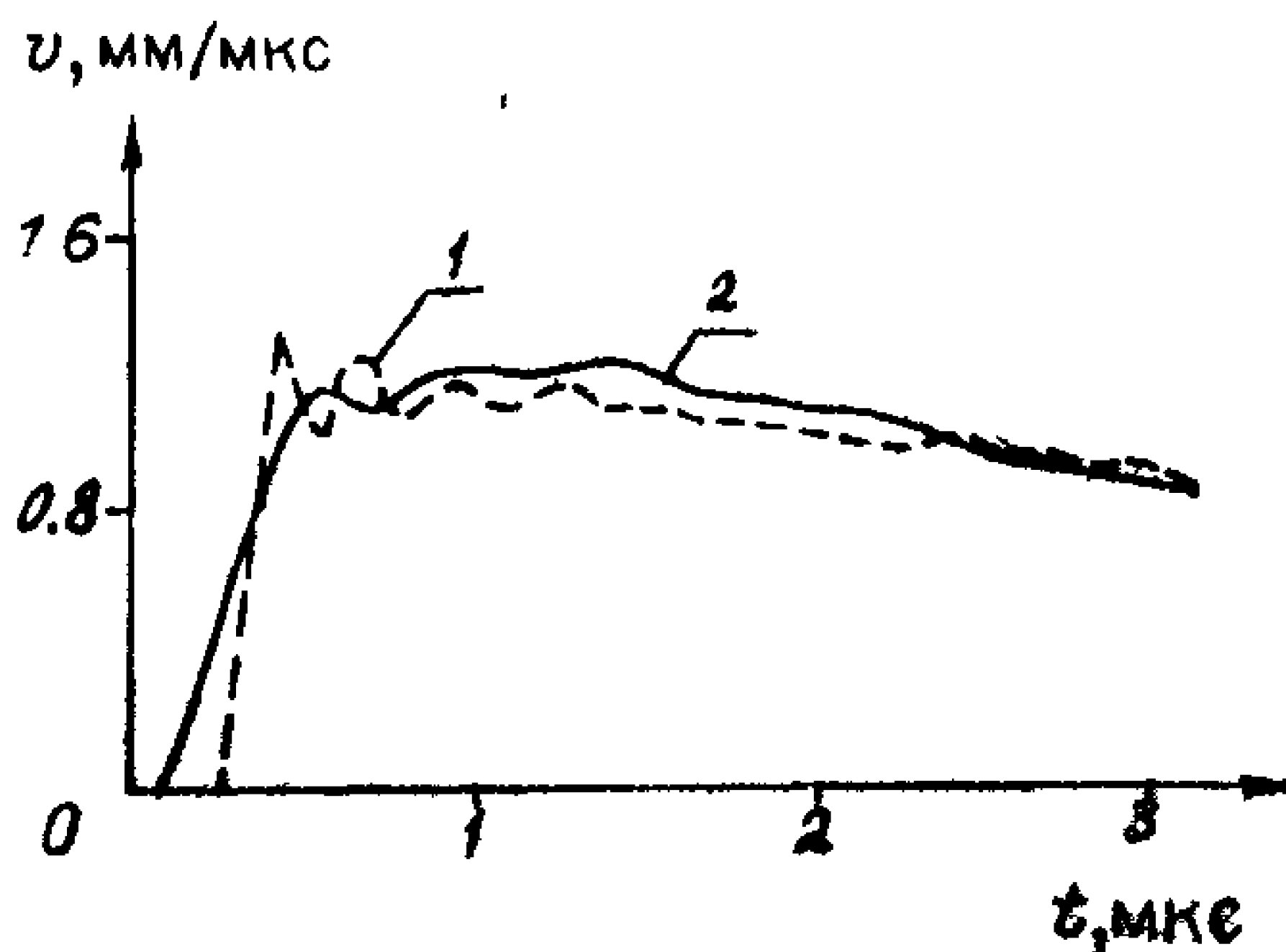


Рис. 6.25.

Рис. 6.24.

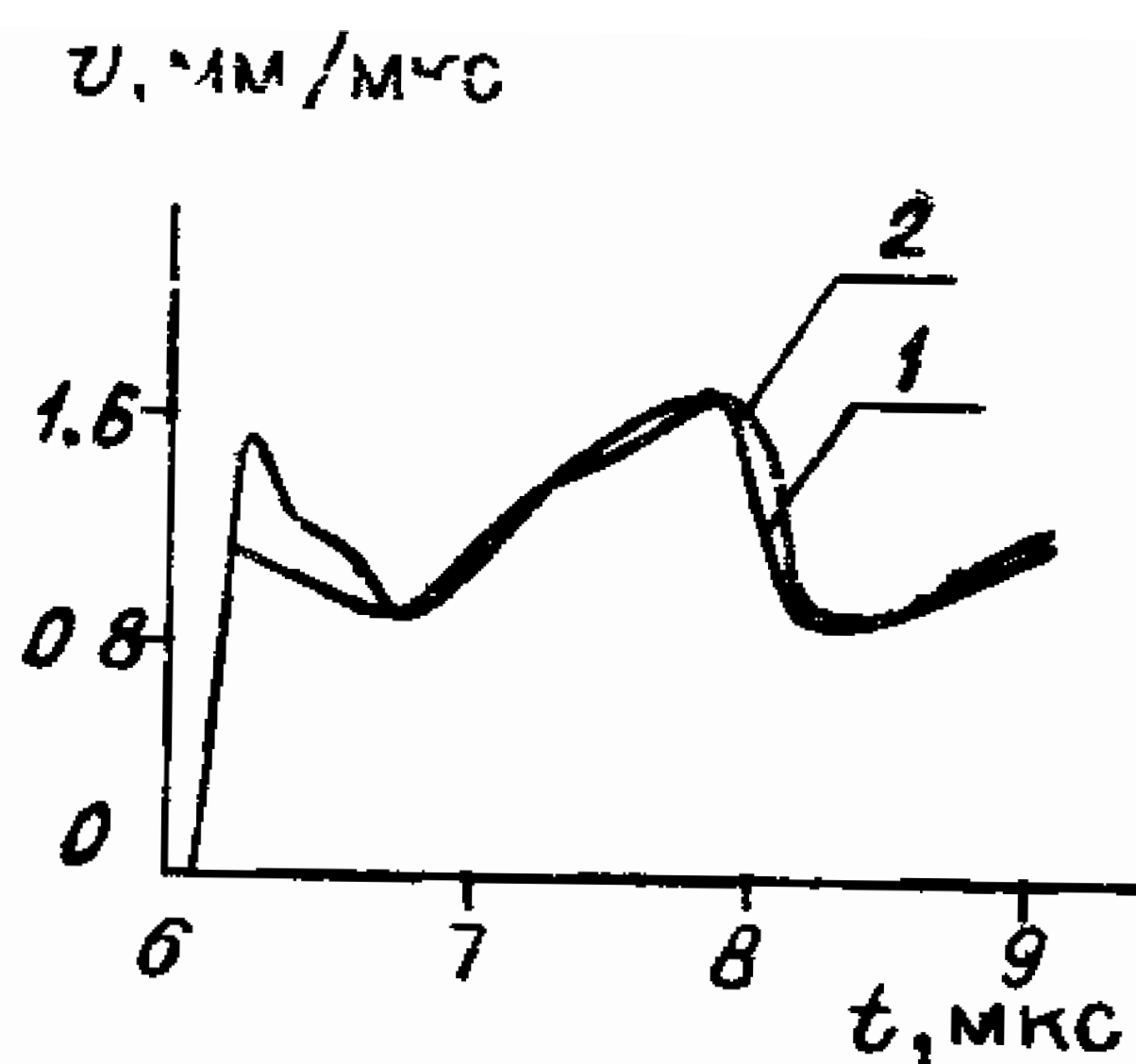


Рис. 6.26.

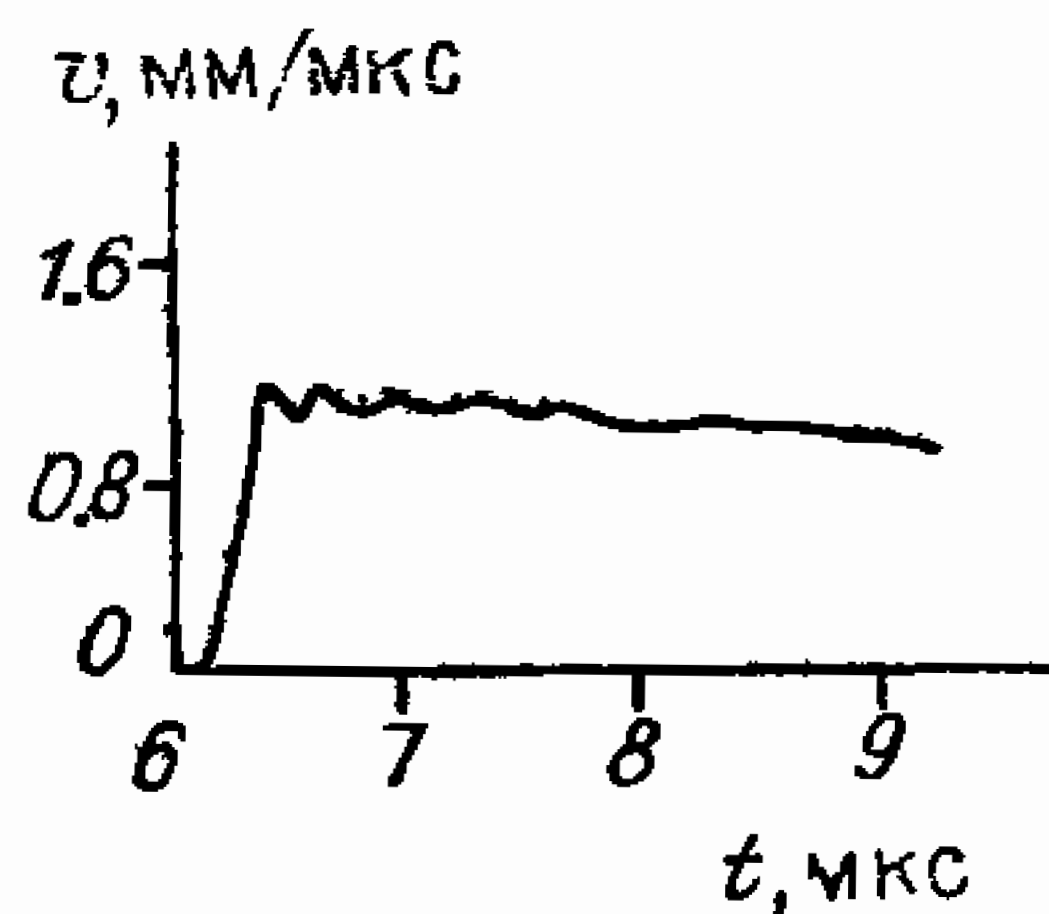


Рис. 6.27.

