

Ф. Клемент, Х. Хейманс, С. Ангенент,
К. ван Дуйн, Б. де Пахтер

Однопараметрические полугруппы

Абстрактные дифференциальные уравнения
с приложениями

Перевод с английского
В. В. Васильева и С. И. Пискарева

под редакцией
С. Г. Крейна



Москва «Мир» 1992

ББК 22.162
✓ 043
УДК 517.98

н ф

Авторы: Ф. Клемент, Х. Хейманс, С. Ангенент, К. ван Дуйн, Б. де Пахтер

043 Однопараметрические полугруппы: Пер. с англ./Ф. Клемент, Х. Хейманс, С. Ангенент и др. — М.: Мир. 1992. — 352 с., ил.

ISBN 5-03-001847-6

Книга голландских математиков отражает прогресс в теории однопараметрических полугрупп, достигнутый за тридцатилетие после выхода классической книги Э. Хилле и Р. Филлипса. «Функциональный анализ и полугруппы» (М.: ИЛ, 1962). Главы книги посвящены нелинейным параболическим уравнениям и нелинейной диффузии, дискретной аппроксимации и интерполяции, функциональному исчислению и аналитическим полугруппам, асимптотическим свойствам позитивных полугрупп, примерам из структурной популяционной динамики. Книга может использоваться в качестве учебного пособия в университетах.

Для математиков — специалистов по функциональному анализу, дифференциальным уравнениям, теории вероятностей, для всех прикладников, применяющих функциональный анализ, студентов и аспирантов университетов.

О $\frac{1602080000-294}{041(01)-92}$ 12-91

ББК 22.162

Редакция литературы по математическим наукам

ISBN 5-03-001847-6 (русс.)
ISBN 0-444-70284-9 (англ.)

© Centre for Mathematics and Computer Science, 1987
© перевод на русский язык,
В. В. Васильев, С. И. Пискарев,
1992

Предисловие редактора перевода

Первое связное изложение теории полугрупп операторов было представлено Е. Хилле в 1948 г. в книге «Функциональный анализ». В дальнейшем, в 1957 г., переработанный и расширенный вариант этой книги был опубликован Е. Хилле и Р. Филлипсом. Его перевод на русский язык вышел в 1962 г. в издательстве «Иностранная литература». С тех пор в учебниках и монографиях по функциональному анализу, изданных в СССР, излагались лишь отдельные (часто одни и те же) разделы теории полугрупп операторов. В серии «Итоги науки» были опубликованы обширные обзоры С. Г. Крейна и М. И. Хазана (1983 г.), В. В. Васильева, С. Г. Крейна и С. И. Пискарева (1990 г.), которые только подчеркнули имеющееся отставание в разработке и популяризации новых результатов по теории полугрупп операторов и ее приложениям. Вот неполный список авторов монографий по этой теории, изданных за рубежом в последние 15 лет: V. Barbu [1976], A. Bellini-Morante [1979], H. Tanabe [1979], E. B. Davies [1980], H. O. Fattorini [1983], A. Pazy [1983], J. van Casteren [1985], J. A. Goldstein [1985]. Из этого списка видно, что количество источников информации о теории полугрупп операторов неуклонно растет, а на русский язык до сих пор переведена лишь последняя из упомянутых монографий, да и то ничтожно малым тиражом в 400 экз.

Теперь мы представляем читателю книгу Ф. Клемента, Х. Хейманса, С. Ангелента, К. ван Дуйна, Б. де Пахтера.

Ее авторы, понимая, что «никому не объять необъятное», ограничились подробным изложением лишь ряда разделов теории полугрупп операторов, отвечающих их вкусам. Нам кажется, что этот выбор сделан удачно. Для нашего читателя новыми будут разделы, посвященные теории нелинейных сжимающих полугрупп и ее приложению к задачам нелинейной диффузии, методу непрерывной интерполяции линейных операторов, теории позитивных полугрупп, занимающей всю третью часть книги. Кроме основной части, в трех дополнениях изложен материал, необходимый для ее понимания (выпуклые функции, полуупорядоченные пространства, некоторые результаты спектральной теории). В некоторых главах имеются содержательные упражнения. С упомянутой монографией Голдстейна эта книга почти не пересекается.

Нам кажется, что издание этой книги на русском языке позволит преодолеть тот застой, который у нас был в разработке важного раздела функционального анализа. Книга заинтересует многих математиков, использующих теорию полугрупп операторов как в теоретических, так и в прикладных аспектах.

С. Г. Крейн

Предисловие

Эта книга выросла из семинара, организованного Ф. Клементом на факультете математики и информатики Дельфтского технического университета и работавшего в 1984—1985 учебных годах.

Рождение теории полугрупп операторов связано с именем Э. Хилле и его монографией «Функциональный анализ и полугруппы», вышедшей в 1948 г. В дальнейшем развитие теории полугрупп продолжали В. Феллер, Т. Като, Р. С. Филлипс, К. Иосида и многие другие. Возможная область применения теории огромна и включает задачи математической физики, теории вероятностей и теории управления.

В книге не ставилась цель дать систематическое изложение теории однопараметрических полугрупп. Мы хотели лишь проиллюстрировать богатство этой теории, представив в одной книге ее различные аспекты. Книга написана так, что все три части можно читать независимо друг от друга. Однако предполагается знакомство читателя с основами функционального анализа.

Мы хотим выразить благодарность Одо Дикманну за поддержку во время подготовки этой книги. Также мы глубоко благодарны Д. Да Прато, Р. Гриммеру, П. Гривару и особенно Й. Хестенбеку и К. Хейсмансу, прочитавшим отдельные главы рукописи и указавшим ряд неточностей. Б. де Пахтер благодарен Нидерландской Организации по развитию фундаментальных исследований (ZWO) за финансовую помощь.

Наконец, мы хотим поблагодарить Центр математики и вычислительных наук Амстердама (CWI) за подготовку этого тома с помощью системы фотонабора, Вима Асперса за редакционную помощь, Тобиаса Бандерса за рисунки и особенно Каролину Свагерман за терпение и внимательную перепечатку рукописи.

Ф. Клемент
Х. Хейманс

Амстердам, март,
1987

Глава 1

Введение

1.0. Предварительные сведения

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — вещественное или комплексное банахово пространство. Через $\mathcal{L}(X)$ обозначим алгебру всех ограниченных линейных операторов, действующих в X . Семейство $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ элементов из $\mathcal{L}(X)$ называется однопараметрической полугруппой ограниченных линейных операторов в X , если

$$T(0) = I, \quad (1.1)$$

$$T(s+t) = T(s)T(t), \quad s, t \geq 0, \quad (1.2)$$

где I — тождественный оператор. Если дополнительно функция $t \rightarrow T(t)$ непрерывна в сильной операторной топологии на $\mathcal{L}(X)$, т. е. функция $t \rightarrow T(t)x$ непрерывна на $[0, \infty)$ при любом $x \in X$, то $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ называется сильно непрерывной полугруппой или C_0 -полугруппой. Это определение может быть распространено на нелинейные полугруппы, однако в этом параграфе мы ограничимся линейным случаем. Аналогично можно определить слабо непрерывные полугруппы, равномерно непрерывные полугруппы и, если X — сопряженное пространство, слабо $*$ -непрерывные полугруппы. Оказывается, что каждая слабо непрерывная полугруппа автоматически сильно непрерывна (см. Yosida [1980]). Далее, существуют бесконечномерные банаховы пространства, на которых каждая C_0 -полугруппа равномерно непрерывна (таково, в частности, $L_\infty(S, \mu)$; см. теорему 7.36 и следствие 7.37). Легко видеть, что равенство

$$T(t) = e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k, \quad t \geq 0, \quad (1.3)$$

определяет равномерно непрерывную полугруппу на X , если A — ограниченный линейный оператор в X . В этом примере A называют инфинитезимальным генератором¹⁾ полугруппы $\{T(t)\}_{t \geq 0}$. Заметим, что A есть правая производная отображе-

¹⁾ Иногда говорят, что A порождает $\{T(t)\}_{t \geq 0}$. — Прим. перев.

ния $t \rightarrow T(t)$ в нуле. Один из основных фактов теории C_0 -полугрупп — существование нетривиального инфинитезимального генератора A для любой C_0 -полугруппы $\{T(t)\}_{t \geq 0}$. В общем случае A неограничен и его областью определения $\mathcal{D}(A)$ является некоторое линейное подмножество в X . Точные определения $\mathcal{D}(A)$ и A таковы:

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in X: \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} (T(h)x - x) \text{ существует в } X \right\}, \quad (1.4a)$$

$$Ax = \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} (T(h)x - x), \quad x \in \mathcal{D}(A). \quad (1.4b)$$

Так определенное $\mathcal{D}(A)$ есть линейное многообразие, плотное в X , а линейный оператор $A: \mathcal{D}(A) \rightarrow X$ замкнут и обычно неограничен. Инфинитезимальный генератор сильно непрерывной полугруппы ограничен (и всюду определен) тогда и только тогда, когда полугруппа равномерно непрерывна. Множество $\mathcal{D}(A)$ инвариантно относительно $T(t)$, и

$$AT(t)x = T(t)Ax, \quad x \in \mathcal{D}(A), \quad t \geq 0.$$

Кроме того, для любого $x \in \mathcal{D}(A)$ функция u , заданная формулой $u(t) = T(t)x$, $t \geq 0$, дифференцируема на $[0, \infty)$ и является единственным решением абстрактной задачи Коши

$$\frac{du}{dt}(t) = Au(t), \quad u(0) = x, \quad t \geq 0. \quad (1.5)$$

Таким образом, полугруппа $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ полностью характеризуется своим инфинитезимальным генератором. Замечание относительно обозначений: в этой книге мы иногда будем писать $T_A(t)$ вместо $T(t)$ и A_T вместо A , чтобы подчеркнуть взаимно однозначное соответствие между полугруппами и их генераторами.

Далее, пусть $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ есть C_0 -полугруппа, а A — ее генератор (прилагательное «инфинитезимальный» мы часто будем опускать). Тип $\omega_0(A)$ полугруппы $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ определяется (см. § 3.7) так:

$$\omega_0(A) := \inf_{t > 0} \frac{1}{t} \ln \|T(t)\|.$$

Можно показать, что $\omega_0(A) < \infty$ и что для $\omega > \omega_0(A)$ существует такая константа $M \geq 1$, что

$$\|T(t)\| \leq M e^{\omega t}, \quad t \geq 0. \quad (1.6)$$

Кроме того, множество $\{\lambda \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} \lambda > \omega_0(A)\}$ содержится в $\rho(A)$, резольвентном множестве оператора A , и

$$(\lambda I - A)^{-1} x = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt \quad (1.7)$$

для всех $x \in X$ и $\lambda \in \mathbb{C}$ с $\operatorname{Re} \lambda > \omega_0(A)$. Таким образом, резольвента $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ оператора A при $\operatorname{Re} \lambda > \omega_0(A)$ есть преобразование Лапласа полугруппы; см. гл. 3. Объединяя (1.6) и (1.7), можно показать, что

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq M(\operatorname{Re} \lambda - \omega)^{-n}, \quad n \in \mathbb{Z}^+, \quad \operatorname{Re} \lambda > \omega. \quad (1.8)$$

Теорема Хилле — Йосиды (см. гл. 3) утверждает, что это свойство характеризует генераторы C_0 -полугрупп.

Практическая проверка условия (1.8) для данного оператора A может оказаться затруднительной, так как она включает оценку всех степеней резольвенты $R(\lambda, A)$. Тем не менее имеется важный частный случай, когда это условие оказывается эффективным, — случай $M = 1$. Тогда неравенство (1.8) достаточно проверить лишь при $n = 1$. В частности, если $\omega = 0$, то достаточно показать, что $\|R(\lambda, A)\| \leq 1$. Тогда соответствующая полугруппа $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ также удовлетворяет условию $\|T(t)\| \leq 1$, $t \geq 0$, и называется *сжимающей* C_0 -полугруппой. Сжимающие полугруппы изучаются в ч. I.

Другой важный класс полугрупп, для которых (1.8) необходимо проверить лишь для $R(\lambda, A)$, — класс *аналитических полугрупп*. Здесь можно также ввести важное понятие *максимальной регулярности*. Это свойство (когда оно имеет место) является очень удобным средством для изучения нелинейных задач Копи с помощью линеаризации. Аналитические полугруппы изучаются в ч. II.

Оказывается, что асимптотическое поведение C_0 -полугруппы непосредственно связано со спектральными свойствами ее инфинитезимального генератора. В этой связи важную роль может сыграть позитивность полугруппы. Часть III содержит полное описание позитивных полугрупп и их спектральных свойств.

