УДК 519.6
ББК 22.161.6
Д69

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 01-01-14091

Дородницын В. А. **Групповые свойства разностных уравнений.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 240 с. — ISBN 5-9221-0171-4.

В книге излагаются основы нового направления в групповом анализе, связанного с приложением групп Ли к конечно-разностным уравнениям, сеткам, разностным функционалам.

Показывается, что наличие непрерывной симметрии у разностных моделей приводит так же, как и в классическом случае инвариантности дифференциальных уравнений, к понижению порядка и интегрируемости обыкновенных разностных уравнений, к наличию инвариантных (точных) решений у уравнений в частных разностных производных, к существованию разностных законов сохранения у инвариантных вариационных задач.

Рассмотрены многочисленные примеры построения разностных моделей, в которых полностью сохранена непрерывная симметрия исходных дифференциальных уравнений.

Для специалистов в области математической физики и вычислительной математики, интересующихся вопросами качественного анализа дискретных уравнений, а также для аспирантов и студентов соответствующих специальностей.

Табл. 4. Ил. 26. Библиогр. 102 назв.

ISBN 5-9221-0171-4

© ФИЗМАТЛИТ, 2001
© В.А. Дородницын, 2001

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта работа посвящена изучению непрерывной симметрии конечно-разностных уравнений, разностных сеток и разностных функционалов. Интерес к непрерывным симметриям дискретных уравнений возникает по крайней мере по двум причинам. Во-первых, дискретные уравнения возникают в качестве первичных математических моделей в физике — всевозможные “цепочки”, “решетки”, одномерные и двумерные отображения; к дискретным моделям относятся, безусловно, и клеточные автоматы, и нейронные сети. Их интегрируемость, наличие точных решений, законов сохранения, безусловно, связаны с наличием у них непрерывной симметрии. В связи с этим возникает вопрос о нахождении и использовании группы преобразований, допускаемой данным дискретным уравнением.

Во-вторых, моделирование заданной системы дифференциальных уравнений с помощью разностных уравнений и сеток также может быть основано на симметрии. Известно, что одна и та же система дифференциальных уравнений может быть аппроксимирована с помощью неограниченного количества разностных схем. Поэтому при конечно-разностном моделировании всегда стоит вопрос об отборе схем, предпочтительных с какой-либо стороны. В качестве критериев отбора часто выступают фундаментальные физические принципы, присутствующие в исходной модели — такие, как выполнение законов сохранения, вариационные принципы и т.д. В связи с этим большое значение приобретают качественные соображения при построении численных алгоритмов, позволяющие вносить “физическое содержание” изучаемого объекта в численный метод исследования его математической модели. Такой взгляд привел к созданию методов построения консервативных и полностью консервативных разностных схем (см. [40, 42, 44]), к интегро-интерполяционному подходу, к вариационным методам построения схем и другим методам (см. [8, 9, 14, 30, 39, 40, 42, 47]).

Инвариантность дифференциальных уравнений относительно непрерывной группы преобразований является, безусловно, фундаментальным свойством этих моделей и отражает однородность и изотропность пространства-времени, справедливость принципа Галилея и других свойств симметрии физических моделей, интуитивно (или на основании эксперимента) закладываемых их создателями. Поэтому отражение свойства симметрии в конечно-разностной модели, адекватно передающее симметрию исходной дифференциальной модели, представляется важной задачей теории разностных схем и может служить тем критерием отбора, о котором говорилось выше.

Впервые теория непрерывных групп преобразований была сформулирована С. Ли при развитии им общих методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Дальнейшее развитие группового анализа дифференциальных уравнений и систематическое изучение структуры множества их решений — фактически второе рождение группового анализа — связано с работами Л.В. Овсянникова и его научной школы (см. [33–35]). После работ Л.В. Овсянникова, Г. Биркгофа [56], их учеников и последователей [27, 38, 52, 57, 58, 101] приложение идей С. Ли к описанию симметрии дифференциальных уравнений оформилось в самостоятельное научное направление. В настоящее время групповой анализ представляет собой общепризнанный метод описания непрерывных симметрий дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений математической физики.

Привлекательность теоретико-группового подхода к созданию и исследованию различных математических моделей (в том числе и разностных схем) заключается в том, что групповой анализ обладает мощными инфинитезимальными критериями инвариантности многообразий. Это проявляется в том, что задача нахождения непрерывной группы преобразований сводится к решению *линейной* системы уравнений, вне зависимости от линейности или нелинейности исходной модели. В случае, когда моделируется физический процесс при известной симметрии, задача сводится к отысканию набора дифференциальных (или разностных — в нашем случае) инвариантов, которая также линейна.

Знание группы преобразований, допускаемой данной математической моделью, дает значительную информацию о множестве ее решений. При этом структура допускаемой группы коррелирована с алгебраической структурой множества всех решений данной системы. Чем шире допускаемая группа, тем больше возможностей для ее применения. Поэтому представляется важным сохранить всю симметрию исходной непрерывной модели в ее конечно-разностном аналоге.

В настоящей работе внимание уделено в основном проблеме *построения* разностных уравнений и сеток, при котором разностная модель сохраняет симметрию исходной непрерывной модели. Процедура введения конечно-разностных переменных носит довольно формальный характер. Однако интуитивно можно опираться на геометрическое представление, что "разностное" пространство погружено в "непрерывное", т. е. непрерывные преобразования затрагивают все эвклидово пространство соответствующей размерности, однако мы при этом интересуемся лишь счетным набором его точек. Это приводит к тому, что в математическом аппарате используются два типа переменных — непрерывные и дискретные. Первые используются для описания касательных полей непрерывных групп преобразований, вторые служат для формулировки разностных форм и уравнений. В результате появляется довольно необычный объект — инфинитезимальный оператор группы, действие которого представляет собой непрерывное дифференцирование по дискретным переменным.

Конечно-разностные операторы, в отличие от дифференциальных, задаются на конечном наборе точек (на разностном шаблоне) из счетного числа всех точек разностной сетки, на которых интересуются решением задачи. Такая нелокальность операторов (с физической точки зрения — присутствие в задаче характерных размерных масштабов) приводит к наличию специфических свойств разностных операторов, отсутствующих в локальной дифференциальной модели. Это проявляется, в частности, в наличие "правого" и "левого" дифференцирования и соответствующих сдвигов, в существовании равномерных и неравномерных сеток, в специфике разностного правила Лейбница. Эта специфика приводит к возникновению своеобразного *исчисления бесконечно-малых преобразований конечно-разностных переменных*, которому посвящена гл. I.

В гл. II аппарат групп точечных преобразований применяется к исследованию инвариантных свойств разностных уравнений. Проведена групповая классификация обыкновенных разностных уравнений второго порядка и разностных сеток. В результате получен исчерпывающий список инвариантных разностных моделей, который оказался существенно шире соответствующего списка инвариантных дифференциальных уравнений второго порядка, полученного С. Ли. В частности, получены инвариантные разностные уравнения, не имеющие континуального предела.

Рассмотрены многочисленные примеры построения конечно-разностных моделей (т.е. разностных уравнений и сеток), полностью сохраняющих непрерывную симметрию исходных дифференциальных моделей. Заметим, что большинство построенных инвариантных разностных схем является необычными схемами, далекими от традиционных. В этой же части строятся примеры *точных* схем. Множество решений точных схем, совпадающее в узлах сетки с соответствующими решениями дифференциального уравнения, допускает, очевидно, группу симметрий дифференциального уравнения. Поэтому точная схема (и сетка) должна быть инвариантной и ее можно строить из разностных инвариантов.

Известно, что в большинстве случаев законы сохранения являются основой для построения математических моделей. Связь законов сохранения с симметрией соответствующей вариационной задачи получила вполне законченное конструктивное оформление в виде теоремы Нётер [32]. Эта теорема устанавливает связь между инвариантностью вариационного функционала и консервативностью соответствующих дифференциальных уравнений Эйлера, т. е. выполнением законов сохранения на их решениях.

В гл. III рассмотрены инвариантные вариационные задачи для разностных функционалов и строится разностный аналог конструкции Э. Нётер. Разностные вариационные задачи имеют свою специфику и, вообще говоря, существенно отличаются от непрерывного варианта. Тем не менее и в разностном случае предлагаются вполне конструктивные методы, позволяющие строить инвариантные схемы и сетки, обладающие разностными аналогами законов сохранения. Показывается, что инвариантность сеточного (конечно-разностного) функционала не ведет автоматически к инвариантности соответствующих уравнений Эйлера. Получено *новое разностное уравнение* (не совпадающее, вообще говоря, с разностным уравнением Эйлера), на решениях которого достигается стационарность функционала при преобразованиях группы. Это уравнение, названное *квазиэкстремальным*, зависит от координат оператора группы и в случае инвариантности функционала обладает соответствующим законом сохранения. Для пересечения квазиэкстремалей инвариантного функционала удается сформулировать теорему, вполне аналогичную теореме Э. Нётер. Кроме того, для инвариантных разностных уравнений возможна и другая конструкция нётеровского типа. Для этого предлагается отказаться от строгой инвариантности сеточного функционала и заменить ее на некоторые новые условия *квазиинвариантности.* Получены условия квазиинвариантности сеточного функционала, приводящее к инвариантности уравнений Эйлера. Доказывается, что выполнение этих условий на экстремалях является необходимым и достаточным условием консервативности разностных уравнений Эйлера. Заметим, что обе конструкции в континуальном пределе переходят в классическую теорему Нётер.

Надо отметить, что в этой работе все вопросы рассматриваются локально, как и в классическом групповом анализе: вопросы инвариантности разностных уравнений и разностных сеток изучаются в окрестности некоторой произвольной точки. Отличие от случая дифференциальных уравнений заключается в том, что “точкой” в разностном случае является разностный шаблон, имеющий вполне определенную геометрическую структуру. Наличие геометрической структуры у разностного шаблона приводит к *исключительной роли преобразований независимых переменных.* Отличительной особенностью нашего подхода к групповым свойствам разностных уравнений является включение преобразований независимых переменных в класс допустимых преобразований; это позволяет в конечном итоге строить разностные модели, полностью сохраняющие симметрию исходных дифференциальных уравнений.

Заметим также, что здесь мы не будем обсуждать вопросов *вычислительной реализации* полученных инвариантных разностных моделей, поэтому работа не содержит конкретных численных расчетов.

При изложении материала предполагается, что основные сведения из классического группового анализа известны [33–35], так же, как и сведения из теории разностных схем [40]. Использовались обозначения, характерные как для группового анализа, так и принятые в литературе по численным методам.

Автор глубоко благодарен Л.В. Овсянникову и А.А. Самарскому, многолетнее общение с которыми сформировало его взгляды и во многом определило содержание излагаемых здесь результатов. Автор искренне признателен С.П. Курдюмову за всемерную поддержку в работе.

Автор благодарен М.И. Бакировой, П. Винтерницу, Р.В. Козлову, соавторам работ, нашедших отражение в книге.

В основе настоящей книги лежат работы, выполненные при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, финансировавшего также настоящее издание (издательский проект № 01-01-14091).

ГЛАВА I

РАЗНОСТНАЯ АЛГЕБРА И АЛГЕБРА БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

В этой главе выясняется, как действует локальная группа Ли преобразований на нелокальные объекты, какими являются конечно-разностные переменные, шаги сетки и т.д.

Конечно-разностные операторы, в отличие от дифференциальных, задаются на конечном наборе точек (на разностном шаблоне) из счетного числа всех точек разностной сетки, на которой ищется решение задачи. Такая *нелокальность* операторов (с физической точки зрения — присутствие в задаче характерных размерных масштабов) приводит к наличию специфических свойств разностных операторов, отсутствующих в локальной дифференциальной модели. Это проявляется, в частности, в наличии “правого” и “левого”дифференцирования и соответствующих сдвигов, в существовании равномерных и неравномерных сеток, в специфике разностного правила Лейбница. Эта специфика приводит к возникновению своеобразного *исчисления бесконечно малых преобразований разностных переменных.*

Нелокальность разностных операторов приводит к тому, что группа преобразований может исказить пропорции, ортогональность и другие геометрические характеристики разностного шаблона. Нарушение структурных свойств сетки при преобразованиях в свою очередь может исказить разностные уравнения, например, нарушить порядок аппроксимации, коммутативность разностного дифференцирования; искажение ортогональности сетки может привести к потере геометрического смысла производных и т.д. Поэтому в критерий инвариантности разностных уравнений необходимо включать и инвариантность разностного шаблона (как элемента разностной сетки), на котором они записаны. Это приводит к возникновению своеобразной *геометрии сеток, связанной с группами преобразований.*

Следующий шаг — это выяснение требований на группы преобразований, при которых сохраняется *смысл конечно-разностных производных*, т.е. происходит сохранение определения разностных производных в преобразованных переменных. Оказалось, что это требование эквивалентно сохранению касания бесконечного порядка, т. е. в “непрерывном” пространстве такие группы удовлетворяют формулам точечных преобразований, касательных преобразований и “высших симметрий” или групп Ли–Беклунда.

В этой части рассмотрены также некоторые структурные свойства групп преобразований в сеточных пространствах, а также формулы разностного интегрирования и замены переменных, необходимые для изучения групповых свойств конечно-разностных уравнений.

§ 1. Предварительные рассуждения

Попробуем “начать с конца” и сразу рассмотеть вопрос об инвариантности какого-нибудь разностного уравнения, пользуясь лишь начальными знаниями о группах Ли точечных преобразований в пространстве “непрерывных” переменных.

Рассмотрим в качестве примера линейное уравнение теплопроводности

$$u_t = u_{xx}. \tag{1.1}$$

Это уравнение, как известно, допускает шестипараметрическую группу точечных преобразований и, кроме того, бесконечную группу, эквивалентную линейности уравнения (1.1) (см., например, [53]). Эта группа преобразований вполне описывается следующей алгеброй Ли инфинитезимальных операторов:

$$\begin{gathered}
X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = 2t\,\frac{\partial}{\partial t} + x\,\frac{\partial}{\partial x}, \\
X_4 = u\,\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_5 = 2t\,\frac{\partial}{\partial x} - xu\,\frac{\partial}{\partial u}, \\
X_6 = 4t^2\,\frac{\partial}{\partial t} + 4tx\,\frac{\partial}{\partial x} - (x^2 + 2t)\,\frac{\partial}{\partial u}, \\
X_* = a(x,t)\,\frac{\partial}{\partial u},
\end{gathered} \tag{1.2}$$

где a — любое решение уравнения (1.1).

Рассмотрим какую-нибудь простейшую разностную модель, аппроксимирующую (1.1), и посмотрим, как на нее действуют преобразования (1.2). В качестве такого простейшего разностного уравнения рассмотрим явную разностную схему (в точке $x = x^i, t = t^j$)

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} \tag{1.3}$$

на ортогональной разностной сетке, равномерной по направлениям t, x с шагами τ и h соответственно.

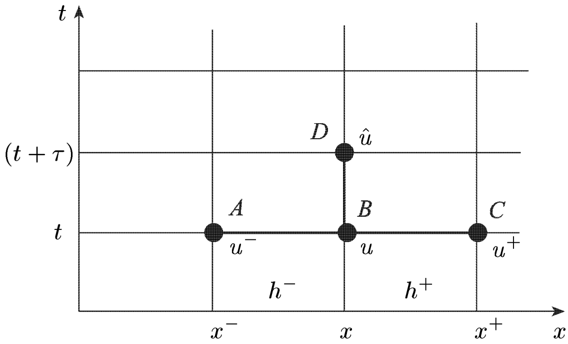

Рис. 1.1

Сразу же отметим существенное отличие “дискретного” варианта (1.3) от “непрерывного” (1.2). Задание любой функции $u_i^j = \phi_i^j(t^j, x^i)$ бессмысленно, если не задано описание дискретного множества t^j, x^i, на котором u_i^j определена. Это же относится и к разностному уравнению, в частности к (1.3). Поэтому к уравнению (1.3) необходимо дописать что-нибудь, полностью характеризующее разностную сетку, т. е. счетное множество (t^j, x^i), на котором мы интересуемся решением (1.3). Допишем это пока что просто словами:

ортогональная разностная сетка,
равномерная по направлениям t и x. (1.4)

В уравнении (1.3) целочисленные индексы i и j пробегают конечный или бесконечный интервал, однако, мы будем рассматривать это уравнение локально, в окрестности некоторой точки (t, x, u), подразумевая, что во всех остальных точках уравнение (1.3) записывается точно так же (такие схемы называют однородными [40]).

В соответствии с этим перепишем (1.3) в безындексной форме:

$$\frac{\hat{u} - u}{\tau} = \frac{u^+ - 2u + u^-}{h^2}, \tag{1.3*}$$

где символ ˆ означает переход на "верхний" слой по t, а $+$ и $-$ означают сдвиг вправо и влево по x.

Множество точек в плоскости (t,x), используемых для описания (1.3^*), будем называть *разностным шаблоном* (см. рис. 1.1)

Множество точек $(x, x+h, x-h, t, t+\tau)$ разностного шаблона — это "точка" разностного пространства в плоскости (t,x), где мы рассматриваем уравнение (3^*). В отличие от непрерывного случая, "точка" разностного пространства имеет вполне определенную геометрическую структуру (1.4). Чтобы описать эту структуру, введем в точке (t,x) "правые" и "левые" шаги: h^+, h^-, τ^+, τ^-, обозначим точки разностного шаблона: A, B, C, D. Тогда структуру сетки (1.4) можно записать следующим образом:

$$(\vec{AB})(\vec{BD}) = (\vec{BC})(\vec{BD}) = 0, \quad h^+ = h^-, \quad \tau^+ = \tau^-. \tag{1.4*}$$

Теперь можно рассмотреть действие группы G с операторами (1.2) на уравнение (1.3^*) и соотношения (1.4^*). Заметим, что преобразования (1.2) являются непрерывными, т. е. мы изменяем координаты всех точек пространства (t,x,u) *непрерывным* образом, в частности, координаты точек, соответствующие разностному шаблону рис. 1.1 (а не дискретным образом, когда, например, одни точки сетки переходят в другие точки сетки). Мы будем говорить, что уравнения (1.3^*), (1.4^*) инвариантны относительно соответствующих преобразований, если в преобразованных переменных уравнения (1.3^*), (1.4^*) имеют тот же вид. Рассмотрим действие $X_1 - X_*$ на систему (1.3^*), (1.4^*).

Преобразования трансляции

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{и} \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}$$

означают соответствующие сдвиги независимых переменных:

1) $t^* = t + a, \quad x^* = x, \quad u^* = u;$

2) $t^* = t, \quad x^* = x + a, \quad u^* = u,$

где a — групповой параметр.

Совершенно очевидно, что структура (1.4^*) сетки остается неизменной, так же как и уравнение (1.3^*), т. е. (1.3^*), (1.4^*) инвариантны относительно X_1 и X_2.

Группа растяжений с $X_3 = 2t\dfrac{\partial}{\partial t} + x\dfrac{\partial}{\partial x}$ означает преобразования

$$t^* = e^{2a}t, \quad x^* = e^a x, \quad u^* = u.$$

Чтобы получить преобразования шагов сетки, рассмотрим орбиты группы, проходящие через точки разностного шаблона. Очевидно, что оператор X_3 можно записать в виде, продолженном на координаты точек A, C и D:

$$X_3 = 2t\,\frac{\partial}{\partial t} + x\,\frac{\partial}{\partial x} + 2\hat{t}\,\frac{\partial}{\partial \hat{t}} + 2\check{t}\,\frac{\partial}{\partial \check{t}} + x^+\,\frac{\partial}{\partial x^+} + x^-\,\frac{\partial}{\partial x^-},$$

где $\hat{t} = t + \tau^+, \quad \check{t} = t - \tau^-$. Это означает, что "дополнительные" координаты $\hat{t}, \check{t}, x^+, x^-$ преобразуются так же, как и "основные" t, x:

$$\hat{t}^+ = e^{2a}\hat{t}, \quad \check{t}^* = e^{2a}\check{t},$$

$$x^{+^*} = e^a x^+, \quad x^{-^*} = e^a x^-.$$

Из этого следует, как преобразуются шаги сетки:

$$\tau^{+^*} = \hat{t}^* - t^* = e^{2a}(\hat{t} - t) = e^{2a}\tau^+, \quad \tau^{-^*} = e^{2a}\tau^-,$$

$$h^{+*} = x^{+*} - x = e^a(x^+ - x) = e^a h^+, \quad h^{-*} = e^a h^-,$$

откуда операция $\left.\dfrac{\partial}{\partial a}\right|_{a=0}$ дает дополнительные координаты оператора X_3, продолженного на h^+, h^-, τ^+, τ^-:

$$X_3 = 2t\,\frac{\partial}{\partial t} + x\,\frac{\partial}{\partial x} + \dots + \tau^+\,\frac{\partial}{\partial \tau^+} + \tau^-\,\frac{\partial}{\partial \tau^-} + h^+\,\frac{\partial}{\partial h^+} + h^-\,\frac{\partial}{\partial h^-}.$$

Отсюда видно, что оператор X_3, растягивающий плоскость (t, x), расстягивает, очевидно, и разностную сетку. Соотношения $h^+ = h^-$, $\tau^+ = \tau^-$, очевидно, инвариантны относительно продолженного оператора X_3:

$$X_3(h^+ - h^-)\big|_{h^+=h^-} = 0, \quad X_3(\tau^+ - \tau^-)\big|_{\tau^+=\tau^-} = 0,$$

условия ортогональности сетки также выполнены:

$$(\overrightarrow{A^*B^*})(\overrightarrow{B^*D^*}) = (\overrightarrow{B^*C^*})(\overrightarrow{B^*D^*}) = 0.$$

Таким образом, *группа растяжений изменяет шаги сетки, но не меняет ее ортогональность и равномерность.*

Действие X_3 на разностное уравнение (1.3^*) также его не меняет:

$$X_3(\underset{\tau}{u}_t - \underset{h}{u}_{x\bar{x}})\big|_{\underset{\tau}{u}_t - \underset{h}{u}_{x\bar{x}}} = 0,$$

где мы ввели сокращенную запись разностных производных

$$\underset{\tau}{u}_t = \frac{\hat{u} - u}{\tau}, \qquad \underset{h}{u}_{x\bar{x}} = \frac{u^+ - 2u + u^-}{h^2}.$$

Таким образом, уравнения (1.3*), (1.4*) допускают растяжения, определяемые оператором X_3.

Оператор $X_4 = u\dfrac{\partial}{\partial u}$, не меняющий независимые переменные t, x и растягивающий u ($u^* = e^a u$), оставляет без изменения соотношения (1.4*) и, очевидно, допускается уравнением (1.3*):

$$X_4(\underset{\tau}{u}_t - \underset{h}{u}_{x\bar{x}})\Big|_{\underset{\tau}{u}_t = \underset{h}{u}_{x\bar{x}}} = 0.$$

Рассмотрим теперь подгруппу, задаваемую оператором X_5. Соответствующие конечные преобразования имеют вид:

$$t^* = t, \quad x^* = x + 2ta, \quad u^* = ue^{-xa - t^2a^2}.$$

Посмотрим, что происходит с разностной сеткой под действием этих преобразований. Эти преобразования не меняют t и, следовательно, не меняют шаг τ.

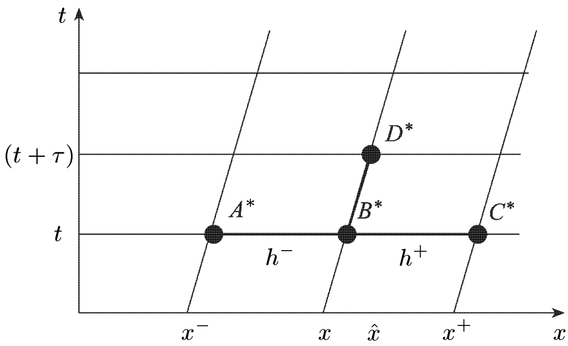

Рис. 1.2

При каждом фиксированном значении параметра a и на каждом временном слое t сетка сдвигается вдоль x, причем этот сдвиг пропорционален t. Структура сетки после преобразований изображена на рис. 1.2.

Ясно, что равномерность сетки по направлению x также не меняется: $h^{+*} = x^{+*} - x^* = h^+$. Однако, нарушается ортогональность сетки, что легко проверить на соотношениях (1.4*). Посмотрим, к чему это приведет. Уравнение (1.3*) под действием преобразований перейдет в следующее:

$$\frac{\hat{u}e^{-xa-(t+\tau)^2a^2} - ue^{-xa-t^2a^2}}{\tau} =$$
$$= \frac{u^+e^{-(x+h)a} - 2ue{-xa} + u^-e^{-(x-h)a}}{h^2}\, e^{-t^2 a},$$

или

$$\frac{\hat{u}e^{-\tau(2t+\tau)a^2} - u}{\tau} = \frac{u^+e^{-ha} - 2u + u^-e^{+ha}}{h^2}. \tag{1.5}$$

Таким образом, преобразования, задаваемые X_5, нарушили ортогональность сетки и изменили уравнение (1.3*). Что означает уравнение (1.5) на преобразованной сетке? Заметим прежде всего, что оператор X_5, нарушив ортогональность сетки, не изменил смысл пространственных разностных производных, в частности $\underset{h}{u}{}_x$, однако нарушил геометрический смысл производной по времени $\underset{\tau}{u}{}_t$, поскольку преобразованное выражение производной по времени $\underset{\tau}{u}{}_t{}^* = \dfrac{\hat{u}^* - u^*}{\tau}$ имеет не только разностную составляющую по t, но и по x. Допустим теперь, что уравнение (1.5) имеет достаточно гладкое решение $u = u(x,t)$. Подставив $u^+ = u + hu_x + \dfrac{h^2}{2}u_{xx} + O(h^2)$, $\quad u^- = u - hu_x + \dfrac{h^2}{2}u_{xx} + O(h^2)$, $\quad \hat{u} = u + u_t\tau + u_x 2\tau a + O(\tau)$ (здесь мы учли пространственную составляющую) в уравнение (1.5), получим с точностью до $O(\tau + h^2)$

$$u_t = u_{xx} - 4au_x + 2ta^2u.$$

Таким образом, разностное уравнение (1.3*), аппроксимировавшее уравнение (1.1) на ортогональной сетке с порядком $O(\tau + h^2)$, преобразуется в разностное уравнение (1.5) на “косой” сетке, аппроксимирующее совсем другое дифференциальное уравнение. Итак, оператор X_5 системой (1.3*), (1.4*) не допускается. Аналогичные рассуждения показывают, что действие X_6 также нарушает ортогональность сетки и, кроме того, нарушает равномерность сетки в направлении t.

Оператор $X_* = a\dfrac{\partial}{\partial u}$ не меняет переменные (t,x), а к величине u добавляет любое решение уравнения (1.1):

$$u^* = u + a(x,t)a.$$

Эта симметрия эквивалентна линейности уравнения (1.1).

Разностное уравнение (1.3*) также линейно, поэтому подстановка последнего преобразования дает

$$\frac{a(x,t+\tau) - a(x,t)}{\tau} = \frac{a(x+h,t) - 2a(x,t) + a(x-h,t)}{h^2},$$

где a — произвольное решение уравнения $a_t = a_{xx}$.

Пока неясно, является ли решение дифференциального уравнения (1.1) точным решением разностного уравнения (1.3*). Ясно, однако, что свойство линейности мы сохранили в разностном уравнении (1.3*), что эквивалентно симметрии с оператором

$$\underset{h}{X}_* = A(t,x)\,\frac{\partial}{\partial u},$$

где A — произвольное решение уравнения (1.3*) на сетке (1.4*).

Итак, рассмотренная нами разностная модель — уравнение (1.3*) на равномерной ортогональной сетке (1.4*) — сохранила лишь четыре симметрии из шести симметрий исходного уравнения (1.1), а также свойство линейности. Заметим, кстати, что сохраненная симметрия образует алгебру Ли — подалгебру исходной алгебры.

Мы выбрали простейшую разностную модель — явную схему на ортогональной сетке. Однако ясно, что использование неявной схемы или ее комбинация с явной не исправит положение, — преобразования, определенные X_5 и X_6, нарушают ортогональность сетки, что непоправимо разрушает также и структуру разностного уравнения.

В следующей главе будет построена разностная модель для уравнения (1.1), в которой будут сохранены все симметрии, но на неортогональной сетке, зависящей от решения.

Таким образом, геометрическая структура сетки (и, естественно, структура ее части — разностного шаблона) оказывает самое существенное влияние на свойство инвариантности разностной модели. В этой главе будут получены необходимые и достаточные условия сохранения геометрических характеристик разностной сетки (шаблона). Пользуясь ими, легко сразу же установить классы сеток, пригодные для той или иной симметрии, не проводя подробных построений, как мы это делали выше.

Заметим, что разностное уравнение описывается величинами, называемыми разностными производными:

$\underset{h}{u}_t = \dfrac{\hat{u} - u}{\tau^+}$, $\quad \underset{h}{u}_x = \dfrac{u^+ - u}{h^+}$ — правые производные по времени и пространству,

$\underset{h}{u}_{\bar{x}} = \dfrac{u - u^-}{h^-}$ — левая пространственная производная,

$\underset{h}{u}_{x\bar{x}} = \dfrac{\underset{h}{u}_x - \underset{h}{u}_{\bar{x}}}{h} = \dfrac{u^+ - 2u + u^-}{h^2}$ — вторая разностная производная по пространству и так далее.

Удобно ввести операторы сдвига вправо $\underset{+\tau}{S}$, $\underset{+h}{S}$ и влево $\underset{-\tau}{S}$, $\underset{-h}{S}$, действующие на t, x и любые функции от них, и транслирующие их в соседний узел вправо и влево. Тогда операторы

$$\underset{+h}{D} = \frac{\underset{+h}{S} - 1}{h}, \quad \underset{-h}{D} = \frac{1 - \underset{-h}{S}}{h},$$

$$\underset{+\tau}{D} = \frac{\underset{+\tau}{S} - 1}{\tau}, \quad \underset{-\tau}{D} = \frac{1 - \underset{-\tau}{S}}{\tau}$$

определяют разностное дифференцирование вправо и влево, с их помощью легко ввести разностные производные:

$$\underset{h}{u}_x = \underset{+h}{D}(u), \quad \underset{h}{u}_{\bar{x}} = \underset{-h}{D}(u),$$

$$\underset{h}{u}_{x\bar{x}} = \underset{h}{u}_{\bar{x}x} = \underset{-h}{D}\,\underset{+h}{D}(u) = \underset{+h}{D}\,\underset{-h}{D}(u),$$

и т.д. Отметим, что на равномерной сетке операторы $\underset{+h}{D}$ и $\underset{-h}{D}$ коммутируют.

В следующих разделах будет показано, как можно получить разностные производные естественным образом, исходя из "непрерывного" пространства и "непрерывного" дифференцирования.

§ 2. Формальные степенные ряды и формальные группы

Нелокальность объектов, необходимых для описания разностных уравнений, сеток, разностных функционалов с необходимостью требует привлечения бесконечномерных пространств или пространств последовательностей (см. [27, 45]).

Рассмотрим пространство Z последовательностей $(x, u, u_1, u_2, \dots)$, где x — независимая переменная, u — зависимая переменная, $u_1, u_2, \dots$ — дифференциальные переменные; u_s будем называть производной s-го порядка. Под z будем подразумевать любое *конечное число* координат вектора $(x, u, u_1, u_2, \dots)$, под z^i — i-ю его координату.

В пространстве Z зададим отображение D (дифференцирование), действующее по правилу:

$$D(x) = 1, \quad D(u) = u_1, \ \dots, \quad D(u_s) = u_{s+1}, \quad s = 1, 2, \dots$$

Пусть A — пространство аналитических функций $F(z)$ от конечного числа переменных z (при этом разные функции $F(z)$, входящие в A, могут зависеть от разного набора переменных из $(x, u, u_1, u_2 \dots)$, но сам набор всегда конечен). Отождествляя D с действием линейного дифференциального оператора первого порядка

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + u_1 \frac{\partial}{\partial u} + u_2 \frac{\partial}{\partial u_1} + \ldots + u_{s+1} \frac{\partial}{\partial u_s} + \ldots,$$

мы распространяем дифференцирование D на функции из A, при этом $D(F(z)) \in A$.

Рассмотрим последовательности формальных степенных рядов от одного символа a (параметра)

$$f^i(z,a) = \sum_{k=0}^{\infty} A^i_k(z) a^k, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{2.1}$$

где $A^i_k(z) \in A$, причем ${}^{i}_{0} \equiv z^i$, z^i — i-я координата вектора из Z.

Пространство последовательностей формальных степенных рядов (2.1)

$$(f^1(z,a), f^2(z,a), \ldots, f^s(z,a) \ldots)$$

обозначим через $\widetilde{Z}$. Последовательности $(x, u, u_1, u_2, \ldots)$ являются частным случаем последовательностей рядов (2.1): $\quad Z \subset \widetilde{Z}$.

В $\widetilde{Z}$ по определению зададим операции сложения, умножения на число и произведения формальных рядов, совпадающие с соответствующими операциями для сходящихся рядов:

$$\alpha \left(\sum_{k=0}^{\infty} A^i_k a^k \right) + \beta \left(\sum_{k=0}^{\infty} B^i_k a^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\alpha A^i_k + \beta^i_k \right) a^k,$$

$$\sum_{k_1=0}^{\infty} A^i_{k_1} a^{k_1} \left(\sum_{k_2=0}^{\infty} B^i_{k_2} a^{k_2} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{k_1+k_2=k}^{\infty} A^i_{k_1} B^i_{k_2} \right) a^k,$$

$$i = 1, 2, \ldots, \quad \alpha, \beta = \mathrm{const},$$

а также операции дифференцирования рядов (2.1):

$$D \left(\sum_{k=0}^{\infty} A^i_k(z) a^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} D(A^i_k(z)) a^k,$$

$$\frac{\partial}{\partial a} \left(\sum_{k=0}^{\infty} A^i_k(z) a^k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} k A^i_k(z) a^{k-1},$$

$$\frac{\partial}{\partial a} \left(\sum_{k=0}^{\infty} A^i_k(z) a^k \right) \Bigg|_{a=0} = A^i_1(z), \qquad i = 1, 2, \ldots$$

Фигурирующие выше равенства формальных степенных рядов означают совпадение коэффициентов рядов при соответствующих степенях a. В частности, ряд (2.1) равен 0, если все $A^i_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$

В $\widetilde{Z}$ рассмотрим преобразования, определяемые рядами (2.1):

$$z^{i*} = f^i(z, a), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{2.2}$$

переводящие последовательность z^i в последовательность z^{i*}.

Введенные операции над рядами (2.1) позволяют рассматривать степени от рядов вида (2.1), мономы, полиномы, и, наконец, аналитические функции (или формальные степенные ряды) от конечного числа переменных z^i. Тем самым определена суперпозиция преобразований вида (2.2)

$$z^{i**} = f^i(z^*, b) = \sum_{k=0}^{\infty} A^i_k(z^*) b^k = \sum_{k=0}^{\infty} A^i_k(f(z, a)) b^k, \quad i = 1, 2 \ldots$$

Такая суперпозиция, вообще говоря, выводит однопараметрические ряды (2.1) из $\widetilde{Z}$. Мы будем рассматривать только такие ряды (2.1) (и соответствующие преобразования (2.2)), структура коэффициентов которых обеспечивает замкнутость в $\widetilde{Z}$ преобразований (2.2):

$$z^{i**} = f^i(z^*, b) = f^i(z, (a + b)) = \sum_{k=0}^{\infty} A^i_k(z)(a + b)^k, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{2.3}$$

Свойство (2.3) формальных рядов (2.1) означает, что преобразования (2.2) образуют *формальную однопараметрическую группу* в $\widetilde{Z}$.

Свойство (2.3) эквивалентно следующему экспоненциальному представлению степенных рядов (2.1) (см. [20, 22]):

$$z^{i*} = f^i(z, a) = e^{aX}(z^i) \equiv \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a^s}{s!} X^{(s)}(z^i), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{2.4}$$

где X — инфинитезимальный оператор (генератор) группы

$$X = \xi^i(z) \frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{2.5}$$

$$\xi^i(z) = \left.\frac{\partial f^i(z, a)}{\partial a}\right|_{a=0}, \quad i = 1, 2, \ldots, \xi^i(z) \in A. \tag{2.6}$$

Покажем, что представление (2.4) эквивалентно определению формальной группы (2.3). Для этого рассмотрим суперпозицию преобразований вида (2.4)

$$z^{i**} = e^{bX}(e^{aX}(z^i)) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{b^l}{l!} X^{(l)} \left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{a^s}{s!} X^{(s)}(z^i) \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{s+l=k}^{\infty} \frac{a^s b^l}{s!\, l!} X^{s+l}(z^i) \right) = \sum_{k=0} \frac{(a+b)^k}{k!} X^k(z^i) = e^{(a+b)X}(z^i).$$

Тем самым представление (2.4) эквивалентно (2.3). Кроме того, очевидно, что $f^i(z,a)\big|_{a=0} = z^i, \quad f^i(f^i(z,a),(-a)) = z^i$.

Таким образом, для формальных однопараметрических групп справедливо экспоненциальное представление через инфинитезимальный оператор так же, как и для классических локальных групп Ли преобразований.

Заметим, что экспоненциальное представление (2.4) дает рекуррентную цепочку для коэффициентов формальной группы (2.2)

$$A_k^i(z) = \frac{1}{k} X(A_{k-1}^i(z)), \quad k = 1, 2, \ldots, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

а также удобную для вычисления коэффициентов формальных рядов (2.2) формулу $A_k^i(z) = \dfrac{1}{k!} X^{(k)}(z^i), \quad k = 1, 2, \ldots, \quad i = 1, 2, \ldots$

В теории формальных групп показывается (см. [27]), что касательное векторное поле $\xi^i(z) = \dfrac{\partial f^i(z,a)}{\partial a}\Big|_{a=0}$ связано с формальными рядами (2.1) с помощью уравнений Ли:

$$\frac{\partial f^i}{\partial a} = \xi^i(f),$$

$$f^i(z,a)\big|_{a=0} = z^i, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{2.7}$$

т. е. последовательность формальных рядов $(f^1, f^2, \ldots)$, образующих группу с касательным полем $\xi^i(z)$, удовлетворяет системе (2.7), и, обратно, для любой последовательности функций $(\xi^1(z), \xi^2(z), \ldots)$, $\xi^i(z) \in A$, решение системы (2.7) образует формальную однопараметрическую группу.

Таким образом, на формальные однопараметрические группы распространяется такая же связь группы и оператора, какая присутствует в классических локальных группах Ли. В случае когда формальные степенные ряды сходятся и образуют достаточно гладкие дифференцируемые функции, мы имеем дело с группами Ли точечных или касательных преобразований. Таким образом, точечные и контактные преобразования составляют часть формальных групп, но не исчерпывают их целиком. Дополнительным классом к группам точечных и касательных преобразований являются группы "высших симметрий" или группы Ли–Беклунда [27, 38].

Для формальных групп, так же, как и для групп Ли точечных и касательных преобразований, можно определить понятие инварианта и инвариантного многообразия.

Локально-аналитическая функция $F(z)$ от конечного числа переменных называется *инвариантом* формальной группы, если $F(z^*) = F(z)$ для любых преобразований группы (2.2).

Для того чтобы $F(z) \in A$ была инвариантом, необходимо и достаточно, чтобы

$$XF(z) = 0, \tag{2.8}$$

где X — оператор группы (2.5).

Многообразие, заданное в $\widetilde{Z}$ с помощью функции $\phi(z) \in A$:

$$\phi(z) = 0, \tag{2.9}$$

называется *инвариантным*, если для всех решений (2.9) и всех преобразований формальной группы справедливо

$$\phi(z^*) = 0.$$

Критерий инвариантности многообразия также записывается с помощью оператора группы (см. [27, 38]):

$$X\phi(z)\big|_{\phi(z)=0} = 0. \tag{2.10}$$

Среди формальных групп, преобразования которых описываются формальными степенными рядами (2.1), особое место занимают точечные и контактные группы, а также высшие симметрии. Если первые два класса преобразований можно рассматривать в конечномерной части $\widetilde{Z}$, то любая нетривиальная высшая симметрия может быть реализована лишь во всем бесконечномерном пространстве $\widetilde{Z}$. Одна из таких групп нами будет рассмотрена в следующем пункте. Это позволит нам ввести конечно-разностные переменные естественным образом.

§ 3. Группа Тейлора, введение разностных производных. Разностное правило Лейбница

1. Рассмотрим группу преобразований (2.2) в пространстве $\widetilde{Z}$ формальных рядов с инфинитезимальным оператором, совпадающим с оператором (полного) дифференцирования:

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + u_1 \frac{\partial}{\partial u} + u_2 \frac{\partial}{\partial u_1} + \ldots + u_{s+1} \frac{\partial}{\partial u_s} + \ldots \tag{3.1}$$

Для простоты мы для начала ограничимся случаем одной независимой переменной x и одной зависимой переменной u.

Преобразования (2.2) этой группы в соответствии с экспоненциальным представлением (2.4) определены действием оператора $T_a \equiv e^{aD}$:

$$z^{i*} = e^{aD}(z^i) \equiv \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a^s}{s!} D^{(s)}(z^i).$$

Точка $z^* \in \widetilde{Z}$ имеет следующие координаты:

$$\begin{gathered} x^* = T_a(x) = x + a, \\ u^* = T_a(u) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a^s}{s!} u_s, \\ u_1^* = T_a(u_1) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a^s}{s!} u_{s+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_k^* = T_a(u_k) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a^s}{s!} u_{k+s}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered} \tag{3.2}$$

Преобразования (3.2), рассмотренные на поверхности $u = u(x)$, представляют собой разложение в формальные ряды Тейлора функции $u = u(x)$ в точке $(x + a)$, поэтому группа преобразований (3.2) с оператором (3.1) была названа группой тейлоровского сдвига или *группой Тейлора* ([20]).

В теории высших симметрий или групп Ли–Беклунда (см. [27, 38]) среди преобразований вида (1.2), составляющих группу, выделяются преобразования, которые сохраняют определение и геометрический смысл производных $(u_1, u_2, \ldots)$ в $\widetilde{Z}$, т. е. оставляют инвариантной следующую бесконечную последовательность (мы по-прежнему ограничиваемся одномерным случаем)

$$\begin{gathered} du = u_1 dx, \\ du_1 = u_2 dx, \\ \dots\dots\dots\dots \\ du_s = u_{s+1} dx, \\ \dots\dots\dots\dots \end{gathered} \tag{3.3}$$

Легко проверить, что группа Тейлора сохраняет инвариантность системы (3.3) и поэтому является группой высших симметрий.

Более того, *группа Тейлора является нетривиальной группой высших симметрий*, т. е. не является продолжением в $\widetilde{Z}$ группы точечных или касательных преобразований. Это следует из того, что последовательность уравнений Ли для определения конечных преобразований группы Тейлора по оператору группы D

$$\begin{gathered} \frac{dx^*}{da} = 1, \quad x^*|_{a=0} = x, \\ \frac{du^*}{da} = u_1^*, \quad u^*|_{a=0} = u, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{du_s^*}{da} = u_{s+1}^*, \quad u_s^*|_{a=0} = u_s, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{gathered}$$

не имеет решения в конечномерной части $\widetilde{Z}$. Иначе говоря, разложения в формальные ряды Тейлора (3.2) образуют однопараметрическую группу лишь в бесконечномерном пространстве $\widetilde{Z}$.

Группа Тейлора является удобным инструментом при изучении инвариантных свойств конечно-разностных объектов.

2. Зафиксируем произвольное значение параметра $a = h > 0$ и с помощью касательного поля (3.1) группы Тейлора образуем пару операторов, которые будем называть соответственно *операторами дискретного сдвига вправо и влево*:

$$\underset{+h}{S} = e^{hD} \equiv \sum_{s=0}^{\infty} \frac{h^s}{s!}\, D^s, \qquad \underset{-h}{S} = e^{-hD} \equiv \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-h)^s}{s!}\, D^s, \tag{3.4}$$

где D — дифференцирование в $\widetilde{Z}$. Операторы $\underset{+h}{S}$ и $\underset{-h}{S}$ коммутируют друг с другом и с оператором T_a, причем $\underset{+h}{S}\,\underset{-h}{S} = \underset{-h}{S}\,\underset{+h}{S} = 1$. Кроме того,

$$(\underset{\pm h}{S})^n = T_a\big|_{a=\pm nh}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

С помощью $\underset{+h}{S}$ и $\underset{-h}{S}$ образуем пару операторов дискретного (конечно-разностного) дифференцирования вправо и влево:

$$\underset{+h}{D} = \frac{1}{h}(\underset{+h}{S} - 1) \equiv \sum_{s=1}^{\infty} \frac{h^{(s-1)}}{s!} D^s, \tag{3.5}$$

$$\underset{-h}{D} = \frac{1}{h}(1 - \underset{-h}{S}) \equiv \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-h)^{(s-1)}}{s!} D^s.$$

Операторы $\underset{+h}{S}, \underset{-h}{S}, \underset{+h}{D}, \underset{-h}{D}, T_a$ коммутируют в любом сочетании, причем

$$\underset{+h}{D} = \underset{-h}{D}\,\underset{+h}{S}, \qquad \underset{-h}{D} = \underset{+h}{D}\,\underset{-h}{S}.$$

Таким образом, операторы сдвига $\underset{\pm h}{S}$ и разностного дифференцирования $\underset{\pm h}{D}$, введенные нами в §1 феноменологически, могут быть введены в $\widetilde{Z}$ как степенные операторные ряды (3.4), (3.5) от оператора группы Тейлора (3.1).

Операторы сдвига $\underset{\pm h}{S}$ и дифференцирования $\underset{\pm h}{D}$ позволяют провести “дискретизацию” пространства $\widetilde{Z}$, т. е. вовлечь в рассмотрение новые переменные-разностные производные.

Счетное множество значений независимой переменной $x : x_\alpha = \underset{+h}{S}{}^{\alpha}(x)$, $\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, будем обозначать $\underset{h}{\omega}$ и называть *равномерной разностной сеткой.*

Введем формальные степенные ряды специального вида

$$\begin{aligned} \underset{h}{u_1} &= \underset{+h}{D}(u), \\ \underset{h}{u_2} &= \underset{-h}{D}\,\underset{+h}{D}(u), \\ \underset{h}{u_3} &= \underset{+h}{D}\,\underset{-h}{D}\,\underset{+h}{D}(u), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{3.6}$$

переменную $\underset{h}{u_s}$ будем называть *конечно-разностной* (дискретной, сеточной) производной s-го порядка. В нечетном случае формальный ряд $\underset{h}{u}{}_{2k+1}$ будем называть *правой* разностной производной. Исходя из набора $\underset{h}{u}{}_{2k}$ и $\underset{h}{u}{}_{2k+1}$ можно ввести *левые* разностные производные нечетного порядка $\underset{h}{u}{}_{\overline{2k+1}}$ по формуле

$$\underset{h}{u}{}_{\overline{2k+1}} = \underset{h}{u}{}_{2k+1} - h\,\underset{h}{u}{}_{2k+2},$$

или разностную производную с весом σ:

$$\underset{h}{u}{}^{(\sigma)}_{2k+1} = \sigma \underset{h}{u}{}_{2k+1} + (1-\sigma) \underset{h}{u}{}_{\overline{2k+1}} = \underset{h}{u}{}_{2k+1} + h(1-\sigma) \underset{h}{u}{}_{2k+2}.$$

Последовательности формальных рядов $(\underset{h}{u}{}_1, \underset{h}{u}{}_2, \underset{h}{u}{}_3, \ldots)$ будем обозначать $\underset{h}{Z}$, произведение пространств $\underset{h}{Z}$ и $\widetilde{Z}$ через $\underset{h}{\widetilde{Z}}$:

$$\underset{h}{\widetilde{Z}} = (x, u, u_1, u_2, \ldots; \underset{h}{u}{}_1, \underset{h}{u}{}_2, \ldots).$$

Если ряд $\underset{h}{u}{}_s$ сходится, то его будем называть *непрерывным представлением разностной производной* $\underset{h}{u}{}_s$.

Заметим, что формальные ряды $\underset{h}{u}{}_s$ не представляются в экспоненциальном виде (1.5), поэтому они не образуют группу по параметру h, и их нельзя описывать касательным полем.

Действие дискретного сдвига $\underset{\pm h}{S}$ распространим (по определению) на функции из A:

$$\underset{\pm h}{S}(F(z)) = F(\underset{\pm h}{S}(z)). \tag{3.7}$$

Это позволяет находить разностные производные от $F \in A$:

$$\underset{\pm h}{D}(F(z)) = \pm \frac{F(\underset{\pm h}{S}(z)) - F(z)}{h}. \tag{3.8}$$

Исходя из этого определения, легко установить *дискретное* (разностное) *правило Лейбница* для операторов разностного дифференцирования вправо и влево:

$$\begin{aligned} \underset{+h}{D}(FG) &= \underset{+h}{D}(F)G + F\underset{+h}{D}(G) + h\underset{+h}{D}(F)\underset{+h}{D}(G), \\ \underset{-h}{D}(FG) &= \underset{-h}{D}(F)G + F\underset{-h}{D}(G) - h\underset{-h}{D}(F)\underset{-h}{D}(G), \end{aligned} \tag{3.9}$$

где $F, G \in A$.

Действительно,

$$\underset{+h}{D}(FG) = \frac{\underset{+h}{S}(FG) - FG}{h} = \frac{\underset{+h}{S}(F)G - FG}{h} + \frac{F\underset{+h}{S}(G) - FG}{h} +$$
$$+ h\frac{(\underset{+h}{S}(F) - F)(\underset{+h}{S}(G) - G)}{h^2} = \underset{+h}{D}(F)G + F\underset{+h}{D}(G) + h\underset{+h}{D}(F)\underset{+h}{D}(G).$$

Второе равенство столь же очевидно.

Правило Лейбница для разностного дифференцирования можно записать в другой эквивалентной форме:

$$\underset{\pm h}{D}(FG) = \underset{\pm h}{D}(F)G + \underset{\pm h}{S}(F)\,\underset{\pm h}{D}(G) = \underset{\pm h}{D}(F)\,\underset{\pm h}{S}(G) + F\,\underset{\pm h}{D}(G), \qquad (3.10)$$

что прямо следует из введенных выше определений.

3. Рассмотрим, как продолжается группа Тейлора в $\underset{h}{Z}$.

Прежде всего заметим, что группа Тейлора (3.2) не меняет шага h сетки $\underset{h}{\omega}: h^* = x^*_{\alpha+1} - x^*_\alpha = h$, поскольку $x^*_\alpha = x_\alpha + a$.

Зададим в $\underset{h}{\widetilde{Z}}$ преобразование переменных $\underset{h}{u}_s$ следующим образом:

$$\begin{gathered}
\underset{h}{u}{}^*_1 = \underset{+h}{D}(u^*) = u^*_1 + \frac{h}{2!}\,u^*_2 + \frac{h^2}{3!}\,u^*_3 + \ldots,\\
\underset{h}{u}{}^*_2 = \underset{-h}{D}\,\underset{+h}{D}(u^*) = u^*_2 + \frac{h^2}{12}\,u^*_4 + \ldots,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{gathered}$$

где u^*_s — формальные ряды вида (2.1), преобразования которых определяются касательным полем группы Тейлора: $\zeta^s = \left.\dfrac{\partial u^*_s}{\partial a}\right|_{a=0} = u_{s+1}$, $s = 1, 2, \ldots$

Исходя из этого легко вычислить касательное поле для переменных $\underset{h}{u}_s$:

$$\underset{h}{\zeta}{}^1 = \left.\frac{\partial \underset{h}{u}{}^*_1}{\partial a}\right|_{a=0} = \zeta^1 + \frac{h}{2!}\zeta^2 + \ldots = u_2 + \frac{h}{2!}u_3 + \ldots = D(\underset{h}{u}_1).$$

Совершенно аналогично,

$$\underset{h}{\zeta}{}^2 = \left.\frac{\partial \underset{h}{u}{}^*_2}{\partial a}\right|_{a=0} = D(\underset{h}{u}_2), \quad \ldots, \quad \underset{h}{\zeta}{}^s = D(\underset{h}{u}_s), \quad \ldots \qquad (3.11)$$

Таким образом, касательное поле группы Тейлора, продолженной в $\underset{h}{\widetilde{Z}}$, можно отождествить с оператором

$$\mathbf{D} = \sum_{i=1}^{\infty} D(z^i)\frac{\partial}{\partial z^i}, \qquad (3.12)$$

где z^i — координаты вектора $(x, u, u_1, u_2, \ldots, \underset{h}{u}_1, \underset{h}{u}_2, \ldots)$. Заметим, что координаты (3.11) являются формальными степенными рядами по h, поэтому ряды $\underset{h}{u}_s^{*} = \underset{h}{u}_s^{*}(h, a)$ являются формальными степенными рядами от *двух символов*, — "групповые" по a и "негрупповые" — по h.

4. Рассмотрим теперь результат действия оператора дискретного сдвига $\underset{\pm h}{S}$ в сеточном пространстве $\underset{h}{Z} = (x, u, \underset{h}{u}_1, \underset{h}{u}_2, \ldots)$:

$$\underset{\pm h}{S}(x) = x \pm h,$$

$$\underset{+h}{S}(u) = u + h\left(\sum_{s\geqslant 1} \frac{h^{s-1}}{s!}\, D^s(u)\right) \equiv u + h\,\underset{h}{u}_1,$$

аналогично получим

$$\underset{-h}{S}(u) = u - h\,\underset{-h}{S}(\underset{h}{u}_1) = u - h\,\underset{h}{u}_1 + h^2\,\underset{h}{u}_2.$$

Точно так же выделим в результате действия $\underset{\pm h}{S}$ на $\underset{h}{u}_k$, $\quad k = 1, 2, \ldots$ формальные ряды $\underset{h}{u}_s$. В результате получим *таблицу действия оператора дискретного сдвига в сеточном пространстве* $\underset{h}{Z}$ (см. табл. 3.1).

Таблица 3.1

Результат действия оператора дискретного сдвига на точку $z = (x, u, \underset{h}{u}_1, \underset{h}{u}_2, \ldots)$

$\underset{-h}{S}$ — конечно-разностный оператор сдвига влево	$\underset{+h}{S}$ — конечно-разностный оператор сдвига вправо
$\underset{-h}{S}(x) = x - h$	$\underset{+h}{S}(x) = x + h$
$\underset{-h}{S}(u) = u - h\,\underset{h}{u}_1 + h^2\,\underset{h}{u}_2$	$\underset{+h}{S}(u) = u + h\,\underset{h}{u}_1$
$\underset{-h}{S}(\underset{h}{u}_1) = \underset{h}{u}_1 - h\,\underset{h}{u}_2$	$\underset{+h}{S}(\underset{h}{u}_1) = u_1 + h\,\underset{h}{u}_2 + h^2\,\underset{h}{u}_3$
$\underset{-h}{S}(\underset{h}{u}_2) = \underset{h}{u}_2 - h\,\underset{h}{u}_3 + h^2\,\underset{h}{u}_4$	$\underset{+h}{S}(_2) = \underset{h}{u}_2 + h\,\underset{h}{u}_3$
....	....
$\underset{-h}{S}(\underset{h}{u}_{2k+1}) = \underset{h}{u}_{2k+1} - h\,\underset{h}{u}_{2k+2}$	$\underset{+h}{S}(\underset{h}{u}_{2k+1} = \underset{h}{u}_{2k+1} + h_{2k+2} + h^2\,\underset{h}{u}_{2k+3}$
$\underset{-h}{S}(\underset{h}{u}_{2k+2}) = \underset{h}{u}_{2k+2} - h\,\underset{h}{u}_{2k+3} + h^2\,\underset{h}{u}_{2k+4}$	$\underset{+h}{S}(\underset{h}{u}_{2k+2}) = \underset{h}{u}_{2k+2} + h\,\underset{h}{u}_{2k+3}$
....	....

Из табл. 3.1 легко получается таблица действия оператора дискретного дифференцирования $\underset{\pm h}{D} = \pm\frac{1}{h}(\underset{\pm h}{S} - 1)$ на точку $(x, u, \underset{h}{u}_1, \underset{h}{u}_2, \ldots)$

(см. табл. 3.2).

З а м е ч а н и е. Под действием группы Тейлора в $\underset{h}{\widetilde{Z}}$ точка $z = (x, u, u_1, u_2, \ldots, \underset{h}{u}_1, \underset{h}{u}_2, \ldots)$ при росте a прочерчивает однопараметрическую кривую — орбиту точки z (см. рис. 3.1).

Т а б л и ц а 3.2

Действие оператора дискретного дифференцирования на координаты точки $\underset{h}{z} = (x,\ u,\ \underset{h}{u}_1,\ \underset{h}{u}_2,\ \underset{h}{u}_3,\ \ldots)$

$\underset{-h}{S}$ — конечно-разностный оператор левого дифференцирования	$\underset{+h}{S}$ — конечно-разностный оператор правого дифференцирования
$\underset{-h}{D}(x) = 1$ $\underset{-h}{D}(u) = \underset{h}{u}_1 - h\,\underset{h}{u}_2$ $\underset{-h}{D}(\underset{h}{u}_1) = \underset{h}{u}_2$ $\underset{-h}{D}(\underset{h}{u}_2) = \underset{h}{u}_3 - h\,\underset{h}{u}_4$ . . . . $\underset{-h}{D}(\underset{h}{u}_{2k+1}) = \underset{h}{u}_{2k+2}$ $\underset{-h}{D}(\underset{h}{u}_{2k+2}) = \underset{h}{u}_{2k+3} - h\,\underset{h}{u}_{2k+4}$	$\underset{+h}{D}(x) = 1$ $\underset{+h}{D}(u) = \underset{h}{u}_1$ $\underset{+h}{D}(\underset{h}{u}_1) = \underset{h}{u}_2 + h\,\underset{h}{u}_3$ $\underset{+h}{D}(_2) = \underset{h}{u}_3$ . . . . $\underset{+h}{D}(\underset{h}{u}_{2k+1} = \underset{h}{u}_{2k+2}$ $\underset{+h}{D}(\underset{h}{u}_{2k+2}) = \underset{h}{u}_{2k+3}$ . . . .

Поскольку $(\underset{\pm h}{S})^n = T_a\big|_{a=\pm nh}$, то орбита группы Тейлора представляет собой “непрерывный сдвиг”, проведенный через “дискретный сдвиг” $(\underset{\pm h}{S})^n$. При условии сходимости рассматриваемых формальных рядов можно говорить о геометрическом смысле сеточных переменных $\underset{h}{u}_s$. В частности, $\underset{h}{u}_1$ представляет собой тангенс угла наклона хорды, соединяющей точки u и $\underset{+h}{S}(u)$ в плоскости (x, u), куда спроектирована орбита точки z группы Тейлора.

Заметим, что действие операторов $\underset{\pm h}{S}$ не образует группу с параметром h в пространстве разностных переменных $\underset{h}{Z}$.

Действительно, рассмотрим, например, преобразование переменной u:

$$\underset{+h}{S}(u) = u + h\,\underset{h}{u}_1;$$

суперпозиция таких преобразований

$$\underset{+h}{S}{}^2(u) = \underset{+h}{S}(u + h\,\underset{h}{u}_1) = u + 2h\,\underset{h}{u}_1 + h\,\underset{h}{u}_2 + h^2\,\underset{h}{u}_3 \neq u + 2h\,\underset{h}{u}_1\,.$$

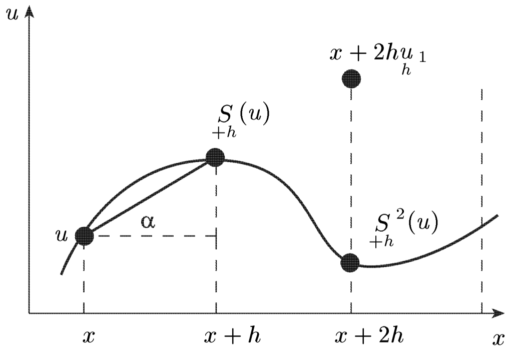

Рис. 3.1. Проекция орбиты группы Тейлора на плоскость (x, u)

При этом, однако, в точку $\underset{+h}{S}{}^2(u)$ можно попасть с помощью группы Тейлора при значении параметра группы $a = 2h$ (см. рис. 3.1).

$$\underset{+h}{S}{}^2(u) = T_a(u)\Big|_{a=2h} = e^{(2h)D}(u).$$

5. Рассмотрим теперь многомерный случай. Пусть Z — пространство последовательностей $(x, u, u_1, u_2, \ldots)$, $x = \{x^i; i = 1, 2, \ldots, n\}$, $u = \{u^k; k = 1, 2, \ldots, m\}$, $u_1 = \{u_i^k\}$ — совокупность mn частных производных первого порядка, $u_2 = \{u_{ij}^k\}$ — совокупность производных второго порядка и т.д.

Полученные ранее формулы продолжения легко обобщаются на случай многих зависимых переменных u^k, — для этого достаточно трактовать их как покомпонентную запись вектора u. Существенные изменения происходят при переходе ко многим переменным x^i .

Чтобы избежать громоздких формул, ограничимся случаем $n = 2 : x^1, x^2$. Индекс "k" у u^k будем опускать.

Рассматриваются два вида дифференцирований:

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{\partial}{\partial x^1} + u_1 \frac{\partial}{\partial u} + u_{11} \frac{\partial}{\partial u_1} + u_{21} \frac{\partial}{\partial u_2} + \ldots, \\ D_2 &= \frac{\partial}{\partial x^2} + u_2 \frac{\partial}{\partial u} + u_{12} \frac{\partial}{\partial u_1} + u_{22} \frac{\partial}{\partial u_2} + \ldots, \end{aligned} \tag{3.13}$$

где

$$u_1 = \frac{\partial u}{\partial x^1}, \quad u_{11} = \frac{\partial^2 u}{(\partial x^1)^2}, \quad u_{21} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2 \partial x^1}, \quad \ldots,$$

причем в (3.13) подразумевается суммирование по отсутствующему индексу k.

Операторы D_1, D_2 порождают две коммутирующие группы Тейлора, конечные преобразования которых определяются действием операторов $T_a^1 = e^{aD_1}$ и $T_a^2 = e^{aD_2}$. Зафиксировав два произвольных значения двух параметров $h_1 > 0$ и $h_2 > 0$, образуем два сорта операторов дискретного сдвига:

$$\underset{\pm h}{S}{}_1 = e^{\pm h_1 D_1} \equiv \sum_{s\geqslant 0} \frac{(\pm h_1)^s}{s!} D_1^s, \quad \underset{\pm h}{S}{}_2 = e^{\pm h_2 D_2} \equiv \sum_{s\geqslant 0} \frac{(\pm h_2)^s}{s!} D_2^s. \tag{3.14}$$

Соответственно будем иметь две пары операторов разностного дифференцирования:

$$\underset{h}{D_i} = \pm \frac{1}{h_i} (\underset{\pm h}{S_i} - 1), \quad i = 1, 2. \tag{3.15}$$

Множество точек в плоскоскости (x^1, x^2)

$$\{\underset{\pm h_1}{S}{}^{\alpha}(x^1), \underset{\pm h_2}{S}{}^{\beta}(x^2)\}, \qquad \alpha, \beta = 0, 1, 2, \ldots,$$

будем называть равномерной ортогональной разностной сеткой и обозначать $\underset{h}{\omega}$.

Операторы $\underset{\pm h}{S}{}_i, \underset{\pm h}{D}{}_i$ коммутируют в любом сочетании на равномерной сетке $\underset{h}{\omega}$.

Аналогично одномерному случаю введем в рассмотрение разностные производные $\underset{h}{u}{}_1 = \underset{+h}{D}{}_1(u)$, $\underset{h}{u}{}_{1\bar{1}} = \underset{-h}{D}{}_1 \underset{+h}{D}{}_1(u)$, $\underset{h}{u}{}_{1\bar{2}} = \underset{-h}{D}{}_2 \underset{+h}{D}{}_1(u)$, $\underset{h}{u}{}_2 = \underset{+h}{D}{}_2(u)$, $\underset{h}{u}{}_{12} = \underset{+h}{D}{}_2 \underset{+h}{D}{}_1(u)$ и т.д.
Соответственно образуются аналоги таблиц (2.1), (2.2) дискретных сдвигов и дифференцирований.

6. Приведем некоторые полезные формулы разностного дифференцирования:

$$\underset{+h}{D}(u\check{v}) = \underset{h}{u}{}_1 v + u \underset{h}{v}{}_{\bar{1}}, \quad \underset{-h}{D}(u\hat{v}) = \underset{h}{u}{}_{\bar{1}} v + u \underset{h}{v}{}_1,$$

где $\hat{z} = \underset{+h}{S}(z), \quad \check{z} = \underset{-h}{S}(z)$,

$$\underset{+h}{D}(u^n) = \sum_{m=1}^{n} C_n^m u^{n-m} \underset{h}{u}{}_1 h^{m-1}, \qquad \underset{-h}{D}(u^n) = \sum_{m=1}^{n} C_n^m u^{n-m} \underset{h}{u}{}_{\bar{1}} (-h)^{m-1},$$

$$\underset{-h}{D}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x(x-h)}, \qquad \underset{+h}{D}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x(x+h)}, \qquad \underset{-h}{D}\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{\underset{h}{u}{}_{\bar{1}}}{u\check{u}},$$

$$\underset{+h}{D}\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{\underset{h}{u}_1}{u\hat{u}}, \qquad \underset{-h}{D}(a^x) = a^x\,\frac{1-a^{-h}}{h}, \qquad \underset{+h}{D}(a^x) = a^x\,\frac{a^{+h}-1}{h},$$

$$\underset{-h}{D}(\ln u) = \frac{1}{h}\ln\left(1 - h\,\frac{\underset{h}{u}_{\bar{1}}}{u}\right), \qquad \underset{+h}{D}(\ln u) = -\frac{1}{h}\ln\left(1 + h\,\frac{\underset{h}{u}_1}{u}\right),$$

$$\underset{-h}{D}(\sin \alpha x) = \frac{2}{h}\sin\left(\frac{\alpha h}{2}\right)\cos\left(\alpha\left(x - \frac{h}{2}\right)\right),$$

$$\underset{+h}{D}(\sin \alpha x) = \frac{2}{h}\sin\left(\frac{\alpha h}{2}\right)\cos\left(\alpha\left(x + \frac{h}{2}\right)\right),$$

$$\underset{-h}{D}(\operatorname{arctg} x) = \operatorname{arctg}\,\frac{1}{1+x(x-h)}, \qquad \underset{+h}{D}(\operatorname{arctg} x) = \operatorname{arctg}\,\frac{1}{1+x(x+h)}.$$

Связь степеней операторов $\underset{+h}{D}$ и $\underset{+h}{S}$:

$$\underset{+h}{D}^{\,n} = h^{-n}\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\frac{n!}{m!(n-m)!}\,\underset{+h}{S}^{\,(n-m)},$$

$$\underset{+h}{S}^{\,n} = \sum_{m=0}^{n}\frac{n!}{m!(n-m)!}\,h^m\,\underset{+h}{D}^{\,m}.$$

7. Итак, группа Тейлора позволила нам ввести естественным образом операторы дискретного сдвига $\underset{\pm h}{S}$ и разностного дифференцирования $\underset{\pm h}{D}$. Эти операторы позволили, в свою очередь, вовлечь в рассмотрение новые переменные — разностные производные, как формальные степенные ряды специального вида. Разумеется, разностные производные можно вводить различными способами. Например, можно было бы ввести независимо переменные $\underset{h}{u}_s$, для которых справедливо действие $\underset{\pm h}{S}$ и $\underset{\pm h}{D}$ в виде табл. 3.1 и табл. 3.2, а также разностное правило Лейбница. Другой подход заключается в том, что разностные производные вводятся на многообразии $u = \phi(x)$. В этом случае табл. 3.1, табл. 3.2 и разностное правило Лейбница могут быть получены обычным для теории разностных схем образом (см., например, [40]). Заметим, что использованный нами способ введения переменных $\underset{h}{u}_s$ не зависит от конкретного многообразия.

Разностное правило Лейбница самым существенным образом сказывается на всех конструкциях группового анализа разностных уравнений. Отличие пространства дискретных переменных от пространства непрерывных можно описывать на разных языках. С физической точки зрения пространство дискретных переменных обладает новым масштабом — шагом сетки, отсутствовавшем в непрерывной модели. С функционально-аналитической точки зрения основное отличие заключается в нелокальности объектов, т. е. в принципиальной бесконечномерности пространства $\underset{h}{\widetilde{Z}}$. С чисто алгебраической точки зрения, — это новое правило Лейбница, в результате чего разностное дифференцирование совсем по-другому действует на аналитические функции и формальные степенные ряды.

Рассмотренная нами группа Тейлора в определенном смысле уникальна. Она является самой простой группой высших симметрий, причем группы Тейлора вполне достаточно, чтобы распространить действие группы точечных преобразований на конечно-разностные переменные. Алгебра операторов, соответствующая группе Тейлора, образует идеал в алгебре всех высших симметрий.

Можно сделать замечание и более общего характера. Идея локальности групп Ли преобразований заключается, как известно, в том, что суперпозиция (и обращение) преобразований допускается лишь для элементов, достаточно близких к единичному, т. е. для достаточно малых значений группового параметра a. По-существу, та же идея является основной и в теории функций при построении аналитического продолжения. Эти характерные идеи двух различных областей математики имеют конкретное пересечение: группа Тейлора. Группа Тейлора, рассмотренная на многообразии, представляет собой тейлоровские ряды, используемые для построения аналитического продолжения.

Ниже будет показано, что группа Тейлора может быть представлена непосредственно в пространстве дискретных переменных, при этом изоморфная ей группа преобразований оперирует с так называемыми рядами Ньютона.

§ 4. Инвариантные разностные сетки

4.1. Инвариантные равномерные сетки, критерий инвариантности. Равномерная разностная сетка $\underset{h}{\omega}$ является самым распространенным способом дискретизации пространства независимых переменных. Преобразования формальной однопараметрической группы, изменяющие независимую переменную x, могут исказить сетку, нарушив ее равномерность, что скажется на конечно-разностных уравнениях, записанных на $\underset{h}{\omega}$. В частности, операторы $\underset{+h}{D}$ и $\underset{-h}{D}$ потеряют коммутативность. Поэтому выделим класс допустимых преобразований, сохраняющих равномерность сетки. Рассмотрим сначала случай одной независимой переменной.

Пусть в $\underset{h}{\widetilde{Z}}$ задана формальная группа G_1 преобразований

$$\begin{aligned} x^* &= f(z,a), \qquad & \underset{h}{u}{}_1{}^* &= \psi_1(z,a),\\ u^* &= \varphi(z,a), \qquad & \underset{h}{u}{}_2{}^* &= \psi_2(z,a),\\ u_1^* &= \varphi_1(z,a), \qquad & &\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ u_2^* &= \varphi_2(z,a), \qquad & &\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned} \tag{4.1}$$

которой соответствует инфинитезимальный оператор

$$X = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial u} + \sum_{s\geqslant 1}\zeta^s\frac{\partial}{\partial u_s} + \sum_{m\geq 1}\underset{h}{\zeta}{}^m\frac{\partial}{\partial \underset{h}{u}{}_m}. \tag{4.2}$$

Ясно, что если независимая переменная является инвариантом, т. е. $f(z,a)\equiv x;\quad \xi\equiv 0$, то такой класс преобразований не меняет разностную сетку, в том числе и равномерную. Однако это условие не является необходимым.