На рис. 6.26 приведена зависимость массовой скорости для слоистого материала от времени на расстоянии $L = 18.8$ мм от заряда ВВ. Кривая 1 соответствует эксперименту, 2 — расчету [27]. Видно, что имеется хорошее согласие эксперимента с расчетом. В отличие от гомогенной модели (рис. 6.27) для слоистой среды характерны большие пульсации скорости. На рис. 6.28 построены зависимости давления от времени на расстоянии $L = 10.2$ мм от ВВ для гомогенной модели (кривая 3) и слоистой (кривая 1 — $\delta = 2.4$ мм, 2 — 1.45 мм). Из рис. 6.28 видно,

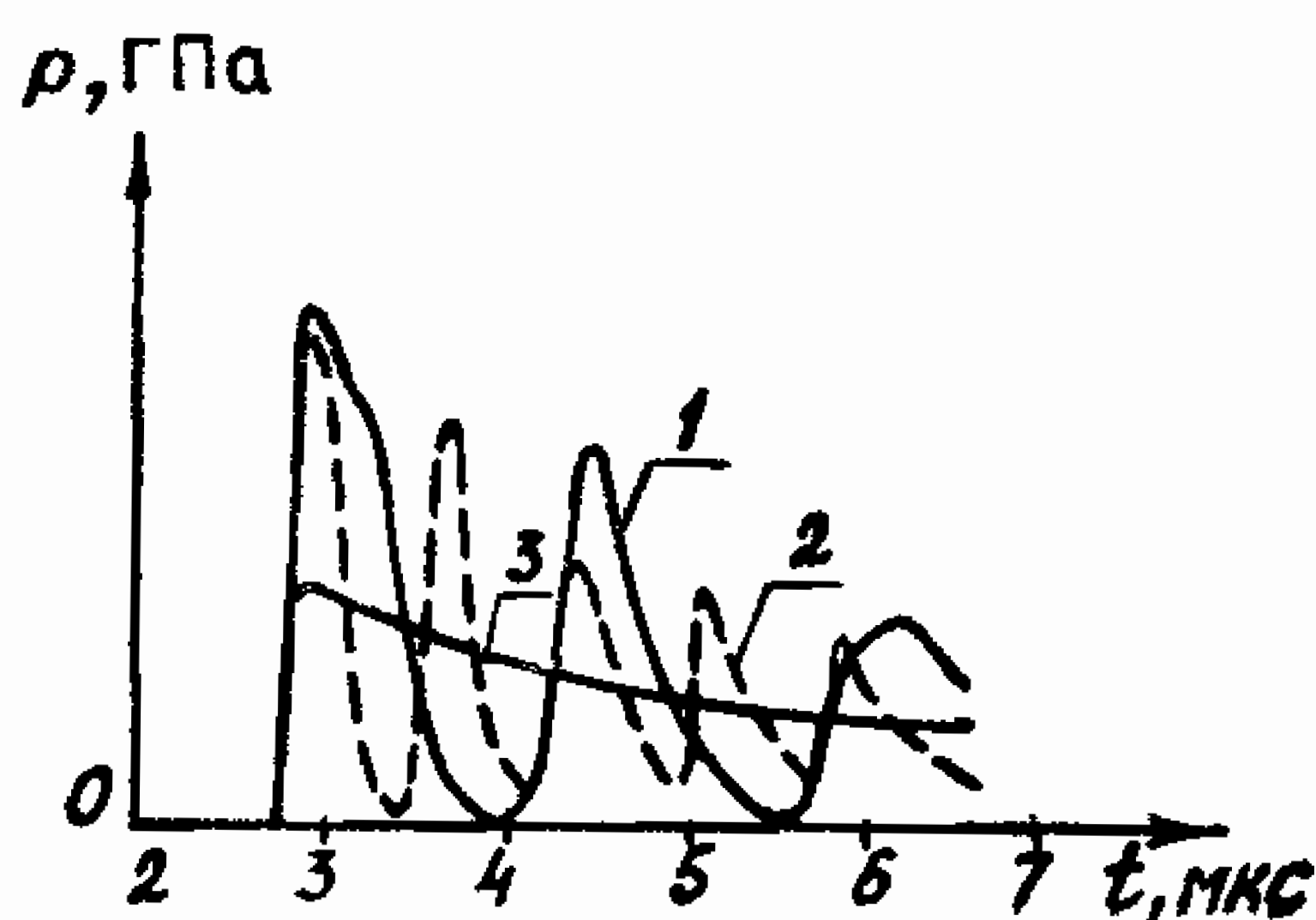


Рис. 6.28.

что давление в слоистом материале испытывает большие, медленно затухающие пульсации. При одномерном столкновении пластин, несмотря на большие напряжения, работа на пластических деформациях мала. Поэтому в системе возникают долго не затухающие колебания за фронтом волны. В гомогенной модели, напротив, предполагается, что диссипация энергии происходит

при затекании пор во фронте ударной волны, поэтому сразу устанавливается равновесное значение давления (2) — (5). Сравнение с экспериментом, проведенное в этом и предыдущем пунктах, показывает, что гомогенная модель достаточно хорошо описывает распространение ударной волны в пористом материале. Что касается слоистой модели пористого тела, то она в некоторых случаях неверно передает выход параметров ударной волны на стационарное значение. Совпадение стационарных решений, отмеченное в [29], есть просто следствие законов сохранения массы, энергии, импульса.

4.4. Задача об отскоке пористого цилиндра от недеформируемой преграды [23]

Рассмотрим цилиндрический ударник, который налетает со скоростью V_0 на недеформируемую преграду (рис. 6.29). Решение в этом случае не будет зависеть от ϕ , поэтому с учетом цилин-

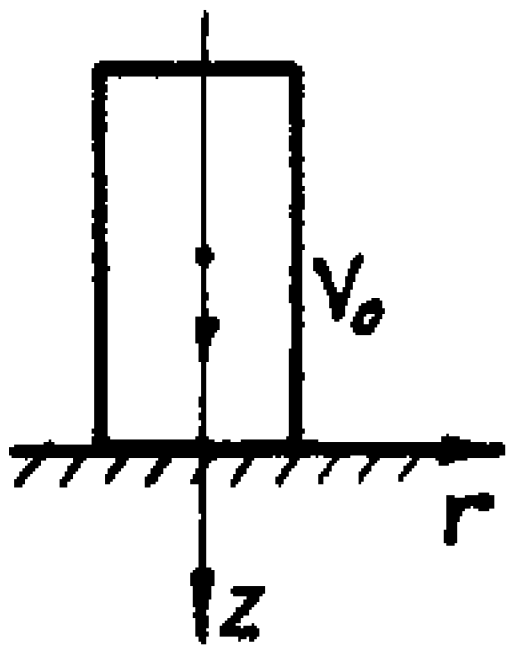


Рис. 6.29.

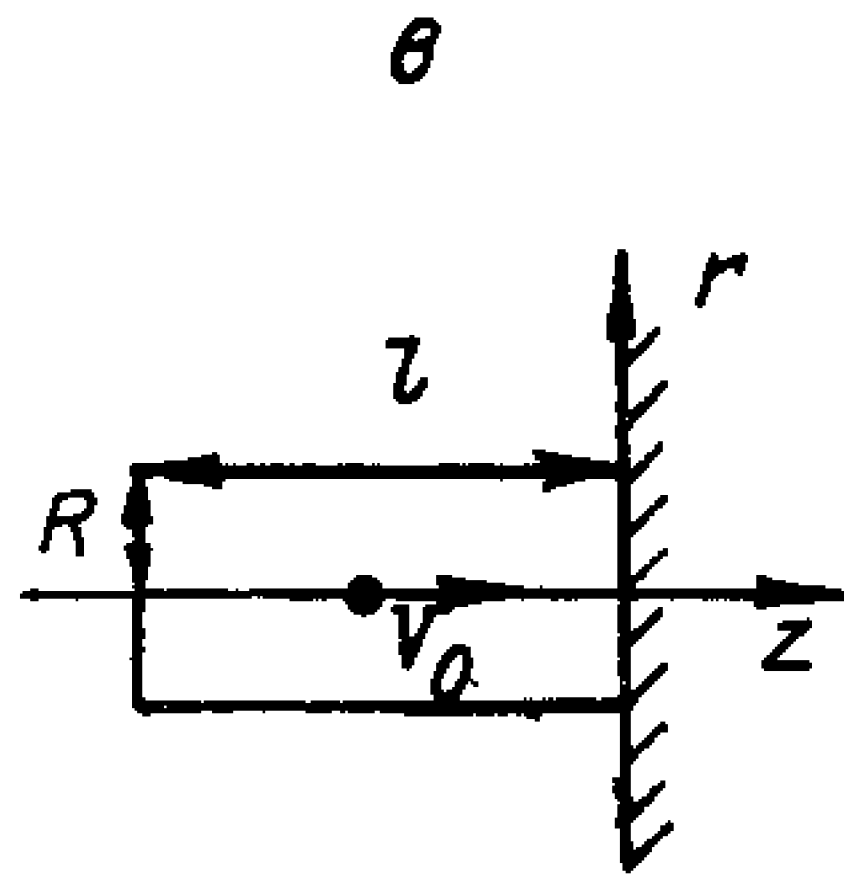
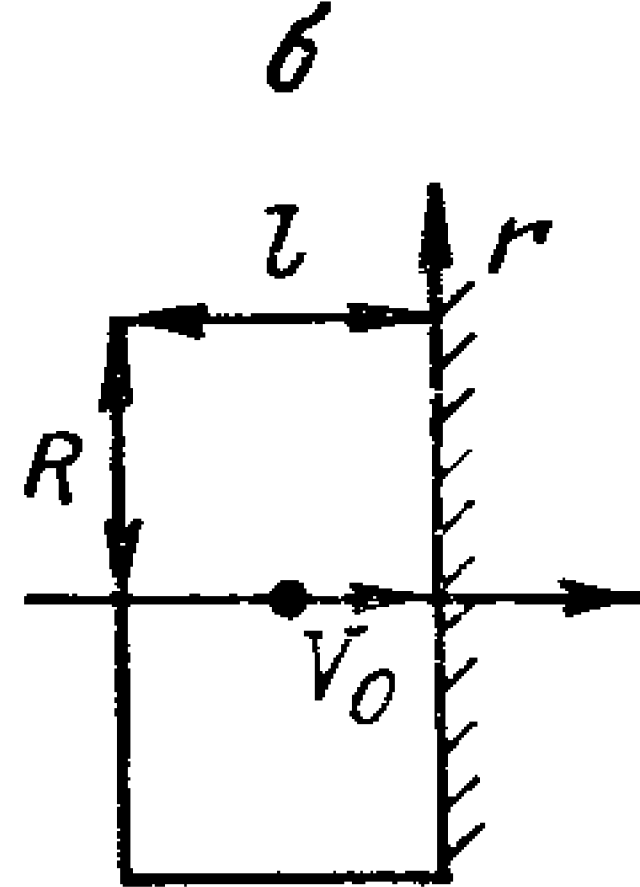
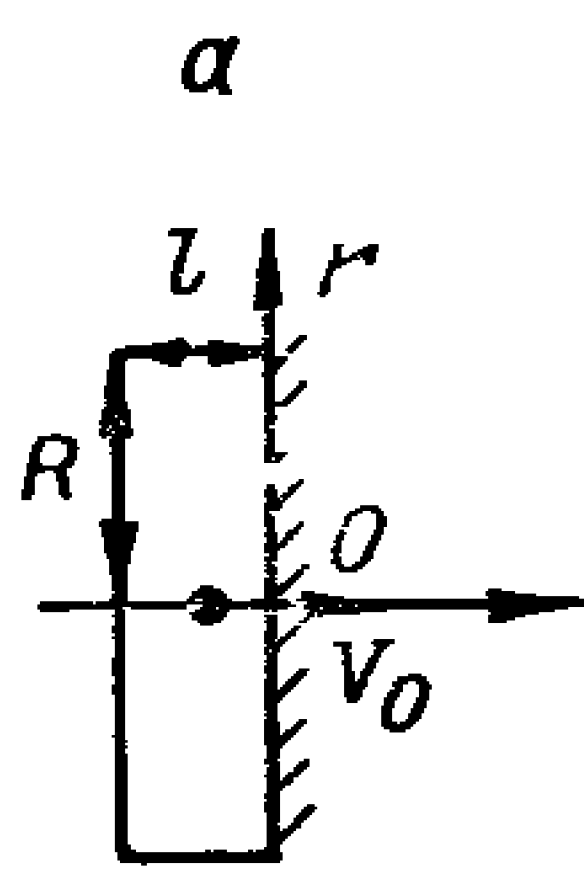