1.1. Введение к ч. I

Пусть F — непустое замкнутое подмножество банахова пространства X . Оператор $L : F \rightarrow X$ называется *сжимающим оператором* (или *сжатием*), если

$$\|Lx - Ly\| \leq \|x - y\|, \quad x, y \in F.$$

Сильно непрерывная полугруппа $T(t) : F \rightarrow F$ называется *сжимающей полугруппой* (или *полугруппой сжатий*), если $T(t)$ есть сжимающий оператор при любом $t \geq 0$. В гл. 2 мы обсуждаем связь между сжимающими полугруппами и так называемыми *диссипативными операторами* (см. определение 2.2). В § 2.1 мы указываем без доказательства взаимно однозначное соответствие между линейными сжимающими полугруппами и их инфинитезимальными генераторами. Этот вводный параграф служит моти-

вировкой для дальнейшего изучения нелинейных сжимающих полугрупп, порожденных диссипативными операторами (см. § 2.2—2.4). В § 2.2 приводится основная теорема Крэндалла — Лиггетта о порождении. Грубо говоря, смысл ее состоит в следующем. Любому линейному или нелинейному (не обязательно однозначному) оператору A с областью определения $\mathcal{D}(A)$ и областью значений X можно поставить в соответствие семейство линейных или нелинейных операторов $\{T_A(t)\}_{t \geq 0}$, определенное на замыкании его области определения $\overline{\mathcal{D}(A)}$. Операторы $T_A(t) : \overline{\mathcal{D}(A)} \rightarrow X$ вводятся как разрешающие операторы для задачи Коши

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt}(t) &\in Au(t), \quad t > 0, \\ u(0) &= x \in \mathcal{D}(A). \end{aligned} \quad (1.9)$$

То есть функция $u(t)$, определенная формулой $u(t) = T_A(t)x$, есть решение (1.9). Чтобы решить (1.9), рассматривается неявная схема Эйлера, полученная заменой $(du/dt)(t)$ отношением $h^{-1}(u(t+h) - u(t))$ и подсчетом Au при $t+h$. Начиная с $t=0$, получаем приближение к решению (1.9) при $t=h$ из соотношения

$$\frac{1}{h}(u(h) - x) \in Au(h) \quad (1.10)$$

или, что то же самое, $x \in (I - hA)u(h)$. Если предположить, что (1.10) однозначно разрешимо при любых $x \in X$ и $h > 0$ и $(I - hA)^{-1}x$ есть его единственное решение, то определение

$$\left(I - \frac{t}{n}A\right)^{-n}x = \left(I - \frac{t}{n}A\right)^{-1} \dots \left(I - \frac{t}{n}A\right)^{-1}x$$

имеет смысл при $t > 0$, $n \in \mathbb{Z}^+$ и $x \in X$. Предполагая дополнительно, что при любом $h > 0$ операторы $(I - hA)^{-1} : X \rightarrow X$ являются сжимающими (в этом случае A называют *m-диссипативным*), получаем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (I - tA/n)^{-n}x$ существует для всех $t \geq 0$ и $x \in \overline{\mathcal{D}(A)}$; см. теорему 2.3. Введем обозначение, полезное в дальнейшем:

$$E_h^A = (I - hA)^{-1}. \quad (1.11)$$

Оператор E_h^A назовем *оператором Эйлера* в связи с тем, что он получается при выполнении одного шага неявной схемы Эйлера. Полагая

$$T_A(t)x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(I - \frac{t}{n}A\right)^{-n}x.$$

получим, что $T_A(t) : \overline{\mathcal{D}(A)} \rightarrow \overline{\mathcal{D}(A)}$ есть сжимающий оператор на $\overline{\mathcal{D}(A)}$ при любом $t \geq 0$ и выполнено полугрупповое свойство

$$T_A(0) = I|_{\overline{\mathcal{D}(A)}}$$

$$T_A(t+s) = T_A(t)T_A(s), \quad t, s \geq 0.$$

Кроме того, функция $t \rightarrow T_A(t)x$ является липшиц-непрерывной на $\mathbb{R}_+$, когда $x \in \mathcal{D}(A)$, и, значит, она непрерывна на $\mathbb{R}_+$, когда $x \in \overline{\mathcal{D}(A)}$. Таким образом, получаем, что $\{T_A(t)\}_{t \geq 0}$ — сильно непрерывная сжимающая полугруппа на $\overline{\mathcal{D}(A)}$. Если функция $t \rightarrow T_A(t)x$ дифференцируема справа при $t = t_0$, то $T_A(t_0)x \in \mathcal{D}(A)$ и

$$\frac{d^+}{dt} T_A(t)x|_{t=t_0} \in AT_A(t_0)x$$

(см. теорему 2.15). Итак, если $t \rightarrow T_A(t)x$ дифференцируема на $\mathbb{R}_+$, то $u(t) = T_A(t)x$ — решение задачи (1.9).

Однако если A нелинеен, функция $u(t)$ может оказаться *недифференцируемой*. Тем не менее часто бывает, что если (1.9) есть абстрактная формулировка «конкретной» задачи (например, для дифференциального уравнения с частными производными), то u — «правое» решение этой задачи, даже если оно недифференцируемо. Интересную иллюстрацию этого случая читатель найдет в гл. 4.

В § 2.3 рассматривается другой метод аппроксимации задачи (1.9), введенный в линейном случае Иосидой. Идея заключается в замене оператора A *аппроксимацией Иосиды*

$$A_h = \frac{1}{h} ((I - hA)^{-1} - I), \quad (1.12)$$

где $h > 0$. Так как оператор A_h липшиц-непрерывен на X , задача Коши

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt}(t) &= A_h u(t), \quad t > 0, \\ u(0) &= x \in X \end{aligned} \quad (1.13)$$

имеет единственное дифференцируемое решение u_h , которое может быть получено стандартной итерационной процедурой. Теперь, если $x \in \mathcal{D}(A)$, то $u_h(t)$ сходится к $u(t) = T_A(t)x$ равномерно на каждом ограниченном t -интервале: см. следствие 2.10. Можно показать, что оператор A_h является m -диссипативным и что $u_h(t) = T_{A_h}(t)x$. Однако, вообще говоря, неверно, что $\lim_{h \downarrow 0} A_h x = Ax$, даже в случае, когда A — однозначный оператор и $x \in \mathcal{D}(A)$. Тем не менее имеет место сходимость A_h к A

в резольвентном смысле, точнее,

$$\lim_{h \downarrow 0} (I - \lambda A_h)^{-1} x = (I - \lambda A)^{-1} x$$

для любого $\lambda > 0$ и $x \in X$ (см. предложение 2.8).

Если имеется последовательность m -диссипативных операторов $\{A_n\}_{n \geq 1}$ в X , сходящаяся в резольвентном смысле к некоторому m -диссипативному оператору A , то соответствующие функции $t \rightarrow T_{A_n}(t)x$ сходятся равномерно на каждом ограниченном интервале к функции $t \rightarrow T_A(t)x$ при любом $x \in X$ (см. теорему 2.7). Это показывает, что полугруппа $\{T_A(t)\}_{t \geq 0}$ в определенном смысле непрерывно зависит от A , и поэтому естественно функцию $t \rightarrow T_A(t)x$ назвать решением задачи (1.9).

Эти результаты составляют ядро теории нелинейных сжимающих полугрупп в произвольных банаховых пространствах. Однако можно сказать намного больше, если известно, что X дополнительно обладает специальными геометрическими свойствами. В § 2.1 мы формулируем без доказательства несколько фундаментальных теорем для случая, когда X — гильбертово пространство. В § 2.5 мы кратко намечаем обобщения результатов § 2.2—2.4 на более общий случай, когда оператор $A = \omega I$ является m -диссипативным при некотором $\omega > 0$. Ничего, тем не менее, не говорится о неоднородной задаче

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt}(t) &\in Au(t) + f(t), \quad t > 0, \\ u(0) &= x, \end{aligned} \quad (1.14)$$

где $f: [0, \infty) \rightarrow X$ — заданная функция, за исключением случая $f(t) = y$, $t \geq 0$, где $y \in X$. Тогда (1.14) сводится к (1.9), если A заменить на $A + y$, где $A + y$ определяется так:

$$(A + y)x = Ax + y, \quad x \in \mathcal{D}(A).$$

Глава 3 посвящена задачам порождения и аппроксимации C_0 -полугрупп линейных сжатий или, более общо, ограниченных линейных операторов в банаховом пространстве. Как правило, мы сводим (если это возможно) общий случай к «случаю сжатия». Это сведение проведено в § 3.2, а также частично в § 3.7, где мы попытались использовать результаты гл. 2 даже там, где для линейного случая имеется более короткий путь. В противоположность нелинейному случаю C_0 -полугруппы линейных сжатий (в более общем случае ограниченных линейных операторов) полностью описываются своими инфинитезимальными генераторами: см. § 3.1. Так как область определения инфинитезимального генератора C_0 -полугруппы $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ по определению состоит

из всех $x \in X$, таких, что функция $t \rightarrow T(t)x$ дифференцируема в нуле (а значит, и при всех $t > 0$), то задача Коши (1.9) при таких x может быть разрешена в обычном смысле. Если A — линейный m -диссипативный оператор и $\{T_A(t)\}_{t \geq 0}$ — соответствующая полугруппа, то функция $t \rightarrow T_A(t)x$ дифференцируема справа в нуле тогда и только тогда, когда $x \in \mathcal{D}(A)$ и $Ax \in \mathcal{D}(A)$; см. следствие 3.10. Это множество совпадает также с множеством тех $x \in \mathcal{D}(A)$, для которых $\lim_{h \downarrow 0} A_h x = Ax$. Аналогично в линейном случае можно получить и точную информацию о дифференцируемости решения неоднородной задачи (1.14). Регулярность решения задачи (1.14) можно установить, применяя результат Да Прато и Гривара, касающийся суммы двух «коммутирующих» m -диссипативных операторов. Это объясняется в § 3.6.

В § 3.4 мы рассматриваем сопряженные полугруппы. Особое внимание уделяется классу Фавара. Классом Фавара или обобщенной областью определения $\text{Fav}(T)$ C_0 -полугруппы $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ называется линейное множество тех $x \in X$, для которых функция $t \rightarrow T(t)x$ липшиц-непрерывна на $\mathbb{R}_+$ или, более точно,

$$\text{Fav}(T) = \left\{ x \in X : \sup_{h > 0} \frac{1}{h} \|T(h)x - x\| < \infty \right\}.$$

Оказывается, что класс Фавара удобно характеризовать в терминах сопряженных полугрупп. В § 3.5 мы приводим последние результаты о возмущении сопряженных полугрупп.

В § 3.7 мы комплексифицируем пространство X и полугруппу $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ и, используя теорию голоморфных функций со значениями в банаховом пространстве, получаем дополнительную информацию о резольвенте оператора A . Результаты такого типа приведены в гл. 5 и 6.

В гл. 4 мы описываем приложение теории сжимающих полугрупп, изложенной в гл. 2, касающееся задачи Коши

$$(I) \quad \begin{aligned} u_t &= (\varphi(u))_{xx}, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) &= u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

где φ — максимальный монотонный график в $\mathbb{R}^2$. В выписанном уравнении индексы t и x означают дифференцирование по соответствующим переменным. Одномерный случай рассматривается только для простоты изложения. Почти все результаты обобщаются на случай высших размерностей. Сначала мы переформулируем задачу (I) как абстрактную задачу Коши в банаховом пространстве X (в качестве X здесь выбирается $L_1(\mathbb{R})$). Нелинейный оператор A_φ в $L_1(\mathbb{R})$ задается (формальным) равенством $A_\varphi u := (\varphi(u))_{xx}$. Это делается следующим образом. Пусть $A_\varphi : \mathcal{D}(A_\varphi) \subseteq L_1(\mathbb{R}) \rightarrow L_1(\mathbb{R})$ определен на

$\mathcal{D}(A_\varphi) = \{u \in L_1(\mathbb{R}) : \exists w \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}), w(x) \in \varphi(u(x)) \text{ п.в. на } \mathbb{R}, w'' \in L_1(\mathbb{R}) \text{ в смысле распределений}\}$

формулой

$$A_\varphi u = w'' \text{ для любого } u \in \mathcal{D}(A_\varphi).$$

В § 4.2 и 4.3 мы показываем, что A_φ m -диссипативен в $L_1(\mathbb{R})$. В § 4.2 это сделано для случая $0 \in \varphi(0)$ и $0 \in \text{int } \mathcal{D}(\varphi)$, а в § 4.3 для случая $\mathcal{D}(\varphi) \subseteq (0, \infty)$. Заметим, однако, что в этих параграфах мы переписываем обсуждаемую проблему в терминах обратного максимального монотонного графика $\beta = \varphi^{-1}$. Тогда из теоремы Крэндалла — Лиггетта (теорема 2.3) следует, что оператор A_φ порождает полугруппу сжатий $\{T_{A_\varphi}(t)\}_{t \geq 0}$ на $\overline{\mathcal{D}(A_\varphi)}$. Функция $u : [0, \infty) \rightarrow X$, определенная равенством

$$u(t) = T_{A_\varphi}(t)u_0, \quad u_0 \in \overline{\mathcal{D}(A_\varphi)}, \quad t \geq 0,$$

есть единственное обобщенное решение абстрактной задачи

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &\in A_\varphi(u), \\ u(0) &= u_0. \end{aligned}$$