Дополним пространство $\underset{h}{Z}$ новыми переменными — правым шагом h_+ и левым шагом h_- в точке z^i: $\quad (x,u,\underset{h}{u}{}_1,\underset{h}{u}{}_2,\ldots,h_+,h_-)$.

Естественно определить преобразования шагов сетки следующим образом:

$$\begin{aligned} h_+^* &= \underset{+h}{S}(x^*) - x^* = f(\underset{+h}{S}(z),a) - f(z,a),\\ h_-^* &= x^* - \underset{-h}{S}(x^*) = f(z,a) - f(\underset{-h}{S}(z),a), \end{aligned}$$

при этом $h_+^*|_{a=0} = h_-^*|_{a=0} = h$. Дополнительными координатами оператора (4.2) будут

$$\left.\frac{\partial h_+^*}{\partial a}\right|_{a=0} = (\underset{+h}{S}-1)\xi(z) = \xi(\underset{+h}{S}(z)) - \xi(z) = h\underset{+h}{D}(\xi),$$

$$\left.\frac{\partial h_-^*}{\partial a}\right|_{a=0} = (1-\underset{-h}{S})\xi(z) = \xi(z) - \xi(\underset{-h}{S}(z)) = h\underset{-h}{D}(\xi).$$

Знание касательного поля для h_+ и h_- легко позволяет получить критерий инвариантности равенства $h_+ = h_-$ как многообразия в расширеном пространстве $\underset{h}{\widetilde{Z}} = (x,u,u_1,\ldots;\ \underset{h}{u}{}_1,\ldots,h_+,h_-)$. Действительно, применив инфинитезимальный критерий с помощью оператора (4.2), получим следующее разностное уравнение второго порядка на координату $\xi(z)$ оператора (4.2):

$$(\underset{+h}{S} - 1)\xi(z) = (1 - \underset{-h}{S})\xi(z),$$

или $\underset{+h}{D}\,\underset{-h}{D}(\xi(z)) = 0$. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 4.1. *Для того, чтобы при преобразованиях группы* G_1 *сетка* $\underset{h}{\omega}$ *оставалась равномерной, т. е.* $h_+^* = h_-^*$, *необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке* $z \in \underset{h}{\widetilde{Z}}$ *выполнялось следующее условие*:

$$\underset{+h}{D}\,\underset{-h}{D}(\xi(z)) = 0. \tag{4.3}$$

Сетки, удовлетворяющие критерию (4.3), будем называть *инвариантно-равномерными.*

З а м е ч а н и е. *Требование* (4.3) *означает сохранение равномерности произвольной равномерной сетки во всем пространстве* $\underset{h}{\widetilde{Z}}$. *При рассмотрении конкретного разностного уравнения* $F(z) = 0$ *на равномерной сетке* $\underset{h}{\omega}$ *требование* (4.3) *можно ослабить, заменив на условие*

$$\underset{+h}{D}\,\underset{-h}{D}(\xi(z))\big|_{F(z)=0} = 0. \tag{4.4}$$

Ниже будет дан пример такого ослабления.

Рассмотрим примеры групп, удовлетворяющих условию (4.3).

1. Условию (4.3) удовлетворяет, в частности, группа G_1 с $\xi=\text{const}$, т. е. преобразования, при которых происходит сдвиг вдоль координаты x. Простейший пример — трансляция вдоль независимой переменной: $X = \dfrac{\partial}{\partial x}$. Однако такому условию может удовлетворять не только группа точечных преобразований. Например, для группы Тейлора $\xi = 1, \quad x^* = x + a, \quad h^* = h = \text{const}$.

2. Решением (4.3) является, в частности, $\xi = Ax, \quad A = \text{const}$, т. е. преобразования, при которых происходит растяжение оси x. При этом $h_+^* = h_-^* = e^{aA}(h)$, где a — параметр группы.

3. Требованию (4.3) удовлетворяет группа G_1, для которой $\xi(x + h) = \xi(x)$ — периодическая функция с периодом h .

4. В более общем случае $\xi(\underset{\pm h}{S}(z)) = \xi(z)$, т. е. $\xi(z)$ — инвариант относительно дискретного сдвига $\underset{\pm h}{S}$.

5. Уравнению (4.3) удовлетворяет функция $\xi(z) = A(z)x + B(z)$, где $A(z), B(z)$ — произвольные инварианты дискретного сдвига $\underset{\pm h}{S}$.

Любопытно отметить, что критерию (4.3) удовлетворяют самые распространенные группы, присутствующие в математических моделях физики: переносы вдоль независимых переменных, растяжения — "автомодельные" преобразования; в многомерных случаях, как мы увидим, к ним добавятся вращения и другие известные группы.

Однако, как показывает приведенный ниже простой пример, *ограничиться рассмотрением лишь равномерных сеток невозможно.*

Пример группы (проективные преобразования), не удовлетворяющей условию (4.3): $X = x^2 \dfrac{\partial}{\partial x} + \ldots$; критерий (4.3) не выполнен: $\underset{+h}{D}\,\underset{-h}{D}(x^2) = 2$.

Теорема 4.1 легко обобщается на многомерный случай. В самом деле, пусть группа G_1 определена оператором

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta \frac{\partial}{\partial u} + \ldots, \tag{4.5}$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$; количество зависимых переменных в данном случае значения не имеет. Оператор (4.5) определяет в $\underset{h}{\widetilde{Z}}$ конечные преобразования

$$\begin{aligned} &u^* = \phi(z, a), \\ &x^{i*} = f^i(z, a), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

которые преобразуют шаги $h^+{}_i, h^-{}_i$ ортогональной сетки $\underset{h}{\omega}$ следующим образом:

$$h^+{}_i{}^* = \underset{+h}{S_i}(x^{i*}) - x^{i*} = f^i(\underset{+h}{S_i}(z), a) - f^i(z, a),$$

$$h^-{}_i{}^* = x^{i*} - \underset{-h}{S_i}(x^{i*}) = f^i(z, a) - f^i(\underset{-h}{S_i}(z), a).$$

Совершенно аналогично одномерному случаю, мы будем говорить, что сетка $\underset{h}{\omega}$ сохраняет свою равномерность в направлении x^i, если соотношение $h^+{}_i = h^-{}_i$ инвариантно относительно G_1.

Применение инфинитезимального критерия инвариантности дает следующие необходимые и достаточные условия инвариантной равномерности сетки в направлении x^i:

$$\underset{+h}{S_i}(\xi^i) - 2\xi^i + \underset{-h}{S_i}(\xi^i) = 0,$$

где i фиксировано, или

$$\underset{+h}{D_i}\,\underset{-h}{D_i}(\xi^i) = 0. \tag{4.6}$$

Отметим, что если в одномерном случае критерий (4.3) полностью решает вопрос об инвариантности геометрической структуры сетки, то в многомерном случае условие (4.6) решает этот вопрос лишь частично. В частности, выполнение (4.6) отнюдь не гарантирует сохранение ортогональности сетки под действием преобразований G_1.

4.2. Сохранение ортогональности сетки. Пусть задана ортогональная сетка $\underset{h}{\omega}$, равномерная или неравномерная. Рассмотрим для простоты случай двух независимых переменных x^1, x^2. Посмотрим, как преобразуется произвольная ячейка сетки $\underset{h}{\omega}$ под действием G_1 с оператором (4.5).

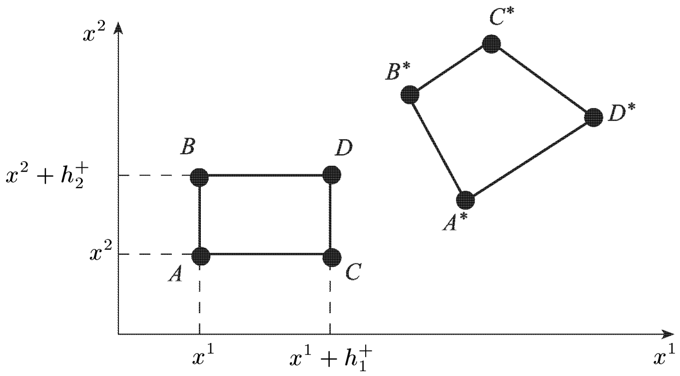

Рис. 4.1

Точки A, B, C, D некоторой произвольной ячейки (см. рис. 4.1) имеют следующие координаты:

$$A : (x^1, x^2), \qquad B : (x^1, x^2 + h_2^+),$$
$$C : (x^1 + h_1^+, x^2 + h_2^+), \qquad D : (x^1 + h_1^+, x^2).$$

Под действием группы преобразований G_1 точки A, B, C, D преобразуются вточки A^*, B^*, C^*, D^* со следующими координатами:

$$\text{точка } A^* : \quad (f^1(z,a), f^2(z,a)),$$
$$\text{точка } B^* : \quad (f^1(\underset{+h}{S}{}_2(z),a), f^2(\underset{+h}{S}{}_2(z),a)),$$
$$\text{точка } C^* : \quad (f^1(\underset{+h}{S}{}_1\underset{+h}{S}{}_2(z),a), f^2(\underset{+h}{S}{}_1\underset{+h}{S}{}_2(z),a)),$$
$$\text{точка } D^* : \quad (f^1(\underset{+h}{S}{}_1(z),a), f^2(\underset{+h}{S}{}_1(z),a)).$$

Выпишем теперь условие ортогональности угла $B^*A^*D^*$:

$$[f^1(\underset{+h}{S}{}_2(z),a)-f^1(z,a)][f^1(\underset{+h}{S}{}_1(z),a)-f^1(z,a)]+ \\ +[f^2(\underset{+h}{S}{}_2(z),a)-f^2(z,a)][f^2(\underset{+h}{S}{}_1(z),a)-f^2(z,a)]=0.$$

Чтобы получить инфинитезимальную характеристику последнего условия, применим к нему операцию $\left.\dfrac{\partial}{\partial a}\right|_{a=0}$:

$$\underset{+h}{D}{}_1(\xi^2)=-\underset{+h}{D}{}_2(\xi^1). \tag{4.7}$$

Чтобы условия ортогональности сетки были выполнены для всех углов данного узла, условие (4.7) должно быть справедливо, очевидно, и для любых сочетаний дифференцирований $\underset{-h}{D}{}_1$, $\underset{+h}{D}{}_1$, $\underset{-h}{D}{}_2$, $\underset{+h}{D}{}_2$:

$$\underset{\pm h}{D}{}_1(\xi^2)=-\underset{\pm h}{D}{}_2(\xi^1). \tag{4.8}$$

Теперь становится очевидной следующая теорема.

Теорема 4.2. *Для того чтобы ортогональная сетка* $\underset{h}{\omega}$ *сохраняла свою ортогональность в плоскости* (x^i,x^j) *при любых преобразованиях группы* G_1 *с оператором* (4.5), *необходимо и достаточно, чтобы в каждом узле сетки было справедливо следующее условие*:

$$\underset{\pm h}{D}{}_i(\xi^j)=-\underset{\pm h}{D}{}_j(\xi^i),\quad i\neq j. \tag{4.9}$$

Условие (4.9) представляет собой уравнение в частных разностных производных на координаты ξ^i генератора группы G_1. Сетки, для которых справедливо условие (4.9), будем называть *инвариантно-ортогональными* относительно G_1.

Легко проверить, что условию (4.9) удовлетворяют группы трансляций, растяжений, вращений и многие другие. Однако существуют преобразования, для которых условия (4.9) не выполнены, т. е. ортогональные сетки не сохраняют своей структуры. Например, для преобразований Лоренца

$$X=x^2\frac{\partial}{\partial x^1}+x^1\frac{\partial}{\partial x^2}$$

имеем

$$\underset{+h}{D}{}_2(x^2)=1,\quad \underset{+h}{D}{}_1(x^1)=1,\quad \underset{+h}{D}{}_2(\xi^1)\neq-\underset{+h}{D}{}_1(\xi^2).$$

Заметим, что критерий (4.9) был нами получен для ортогональной сетки, первоначально ориентированной параллельно осям координат. Поэтому, если условие (4.9) для данной группы G_1 не выполнено, из этого не следует, что не существует ортогональной сетки с другой ориентацией, которая сохраняет свою ортогональность под действием G_1.

Рассмотрим эту ситуацию.

Пусть нам дана ортогональная сетка $\underset{h}{\omega}$, равномерная или неравномерная, ориентированная под некоторым углом к осям координат x^1, x^2 (см. рис. 4.2).

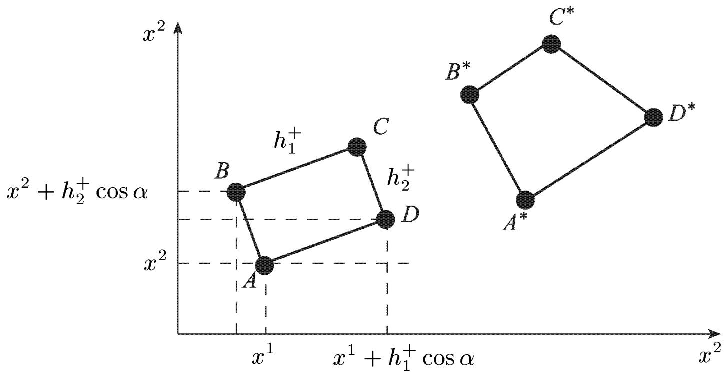

Рис. 4.2

В плоскости (x^1, x^2) действует пара операторов сдвига $\underset{\pm h}{S}{}_1, \underset{\pm h}{S}{}_2$, сдвигающая координаты z^i вектора в $\underset{h}{\widetilde{Z}}$ (или их конечный набор z) *вдоль ребер сетки* $\underset{h}{\omega}$, а не вдоль осей координат.

Под действием преобразований группы G_1 с оператором (4.5) узлы некоторой произвольной ячейки сетки $\underset{h}{\omega}$ перейдут в точки A^*, B^*, C^*, D^* со следующими координатами:

$$
\begin{aligned}
A^*: &\quad (f^1(z,a), f^2(z,a)),\\
B^*: &\quad (f^1(\underset{+h}{S}{}_2(z),a), f^2(\underset{+h}{S}{}_2(z),a)),\\
C^*: &\quad (f^1(\underset{+h}{S}{}_1\,\underset{+h}{S}{}_2(z),a), f^2(\underset{+h}{S}{}_1\,\underset{+h}{S}{}_2(z),a)),\\
D^*: &\quad (f^1(\underset{+h}{S}{}_1(z),a), f^2(\underset{+h}{S}{}_1(z),a)).
\end{aligned}
$$

Выпишем условие ортогональности угла $B^*A^*D^*$:

$$[f^1(\underset{+h}{S}{}_2(z),a)-f^1(z,a)][f^1(\underset{+h}{S}{}_1(z),a)-f^1(z,a)]+\\ +[f^2(\underset{+h}{S}{}_2(z),a)-f^2(z,a)][f^2(\underset{+h}{S}{}_1(z),a)-f^2(z,a)]=0.$$

Применив к последнему равенству операцию $\left.\dfrac{\partial}{\partial a}\right|_{a=0}$, получим

$$(\underset{+h}{S}{}_2(\xi^1)-\xi^1)h^+{}_1\cos\alpha-(\underset{+h}{S}{}_1(\xi^1)-\xi^1)h^+{}_2\sin\alpha+\\ (\underset{+h}{S}{}_2(\xi^2)-\xi^2)h^+{}_1\sin\alpha+(\underset{+h}{S}{}_1(\xi^2)-\xi^2)h^+{}_2\cos\alpha=0,$$

или, разделив на $h^+{}_1h^+{}_2$,

$$\underset{+h}{D}{}_2(\xi^1)\cos\alpha-\underset{+h}{D}{}_1(\xi^1)\sin\alpha+\underset{+h}{D}{}_2(\xi^2)\sin\alpha+\underset{+h}{D}{}_1(\xi^2)\cos\alpha=0, \quad (4.10)$$

где $\underset{+h}{D}{}_i$ — дифференцирование вдоль ребер сетки.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 4.3. *Для того чтобы ортогональная сетка* $\underset{h}{\omega}$, *ориентированная под углом* α *к осям координат* (*в соответствии с рис.* 4.2), *сохраняла свою ортогональность при любых преобразованиях группы* G_1 *с оператором* (4.5), *необходимо и достаточно выполнения условий* (4.10).

Заметим, что условия (4.10) при $\alpha=0$ дают условия (4.9).

Вернемся к нашему примеру — ортогональная сетка при преобразованиях Лоренца:

$$X=x^2\frac{\partial}{\partial x^1}+x^1\frac{\partial}{\partial x^2}.$$

Условия (4.10) в этом случае дают:

$$\underset{+h}{D}{}_2(x^2)\cos\alpha-\underset{+h}{D}{}_1(x^2)\sin\alpha+\underset{+h}{D}{}_2(x^1)\sin\alpha+\underset{+h}{D}{}_1(x^1)\cos\alpha=0,$$

откуда, с учетом “наклонного” дифференцирования $\underset{+h}{D}{}_i$ (см. рис. 4.2), получим

$$\sin^2\alpha=\cos^2\alpha,$$

откуда $\alpha=\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}$, т. е. сетка должна быть ориентирована под углом 45° к осям координат, — лишь в этом случае она сохраняет ортогональность при преобразованиях Лоренца.

Рассмотрим однопараметрическую группу растяжений с оператором

$$X=Ax^1\frac{\partial}{\partial x^1}+x^2\frac{\partial}{\partial x^2}, \quad (4.11)$$

где $A=\mathrm{const}$.

Рассмотрим сетку, расположенную в соответствии с рис. 4.2. В этом случае условия (4.10) для оператора (4.11) дают:

$$\underset{+h}{D}{}_2(Ax^1)\cos\alpha - \underset{+h}{D}{}_1(Ax^1)\sin\alpha + \underset{+h}{D}{}_2(x^2)\sin\alpha + \underset{+h}{D}{}_1(x^2)\cos\alpha = 0,$$

откуда

$$(A-1)\sin\alpha\cos\alpha = 0.$$

Последнее условие в частности означает, что ортогональная сетка сохранит свою ортогональность при преобразованиях растяжения (4.11) с любым A, если она расположена параллельно осям координат. При условии $\alpha \neq 0$, получаем

$$A = 1,$$

т. е. группа растяжений не меняет ортогональности "косой" ортогональной сетки (рис. 4.2), только если растяжения *однородны.*

4.3. Инвариантные неравномерные сетки, критерий инвариантности. Пусть теперь в $\underset{h}{\widetilde{Z}}$ задана неравномерная сетка $\underset{\hbar}{\omega}$. В каждой точке $z^i \in \underset{h}{\widetilde{Z}}$ задана пара величин — правый шаг h_+ и левый шаг h_- (мы рассмотрим сначала случай одной независимой переменной x). Операторы $\underset{+h}{D}, \underset{-h}{D}$ теряют коммутативность и становятся "локальными", — зависящими от точки z.

Пусть нам задан правый шаг h_+ как достаточно гладкая функция x: $h_+ = \varphi(x)$. Левый шаг — это правый шаг в точке, смещенной на h_- влево: $h_- = \varphi(x - h_-)$, поэтому можно ограничиться рассмотрением лишь h_+. Обратно, если заданы функция $\varphi(x)$ и точка x_0, с которой начинается дискретизация оси x, то можно однозначно восстановить узлы сетки $\underset{\hbar}{\omega}$.

Под действием группы G_1 будет изменяться величина x, а с ней и переменные h_+, h_-. После преобразований G_1 новый шаг h_+^* будет, вообще говоря, некоторой другой функцией от x^*: $h_+^* = \widetilde{\varphi}(x^*)$.

Определение. Будем говорить, что данная неравномерная сетка $\underset{\hbar}{\omega}$ *инвариантна* относительно преобразований G_1 в пространстве $\underset{h}{\widetilde{Z}}$, если

$$h_+ = \varphi(x), \tag{4.12}$$

представляет собой инвариантное многообразие, т. е. в новых переменных так же будет справедливо: $h_+^* = \varphi(x^*)$.

Критерий инвариантности многообразия (4.12) дает следующая теорема.

Т е о р е м а 4.4. *Для того чтобы разностная сетка* $\underset{\hbar}{\omega}$, *заданная уравнением* (4.12), *была инвариантна относительно преобразований* G_1 *с оператором* (4.2), *необходимо и достаточно выполнение следующего условия*:

$$\xi(\underset{+h}{S}(z)) - \xi(z)\left(1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\Bigg|_{(4.12)} = 0. \tag{4.13}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, подействуем оператором (4.2) на поверхность $h_+ = \varphi(x)$:

$$X(h_+ - \varphi(x)) = \xi(\underset{+h}{S}(z)) - \xi(z) - \xi(z)\,\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0.$$

Выход на многообразие (4.12) завершает доказательство утверждения.

Заметим, что условие (4.13) можно записать в другой, эквивалентной форме:

$$\frac{\underset{+h}{D}(\xi)}{\xi} = \frac{\varphi'_x}{\varphi}.$$

П р и м е р. Рассмотрим проективные преобразования, определяемые оператором

$$X = x^2\frac{\partial}{\partial x}.$$

Критерий сохранения равномерности не выполняется:

$$\underset{+h}{D}\,\underset{-h}{D}(x^2) = 2,$$

поэтому надо рассматривать неравномерную сетку $h_+ = \varphi(x)$. Продолжим оператор на h_+ и h_-:

$$X = x^2\frac{\partial}{\partial x} + h_+(2x + h_+)\frac{\partial}{\partial h_+} + h_-(2x - h_-)\frac{\partial}{\partial h_-}. \tag{4.14}$$

Инвариантную сетку легко построить, исходя из инвариантов группы G_1: $\quad J_1 = x + \dfrac{x^2}{h_+}, \quad J_2 = x - \dfrac{x^2}{h_-}.$

Построим, например, инвариантную неравномерную сетку на произвольном интервале $(0, L_0)$. Положив $J_1 = L_0$, получим равенство

$$h_+ = \frac{x^2}{L_0 - x}, \tag{4.15}$$

левый шаг определится из уравнения $h_- = \varphi(x - h_-)$:

$$h_- = \frac{x^2}{L_0 + x}. \tag{4.16}$$

Легко проверить, что (4.15), (4.16) представляют собой инвариантное многообразие относительно оператора (4.14).

Можно убедиться, что величина

$$\frac{h_+}{h_-} = \frac{L_0 + x}{L_0 - x}$$

также представляет собой инвариантное многообразие, т. е. *преобразования G_1, сохраняющие инвариантность сетки, сохраняют пропорции разностного шаблона.* Эта ситуация имеет место и в общем случае.

Действительно, пусть нам дана неравномерная разностная сетка

$$h_+ = \varphi(x), \qquad h_- = \varphi(x - h_-). \tag{4.17}$$

Если она инвариантна, то на $\underset{h}{\omega}$

$$(\hat{\xi} - \xi) = \xi\varphi_x, \quad (\xi - \check{\xi}) = \check{\xi}\check{\varphi}_x. \tag{4.18}$$

Инвариантность многообразия

$$\frac{h_+}{h_-} = \frac{\varphi(x)}{\varphi(x - h_-)}, \tag{4.19}$$

определяется выполнением на (4.19) условия

$$(\hat{\xi} - \xi)\check{\varphi} + h_+\check{\xi}\check{\varphi}_x = (\xi - \check{\xi})\varphi + h_-\xi\varphi_x,$$

которое справедливо в силу (4.17), (4.18).

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.5. *Пусть в $\underset{h}{\widetilde{Z}}$ задана неравномерная сетка* (4.12). *Тогда из ее инвариантности по отношению к однопараметрической группе G_1 с оператором* (4.2) *следует инвариантность* (4.19), *т. е. сохранение пропорций разностного шаблона при преобразованиях группы.*

Пример (экспоненциальные сетки). Рассмотрим специальный случай неравномерной одномерной сетки, когда шаги h^+ экспоненциальным образом растут при $x \to \infty$:

$$qh^+ = h^-, \tag{4.20}$$

где $q = \text{const}$, $\quad 0 < q < 1$. Соотношению (4.20) удовлетворяет, например, сетка

$$\left\{ \begin{array}{l} h^+ = xq^{-1} - x, \\ h^- = x - qx. \end{array} \right. \tag{4.21}$$

Действием оператора (4.2) мгновенно получаются *необходимые и достаточные условия инвариантности экспоненциальной сетки*

$$q\hat{\xi} - (q+1)\xi + \check{\xi}\big|_{(4.20)} = 0,$$

где $\hat{\xi} = \underset{+h}{S}(\xi)$, $\quad \check{\xi} = \underset{-h}{S}(\xi)$. В предельном случае $q \to 1$ полученные выше условия дают критерий инвариантной равномерности сетки (4.3). Легко проверить, что полученному критерию удовлетворяют, в частности, группы сдвигов ($\xi = const$) и растяжений ($\xi = A_0 x$).

В частном случае (4.21), когда сетка зависит лишь от независимой переменной x, действие операторов дифференцирования на $F(z) \in \underset{h}{A}$ можно записать в следующем виде:

$$\underset{+h}{D} F(z)\big|_{(4.21)} = \frac{F(\underset{+h}{S}(z)) - F(z)}{x(q^{-1} - 1)} = D^-,$$

$$\underset{-h}{D} F(z)\big|_{(4.21)} = \frac{F(z) - F(\underset{-h}{S}(z))}{x(1 - q)} = D^+,$$

где $\underset{\pm h}{S}$ — операторы сдвига вдоль сетки (4.21).

Операторы разностного дифференцирования D^+, D^- на экспоненциальной сетке (4.21) используются при записи так называемых "q-деформированных" разностных уравнений (см., например, [77, 78]).

4.4. Инвариантные сетки, зависящие от решения. Теорема 4.4 допускает обобщение на случай, когда сетка $\underset{h}{\omega}$ зависит от решения.

Теорема 4.6. *Пусть сетка задана уравнением* $h_+ = \varphi(z)$, *где* $\varphi(z) \in \underset{h}{A}$. *Тогда критерий ее инвариантности будет выглядеть так*:

$$\xi(\underset{+h}{S}(z)) - \xi(z) - X(\varphi(z))\big|_{h_+ = \varphi(z)} = 0, \tag{4.22}$$

где X — *оператор вида* (4.2).

В частности, если $h_+ = \varphi(x, u)$, *то критерий* (4.22) *будет таким*

$$\xi(\underset{+h}{S}(z)) - \xi(z)(1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x}) - \eta(z)\frac{\partial\varphi}{\partial u}\Big|_{h_+ = \varphi(x,u)} = 0.$$

Доказательство проводится непосредственным применением оператора (4.2).

В случае, когда координата $\xi(x,u)$ оператора группы G_1 явно зависит от решения ($\xi_u \neq 0$) *), критерий инвариантности сетки может быть явно связан с решением соответствующего инвариантного уравнения.

Забегая несколько вперед, рассмотрим пример, когда критерии инвариантности разностной сетки и инвариантности разностного уравнения завязаны друг с другом, т. е. не выполняются по отдельности.

Линейное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 0, \tag{4.23}$$

допускает, в частности, следующий оператор:

$$X = u\frac{\partial}{\partial x}. \tag{4.24}$$

Рассмотрим в $\underset{h}{Z}$ конечно-разностное уравнение

$$\underset{h}{v}_{x\bar{x}} = 0, \tag{4.24}$$

на равномерной сетке аппроксимирующее со вторым порядком уравнение (4.23). Соответствующий (4.24) оператор

$$\underset{h}{X} = v\frac{\partial}{\partial x} - \underset{h}{v}{}_x^2\frac{\partial}{\partial \underset{h}{v}_x} + \underset{h}{v}_{x\bar{x}}(2h^- \underset{h}{v}_{x\bar{x}} - 3\underset{h}{v}_x)\frac{\partial}{\partial \underset{h}{v}_{x\bar{x}}} \tag{4.26}$$

изоморфным образом представляет оператор (4.24) в сеточном пространстве. Оператор (4.26) не удовлетворяет критерию сохранения равномерности сетки. Однако равномерную сетку использовать все-таки можно.

Действительно, запишем наше многообразие в виде двух равенств:

$$\underset{h}{v}_{x\bar{x}} = 0, \quad h^+ = h^-, \tag{4.27}$$

и продолжим оператор (4.26) на h^+ и h^-:

$$\underset{h}{X} = v\frac{\partial}{\partial x} + \ldots + h^+ \underset{h}{v}_x\frac{\partial}{\partial h^+} + h^- \underset{h}{v}_{\bar{x}}\frac{\partial}{\partial h^-}, \tag{4.28}$$

---

*) Группы преобразований, для которых $\xi_u = 0$, были названы Л.В. Овсянниковым *x-автономными* [37].

где $\underset{h}{v}_{\bar{x}}$ — левая разностная производная первого порядка:

$$\underset{h}{v}_{\bar{x}} = \underset{h}{v}_{x} - h^- \underset{h}{v}_{x\bar{x}}.$$

Подействуем оператором (4.28) на многообразие (4.27):

$$(2h^- \underset{h}{v}_{x\bar{x}} - 3\underset{h}{v}_{x})\underset{h}{v}_{x\bar{x}}\Big|_{(4.27)} = 0,$$

$$h^+ \underset{h}{v}_{x} - h^- \underset{h}{v}_{\bar{x}}\Big|_{(4.27)} = 0.$$

Инвариантность первого уравнения очевидна; инвариантность второго следует из (4.27) и из равенства:

$$h^- \underset{h}{v}_{x\bar{x}} = \underset{h}{v}_{x} - \underset{h}{v}_{\bar{x}}.$$

Таким образом, равномерная сетка не инвариантна во всем пространстве $\underset{h}{Z}$, но допускает оператор (4.28) на многообразии (4.27).

Более подробно эту ситуацию можно рассмотреть вместе с критерием инвариантности разностных уравнений (см. гл. II).

4.5. "Выпрямление" инвариантной неравномерной разностной сетки. Свойство инвариантности некоторой произвольной сетки $\underset{\hbar}{\omega}$

$$h_+ = \varphi(x), \tag{4.29}$$

не зависит от выбора системы координат, поскольку критерий ее инвариантности является скалярным выражением. Однако некоторое внешнее точечное преобразование может изменить *структуру* сетки.

Известно (см. [34, 35]), что всякая *точечная* однопараметрическая группа G_1 может быть преобразована заменой переменных в группу трансляции вдоль независимой переменной. В этом случае оператор группы в новых переменных удовлетворяет условию инвариантной равномерности (4.3).

Следующая теорема решает вопрос о возможности "выпрямления" инвариантной неравномерной сетки (4.13), т. е. превращения ее в равномерную.

Теорема 4.7. *Пусть задана точечная гладкая и локально обратимая замена переменных в* $\underset{h}{\widetilde{Z}}$:

$$\bar{x} = f(x, u), \quad \bar{u} = g(x, u). \tag{4.30}$$

Тогда сетка $\underset{h}{\omega}$ (4.29), *инвариантная относительно однопараметрической группы* G_1 *с оператором* (4.2), *становится равномерной при замене* (4.30) *при выполнении следующего условия на функцию* f:

$$X\left\{f(\hat{x},\hat{u})-2f(x,u)+f(\check{x},\check{u})\right\}\Big|_{(4.29)}=0, \tag{4.31}$$

где $\hat{z}=\underset{+h}{S}(z), \quad \check{z}=\underset{-h}{S}(z)$.

Действительно, оператор (4.2) в новой системе координат согласно формулам преобразований для координат оператора точечной группы (см. [34, 35]), запишется в виде:

$$\widetilde{X}=X(f(x,u))\frac{\partial}{\partial\bar{x}}+X(g(x,u))\frac{\partial}{\partial\bar{u}}+\ldots$$
$$\ldots+X(f(\hat{x},\hat{u})-f(x,u))\frac{\partial}{\partial\bar{h}_+}+X(f(x,u)-f(\check{x},\check{u})\frac{\partial}{\partial\bar{h}_-}, \tag{4.32}$$

где X — оператор (4.2) в "старых" переменных (x,u), $\bar{h}_+,\bar{h}_-$ — правый и левый шаги в "новых" переменных. Применение требования равномерности сетки к оператору (4.32) дает условие (4.31).

В частности, решение уравнений для f и g

$$X(f(x,u))=1, \quad X(g(x,u))=0,$$

дает замену переменных (4.30), преобразующих группу G_1 в группу трансляций $\widetilde{X}=\dfrac{\partial}{\partial\bar{x}}$.

Достаточное условие "выпрямление" сетки (4.31) особенно упрощается, если замена переменных касается лишь независимой переменной:

$$\bar{x}=f(x), \quad \bar{u}=u,$$

$$\underset{+h}{S}(\xi f_x)-2\xi f_x+\underset{-h}{S}(\xi f_x)\Big|_{\underset{h}{\omega}}=0. \tag{4.33}$$

При этом новый шаг есть $\bar{h}_+=\underset{+h}{S}(f(x))-f(x)=f(x+h)-f(x)$.

Таким образом, *всякая инвариантная неравноменая сетка является равномерной в некоторой системе координат.* Заметим, что при этом, разумеется, меняются разностные уравнения, записаные на этой сетке.

Пример "выпрямления" сетки. Воспользуемся полученным выше условием для выпрямления сетки, инвариантной относительно однопараметрической проективной группы:

$$X=x^2\frac{\partial}{\partial x}+h_+(2x+h_+)\frac{\partial}{\partial h_+}+h_-(2x-h_-)\frac{\partial}{\partial h_-}. \tag{4.34}$$

Выше была получена инвариантная неравномерная сетка на интервале $(0, L_0)$

$$h_+ = \frac{x^2}{L_0 - x}, \quad h_- = \frac{x^2}{L_0 + x}.$$

Легко проверить, что замена переменных $\bar{x} = -\dfrac{1}{x}, \quad \bar{u} = u$, удовлетворяет условию (4.33). Проективный оператор (4.34) в новых переменных становится оператором переноса $\dfrac{\partial}{\partial \bar{x}}$, который не меняет шагов сетки при преобразованиях $\bar{G}_1$. Убедимся, что в новых переменных сетка равномерна:

$$\bar{h}_+ = -\frac{1}{x + \left(\dfrac{x^2}{L_0 - x}\right)} + \frac{1}{x} = \frac{1}{L_0}, \quad \bar{h}_- = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x - \left(\dfrac{x^2}{L_0 + x}\right)} = \frac{1}{L_0},$$

т. е. $\bar{h}_+ = \bar{h}_-$.

4.6. Инвариантные ортогональные неравномерные сетки на плоскости. Полученные условия инвариантности геометрических характеристик разностных сеток позволяют строить их комбинации. Рассмотрим, например, случай двумерной ортогональной сетки, имеющей нерегулярную структуру вдоль осей x^1, x^2.

Теорема 4.8. *Пусть задана ортогональная неравномерная прямоугольная сетка* $\underset{h}{\omega}$

$$h^+{}_1 = \phi_1(x^1, x^2) \quad h^+{}_2 = \phi_2(x^1, x^2). \tag{4.35}$$

Для того чтобы сетка (4.35) *была инвариантна относительно группы* G_1 *с оператором* (4.5) *необходимы и достаточны следующие условия*:

$$\underset{\pm h}{D}{}_1 \left(\xi^2(z)\right) + \underset{\pm h}{D}{}_2 \left(\xi^1(z)\right) \Big|_{(4.35)} = 0,$$

$$\xi^1 \left(\underset{+h}{S}{}_1(z)\right) - \xi^1(z)\left(1 + \frac{\partial \phi_1}{\partial x^1}\right) - \xi^2(z)\frac{\partial \phi_1}{\partial x^2}\bigg|_{(4.35)} = 0,$$

$$\xi^2 \left(\underset{+h}{S}{}_2(z)\right) - \xi^2(z)\left(1 + \frac{\partial \phi_2}{\partial x^2}\right) - \xi^1(z)\frac{\partial \phi_2}{\partial x^1}\bigg|_{(4.35)} = 0.$$

Доказательство проводится непосредственным применением оператора (4.5), с учетом ранее полученных условий инвариантной ортогональности.

4.7. Сетки, сохраняющие плоскость временнóго слоя. Рассмотрим ситуацию, когда для данной группы G_1 ортогональная сетка

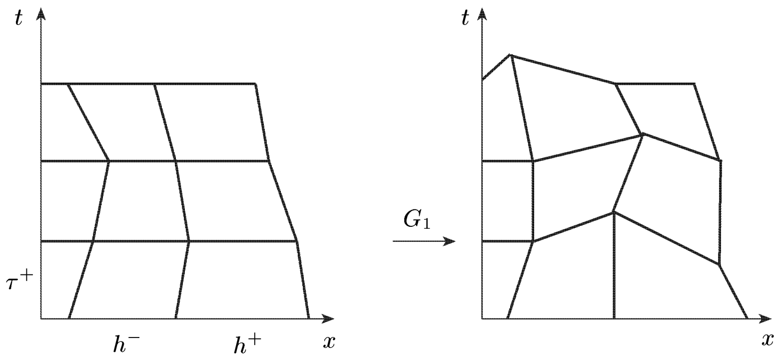

Рис. 4.3

не является инвариантной. В этом случае иногда бывает важным сохранить плоскую структуру слоев сетки в каком-нибудь направлении. Это имеет особый смысл, когда рассматриваются эволюционные уравнения. Если используется сетка, у которой временные слои представляют собой прямые линии, параллельные оси x (см. рис. 4.3), то важно сохранить эту характеристику и при преобразованиях G_1. В противном случае возникает ситуация, изображенная на рис. 4.3, когда после преобразований G_1 часть пространства будет в "будущем", в то время как остальная — в "прошлом".

Пусть сетка в плоскости (t, x) задана следующими равенствами:

$$\tau^+ = \varphi(t), \quad h^+ = \psi(t, x). \tag{4.36}$$

В этом случае сетка будет иметь плоские временные слои (шаг τ^+ не зависит от x).

Пусть группа G_1 определена своим оператором

$$X = \xi^t(z)\frac{\partial}{\partial t} + \xi^x(z)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(z)\frac{\partial}{\partial u} + \ldots + [\xi^t(\underset{+\tau}{S}(z)) - \xi^t(z)]\frac{\partial}{\partial \tau^+}, \tag{4.37}$$

где

$$\underset{+\tau}{S} = \sum_{s\geqslant 0}\frac{(\tau^+)^s}{s!}D_t^s$$

— оператор сдвига на следующий временной слой.

Новый шаг $(\tau^+)^*$ будет одним и тем же в каждом узле сетки на временном слое, если он не зависит от пространственной переменной x:

$$\underset{+h}{D}(\tau^{+})^{*} = 0.$$

Инфинитизимальная характеристика этого условия будет соответственно такой:

$$\underset{+h}{D}\,\underset{+\tau}{D}(\xi^{t}(z)) = 0, \tag{4.38}$$

где

$$\underset{+\tau}{D} = \frac{\underset{+\tau}{S} - 1}{\tau^{+}}.$$

Теорема 4.9. *Для того чтобы сетка с плоскими временными слоями сохраняла это свойство при преобразованиях G_1 с оператором* (4.37), *необходимо и достаточно выполнение условия* (4.38) *в каждом узле сетки.*

Заметим, что теорема 4.9 решает вопрос об инвариантности плоскости временного слоя (или плоскости слоя по любой другой координате), однако не решает вопрос об инвариантности сетки (4.36). Применение оператора (4.37) к уравнениям (4.36) добавляет к условиям (4.38) следующее:

$$\xi^{t}(\underset{\tau}{S}(z)) - \xi^{t}(z)(1 + \varphi_{t})\big|_{(4.36)} = 0,$$

$$\xi^{x}(\underset{+h}{S}(z)) - \xi^{x}(z)(1 + \psi_{x}) - \xi^{t}(z)\psi_{t}\big|_{(4.36)} = 0.$$

Примеры сеток, сохраняющие плоскость временных слоев при преобразованиях группы, будут рассмотрены в следующей главе.

Заметим, что в случае произвольной сетки формулы продолжения для точек — узлов сетки также легко выписать. Пусть, например, задана система кривых в плоскости (x_1, x_2), имеющая узлы в точках ${x^{i}}_{1}$, ${x^{j}}_{2}$. Тогда оператор группы, орбита которой проходит через точку ${x^{i}}_{1}$, ${x^{j}}_{2}$, запишется в следующем виде:

$$X = \xi_1({x^{i}}_{1}, {x^{j}}_{2})\frac{\partial}{\partial x_1} + \xi_2({x^{i}}_{1}, {x^{j}}_{2})\frac{\partial}{\partial x_2}, \qquad i, j = 1, 2, \ldots$$

§ 5. Преобразования, сохраняющие смысл конечно-разностных производных. Формулы продолжения

1. Рассмотрим формальную однопараметрическую группу G_1 преобразований в $\underset{h}{\widetilde{Z}}$:

$$x^{*} = f(z, a), \qquad \underset{h}{u}{}_{1}^{*} = \varphi_1(z, a),$$

$$\begin{array}{ll} u^* = g(z,a), & \underset{h}{u}{}_2^* = \varphi_2(z,a), \\ u_1^* = g_1(z,a), & \dots\dots\dots\dots \\ u_2^* = g_2(z,a), & \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots & \end{array} \tag{5.1}$$

где f, g, g_i — формальные степенные ряды вида (2.1).

Оператор дискретного сдвига $\underset{\pm h}{S}$, определенный в § 3, действует на все координаты вектора $(x, u, u_1, \dots) \in \widetilde{Z}$, поэтому естественно определить преобразование шага h^+ как разность двух формальных рядов:

$$h^{+*} = f\left(\underset{+h}{S}(z), a\right) - f(z,a),$$

где

$$f(\underset{+h}{S}(z), a) = \sum_{s\geqslant 0} \frac{a^s}{s!} A_s\left(\underset{+h}{S}(z)\right)$$

— формальный степенной ряд со "сдвинутыми" коэффициентами.

Аналогично $h^{-*} = f(z,a) - f\left(\underset{-h}{S}(z), a\right)$.

Конечно-разностные производные были введены в $\widetilde{Z}$ как формальные степенные ряды специального вида

$$\underset{h}{u}{}_1 = \underset{+h}{D}(u) = \sum_{s\geqslant 1} \frac{(h^+)^{s-1}}{s!} u_s, \quad \underset{h}{u}{}_2 = \underset{-h}{D}(\underset{h}{u}{}_1), \quad \dots \tag{5.2}$$

Преобразования произвольной формальной группы (5.1) могут привести к тому, что в новых переменных ряды $\underset{h}{u}{}_1^*, \underset{h}{u}{}_2^*, \dots, h^{+*}, h^{-*}$ нельзя будет представить в виде (5.2).

Потребуем от формальных рядов (5.1) сохранения определения разностных производных, т. е. инвариантности представления (5.2) по отношению к (5.1). В случае сходимости рядов (5.2) можно говорить и о сохранении геометрического смысла разностных производных.

Итак, преобразования $\underset{h}{u}{}_k$ зададим следующим образом:

$$\begin{gathered} \underset{h}{u}{}_1^* = \sum_{s\geqslant 1} \frac{(h_+^*)^{s-1}}{s!} g_s(z,a) = u_1^* + \frac{h_+^*}{2!} u_2^* + \dots, \\ \underset{h}{u}{}_2^* = \sum_{l\geqslant 1}\sum_{s\geqslant 1} \frac{(-h_-^*)^{l-1}}{l!} \frac{(h_+^*)^{s-1}}{s!} g_{s+l}(z,a) = u_2^* + \frac{h_+^* - h_-^*}{2} u_3^* + \dots, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{gathered} \tag{5.3}$$

Из определения $\underset{\pm h}{S}$ и $\underset{h}{u}{}_k$ нами была получена таблица действий $\underset{\pm h}{S}$ на разностные производные, в частности

$$\underset{+h}{S}(u) - u = \underset{h}{u}{}_1 h^+. \tag{5.4}$$

Сохранение представления $\underset{h}{u}{}_k$ в виде (5.3) приводит, естественно, и к сохранению соотношений таблицы 3.1. В частности, сохраняется соотношение (5.4):

$$g\left(\underset{+h}{S}(z), a\right) - g(z, a) = \underset{h}{u}{}_1^*(h^+)^*.$$

По аналогии с группами касательных преобразований ([27, 38]) назовем соотношение (5.4) *условием дискретного касания первого порядка.*

Если преобразования G_1 сохраняют (5.4), то будем говорить, что они *сохраняют смысл первой разностной производной.*

Наряду с сохранением смысла первой разностной производной можно говорить и о сохранении смысла (т. е. определения и геометрического смысла) непрерывных производных $u_1, u_2, \ldots$ в $\widetilde{Z}$, т. е. об инвариантности соотношений

$$du = u_1 dx,\ du_1 = u_2 dx,\ \ldots,\ du_s = u_{s+1} dx,\ \ldots \tag{5.5}$$

(для простоты мы ограничились случаем одной независимой переменной x).

Известно ([27, 38]), что инвариантность системы (5.5) справедлива для локальных групп Ли точечных и контактных преобразований, а также для высших симметрий, т. е. систему (5.5) сохраняют все непрерывные симметрии. Из инвариантности (5.5) следуют цепочки соотношений

$$\zeta_s = D^s(\eta - \xi u_1) + \xi u_{s+1}, \quad s = 1, 2, \ldots, \tag{5.6}$$

на координаты оператора группы G_1 (5.1):

$$X = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial u} + \sum_{s\geqslant 1}\zeta_s\frac{\partial}{\partial u_s}, \tag{5.7}$$

где $\zeta_s = \left.\dfrac{\partial u_s^*}{\partial a}\right|_{a=0}$.

Естественно, возникает вопрос, можно ли совместить сохранение смысла разностных производных с сохранением смысла “обычных” производных, т. е. с инвариантностью системы (5.5)?

Ответ дает следующая теорема.

Теорема 5.1. *Пусть* G_1 — *формальная однопараметрическая группа с оператором* (5.7). *Пусть в каждой точке* $\widetilde{Z}$ *уравнение* (5.4) *представляет собой инвариантное многообразие* G_1. *Тогда для координат оператора* (5.7) *справедлива цепочка соотношений* (5.6), *т. е. инвариантность системы* (5.5). *Обратно, из инвариантности системы* (5.5) *следует сохранение дискретного касания первого порядка, т. е. инвариантность соотношения* (5.4).

Доказательство. Вычислим в $\widetilde{Z}$ координаты оператора (5.7) при разностном дифференциале, входящем в (5.4):

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(g\left(\underset{+h}{S}(z),a\right)-g(z,a)\right)\Bigg|_{a=0}=\sum_{s\geqslant 0}\frac{(h^+)^s}{s!}D^s(\eta)-\eta=$$
$$=\sum_{s\geqslant 1}\frac{(h^+)^s}{s!}D^s(\eta)=h^+\underset{+h}{D}(\eta). \quad (5.8)$$

Выпишем теперь из формул (5.3) координату оператора (5.7), задающую преобразование $\underset{h}{u}_1$:

$$\underset{h}{\zeta}_1=\frac{\partial \underset{h}{u}{}_1^*}{\partial a}\Bigg|_{a=0}=$$
$$=\sum_{s\geqslant 1}\frac{(h^+)^{(s-1)}}{s!}\zeta_s+\sum_{s\geqslant 2}\frac{(s-1)(h^+)^{(s-2)}}{s!}u_s\sum_{l\geqslant 1}\frac{(h^+)^l}{l!}D^l(\xi), \quad (5.9)$$

где ζ_s функции не определены, т. к. мы не предполагаем инвариантности системы (5.5). Критерий инвариантности (5.4) с помощью формул (5.8), (5.9) будет выглядеть так:

$$\sum_{s\geqslant 1}\frac{(h^+)^s}{s!}D^s(\eta)-\sum_{s\geqslant 1}\frac{(h^+)^s}{s!}D^s(\xi)\sum_{l\geqslant 1}\frac{(h^+)^{l-1}}{l!}u_l-$$
$$-h^+\sum_{s\geqslant 1}\frac{(h^+)^{s-1}}{s!}\zeta_s-\sum_{s\geqslant 2}\frac{(s-1)(h^+)^{s-1}}{s!}u_s\sum_{l\geqslant 1}\frac{(h^+)^l}{l!}D^l(\xi)=0. \quad (5.10)$$

Уравнение (5.10) представляет собой равенство нулю формального степенного ряда по h^+. Приравнивая нулю коэффициенты при степенях h^+, получаем цепочки формул (5.6).

Таким образом, *сохранение смысла* (определения) *первой разностной производной при преобразованиях* G_1 *автоматически ведет к сохранению определения всех непрерывных производных* $u_1, u_2, \ldots$, т. е.

к инвариантности бесконечной системы (5.5). Заметим, что при выписывании критерия инвариантности касания первого порядка (5.4) мы не были привязаны к какой-либо конкретной разностной сетке, т. е. инвариантность сетки не предполагается.

Обратно, пусть нам задана цепочка формул (5.6); тогда, подставляя их в критерий (5.10), мы убеждаемся, что он выполняется тождественно, тем самым подтверждая инвариантность (5.4). Теорема доказана.

Инвариантность (5.4) обеспечивает сохранение смысла I разностной производной при преобразованиях G_1 (5.1) и, как показывают формулы (5.5), полученные в теореме 5.1, сохранение смысла всех "обычных" производных $u_1, u_2, \ldots$. Сохраняет ли такая группа смысл второй, третьей и т. д. разностных производных? Ответ дает следующая теорема.

Теорема 5.2. *Пусть задана формальная однопараметрическая группа* G_1 (5.1) *с оператором* (5.7), *и пусть в каждой точке* $\underset{h}{\widetilde{Z}}$ (*в каждом узле сетки* ω_h) *инвариантно соотношение* (5.4). *Тогда* G_1 *сохраняет дискретное касание любого конечного порядка* (см. [20–22]).

Доказательство. Дискретным касанием II порядка будем называть второе соотношение из таблицы 2.1:

$$\underset{h}{u}_1 - \underset{-h}{S}(\underset{h}{u}_1) = h\underset{h}{u}_2, \tag{5.11}$$

а инвариантность этого соотношения — сохранением смысла II второй разностной производной второго порядка. Покажем, что инвариантность (5.11) является следствием инвариантности дискретного касания I порядка. Действительно, наряду с сохранением условия (5.4):

$$\underset{+h}{S}(u) - u = h\underset{h}{u}_1,$$

выполняется (в силу условия теоремы) и инвариантность касания в соседней точке:

$$u - \underset{-h}{S}(u) = h\underset{-h}{S}(\underset{h}{u}_1). \tag{5.12}$$

Вычтя (5.12) из предыдущего соотношения, получим

$$\underset{+h}{S}(u) - 2u + \underset{-h}{S}(u) = h(\underset{h}{u}_1 - \underset{-h}{S}(\underset{h}{u}_1)) = h^2\underset{h}{u}_2,$$

т. е. соотношение (5.8). Таким образом, инвариантность (5.8) является следствием инвариантности слагаемых (5.4) и (5.12). Совершенно очевидным является завершение доказательства теоремы (для касания любого порядка) по индукции.

Итак, *формальная группа* G_1 (5.1), *сохраняющая смысл первой разностной производной, является группой в* $\widetilde{Z}$, *сохраняющей смысл всех непрерывных производных, и продолжается в* $\underset{h}{\widetilde{Z}}$ *с сохранением смысла всех разностных производных конечного порядка.*

Отметим *нелокальность* данной интерпретации групп симметрий: две точки на гладкой кривой, расположенные на малом, но конечном расстоянии друг от друга, переходят в две точки на образе этой кривой (в многомерном случае преобразования переводят окрестность точки z локально аналитического многообразия Φ в окрестность точки z^* многообразия Φ^*).

Приведем формулы продолжения для конечно-разностных производных, полученные последовательным действием оператора X (5.4) на строки табл. 3.1:

$$
\begin{gathered}
\underset{h}{\zeta_1} = \underset{+h}{D}(\eta) - \underset{h}{u}{}_1\, \underset{+h}{D}(\xi),\\
\underset{h}{\zeta_2} = \underset{-h}{D}(\underset{h}{\zeta_1}) - \underset{h}{u}{}_2\, \underset{-h}{D}(\xi),\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\underset{h}{\zeta_{2k}} = \underset{-h}{D}(\underset{h}{\zeta_{2k-1}}) - \underset{h}{u}{}_{2k}\, \underset{-h}{D}(\xi),\\
\underset{h}{\zeta_{2k+1}} = \underset{+h}{D}(\underset{h}{\zeta_{2k}}) - \underset{h}{u}{}_{2k+1}(\xi),\\
k = 1, 2, \dots
\end{gathered}
\tag{5.13}
$$

Отметим, что рекуррентная цепочка формул (5.13) при $h \to 0$ формально переходит в формулы групп Ли для непрерывного случая.

3. Рассмотрим, как продолжается оператор группы G_1 в двумерном случае. Напомним обозначения пространств в этом случае:

$$
\underset{h}{Z} = (x^1, x^2, u, \underset{h}{u}{}_1, \underset{h}{u}{}_2, \underset{h}{u}{}_{12}, \dots, h^+{}_1, h^+{}_2),
$$

$$
\widetilde{Z} = (x^1, x^2, u, u_1, u_2, u_{12}, \dots),
$$

$$
\underset{h}{\widetilde{Z}} = (x^1, x^2, u, u_1, u_2, \dots, \underset{h}{u}{}_1, \underset{h}{u}{}_2, \underset{h}{u}{}_{12}, \dots, h^+{}_1, h^+{}_2),
$$

где $u_{ij} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}$, $\underset{h}{u}{}_{ij} = \underset{+h}{D}{}_j\, \underset{+h}{D}{}_i(u)$, …, $\underset{h}{\omega} = \underset{h}{\omega}{}_1 x \underset{h}{\omega}{}_2$, $\underset{h}{\omega}{}_i$ — разностная сетка по i-му направлению.

Обозначим через $\underset{h}{\widetilde{Z}}$ пространство последовательностей формальных степенных рядов с аналитическими коэффициентами:

$$
z^{j*} = \sum_{s \geqslant 0} A_s^j(z) a^s, \quad A_0^j = z^j, \tag{5.14}
$$

z^j — координата вектора $(x, u, u_1, u_2, \ldots, \underset{h}{u}_1, \underset{h}{u}_2, \underset{h}{u}_{12}, \ldots)$.

Будем трактовать последовательность рядов (5.14) как преобразования в $\underset{h}{\widetilde{Z}}$. Среди рядов вида (5.14) нас по-прежнему будут интересовать лишь те, которые образуют формальную однопараметрическую группу и описываются инфинитезимальными операторами

$$X = \xi^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \eta^k \frac{\partial}{\partial u^k} + \\ + \sum_{s \geqslant 1} \zeta_{i_1 \ldots i_s} \frac{\partial}{\partial u_{i_1 \ldots i_s}} + \sum_{l \geqslant 1} \underset{h}{\zeta}_{i_1 \ldots i_l} \frac{\partial}{\partial \underset{h}{u}_{i_1 \ldots i_l}}. \quad (5.15)$$

Дополнив $\underset{h}{\widetilde{Z}}$ переменными h_1, h_2, продолжим оператор (5.15):

$$X = \ldots + h_1 \underset{+h_1}{D}(\xi^1) \frac{\partial}{\partial h_1} + h_2 \underset{+h_2}{D}(\xi^2) \frac{\partial}{\partial h_2}. \quad (5.15*)$$

Вычислим координаты оператора (5.15) при разностных производных.

Для этого рассмотрим в $\underset{h}{\widetilde{Z}}$ двумерную поверхность (индекс k в u^k мы по-прежнему опустим)

$$u = \Psi(x^1, x^2). \quad (5.16)$$

Пусть в $\underset{h}{\widetilde{Z}}$ действует формальная группа G_1 преобразований

$$x^1 = f^1(z, a), \quad x^2 = f^2(z, a), \quad u = g(z, a), \quad \ldots,$$

касательное поле которой задается оператором (5.15). Под действием группы G_1 многообразие (5.16) перейдет в $u^* = \Psi^*(x^{1*}, x^{2*})$ или

$$g(z, a) = \Psi^*(f^1(z, a), f^2(z, a)). \quad (5.17)$$

Подействуем на равенство (5.17) оператором $(\underset{+h_1}{S} - 1)$ (рис. 5.1):

$$(\underset{+h_1}{S} - 1) g(z, a) = \Psi^*(\underset{+h_1}{S}(f^1), \underset{+h_1}{S}(f^2)) - \Psi^*(f^1, f^2) = \\ = \frac{\Psi^*(\underset{+h_1}{S}(f^1), \underset{+h_1}{S}(f^2)) - \Psi^*(\underset{+h_1}{S^1}(f^1), f^2)}{(\underset{+h_!}{S} - 1) f^2} (\underset{+h_1}{S} - 1) f^2 + \Psi^*(\underset{+h_1}{S}(f^1), f^2) - \\ - \Psi^*(f^1, f^2).$$

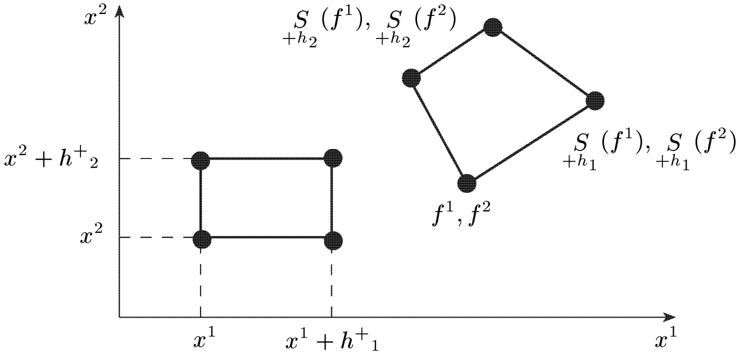

Рис. 5.1

Применяя к полученному равенству операцию $\left.\dfrac{\partial}{\partial a}\right|_{a=0}$, получим

$$(\underset{+h_1}{S}-1)(\eta)=\underset{+h_1}{S}(u_2)(\underset{+h_1}{S}-1)(\xi^2)+\underset{h}{\zeta}{}_1 h_1+\underset{h}{u}{}_1(\underset{+h_1}{S}-1)(\xi^1),$$

откуда получаем выражение для искомой координаты

$$\underset{h}{\zeta}{}_1=\underset{+h_1}{D}(\eta)-\underset{h}{u}{}_1\underset{+h_1}{D}(\xi^1)-\underset{+h_1}{S}(u_2)\underset{+h_1}{D}(\xi^2), \tag{5.18}$$

где $\underset{+h_1}{S}(u_2)$ — это "непрерывная" производная $u_2=\dfrac{\partial u}{\partial x^2}$ в точке, смещенной вправо на шаг h_1 вдоль оси x^1 (о дискретном представлении в $\underset{h}{Z}$ "непрерывных" производных см. ниже).

Аналогичным образом получим следующие формулы продолжения:

$$\underset{h}{\zeta}{}_2=\underset{+h_2}{D}(\eta)-\underset{+h_2}{S}(u_1)\underset{+h_2}{D}(\xi^1)-\underset{h}{u}{}_2\underset{+h_2}{D}(\xi^2), \tag{5.19}$$

$$\underset{h}{\zeta}{}_{1\bar{1}}=\underset{-h_1}{D}\,\underset{+h_1}{D}(\eta)-2\underset{h}{u}{}_{1\bar{1}}\underset{+h_1}{D}(\xi^1)-\frac{1}{h_1}\underset{+h_1}{S}(u_2)\underset{+h_1}{D}(\xi^2)+\\+\frac{1}{h_1}\underset{-h_1}{S}(u_2)\underset{-h_1}{D}(\xi^2), \tag{5.20}$$

$$\underset{h}{\zeta}{}_{2\bar{2}}=\underset{-h_2}{D}\,\underset{+h_2}{D}(\eta)-2\underset{h}{u}{}_{2\bar{2}}\underset{+h_2}{D}(\xi^2)-\frac{1}{h_2}\underset{+h_2}{S}(u_1)\underset{+h_2}{D}(\xi^1)+\\+\frac{1}{h_2}\underset{-h_2}{S}(u_1)\underset{-h_2}{D}(\xi^1), \tag{5.21}$$

$$\underset{h}{\zeta}_{12} = \underset{+h_2}{D}\,\underset{+h_1}{D}(\eta) - \underset{h}{u}_{12}(\underset{+h_1}{D}(\xi^1) + \underset{+h_1}{D}(\xi^1)) + \frac{1}{h_1}\underset{+h_2}{S}(u_1)\underset{+h_2}{D}(\xi^1) + \\ + \frac{1}{h_2}\underset{+h_1}{S}(u_2)\underset{+h_1}{D}(\xi^2), \quad (5.22)$$

....

Заметим, что формулы продолжения (5.18)-(5.22) можно получить с помощью формул групп Ли преобразований в непрерывном пространстве, — так же, как в одномерном случае. В формулах (5.18)-(5.22) не предполагается, что соответствующая сетка является инвариантно-равномерной или инвариантно-ортогональной. Если рассматриваются именно такие сетки, то формулы продолжения (5.18)-(5.22) должны быть дополнены соответствующими формулами инвариантных сеток.

§ 6. Группа Ньютона и формула Лагранжа

Группа Тейлора, определяемая в $\underset{h}{\widetilde{Z}}$ оператором D, позволила нам распространить действие формальной группы на сеточные переменные $(\underset{h}{u}_1, \underset{h}{u}_2, \dots)$. В теории групп высших симметрий [27, 38] группа Тейлора также играет существенную роль. С помощью ее обобщения — группы, определяемой в $\widetilde{Z}$ операторами $\xi^i D^i$, $\xi^i(z) \in A$, допускаемой любыми дифференциальными уравнениями, производится переход к фактор-алгебре операторов. Представители этой фактор-алгебры имеют независимые переменные в качестве инвариантов, формулы продолжения для них имеют простой и удобный вид.

В этом параграфе в простейшем случае — одной независимой переменной x и равномерной сетки $\underset{h}{\omega}$ — рассматривается разностный аналог этой конструкции. Строится группа преобразований в сеточном пространстве, — группа Ньютона, — изоморфная группе Тейлора. С помощью группы Ньютона строится идеал алгебры Ли множества всех операторов в сеточном пространстве. Построенный идеал используется для факторизации множества операторов формальной группы.

Орбита группы Тейлора, т. е. однопараметрическая кривая в $\widetilde{Z}$, получаемая как траектория произвольной точки $(x, u, u_1, u_2, \dots)$ под действием оператора $_a = e^{aD}$, в точках $a = \pm nh, (n = 0, 1, 2, \dots)$ совпадает с точками, получаемыми действием дискретного сдвига $(\underset{\pm h}{S})^n$. Иначе говоря, орбита группы Тейлора представляет собой "непрерывный сдвиг", проведенный через "дискретный сдвиг". Возникает вопрос об обращении этой процедуры, — получение непрерывного сдвига через дискретный, или, иначе, *вопрос о представлении группы Тейлора в сеточном пространстве* $\underset{h}{\widetilde{Z}}$.

Следующие наводящие соображения позволяют выяснить, какие степенные ряды должны быть использованы для такого представления.

Если сдвиг вдоль орбиты группы Тейлора при $a = h$ дает дискретный сдвиг $\underset{+h}{S}$, то, чтобы получить сдвиг на $a \neq nh$, подействуем на некоторую точку в $\underset{h}{\widetilde{Z}}$ оператором $\underset{+h}{S}$ "нецелое число раз", т. е. *введем в рассмотрение дробную степень оператора* $\underset{+h}{S}$.

В качестве определения дробной степени оператора сдвига $(\underset{+h}{S})^{a/h}$ мы возьмем следующий операторный ряд:

$$(\underset{+h}{S})^{a/h} \equiv (1 + h\underset{+h}{D})^{a/h} \equiv 1 + \frac{a}{h} h\underset{+h}{D} + \frac{a}{h}\left(\frac{a}{h} - 1\right)\frac{h^2}{2!}\underset{+h}{D}^2 + \ldots =$$
$$= 1 + a\underset{+h}{D} + \frac{a(a-h)}{2!}\underset{+h}{D}^2 + \frac{a(a-h)(a-2h)}{3!}\underset{+h}{D}^3 + \ldots =$$
$$= 1 + \sum_{s=1}^{\infty}\left(\prod_{k=0}^{s-1}(a - kh)\right)\frac{1}{s!}\underset{+h}{D}^s. \quad (6.1)$$

Фигурирующую в разложении (6.1) величину $a^{[s]} = \prod_{k=0}^{s-1}(a - kh)$ называют *обобщенной степенью величины* a (см. [13]). Под действием операторного ряда (6.1) координата x переходит в $x^* = x + a$, координата u в ряд

$$u^* = u + a\underset{h}{u}_1 + \frac{a(a-h)}{2!}(\underset{h}{u}_2 + h\underset{h}{u}_3) + \ldots,$$

т. е. представляет собой *разложение в ряд Ньютона функции* $u = u(x)$ *в точке* $(x + a)$ *на равномерной сетке узлов* x, $(x + h)$, $(x + 2h)$, ...

Аналогично получим разложение в ряд дробной степени оператора дискретного сдвига влево (> 0):

$$(\underset{-h}{S})^{a/h} \equiv (1 - h\underset{-h}{D})^{a/h} = 1 + \sum_{s=1}^{\infty}\left(\prod_{k=0}^{s-1}(kh - a)\right)\frac{1}{s!}\underset{-h}{D}^s. \quad (6.2)$$

Действие ряда (6.2) на координату u дает разложение в ряд Ньютона функции $u = u(x)$ в точке $(x - a)$ на равномерной сетке узлов $(x,\ (x - h),\ (x - 2h),\ \ldots)$.

Действие операторных рядов (6.1), (6.2) на точку $(x, u, u_1, u_2, \ldots)$ совпадает с действием группы Тейлора в точках $a = \pm nh$. Заметим, кстати, что в этих точках ряды (6.1)-(6.2) обрываются — имеют конечное число членов ($s = 1, 2, \ldots, n$):

$$1 + \sum_{s=1}^{\infty} \left(\prod_{k=0}^{s-1} (a - kh) \right) \frac{1}{s!} \underset{+h}{D}^{s} \Big|_{a=nh} = (\underset{+h}{S})^n,$$

$$1 + \sum_{s=1}^{\infty} \left(\prod_{k=0}^{s-1} (kh - a) \right) \frac{1}{s!} \underset{-h}{D}^{s} \Big|_{a=nh} = (\underset{-h}{S})^n.$$

Перегруппируем формальные операторные ряды по степеням параметра a :

$$N^{+}{}_a = \sum_{s \geqslant 0}^{\infty} \frac{a^s}{s!} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-h)^{n-1}}{n} \underset{+h}{D}^{n} \right)^s, \tag{6.3}$$

$$N^{-}{}_a = \sum_{s \geqslant 0}^{\infty} \frac{(-a)^s}{s!} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{n-1}}{n} \underset{-h}{D}^{n} \right)^s.$$

Таким образом, операторы (6.3) определены в $\underset{h}{Z} = (x, u, \underset{h}{u}_1, \underset{h}{u}_2, \ldots)$ и представляются в экспоненциальном виде:

$$N_a = e^{a \underset{+h}{\widetilde{D}}}, \quad N_a = e^{-a \underset{-h}{\widetilde{D}}}, \tag{6.4}$$

где

$$\underset{+h}{\widetilde{D}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-h)^{n-1}}{n} \underset{+h}{D}^{n}, \qquad \underset{-h}{\widetilde{D}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{n-1}}{n} \underset{-h}{D}^{n}. \tag{6.5}$$

Экспоненциальное представление (6.4)-(6.5) означает, что действие операторов $N^{+}{}_a, N^{-}{}_a$ на точку $(x, u, \underset{h}{u}_1, \underset{h}{u}_2, \ldots)$ образует пару формальных групп преобразований в $\underset{h}{Z}$:

$$\begin{gathered} x^* = x \pm a, \\ u^* = u \pm a \underset{\pm h}{\widetilde{D}}(u) + \frac{a^2}{2!} \underset{\pm h}{\widetilde{D}}^{2}(u) \pm \ldots, \\ \underset{h}{u}{}_1^* = \underset{h}{u}_1 \pm a \underset{\pm h}{\widetilde{D}}(\underset{h}{u}_1) + \frac{a^2}{2!} \underset{\pm h}{\widetilde{D}}^{2}(\underset{h}{u}_1) \pm \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \underset{h}{u}{}_s^* = \underset{h}{u}_s \pm a \underset{\pm h}{\widetilde{D}}(\underset{h}{u}_s) + \frac{a^2}{2!} \underset{\pm h}{\widetilde{D}}^{2}(\underset{h}{u}_s) \pm \ldots \end{gathered} \tag{6.6}$$

Вторая строка этих преобразований представляет собой *формальное разложение* (вправо и влево) *функции* $u = u(x)$ *в точке* $(x \pm a)$ *в ряд Ньютона* (см., например, [13]). Остальные строки могут быть получены почленным разностным дифференцированием, поскольку операторы $\underset{+h}{D}$, $\underset{-h}{D}$ и $\underset{+h}{\widetilde{D}}$, $\underset{-h}{\widetilde{D}}$ коммутируют. Группу (6.6) будем называть *группой Ньютона* ([21], [22]).

Действие $N^{+}{}_{a}, N^{-}{}_{a}$ при $a > 0$ можно трактовать как формальную интерполяцию по Ньютону (соответственно, вправо и влево) на бесконечном числе равноотстоящих узлов; при $a < 0$ $N^{+}{}_{a}, N^{-}{}_{a}$ дают, соответственно, экстраполяцию влево и вправо.

Вычислим касательное поле пары формальных групп (6.6) — группы Ньютона:

$$
\begin{gathered}
\xi^{\pm} = \left.\frac{\partial x^*}{\partial a}\right|_{a=0} = \pm 1, \\
\eta^{\pm} = \left.\frac{\partial u^*}{\partial a}\right|_{a=0} = \pm \underset{\pm h}{\widetilde{D}}(u), \qquad (6.7)\\
\underset{h}{\zeta}{}_{1}^{\pm} = \left.\frac{\partial}{\partial a} \underset{h}{u}{}_{1}^{*}\right|_{a=0} = \pm \underset{\pm h}{\widetilde{D}}(\underset{h}{u}{}_{1}), \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{gathered}
$$

Вместо пары касательных полей (6.7) будем рассматривать инфинитезимальные операторы группы Ньютона:

$$
\underset{h}{D}{}^{+} = \frac{\partial}{\partial x} + \underset{+h}{\widetilde{D}}(u)\frac{\partial}{\partial u} + \underset{+h}{\widetilde{D}}(\underset{h}{u}{}_{1})\frac{\partial}{\partial \underset{h}{u}{}_{1}} + \dots, \qquad (6.8)
$$

$$
\underset{h}{D}{}^{-} = -\frac{\partial}{\partial x} - \underset{-h}{\widetilde{D}}(u)\frac{\partial}{\partial u} - \underset{-h}{\widetilde{D}}(\underset{h}{u}{}_{1})\frac{\partial}{\partial \underset{h}{u}{}_{1}} - \dots
$$

В операторе $\underset{h}{D}{}^{-}$ мы удержали знак $-$, поскольку $\underset{h}{D}{}^{-}$ определяет сдвиг влево при положительном значении параметра a.