Рис. 6.30.

прической симметрии уравнения (1.1) запишутся в виде [23]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} \right), \\ \rho \frac{\partial v_r}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial S_r}{\partial r} + \frac{\partial S_{rz}}{\partial z} + \frac{S_r - S_\Phi}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial t} = v_r, \\ \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial S_z}{\partial z} + \frac{\partial S_{rz}}{\partial r} + \frac{S_{rz}}{r}, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = v_z, \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} &= \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \left(S_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + S_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + S_\Phi \frac{v_r}{r} + S_{rz} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right), \end{aligned} \quad (9)$$

где v_r , v_z — компоненты скорости вдоль r и z . Тензор напряжений представляется в виде суммы шаровой p и девиаторной S_{ij} составляющей

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + S_{ij}. \quad (10)$$

Компоненты девиатора S_{ij} определяются уравнениями Прандтля — Рейсса. В численных расчетах, проводимых ниже, используется процедура Уилкинса [24], которая аппроксимирует уравнения Прандтля — Рейсса с точностью $O(\Delta t)$, где Δt — шаг интегрирования по времени [24]. Сначала с помощью закона Гука на $n+1$ временном слое вычисляются S_{ij}

$$\nabla S_{ij} = 2\mu \dot{e}_{ij}, \quad \dot{e}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij} + \frac{\dot{\rho}}{3\rho}, \quad \mu = \mu_s m_2. \quad (11)$$

Если S_{ij} выходят за поверхность текучести

$$S_{ij} S_{ij} = \frac{3}{2} Y^2, \quad Y = Y_s m_2, \quad (12)$$

$$S_{ij} = \{S_r, S_z, S_\Phi, S_{rz}\},$$

то проводится проектирование S_{ij} на поверхность текучести.

В упругой области справедливы уравнения (11), где ϵ_{ij} равны

$$\dot{\epsilon}_r = \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad \dot{\epsilon}_z = \frac{\partial v_z}{\partial z}, \quad \dot{\epsilon}_\Phi = \frac{v_r}{r}, \quad \dot{\epsilon}_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right). \quad (13)$$

Уравнение состояния пористого ударника $p(\rho, \mathcal{E})$ определялось по формулам (3) — (6). Система уравнений (9) — (12) решалась численно по схеме Уилкинса [24]. На свободных поверхностях ставилось условие отсутствия нормальных напряжений $\sigma_n = 0$,

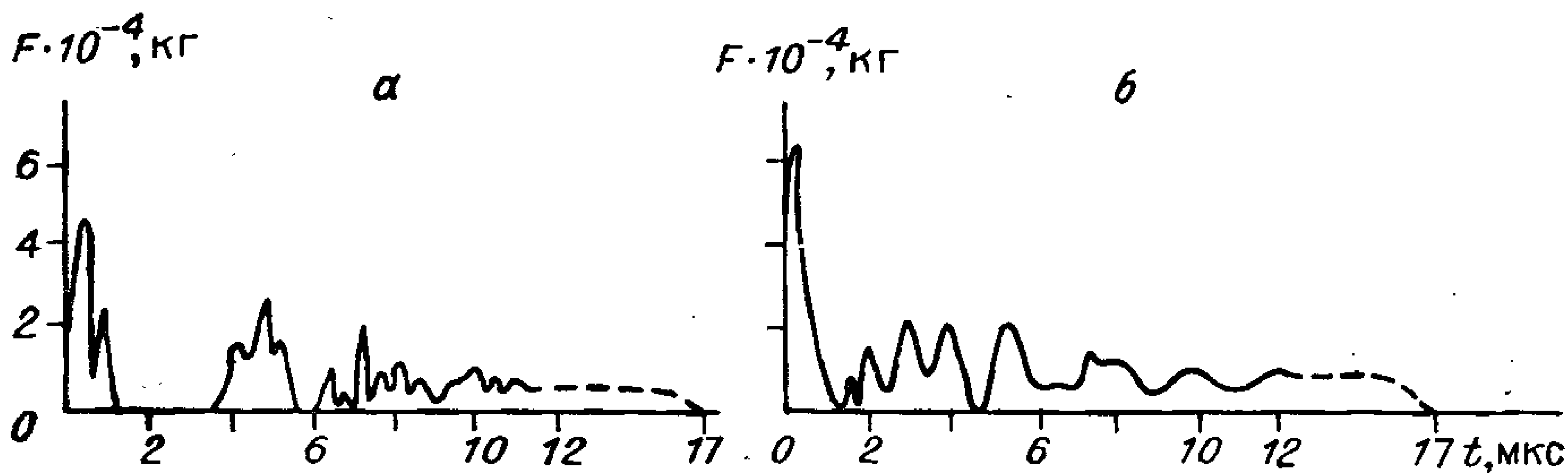


Рис. 6.31.

на границе контакта — условие непротекания $v_r = 0$. После отскока на всей поверхности ударника полагалось $\sigma_n = 0$.

В работе [23] было исследовано влияние пористости на характер соударения для трех геометрий ударника, показанных на рис. 6.30. Ударник *a* будем называть коротким, *б* — средним, *в* — длинным. В численных расчетах короткий ударник имел размеры: $R = 1$, $l = 0.2$ см; средний: $R = 0.5$, $l = 0.6$ см; длинный: $R = 0.4$, $l = 1$ см, где R — радиус цилиндра, l — длина его образующей. В качестве материала ударников выбиралась сталь с характеристиками: $\rho_{22}^0 = 7.85$ г/см³, $\mu_s = 0.8$ мбар, $Y_s = 1.2 \times 10^{-2}$ мбар, $c_0 = 0.5$ см/мкс.

На рис. 6.31 показана зависимость силы, действующей со стороны ударника на преграду, как функция времени $F(t)$, где $F(t) = \int_{s(t)} \sigma_z ds$. Случай *a* соответствует длинному пористому ударнику с пористостью $m_2^0 = 0.9$, а случай *б* — сплошному длинному ударнику при одинаковой скорости соударения $V_0 = 400$ м/с. Как видно, наличие пористости приводит к заметному уменьшению максимальной силы, действующей до прихода разгрузки. После прихода боковых волн разгрузки эти силы выравниваются и определяются скоростным напором $F \sim \rho V_0^2 s$. Различие в максимальной силе связано с различными уравнениями состояния пористого и сплошного ударников. Кроме того, времена контакта пористого и сплошного ударников практически совпадают (см. рис. 6.31). Этот результат является несколько

Т а б л и ц а 6.2

V_0 , м/с	Время контакта (мкс) при m_2^0				
	0.8	0.9	1.0	0.9	1.0
	Короткий ударник			Длинный ударник	
300	1.40	1.40	0.92	15.30	14.50
400	1.50	1.32	0.91	17.28	17
500	1.50	1.23	0.93	—	—

неожиданным и связан с тем, что для длинных ударников расстояние отхода ударной волны от преграды много меньше длины ударника. Поскольку затекание пор происходит за фронтом ударной волны, то основная часть ударника остается пористой и деформируется упруго. Снятие напряжения происходит упругими волнами, распространяющимися между фронтом ударной волны и свободной торцевой поверхностью ударника. Согласно принятой модели (9) — (12), скорость распространения упругих волн в пористом и сплошном ударниках совпадает. Поэтому в силу того, что напряжение за фронтом ударной волны σ_z при $t > 4$ мкс в пористом и сплошном ударниках близко между собой (см. рис. 6.31), соответственно близки и времена контакта t^* . Отсюда следует, что для короткого ударника этот эффект должен исчезать. Дело в том, что в коротком ударнике боковые волны разгрузки не искажают существенно волновой картины, которая близка к одномерной. Снятие нагрузки в этом случае происходит в волне разгрузки, возникающей после выхода ударной волны на свободную торцевую поверхность. Так как скорость ударной волны в пористом теле меньше, чем в сплошном (см. рис. 6.19), время контакта должно быть большим. Результаты численных расчетов, приведенные в табл. 6.2, подтверждают это предположение. Как видно из таблицы, время контакта короткого пористого ударника в 1.5 раза больше t^* для сплошного ударника. В то же время для длинного ударника соответствующие времена контакта близки между собой.