Поскольку $u(t, x) = (T_{A_\varphi}(t)u_0)(x)$, функцию u мы называем полугрупповым решением задачи (I). Из оценок, полученных в § 4.2 и 4.3, мы заключаем, что u удовлетворяет *принципу сравнения*: если $u_0, v_0 \in \overline{\mathcal{D}(A_\varphi)}$ таковы, что $u_0 \geq v_0$ п.в. на $\mathbb{R}$, то

$$(T_{A_\varphi}(t)u_0)(x) \geq (T_{A_\varphi}(t)v_0)(x) \text{ п.в. на } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}.$$

Кроме того, u удовлетворяет *закону сохранения масс*:

$$\int_{\mathbb{R}} u(t, x) dx = \int_{\mathbb{R}} u_0(x) dx \text{ для всех } t \geq 0.$$

В § 4.4 мы показываем, что если φ — непрерывная и неубывающая функция, такая, что $0 \in \varphi(0)$ и $0 \in \text{int } \mathcal{D}(\varphi)$ или $\mathcal{D}(\varphi) \subseteq (0, \infty)$, и если начальное значение существенно ограничено, то полугрупповое решение фактически является слабым решением задачи (I): оно удовлетворяет дифференциальному уравнению в смысле распределений. В § 4.5 мы продолжаем изучение случая $0 \in \varphi(0)$ и $0 \in \text{int } \mathcal{D}(\varphi)$ и рассматриваем зависимость от φ решений задачи (I). Наша основная цель — показать, что если $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ — последовательность функций, обладающих теми же свойствами, что и φ , и сходящаяся к φ , то $A_{\varphi_n} \rightarrow A_\varphi$ в резольвентном смысле, т. е.

$$(I - A_{\varphi_n})^{-1}f \rightarrow (I - A_\varphi)^{-1}f \text{ для всех } f \in L_1(\mathbb{R}).$$

Мы также характеризуем множество $\overline{\mathcal{D}(A_\varphi)}$, что важно для приложений. Устанавливается, что

$$\overline{\mathcal{D}(A_\varphi)} = \{u \in L_1(\mathbb{R}): \inf \mathcal{D}(\varphi) \leq u(x) \leq \sup \mathcal{D}(\varphi) \text{ п. в. на } \mathbb{R}\}.$$

Ясно, что если $\mathcal{D}(\varphi) = \mathbb{R}$, то $\overline{\mathcal{D}(A_\varphi)} = L_1(\mathbb{R})$.

В заключение гл. 4 изучается *свойство регулярности* полугруппового решения задачи (I) в случае, когда $\varphi(s) = |s|^m \operatorname{sign}(s)$, $s \in \mathbb{R}$, $m > 0$ ($m \neq 1$). В этом случае решение $u(t, x)$ задачи (I) порождает параметрическое семейство решений

$$u_\lambda(t, x) = \lambda^{1/(m-1)} u(\lambda t, x), \quad \lambda > 0,$$

соответствующих начальным значениям $\lambda^{1/(m-1)} u_0(x)$. Тогда соответствующая полугруппа $\{T_{A_\varphi}(t)\}_{t \geq 0}$ обладает свойством однородности

$$T_{A_\varphi}(t)(\lambda^{1/(m-1)} u_0) = \lambda^{1/(m-1)} T_{A_\varphi}(\lambda t) u_0$$

для всех $u_0 \in \overline{\mathcal{D}(A_\varphi)} = L_1(\mathbb{R})$. В § 4.5 мы впервые приводим два общих результата для семейства отображений $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, обладающих свойством однородности на подходящим образом выбранном подмножестве C нормированного векторного пространства X . Применение этих результатов к полугрупповым решениям задачи (I) дает

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{\|u(t+h) - u(t)\|_1}{h} \leq \frac{2\|u_0\|_1}{|m-1|t},$$

и если $u_0(x) \geq 0$ п.в. на $\mathbb{R}$ (в этом случае и $u(t, x) \geq 0$ п.в. на $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$), то

$$(m-1)u_t \geq -\frac{u}{t} \text{ в } \mathcal{D}'((0, \infty) \times \mathbb{R}).$$

1.2. Введение к ч. II

В ч. II представлены некоторые классические результаты теории *аналитических полугрупп*, а также сравнительно недавние результаты Да Прато и Гривара, связывающие теорию интерполяции в банаховых пространствах и теорию аналитических полугрупп.

На отбор материала для гл. 5 повлиял интерес автора к приложениям теории к (нелинейным параболическим) псевдодифференциальным уравнениям. Поэтому ряд вопросов, представляющих интерес с функционально-аналитической точки зрения, был опущен. Так, не рассматривались вопросы, связанные с различными подходами к описанию аналитических полугрупп (в работе van

Casteren [1985] дается более 10 эквивалентных определений). Это упущение не представляется нам серьезным, так как вопрос подробно освещен в прекрасных монографиях Davies [1980], Pazy [1983], van Casteren [1985].

В нашем подходе к теории мы считаем, что генератор A полугруппы дан, и пытаемся по нему строить саму полугруппу. Мы рассматриваем A как ограниченный линейный оператор $A : E_1 \rightarrow E_0$, отображающий банахово пространство E_1 в банахово пространство E_0 , где E_1 плотно вложено в E_0 . Традиционные обозначения в этой ситуации $E_0 = X$ и $E_1 = \mathcal{D}(A)$, и в этих обозначениях A был бы неограниченным оператором в X с областью определения $\mathcal{D}(A)$. Однако нам кажется, что когда речь идет о приложениях к псевдодифференциальным уравнениям, такие обозначения преувеличивают роль пространства X . (Действительно, когда мы имеем дело с конкретным оператором, в качестве X выступает одно из многих возможных банаховых (соболевских) пространств!) Поэтому мы используем несколько иные обозначения, которые, кроме того, естественны с точки зрения теории интерполяции.

Для пары пространств $E_1 \subset E_0$ мы вводим в § 5.2 класс операторов $A : E_1 \rightarrow E_0$, который обозначаем $Hol(E)$ (это оказывается множество генераторов аналитических полугрупп на E_0 с областью определения E_1). В параграфе о резольvente мы определяем $\sigma(A)$ и устанавливаем «секториальное свойство» оператора $A \in Hol(E)$. Затем в § 5.4 мы доказываем некоторые теоремы о возмущении. В одной из этих теорем утверждается, что $Hol(E)$ есть открытое подмножество в множестве ограниченных операторов, действующих из E_1 в E_0 , в равномерной топологии. Этот факт оказывается весьма полезным, так как позволяет ввести операторное исчисление на $Hol(E)$. Напротив, заметим, что множество $Gen(E)$ всех операторов $A : E_1 \rightarrow E_0$, порождающих просто C_0 -полугруппы, этим свойством не обладает.

Исчисление операторов на $Hol(E)$ обсуждается в § 5.5. Определяется класс $\mathcal{F}$ голоморфных функций f , и стандартным образом строится оператор $f(A)$ с помощью интеграла Данфорда. Класс $\mathcal{F}$ выбран таким образом, что он включает экспоненту $e^{t\lambda}$ при $t > 0$, но остается достаточно узким, что позволяет легко определить $f(A)$.

Используя операторное исчисление, описанное в § 5.5, в следующем параграфе мы показываем, что операторы $A \in Hol(E)$ являются генераторами аналитических полугрупп в E_0 . Фактически функциональное исчисление дает экспоненциальное отображение $\exp : Hol(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$, которое голоморфно (это имеет смысл, так как мы знаем, что $Hol(E)$ — открытое подмножество банахова пространства $\mathcal{L}(E_1, E_0)$ и, следовательно, имеет ана-

литическую структуру). Снова используя операторное исчисление, мы получаем некоторые классические оценки e^{tA} и обсуждаем области определения целых степеней оператора A .

Глава 5 завершается рядом примеров и упражнений. В первых нескольких примерах описываются операторы, порождающие или не порождающие аналитические полугруппы. Это всё операторы умножения в весовом $L_2(\mathbb{R})$ -пространстве, и потому они могут лишь иллюстрировать не слишком тонкое различие между $Hol(E)$ и остальной частью $\mathcal{L}(E_1, E_0)$.

Другое упражнение связано с *дробными степенями* операторов $A \in Hol(E)$. Наконец, в последнем упражнении описывается, вероятно, самая классическая аналитическая полугруппа — *гауссова полугруппа*. В нем показано, как, используя функциональное исчисление, иногда можно получить явное выражение для e^{tA} .

Шестая глава посвящена неоднородной задаче Коши

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt}(t) &= Au(t) + f(t), \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(0) &= x, \end{aligned} \tag{1.15}$$

где $A \in Hol(E)$. Если известная функция $f(t)$ обладает некоторой регулярностью (например, если $f: [0, T] \rightarrow E_1$ непрерывна, так что $Af(t)$ корректно определена), то можно легко показать, что решение (1.15) существует и может быть записано в виде

$$u(t) = e^{tA}x + \int_0^t e^{(t-s)A}f(s)ds$$

(формула вариации произвольной постоянной). Это же выражение сохраняет смысл в случае $f \in L_1((0, T); E_0)$, однако неясно, будет ли соответствующая $u(t)$ в каком-нибудь смысле решением задачи (1.15). На первый взгляд естественно ожидать, что, если f непрерывна со значениями в E_0 , то и другие два члена, входящие в (1.15), сохраняют это свойство. Иными словами, можно ожидать, что если $f \in C([0, T]; E_0)$, то $u \in C([0, T]; E_1) \cap C^q([0, T]; E_0)$. В общем случае это оказывается неверным. Тем не менее результаты о максимальной регулярности, приведенные в § 6.5, выделяют класс троек (A, E_1, E_0) , для которых описанное предположение имеет место. Для формулировки этих результатов (принадлежащих Да Прато и Гривару) нам понадобятся некоторые понятия из теории интерполяции в банаховых пространствах. Поэтому мы приводим краткое описание небольшой части этой теории в § 6.1, 6.2 и 6.3.

После введения нескольких общих понятий теории интерполяции в § 6.1 мы определяем *непрерывный интерполяционный метод*, тесно связанный с вещественным (θ, ∞) -методом. Так как это не то определение метода непрерывной интерполяции, которое нам нужно для доказательства результатов о максимальной регулярности, мы отвели параграф для других эквивалентных описаний этого интерполяционного метода. В этом параграфе используется стандартная техника теории интерполяции. Так как мы имеем дело лишь с одним интерполяционным методом, это может служить иллюстрацией к более глубокой теории, представленной в книгах Bergh, Löfström [1976] или Triebel [1978].

В § 6.4 рассматриваются задача (1.15) и ее решение, которое дается формулой вариации произвольной постоянной. Несколько несложных классических результатов о регулярности решения $u(t)$ доказано в лемме 6.9, а затем в § 6.5 формулируется и доказывается теорема о максимальной регулярности.

Глава заканчивается примерами и упражнениями. В первых нескольких упражнениях предлагается построить ряд интерполяционных пространств и уделяется внимание шкале l -гёльдеровских пространств $h^\theta(T)$ на окружности. Затем приводятся два упражнения, касающихся *пространств дробных степеней* и их связи с пространствами, полученными методом непрерывной интерполяции. Последняя группа упражнений служит для иллюстрации результатов о максимальной регулярности из § 6.5. Приводится несколько примеров, в которых максимальная регулярность отсутствует, и предлагается подумать о применении теоремы 6.10 к стандартному уравнению теплопроводности.

1.3. Введение к ч. III

Пусть X — полуупорядоченное¹⁾ банахово пространство с конусом положительных элементов X^+ . Для уточнения незнакомой терминологии мы отправляем читателя к гл. 7. Пусть $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ есть C_0 -полугруппа ограниченных линейных операторов с генератором A . Тогда $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ называется *позитивной*, если каждый оператор $T(t)$, $t \geq 0$, положителен, т. е. $T(t)X^+ \subseteq X^+$, $t \geq 0$. В гл. 7 мы задаемся вопросом: какие операторы порождают позитивные полугруппы?

В § 7.2 представлены различные характеристики генераторов позитивных сжимающих полугрупп. Эти характеристики формулируются в терминах p -диссипативности генератора, где p — каноническая *half*-норма, ассоциированная с полуупорядоченным банаховым пространством X (т. е. $p(x)$ означает расстояние от

¹⁾ В ряде работ в этой ситуации используется термин «упорядоченное». — *Прим. перев.*

вектора — x до конуса положительных элементов в X). Это приводит к теоремам, аналогичным теореме Хилле — Филлипса — Иосиды.