Итак, с помощью наводящих соображений мы построили формальную группу в $\underset{h}{Z}$ — группу Ньютона. Ее орбита совпадает с орбитой группы Тейлора в точках $a = nh$.

Покажем теперь, что группа Ньютона (6.6) с касательным полем (6.7) действительно является “дискретным” представлением группы Тейлора в $\underset{h}{Z}$.

Известно, что конечные преобразования непрерывной группы взаимнооднозначно связаны с инфинитезимальным (бесконечно малым) преобразованием. В случае точечных групп эта связь выражается с помощью конечной системы уравнений Ли. В случае групп высших симметрий соответствующая связь выражена бесконечной цепочкой уравнений Ли, решение которой дается единственной рекуррентной последовательностью коэффициентов формальных рядов (см. [27]). В обоих случаях решение этой системы можно представить в виде экспоненциального отображения. В случае $\underset{h}{\widetilde{Z}}$ конечное преобразование любой координаты z^i дается формулой:

$$z^{i*} = \underset{a}{S}(z^i) \equiv e^{aX}(z^i) \equiv \sum_{s\geqslant 0} \frac{a^s}{s!} X^s(z^i). \tag{6.9}$$

Ряд (6.9) можно обратить, т. е. восстановить инфинитезимальное преобразование $aX(z^i)$ по конечному преобразованию $\underset{a}{S}(z^i)$ в виде логарифмического ряда (см., например, [35, 45])

$$\begin{aligned} aX(z^i) = \ln[1 + (\underset{a}{S} - 1)](z^i) \equiv \Big((\underset{a}{S} - 1) - \frac{1}{2}(\underset{a}{S} - 1)^2 + \ldots \\ \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}(\underset{a}{S} - 1)^n + \ldots\Big)(z^i) = \\ = \sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}\frac{(\underset{a}{S} - 1)^s}{s}(z^i), \quad i = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{6.10}$$

Применим процесс восстановления касательного поля X по конечным преобразованиям к группе Тейлора, взяв за значение параметра $a = h$:

$$e^{aD}\big|_{a=h} = \underset{+h}{S} = 1 + h\underset{+h}{D},$$

$$hD = h\underset{+h}{D} - \frac{1}{2}(h\underset{+h}{D})^2 + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}(h\underset{+h}{D})^n + \ldots,$$

откуда

$$D = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-h)^{n-1}}{n}\underset{+h}{D}^n, \tag{6.11}$$

т. е. получим выражение, совпадающее с оператором $\underset{+h}{\widetilde{D}}$. В формулах (6.11) опущен аргумент z^i, на который действует соответствующий оператор. Если $z^i \in \underset{h}{Z}$, то подразумевается, что в левой части (6.11) разностные производные выражены рядами, если $z^i \in \widetilde{Z}$, то оператор

$\underset{+h}{D}$ надо выразить через e^{hD}. Формула (6.11) дает действие касательного поля группы Тейлора на координату z^i. Инфинитезимальный оператор группы Тейлора в $\underset{h}{Z}$ запишется так (заметим, что $\underset{+h}{\widetilde{D}}(x) = 1$):

$$\underset{h}{D}^{+} = \frac{\partial}{\partial x} + \underset{+h}{\widetilde{D}}(u)\frac{\partial}{\partial u} + \underset{+h}{\widetilde{D}}(\underset{h}{u}_1)\frac{\partial}{\partial \underset{h}{u}_1} + \dots + \underset{+h}{\widetilde{D}}(\underset{h}{u}_s)\frac{\partial}{\partial \underset{h}{u}_s} + \dots \tag{6.12}$$

Аналогично получим при $a = -h$

$$\underset{h}{D}^{-} = \frac{\partial}{\partial x} + \underset{-h}{\widetilde{D}}(u)\frac{\partial}{\partial u} + \underset{-h}{\widetilde{D}}(\underset{h}{u}_1)\frac{\partial}{\partial \underset{h}{u}_1} + \dots + \underset{-h}{\widetilde{D}}(\underset{h}{u}_s)\frac{\partial}{\partial \underset{h}{u}_s} + \dots \tag{6.13}$$

Итак, группа Тейлора, имеющая в $\widetilde{Z}$ касательное поле

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + u_1\frac{\partial}{\partial u} + u_2\frac{\partial}{\partial u_1} + \ldots + u_{s+1}\frac{\partial}{\partial u_s} + \ldots,$$

может быть представлена в $\underset{h}{Z}$ группой Ньютона с парой касательных полей (6.12), (6.13), т. е. *группы Тейлора и Ньютона изоморфны.* Если задано какое-либо преобразование из $\widetilde{Z}$ в $\underset{h}{\widetilde{Z}}$, то координаты инфинитезимального оператора группы Тейлора заменяются с помощью операторного ряда $\underset{\pm h}{\widetilde{D}}$, что можно записать в виде связи:

$$D \Longleftrightarrow \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-h)^{n-1}}{n} \underset{+h}{D}^{n}, \\[2ex] \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(+h)^{n-1}}{n} \underset{-h}{D}^{n}. \end{cases} \tag{6.14}$$

Верхняя часть формулы использует ряды Ньютона вправо, нижняя — влево. Заметим, что эти представления переходят друг в друга с помощью дискретной группы отражения, допускаемой равномерной сеткой.

Формула (6.14) известна давно (см., например, [13]). Впервые она получена, по-видимому, Лагранжем [84, 85]. Разумеется, тот факт, что (6.14) дает связь между координатами инфинитезимальных операторов соответствующих групп, не был известен, поскольку в те времена понятие группы еще не было сформулировано. В этом и состоит новизна взгляда на формулу (6.14).

Замечания. 1. При построении дискретного представления группы Тейлора мы использовали формальные ряды Ньютона. Это представление возможно и для неравномерной сетки, однако касательное поле группы Ньютона для произвольной неравномерной сетки имеет весьма громоздкий вид. Рассматривая лишь частный случай такого представления, — на *инвариантной* неравномерной сетке, — мы можем свести задачу к предыдущей в силу теоремы о “выпрямлении” инвариантной неравномерной сетки.

2. Здесь нас не интересуют вопросы сходимости рядов Ньютона, поскольку мы выясняем лишь алгебраические аспекты сделанных построений. Тем не менее любопытно отметить, что группа Ньютона, хотя и является изоморфным представлением группы Тейлора, но имеет существенно отличные от последней аналитические свойства. Так, например, область сходимости рядов Ньютона представляет собой полуплоскость в комплексной области правее вертикальной линии, проходящей через вещественное число λ_0, называемое *асимптотой сходимости.* Первые оценки асимптоты λ_0 были сделаны, по-видимому, Абелем. Дальнейшую историю развития таких оценок и исследование вопросов сходимости рядов Ньютона можно найти в работах [13, 28, 96].

В следующем параграфе мы рассмотрим некоторые структурные свойства алгебры Ли операторов формальной группы в простейшем одномерном случае и на равномерных разностных сетках.

§ 7. Коммутационные свойства и факторизация операторов формальной группы на равномерных разностных сетках

В этом параграфе мы рассмотрим структуру множества операторов формальной группы в простейшем случае — одной независимой переменной и равномерной сетки (см. также [21, 22]).

Пусть задано множество операторов формальной группы G_1, сохраняющей дискретное касание I порядка, на одной и той же равномерной сетке $\underset{h}{\omega}$

$$X_i = \xi^i \frac{\partial}{\partial x} + \eta^i \frac{\partial}{\partial u} + [\underset{+h}{D}(\eta^i) - \underset{h}{u}_1 \underset{+h}{D}(\xi^i)] \frac{\partial}{\partial \underset{h}{u}_1} + \ldots + h \underset{+h}{D}(\xi^i) \frac{\partial}{\partial \eta},$$

$$i = 1, 2, \ldots$$

Для любых двух операторов X_1, X_2 введем операцию умножения (коммутации) по обычной формуле

$$[X_1, X_2] = X_1 X_2 - X_2 X_1.$$

Коммутатор $[X_1, X_2]$ не содержит дифференцирования выше первого порядка и потому является оператором формальной группы:

$$[X_1, X_2] = (X_1(\xi^2) - X_2(\xi^1))\frac{\partial}{\partial x} + (X_1(\eta^2) - X_2(\eta^1))\frac{\partial}{\partial u} + \\ + [X_1(\underset{+h}{D}(\eta^2) - \underset{h}{u}{}_1 \underset{+h}{D}(\xi^2)) - X_2(\underset{+h}{D}(\eta^1) - \underset{h}{u}{}_1 \underset{+h}{D}(\xi^1))]\frac{\partial}{\partial \underset{h}{u}{}_1} + \ldots \\ \ldots + [X_1(h \underset{+h}{D}(\xi^2)) - X_2(h \underset{+h}{D}(\xi^1))]\frac{\partial}{\partial h}. \quad (7.1)$$

Является ли коммутатор $[X_1, X_2]$ оператором, сохраняющим смысл разностных производных? Для этого достаточно проверить, сохраняет ли он "дискретное касание" первого порядка (т. е. сохраняет смысл первой разностной производной в каждой точке $\underset{h}{\omega}$):

$$\underset{h}{d} u = \underset{h}{u}{}_1 h, \quad \text{где} \quad \underset{h}{d} = \underset{+h}{S} - 1. \quad (7.2)$$

Продолжив оператор (7.1) на переменную $\underset{h}{d} u$ по формуле (см. [21])

$$\frac{\partial}{\partial a}(\underset{h}{d} u^*)\Big|_{a=0} = h \underset{+h}{D}(X_1(\eta^2) - X_2(\eta^1)),$$

действуем им на (7.2), откуда получаем условие

$$\underset{+h}{D} X_1(\eta^2) - \underset{+h}{D} X_2(\eta^1) - X_1 \underset{+h}{D}(\eta^2) + X_2 \underset{+h}{D}(\eta^1) - \\ - \underset{+h}{D}(\xi^1) \underset{+h}{D}(\eta^2) + \underset{+h}{D}(\xi^2) \underset{+h}{D}(\eta^1) = 0. \quad (7.3)$$

Для доказательства справедливости равенства (7.3) нам нужно вычислить коммутатор $[X, \underset{+h}{D}] \equiv X \underset{+h}{D} - \underset{+h}{D} X$. Выражение $X(\eta)$ представляет собой функцию из $\underset{h}{A}$, т. е. аналитическую функцию от конечного числа переменных из $\underset{h}{Z}$, если $\eta \in \underset{h}{A}$. По определению дискретного дифференцирования функции из $\underset{h}{A}$ имеем

$$\underset{+h}{D} X(\eta) = \frac{1}{h}(X(\underset{+h}{S}(\eta)) - X(\eta)),$$

поэтому

$$[X, \underset{+h}{D}] = - \underset{+h}{D}(\xi) \underset{+h}{D}\,. \tag{7.4}$$

Подстановка формулы (7.4) в (7.3) превращает последнее в тождество. Таким образом, коммутатор (7.1) сохраняет дискретное касание I порядка. Поскольку оператор формальной группы, сохраняющий в каждой точке $\underset{h}{\omega}$ дискретное касание первого порядка, сохраняет и касание любого конечного порядка, то $[X_1, X_2]$ сохраняет любое конечное дискретное касание.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 7.1. *Множество всех операторов формальной группы, заданных на одной и той же равномерной сетке $\underset{h}{\omega}$, образует алгебру Ли с умножением*

$$[X_1, X_2] = X_1 X_2 - X_2 X_1.$$

Рассмотрим теперь касательное поле группы Ньютона, т. е. пару операторов

$$\underset{h}{D}^{+} = \frac{\partial}{\partial x} + \underset{+h}{\widetilde{D}}(u)\frac{\partial}{\partial u} + \underset{+h}{\widetilde{D}}(\underset{h}{u}_1)\frac{\partial}{\partial \underset{h}{u}_1} + \ldots,$$

$$\underset{h}{D}^{-} = \frac{\partial}{\partial x} + \underset{-h}{\widetilde{D}}(u)\frac{\partial}{\partial u} + \underset{-h}{\widetilde{D}}(\underset{h}{u}_1)\frac{\partial}{\partial \underset{h}{u}_1} \ldots, \tag{7.5}$$

где

$$\underset{\pm h}{\widetilde{D}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mp h)^{n-1}}{n} \underset{\pm h}{D}^{n}.$$

Заметим, что одному касательному полю группы Тейлора в $\widetilde{Z}$

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + u_1 \frac{\partial}{\partial u} + \ldots + u_{s+1} \frac{\partial}{\partial u_s} + \ldots,$$

соответствует пара полей (7.5) в сеточном пространстве $\underset{h}{Z}$. Это удвоение объектов, — возникновение “правого” и “левого”, — характерная черта сеточных пространств и касается не только операторов группы Ньютона (7.5), но и дискретного сдвига $\underset{\pm h}{S} = e^{\pm hD}$, дискретного дифференцирования $\underset{\pm h}{D}$ и т.д. В случае *равномерной* разностной сетки это удвоение связано с наличием специфической дискретной группы — группы отражения: $x \to -x$, приводящей к изменению знака у шага сетки $h : h \to -h$. Поэтому вместо пары групп Ньютона с операторами (7.5) можно рассматривать одну, что означает факторизацию по группе отражения. Таким образом, *в одномерном случае при равномерной сетке $\underset{h}{\omega}$ переход от группы Тейлора в $\widetilde{Z}$ к группе Ньютона* в $\underset{h}{\bar{Z}}$ *означает переход к изоморфной непрерывной группе с добавлением дискретной группы отражения.*

Рассмотрим оператор формальной группы:

$$X = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial u} + \underset{h}{\zeta}_1\frac{\partial}{\partial \underset{+h}{u}_1} + \underset{h}{\zeta}_2\frac{\partial}{\partial \underset{+h}{u}_2} + \ldots + h\underset{+h}{D}(\xi)\frac{\partial}{\partial h},$$

где

$$\underset{h}{\zeta}_1 = \underset{+h}{D}(\eta) - \underset{h}{u}_1\underset{+h}{D}(\xi), \quad \underset{h}{\zeta}_2 = \underset{-h}{D}(\underset{h}{\zeta}_1) - \underset{h}{u}_2\underset{-h}{D}(\xi), \ldots \tag{7.6}$$

Формулы (7.6) для $\underset{h}{\zeta_1}, \underset{h}{\zeta_2}, \ldots$ обеспечивают сохранение смысла конечно-разностных производных при преобразованиях формальной группы.

Легко убедиться, что операторы (7.5) удовлетворяют связям (7.6), т. е. *группа Ньютона сохраняет смысл конечно-разностных производных любого конечного порядка.*

Умножая слева оператор (7.6) на некоторую функцию $\widetilde{\xi}(z) \in \underset{h}{A}$, мы его выводим, вообще говоря, из множества операторов, сохраняющих дискретное касание. Введем специальную операцию умножения слева оператора формальной группы на некоторую произвольную аналитическую функцию $\widetilde{\xi}(z) \in \underset{h}{A}$: $\widetilde{\xi} * X$. В операторе $\widetilde{\xi} * X$ первые координаты умножаются на $\widetilde{\xi}$:

$$\widetilde{\xi} * X = \widetilde{\xi}\xi\frac{\partial}{\partial x} + \widetilde{\xi}\eta\frac{\partial}{\partial u} + \ldots,$$

а остальные координаты строятся так, чтобы он определял группу, сохраняющую конечно-разностную производную первого порядка (а, значит, и любую разностную производную конечного порядка). Таким образом, $\widetilde{\xi} * X$ должен удовлетворять формулам (7.6):

$$\widetilde{\xi} * X = \widetilde{\xi}\xi\frac{\partial}{\partial x} + \widetilde{\xi}\eta\frac{\partial}{\partial u} + [\underset{+h}{D}(\widetilde{\xi}\eta) - \underset{h}{u_1}\underset{+h}{D}(\widetilde{\xi}\xi)]\frac{\partial}{\partial \underset{h}{u}_1} + h\underset{+h}{D}(\widetilde{\xi}\xi)\frac{\partial}{\partial h}, \tag{7.7}$$

и не совпадает с оператором $\widetilde{\xi}X$.

Такую же операцию умножения слева на $\widetilde{\xi}(z)$ можно ввести в "непрерывном" пространстве $\widetilde{Z}$ с требованием *сохранения касания бесконечного порядка.*

Пусть в $\widetilde{Z} = (x, u, u_1, u_2, \ldots)$ задан оператор формальной группы

$$X = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial u} + \sum_{s \geqslant 0} \zeta_s \frac{\partial}{\partial u_s},$$

где $\zeta_s = D^s(\eta - \xi u_1) + \xi u_{s+1} = D(\zeta_{s-1}) - u_s D(\xi)$.
Тогда операция умножения $(*)$ даст:

$$\widetilde{\xi} * X = \widetilde{\xi}\xi \frac{\partial}{\partial x} + \widetilde{\xi}\eta \frac{\partial}{\partial u} + [D(\widetilde{\xi}\eta) - u_1 D(\widetilde{\xi}\xi)] \frac{\partial}{\partial u_1} + \ldots$$

Легко убедиться, что

$$\widetilde{\xi} * X = \widetilde{\xi} X + \sum_{s \geqslant 0} \sum_{n=1}^{s} C_s^n D^n(\widetilde{\xi}) D^{(s-n)}(\eta - \xi u_1) \frac{\partial}{\partial u_s},$$

т. е. для того, чтобы оператор формальной группы можно было умножать слева на произвольную функцию $\widetilde{\xi} \in A$, не выводя его из множества операторов, сохраняющих условие касания бесконечного порядка, необходимо и достаточно, чтобы $\eta = \xi u_1$. Этому условию удовлетворяют координаты оператора ξD группы Тейлора. Таким образом, оператор D является единственным оператором, который можно "безнаказанно" умножать слева на $\widetilde{\xi}(z) \in A$.

Эта ситуация не имеет места в сеточном пространстве $\underset{h}{Z}$ — касательное поле группы Ньютона $\underset{h}{D}^{\pm}$ нельзя умножать слева на $\widetilde{\xi}(z) \in \underset{h}{A}$, что связано со спецификой разностного правила Лейбница. Поэтому надо использовать формулу (7.7), т. е. строить оператор вида

$$\widetilde{\xi} * \underset{h}{D}^{\pm} = \pm \widetilde{\xi} \frac{\partial}{\partial x} \pm \widetilde{\xi} \underset{\pm h}{\widetilde{D}}(u) \frac{\partial}{\partial u} \pm \ldots$$
$$\ldots \pm [\underset{+h}{D}(\widetilde{\xi} \underset{\pm h}{D}(u)) - \underset{h}{u}_1 \underset{+h}{D}(\widetilde{\xi})] \frac{\partial}{\partial \underset{h}{u}_1} \pm h \underset{+h}{D}(\widetilde{\xi}) \frac{\partial}{\partial h}. \quad (7.8)$$

Заметим, что в операторе (7.8) появляется координата $h \underset{+h}{D}(\widetilde{\xi})$, задающая деформацию шага сетки $\underset{h}{\omega}$, равная нулю в операторе $\underset{h}{D}^{\pm}$ группы Ньютона.

Рассмотрим коммутационные свойства операторов Ли–Беклунда X, $\underset{h}{D}^{\pm}$, $\xi * \underset{h}{D}^{\pm}$ в сеточном пространстве $\underset{h}{Z}$.

Л е м м а 7.1. *Для операторов формальной группы X и $\underset{h}{D}^{\pm}$, заданных на одной и той же равномерной сетке $\underset{h}{\omega}$, справедливо следующее* *соотношение*

$$[X, \underset{h}{D}^{\pm}] = -(\underset{h}{D}^{\pm}(\xi)) * \underset{h}{D}^{\pm}. \tag{7.9}$$

При доказательстве равенства (7.9) ограничимся "правым" оператором $\underset{h}{D}^{+}$ группы Ньютона. Выпишем левые и правые части равенства (7.9):

$$- \underset{h}{D}^{+}(\xi)\frac{\partial}{\partial x} - \underset{h}{D}^{+}(\xi)\, \underset{+h}{\widetilde{D}}(u)\frac{\partial}{\partial u} + \ldots + h\, \underset{+h}{D}(\underset{h}{D}^{+}(\xi))\frac{\partial}{\partial h} =$$
$$= -\underset{h}{D}^{+}(\xi)\frac{\partial}{\partial x} + [X(\underset{+h}{\widetilde{D}}(u)) - \underset{h}{D}^{+}(\eta)]\frac{\partial}{\partial u} + \ldots + h\, \underset{+h}{\overset{+}{D}}(\underset{h}{D}^{+}(\xi))\frac{\partial}{\partial h}.$$

Координаты при $\dfrac{\partial}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial}{\partial h}$ совпадают, так как $\underset{h}{D}^{+}$ и $\underset{h}{\widetilde{D}}$ коммутируют. Для доказательства совпадения координат при $\dfrac{\partial}{\partial u}$ в соотношении (7.9) проще всего воспользоваться непрерывным представлением коэффициентов, т. е. отобразить их из $\underset{h}{Z}$ в $\widetilde{Z}$, а затем обратно:

$$X(\underset{+h}{\widetilde{D}}(u)) - \underset{h}{D}^{+}(\eta) \longleftrightarrow X(u_1) - D(\eta) =$$
$$= D(\eta) - u_1 D(\xi) - D(\eta) = -D(\xi)u_1 \longleftrightarrow -\underset{h}{D}^{+}(\xi)\, \underset{+h}{\widetilde{D}}(u).$$

Совпадение остальных координат, — при $\dfrac{\partial}{\partial \underset{h}{u}_s}$, $s = 1, 2, \ldots,$ — обеспечивается теоремой 6.1 и введенном выше умножением $(*)$, поскольку слева и справа в соотношении (7.9) стоят операторы формальной группы, у которых совпадают координаты при $\dfrac{\partial}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial}{\partial u}$, а остальные координаты получаются по одним и тем же формулам продолжения. Лемма доказана.

Лемма 7.2. *Для любых операторов формальной группы* X, $\widetilde{\xi} * \underset{h}{D}^{\pm}$, $\widetilde{\xi}(z) \in \underset{h}{A}$, *заданных на одной и той же равномерной сетке* $\underset{h}{\omega}$, *справедливо следующее коммутационное соотношение*:

$$[\widetilde{\xi} * \underset{h}{D}^{\pm}, X] = \left(\widetilde{\xi} * \underset{h}{D}^{\pm}(\xi) - X(\widetilde{\xi})\right) * \underset{h}{D}^{\pm}. \tag{7.10}$$

Лемма 7.2 доказывается полностью аналогично предыдущей — выяснением совпадений координат операторов при $\dfrac{\partial}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial}{\partial u}$ (см. [21]).

Введенное выше умножение $(*)$ и лемма 7.2 позволяет сделать следующее утверждение.

Теорема 7.2. *Множество операторов вида*

$$\widetilde{\xi} * \underset{h}{D}^{\pm} = \widetilde{\xi}\frac{\partial}{\partial x} + \widetilde{\xi} * \underset{\pm h}{\widetilde{D}}(u)\frac{\partial}{\partial u} + \ldots \tag{7.11}$$

с произвольными аналитическими функциями $\widetilde{\xi}(z) \in \underset{h}{A}$ *образует идеал в алгебре Ли всех операторов формальной группы на одной и той же равномерной сетке* $\underset{h}{\omega}$.

Поэтому вместо алгебры Ли операторов

$$X = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial u} + [\underset{+h}{D}(\eta) - \underset{h}{u}_1 \underset{+h}{D}(\xi)]\frac{\partial}{\partial \underset{h}{u}_1} + \ldots + h \underset{+h}{D}(\xi)\frac{\partial}{\partial h},$$

можно рассматривать фактор-алгебру по идеалу (7.11).

В качестве представителей указанной фактор-алгебры будем рассматривать операторы, у которых координата $\xi \equiv 0$:

$$\bar{X} = \bar{\eta}\frac{\partial}{\partial u} + \underset{h}{\zeta}_1\frac{\partial}{\partial \underset{h}{u}_1} + \underset{h}{\zeta}_2\frac{\partial}{\partial \underset{h}{u}_2} + \ldots, \tag{7.12}$$

где $\bar{\eta} = \eta - \xi \underset{\pm h}{\widetilde{D}}(u)$.

Операторы (7.12) будем называть также, как и в непрерывном случае (см. [27]), *каноническими операторами.* Для них формулы продолжения имеют простой вид

$$\underset{h}{\zeta}_1 = \underset{+h}{D}(\bar{\eta}), \; \underset{h}{\zeta}_2 = \underset{-h}{D}\underset{+h}{D}(\bar{\eta}), \; \ldots \tag{7.13}$$

Заметим, что независимая переменная для канонического оператора $\bar{X}$ является инвариантом, поэтому инвариантом является и шаг сетки (координата при $\dfrac{\partial}{\partial h}$ в операторе $\bar{X}$ равна нулю). В силу леммы 7.1 канонические операторы $\bar{X}$ коммутируют с операторами $\underset{h}{D}^{+}, \underset{h}{D}^{-}$.

Другой подход к факторизации операторов формальной группы заключается в следующем. Рассмотрим пространство дискретных переменных без введения конечно-разностных производных: $(\ldots, x^-, u^-, x, u, x^+, u^+, \ldots)$, т. е. пространство последовательностей, полученное последовательным действием операторов сдвига на координаты (x, u).

Рассмотрим касательное поле группы Ньютона в таком пространстве:

$$\underset{h}{D}^{+} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x^+} + \underset{+h}{\widetilde{D}}(u)\frac{\partial}{\partial u} + \underset{+h}{\widetilde{D}}(u^+)\frac{\partial}{\partial u^+} + \ldots,$$

$$\underset{h}{D}^{-} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x^-} + \underset{-h}{\widetilde{D}}(u)\frac{\partial}{\partial u} + \underset{-h}{\widetilde{D}}(u^-)\frac{\partial}{\partial u^-} \ldots, \tag{7.14}$$

$$\underset{\pm h}{\widetilde{D}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mp h)^{n-1}}{n} \underset{\pm h}{D}^{n}.$$

Введем *обычное* умножение слева операторов группы Ньютона на некоторую функцию $\widetilde{\xi}$:

$$\widetilde{\xi}\underset{h}{D}^{+} = \widetilde{\xi}\frac{\partial}{\partial x} + \widetilde{\xi}\frac{\partial}{\partial x^+} + \widetilde{\xi}\,\underset{+h}{\widetilde{D}}(u)\frac{\partial}{\partial u} + \widetilde{\xi}\,\underset{+h}{\widetilde{D}}(u^+)\frac{\partial}{\partial u^+} + \ldots,$$

$$\widetilde{\xi}\underset{h}{D}^{-} = \widetilde{\xi}\frac{\partial}{\partial x} + \widetilde{\xi}\frac{\partial}{\partial x^-} + \widetilde{\xi}\,\underset{-h}{\widetilde{D}}(u)\frac{\partial}{\partial u} + \widetilde{\xi}\,\underset{-h}{\widetilde{D}}(u^-)\frac{\partial}{\partial u^-} \ldots \tag{7.15}$$

Заметим, что действие оператора $\widetilde{\xi}\underset{h}{D}^{\pm}$ на шаг сетки $h^+ = x^+ - x$ равно нулю.

Лемма 7.3. *Для любых операторов формальной группы* X, $\widetilde{\xi}\underset{h}{D}^{\pm}$, $\widetilde{\xi}(z) \in \underset{h}{A}$, *заданных на одной и той же равномерной сетке* $\underset{h}{\omega}$, *справедливо следующее коммутационное соотношение*:

$$[\widetilde{\xi}\underset{h}{D}^{\pm}, X] = \left(\widetilde{\xi}\underset{h}{D}^{\pm}(\xi) - X(\widetilde{\xi})\right)\underset{h}{D}^{\pm}. \tag{7.16}$$

Лемма 7.3 доказывается прямым вычислением.

По существу, равенство (7.16) является полностью аналогичным соответствующему равенству для групп Ли–Беклунда [27], распространенному на “сдвинутые” точки $x^-, u^-, x^+, u^+, \ldots$ Заметим, что разностные производные и шаги сетки в этом равенстве не участвуют.

Рассмотрим оператор точечной группы в пространстве $(\ldots, x^-, u^-, x, u, x^+, u^+, \ldots)$:

$$X = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \xi^+\frac{\partial}{\partial x^+} + \xi^-\frac{\partial}{\partial x^-} + \ldots + \eta\frac{\partial}{\partial u} + \eta^+\frac{\partial}{\partial u^+} + \eta^-\frac{\partial}{\partial u^-} + \ldots \tag{7.17}$$

Пусть операторы вида (7.17) на некоторой равномерной сетке образуют алгебру Ли. Тогда лемма 7.3 позволяет сделать следующее утверждение.

Теорема 7.3. *Множество операторов вида*

$$\widetilde{\xi}\underset{h}{D}^{\pm} = \widetilde{\xi}\frac{\partial}{\partial x} + \widetilde{\xi}\frac{\partial}{\partial x^+} + \widetilde{\xi}\underset{\pm h}{\widetilde{D}}(u)\frac{\partial}{\partial u} + \widetilde{\xi}\underset{\pm h}{\widetilde{D}}(u^+)\frac{\partial}{\partial u^+} + \ldots, \tag{7.18}$$

с произвольными аналитическими функциями $\widetilde{\xi}(z) \in \underset{h}{A}$ *образует идеал в алгебре Ли всех операторов формальной группы на одной и той же равномерной сетке* $\underset{h}{\omega}$.

Поэтому вместо алгебры Ли операторов (7.17) можно рассматривать фактор-алгебру по идеалу (7.18). В качестве представителей указанной фактор-алгебры можно рассматривать следующие операторы:

$$\bar{X} = (\xi^+ - \xi)\frac{\partial}{\partial x^+} + (\xi^- - \xi)\frac{\partial}{\partial x^-} + \dots$$

$$\dots + (\eta - \xi \underset{\pm h}{\widetilde{D}}(u))\frac{\partial}{\partial u} + (\eta^+ - \xi \underset{\pm h}{\widetilde{D}}(u^+))\frac{\partial}{\partial u^+} + \dots \quad (7.19)$$

Заметим, что в отличие от предыдущего варианта факторизации, оператор $\bar{X}$ преобразует шаги сетки.

Пример применения факторизованных операторов симметрии будет рассмотрен в следующей главе.

Здесь мы рассмотрели лишь простейший случай алгебры Ли операторов — на равномерной сетке. Переход к неравномерной сетке меняет касательное векторное поле группы, однако не меняет структурных свойств множества операторов, представляющих собой скалярные величины и не зависящих от системы координат. В частности, если неравномерная сетка является *инвариантной*, то теорема о “выпрямлении” такой сетки сводит вопрос к уже изученному.

§ 8. Разностное интегрирование. Продолжение сеточного пространства на нелокальные переменные

Введенные выше дискретные (конечно-разностные) переменные были получены с помощью пары операторов дискретного сдвига $\underset{\pm h}{S}$ и дифференцирования $\underset{\pm h}{D}$. Поскольку оператор $\underset{\pm h}{S}$ является оператором *конечных преобразований группы* при фиксированном значении параметра $a = \pm h$, то он, как и любое действие группы Тейлора, обратим. Обратным оператором к оператору сдвига будет оператор конечных преобразований группы Тейлора с противоположным знаком группового параметра, т. е.

$$(\underset{+h}{S})^{-1} = \underset{-h}{S}, \qquad (\underset{-h}{S})^{-1} = \underset{+h}{S}, \quad (8.1)$$

или, иначе, $\underset{+h}{S}\,\underset{-h}{S} = \underset{-h}{S}\,\underset{+h}{S} = 1$.

Представляет интерес найти оператор *дискретного интегрирования* как оператор, обратный к паре $\underset{+h}{D}, \underset{-h}{D}$.

Таблица 8.1

Таблица действия операторов дискретного интегрирования на конечно-разностные производные $(\underset{h}{u}_1,\ \underset{h}{u}_2,\ \underset{h}{u}_3,\ \ldots)$

$\underset{-h}{D}^{-1}$ — интегрирование влево	$\underset{+h}{D}^{-1}$ — интегрирование вправо
$\underset{-h}{D}^{-1}(\underset{h}{u}_1) = u + h\,\underset{h}{u}_1$ $\underset{-h}{D}^{-1}(\underset{h}{u}_2) = \underset{h}{u}_1$ $\underset{-h}{D}^{-1}(\underset{h}{u}_3) = \underset{h}{u}_2 + h\,\underset{h}{u}_3$ . . . . $\underset{-h}{D}^{-1}(\underset{h}{u}_{2k+1}) = \underset{h}{u}_{2k} + h\,\underset{h}{u}_{2k+1}$ $\underset{-h}{D}^{-1}(\underset{h}{u}_{2k+2}) = \underset{h}{u}_{2k+1}$	$\underset{+h}{D}^{-1}(\underset{h}{u}_1) = u$ $\underset{+h}{D}^{-1}(\underset{h}{u}_2) = \underset{h}{u}_1 - h\,\underset{h}{u}_2$ $\underset{+h}{D}^{-1}(\underset{h}{u}_3) = \underset{h}{u}_2$ . . . . $\underset{+h}{D}^{-1}\,\underset{h}{u}_{2k+1} = \underset{h}{u}_{2k}$ $\underset{+h}{D}^{-1}(\underset{h}{u}_{2k+2}) = \underset{h}{u}_{2k+1} - h\,\underset{h}{u}_{2k+2}$ . . . .

1. Мы ограничимся рассмотрением простейшего случая — одной независимой переменной и равномерной сетки с шагом h.

Оператором дискретного интегрирования на равномерной сетке $\underset{h}{\omega}$ *будем называть пару линейных операторов* $\underset{+h}{D}^{-1}$, $\underset{-h}{D}^{-1}$, *коммутирующих, соответственно, с парой* $\underset{+h}{D}$, $\underset{-h}{D}$, причем

$$\underset{+h}{D}^{-1}\,\underset{+h}{D} = \underset{+h}{D}\,\underset{+h}{D}^{-1} = 1, \qquad \underset{-h}{D}^{-1}\,\underset{-h}{D} = \underset{-h}{D}\,\underset{-h}{D}^{-1} = 1. \tag{8.2}$$

Исходя из этого определения, легко получить “смешанные” действия операторов $\underset{\pm h}{D}$ и $\underset{\pm h}{D}^{-1}$:

$$\underset{-h}{D}\,\underset{+h}{D}^{-1} = \underset{+h}{D}^{-1}\,\underset{-h}{D} = \underset{-h}{S}, \quad \underset{+h}{D}\,\underset{-h}{D}^{-1} = \underset{-h}{D}^{-1}\,\underset{+h}{D} = \underset{+h}{S}. \tag{8.3}$$

Определение (8.2) легко позволяет получить таблицу действия оператора $\underset{\pm h}{D}^{-1}$ на конечно-разностные производные $\underset{h}{u}_s$ (табл. 8.1).

Исходя из определения операторов $\underset{\pm h}{D}^{-1}$ легко получить дискретное правило интегрирования по частям на равномерной сетке $\underset{h}{\omega}$:

$$\underset{+h}{D}^{-1}(\underset{h}{u}_1\,v) = uv - \underset{+h}{D}^{-1}(u\,\underset{h}{v}_1) - h\underset{+h}{D}^{-1}(\underset{h}{u}_1\underset{h}{v}_1) = uv - \underset{+h}{D}^{-1}(\hat{u}\underset{h}{v}_1),$$

$$\underset{-h}{D}^{-1}(\underset{h}{u}_{\bar 1}\,v) = uv - \underset{-h}{D}^{-1}(u\,\underset{h}{v}_{\bar 1}) - h\underset{-h}{D}^{-1}(\underset{h}{u}_{\bar 1}\,\underset{h}{v}_{\bar 1}) = uv - \underset{-h}{D}^{-1}(u\,\underset{h}{v}_{\bar 1}), \tag{8.4}$$

где $\hat{f} = \underset{+h}{S}(f)$, $\check{f} = \underset{-h}{S}(f)$, $\underset{h}{u}_{\bar 1}$, $\underset{h}{v}_{\bar 1}$ — левые разностные производные первого порядка.

Таблица 8.2

Дискретное конечно-разностное интегрирование в расширенном пространстве $\underset{h}{\widetilde{Z}} = (\ldots,\ \underset{h}{u}_{-2},\ \underset{h}{u}_{-1},\ x,\ u,\ \underset{h}{u}_{1},\ \underset{h}{u}_{2},\ \ldots)$

$\underset{-h}{D}^{-1}$ — интегрирование влево	$\underset{+h}{D}^{-1}$ — интегрирование вправо
$\underset{-h}{D}^{-1}(\underset{h}{u}_{-2k}) = \underset{h}{u}_{-2k-1}$ $\underset{-h}{D}^{-1}(\underset{h}{u}_{-2k+1}) = \underset{h}{u}_{-2k} + h\,\underset{h}{u}_{-2k+1}$ . . . . $\underset{-h}{D}^{-1}(u_2) = \underset{h}{u}_3$ $\underset{-h}{D}^{-1}(\underset{h}{u}_1) = \underset{h}{u}_2 + h\,\underset{h}{u}_1$	$\underset{+h}{D}^{-1}(\underset{h}{u}_{-2k}) = \underset{h}{u}_{-2k-1} - h\,\underset{h}{u}_{-2k}$ $\underset{+h}{D}^{-1}(\underset{h}{u}_{-2k+1}) = \underset{h}{u}_{-2k}$ . . . . $\underset{+h}{D}^{-1})\,\underset{h}{u}_2 = \underset{h}{u}_3 - h\,\underset{h}{u}_2$ $\underset{+h}{D}^{-1}(\underset{h}{u}_1) = \underset{h}{u}_2$
$\underset{-h}{D}^{-1}(u) = \underset{h}{u}_1$	$\underset{+h}{D}^{-1}(u) = \underset{h}{u}_1 - hu$
$\underset{-h}{D}^{-1}(\underset{h}{u}_1) = u + h\,\underset{h}{u}_1$ $\underset{-h}{D}^{-1}(\underset{h}{u}_2) = \underset{h}{u}_1$ $\underset{-h}{D}^{-1}(\underset{h}{u}_3) = \underset{h}{u}_2 + h_3$ . . . . $\underset{-h}{D}^{-1}(\underset{h}{u}_{2k+1}) = \underset{h}{u}_{2k} + h\,\underset{h}{u}_{2k+1}$ $\underset{-h}{D}^{-1}(\underset{h}{u}_{2k+2}) = \underset{h}{u}_{2k+1}$	$\underset{+h}{D}^{-1}(\underset{h}{u}_1) = u$ $\underset{+h}{D}^{-1}(\underset{h}{u}_2) = \underset{h}{u}_1 - h\,\underset{h}{u}_2$ $\underset{+h}{D}^{-1}(\underset{h}{u}_3) = \underset{h}{u}_2$ . . . . $\underset{+h}{D}^{-1}(\underset{h}{u}_{2k+1}) = \underset{h}{u}_{2k}$ $\underset{+h}{D}^{-1}(\underset{h}{u}_{2k+2}) = \underset{h}{u}_{2k+1} - h\,\underset{h}{u}_{2k+2}$ . . . .

Формулы (8.4), называемые в старой литературе “преобразованиями Абеля” (см., например, [13]), легко проверяются действием операторов $\underset{\pm h}{D}$ с использованием разностного правила Лейбница.

Заметим, что введенное нами дискретное интегрирование не позволяет замкнуть его действие в $\underset{h}{Z} = (x, u, \underset{h}{u}_1, \underset{h}{u}_2, \underset{h}{u}_3, \ldots)$. Распространить действие $\underset{\pm h}{D}^{-1}$ на x не трудно:

$$\underset{+h}{D}^{-1}(x) = \frac{x\check{x}}{2}, \qquad \underset{-h}{D}^{-1}(x) = \frac{x\hat{x}}{2}.$$

Для того чтобы действие $\underset{\pm h}{D}^{-1}$ в $\underset{h}{Z}$ было корректным, необходимо продолжить его на *нелокальные* переменные, которые можно ввести следующим образом:

$$\underset{h}{u}_{-1} = \underset{-h}{D}^{-1}(u), \qquad \underset{h}{u}_{-2} = \underset{+h}{D}^{-1}(\underset{h}{u}_{-1}), \qquad \ldots$$

$$\ldots, \qquad \underset{h}{u}_{-2k} = \underset{+h}{D}^{-1}(\underset{h}{u}_{-2k+1}), \qquad \underset{h}{u}_{-2k-1} = \underset{-h}{D}^{-1}(\underset{h}{u}_{-2k}), \qquad \ldots$$

В пространстве $\underset{h}{Z}$, дополненном нелокальными переменными $\underset{h}{u}_{-s}$, действие $\underset{\pm h}{D}^{-1}$ замкнуто — см. табл. 8.2, которая включает в себя табл. 8.1.

Представляет интерес научиться выражать операторы $\underset{\pm h}{D}^{-1}$ через операторы дискретного сдвига $\underset{\pm h}{S}$, т. е. связать их с группой Тейлора.

Лемма 8.1. *Уравнение* $\underset{\pm h}{D}^{-1}\underset{\pm h}{D} = 1$ *разрешимо в классе формальных операторных рядов следующего вида*:

$$\underset{+h}{D}^{-1} = -h\sum_{\alpha=0}^{\infty}\underset{+h}{S}^{\alpha} = -h(1+\underset{+h}{S}+\underset{+h}{S}^{2}+\ldots) \equiv -h\sum_{\alpha=0}^{\infty} e^{+\alpha hD},$$

$$\underset{-h}{D}^{-1} = +h\sum_{\alpha=0}^{\infty}\underset{-h}{S}^{\alpha} = h(1+\underset{-h}{S}+\underset{-h}{S}^{2}+\ldots) \equiv h\sum_{\alpha=0}^{\infty} e^{-\alpha hD}. \tag{8.5}$$

Действительно,

$$\underset{+h}{D}^{-1}\underset{+h}{D} = \underset{+h}{D}\,\underset{+h}{D}^{-1} = \frac{1}{h}(\underset{+h}{S}-1)[-h(1+\underset{+h}{S}+\underset{+h}{S}^{2}+\ldots)] =$$
$$= 1+\underset{+h}{S}+\underset{+h}{S}^{2}+\ldots-\underset{+h}{S}-\underset{+h}{S}^{2}-\ldots = 1.$$

Представление (8.5) позволяет распространить действие $\underset{\pm h}{D}^{-1}$ на аналитические функции от конечного числа переменных $F(z)\in\underset{h}{A}$:

$$\underset{\pm h}{D}^{-1}F(z) = \mp h[F(z)+F(\underset{\pm h}{S}(z))+F(\underset{\pm h}{S}^{2}(z))+\ldots]. \tag{8.6}$$

Ряд в правой части сходится, если $F(z)$ достаточно быстро убывает на бесконечности (из анализа известно, что этот ряд сходится, например, одновременно с соответствующим несобственным интегралом).

2. С помощью операторов $\underset{\pm h}{D}^{-1}$ можно ввести *скалярное произведение*. Например, аналог скалярного произведения в L_2 выглядит так:

$$(u,v) = (\underset{-h}{D}^{-1}-\underset{-h}{D}^{-1}-h)(uv). \tag{8.7}$$

Можно показать, что относительно скалярного произведения (8.7) *оператор дискретного сдвига* $\underset{\pm h}{S}$, *является унитарным*:

$$\underset{\pm h}{S}^{*} = (\underset{\pm h}{S})^{-1} = \underset{\mp h}{S}.$$

Действительно, из (8.5) и (8.7) следует

$$(\underset{+h}{S}(u), v) = h(\ldots + \underset{+h}{S}(u)v + u\underset{-h}{S}(v) + \underset{-h}{S}(u)\underset{-h}{S}^2(v) + \ldots),$$

$$(u, (\underset{+h}{S})^{-1}(v)) = h(\ldots + \underset{+h}{S}(u)v + u\underset{-h}{S}(v) + \underset{-h}{S}(u)\underset{-h}{S}^2(v) + \ldots),$$

т. е.

$$(\underset{+h}{S}(u), v) = (u, \underset{-h}{S}(v)). \tag{8.8}$$

В заключение заметим, что вопросы сходимости фигурировавших выше операторных рядов не являются объектом нашего внимания, и не оказывают влияния на алгебраические аспекты изучения разностных форм и уравнений.

§ 9. Замена переменных в сеточном пространстве

В этом параграфе мы приведем некоторые формулы замены переменных в $\underset{h}{Z}$, которые будут использоваться в дальнейшем при изучении групповых свойств разностных уравнений.

1. Пусть в $\widetilde{Z}$ и $\underset{h}{Z}$, действует формальная однопараметрическая группа G_1:

$$\begin{array}{ll} x* = f(z,a), & h^{+*} = \underset{+h}{S}(f(z,a)) - f(z,a), \\ u^* = g(z,a), & \underset{h}{u}{}_1^* = \varphi_1(z,a), \\ u_1^* = g_1(z,a), & \underset{h}{u}{}_2^* = \varphi_2(z,a), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \tag{9.1}$$

с оператором

$$X = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial u} + \sum_{i\geqslant 1}\zeta_i\frac{\partial}{\partial u_i} + \sum_{s\geqslant 1}\underset{h}{\zeta}{}_s\frac{\partial}{\partial \underset{h}{u}{}_s} + \\ + (\hat{\xi} - \xi)\frac{\partial}{\partial h^+} + (\xi - \check{\xi})\frac{\partial}{\partial h^-}. \tag{9.2}$$

Скалярная функция $\mathcal{F}(z) \in \underset{h}{A}$ в преобразованной точке $z^* \in \underset{h}{Z}$ представляет собой формальный степенной ряд:

$$\mathcal{F}(z^*) = \mathcal{F}(z) + a(\xi\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} + \eta\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u} + \ldots) + \ldots = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{a^s}{s!}X^{(s)}\mathcal{F}(z). \tag{9.3}$$

В частности, если G_1 (9.1) является группой Тейлора с оператором D, то при $a = \pm h$ формула (9.3) дает

$$\underset{\pm h}{S}(\mathcal{F}(z)) = \mathcal{F}(\underset{\pm h}{S}(z)), \tag{9.4}$$

т. е. операторы сдвига $\underset{\pm h}{S}$, перестановочны с любой функцией из $\underset{h}{A}$.

Рассмотрим теперь некоторое "внешнее" точечное преобразование (не обязанное составлять группу):

$$\bar{x} = F(x, u), \qquad \bar{u} = G(x, u). \tag{9.5}$$

При замене (9.5) происходит замена координат в $\widetilde{Z}$ и $\underset{h}{Z}$. Замены в $\widetilde{Z}$ дифференциальных переменных общеизвестны; поэтому рассмотрим, как меняются разностные переменные. Точки $(\hat{x}, \hat{u})$ и $(\check{x}, \check{u})$ переходят, соответственно, в

$$\hat{\bar{x}} = F(\hat{x}, \hat{u}), \quad \check{\bar{x}} = F(\check{x}, \check{u}),$$
$$\hat{\bar{u}} = G(\hat{x}, \hat{u}), \quad \check{\bar{u}} = G(\check{x}, \check{u}),$$

т. е.

$$\bar{h}^+ = F(\hat{x}, \hat{u}) - F(x, u) = h^+ \underset{+h}{D}(F), \quad \bar{h}^- = F(x, u) - F(\check{x}, \check{u}) = h^- \underset{-h}{D}(F).$$

Введем операторы сдвига $\underset{\pm h}{\bar{S}}$ в новой системе координат:

$$\underset{+h}{\bar{S}} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\bar{h}^+)^s}{s!} \bar{D}^s, \qquad \underset{-h}{\bar{S}} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-\bar{h}^-)^s}{s!} \bar{D}^s,$$

где $\bar{D}$ — оператор дифференцирования в новой системе координат. Тогда оператор разностного дифференцирования в новой системе координат запишется в виде:

$$\underset{\pm h}{\bar{D}} = \frac{1}{\underset{\pm h}{D}(F(x, u))} \underset{\pm h}{D}\,. \tag{9.6}$$

Из (9.6), в частности, следует, что

$$\underset{h}{\bar{u}}{}_1 = \frac{\underset{+h}{D}(G)}{\underset{+h}{D}(F)}, \quad \underset{h}{\bar{u}}{}_{1\bar{1}} = \frac{\underset{+h}{D}(G) \underset{-h}{D}(F) - \underset{+h}{D}(F)(G)}{h^- \underset{+h}{D}(F)[(\underset{-h}{D}(F)]^2}, \quad \ldots \tag{9.7}$$

Выясним, как меняются коэффициенты оператора (9.2) при замене (9.5). Известные формулы группового анализа (см.[34,35]) дают коэффициенты оператора (9.2) в $\widetilde{Z}$,

$$\bar{X} = X(F)\frac{\partial}{\partial \bar{x}} + X(G)\frac{\partial}{\partial \bar{u}} + X\left(\frac{D(G)}{D(F)}\right)\frac{\partial}{\partial \bar{u}_1} + \ldots \tag{9.8}$$

Таким образом, оператор (9.2) — оператор формальной группы, сохраняющий "непрерывное" касание любого порядка и "дискретное" касание любого конечного порядка. Это свойство не зависит от системы координат ((9.2) — скалярное выражение), поэтому остальные координаты в (9.8) можно получать по формулам продолжения:

$$\bar{X} = \ldots + \left[\underset{+h}{\bar{D}}(X(G)) - \underset{h}{\bar{u}}_1 \underset{+h}{\bar{D}}(X(F))\right]\frac{\partial}{\partial \underset{h}{\bar{u}}_1} + \ldots$$
$$\ldots + X(F(\hat{x},\hat{u}) - F(x,u))\frac{\partial}{\partial \bar{h}^+} + X(F(x,u) - F(\check{x},\check{u}))\frac{\partial}{\partial \bar{h}^-}. \tag{9.9}$$

Действительно, например, $\bar{h}^+ = F(\hat{x},\hat{u}) - F(x,u)$ при действии $\bar{G}_1$ перейдет в новый шаг:

$$(\bar{h}^+)^* = F(\hat{x}^*,\hat{u}^*) - F(x^*,u^*).$$

Дифференцируя последнее равенство по a и приравнивая $a = 0$, получим требуемый коэффициент при $\dfrac{\partial}{\partial \bar{h}^+}$ в (9.9).

Точно так же из (9.7) получаем выражение

$$\underset{h}{\bar{u}}{}_1^* = \frac{G(\hat{x}^*,\hat{u}^*) - G(x^*,u^*)}{F(\hat{x}^*,\hat{u}^*) - F(x^*,u^*)},$$

применяя к которому $\left.\dfrac{\partial}{\partial a}\right|_{a=0}$, получим коэффициент при $\dfrac{\partial}{\partial \underset{h}{\bar{u}}_1}$ в (9.9). Таким образом, группа $\bar{G}_1$, подобная группе G_1, определяется в $\underset{h}{Z}$ оператором, который можно записать в единообразной форме:

$$\bar{X} = X(\bar{x})\frac{\partial}{\partial \bar{x}} + X(\bar{u})\frac{\partial}{\partial \bar{u}} + \sum_{s=1}^{\infty} X(\underset{h}{\bar{u}}_s)\frac{\partial}{\partial \underset{h}{\bar{u}}_s} +$$
$$+ X(\bar{h}^+)\frac{\partial}{\partial \bar{h}^+} + X(\bar{h}^-)\frac{\partial}{\partial \bar{h}^-}. \tag{9.10}$$

2. В дальнейшем нам понадобится применять оператор (9.2) к функциям $F(z) \in \underset{h}{A}$, содержащим соседние к данной точки или их отдельные координаты. Для того чтобы получить требуемое расширение координат в операторе (9.2), заметим, что оператор (9.2) — это

скалярное произведение вектора (в $\underset{h}{Z}$):

$$(\xi, \eta, \underset{h}{\zeta}_1, \underset{h}{\zeta}_2, \ldots, h^+) \tag{9.11}$$

и вектора

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial \underset{h}{u}_1}, \frac{\partial}{\partial \underset{h}{u}_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial h^+} \right).$$

Для того чтобы получить произведение векторов в точке $\hat{z} = \underset{+h}{S}(z)$ и $\check{z} = \underset{-h}{S}(z)$, запишем оба вектора (9.11) в точках $\hat{z}$ и $\check{z}$ и составим скалярное произведение:

$$\hat{X} = \hat{\xi} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} + \hat{\eta} \frac{\partial}{\partial \hat{u}} + \underset{h}{\hat{\zeta}}_1 \frac{\partial}{\partial \underset{h}{\hat{u}}_1} + \ldots + \hat{h}^+ \frac{\partial}{\partial \hat{h}},$$

$$\check{X} = \check{\xi} \frac{\partial}{\partial \check{x}} + \check{\eta} \frac{\partial}{\partial \check{u}} + \underset{h}{\zeta}_{\bar{1}} \frac{\partial}{\partial \underset{h}{u}_{\bar{1}}} + \ldots + h^- \frac{\partial}{\partial h^-}. \tag{9.12}$$

Требуемые коэффициенты в (9.12) можно получить и по-другому. Формула (9.10) позволяет нам распространять действие G_1 на любые новые переменные. Например, введя новые величины:

$$\bar{x} = \hat{x} = x + h,$$
$$\bar{u} = \hat{u} = u + h \underset{h}{u}_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

в соответствии с (9.10) получим

$$\bar{X} = X(x+h) \frac{\partial}{\partial \hat{x}} + X(u + h \underset{h}{u}_1) \frac{\partial}{\partial \hat{u}} + \ldots = \hat{\xi} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} + \hat{\eta} \frac{\partial}{\partial \hat{u}} + \ldots,$$

т. е. формулы (9.12).

Полученные формулы будут нами использованы для продолжения группы G_1 в соседние с данной точки, — т. е. на множество точек разностной сетки, составляющее *разностный шаблон*. Их обобщение на многомерный случай совершенно очевидно.

ГЛАВА II

ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ, ДОПУСКАЕМЫЕ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ. ИНВАРИАНТНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ

В этой главе мы воспользуемся математическим аппаратом, разработанным в предыдущем разделе, для изучения свойств симметрии конечно-разностных уравнений, рассматриваемых вместе с разностными сетками.

Будут рассмотрены многочисленные примеры построения конечно-разностных моделей, при котором полностью наследуется симметрия исходных дифференциальных уравнений.

§ 1. Критерий инвариантности конечно-разностных уравнений на разностной сетке

1. Рассмотрим для простоты случай одной независимой переменной. Пусть $\underset{h}{Z}$ — пространство последовательностей сеточных переменных $(x, u, \underset{h}{u}{}_1, \ldots, h^+)$, $\underset{h}{A}$ — пространство аналитических функций от конечного числа координат z^i вектора z из $\underset{h}{Z}$. Тогда всякое конечно-разностное уравнение на сетке $\underset{h}{\omega}$ можно записать в виде

$$F(z) = 0, \tag{1.1}$$

где $F \in \underset{h}{A}$. Это уравнение записано на конечном числе точек разностной сетки $\underset{h}{\omega}$ — равномерной или неравномерной. Пусть сетка определяется уравнением

$$\Omega(z) = 0, \tag{1.2}$$

где $\Omega \in \underset{h}{A}$. Функция Ω однозначно определяется дискретизацией пространства независимых переменных, полученного действием оператора $\underset{\pm h}{S}{}^{\alpha}$ на некоторую “стартовую” точку x_0. Таким образом, уравнение (1.2) изначально предполагается инвариантным относительно оператора дискретного сдвига $\underset{\pm h}{S}$ в $\underset{h}{Z}$. Разностное уравнение (1.1), допускающее $\underset{\pm h}{S}$, будем называть *однородным*, (ср. [40]). Функция $\Omega(z)$ зависит от конечного числа переменных из $\underset{h}{Z}$, причем явным образом зависит от шага h^+.

В отличие от непрерывного случая, в случае действия группы преобразований в $\underset{h}{Z}$, уравнение (1.2) также необходимо включить в условие инвариантности, поскольку произвольная сетка $\underset{h}{\omega}$ не обязана допускать данную группу.

Теорема 1.1. *Пусть в $\underset{h}{Z}$ задана однопараметрическая группа G_1 с помощью оператора*

$$X = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial u} + \ldots + h^+ \underset{+h}{D}(\xi)\frac{\partial}{\partial h^+}. \tag{1.3}$$

Для того чтобы разностное уравнение (1.1) *допускало группу G_1 с оператором* (1.3) *на сетке* (1.2), *необходимо и достаточно выполнение следующего условия*:

$$XF(z)\big|_{(1.1),(1.2)} = 0, \tag{1.4}$$

$$X\Omega(z)\big|_{(1.1),(1.2)} = 0.$$

Доказательство. Ограничимся при доказательстве одномерным случаем:

$$\underset{h}{\widetilde{Z}} = (x, u, u_1, u_2, \ldots, \underset{h}{u}{}_1, \underset{h}{u}{}_2, \ldots, , h^+).$$

Пусть конечно-разностное уравнение (1.1) и уравнение (1.2) инвариантно в $\underset{h}{Z}$, т. е. для каждой точки z многообразия (1.1), (1.2) справедливо

$$F(z^*) = 0,$$

$$\Omega(z^*) = 0. \tag{1.5}$$

Разлагая функции $F, \Omega \in \underset{h}{A}$ в степенные ряды по a, получим,

$$F(z^*) = F(z) + a\left[\xi(z)\frac{\partial F(z)}{\partial x} + \eta(z)\frac{\partial F(z)}{\partial u} + \ldots\right] + a^2N(z,a), \tag{1.6}$$

$$\Omega(z^*) = \Omega(z) + a\left[\xi(z)\frac{\partial \Omega(z)}{\partial x} + \eta(z)\frac{\partial \Omega(z)}{\partial u} + \ldots\right] + a^2M(z,a),$$

где $N(z,a)$, $M(z,a)$ — также формальные степенные ряды по параметру a. Равенство нулю формальных рядов (1.6) *для точек многообразия* (1.1), (1.2) означает, в частности, равенство нулю первых коэффициентов, т. е. выполнение (1.4).

Пусть теперь многообразие (1.1), (1.2) удовлетворяет условиям (1.4). Точка $z = (x, u, u_1, u_2, \ldots, \underset{h}{u}_1, \underset{h}{u}_2, \ldots, , h^+)$ под действием группы G_1 с оператором (1.3) переходит в точку z^*, координаты которой являются формальными степенными рядами:

$$z^{i*} = f^i(z,a) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^i(z,a)a^k. \tag{1.7}$$

Поскольку ряды (1.7) образуют группу, то для них справедливо экспоненциальное представление (см. гл. I, § 2):

$$z^{i*} = e^{aX}(z^i) \equiv \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a^s}{s!} X^{(s)}(z^i). \tag{1.8}$$

Рассмотрим $F(z^*)$ и $\Omega(z^*)$ — суперпозиции рядов вида (1.7), (1.8), и найдем производную от $F(z^*)$ и $\Omega(z^*)$ по параметру a:

$$\frac{dF(z^*)}{da} = \xi(z^*)\frac{\partial F(z^*)}{\partial x^*} + \eta(z^*)\frac{\partial F(z^*)}{\partial u^*} + \ldots = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{a^{s-1}}{(s-1)} X^{(s)} F(z),$$

$$\frac{d\Omega(z^*)}{da} = \xi(z^*)\frac{\partial \Omega(z^*)}{\partial x^*} + \eta(z^*)\frac{\partial \Omega(z^*)}{\partial u^*} + \ldots = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{a^{s-1}}{(s-1)} X^{(s)} \Omega(z). \tag{1.9}$$

Уравнения (1.9) — это уравнения Ли для формальных рядов $F(z^*)$, $\Omega(z^*)$ с начальными данными $F(z) = 0$, $\Omega(z) = 0$. Согласно условиям теоремы (1.4) многообразие $F(z^*) = 0$, $\Omega(z^*) = 0$ удовлетворяет уравнениям Ли (1.9) и начальным условиям. Поскольку уравнения (1.9) определяют решения в виде однозначных рекуррентных соотношений для коэффициентов формальных рядов $F(z^*)$, $\Omega(z^*)$, то решение $F(z^*) = 0$, $\Omega(z^*) = 0$ единственно. Следовательно, многообразие (1.1), (1.2) инвариантно относительно формальной группы G_1 с оператором (1.3).

Отметим, что принципиально новым при рассмотрении инвариантности конечно-разностных уравнений относительно формальной однопараметрической группы G_1 является лишь включение уравнения (1.2) для разностной сетки, отсутствовавшее в дифференциальной постановке.

Требование инвариантности сетки:

$$\xi(x,u)\frac{\partial\Omega}{\partial x} + \eta(x,u)\frac{\partial\Omega}{\partial u} + \ldots + (\underset{+h}{S}(\xi) - \xi)\frac{\partial\Omega}{\partial h^+}\bigg|_{(1.1),(1.2)} = 0,$$

в случае, когда уравнение $\Omega(x,h^+) = 0$ не зависит от переменных $u, \underset{h}{u}_1, \underset{h}{u}_2, \ldots$ (т. е. от решения), не связано с критерием инвариантности разностного уравнения $F(z) = 0$ для групп, для которых $\xi_u = 0$:

$$\xi(x)\frac{\partial\Omega}{\partial x} + (\xi(x+h^+) - \xi(x))\frac{\partial\Omega}{\partial h^+}\bigg|_{(1.2)} = 0.$$

Сюда относятся сдвиги и растяжения независимых переменных, вращения, группа Лоренца и другие распространенные симметрии математических моделей физики. Это обстоятельство существенно облегчает конструирование инвариантных разностных уравнений для конкретных математических моделей физики.

2. Итак, критерий (1.4) дает нам необходимые и достаточные условия инвариантности конечно-разностных уравнений. Условия (1.4) представляют собой *линейные уравнения в частных разностных производных для коэффициентов* $\xi^i(x,u), \eta^k(x,u)$ инфинитезимального оператора (1.3). Если ставится задача — найти все операторы вида (1.3), допускаемые данным конечно-разностным уравнением (системой), то она всегда сводится к решению *линейной* системы (1.4), вне зависимости от линейности или нелинейности исходной системы (1.1), (1.2). Таким образом, задача нахождения группы, допускаемой данными конечно-разностными уравнениями, всегда линейна. Однако даже такая линейная задача является трудно разрешимой, поскольку проблема точного интегрирования уравнений в частных конечно-разностных производных по-существу является открытой. Решение обратной задачи — построение разностных уравнений и сеток, допускающих заданную группу преобразований — существенно легче. Например, если требуется *сохранить группу исходной модели при конечно-разностном моделировании*, то мы будем использовать *достаточность* условий (1.4) для инвариантности разностных уравнений и сеток.

Рассмотрим примеры разностных уравнений и сеток, которые сохраняют группу исходной модели.

1) Обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2u}{dx^2} = e^u \tag{1.10}$$

допускает двухпараметрическую группу точечных преобразований, определяемую операторами

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} - 2\frac{\partial}{\partial u}. \tag{1.11}$$

В $\underset{h}{Z}$ рассмотрим конечно-разностное уравнение

$$\underset{h}{u}_{x\bar{x}} = e^u, \tag{1.12}$$

операторы (1.11) представим в $\underset{h}{Z}$, продолжив X_2 на h^+ и h^- (X_1 непродолжаем):

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x},$$

$$X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} - 2\frac{\partial}{\partial u} - \underset{h}{u}_x\frac{\partial}{\partial \underset{h}{u}_x} - 2\underset{h}{u}_{x\bar{x}}\frac{\partial}{\partial \underset{h}{u}_{x\bar{x}}} + h^+\frac{\partial}{\partial h^+} + h^-\frac{\partial}{\partial h^-}. \tag{1.13}$$

Оба оператора удовлетворяют критерию сохранения равномерности сетки (см. гл. I), поэтому равномерная сетка $(h^+ = h^-)$ будет инвариантна.

Проверим критерий иваринтности (1.4) для уравнения (1.12) и операторов (1.13):

$$X_1(\underset{h}{u}_{x\bar{x}} - e^u)\big|_{(1.12)} = 0,$$

$$X_2(\underset{h}{u}_{x\bar{x}} - e^u)\big|_{(1.12)} = -2(\underset{h}{u}_{x\bar{x}} - e^u)\big|_{(1.12)} = 0.$$

Заметим, что мы построили разностное уравнение, а затем проверили, выполняется ли критерий инвариантности (1.4).

Является ли уравнение (1.12) уникальным в том смысле, что лишь оно допускает группу (1.13) и аппроксимирует (1.10) с точностью $O(h^2)$? Следующий пример дает еще одно разностное уравнение, допускающее группу (1.13) и аппроксимирующее (1.10) со вторым порядком:

$$\underset{h}{u}_{x\bar{x}} = e^u + h^2 e^{2u}. \tag{1.14}$$

Приведем пример уравнения, аппроксимирующего (1.10) со вторым порядком, но не допускающего ту же группу, что и исходное уравнение:

$$\underset{h}{u}_{x\bar{x}} = e^u + h^2 e^u. \tag{1.15}$$

Уравнение (1.15) допускает, очевидно, X_1, но не допускает X_2:

$$X_2(\underset{h}{u}_{x\bar{x}} - e^u(1+h^2))\big|_{(1.15)} \neq 0.$$

2) Уравнение нелинейной теплопроводности

$$u_t = (u^\sigma u_x)_x, \qquad \sigma > 0, \tag{1.16}$$

допускает (см. [33]) четырехпараметрическую группу, определяемую операторами

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x},$$

$$X_3 = 2t\,\frac{\partial}{\partial t} + x\,\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_4 = \sigma t\,\frac{\partial}{\partial t} - u\,\frac{\partial}{\partial u}.$$

Операторы в $\underset{h}{\widetilde{Z}}$ в продолженном виде будут выглядеть так:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x},$$

$$X_3 = 2t\,\frac{\partial}{\partial t} + x\,\frac{\partial}{\partial x} - \underset{h}{u}_x\,\frac{\partial}{\partial \underset{h}{u}_x} - 2\,\underset{\tau}{u}_t\,\frac{\partial}{\partial \underset{\tau}{u}_t} - {}$$
$$- 2\,\underset{h}{u}_{x\bar{x}}\,\frac{\partial}{\partial \underset{h}{u}_{x\bar{x}}} + 2\tau\,\frac{\partial}{\partial \tau} + h\,\frac{\partial}{\partial h}, \tag{1.17}$$

$$X_4 = \sigma t\,\frac{\partial}{\partial t} - u\,\frac{\partial}{\partial u} - \underset{h}{u}_x\,\frac{\partial}{\partial \underset{h}{u}_x} - (\sigma+1)\,\underset{\tau}{u}_t\,\frac{\partial}{\partial \underset{\tau}{u}_t} - \underset{h}{u}_{x\bar{x}}\,\frac{\partial}{\partial \underset{h}{u}_{x\bar{x}}} + \sigma\tau\,\frac{\partial}{\partial \tau}.$$

Заметим, что все четыре оператора сохраняют равномерность сетки $\underset{h}{\omega} \times \underset{\tau}{\omega}$, ($X_1$ и X_2 не меняют шагов h, τ, а X_3 и X_4 — равномерно их растягивают).

В $\underset{h}{Z}$ рассмотрим разностную схему, аппроксимирующую уравнение (1.16) с порядком $(\tau + h^2)$:

$$\underset{\tau}{u}_t = \underset{+h}{D}(k(u)\underset{h}{\hat{u}}_{\bar{x}}) = k(u)\underset{h}{\hat{u}}_{x\bar{x}} + \underset{+h}{D}(k(u))\underset{h}{\hat{u}}_x, \tag{1.18}$$

где $\hat{z} = \underset{+\tau}{S}(z)$ — величина z на “верхнем слое” по t, $k(u)$ — разностная аппроксимация коэффициента теплопроводности u^σ. Неявная схема (1.18) дивергентного типа, использует шеститочечный шаблон. Выберем следующую аппроксимацию коэффициента $k = u^\sigma$:

$$k(u) = \frac{1}{2}\,(u^\sigma + \underset{-h}{S}(u^\sigma)), \tag{1.19}$$

тогда $\underset{+h}{D}(k(u)) = \dfrac{1}{2h}(\underset{+h}{S}(u^\sigma) - \underset{-h}{S}(u^\sigma))$ и схема (1.18) выглядит так:

$$\underset{\tau}{u}_t = \frac{1}{2}\left(u^\sigma + \underset{-h}{S}(u^\sigma)\right)\underset{h}{\hat{u}}_{x\bar{x}} + \frac{1}{2h}\left(\underset{+h}{S}(u^\sigma) - \underset{-h}{S}(u^\sigma)\right)\underset{h}{\hat{u}}_x. \tag{1.20}$$

Продолжим операторы (1.17) на переменные $\underset{h}{\hat{u}}_{\bar{x}}$, $\underset{h}{\hat{u}}_{x\bar{x}}$, $\underset{+h}{S}(u^\sigma)$, $\underset{-h}{S}(u^\sigma)$:

$$X_3 = \ldots - \underset{h}{\hat{u}}_x \frac{\partial}{\partial \underset{h}{\hat{u}}_x} - \; 2\underset{h}{\hat{u}}_{x\bar{x}} \frac{\partial}{\partial \underset{h}{\hat{u}}_{x\bar{x}}},$$

$$X_4 = \ldots - \underset{+h}{S}(u)\frac{\partial}{\partial(\underset{+h}{S}(u))} - \underset{-h}{S}(u)\frac{\partial}{\partial(\underset{-h}{S}(u))} - \underset{h}{\hat{u}}_x \frac{\partial}{\partial \underset{h}{\hat{u}}_x} - \underset{h}{\hat{u}}_{x\bar{x}} \frac{\partial}{\partial \underset{h}{\hat{u}}_{x\bar{x}}},$$

(X_1, X_2 — “непродолжаемы”, т. е. координаты при любых дополнительных переменных равны нулю).