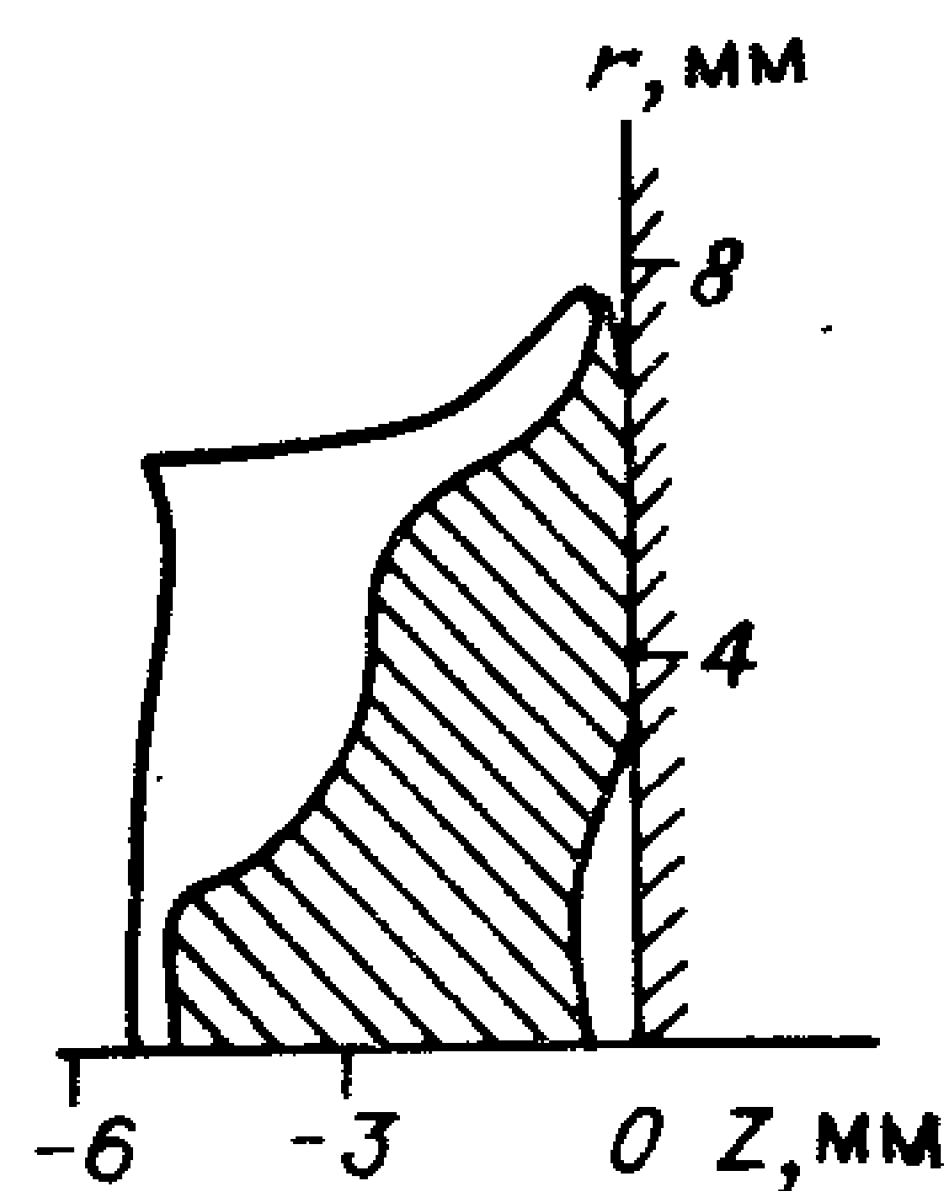


Рис. 6.32.

Как отмечалось, при соударении длинных ударников затекание пор происходит в области контакта, определяемой отошедшей ударной волной. Аналогичный эффект наблюдается в промежуточном случае для среднего ударника. На рис. 6.32 штриховыми линиями показана область затекания пор после соударения пористого среднего ударника с преградой. Вытянутость области затекания пор связана с влиянием боковых волн разгрузки и увеличением напряжений при сжатии волны к оси ударника. Отметим одну особенность деформирования тонких и средних ударников, показанную на рис. 6.32. Она состоит в том, что первоначально плоские торцевые поверхности ударника становятся после соударения соответственно выпуклыми и вогнутыми. Этот эффект также связан с влиянием боковых волн разгрузки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Глава 1

1. Рахматулин Х. А. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред // ПММ.— 1956.— Т. 20, № 2.— С. 184—195.
2. Крайко А. Н., Нигматулин Р. И., Старков В. К., Стернин Л. Е. Механика многофазных сред.— М.: Наука, 1972.— 174 с.— (Итоги науки и техники. Сер. Гидромеханика; Т. 6).
3. Сверхзвуковые двухфазные течения в условиях скоростной неравновесности частиц/Н. Н. Яненко, Р. И. Солоухин, А. Н. Папырин, В. М. Фомин.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1980.— 158 с.
4. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред.— М.: Наука, 1978.— 338 с.
5. Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред.— М.: Наука. 1987.— Ч. 1.— 464 с.
6. Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред. Ч. 2.— М.: Наука, 1987.— Ч. 2.— 359 с.
7. Крайко А. Н., Стернин Л. Е. К теории течений двухскоростной сплошной среды с твердыми или жидкими частицами // ПММ.— 1965.— Т. 29, № 3.— С. 418—429.
8. Седов Л. И. Проблемы науки.— М.: Знание, 1966.— 63 с.
9. Panten P. Flow properties for the continuum view point of a nonequilibrium gas — particle mixture // J. Fluid Mech.— 1968.— V. 31, Pt 2.— P. 273—303.
10. Клингел Дж., Никерсон Г. Течение смеси газа и твердых частиц в осесимметричном сопле // Детонация и двухфазное течение.— М.: Мир, 1966.— С. 181—201.
11. Киселев С. П., Фомин В. М. Континуально-дискретная модель для смеси газ — твердые частицы при малой объемной концентрации частиц // ПМТФ.— 1986.— № 2.— С. 93—101.
12. Киселев С. П., Фомин В. М. Исследование каустик в двухфазной среде газ — частицы // Там же.— 1987.— № 4.— С. 164—170.
13. Crowe C. T., Pratt D. T. Two Dimensional Gas — Particle Flow // Proceedings of 1972 Transfer and Fluid Mechanics Institute, Stanford University Press, 1972.
14. Кроу. Численные модели течений газа с небольшим содержанием частиц (обзор) // Теорет. основы инж. расчетов.— 1982.— Т. 104. № 3.— С. 114—122.
15. Зельдович Я. Б., Мышкис А. Д. Элементы математической физики.— М.: Наука, 1973.— 351 с.
16. Мясников В. П. О динамических уравнениях движения двухкомпонентных систем // ПМТФ.— 1967.— № 2.— С. 58—67.
17. Гольдштик М. А. Элементарная теория кипящего слоя // ПМТФ.— 1972.— № 6.— С. 106—112.
18. Гольдштик М. А., Козлов Б. Н. Элементарная теория конденсированных дисперсных систем // Там же.— 1973.— № 4.— С. 89—101.
19. Матвеев С. К. Модель газа из твердых частиц с учетом неупругих соударений // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1983.— № 6.— С. 12—16.

20. Николаевский В. Н., Басинев К. С., Горбунов А. Т., Зотов Г. А. Механика насыщенных пористых сред.— М.: Недра, 1970.— 335 с.
21. Biot M. A. Theory of propagation of elastic waves in a fluidsaturated porous solids. 1. Low frequency range // J. Acoust. Soc. Amer.— 1956.— V. 28.— P. 168—178.
22. Френкель Я. И. К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве // Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз.— 1944.— Т. 8, № 4.— С. 134.
23. Ляхов Г. М. Основы динамики взрыва в грунтах и жидких средах.— М.: Недра, 1964.— 216 с.
24. Крайко А. Н. К теории двухжидкостных течений газа и диспергированных в нем частиц // Гидродинамика и теплообмен в двухфазных средах.— Новосибирск: ИТ СО АН СССР, 1981.— С. 42—52.
25. Крайко А. Н. О корректности задачи Коши для двухжидкостной модели течения смеси газа с частицами // ПММ.— 1982.— Т. 46, вып. 3.— С. 420—428.
26. Крайко А. Н., Сулайманова С. М. Двухжидкостные течения смеси газа и твердых частиц с «пеленами» и «шнурами», возникающих при обтекании непроницаемых поверхностей // Там же.— 1983.— Т. 47, вып. 4.— С. 619—630.
27. Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Шрайбер И. Р. Распространение волн в газо- и парожидкостных средах.— Новосибирск: ИТ СО АН СССР, 1983.— 238 с.
28. Кутателадзе С. С., Стырикович М. А. Гидродинамика газожидкостных систем.— М.: Энергия, 1976.— 296 с.
29. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений.— М.: Наука, 1978.— 687 с.
30. Терентьев Е. Д., Шмыглевский Ю. Д. Полная система дивергентных уравнений динамики совершенного газа // Журн. вычисл. математики и матем. физики.— 1975.— Т. 15, № 6.— С. 1535—1544.
31. Терентьев Е. Д., Шмыглевский Ю. Д. Полная система дивергентных уравнений электромагнитной динамики совершенного газа // Там же.— 1976.— Т. 16, № 3.— С. 725—737.
32. Руев Г. А., Рождественский Б. Л., Фомин В. М., Яненко Н. Н. Законы сохранения систем уравнений двухфазных сред // Докл. АН СССР.— 1980.— Т. 254, № 2.— С. 288—293.
33. Руев Г. А. Полный набор законов сохранения систем уравнений, описывающих стационарные движения смесей // Числ. методы механики сплошн. среды.— Новосибирск, 1984.— Т. 15, № 1.— С. 103—117.
34. Ибрагимов Н. Х. Законы сохранения в гидродинамике // Докл. АН СССР.— 1973.— Т. 240, № 6.— С. 1307—1309.
35. Крайко А. Н., Миллер Л. Г., Ширковский И. А. О течениях газа в пористой среде с поверхностями разрыва пористости // ПМТФ.— 1982.— № 1.— С. 111—118.
36. Фомин В. М., Киселев С. П. Комбинированный разрыв в смеси газа и твердых частиц // Числ. методы механики сплошн. среды.— Новосибирск, 1984.— Т. 15, № 2.— С. 134—144.
37. Стернин Л. Е. Основы газодинамики двухфазных течений в соплах.— М.: Машиностроение, 1974.— 212 с.
38. Салтанов Г. А. Сверхзвуковые двухфазные течения.— Минск: Вышэйш. шк., 1972.— 480 с.
39. Гришин А. М., Фомин В. М. Сопряженные и нестационарные задачи механики реагирующих сред.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние. 1984.— 318 с.
40. Гидродинамика многофазных систем.— М.: Мир, 1971.— 536 с.
41. Henderson C. B. Drag coefficient of spheres in continuum and rarefied flows // AIAAJ.— 1967.— V. 14, N 6.— P. 707—708.
42. Ranz W. E., Marshall W. R., Jr. Evaporation from drops // Chemical engineering progress.— 1952.— V. 48, N 3.— P. 141—146.
43. Drake R. W., Jr. Discussion on G. C. Vliet and G. Leppert: Forced convection heat transfer from an isothermal sphere to water // J. Heat Transfer.— 1961.— V. 83.— P. 170—172.