Характеристика генераторов позитивных C_0 -полугрупп без использования метрических соотношений (подобных сжатию), — вообще говоря, более сложная задача. В $C(\Omega)$, где Ω — компактное хаусдорфово пространство, ситуация особенно проста (пример 7.31). Плотный определенный линейный оператор A в $X = C(\Omega)$ является генератором позитивной C_0 -полугруппы тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}(\lambda I - A) = X$ для достаточно больших вещественных λ и A обладает свойством *внедиагональной положительности* (СВП):

$$(Ax)(\omega) \geq 0, \text{ если } 0 \leq x \in \mathcal{D}(A) \text{ и } \omega \in \Omega, x(\omega) = 0.$$

Здесь $\mathcal{R}(\cdot)$ означает область значений. Заметим, что это свойство есть разновидность *абстрактного принципа максимума*. СВП можно обобщить на случай произвольного банахова пространства: см. определение 7.18. Результат, сформулированный выше для $C(\Omega)$, может быть распространен на произвольное полуупорядоченное банахово пространство с нормальным телесным¹⁾ конусом X^+ , т. е. банахово пространство с порядковой единицей (таковы, например, некоторые пространства дифференцируемых функций или самосопряженная часть унитарной C^* -алгебры): см. теорему 7.29. Легко видеть, что при достаточно больших вещественных λ резольвента $R(\lambda, A)$ есть положительный оператор, если A является генератором позитивной C_0 -полугруппы. Обратно, если X — полуупорядоченное банахово пространство с нормальным телесным конусом X^+ , то плотно определенный линейный оператор A есть генератор C_0 -полугруппы, если $\lambda \in \rho(A)$ и $R(\lambda, A) \geq 0$ при достаточно больших $\lambda \in \mathbb{R}$ (см. теорему 7.29). В этих утверждениях требование телесности конуса X^+ не может быть опущено: см. пример 7.32.

Абстрактное неравенство Като открывает путь к распространению этих результатов на случай, когда конус имеет пустую внутренность. Это абстрактное неравенство Като есть не что иное, как обобщение классического неравенства Като для лапласиана Δ в $\mathbb{R}^n$, которое может быть сформулировано следующим образом:

для всех $f \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, таких, что $\Delta f \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, неравенство

$$\operatorname{Re}(\operatorname{sign} f \cdot \Delta f) \leq \Delta |f|$$

справедливо в смысле распределений.

¹⁾ То есть имеющим непустую внутренность. — *Прим. перев.*

Это неравенство связано с позитивностью в $L_2(\mathbb{R}^n)$ полугруппы, порожденной оператором Δ .

Пусть X — дедекиндова σ -полная банахова структура, и для каждого $x \in X$ определим линейное *sign-отображение* $\sigma_x: X \rightarrow X$ — см. § 7.4. Тогда говорят, что оператор A удовлетворяет *абстрактному неравенству Като*, если

$$\langle \sigma_x(Ax), \varphi \rangle \leq \langle |x|, A^*\varphi \rangle$$

для всех $x \in \mathcal{D}(A)$ и $0 \leq \varphi \in \mathcal{D}(A^*)$. Нетрудно проверить, что каждый генератор позитивной C_0 -полугруппы на дедекиндовой σ -полной банаховой структуре удовлетворяет абстрактному неравенству Като (предложение 7.39). Обратно, если X — дедекиндова σ -полная банахова структура и A — генератор C_0 -полугруппы $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, то (при некоторых дополнительных предположениях) выполнение абстрактного неравенства Като обеспечивает позитивность полугруппы $\{T(t)\}_{t \geq 0}$: см. теорему 7.44. Этот важный результат распространяется на случай произвольной банаховой структуры в предложении 7.46.

Глава 7 завершается *теоремой Берлинга — Дини*, дающей критерий позитивности полугруппы, порожденной положительно определенным самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве $L_2(s, \mu)$.

Важным вопросом в теории полугрупп является вопрос об *асимптотическом поведении*. В теории линейных автономных обыкновенных дифференциальных уравнений хорошо известно, что решение n -мерной линейной системы

$$\frac{du}{dt} = Au, \quad u(0) = x,$$

где A есть $(n \times n)$ -матрица и $x \in \mathbb{R}^n$, дается формулой $u(t) = T(t)x = e^{tA}x$. Асимптотическое поведение таких решений полностью определяется собственными значениями матрицы A , точнее *доминирующим собственным значением* A , т. е. собственным значением, имеющим наибольшую вещественную часть. Это становится очевидным, если привести A к жордановой канонической форме.

В общем случае, когда X — произвольное банахово пространство и $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ есть C_0 -полугруппа с генератором A , ситуация не так проста. Спектр оператора A в этом случае, так же как и спектр $T(t)$, может быть бесконечным, а его точки не обязательно являться собственными значениями. Кроме того, спектр полугруппы $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ не всегда «естественно определяется» спектром A и может быть шире в противоположность конечномерному случаю. Различные соотношения между спектрами операторов $T(t)$ и A описаны в § 8.1. Важная роль принадлежит так

называемому *браудеровскому существенному спектру* $\sigma_{ess}(\cdot)$ (см. дополнение Д. 3.1). Можно определить *существенный тип* $\omega_{ess} = \omega_{ess}(A)$ с помощью формулы

$$\omega_{ess}(A) = \inf_{t>0} \frac{1}{t} \ln |T(t)|_\alpha, \quad (1.16)$$

где $|\cdot|_\alpha$ есть так называемая *мера некомпактности* (см. дополнение Д. 3.1). Особо отметим, что $\omega_{ess}(A) = -\infty$, если $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ становится компактной, начиная с некоторого t_0 . Спектральная грань $s(A)$ оператора A определяется формулой

$$s(A) = \sup \{\operatorname{Re} \lambda : \lambda \in \sigma(A)\}. \quad (1.17)$$

Всегда имеет место следующее соотношение (см. предложение 8.6):

$$\omega_0(A) = \max \{s(A), \omega_{ess}(A)\}. \quad (1.18)$$

Если $\omega_0(A) < 0$, то полугруппа $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ *равномерно устойчива*, т. е.

$$\|T(t)\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty.$$

Нетрудно показать, что из равномерной устойчивости полугруппы следует, что $s(A) < 0$. Однако обратное в общем случае, вообще говоря, неверно. Это приводит к вопросу об описании C_0 -полугрупп, для которых $s(A) = \omega_0(A)$. В § 9.1 показано, что это равенство имеет место в каждом из следующих случаев:

(i) $\{T(t)\}$ *становится непрерывной* по норме, начиная с некоторого t_0 , что, например, выполнено, если $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ — аналитическая полугруппа;

(ii) $X = L_1(\Omega, \mu)$ или $L_2(\Omega, \mu)$ и $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ — *положительная* полугруппа;

(iii) $X = C(\Omega)$, где Ω — компактное хаусдорфово пространство, и $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ — *положительная* полугруппа.

Случаи (ii) и (iii) наводят на мысль, что, возможно, равенство $s(A) = \omega_0(A)$ выполняется для любой положительной полугруппы на банаховой структуре X , однако пример 9.3 показывает, что это, к сожалению, не так. Вопрос о выполнении этого соотношения для любой положительной полугруппы на рефлексивной банаховой структуре $L_p(\Omega, \mu)$, $1 < p < \infty$, $p \neq 2$, до сих пор открыт.

Для любого $x \in X$ определяется *экспоненциальная граница роста*

$$\omega(x) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|T(t)x\|$$

орбиты $\{T(t)x : t \geq 0\}$. Тогда $\omega(x)$ есть абсцисса абсолютной сходимости преобразования Лапласа функции $t \rightarrow T(t)x$. Далее,

$$\omega_0(A) = \sup \{ \omega(x) : x \in X \}.$$

Число $\omega_1 = \omega_1(A)$, определенное формулой

$$\omega_1 = \sup \{ \omega(x) : x \in \mathcal{D}(A) \},$$

называется *экспоненциальной границей роста решений задачи Коши* (1.5). Если X — банахова структура и $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ — положительная полугруппа, то $s(A) = \omega_1(A)$ (см. следствие 9.9).

Во многих приложениях можно доказать, что решения $u(t) = T(t)x$ задачи Коши (1.5) ведут себя следующим образом:

$$e^{-\lambda t} T(t)x \rightarrow cx_0, \quad t \rightarrow \infty. \quad (1.19)$$

Здесь $\lambda \in \mathbb{C}$ и c — константы, зависящие линейно от начального условия x . В большинстве случаев λ вещественно. В § 9.2 объясняется, что для получения (1.19) достаточно выполнения следующих двух условий:

(C₁) A имеет *строго доминирующее* алгебраически простое собственное значение.

$$(C_2) \quad \omega_{ess}(A) < \omega_0(A).$$

Мы называем собственное значение λ_0 *доминирующим* (строго доминирующим), если $\operatorname{Re} \lambda \leq \operatorname{Re} \lambda_0$ ($\operatorname{Re} \lambda < \operatorname{Re} \lambda_0$) для любого $\lambda \in \sigma(A)$, $\lambda \neq \lambda_0$. Фактически в случае выполнения условий (C₁) и (C₂) сходимость в (1.19) экспоненциальна (см. § 9.2). Положительность полугруппы может существенно облегчить проверку (C₁). Если X — банахова структура с абсолютной величиной (модулем) $|\cdot|$ и $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ — положительная полугруппа, то имеются сильные результаты, характеризующие спектр ее генератора. *Граничный спектр* $\sigma_+(A)$ оператора A определяется формулой

$$\sigma_+(A) = \{ \lambda \in \sigma(A) : \operatorname{Re} \lambda = s(A) \},$$

если $\sigma(A) \neq \emptyset$, и $\sigma_+(A) = \emptyset$, если $\sigma(A) = \emptyset$. Если $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ — положительная полугруппа, то в силу *теоремы Принсгейма — Ландау*

$$s(A) = \sup \{ \lambda \in \mathbb{R} : \lambda \in \sigma(A) \}$$

и

$$R(\lambda, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt$$

для всех $x \in X$ и $\lambda \in \mathbb{C}$ с $\operatorname{Re} \lambda > s(A)$, где интеграл существует как несобственный в смысле сходимости по норме. При этом $R(\lambda, A)$ — положительный оператор для $\lambda > s(A)$ и

$$|R(\lambda, A)x| \leq R(\operatorname{Re} \lambda, A)|x|$$

для $\lambda > s(A)$ и $x \in X$. В частности, $s(A) \in \sigma(A)$, если $\sigma(A) \neq \emptyset$;

см. теорему 7.4 и следствие 7.5. Значит, число $\lambda_0 := s(A)$ является в этом случае доминирующим собственным значением оператора A . Если дополнительно λ_0 есть полюс резольвенты $R(\lambda, A)$, то $\sigma_+(A)$ аддитивно циклично, т. е. для любого $v \in \mathbb{R}$

$$\lambda_0 + iv \in \sigma_+(A) \Rightarrow \lambda_0 + ikv \in \sigma_+(A), \quad k \in \mathbb{Z}$$

(см. теорему 8.7 и теорему 8.14). Если, кроме того, полугруппа $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ неприводима, то λ_0 — алгебраически простое собственное значение и соответствующий собственный вектор x_0 не только положителен, но и является квазивнутренним (см. теорему 8.17). Заметим, что если (C_2) выполняется, то λ_0 есть полюс резольвенты $R(\lambda, A)$.

В § 9.3 показывается, как теория возмущений может быть использована для проверки условия (C_2) (здесь играют роль свойства компактности: см. предложение 9.20) и для установления неприводимости полугруппы $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ (см. теорему 9.21).

Наконец, в гл. 10 эти абстрактные результаты применяются к некоторым задачам из структурной популяционной динамики.

Часть I

Сжимающие полугруппы

Глава 2

Нелинейные сжимающие полугруппы и диссипативные операторы

2.1. Теоремы Хилле — Йосиды и Троттера — Невё — Като

В этом параграфе мы напомним (без доказательства) две фундаментальные теоремы из теории линейных сжимающих C_0 -полугрупп в банаховом пространстве, которые послужат мотивировкой для изучения нелинейных сжимающих полугрупп. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — вещественное банахово пространство, и пусть $C(X)$ обозначает множество всех линейных сжимающих C_0 -полугрупп на X (см. введение). Пусть A_T — инфинитезимальный генератор (или просто генератор) заданной полугруппы $T \in C(X)$, т. е. это линейный оператор в X с областью определения

$$\mathcal{D}(A_T) := \{x \in X: \lim_{h \downarrow 0} h^{-1}(T(h)x - x) \text{ существует}\},$$

определенный формулой

$$A_T(x) := \lim_{h \downarrow 0} h^{-1}(T(h)x - x) \quad (2.0)$$

для $x \in \mathcal{D}(A_T)$. Одна часть теоремы Хилле — Йосиды о порождении ни гласит, что A_T обладает следующими свойствами: для всех $x \in \mathcal{D}(A_T)$ и $h > 0$

$$\|x\| \leq \|x - hA_T x\|, \quad (2.1)$$

$$\mathcal{R}(I - hA_T) = X \text{ для каждого } h > 0, \quad (2.2)$$

$$\mathcal{D}(A_T) \text{ плотно в } X. \quad (2.3)$$

Здесь $\mathcal{R}(I - hA_T)$ обозначает область значений оператора $I - hA_T$. Линейный оператор $A: \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$, удовлетворяющий (2.1), называется *диссипативным* в $(X, \|\cdot\|)$ (при этом $-A$ называется *аккретивным*). Диссипативный оператор в $(X, \|\cdot\|)$, удовлетворяющий (2.2), называют *m-диссипативным* ($-A$ тогда называют *m-аккретивным*). Обозначим через $D(X)$ множество

всех плотно определенных m -диссипативных операторов в $(X, \|\cdot\|)$ и через $\mathcal{G}: C(X) \rightarrow D(X)$ — отображение, сопоставляющее каждой полугруппе $T \in C(X)$ ее генератор A_T .