Разностное уравнение (1.20) допускает, очевидно, X_1 и X_2. Проверим его инвариантность по отношению к X_3 и X_4:

$$X_3\left(\underset{\tau}{u}_t - \frac{1}{2}[u^\sigma + \underset{-h}{S}(u^\sigma)]\,\underset{h}{\hat{u}}_{x\bar{x}} - \frac{1}{2h}[\underset{+h}{S}(u^\sigma) - (u^\sigma)]\underset{h}{\hat{u}}_x\right)\Bigg|_{(1.20)} =$$
$$= -2\left(\underset{\tau}{u}_t - \frac{1}{2}[u^\sigma + \underset{-h}{S}(u^\sigma)]\,\underset{h}{\hat{u}}_{x\bar{x}} - \frac{1}{2h}[\underset{+h}{S}(u^\sigma) - (u^\sigma)]\underset{h}{\hat{u}}_x\right)\Bigg|_{(1.20)} = 0,$$
$$X_4\left(\underset{\tau}{u}_t - \frac{1}{2}[u^\sigma + \underset{-h}{S}(u^\sigma)]\,\underset{h}{\hat{u}}_{x\bar{x}} - \frac{1}{2h}[\underset{+h}{S}(u^\sigma) - (u^\sigma)]\underset{h}{\hat{u}}_x\right)\Bigg|_{(1.20)} =$$
$$= -(\sigma+1)\left(\frac{1}{2}[u^\sigma + \underset{-h}{S}(u^\sigma)]\,\underset{h}{\hat{u}}_{x\bar{x}} - \frac{1}{2h}[\underset{+h}{S}(u^\sigma) - (u^\sigma)]\underset{h}{\hat{u}}_x\right)\Bigg|_{(1.20)} = 0.$$

Здесь мы воспользовались тем, что операторы $\underset{\pm h}{S}$ коммутируют с любой функцией из $\underset{h}{A}$.

Наиболее известным приложением теории групповых свойств дифференциальных уравнений являются методы получения инвариантно-групповых решений [34, 35, 38]; из последних наибольшее распространение получили автомодельные решения, способ построения которых основан на так называемой “π-теореме”.

Если данное уравнение (система) допускает r-параметрическую группу преобразований G_r, то решения, инвариантные относительно некоторой подгруппы группы G_r (геометрически-неподвижные решения при преобразовниях этой подгруппы), требуют интегрирования уравнения (системы) меньшей размерности. Обобщением этой идеи служат частично-инвариантные решения, находящиеся в инвариантном подмножестве множества всех решений (см. [35]). Инвариантные решения можно строить (при выполнении известных необходимых условий) на подгруппах различных размерностях, они классифицируются по рангам, дефектам инвариантности и другим свойствам.

3) Инвариантность конечно-разностного уравнения (системы) вместе с разностной сеткой позволяет, как и в дифференциальном случае, строить его инвариантные решения. Однако нелокальность дискретных уравнений приводит к некоторым особенностям этой процедуры. Разностное уравнение задано на конечном наборе точек разностной сетки — на разностном шаблоне — поэтому при отображении в пространство инвариантов группы необходимо согласовать разностную сетку и шаблон в исходном пространстве с сеткой и шаблоном в пространстве инвариантов.

Рассмотрим некоторые характерные инвариантные решения разностного уравнения нелинейной теплопроводности (1.20):

$$\underset{\tau}{u}_t = \frac{1}{2}(u^\sigma + \underset{-h}{S}(u^\sigma))\,\underset{h}{\hat{u}}_{x\bar{x}} + \frac{1}{2h}(\underset{+h}{S}(u^\sigma) - \underset{-h}{S}(u^\sigma))\underset{h}{\hat{u}}_x, \quad \sigma > 0, \tag{1.21}$$

которое на инвариантно-равномерной сетке допускает G_4 с операторами

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_3 = 2t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x},$$

$$X_4 = \sigma t\frac{\partial}{\partial t} - u\frac{\partial}{\partial u}. \tag{1.22}$$

Рассмотрим стационарное решение уравнения (1.21). В пространстве (t, x, u) оператор X_1 имеет два инварианта: x, u. Инвариантное решение $u(x,t) = \widetilde{u}(x)$ представляет собой стационарное решение, определяемое обыкновенным разностным уравнением

$$k(\widetilde{u})\underset{h}{\widetilde{u}}_{x\bar{x}} + \underset{+h}{D}(k(\widetilde{u}))\,\underset{h}{\widetilde{u}}_x = 0,$$

$$k(\widetilde{u}) = \frac{1}{2}(\widetilde{u}^\sigma + \underset{-h}{S}(\widetilde{u}^\sigma)),$$

причем шаг сетки h должен оставаться тем же, что и в исходном пространстве.

Аналогично получается однородное решение на операторе X_2.

Решение, инвариантное относительно оператора

$$X_1 + \alpha X_2 = \frac{\partial}{\partial t} + \alpha\frac{\partial}{\partial x}, \quad \alpha = \text{const},$$

имеющего инварианты

$$J_1 = u, \qquad J_2 = x - \alpha t,$$

представляет собой разностную бегущую волну:

$$u(x,t) = \widetilde{u}(\lambda), \quad \lambda = x - \alpha t, \tag{1.23}$$

распространяющуюся при $\alpha > 0$ вправо по x со скоростью α. Условия, необходимые для существования решения типа бегущей волны, выполнены:

$$R\left\|\frac{\partial\lambda}{\partial u}, \frac{\partial\widetilde{u}}{\partial u}\right\| = 1 = m,$$

$$R\,(\|\, 1, \alpha, 0 \,\|) = 1 < N = m + n = 3. \tag{1.24}$$

Однако этого недостаточно, чтобы искомое решение уравнения (1.21) на разностном шаблоне в подпространстве (x,t) можно было отобразить на разностный шаблон сетки в инвариантном подпространстве (λ).

Дополнительные, специфически разностные условия существования инвариантного решения связывают размеры исходного шаблона с размером шаблона в пространстве инвариантов (условия "многоточечного" отображения ясны из рис. 1.1).

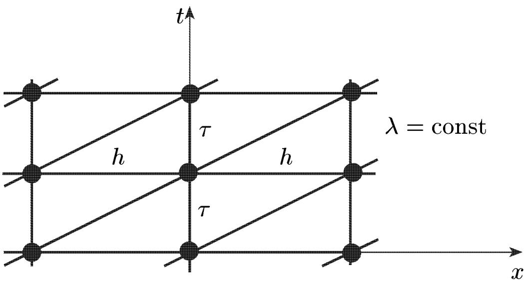

Рис. 1.1

Шаг разностной сетки $\Delta\lambda$ вдоль оси по λ должен быть согласован с исходными шагами h, τ и скоростью волны α:

$$\alpha = h/\tau, \qquad \Delta\lambda = h. \tag{1.25}$$

Эти соотношения означают, что линии $\lambda = \mathrm{const}$ проходят через узлы исходной сетки в плоскости (x,t).

Согласования разностных шаблонов можно добиться при $\alpha = kh/\tau$, где k — любое рациональное число, т. е. когда скорость бегущей волны α кратна “разностной скорости” h/τ. Впервые разностные бегущие волны уравнения теплопроводности получены в [43].

При выполнении условий (1.25), подстановка инвариантного представления (1.23) некоторого решения в инвариантное разностное уравнение (1.21) приводит для функции $\widetilde{u}(\lambda)$ к обыкновенному разностному уравнению:

$$\alpha\widetilde{u}_\lambda + \frac{1}{2}[(\widetilde{u}^\sigma + \check{\widetilde{u}}^\sigma\,\widetilde{u}_{\bar{\lambda}}]_\lambda = 0, \tag{1.26}$$

где $\check{\widetilde{u}} = \widetilde{u}(\lambda - \Delta\lambda)$.

Так же, как и в дифференциальном случае, для разностного уравнения (1.26) существует первый интеграл. Применив к (1.26) оператор правого интегрирования, получим:

$$\alpha\widetilde{u} + \frac{1}{2}(\widetilde{u}^\sigma + \check{\widetilde{u}}^\sigma)\widetilde{u}_{\bar{\lambda}} = \mathrm{const}. \tag{1.27}$$

Рассмотрим автомодельное решение уравнения (1.21), инвариантное относительно однопараметрической группы растяжения, отвечающее X_4. Инвариантами будут x и $ut^{1/\sigma}$.

Инвариантное решение ищем в виде:

$$u(x,t) = \widetilde{u}(x)t^{-\frac{1}{\sigma}.(1.28)}$$

Подстановка в уравнение (1.21) инвариантного представления $u(x,t)$ приводит к уравнению для $\widetilde{u}(x)$ на $(n+1)$-м слое по t:

$$(\underset{+h}{S}(\widetilde{u}^\sigma) + \widetilde{u}^\sigma)\,\underset{h}{\widetilde{u}}_x - (\widetilde{u}^\sigma + \underset{-h}{S}(\widetilde{u}^\sigma)\,\underset{h}{\widetilde{u}}_{\bar{x}} + 2nh(\sqrt{n^2+n} - 1)\widetilde{u} = 0. \tag{1.29}$$

В этом уравнении шаг сетки h совпадает с исходным. Решив уравнение (1.29), мы можем найти решение исходного уравнения по формуле

$$u(x,t) = \frac{\widetilde{u}(x)}{[\tau(n+1)]^{1/\sigma}}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.30}$$

Таким образом, нахождение инвариантного решения схемы (1.21) свелось к нахождению решения обыкновенного разностного уравнения, т. е. решение задачи на каждом временном слое свелось к одноразовому процессу.

4. Рассмотрим пример применения критерия инвариантности разностного уравнения для факторизованных (канонических) операторов симметрии.

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$u_{xx} = u^2. \tag{1.31}$$

Уравнение (1.31) допускает двухпараметрическую группу точечных преобразований, генерируемую следующими операторами:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} - 2u\frac{\partial}{\partial u}. \tag{1.32}$$

Рассмотрим конечно-разностное уравнение

$$\frac{u^+ - 2u + u^-}{h^2} = u^2, \tag{1.33}$$

на равномерной разностной сетке

$$h^+ = h^-, \tag{1.34}$$

где $u^+ = S(u), \quad u^- = S(u)$.

Уравнения (1.33), (1.34) используют трехточечный разностный шаблон

$$(x, x^+, x^-, u, u^+, u^-).$$

Продолжим операторы (1.32) на точки этого шаблона

$$\begin{gathered} X_1 = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x^+} + \frac{\partial}{\partial x^-}, \\ X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + x^+\frac{\partial}{\partial x^+} + x^-\frac{\partial}{\partial x^-} - 2u\frac{\partial}{\partial u} - 2u^+\frac{\partial}{\partial u^+} - \\ - 2u^-\frac{\partial}{\partial u^-} + h^+\frac{\partial}{\partial h^+} + h^-\frac{\partial}{\partial h^-}. \end{gathered} \tag{1.35}$$

Нетрудно проверить инвариантность уравнений (1.33), (1.34):

$$X_2\left(\frac{u^+ - 2u + u^-}{h^2} - u^2\right)\Bigg|_{(1.33),(1.34)} = 0,$$

$$X_2\left(h^+ - h^-\right)\Big|_{(1.33),(1.34)} = 0 \tag{1.36}$$

(оператор X_1 не меняет уравнений (1.33), (1.34)).

Отсюда следует, что разностная модель (1.33), (1.34)) допускает ту же группу преобразований, что и исходное дифференциальное уравнение (1.31). Заметим, что условия инвариантности (1.36) разделились на два независимых уравнения.

Рассмотрим теперь критерий инвариантности разностной модели (1.33), (1.34) для канонических операторов (см. также [54, 70]). Не ограничивая общности, мы рассмотрим представление оператора D^+ для правой полуоси:

$$D^+ = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x^+} + \frac{\partial}{\partial x^-} + u_x \frac{\partial}{\partial u} + u_x^+ \frac{\partial}{\partial u^+} + u_x^- \frac{\partial}{\partial u^-}, \tag{1.37}$$

где

$$u_x \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-h)^{n-1}}{n} \underset{+h}{D}{}^n(u), \qquad u_x^+ \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-h)^{n-1}}{n} \underset{+h}{D}{}^n(u^+),$$

$$u_x^- \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-h)^{n-1}}{n} \underset{+h}{D}{}^n(u^-)$$

— непрерывные производные в разных точках шаблона.

Канонические операторы запишутся в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\underset{+h}{\overline{X}_1} &= -X_1 + D^+ = u_x \frac{\partial}{\partial u} + u_x^+ \frac{\partial}{\partial u^+} + u_x^- \frac{\partial}{\partial u^-}, \\
\underset{+h}{\overline{X}_2} &= -X_2 + xD^+ = -h^+ \frac{\partial}{\partial h^+} - h^- \frac{\partial}{\partial h^-} + (2u + xu_x) \frac{\partial}{\partial u} + \\
&\qquad + (2u^+ + xu_x^+) \frac{\partial}{\partial u^+} + (2u^- + xu_x^-) \frac{\partial}{\partial u^-}.
\end{aligned} \tag{1.38}$$

Уравнение сетки (1.34) допускает, очевидно, операторы (1.38).

Действие операторов (1.38) на уравнение (1.33), рассмотренное на самом уравнении, приводит к

$$u_x + 2u_x^+ + u_x^- = 2uu_x h^2. \tag{1.39}$$

Последнее уравнение представляет собой дифференциальное следствие уравнения (1.33), использующее все точки правой полуоси.

Как видно, использование факторизованных (канонических) операторов в разностном случае приводит к значительным техническим трудностям даже на равномерных сетках. В случае, когда требуется *построить* разностную модель, использование канонических операторов не представляется возможным, поскольку для таких операторов нет методики построения инвариантов.

§ 2. Групповая классификация обыкновенных разностных уравнений второго порядка

В предыдущем параграфе критерий инвариантности (1.4) был использован для проверки инвариантности конечно-разностных уравнений. Возникает вопрос: как можно *строить* разностные модели по данной дифференциальной модели, если для последней группа известна? Второй, более общий вопрос, — как перечислить все разностные модели, инвариантные относительно заданной классификации групп в данном пространстве, т. е. как решить задачу групповой классификации разностных схем аналогично тому, как это делается для дифференциальных уравнений? При решении такой задачи интерес представляет сравнение групповой классификации разностных схем и дифференциальных уравнений, — является ли список инвариантных схем шире или у́же соответствующего списка дифференциальных уравнений?

В этом пункте мы рассмотрим решение задачи групповой классификации на примере обыкновенных разностных уравнений второго порядка на соответствующих разностных сетках [72].

В классических работах [89–92] Софус Ли провел групповую классификацию обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. В частности, он показал, что размерность группы точечных преобразований, оставляющих множество решений ОДУ второго порядка инвариантным, может быть равна $n = 0, 1, 2, 3$ или 8. Кроме того, он показал, что всякое уравнение, допускающее группу преобразований максимальной размерности $n = 8$, может быть преобразовано в простейшее уравнение $y'' = 0$. Классификация С.Ли основана на перечислении всех конечномерных алгебр Ли, реализуемых векторными полями в двумерном пространстве [91], т. е. векторными полями в форме:

$$X = \xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y}. \tag{2.1}$$

Ли использовал векторные поля над полем комплексных чисел, следуя списку всех конечномерных подалгебр бесконечномерных алгебр Ли. Классификация была проведена с точностью до произвольных локально обратимых преобразований комплексной плоскости $\mathbb{C}^2$.

Значительно позднее была проведена классификация над полем действительных чисел [81], которой мы и будем здесь следовать.

В нашей классификации разностных моделей мы ограничимся минимальным трехточечным разностным шаблоном, необходимым для аппроксимации разностного уравнения второго порядка. Виды сеток

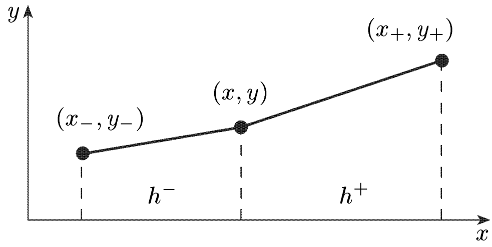

Рис. 2.1

при этом заранее не оговариваются и не ограничиваются.

Пусть x — независимая переменная, y — зависимая. Для рассмотрения уравнения второго порядка и разностной сетки в направлении x нам необходим трехточечный шаблон, соответствующий подпространству $(x, x_-, x_+, y, y_-, y_+)$ (рис. 2.1).

Рассматриваемая разностная модель представляет собой два разностных уравнения:

$$F(x, x_-, x_+, y, y_-, y_+) = 0,$$

$$\Omega(x, x_-, x_+, y, y_-, y_+) = 0. \tag{2.2}$$

Первое уравнение — это разностное уравнение второго порядка, которое в континуальном пределе должно обращаться в ОДУ второго порядка в некоторой точке (x, y, y', y''). Второе уравнение дает разностную сетку, на которой рассматривается первое уравнение. Второе уравнение не обязано быть разностным уравнением второго порядка, — например, мы можем рассмотреть равномерную сетку в виде уравнения $h_+ = h_-$, которое "исчезает" в континуальном пределе.

В некоторых случаях мы будем использовать следующие обозначения для разностных моделей:

$$\begin{cases} y_+ = f(x, x_-, y, y_-), \\ x_+ = g(x, x_-, y, y_-), \end{cases} \tag{2.3}$$

или

$$\begin{cases} y_x = f(x, h_-, y, y_{\bar{x}}), \\ h_+ = g(x, h_-, y, y_{\bar{x}}). \end{cases} \tag{2.4}$$

Используются следующие обозначения:

$$h_+ = x_+ - x, \qquad h_- = x - x_-, \qquad y_x = \frac{y_+ - y}{h_+}, \qquad y_{\bar{x}} = \frac{y - y_-}{h_-}, \tag{2.5}$$

где y_x и $y_{\bar{x}}$ — первые правые и левые разностные производные,

$$y_{x\bar{x}} = \frac{2}{h_+ + h_-}(y_x - y_{\bar{x}})$$

— вторая разностная производная. Непрерывные производные будем обозначать через y' и y''.

Нам потребуется продолжение оператора группы на все точки разностного шаблона. Соответствующие коэффициенты оператора получаются сдвигом аргументов в соседние к (x, y) точки разностного шаблона:

$$\widetilde{X}_\alpha = X_\alpha + \xi_\alpha(x_-, y_-)\frac{\partial}{\partial x_-} + \xi_\alpha(x_+, y_+)\frac{\partial}{\partial x_+} + \\ + \eta_\alpha(x_-, y_-)\frac{\partial}{\partial y_-} + \eta_\alpha(x_+, y_+)\frac{\partial}{\partial y_+}. \quad (2.6)$$

Разностные инварианты получаются как решения системы уравнений в частных производных (непрерывных) первого порядка:

$$\widetilde{X}_\alpha \Phi = 0, \qquad \alpha = 1, \ldots, n, \quad (2.7)$$

где функции Φ зависят от $(x, x_-, x_+, y, y_-, y_+)$. Число функционально независимых инвариантов данной группы G равно

$$k = \dim M - \operatorname{rank} Z, \quad (2.8)$$

где M — многообразие (2.2), Z — матрица коэффициентов в операторе (2.6).

Заметим, что в дифференциальном случае $\dim M = 4$, а в разностном $\dim M = 6$. Следовательно, в разностном случае мы можем ожидать на два инварианта больше, чем в непрерывном.

В непрерывном случае инвариантное ОДУ второго порядка можно записать в виде:

$$E(I_1, \ldots, I_k) = 0, \qquad \frac{\partial E}{\partial y''} \neq 0, \quad (2.9)$$

в разностном случае нам нужны два уравнения:

$$\begin{cases} F(I_1, \ldots, I_k) = 0, & \dfrac{\partial F}{\partial y_-} \neq 0, \quad \dfrac{\partial F}{\partial y} \neq 0, \quad \dfrac{\partial F}{\partial y_+} \neq 0, \\ G(I_1, \ldots, I_k) = 0, & \dfrac{\partial G}{\partial x_-} \neq 0, \quad \dfrac{\partial G}{\partial x} \neq 0, \quad \dfrac{\partial G}{\partial x_+} \neq 0. \end{cases} \quad (2.10)$$

Условия на F и G гарантируют, что уравнения (2.10) определяют обыкновенное разностное уравнение и сетку.

2.1. Разностные модели, инвариантные относительно одномерных и двумерных групп. Мы начнем с простейшей одномерной группы точечных преобразований, алгебра Ли которой всегда может приведена с помощью соответствующей замены переменных к следующему виду:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial y}. \tag{2.11}$$

Наиболее общее обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, инвариантное относительно одномерной группы имеет вид

$$y'' = F(x, y'), \tag{2.12}$$

где F — произвольная функция своих аргументов.

Для того, чтобы выписать инвариантную разностную модель, нам надо посчитать базис конечно-разностных инвариантов оператора X_1 в пространстве $(x, x_-, x_+, y, y_-, y_+)$. Вычисления дают следующие пять разностных инвариантов:

$$\left\{ y_{x\bar{x}},\ \frac{y_x + y_{\bar{x}}}{2},\ x,\ h_-,\ h_+ \right\}.$$

Следовательно, общая инвариантная разностная модель может быть записана в следующем виде:

$$\begin{cases} y_{x\bar{x}} = f\left(x, \dfrac{y_x + y_{\bar{x}}}{2}, h_-\right), \\ \\ h_+ = h_- g\left(x, \dfrac{y_x + y_{\bar{x}}}{2}, h_-\right), \end{cases} \tag{2.13}$$

где f и g — произвольные функции своих аргументов. Всюду в дальнейшем мы предполагаем, что функции, участвующие в определении разностных моделей, не имеют сингулярностей при $h_+ \to 0, h_- \to \to 0$. Форма записи уравнения для сетки предполагает, что уравнение "исчезает" в континуальном пределе.

Среди множества разностных моделей (2.13) можно выделить простейшую разностную схему, которая аппроксимирует ОДУ (2.12), если выбрать функцию f, не зависящую от h_- и функцию $g \equiv 1$:

$$\begin{cases} y_{x\bar{x}} = F\left(x, \dfrac{y_x + y_{\bar{x}}}{2}\right), \\ \\ h_- = h_+. \end{cases} \tag{2.14}$$

Подчеркнем, что разностная схема (2.14) является лишь частным случаем разностной модели (2.13), содержащей две произвольных функции. Иными словами, семейство инвариантных разностных моделей обладает значительно большим произволом, чем соответствующее инвариантное дифференциальное уравнение.

Рассмотрим теперь двумерные алгебры.

1.Абелева алгебра Ли с двумя несвязанными элементами

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial y} \tag{2.15}$$

в непрерывном случае оставляет инвариантным множество решений следующего семейства ОДУ второго порядка:

$$y'' = F(y'), \tag{2.16}$$

где F — произвольная функция.

В разностном случае стандартная процедура вычислений дает следующий набор функционально независимых инвариантов:

$$\left\{h_+,\ h_-,\ \frac{y_x + y_{\bar{x}}}{2},\ y_{x\bar{x}}\right\}.$$

В соответствии с этим общая инвариантная разностная модель может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} y_{x\bar{x}} = f\left(\dfrac{y_x + y_{\bar{x}}}{2}, h_-\right), \\[2ex] h_+ = h_- g\left(\dfrac{y_x + y_{\bar{x}}}{2}, h_-\right). \end{cases} \tag{2.17}$$

Простейшая разностная схема, аппроксимирующая (2.16), может опять быть получена при ограничении f и выборе $g = 1$:

$$\begin{cases} y_{x\bar{x}} = F\left(\dfrac{y_x + y_{\bar{x}}}{2}\right), \\[2ex] h_- = h_+. \end{cases} \tag{2.18}$$

2. Абелева алгебра Ли с двумя связанными элементами

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_2 = x\frac{\partial}{\partial y} \tag{2.19}$$

дает следующее инвариантное уравнение:

$$y'' = F(x). \tag{2.20}$$

Это уравнение может быть преобразовано в простейшее линейное уравнение $u'' = 0$ с помощью замены переменных

$$u = y - W(x), \quad \text{где} \quad W''(x) = F(x), \tag{2.21}$$

$W(x)$ — любое решение уравнения (2.20).

Базис конечно-разностных инвариантов алгебры (2.19)

$$\{y_{x\bar{x}},\ x,\ h_+,\ h_-\}$$

позволяет выписать следующее семейство инвариантных моделей:

$$\begin{cases} y_{x\bar{x}} = f(x, h_-), \\ h_+ = h_- g(x, h_-). \end{cases} \tag{2.22}$$

Ограничением f и выбором $g = 1$ мы получаем простейшую схему на равномерной сетке, аппроксимирующую уравнение (2.20):

$$\begin{cases} y_{x\bar{x}} = F(x), \\ h_- = h_+. \end{cases} \tag{2.23}$$

Также, как и в непрерывном случае, разностная модель (2.22) может быть приведена к форме

$$\begin{cases} u_{x\bar{x}} = 0, \\ h_+ = h_- g(x, h_-) \end{cases} \tag{2.24}$$

путем замены

$$u = y - W(x, h_-, h_+), \qquad W_{x\bar{x}} = f(x, h_-), \tag{2.25}$$

где W — любое решение разностной системы (2.22).

3. Неабелева алгебра Ли с двумя несвязанными элементами

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} \tag{2.26}$$

дает следуещее инвариантное ОДУ:

$$y'' = \frac{1}{x} F(y'). \tag{2.27}$$

Для этой алгебры вычисления дают следующий базисный набор разностных инвариантов:

$$\left\{ x y_{x\bar{x}},\ \frac{y_x + y_{\bar{x}}}{2},\ \frac{h_+}{h_-},\ \frac{h_-}{x} \right\}.$$

Общий вид инвариантной модели будет следующим:

$$\begin{cases} y_{x\bar{x}} = \dfrac{1}{x} f\left(\dfrac{y_x + y_{\bar{x}}}{2}, \dfrac{h_-}{x}\right), \\ h_+ = h_- g\left(\dfrac{y_x + y_{\bar{x}}}{2}, \dfrac{h_-}{x}\right). \end{cases} \tag{2.28}$$

Ограничением f и выбором $g = 1$, мы получаем инвариантное уравнение и сетку

$$\begin{cases} y_{x\bar{x}} = \dfrac{1}{x} F\left(\dfrac{y_x + y_{\bar{x}}}{2}\right), \\ h_- = h_+, \end{cases} \tag{2.29}$$

имеющие уравнение (2.27) в качестве континуального предела.

4. Неабелева алгебра Ли с двумя линейно-связанными элементами

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_2 = y\frac{\partial}{\partial y} \tag{2.30}$$

приводит к следующему инвариантному ОДУ:

$$y'' = F(x)y'. \tag{2.31}$$

Это уравнение можно также привести с линейной форме $v'' = 0$ с помощью замены переменных $t = g(x), \quad v(t) = y(x)$, где $g(x)$ — любое решение уравнения (2.31).

Полный набор конечно-разностных инвариантов

$$\left\{\frac{y_{x\bar{x}}}{y_x + y_{\bar{x}}},\ x,\ h_-,\ h_+\right\}$$

позволяет выписать инвариантную разностную модель в форме:

$$\begin{cases} y_{x\bar{x}} = \dfrac{y_x + y_{\bar{x}}}{2} f(x, h_-), \\ h_+ = h_- g(x, h_-). \end{cases} \tag{2.31}$$

Частным случаем этого семейства при $f(x, h_-) = F(x)$, $g(x, h_-) = 1$ является схема

$$\begin{cases} y_{x\bar{x}} = \dfrac{y_x + y_{\bar{x}}}{2} F(x), \\ h_- = h_+, \end{cases} \tag{2.33}$$

аппроксимирующая соответствующее ОДУ (2.31). Разностное семейство (2.32) может быть преобразовано в схему (2.24) с помощью любого решения $\phi(x)$ системы (2.32) и преобразования независимой переменной:

$$(x, y) \to (t = \phi(x),\, u(t) = y(x)). \tag{2.34}$$

Результаты, полученные для двумерных алгебр Ли можно суммировать в виде следующей теоремы.

Теорема 2.1. *Две подалгебры с линейно несвязанными элементами дают семейства инвариантных схем* (2.17) *и* (2.28), *содержащие две произвольные функции двух переменных. Две подалгебры с линейно-связянными элементами позволяют выписать семейства инвариантных моделей* (2.22), (2.32), *которые можно привести к форме* (2.24), *если известно хотя бы одно решение исходного семейства.*

Замечание. Мы получили аналог известного результата С. Ли для ОДУ второго порядка, когда в тех же случаях двумерных алгебр Ли уравнения могут быть приведены к линейному $y'' = 0$ [89, 90].

2.2. Разностные уравнения, инвариантные относительно трехмерных групп преобразований. Мы начнем перечисление трехмерных алгебр Ли с тех, которые содержат двумерные алгебры с линейно-связянными элементами в качестве подалгебр.

1. Трехмерная алгебра

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_3 = x\frac{\partial}{\partial y} \tag{2.35}$$

содержит коммутирующие линено-связянные операторы X_2 и X_3. Инвариантное дифференциальное уравнение $y'' = C$ эквивалентно $y'' = 0$.

Набор независимых конечно-разностных

$$\{y_{x\bar{x}},\ h_-,\ h_+\}$$

позволяет представить семейство инвариантных разностных моделей в виде:

$$\begin{cases} y_{x\bar{x}} = f(h_-), \\ h_+ = h_- g(h_-). \end{cases} \tag{2.36}$$

Уравнение $y'' = C$ является континуальным пределом, если $f = C$, $g = 1$. Система (2.36) эквивалентна (2.24), если функция g не зависит от x.

2. Трехмерная алгебра

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_2 = x\frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_3 = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} \tag{2.37}$$

содержит два линейно-связанных оператора X_1 и X_2. Инвариантное ОДУ имеет вид
$$y'' = C\exp(x). \tag{2.38}$$

Базис разностных инвариантов можно представить в виде
$$\{y_{x\bar{x}}\exp(-x),\ h_-,\ h_+\}.$$

Общая форма семейства инвариантных моделей
$$\left\{\begin{array}{l} y_{x\bar{x}} = f(h_-)\exp(x), \\ h_+ = h_-g(h_-) \end{array}\right. \tag{2.39}$$
содержит, в частности, простейшую схему, аппроксимирующую уравнение (2.38) при $f = C$, $g = 1$. Схема (2.39) может быть преобразована в форму (2.24) при g независящем от x.

3. Алгебра операторов
$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_3 = y\frac{\partial}{\partial y} \tag{2.40}$$
оставляет инвариантным уравнение
$$y'' = Cy'. \tag{2.41}$$

Полный набор разностных инвариантов можно выбрать таким:
$$\left\{\frac{y_{x\bar{x}}}{y_x},\ \frac{y_x + y_{\bar{x}}}{y_x},\ h_-\right\}.$$

Общая инвариантная разностная модель может быть записана в виде
$$\left\{\begin{array}{l} y_{x\bar{x}} = \dfrac{y_x + y_{\bar{x}}}{2} f(h_-), \\ h_+ = h_-g(h_-). \end{array}\right. \tag{2.42}$$

Путем выбора $f = C$, $g = 1$, система (2.42) превращается в схему, аппроксимирующую уравнение (2.41).

Преобразование (2.34) при g, независящем от x, переводит (2.42) в (2.24).

4. Трехмерная алгебра
$$X_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_2 = x\frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_3 = y\frac{\partial}{\partial y} \tag{2.43}$$
имеет все три оператора линейно-связанными. Единственным (непрерывным) инвариантом в этом случае является x, однако $y'' = 0$ — инвариантное многообразие, поэтому уравнение $y'' = 0$ является инвариантным ОДУ.

Разностными инвариантами являются лишь $\{x_-, x, x_+\}$, однако разностное уравнение $y_{x\bar{x}} = 0$ также является инвариантным многообразием, поэтому разностная схема

$$\begin{cases} y_{x\bar{x}} = 0, \\ h_+ = h_- g(x, h_-) \end{cases} \tag{2.44}$$

будет инвариантна. Если в ней положить $g = 1$, то получим простейшую аппроксимацию уравнения $y'' = 0$.

5. Алгебра операторов

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_2 = x\frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_3 = (1-a)x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, \qquad a \neq 1 \tag{2.45}$$

в качестве инвариантного уравнения имеет

$$y'' = Cx^{\frac{2a-1}{1-a}}, \quad a \neq 1. \tag{2.46}$$

Подсчет дает следующий набор разностных инвариантов:

$$\left\{ y_{x\bar{x}} x^{\frac{2a-1}{a-1}},\ \frac{h_-}{x},\ \frac{h_+}{x} \right\},$$

в соответствии с которым получаем инвариантную форму разностной модели

$$\begin{cases} y_{x\bar{x}} = x^{\frac{2a-1}{1-a}} f\left(\dfrac{h_-}{x}\right), \\[2ex] h_+ = h_- g\left(\dfrac{h_-}{x}\right). \end{cases} \tag{2.47}$$

Аппроксимация уравнения (2.46) получается при $f = C$, $g = 1$. Разностная схема (2.47) также может быть пребразована в (2.24).

6. Алгебре операторов

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_2 = x\frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_3 = (1 + x^2)\frac{\partial}{\partial x} + (x + b)y\frac{\partial}{\partial y} \tag{2.48}$$

соответствует инвариантное ОДУ

$$y'' = C(1 + x^2)^{-3/2} \exp(b \operatorname{arctg}(x)), \tag{2.49}$$

которое можно заменой переменных перевести в $y'' = 0$.

Полный набор разностных инвариантов

$$\left\{ \frac{h_+}{1 + xx_+},\ \frac{h_-}{1 + xx_-},\ (y_x - y_{\bar{x}})\sqrt{1 + x^2}\exp(-b \operatorname{arctg}(x)), \right\}$$

позволяет записать инвариантную разностную модель в следующем виде:

$$\begin{cases} y_{x\bar{x}} = \dfrac{\exp(b\,\mathrm{arctg}\,(x))}{\sqrt{1+x^2}} \left(\dfrac{h_+}{h_- + h_+} \dfrac{1}{1+xx_+} + \right. \\ \qquad\qquad\qquad \left. + \dfrac{h_-}{h_- + h_+} \dfrac{1}{1+xx_-} \right) f\left(\dfrac{h_-}{1+xx_-} \right), \\ h_+ = h_- \dfrac{1+xx_+}{1+xx_-} g\left(\dfrac{h_-}{1+xx_-} \right). \end{cases} \qquad (2.50)$$

Положив $f = g = 1$, мы получим разностную аппроксимацию ОДУ (2.49).

7. Алгебра операторов

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} \qquad (2.51)$$

имеет единственным инварианом y', однако $y'' = 0$ является инвариантным многобразием.

С помощью базисного набора разностных инвариантов

$$\left\{ h_- y_{x\bar{x}},\ \frac{y_x + y_{\bar{x}}}{2},\ \frac{h_+}{h_-} \right\}$$

легко выписать инвариантную разностную модель

$$\begin{cases} h_- y_{x\bar{x}} = f\left(\dfrac{y_x + y_{\bar{x}}}{2} \right), \\ h_+ = h_- g\left(\dfrac{y_x + y_{\bar{x}}}{2} \right), \end{cases} \qquad (2.52)$$

которая, вообще говоря, не имеет континуального предела. Этот предел существует лишь при $f = 0$. Уравнение $y'' = 0$ аппроксимируется системой (2.52) при $f = 0$, $g = 1$.

Таким образом, рассмотренные пока разностные модели, инвариантные относительно трехмерных алгебр, эквивалентны частным случаям системы

$$\begin{cases} y_{x\bar{x}} = 0, \\ g(x, h_-, h_+) = 0. \end{cases} \qquad (2.53)$$

Рассмотренные ниже разностные модели не могут быть приведены к форме (2.53).

8. Алгебра операторов

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + (x+y)\frac{\partial}{\partial y} \qquad (2.54)$$

в качестве инвариантного ОДУ дает

$$y'' = \exp(-y'). \tag{2.55}$$

Его общее решение

$$y = -x + (x+B)\ln(x+B) + A$$

содержит A и B в качестве констант интегрирования.

Базис конечно-разностных инвариантов

$$\left\{\frac{h_+}{h_-},\ h_+\exp\left(-y_x\right),\ h_-\exp\left(-y_{\bar{x}}\right)\right\}$$

дает возможность выписать в общем виде инвариантную разностную систему:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{2}{h_-+h_+}\left(\exp\left(y_x\right)-\exp\left(y_{\bar{x}}\right)\right) = f\left(h_-\exp\left(-y_{\bar{x}}\right)\right), \\ h_+ = h_- g\left(h_-\exp\left(-y_{\bar{x}}\right)\right). \end{array}\right. \tag{2.56}$$

Инвариантная аппроксимация ОДУ (2.55) получается при $f = g = 1$.

9. Трехмерная алгебра операторов

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + ky\frac{\partial}{\partial y}, \qquad k \neq 0,1, \tag{2.57}$$

в качестве инвариантного ОДУ имеет следуещее семейство:

$$y'' = y'^{\frac{k-2}{k-1}}, \tag{2.58}$$

где $k = \text{const}$.

Общее решение таково:

$$y = \left(\frac{1}{k-1}\right)^{k-1}\frac{1}{k}(x-x_0)^k + y_0. \tag{2.59}$$

С помощью базисного набора разностных инвариантов

$$\left\{\frac{h_+}{h_-},\ y_x {h_+}^{(1-k)},\ y_{\bar{x}} {h_-}^{(1-k)}\right\},$$

инвариантная модель записывается следующим образом:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{2(k-1)}{h_-+h_+}\left((y_x)^{\frac{1}{k-1}} - (y_{\bar{x}})^{\frac{1}{k-1}}\right) = f\left(y_{\bar{x}} {h_-}^{(1-k)}\right), \\ h_+ = h_- g\left(y_{\bar{x}} {h_-}^{(1-k)}\right). \end{array}\right. \tag{2.60}$$

Простейшая аппроксимация ОДУ (2.58) получается при $f = g = 1$.

10. Алгебра Ли линейно несвязанных операторов

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_3 = (kx + y)\frac{\partial}{\partial x} + (ky - x)\frac{\partial}{\partial y} \tag{2.61}$$

в качестве инвариантного ОДУ дает

$$y'' = (1 + (y')^2)^{3/2} \exp(k \operatorname{arctg}\, (y')) \tag{2.62}$$

с общим решением

$$\exp\left(2k \operatorname{arctg}\, \left(\frac{-(x - x_0) + k(y - y_0)}{k(x - x_0) + (y - y_0)}\right)\right)(1 + k^2)\times \\ \times \left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\right) = 1. \tag{2.63}$$

Вычисления дают следующий базис конечно-разностных инвариантов:

$$\left\{h_+\sqrt{1 + y_x^2}\exp\left(k \operatorname{arctg}\, y_x\right),\ h_-\sqrt{1 + y_{\bar{x}}^2}\exp\left(k \operatorname{arctg}\, y_{\bar{x}}\right),\ \frac{y_x - y_{\bar{x}}}{1 + y_x y_{\bar{x}}}\right\}.$$

Отсюда получается общая форма инвариантной разностной модели

$$\begin{cases} y_{x\bar{x}} = (1 + y_x y_{\bar{x}})\left(\dfrac{h_+}{h_- + h_+}\sqrt{1 + y_x^2}\exp\left(k \operatorname{arctg}\, y_x\right) + \dfrac{h_-}{h_- + h_+}\times\right. \\ \left.\times\sqrt{1 + y_{\bar{x}}^2}\exp\left(k \operatorname{arctg}\, y_{\bar{x}}\right)\right) f\left(h_-\sqrt{1 + y_{\bar{x}}^2}\exp\left(k \operatorname{arctg}\, (y_{\bar{x}})\right)\right), \\ h_+\sqrt{1 + y_x^2}\exp\left(k \operatorname{arctg}\, (y_x)\right) = h_-\sqrt{1 + y_{\bar{x}}^2}\exp\left(k \operatorname{arctg}\, (y_{\bar{x}}\right) + \\ +g\left(h_-\sqrt{1 + y_{\bar{x}}^2}\exp\left(k \operatorname{arctg}\, (y_{\bar{x}})\right)\right), \end{cases} \tag{2.64}$$

которая при $f = 1,\ g = 0$ имеет ОДУ (2.62) в качестве континуального предела.

11. Алгебра операторов

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_2 = 2x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_3 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y} \tag{2.65}$$

оставляет инвариантным следующее уравнение:

$$y'' = y^{-3}, \tag{2.66}$$

которое имеет общее решение

$$Ay^2 = (Ax + B)^2 + 1, \qquad A = \text{const},\ B = \text{const}.$$

С помощью полного набора разностных инвариантов

$$\left\{y(y_x - y_{\bar{x}}), \quad \frac{1}{y}\left(\frac{h_+}{y_+} + \frac{h_-}{y_-}\right), \quad \frac{1}{y^2}\frac{h_+h_-}{h_+ + h_-}\right\}$$

инвариантная схема записывается в виде

$$\left\{\begin{aligned} & y_{x\bar{x}} = \frac{1}{y^2}\left(\frac{h_+}{h_+ + h_-}\frac{1}{y_+} + \frac{h_-}{h_+ + h_-}\frac{1}{y_-}\right) f\left(\frac{1}{y^2}\frac{h_+h_-}{h_+ + h_-}\right), \\ & \frac{1}{y}\left(\frac{h_+}{y_+} + \frac{h_-}{y_-}\right) = 4\frac{1}{y^2}\frac{h_+h_-}{h_+ + h_-} g\left(\frac{1}{y^2}\frac{h_+h_-}{h_+ + h_-}\right). \end{aligned}\right. \tag{2.67}$$

Аппроксимация уравнения (2.66) получается при $f = g = 1$.

12. Алгебра операторов

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = (x^2 - y^2)\frac{\partial}{\partial x} + 2xy\frac{\partial}{\partial y} \tag{2.68}$$

в качестве инвариантного уравнения дает

$$yy'' = C(1 + (y')^2)^{3/2} - (1 + (y')^2), \quad C = \mathrm{const} \tag{2.69}$$

с общим решением

$$(Ax - B)^2 + (Ay - C)^2 = 1.$$

Набор разностных инвариантов может быть выбран в форме

$$I_1 = \frac{h_-^2 + (y - y_-)^2}{yy_-}, \qquad I_2 = \frac{h_+^2 + (y_+ - y)^2}{yy_+},$$

$$I_3 = \frac{2y(h_+ + h_- + h_+y_x^2 + h_-y_{\bar{x}}^2 + 2y(y_x - y_{\bar{x}}))}{4y^2 - (h_+(1 + y_x^2) + 2yy_x)(h_-(1 + y_{\bar{x}}^2) - 2yy_{\bar{x}})}.$$

Ввиду громоздкости выражений выпишем инвариантную разностную модель через инварианты:

$$\left\{\begin{aligned} & I_3 = \frac{1}{2}(\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2}) f(I_1), \\ & I_2 = I_1 g(I_1). \end{aligned}\right.$$

Разностная аппроксимация уравнения (2.69) получается при $f = C$, $g = 1$.

13. Алгебра операторов

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_3 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + y^2\frac{\partial}{\partial y}. \tag{2.70}$$

Инвариантное ОДУ

$$y'' + \frac{2}{x-y}(y' + y'^2) = \frac{2C}{x-y} y'^{3/2} \tag{2.71}$$

имеет общее решение

$$y = \frac{1}{A\left(B + \frac{1}{2}C\right) - Ax} + \frac{2B - C}{2A}, \qquad A \neq 0,$$

а также частное решение

$$y = ax,$$

где константа a находится решением алгебраического уравнения

$$a - Ca\sqrt{a} + a^2 = 0.$$

Полный набор разностных инвариантов

$$I_1 = \frac{h_+^2 y_x}{(x - y_+)(x_+ - y)}, \; I_2 = \frac{h_-^2 y_{\bar{x}}}{(x - y_-)(x_- - y)}, \; I_3 = \frac{x_+ - y}{x - y} \frac{h_-}{h_- + h_+}$$

позволяет выписать инвариантное уравнение и сетку в следующем виде:

$$\begin{cases} \dfrac{I_1}{(1 - I_3)^2} - \dfrac{I_2}{(I_3)^2} = f(I_3) \left(\dfrac{I_1}{(1 - I_3)^2} + \dfrac{I_2}{(I_3)^2} \right)^{3/2}, \\ I_1 = I_2 g(I_3). \end{cases} \tag{2.72}$$

При $f = C$, $g = 1$ получается аппроксимация ОДУ (2.71).

14. Базисный набор операторов трехмерной алгебры

$$X_1 = (1 + x^2)\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_2 = xy\frac{\partial}{\partial x} + (1 + y^2)\frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_3 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} \tag{2.73}$$

позволяет вычислить дифференциальные инварианты и с их помощью записать инвариантное дифференциальное уравнение в виде

$$y'' = C\left(\frac{1 + y'^2 + (y - xy')^2}{1 + x^2 + y^2}\right)^{3/2}. \tag{2.74}$$

Уравнение (2.74) интегрируется:

$$\left(Bx - Ay + C\sqrt{1 + x^2 + y^2}\right)^2 = 1 + C^2 - A^2 - B^2.$$

Вычисления разностных инвариантов дают

$$I_1 = \frac{h_+^2(1+y_x^2+(y-xy_x)^2)}{(1+x^2+y^2)(1+x_+^2+y_+^2)}, \qquad I_2 = \frac{h_-^2(1+y_{\bar{x}}^2+(y-xy_{\bar{x}})^2)}{(1+x_-^2+y_-^2)(1+x^2+y^2)},$$

$$I_3 = \frac{h_+h_-(y_x-y_{\bar{x}})}{\sqrt{1+x_-^2+y_-^2}\sqrt{1+x^2+y^2}\sqrt{1+x_+^2+y_+^2}}.$$

С их помощью можно записать инвариантное разностное уравнение и сетку в следующем виде:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{h_+h_-(y_x-y_{\bar{x}})}{\sqrt{1+x_-^2+y_-^2}\sqrt{1+x^2+y^2}\sqrt{1+x_+^2+y_+^2}} = \\ &\qquad\qquad = f\left(\frac{h_-^2(1+y_{\bar{x}}^2+(y-xy_{\bar{x}})^2)}{(1+x_-^2+y_-^2)(1+x^2+y^2)}\right), \\ &\frac{h_+^2(1+y_x^2+(y-xy_x)^2)}{(1+x^2+y^2)(1+x_+^2+y_+^2)} = g\left(\frac{h_-^2(1+y_{\bar{x}}^2+(y-xy_{\bar{x}})^2)}{(1+x_-^2+y_-^2)(1+x^2+y^2)}\right). \end{aligned}\right. \tag{2.75}$$

В качестве разностной аппроксимации уравнения (2.74) можно рассмотреть уравнение

$$\frac{h_+h_-(y_x-y_{\bar{x}})}{\sqrt{1+x_-^2+y_-^2}\sqrt{1+x^2+y^2}\sqrt{1+x_+^2+y_+^2}} = \\ = C\left(\left(\frac{h_+^2(1+y_x^2+(y-xy_x)^2)}{(1+x^2+y^2)(1+x_+^2+y_+^2)}\right)^{3/2} + \right. \\ \left. + \left(\frac{h_-^2(1+y_{\bar{x}}^2+(y-xy_{\bar{x}})^2)}{(1+x_-^2+y_-^2)(1+x^2+y^2)}\right)^{3/2}\right)$$

на разностной сетке

$$\frac{h_+^2(1+y_x^2+(y-xy_x)^2)}{(1+x^2+y^2)(1+x_+^2+y_+^2)} = \frac{h_-^2(1+y_{\bar{x}}^2+(y-xy_{\bar{x}})^2)}{(1+x_-^2+y_-^2)(1+x^2+y^2)} = \varepsilon^2,$$

где $\varepsilon = \mathrm{const}$.

15. Алгебра операторов

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_2 = y\frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_3 = y^2\frac{\partial}{\partial y} \tag{2.76}$$

содержит три линейно-связанных элемента, независимая переменная x является единственным инвариантом в непрерывном пространстве (x, y, y', y''). Единственным инвариантным многообразием является уравнение первого порядка $y' = 0$.

В разностном случае ситуация аналогична: имеется лишь три инварианта x, x_-, x_+. Зависимые переменные y, y_-, y_+ не участвуют в образовании инвариантов, поэтому инвариантного разностного уравнения выписать не удается.

16. Аналогичная ситуация с последней трехмерной подалгеброй

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_2 = x\frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_3 = \phi(x)\frac{\partial}{\partial y}, \qquad \phi''(x) \neq 0. \tag{2.77}$$

В этом случае также нет ни инвариантного ОДУ второго порядка, ни разностного уравнения второго порядка, инвариантных относительно этой группы.

2.3. Разностные уравнения, инвариантные относительно четырехмерных групп. В дифференциальном случае максимальная группа точечных симметрий ОДУ второго порядка 8-мерна. Любое дифференциальное уравнение, допускающее группу размерности 4, 5 или 6, эквивалентно $y'' = 0$, которое допускает 8-мерную группу.

В разностном случае ситуация меняется.

1. Четырехмерная алгебра операторов

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_4 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} \tag{2.78}$$

в пространстве (x, y, y', y'') не имеет дифференциальных инвариантов, но уравнение $y'' = 0$ является инвариантным многообразием, которое, кроме того, допускает еще четыре оператора (см. ниже).

В пространстве разностных переменных есть два инварианта

$$I_1 = \frac{y_x - y_{\bar{x}}}{1 + y_x y_{\bar{x}}}, \qquad I_2 = \frac{h_+}{h_-}\left(\frac{1 + y_x^2}{1 + y_{\bar{x}}^2}\right)^{1/2}.$$

Следовательно, можно выписать инвариантную разностную модель в виде

$$\begin{cases} y_x - y_{\bar{x}} = C_1(1 + y_x y_{\bar{x}}), \\[2mm] h_+ = C_2 h_- \sqrt{\dfrac{1 + y_{\bar{x}}^2}{1 + y_x^2}}, \end{cases} \tag{2.79}$$

где C_1 и C_2 — произвольные константы. Однако континуальный предел система (2.79) имеет лишь при $C_1 = 0$. В этом случае система аппроксимирует уравнение $y'' = 0$.

2. Группа, определяемая инфинитезимальными операторами

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = x\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = y\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_4 = (1 + x^2)\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}, \tag{2.80}$$

также не имеет диффференциальных инвариантов в пространстве (x, y, y', y''), но имеет инвариантное многообразие $y'' = 0$.

В разностном случае имеются инварианты

$$I_1 = \frac{h_+}{1 + xx_+}, \qquad I_2 = \frac{h_-}{1 + xx_-}$$

и инвариантное разностное многообразие $y_{x\bar{x}} = 0$.

Таким образом, имеется инвариантная разностная модель

$$\begin{cases} y_{x\bar{x}} = 0, \\ h_+ = h_- \dfrac{1 + xx_+}{1 + xx_-} g\left(\dfrac{h_-}{1 + xx_-}\right). \end{cases} \tag{2.81}$$

При $g = 1$ эта система аппроксимирует ОДУ $y'' = 0$.

3. Четырехмерная алгебра

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_3 = x\frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + ay\frac{\partial}{\partial y} \tag{2.82}$$

имеет единственный дифференциальный инвариант y'', если постоянная $a = 2$. При $a \neq 2$ есть лишь инвариантное многообразие $y'' = 0$.

Выражения

$$I_1 = \frac{h_+}{h_-}, \qquad I_2 = y_{x\bar{x}} h_+^{2-a}$$

представляют собой полный набор разностных инвариантов, с помощью которых можно записать общую форму инвариантных моделей в виде

$$\begin{cases} y_{x\bar{x}} = C_1 h_+^{a-2}, \\ h_+ = C_2 h_-. \end{cases} \tag{2.83}$$

Для $a > 2$ континуальным пределом является $y'' = 0$. При $\alpha < 2$ континуальный предел существует лишь при $C_1 = 0$.

4. Группа Ли точечных преобразований, определяемая инфинитезимальными операторами

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = x\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + (2y + x^2)\frac{\partial}{\partial y} \tag{2.84}$$

в непрерывном случае не имеет ни дифференциальных инвариантов, ни инвариантного многообразия.

В разностном случае есть два инварианта

$$I_1 = \frac{h_+}{h_-}, \qquad I_2 = y_{x\bar{x}} - \ln(h_- h_+),$$

позволяющих записать инвариантную разностную модель в виде

$$\begin{cases} y_{x\bar{x}} = \ln(h_-h_+) + C_1, \\ h_+ = C_2 h_-. \end{cases} \tag{2.85}$$

Эта разностная модель не имеет континуального предела.

5. Алгебра операторов

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = x\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_4 = y\frac{\partial}{\partial y} \tag{2.86}$$

не имеет инвариантов в пространстве (x, y, y', y''), но имеет инвариантное многообразие $y'' = 0$.

В разностном случае шаги сетки h_+ и h_- образую базис инвариантов, а разностное уравнение $y_{x\bar{x}} = 0$ представляет собой инвариантное многообразие.

Инвариантную модель можно записать в виде

$$\begin{cases} y_{x\bar{x}} = 0, \\ h_+ = h_- g(h_-). \end{cases} \tag{2.87}$$

6. Алгебра операторов

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = x\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_4 = y\frac{\partial}{\partial y}. \tag{2.88}$$

В этом случае нет дифференциальных инвариантов, но ОДУ $y'' = 0$ инвариантно.

В разностном случае инварианты существуют

$$I_1 = \frac{h_+}{h_-}, \qquad I_2 = \frac{y_x}{y_{\bar{x}}}.$$

Конечно, разностная модель

$$\begin{cases} y_{x\bar{x}} = C_1 \dfrac{y_{\bar{x}}}{h_-}, \\ h_+ = C_2 h_- \end{cases} \tag{2.89}$$

имеет континуальный предел лишь при $C_1 = 0$.

7. В случае четырехмерной алгебры

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = x\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = x\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_4 = y\frac{\partial}{\partial y} \tag{2.90}$$

нет дифференциальных инвариантов, но ОДУ $y'' = 0$ — инвариантно.

Выражения $\dfrac{h_+}{x}$ и $\dfrac{h_-}{x}$ являются разностными инвариантами, а разностное уранение $y_{x\bar{x}} = 0$ — инвариантным многообразием.

Общий вид инвариантной схемы такой:

$$\begin{cases} y_{x\bar{x}} = 0, \\ h_+ = h_- g\left(\dfrac{h_-}{x}\right). \end{cases} \tag{2.91}$$

8. Четырехмерная алгебра операторов

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = x\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = y\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_4 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y} \tag{2.92}$$

не имеет дифференциальных инвариантов, но ОДУ $y'' = 0$ — инвариантно.

Выражения

$$I_1 = h_+ h_- \frac{y_{x\bar{x}}}{y}, \qquad I_2 = \frac{y_- h_+}{y_+ h_-}$$

образуют полный набор разностных инвариантов, откуда получаем общий вид инвариантной модели:

$$\begin{cases} y_{x\bar{x}} = \dfrac{C_1}{h_+ h_-} y, \\ h_+ y_- = C_2 h_- y_+. \end{cases} \tag{2.93}$$

У этой системы есть континуальный предел лишь при $C_1 = 0$.

2.4. Разностные уравнения, инвариантные относительно пятимерных групп.

1. Пятимерная алгебра операторов

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = x\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_4 = x\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_5 = y\frac{\partial}{\partial y} \tag{2.94}$$

не имеет дифференциальных инвариантов, но уравнение $y'' = 0$ ее допускает.

Эта группа имеет один разностный инвариант $\dfrac{h_+}{h_-}$, и инвариантное многообразие

$$(x - x_-)(y_+ - y) - (x_+ - x)(y - y_-) = 0.$$

Общий вид инвариантной разностной системы такой:

$$\begin{cases} y_{x\bar{x}} = 0, \\ h_+ = C h_-, \end{cases} \tag{2.95}$$

где C — произвольная постоянная.

2. Алгебра операторов

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_3 = y\frac{\partial}{\partial x},\ X_4 = x\frac{\partial}{\partial y},\ X_5 = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y} \tag{2.96}$$

также не имеет дифференциальных инвариантов, а уравнение $y'' = 0$ ее допускает.

Эта группа не имеет разностных инвариантов, но имеет инвариантное многообразие (2.95).

2.5. Шестимерная группа и инвариантная разностная модель. Шестимерная алгебра операторов

$$\begin{gathered} X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_3 = x\frac{\partial}{\partial x}, \\ X_4 = y\frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_5 = x\frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_6 = y\frac{\partial}{\partial y} \end{gathered} \tag{2.97}$$

обладает единственным инвариантным многообразием $y'' = 0$, а в разностном случае инвариантным многообразием будет система

$$\begin{cases} y_{x\bar{x}} = 0, \\ h_+ = Ch_-. \end{cases} \tag{2.98}$$

Среди трехточечных разностных уравнений и сеток нет инвариантных относительно семимерных алгебр Ли.

2.6. Восьмимерная группа Ли преобразований. Линейное уравнение (уравнение свободного движения частицы)

$$y'' = 0, \tag{2.99}$$

а также все ОДУ, эквивалентные ему с точностью до точечной замены переменных, допускает следующую алгебру:

$$\begin{gathered} X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = x\frac{\partial}{\partial x}, \\ X_4 = y\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_5 = x\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_6 = y\frac{\partial}{\partial y}, \\ X_7 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_8 = xy\frac{\partial}{\partial x} + y^2\frac{\partial}{\partial y}. \end{gathered} \tag{2.100}$$

Трехточечная дискретизация уравнения (2.99) должна иметь вид

$$y_{x\bar{x}} = 0, \qquad \Omega(x, x_-, x_+, y_{\bar{x}} + y_x) = 0, \tag{2.101}$$

где уравнение $\Omega = 0$ определяет разностную сетку.

В разностном случае 8-мерная алгебра (2.100) не имеет инвариантов, единственным инвариантным многообразием является разностное уравнение

$$y_{x\bar{x}} = 0.$$

Однако, одного уравнения не достаточно, чтобы определить разностную модель, — нужно еще уравнение для сетки. Подключение же любого уравнения для сетки сразу же уменьшает симметрию модели.

Таким образом, максимальная симметрия разностной модели второго порядка равна 6, в зависимости от типа разностной сетки симметрия может варьироваться от 1 до 6.

Замечания. Итак, сравним результаты групповой классификации обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка и классификации трехточечных разностных уравнений и сеток.

1. Для каждого ОДУ, инвариантного относительно группы Ли G размерности $1 \leqslant n \leqslant 3$, существует семейство разностных моделей, инвариантных относительно той же группы G. В частности, для случая $n = 3$ инвариантные ОДУ второго порядка определены с точностью до константы, для тех же случаев произвол в инвариантных схемах состоит, вообще говоря, в двух произвольных функциях.

2. Все ОДУ, инвариантных относительно группы размерности $n = 4$, 5 или 6 могут быть преобразованы в линейное уравнение $y'' = 0$. Для размерности 4, 5 и 6 инвариантные схемы либо имеют в качестве континуального предела уравнение $y'' = 0$, либо такого предела не существует.

3. Разностное уравнение $y_{x\bar{x}} = 0$ имеет существенное отличие в групповых свойствах от своего континуального предела. Оно инвариантно, самое большее, относительно шестимерной группы точечных преобразований, сетка при этом имеет вид уравнения $h_+ = Ch_-$, где $C > 0$. Уравнение $y_{x\bar{x}} = 0$ инвариантно относительно групп размерности $1 \leqslant n \leqslant 4$ для сеток более общего вида.

§ 3. Сохранение группы при разностном моделировании. Метод конечно-разностных инвариантов

В этом параграфе мы ответим на вопрос: как *строить* разностные модели по данной дифференциальной модели, если для последней группа известна?

Прежде всего ясно, что построить некоторое произвольное инвариантное разностное уравнение по данной группе G_r несложно. В самом деле, если точечная группа G_r действует в пространстве n независимых и m зависимых переменных, то продолжив ее на первые разностные производные (т. е. в пространство, где $(m+n+mn)$ число переменных плюс n независимых шагов сетки), мы, согласно классической теории Ли, будем иметь для группы с набором операторов ранга R: $\lambda = (m+2n+mn-R)$ независимых инвариантов. Те из них, которые не являются инвариантами в исходном $(m+2n)$-мерном пространстве, естественно назвать *конечно-разностными инвариантами первого порядка.* Продолжение этого процесса позволяет строить конечно-разностные инварианты любого порядка, число которых растет вместе с порядком продолжения (так же, как и в непрерывном случае — ср. [35]).

Любое уравнение, связывающее (достаточно гладким способом) эти λ независимых инвариантов

$$\Phi(I^1(z), I^2(z), \ldots, I^\lambda(z)) = 0, \quad \Phi \in A, \tag{3.1}$$

представляет собой конечно-разностное уравнение первого порядка, допускающее данную группу. При продолжении группы на вторые и т. д. разностные производные число разностных инвариантов возрастает, и совешенно аналогично можно выписать инвариантные разностные уравнения второго, третьего и т. д. порядков. Однако эти уравнения ничего общего, кроме допускаемой группы, с исходной дифференциальной моделью не имеют. Среди уравнений вида (3.1) нам нужно отобрать такие, которые бы *аппроксимировали* исходное уравнение с требуемым порядком $O(h^k)$.

Вернемся к примеру § 1. Группа G_2 с операторами

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} - 2\frac{\partial}{\partial u} - \underset{h}{u}_x \frac{\partial}{\partial \underset{h}{u}_x} - 2\underset{h}{u}_{x\bar{x}} \frac{\partial}{\partial \underset{h}{u}_{x\bar{x}}} + h\frac{\partial}{\partial h} \tag{3.2}$$

в пространстве $(x, u, \underset{h}{u}_x, \underset{h}{u}_{x\bar{x}}, h)$ имеет три независимых инварианта. Например, можно выбрать следующие:

$$J_1 = h^2 e^u, \qquad J_2 = \underset{h}{u}_x e^{-u/2}, \qquad J_3 = \underset{h}{u}_{x\bar{x}} e^{-u}.$$

Тогда уравнение

$$\underset{h}{u}_{x\bar{x}} = e^u$$

можно записать в инвариантной форме (3.1):

$$J_3 = 1,$$

поэтому оно допускает G_2 (3.2).

Уравнение

$$\underset{h}{u}_{x\bar{x}} = e^u + h^2 e^{2u}$$

также представимо в инвариантной форме

$$J_3 = 1 + J_1,$$

а уравнение

$$\underset{h}{u}_{x\bar{x}} = e^u + h^2 e^u$$

нельзя записать в инвариантной форме.

Рассмотрим теперь ситуацию в общем случае. Пусть задана система дифференциальных уравнений

$$\mathcal{F}_\alpha(z) = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, m, \quad \mathcal{F}_\alpha \in A, \tag{3.3}$$

которая допускает известную группу преобразований G_r.

Нам нужно построить систему разностных уравнений

$$F_\alpha(z) = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, m, \quad F_\alpha \in \underset{h}{A}, \tag{3.4}$$

заданную на разностной сетке:

$$\Omega_\beta(h^+{}_i, z) = 0, \quad \beta = 1, \ldots, n, \quad \Omega_\beta \in \underset{h}{A}, \tag{3.5}$$

допускающую ту же группу G_r в $\underset{h}{Z}$ (т. е. изоморфную ей).

Заметим, что система (3.4), (3.5) записана в пространстве, имеющем на n больше измерений, т. е. размерности поверхностей (3.3) и (3.4), (3.5) совпадают.

Поскольку система уравнений (3.3) допускает группу G_r, (которая предполагается не транзитивной), то построив полный набор τ функционально независимых инвариантов порядка k:

$$(J^1(z), J^2(z), \ldots, J^\tau(z)), \quad J^\alpha \in A,$$

систему (3.3) можно записать в инвариантном представлении

$$\Phi_\alpha(J^1(z), J^2(z), \ldots, J^\tau(z)) = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, m. \tag{3.5}$$

Группа G_r, представленная в $\underset{h}{Z}$, имеет $(\tau + n)$ функционально независимых конечно-разностных инварианта:

$$I^1(z), I^2(z), \ldots, I^{\tau+n}(z); \qquad I^\alpha(z) \in \underset{h}{A}\,.$$

Следующим шагом является формирование набора (τ) инвариантов, обладающих необходимым свойством аппроксимации, т. е. для каждого инварианта I^α, представленного в $\widetilde{Z}$ с помощью группы Тейлора, справедливо:

$$I^\alpha(z) = J^\alpha(z) + (h_i^k), \quad \alpha = 1, \ldots, \tau; \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.6}$$

На практике таких инвариантов нужно, как правило, меньше τ штук, лишь те, что действительно присутствуют в инвариантной записи (3.5).

Заключительным шагом является запись разностных уравнений

$$\begin{gathered} \Phi_\alpha(I^1(z), I^2(z), \ldots, I^\tau(z)) = 0, \\ \omega_\beta(I^1(z), I^2(z), \ldots, I^{\tau+n}(z)) = 0, \end{gathered} \tag{3.7}$$

где $\omega_\beta = 0$ — инвариантное представление конечно-разностной сетки (3.5).

Поскольку функции $\Phi_\alpha(I^1, I^2, \ldots, I^\tau) = 0$ предполагаются локально-аналитическими по своим аргументам, то из (3.6) следует, что разностные уравнения $\Phi_\alpha = 0$ моделируют соответствующие дифференциальные с k-м порядком аппроксимации.

Построенная таким образом система разностных уравнений (3.7) допускает, очевидно, группу G_r в полном объеме.

Изложенный метод построения инвариантных разностных уравнений был назван *методом конечно - разностных инвариантов* [22].

Этот способ не является, разумеется, единственным. Дальнейшее расширение возможностей лежит на пути увеличения точек разностного шаблона, т. е. увеличения числа переменных в сеточном пространстве и соответствующем увеличении возможностей для получения соотношений (3.6). Кроме того, можно аппроксимировать конечно-разностными инвариантами непосредственно исходное дифференциальное уравнение, а не его инвариантное представление. Однако во всех случаях основой является полный набор конечно-разностных инвариантов.

Рассмотрим пример построения инвариантного разностного уравнения по заданной группе и дифференциальному уравнению.

Обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2u}{dx^2} = u^2 \tag{3.8}$$

допускает двухпараметрическую группу G_2, определяемую операторами:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} - 2u\frac{\partial}{\partial u} - 3u_x\frac{\partial}{\partial u_x} - 4u_{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}}. \tag{3.9}$$

В пространстве (x, u, u_x, u_{xx}) группа G_2 имеет полный набор из *двух* инвариантов:

$$J_1 = \frac{u_x^2}{u^3}, \qquad J_2 = \frac{u_{xx}}{u^2}. \tag{3.10}$$

Уравнение (3.8) в инвариантной форме запишется так:

$$J_2 = 1. \tag{3.11}$$

При переходе к построению инвариантной разностной схемы заметим, что оба оператора (3.9) сохраняют равномерность разностной сетки, поэтому вопрос о конструировании инвариантной сетки отпадает ($h^+ = h^-$ — инвариантное многообразие).

Представим операторы (3.9) в $\underset{h}{Z}$:

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial x}, \\ X_2 &= x\frac{\partial}{\partial x} - 2u\frac{\partial}{\partial u} - 3\underset{h}{u}_x\frac{\partial}{\partial \underset{h}{u}_x} - 4\underset{h}{u}_{x\bar{x}}\frac{\partial}{\partial \underset{h}{u}_{x\bar{x}}} + \ldots + h\frac{\partial}{\partial h}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

В пространстве $(x, u, \underset{h}{u}_x, \underset{h}{u}_{x\bar{x}}, h)$ полный набор группы G_2 состоит из *трех* инвариантов, например, таких:

$$I_1 = \underset{h}{u}_x^2/u^3, \qquad I_2 = \underset{h}{u}_{x\bar{x}}/u^2, \qquad I_3 = h^2 u. \tag{3.13}$$

Выразив разностные переменные, входящие в (3.13), с помощью группы Тейлора в переменных $\widetilde{Z}$, получим (имея в виду, что I_3 в данном случае "лишний" инвариант) представление для разностных инвариантов в $\widetilde{Z}$:

$$I_1 = J_1 + h\frac{u_x u_{xx}}{u^3} + O(h^2), \quad I_2 = J_2 + O(h^2). \tag{3.14}$$

Поскольку в записи (3.11) учавствует лишь J_2, то инвариантное разностное уравнение *второго* порядка аппроксимации мы получим из уравнения

$$I_2 = 1. \tag{3.15}$$

Уравнение (3.15) эквивалентно следующему разностному уравнению:

$$\underset{h}{u}_{x\bar{x}} = u^2. \tag{3.16}$$

Легко проверить, что (3.16) допускает операторы (3.12) на инвариантно-равномерной сетке (см. также [63]).

При выборе набора разностных инвариантов (3.13) мы получили один из них, имеющий первый порядок аппроксимации. Это обстоятельство легко исправить, перейдя к другому набору независимых инвариантов, первый из которых запишется так:

$$\widetilde{I}_1 = \frac{{u_{\underset{h}{x}}}^2}{u^3} - h\,\frac{u_{\underset{h}{x}}\,u_{\underset{h}{x\bar{x}}}}{u^3} = I_1 - I_2\sqrt{I_1 I_3},$$

а два остальных совпадают с I_2 и I_3. Можно показать, что для $\widetilde{I}_1$ справедливо: $\widetilde{I}_1 = J_1 + O(h^2)$, т. е. теперь и первый разностный инвариант удовлетворяет требованию второго порядка аппроксимации.

§ 4. Конечно-разностные модели, сохраняющие симметрию исходных непрерывных моделей

4.1. Инвариантная разностная модель уравнения $\boldsymbol{u_{xx} = u^{-3}}$. Рассмотрим более сложную ситуацию, когда условие инвариантности сетки и разностного уравнения связаны друг с другом и не выполняются по отдельности.

Обыкновенное дифференциальное уравнение

$$u_{xx} = u^{-3} \tag{4.1}$$

допускает трехпараметрическую точечную группу, которой соответствует алгебра Ли операторов:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = 2x\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_3 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + xu\frac{\partial}{\partial u}. \tag{4.2}$$

Уравнение (4.1) является частным случаем уравнения Ермакова–Пиннэ (см. также [61, 62, 82, 97, 99, 102]). Его можно рассматривать как уравнение движения частицы в поле с потенциалом $U = \dfrac{1}{u^2}$ (u — координата, x — время). Уравнение (4.1), (а также его трехмерный аналог) в определенном смысле уникально: только для квадратичного потенциала имеется дополнительная проекционная симметрия, а также вариационная симметрия, соответствующая *всем* симметриям (4.2). Это приводит к дополнительным законам сохранения для движения частиц в таком поле. Дополнительной симметрией и соответствующими законами сохранения при квадратичном потенциале обладает также уравнение Больцмана и уравнения гидродинамики политропного газа при соответствующем значении адиабатической постоянной (см. [10]). Таким образом, ОДУ (4.1) — простейшая модель с дополнительной симметрией в указанной иерархии.

Для аппроксимации уравнения (4.1) нам потребуется разностный шаблон, содержащий не менее трех точек, которому соответствует подпространство $(x, h^+, h^-, u, u^+, u^-)$.

Оператор X_3 нарушает условие (4.6) главы I, поэтому равномерная сетка не будет инвариантной. Хотя группа G_3, соответствующая алгебре (4.2), является x-автономной, она не имеет инвариантов в подпространстве (x, h^+, y^-). Это означает, что невозможно построить инвариантную сетку, не зависящую от решения u (см. [63, 64, 72]). На выбранном шаблоне у нас есть три разностных инварианта, в качестве которых можно взять следующие:

$$J_1 = \frac{h^+}{uu^+}, \quad J_2 = \frac{h^-}{uu^-}, \quad J_3 = u^2 u^- \frac{\underset{h}{u}_x - \underset{h}{u}_{\bar{x}}}{h^-}, \tag{4.3}$$

$$\text{где} \quad \underset{h}{u}_x = \frac{u^+ - u}{h^+}, \quad \underset{h}{u}_{\bar{x}} = \frac{u - u^-}{h^-}.$$

Общую систему уравнений, задающих семейство разностных сеток, инвариантных относительно (4.2), можно записать в виде:

$$F_\alpha\left(\frac{h^+}{uu^+}, \quad \frac{h^-}{uu^-}, \quad u^2 u^- \frac{\underset{h}{u}_x - \underset{h}{u}_{\bar{x}}}{h^-}\right) = 0, \tag{4.4}$$

где F_α — произвольная функция своих аргументов.