44. Fox T. W., Rackett C. W., Nichols J. A. Shock wave ignition of magnesium powders // Proc. of 11th Int. Shock Tubes and Waves Symp. Seattle.— 1978.— P. 262—268.
45. Киселев С. П., Фомин В. М. О модели вскипания псевдоожженного слоя частиц // ПМТФ.— 1984.— № 3.— С. 89—94.

Глава 2

1. Дьярматт И. Неравновесная термодинамика.— М.: Мир, 1974.— 304 с.
2. Goldman E., Sirovich L. Equations for gas mixtures // Phys. Fluids.— 1967.— V. 10, N 49.— P. 1928—1940.
3. Струминский В. В. Влияние диффузионной скорости на течение газовых смесей // ПММ.— 1974.— Т. 38, вып. 2.— С. 203—210.
4. Shavaliyev M. Sh. Kinetic theory of irreversible processes in two-temperature and two-velocity gas mixtures // Rarefied Gas Dynamics/O. M. Belotserkovski e. a.— New York; London: Plenum Press, 1985.— V. 1.— P. 115—122.
5. Струминский В. В., Шавалиев М. Ш. Явления переноса в многоскоростных и многотемпературных смесях газов // ПММ.— 1986.— Т. 50, вып. 1.— С. 83—90.
6. Струминский В. В., Турков В. Е. О явлениях переноса в многокомпонентных газовых смесях.— М., 1987.— (Препринт/АН СССР, Сектор механики неоднородных сред; № 18).
7. Галкин В. С., Коган М. Н., Макашев Н. К. Обобщенный метод Чепмена — Энскога. 2. Уравнения многоскоростной многотемпературной смеси газов // Уч. зап. ЦАГИ.— 1975.— Т. 6, № 1.— С. 15—27.
8. Мацук В. А., Рыков В. А. О методе Чепмена — Энскога для смеси газов // Докл. АН СССР.— 1977.— Т. 223, № 1.— С. 49—51.
9. Галкин В. С., Макашев Н. К. Условия применимости и молекулярно-кинетический вывод уравнений многотемпературной многоскоростной газодинамики // Журн. вычисл. математики и матем. физики.— 1983.— Т. 23, № 6.— С. 1443—1453.
10. Fernandez de la Mora J., Fernandez — Feria R. Two-fluid Chapman — Enskog theory for binary gas mixtures // Phys. Fluids.— 1987.— V. 30, N 7.— P. 2063—2073.
11. Goebel C. J., Harris S. M., Johnson E. A. Two-temperature disparate-mass gas mixtures: a thirteen moment description // Ibid.— 1976.— V. 19, N 5.— P. 627—635.
12. Курочкин В. И., Маркеев Б. М. К вопросу об уравнениях переноса для многокомпонентной газовой смеси // Журн. техн. физ.— 1979.— Т. 49, вып. 8.— С. 1772—1774.
13. Великодный В. Ю. Уравнения переноса многокомпонентных газовых смесей и сильно неравновесных газов: Канд. дис.— М.: МФТИ, 1982.
14. Брагинский С. И. Явления переноса в плазме // Вопросы теории плазмы: Сб. статей.— М.: Госатомиздат, 1963.— Вып. 1.— С. 183—272.
15. Жданов В. М. Явления переноса в многокомпонентной плазме.— М.: Энергоиздат, 1982.— 176 с.
16. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов.— М.: Изд во иностр. лит., 1960.— 510 с.
17. Ферцигер Дж., Капер Г. Математическая теория процессов переноса в газах.— М.: Мир, 1978.— 554 с.
18. Коган М. Н. Динамика разреженного газа.— М.: Наука, 1967.— 440 с.
19. Шавалиев М. Ш. Уравнения многожидкостной гидродинамики для смесей газов.— Новосибирск. 1988.— (Препринт/АН СССР, ИТПМ; № 28-88).
20. Куснер Ю. С., Кутателадзе С. С., Приходько В. Г и др. Инерционное газокинетическое разделение газовых смесей и изотопов // Докл. АН СССР.— 1979.— Т. 247, № 4.— С. 845—848.
21. Chekmarev S. F. Gas or isotope separation by injection into light gas flow // Rarefied Gas Dynamics/O. M. Belotserkovski e. a.— New York; London: Plenum Press, 1985.— V. 2.— P. 1297—1304.

22. Де Гроот С. Р., Мазур П. Неравновесная термодинамика.— М.: Мир, 1964.— 456 с.
23. Терентьев Е. Д., Шмыглевский Ю. Д. Полная система дивергентных уравнений динамики совершенного газа // Журн. вычисл. математики и матем. физики.— 1975.— Т. 15, № 6.— С. 1535—1544.
24. Ибрагимов Н. Х. Законы сохранения в гидродинамике // Докл. АН СССР.— 1973.— Т. 210, № 6.— С. 1307—1309.
25. Руев Г. А. Полный набор законов сохранения систем уравнений, описывающих стационарные движения смесей // Числ. методы механики сплош. среды.— 1984.— Т. 15, № 1.— С. 103—117.
26. Русанов В. В. Характеристики общих уравнений газовой динамики // Журн. вычисл. математики и матем. физики.— 1963.— Т. 3, № 3.— С. 508—527.
27. Овсянников Л. В. Лекции по основам газовой динамики.— М.: Наука, 1981.— 368 с.
28. Годунов С. К. Интересный класс квазилинейных систем // Докл. АН СССР.— 1964.— Т. 139, № 3.— С. 521—524.
29. Годунов С. К. Элементы механики сплошной среды.— М.: Наука, 1978.— 304 с.
30. Friedrichs K. O. Symmetric hyperbolicity and conservation laws // Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа.— М.: Наука, 1972.— С. 15—23.
31. Fisher A. E., Marsden J. E. The Einstein evolution equations as first-order quasi-linear symmetric hyperbolic system. 1 // Commun. Math. Phys.— 1972.— V. 28, N 1.— P. 1—38.
32. Вольперт Л. И., Худяев С. И. О задаче Коши для составных систем нелинейных дифференциальных уравнений // Мат. сб.— 1972.— Т. 87, № 4.— С. 504—529.
33. Петров А. Н. Корректность начально-краевых задач для одномерных уравнений взаимопроникающего движения совершенных газов // Динамика неоднородной жидкости.— Новосибирск: ИГиЛ СО АН СССР, 1982.— С. 105—121.
34. Truesdell G. On the foundation of mechanics and energetics.— Continuum mechanica // Rat. Mech., Materials.— New York; London, Paris: Gordon and Bresh Sci. Publ., 1965.— V. 11.— P. 25—40.
35. Eringen A. C., Ingram J. D. Continuum theory of chemically reacting media // J. Int. Eng. Sci.— 1965.— V. 3, N 2.— P. 197—212.
36. Pai S. I. A critical review of the fundamental equations of a mixture of a gas and small solid particles // Z. Flugwiss.— 1971.— V. 19, N 8—9.— P. 353—360.
37. Dunwoody N. T., Müller I. A thermodynamic theory of two chemically reacting ideal gases with different temperatures // Arch. Ration. Mech. and Analysis.— 1968.— V. 29, N 5.— P. 344—369.
38. Müller I. A thermodynamic theory of mixtures of fluids // Arch. Ration. Mech. and Analysis.— 1968.— V. 28, N 1.— P. 1—39.
39. Green A. E., Naghdi P. M. A theory of mixtures // Arch. Ration Mech. and Analysis.— 1967.— V. 24, N 4.— P. 243—263.

Глава 3

1. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений — М.: Наука, 1978.— 687 с.
2. Овсянников Л. В. Лекции по основам газовой динамики.— М.: Наука, 1981.— 368 с.
3. Руев Г. А., Фомин В. М., Яненко Н. Н. Структура ударной волны в смеси газов // Докл. АН СССР.— 1981.— Т. 261, № 2.— С. 285—290.
4. Клейман Я. З. О распространении разрывов в многокомпонентной среде // ИММ.— 1958.— Т. 22, № 2.— С. 197—205.
5. Крайко А. Н., Стернин Л. Е. К теории двухскоростной сплошной среды с твердыми или жидкими частицами // Там же.— 1965.— Т. 29, № 3.— С. 418—429.

6. Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Качественная теория динамических систем второго порядка.— М.: Наука, 1966.— 568 с.
7. Руев Г. А., Фомин В. М. Структура ударной волны в бинарной смеси вязких газов // Журн. прикл. механики и техн. физики.— 1984.— № 5.— С. 48—54.
8. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов.— М.: Изд-во иностр. лит., 1960.— 510 с.
9. Гиршфельдер Дж., Кэртисс У., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей.— М.: Изд-во иностр. лит., 1961.— 929 с.
10. Kestin J., Khalita H. E., Wakeham W. A. The viscosity and diffusion coefficients of the binary mixtures of Xenon with the other noble gases // Physica.— 1978.— V. 90A.— P. 215—228.
11. Берд Р. Молекулярная газовая динамика.— М.: Мир, 1981.— 319 с.
12. Ковеня В. М., Яненко Н. Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1981.— 304 с.
13. Руев Г. А., Фомин В. М., Шавалиев М. Ш. Структура ударной волны в двухскоростной и двухтемпературной смеси вязких теплопроводных газов // Числ. методы механики сплош. среды.— 1986.— Т. 17, № 2.— С. 135—145.
14. Cowling T. G. The influence of diffusion on propagation of shock-waves // Phil. Mag.— 1942.— V. 33, N 61.— P. 230—235.
15. Дьяков С. П. Ударные волны в бинарных смесях // Журн. эксперим. и теорет. физ.— 1954.— Т. 27, вып. 3(9).— С. 283—287.
16. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошной среды.— М.: Наука, 1954.— 788 с.
17. Sherman F. S. Shock wave structure in binary mixtures of chemically inert perfect gases // J. Fluid Mech.— 1960.— V. 8, part 3.— P. 465—480.
18. Goldman E., Sirovich L. The structure of shock-waves in gas mixtures // J. Fluid Mech.— 1969.— V. 35, part 3.— P. 575—597.
19. Goldman E., Sirovich L. Equations for gas mixtures // Phys. Fluids.— 1967.— V. 10, N 9.— P. 1928—1940.
20. Goldman E., Sirovich L. Equations for mixtures // Ibid.— 1969.— V. 12, N 1.— P. 245—247.
21. Mott-Smith H. M. The solution of the Boltzmann equation for a shock wave // Phys. Rev.— 1951.— V. 82, N 6.— P. 885—892.
22. Fujimoto T. Shock-wave structure in binary gas mixtures with no chemical reaction // Rarefied Gas Dynamics.— New York; London: Academic Press, 1965.— V. 1.— P. 223—239.
23. Tannenbaum B. S., Scott R. M. Comments on the paper: "Kinetic theory approach to problem of shock-wave structure in a binary mixture" by M. M. Oberai.— Author's reply // Phys. Fluids.— 1966.— V. 9, N 5.— P. 1048—1049.
24. Oberai M. M. Kinetic-theory approach to the problem of shock-wave structure in a binary mixture // Ibid.— 1965.— V. 8, N 5.— P. 826—833.
25. Oberai M. M. A Mott-Smith distribution to describe the structure of a plane shock wave in a binary mixture // Ibid.— 1966.— V. 9, N 9.— P. 1634—1637.
26. Oberai M. M., Sinha U. N. Shock wave structure in binary gas mixture // Rarefied Gas Dynamics: Proc. 9th Intern. Symp., Göttingen, 1974, Porz-Wahn.— 1974.— V. 1.— B25/1—B25/10.
27. Magdalena B., Rysard H. The shock wave structure in onecomponent gas and in binary gas mixture.— 1983.— 82 P.— (Pr. Ippt Pan; N 19).
28. Коган М. Н. Динамика разреженного газа.— М.: Наука, 1967.— 440 с.
29. Hamel B. B. Kinetic model for binary gas mixtures // Phys. Fluids.— 1965.— V. 8, N 3.— P. 418—425.
30. Hamel B. B. Disparate mass mixtures flows // Rarefied Gas Dynamics: Techn. Pap. 10th Int. Symp.— New York, 1977.— P. 171—195.
31. Oguchi H. A kinetic model for a binary mixture and its application to a shock structure // Rarefied Gas Dynamics.— New York; London: Acad. Press, 1967.— V. 1.— P. 745—758.

32. Abe K., Ogushi H. Shock wave structure in binary gas mixtures // *Ibid.*—1969—v. 1.—P. 425—432.
33. Platkowski T. Application of the modified BGK equations to the shock wave structure in disparate mass mixtures // *Rarefied Gas Dynamics. Commissariat A L'Energie Atomique, Paris, 1979.*—P. 323—334.
34. Platkowski T. Application of modified BGK-equations to the calculation of the shock wave structure in Xe—He mixtures // *Arch. Mech.*—1981.—V. 33.—P. 785—788.
35. Wu Y. W., Lee C. H. Kinetic theory of shock tube problems for binary mixtures // *Phys. Fluids*—1971.—V. 14, N 2.—P. 313—322.
36. Harris W. L., Bienkowski G. K. An asymptotic theory of shock structure in binary gas mixtures of disparate masses // *Rarefied Gas Dynamics.*—New York; London: Acad. Press, 1969.—V. 1.—P. 397—406.
37. Harris W. L., Bienkowski G. K. Structure of normal shock waves in gas mixtures // *Phys. Fluids.*—1971.—V. 14, N 12.—P. 2652—2669.
38. Beylich E. Kinetic model for shock structure in binary gas mixture // *Ibid.*—1968.—V. 11, N 12.—P. 2764—2767.
39. Glansdorff P. Solution of the Boltzmann equation for strong shock waves by the two-fluid model // *Ibid.*—1962.—V. 5, N 4.—P. 371—379.
40. Bird G. A. The structure of normal shock waves in a binary gas mixture // *J. Fluid Mech.*—1968.—V. 31, N 4.—P. 657—668.
41. Григорьев Ю. Н., Иванов М. С. Методы Монте-Карло и структура ударной волны для бинарной смеси газов // *Числ. методы механики сплош. среды.*—Новосибирск, 1977.—Т. 8, № 6.—С. 30—37.
42. Schmidt B., Seiler F., Worner M. Shock structure near a wall in pure inert gas and in binary inert—gas mixtures // *J. Fluid Mech.*—1984.—V. 143.—P. 305—326.
43. Bird G. A. Shock wave structure in gas mixtures // *Rarefied Gas Dynamics.*—Tokyo: University of Tokyo Press, 1984.—V. 1.—P. 175—182.
44. Sinclair M., de Leeuw J. H. A Monte Carlo solution to a modelled diffusion shock problem // *Rarefied Gas Dynamics.*—New York; London: Acad. Press, 1969—V. 1.—P. 319—326.
45. Center R. E. Measurement of shock wave structure in Helium-Argon mixtures // *Phys. Fluids.*—1967.—V. 10, N 8.—P. 1777—1784.
46. Rothe D. E. Electron beam studies of the diffusive separation of Helium-Argon mixtures // *Ibid.*—1966.—V. 9, N 9.—P. 1643—1658.
47. Andersen W. H., Hornig D. F. Structure of weak shock fronts in Argon-Helium mixtures // *Ibid.*—1961.—V. 4, N 5.—P. 650—651.
48. Harnett L. M., Muntz E. P. Experimental investigation of normal shock wave velocity distribution functions in mixtures of Argon and Helium // *Ibid.*—1972.—V. 15.—P. 565—572.
49. Бочкарев А. А., Ребров А. К., Тимошенко Н. И. Структура ударной волны в смеси Ar—He // *Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук.*—1976.—№ 3, вып. 1.—С. 76—80.
50. Gmurczyk A. S., Tarczynski M., Walenta Z. A. Shock wave structure in the binary mixtures of gases with disparate molecular masses // *Rarefied Gas Dynamics. Commissariat a l'Energie Atomique, Paris, 1979.*—V. 1.—P. 333—341.
51. Gmurczyk A. S., Walenta Z. A. Experimental investigation of shock wave structure in hydrogen—xenon mixtures // *Arch. Mech.*—1981.—V. 33, N 4—P. 501—510.
52. Руев Г. А., Фомин В. М., Шавалиев М. Ш. Структура ударных волн в смесях газов с сильно различающимися массами молекул // *Журн. прикл. механики и техн. физики.*—1989.—№ 4.—С. 26—33.
53. Буряков О. В., Куропатенко В. Ф. Структура фронта ударной волны в гетерогенной смеси двух изотермических газов при наличии сил взаимодействия компонент. Вопросы атомной науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики.—1985.—Вып. 3.—С. 19—24.

Глава 4

1. Крайко А. Н., Стернин Л. Е. К теории течений двухскоростной сплошной среды с твердыми или жидкими частицами // ПММ.— 1965.— Т. 29, № 3.— С. 418—429.
2. Крайко А. Н., Миллер Л. Г., Ширковский И. А. О течениях газа в пористой среде с поверхностями разрыва пористости // ПМТФ.— 1982.— № 1.— С. 111—118.
3. Крайко А. Н. К теории двухжидкостных течений газа и диспергированных в нем частиц // Гидродинамика и теплообмен в двухфазных средах: Материалы II Всесоюз. шк. по теплофизике.— Новосибирск, 1981.— С. 42—52.
4. Гринь В. Т., Крайко А. Н., Миллер Л. Г. К распаду произвольного разрыва на перфорированной перегородке // ПМТФ.— 1981.— № 3.— С. 95—103.
5. Киселев С. П., Фомин В. М. Соотношения на комбинированном разрыве в газе с твердыми частицами // Там же.— 1984.— № 2.— С. 112—119.
6. Фомин В. М., Киселев С. П. Комбинированный разрыв в смеси газа и твердых частиц // Числ. методы механики сплош. среды.— Новосибирск, 1984.— Т. 15, № 2.— С. 134—144.
7. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа.— М.: Наука, 1970.— 904 с.
8. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред.— М.: Наука, 1978.— 336 с.
9. Гольдштик М. А., Козлов Б. Н. Элементарная теория конденсированных дисперсных систем // ПМТФ.— 1973.— № 4.— С. 67—77.
10. Ивандаев А. И., Кутушев А. Г., Нигматулин Р. И. Численное исследование облака диспергированных частиц или капель под действием взрыва // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1982.— № 1.— С. 82—90.
11. Ершов А. П. Об уравнениях механики двухфазных сред // ПМТФ.— 1983.— № 6.— С. 79—87.
12. Яненко Н. Н., Солоухин Р. И., Папырин А. Н., Фомин В. М. Сверхзвуковые двухфазные течения в условиях скоростной неравновесности частиц.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1980.— 158 с.
13. Стернин Л. Е. Основы газодинамики двухфазных течений в соплах.— М.: Машиностроение, 1974.— 212 с.
14. Киселев С. П., Фомин В. М. О модели вскипания псевдооживленного слоя частиц // ПМТФ.— 1984.— № 3.— С. 89—94.
15. Матвеев С. К. Модель газа из твердых частиц с учетом неупругих соударений // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1983.— № 6.— С. 12—16.
16. Годунов С. К. Уравнения математической физики.— М.: Наука. 1971.— 416 с.
17. Клеббанов Л. А., Крошинин А. Е., Нигматулин Б. И., Нигматулин Р. И. О гиперболичности, устойчивости и корректности задачи Коши для системы уравнений двухскоростного движения двухфазных сред // ПММ.— 1982.— Т. 46, № 1.— С. 83—95.
18. Крайко А. Н. О корректности задачи Коши для двухжидкостной модели течения смеси газа с частицами // Там же.— 1982.— Т. 46, № 3.— С. 420—428.
19. Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред.— М.: Наука. 1987.— Ч. 1.— 464 с.
20. Киселев С. П., Фомин В. М. Континуально-дискретная модель для смеси газ — твердые частицы при малой объемной концентрации частиц // ПМТФ.— 1986.— № 2.— С. 93—101.
21. Кроу. Численные модели течений газа с небольшим содержанием частиц (обзор) // Теорет. основы инж. расчетов.— 1982.— Т. 104, № 3.— С. 114—122.
22. Коган М. Н. Динамика разреженного газа.— М.: Наука, 1967.— 440 с.
23. Циркунов Ю. М. Исследование инерционного осаждения полидисперсных частиц в критической точке сферы // ПМТФ.— 1985.— № 5.— С. 94—102.