Вторая часть теоремы Хилле — Иосиды утверждает, что $\mathcal{G}$ — сюръективное отображение. Утверждение об инъективности $\mathcal{G}$ мы также будем считать частью этой теоремы. Кроме того, биекция $\mathcal{G}$ обладает некоторой разновидностью свойства непрерывности. Будем говорить, что последовательность $\{T_n\}$ *сходится* в $C(X)$ к $T \in C(X)$, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, s]} \|T_n(t)x - T(t)x\| = 0 \quad (2.4)$$

для любых $s > 0$ и $x \in X$. Заметим, что при заданном $A \in D(X)$ для любого $h > 0$ оператор $I - hA$ есть биекция из $\mathcal{D}(A)$ на X и что $E_h^A := (I - hA)^{-1}$ — ограниченный оператор в X , удовлетворяющий оценке $\|E_h^A\| \leq 1$. Будем говорить, что последовательность $\{A_n\}$ из $D(X)$ *сходится к A в $D(X)$* , если для любых $h > 0$ и $x \in X$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|E_h^{A_n}x - E_h^Ax\| = 0. \quad (2.5)$$

Как следует из теоремы Троттера — Невё — Като, сходимость последовательности $\{T_n\}$ к T в $C(X)$ эквивалентна сходимости $\{\mathcal{G}(T_n)\}$ к $\mathcal{G}(T)$ в $D(X)$. Таким образом, имеет место красивое соответствие между линейными сжимающими C_0 -полугруппами и их генераторами. Второе следствие этих теорем — разрешимость задач Коши

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt}(t) &= Au(t), \quad t > 0, \\ u(0) &= x \end{aligned} \quad (2.6)$$

при $A \in D(X)$. Действительно, если $x \in \mathcal{D}(A)$ и T есть полугруппа, соответствующая A , то функция $t \rightarrow u(t, x) = T(t)x$ принадлежит $C^1([0, \infty); X)$ и удовлетворяет (2.6). Кроме того, если $\{A_n\}$ — последовательность из $D(X)$, сходящаяся к A , то соответствующие полугруппы $\{T_n\}$ будут сходиться к T в $C(X)$. Фактически при доказательстве сюръективности $\mathcal{G}$ Иосида построил последовательность $\{A_n\}$ ограниченных операторов в $D(X)$, сходящуюся к A . Для $A \in D(X)$ и $h > 0$ он определил

$$A_h := h^{-1}(E_h^A - I). \quad (2.7)$$

Оператор A_h обычно называется *аппроксимацией Иосиды* оператора A . В лемме 2.9 мы докажем, что если $C: X \rightarrow X$ есть линейное сжатие (т. е. $\|C\| \leq 1$) и $\lambda > 0$, то $\lambda(C - I) \in D(X)$. В частности, $A_h \in D(X)$ для всех $h > 0$, и будет показано (см. предложение 2.8), что A_{h_n} сходится к A в $D(X)$, когда $h_n \rightarrow 0$. Заметим,

что полугруппа, порожденная оператором A_h , задается равенством

$$T_{A_h} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (tA_h)^k.$$

Если $C(t) : X \rightarrow X$, $t \in \mathbb{R}^+$, есть произвольное семейство линейных сжатий на X , то $t^{-1}(C(t) - I) \in D(X)$ для $t \in (0, 1]$. Предположим, что $t^{-1}(C(t) - I)$ сходится к некоторому оператору A в $D(X)$ при $t \downarrow 0$. Тогда, как доказано в статье Chernoff [1968],

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, s]} \left\| C\left(\frac{t}{n}\right)^n x - T(t)x \right\| = 0 \quad (2.8)$$

для всех $x \in X$ и $s > 0$, где T есть полугруппа, порожденная оператором A . В частности, если $C(t) = E_t^A$, $t > 0$, то из этого следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, s]} \left\| (E_{t/n}^A)^n x - T(t)x \right\| = 0 \quad (2.9)$$

для всех $x \in X$ и $s > 0$. Формула (2.9) дает другое представление $T(t)$ в виде обычной экспоненциальной формулы $\lim_{n \rightarrow \infty} (I - tA/n)^{-n}x$, которая будет использована как исходная точка в нелинейной теории. Эта формула была впервые использована Хилле для построения T . Наконец, интересно отметить, что если $T \in C(X)$, то $t^{-1}(T(t) - I) \in D(X)$ для любого $t > 0$ и $t^{-1}(T(t) - I)$ сходится к A_T в $D(X)$ при $t \downarrow 0$. В этом случае (2.8) тривиально выполнено, однако соответствующие полугруппы дают другую аппроксимацию полугруппы T полугруппами с ограниченными генераторами.

Цель этой главы — доказать нелинейные аналоги этих теорем в случаях, когда они имеют место. Замечательный факт состоит в том, что все упомянутые теоремы имеют нелинейные аналоги, когда X — гильбертово пространство. Прекрасное детальное изложение в случае гильбертова пространства имеется в работе Brezis [1973]. Дадим сначала определение нелинейной сжимающей полугруппы.

Определение 2.1. Пусть F — непустое замкнутое подмножество банахова пространства $(X, \|\cdot\|)$. *Нелинейная сжимающая полугруппа* на F — это семейство операторов $T(t) : F \rightarrow F$, $t \geq 0$, удовлетворяющее условиям

(I) $T(t+s) = T(t)T(s)$ при всех $s, t \geq 0$, $T(0) = I_F$ (тождественное отображение на F);

(II) $\|T(t)x - T(t)y\| \leq \|x - y\|$ при каждом $t \geq 0$ и любых $x, y \in F$;

(III) Для любого $x \in F$ отображение $t \rightarrow T(t)x$ непрерывно на $[0, \infty)$.

Заметим, что если семейство $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ удовлетворяет условиям (I) и (II) и $\lim_{t \downarrow 0} T(t)x = x$ для всех $x \in F$, то оно удовлетворяет и (III). Обозначим класс всех нелинейных сжимающих полугрупп на F через $C(F; X)$. По аналогии с линейной теорией определим *генератор* семейства T посредством равенства (2.0). Может оказаться (даже в случае $F = X$), что $\mathcal{D}(A_T) = \emptyset$ (см. Crandall, Liggett [1971a]). Однако если $\mathcal{D}(A_T) \neq \emptyset$ ($\mathcal{D}(A_T)$ даже плотно в X , если $F = X$ и X — гильбертово пространство), то A_T удовлетворяет условию

$$\|x - y\| \leq \| (x - y) - h(A_T x - A_T y) \| \quad (2.10)$$

для всех $x, y \in \mathcal{D}(A_T)$ и любого $h > 0$. Действительно, если $A_{T, t} := t^{-1}(T(t) - I)$ при $t > 0$, то для $x, y \in F$

$$\| (x - y) - h(A_{T, t} x - A_{T, t} y) \| =$$

$$\begin{aligned} &= \| (1 + t^{-1}h)(x - y) - t^{-1}h(T(t)x - T(t)y) \| \geq \\ &\geq (1 + t^{-1}h) \|x - y\| - t^{-1}h \|x - y\| = \|x - y\|. \end{aligned}$$

Отсюда (2.10) получается переходом к пределу при $t \downarrow 0$. Итак, отображение $I - hA_T$ инъективно при любом $h > 0$ и $(I - hA_T)^{-1}: \mathcal{R}(I - hA_T) \rightarrow X$ — нелинейное сжатие. Очевидно, что (2.10) есть нелинейный аналог понятия диссипативного оператора.

Рассмотрим следующий пример: $X = \mathbb{R}$, $\|\cdot\| = |\cdot|$ и для $t \geq 0$

$$T(t)x = \begin{cases} (x - t)^+, & \text{если } x \geq 0, \\ -(x + t)^-, & \text{если } x < 0, \end{cases}$$

где $a^+ = a \vee 0$ и $a^- = (-a)^+$. Тогда T есть нелинейная сжимающая полугруппа на $\mathbb{R}$ и

$$A_T x = \begin{cases} +1, & \text{если } x < 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

A_T удовлетворяет условию (2.10), но $\mathcal{R}(I - A_T) \neq \mathbb{R}$. Однако если мы определим график $A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, положив $[x, y] \in A$ тогда и только тогда, когда $y = 1$ для $x < 0$, $y = -1$ для $x > 0$ и $y \in [-1, 1]$ для $x = 0$, то $\mathcal{R}(I - hA) = \mathbb{R}$ для любого $h > 0$ и $(I - hA)^{-1}$ есть график функции $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, для которого

$$|(I - hA)^{-1}x - (I - hA)^{-1}y| \leq |x - y|$$

при всех $h > 0$, $x, y \in \mathbb{R}$. Это есть нелинейный аналог m -диссипативного оператора. Кроме того, если мы определим $A_{T, t}$, как ранее, посредством равенства

$$A_{T, t} = t^{-1}(T(t) - I), \quad t > 0,$$

то отображение $(I - hA_{T, t})^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ будет сжатием и

$$\lim_{t \downarrow 0} (I - hA_{T, t})^{-1} x = (I - hA)^{-1} x$$

при всех $x \in \mathbb{R}$ и $h > 0$.

Примером и теорией нелинейных сжимающих полугрупп в гильбертовом пространстве мотивируются следующие определения:

Определение 2.2. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — банахово пространство и $A \subset X \times X$ — график. Тогда A называется *диссипативным* (а $-A$ *аккретивным*), если $(I - hA)^{-1}$ есть график нелинейного сжатия при любом $h > 0$. Под областью определения $(I - hA)^{-1}$ естественно понимается $\mathcal{D}(I - hA)$. Диссипативный график A в $X \times X$ называется *m-диссипативным* ($-A$ называется *m-аккретивным*), если оператор $(I - hA)^{-1}$ всюду определен на X при любом $h > 0$.

В определении 2.2 и далее мы будем отождествлять оператор A , действующий из $\mathcal{D}(A) \subset X$ в 2^X , с его графиком в $X \times X$, который мы также обозначим A , и, наоборот, мы будем отождествлять график A в $X \times X$ с многозначным оператором $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow 2^X$. Таким образом, для $A \subset X \times X$

$$\mathcal{D}(A) := \{u \in X : [u, v] \in A\},$$

$$\mathcal{R}(A) := \{v \in X : [u, v] \in A\}.$$

$\mathcal{D}(A)$ называется *областью определения* оператора A , а $\mathcal{R}(A)$ — *областью его значений*.

$$A^{-1} := \{[u, v] \in X \times X : [v, u] \in A\}.$$

Для $A, B \subset X \times X$ положим

$$A \pm B := \{[u, v] \in X \times X : u \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B) \text{ и } v = v_1 \pm v_2, \\ \text{где } [u, v_1] \in A \text{ и } [u, v_2] \in B\},$$

$$\lambda A := \{[u, v] \in X \times X : u \in \mathcal{D}(A) \text{ и } v = \lambda v_1, \text{ где } [u, v_1] \in A\}$$

при $\lambda \in \mathbb{R}$. Далее $I := \{[u, u] \in X \times X : u \in X\}$. Мы также будем использовать обозначение $y \in Ax$ в случае, когда $[x, y] \in A \subset X \times X$. Обозначим через $D(F; X)$ множество всех *m-диссипативных* операторов A в X , таких, что $\mathcal{D}(A) = F$, где F — непустое замкнутое подмножество в X . Будем говорить, что последовательность $\{T_n\}$ из $C(F; X)$ *сходится к* $T \in C(F; X)$, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, s]} \|T_n(t)x - T(t)x\| = 0$$

при любых $x \in F$ и $s > 0$, и что $\{A_n\}$ из $D(F; X)$ *сходится к* $A \in D(F; X)$, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(I - hA_n)^{-1}x - (I - hA)^{-1}x\| = 0$$

при любых $x \in X$ и $h > 0$. Располагая этими определениями, мы можем установить нелинейный аналог теоремы Хилле — Иосиды в гильбертовом пространстве H . Пусть $T \in C(K; H)$, где K — непустое замкнутое выпуклое подмножество в H . Тогда существует единственный оператор $A_T \in D(K; H)$, такой, что $A_{T,h}$, определенные формулой $h^{-1}(T(h) - I)$ для $h > 0$, сходятся к A_T в $D(K; H)$ при $h \downarrow 0$. Обозначим через $\mathcal{G}$ отображение $T \rightarrow A_T$. Это биекция и $\{T_n\}$ сходится к T в $C(K; H)$ тогда и только тогда, когда $\{\mathcal{G}(T_n)\}$ сходится к $\mathcal{G}(T)$ в $D(K; H)$. Этот нелинейный аналог теоремы Хилле — Иосиды — Троттера — Невё — Като оправдывает использование многозначных операторов. Заметим, что $A \subset H \times H$ диссипативен тогда и только тогда, когда $-A$ монотонен в H , и A m -диссипативен тогда и только тогда, когда $-A$ — максимальный монотонный график в H . По этому поводу см. Brezis [1973] и дополнение 1.