Мы выбираем простейший вариант системы (4.4):

$$\frac{h^+}{uu^+} = \epsilon, \qquad \frac{h^-}{uu^-} = \epsilon, \qquad \epsilon = \text{const}, \quad 0 < \epsilon \ll 1. \tag{4.5}$$

В качестве разностного уравнения, аппроксимирующего уравнение (4.1), возьмем

$$J_3 = 1, \qquad \text{или} \quad \underset{h}{u}_{x\bar{x}} = \frac{1}{u^2 u^-}, \tag{4.6}$$

где $\underset{h}{u}_{x\bar{x}} \equiv \dfrac{\underset{h}{u}_x - \underset{h}{u}_{\bar{x}}}{h^-}$.

Поскольку наша модель (4.5), (4.6) сконструирована из разностных инвариантов группы (4.2), то она полностью инвариантна.

Разностная сетка (4.5) зависит от решения u, u^+, u^-, которое должно быть найдено из уравнения (4.6), также содержащего шаги сетки.

На первый взгляд схема (4.5), (4.6) неявна, и, вообще говоря, неясно, как проводить по ней реальные расчеты для конкретной краевой задачи.

Проведем некоторые преобразования (4.5), (4.6). Подставив шаги сетки (4.5) в уравнение (4.1), получим

$$u^+u^-(2-\epsilon^2) = u(u^+ + u^-). \tag{4.7}$$

Уравнение (4.7) представляет собой одномерное отображение, однозначно задающее неизвестное значение u^+ по двум известным значениям u и u^-. Таким образом, схема (4.5), (4.6) на самом деле является ***явной схемой*** решения краевой задачи: вначале рассчитывается последовательность значений u по отображению (4.7), затем по формулам (4.5) рассчитываются шаги сетки h^+, h^-, т. е. значения x в соответствующих узлах сетки.

Однако выясняется, что для схемы (4.5), (4.6) вообще можно не проводить численных расчетов. Оказывается, что схема (4.5), (4.6) полностью интегрируема, что связано с наличием у нее трех первых интегралов (способ их построения подробно рассмотрен в гл. III):

$$\begin{aligned}
&1)\ \underset{h}{u}_x{}^2 + \frac{1}{uu^+} = \text{const},\\
&2)\ \frac{2x+h^+}{2}\underset{h}{u}_x{}^2 + \frac{2x+h^+}{2uu^+} - \frac{u+u^+}{2}\underset{h}{u}_x = \text{const},\\
&3)\ \frac{x(x+h^+)}{uu^+} + \left(\frac{u+u^+}{2} - \frac{2x+h^+}{2}\underset{h}{u}_x\right)^2 = \text{const}.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

В соответствии с интегралами (4.8) общее решение схемы (4.5), (4.6) можно записать в виде:

$$Au^2 = (Ax+B)^2 + 1 - \frac{\epsilon^2}{4}, \tag{4.9}$$

где $A = \text{const}, \quad B = \text{const}$.

Точное решение (4.9) схемы (4.5), (4.6) отличается от общего решения исходного уравнения (4.3)

$$Au^2 = (Ax+B)^2 + 1, \tag{4.1.10}$$

на $\frac{\epsilon^2}{4}$, причем оценка ошибки носит равномерный характер.

Таким образом, схема (4.5), (4.6) унаследовала вместе с симметрией (4.2) исходного уравнения (4.1) и полную интегрируемость.

Заметим, что сетка (4.5) может быть "выпрямлена", т. е. существует замена переменных *), переводящая сетку (4.5) в равномерную.

Эта замена переменных является нелокальной:

$$\hbar = \frac{h^+}{uu^+} = \frac{h^-}{uu^-}, \quad v(t) = u(x), \tag{4.11}$$

где $\hbar$ — равномерный шаг сетки по новой независимой переменной t. Преобразование (4.11) переводит уравнение (4.6) в разностное уравнение

$$\left(\frac{v_t}{vv^+}\right)_{\bar{t}} = \frac{1}{v} \tag{4.12}$$

на равномерной сетке по t.

В непрерывном пространстве преобразованию (4.11) соответствует неточечная замена

$$dx = u^2 dt, \quad v(t) = u(x),$$

которая переводит уравнение (4.1) в

$$\left(\frac{v_t}{v^2}\right)_t = \frac{1}{v}.$$

4.2. Инвариантная разностная модель уравнения sin–Гордона. Известно (см., например, [53]), что уравнение

$$u_{xy} = \sin u \tag{4.13}$$

допускает трехпараметрическую группу точечных преобразований, определяемую операторами †):

$$\begin{gathered} X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \\ X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}. \end{gathered} \tag{4.14}$$

Уравнение (4.13) может быть записано в другой форме

$$v_{tt} - v_{zz} = \sin v. \tag{4.15}$$

Симметрия уравнения (4.15) описывается следующими операторами:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_3 = z\frac{\partial}{\partial t} + t\frac{\partial}{\partial x}. \tag{4.16}$$

---

*) Эта замена переменных была найдена М.И. Бакировой.

†) Уравнение (4.13) допускает также бесконечную серию высших и нелокальных симметрий (см. [53]), которые мы здесь не рассматриваем.

Уравнения (4.13) и (4.15) связаны друг с другом точечными преобразованиями

$$
\begin{aligned}
t &= x + y, \\
z &= x - y, \\
u(x, y) &= v(t, z),
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

которые, разумеется, переводят симметрию (4.14) в (4.16).

Построим конечно-разностную модель уравнения (4.15), сохраняющую симметрию (4.16). Первое, что мы должны решить — это вопрос о выборе сетки, на которой возможна аппроксимация этого уравнения и которая была бы инвариантна относительно операторов (4.14). Заметим, что в данном случае преобразования (4.14) не затрагивают зависимую переменную (u-инвариант), поэтому условия инвариантности сетки могут быть рассмотрены независимо от условий инвариантности разностного уравнения, аппроксимирующего (4.13).

В данном случае, как легко убедиться, можно использовать простейшую ортогональную сетку, равномерную по обоим направлениям. В самом деле, все три оператора (4.14) удовлетворяют условиям (4.9) гл. I инвариантной ортогональности сетки

$$\underset{\pm h}{D}{}_i(\xi^j) = -\underset{\pm h}{D}{}_j(\xi^i), \quad i = 1, 2, \quad i \neq j,$$

а также условиям (4.6) инвариантной равномерности сетки

$$\underset{+h}{D}{}_i\, \underset{-h}{D}{}_i(\xi^i) = 0, \qquad i = 1, 2.$$

Эти условия выполнены во всем пространстве $\underset{h}{Z}$, в частности, на решениях разностного уравнения, аппроксимирующего уравнение (4.13).

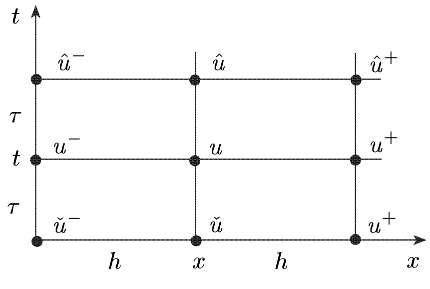

Рис. 4.1

На ортогональной разностной сетке нам нужно аппроксимировать производную u_{xy}.

Введем обозначения для переменной u в разных точках сетки согласно рис. 4.1.

Все переменные $u, u^+, u^-, \hat{u}, \hat{u}^+, \ldots, \check{u}^-$, являются инвариантами операторов (4.14), поэтому для аппроксимации в точке (x, y, u) правой части (4.13) возможно использовать любую функцию от них; например, $\sin u$.

В пространстве $(x, y, h_x, h_y, u, u^+, \ldots, \check{u}^-)$ есть еще один инвариант:

$$J = h_x h_y.$$

Таким образом, в данном случае задача инвариантной аппроксимации очень проста, — нам осталось лишь аппроксимировать со вторым порядком смешанную производную u_{xy}.

Это можно, например, сделать следующим образом:

$$u_{xy} \approx \left(\frac{\hat{u}^+ - \hat{u}^-}{2h_x} - \frac{\check{u}^+ - \check{u}^-}{2h_x} \right) \frac{1}{2h_y},$$

откуда, окончательно, получим уравнение

$$\frac{\hat{u}^- - \hat{u}^- - \check{u}^+ + \check{u}^-}{4h_x h_y} = \sin u. \tag{4.18}$$

В уравнении (4.18) можно, в частности, положить $h_x = h_y$. При этом направления x и y станут равноправными, как и в исходном уравнении. Уравнение (4.18) использует пятиточечный шаблон. Центральную точку можно исключить, если использовать другую аппроксимацию правой части:

$$\frac{\hat{u}^+ - \hat{u}^- - \check{u}^+ + \check{u}^-}{4h_x h_y} = \sin \left(\frac{\hat{u}^+ - \hat{u}^- - \check{u}^+ + \check{u}^-}{4} \right).$$

Подсчитаем порядок аппроксимации разностного уравнения (4.18) на равномерной ортогональной сетке:

$$\frac{\hat{u}^+ - \hat{u}^- - \check{u}^+ + \check{u}^-}{4h_x h_y} - \sin u = u_{xy} - \sin u + O(h_x^2 + h_y^2). \tag{4.19}$$

Итак, на ортогональной сетке разностное уравнение (4.18) аппроксимирует дифференциальное уравнение (4.13) со вторым порядком и допускает всю симметрию (4.16) исходного уравнения.

Для получения инвариантной схемы и сетки для уравнения (4.15) проще всего воспользоваться преобразованием (4.17). Это преобразование переводит уравнение (4.18) в следующее:

$$\frac{\hat{v}^{+} - \hat{v}^{-} - v^{+} + v^{-}}{4h_z h_t} = \sin v, \tag{4.20}$$

где h_z и h_t — шаги сетки, изображенной на рис. 4.2.

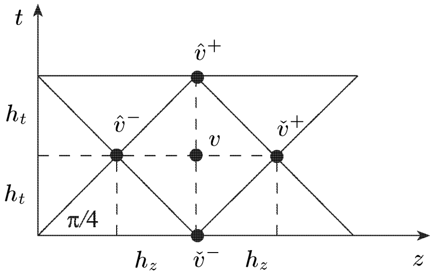

Рис. 4.2

Под действием преобразований (4.17) ортогональная сетка рис. 4.1 переходит в диагональную ортогональную сетку рис. 4.2. Разумеется, эту инвариантно-ортогональную сетку мы могли бы получить непосредственно, используя результат главы I: преобразования Лоренца (4.16) оставляют сетку ортогональной, только если сетка расположена под углом 45^0 к осям координат.

Уравнение (4.20) на сетке рис. 4.2 допускает полную группу (4.16), поскольку точечное преобразование (4.17) сохраняет группу исходного уравнения, переводя операторы (4.14) в операторы (4.16).

4.3. Инвариантная разностная модель уравнения $u_t = (u^{\sigma} u_x)_x + u^{\beta}$. Рассмотрим пример построения инвариантной разностной схемы для уравнения нелинейной теплопроводности (см. также [7, 54, 70]).

В § 1 мы убедились, что дивергентная разностная схема (1.24) допускает ту же группу преобразований, что и исходная дифференциальная модель. Теперь мы построим инвариантное разностное уравнение для уравнения нелинейной теплопроводности с источником:

$$u_t = (u^{\sigma} u_x)_x + u^{\beta}, \tag{4.21}$$

где σ, β — положительные постоянные.

На частном примере уравнения (4.3.1) мы покажем, что возможно построить несколько схем данного порядка аппроксимации, полностью наследующих симметрию исходной модели. При этом показывается, что одно уравнение может быть записано в дивергентной форме, а другое — нет. Таким образом, одной инвариантности разностного уравнения недостаточно для его “дивергентности”. Эти вопросы в общем виде будут рассмотрены в гл. III.

Групповые свойства и инвариантные решения уравнения теплопроводности изучены в работах [11, 17]. Группа, допускаемая уравнением (4.21), определяется алгеброй инфинитезимальных операторов

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial x},$$

$$X_3 = 2(\beta - 1)\, t\, \frac{\partial}{\partial t} + (\beta - \sigma - 1)x\, \frac{\partial}{\partial x} - 2u\, \frac{\partial}{\partial u}. \tag{4.22}$$

Рассмотрим частный случай уравнения (4.21):

$$u_t = (u^2 u_x)_x + u^3, \tag{4.23}$$

которому соответствует алгебра операторов:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_3 = 2t\, \frac{\partial}{\partial t} - u\, \frac{\partial}{\partial u}. \tag{4.24}$$

Заметим, что операторы (4.24) сохраняют равномерность и ортогональность сетки $\underset{h}{\omega} \times \underset{\tau}{\omega}$. Продолжим X_3 на разностные производные:

$$X_3 = 2t\frac{\partial}{\partial t} - u\, \frac{\partial}{\partial u} - 3\, \underset{\tau}{u}_t\, \frac{\partial}{\partial \underset{\tau}{u}_t} - \underset{h}{u}_x \frac{\partial}{\partial \underset{h}{u}_x} - \\ - \underset{h}{u}_{\bar{x}}\, \frac{\partial}{\partial \underset{h}{u}_{\bar{x}}} - \underset{h}{u}_{x\bar{x}} \frac{\partial}{\partial \underset{h}{u}_{x\bar{x}}} + 2\tau\, \frac{\partial}{\partial \tau}, \tag{4.25}$$

где $\hat{u} = \underset{+\tau}{S}(u)$.

Здесь мы воспользовались формулами, полученными в гл. I.

Найдем базис инвариантов группы (4.21) в пространстве $(t, x, u, u_x, u_t, u_{xx})$:

$$J_1 = \frac{u_t}{u^3}, \quad J_2 = \frac{u_x}{u}, \quad J_3 = \frac{u_{xx}}{u}. \tag{4.26}$$

Базис дифференциальных инвариантов (4.26) позволяет записать уравнение (4.22) в инвариантном представлении:

$$J_1 = 2J_2^2 + J_3 + 1. \tag{4.27}$$

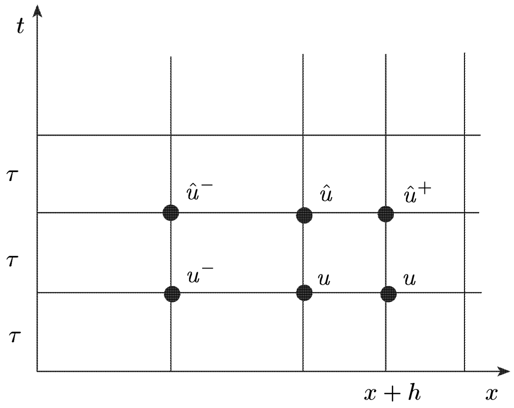

Рис. 4.3

Для того, чтобы построить инвариантную схему, нам необходимо построить базис конечно-разностных инвариантов в пространстве $(t, x, u, \hat{u}, \underset{\tau}{u}_{t}, \underset{h}{u}_{x}, \underset{h}{u}_{\bar{x}}, \underset{h}{u}_{x\bar{x}}, \underset{h}{\hat{u}}_{x}, \underset{h}{\hat{u}}_{x})$, соответствующем шаблону рис. 4.3. Нам потребуется не весь набор разностных инвариантов, а лишь некоторые из них

$$I_1 = \frac{u_t}{\hat{u}^3}, \quad I_2 = \frac{\hat{u}_x}{\hat{u}}, \quad I_3 = \frac{\underset{h}{\hat{u}}_{\bar{x}}}{\hat{u}}, \quad I_4 = \frac{\underset{h}{\hat{u}}_{x\bar{x}}}{\hat{u}}, \; \ldots \tag{4.28}$$

Вопрос с построением инвариантной сетки отпадает, поскольку ортогональная равномерная сетка $\underset{h}{\omega}$ x $\underset{+\tau}{\omega}$:

$$h^+ = h^- = h, \quad \tau^+ = \tau^- = \tau \tag{4.29}$$

инвариантна относительно всех операторов X_1, X_2, X_3.

Теперь нам предстоит аппроксимировать уравнение (4.23) с порядком не хуже $O(\tau + h^2)$. Выберем на сетке $\underset{h}{\omega}$ x $\underset{+\tau}{\omega}$ шаблон минимального размера, аппроксимация на котором приведет к неявной разностной схеме для (4.27). Теперь выберем аппроксимацию для дифференциальных инвариантов (4.26) с помощью разностных инвариантов (4.28). Оценку порядка аппроксимации будем делать в точке $z = ((t+\tau)), x, \hat{u}, \underset{\tau}{u}_{t}, \underset{h}{u}_{x}, \underset{h}{u}_{\bar{x}}, \underset{h}{u}_{x\bar{x}}, \underset{h}{\hat{u}}_{x}, \underset{h}{\hat{u}}_{x}, \ldots)$:

$$J_1 = \frac{u_t}{u^3} = \frac{\underset{\tau}{u}_{t}}{\hat{u}^3} + O(\tau) = I_1 + O(\tau),$$

$$J_2 = \frac{u_x}{u} = \frac{{\underset{h}{\hat{u}}_{x}\,\underset{h}{\hat{u}}_{\bar{x}}}^{1/2}}{\hat{u}} + O(h^2) = \sqrt{I_1 I_2} + O(h^2), \tag{4.30}$$

$$J_3 = \frac{\hat{u}_{x\bar{x}}}{u} = \frac{\underset{h}{u}_{x}}{\hat{u}} + O(h^2) = I_4 + O(h^2).$$

Подставляя теперь в уравнение (4.27) для дифференциальных инвариантов соответствующее выражение (4.30), мы получим инвариантное разностное уравнение порядка $O(\tau + h^2)$

$$\frac{\underset{\tau}{u}_{t}}{\hat{u}^3} = \frac{2\,\underset{h}{u}_{x}\,\underset{h}{u}_{\bar{x}}}{\hat{u}^2}\,\frac{\hat{u}_{x\bar{x}}}{u} + 1, \tag{4.31}$$

которое эквивалентно следующему:

$$\underset{\tau}{u}_{t} = 2\hat{u}\underset{h}{u}_{x}\,\underset{h}{u}_{\bar{x}} + \hat{u}^2\,\underset{h}{\hat{u}}_{x\bar{x}} + \hat{u}^3. \tag{4.32}$$

Заметим, что уравнение (4.32) “неконсервативно”, т. е. переносные члены не представляются в дивергентной форме:

$$\underset{\tau}{u}_{t} = (\hat{u}^2\,\underset{h}{u}_{\bar{x}})_x + \hat{u}^3,$$

что связано со спецификой разностного правила Лейбница.

Для получения дивергентной формы разностной схемы нам надо использовать не инвариантное представление (4.26), а *дивергентную форму инвариантного представления уравнения* (4.24).

В пространстве $(t, x, u, u_x, u_t, u_{xx})$ выберем теперь другой базисный набор дифференциальных инвариантов:

$$J_1 = \frac{u_t}{u}, \quad J_2 = \frac{u_x}{u}, \quad \widetilde{J}_3 = \frac{(u^2 u_x)_x}{u^3} = J_3 + 2J_2^2. \tag{4.33}$$

Тогда уравнение (4.23) можно представить в следующей инвариантной форме:

$$J_1 = \widetilde{J}_3 + 1. \tag{4.34}$$

Аппроксимируем теперь дифференциальные инварианты (4.33) с помощью разностных инвариантов:

$$J_1 = \frac{\underset{\tau}{u}_{t}}{\hat{u}^3} + O(\tau),$$

$$J_2 = \frac{\sqrt{\underset{h}{\hat{u}}_{x}\,\underset{h}{\hat{u}}_{\bar{x}}}}{\hat{u}} + O(h^2), \tag{4.35}$$

$$\widetilde{J}_3 = \frac{1}{\hat{u}^3}\underset{+h}{D}\left(\frac{\hat{u}^2 + \underset{-h}{S}(\hat{u}^2)}{2}\underset{h}{\hat{u}}_{\bar{x}}\right) + O(h^2) =$$

$$= \frac{\hat{u}^2 + \underset{-h}{S}(\hat{u}^2)}{2\hat{u}^3}\underset{h}{\hat{u}}_{x\bar{x}} + \frac{\underset{+h}{S}(\hat{u}^2) - \underset{-h}{S}(\hat{u}^2)}{2h\hat{u}^3}\underset{h}{\hat{u}}_{x} + O(h^2). \quad (4.36)$$

Легко проверить, что новое представление для $\widetilde{J}_3$ в $\underset{h}{Z}$ является инвариантом.

Подставив теперь вместо J_1 и $\widetilde{J}_3$ их дискретные аналоги из (4.36) в уравнение (4.34), получим:

$$\underset{\tau}{u}_t = \frac{\hat{u}^2 + \underset{-h}{S}(\hat{u}^2)}{2}\underset{h}{\hat{u}}_{x\bar{x}} + \frac{\underset{+h}{S}(\hat{u}^2) - \underset{-h}{S}(\hat{u}^2)}{2h}\underset{h}{\hat{u}}_{x} + \hat{u}^3. \quad (4.37)$$

Уравнение (4.37) также инвариантно относительно X_1, X_2, X_3. Кроме того, оно может быть записано в дивергентной форме (с источником):

$$\underset{\tau}{u}_t = \frac{1}{2}\underset{+h}{D}\left[\left(\hat{u}^2 + \underset{-h}{S}(\hat{u}^2)\right)\underset{h}{\hat{u}}_{\bar{x}}\right] + \hat{u}^3. \quad (4.38)$$

Таким образом, требование “дивергентности” к разностной схеме является дополнительным к требованиям аппроксимации и инвариантности относительно группы исходной модели.

4.4. Инвариантная разностная модель уравнения $u_t = (u^{-4/3}u_x)_x$. Уравнение нелинейной теплопроводности

$$u_t = (u^{-4/3}u_x)_x \quad (4.39)$$

обладает максимальной группой точечных симметрий (см. [33]):

$$\begin{gathered} X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = 2t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x}, \\ X_4 = 2x\frac{\partial}{\partial x} - 3u\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_5 = x^2\frac{\partial}{\partial x} - 3xu\frac{\partial}{\partial u}. \end{gathered} \quad (4.40)$$

Легко проверить, что операторы X_1-X_4 удовлетворяют условию инвариантной равномерности по обеим независимым переменным, а оператор X_5 сохраняет равномерность сетки в направлении t, но не сохраняет равномерность в направлении x. Все пять операторов удовлетворяют условию инвариантной ортогональности. Таким образом, для

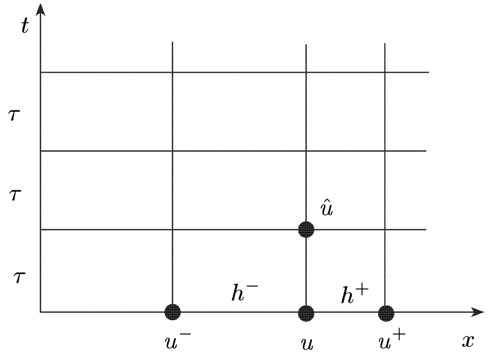

Рис. 4.4

инвариантного моделирования уравнения (4.39) можно использовать ортогональную сетку в плоскости (t, x), регулярную по t и нерегулярную по x (см. рис. 4.4).

В подпространстве $(x, h^+, h^-, t, \tau, u, \hat{u}, u^+, u^-)$, соответствующем явному шаблону рис. 4.4, существует четыре разностных инварианта

$$
\begin{gathered}
J_1 = \frac{h^+ (uu^+)^{1/3}}{\sqrt{\tau}}, \quad J_2 = \frac{h^- (uu^-)^{1/3}}{\sqrt{\tau}}, \\
J_3 = \frac{\hat{u}}{u}, \quad J_4 = \left(\frac{h^+ + h^-}{h^-}\right) \left(\frac{u^+}{u}\right)^{1/3},
\end{gathered}
\tag{4.41}
$$

где

$$
\hat{u} = \underset{+\tau}{S}(u), \quad \check{u} = \underset{-\tau}{S}(u), \quad u^+ = \underset{+h}{S}(u), \quad u^- = \underset{-h}{S}(u).
$$

Зададим инвариантную сетку с помощью инвариантов (4.4.3) следующим образом:

$$
h^+ = \epsilon^+ \frac{\sqrt{\tau}}{(uu^+)^{1/3}}, \quad h^- = \epsilon^- \frac{\sqrt{\tau}}{(uu^-)^{1/3}}, \tag{4.42}
$$

$$
\text{где} \quad \epsilon^+, \epsilon^- = \mathrm{const}, \quad 0 < \epsilon^\pm \ll 1.
$$

С помощью инвариантов (4.41) уравнение (4.39) аппроксимируем следующим образом:

$$
\underset{\tau}{u}{}_t = -\frac{3}{h} \left(\frac{(u^+)^{-1/3} - u^{-1/3}}{h^+} - \frac{u^{-1/3} - (u^-)^{-1/3}}{h^-} \right), \tag{4.43}
$$

где $h = 2\dfrac{h^+h^-}{h^+ + h^-}$.

Разностное дивергентное уравнение (4.43) на сетке (4.42) аппроксимирует уравнение (4.39) с порядком $O(\epsilon^2)$ (см. также [7, 70]).

Константы ϵ^+, ϵ^- могут быть выбраны достаточно произвольным образом, при котором, однако, обеспечена аппроксимация уравнения (4.39). Выбирем их таким образом, чтобы обеспечить *равномерность* сетки по x. Из условия $h^+ = h^-$ следует, что ϵ^+ и ϵ^- связаны друг с другом соотношением, зависящим от решения в соседних точках:

$$\epsilon^+ = \epsilon^- \left(\frac{u^+}{u^-}\right)^{1/3}. \tag{4.44}$$

Заметим, что условие $h^+ = h^-$ не является инвариантным, но инвариантная сетка (4.42) может быть сделана равномерной путем специального выбора констант (4.44).

Рассмотрим решение уравнения (4.39), инвариантное относительно X_1: $u = u(x)$. Подстановка стационарного решения в (4.39) дает ОДУ, которое легко интегрируется:

$$u(x) = (C_0 x + C_1)^{-3}, \tag{4.4.57}$$

C_0, C_1 — произвольные постоянные.

Рассмотрим стационарное решение схемы (4.4.5) при условии (4.44):

$$(u^+)^{-1/3} - 2u^{-1/3} + (u^-)^{-1/3} = 0. \tag{4.46}$$

Легко убедиться, что (4.45) является точным решением разностного уравнения (4.46), т. е. инвариантное решение уравнения (4.39) и разностного уравнения (4.43) совпадают.

Вычислим величины ϵ^+, ϵ^-, обеспечивающие равномерность сетки по x на стационарном решении:

$$\epsilon^+ = \frac{h}{\sqrt{\tau}(C_0 x + C_0 h + C_1)}, \quad \epsilon^- = \frac{h}{\sqrt{\tau}(C_0 x - C_0 h + C_1)}.$$

Разумеется, ϵ^+, ϵ^- могут быть выбраны и по-другому, тогда сетка потеряет свою равномерность. Как легко проверить, в этом случае решение (4.45) также будет точным решением схемы.

4.5. Инвариантная разностная модель уравнения $u_t = u_{xx} + \delta u \ln u$. Полулинейное уравнение теплопроводности

$$u_t = u_{xx} + \delta u \ln u, \quad \delta = \text{const}, \quad \delta \neq 0, \tag{4.47}$$

допускает группу точечных преобразований, задаваемую следующими операторами (см. [17]):

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_3 = 2e^{\delta t}\frac{\partial}{\partial x} - \delta e^{\delta t} xu\frac{\partial}{\partial u},\ X_4 = e^{\delta t}u\frac{\partial}{\partial u}. \tag{4.48}$$

Эти операторы дают возможность построить широкий класс точных инвариантных решений. Например, решения, инвариантные относительно оператора $\alpha X_2 + X_3, \alpha = \mathrm{const}$, образуют двухпараметрическое семейство:

$$U(x,t) = \exp\left[e^{\delta t}\ln\left(U_0\left(\frac{1+\alpha e^{-\delta t}}{1+\alpha}\right)^{1/(2\alpha)}\right)\exp\left(-\delta\frac{x^2}{4}\frac{1}{1+\alpha e^{-\delta t}}\right)\right], \tag{4.49}$$

где $U_0 = \mathrm{const} \geqslant 0, \quad \alpha < -1$ при $\delta < 0, \quad \alpha > -1$ при $\delta > 0$.

Семейство содержит инвариантный аттрактор (при $\alpha = 0$):

$$U^*(x,t) = \sqrt{e}\exp\left(e^{\delta t}\left(\ln U_0 - \frac{1}{2}\right)\right)e^{-\delta\frac{x}{4}^2}. \tag{4.50}$$

Эти решения, эволюционирующие с большой скоростью, имеют много общих черт с решениями с обострением (см. [11, 41]).

Изменим для удобства систему координат, введя новую зависимую переменную,

$$V(x,t) = \ln u(x,t). \tag{4.51}$$

Уравнение (4.47) примет вид:

$$V_t = V_{xx} + V_x^2 + \delta V, \tag{4.52}$$

а операторы (4.48) преобразуются в следующий набор:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_3 = 2e^{\delta t}\frac{\partial}{\partial x} - \delta e^{\delta t}x\frac{\partial}{\partial V},\ X_4 = e^{\delta t}\frac{\partial}{\partial V}. \tag{4.53}$$

Легко проверить, что операторы (4.53), так же как и операторы (4.48), не сохраняют ортогональность разностной сетки в плоскости (t,x), однако сохраняют плоскость временного слоя.

Поскольку ортогональная сетка не является инвариантной, построим систему дифференциальных уравнений в системе координат лагранжевого типа, эквивалентную уравнению (4.52). Для этого продолжим группу (4.53) на производные и на дифференциалы dt, dx, dV. В пространстве $(x, t, V, V_t, V_x, V_{xx}, dt, dx, dV)$ группа (4.53) имеет следующие пять дифференциальных инвариантов:

$$I_1 = V_t - V_x^2 - \delta V, \quad I_2 = V_{xx}, \quad I_3 = dt, \quad I_4 = dx + 2V_x dt, \tag{4.54}$$

$$I_5 = 4dt(dV - \delta V dt) + (dx)^2.$$

С помощью этого набора инвариантов уравнение (4.52) можно записать в инвариантной форме:

$$I_1 = I_2.$$

Кроме того, инварианты (4.54) позволяют записать уравнение (4.52) в виде системы уравнений:

$$I_4 = 0, \quad I_5 = 4I_3^2 I_2,$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2V_x, \\ \dfrac{dV}{dt} = V_{xx} - V_x^2 + \delta V. \end{cases} \tag{4.55}$$

Заметим, что переход от уравнения (4.52) к системе уравнений (4.55) в координатах лагранжевого типа осуществляется с помощью нелокальной инвариантной замены переменных $dx = -2V_x dt$, что приводит к замене оператора полного дифференцирования по t:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} - 2V_x \frac{\partial}{\partial x} + (V_t - 2V_x^2)\frac{\partial}{\partial V}. \tag{4.56}$$

Таким образом, набор инвариантов (4.54) позволил найти инвариантную замену переменных, переводящую уравнение (4.52) в систему (4.55). При этой замене пара операторов полного дифференцирования

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + V_t \frac{\partial}{\partial V} + \ldots,$$

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + V_x \frac{\partial}{\partial V} + \ldots$$

перешла в пару $\dfrac{d}{dt}$ и D_x. Заметим, что оператор лагранжева дифференцирования (4.56) можно представить в следующем виде:

$$\frac{d}{dt} = D_t - 2V_x D_x, \tag{4.57}$$

откуда видно, что он представляет собой, так же как и D_t и D_x, нетривиальный оператор высших симметрий. Кроме того, при переходе к системе (4.55) теряется коммутативность операторов дифференцирования:

$$\left[\frac{d}{dt}, D_x\right] = 2V_{xx} D_x \qquad \left[\frac{d}{dt}, D_t\right] = 2V_{xt} D_x. \tag{4.58}$$

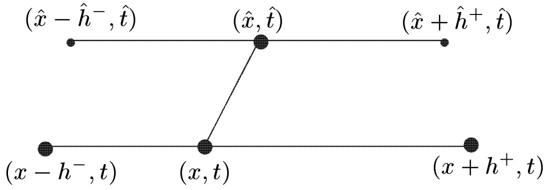

Рис. 4.5

Построим инвариантную неравномерную сетку и инвариантное разностное уравнение для системы (4.55).

Будем использовать простейший четырехточечный шаблон, соответствующий рис. 4.5:

$$(x,t,v),\ (x+h^+,t,v_+),\ (x-h^-,t,v_-),\ (\hat{x},t+\tau,\hat{v}), \tag{4.59}$$

где $\hat{x},\hat{v}$ — величины на следующем временном слое. В подпространстве, соответствующем шаблону (4.59) :

$$(t,x,\hat{x},h^+,h^-,\tau,v,v_+,v_-,\hat{v}),$$

можно построить полный набор из шести инвариантов. Будем использовать следующие инварианты:

$$I_1=\underset{h}{v}_{x}-\underset{h}{v}_{\bar{x}}\equiv\frac{v_+-v}{h^+}-\frac{v-v_-}{h^-},$$

$$I_2=\delta(\hat{x}-x)+2(e^{\delta\tau}-1)(\sigma_1\underset{h}{v}_{x}+\sigma_2\underset{h}{v}_{\bar{x}}), \tag{4.60}$$

где

$$\sigma_1=\frac{h^-}{h^++h^-},\quad \sigma_2=1-\sigma_1=\frac{h^+}{h^++h^-},$$

$$I_3=\delta(\hat{x}-x)^2+4(1-e^{-\delta\tau})(\hat{v}-e^{\delta\tau}v),\ I_4=\tau,\ I_5=h^+,\ I_6=h^-.$$

Итак, мы можем использовать инвариантное уравнение $\tau=\mathrm{const}$, которое задает равномерную сетку по t. Чтобы построить сетку по x-направлению, мы используем I_2 в виде: $I_2=0$. Это дает эволюционное уравнение для $\hat{x}$:

$$\delta(\hat{x}-x)+2(e^{\delta\tau}-1)(\sigma_1\underset{h}{v}_{x}+\sigma_2\underset{h}{v}_{\bar{x}})=0, \tag{4.61}$$

где весовые коэффициенты σ_1 и σ_2 определены выше.

Уравнение (4.61) аппроксимирует первое уравнение системы (4.55). На инвариантой сетке (4.61) можно аппроксимировать второе уравнение системы (4.55) при помощи I_1, I_3 и I_4:

$$I_3 = \frac{8(e^{\delta\tau}-1)^2}{h^+ + h^-} I_1,$$

или

$$4(1-e^{-\delta\tau})(\hat{v}-e^{\delta\tau}v) =$$
$$= -\frac{4}{\delta}(e^{\delta\tau}-1)^2)\left(\sigma_1 \underset{h}{v}_x + \sigma_2 \underset{h}{v}_{\bar{x}}\right)^2 + \frac{8}{\delta}\frac{(e^{\delta\tau}-1)^2}{h^+ + h^-}\left(\underset{h}{v}_x - \underset{h}{v}_{\bar{x}}\right). \quad (4.62)$$

Можно показать, что явная схема (4.62) на сетке (4.61) аппроксимирует (4.55) с порядком $O(\tau + h^2)$ (см. также [4, 5, 7, 54, 70]). Инвариантность этой модели следует из построения.

Построим решение разностной модели (4.61), (4.62), инвариантное относительно оператора $\alpha X_2 + X_3, \quad \alpha = \text{const}$.

Так как время t и выражение

$$v + \delta\frac{x^2}{4}\frac{e^{\delta t}}{e^{\delta t}+\alpha}$$

являются инвариантами этого оператора, будем искать инвариантное решение схемы (4.61), (4.62) в виде

$$v(x,t) = w(t) - \delta\frac{x^2}{4}\frac{e^{\delta t}}{e^{\delta t}+\alpha}. \quad (4.63)$$

Семейству инвариантных решений (4.63) отвечают следующие инвариантные начальные условия:

$$v(x,0) = w(0) - \delta\frac{x^2}{4}\frac{1}{1+\alpha}.$$

Это дает задачу Коши для $w(t)$

$$\frac{w - we^{\delta t}}{e^{\delta\tau}(e^{\delta\tau}-1)} = -\frac{1}{2}\frac{e^{\delta t}}{e^{\delta t}+\alpha}, \quad (4.64)$$

$$w(0) = w_0,$$

а также эволюционное уравнение для сетки

$$\hat{x} = x\frac{e^{\delta(t+\tau)}+\alpha}{e^{\delta t}+\alpha}, \qquad t = t_n = n\tau, \qquad n = 0,1,2,\ldots \quad (4.65)$$

Решение этой задачи имеет вид:

$$v(x,t) = e^{\delta t}\left(w_0 - \frac{e^{\delta\tau}-1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{e^{-\delta t_j}}{1+\alpha e^{-\delta t_j}}\right) - \delta\frac{x^2}{4}\frac{e^{\delta t}}{e^{\delta t}+\alpha}, \tag{4.66}$$

$$x = x^0\frac{e^{\delta t}+\alpha}{1+\alpha}, \tag{4.67}$$

где x^0 — координата данной точки при $t=0$.

Сетка (4.67) может быть произвольно неравномерной при $t=0$, в этом случае она будет неравномерной и на других временных слоях. Если сетка выбрана равномерной при $t=0$: $h^+ = h^- = h$, то в дальнейшем шаги сетки будут равны между собой на каждом временном слое, но отличны от значения шага на предыдущем временном слое:

$$\hat{h} = h\frac{e^{\delta(t+\tau)}+\alpha}{e^{\delta t}+\alpha}.$$

Сравнивая инвариантное разностное решение (4.66), (4.67) с инвариантным решением дифференциального уравнения (4.52)

$$V(x,t) = e^{\delta t}\left(W_0 + \frac{1}{2\alpha}\ln\left(\frac{1+\alpha e^{-\delta t}}{1+\alpha}\right)\right) - \delta\frac{x^2}{4}\frac{e^{\delta t}}{e^{\delta t}+\alpha}, \tag{4.68}$$

легко заметить, что их отличие имеет первый порядок малости по τ:

$$\Psi = v(x,t) - V(x,t) = O(\tau).$$

При $\alpha = 0$ решение (4.66), (4.67) переходит в решение

$$v(x,t) = (w_0 - \frac{e^{\delta\tau}}{2})e^{\delta t} - \delta\frac{x^2}{4} + \frac{e^{\delta\tau}}{2}, \quad \hat{x} = e^{\delta\tau}x, \tag{4.69}$$

инвариантное относительно оператора X_3. Разностное решение (4.69) отличается от соответствующего дифференциального на величину

$$\Psi = (v(x,t) - V(x,t))\big|_{\alpha=0} = \left(w_0 - \frac{e^{\delta\tau}}{2} - W_0 + \frac{1}{2}\right)e^{\delta t} + \frac{e^{\delta\tau}-1}{2}.$$

Если выбрать константу w_0 для разностного решения равной W_0, то ψ изменяется со временем, $\psi = (e^{\delta t}\tau)$. Если же положить $w_0 = W_0 + \frac{e^{\delta\tau}-1}{2}$, то разница между точным и разностным решением постоянна и равна $\frac{e^{\delta\tau}-1}{2}$.

Возвращаясь к исходным переменным, получим точное разностное инвариантное решение:

$$u(x,t) = e^{u_0 e^{\delta t}} e^{-\delta x^2/4} e^{e^{\delta\tau}/2},$$

$$\hat{x} = e^{\delta\tau} x, \quad u_0 = v_0 - \frac{1}{2}\, e^{\delta\tau}, \quad \tau = \text{const}. \tag{4.70}$$

Таким образом, разностная схема (4.62) на сетке (4.61) унаследовала вместе с группой исходного уравнения и возможность интегрирования на подгруппе.

Заметим, что в исходных переменных континуальный предел нашей схемы представляет собой два эволюционных уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2\dfrac{u_x}{u}, \\ \dfrac{du}{dt} = u_{xx} + \delta u \ln u - 2\dfrac{u_x^2}{u}. \end{cases}$$

Чтобы наглядно представить поведение решения уравнения (4.47) во времени, перейдем к переменным амплитуды

$$A(t) = u(0,t) = \exp\left[e^{\delta t}\left(\ln W_0 + \frac{1}{2\alpha}\ln\left(\frac{1+\alpha e^{-\delta t}}{1+\alpha}\right)\right)\right] \tag{4.71}$$

и полуширины температурного возмущения

$$X(t) = 2\sqrt{\ln(2/|\delta|)}\sqrt{\text{sign}(\delta)(1+\alpha\exp(-\delta t))}.$$

Связь амплитуды и полуширины дается уравнением

$$\frac{dA}{dX} = \frac{Aa^2\text{sign}(\delta)(1 - 2\text{sign}(\delta)X^2 a^{-2}\ln A}{X(X^2 - a^2\text{sign}(\delta))}, \tag{4.72}$$

где $a = 2\sqrt{\ln 2/|\delta|}$, или, в переменных $B = \ln A, \quad Y = X^2/a^2$,

$$\frac{dB}{dY} = \frac{\text{sign}(\delta)(1 - 2\text{sign}(\delta)YB)}{2Y(Y - \text{sign}(\delta))}. \tag{4.73}$$

Уравнение (4.73) имеет интеграл

$$(Y - \text{sign}(\delta)B - (Y_0 - \text{sign}(\delta))B_0 = \frac{1}{2}\text{sign}(\delta)(\ln Y - \ln Y_0), \tag{4.74}$$

$$Y_0 = Y(0), \qquad B_0 = B(0).$$

Проводя аналогичные рассуждения в разностном случае, введем

$$\underset{h}{A}(t) = \underset{h}{u}(0,t) = \exp\left[e^{\delta t}\left(\ln w_0 - \frac{e^{\delta\tau}-1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{e^{-\delta t}}{1+\alpha e^{-\delta t}}\right)\right], \qquad (4.74)$$

$$X(t) = 2\sqrt{\ln 2/|\delta|}\sqrt{\operatorname{sign}(\delta)(1+\alpha\exp(-\delta t))},$$

$$\underset{h}{B} = \ln\underset{h}{A}, \qquad \underset{h}{Y} = Y.$$

Разностное уравнение, — аналог уравнения (4.73), имеет вид

$$\frac{\underset{h}{\hat{B}} - \underset{h}{B}}{\underset{h}{\hat{Y}} - \underset{h}{Y}} = \frac{\operatorname{sign}(\delta)\left(e^{\delta\tau} - 2\operatorname{sign}(\delta)\underset{h}{Y}\,\underset{h}{B}\right)}{2\,\underset{h}{\hat{Y}}(\underset{h}{Y} - \operatorname{sign}(\delta))}. \qquad (4.76)$$

Разностное уравнение (4.76) также интегрируется, и его решение можно записать в виде:

$$(\underset{h}{Y} - \operatorname{sign}(\delta))\,\underset{h}{B} - (\underset{h}{Y}^0 - \operatorname{sign}(\delta))\underset{h}{B}^0 = \operatorname{sign}(\delta)\frac{e^{\delta\tau}}{2}\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{Y^{j+1}}{Y^j} - 1\right). \qquad (4.77)$$

Можно показать, что выражение (4.77) является разностной аппроксимацией интеграла (4.74) (см. [4, 5]).

4.6. Инвариантная разностная модель уравнения теплопереноса с релаксацией теплового потока (“гиперболическая теплопроводность”). Рассмотрим уравнение теплопереноса с учетом релаксации теплового потока

$$\tau(u_x)u_{tt} + u_t = k(u_x)u_{xx}, \qquad (4.78)$$

групповая классификация которого была выполнена в работе [46].

Методом конечно-разностных инвариантов мы построим явную схему второго порядка аппроксимации для частного случая уравнения (4.78)

$$\tau_0 u_{tt} + u_t = k_0 u_x u_{xx}, \qquad (4.79)$$

где k_0, τ_0 — положительные константы.

Уравнение допускает в этом случае более широкую группу преобразований, чем в общем случае (4.78). Эта группа определяется операторами

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial u},$$

$$X_4 = e^{\frac{t}{\tau_0}}\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_5 = x\frac{\partial}{\partial x} + 3u\frac{\partial}{\partial u}. \tag{4.80}$$

Легко убедиться, что все пять операторов удовлетворяют условию инвариантной равномерности и сохраняют ортогональность сетки, и поэтому можно использовать прямоугольную сетку $\underset{\tau}{\omega} \times \underset{h}{\omega}$, равномерную по каждому направлению.

В пространстве $(t, x, u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xx})$ полный набор инвариантнов пятипараметрической группы (4.80) состоит из двух инвариантов, которые можно выбрать в таком, например, виде:

$$J_1 = \frac{\tau_0 u_{tt} + u_t}{u_x^{3/2}}, \quad J_2 = \frac{u_{xx}}{u_x^{1/2}}. \tag{4.81}$$

Инварианты (4.81) позволяют представить уравнение (4.78) в инвариантной форме

$$J_1 = k_0 J_2, \tag{4.82}$$

или

$$\frac{\tau_0 u_{tt} + u_t}{u_x^{3/2}} = k_0\frac{u_{xx}}{u_x^{1/2}}.$$

Продолжим операторы (4.80) на разностные производные $\underset{\tau}{u}_t$, $\underset{\tau}{u}_{\bar{t}}$, $\underset{h}{u}_x$, $\underset{h}{u}_{\bar{x}}$, $\underset{\tau}{u}_{t\bar{t}}$, $\underset{h}{u}_{x\bar{x}}$:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial u},$$

$$X_4 = e^{-\frac{t}{\tau_0}}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau_0}}\left(e^{-\frac{\tau}{\tau_0}} - 1\right)\frac{\partial}{\partial \underset{\tau}{u}_t} + \frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau_0}}\left(1 - e^{-\frac{\tau}{\tau_0}}\right)\frac{\partial}{\partial \underset{\tau}{u}_{\bar{t}}} + \\ + \frac{1}{\tau^2}e^{-\frac{t}{\tau_0}}\left(e^{\frac{-\tau}{\tau_0}} - 2 + e^{\frac{\tau}{\tau_0}}\right)\frac{\partial}{\partial \underset{\tau}{u}_{t\bar{t}}},$$

$$X_5 = x\frac{\partial}{\partial x} + 3u\frac{\partial}{\partial u} + 2\underset{h}{u}_x\frac{\partial}{\partial \underset{h}{u}_x} + 2\underset{h}{u}_{\bar{x}}\frac{\partial}{\partial \underset{h}{u}_{\bar{x}}} + 3\underset{\tau}{u}_t\frac{\partial}{\partial \underset{\tau}{u}_t} + 3\underset{\tau}{u}_{\bar{t}}\frac{\partial}{\partial \underset{\tau}{u}_{\bar{t}}} + \\ + \underset{h}{u}_x\frac{\partial}{\partial \underset{h}{u}_x} + 3\underset{\tau}{u}_{t\bar{t}}\frac{\partial}{\partial \underset{\tau}{u}_{t\bar{t}}} + h\frac{\partial}{\partial h}. \tag{4.83}$$

В пространстве $(x, t, u, \underset{\tau}{u}_t, \underset{\tau}{u}_{\bar{t}}, \underset{h}{u}_x, \underset{h}{u}_{\bar{x}}, \underset{\tau}{u}_{t\bar{t}}, \underset{h}{u}_{x\bar{x}}, \tau, h)$ группа (4.80) имеет полный набор из шести инвариантов. Однако нам достаточно выбрать лишь два конечно-разностных инварианта, аппроксимирующих (4.82) с порядком $O(\tau^2 + h^2)$.

Можно показать, что конечно-разностные формы второго порядка:

$$I_1 = \left(\frac{1}{2}\underset{h}{u}_x + \frac{1}{2}\underset{h}{u}_{\bar{x}}\right)^{-3/2}\left\{\tau_0\,\underset{\tau}{u}_{t\bar{t}} + \frac{\tau_0}{2\tau}\left[\underset{\tau}{u}_t\left(e^{\frac{\tau}{\tau_0}} - 1\right) + \underset{\tau}{u}_{\bar{t}}\left(1 - e^{-\frac{\tau}{\tau_0}}\right)\right]\right\},$$
$$I_2 = \underset{h}{u}_{x\bar{x}}\left(\frac{1}{2}\underset{h}{u}_x + \frac{1}{2}\underset{h}{u}_{\bar{x}}\right)^{-1/2} \tag{4.84}$$

являются инвариантами всех операторов (4.83) и аппроксимируют J_1 и J_2 с порядком $O(\tau^2 + h^2)$:

$$I_1 = J_1 + O(\tau^2 + h^2),$$
$$I_2 = J_2 + O(h^2). \tag{4.85}$$

Подставив их в инвариантное представление (4.82) вместо J_1, J_2 получим инвариантное уравнение:

$$I_1 = k_0 I_2, \tag{4.86}$$

эквивалентное разностной схеме:

$$\tau_0\,\underset{\tau}{u}_{t\bar{t}} + \frac{1}{2}\frac{\tau_0}{\tau}\left[\underset{\tau}{u}_{\bar{t}}\left(1 - e^{-\tau/\tau_0}\right) + \underset{\tau}{u}_t\left(e^{\tau/\tau_0} - 1\right)\right] =$$
$$= \frac{k_0}{2}\,\underset{h}{u}_{x\bar{x}}(\underset{h}{u}_x + \underset{h}{u}_{\bar{x}}). \tag{4.87}$$

Конечно-разностное уравнение (4.87) допускает все пять операторов (4.83) и аппроксимирует дифференциальное уравнение (4.78) с порядком $O(\tau^2 + h^2)$ на равномерной сетке $\underset{\tau}{\omega}\ x\ \underset{h}{\omega}$.

4.7. Инвариантная разностная модель уравнения Бюргерса. Уравнение Бюргерса

$$v_t + v v_x = v_{xx} \tag{4.88}$$

допускает группу преобразований, определяемую следующими инфинитезимальными операторами (см. [53]):

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_3 = t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}, \tag{4.89}$$
$$X_4 = 2t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} - v\frac{\partial}{\partial v}, \qquad X_5 = t^2\frac{\partial}{\partial t} + tx\frac{\partial}{\partial x} + (x - tv)\frac{\partial}{\partial v},$$
$$X^* = \left(a\exp\left(\frac{w}{2}\right)\right)_x\frac{\partial}{\partial v},$$

где $a = a(x,t)$ — произвольное решение уравнения теплопроводности: $a_t = a_{xx}$, $\quad w$ — потенциал для уравнения Бюргерса, который вводится с помощью системы:

$$\begin{cases} w_x = v, \\ w_t = v_x - \dfrac{v^2}{2}. \end{cases}$$

Функция $w(t,x)$ удовлетворяет уравнению

$$w_t + \frac{w_x^2}{2} = w_{xx}.$$

Заметим, что первые пять операторов описывают точечную симметрию уравнения (4.88), а X^* является оператором нелокальной симметрии.

Нетрудно проверить, что набор операторов, допускаемых уравнением (4.88), сохраняет равномерность пространственной структуры сетки — выполнено условие (I.4.6) по x, но не сохраняет равномерность сетки по времени, так как для оператора X_5 не выполнено условие (I.4.6) по направлению t.

Можно убедиться, что группа преобразований уравнения (4.88) не удовлетворяет условию (I.4.9) — преобразование Галилея и проективные преобразования не сохраняют ортогональность сетки.

Таким образом, для инвариантного разностного моделирования уравнения (4.88) необходимо использовать неортогональные в (x,t) сетки или находить "выпрямляющую" замену переменных (которая, естественно, преобразует и само уравнение).

Можно убедиться, что все операторы (4.89) удовлетворяют условию (I.4.36), что сохраняет плоскость временно́го слоя.

Таким образом, предварительный анализ наборов операторов (4.89) позволяет сделать вывод, что при разностном моделировании уравнения (4.88) с сохранением симметрии исходной модели возможно использовать неортогональную сетку с параллельной структурой временны́х слоев (см. рис. 4.6).

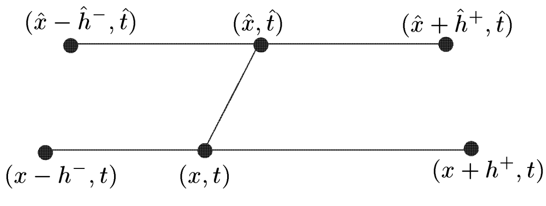

Рис. 4.6

Построим несколько дискретных моделей для уравнения Бюргерса (4.88), которые наследуют группу преобразований (4.89) (см. [6, 7, 70]).

Запишем уравнение Бюргерса в дифференциальных инвариантах. В пространстве переменных $(t, x, v, v_x, v_{xx}, dt, dx, dv)$ их всего три:

$$J^1 = (dx - vdt)v_{xx}^{1/3}, \qquad J^2 = v_{xx}^{2/3} dt, \qquad J^3 = \frac{dv - v_x(dx - vdt)}{v_{xx}^{1/3}}.$$

Это позволяет записать уравнение Бюргерса в виде системы:

$$\begin{cases} J^1 = 0, \\ J^2 = J^3 \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v, \\ \dfrac{dv}{dt} = v_{xx}. \end{cases} \tag{4.90}$$

Заметим, что структура группы (4.89) предписала нам использование двух эволюционных уравнений.

В качестве следующего шага найдем разностные инварианты совокупности точечных операторов $X_1 - X_5$ группы (4.89), необходимые для аппроксимации системы (4.90). Рассмотрим 6-точечный шаблон эволюционной разностной сетки, соответствующий рис. 9.6.

Этот шеститочечный шаблон, на котором мы будем аппроксимировать систему (4.90), определяет пространство $(t, \hat{t}, x, \hat{x}, h^+, h^-, \hat{h}^+, \hat{h}^-, v, v_+, v_-, \hat{v}, \hat{v}_+, \hat{v}_-)$, в котором группа (4.89) имеет следующие конечно-разностные инварианты:

$$I^1 = \frac{h^+}{h^-}, \qquad I^2 = \frac{\hat{h}^+}{\hat{h}^-}, \qquad I^3 = \frac{\hat{h}^+ h^+}{\tau},$$

$$I^4 = h^- h^+ (v_x - v_{\bar{x}}), \qquad I^5 = \hat{h}^- \hat{h}^+ (\hat{v}_x - \hat{v}_{\bar{x}}), \qquad I^6 = h^+ \left(\frac{\Delta x}{\tau} - v \right),$$

$$I^7 = \hat{h}^+ \left(\frac{\Delta x}{\tau} - \hat{v} \right), \qquad I^8 = h^{+2} \left(\frac{1}{\tau} + v_x \right), \qquad I^9 = \hat{h}^{+2} \left(\frac{1}{\tau} + \hat{v}_x \right),$$

где $\Delta x = \hat{x} - x, \quad v_x = \dfrac{v_+ - v}{h^+}, \quad v_{\bar{x}} = \dfrac{v - v_-}{h^-}$.

Вычисленные инварианты позволяют записать следующие инвариантные разностные модели.

А) С явной аппроксимацией эволюции разностной сетки.

1. Явная схема для уравнения Бюргерса:

$$\begin{cases} \Delta x = \tau v, \\ \dfrac{\hat{v} - v}{\tau} \dfrac{\hat{h}^+}{h^+} \dfrac{\hat{h}^-}{h^-} = v_{x\bar{x}} = \dfrac{2}{h^+ + h^-}(v_x - v_{\bar{x}}). \end{cases} \tag{4.91}$$

2. Неявная схема для уравнения Бюргерса:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \Delta x & = & \tau v, \\ \dfrac{\hat{v}-v}{\tau}\dfrac{h^+}{\hat{h}^+} & = & \hat{v}_{x\bar{x}} \quad \equiv \quad \dfrac{2}{\hat{h}^+ + \hat{h}^-}(\hat{v}_x - \hat{v}_{\bar{x}}). \end{array}\right.$$

3. Неявная схема для уравнения Бюргерса:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \Delta x & = & \tau v, \\ \dfrac{\hat{v}-v}{\tau} & = & \dfrac{2}{h^+ + h^-}(\hat{v}_x - \hat{v}_{\bar{x}}). \end{array}\right.$$

Б) С неявной аппроксимацией эволюции разностной сетки.

1. Явная схема для уравнения Бюргерса:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \Delta x & = & \tau \hat{v}, \\ \dfrac{\hat{v}-v}{\tau}\dfrac{\hat{h}^+}{h^+} & = & v_{x\bar{x}}. \end{array}\right.$$

2. Неявная схема для уравнения Бюргерса:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \Delta x & = & \tau \hat{v}, \\ \dfrac{\hat{v}-v}{\tau}\dfrac{h^+}{\hat{h}^+}\dfrac{h^-}{\hat{h}^-} & = & \hat{v}_{x\bar{x}}. \end{array}\right.$$

3. Неявная схема для уравнения Бюргерса:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \Delta x & = & \tau \hat{v}, \\ \dfrac{\hat{v}-v}{\tau} & = & \dfrac{2}{\hat{h}^+ + \hat{h}^-}(v_x - v_{\bar{x}}). \end{array}\right.$$

Все приведенные выше разностные схемы имеют эволюционную неортогональную разностную сетку.

Найдем замену переменных, выпрямляющую разностную сетку. В системе (4.90) использован оператор дифференцирования $\dfrac{d}{dt}$ лагранжева типа, который можно представить в следующем виде:

$$\frac{d}{dt} = D_t + vD_x,$$

где

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + v_t\frac{\partial}{\partial v} + \ldots,$$

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + v_x\frac{\partial}{\partial v} + \ldots$$

Оператор $\dfrac{d}{dt}$, в отличие от D_t, D_x, не коммутирует с операторами полного дифференцирования по t и x:

$$\left[\frac{d}{dt}, D_x\right] = -v_x D_x,$$

$$\left[\frac{d}{dt}, D_t\right] = -v_t D_x.$$

Для "выпрямления" системы координат необходимо найти оператор пространственного дифференцирования по переменной s такой, что

$$\left[\frac{d}{dt}, D_s\right] = 0.$$

Таким свойством обладает оператор $D_s = \dfrac{1}{\rho} D_x$ с новой зависимой переменной ρ, удовлетворяющей уравнению:

$$\rho_t + v\rho_x + \rho v_x = 0,$$

и условию $\rho > 0$ во всей исследуемой области (см. по этому поводу [36]).

Функцию $\rho = \rho(t, x)$ будем называть "плотностью начальных данных". Новая переменная s вводится с помощью системы уравнений

$$\begin{cases} s_x = \rho, \\ s_t = -\rho v. \end{cases}$$

В переменных (t, s) уравнение Бюргерса запишется в виде системы:

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = \rho^2 v_{ss} + \rho\rho_s v_s, \\ \dfrac{d\rho}{dt} = -\rho^2 v_s. \end{cases} \tag{4.92}$$

Теперь эта система может быть записана в дивергентном виде:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{\rho}\right) = D_s(v), \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{v}{\rho}\right) = D_s\left(\rho v_s + \dfrac{v^2}{2}\right). \end{cases} \tag{4.93}$$

Построим разностный аналог системы (4.92) (см. также [6]).

Дополним систему (4.92) зависимой переменной x, заданной следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} x_t = v, \\ x_s = \dfrac{1}{\rho}. \end{cases} \tag{4.94}$$

Система уравнений (4.92), (4.94) допускает группу преобразований, определяемую следующими инфинитезимальными операторами:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}, \quad X_4 = 2t\frac{\partial}{\partial t} + s\frac{\partial}{\partial s} + x\frac{\partial}{\partial x} - v\frac{\partial}{\partial v},$$

$$X_5 = t^2\frac{\partial}{\partial t} + tx\frac{\partial}{\partial x} + (x-tv)\frac{\partial}{\partial v} - t\rho\frac{\partial}{\partial \rho}, \quad X^* = f(s)\frac{\partial}{\partial s} + \rho f'(s)\frac{\partial}{\partial s}, \tag{4.95}$$

где $f(s)$ — произвольная функция s.

В новых переменных (t, s) для операторов X_1-X_5, которые являются операторами алгебры Ли, факторизованной по оператору X^*, выполняется условие ортогональности разностной сетки и условие равномерности сетки по пространственной переменной. Это позволяет построить в переменных (t, s) инвариантную относительно операторов X_1-X_5 разностную модель на ортогональной равномерной сетке.

Запишем систему (4.92), (4.94) в дифференциальных инвариантах, которые в пространстве зависимых и независимых переменных, дифференциалов и пространственных производных $(t, x, s, v, \rho, dt, dx, ds, dv, d\rho, v_s, \rho_s, x_s, v_{ss})$ имеют вид

$$J^1 = x_s\rho, \quad J^2 = \frac{\rho}{ds}(dx - vdt), \quad J^3 = \left(\frac{ds}{\rho}\right)^3 (\rho^2 v_{ss} + \rho\rho_s v_s), \quad J^4 = \frac{(ds)^2}{\rho^2 dt},$$

$$J^5 = \frac{(ds)^2}{\rho^3}\left(\frac{d\rho}{dt} - \frac{\rho_s ds}{dt} + \rho^2 v_s\right), \quad J^6 = \frac{ds}{\rho}(dv - \rho v_s(dx - vdt)).$$

Это позволяет записать систему (4.92), (4.94) в виде

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = \rho^2 v_{ss} + \rho\rho_s v_s, \\ \dfrac{d\rho}{dt} = -\rho^2 v_s, \\ \dfrac{dx}{dt} = v, \\ \dfrac{\partial x}{\partial s} = \dfrac{1}{\rho}. \end{cases} \tag{4.96}$$

Найдем разностную систему уравнений, аппроксимирующую (4.96) и инвариантную относительно совокупности операторов (4.95). Рассмотрим шеститочечный шаблон ортогональной сетки, имеющий по три точки на два соседних временных слоях (см. рис. 4.7).

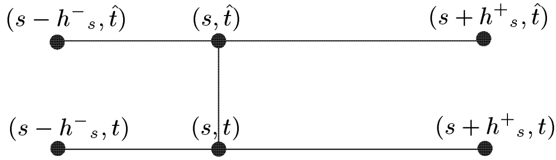

Рис. 4.7

Заметим, что вновь приобретенный оператор X^* в (4.95) не связан с симметрией уравнения Бюргерса, а связан с расширением пространства зависимых переменных и введением новой системы координат. В разностном варианте мы его заменим на следующий оператор:

$$X^* = f(s)\frac{\partial}{\partial s} + \rho \underset{+h}{D}{}_s f(s)\frac{\partial}{\partial \rho},$$

который также определяет бесконечную симметрию, но имеет другие коэффициенты. В пространстве, соответствующем выбранному шаблону: $(t,\hat t,s,h^{+}{}_s,h^{-}{}_s,x,\ \Delta x,h^{+}{}_x,h^{-}{}_x,\hat h^{+}{}_x,\hat h^{-}{}_x,v,v_+,v_-,\hat v,\hat v_+,\hat v_-,$ $\rho,\rho_+,\rho_-,\hat\rho,\hat\rho_+,\hat\rho_-)$, мы имеем следующие четырнадцать разностных инвариантов:

$$I^1 = \frac{h^{+}{}_x}{h^{-}{}_x},\quad I^2 = \frac{\hat h^{+}{}_x}{\hat h^{-}_x},\quad I^3 = h^{-}{}_x h^{+}{}_x(v_x - v_{\bar x}),\quad I^4 = \hat h^{-}_x\hat h^{+}_x(\hat v_x - \hat v_{\bar x}),$$

$$I^5 = h^{+}{}_x\left(\frac{\Delta x}{\tau} - v\right),\qquad I^6 = \hat h^{+}_x\left(\frac{\Delta x}{\tau} - \hat v\right),\qquad I^7 = h^{+2}_x\left(\frac{1}{\tau} + v_x\right),$$

$$I^8 = \hat h^{+2}_x\left(\frac{1}{\tau} + \hat v_x\right),\qquad I^9 = \frac{\hat h^{+}_x h^{+}_x}{\tau},\qquad I^{10} = \frac{\hat\rho_-}{\rho_-},$$

$$I^{11} = \frac{\hat\rho}{\rho},\qquad I^{12} = \frac{\hat\rho_+}{\rho_+},\qquad I^{13} = \frac{h^{+}_s}{\rho h^{+}_x},\qquad I^{14} = \frac{h^{-}_s}{\rho_- h^{-}_x}.$$

Эти инварианты позволяют записать разностную модель в виде следующей системы разностных эволюционных уравнений (приведен один из возможных вариантов записи разностной схемы — явный; в переменных (t, x) этой схеме соответствует схема (4.91)):

$$\begin{cases} \Delta x = \tau v, \\ \dfrac{\hat{v} - v}{\tau} = \dfrac{2\hat{\rho}\hat{\rho}_-}{h_s^+ \hat{\rho}_- + h_s^- \hat{\rho}} (\rho v_s - \rho_- v_{\bar{s}}), \\ \hat{\rho}\hat{h}_x^+ = \rho h_x^+ = h_s^+. \end{cases}$$

Если по s сетка равномерная $h^+{}_s = h^-{}_s = h_s$, то эта схема примет следующий вид:

$$\begin{cases} \Delta x = \tau v, \\ \dfrac{\hat{v} - v}{\tau} = \dfrac{2\hat{\rho}\hat{\rho}_-}{\hat{\rho}_- + \hat{\rho}} (\rho v_s)_{\bar{s}}, \\ \hat{\rho}\hat{h}_x^+ = \rho h_x^+ = h_s. \end{cases}$$

Полученные выше семейства разностных уравнений и сеток, инвариантных относительно полного набора операторов, допускаемых уравнением Бюргерса, позволяет рассматривать решения, инвариантные относительно какой-либо однопараметрической подгруппы. При этом происходит редуцирование системы “схема-сетка” до обыкновенных разностных уравнений. Подчеркнем, что в отличие от исходного непрерывного случая, в нашем случае происходит редуцирование *двух* уравнений — разностной схемы и разностного уравнения для сетки.

Рассмотрим пример инвариантного решения разностной модели уравнения Бюргерса.

В качестве подгруппы возьмем случай, соответствующий

$$\alpha X_2 + X_3 = (t + \alpha)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}, \qquad \alpha = \text{const}. \tag{4.97}$$

Рассмотрим простейшую явную схему (4.91). В подпространстве $(t, x, \Delta x, v)$ имеем три инварианта оператора (4.97):

$$J_1 = t, \quad J_2 = v - \frac{x}{t + \alpha}, \quad J_3 = \frac{\Delta x}{\tau} - \frac{x}{t + \alpha}.$$

В соответствии с этим, будем искать инвариантное решение в виде:

$$\begin{cases} v(x, t) = f(t) + \dfrac{x}{t + \alpha}, \\ \dfrac{\Delta x}{\tau} = g(t) + \dfrac{x}{t + \alpha}. \end{cases}$$

Подстановка данного вида решения в схему (4.91) дает систему разностных уравнений для $f(t)$ и $g(t)$:

$$\begin{cases} f(t + \tau) = \dfrac{t + \tau}{t + \tau + \alpha} f(t), \\ g(t) = f(t). \end{cases}$$

Интегрирование этой системы дает решение разностного уравнения для v

$$v(x,t) = \frac{x}{t+\alpha} + \frac{f(0)\alpha}{t+\alpha}$$

и решение уравнения для разностной сетки

$$x = x^0\left(\frac{t+\alpha}{\alpha}\right) + f(0)t.$$

Здесь $x = x_i^j = x_i(t_j)$, $t = t_j$. Сетка в начальный момент времени может быть произвольной.

Полученное решение является решением задачи Коши с инвариантными начальными условиями:

$$v(x,0) = f(0) + \frac{x}{\alpha}.$$

З а м е ч а н и е. Кроме уравнения Бюргерса (4.88) часто рассматривается также промежуточная модель — уравнение Бюргерса для потенциала w

$$w_t + \frac{1}{2}w_x^2 = w_{xx}, \tag{4.98}$$

где w вводится с помощью системы

$$\begin{cases} w_x = v, \\ w_t = v_x - \dfrac{1}{2}v^2. \end{cases} \tag{4.99}$$

Известное преобразование Хопфа

$$v = -2\frac{u_x}{u} \tag{4.100}$$

связывает множество решений уравнений Бюргерса (4.88) и уравнения линейной теплопроводности:

$$u_t = u_{xx}. \tag{4.101}$$

Для уравнений (4.98) и (4.101) эта связь носит точечный характер:

$$w = -2\ln u. \tag{4.102}$$

Уравнение Бюргерса для потенциала допускает группу точечных преобразований, определяемую следующими операторами (см. [6]):

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_3 = t\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial w}, \tag{4.103}$$

$$X_4 = 2t\frac{\partial}{\partial t}+x\frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_5 = t^2\frac{\partial}{\partial t} + tx\frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{1}{2}x^2 + t\right)\frac{\partial}{\partial w},$$

$$X_6 = \frac{\partial}{\partial w}, \qquad X^* = a\,\exp\left(\frac{w}{2}\right)\frac{\partial}{\partial w},$$

где X^* теперь является оператором точечной симметрии.

В следующем пункте мы построим инвариантную разностную модель уравнения линейной теплопроводности, связанную теми же преобразованиями Хопфа с инвариантной разностной моделью уравнения Бюргерса.

4.8. Инвариантная разностная модель уравнения линейной теплопроводности. Построим инвариантную разностную схему для линейного уравнения теплопроводности

$$u_t = u_{xx} \tag{4.104}$$

аналогично тому, как это сделано в п. 3.7 (см. также [6, 7, 54, 70]).

Симметрия уравнения теплопроводности определяется алгеброй шести операторов

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial x},$$

$$X_3 = 2t\frac{\partial}{\partial x} - xu\frac{\partial}{\partial u}, \qquad X_4 = 2t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x}, \tag{4.105}$$

$$X_5 = 4t^2\frac{\partial}{\partial t} + 4tx\frac{\partial}{\partial x} - (x^2 + 2t)u\frac{\partial}{\partial u}, \qquad X_6 = u\frac{\partial}{\partial u}$$

и оператором бесконечномерной симметрии, эквивалентной линейности уравнения (4.104),

$$X^* = a(x,t)\frac{\partial}{\partial u},$$

$a(x,t)$ — любое решение уравнения (4.104).