24. Зельдович Я. Б., Мышкис А. Д. Элементы математической физики.— М.: Наука, 1973.— 351 с.
25. Зельдович Я. Б. Избранные труды. Частицы, ядра, вселенная.— М.: Наука, 1985.— 463 с.
26. Коробейников В. П., Марков В. В., Меньшов И. С. О распространении ударных и детонационных волн в запыленных газах // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1984.— № 6.— С. 93—100.
27. Зельдович Я. Б., Мышкис А. Д. Элементы прикладной математики.— М.: Наука, 1972.— 646 с.
28. Физика взрыва/Ф. А. Баум, Л. П. Орленко, К. П. Станюкович и др.— М.: Наука, 1975.— 704 с.
29. Одинцов В. А., Селиванов В. В., Чудов Л. А. Расширение идеально пластической оболочки под действием продуктов детонации // ПМТФ.— 1974.— № 2.— С. 152—156.
30. Taylor G. I. Scient. Papers.— Cambridge, 1963.— V. 3.
31. Hoggat G., Recht R. F. Fracture behavior of tubular bomb // J. Appl. Phys.— 1968.— V. 39, N 3.— P. 1856—1862.
32. Одинцов В. А., Чудов Л. А. Расширение и разрушение оболочек под действием продуктов детонации // Проблемы упругопластических сред.— М.: Мир, 1975.
33. Пирсон Дж., Райнхарт Дж. Деформация и разрушение толстостенных стальных цилиндров при взрыве // Механика: Сб. пер.— 1953.— № 3(19).
34. Finger M., Honig H. C., Lee E. L., Kury J. W. Metal acceleration by composite explosives // Fifth Symp. (Int.) on Detonation.— Pasadena, California, 1970.— P. 137—151.
35. Иванов А. Г., Кочкин Л. И., Новиков В. Ф., Фоломеева Т. М. Высокоскоростное разрушение тонкостенных труб из мягкой стали // ПМТФ.— 1983.— № 1.— С. 112—117.
36. Сериков С. В. Оценка осколкообразования при разрушении шаровой оболочки // ПМТФ.— 1983.— № 3 — С. 125—132.
37. Kury J. W., Horing H. C., Lee E. L. et al. Metal acceleration by chemical explosives // Forth Symp. (Int.) on Detonation.— New York, 1965.— P. 3—26.
38. Мерзиевский Л. А., Реснинский А. Д. Расширение металлических колец под действием продуктов детонации // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГиЛ СО АН СССР, 1983.— Вып. 60.— С. 34—41.
39. Киселев С. П., Фомин В. М. Исследование разлета оболочки с учетом разрушения и истечения продуктов детонации между осколками // ПМТФ.— 1989.— № 4.— С. 33—39.
40. Уилкинс М. Л. Расчет упругопластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике.— М.: Мир, 1967.— С. 212—264.
41. Рождественский Б. Л., Яценко Н. Н. Система квазилинейных уравнений — М.: Наука, 1978.— 688 с.
42. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные методы решения задач газовой динамики — М.: Наука, 1975.— 351 с.
43. Ивандаев А. И. Течение в ударной трубе при наличии взвешенных частиц // ФГВ.— 1984.— № 3.— С. 105—111.

Глава 5

1. Эрозия: Пер. с англ./Под ред. К. Прис.— М.: Мир, 1982.— 464 с.
2. Трунев А. П., Фомин В. М. Обтекание тел двухфазных потоком типа газ—твердые частицы с учетом эрозии // ПМТФ.— 1983.— № 1.— С. 69.
3. Бакум Б. И., Домбровская Т. И., Лагутин В. И. Влияние запыленности потока на результаты испытаний в гиперзвуковых аэродинамических трубах // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1970.— № 4.— С. 187.
4. Laderman L. F., Lewis C. H., Byron S. R. Two-phase plume impingement effects // AIAA J.— 1970 — V. 8, N 10.— P. 1831.
5. Dinbar F., Cunrtney J. F., McMillen I. D. Hitting augmentation in erosive hypersonic environments // AIAA J.— 1975.— V. 13.— P. 908.

6. Фомин В. М., Яненко Н. Н., Папырин А. Н. и др. Изменение волновой структуры тел при обтекании сверхзвуковым двухфазным потоком // Докл. АН СССР.— 1981.— Т. 260, № 4.— С. 1161.
7. Reinecke W. G. Debris shielding during high-speed erosion // AIAA J.— 1974.— V. 12, N 11.— P. 1592.
8. Нигматуллин Р. И. Основы механики гетерогенных сред.— М.: Наука, 1978.— 336 с.
9. Яненко Н. Н., Солоухин Р. И., Папырин А. Н., Фомин В. М. Сверхзвуковые двухфазные течения в условиях скоростной неравновесности частиц.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1980.— 160 с.
10. Матвеев С. К. Математическое описание обтекания тел потоком газовой взвеси с учетом влияния отраженных частиц // Движение сжимаемой жидкости и неоднородных сред.— Л.: 1982.— С. 162—174.
11. Трунев А. П. Исследование эрозионного разрушения тел в газовых потоках с примесью инородных частиц: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.05.— Новосибирск, 1986.— 18 с.
12. Нигматуллин Р. И. Динамика многофазных сред.— М.: Наука, 1987.— Ч. 1.— 464 с.
13. Трунев А. П., Фомин В. М. Трехжидкостная модель гетерогенного течения при наличии вдува продуктов эрозии // Газотермодинамика многофазных потоков в энергоустановках.— Харьков, 1987.— С. 11—18.
14. Янков П. Д. Микроскопические уравнения движения дисперсных систем // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1980.— № 2.— С. 39—44.
15. Nobes M. J., Colligon J. S., Carter G. The equilibrium topography of sputtered amorphous solids // J. Mater. Sci.— 1969.— V. 4, N 8.— P. 730.
16. Есин Н. В. Общие принципы составления динамических уравнений развития рельефа // Изв. АН СССР. Сер. геогр.— 1968.— № 2.— С. 118—124.
17. Полежаев Ю. В., Романченко В. П., Чирков И. В., Шебеко В. Н. Расчетная модель процесса эрозионного разрушения композиционного материала // ИФЖ.— 1979.— Т. 37, № 3.
18. Динамика удара: Пер. с англ./Дж. А. Зукас, Т. Николае, Х. Ф. Свифт и др.— М.: Мир, 1985.— 296 с.
19. Баулин В. И., Перельман Р. Г. Волны Рэлея как один из ведущих факторов в капельно-ударном разрушении деталей // Проблемы прочности.— 1974.— № 1.— С. 70—74.
20. Трунев А. П., Фомин В. М. Континуальная модель ударной эрозии // ПМТФ.— 1985.— № 6.— С. 112—120.
21. Никифоровский В. С., Есмянин Е. И. Динамическое разрушение твердых тел.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1979.— 255 с.
22. Витман Ф. Ф., Златин Н. А. О процессе соударения деформируемых тел и его моделировании // ЖТФ.— 1963.— Т. 33, № 6.— С. 982—989.
23. Finnie I., McFadden D. H. On the velocity dependence of the erosion of ductile metals by solid particles at low angles of incidence // Wear.— 1978.— V. 48.— P. 181—190.
24. Timoshenko S. Theory of elasticity.— N. Y.: McGraw, 1934.
25. Яненко Н. Н., Фомин В. М. Численное моделирование задач высокоскоростного взаимодействия тел // Симп. по нелинейным волнам деформации.— Таллинн, 1978.— С. 179—182.
26. Bryan G. M., Push E. M. Cratering of lead oblique impacts of hypervelocity steel pellets // J. Appl. Phys.— 1962.— V. 33, N 2.
27. Трунев А. Н., Фомин В. М. Неустойчивость поверхности при эрозии в потоке газа с частицами // ПМТФ.— 1986.— № 3.— С. 78—84.
28. Крикливый В. В., Трунев А. П., Фомин В. М. Исследование двухфазного течения в канале с разрушающимися стенками // ПМТФ.— 1985.— № 1.— С. 82—87.
29. Монгетюрк М., Ганес Д. и др. Влияние пограничного слоя, выросшего на лопатки турбины, на эрозии лопатки и осаждение частиц // Тр. Америк.-ва инж.-мех. Сер. Д.: Теоретические основы инженерных расчетов.— 1983.— № 3.— С. 111—117.
30. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложение к газовой динамике.— М.: Наука, 1978.— 687 с.

31. Сарычев В. Д., Трунев А. П., Фомин В. М. Сверхзвуковое течение газозвеси около клина при наличии отраженных частиц // ПМТФ.— 1985.— № 5.— С. 102—110.
32. Черный Г. Г. Течение газа с большой сверхзвуковой скоростью.— М.: Физматгиз, 1959.— 220 с.
33. Tilly G. P. A. A two stage mechanism of ductile erosion // Wear.— 1973.— V. 23.— P. 87—96.
34. Баланин Б. А., Лашков В. А. Сопротивление плоского клина в двухфазном потоке // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1982.— № 2.— С. 177—184.
35. Трунев А. П., Фомин В. М. Эрозия тупого тела в запыленном гиперзвуковом потоке // ПМТФ.— 1984.— № 4.— С. 101—107.
36. Рамм М. С., Шмидт А. А. Влияние механизма эрозионного разрушения на обтекание затупленного тела потоком газозвеси.— Л., 1986.— 34 с.— (Препринт/АН СССР. физ.-техн. ин-т; № 1045).
37. Трунев А. П., Фомин В. М. Коллапс пылевого слоя над поверхностью тупого тела в запыленном гиперзвуковом потоке // ПМТФ.— 1984.— № 5.— С. 85—88.