В произвольном банаховом пространстве ситуация не так хороша. Как уже отмечалось, если $T \in C(X; X)$, то $\mathcal{D}(A_T)$ может быть пусто. Более того, в работе Crandall, Liggett [1971a] показано, что даже если X конечномерно, причем $\dim X \geq 3$, и $T \in C(X; X)$, то семейство $A_{T,t}$, определенное выше, не обязательно сходится к некоторому оператору $A \in D(X; X)$ при $t \downarrow 0$. Интересно отметить, что если $T \in C(F; X)$, то сжимающие полугруппы с генераторами $A_{T,t} = t^{-1}(T(t) - I)$ при $t > 0$ сходятся к T в $C(F; F)$ при $t \downarrow 0$ (см. Kobayashi [1974]). Следовательно, даже при наличии сходимости последовательности сжимающих полугрупп $T_n \in C(X; X)$ к сжимающей полугруппе T из $C(X; X)$ их генераторы (если они существуют) не обязаны сходиться к некоторому элементу из $D(X; X)$. Таким образом, для произвольного банахова пространства не существует аналога отображения $\mathcal{G} : C(X) \rightarrow D(X)$ в нелинейном случае. В дальнейшем мы увидим, что аналог отображения $\mathcal{F} := \mathcal{G}^{-1} : D(X) \rightarrow C(X)$ существует в нелинейном случае для произвольного банахова пространства с подобным «свойством непрерывности». Однако это отображение $\mathcal{F}$ не является в общем случае инъективным (см. Crandall, Liggett [1971b]). Так, два различных m -диссипативных оператора могут порождать одну и ту же полугруппу. Более того, до сих пор открыт вопрос о сюръективности отображения $\mathcal{F} : D(X; X) \rightarrow C(X; X)$ — см. Crandall [1986].

2.2. Теорема Крэндалла — Лиггетта

Цель этого параграфа — доказательство следующего факта:

Теорема 2.3 (Крэндалл, Лиггетт). Пусть A m -диссипативен в X , $t \geq 0$ и $x \in \mathcal{D}(\bar{A})$. Тогда последовательность $\{(I - tA/n)^{-n}\}_{n \geq 1}$ является последовательностью Коши в X . Ее предел, который мы

обозначим $T_A(t)x$, принадлежит $\overline{\mathcal{D}(A)}$, и $T_A(t): \overline{\mathcal{D}(A)} \rightarrow \overline{\mathcal{D}(A)}$ — нелинейная сжимающая полугруппа на $\overline{\mathcal{D}(A)}$. Кроме того, при $x \in \mathcal{D}(A)$

$$\|T_A(t)x - \left(I - \frac{t}{n}A\right)^{-n}x\| \leq |Ax| t \sqrt{1/n}, \quad t \geq 0, n \geq 1, \quad (2.11)$$

и

$$\|T_A(t)x - T_A(s)x\| \leq |Ax| \cdot |t - s|, \quad t, s \geq 0, \quad (2.12)$$

где

$$|Ax| := \sup_{h>0} h^{-1} \|(I - hA)^{-1}x - x\|. \quad (2.13)$$

Прежде чем доказывать эту теорему, заметим, что обозначение (2.13) правомерно. Необходимо показать, что $|Ax| < \infty$ для $x \in \mathcal{D}(A)$. Так как A m -диссипативен в X , оператор E_h^A , определенный формулой

$$E_h^A = (I - hA)^{-1} \quad \text{для } h > 0, \quad (2.14)$$

есть сжатие X с областью значений в $\mathcal{D}(A)$. Более того, E_h^A — биекция из X на $\mathcal{D}(A)$. Как в линейном случае, определим аппроксимацию Иосиды оператора A равенством

$$A_h := h^{-1}(E_h^A - I) \quad \text{для } h > 0. \quad (2.15)$$

Тогда $|Ax| = \sup_{h>0} \|A_h x\|$. Чтобы доказать, что $|Ax| < \infty$, заметим прежде всего, что $[E_h^A x, A_h x] \in A$ для всех $x \in X$ и $h > 0$. Действительно, из соотношения $(I - hA)E_h^A \equiv I$ получаем $E_h^A - hAE_h^A \equiv I$ и, следовательно, $AE_h^A \equiv h^{-1}(E_h^A - I) = A_h$. Кроме того, в силу диссипативности A для любых $[x_1, y_1], [x_2, y_2] \in A$ и $h > 0$

$$\|x_1 - x_2\| \leq \|(x_1 - x_2) - h(y_1 - y_2)\|.$$

Выбирая $x_1 = E_h^A x$, $x_2 = x$ и $y_1 = A_h x$, где $x \in \mathcal{D}(A)$, получим $\|E_h^A x - x\| \leq \|(E_h^A x - x) - h(A_h x - y)\| = \|hy\| = h\|y\|$ для любого $y \in X$, такого, что $[x, y] \in A$. Отсюда для $x \in \mathcal{D}(A)$ имеем

$$|Ax| \leq \inf \{\|y\| : [x, y] \in A\} < \infty. \quad (2.16)$$

Из (2.13) и (2.16) следует также, что при $x \in \mathcal{D}(A)$

$$\|E_h^A x - x\| = h\|A_h x\| \leq h|Ax| \rightarrow 0 \quad \text{при } h \downarrow 0.$$

Кроме того, легко показать (см. (2.37)), что

$$\lim_{h \downarrow 0} \|E_h^A x - x\| = 0 \quad \text{тогда и только тогда, когда } x \in \overline{\mathcal{D}(A)}. \quad (2.17)$$

Если элемент $x \in X$ таков, что $|Ax| < \infty$, то $\lim_{h \downarrow 0} \|E_h^A x - x\| = 0$ и, таким образом, $x \in \overline{\mathcal{D}(A)}$. Может оказаться, что $|Ax| < \infty$ и $x \notin \mathcal{D}(A)$. Класс тех $x \in \overline{\mathcal{D}(A)}$, для которых

$|Ax| < \infty$, называют *обобщенной областью определения* оператора A (см. Scandall [1973]). Легко проверяется, что (2.11) и (2.12) имеют место, если x принадлежит обобщенной области определения оператора A .

Теорема 2.3 будет следствием такой леммы.

Основная лемма 2.4. Пусть A диссипативен в X ,

$K, \eta > 0$,

$t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_i < \dots < t_m$,

$s_0 = 0 < s_1 < \dots < s_j < \dots < s_n$,

$\gamma_i = t_i - t_{i-1}, \quad i = 1, \dots, m$,

$\delta_j = s_j - s_{j-1}, \quad j = 1, \dots, n$,

$x_i \in \mathcal{D}(A), y_j \in \mathcal{D}(A), \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n$,

$f_i, g_j \in X, \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n$,

$x_0, y_0 \in X$,

где x_i, y_j, f_i, g_j удовлетворяют условиям

$$\frac{x_i - x_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \in Ax_i + f_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2.18)$$

$$\frac{y_j - y_{j-1}}{s_j - s_{j-1}} \in Ay_j + g_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.19)$$

$$\left\| \frac{x_i - x_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \right\| \leq K, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2.20)$$

$$\left\| \frac{y_j - y_{j-1}}{s_j - s_{j-1}} \right\| \leq K, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.21)$$

$$\|f_i\|, \|g_j\| \leq \eta, \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.22)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|x_m - y_n\| \leq & \|x_0 - y_0\| + 2\eta \cdot \min(t_m, s_n) + \\ & + K \sqrt{(t_m - s_n)^2 + \min(t_m, s_n) \cdot \max_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} (\gamma_i + \delta_j)}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Прежде чем доказывать основную лемму, приведем несколько ее следствий, откуда и будет получена теорема 2.3.

Предложение 2.5. Пусть A m -диссипативен в X . Тогда для $x \in \mathcal{D}(A)$, $\mu, \nu > 0$, $m, n \in \mathbb{Z}^+$

$$\|(E_\mu^A)^m x - (E_\nu^A)^n x\| \leq |Ax| \sqrt{(m\mu - n\nu)^2 + \min(m\mu, n\nu)(\mu + \nu)}. \quad (2.24)$$

Доказательство. Применим основную лемму с $x_0 = y_0 = x \in \mathcal{D}(A)$, $f_i = g_j = 0$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Положим $t_i = i\mu$, $s_j = j\nu$ ($\gamma_i = \mu$, $\delta_j = \nu$). Так как A m -диссипативен,

т. е. $\mathcal{R}(I - hA) = X$, получаем, что $x_i = E_\mu^A x_{i-1}$, $y_j = E_\nu^A y_{j-1}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Далее,

$$\frac{x_i - x_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \in Ax_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\frac{y_j - y_{j-1}}{s_j - s_{j-1}} \in Ay_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

и

$$\left\| \frac{x_i - x_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \right\| = \left\| \frac{x_i - x_{i-1}}{\mu} \right\| = \frac{1}{\mu} \| (E_\mu^A)^i x - (E_\mu^A)^{i-1} x \| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\mu} \| E_\mu^A x - x \|,$$

так как E_μ^A — сжатие. Кроме того,

$$\mu^{-1} \| E_\mu^A x - x \| \leq |Ax|.$$

Подобные оценки имеют место и для y_j ; поэтому можно взять $K = |Ax|$ и $\eta = 0$. При этом $\|x_0 - y_0\| = 0$. Итак, (2.18) — (2.22) имеют место, поскольку $t\mu = t_m$ и $n\nu = s_n$. ■

Полагая $\mu = t/m$ и $\nu = t/n$ в (2.24), получим для $x \in \mathcal{D}(A)$

$$\| (E_{t/m}^A)^m x - (E_{t/n}^A)^n x \| \leq |Ax| t \sqrt{1/m + 1/n}.$$

Значит, $\{(E_{t/m}^A)^m x\}_{m \geq 1}$ — последовательность Коши в X . Так как $\|(E_{t/m}^A)^m\|_{\text{Lip}} \leq 1$, то $\{(E_{t/m}^A)^m x\}_{m \geq 1}$ — последовательность Коши, если $x \in \mathcal{D}(A)$. Поскольку X полно, $\lim_{m \rightarrow \infty} (E_{t/m}^A)^m x$ существует для $x \in \mathcal{D}(A)$, и мы будем обозначать этот предел $T_A(t)x$. Так как $(E_{t/m}^A)^m x$ принадлежит $\mathcal{D}(A)$ при $m \geq 1$, мы можем заключить, что $T_A(t)x \in \mathcal{D}(A)$. Кроме того, $\|T_A(t)\|_{\text{Lip}} \leq 1$. Итак, $T_A(t): \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{D}(A)$ есть сжатие и

$$\|T_A(t)x - (E_{t/n}^A)^n x\| \leq |Ax| \cdot t \cdot \sqrt{1/n},$$

что доказывает (2.11). Для $x \in \mathcal{D}(A)$ и $t, s > 0$ из (2.24) получаем

$$\| (E_{t/m}^A)^m x - (E_{s/n}^A)^n x \| \leq |Ax| \sqrt{(t-s)^2 + \min(t, s) \left(\frac{t}{m} + \frac{s}{n} \right)}.$$

Отсюда

$$\|T_A(t)x - T_A(s)x\| \leq |Ax| \cdot |t - s|,$$

что доказывает (2.12). Используя неравенство треугольника и тот факт, что $T_A(t)$ есть сжатие, проверяем, что $t \rightarrow T_A(t)x$ непрерывно на $[0, \infty)$. Для завершения доказательства теоремы 2.3 необходимо проверить полугрупповое свойство $T_A(t+s) = T_A(t)T_A(s)$ для всех $t, s \geq 0$. Поскольку отображение $t \rightarrow$

$\rightarrow T_A(t)$ x непрерывно для $x \in \overline{\mathcal{D}(A)}$, соотношение $T_A(t+s) = T_A(t) T_A(s)$ достаточно проверить для рациональных и положительных t, s , а это следствие равенства $T_A(mt) = T_A(t)^m$, выполняющегося для всех $m \in \mathbb{Z}^+$ и $t > 0$. Действительно, для $p, q, r, s \in \mathbb{Z}^+$ и $x \in \overline{\mathcal{D}(A)}$ имеем

$$\begin{aligned} T_A\left(\frac{p}{q} + \frac{r}{s}\right) x &= T_A\left(\frac{ps+rq}{qs}\right) x = T_A\left(\frac{1}{qs}\right)^{ps+qr} x = \\ &= T_A\left(\frac{1}{qs}\right)^{ps} \cdot T_A\left(\frac{1}{qs}\right)^{qr} x = T_A\left(\frac{1}{qs}\right)^{ps} T_A\left(\frac{r}{s}\right) x = \\ &= T_A\left(\frac{p}{q}\right) T_A\left(\frac{r}{s}\right) x. \end{aligned}$$

Наконец, покажем, что $T_A(mt) = T_A(t)^m$ для всех $t > 0$ и $m \in \mathbb{Z}^+$. Для $m = 1$ это тривиально. Продолжим доказательство по индукции.