Дифференциальные инварианты в пространстве переменных $(t, x, u,\ u_x, u_{xx}, dt, dx, du)$

$$J^1 = \frac{dx + 2\dfrac{u_x}{u}dt}{dt^{1/2}}, \qquad J^2 = \frac{du}{u} + \frac{1}{4}\frac{dx}{dt}^2 + \left(-\frac{u_{xx}}{u} + \frac{u_x^2}{u^2}\right)dt$$

позволяют записать уравнение теплопроводности (4.104) в виде системы

$$\begin{cases} J^1 = 0, \\ J^2 = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2(\ln u)_x = -2\dfrac{u_x}{u}, & (4.106) \\[2ex] \dfrac{du}{dt} = u_{xx} - 2\dfrac{u_x^2}{u}. & (4.107) \end{cases}$$

Существует восемь разностных инвариантов группы с операторами (4.105) в пространстве, соответствующем выбранному шаблону $(t, \hat{t}, x, \hat{x}, h^+, h^-, \hat{h}^+, \hat{h}^-, u, \hat{u}, u_+, u_-, \hat{u}_+, \hat{u}_-)$:

$$I^1 = \frac{h^+}{h^-}, \quad I^2 = \frac{\hat{h}^+}{\hat{h}^-}, \quad I^3 = \frac{\hat{h}^+ h^+}{\tau}, \quad I^4 = \frac{\tau^{1/2}}{h^+}\frac{\hat{u}}{u}\exp\left(\frac{1}{4}\frac{\Delta x^2}{\tau}\right),$$

$$I^5 = \frac{1}{4}\frac{h^{+2}}{\tau} - \frac{h^{+2}}{h^+ + h^-}\left(\frac{1}{h^+}\ln\frac{u_+}{u} + \frac{1}{h^-}\ln\frac{u_-}{u}\right),$$

$$I^6 = \frac{1}{4}\frac{\hat{h}^{+2}}{\tau} + \frac{\hat{h}^{+2}}{\hat{h}^+ + \hat{h}^-}\left(\frac{1}{\hat{h}^+}\ln\frac{\hat{u}_+}{\hat{u}} + \frac{1}{\hat{h}^-}\ln\frac{\hat{u}_-}{\hat{u}}\right),$$

$$I^7 = \frac{\Delta x h^+}{\tau} + \frac{2h^+}{h^+ + h^-}\left(\frac{h^-}{h^+}\ln\frac{u_+}{u} - \frac{h^+}{h^-}\ln\frac{u_-}{u}\right),$$

$$I^8 = \frac{\Delta x \hat{h}^+}{\tau} + \frac{2\hat{h}^+}{\hat{h}^+ + \hat{h}^-}\left(\frac{\hat{h}^-}{\hat{h}^+}\ln\frac{\hat{u}_+}{\hat{u}} - \frac{\hat{h}^+}{\hat{h}^-}\ln\frac{\hat{u}_-}{\hat{u}}\right).$$

Аппроксимируя данными разностными инвариантами систему (4.106), можно получить различные варианты записи системы разностных эволюционных уравнений.

а) Явная схема для эволюции разностной сетки и явная схема для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} \Delta x = \dfrac{2\tau}{h^+ + h^-}\left(-\dfrac{h^-}{h^+}\ln\dfrac{u_+}{u} + \dfrac{h^+}{h^-}\ln\dfrac{u_-}{u}\right), \\[2ex] \left(\dfrac{u}{\hat{u}}\right)^2 \exp\left(-\dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta x^2}{\tau}\right) = 1 - \dfrac{4\tau}{h^+ + h^-}\left(\dfrac{1}{h^+}\ln\dfrac{u_+}{u} + \dfrac{1}{h^-}\ln\dfrac{u_-}{u}\right). \end{cases} \tag{4.108}$$

б) Чисто неявная схема для системы (4.106):

$$\begin{cases} \Delta x = \dfrac{2\tau}{\hat{h}^+ + \hat{h}^-}\left(-\dfrac{\hat{h}^-}{\hat{h}^+}\ln\dfrac{\hat{u}_+}{\hat{u}} + \dfrac{\hat{h}^+}{\hat{h}^-}\ln\dfrac{\hat{u}_-}{\hat{u}}\right), \\ \left(\dfrac{\hat{u}}{u}\right)^2 \exp\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta x^2}{\tau}\right) = 1 + \dfrac{4\tau}{\hat{h}^+ + \hat{h}^-}\left(\dfrac{1}{\hat{h}^+}\ln\dfrac{\hat{u}_-}{\hat{u}} + \dfrac{1}{\hat{h}^-}\ln\dfrac{\hat{u}_-}{\hat{u}}\right). \end{cases} \tag{4.109}$$

Очевидно, что для (4.106) возможны разнообразные комбинации явных и неявных аппроксимаций при построении схем.

Приведенные выше разностные схемы имеют эволюционную неортогональную разностную сетку. Выпишем замену переменных, выпрямляющую разностную сетку.

Введем функцию $\rho = \rho(t,x)$ — плотность начальных данных, удовлетворяющую уравнению

$$\rho_t - 2\rho\left(\frac{u_{xx}}{u} - \frac{u_x^2}{u^2}\right) - 2\frac{u_x}{u}\rho_x = 0.$$

Новая переменная s вводится с помощью уравнений

$$\begin{cases} s_x = \rho, \\ s_t = -2\rho\dfrac{u_x}{u}. \end{cases}$$

В переменных (t,s) уравнение теплопроводности запишется в виде системы

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \rho^2\left(u_{ss} - 2\dfrac{u_s^2}{u}\right) + \rho\rho_s u_s, \\ \dfrac{d\rho}{dt} = 2\rho^3\left(\dfrac{u_{ss}}{u} - \dfrac{u_s^2}{u^2}\right) + 2\rho^2\rho_s\dfrac{u_s}{u} \end{cases} \tag{4.110}$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{\rho}\right) = D_s\left(-2\rho\dfrac{u_s}{u}\right), \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{u}{\rho}\right) = D_s(-\rho u_s). \end{cases} \tag{4.111}$$

Система (4.111) в пространстве независимых переменных (t,s) и зависимых переменных (u,ρ), расширенном зависимой переменной x, заданной системой уравнений

$$\begin{cases} x_t = -2\rho\dfrac{u_s}{u}, \\ x_s = \dfrac{1}{\rho}, \end{cases} \tag{4.112}$$

допускает группу преобразований, определяемую операторами

$$
\begin{aligned}
&X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_3 = 2t\frac{\partial}{\partial x} - xu\frac{\partial}{\partial u},\\
&X_4 = 2t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} + s\frac{\partial}{\partial s},\\
&X_5 = 4t^2\frac{\partial}{\partial t} + 4tx\frac{\partial}{\partial x} - (x^2+2t)u\frac{\partial}{\partial u} - 4\rho\frac{\partial}{\partial \rho},\\
&X_6 = u\frac{\partial}{\partial u}, \qquad X^* = f(s)\frac{\partial}{\partial s} + \rho f'(s)\frac{\partial}{\partial \rho},
\end{aligned}
\tag{4.113}
$$

где $f(s)$ — произвольная функция s.

В новых переменных (t, s) для операторов X_1-X_6, которые являются операторами алгебры Ли, факторизованной по оператору X^*, выполняется условие (4.9) ортогональности разностной сетки и условие (4.6) равномерности сетки по пространственной переменной. Это позволяет построить в переменных (t, s) инвариантную относительно операторов X_1-X_6 разностную модель на ортогональной равномерной сетке.

Запишем систему (4.109), (4.110) в дифференциальных инвариантах, которые в пространстве переменных $(t, x, s, u, \rho, dt, dx, ds, du, d\rho, u_s, \rho_s, x_s, u_{ss})$ имеют вид

$$
J^1 = x_s\rho, \qquad J^2 = \frac{\rho}{ds}(dx + 2\rho\frac{u_s}{u}dt), \qquad J^3 = \frac{(ds)^2}{\rho^2 dt},
$$

$$
J^4 = \frac{(ds)^2}{\rho^3}\left(\frac{d\rho}{dt} - \frac{\rho_s ds}{dt} - 2\rho^3\left(\frac{u_{ss}}{u} - \frac{u_s^2}{u^2}\right) - 2\rho^2\rho_s\frac{u_s}{u}\right),
$$

$$
J^5 = \left(\frac{ds}{\rho}\right)^2\left(-\frac{2}{u}\frac{du}{dt} - \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2\rho^2\left(\frac{u_{ss}}{u} - \frac{u_s^2}{u^2}\right) + 2\rho\rho_s\frac{u_s}{u}\right).
$$

Эти инварианты позволяют записать систему (4.109), (4.110) следующим образом:

$$
\begin{cases}
\dfrac{du}{dt} = \rho^2\left(u_{ss} - \dfrac{u_s^2}{u}\right) + \rho\rho_s u_s,\\
\dfrac{d\rho}{dt} = 2\rho^3\left(\dfrac{u_{ss}}{u} - \dfrac{u_s^2}{u^2}\right) + 2\rho^2\rho_s\frac{u_s}{u},\\
\dfrac{dx}{dt} = -2\rho\frac{u_s}{u},\\
\dfrac{\partial x}{\partial s} = \dfrac{1}{\rho}.
\end{cases}
\tag{4.114}
$$

Найдем разностную систему уравнений, аппроксимирующую (4.114) и инвариантную относительно совокупности операторов (4.113). Воспользуемся шеститочечным разностным шаблоном (см. рис. 9.6).

Разностные инварианты для совокупности операторов (4.113), где оператор X^* заменен разностным аналогом

$$X^* = f(s)\frac{\partial}{\partial s} + \rho \underset{+h}{D}{}_s f(s)\frac{\partial}{\partial \rho},$$

$\underset{+h}{D}{}_s$ — разностный оператор дифференцирования по s, в пространстве, соответствующем выбранному шаблону $(t, \hat{t}, s, h^+{}_s, h^-{}_s, x, \hat{x}, h^+{}_x, h^-{}_x, \hat{h}^+{}_x, \hat{h}^-{}_x, u, \hat{u}, u_+, u_-, \hat{u}_+, \hat{u}_-, \rho, \hat{\rho}, \rho_+, \rho_-, \hat{\rho}_+, \hat{\rho}_-)$, будут следующими:

$$I^1 = \frac{h^+{}_x}{h^-{}_x}, \quad I^2 = \frac{\hat{h}^+{}_x}{\hat{h}^-{}_x}, \quad I^3 = \frac{h^+{}_x\hat{h}^+{}_x}{\tau}, \quad I^4 = \frac{\tau^{1/2}}{h^+{}_x}\frac{\hat{u}}{u}\exp\left(\frac{1}{4}\frac{\Delta x^2}{\tau}\right),$$

$$I^5 = \frac{1}{4}\frac{h_x^{+2}}{\tau} - \frac{h_x^{+2}}{h^+ + h^-}\left(\frac{1}{h^+{}_x}\ln\frac{u_+}{u} + \frac{1}{h^-{}_x}\ln\frac{u_-}{u}\right),$$

$$I^6 = \frac{1}{4}\frac{\hat{h}_x^{+2}}{\tau} + \frac{\hat{h}_x^{+2}}{\hat{h}^+{}_x + \hat{h}^-{}_x}\left(\frac{1}{\hat{h}^+{}_x}\ln\frac{\hat{u}_+}{\hat{u}} + \frac{1}{\hat{h}^-{}_x}\ln\frac{\hat{u}_-}{\hat{u}}\right),$$

$$I^7 = \frac{\Delta x h^+{}_x}{\tau} + \frac{2h^+{}_x}{h^+{}_x + h^-{}_x}\left(\frac{h^-{}_x}{h^+{}_x}\ln\frac{u_+}{u} - \frac{h^+{}_x}{h^-{}_x}\ln\frac{u_-}{u}\right), \tag{4.115}$$

$$I^8 = \frac{\Delta x\hat{h}^+{}_x}{\tau} + \frac{2\hat{h}^+{}_x}{\hat{h}^+{}_x + \hat{h}^-{}_x}\left(\frac{\hat{h}^-{}_x}{\hat{h}^+{}_x}\ln\frac{\hat{u}_+}{\hat{u}} - \frac{\hat{h}^+{}_x}{\hat{h}^-{}_x}\ln\frac{\hat{u}_-}{\hat{u}}\right),$$

$$I^9 = \frac{\hat{\rho}_-}{\rho_-}, \quad I^{10} = \frac{\hat{\rho}}{\rho}, \quad I^{11} = \frac{\hat{\rho}_+}{\rho_+}, \quad I^{12} = \frac{h^+{}_s}{\rho h^+{}_x}, \quad I^{13} = \frac{h^-{}_s}{\rho_- h^-{}_x}.$$

Эти инварианты позволяют записать разностную модель в виде следующей системы разностных эволюционных уравнений (приведен лишь один из возможных вариантов записи разностной схемы — явный; в переменных (t, x) этой схеме соответствует схема (4.108)):

$$\begin{cases} \Delta x = 2\tau\dfrac{-\dfrac{h^-{}_s}{h^+{}_s}\dfrac{\rho}{\rho_-}\ln\dfrac{u_+}{u} + \dfrac{h^+{}_s}{h^-{}_s}\dfrac{\rho_-}{\rho}\ln\dfrac{u_-}{u}}{\dfrac{h_s}{\rho} + \dfrac{h^-{}_s}{\rho_-}}, \\ \left(\dfrac{u}{\hat{u}}\right)^2\exp\left(-\dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta x^2}{\tau}\right) = 1 - 4\tau\dfrac{\dfrac{\rho}{h^+{}_s}\ln\dfrac{u_+}{u} + \dfrac{\rho_-}{h^-{}_s}\ln\dfrac{u_-}{u}}{\dfrac{h^+{}_s}{\rho} + \dfrac{h^-{}_s}{\rho_-}}, \\ \hat{\rho}\hat{h}^+{}_x = \rho h^+{}_x = h^+{}_s. \end{cases} \tag{4.116}$$

Если по s сетка равномерная: $h^+{}_s = h^-{}_s = h_s$, то эта схема упростится:

$$\begin{cases} \Delta x = 2\tau \dfrac{-\rho^2 \ln \dfrac{u_+}{u} + \rho_-{}^2 \ln \dfrac{u_-}{u}}{h_s(\rho+\rho_-)}, \\ \left(\dfrac{u}{\hat{u}}\right)^2 \exp\left(-\dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta x^2}{\tau}\right) = 1 - \dfrac{4\tau\rho\rho_-}{h_s^2(\rho+\rho_-)}\left(\rho \ln \dfrac{u_+}{u} + \rho_- \ln \dfrac{u_-}{u}\right), \\ \hat{\rho}\hat{h}^+{}_x = \rho h^+{}_x = h_s. \end{cases} \tag{4.117}$$

Заметим, что предложенные разностные модели уравнения теплопроводности связаны с разностными моделями уравнения Бюргерса для потенциала

$$w_t + \frac{1}{2} w_x^2 = w_{xx}$$

точечной заменой $w = -2 \ln u$, эквивалентной преобразованию Хопфа.

Построим решение для разностной модели уравнения теплопроводности, инвариантное относительно оператора

$$\alpha X_2 + X_3 = (\alpha + 2t)\frac{\partial}{\partial x} - xu\frac{\partial}{\partial u}, \qquad \alpha = \text{const}. \tag{4.118}$$

Инвариантами оператора (4.117) являются

$$t, \quad u \exp\left(\frac{x^2}{4(t+\alpha)}\right), \quad \left(\frac{\Delta x}{\tau} - \frac{x}{t+\alpha}\right).$$

Будем искать инвариантное решение в виде

$$\begin{cases} u(x,t) = f(t) \exp\left(-\dfrac{x^2}{4(t+\alpha)}\right), \\ \dfrac{\Delta x}{\tau} = g(t) + \dfrac{x}{t+\alpha}. \end{cases}$$

Подставляя данный вид решения в схему (4.107), получим систему разностных уравнений для $f(t)$ и $g(t)$

$$\begin{cases} f(t+\tau) = \left(\dfrac{t+\tau}{t+\tau+\alpha}\right)^{1/2} f(t), \\ g(t) = 0. \end{cases}$$

Интегрирование этой системы дает решение уравнения для u

$$u(x,t) = f(0)\left(\frac{\alpha}{t+\alpha}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{4(t+\alpha)}\right)$$

и решение уравнения для разностной сетки

$$x = x^0 \left(\frac{t+\alpha}{\alpha}\right).$$

Полученное решение является решением задачи Коши с инвариантными начальными условиями

$$u(x,0) = f(0)\exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha}\right).$$

При $\alpha = 0$ инвариатным решением разностной схемы будет фундаментальное решение уравнения теплопроводности

$$u(x,t) = C\left(\frac{1}{t}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{x^2}{4}\right)$$

на разностной сетке

$$\Delta x = \frac{\tau}{t}x.$$

Во всех приведенных случаях разностная сетка в момент времени $t = 0$ может быть произвольно неравномерной. В этом случае она будет неравномерной и на других временных слоях. Если сетка выбрана равномерной при $t = 0$, т. е. $h_+ = h_- = h$, то в дальнейшем шаги сетки будут равны между собой на каждом временном слое, но отличны от значения шага на предыдущем временном слое.

Полученное разностное инвариантное решение совпадает с соответствующим ему решением дифференциального уравнения (4.104), инвариантным относительно оператора (4.117).

В работе [70] проведено численное тестирование полученных выше инвариантных разностных схем уравнения линейной теплопроводности.

4.9. Инвариантная разностная модель уравнения Кортевега–де Вриза. Известно (см. [29]), что уравнение Кортевега–де Вриза

$$u_t = uu_x + u_{xxx} \tag{4.119}$$

допускает четырехпараметрическую группу Ли точечных преобразований, что соответствует следующим инфинитизимальным операторам *):

$$
\begin{aligned}
X_1 &= \frac{\partial}{\partial t}, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial x},\\
X_3 &= t\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial u}, \qquad\qquad (4.120)\\
X_4 &= x\frac{\partial}{\partial x} + 3t\frac{\partial}{\partial t} - 2u\frac{\partial}{\partial u}.
\end{aligned}
$$

Прежде чем построить разностное уравнение и сетку, которые аппроксимируют (4.119) с заданным порядком и наследуют всю алгебру Ли уравнения (4.120), проверим условие инвариантности ортогональной сетки. Операторы X_1, X_2 и X_4 сохраняют ортогональность, но для X_3 имеем

$$\underset{+\tau}{D}(t) \neq -\underset{+h}{D}(0),$$

где τ — шаг в направлении t и h — в направлении x. Следовательно, ортогональную сетку нельзя применять для инвариантного моделирования уравнения (4.119).

Возможно ли применение неортогональной сетки с плоскими временными слоями? Да, так как условия (4.36) гл. I справедливы для полного набора операторов (4.120):

$$\underset{+h}{D}\,\underset{+\tau}{D}(\xi_\alpha^t) = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4.$$

Чтобы аппроксимировать (4.119) на такой сетке мы должны использовать не менее четырех точек по направлению x и не менее двух точек по направлению t. В качестве примера рассмотрим минимальный шаблон, соответствующий явной разностной схеме (рис. 4.8).

В подпространстве (x, $\hat{x}$, t, τ, h^-, h^+, h^{++}, u, $\hat{u}$,u^+, u^{++}, u^-) есть восемь разностных инвариантов, в качестве которых можно выбрать следующие (см. [65, 67]):

$$
\begin{aligned}
J_1 &= \frac{\hat{x} - x + \tau u}{h^+}, \quad J_2 = (\hat{u} - u)(h^+)^2,\\
J_3 &= \tau \underset{h}{u}_x \equiv \tau\frac{u^+ - u}{h^+}, \quad J_4 = \tau \underset{h}{u}_{\bar{x}} \equiv \tau\frac{u - u^-}{h^-},
\end{aligned}
$$

*) Уравнение (4.119) допускает также бесконечную серию высших и нелокальных симметрий (см., например, [53]), которые мы здесь не рассматриваем.

$$
\begin{aligned}
J_5 &= \tau \underset{h}{u}{}_x^{+} \equiv \frac{u^{++} - u^{+}}{h^{++}}, \quad J_6 = \frac{(h^{+})^3}{\tau}, \\
J_7 &= \frac{h^{-}}{h^{+}}, \quad J_8 = \frac{h^{++}}{h^{+}}.
\end{aligned}
\tag{4.121}
$$

Заметим, что среди инвариантов (4.121) есть только один инвариант J_1, который содержит $\hat{x}$ — координату точки x на следующем временнóм слое.

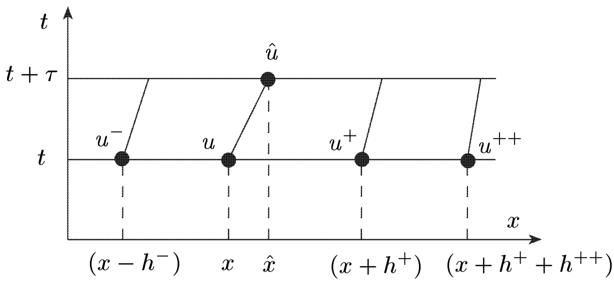

Рис. 4.8

Общее уравнение, задающее семейство инвариантных разностных сеток, можно записать в следующем виде:

$$J_1 = \Phi(J_2, J_3, J_4, J_5, J_6, J_7, J_8),$$

где Φ — произвольная функция. Выберем простейший вид этого уравнения, задающий инвариантную эволюционную сетку:

$$J_1 = 0 \quad \text{или} \quad \hat{x} = x - \tau u.$$

На этой сетке рассмотрим следующее инвариантное разностное уравнение:

$$J_2 = 2\frac{J_5 - J_3}{J_8 + 1} - 2\frac{J_3 - J_4}{J_7 + 1},$$

или, в разностных переменных,

$$\frac{\hat{u} - u}{\tau} = \frac{2}{h^{+}}\left(\frac{\underset{h}{u}{}_x^{+} - \underset{h}{u}{}_x}{h^{++} + h^{+}} - \frac{\underset{h}{u}{}_x - \underset{h}{\overset{-}{u}}{}_x}{h^{+} + h^{-}}\right).$$

Смысл последнего уравнения вскоре станет понятным.

Таким образом, мы имеем два эволюционных уравнения:

$$\frac{\Delta x}{\tau} = -u, \quad \text{где} \quad \Delta x \equiv \hat{x} - x, \tag{4.122}$$

$$\frac{\hat{u}-u}{\tau} = \frac{1}{h^+}\left\{\left(\frac{u^{++}-u^+}{h^{++}} - \frac{u^+-u}{h^+}\right)\frac{2}{h^{++}+h^+} - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{u^+-u}{h^+} - \frac{u-u^-}{h^-}\right)\frac{2}{h^++h^-}\right\}. \tag{4.123}$$

Рассмотрим континуальный предел разностной модели (4.122), (4.123).

В предельном случае $h \to 0$, $\tau \to 0$, из (4.122) и (4.123) получаем

$$\frac{dx}{dt} = -u, \tag{4.124}$$

$$\frac{du}{dt} = u_{xxx}. \tag{4.125}$$

Введем новый оператор дифференцирования по времени

$$\frac{d}{dt} = D_t - uD_x, \tag{4.126}$$

где D_t, D_x — операторы полного дифференцирования по t и x соответственно:

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + u_t\frac{\partial}{\partial u} + u_{xt}\frac{\partial}{\partial u_x} + u_{tt}\frac{\partial}{\partial u_t} + \ldots,$$
$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + u_x\frac{\partial}{\partial u} + u_{tx}\frac{\partial}{\partial u_t} + u_{xx}\frac{\partial}{\partial u_x} + \ldots$$

Оператор (4.126) можно рассматривать как оператор дифференцирования по времени лагранжева типа.

Применяя оператор (4.126) к x и u, получим

$$\frac{dx}{dt} = -u, \qquad \frac{du}{dt} = u_t - uu_x. \tag{4.127}$$

Следовательно, система (4.124)-(4.125) эквивалентна уравнению Кортевега–де Вриза (4.119). Уравнения (4.127) обеспечивают связь между уравнением (4.119) в декартовой системе коодинат и системой (4.124), (4.125) в лагранжевой системе координат.

Переход в лагранжеву систему координат означает, что вместо пары операторов (D_t, D_x) мы теперь имеем $(d/dt, D_x)$.

Преобразуем несколько разностную модель (4.122), (4.123), чтобы повысить порядок аппроксимации.

С помощью полного набора разностных инвариантов (4.121) мы можем добавить некоторые члены к уравнениям (4.123), (4.124) без нарушения их инвариантности. Симметризуем схему следующим образом:

$$\hat{x} = x + \frac{h^+}{2} - \tau\frac{u + u^+}{2}, \tag{4.128}$$

$$\hat{u} = \frac{u + u^+}{2} + \tau \underset{h}{u}_{x\bar{x}x}, \tag{4.129}$$

где

$$\underset{h}{u}_{x\bar{x}x} \equiv \frac{1}{h^+}\left(\frac{u^{++} - u^+}{h^{++}} - \frac{u^+ - u}{h^+}\right)\frac{2}{h^{++} + h^+} - \\ - \frac{1}{h^+}\left(\frac{u^+ - u}{h^+} - \frac{u - u^-}{h^-}\right)\frac{2}{h^+ + h^-}.$$

Схема (4.128), (4.129) означает, что мы используем шаблон, представленный на рис. 4.9.

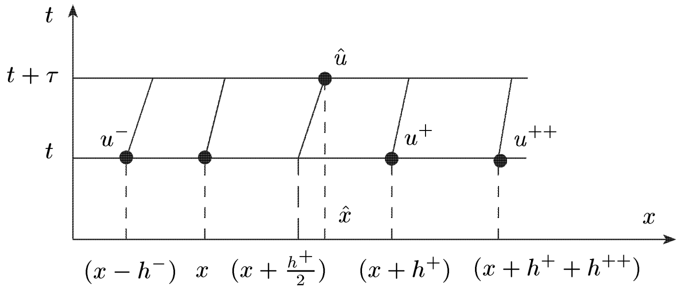

Рис. 4.9

Легко оценить порядок аппроксимации схемы (4.128), (4.129) и (4.122), (4.123) на равномерной сетке, когда $h^{++} = h^+ = h^- = h$. Для схемы (4.122), (4.123) порядок аппроксимации равен $O(\tau + h)$, схема (4.128), (4.129) имеет порядок $O(\tau + h^3)$. Для того, чтобы оценить порядок аппроксимации на неравномерной сетке, нужно использовать соответствующие нормы (см. [40]).

С алгебраической точки зрения схемы (4.122), (4.123) и (4.128), (4.129) тождественны, так как обе они инвариантны относительно операторов (4.120). Следует подчеркнуть, что инвариантная сетка и схема для системы (4.124), (4.125) не единственны, но все остальные инвариантные сетки и схемы также могут быть представлены с помощью разностных инвариантов (4.121).

Рассмотрим инвариантные решения разностных уравнений (4.122), (4.123).

Оператор $X_3 = t\partial/\partial x - \partial/\partial u$ нарушает ортогональность сетки и потому эта симметрия не может быть сохраненна в дискретной модели с ортогональной сеткой. Интересно поэтому проверить, сохраняется ли симметрия Галилея в нашей модели (4.122), (4.123).

Оператор X_3 имеет два инварианта в подпространтсве (x, t, u):

$$J_1 = t \qquad J_2 = u + x/t,$$

поэтому мы будем искать инвариантное решение в виде

$$u(x,t) = v(t) - \frac{x}{t}. \tag{4.130}$$

Подставляя (4.130) в оба уравнения (4.122), (4.123), получаем систему обыкновенных разностных уравнений

$$\frac{\hat{x} - x}{\tau} = \frac{x}{t} - v(t), \quad \frac{\hat{x}}{t+\tau} - \frac{x}{t} = v(t+\tau) - v(t). \tag{4.131}$$

Легко проверить, что решением системы (4.131) является $x = at + c$, $v(t) = c/t$, откуда получаем решение начальной системы (4.122), (4.123)

$$x = at + c, \quad u(x,t) = \frac{c - x}{t}, \quad c = \mathrm{const}, \tag{4.132}$$

которое в точности совпадает с решением дифференциальной системы (4.124), (4.125).

Сетка (4.122), соответствующая решению (4.132), представлена на рис. 4.10. Заметим, что сетка остается равномерной для каждого временного слоя, если она изначально равномерна $(h^{++} = h^+ = h^- = h)$.

Таким образом, уравнение (4.122) соответствует семейству сеток, которые являются адаптивными к симметрии подгрупп.

Рассмотрим законы сохранения уравнения Кортевега–де Вриза и "выпрямляющую" замену переменных.

Известно, (см. [53]), что уравнение Кортевега–де Вриза обладает следующим набором законов сохранения:

$$D_t(u) - D_x\left(\frac{u^2}{2} + u_{xx}\right) = 0, \qquad D_t(u^2) + D_x\left(u_x^2 - 2uu_{xx} - \frac{2}{3}u^3\right) = 0,$$

$$D_t\left(t\frac{u^2}{2} + xu\right) + D_x\left[t\left(\frac{u_x^2}{2} - uu_{xx} - \frac{u^3}{3}\right) + u_x - xu_{xx} - x\frac{u^2}{3}\right] = 0,$$

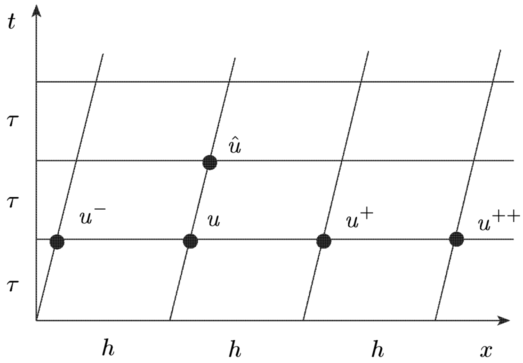

Рис. 4.10

$$D_t(u^3 - 3u_x^2) + D_x\left(6u_t u_x - 3u_{xx}^2 - 3u^2 u_{xx} - \frac{3}{4}u^4\right) = 0. \qquad (4.133)$$

Законы сохранения (4.133) выписаны с помощью коммутирующей пары операторов D_t, D_x. При переходе в лагранжеву систему координат эта ситуация меняется. Теперь у нас есть следующие коммутаторы для d/dt, D_x и D_t:

$$\left[\frac{d}{dt}, D_t\right] = u_t D_x, \quad \left[\frac{d}{dt}, D_x\right] = u_x D_x. \qquad (4.134)$$

Заменим систему координат так, чтобы иметь пару коммутирующих операторов:

$$\left[\frac{d}{dt}, D_s\right] = 0, \qquad (4.135)$$

где s — новая независимая координата, удовлетворяющая условию:

$$s_t - us_x = 0.$$

Вводя новую независимую переменную ρ, связывающую операторы D_s и D_x:

$$\begin{aligned} D_s &= \frac{1}{\rho} D_x, \\ D_s &= \frac{\partial}{\partial s} + u_s\frac{\partial}{\partial u} + \rho_s\frac{\partial}{\partial \rho} + \ldots, \end{aligned} \qquad (4.136)$$

из уравнения (4.134) получим, что новая переменная ρ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\rho_t - u_x\rho - u\rho_x = 0. \qquad (4.137)$$

Уравнение (4.137) нужно дополнить условием $\rho > 0$, означающим, что не существует “вакуумных” областей между x и s.

Итак, мы изменили систему координат $\{t, x, u(t,x)\}$ на $\{t, s, u(t,s), \rho(t,s)\}$ с помощью преобразования

$$ds = \rho\, dx + \rho u\, dt, \quad u(t,x) = u(t,s), \quad \frac{dx}{dt} = -u, \quad \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{1}{\rho}. \tag{4.138}$$

В новой системе координат мы получаем следующие дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \rho^3 u_{sss} + 3\rho^2 \rho_s u_{ss} + (\rho\rho_s^2 + \rho^2\rho_{ss}) u_{ss}, \\ \frac{d\rho}{dt} &= \rho^2 u_s. \end{aligned} \tag{4.139}$$

На решениях системы (4.138) справедливы следующие законы сохранения:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) + D_s(u) = 0, \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{u}{\rho}\right) + D_s\left(\frac{u^2}{2} - \rho^2 u_{ss} + \rho\rho_s u_s\right) = 0. \end{aligned} \tag{4.140}$$

Добавляя переменную x в виде некоторого потенциала, мы получим дополнительные уравнения к системе (4.138)

$$\frac{dx}{dt} = -u, \quad \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{1}{\rho}. \tag{4.141}$$

Для системы (4.138), (4.140) справедливы законы сохранения (4.139), а также один дополнительный, соответствующий галилеевой симметрии:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{tu^2/2 + xu}{\rho}\right) + D_s\left(t\left(\frac{\rho^2 u_s^2}{2} - \rho u(\rho u_s)_s + \frac{u^3}{6}\right) + \right.& \\ \left. + \rho u_s - x\rho(\rho u_s)_s + \frac{xu^2}{2}\right) = 0.& \end{aligned} \tag{4.142}$$

Совершенно очевидно, что можно построить инвариантную схему и сетку для системы (4.138), (4.140) так же, как мы сделали это для системы (4.124), (4.125).

В работе [74] аналогичным способом построены инвариантные разностные схемы на подвижных сетках для уравнений Кортевега–де Вриза с переменными коэффициентами.

4.10. Инвариантная разностная модель нелинейного уравнения Шрёдингера. Уравнение Шрёдингера с кубической нелинейностью

$$iE_t + E_{xx} + E|E|^2 = 0 \tag{4.143}$$

допускает четырехпараметрическую группу точечных преобразований *) (см. [53]).

Сделаем предварительно замену переменных, перейдя к двум действительным зависимым переменным:

$$E = A(t,x)e^{i\Phi(t,x)}. \tag{4.144}$$

Система уравнений

$$A_t + 2A_x\Phi_x + A\Phi_{xx} = 0,$$

$$A\Phi_t + 2A\Phi_x^2 - A_{xx} - A^3 = 0, \tag{4.145}$$

эквивалентная (4.143), допускает следующие операторы:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial \Phi},$$

$$X_4 = 2t\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial \Phi}, \quad X_5 = 2t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} - A\frac{\partial}{\partial A}. \tag{4.146}$$

Как и в большинстве рассмотренных нами эволюционных уравнениях, симметрия системы (4.145) не позволяет использовать ортогональную сетку — оператор X_4 нарушает ортогональность сетки, но сохраняет плоскость временного слоя. Таким образом, нам опять приходится использовать сетку, эволюционирующую со временем (см. рис. 4.11).

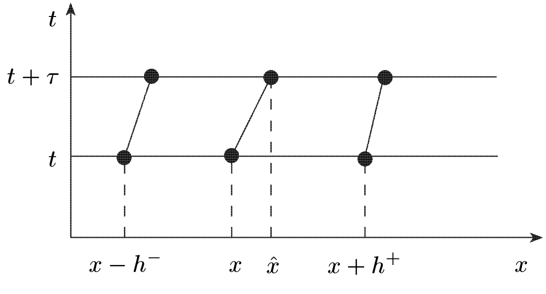

Рис. 4.11

*) Уравнение (4.143) допускает также бесконечную серию высших и нелокальных симметрий (см., например, [53]), которые мы здесь не рассматриваем.

Построим явные инвариантные разностные уравнения для расчета сетки и решения A, Φ (см. [1, 67]). В подпространстве $(x, \hat{x}, t, \tau, h^+, h^-, \Phi, \Phi^+, \Phi^-, \hat{\Phi}, A, A^+, A^-, \hat{A})$, соответствующем явному шаблону, имеется $14 - 5 = 9$ разностных инвариантов:

$$\frac{\Delta x - 2\tau \underset{h}{\Phi}_x}{h^+}, \quad \frac{\Delta x - 2\tau \underset{h}{\Phi}_{\bar{x}}}{h^-}, \quad \frac{h^+}{h^-}, \quad \frac{\tau}{(h^+)^2},$$

$$\frac{A}{A^+}, \quad \frac{A}{A^3}, \quad \frac{A}{\hat{A}}, \quad \tau a^2, \quad \frac{(\Delta x)^2 - 4\tau(\hat{\Phi} - \Phi)}{(h^+)^2}, \tag{4.147}$$

где $\Delta x = \hat{x} - x$.

Выберем эволюционирующую сетку в следующем инвариантном представлении:

$$\Delta x = 2\tau \left(\frac{h^-}{h^+ + h^-} \underset{h}{\Phi}_x + \frac{h^+}{h^+ + h^-} \underset{h}{\Phi}_{\bar{x}} \right). \tag{4.148}$$

Континуальный предел дает нам следующее уравнение:

$$\frac{dx}{dt} = 2\Phi_x. \tag{4.149}$$

Уравнение (4.149) предписывает нам следующую запись для системы (4.145):

$$\frac{dA}{dt} = -A\Phi_{xx},$$
$$\frac{d\Phi}{dt} = \Phi_x^2 + \frac{A_{xx}}{A} + A^2, \tag{4.150}$$

где введен оператор лагранжева дифференцирования

$$\frac{d}{dt} = D_t + 2\Phi_x D_x. \tag{4.151}$$

Система (4.150) может быть аппроксимирована с помощью инвариантов (4.147) на сетке (4.148) следующим образом:

$$\frac{\hat{A} - A}{\tau} + \frac{2A}{h^+ + h^-} \left(\underset{h}{\Phi}_x - \underset{h}{\Phi}_{\bar{x}} \right) = 0,$$

$$\left\{ \frac{\hat{\Phi} - \Phi}{\tau} - \left(\frac{h^-}{h^+ + h^-} \underset{h}{\Phi}_x + \frac{h^+}{h^+ + h^-} \underset{h}{\Phi}_{\bar{x}} \right)^2 \right\} A -$$
$$- 2\frac{\underset{h}{A}_x - \underset{h}{A}_{\bar{x}}}{h^+ + h^-} - A^3 = 0. \tag{4.152}$$

Можно показать, что инвариантная разностная модель (4.148), (4.152) аппроксимирует систему (4.149), (4.150) с порядком $O(\tau + h^2)$.

Инвариантные решения схемы (4.148), (4.152) были исследованы в работе [1].

§ 5. Дискретное представление дифференциальных уравнений (точные разностные схемы)

В этом параграфе мы более четко сформулируем соотношение объектов, с которыми имеем дело, — дифференциальных и разностных уравнений и групп преобразований, которые они допускают; а также получим многообразие, необходимое для замыкания такого соотношения, - *дискретное представление дифференциальных уравнений.*

1. В "непрерывном" пространстве $\widetilde{Z} = (x, u, u_1, u_2, \ldots)$ группа Тейлора с инфинитезимальным оператором D позволила нам ввести формальные степенные ряды специального вида — конечно-разностные производные.

Всякое разностное уравнение

$$\underset{h}{F}(z) = 0, \tag{5.1}$$

$\underset{h}{F} \in \underset{h}{A}$, связывающее в сеточном пространстве $\underset{h}{Z}$ конечно-разностные переменные $(x, u, \underset{h}{u}_1, \underset{h}{u}_2, \ldots, h)$, может быть записано в $\widetilde{Z}$ с помощью тейлоровского представления сеточных переменных:

$$F(z) = 0, \tag{5.2}$$

где F — локально-аналитическая функция от конечного числа формальных степенных рядов специального вида (см. гл. I).

Пример. Пусть в $\widetilde{Z}$ задано обыкновенное дифференциальное уравнение

$$u_{xx} = u^2, \tag{5.3}$$

а в $\underset{h}{Z}$ — конечно-разностное уравнение, аппроксимирующее (5.3) со вторым порядком по h,

$$\underset{h}{v}_{x\bar{x}} = v^2. \tag{5.4}$$

Чтобы представить (5.4) в $\widetilde{Z}$, надо использовать формулу Тейлора для $\underset{h}{v}_{x\bar{x}}$:

$$\underset{h}{v}_{x\bar{x}} = \underset{-h}{D}\,\underset{+h}{D}(v) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-h)^{s-1}}{s!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^{k-1}}{k!} D^{s+k}(v).$$

Таким образом, уравнение (5.4) в $\widetilde{Z}$ выглядит так:

$$\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-h)^{s-1}h^{k-1}}{s!k!}\,v_{s+k}=v^2, \tag{5.5}$$

где v_m — производная по x m-го порядка. Представление (5.5) позволяет рассмотреть приближенный объект — *дифференциальное приближение разностного уравнения.* Например, отбросив в (5.5) члены, имеющие больший порядок малости по сравнению с h^2, получим первое дифференциальное приближение (5.4)

$$v_2+\frac{h^2}{12}v_4=v^2. \tag{5.6}$$

Учитывая члены следующего порядка малости, аналогично получим второе, третье и т. д. дифференциальные приближения разностного уравнения.

З а м е ч а н и е. Дифференциальное приближение любого конечного порядка занимает в $\widetilde{Z}$ промежуточное положение между разностным уравнением (в непрерывном представлении) и дифференциальным уравнением в *функционально-аналитическом* смысле. Близость дифференциального приближения к разностному уравнению и к дифференциальному в смысле аппроксимации не гарантирует его близости в алгебраическом аспекте, в частности, близости их групповых свойств.

2. Итак, в $\widetilde{Z}$ и $\underset{h}{Z}$ у нас есть три объекта: дифференциальное уравнение (система), разностное уравнение и непрерывное представление разностного уравнения. Симметрия требует наличия четвертого объекта — точного выражения для дифференциального уравнения в сеточном пространстве $\underset{h}{Z}$. Ранее нами было получено для оператора группы Тейлора

$$D=\frac{\partial}{\partial x}+u_1\frac{\partial}{\partial u}+u_2\frac{\partial}{\partial u_1}+\ldots \tag{5.7}$$

его представление в сеточном пространстве

$$D^{\pm}=\frac{\partial}{\partial x}+\underset{\pm h}{\widetilde{D}}(u)\frac{\partial}{\partial u}+\underset{\pm h}{\widetilde{D}}(\underset{h}{u}_s)\frac{\partial}{\partial \underset{h}{u}_s}+\ldots, \tag{5.8}$$

где $\underset{\pm h}{\widetilde{D}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(\mp h)^{n-1}}{n}\underset{\pm h}{D}^{n}$. Соответствие между дифференциальными переменными и конечно-разностными дается формулой Лагранжа:

$$D \Longleftrightarrow \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-h)^{n-1}}{n} \underset{+h}{D}{}^{n}, \\[2ex] \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(+h)^{n-1}}{n} \underset{-h}{D}{}^{n}. \end{cases} \tag{5.9}$$

Формула (5.9) позволяет представить конечно-разностные переменные в $\widetilde{Z}$ и тем самым любое разностное уравнение $F(z) = 0$, если $F \in \underset{h}{A}$.

Пример. Рассмотренное нами уравнение

$$u_2 = u^2,$$

с помощью формулы Лагранжа (5.9) мы запишем в сеточном пространстве $\underset{h}{Z}$:

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{(\mp h)^{s-1}}{s} \underset{\pm h}{D}{}^{s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mp h)^{n-1}}{n} \underset{\pm h}{D}{}^{n}(u) = u^2. \tag{5.10}$$

Формула (5.9) дает неоднозначное представление для дифференциальных переменных: используется либо правая, либо левая полуось, либо вся ось независимой переменной x. При увеличении порядка производной u_s число ее дискретных представлений увеличивается. Так, представление (5.10) содержит в себе следующие четыре формы:

$$\begin{aligned} &\text{I. } \sum_{s,n=1}^{\infty} \frac{(-h)^{s+n-2}}{s} \underset{+h}{D}{}^{s+n}(u) = u^2; \\ &\text{II. } \sum_{s,n=1}^{\infty} \frac{h^{s+n-2}}{s} \underset{-h}{D}{}^{s+n}(u) = u^2; \\ &\text{III. } \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-h)^{s-1} h^{n-1}}{sn} \underset{+h}{D}{}^{s} \underset{-h}{D}{}^{n}(u) = u^2; \\ &\text{IV. } \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{s-1} (-h)^{n-1}}{sn} \underset{-h}{D}{}^{s} \underset{+h}{D}{}^{n}(u) = u^2. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Выражения (5.11) представляют в разностном виде дифференциальные уравнения (5.3), которые мы будем называть “точной разностной схемой" для (5.3), или дискретным представлением дифференциального уравнения.

В данном одномерном случае равномерной сетки операторы $\underset{+h}{D}$ и $\underset{-h}{D}$ коммутируют, и III и IV представления в (5.11) совпадают. Представления I и II переходят друг в друга с помощью дискретной группы отражения: $x \to -x$, при этом $h \to -h$; $\underset{+h}{S} \to \underset{-h}{S}$; $\underset{+h}{D} \to \underset{-h}{D}$, а представления III и IV инвариантны относительно отражения.

Таким образом, существенно различными являются представления I (II) и III (IV), использующих для записи дифференциального уравнения полуось или всю ось независимой переменной; или, с алгебраической точки зрения, допустимость группы отражения. С последней точки зрения объекты III, IV предпочтительнее, поскольку исходное ОДУ допускает группу отражения.

В подробной записи, отбросив члены, меньшие $O(h^2)$, из уравнения (5.11) получим

$$
\begin{gathered}
\underset{h}{u}_{xx} - h\underset{h}{u}_{xxx} + O(h^2) = u^2,\\
\underset{h}{u}_{\bar{x}\bar{x}} + h\underset{h}{u}_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}} + O(h^2) = u^2,\\
\underset{h}{u}_{\bar{x}x} + \frac{h}{2}(\underset{h}{u}_{\bar{x}\bar{x}x} - \underset{h}{u}_{\bar{x}xx}) + O(h^2) = u^2,\\
\underset{h}{u}_{x\bar{x}} + \frac{h}{2}(\underset{h}{u}_{\bar{x}\bar{x}x} - \underset{h}{u}_{\bar{x}xx}) + O(h^2) = u^2.
\end{gathered}
\tag{5.12}
$$

Конечно-разностные уравнения

$$
\begin{gathered}
\underset{h}{u}_{xx} - h\underset{h}{u}_{xxx} = u^2,\\
\underset{h}{u}_{\bar{x}\bar{x}} + h\underset{h}{u}_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}} = u^2,\\
\underset{h}{u}_{x\bar{x}} - \frac{h^2}{2}\underset{h}{u}_{x\bar{x}x\bar{x}} = u^2,
\end{gathered}
\tag{5.13}
$$

можно назвать *первым разностным приближением* соответствующего *дифференциального уравнения* в сеточном пространстве $\underset{h}{Z}$. Из (5.13) видно, в частности, что наличие группы отражения в представлении III (IV) обеспечивает второй порядок аппроксимации. Разностное приближение (любого порядка) некоторого диффференциального уравнения является конечно-разностным уравнением конечного порядка и может быть использовано для приближенного разностного моделирования данного уравнения.

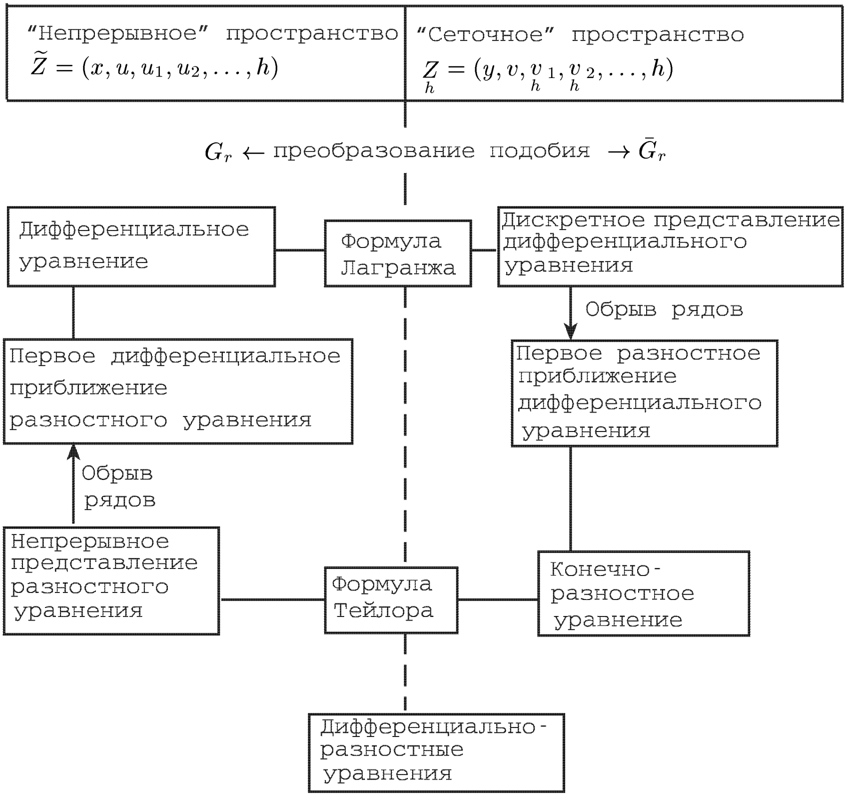

Рис. 5.1

Ясно, что ситуация в разобранном нами примере имеет общий характер, который схематично изображен на рис. 5.1. Вертикальные стрелки в таблице означают обрыв соответствующих рядов непрерывных или разностных переменных; производя обрыв рядов на различных порядках, получим первое, второе, и т. д. приближения соответствующего объекта.

Заметим, что в обозначениях пространств $\widetilde{Z}$ и $\underset{h}{Z}$ мы использовали различные обозначения зависимых и независимых переменных (x, u) и (y, v), которые в разобранных нами примерах для простоты считались тождественно совпадающими, $x = y, u = v$. Кроме того, пространство $\widetilde{Z}$ должно быть дополнено нелокальной переменной h, поскольку непрерывное представление конечно-разностного уравнения содержит шаг сетки h.

Дифференциально-разностные уравнения, часто используемые при анализе разностных схем (см. [31, 49, 86, 87, 100]), занимают самостоятельное положение в приведенной схеме.

3. Рассмотрим на том же примере, как действует группа на четыре модели, перечисленных на рис. 5.1.

Рассмотрев произведение пространств $\widetilde{Z}$ и $\underset{h}{Z}$

$$\underset{h}{\widetilde{Z}} = (x, u, u_1, u_2, \ldots, h; y, v, \underset{h}{v}_1, \underset{h}{v}_2, \ldots, h),$$

мы можем переход из $\widetilde{Z}$ в $\underset{h}{Z}$ и обратно трактовать как *замену переменных* (точечное преобразование) в $\underset{h}{\widetilde{Z}}$:

$$y = f(x, u), \qquad v = g(x, u). \tag{5.14}$$

(В более общем случае такую замену (5.14) можно предполагать и нелокальной.)

Уравнение

$$u_{xx} = u^2,$$

в $\widetilde{Z}$ допускает группу G_2

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial u}, \qquad X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} - 2u\,\frac{\partial}{\partial u}. \tag{5.15}$$

Перейдем к подобной группе в $\underset{h}{Z}$, используя известные формулы для замены переменных в инфинитизимальном операторе. Мы будем использовать простейшую замену типа (5.14) — тождественное преобразование в подпространстве (x, u, h, y, v, h):

$$y = x, \qquad v = u. \tag{5.16}$$

Для того чтобы получить выражения для коэффициентов операторов X_i (5.15) в $\underset{h}{Z}$, надо подействовать на замену (5.14),

$$\bar{X}_i = X_i(f(x, u))\frac{\partial}{\partial y} + X_i(g(x, u))\frac{\partial}{\partial v}, \quad i = 1, 2. \tag{5.17}$$

Откуда получим

$$\bar{X}_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad \bar{X}_2 = y\frac{\partial}{\partial y} - 2v\frac{\partial}{\partial v}. \tag{5.18}$$

Теперь осталось лишь продолжить $\bar{X}_2$ на конечно-разностные переменные ($\bar{X}_1$ — “непродолжаем”). Обозначив

$$\underset{h}{v}_1 = \underset{+h}{D}(v), \quad \underset{h}{v}_2 = \underset{-h}{D}\,\underset{+h}{D}(v), \quad \ldots$$

и используя формулы продолжения гл. I, получим

$$\bar{X}_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \bar{X}_2 = y\frac{\partial}{\partial y} - 2v\frac{\partial}{\partial v} - 3\underset{h}{v}_1\frac{\partial}{\partial v_1} - 4\underset{h}{v}_2\frac{\partial}{\partial \underset{h}{v}_2} - \\ - (n+2)\underset{h}{v}_n\frac{\partial}{\partial \underset{h}{v}_n} + \ldots + h\frac{\partial}{\partial h}. \quad (5.19)$$

Группа $\bar{G}_2$ с операторами (5.19) действует в сеточном пространстве $\underset{h}{Z}$ и подобна группе G_2 с операторами (5.15).

Убедимся, что дискретные представления (5.11) дифференциального уравнения в $\underset{h}{Z}$ допускают (5.19). Представление (5.11) мы запишем в тех же обозначениях,

$$\sum_{s,n=1}^{\infty} \frac{(-h)^{s+n-2}}{sn}\underset{h}{v}_{n+s} - v^2 = 0. \quad (5.20)$$

Ясно, что (5.20) допускает оператор $\bar{X}_1$. Действие $\bar{X}_2$ на (5.20) дает

$$\sum_{s,n=1}^{\infty} \frac{(s+n-2(-h)^{s+n-2})}{sn}\underset{h}{v}_{n+s} - \\ - \sum_{s,n=1}^{\infty} \frac{(-h)^{s+n-2}}{sn}(n+s+2)\underset{h}{v}_{n+s} + 4v^2 = 0,$$

или, после несложных выкладок,

$$-4\left(\sum_{s,n=1}^{\infty} \frac{(-h)^{s+n-2}}{sn}\underset{h}{v}_{n+s} - v^2\right) = 0,$$

откуда видно, что разностное уравнение бесконечного порядка (5.20) инвариантно относительно $\bar{G}_2$.

Аналогично можно убедиться в инвариантности и остальных представлений (5.11) относительно операторов (5.19).

В $\underset{h}{Z}$ нами было рассмотрено уравнение

$$\underset{h}{v}_{x\bar{x}} - v^2 = 0, \quad (5.21)$$

которое было сконструировано с гарантированным качеством инвариантности относительно группы $\bar{G}_2$ с операторами (5.19). Уравнение (5.21), как это видно из (5.13), является “нулевым” разностным приближением представления III (IV) (5.11), т. е. отличается на $O(h^2)$ от разностного уравнения бесконечного порядка формы III (IV) (5.11). В этом смысле разностное уравнение (5.21) является самой естественной аппроксимацией для (5.11).

Приведенные ранее примеры показывают, что не всякое разностное уравнение, аппроксимирующее III (IV) (5.11) с порядком $O(h^2)$ будет инвариантно относительно $\bar{G}_r$.

4. Рассмотрим теперь представление (5.21) в $\widetilde{Z}$,

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-h)^{s-1}}{s!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{n-1}}{n!} D^{s+n}(u) - u^2 = 0. \tag{5.22}$$

Группу G_2, подобную $\bar{G}_2$, мы продолжаем на переменные u_s и h:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x},$$
$$X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} - 2u\frac{\partial}{\partial u} - 3u_1\frac{\partial}{\partial u_1} - 4u_2\frac{\partial}{\partial u_2} - \ldots - (n+2)u_n\frac{\partial}{\partial u_n} + h\frac{\partial}{\partial h}.$$

Действие X_1 на (5.22) равно нулю, действие X_2 на (5.22) дает

$$-\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-h)^{s-1}h^{n-1}}{s!n!}(s+n+2)u_{s+n} + \\ + \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-h)^{s-1}h^{s-1}}{s!n!}(s+n-2)u_{s+n} + 4u^2 = 0,$$

откуда получаем

$$-4\left(\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-h)^{s-1}h^{n-1}}{s!n!}u_{s+n} - u^2\right)\Bigg|_{(5.22)} = 0,$$

т. е. (5.22) допускает, очевидно, группу G_2, подобную $\bar{G}_2$.

Таким образом, в $\underset{h}{\widetilde{Z}}$ действует одна и та же группа, ее представление в $\widetilde{Z}$ и $\underset{h}{Z}$ отличается на преобразование подобия и распространяется на дифференциальные (u_s) и разностные переменные $(\underset{h}{v}_n)$ с помощью различных формул продолжения. Дифференциальное уравнение и его дискретное представление в $\underset{h}{Z}$ допускают подобные группы G_r и $\bar{G}_r$. Произвольная разностная схема, близкая в смысле аппроксимации к данному дискретному представлению, вообще говоря, не обязана допускать данную группу $\bar{G}_r$. В этой части был предложен один из способов, позволяющих получать схему, допускающих ту же группу $\bar{G}_r$. Непрерывное представление (“бесконечное дифференциальное приближение”) такой схемы допускает в $\widetilde{Z}$ группу, подобную $\bar{G}_r$, т. е. G_r.

Приближенные модели — дифференциальные приближения разностных схем и разностные приближения дифференциальных уравнений и дифференциально-разностные уравнения требуют рассмотрения с точки зрения приближенных групп. Эти приближенные модели, вообще говоря, не обязаны наследовать группы G_r и $\bar{G}_r$ точных моделей.

Дифференциально-разностные модели (многие авторы рассматривают эволюционные уравнения, у которых время непрерывно, а пространственный оператор — разностный, см., например, [59, 60, 79, 86, 87, 100]) представляют собой объекты, для которых требуется “симбиоз” классического группового анализа с разностным. В некотором смысле такие уравнения легче для исследования, поскольку для них снимается вопрос об инвариантности пространственной структуры сетки.

5. *Пример точной разностной схемы для нелинейного ОДУ.* Рассмотрим пример, когда точную разностную схему можно представить в конечном виде, а не в виде рядов. Построим точную схему для обыкновенного дифференциального уравнения

$$u_{xx} = u^{-3}, \tag{5.23}$$

рассмотренного в п. 4.1 (см. [73]).

Напомним, что уравнение (5.23) допускает трехпараметрическую группу точечных преобразований, генерируемую следующими операторами:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = 2x\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_3 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + xu\frac{\partial}{\partial u}. \tag{5.24}$$

Уравнение (5.23) можно рассматривать как уравнение Эйлера инвариантного функционала с функцией Лагранжа $\left(\dfrac{1}{u^2} - u_x^2\right)$.

В соответствии с теоремой Нётер у уравнения (5.23) есть три первых интеграла:

$$J_1 = u_x^2 + \frac{1}{u^2} = A^0, \quad J_2 = 2\frac{x}{u^2} - 2(u - u_x x)u_x = 2B^0,$$
$$J_3 = \frac{x^2}{u^2} + (u - xu_x)^2 = C^0.$$

В качестве разного аналога лагранжиана $\left(\dfrac{1}{u^2} - u_x^2\right)$ можно выбрать следующий:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{uu^+} - \left(\frac{u^+ - u}{h^+}\right)^2,$$

который определен на двух точках некоторой разностной сетки $\underset{h}{\omega}$ (см. рис. 5.2).

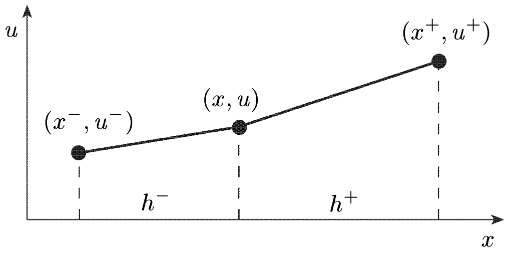

Рис. 5.2

В п. 4.1 были построены конечно-разностные инварианты группы G_3:

$$J_1 = \frac{h^+}{uu^+}, \quad J_2 = \frac{h^-}{uu^-}, \quad J_3 = u^2 u^- \frac{\underset{h}{u}_{x} - \underset{h}{u}_{\bar{x}}}{h^-}. \tag{5.25}$$

Эти инварианты позволили выписать инвариантную сетку

$$\frac{h^+}{uu^+} = \epsilon, \qquad \frac{h^-}{uu^-} = \epsilon, \qquad \epsilon = \text{const}, \quad 0 < \epsilon \ll 1, \tag{5.26}$$

и разностное уравнение

$$\frac{\underset{h}{u}_{x} - \underset{h}{u}_{\bar{x}}}{h^-} = \frac{1}{u^2 u^-}, \tag{5.27}$$

апроксимирующее *со вторым порядком* исходное уравнение (5.23).

Точное решение инвариантной схемы (5.26), (5.27) равномерно близко к точному решению исходного ОДУ (5.23):

$$A_0 u^2 = (A_0 x + B_0)^2 + 1. \tag{5.28}$$

В связи с этим возникает вопрос: нельзя ли построить *точную* разностную схему для уравнения (5.23)?

Если ДА, то такая схема обязана допускать ту же группу преобразований, что и ОДУ (5.23). Будучи инвариантной, такая схема и сетка должны быть представимы с помощью разностных инвариантов (5.25).

Оказывается, построить точную схему можно исходя из следующего разностного лагранжиана:

$$\mathcal{L} = \frac{\delta}{uu^+} - \left(\frac{u^+ - u}{h^+}\right)^2, \tag{5.29}$$

где $\delta = \text{const}$ пока не определена. Подробно вариационная процедура построения разностных схем будет обсуждена в третьей главе. Эта процедура дает на той же инвариантной сетке

$$\frac{h^+}{uu^+} = \epsilon, \qquad \frac{h^-}{uu^-} = \epsilon, \qquad \epsilon = \text{const}, \quad 0 < \epsilon \ll 1, \tag{5.30}$$

следующее разностное уравнение:

$$\frac{\underset{h}{u}_x - \underset{h}{u}_{\bar{x}}}{h^-} = \frac{\delta}{u^2 u^-}. \tag{5.31}$$

Подстановка точного решения (5.28) в схему (5.30), (5.31) определяет константу δ:

$$\delta = 2\frac{1 - \sqrt{1 - \epsilon^2}}{\epsilon^2}. \tag{5.32}$$

Таким образом, полученная схема (5.30), (5.31) с константой (5.32) представляет собой точную схему для ОДУ (5.23), т. е. семейство решений (5.28) ОДУ (5.23) удовлетворяет этой схеме тождественно. Разумеется, точная схема (5.30), (5.31) дает множество точек на точной кривой, а не гладкую кривую; при этом плотность точек на кривых зависит от параметра ϵ.

Применение разностного аналога теоремы Нётер дает следующие первые интегралы (см. гл. III):

$$1)\ \underset{h}{u}_x{}^2 + \frac{\delta}{uu^+} = A^0 = \text{const};$$

$$2)\ \frac{2x + h^+}{2}\underset{h}{u_x}{}^2 + \delta\frac{2x + h^+}{2uu^+} - \frac{u + u^+}{2}\underset{h}{u}_x = B^0 = \text{const}; \tag{5.33}$$

$$3)\ \delta\frac{x(x + h^+)}{uu^+} + \left(\frac{u + u^+}{2} - \frac{2x + h^+}{2}\underset{h}{u}_x\right)^2 = C^0 = \text{const}.$$

Важно отметить, что первые интегралы (5.23) являются разностными, т. е. нелокальными, и они не могут быть получены из классической теоремы Нётер.

З а м е ч а н и я. 1) Оказывается, инвариантная приближенная схема и точная схема связаны преобразованием подобия. Точнее, растяжение

x или u, или их комбинация

$$\widetilde{x} = x \cdot \alpha^2 \sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{4}}, \qquad \widetilde{u} = u \cdot \alpha,$$

где $\alpha \neq 0$ — произвольная константа, переводит инвариантную схему (5.26), (5.27) в точную схему (5.30), (5.31).

2) Преобразуя ОДУ (5.23), можно найти *дифференциальное уравнение, для которого приближенная инвариантная схема* (5.26), (5.27) *является точной.* Для любого фиксированного ϵ это уравнение выглядит так:

$$u_{xx} = \frac{1}{u^3}\left(1 - \frac{\epsilon^2}{4}\right). \tag{5.34}$$

Таким образом, приближенная инвариантная схема (5.26), (5.27) является точной для приближенного дифференциального уравнения (5.34).

3) Точная схема (5.30), (5.31) имеет “бесконечный порядок аппроксимации”, т. е. точность расчета по ней не зависит от шагов сетки h^+, h^- или от числа точек на заданном отрезке. Минимальное число точек на отрезке в расчете может быть равным трем.

Г Л А В А III

ИНВАРИАНТНЫЕ ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ И КОНСЕРВАТИВНОСТЬ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Известная теорема Э. Нётер [32] устанавливает связь между инвариантностью вариационного функционала и консервативностью соответствующих дифференциальных уравнений Эйлера, т. е. выполнением законов сохранения на их решениях.

В настоящей главе строится разностный аналог этой конструкции (см. [23, 24, 25, 71, 73, 75]). Показывается, что инвариантность сеточного (конечно-разностного) функционала не ведет автоматически к инвариантности соответствующих уравнений Эйлера.

Получено *новое разностное уравнение* (не совпадающее, вообще говоря, с разностным уравнением Эйлера), на решениях которого достигается стационарность функционала при преобразованиях группы. Это уравнение, названное *квазиэкстремальным*, зависит от координат оператора группы и в случае инвариантности функционала обладает соответствующим законом сохранения.

Для пересечения квазиэкстремалей инвариантного функционала удается сформулировать теорему, вполне аналогичную теореме Э. Нётер. Кроме того, для инвариантных разностных уравнений возможна и другая конструкция нётеровского типа. Для этого предлагается отказаться от строгой инвариантности сеточного функционала и заменить ее на условия квазиинвариантности.

Получены условия квазиинвариантности сеточного функционала, приводящее к инвариантности уравнений Эйлера. Доказывается, что выполнение этих условий на экстремалях является необходимым и достаточным условием консервативности разностных уравнений Эйлера.

Заметим, что обе конструкции в континуальном пределе переходят в классическую теорему Нётер.

§ 1. Операторы Эйлера в сеточном пространстве

Выясним, как записывается уравнение Эйлера разностного функционала на различных разностных сетках.

1. Рассмотрим вначале более простой случай — одной независимой переменной x и одной или нескольких зависимых переменных $(u^1, u^2, u^3, \ldots, u^m)$.

Известно, что оператор Эйлера в "непрерывном" пространстве $\widetilde{Z}$ записывается в следующем виде:

$$\frac{\delta}{\delta u} = \frac{\partial}{\partial u} + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s D^s \left(\frac{\partial}{\partial u_s} \right). \tag{1.1}$$

Представим оператор Эйлера в $\underset{h}{Z}$, считая сетку $\underset{h}{\omega}$ *равномерной*. Будем предполагать, что он применяется к функциям вида $\mathcal{L}(x, u, \underset{h}{u}_1) \in \underset{h}{A}$, заданным на сетке $\underset{h}{\omega}$.

Замечательно, что операторный ряд, играющий ключевую роль в вариационном исчислении, — второе слагаемое в правой части (1.1), "сворачивается" в компактный вид с помощью дискретного дифференцирования $\underset{+h}{D}$, $\underset{-h}{D}$.

Действительно, замечая, что

$$\frac{\partial}{\partial u_s} = \frac{\partial \underset{h}{u}_1}{\partial u_s} \frac{\partial}{\partial \underset{h}{u}_1} = \frac{h^{s-1}}{s!} \frac{\partial}{\partial \underset{h}{u}_1},$$

получим

$$\frac{\delta}{\delta u} = \frac{\partial}{\partial u} - \sum_{s=1}^{\infty} (-h)^{s-1} D^s \left(\frac{\partial}{\partial \underset{h}{u}_1} \right) = \frac{\partial}{\partial u} - \underset{-h}{D} \left(\frac{\partial}{\partial \underset{h}{u}_1} \right), \tag{1.2}$$

где

$$\underset{-h}{D} = \sum_{s \geqslant 1} \frac{(-h)^{s-1}}{s!} D^s$$

— оператор разностного дифференцирования влево.

Заметим, что в формуле (1.2) применяется сначала "непрерывное" частное дифференцирование по первой правой разностной производной $\underset{h}{u}_1$, а затем "дискретное" дифференцирование влево.

Конечно-разностное уравнение

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \underset{-h}{D}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underset{h}{u}_1}\right) = 0, \tag{1.3}$$

будем называть *разностным уравнением Эйлера на равномерной сетке*, функцию $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, u, \underset{h}{u}_1)$ — *сеточной* (конечно-разностной) *функцией Лагранжа*, любое решение уравнения (1.3) — *экстремалью.*

Пример. Пусть $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\underset{h}{u}_1^2 + e^u$, тогда уравнение Эйлера (1.3) будет выглядеть так:

$$\underset{h}{u}_2 - e^u = 0.$$

2. Рассмотрим, как записывается оператор Эйлера (1.1) на одномерной *неравномерной* сетке $\underset{h}{\omega}$. В случае неравномерной сетки операторы сдвига и разностного дифференцирования носят “локальный” характер, т. е. связаны с локальными шагами h^- и h^+ в данной точке x, поэтому

$$\frac{\partial}{\partial u_s} = \frac{\partial \underset{h}{u}_1}{\partial u_s}\frac{\partial}{\partial \underset{h}{u}_1} = \frac{(h^+)^{s-1}}{s!}\frac{\partial}{\partial \underset{h}{u}_1}.$$

В силу этого оператор Эйлера в точке x запишется в виде

$$\frac{\delta}{\delta u} = \frac{\partial}{\partial u} - \sum_{s\geqslant 1}\frac{(-h^+)^{s-1}}{s!}D^s\left(\frac{\partial}{\partial \underset{h}{u}_1}\right), \tag{1.4}$$

где второй член представляет собой разностное дифференцирование влево, но с правым шагом h^+, а не с левым h^-, левое разностное дифференцирование записывается как

$$\sum_{s\geqslant 1}\frac{(-h^-)^{s-1}}{s!}D^s.$$

Перепишем это выражение по-другому:

$$\frac{\delta}{\delta u} = \frac{\partial}{\partial u} - \frac{1}{h^+}\left(\frac{\partial}{\partial \underset{h}{u}_1} - \underset{-h}{S}\frac{\partial}{\partial \underset{h}{u}_1}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial u} - \frac{h^-}{h^+h^-}\left(\frac{\partial}{\partial \underset{h}{u}_1} - \underset{-h}{S}\frac{\partial}{\partial \underset{h}{u}_1}\right) = \frac{\partial}{\partial u} - \left(\frac{h^-}{h^+}\right)\underset{-h}{D}\left(\frac{\partial}{\partial \underset{h}{u}_1}\right). \tag{1.5}$$

Таким образом, уравнение Эйлера на неравномерной сетке можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \left(\frac{h^-}{h^+}\right) \underset{-h}{D} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underset{h}{u}_1}\right) = 0. \tag{1.6}$$

Множитель (h^-/h^+), фигурирующий в (1.6), характеризует пропорции разностного шаблона в данной точке:

$$\frac{h^-}{h^+} = \varphi(x).$$

В случае когда неравномерная сетка удовлетворяет условиям инвариантности, это уравнение представляет собой инвариантное многообразие в $\underset{h}{Z}$ (см. гл. I).

Разностное уравнение Эйлера на нерегулярной сетке можно записать также в виде:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \frac{1}{h^+} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underset{h}{u}_1} - \frac{\partial \check{\mathcal{L}}}{\partial \underset{h}{u}_{\bar{1}}}\right) = 0, \tag{1.6*}$$

где $\check{\mathcal{L}} = \underset{-h}{S}(\mathcal{L}) = \mathcal{L}(\check{x}, \check{u}, \underset{h}{u}_{\bar{1}})$.