Глава 6

1. Дунин С. З., Сурков В. В. Динамика закрытия пор во фронте ударной волны // ПММ.— 1979.— Т. 43.— С. 511.
2. Carrol M. M., Holt A. C. Static and dynamic pore collapse relations for ductile porous materials // J. Appl. Phys.— 1972.— V. 43.— P. 1626.
3. Белов Н. Н., Корнеев А. И., Симоненко В. Г. Модель откольного разрушения пористой упругопластической среды, испытывающей полиморфный фазовый переход // Докл. АН.— 1990.— Т. 310, № 5.— С. 1116.
4. Дунин С. З., Сурков В. В. Эффекты диссипации энергии и влияние плавления на ударное сжатие пористых тел // ПМТФ.— 1982.— № 1.— С. 131.
5. Johnson J. N. Dynamic fracture and spallation in ductile solids // J. Appl. Phys.— 1981.— V. 52, N 4.— P. 2812.
6. Johnson J. N., Addessio F. L. Tensile plasticity and ductile fracture // J. Appl. Phys.— 1988.— V. 64, N 12 — P. 6699.
7. Качанов Л. М. Основы теории пластичности.— М.: ГИТЛ, 1956.— 324 с.
8. Соколовский В. В. Теория пластичности.— М.: Высш. шк., 1969.— 608 с.
9. Гарсон А. Л. Континуальная теория вязкого разрушения, обусловленного образованием и ростом пор. Ч. 1. Критерий текучести и законы течения для пористой пластической среды // Теорет. основы инж. расчетов.— 1975.— № 1.— С. 1—16.
10. Tvergaard V. Numerical study of localization in a void-sheet // Int. J. Solids Structures.— 1989.— V. 25, N 10.— P. 1143.
11. Shima S., Oyane M. Plasticity theory for porous metals // Int. J. Mech. Sci.— 1976.— V. 18.— P. 285.
12. Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций.— М.: Изд-во иностр. лит., 1963.— 102 с.
13. Кривоглаз М. А., Черевко А. С. Об упругих модулях твердой смеси // ФММ.— 1959.— Т. 8, вып. 2.— С. 161.
14. Шермергор Т. Д. Теория упругости микroneоднородных сред.— М.: Наука, 1977.— 399 с.
15. Седов Л. И. Механика сплошной среды.— Т. 1.— М.: Наука, 1970.— 492 с.
16. Седов Л. И. Механика сплошной среды.— Т. 2.— М.: Наука, 1973.— 584 с.
17. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений — М.: Наука 1966.— 686 с.
18. Аттетков А. В., Власова Л. Н., Селиванов В. В., Соловьев В. С. Влияние неравновесного разогрева на поведение пористого вещества при ударном сжатии // ПМТФ.— 1984.— № 6 — С. 120—127.
19. Kusubov A. S., Nesterenko V. F., Wilkins M. L., Resugh J. E. and Cline C. F. Dynamic deformation of powdered materials as a function of particle size // Mater. Int. Seminar.— Novosibirsk, 1989.— P. 139.
20. Костюков Н. А. Двухмерные ударно-волновые течения и структура порошковых компактов вблизи границы раздела с деформируемой прегра-

дой // Моделирование в механике.— Новосибирск, 1990.— № 6.— С. 76—102.

21. Киселев С. П., Фомин В. М. К вопросу об образовании холодного слоя частиц при взрывном компактировании порошков // Там же.— С. 49—53.
22. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа.— М.: Наука, 1987.— 840 с.
23. Киселев С. П., Фомин В. М., Шитов Ю. А. Численное моделирование отскока пористого цилиндра от жесткой преграды // ПМТФ.— 1990.— № 3.— С. 100—104.
24. Уилкинс М. Л. Расчет упругопластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике.— М.: Мир, 1967.— С. 212—264.
25. Ставер А. М., Фомин В. М., Ческидов П. А. Структура сильных ударных волн в порошках // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности.— Новосибирск: ИТИМ СО АН СССР, 1984.— С. 259—292.
26. Нестеренко В. Ф. Ударное сжатие многокомпонентных материалов // Динамика сплошной среды.— 1977.— Вып. 29.— 81—93.
27. Нестеренко В. Ф., Фомин В. М., Ческидов П. А. Границы применимости моделей поведения порошков при интенсивном ударно-волновом нагружении // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности.— Новосибирск: ИТИМ СО АН СССР, 1988.— С. 231—236.
28. Thouvenin J. Action d'une onde de choc sur un solide poreux // J. Phys.— 1966.— V. 27, N 3—4.— P. 183—189.
29. Hofman R., Andrews D. J., Maxwell D. E. Computed shock response of porous aluminium // J. Appl. Phys.— 1968.— V. 39, N 10.— P. 4555—4562.
30. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред.— М.: Наука, 1978.— 338 с.
31. Николаевский В. Н., Басниев К. С., Горбунов А. Т., Зотов Г. А. Механика насыщенных пористых сред.— М.: Недра, 1970.— 335 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава 1. Математические модели двухфазных сред	6
§ 1. Основные уравнения механики многофазных сред	—
§ 2. Законы сохранения системы уравнений взаимопроникающего движения смеси газа и твердых частиц	16
§ 3. Характеристики системы уравнений газ — частицы	25
§ 4. Соотношения на тонких разрывах	29
Глава 2. Математические модели газовых смесей с сильно различающимися массами молекул	32
§ 1. Уравнения многоскоростной многотемпературной газодинамики смесей газов	35
1.1. Пяти- и тринадцатимоментные уравнения	—
1.2. Уравнения навье-стоксовского уровня для бинарной и тройной смесей газов	40
§ 2. Законы сохранения системы уравнений эйлеровского уровня двухскоростной двухтемпературной газодинамики смеси газов	52
§ 3. Характеристики уравнений эйлеровского уровня. Корректность задачи Коши	56
Глава 3. Ударные волны в газовых смесях	59
§ 1. Соотношения на сильном разрыве	—
1.1. Классификация сильных разрывов	—
1.2. Комбинированные разрывы	60
1.3. Разрывы, соответствующие ударным волнам	62
§ 2. Структура стационарной ударной волны в бинарной смеси газов на основе эйлеровского приближения	66
2.1. Постановка задачи. Анализ особых точек	67
2.2. Слабые ударные волны	73
2.3. Малая концентрация тяжелого компонента	76
2.4. Малая концентрация легкого компонента	80
§ 3. Ударные волны в бинарной смеси вязких, теплопроводных газов	91
3.1. Постановка задачи. Анализ особых точек	—
3.2. Слабые ударные волны	95
3.3. Односкоростное приближение	96
3.4. Малые концентрации	98
§ 4. Численное моделирование задачи о структуре ударной волны в бинарной смеси одноатомных газов	106
4.1. Метод решения	—
4.2. Результаты расчета и их анализ	112

Глава 4. Волны в двухфазных средах типа газа с твердыми частицами	122
§ 1. Комбинированный разрыв в смеси газ — твердые частицы	—
§ 2. Об устойчивости двухжидкостной модели к малым возмущениям	139
§ 3. Континуально-дискретная модель смеси газ — твердые частицы при малой объемной концентрации частиц	141
§ 4. Исследование каустик в псевдогазе частиц	147
§ 5. Анализ устойчивости задачи Коши к малым возмущениям в континуально-дискретной модели	159
§ 6. Постановка и решение одномерной краевой задачи о поршне в континуально-дискретной модели	164
§ 7. Задача о разлете оболочки с учетом разрушения и истечения продуктов детонации между осколками	168
7.1. Физико-математическая постановка задачи	—
7.2. Численная реализация метода взаимопроникающих континуумов	171
7.3. Решение краевых задач и их анализ	176
Глава 5. Эрозионное разрушение тел в двухфазных потоках	182
§ 1. Общая постановка задачи об эрозии тел	183
1.1. Уравнения гетерогенного течения с учетом отраженных частиц	184
1.2. Граничные условия	186
1.3. Упругопластическое поведение тела при ударе	187
§ 2. Эрозия тонкого профиля	189
§ 3. Разрушение клина в сверхзвуковом запыленном потоке	196
3.1. Движение пылевого облака при сверхзвуковом течении около клина	—
3.2. Взаимодействие акустических возмущений с облаком частиц	199
3.3. Некоторые результаты расчетов	202
3.4. Начальная стадия разрушения клина	205
3.5. Влияние размера частиц	206
§ 4. Эффект экранирования при эрозии затупленного тела в сверхзвуковом запыленном потоке	207
Глава 6. Моделирование волновых процессов в пористых упругопластических средах	213
§ 1. Упругопластическая модель деформирования пористого тела	—
§ 2. Динамика, плавление и теплообмен в окрестности поры при распространении ударной волны в пористом материале	225
§ 3. Исследование ударных волн в пористом теле с помощью ударных адиабат	233
§ 4. Численное моделирование распространения ударных волн в пористом теле	237
4.1. Задача о поршне	238
4.2. Задача об ударной волне в порошке Al_2O_3 и порошке фторопласта	241
4.3. Задача об ударной волне в слоистой системе из фторопласта	243
4.4. Задача об отскоке пористого цилиндра от недеформируемой преграды	244
Список литературы	248

Научное издание

**Киселев Сергей Петрович
Руев Геннадий Алексеевич
Трунев Александр Петрович и др.**

**Ударно-
волновые
процессы
в двухкомпонентных
и двухфазных
средах**

**Редактор издательства Л. П. Голышева
Художник Н. А. Пискун
Художественный редактор Л. В. Матвеева
Технический редактор Г. Я. Герасимчук
Корректор В. В. Борисова**

ИБ № 42083

Сдано в набор 01.10.91. Подписано к печати 05.08.92. Формат 60×90^{1/8}. Бумага типографская № 2. Обыкновенная гарнитура. Высокая печать. Усл. печ. л. 16,5. Усл. кр.-отт. 16,8. Уч.-изд. л. 16,5. Тираж 455 экз. Заказ № 1022 С177.

Ордена Трудового Красного Знамени ВО «Наука», Сибирская издательская фирма. 630099 Новосибирск, ул. Советская, 18.

**Новосибирская типография № 4 ВО «Наука».
630077 Новосибирск, ул. Станиславского, 25.**