$$T_A(mt) x = \lim_{n \rightarrow \infty} (E_{mt/n}^A)^n x.$$

Выберем $n = km$, $k \in \mathbb{Z}^+$. Тогда

$$\begin{aligned} T_A(mt) x &= \lim_{k \rightarrow \infty} (E_{mt/km}^A)^{km} x = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (E_{t/k}^A)^{km} x = \lim_{k \rightarrow \infty} (E_{t/k}^A)^k (E_{t/k}^A)^{k(m-1)} x = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (E_{t/k}^A)^k (E_{t(m-1)/k(m-1)}^A)^{k(m-1)} x. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (E_{t(m-1)/k(m-1)}^A)^{k(m-1)} x = T_A((m-1)t) x.$$

Кроме того, если $x_k \in \overline{\mathcal{D}(A)}$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = y$, то $\lim_{k \rightarrow \infty} (E_{t/k}^A)^k x_k = T_A(t)y$. Используем тот факт, что

$$\begin{aligned} \|T_A(t)y - (E_{t/k}^A)^k x_k\| &\leq \|T_A(t)y - (E_{t/k}^A)^k y\| + \\ &+ \|(E_{t/k}^A)^k y - (E_{t/k}^A)^k x_k\| \leq \|T_A(t)y - (E_{t/k}^A)^k y\| + \|y - x_k\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $k \rightarrow \infty$. Тогда

$$\begin{aligned} T_A(mt) x &= \lim_{k \rightarrow \infty} (E_{t/k}^A)^k (E_{t(m-1)/k(m-1)}^A)^{k(m-1)} x = \\ &= T_A(t) T_A((m-1)t) x. \end{aligned}$$

По индукции $T_A((m-1)t) x = T_A(t)^{m-1} x$ и, следовательно,

$$T_A(mt) x = T_A(t) T_A(t)^{m-1} x = T_A(t)^m x. \quad \blacksquare$$

Доказательство основной леммы 2.4. Так как A диссипативен, из (2.18) и (2.19) следует, что

$$\begin{aligned} \|x_i - y_j\| \leq & \frac{\gamma_i}{\gamma_i + \delta_j} \|x_i - y_{j-1}\| + \frac{\delta_j}{\gamma_i + \delta_j} \|x_{i-1} - y_j\| + \\ & + \frac{\gamma_i \delta_j}{\gamma_i + \delta_j} \|f_i - g_j\|. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Действительно, в силу диссипативности A при любом $h > 0$

$$\|x_i - y_j\| \leq \left\| (x_i - y_j) - h \left[\left(\frac{x_i - x_{i-1}}{\gamma_i} - f_i \right) - \left(\frac{y_j - y_{j-1}}{\delta_j} - g_j \right) \right] \right\|.$$

Выбрав $h = (\gamma_i \delta_j) / (\gamma_i + \delta_j)$, получим

$$\begin{aligned} (x_i - y_j) - \frac{\gamma_i \delta_j}{\gamma_i + \delta_j} \left[\left(\frac{x_i - x_{i-1}}{\gamma_i} - f_i \right) - \left(\frac{y_j - y_{j-1}}{\delta_j} - g_j \right) \right] = \\ = \frac{\gamma_i}{\gamma_i + \delta_j} (x_i - y_{j-1}) + \frac{\delta_j}{\gamma_i + \delta_j} (x_{i-1} - y_j) + \frac{\gamma_i \delta_j}{\gamma_i + \delta_j} (f_i - g_j). \end{aligned}$$

Далее используем неравенство треугольника. Положим

$$a_{i,j} := \|x_i - y_j\| \text{ для } i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n,$$

$$R := \{(i, j) : i = 0, 1, \dots, m; j = 0, 1, \dots, n\},$$

$$\partial R := \{(i, j) \in R : i = 0 \text{ или } j = 0\},$$

$$R^0 := R \setminus \partial R.$$

Тогда на R^0

$$a_{i,j} \leq \frac{\gamma_i}{\gamma_i + \delta_j} a_{i,j-1} + \frac{\delta_j}{\gamma_i + \delta_j} a_{i-1,j} + \frac{2\gamma_i \delta_j}{\gamma_i + \delta_j} \eta. \quad (2.26)$$

При $j = 0$ справедлива оценка $a_{i,0} = \|x_i - y_0\| \leq \|x_i - x_0\| + \|x_0 - y_0\|$. Теперь, пользуясь (2.20), получим

$$\|x_i - x_0\| \leq \sum_{k=1}^i \|x_k - x_{k-1}\| \leq K \sum_{k=1}^i (t_k - t_{k-1}) = K t_i.$$

Таким образом, $a_{i,0} \leq a_{0,0} + K t_i$ при $i = 1, \dots, m$. Аналогично $a_{0,j} \leq a_{0,0} + K s_j$ для $j = 1, \dots, n$. Отсюда на ∂R получаем

$$a_{i,j} \leq a_{0,0} + K |t_i - s_j|. \quad (2.27)$$

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} b_{i,j} = \frac{\gamma_i}{\gamma_i + \delta_j} b_{i,j-1} + \frac{\delta_j}{\gamma_i + \delta_j} b_{i-1,j} + \frac{\gamma_i \delta_j}{\gamma_i + \delta_j} h_{i,j} & \text{на } R^0, \\ b_{i,j} = e_{i,j} & \text{на } \partial R, \end{cases} \quad (2.28)$$

где отображения $h: R^0 \rightarrow \mathbb{R}$ и $e: \partial R \rightarrow \mathbb{R}$ заданы. Тогда

а) При любых (e, h) система (2.28) имеет единственное решение, которое мы обозначим $b(e, h)$.

(b) $b(e, h) = b(e, 0) + b(0, h)$ и отображения $e \rightarrow b(e, 0)$, $h \rightarrow b(0, h)$ линейны.

(c) Неравенства $e \geq 0$ и $h \geq 0$ влекут за собой $b(e, h) \geq 0$.

(d) Если $a(e, h)$ удовлетворяют (2.28) с заменой равенств на неравенства ($\leq$), то $a(e, h) \leq b(e, h)$. Таким образом,

(e) $a_{i,j}(a_{0,0} + K|t-s|, 2\eta) \leq b_{i,j}(a_{0,0} + K|t-s|, 2\eta) = a_{0,0}b_{i,j}(1, 0) + Kb_{i,j}(|t-s|, 0) + 2\eta b_{i,j}(0, 1)$, где $1(i, j) = 1$ и $|t-s|(i, j) = |t_i - s_j|$.

(f) $b_{i,j}(1, 0) = 1$, так как $\frac{\gamma_i}{\gamma_i + \delta_j} + \frac{\delta_j}{\gamma_i + \delta_j} = 1$.

(g) $b_{i,j}(t, 1) = t_i$, так как $t_i = \frac{\gamma_i}{\gamma_i + \delta_j} t_i + \frac{\delta_j}{\gamma_i + \delta_j} t_{i-1} + \frac{\gamma_i \delta_j}{\gamma_i + \delta_j}$. Аналогично получаем, что $b_{i,j}(s, 1) = s_j$.

(h) $b_{i,j}(0, 1) \leq \min(t_i, s_j)$. Действительно, $b_{i,j}(0, 1) \leq b_{i,j}(t, 1) = t_i$, $b_{i,j}(0, 1) \leq b_{i,j}(s, 1) = s_j$.

(i) $b_{i,j}^2(e, 0) \leq b_{i,j}(e^2, 0)$.

$$b_{i,j}^2 = \left[\frac{\gamma_i}{\gamma_i + \delta_j} b_{i,j-1} + \frac{\delta_j}{\gamma_i + \delta_j} b_{i-1,j} \right]^2 \leq \frac{\gamma_i}{\gamma_i + \delta_j} b_{i,j-1}^2 + \frac{\delta_j}{\gamma_i + \delta_j} b_{i-1,j}^2,$$

так как

$$\frac{\gamma_i}{\gamma_i + \delta_j}, \frac{\delta_j}{\gamma_i + \delta_j} \geq 0 \text{ и } \frac{\gamma_i}{\gamma_i + \delta_j} + \frac{\delta_j}{\gamma_i + \delta_j} = 1.$$

Таким образом, $b^2(e, 0)$ удовлетворяет неравенству с e^2 на ∂R и $h = 0$. Значит, (i) следует из (d).

(j) $(t_i - s_j)^2 = b_{i,j}((t-s)^2, -\tilde{h})$ с $\tilde{h}_{i,j} = \gamma_i + \delta_j$.

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma_i}{\gamma_i + \delta_j} (t_i - s_{j-1})^2 + \frac{\delta_j}{\gamma_i + \delta_j} (t_{i-1} - s_j)^2 = \\ &= \frac{\gamma_i}{\gamma_i + \delta_j} [(t_i - s_j) + \delta_j]^2 + \frac{\delta_j}{\gamma_i + \delta_j} [(t_i - s_j) - \gamma_i]^2 = \\ &= \frac{\gamma_i}{\gamma_i + \delta_j} (t_i - s_j)^2 + \frac{\delta_j}{\gamma_i + \delta_j} (t_i - s_j)^2 + \frac{2\gamma_i \delta_j}{\gamma_i + \delta_j} (t_i - s_j) - \\ & \quad - \frac{2\gamma_i \delta_j}{\gamma_i + \delta_j} (t_i - s_j) + \frac{\delta_j^2 \gamma_i + \gamma_i^2 \delta_j}{\gamma_i + \delta_j} = (t_i - s_j)^2 + \frac{\gamma_i \delta_j}{\gamma_i + \delta_j} (\gamma_i + \delta_j). \end{aligned}$$

(k) $b_{i,j}((t-s)^2, 0) \leq (t_i - s_j)^2 + \max_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} (\gamma_i + \delta_j) b_{i,j}(0, 1)$.

Это следует из равенства $b_{i,j}((t-s)^2, 0) = b_{i,j}((t-s)^2, -\tilde{h}) + b_{i,j}(0, \tilde{h})$ и утверждений (j) и (h).

Теперь окончательно получаем, что

$$b_{i,j}(|t-s|, 0) \leq \sqrt{(t_i - s_j)^2 + \min(t_i, s_j) \cdot \max_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} (\gamma_i + \delta_j)}$$

и

$$\begin{aligned} a_{i,j}(a_{0,0} + K|t-s|, 2\eta) &\leq b_{i,j}(a_{0,0} + K|t-s|, 2\eta) \leq \\ &\leq a_{0,0} + Kb_{i,j}(|t-s|, 0) + 2\eta b_{i,j}(0, 1), \end{aligned}$$

что доказывает (2.23). ■

В теореме 2.3 для построения полугруппы T_A рассматривалось равномерное разбиение отрезка $[0, t]$, $t_0 = 0$, $t_1 = t/n$, $\dots$, $t_i = it/n$, $\dots$, $t_n = t$, и разрешалась неявная разностная схема для задачи Коши $du/dt \in Au$, $u(0) = x$. В следующей теореме мы покажем, что если взять неравномерное разбиение отрезка $[0, t]$, то при величине шага, стремящейся к нулю, получится тот же предел.

Теорема 2.6. Пусть A есть m -диссипативный оператор в X и $x \in \mathcal{D}(A)$. Пусть $P_n := \{s_0^n = 0 < s_1^n < \dots < s_{N(n)}^n = t\}$ — последовательность разбиений отрезка $[0, t]$, такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} h(n) = 0$, где $h(n) := \max_{1 \leq j \leq N(n)} (s_j^n - s_{j-1}^n)$. Пусть $y_j^n \in \mathcal{D}(A)$ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \frac{y_j^n - y_{j-1}^n}{s_j^n - s_{j-1}^n} \in Ay_j^n, & j = 1, \dots, N(n), \\ y_0^n = x. \end{cases} \quad (2.29)$$

Положим

$$u^n(t) := \begin{cases} x & \text{для } t = 0, \\ y_j^n & \text{для } t \in (s_{j-1}^n, s_j^n], \quad j = 1, \dots, N(n). \end{cases}$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, t]} \|u^n(t) - T_A(t)x\| = 0.$$

Более точно, имеет место оценка

$$\|u^n(t) - T_A(t)x\| \leq 2\|x - \tilde{x}\| + |A\tilde{x}| \cdot (\sqrt{th(n)} + h(n)) \quad (2.30)$$

для всех $\tilde{x} \in \mathcal{D}(A)$.

Доказательство. Достаточно доказать (2.30). Если $\tilde{y}_j^n$ удовлетворяет (2.29) с заменой x на $\tilde{x}$, то нетрудно видеть, что $\|\tilde{y}_j^n - y_j^n\| \leq \|\tilde{x} - x\|$ и, значит, $\|\tilde{u}^n(t) - u(t)\| \leq \|\tilde{x} - x\|$, где $\tilde{u}^n(t)$ определяется, как и $u^n(t)$, с заменой x на $\tilde{x}$ и y_j^n на $\tilde{y}_j^n$.