3. Рассмотрим оператор Эйлера в *двумерном случае.* Двумерную сетку будем считать прямоугольной и равномерной по каждому направлению (с постоянными шагами h_1 и h_2). Вариационная производная в $\widetilde{Z}$ запишется в следующем виде:

$$\frac{\delta}{\delta u} = \frac{\partial}{\partial u} + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s D_{i_1} \ldots D_{i_s} \frac{\partial}{\partial u_{i_1 \ldots i_s}},$$

где $i_1 \ldots i_s$ — s-мерный набор из индексов $(1, 2)$, D_{i_s} — полное (“непрерывное”) дифференцирование по соответствующему направлению:

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial x^1} + u_1 \frac{\partial}{\partial u} + u_{11} \frac{\partial}{\partial u_1} + u_{21} \frac{\partial}{\partial u_2} + \ldots,$$

$$D_2 = \frac{\partial}{\partial x^2} + u_2 \frac{\partial}{\partial u} + u_{12} \frac{\partial}{\partial u_1} + u_{22} \frac{\partial}{\partial u_2} + \ldots$$

Предполагая, что оператор применяется в $\underset{h}{Z}$ к функциям вида

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(x^1, x^2, u, \underset{h}{u}_1, \underset{h}{u}_2),$$

получим

$$\frac{\delta}{\delta u} = \frac{\partial}{\partial u} + \sum_{s\geqslant 1}(-1)^s \sum_{k+l=s} D_1^k D_2^l \frac{\partial}{\partial u_{1_1\ldots 1_k 2_1\ldots 2_l}} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial u} - \sum_{s\geqslant 1}(-1)^{s-1}\frac{h_1^{s-1}}{s!} D_1^s \frac{\partial}{\partial \underset{h}{u}_1} - \sum_{p\geqslant 1}(-1)^{p-1}\frac{h_2^{p-1}}{p!} D_2^p =$$

$$= \frac{\partial}{\partial u} - \underset{-h}{D}_1\left(\frac{\partial}{\partial \underset{h}{u}_1}\right) - \underset{-h}{D}_2\left(\frac{\partial}{\partial \underset{h}{u}_2}\right).$$

Таким образом, на двумерной равномерной сетке уравнение Эйлера будет выглядеть так:

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \underset{-h}{D}_1\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underset{h}{u}_1}\right) - \underset{+h}{D}_2\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underset{h}{u}_2}\right) = 0. \tag{1.7}$$

4. Аналогичным образом можно получить выражение для оператора Эйлера на двумерной неравномерной прямоугольной сетке $\underset{h}{\omega}$, характеризующейся двумя локальными шагами $h_1^{\pm}$ и $h_2^{\pm}$:

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \frac{h^-{}_1}{h^+{}_1}\underset{-h}{D}_1\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underset{h}{u}_1}\right) - \frac{h^-{}_2}{h^+{}_2}\underset{-h}{D}_2\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underset{h}{u}_2}\right) = 0. \tag{1.8}$$

5. В случае когда лагранжиан зависит от “левых” первых разностных производных $\underset{h}{u}_{\bar{i}}$:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(x^i, u, \underset{h}{u}_1, \underset{h}{u}_{\bar{1}}, \underset{h}{u}_2, \underset{h}{u}_{\bar{2}}, \ldots),$$

можно показать, что уравнение Эйлера запишется в следующем виде:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \frac{h^-{}_i}{h^+{}_i}\underset{-h}{D}_i\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underset{h}{u_i}}\right) - \frac{h^+{}_i}{h^-{}_i}\underset{+h}{D}_i\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underset{h}{u_{\bar{i}}}}\right) = 0, \qquad i = 1, 2. \tag{1.9}$$

Пример. Рассмотрим на сетке $\underset{h}{\omega}$, равномерной по каждому направлению $x^1 = t$, $x^2 = x$, с шагами, соответственно, τ и h, лагранжиан

$$\mathcal{L} = e^{t/\tau_0}\left(\frac{k_0}{6}\,\underset{h}{u_x^3} - \frac{\tau_0}{4}\,\underset{\tau}{u_t^2} - \frac{\tau_0}{4}\,\underset{\tau}{u_{\bar{t}}^2}\right), \tag{1.10}$$

где k_0, τ_0 — некоторые положительные константы. Тогда формула (1.7) дает следующее разностное уравнение Эйлера:

$$\tau_0 \underset{\tau}{u}_{t\bar{t}} + \frac{1}{2} \underset{\tau}{u}_{\bar{t}} \left\{ \frac{\tau_0}{\tau} \left(1 - e^{-\tau/\tau_0}\right) \right\} + \frac{1}{2} \underset{\tau}{u}_{t} \left\{ \frac{\tau_0}{\tau} \left(e^{\tau/\tau_0} - 1\right) \right\} =$$
$$= k_0 \underset{h}{u}_{x\bar{x}} \left(\frac{1}{2} \underset{h}{u}_{x} + \frac{1}{2} \underset{h}{u}_{\bar{x}} \right). \qquad (1.11)$$

Уравнение (1.11) аппроксимирует с порядком $O(\tau^2 + h^2)$ уравнение теплопереноса с учетом релаксации теплового потока (см. [46]):

$$\tau_0 u_{tt} + u_t = k_0 u_x u_x x. \qquad (1.12)$$

§ 2. Критерий инвариантности разностных функционалов

1. Пусть на одномерной сетке $\underset{h}{\omega}$ задан сеточный (конечно-разностный) функционал

$$L = \sum_{\underset{h}{\Omega}} \mathcal{L}(x, u, \underset{h}{u}_1) h^+, \qquad (2.1)$$

где суммирование ведется по конечной или бесконечной области $\underset{h}{\Omega} \subset \underset{h}{\omega}$ (в последнем случае будем предполагать, что $\mathcal{L}$ достаточно быстро стремится к нулю на ∞).

Функционал (2.1) задается на разностной сетке, равномерной или неравномерной. Если сетка равномерна, то $h^+ = h^-$. Неравномерную сетку будем задавать с помощью гладкой функции $\varphi(x)$: $h^+ = \varphi(x)$, при этом $h^- = \varphi(x - h^-)$. Возможна также зависимость φ от u , $h^+ = \varphi(x, u)$, т. е. сетка может зависеть от решения.

Пусть в $\underset{h}{Z} = (x, u, \underset{h}{u}_1, \underset{h}{u}_2, \ldots, h^+)$ задана однопараметрическая группа преобразований G_1, определяемая оператором

$$X = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial u} + \zeta_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + \ldots + h^+ \underset{+h}{D}(\xi) \frac{\partial}{\partial h^+} + h^- \underset{-h}{D}(\xi) \frac{\partial}{\partial h^-}, \qquad (2.2)$$

где функции $\xi, \eta, \underset{h}{\zeta_1}, \ldots \in \underset{h}{A}$, причем $\underset{h}{\zeta_1}, \underset{h}{\zeta_2}, \ldots$ представляют собой линейные разностные формы от ξ, η (см. гл. I).

При преобразованиях группы G_1, генерируемой оператором (2.2), меняется не только сеточный функционал (2.1), но и разностная сетка $\underset{h}{\omega}$, на которой он рассматривается (а вместе с ней и область $\underset{h}{\Omega} \subset \underset{h}{\omega}$). Поэтому в определение преобразования функционала надо ввести преобразование разностной сетки $\underset{h}{\omega}$.

Определение. *Преобразованным значением сеточного функционала* (2.1) на равномерной сетке будем называть сумму

$$L^* = \sum_{\underset{h}{\Omega^*}} \mathcal{L}^*(x, u^*, \underset{h}{u_1^*}) h^{+*}, \qquad h^{+^*} = \varphi(h^{-^*}), \tag{2.3}$$

где, вообще говоря, $\varphi(h^{-*}) \neq h^{-*}$; область суммирования $\underset{h}{\Omega^*}$ получена из области $\underset{h}{\Omega}$ преобразованиями группы G_1. Заметим, что преобразованная область суммирования $\underset{h}{\Omega^*}$ может зависеть от решения u (в том числе и от экстремального), если преобразованное значение x^* зависит от u:

$$x^* = f(x, u, a) = x + a\xi(x, u) + \ldots$$

Определение. Сеточный функционал L будем называть *инвариантным* относительно группы G_1 на равномерной сетке, если для всех преобразований группы G_1 и любых областей суммирования $\underset{h}{\Omega}$ выполняются равенства

$$\sum_{\underset{h}{\Omega}} \mathcal{L}(x, u, \underset{h}{u}_1) h^+ = \sum_{\underset{h}{\Omega^*}} \mathcal{L}(x^*, u^*, \underset{h}{u_1^*}) h^{+*}, \qquad h^{+*} = h^{-*}. \tag{2.4}$$

Выясним, при каких условиях на дискретную функцию Лагранжа $\mathcal{L}(x, u, \underset{h}{u}_1)$ и для каких классов преобразований выполняются условия (2.4). Сделаем замену переменных в (2.4), при которой справа будет суммирование по “старой” области $\underset{h}{\Omega}$:

$$\sum_{\underset{h}{\Omega}} \mathcal{L}(x, u, \underset{h}{u}_1) h^+ = \sum_{\underset{h}{\Omega}} \mathcal{L}(e^{aX}(x), e^{aX}(u), e^{aX}(\underset{h}{u}_1)) e^{aX}(h^+), \tag{2.5}$$

$$h^+ \underset{+h}{D}(f(x, u, a)) = h^- \underset{-h}{D}(f(x, u, a)).$$

Поскольку область суммирования $\underset{h}{\Omega}$ произвольна, то эти равенства эквивалентны следующим:

$$\mathcal{L}(x, u, \underset{h}{u}_1) h^+ = \mathcal{L}^*(x^*, u^*, \underset{h}{u_1^*}) h^{-*}, \qquad h^{+*} = h^{-*}. \tag{2.6}$$

Равенства (2.6) означают, что элементарное действие $\mathcal{L}(x,u,\underset{h}{u}_1)h^+$ является инвариантом группы преобразований G_1 в пространстве $\underset{h}{Z} = (x,u,\underset{h}{u}_1,\underset{h}{u}_2,\ldots,h)$ на инвариантном многообразии $h^+ = h^-$.

Запишем необходимое и достаточное условие инвариантности элементарного действия $\mathcal{L}(x,u,\underset{h}{u}_1)h^+$ на многообразии $h^+ = h^-$ с помощью оператора (2.2). Для этого применим к равенствам (2.6) операцию $\left.\dfrac{\partial}{\partial a}\right|_{a=0}$:

$$\xi\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} + \eta\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u} + [\underset{+h}{D}(\eta) - \underset{h}{u_1}\underset{+h}{D}(\xi)]\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \underset{h}{u}_1} + \mathcal{L}\underset{+h}{D}(\xi) = 0, \tag{2.7}$$

$$\underset{-h}{D}\,\underset{+h}{D}(\xi) = 0.$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1. *Для того чтобы сеточный функционал* (2.1) *был инвариантен на равномерной сетке относительно однопараметрической группы* G_1 *с оператором* (2.2), *необходимо и достаточно выполнение равенств* (2.7).

Первое из равенств (2.7) вполне аналогично соответствующему условию в "непрерывном" случае [32] и формально к нему стремится при $h^+ \to 0$, а второе, естественно, отсутствует. При необходимости равенство (2.7) легко обобщить на "левые" разностные производные $\underset{h}{u}_{\bar{1}} = \underset{h}{u}_1 - h\underset{h}{u}_2$, полусуммы шагов h и т. д.

2. Рассмотрим случай одномерной неравномерной сетки $\underset{h}{\omega}$, характеризующейся в $\underset{h}{Z}$ равенством

$$h^+ = \varphi(x,u), \tag{2.8}$$

где $\varphi \in A$, т. е. случай, когда сетка зависит от решения.
Преобразованным значением функционала (2.1) на сетке (2.8) будем называть выражение

$$L^* = \sum_{\underset{h}{\Omega}} \mathcal{L}^*(x^*,u^*,\underset{h}{u_1^*})h^{+^*}, \qquad h^{+*} = \varphi^*(x^*,u^*), \tag{2.9}$$

где, вообще говоря, $\varphi(z^*) \neq \varphi^*(z^*)$. Заметим, что инвариантная сетка характеризуется той же функцией $\varphi(z^*)$ для шага h^{+*} в новых переменных.

О п р е д е л е н и е. Функционал (2.1) будем называть *инвариантным* на неравномерной сетке (2.8), если выполняются следующие условия:

$$\sum_{\underset{h}{\Omega}} \mathcal{L}(x,u,\underset{h}{u}{}_1)h^+ = \sum_{\underset{h}{\overset{*}{\Omega}}} \mathcal{L}(x^*,u^*,\underset{h}{u}{}_1^*)h^{+*}, \qquad h^{+*} = \varphi(x^*,u^*).$$

Заменим в этом равенстве суммирование по точкам области $\underset{h}{\Omega}$ на эквивалентное суммирование по степеням оператора сдвига $\underset{+h}{S}$:

$$\sum_{\alpha} \underset{+h}{S}{}^{\alpha}(\mathcal{L}(x,u,\underset{h}{u}{}_1)h^+) = \sum_{\alpha}\mathcal{L}(\underset{+h}{S}{}^{\alpha}(x^*),\underset{+h}{S}{}^{\alpha}(u^*),\underset{+h}{S}{}^{\alpha}(\underset{h}{u}{}_1^*))\,\underset{+h}{S}{}^{\alpha}(h^{+*}),$$

$$h^{+*} = \varphi(x^*,u^*). \tag{2.10}$$

Поскольку произвольность области $\underset{h}{\Omega}$ эквивалентна произвольности множества суммирования по индексу α, то из (2.10) следует

$$\mathcal{L}(x,u,\underset{h}{u}{}_1)h^+ = \mathcal{L}(x^*,u^*,\underset{h}{u}{}_1^*)h^{+*}, \qquad h^{+*} = \varphi(x^*,u^*). \tag{2.11}$$

Применяя к (2.11) операцию $\left.\dfrac{\partial}{\partial a}\right|_{a=0}$, получим инфинитезимальный критерий инвариантности функционала (2.1) на неравномерной сетке (2.8)

$$\xi\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} + \eta\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u} + \underset{h}{\zeta}{}_1\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \underset{h}{u}{}_1} + \mathcal{L}\,\underset{+h}{D}(\xi) = 0, \tag{2.12}$$

$$\underset{+h}{S}(\xi) - \xi(1+\varphi_x) - \eta\varphi_u = 0,$$

где операторы $\underset{+h}{S}$, и $\underset{+h}{D}$, взяты на сетке (2.8).

3. Рассмотрим условия инвариантности сеточного функционала

$$L = \sum_{\underset{h}{\Omega}} \mathcal{L}(x^1,x^2,u,\underset{h}{u}{}_1,\underset{h}{u}{}_2)h^+{}_1h^+{}_2, \tag{2.13}$$

на двумерной равномерной прямоугольной сетке $\underset{h_1}{\omega}$ x $\underset{h_2}{\omega}$, $h_i^+ = h_i^-$, характеризующейся двумя постоянными шагами h_1 и h_2. Рассуждения, аналогичные одномерному случаю, приводят к инфинитезимальному критерию инвариантности

$$X(\mathcal{L}) + \mathcal{L}(\underset{+h}{D}{}_1(\xi^1) + \underset{+h}{D}{}_2(\xi^2)) = 0, \tag{2.14}$$

$$\underset{+h}{D}{}_1 \underset{-h}{D}{}_1(\xi^1) = 0, \qquad \underset{+h}{D}{}_2 \underset{-h}{D}{}_2(\xi^2) = 0,$$

$$\underset{\pm h}{D}{}_1(\xi^2) = -\underset{\pm h}{D}{}_2(\xi^1),$$

где $\underset{\pm h}{D}{}_i$ — разностное дифференцирование в i-м направлении, X — оператор группы G_1:

$$X = \xi^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \eta \frac{\partial}{\partial u} + \underset{h}{\zeta_1} \frac{\partial}{\partial \underset{h}{u}{}_1} + \underset{h}{\zeta_2} \frac{\partial}{\partial \underset{h}{u}{}_2} + \ldots$$

$$\ldots + (\underset{+h}{S}{}_1(\xi^1) - \xi^1) \frac{\partial}{\partial h^+{}_1} + (\underset{+h}{S}{}_2(\xi^2) - \xi^2) \frac{\partial}{\partial h^+{}_2}, \qquad (2.15)$$

$\underset{h}{\zeta_i}$ — линейные разностные формы от ξ^1, ξ^2, η, полученные по формулам продолжения в гл. I.

4. В случае неравномерной прямоугольной сетки

$$h_1^+ = \varphi_1(x^1, x^2, u), \quad h_2^+ = \varphi_2(x^1, x^2, u), \qquad (2.16)$$

необходимым и достаточным условием инвариантности функционала (2.13) на сетке (2.16) будет следующее:

$$X(\mathcal{L}) + \mathcal{L}(\underset{+h}{D}{}_1(\xi^1) + \underset{+h}{D}{}_2(\xi^2)) = 0,$$

$$\underset{+h}{S}{}_1(\xi^1) - \xi^1 - X(\varphi_1) = 0, \qquad (2.17)$$

$$\underset{+h}{S}{}_2(\xi^2) - \xi^2 - X(\varphi_2) = 0,$$

$$\underset{\pm h}{D}{}_1(\xi^2) = -\underset{\pm h}{D}{}_2(\xi^1),$$

где операторы $\underset{+h}{S}{}_i$, $\underset{+h}{D}{}_i$ взяты на сетке (2.16).

§ 3. Условия инвариантности разностных уравнений Эйлера

Известно, что инвариантность уравнений Эйлера в дифференциальном случае является следствием инвариантности соответствующего вариационного функционала [32]. Выясним, сохраняется ли эта ситуация в конечно-разностном случае.

Для простоты будем рассматривать случай одномерной равномерной сетки. Конечно-разностное уравнение для сеточных экстремалей

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \underset{-h}{D}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underset{h}{u}_1}\right) = 0, \tag{3.1}$$

в случае невырожденного функционала представляет собой разностное уравнение второго порядка, записанное на двух ячейках сетки $\underset{h}{\omega}$, т. е. в трех точках $(x-h, x, x+h) \in \underset{h}{\omega}$. Условие инвариантности (2.6) содержит лишь первую (правую) производную, т. е. записано в двух точках сетки $(x, x+h) \in \underset{h}{\omega}$. Поэтому для выяснения условий инвариантности (3.1) нам потребуется продолжение условия (2.6) влево, в точку $(x-h)$. Теперь мы вместо (2.6) рассмотрим условие равенства двух членов суммы

$$\mathcal{L}(\check{x}, \check{u}, \underset{h}{\check{u}}_1)h^- + \mathcal{L}(x, u, \underset{h}{u}_1)h^+ = \mathcal{L}(\check{x}^*, \check{u}^*, \underset{h}{\check{u}}{}_1^*)h_1^{-*} + \mathcal{L}(x^*, u^*, \underset{h}{u}{}_1^*)h_1^{+*},$$

$$h^{-*} = h^{+*}, \tag{3.2}$$

где

$$\check{z}^i = \underset{-h}{S}(z^i), \quad \check{x}^* = f(\check{x}, \check{u}, a), \quad \check{u}^* = g(\check{x}, \check{u}, a),$$

$$\underset{h}{\check{u}}{}_1^* = \underset{-h}{S}\left(\frac{\underset{+h}{D}(g(x,u,a))}{\underset{+h}{D}(f(x,u,a))}\right).$$

Применив к равенствам (3.2) оператор Эйлера, получим

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \underset{-h}{D}\left(\frac{\partial}{\partial \underset{h}{u}_1}\right) = f_u\left(\frac{\partial \mathcal{L}(z^*)}{\partial x^*} + \underset{-h}{D^*}\left(\underset{h}{u}{}_1^* \frac{\partial \mathcal{L}(z^*)}{\partial \underset{h}{u}{}_1^*}\right)\right) -$$
$$- \underset{-h}{D^*}(\mathcal{L}(z^*)) + g_u\left(\frac{\partial \mathcal{L}(z^*)}{\partial u^*} + \underset{-h}{D^*}\left(\frac{\partial \mathcal{L}(z^*)}{\partial \underset{h}{u}{}_1^*}\right)\right), \tag{3.3}$$

где $\underset{-h}{D^*}$ — оператор разностного дифференцирования влево в новых переменных.

Применив операцию $\left.\frac{\partial}{\partial a}\right|_{a=0}$ к равенству (3.3), получим

$$\xi_u\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \underset{-h}{D}\left(u\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underset{h}{u}_1}\right) - \underset{-h}{D}(\mathcal{L})\right) + \eta_u\left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u}\right) +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial a}\left.\left(\frac{\partial \mathcal{L}(z^*)}{\partial u^*} - \underset{-h}{D^*}\left(\frac{\partial \mathcal{L}(z^*)}{\partial \underset{h}{u}_1}\right)\right)\right|_{a=0} = 0. \tag{3.4}$$

Таким образом, для инвариантных функционалов (2.6) на инвариантно-равномерной сетке действие оператора X на уравнение Эйлера дает

$$X\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u}\right) = -\eta_u\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u}\right) - \xi_u\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} + \underset{-h}{D}\left(\underset{h}{u}{}_1\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \underset{h}{u}{}_1} - \mathcal{L}\right)\right), \tag{3.5}$$

$$\underset{+h}{D}\,\underset{-h}{D}(\xi) = 0.$$

Подставив $\dfrac{\delta\mathcal{L}}{\delta u} = 0$ в (3.5), получим следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Для того чтобы уравнения Эйлера* (3.1) *инвариантного функционала* (2.6) *были инвариантны на равномерной сетке* $\underset{h}{\omega}$, *необходимо и достаточно, чтобы на их решениях выполнялось следующее условие*:

$$\xi_u\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} + \underset{h}{u}{}_{\bar{1}}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u} + \underset{h}{u}{}_{1\bar{1}}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \underset{h}{u}{}_1} - \underset{-h}{D}(\mathcal{L})\right) = 0, \tag{3.6}$$

$$\underset{-h}{D}\;\underset{+h}{D}(\xi) = 0.$$

Это условие отсутствует в дифференциальном случае, поскольку оператор, стоящий в скобках, при $h \to 0$ обращается в тождественный нуль.

Условия (3.6) заведомо выполняются для вырожденных функционалов, линейным образом зависящих от своих переменных, а также для x-автономных групп преобразований, для которых на равномерных сетках

$$\xi_u = 0, \qquad \underset{-h}{D}\,\underset{+h}{D}(\xi) = 0, \tag{3.7}$$

откуда $\xi(x) = Ax + B$, $\quad A, B$ — константы (точнее, сеточные константы, т. е. функции, принимающие постоянные значения в узлах сетки).

Таким образом, лишь при выполнении условий (3.6) ситуация в разностном случае аналогична дифференциальному, инвариантность функционала ведет к инвариантности соответствующего уравнения Эйлера. Однако ясно, что достаточно широкие классы преобразований и функционалов не удовлетворяют условиям (3.6). Это значит, что преобразования группы могут не меняя разностного функционала преобразовать уравнение Эйлера в некоторое другое многообразие.

Возникает вопрос: на решениях какого уравнения достигается постоянство значений функционала при преобразованиях группы?

§ 4. Квазиэкстремали сеточного функционала и их свойства

Рассмотрим вариацию функционала (2.1)

$$L = \sum_{\underset{h}{\Omega}} \mathcal{L}(x, u, \underset{h}{u}_1) h^+$$

вдоль некоторой гладкой кривой

$$u = \Psi(x), \tag{4.1}$$

проходящей через данную точку (x, u). Подсчитаем приращение функционала (2.1) через вариации δx и $\delta u = \Psi_x \delta x$. Замечая, что δx и δu войдут лишь в два соседних члена суммы (2.1) и, отбрасывая члены выше первого порядка малости по δx, получим,

$$\delta L = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \underset{-h}{D} (\underset{h}{u}_1 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underset{h}{u}_1} - \mathcal{L} \right) \right) \delta x + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \underset{-h}{D} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underset{h}{u}_1} \right) \right) \Psi_x \delta x. \tag{4.2}$$

Таким образом, постоянство значений функционала (2.1) при варьировании вдоль кривой (4.1) достигается на решениях уравнения

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \underset{-h}{D} \left(\underset{h}{u}_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underset{h}{u}_1} - \mathcal{L} \right) + \Psi_x \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} \right) = 0. \tag{4.3}$$

Полученное в § 1 выражение для оператора Эйлера на равномерной сетке $\underset{h}{\omega}$

$$\frac{\delta}{\delta u} = \frac{\partial}{\partial u} - \underset{-h}{D} \left(\frac{\partial}{\partial \underset{h}{u}_1} \right),$$

соответствует “*вертикальному*” варьированию функционала (2.1). В случае, когда $|\Psi_x| < C_0$ в окрестности точки (x, u), варьирование будем называть “*наклонным*”, при $\Psi_x = 0$ — “*горизонтальным*”.

Пусть теперь кривая (4.1) представляет собой орбиту точки (x, u) при пребразованиях группы G_1. В этом случае вариации $\delta x, \delta u$ определяются компонентами оператора группы G_1:

$$\delta x = \xi(x, u) a, \quad \delta u = \eta(x, u) a,$$

и соответствующее уравнение (4.2) будет таким:

$$\xi \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \underset{-h}{D} \left(\underset{h}{u}_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underset{h}{u}_1} - \mathcal{L} \right) \right) + \eta \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \underset{-h}{D} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underset{h}{u}_1} \right) \right) = 0. \tag{4.4}$$

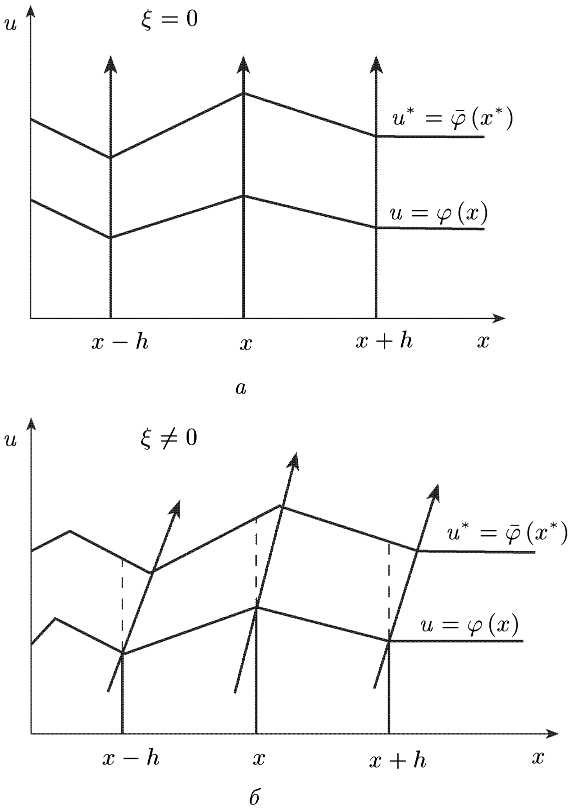

Рис. 4.1. “Вертикальное” варьирование (*а*) и “наклонное” варьирование (*б*)

Уравнение (4.4) будем называть *квазиэкстремальным*, а любые его решения — *квазиэкстремалями.* Уравнение (4.4) можно получить непосредственно из (3.2), применяя операцию $\left.\dfrac{\partial}{\partial a}\right|_{a=0}$ в точке (x, u).

Заметим, что характеристики наклона $\xi(x, u)$ и $\eta(x, u)$ входят в квазиэкстремальное уравнение (4.4), на решениях которого в общем случае достигается стационарность сеточного функционала. Это значит, что *уравнения для квазиэкстремалей одного и того же инвариантного функционала для различных групп будут иметь, вообще говоря, различный вид.*

П р и м е р 1. Рассмотрим линейное разностное уравнение

$$\underset{h}{u}_{x\bar{x}} = 0 \tag{4.5}$$

на равномерной сетке. Это уравнение допускает, в частности, три оператора переноса

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u},$$

сохраняющих равномерность сетки. Вариационный функционал

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \underset{+h}{S^{\alpha}} (\underset{h}{u}{}_x^2 h), \tag{4.6}$$

инвариантен относительно X_1, X_2, X_3, так как инвариантно элементарное действие $\frac{1}{2} \underset{h}{u}{}_x^2 h$. Все три оператора X_1, X_2, X_3 удовлетворяют условиям (3.6), поэтому уравнение Эйлера (4.5) для функционала (4.6) в данном случае инвариантно. Вычислим квазиэкстремали (4.6) для операторов X_1, X_2, X_3 (соответственно):

$$\underset{h}{u}_{x\bar{x}} \left(\frac{\underset{h}{u}_x + \underset{h}{u}_{\bar{x}}}{2} \right) = 0, \quad \underset{h}{u}_{x\bar{x}} = 0, \quad \underset{h}{u}_{x\bar{x}} \left(\frac{\underset{h}{u}_x + \underset{h}{u}_{\bar{x}}}{2} - 1 \right) = 0.$$

Совершенно очевидно, что решение экстремального уравнения (4.5) является также решением каждого квазиэкстремального уравнения, т. е. лежит в области пересечения квазиэкстремалей. Обратное, однако, неверно. Таким образом, на множестве решений уравнения (4.5) достигается стационарное значение функционала (4.6) как при "вертикальном" варьировании (X_2), так и при "наклонном" (X_3) и "горизонтальном" (X_1).

Пример 2. Рассмотрим нелинейное разностное уравнение

$$\underset{h}{u}_{x\bar{x}} = u^2, \tag{4.7}$$

на равномерной сетке, допускающее, очевидно, оператор переноса

$$X = \frac{\partial}{\partial x}.$$

Вариационный функционал с функцией Лагранжа

$$\mathcal{L} = \frac{1}{3} u^3 + \frac{1}{2} \underset{h}{u}_x{}^2 \tag{4.8}$$

в качестве уравнения Эйлера имеет (4.7). Однако варьирование вдоль орбиты группы с оператором X дает для (4.8) следующее уравнение для квазиэкстремалей:

$$\underset{h}{u}_{x\bar{x}} = \frac{2\underset{h}{u}_{\bar{x}}}{\underset{h}{u}_{x} + \underset{h}{u}_{\bar{x}}} \frac{u^2 + u\check{u} + \check{u}^2}{3}, \tag{4.9}$$

где $\check{u} = \underset{-h}{S}(u)$.

Пример 3. Рассмотрим разностное уравнение

$$\underset{h}{u}_{\bar{x}} = e^u, \tag{4.10}$$

которое, очевидно, допускает оператор переноса $X = \dfrac{\partial}{\partial x}$ на инвариантно-равномерной сетке $\underset{h}{\omega}$. Легко проверить, что уравнение (4.10) является разностным уравнением Эйлера сеточного функционала с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}u_x^2 + e^u. \tag{4.11}$$

Сеточный функционал с функцией $\mathcal{L}$ (4.11) также допускает оператор $X = \dfrac{\partial}{\partial x}$. Однако стационарность действия достигается не на экстремалях (4.10), а на квазиэкстремалях, определяемых следующим уравнением:

$$\underset{h}{u}_{x\bar{x}} = e^u \left(\frac{2}{h} \frac{e^{h\underset{h}{u}_{x}} - 1}{\underset{h}{u}_{x} + \underset{h}{u}_{\bar{x}}} \right). \tag{4.12}$$

Таким образом, в разностных вариационных задачах инвариантность сеточных функционалов не приводит автоматически к инвариантности уравнений Эйлера. Множество решений, на котором достигается стационарность сеточного функционала, зависит от направления варьирования, от направления орбиты группы. Если $\xi \neq 0$, т. е. преобразования группы меняют независимую переменную (а вместе с ней и разностную сетку), то стационарность действия достигается не на экстремалях, а на квазиэкстремалях.

Каждая квазиэкстремаль зависит от координат оператора группы, поэтому для различных симметрий имеются различные уравнения квазиэкстремалей. В континуальном пределе разница между квазиэкстремалями исчезает — все они переходят в уравнение Эйлера.

Пример 4. Рассмотрим разностную модель обыкновенного дифференциального уравнения

$$u_{xx} = u^{-3} \tag{4.13}$$

с точки зрения лагранжева формализма. В качестве разностного аналога функции Лагранжа $(\frac{1}{u^2} - u_x^2)$ выберем следующее выражение:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{uu^+} - \left(\frac{u^+ - u}{h^+}^2\right), \tag{4.14}$$

определенное на двух точках некоторой сетки $\underset{h}{\omega}$. Прежде всего, проверим вариационную инвариантность лагранжиана (4.14) относительно исходной группы уравнения (4.13):

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = 2x\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_3 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + xu\frac{\partial}{\partial u}. \tag{4.15}$$

Разностный функционал

$$L = \sum_{\Omega}\Big(\frac{1}{uu^+} - \Big(\frac{u^+ - u}{h^+}\Big)^2\Big)h^+ = \sum_{\Omega}\Big(\frac{h^+}{uu^+} - \frac{(u^+ - u)^2}{h^+}\Big), \tag{4.16}$$

где $h^+ = x^+ - x$, очевидно, допускает трансляцию X_1. Инвариантность элементарного действия $\mathcal{L}h^+$:

$$X\mathcal{L} + \mathcal{L}\underset{+h}{D}(\xi) = 0, \tag{4.17}$$

также легко проверяется для растяжения X_2. В случае оператора X_3 мы получим "дивергентную инвариантность", т. е. действие оператора X_3 дает не ноль, а разностную дивергенцию некоторого выражения:

$$X_3\mathcal{L} + \mathcal{L}\underset{+h}{D}(x^2) = \frac{{u^+}^2 - u^2}{h^+} \equiv \underset{+h}{D}(u^2). \tag{4.18}$$

Выпишем экстремальное разностное уравнение, соответствующее функционалу (4.16):

$$2\underset{h}{u}_x - 2\underset{h}{u}_{\bar{x}} - \frac{1}{u^2}\left(\frac{h^+}{u^+} + \frac{h^-}{u^-}\right) = 0, \tag{4.19}$$

где, как обычно, $\underset{h}{u}_x = \dfrac{u^+ - u}{h^+}$, $\quad \underset{h}{u}_{\bar{x}} = \dfrac{u - u^-}{h^-}$. Заметим, что при записи экстремального уравнения нам потребовалось использовать два члена суммы (4.16):

$$\mathcal{L}(u, u^+)h^+ + \mathcal{L}(u^-, u)h^-.$$

Заметим также, что сетка $\underset{h}{\omega}$ до сих пор не определена:

$$h^+ = \varphi(z). \tag{4.20}$$

Поскольку группа G_3 x-автономна, то уравнение Эйлера (4.19) допускает операторы (4.15) *при условии, что сетка* (4.20) *также инвариантна.*

Займемся теперь квазиэкстремалями функционала (4.16). При "наклонном" варьировании (4.16) вдоль орбит подгрупп, соответствующих операторам (4.15), нам также необходимо учитывать два члена суммы (4.16). Оператор X_1 дает нам следующую квазиэкстремаль:

$$\frac{1}{u}(\frac{1}{u^-}-\frac{1}{u^+})+\underset{h}{u}_x(u^+-u)-\underset{h}{u}_{\bar{x}}(u-u^-)=0. \tag{4.21}$$

Квазиэкстремаль, соответствующая оператору растяжения X_2, определяется уравнением:

$$\frac{x}{u}\left(\frac{1}{u^-}-\frac{1}{u^+}\right)+\frac{1}{u}\left(\frac{x-h^-}{u^-}-\frac{x+h^+}{u^+}\right)+ \\ +2x(\underset{h}{u}_{\bar{x}}{}^2-\underset{h}{u}_x{}^2)+2u(\underset{h}{u}_x-\underset{h}{u}_{\bar{x}})=0. \tag{4.22}$$

Третье квазиэкстремальное уравнение, на решениях которого достигается стационарность функционала (4.16) при преобразованиях X_3, таково:

$$x^2\left(\frac{1}{uu^-}-\frac{1}{uu^+}-\underset{h}{u}_x{}^2+\underset{h}{u}_{\bar{x}}{}^2\right)+xu\left(2\underset{h}{u}_x-2\underset{h}{u}_{\bar{x}}-\frac{h^+}{u^2u^+}-\frac{h^-}{u^2u^-}\right)=0. \tag{4.23}$$

Заметим, что все три квазиэкстремальных уравнения можно записать в единообразной форме:

$$\begin{aligned} &1)\ \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta x}=0;\\ &2)\ 2x\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta x}\right)+\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u}\right)=0;\\ &3)\ x^2\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta x}\right)+xu\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u}\right)=0. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Здесь введены новые обозначения

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta x}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}h^++\frac{\partial\mathcal{L}^-}{\partial x}h^-+\mathcal{L}^--\mathcal{L}, \tag{4.25}$$

где $\mathcal{L}^-=\underset{-h}{S}(\mathcal{L})$,

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u}=h^+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u}+h^-\frac{\partial\mathcal{L}^-}{\partial u}. \tag{4.26}$$

Легко проверить, что запись квазиэкстремалей в форме (4.24), (4.26) полностью соответствует ранее введенной форме (4.16), использующей дифференцирование по разностным производным. Квазиэкстремальные уравнения

$$\xi_\alpha \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta x} + \eta_\alpha \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} = 0, \qquad \alpha = 1, 2, 3, \ldots \tag{4.27}$$

имеют, очевидно, общую область пересечения:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta x} &= 0, \\ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} &= 0. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Точнее, всякое решение системы (4.28) является решением системы (4.24). Замечательно, что множество решений системы (4.28) допускает ту же группу, что и исходный функционал. Справедлива следующая теорема *).

Теорема 4.1. *Пусть задан разностный функционал*

$$L = \sum \mathcal{L}(x, x^+, u, u^+) h^+, \tag{4.29}$$

инвариантный относительно группы G_1 *с оператором*

$$X = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial u} + \xi^+ \frac{\partial}{\partial x^+} + \eta^+ \frac{\partial}{\partial u^+}. \tag{4.30}$$

Тогда система (4.28) *допускает ту же симметрию* G_1.

Действительно, инвариантность функционала (4.29) эквивалентна равенству двух членов ряда в некоторой произвольной точке (x, u):

$$\begin{gathered} \mathcal{L}(x, x^+, u, u^+) h^+ + \mathcal{L}^-(x^-, x, u^-, u) h^- = \\ = \mathcal{L}(x^*, x^{+*}, u^*, u^{+*}) h^{+*} + \mathcal{L}^-(x^{-*}, x^*, u^{-*}, u^*) h^{-*}. \end{gathered} \tag{4.31}$$

Продифференцировав последнее равенство по x и по u, получим соответственно

$$\begin{gathered} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} h^+ + \frac{\partial \mathcal{L}^-}{\partial x} h^- + \mathcal{L}^- - \mathcal{L} = \\ = \frac{\partial x^*}{\partial x} \left(\mathcal{L}^- - \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^*} h^{+*} + \frac{\partial \mathcal{L}^-}{\partial x^*} h^{-*} \right) + \frac{\partial u^*}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^*} h^{+*} + \frac{\partial \mathcal{L}^-}{\partial u^*} h^{-*} \right), \end{gathered}$$

*) Этот факт был установлен Ю.В. Артамоновым (см. [1]).

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}h^{+}+\frac{\partial\mathcal{L}^{-}}{\partial x}h^{-}=\frac{\partial x^{*}}{\partial u}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^{*}}h^{+*}+\frac{\partial\mathcal{L}^{-}}{\partial x^{*}}h^{-*}+\mathcal{L}^{-}-\mathcal{L}\right)+ \\ +\frac{\partial u^{*}}{\partial u}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^{*}}h^{+*}+\frac{\partial\mathcal{L}^{-}}{\partial u^{*}}h^{-*}\right).$$

Применим к последним равенствам операцию $\left.\dfrac{\partial}{\partial a}\right|_{a=0}$:

$$\left.\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^{*}}h^{+*}+\frac{\partial\mathcal{L}^{-}}{\partial x^{*}}h^{-*}+\mathcal{L}^{-}-\mathcal{L}\right)\right|_{a=0}+\xi_x\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta x}+\eta_x\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u}=0,$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^{*}}h^{+*}+\frac{\partial\mathcal{L}^{-}}{\partial u^{*}}h^{-*}\right)\right|_{a=0}+\xi_u\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta x}+\eta_u\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u}=0,$$

Подстановка уравнений (4.28) завершает доказательство теоремы:

$$X\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta x}\right)\bigg|_{(4.28)}=0,\quad X\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u}\right)\bigg|_{(4.28)}=0, \tag{4.32}$$

Если пересечение квазиэкстремалей (4.28) соответствует функционалу (4.29), инвариантному относительно r-параметрической группы G_r, то система (4.28) также инвариантна относительно G_r. Заметим, что как всякое инвариантное многообразие, система (4.28) может быть записана через разностные инварианты группы G_r.

Еще одно свойство квазиэкстремалей инвариантного функционала дается следующей теоремой.

Теорема 4.2 *Пусть квазиэкстремальное уравнение*

$$\xi\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta x}+\eta\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta x}=0 \tag{4.33}$$

соответствует стационарным значениям функционала (4.29) *при варьировании вдоль орбиты подгруппы* G_1 *с оператором* (4.30). *Тогда уравнение* (4.33) *допускает ту же подгруппу* G_1. *Иначе говоря, каждое квазиэкстремальное уравнение инвариантно относительно “своей” подгруппы.*

Этот факт почти очевиден. Действительно, пусть уравнение (4.33) не допускает оператор X (с теми же координатами ξ,η). Тогда под действием преобразований соответствующей подгруппы G_1 это уравнение перейдет в некоторое другое уравнение, при этом функционал останется неизменным. Однако уравнение (4.33) было получено как совокупность *всех* решений, на которых (4.29) стационарен, поэтому преобразованное уравнение (4.33) не может дать дополнительное многообразие, где функционал (4.29) стационарен. Это противоречие и доказывает инвариантность квазиэкстремального уравнения (4.33).

Итак, квазиэкстремальные уравнения инвариантны относительно "своих" подгрупп, а их пересечение допускает всю совокупность симметрий инвариантного функционала.

Возникает естественный вопрос: как действует на квазиэкстремальное уравнение "чужая" подгруппа, которой соответствует другая экстремаль?

Частично на этот вопрос можно ответить с помощью следующего равенства, справедливого для инвариантного лагранжиана и позволяющего записать квазиэкстремальное уравнение в дивергентном виде:

$$\xi\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}+\frac{h^-}{h^+}\frac{\partial\mathcal{L}^-}{\partial x}-\underset{+h}{D}(\mathcal{L}^-)\right)+\eta\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u}+\frac{h^-}{h^+}\frac{\partial\mathcal{L}^-}{\partial u}\right)=$$
$$=-\underset{+h}{D}\left(h^-\eta\frac{\partial\mathcal{L}^-}{\partial u}+h^-\xi\frac{\partial\mathcal{L}^-}{\partial x}+\xi\mathcal{L}^-\right). \qquad (4.34)$$

Легко проверить, что равенство (4.34) эквивалентно условию инвариантности функционала (4.29)

$$\xi\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}+\xi^+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^+}+\eta\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u}+\eta^+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^+}+\mathcal{L}\underset{+h}{D}(\xi)=0.$$

Равенство (4.34) позволяет установить следующий факт.

Теорема 4.3. *Пусть квазиэкстремальное уравнение* (4.33) *инвариантного функционала* (4.29) *соответствует группе* G_1 *с оператором* X. *Пусть существует оператор* $\bar{X}$, *коммутирующий на решениях* (4.33) *с оператором разностного дифференцирования*

$$[\bar{X},\underset{+h}{D}]=0. \qquad (4.35)$$

Тогда действие оператора $\bar{X}$ *преобразует квазиэкстремаль* (4.33) *в другую квазиэкстремаль того же функционала.*

Следствие. *Свойством* (4.35) *обладают операторы присоединенной алгебры Ли операторов, допускаемых* (4.29). *Таким образом, на множестве всех квазиэкстремалей инвариантного функционала вводится новая дополнительная операция — действие присоединенной алгебры. В связи с этим возможно ввести новое понятие: базис квазиэкстремальных уравнений, — это минимальный набор квазиэкстремалей, из которых действием операторов* $\bar{X}$ *можно получить все остальные квазиэкстремальные уравнения.*

Заметим, что все перечисленные свойства квазиэкстремальных уравнений носят чисто разностный характер, — в континуальном пределе все квазиэкстремальные уравнения переходят в одно уравнение Эйлера, которое инвариантно относительно всей совокупности симметрий соответствующего лагранжиана.

Проиллюстрируем теперь все эти свойства на примере уравнения

$$u_{xx} = u^{-3}.$$

Инвариантный лагранжиан (4.14) сохраняет постоянство значений при преобразованиях (4.15) на решениях соответствующих квазиэкстремальных уравнений (4.21), (4.22) и (4.23). Система (4.28) будет для них такой:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{uu^-} - \dfrac{1}{uu^+} + \underset{h}{u}_x(u^+ - u) - \underset{h}{u}_{\bar{x}}(u - u^-) = 0, \\ 2\underset{h}{u}_x - 2\underset{h}{u}_{\bar{x}} - \dfrac{h^+}{u^2u^+} - \dfrac{h^-}{u^2u^-} = 0. \end{cases} \tag{4.36}$$

Легко проверить, что система (4.36) допускает всю симметрию (4.15). Квазиэкстремальные уравнения (4.21), (4.22), (4.23), записанные в виде (4.24), позволяют проверить второе свойство квазиэкстремалей. Можно убедиться, что первое уравнение в системе (4.24) допускает оператор X_1, второе — оператор X_2, третье — X_3, т. е. каждая квазиэкстремаль инвариантна относительно своей подгруппы.

Также легко увидеть третье свойство квазиэкстремалей: оператор $\dfrac{\partial}{\partial x}$ переводит третье уравнение во второе, а действие оператора $\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial x}$ преобразует второе уравнение в первое. Таким образом, третье уравнение в системе (4.24) образует базис квазиэкстремалей. Это же соотношение справедливо и для законов сохранения (см. гл. II).

Инвариантная система определяет как инвариантную сетку, так и разностное уравнение для u. Эта система содержит, в частности, уравнения, полученные методом разностных инвариантов в гл. II. В самом деле, постановка

$$h^+ = \epsilon uu^+, \quad h^- = \epsilon uu^- \tag{4.37}$$

в систему (4.36) дает

$$(u^+ - u)u^- - (u - u^-)u^+ = \epsilon^2 u^+u^-,$$

$$(u^+ - u)^2u^- - (u - u^-)^2u^+ = \epsilon(u^- - u^+).$$

Оба последних уравнения эквивалентны уже знакомому нам отображению

$$u^+u^-(2 - \epsilon^2) = u(u^+ + u^-),$$

которое на сетке (4.37) аппроксимирует уравнение (4.13) со вторым порядком (см. также [73]).

§ 5. Квазиинвариантность сеточного функционала и инвариантность разностных уравнений Эйлера

В классическом непрерывном случае, рассмотренном Э. Нётер [32], критерий инвариантности функционала

$$L[u] = \int\limits_{\Omega} \mathcal{L}(x, u, u_1) dx, \tag{5.1}$$

дается условием

$$X(\mathcal{L}) + D\mathcal{L}(\xi) = 0, \tag{5.2}$$

(мы ограничились первым порядком производных в одномерном случае).

Поиск лагранжианов для данного уравнения, тем более инвариантных, представляет собой непростую задачу. Бессель-Хаген [55] предложил несколько облегчить ее, заметив, что точную инвариантность функционала можно заменить на условие "дивергентной инвариантности" (по терминологии [38]), не меняющее инвариантность уравнений Эйлера:

$$X(\mathcal{L}) + \mathcal{L}D(\xi) = D(B(z)), \tag{5.3}$$

где $B(z)$ — любая функция из A, (в многомерном случае — вектор). В частности, если $B = \xi\mathcal{L}$, то условие (5.3) превращается в условие инвариантности L относительно канонического оператора, т. е. оператора X, факторизованного по группе Тейлора ξD :

$$(\eta - \xi u_1)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} + D(\eta - \xi u_1)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_1} = 0. \tag{5.4}$$

Аналогичная ситуация имеет место и в разностном случае. Действительно, пусть разностный функционал

$$L = \sum_{\underset{h}{\Omega}} \mathcal{L}(x, u, \underset{h}{u}_1) h \tag{5.5}$$

на инвариантно-равномерной сетке $\underset{h}{\omega}$ удовлетворяет требованию дивергентной инвариантности

$$X(\mathcal{L}) + \mathcal{L} \underset{+h}{D}(\xi) = \underset{+h}{D}(B(z)), \tag{5.6}$$

где $B(z) \in \underset{h}{A}$. Тогда справедливо следующее утверждение.

Т е о р е м а 5.1. *Уравнение Эйлера функционала* (5.5), *удовлетворяющего на инвариантно-равномерной сетке условию* (5.6), *допускает оператор*

$$X = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial u} + [\underset{+h}{D}(\eta) - \underset{h}{u}_1 \underset{+h}{D}(\xi)] \frac{\partial}{\partial \underset{h}{u}_1} + \ldots + (\hat{\xi} - \xi) \frac{\partial}{\partial h^+}$$

при условии

$$\xi_u (\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \underset{h}{u}_{\bar{1}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} + \underset{h}{u}_{1\bar{1}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underset{h}{u}_1} - \underset{-h}{D}(\mathcal{L})) = 0.$$

То есть дивергентная добавка в условие инвариантности функционала не меняет условие инвариантности уравнения для экстремалей. Доказательство полностью повторяет доказательство теоремы 3.1 с учетом того, что суммирование в функционале исключает $B(z)$ во "внутренних" точках. Аналогичная ситуация имеет место и для инвариантных неравномерных сеток и в многомерном случае.

Попробуем теперь несколько "подпортить" условие инвариантности сеточного функционала (5.5) так, чтобы соответствующее уравнение Эйлера стало инвариантным.

О п р е д е л е н и е. Сеточный функционал (5.5), удовлетворяющий на инвариантно-равномерной сетке условию

$$(\eta - \xi \underset{h}{u}_{\bar{1}}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} + \underset{+h}{D}(\eta - \xi \underset{h}{u}_{\bar{1}}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underset{h}{u}_1} + \underset{h}{D}(B) = 0, \tag{5.7}$$

с произвольной функцией $B(z) \in \underset{h}{A}$, будем называть *квазиинвариантным.*

Заметим, что при $B = \xi \underset{-h}{S}(\mathcal{L})$ квазиинвариантность функционала (5.7) эквивалентна следующему условию:

$$\xi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \eta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} + [\underset{+h}{D}(\eta) - \underset{h}{u}_1 \underset{+h}{D}(\xi)] \frac{\partial}{\partial \underset{h}{u}_1} + \mathcal{L} \underset{+h}{D}(\xi) =$$
$$= \xi \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \underset{h}{u}_{\bar{1}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} + \underset{h}{u}_{1\bar{1}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underset{h}{u}_1} - \underset{-h}{D}(\mathcal{L}) \right). \tag{5.8}$$

Из последнего равенства видно, что разница между определением инвариантности и квазиинвариантности функционала исчезает, когда $h \to 0$. Таким образом, мы здесь имеем дело со специфически разностным эффектом.

Замечание. Оператор, фигурирующий в определении квазиинвариантности:

$$X^* = (\eta - \xi \underset{h}{u}_{\bar{1}})\frac{\partial}{\partial u} + \underset{+h}{D}(\eta - \xi \underset{h}{u}_{\bar{1}})\frac{\partial}{\partial \underset{h}{u}_1} + \ldots, \tag{5.9}$$

не меняет смысл конечно-разностных производных при преобразованиях соответствующей группы. Оператор (5.9) не меняет независимую переменную и тем самым не меняет разностную сетку, т. е. орбиты группы G_1, генерируемой оператором (5.9), — “вертикальны”.

Заметим также, что координаты оператора (5.9) содержат разностные производные, поэтому оператор X^* генерирует группу *неточечных преобразований.*

Теорема 5.2. *Пусть сеточный функционал* (5.5) *удовлетворяет требованию квазиинвариантности* (5.7) *с некоторой функцией* $B(z) \in \underset{h}{A}$ *на инвариантно-равномерной сетке* $\underset{h}{\omega}$. *Тогда уравнение Эйлера допускает оператор*

$$X = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial u} + [\underset{+h}{D}(\eta) - \underset{h}{u}_1 \underset{+h}{D}(\xi)]\frac{\partial}{\partial \underset{h}{u}_1} + \ldots + (\hat{\xi} - \xi)\frac{\partial}{\partial h^+} \tag{5.10}$$

на той же сетке $\underset{h}{\omega}$.

Для доказательства утверждения необходимо подсчитать величину $X\left(\dfrac{\delta\mathcal{L}}{\delta u}\right)$:

$$X\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u}\right) = -(\eta_u - \xi_u \underset{h}{u}_{\bar{1}})\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u} - \underset{+h}{D}\left(\xi\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u}\right)\right).$$

Подстановка $\dfrac{\delta\mathcal{L}}{\delta u} = 0$ завершает доказательство теоремы.

Пример. Рассмотрим функционал с $\mathcal{L} = (x+h)\underset{h}{u}_1^2$, который экстремален на решениях уравнения Эйлера:

$$x\underset{h}{u}_{1\bar{1}} + \underset{h}{u}_1 = 0. \tag{5.11}$$

Это уравнение допускает оператор растяжения

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} - u\frac{\partial}{\partial u} - 2\underset{h}{u}_{1\bar{1}}\frac{\partial}{\partial \underset{h}{u}_{1\bar{1}}} + h\frac{\partial}{\partial h},$$

на инвариантно-равномерной сетке. Убедимся, что данный функционал удовлетворяет условию квазиинвариантности (5.7) с $B = \xi\mathcal{L}$ на решениях (5.11):

$$-\underset{+h}{D}(x\underset{h}{u}_{\bar{1}})\frac{\partial}{\partial \underset{h}{u}_{\bar{1}}} = -(x\underset{h}{u}_{1\bar{1}} + \underset{h}{u}_{1})2(x+h)\underset{h}{u}_{1}\Big|_{(5.11)} = 0.$$

Таким образом, условие квазиинвариантности функционала позволяет рассматривать одно и то же уравнение Эйлера для различных подгрупп, допускаемых разностным лагранжианом.

§ 6. Законы сохранения для конечно-разностных уравнений

Пусть задана система конечно-разностных уравнений

$$F_\alpha(x, u, \underset{h}{u}_1, \ldots, h) = 0, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, m, \tag{6.1}$$

на разностной сетке

$$\Omega_\beta(x, u, \ldots, h) = 0, \tag{6.2}$$

$$\beta = 1, \ldots, n, \quad F_\alpha, \Omega_\beta \in \underset{h}{A}.$$

Будем говорить, что для системы разностных уравнений имеется *закон сохранения*, если существует такой вектор $\mathbf{A}$ с компонентами $A^i = A^i(x, u, \underset{h}{u}_1, \ldots, h)$, $\quad i = 1, \ldots, n, \quad A^i \in \underset{h}{A}$, который на любом решении $u = \varphi(x)$ системы (6.1), (6.2) удовлетворяет условию

$$DIV\mathbf{A} \equiv \sum_{i=1}^{n} \underset{+h}{D}_i(A^i) = 0, \tag{6.3}$$

где $\underset{+h}{D}_i$ — разностное дифференцирование по i-му направлению.

Если существует r *линейно независимых с постоянными коэффициентами* векторов A, удовлетворяющих условию (6.3), то говорят, что система (6.1), (6.2) имеет r независимых законов сохранения.

Заметим, что в одномерном случае, когда $\mathbf{A} \equiv A^1 = A(x, u, \underset{h}{u}_1, \ldots, h)$, условие консервативности системы (6.1), (6.2):

$$\underset{+h}{D}(A(z))\big|_{(6.1),\,(6.2)} = 0, \tag{6.4}$$

эквивалентно тому, что $A(x, u, \underset{h}{u}_1)$ является *сеточным инвариантом* на решениях (6.1), (6.2),

$$A(z)\big|_{F=0} = \underset{\pm h}{S}^{\alpha}(A(z))\big|_{(6.1),\,(6.2)}, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, \tag{6.5}$$

где $\underset{\pm h}{S}$ — операторы дискретного сдвига. Закон сохранения в форме (6.5) является *первым интегралом* одномерного варианта системы (6.1), (6.2) и представляет собой конечное алгебраическое выражение на сетке $\underset{h}{\omega}$.

В случае произвольных неравномерных сеток $\underset{h}{\omega}$ надо иметь в виду, что операторы $\underset{\pm h}{S}{}_i$, $\underset{\pm h}{D}{}_i$ в (6.3), (6.5) имеют "локальный" характер, т. е. зависят от шагов $h^+{}_i$ и $h^-{}_i$ в данной точке сетки.

Отметим также, что условие (6.4) можно переписать в инфинитезимальном виде, пользуясь тем, что оператор сдвига $\underset{\pm h}{S}$ получен с помощью касательного поля группы Тейлора:

$$\underset{+h}{D}{}^{\pm}(A(z))\Big|_{(6.1),\,(6.2)} = 0, \tag{6.6}$$

$$\underset{+h}{D}{}^{\pm} = \frac{\partial}{\partial x} + \underset{\pm h}{\widetilde{D}}(u)\frac{\partial}{\partial u} + \underset{\pm h}{\widetilde{D}}(u)\frac{\partial}{\partial \underset{+h}{u}} + \ldots,$$

где $\underset{\pm h}{\widetilde{D}}$ — "лагранжево" дифференцирование:

$$\underset{\pm h}{\widetilde{D}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mp h)^{n-1}}{n} \underset{\pm h}{D}{}^{n}. \tag{6.7}$$

Пусть последняя координата в векторе $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ является временем: $x^n = t$. Возьмем цилиндрическую область $\underset{h}{\Omega}$:

$$\underset{h}{\Omega} = \{x \in \underset{h}{\omega} : \sum_{i=1}^{n-1}(x^i)^2 = r_0^2, \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2\}, \tag{6.8}$$

где $x = (x^1, x^2, \ldots, x^{n-1}, t)$, $\quad r_0, t_1, t_2$ — некоторые постоянные.

Тогда из равенства (6.3) получим

$$\sum_{s} A l_n h_1 h_2 \ldots h_{n-1}\tau = \sum_{\underset{h}{\Omega}} DIV\,\mathbf{A} = 0, \tag{6.9}$$

где S — поверхность, ограничивающая область $\underset{h}{\Omega}$, l_n — орт внешней нормали к поверхности S.

Если A^i достаточно быстро убывают на пространственной бесконечности для решений системы (6.1), (6.2), то, полагая $r_0 \to \infty$, мы можем отбросить суммирование по цилиндрической поверхности (если на ней $A^i = 0$, то ситуация аналогична).

На нижнем основании цилиндра $\underset{h}{\Omega}$:

$$Al_n = -A^n\big|_{t=t_1},$$

на верхнем основании цилиндра $\underset{h}{\Omega}$: $Al_n = A^n\big|_{t=t_2}$. Из (6.9) для любого решения $u = u(x)$ системы (6.1), (6.2) функция $A^n(x, u(x) \underset{h}{u}(x)_1, \ldots)$ удовлетворяет равенству:

$$\sum_{R^{n-1}} A^n h_1 h_2 \ldots h_{n-1}\big|_{t=t_1} = \sum_{R^{n-1}} A^n h_1 h_2 \ldots h_{n-1}\big|_{t=t_2},$$

откуда получаем, что величина

$$E = \sum_{R^{n-1}} A^n(x, u(x), \underset{h}{u}(x)_1, \ldots) h_1 h_2 \ldots h_{n-1}, \tag{6.10}$$

на любом решении системы (6.1), (6.2) не зависит от времени:

$$\underset{+\tau}{D} E\big|_{(6.1),\ 6.2)} = 0, \tag{6.11}$$

где

$$\underset{+\tau}{D} = \frac{1}{\tau}(\underset{+h}{S} - 1)$$

— разностное дифференцирование по времени на сетке $\underset{h}{\omega}$.

Заметим, что при $n = 1$ условия (6.4) и (6.11) совпадают и эквивалентны существованию первого интеграла.

§ 7. Консервативность квазиэкстремалей инвариантного сеточного функционала (первый разностный аналог теоремы Нётер)

Как уже отмечалось, в разностных вариационных задачах при моделировании исходной инвариантной задачи возможно рассматривать следующую ситуацию: сеточный функционал, допускающий ту же группу, что и исходный непрерывный функционал, и квазиэкстремальное уравнение, на котором функционал неизменен; это ведет к наличию у квазиэкстремалей законов сохранения.

Л е м м а 7.1. *Справедливы следующие операторные тождества:*

1) *для одномерных равномерных разностных сеток*

$$
\begin{aligned}
&\xi\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}+\eta\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u}+[\underset{+h}{D}(\eta)-\underset{h}{u}_{1}\underset{+h}{D}(\xi)]\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\underset{h}{u}_{1}}+\mathcal{L}\underset{+h}{D}(\xi)\equiv\\
&\qquad\equiv\xi\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}+\underset{h}{u}_{\bar{1}}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u}+\underset{h}{u}_{1\bar{1}}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\underset{h}{u}_{1}}-\underset{-h}{D}(\mathcal{L})\right]+\\
&+(\eta-\xi\underset{h}{u}_{\bar{1}})\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u}-\underset{-h}{D}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\underset{h}{u}_{1}}\right)\right]+\underset{+h}{D}\left[\xi\check{\mathcal{L}}+(\eta-\xi\underset{h}{u}_{\bar{1}})\left(\frac{\partial\check{\mathcal{L}}}{\partial\underset{h}{u}_{\bar{1}}}\right)\right],
\end{aligned}
\tag{7.1}
$$

где $\check{f}=\underset{-h}{S}(f)$.

2) *для одномерных неравномерных сеток*

$$
\begin{aligned}
&\xi\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}+\eta\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u}+[\underset{+h}{D}(\eta)-\underset{h}{u}_{1}\underset{+h}{D}(\xi)]\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\underset{h}{u}_{1}}+\mathcal{L}\underset{+h}{D}(\xi)\equiv\\
&\qquad\equiv\xi\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}+\underset{h}{u}_{\bar{1}}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u}+\left(\frac{h^{-}}{h^{+}}\right)\underset{-h}{D}(\underset{h}{u}_{1})\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\underset{h}{u}_{1}}-\left(\frac{h^{-}}{h^{+}}\right)\underset{-h}{D}(\mathcal{L})\right]+\\
&+(\eta-\xi\underset{h}{u}_{\bar{1}})\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u}-\left(\frac{h^{-}}{h^{+}}\right)\underset{-h}{D}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\underset{h}{u}_{1}}\right]+\underset{+h}{D}\left[\xi\check{\mathcal{L}}+(\eta-\xi\underset{h}{u}_{\bar{1}})\left(\frac{\partial\check{\mathcal{L}}}{\partial\underset{h}{u}_{1}}\right)\right].
\end{aligned}
\tag{7.2}
$$

3) *для двумерных прямоугольных сеток, равномерных по каждому направлению*

$$
\begin{aligned}
&\xi^{1}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^{1}}+\xi^{2}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^{2}}+\eta\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u}+\mathcal{L}(\underset{+h}{D}{}_{1}(\xi^{1})+\underset{+h}{D}{}_{2}(\xi^{2}))+\\
&\qquad+[\underset{+h}{D}{}_{1}(\eta)-\underset{h}{u}_{1}\underset{+h}{D}{}_{1}(\xi^{1})-\underset{+h}{S}{}_{1}(\widetilde{u}_{2})\underset{+h}{D}{}_{1}(\xi^{2})]\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\underset{h}{u}_{1}}+\\
&\qquad+[\underset{+h}{D}{}_{2}(\eta)-\underset{h}{u}_{2}\underset{+h}{D}{}_{2}(\xi^{2})-\underset{+h}{S}{}_{2}(\widetilde{u}_{1})\underset{+h}{D}{}_{2}(\xi^{1})]\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\underset{h}{u}_{2}}\equiv\\
&\equiv\xi^{1}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^{1}}+\underset{-h}{D}{}_{1}\left(\underset{h}{u}_{1}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\underset{h}{u}_{1}}\right)-\underset{-h}{D}{}_{1}(\mathcal{L})+\underset{-h}{D}{}_{2}\left(\underset{+h}{S}{}_{2}(\widetilde{u}_{1})\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\underset{h}{u}_{2}}\right)\right]+\\
&\quad+\xi^{2}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^{2}}+\underset{-h}{D}{}_{2}\left(\underset{h}{u}_{2}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\underset{h}{u}_{2}}\right)-\underset{-h}{D}{}_{2}(\mathcal{L})+\underset{-h}{D}{}_{1}\left(\underset{+h}{S}{}_{1}(\widetilde{u}_{2})\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\underset{h}{u}_{1}}\right)\right]+
\end{aligned}
$$

$$+\eta\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u}-\underset{-h}{D}{}_1\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\underset{h}{u}{}_1}\right)-\underset{-h}{D}{}_2\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\underset{h}{u}{}_2}\right)\right]+$$

$$+\underset{+h}{D}{}_1\left[\xi^1\underset{-h}{S}{}_1(\mathcal{L})+(\eta-\xi^1\underset{h}{u}{}_{\bar 1}-\xi^2\widetilde{u}_2)\underset{-h}{S}{}_1\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\underset{h}{u}{}_1}\right)\right]+$$

$$+\underset{+h}{D}{}_2\left[\xi^2\underset{-h}{S}{}_2(\mathcal{L})+(\eta-\xi^1\underset{h}{u}{}_{\bar 1}-\xi^2\widetilde{u}_2)\underset{-h}{S}{}_2\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\underset{h}{u}{}_2}\right)\right], \tag{7.3}$$

где через $\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2$ обозначены непрерывные частные производные в дискретном представлении:

$$\widetilde{u}_i=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-h_i)^{n-1}}{n}\underset{+h}{\overset{n}{D}}{}_i(u), \quad i=1,2.$$

Справедливость тождеств (7.1)–(7.3) устанавливается прямым вычислением. Эти тождества при $h\to 0$ обращаются в соответствующие тождества Нётер (установленные впервые в [26]).

Тождества (7.1)–(7.3) позволяют сформулировать следующую теорему для сеток, фигурирующих в (7.1)–(7.3).

Теорема 7.1. *Пусть разностное уравнение* (*или система*)

$$F_\alpha(z)=0 \tag{7.4}$$

задано на сетке $\underset{h}{\omega}$:

$$\omega(z,h)=0, \tag{7.5}$$

где $\omega, F\in\underset{h}{A}$. *Пусть решения уравнения* (7.4) *на сетке* (7.5) *являются квазиэкстремалями функционала* (2.1), *связанными с координатами* ξ,η *оператора группы* G_1. *Тогда инвариантность функционала* (2.1) *на квазиэкстремалях* (7.4), (7.5) *является необходимым и достаточным условием консервативности системы* (7.4), (7.5):

$$\sum_{i=1}^{n}\underset{+h}{D}{}_i(A^i)\Big|_{(7.4)-(7.5)}=0, \tag{7.6}$$

где компоненты вектора $\mathbf{A}$ *определены лагранжианом* $\mathcal{L}$ *и координатами оператора группы* G_1:

$$A^i=\xi^i\underset{-h}{S}{}_i(\mathcal{L})+(\eta-\xi^i\underset{h}{u}{}_{\bar i}-\xi^j\underset{h}{\widetilde{u}}{}_j)\underset{-h}{S}{}_i\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\underset{h}{u}{}_i}\right), \quad i\neq j. \tag{7.7}$$

Доказательство. Инвариантность функционала на решениях уравнения (7.4) на сетке (7.5) означает, что левые части тождеств (7.1)–(7.3) обращаются в нуль. В силу этих тождеств на квазиэкстремалях выполнены соответствующие законы сохранения.

Обратно, пусть на решениях квазиэкстремальных уравнений выполнены соответствующие законы сохранения с компонентами (7.7). Тогда на решениях уравнения (7.4) на сетке (7.5) в силу тождеств (7.1)–(7.3) функционал (2.1) сохраняет стационарное значение. Теорема доказана.

Замечание. Инвариантность функционала на решениях квазиэкстремального уравнения ведет к инвариантности последнего. В случае многопараметрической группы G_r инвариантный невырожденный функционал порождает r различных квазиэкстремальных уравнений, каждое из которых инвариантно относительно соответствующей однопараметрической подгруппы и обладает своим законом сохранения.

На рис. 7.1 изображена общая схема теоремы Э. Нётер, на рис. 7.2 — общая схема теоремы 7.1.

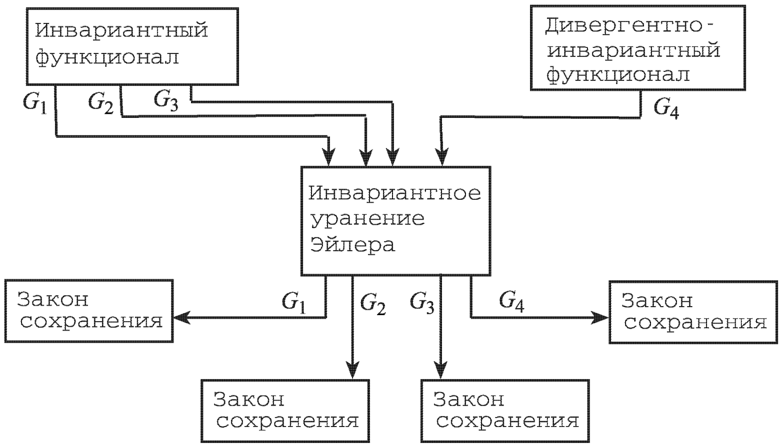

Рис. 7.1. Теорема Нётер

Пример 1. Рассмотрим функционал с $\mathcal{L} = 3\underset{h}{u}_1{}^2 + 2u^3$ и оператор переноса $X = \dfrac{\partial}{\partial x}$. Функция $\mathcal{L}$ удовлетворяет условию инвариантности, так же как и уравнение Эйлера

$$\underset{h}{u}_{1\bar{1}} = u^2. \tag{7.8}$$

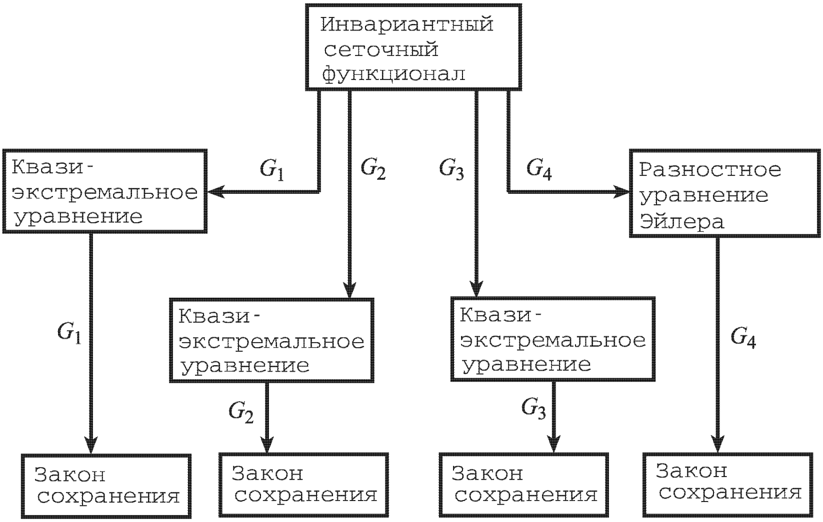

Рис. 7.2. Теорема о консервативности квазиэкстремалей

Квазиэкстремальное уравнение

$$\underset{h}{u}_{1\bar{1}} = \frac{2\underset{h}{u}_{\bar{1}}}{\underset{h}{u}_1 + \underset{h}{u}_{\bar{1}}} \frac{u^2 + u\check{u} + \check{u}^2}{3} \tag{7.9}$$

обладает законом сохранения с $A = 2u^3 - 3\overset{2}{\underset{h}{u}}_1$:

$$\underset{-h}{D}(2u^3 - 3\overset{2}{\underset{h}{u}}_1)_{|7.9} = 0. \tag{7.10}$$

Это эквивалентно первому интегралу:

$$2u^3 - 3u^2_{\underset{h}{1}} = C_0, \quad C_0 = \text{const},$$

откуда получаем точное решение нелинейного разностного уравнения (7.9) в виде рекурренции:

$$\hat{u} = u \pm h\sqrt{\frac{2}{3}\,u^3 + C_0}, \quad \hat{u} \equiv \underset{+h}{S}(u).$$

П р и м е р 2. С тем же оператором переноса на равномерной сетке $\underset{h}{\omega}$ рассмотрим функционал с $\mathcal{L} = 0.5\overset{2}{\underset{h}{u}}_1 + e^u$, который в качестве уравнения Эйлера имеет следующее разностное уравнение:

$$\underset{h}{u}_{1\bar{1}} = e^u. \tag{7.11}$$

Квазиэкстремальное уравнение этого функционала, соответствующее оператору $X = \dfrac{\partial}{\partial x}$:

$$\underset{h}{u}_{1\bar{1}} = \frac{2}{h} e^u \left(\frac{1 - e^{-h \underset{h}{u}_{\bar{1}}}}{\underset{h}{u}_1 + \underset{h}{u}_{\bar{1}}} \right), \tag{7.12}$$

обладает законом сохранения:

$$\underset{+h}{D}(0.5\, \underset{h}{u}_{\bar{1}}^2 - e^{\check{u}})\big|_{(7.12)} = 0.$$

Это эквивалентно существованию первого интеграла для квазиэкстремалей (7.12):

$$\underset{h}{u}_1{}^2 - 2e^u = C_0, \quad C_0 = \mathrm{const},$$

откуда получаем точное решение уравнения (7.12) в виде связи:

$$\hat{u} = u \pm h\sqrt{e^u + C_0}.$$

Теорема 7.1 и теорема 4.1 имеют важное практическое следствие, которое можно рассматривать как *разностный аналог теоремы Нётер*.

Следствие. Пусть невырожденный функционал (2.1) допускает r-параметрическую группу G_r (т. е. имеется вариационная симметрия или дивергентная инвариантность функционала). Пусть имеется r квазиэкстремальных уравнений

$$\xi^\alpha \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta x} + \eta^\alpha \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, r. \tag{7.13}$$

Тогда система

$$\begin{cases} \dfrac{\delta \mathcal{L}}{\delta x} = 0, \\ \dfrac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} = 0, \end{cases} \tag{7.14}$$

лежащая в пересечении квазиэкстремалей (7.13), обладает r законами сохранения вида (7.7).

Пример. Рассмотрим применение полученного следствия на примере уравнения

$$u_{xx} = u^{-3}.$$

Соответствующая разностная модель

$$\frac{\underset{h}{u}_x - \underset{h}{u}_{\bar{x}}}{h^-} = \frac{1}{u^2 u^-}, \tag{7.15}$$

$$\frac{h^+}{uu^+} = \epsilon, \qquad \frac{h^-}{uu^-} = \epsilon, \qquad \epsilon = \text{const}, \quad 0 < \epsilon \ll 1. \tag{7.16}$$

уже была нами получена как пересечение трех квазиэкстремальных уравнений.

Применение разностного варианта теоремы Нётер к разностной модели (7.15), (7.16) дает следующие три первых интеграла:

$$\begin{gathered}
1)\ \underset{h}{u}_x{}^2 + \frac{1}{uu^+} = A = \text{const};\\
2)\ \frac{2x+h^+}{2}\underset{h}{u}_x{}^2 + \frac{2x+h^+}{2uu^+} - \frac{u+u^+}{2}\underset{h}{u}_x = B = \text{const};\\
3)\ \frac{x(x+h^+)}{uu^+} + \left(\frac{u+u^+}{2} - \frac{2x+h^+}{2}\underset{h}{u}_x\right)^2 = C = \text{const}.
\end{gathered} \tag{7.17}$$

Сохраненная в разностной модели групповая структура позволяет использовать действие присоединенной алгебры для выделения базисного первого интеграла. Так же, как и в непрерывном варианте, первые интегралы могут быть найдены из J_3:

$$X_1(J_3) = J_2, \qquad X_1(J_2) = 2J_1.$$

С помощью первых интегралов легко найти общее решение разностной модели (7.15), (7.16):

$$Au^2 = (Ax+B)^2 + 1 - \frac{\epsilon^2}{4},$$

где $A = \text{const}, \quad B = \text{const}$.

Таким образом, полученная разностная схема (7.15), (7.16):

— инвариантна относительно той же группы Ли точечных преобразований G_3 , что и исходное дифференциальное уравнение;

— обладает тремя разностными первыми интегралами с одним базисным и тем же действием присоединенной алгебры Ли;

— полностью интегрируема и ее общее решение отличается на $\dfrac{\epsilon^2}{4}$ от общего решения исходного дифференциального уравнения .

§ 8. Второй разностный аналог теоремы Нётер

Теперь перейдем к теореме, в которой идет речь об *экстремалях квазиинвариантного функционала.*

Нам потребуются операторные тождества, несколько отличные от тождеств (7.1)–(7.3).

Лемма 8.1. *Справедливы следующие тождества, которые мы сгруппируем по размерности сетки:*

1) *для одномерных сеток*

$$(\eta - \xi \underset{h}{u}_{\bar 1})\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} + \underset{+h}{D}(\eta - \xi \underset{h}{u}_{\bar 1})\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underset{h}{u}_1} + \underset{+h}{D}(B) \equiv$$
$$\equiv (\eta - \xi \underset{h}{u}_{\bar 1}) \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \left(\frac{h^-}{h^+}\right) \underset{-h}{D} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underset{h}{u}_1}\right)\right) +$$
$$+ \underset{+h}{D}\left(B + (\eta - \xi \underset{h}{u}_{\bar 1}) \left(\frac{\partial \check{\mathcal{L}}}{\partial \underset{h}{u}_1}\right)\right), \quad (8.1)$$

где $\check f = \underset{-h}{S}(f)$, $B(z) \in \underset{h}{A}$, $h^+ = h^-$ *для равномерных сеток; для неравномерных сеток операторы* $\underset{+h}{D}$, $\underset{-h}{D}$ *являются* “*локальными*” *и, вообще говоря, некоммутативными:* $\underset{+h}{D}\,\underset{-h}{D} \neq \underset{-h}{D}\,\underset{+h}{D}$, *причем* $\underset{+h}{D}(\underset{-h}{S}(f)) = \dfrac{h^-}{h_+}\underset{-h}{D}(f)$;

2) *для двумерных прямоугольных сеток*

$$(\eta - \xi^1 \underset{h}{u}_{\bar 1} - \xi^2 \underset{h}{u}_{\bar 2})\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} + \underset{+h}{D}_1(\eta - \xi^1 \underset{h}{u}_{\bar 1} - \xi^2 \underset{h}{u}_{\bar 2})\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underset{h}{u}_1} +$$
$$+ \underset{+h}{D}_2(\eta - \xi^1 \underset{h}{u}_{\bar 1} - \xi^2 \underset{h}{u}_{\bar 2})\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underset{h}{u}_2} + \underset{+h}{D}_1\left(B^1\right) + \underset{+h}{D}_2\left(B^2\right) \equiv$$
$$\equiv (\eta - \xi^1 \underset{h}{u}_{\bar 1} - \xi^2 \underset{h}{u}_{\bar 2}) \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \left(\frac{h_1^-}{h_1^+}\right)\underset{-h}{D}_1\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underset{h}{u}_1}\right) - \left(\frac{h_2^-}{h_2^+}\right)\underset{-h}{D}_2\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underset{h}{u}_2}\right)\right) +$$
$$+ \underset{+h}{D}_1\left(B^1 + (\eta - \xi^1 \underset{h}{u}_{\bar 1} - \xi^2 \underset{h}{u}_{\bar 2})\,\underset{-h}{S}_1\left(\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}\right)\right) +\right.$$
$$\left.+ \underset{+h}{D}_2\left(B^2 + (\eta - \xi^1 \underset{h}{u}_{\bar 1} - \xi^2 \underset{h}{u}_{\bar 2})\,\underset{-h}{S}_2\left(\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underset{h}{u}_2}\right)\right)\right)\right), \quad (8.2)$$

где $B^1, B^2 \in \underset{h}{A}$. *Если двумерная сетка равномерна, то* $h_1^+ = h_1^-$, $h_2^+ = h_2^-$; *для двумерных неравномерных сеток операторы* $\underset{\pm h}{D}{}_1$, $\underset{\pm h}{D}{}_2$ *являются* “*локальными*” *и, вообще говоря, не коммутативными*:

$$\underset{+h}{D}{}_i \underset{-h}{D}{}_i \neq \underset{-h}{D}{}_i \underset{+h}{D}{}_i,$$

причем $\underset{+h}{D}{}_i \underset{-h}{S}{}_i(f) = \dfrac{h_i^-}{h_i^+} \underset{-h}{D}{}_i(f), \quad i = 1, 2.$

Справедливость тождеств (8.1), (8.2) устанавливаются прямым вычислением.

Тождества (8.1), (8.2) позволяют сформулировать второй разностный аналог теоремы Нётер.

Теорема 8.1. *Пусть разностное уравнение* (*или система*)

$$F(z) = 0, \tag{8.3}$$

задано на разностной сетке $\underset{h}{\omega}$:

$$\omega(z, h) = 0, \tag{8.4}$$

где $F, \omega \in \underset{h}{A}$.

Пусть (8.3) *являются уравнениями Эйлера функционала* (2.1) *на сетке* (8.4) *и задают многообразие, инвариантное относительно группы* G_1 *с оператором* (2.2), (2.15).

Тогда квазиинвариантность функционала (2.1) *на решениях экстремального уравнения* (8.3) *на сетке* (8.4) *с некоторыми функциями* B^i $(i = 1, 2)$ *является необходимым и достаточным условием консервативности* (8.3) *на сетке* (8.4) *с вектором* $\mathbf{A}$, *имеющим координаты*:

$$A_i = B^i + (\eta - \xi^1 \underset{h}{u}{}_{\bar{1}} - \xi^2 \underset{h}{u}{}_{\bar{2}}) \underset{-h}{S}{}_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underset{h}{u}{}_i} \right), \quad i = 1, 2, \ldots \tag{8.5}$$

Доказательство. Заметим, что из квазиинвариантности функционала (2.1) в силу теоремы 4.2 следует инвариантность уравнений Эйлера (8.3), (8.4) относительно группы G_1. Обращение в нуль левых частей тождеств (8.1), (8.2) на решениях (8.3), (8.4) ведет для последних к закону сохранения с вектором (8.5). Обратно, пусть на решениях уравнений (8.3), (8.4) (которые инварианты по условию теоремы) выполнены законы сохранения с вектором (8.5). Тогда в силу тождеств (8.1), (8.2) на тех же решениях обращаются в нуль левые части этих тождеств, что означает квазиинвариантность соответствующего функционала. Теорема доказана.

Ее обобщение на случай, когда условие квазиинвариантности функционала включает дивергентную добавку, совершенно очевидно. Следующий пример иллюстрирует такое обобщение.

Пример. Рассмотрим конечно-разностное волновое уравнение

$$\underset{h}{u}_{1\bar{1}} - \underset{h}{u}_{2\bar{2}} = 0, \tag{8.6}$$

на равномерной по обоим направлениям сетке с шагами τ и h. Воспользуемся предыдущей теоремой для построения законов сохранения для (8.6), соответствующих следующей группе преобразований: $X_1 = \dfrac{\partial}{\partial t}$ — перенос по времени, $X_2 = \dfrac{\partial}{\partial x}$ — перенос по пространственной переменной. Оба оператора,очевидно, сохраняют равномерность разностной сетки.

В качестве функции Лагранжа возьмем

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,\underset{h}{u}{}_2^2 - \frac{1}{2}\,\underset{h}{u}{}_1^2\,. \tag{8.7}$$

Легко убедиться, что уравнение (8.6) является уравнением Эйлера разностного функционала с функцией Лагранжа (8.7) и допускает операторы X_1 и X_2. Нетерово тождество для обоих операторов мы запишем в следующем виде:

$$\bar{\eta}_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} + \underset{+h}{D}{}_1(\bar{\eta}_\alpha)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underset{h}{u}{}_1} + \underset{+h}{D}{}_2(\bar{\eta}_\alpha)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underset{h}{u}{}_2} + \underset{+h}{D}{}_1(B^1_\alpha(z)) + \underset{+h}{D}{}_2(B^2_\alpha(z)) \equiv$$

$$\equiv \bar{\eta}_\alpha \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \underset{-h}{D}{}_1\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underset{h}{u}{}_1}\Big) - \underset{-h}{D}{}_2\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underset{h}{u}{}_2}\Big)\right] + \underset{+h}{D}{}_1\left[\bar{\eta}_\alpha \underset{-h}{S}{}_1\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underset{h}{u}{}_1}\Big) + B^1_\alpha\right] +$$

$$+ \underset{+h}{D}{}_2\left[\bar{\eta}_\alpha \underset{-h}{S}{}_2\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underset{h}{u}{}_2}\Big) + B^2_\alpha\right], \quad \alpha = 1, 2. \tag{8.8}$$

Перечислим $\bar{\eta}_\alpha, B^1_\alpha, B^2_\alpha$, соответствующие операторам X_1, X_2:

$$\alpha = 1: \qquad \bar{\eta}_1 = -\underset{h}{u}{}_1 - \underset{h}{u}{}_{\bar{1}},$$

$$B^1_1 = 0, \quad B^2_1 = \underset{h}{u}{}_2\, \underset{-h}{S}{}_1(\underset{h}{u}{}_2) - \underset{h}{u}{}_1\, \underset{h}{u}{}_{\bar{1}}.$$

$$\alpha = 2: \qquad \bar{\eta}_2 = -\underset{h}{u}{}_2 - \underset{h}{u}{}_{\bar{2}},$$

$$B^1_2 = \underset{h}{u}{}_2\, \underset{h}{u}{}_{\bar{2}} - \underset{h}{u}{}_1\, \underset{-h}{S}{}_2(\underset{h}{u}{}_1), \quad B^2_2 = 0.$$

Легко проверить, что в обоих случаях левая часть равенства (8.8) *тождественно* обращается в нуль, т. е. разностный функционал квазиинвариантен не только на экстремалях, но и во всем пространстве. Из квазиинвариантности функционала следует выполнение следующих законов сохранения на решениях уравнения (8.6):

$\alpha = 1$,

$$\underset{+h}{D}_1 \Bigg(\underset{h}{u}_1^2 + \underset{h}{u}_2 \underset{-h}{S}_1(\underset{h}{u}_2)) + \underset{+h}{D}_2(-\underset{h}{u}_{\bar{2}}(\underset{h}{u}_1 + \underset{h}{u}_{\bar{1}})\Bigg) = 0;$$

$\alpha = 2$,

$$\underset{+h}{D}_1 \Bigg(-\underset{h}{u}_{\bar{1}}(\underset{h}{u}_2 + \underset{h}{u}_{\bar{2}})) + \underset{+h}{D}_2(\underset{h}{u}_{\bar{2}}^2 + \underset{h}{u}_1 \underset{-h}{S}_2 \underset{h}{u}_1)\Bigg) = 0.$$

Заметим, что во всех случаях использована одна и та же функция Лагранжа (8.7). Однако условия квазиинвариантности функционала в этих случаях различны, поскольку различны векторы (B^1_α, B^2_α).

§ 9. Лагранжев формализм и интегрируемость инвариантных разностных уравнений второго порядка

В этом пункте мы приведем примеры построения консервативных разностных уравнений второго порядка, аппроксимирующих ОДУ второго порядка, и допускающих ту же трехмерную группу преобразований [76]. Пример инвариантной консервативной схемы для ОДУ второго порядка, рассмотренный в предыдущих параграфах, в некотором смысле самый простой: в нем удается найти разностный аналог инвариантного лагранжиана, который для всех симметрий дает первые интегралы. Здесь будет использована некоторая модификация полученных ранее конструкций разностного лагранжева формализма. Оказывается, в разностном случае можно использовать не только разные функции Лагранжа для вариации вдоль орбит разных подгрупп (что можно использовать и в непрерывном случае), но также и *разные аппроксимации* одного и того же лагранжиана для разных подгрупп (чего, естественно, нет в непрерывном случае). Наличие двух и более симметрий у ОДУ второго порядка позволяет полностью его проинтегрировать. Пути нахождения общего решения могут быть различными, однако большинство из них использует математический аппарат интегрирования. Этот аппарат фактически отсутствует в разностном случае (нужна техника точного интегрирования обыкновенных разностных уравнений, в том числе и нелинейных). Использование же первых интегралов позволяет получать общее решение с помощью лишь алгебраических действий. Поэтому для получения аналитических решений разностных схем мы будем применять аппарат разностного аналога теоремы Нетер. В конечном итоге полученные разностные модели оказываются полностью интегрируемыми, так же, как и исходные ОДУ.

Среди полученных ниже семейств инвариантных разностных уравнений и сеток оказывается семейство точных схем, т. е. схем, общее решение которых совпадает с семейством решений соответствующего дифференциального уравнения.

1. Рассмотрим алгебру инфинитезимальных операторов

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + (x+y)\frac{\partial}{\partial y}. \tag{9.1}$$

Соответствующее инвариантное обыкновенное дифференциальное уравнение имеет вид:

$$y'' = \exp(-y'). \tag{9.2}$$

Симметрии (9.1) вполне достаточно, чтобы проинтегрировать уравнение (9.2). Это можно сделать различными путями, мы воспользуемся лагранжевым подходом.

Легко проверить, что функция Лагранжа

$$L = \exp(y') + y, \tag{9.3}$$

допускает оператор X_1 и X_2, как вариационные симметрии:

$$\begin{aligned} &X_1 L + LD(\xi_1) = 0, \\ &X_2 L + LD(\xi_2) = 1 = D(x). \end{aligned}$$

Для второго оператора X_2 можно найти еще один независимый лагранжиан

$$L_2 = xy' - \exp(y'), \tag{9.4}$$

который обеспечивает собственную вариационную симметрию для X_2:

$$X_2 L_2 + L_2 D(\xi_2) = 0.$$

Оба лагранжиана имеют уравнение (9.2) в качестве уравнения Эйлера. Можно показать, что не существует лагранжиана, дающего вариационные симметрии для всех трех операторов, однако и двух симметрий достаточно, чтобы проинтегрировать уравнение (9.2).

С помощью теоремы Нётер из лагранжиана (9.3) нетрудно вычислить два первых интеграла

$$J_1 = \exp(y')(1-y') + y = A^0, \qquad J_2 = \exp(y') - x = B^0, \tag{9.5}$$

из которых, исключив y', легко найти общее решение уравнения (9.2)

$$y = (B^0 + x)(\ln(B^0 + x) - 1) + A^0, \tag{9.6}$$

где A^0, B^0 — произвольные постоянные.

Займемся теперь построением разностного аналога инвариантной вариационной задачи.

Имеется следующий полный набор разностных инвариантов операторов (9.1):

$$\frac{h_+}{h_-}, \qquad \frac{1}{h_+}\exp(y_x), \qquad \frac{1}{h_-}\exp(y_{\bar{x}}). \tag{9.7}$$

Выберем следующую разностную аппроксимацию лагранжиана (9.3):

$$\mathcal{L} = \alpha_i \exp(y_x) + \gamma_i y + (1 - \gamma_i) y_+, \quad i = 1, 2, 3, \tag{9.8}$$

где константы α_i и γ_i мы определим позднее.

Разностный лагранжиан (9.8) обеспечивает вариационную инвариантность

$$X_1\mathcal{L} + \mathcal{L}\underset{+h}{D}(\xi_1) = 0,$$

$$X_2\mathcal{L} + \mathcal{L}\underset{+h}{D}(\xi_2) = 1 = \underset{+h}{D}(x)$$

при любых α_i, γ_i. Мы будем использовать разные коэффициенты α_i, γ_i, т. е. разные аппроксимации лагранжиана (9.3), для вариаций вдоль орбит двух различных подгрупп. Вариация $\mathcal{L}$ дает следующее пересечение для квазиэкстремальных уравнений, соответствующих операторам X_1 и X_2:

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta y}: \quad \alpha_1(\exp(y_x) - \exp(y_{\bar{x}})) = \gamma_1 h^+ + (1 - \gamma_1)h^-,$$

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta x}: \quad \alpha_2 \exp(y_x)(y_x - 1) - \alpha_2 \exp(y_{\bar{x}})(y_{\bar{x}} - 1) =$$

$$= \gamma_2 y + (1 - \gamma_2) y_+ - \gamma_2 y_- - (1 - \gamma_2) y. \tag{9.9}$$

Мы получаем также еще одно квазиэкстремальное уравнение, аналогичное первому уравнению в (9.9), но с другими константами:

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta y}: \quad \alpha_3(\exp(y_x) - \exp(y_{\bar{x}})) = \gamma_3 h^+ + (1 - \gamma_3)h^-. \tag{9.10}$$

Это уравнение мы будем использовать для генерации сеток.

Пересечению квазиэкстремалей (9.9), (9.10) соответствуют следующие первые интегралы:

$$\alpha_2 \exp(y_x)(y_x - 1) = y + (1-\gamma_2)h^+ y_x + A^h,$$

$$\alpha_1 \exp(y_x) = x + \gamma_1 h^+ + B^h, \tag{9.11}$$

$$\alpha_3 \exp(y_x) = x + \gamma_3 h^+ + B_h. \tag{9.12}$$

Вместо уравнения (9.12) мы будем использовать разницу двух интегралов

$$(\alpha_1 - \alpha_3)\exp(y_x) = (\gamma_1 - \gamma_3)h^+ + (B^h - B_h). \tag{9.13}$$

Вычисления показывают, что не при любых константах существует решение системы (9.11), (9.12). В частности, пересечения квазиэкстремалей нет при одинаковых константах α_i, γ_i.

Однако варьируя константы (т. е. двигая соответствующие поверхности), мы можем добиться пересечения квазиэксремалей, или, эквивалентно, первых интегралов.

Нетрудно проверить, что следующие параметры α_i, γ_i обеспечивают пересечение интегральных поверхностей:

$$\alpha_1 = \exp(1+\varepsilon^2)(1+\varepsilon)^{-1/\varepsilon}, \quad \alpha_2 = \ln(1+\varepsilon)\exp(1+\varepsilon^2)(1+\varepsilon)^{-1/\varepsilon}\varepsilon^{-1},$$

$$\gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = 1 - (1+\varepsilon)\varepsilon^{-2}\ln(1+\varepsilon) + \varepsilon^{-1},$$

$$B^h = B_h, \quad \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{\gamma_1 - \gamma_3} = \frac{\varepsilon \exp(1+\varepsilon^2)}{(1+\varepsilon)^{1+1/\varepsilon}}, \tag{9.14}$$

где ε — малый параметр, $\varepsilon \to 0$ при $h^+ \to 0$.

Третий интеграл дает нам уравнение для сетки

$$h^+ = \varepsilon \exp(1+\varepsilon^2)(1+\varepsilon)^{-1-1/\varepsilon}\exp(y_x). \tag{9.15}$$

При указанных константах с помощью интегралов (9.11) на сетке (9.15) алгебраическими действиями находится общее решение:

$$y = \left(B^h + x\right)\ln\left(B^h + x\right) - (1+\varepsilon^2)(x + B^h) + A^h. \tag{9.16}$$

На этом решении уравнение сетки (9.15) эквивалентно следующему:

$$h_+ = \varepsilon(x + B^h). \tag{9.17}$$

Такая сетка является интегралом двухточечного уравнения

$$h_+ = (1+\varepsilon)h_-,$$

которое, очевидно, выражается через инварианты (9.7) и соответствует уравнению (9.10).

Итак, в качестве инвариантной аппроксимации уравнения (9.2) мы можем предьявить следующую разностную модель:

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha_1}{h_+}\left(\exp\left(y_x\right) - \exp\left(y_{\bar{x}}\right)\right) = 1, \\ h_+ = (1+\varepsilon)h_-, \end{cases} \tag{9.18}$$

где

$$\alpha_1 = \exp\left(1+\varepsilon^2\right)(1+\varepsilon)^{-1/\varepsilon}. \tag{9.19}$$

Схема (9.18), (9.19) и ее общее решение содержит малый параметр ε, который характеризует масштаб разностной сетки. Этот параметр может быть определен, например, из начальных данных (x_0, y_0, x_1, y_1) для системы (9.18).

Схема (9.18), как легко видеть, может быть представлена через инварианты (9.7), допускает вариационную постановку с лагранжианом (9.8), имеет два первых интеграла, которые определяют общее решение (9.16), (9.17).

Заметим, что уравнение для сетки нами было получено без дополнительной симметрии лагранжиана, а как разница двух квазиэкстремальных уравнений, получаемых при двух различных аппроксимациях инвариантного лагранжиана. Эта разница вместе с уравнением для сетки исчезает в континуальном пределе. Таким образом, это чисто разностная особенность инвариантных вариационных задач.

Общее решение (9.16), (9.17) со вторым порядком равномерно аппроксимирует общее решение исходного ОДУ (9.2). Покажем, что среди моделей вида (9.18) с некоторой константой α_1 содержится точная схема, решение которой совпадает с решением ОДУ в узлах сетки. При этом сетка может быть сколь угодно плотной на оси x. Точная схема обязана допускать ту же группу преобразований, что и исходное уравнение, поэтому она должна варажаться через разностные инварианты (9.7). Это означает, в частности, что можно использовать ту же сетку, что и в приближенной инвариантной схеме (9.18).

Как можно найти константы, выделяющие точную схему среди приближенных? Заметим, что схема (9.18), где константа α_1 не определена, записана в инвариантном виде

$$\begin{cases} J_0 = \dfrac{1}{h_+}\left(\exp\left(y_x\right) - \exp\left(y_{\bar{x}}\right)\right) = \dfrac{1}{\alpha}, \\ \dfrac{h_+}{h_-} = (1+\varepsilon), \end{cases} \tag{9.20}$$

где J_0 — инвариант группы. Чтобы определить значение J_0 на точном решении, нам достаточно вычислить эту величину на трех точках произвольного частного решения. В качестве такого решения возьмем, например

$$y = x \ln x - x \tag{9.21}$$

на сетке

$$h_+ = \varepsilon x. \tag{9.22}$$

Выберем три точки на оси x в соответствии с сеткой (9.22): $x_1 = 1$, $x_2 = (1+\varepsilon)$, $x_3 = (1+\varepsilon)^2$.

Подстановка трех точек частного решения в (9.20) дает значение инварианта J_0:

$$J_0 = e^{-1}(1+\varepsilon)^{1/\varepsilon},$$

т. е.

$$\alpha = e(1+\varepsilon)^{-1/\varepsilon}.$$

Таким образом, знание точного решения в трех точках позволило нам восстановить не только всю кривую частного решения, проходящего через эти три точки, но и записать схему (9.20), дающую все множество решений. Заметим, что нам, вообще говоря, не требовалось аналитическое выражение частного решения (9.21), а лишь три точки точного решения.

Точная схема, являясь частным случаем приближенных инвариантных схем, также допускает вариационную постановку. Точно такая же процедура, как и для приближенной инваринтной схемы, дает нам следующие точные интегралы:

$$e(1+\varepsilon)^{-1/\varepsilon} \exp(y_x) = x + h^+ + B, \tag{9.23}$$

$$\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) e(1+\varepsilon)^{-(1+1/\varepsilon)} \ln(1+\varepsilon) \exp(y_x)(y_x - 1) = \\ = y + \left(\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)\ln(1+\varepsilon) - 1\right)\frac{h^+}{\varepsilon} y_x + A.$$

Из интегралов (9.23) находится общее решение:

$$y = (x+B)\ln(x+B) - (x+B) + A, \tag{9.24}$$

не содержащее малый параметр и совпадающее с точным решением ОДУ (9.2).

Точная разностная модель имеет то же множество решений, что и исходное ОДУ. Также, как и уравнение (9.2) она имеет два первых интеграла (9.23), эти разностные интегралы справедивы и для дифференциального уравнения (9.2).

2. Рассмотрим теперь второй пример трехмерной алгебры операторов:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + ky\frac{\partial}{\partial y}, \quad k \neq 0, 1. \tag{9.25}$$

Соответствующее инвариантное семейство ОДУ второго порядка имеет вид

$$y'' = y'^{\frac{k-2}{k-1}}. \tag{9.26}$$

Это уравнение является уравнением Эйлера в вариационнй постановке с функцией Лагранжа

$$L = \frac{(k-1)^2}{k}(y')^{\frac{k}{k-1}} + y, \tag{9.27}$$

которая допускает X_1 и X_2 как вариационные симметрии:

$$X_1 L + LD(\xi_1) = 0,$$

$$X_2 L + LD(\xi_2) = 1 = D(x).$$

Как и в предыдущем примере, можно показать, что не существует лагранжиана, допускающего все три вариационные симметрии. Применение теоремы Нётер дает следующие первые интегралы:

$$J_1 = \frac{(1-k)}{k}(y')^{\frac{k}{k-1}} + y = A^0, \qquad J_2 = (k-1)(y')^{\frac{1}{k-1}} - x = B^0, \tag{9.28}$$

из которых легко найти общее решение в форме

$$y - \frac{1}{k}\left(\frac{1}{k-1}\right)^{(k-1)}(B^0 + x)^k = A^0. \tag{9.29}$$

Займемся теперь построением разностного аналога уравнения (9.26).

Прежде всего подсчитаем конечно-разностные инварианты трехмерной группы с операторами (9.25) на трехточечном шаблоне:

$$\frac{h_+}{h_-}, \qquad y_x h_-{}^{(1-k)}, \qquad y_{\bar{x}} h_-{}^{(1-k)}.$$

Возьмем функцию

$$\mathcal{L} = \left(\frac{(k-1)^2}{k}\alpha_i\,(y_x)^{\frac{k}{k-1}} + \frac{y_+ + y}{2}\right), \quad i = 1, 2, 3, \tag{9.30}$$

с некоторыми константами α_i в качестве разностного лагранжиана, который инвариантен по отношению X_1 и дивергентно инвариантен относительно X_2 с любой константой α_i:

$$X_1\mathcal{L} + \mathcal{L}\underset{+h}{D}(\xi_1) = 0, \quad X_2\mathcal{L} + \mathcal{L}\underset{+h}{D}(\xi_2) = 1 = \underset{+h}{D}(x). \tag{9.31}$$

Применяя разностный аналог теоремы Нётер, получим пересечение квазиэкстремальных уравнений:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta y}: &\qquad (k-1)\alpha_1\left((y_x)^{\frac{1}{k-1}} - (y_{\bar{x}})^{\frac{1}{k-1}}\right) = \frac{h^+ + h^-}{2},\\
\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta x}: &\ \frac{k-1}{k}\alpha_2\left((y_x)^{\frac{k}{k-1}} - (y_{\bar{x}})^{\frac{k}{k-1}}\right) - \frac{y_+ + y}{2} + \frac{y + y_-}{2} = 0,\\
\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta y}: &\qquad (k-1)\alpha_3\left((y_x)^{\frac{1}{k-1}} - (y_{\bar{x}})^{\frac{1}{k-1}}\right) = \frac{h^+ + h^-}{2}.
\end{aligned} \tag{9.32}$$

Это пересечение эквивалентно существованию первых интегралов

$$\begin{aligned}
I_1 &= (k-1)\alpha_1\,(y_x)^{\frac{1}{k-1}} - \frac{x_+ + x}{2} = B^h,\\
I_2 &= \frac{k-1}{k}\alpha_2\,(y_x)^{\frac{k}{k-1}} = \frac{y_+ + y}{2} + A^h,\\
I_3 &= (k-1)\alpha_3\,(y_x)^{\frac{1}{k-1}} - \frac{x_+ + x}{2} = B_h.
\end{aligned} \tag{9.33}$$

Полученные интегралы, как и квазиэкстремали, не всегда совместны. Вычисление условий совместности приводит к следующим значениям параметров:

$$\alpha_1 = \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(\frac{k\varepsilon}{(1+\varepsilon^2)((1+\varepsilon)^k - 1)}\right)^{\frac{1}{k-1}},$$

$$\alpha_2 = \frac{1 + (1+\varepsilon)^k}{2}(1+\varepsilon^2)^{\frac{1}{1-k}}\left(\frac{k\varepsilon}{(1+\varepsilon)^k - 1}\right)^{\frac{k}{k-1}}, \quad B^h = B_h, \tag{9.34}$$

где ε — некоторый малый параметр.

Разница между I_1 и I_2 дает нам уравнение для сетки:

$$h_+ = \varepsilon(k-1)\left(\frac{k\varepsilon y_x}{(1+\varepsilon^2)((1+\varepsilon)^k - 1)}\right)^{\frac{1}{k-1}}. \tag{9.35}$$

С помощью сетки (9.35) и первых интегралов (9.33) общее решение пересечения квазиэкстремалей представимо в виде

$$y = (1+\varepsilon^2)\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k-1}\right)^{k-1}(x+B^h)^k + A^h. \tag{9.36}$$

Это решение равномерно близко с порядком $O(h^2)$ к общему решению (9.29) исходного уравнения (9.26).

На решении (9.36) сетку (9.35) можно эквивалентно представить в более простой форме:

$$h_+ = \varepsilon(x+B^h). \tag{9.37}$$

Это уравнение, очевидно, является первым интегралом трехточечного уравнения, связывающего правый и левый шаг сетки в данной точке:

$$h_+ = (1+\varepsilon)h_-.$$

Таким образом, мы получаем семейство инвариантных разностных моделей уравнения (9.26):

$$\begin{gathered}\frac{2(k-1)\alpha_1}{h_-+h_+}\left((y_x)^{\frac{1}{k-1}} - (y_{\bar{x}})^{\frac{1}{k-1}}\right) = 1,\\ h_+ = (1+\varepsilon)h_-,\end{gathered} \tag{9.38}$$

которое имеет второй порядок аппроксимации, допускает вариационную постановку, имеет два первых интеграла и полностью интегрируемо в элементарных функциях.

Так же, как и в первом примере, при помощи трех точек точного решения в системе разностных уравнений (9.38) можно выбрать константу, соответствующую точной схеме:

$$\begin{gathered}\frac{2(k-1)\alpha}{h_-+h_+}\left((y_x)^{\frac{1}{k-1}} - (y_{\bar{x}})^{\frac{1}{k-1}}\right) = 1,\\ h_+ = (1+\varepsilon)h_-,\end{gathered} \tag{9.39}$$

где

$$\alpha = \left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(\frac{k\varepsilon}{((1+\varepsilon)^k - 1)}\right)^{\frac{1}{k-1}}. \tag{9.40}$$

Точная схема (9.39) также допускает вариационную постановку, из которой получаются два первых интеграла

$$\begin{gathered}(k-1)\alpha\,(y_x)^{\frac{1}{k-1}} - \frac{x_+ + x}{2} = B,\\ \frac{k-1}{k}\beta\,(y_x)^{\frac{k}{k-1}} - \frac{y_+ + y}{2} = A,\end{gathered} \tag{9.41}$$

где

$$\alpha = \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(\frac{k\varepsilon}{((1+\varepsilon)^k - 1)}\right)^{\frac{1}{k-1}},$$

$$\beta = \frac{1 + (1+\varepsilon)^k}{2}\left(\frac{k\varepsilon}{(1+\varepsilon)^k - 1}\right)^{\frac{k}{k-1}}. \qquad (9.42)$$

Эти разностные интегралы справедливы как для схемы (9.39), так и для дифференциального уравнения (9.26).

Приведенные примеры инвариантных разностных схем показывают эффективность применения разностного лагранжева формализма для получения первых интегралов и интегрирования. Приближенные инвариантные схемы содержат точные схемы в качестве подмножества и имеют одинаковую с ними алгебраическую структуру.

§ 10. Пример построения консервативной разностной модели: уравнение Шрёдингера

В этом пункте мы приведем пример построения консервативной разностной модели, когда будет использована некоторая модификация полученных ранее конструкций разностного лагранжева формализма [75].

Рассмотрим нелинейное уравнение Шрёдингера

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + u|\,u\,|^2 = 0, \qquad (10.1)$$

описывающее одномерную эволюцию решения в пространстве n переменных. Это уравнение описывает многие физические процессы, включая нелинейные явления в физике плазмы и нелинейной оптике. В случае $n = 1$ уравнение интегрируемо и решение существует глобально, в этом случае уравнение допускает пятимерную группу Ли точечных преобразований и бесконечную серию высших симметрий. Ниже мы рассмотрим неинтегрируемый случай $n \geqslant 2$, когда нет высших симметрий и допускаемая группа точечных преобразований имеет размерность 3.

Прежде несколько преобразуем уравнение (10.1). Подставим следующее представление решения

$$u(x,t) = Ae^{i\Phi}, \qquad (10.2)$$

в уравнение (10.1). В результате получим два уравнения на действительные функции $A = A(x,t), \Phi = \Phi(x,t)$:

$$A_t + A\Phi_{rr} + 2A_r\Phi_r + \frac{n-1}{r} A\Phi_r = 0, \tag{10.3}$$

$$A\Phi_t + A\Phi_r^2 - A_{rr} - \frac{n-1}{r} A_r - A^3 = 0. \tag{10.4}$$

Групповой анализ системы (10.3), (10.4) дает следующую симметрию для случая $n \geqslant 2$:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial \Phi},$$

$$X_3 = 2t\frac{\partial}{\partial t} + r\frac{\partial}{\partial r} - A\frac{\partial}{\partial A}. \tag{10.5}$$

Рассмотрим следующий функционал:

$$L = \int\limits_{\Omega} \mathcal{L}(t, r, u, u_t, u_r) r^{n-1} dr dt, \tag{10.6}$$

где $\mathcal{L}$ — некоторая функция Лагранжа.

Для применения теоремы Нётер мы несколько модифицируем соответствующее операторное тождество с учетом размерностного параметра n:

$$\begin{aligned}
\xi^t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \xi^r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} + \eta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} + [D_t(\eta) - u_t D_t(\xi^t) - u_r D_t(\xi^r)] \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} + {}\\
+ [D_r(\eta) - u_t D_r(\xi^t) - u_r D_r(\xi^r)] \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_r} + {}\\
+ \mathcal{L}[D_t(\xi^t) + D_r(\xi^r)] + \left(\frac{n-1}{r}\right) \xi^r \mathcal{L} \equiv {}\\
\equiv (\eta - \xi^t u_t - \xi^r u_r) \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - D_t\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\right) - \frac{1}{r^{n-1}} D_r \left(r^{n-1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_r}\right)\right] + {}\\
+ D_t\left[\xi^t \mathcal{L} + (\eta - \xi^t u_t - \xi^r u_r) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\right] + {}\\
+ \frac{1}{r^{(n-1)}} D_r \left[r^{n-1}\left(\xi^r \mathcal{L} + (\eta - \xi^t u_t - \xi^r u_r) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_r}\right)\right],
\end{aligned} \tag{10.7}$$

где

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + u_t \frac{\partial}{\partial u} + \ldots, \qquad D_r = \frac{\partial}{\partial r} + u_r \frac{\partial}{\partial u} + \ldots \tag{10.8}$$

— операторы полного дифференцирования по независимым переменным.

Операторное тождество (10.7) связывает очевидным образом инвариантность функционала (10.6)

$$\xi^t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \xi^r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} + \eta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} + [D_t(\eta) - u_t D_t(\xi^t) - u_r D_t(\xi^r)] \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} +$$
$$+ [D_r(\eta) - u_t D_r(\xi^t) - u_r D_r(\xi^r)] \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_r} + \mathcal{L}[D_t(\xi^t) + D_r(\xi^r)] + \left(\frac{n-1}{r}\right) \xi^r \mathcal{L} = 0,$$

с соответствующим законом сохранения

$$D_t \left[\xi^t \mathcal{L} + (\eta - \xi^t u_t - \xi^r u_r) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\right] +$$
$$+ \frac{1}{r^{(n-1)}} D_r \left[r^{n-1} \left(\xi^r \mathcal{L} + (\eta - \xi^t u_t - \xi^r u_r) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_r}\right)\right] = 0,$$

на решениях уравнений Эйлера

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - D_t \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\right) - \frac{1}{r^{n-1}} D_r \left(r^{n-1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_r}\right) = 0.$$

Легко проверить, что лагранжиан

$$\mathcal{L} = {A_r}^2 + A^2 {\Phi_r}^2 + A^2 \Phi_t - \frac{1}{2} A^4 \tag{10.9}$$

дает систему (10.3), (10.4) в качестве уравнений Эйлера. Лагранжиан (10.9) инвариантен по отношению симметрий X_1 и X_2, и, в соответствии с теоремой Нётер (см. тождество (10.7) при $u = (A, \Phi)$), легко получить для системы (10.3), (10.4) следующие законы сохранения:

$$D_t\{A^2\} + \frac{1}{r^{n-1}} D_r\{r^{n-1} 2A^2 \Phi_r\} = 0,$$

$$D_t \left\{\frac{A^4}{2} - A_r^2 - A^2 \Phi_r^2\right\} + \frac{1}{r^{n-1}} D_r\{r^{n-1}(2A_t A_r + 2A^2 \Phi_t \Phi_r)\} = 0. \tag{10.10}$$

Займемся теперь дискретизацией системы (10.3), (10.4) или эквивалентной системы (10.10). Для построения разностного аналога этих уравнений нужно, прежде всего, решить вопрос о разностной сетке, на которой можно построить соответствующую апроксимацию с сохранением симметрии (10.5).

Критерий инвариантности ортогональной сетки

$$\underset{+h}{D}(\xi^t) = -\underset{+\tau}{D}(\xi^x) \tag{10.11}$$

выполнен, как легко убедиться, для всех операторов (10.5). Кроме того, возможно использовать равномерную сетку вдоль осей x и t, поскольку выполняются соответствующие условия:

$$\underset{+\tau}{D}\,\underset{-\tau}{D}(\xi^t) = 0, \qquad \underset{+h}{D}\,\underset{-h}{D}(\xi^x) = 0, \tag{10.12}$$

где

$$\underset{+h}{D} = \frac{\underset{+h}{S} - 1}{h}, \quad \underset{-h}{D} = \frac{1 - \underset{-h}{S}}{h}, \quad \underset{+\tau}{D} = \frac{\underset{+\tau}{S} - 1}{\tau}, \quad \underset{-\tau}{D} = \frac{1 - \underset{-\tau}{S}}{\tau}$$

— операторы разностного дифференцирования, $\underset{+h}{S}$, $\underset{-h}{S}$, $\underset{+\tau}{S}$, $\underset{-\tau}{S}$ — операторы соответствующих сдвигов. Таким образом, в данном случае мы можем использовать простейшую ортогональную сетку с постоянными шагами h и τ (см. рис. 10.1).

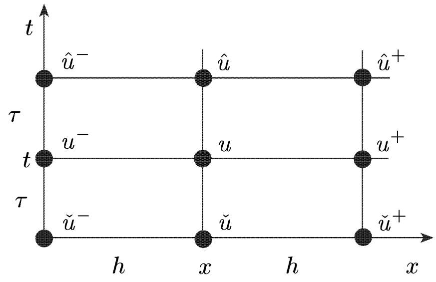

Рис. 10.1

На этой сетке мы рассмотрим разностный функционал

$$L = \sum_i \mathcal{L}_i(A, A_r, \Phi_r, \Phi_t) h\tau \tag{10.13}$$

на некоторой области Ω. В качестве разностного лагранжиана мы выберем следующий:

$$\mathcal{L} = {A_r}^2 + A^2 {\Phi_r}^2 + A^2 \Phi_t - \frac{1}{2} A^4, \tag{10.14}$$

где

$$A_r = \frac{A^+ - A}{h} = \underset{+h}{D}(A), \ \Phi_r = \frac{\Phi^+ - \Phi}{h} = \underset{+h}{D}(\Phi), \ \Phi_t = \frac{\hat{\Phi} - \Phi}{\tau} = \underset{+\tau}{D}(\Phi), \tag{10.15}$$

— соответствующие правые разностные производные.

Мы будем использовать следующее операторное тождество:

$$\xi^t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \xi^r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} + \eta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} + [\underset{+\tau}{D}(\eta) - u_t \underset{+\tau}{D}(\xi^t) - u_r \underset{+\tau}{D}(\xi^r)] \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} +$$

$$+ [\underset{+h}{D}(\eta) - u_t \underset{+h}{D}(\xi^t) - u_r \underset{+h}{D}(\xi^r)] \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_r} + \mathcal{L}[\underset{+\tau}{D}(\xi^t) + \underset{+h}{D}(\xi^r)] + \left(\frac{n-1}{r}\right) \xi^r \mathcal{L} \equiv$$

$$\equiv \xi^t \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \underset{-\tau}{D} \left(u_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} - \mathcal{L} \right) + \frac{1}{r^{n-1}} \underset{-h}{D} \left(r^{n-1} u_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_r} \right) \right\} +$$

$$+ \xi^r \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} + \underset{+\tau}{D} \left(\check{u_r} \left(\frac{\check{\partial \mathcal{L}}}{\partial u_t} \right) \right) + \frac{1}{r^{(n-1)}} \underset{+h}{D} \left\{ (r^-)^{n-1} \left[u_r^- \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_r} \right)^- - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \mathcal{L}^- \right] + \left(\frac{n-1}{r} \right) \mathcal{L} \right\} + \eta \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \underset{-\tau}{D} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} \right) - \frac{1}{r^{n-1}} \underset{-h}{D} \left(r^{n-1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_r} \right) \right\} +$$

$$+ \underset{+\tau}{D} \left\{ \xi^t \check{\mathcal{L}} + (\eta - \xi^t \check{u_t} - \xi^r \check{u_r}) \left(\frac{\check{\partial \mathcal{L}}}{\partial u_t} \right) \right\} +$$

$$+ \frac{1}{r^{(n-1)}} \underset{+h}{D} \left\{ (r^-)^{n-1} \left[\xi^r \mathcal{L}^- + (\eta - \xi^t u_t^- - \xi^r u_r^-) \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_r} \right)^- \right] \right\}, \quad (10.16)$$

где $u = (A, \Phi)$, $\quad f^- = \underset{-h}{S}(f)$, $\quad \check{f} = \underset{-\tau}{S}(f)$.

Тождество (10.16) доказывается прямым вычислением.

Из тождества (10.16) видно, что разностные уравнения Эйлера

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \underset{-\tau}{D}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\right) - \frac{1}{r^{n-1}} \underset{-h}{D} \left(r^{n-1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_r} \right) = 0, \quad (10.17)$$

обладают законами сохранения, если преобразования группы не меняют независимые переменные, т. е. $\xi^t = \xi^r = 0$.

Если левая часть тождества (10.16) равна 0, тогда на уравнениях

$$\xi^t \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \underset{-\tau}{D} \left(u_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} - \mathcal{L} \right) + \frac{1}{r^{n-1}} \underset{-h}{D} \left(r^{n-1} u_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_r} \right) \right\} +$$

$$+ \xi^r \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} + \underset{+\tau}{D} \left(\check{u_r} \left(\frac{\check{\partial \mathcal{L}}}{\partial u_t} \right) \right) \right. +$$

$$\left. + \frac{1}{r^{(n-1)}} \underset{+h}{D} \left\{ (r^-)^{n-1} \left[u_r^- \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_r} \right)^- - \mathcal{L}^- \right] + \left(\frac{n-1}{r} \right) \mathcal{L} \right\} \right. +$$

$$+ \eta \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \underset{-\tau}{D} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} \right) - \frac{1}{r^{n-1}} \underset{-h}{D} \left(r^{n-1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_r} \right) \right\} = 0 \quad (10.18)$$

выполняются законы сохранения

$$\underset{+\tau}{D}\left\{\xi^t\check{\mathcal{L}}+(\eta-\xi^t\check{u}_t-\xi^r\check{u}_r)\left(\frac{\partial\check{\mathcal{L}}}{\partial u_t}\right)\right\}+$$
$$+\frac{1}{r^{(n-1)}}\underset{+h}{D}\left\{(r^-)^{n-1}\left[\xi^r\mathcal{L}^-+(\eta-\xi^tu_t{}^--\xi^ru_r{}^-)\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_r}\right)^-\right]\right\}=0. \tag{10.19}$$

Применим это операторное тождество к лагранжиану (10.14). Инвариантность лагранжиана (10.14) по отношению к X_1 и X_2 дает следующие два закона сохранения:

$$\underset{-\tau}{D}\left\{\frac{A^4}{2}-A^2\Phi_r{}^2-A_r{}^2\right\}+\frac{1}{r^{(n-1)}}\underset{-h}{D}\{2r^{n-1}[A_rA_t+A^2\Phi_t\Phi_r]\}=0, \tag{10.20}$$

$$\underset{-\tau}{D}\{A^2\}+\frac{1}{r^{(n-1)}}\underset{-h}{D}\{2r^{n-1}A^2\Phi_r\}=0. \tag{10.21}$$

Таким образом, разностные уравнения (10.20), (10.21) представляют собой инвариантную разностную схему на ортогональной равномерной сетке и имеют форму разностных законов сохранения, соответствующих дифференциальным законам (10.10).

Заметим, что в тождестве (10.16) фигурирует не инвариантность функционала (левая часть равна нулю), а некоторое другое условие, в правой части тождества соответственно фигурируют не квазиэкстремали, а некоторые другие уравнения, близкие к квазиэкстремалям в смысле аппроксимации.

Приведем тождество, соответствующее точной инвариантности функционала:

$$\xi^t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}+\xi^r\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r}+\eta\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u}+[\underset{+\tau}{D}(\eta)-u_t\underset{+\tau}{D}(\xi^t)-\hat{v}_r\underset{+\tau}{D}(\xi^r)]\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_t}+$$
$$+[\underset{+h}{D}(\eta)-v_t{}^+\underset{+h}{D}(\xi^t)-u_r\underset{+h}{D}(\xi^r)]\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_r}+\mathcal{L}[\underset{+\tau}{D}(\xi^t)+\underset{+h}{D}(\xi^r)]+$$
$$+\left(\frac{n-1}{r}\right)\xi^r\mathcal{L}\equiv$$
$$\equiv\xi^t\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}+\underset{-\tau}{D}\left(u_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_t}-\mathcal{L}\right)+\frac{1}{r^{n-1}}\underset{-h}{D}\left(r^{n-1}v_t{}^+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_r}\right)\right\}+$$

$$
+ \xi^r \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} + \underset{+\tau}{D} \left(v_r \left(\frac{\partial \check{\mathcal{L}}}{\partial u_t} \right) \right) + \frac{1}{r^{(n-1)}} \underset{+h}{D} \left\{ (r^-)^{n-1} \left[u_r{}^- \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_r} \right)^- - \right. \right. \right.
$$

$$
\left. \left. \left. - \ \mathcal{L}^- \right] + \frac{n-1}{r} \mathcal{L} \right\} + \eta \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \underset{-\tau}{D} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} \right) - \frac{1}{r^{n-1}} \underset{-h}{D} \left(r^{n-1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_r} \right) \right\} +
$$

$$
+ \underset{+\tau}{D} \left\{ \xi^t \check{\mathcal{L}} + (\eta - \xi^t \check{u}_t - \xi^r v_r) \left(\frac{\partial \check{\mathcal{L}}}{\partial u_t} \right) \right\} +
$$

$$
+ \frac{1}{r^{(n-1)}} \underset{+h}{D} \left\{ (r^-)^{n-1} \left[\xi^r \mathcal{L}^- + (\eta - \xi^t v_t - \xi^r u_r{}^-) \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_r} \right)^- \right] \right\}, \quad (10.22)
$$

где $u = (A, \Phi)$, v_t, v_r — непрерывные производные от u:

$$
v_t = D_t(u), \quad v_r = D_r(u).
$$

Сравнение тождества (10.22) с (10.16) показывает, что в нашем случае условие инвариантности функционала (левая часть тождества (10.22) равна нулю) совпадает с равенством нулю левой части тождества (10.16), поскольку

$$
\underset{+\tau}{D}(\xi^r) = \underset{+h}{D}(\xi^t) = 0
$$

для операторов X_1, X_2. Это позволило нам модифицировать операторное тождество, заменив в (10.16) непрерывные производные на разностные и скомпоновать в правой части тождества (10.16) соответствующие консервативные разностные уравнения.

Приведенный пример показывает, что операторные тождества нетеровского типа допускают дальнейшую модификацию, позволяя адаптировать условия инвариантности разностного функционала к конкретной вариационной задаче.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Артамонов Ю.В.* Инвариантная разностная модель нелинейного уравнения Шрёдингера: Дипломная работа.—М.: Физический факультет МГУ, 1995.
2. *Бакирова М.И., Боршукова С.Н., Дородницын В.А. и др.* О направленном распространении тепла в нелинейной анизотропной среде.—М., 1985.—24 с.—(Препр./ ИПМ СССР; № 182).
3. *Бакирова М.И., Димова С.Н., Дородницын В.А. и др.* Инвариантные решения уравнения теплопроводности, описывающее направленное распространение горения и спиральные волны в нелинейной среде// ДАН СССР. 1988. Т. 299, № 2. С. 346–351.
4. *Бакирова М.И., Дородницын В.А.* Инвариантная конечно-разностная модель для полулинейного уравнения теплопроводности.—М., 1993.—20 с.—(Препр./ ИПМ АН СССР; № 87).
5. *Бакирова М.И., Дородницын В.А.* Инвариантная разностная модель уравнения: $u_t = u_{xx} + u \ln u$// Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30, № 10. С. 1697–1702.
6. *Бакирова М.И., Дородницын В.А., Козлов Р.В.* Инвариантные конечно-разностные схемы для уравнений Бюргерса и теплопроводности.—М., 1995.—31 с.—(Препр./ ИПМ РАН; № 3).
7. *Бакирова М.И., Дородницын В.А., Козлов Р.В.* Инвариантные разностные модели уравнения теплопроводности с источником.—М., 1996.—32 с.—(Препр./ ИПМ АН СССР; № 20).
8. *Бахвалов Н.С.* Численные методы.—М.: Наука, 1975.
9. *Белоцерковский О.М.* Численное моделирование в механике сплошных сред.—М.: Наука, 1984.
10. *Бобылев А.В., Ибрагимов Н.Х.* Взаимосвязь свойств симметрии уравнений динамики, кинетической теории газов и гидродинамики// Матем. моделирование. 1989. Т. 1, № 3. С.100–109.
11. *Галактионов В.А., Дородницын В.А., Еленин Г.Г. и др.* Квазилинейное уравнение теплопроводности с источником, обострение, локализация, симметрия, точные решения, асимптотики, структуры// Современные проблемы математики. Новейшие достижения. Т. 28.—М.: ВИНИТИ, 1986.—С. 95–206.

12. *Гельфанд И.М., Фомин С.В.* Вариационное исчисление.—М.: ГИФМЛ, 1961.—228 с.

13. *Гельфонд А.О.* Исчисление конечных разностей.—М.: Физматгиз, 1967.—376 с.

14. *Годунов С.К., Рябенький В.С.* Разностные схемы.—М.: Наука, 1973.

15. *Дородницын В.А.* Групповые свойства и инвариантные решения уравнения нелинейной теплопроводности с источником или стоком.—М., 1979.—31 с.—(Препр./ ИПМ АН СССР; № 57).

16. *Дородницын В.А., Еленин Г.Г., Курдюмов С.П.* О некоторых инвариантных решениях уравнений теплопроводности с источником.—М., 1980.—24 с.—(Препр./ ИПМ АН СССР; № 31).

17. *Дородницын В.А.* Об инвариантных решениях уравнения нелинейной теплопроводности с источником// ЖВМ и МФ. 1982. Т. 32, № 6 С. 1393–1400.

18. *Дородницын В.А., Свирщевский С.Р., Князева И.В.* Групповые свойства уравнения теплопроводности с источником в двумерном и трехмерном случаях// Дифференц.уравнения. 1983. Т. 19, № 17. С.1215–1223.

19. *Дородницын В.А., Еленин Г.Г.* Симметрия в решениях уравнений математической физики.—М.: Знание, 1985.—64 с.

20. *Дородницын В.А.* Группа Тейлора и преобразования, сохраняющие разностные производные.—М., 1987.—31 с.—(Препр./ ИПМ АН СССР; № 67).

21. *Дородницын В.А.* Группа Ньютона и коммутационные свойства операторов Ли–Беклунда в сеточных пространствах.—М., 1988.—26 с.—(Препр./ ИПМ АН СССР; № 175).

22. *Дородницын В.А.* Группы преобразований в сеточных пространствах// Современные проблемы математики. Новейшие достижения. Т. 34.—М.: ВИНИТИ, 1989.—С. 149–190.

23. *Дородницын В.А.* Инвариантные вариационные задачи и консервативность разностных схем.—М., 1991.—31 с.—(Препр./ ИПМ АН СССР; № 121).

24. *Дородницын В.А.* Конечно-разностный аналог теоремы Нётер// Доклады РАН. 1993. Т. 328, № 6. С. 678–682.

25. *Дородницын В.А.* Разностные аналоги теоремы Э. Нётер// Режимы с обострением. Эволюция идеи.—М.: Наука, 1999.—С. 141–162.

26. *Ибрагимов Н.Х.* Инвариантные вариационные задачи и законы сохранения// Теор. и матем. физика. 1969. Т. 1, № 3. С. 350–359.

27. *Ибрагимов Н.Х.* Группы преобразований в математической физике.—М.: Наука, 1983.—280 с.

28. *Ибрагимов И.И., Келдыш М.В.* Об интерполяции целых функций// Матем. сборник. 1947. Т. 20, № 62. С. 283.

29. *Костин И.М.* Инвариантные решения уравнения Кортевега–де Вриза // ПМТФ. 1969. № 4. С. 69.

30. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики.—М.: Наука, 1980.
31. *Михайлов А.В.*, *Шабат А.Б.*, *Ямилов Р.И.* Симметрийный подход к классификации нелинейных уравнений. Полные списки интегрируемых систем// УМН. 1987. Т. 42, вып. 4 (256). С.3–54.
32. *Нётер Э.* Инвариантные вариационные задачи. В сб. Вариационные принципы механики.—М.: Физматгиз, 1959.—С. 611–630.
33. *Овсянников Л.В.* Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности// Докл. АН СССР. 1959. Т. 125, № 3. С. 492–495.
34. *Овсянников Л.В.* Групповые свойства дифференциальных уравнений.—Новосибирск: СОАН СССР, 1962.
35. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений.—М.: Наука, 1978.—416 с.
36. *Овсянников Л.В.* Лекции по основам газовой динамики.—М.: Наука, 1981.—368 с.
37. *Овсянников Л.В.* О свойстве x-автономии// Докл. АН. 1993. Т. 330, № 5. С. 559–561.
38. *Олвер П.* Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям.—М.: Мир, 1989.—639 с.
39. *Рихтмайер Р.*, *Мортон К.* Разностные методы решения краевых задач.—М.: Мир, 1972.
40. *Самарский А.А.* Теория разностных схем.—М.: Наука, 1977.—616 с.
41. *Самарский А.А.*, *Галактионов В.А.*, *Курдюмов С.П. и др.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений.—М.: Наука, 1987.—477 с.
42. *Самарский А.А.*, *Гулин А.В.* Численные методы.—М.: Наука, 1989.
43. *Самарский А.А.*, *Соболь И.М.* Примеры численного расчета температурных волн.// ЖВМ и МФ. 1963. Т. 3, № 4. С. 702–719.
44. *Самарский А.А.*, *Попов Ю.П.* Разностные схемы газовой динамики.—М.: Наука, 1973.—352 с.
45. *Серр Ж.-П.* Алгебры Ли и группы Ли.—М.: Мир, 1969.—375 с.
46. *Свирщевский С.Р.* Групповые свойства модели теплопереноса с учетом релаксации теплового потока.—М., 1988.—16 с.—(Препр./ ИПМ АН СССР; № 105).
47. *Федоренко Р.П.* Введение в вычислительную физику.—М.: Изд-во МФТИ, 1994.—528 с.
48. *Чеботарев Н.Г.* Теория групп Ли.—Л.: ГИТТЛ, 1940.—396 с.
49. *Ямилов Р.И.* О законах сохранения для разностного уравнения К–де В. Динамика неоднородной жидкости.—Новосибирск: ИГ СОАН, 1980.—164 с.

50. *Яненко Н.Н.*, *Шокин Ю.И.* О групповой классификации разностных схем для системы уравнений газовой динамики// Труды МИ АН СССР. 1973. № 122. С. 85-96.

51. *Ablowitz M.J.*, *Schober C.*, *Herbst B.M.* Numerical Chaos, Roundoff Errors and Homoclinic Manifolds// Physical Review Letters. 1993. V. 71, № 17. P. 2683–2686.

52. *Ames W.F.* Nonlinear partial differential equations in engineering. V. I, II.— N. Y.: Acad. Press, 1965, 1972.

53. *Ames W.F.*, *Anderson R.L.*, *Dorodnitsyn V.A. et al.* CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. V. I: Symmetries, Exact Solutions and Conservation Laws.—CRC Press, 1994.

54. *Bakirova M.*, *Dorodnitsyn V.*, *Kozlov R.* Symmetry preserving difference schemes for some heat transfer equations// Journal of Physics A, Math. and Gen. 1997. № 30. P. 8139–8155.

55. *Bessel-Hagen E.* Uber die Erhaltungssatze der Elektrodynamik// Math.Ann. 1921. № 84. P. 258–276.

56. *Birkhoff G.* Hydrodynamics.—Princeton University Press, 1960.

57. *Bluman G.W.*, *Gole J.D.* Similarity methods for differential equations.—N. Y.: Springer Verlag, 1974.

58. *Bluman G.W.*, *Kumei S.* Symmetries and differential equations.—Berlin: Springer Verlag, 1989.

59. *Budd C.*, *Collins G.* Symmetry based numerical methods for partial differential equations/ Dundee conference in numerical analysis, 1997.

60. *Budd C.*, *Huang W.*, *Russell R.* Moving mesh methods for problems with blow-up// SIAM J. Comput. 1995. № 17, P. 305.

61. *Common A.*, *Hessameddini E.*, *Musette M.* A Pinney equation and its discretization// Journal of Physics A: Math. and Gen. 1996. № 29. P. 6343–6352.

62. *Common A.*, *Musette M.* Two discretizations of the Ermakov-Pinney equation.—Canterbury: Institute of Math. and Statistics, Univ. of Kent, 1997.

63. *Dorodnitsyn V.A.* Finite-difference approximations entirely inheriting continuous symmetry of original differential equations.—Preprint KIAM, 1993.

64. *Dorodnitsyn V.* Finite-difference models entirely inheriting symmetry of original differential equations, Modern Group Analysis.—Kluwer Academic Publisher// Advanced Analitical and Computational Methods in Mathematical Physics. 1993. P. 191–201.

65. *Dorodnitsyn V.* Invariant discrete model for the Korteweg-de Vries equation.— Preprint CRM-2187, Centre de Recherches Mathematiques, Universite de Montreal, 1994.

66. *Dorodnitsyn V.* Finite difference models entirely inheriting continuous symmetry of original differential equations// International Journal of Modern Physics C (Physics and Computers). 1994. V. 5, № 4. P. 723–734.

67. *Dorodnitsyn V.* Some new invariant difference equations on evolutionary grids// Proceedings of 14-th IMACS World Congress of Computational and Applied Mathematics. V. 1.—N. Y.: Springer< 1994.—P. 143–146.

68. *Dorodnitsyn V.* Continious symmetries of finite-difference evolution equations and grids// Proceedings of Workshop on Symmetries and Integrability of Difference Equations. V. 9.—University of Montreal, 1996.—P. 103–112.

69. *Dorodnitsyn V.* Group theoretical methods for finite-difference modeling // Proceedings of the First World Congress of Nonlinear Analysts.—Walter de Gruyter, 1996.—P. 879–890.

70. *Dorodnitsyn V.*, *Kozlov R.* The whole set of symmetry preserving discrete versions of a heat transfer equation with a source.—Trondheim, Norway: Norwegian University of Science and Technology, 1997.—№ 4.

71. *Dorodnitsyn V.* Conservation laws for difference equations// Modern Group Analysis. Proceedings of International Conference at Sophus Lie Center/Eds N.Ibragimov, K.Razi Nagvi, E.Straume.—MARS Publishers, 1999.—P. 91–98.

72. *Dorodnitsyn V.*, *Kozlov R.*, *Winternitz P.* Lie group classification of second-order ordinary difference equations// Jour. Mat. Phys. 2000. V. 41, № 1. P. 480–504.

73. *Dorodnitsyn V.* Noether-type theorems for difference equation.—Preprint I.H.E.S./M/98/27, Bures-sur-Yvette, France, 1998.

See also: IMACS volume on geometric integration/ Eds A.Iserles, S.Norsett. 2001. In press.

74. *Dorodnitsyn V.*, *Winternitz P.* Lie Point Symmetry Preserving Discretizations for Variable Coefficients Korteweg-de Vries Equations.—Kluwer Academic Publishers// Nonlinear Dynamics. 2000. V. 22, № 1. P. 49–59.

75. *Dorodnitsyn V.* Invariant difference models for the the nonlinear Schroedinger equation with conservation of Lagrangian structure// Proceedings of MOGRAN. 2000. In press.

76. *Dorodnitsyn V.*, *Kozlov R.*, *Winternitz P.* Second order ODEs with symmetries: Lagrangian formalism, first integrals and exact solutions.—2001. In press.

77. *Floreanini R.*, *Vinet L.* Quantum Algebras and q-special Functions// Annals of Physics. 1993. V. 221, № 1. P. 53–70.

78. *Floreanini R.*, *Vinet L.* Symmetries of the q-difference heat equation: CRM-1919.—Univ. of Montreal, 1993.—P. 1–7.

79. *Floreanini R.*, *Vinet L.* Lie symmetries of finite-difference equations// J. Math. Phys. 1995. № 36 (12). P. 7024–7042.

80. *Gomez-Ullate D.*, *Lafortune S.*, *Winternitz P.* Symmetries of discrete dynamical systems involving two species// J. Math. Phys. 1999. V. 40, № 2782.

81. *Gonzalez–Lopez A.*, *Kamran N.*, *Olver P.J.* Lie algebras of vector fields in the real plane// Proc. London Math. Soc. (3). 1992. V. 64, № 399.

82. Grammaticos B., Ramani A., Winternitz P. Discretizing families of linearizable equations.—Tech. report of the Cemtre de Recherches Mathematiques, CRM-2456, Universite de Montreal, 1997.

83. *Hernandez Heredero R., Levi D., Winternitz P.* Symmetries of the discrete Burgers equation// J.Phys. A Math. Gen. 1999. V. 32, № 2685.

84. *Lagrange J.L.* Sur une nouvelle espece de calcul. 1772. Oeuvres III. P. 441–476.

85. *Lagrange J.L.* Memoire sur la methode d'interpolation. 1783. Oeuvres V. P. 663–684.

86. *Levi D., Winternitz P.* Continuous symmetries for discrete equations // Physics Letters A. 1991. V. 152, № 7. P. 335.

87. *Levi D., Winternitz P.* Symmetries and conditional symmetries of differential-difference equations// J.Math. Phys. 1993. V. 34, № 8. P. 3713–3730.

88. *Levi D., Winternitz P.* Symmetries of discrete dynamical systems// J.Math. Phys. 1996. № 37. P. 5551.

89. *Lie S.* Klassifikation und Integration von Gewohnlichen Differentialgleichunden zwischen x, y die eine Gruppe von Transformationen gestatten, I,…,IV, Gessamelte Abhandlungen. V. 5.—Teubner, Leipzig, 1924.

90. *Lie S.* Vorlesungen uber Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen, Bearbeitet und herausgegehen von Dr.G. Scheffers.—B.G.Teubner, Leipzig, 1891.—(Reprinted as Differentialgleichungen, Chelsea, New York, 1967).

91. *Lie S.* Vorlesungen uber continuirliche Gruppen mit geometrischen und anderen Anwendungen. Bearbeited und herausgegeben von Dr. G.Scheffers.—B.G.Teubner, Leipzig, 1893.

92. *Lie S.* Theorie der Transformationsgruppen, Dritter Abschnitt, Abteilun.I. Unter Mitwirkung von Pr.F. Engel.—Teubner, Leipzig, 1893.

93. *Maeda S.* Canonical structure and symmetries for discrete systems// Math. Japan. 1980. № 25. P. 405–420.

94. *Maeda S.* Extension of discrete Noether theorem// Math. Japonica. 1981. V. 26, № 1. P. 85–90.

95. *Maeda S.* The similarity method for difference equations// J. Inst. Math. Appl. 1987. №. 38. P. 129–134.

96. *Norlund N.E.* Differenzenrechnung.—Berlin: Springer Verlag, 1926.

97. *Rogers C., Schief W.* Multi-component Ermakov systems: structure and linearization// Journ. of Math. Anal. and Applications. 1996. № 198. P. 194–220.

98. *Rogers C., Schief W., Winternitz P.* Lie-theoretical generalization of the Pinney equation// Tech. report of the Cemtre de Recherches Mathematiques, CRM-2463.—Universite de Montreal, 1997.

99. *Schief W.* A discrete Pinney equation// Applied Math. Letters. 1997. V. 10, № 3. P. 13–15.

100. *Shabat A., Yamilov R.* Lattice representation of integrable systems // Physics Letters A. 1988. V. 130. № 4, 5. P. 271–275.

101. *Stephani H.* Differential Equations: Their Solution Using Symmetries.— Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989.

102. *Winternitz P.* Nonlinear difference equations with superposition formulas.— Centre de Recherches Mathematiques: CRM-2461.—Universite de Montreal, 1997.

Научное издание

ДОРОДНИЦЫН Владимир Анатольевич

ГРУППОВЫЕ СВОЙСТВА РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Редактор *Е.Ю. Ходан*
Оригинал-макет *А.Л. Жигарева*
Оформление *А.А. Логунова*

ЛР № 071930 от 06.07.99.
Подписано в печать 30.08.01. Формат 60×90/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 15. Уч.-изд. л. 16,5.
Тираж 400 экз. Заказ №

Издательская фирма
«Физико-математическая литература»
117864 Москва, ул. Профсоюзная, 90

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ППП «Типография «Наука»
121099 Москва Г-99, Шубинский пер., 6

ISBN 5-9221-0171-4

9 785922 100601