Тогда

$$\begin{aligned} \|u^n(t) - T_A(t)x\| &\leq \|u^n(t) - \tilde{u}^n(t)\| + \|\tilde{u}^n(t) - T_A(t)\tilde{x}\| + \\ &\quad + \|T_A(t)\tilde{x} - T_A(t)x\| \leq \\ &\leq 2\|x - \tilde{x}\| + \|\tilde{u}^n(t) - T_A(t)\tilde{x}\|. \end{aligned}$$

Таким образом, достаточно доказать (2.30) с $x = \tilde{x} \in \mathcal{D}(A)$. Тогда, используя (2.12) и определение $h(n)$, получим

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, \bar{t}]} \|u^n(t) - T_A(t)x\| &= \max_{1 \leq j \leq N(n)} \sup_{t \in (s_{j-1}^n, s_j^n)} \|y_j^n - T_A(t)x\| \leq \\ &\leq \max_{1 \leq j \leq N(n)} [\|y_j^n - T_A(s_j^n)x\| + \sup_{t \in (s_{j-1}^n, s_j^n)} \|T_A(t)x - T_A(s_j^n)x\|] \leq \\ &\leq \max_{1 \leq j \leq N(n)} \|y_j^n - T_A(s_j^n)x\| + |Ax| \cdot h(n), \end{aligned}$$

а используя (2.11), —

$$\|y_j^n - T_A(s_j^n)x\| \leq \|y_j^n - (E_{s_j^n/m}^A)^m x\| + |Ax| \bar{t} \sqrt{1/m}.$$

Для оценки нормы $\|y_j^n - (E_{s_j^n/m}^A)^m x\|$ можно применить основную лемму 2.4. Прежде всего, заметим, что

$$\left\| \frac{y_j^n - y_{j-1}^n}{s_j^n - s_{j-1}^n} \right\| = \frac{1}{s_j^n - s_{j-1}^n} \|E_{s_j^n - s_{j-1}^n}^A y_{j-1}^n - y_{j-1}^n\| = \|A_{s_j^n - s_{j-1}^n} y_{j-1}^n\|.$$

Из (2.13) и (2.15) следует, что

$$\left\| \frac{y_j^n - y_{j-1}^n}{s_j^n - s_{j-1}^n} \right\| \leq |A y_{j-1}^n|,$$

и в силу (2.16)

$$|A y_{j-1}^n| \leq \inf \{ \|y\| : [y_{j-1}^n, y] \in A \}.$$

В частности,

$$y = \frac{y_{j-1}^n - y_{j-2}^n}{s_{j-1}^n - s_{j-2}^n} \in A y_{j-1}^n.$$

Таким образом,

$$\left\| \frac{y_j^n - y_{j-1}^n}{s_j^n - s_{j-1}^n} \right\| \leq \left\| \frac{y_{j-1}^n - y_{j-2}^n}{s_{j-1}^n - s_{j-2}^n} \right\|.$$

По индукции получаем, что

$$\left\| \frac{y_j^n - y_{j-1}^n}{s_j^n - s_{j-1}^n} \right\| \leq \left\| \frac{y_1^n - y_0^n}{s_1^n - s_0^n} \right\| = \|A_{s_1^n - s_0^n} x\| \leq |Ax|,$$

так что в лемме 2.4 мы можем выбрать $K = |Ax|$ и $\eta = 0$. Отсюда следует, что

$$\|y_j^n - E_{s_j/m}^A x\| \leq |Ax| \sqrt{s_j^n (s_j^n/m + h(n))}.$$

Окончательно получаем

$$\|y_j^n - T_A(s_j^n) x\| \leq (\sqrt{s_j^n (s_j^n/m + h(n))} + \sqrt{1/m}) \cdot |Ax|$$

при любом $m \geq 1$. Переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$, получим

$$\|y_j^n - T_A(s_j^n) x\| \leq \sqrt{s_j^n \cdot h(n)} \cdot |Ax| \leq \sqrt{th(n)} \cdot |Ax|. \blacksquare$$

Замечание. В теоремах 2.3 и 2.6 мы использовали m -диссипативность оператора A для того, чтобы обеспечить существование x_i и y_j , удовлетворяющих (2.18), (2.19) и (2.29). Для этой цели было бы достаточно предположить, например, что

$$\bigcap_{h>0} \mathcal{R}(I - hA) \supseteq \mathcal{D}(A).$$

Тогда можно было бы получить нелинейную сжимающую полугруппу, определенную на $\mathcal{D}(A)$, при этом более слабом предположении. В связи с вопросом об ослаблении предположения $\mathcal{R}(I - hA) = X$ мы отсылаем читателя к работам Crandall [1986] и Reich [1986]. Наконец, отметим, что решения задачи Коши $du/dt \in Au$, $u(0) = x$, полученные как пределы решений неявных разностных задач, названы в Crandall [1986] *обобщенными решениями*. Здесь мы не будем вводить это интересное понятие.

2.3. Аппроксимация сжимающих полугрупп

В этом параграфе мы доказываем нелинейный аналог одной половины теоремы Троттера — Невё — Като и формулу Чернова.

Теорема 2.7. Пусть A и A_n ($n = 1, 2, \dots$) суть m -диссипативные операторы в X и $x \in \mathcal{D}(A)$, $x_n \in \mathcal{D}(A_n)$, $n = 1, 2, \dots$.

(i) Если для некоторого $h > 0$ и для любого $y \in X$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|E_h^{A_n} y - E_h^A y\| = 0, \quad (2.31)$$

то (2.31) имеет место для любых $h > 0$ и $y \in X$.

(ii) Если в условиях (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, s]} \|T_{A_n}(t) x_n - T_A(t) x\| = 0 \quad (2.32)$$

для любого $s > 0$.

Доказательство. (i) Предположим, что (2.31) выполнено для $h_0 > 0$. Пусть $h > 0$ и $y \in X$. Положим $x := (I - hA)^{-1} y$ и $x_n := (I - hA_n)^{-1} y$ для $n \in \mathbb{Z}^+$. Мы должны показать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n =$

$= x$. Докажем это для $h > 0$, удовлетворяющих условию $|1 - h_0/h| < 1$, т. е. для $h \in (h_0/2, \infty)$. Тогда по индукции это будет иметь место и для любого $h > 0$. Пусть элемент z_n определен равенством

$$z_n := (I - h_0 A_n)^{-1} [(1 - h_0/h)x + (h_0/h)y].$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = (I - h_0 A)^{-1} [(1 - h_0/h)x + (h_0/h)y]$$

по предположению. Утверждается, что

$$(I - h_0 A)^{-1} [(1 - h_0/h)x + (h_0/h)y] = x.$$

Действительно, $x \in hAx + y$ или, что то же самое, $(h_0/h)x \in h_0Ax + (h_0/h)y$. Следовательно, $x \in h_0Ax + (1 - h_0/h)x + (h_0/h)y$ и, значит,

$$x = (I - h_0 A)^{-1} [(1 - h_0/h)x + (h_0/h)y].$$

Аналогично,

$$x_n = (I - h_0 A_n)^{-1} [(1 - h_0/h)x_n + (h_0/h)y].$$

Поэтому $\|x_n - z_n\| \leq |1 - h_0/h| \cdot \|x - x_n\|$. Из неравенства

$\|x_n - x\| \leq \|x_n - z_n\| + \|z_n - x\|$ получаем, что

$$\|x_n - x\| \leq (1 - |1 - h_0/h|)^{-1} \|z_n - x\|.$$

И так как $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = x$, имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

(ii) Докажем сначала теорему при дополнительном предположении

$$x_n \in \mathcal{D}(A_n) \quad \text{и} \quad \sup_{n \geq 1} \|A_n x_n\| < \infty. \quad (2.33)$$

Положим $M = \max(\|Ax\|, \sup_{n \geq 1} \|A_n x_n\|)$. Для $t \in [0, s]$, $s > 0$ и $m \in \mathbb{Z}^+$, используя (2.11) и (2.33), получаем

$$\begin{aligned} \|T_{A_n}(t)x_n - T_A(t)x\| &\leq \|T_{A_n}(t)x_n - (E_{t/m}^{A_n})^m x_n\| + \\ &+ \|(E_{t/m}^{A_n})^m x_n - (E_{t/m}^A)^m x\| + \|(E_{t/m}^A)^m x - T_A(t)x\| \leq \\ &\leq 2Mt \sqrt{1/m} + \|(E_{t/m}^{A_n})^m x_n - (E_{t/m}^A)^m x\|. \end{aligned}$$

Покажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(E_{t/m}^{A_n})^m x_n - (E_{t/m}^A)^m x\| = 0. \quad (2.34)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \|(E_{t/m}^{A_n})^m x_n - (E_{t/m}^A)^m x\| &\leq \|(E_{t/m}^{A_n})^m x_n - (E_{t/m}^{A_n})^m x\| + \\ &+ \|(E_{t/m}^{A_n})^m x - (E_{t/m}^A)^m x\| \leq \\ &\leq \|x_n - x\| + \|(E_{t/m}^{A_n})^m x - (E_{t/m}^A)^m x\|. \end{aligned}$$

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$, то достаточно доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(E_{t/m}^{A_n})^m x - (E_{t/m}^A)^m x\| = 0. \quad (2.35)$$

Применим метод математической индукции. С учетом (i) ясно, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(E_{t/m}^{A_n})^j x - (E_{t/m}^A)^j x\| = 0$$

для $j = 1$. Предположим, что утверждение верно для $j - 1$. Тогда, полагая $z = (E_{t/m}^A)^{j-1} x$ и используя оценку $\|E_{t/m}^{A_n}\|_{Lip} \leq 1$, получаем

$$\begin{aligned} \|(E_{t/m}^{A_n})^j x - (E_{t/m}^A)^j x\| &\leq \|E_{t/m}^{A_n} (E_{t/m}^{A_n})^{j-1} x - E_{t/m}^{A_n} (E_{t/m}^A)^{j-1} x\| + \\ &+ \|E_{t/m}^{A_n} (E_{t/m}^A)^{j-1} x - E_{t/m}^A (E_{t/m}^A)^{j-1} x\| \leq \\ &\leq \|(E_{t/m}^{A_n})^{j-1} x - (E_{t/m}^A)^{j-1} x\| + \|E_{t/m}^{A_n} z - E_{t/m}^A z\|. \end{aligned}$$

Используя (i) и предположение индукции, приходим к (2.35) и (2.34). Тогда

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|T_{A_n}(t) x_n - T_A(t) x\| \leq 2Mt \sqrt{1/m}$$

для всех $m \geq 1$, откуда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_{A_n}(t) x_n - T_A(t) x\| = 0.$$

Заметим далее, что в силу (2.12) и (2.33)

$$\begin{aligned} &|\|T_{A_n}(t_1) x_n - T_A(t_1) x\| - \|T_{A_n}(t_2) x_n - T_A(t_2) x\|| \leq \\ &\leq \|T_{A_n}(t_1) x_n - T_{A_n}(t_2) x_n - T_A(t_1) x + T_A(t_2) x\| \leq \\ &\leq \|T_{A_n}(t_1) x_n - T_{A_n}(t_2) x_n\| + \|T_A(t_1) x - T_A(t_2) x\| \leq 2M |t_1 - t_2| \end{aligned}$$

для $0 \leq t_1, t_2 \leq s$. Следовательно, выполнено (2.32). Наконец, уберем дополнительное предположение (2.33). Для $m \geq 1$ положим

$$x^m := E_{1/m}^{A_n} x \quad \text{и} \quad x_n^m := E_{1/m}^{A_n} x_n.$$

В силу (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n^m - x^m\| = 0$ для любого $m \geq 1$. Поэтому существует такая константа $M_m > 0$, что $\|x_n^m\| \leq M_m$. Заметим, что $(A_n)_{1/m} x_n = A_n E_{1/m}^{A_n} x_n$ и поэтому в силу (2.16)

$$\|A_n x_n^m\| \leq \|(A_n)_{1/m} x_n\| = m \|E_{1/m}^{A_n} x_n - x_n\| \leq m (M_m + \|x_n\|) \leq M'_m$$

для всех $n \in \mathbb{Z}^+$ и некоторого $M'_m > 0$. Поэтому последовательность $\{x_n^m\}_{n \geq 1}$ удовлетворяет условию (2.33) для всех $m \geq 1$.

Имеют место неравенства

$$\begin{aligned} \max_{t \in [0, s]} \|T_{A_n}(t)x_n - T_A(t)x\| &\leq \\ &\leq \max_{t \in [0, s]} \{ \|T_{A_n}(t)x_n - T_{A_n}(t)x_n^m\| + \|T_{A_n}(t)x_n^m - T_A(t)x^m\| + \\ &\quad + \|T_A(t)x^m - T_A(t)x\| \} \leq \\ &\leq \|x_n - x_n^m\| + \|x - x^m\| + \max_{t \in [0, s]} \|T_{A_n}(t)x_n^m - T_A(t)x^m\|. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, s]} \|T_{A_n}(t)x_n - T_A(t)x\| \leq 2\|x - x^m\| \quad (2.36)$$

для любого $m \geq 1$. Заметим далее, что для любого m -диссипативного оператора B в X

$$\lim_{h \downarrow 0} \|E_h^B y - y\| = 0 \quad \text{для } y \in \overline{\mathcal{D}(B)}. \quad (2.37)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \|E_h^B y - y\| &\leq \|E_h^B y - E_h^B \tilde{y}\| + \|E_h^B \tilde{y} - \tilde{y}\| + \|\tilde{y} - y\| \leq \\ &\leq 2\|y - \tilde{y}\| + h|A\tilde{y}| \end{aligned}$$

при любом $\tilde{y} \in \mathcal{D}(B)$. Это доказывает (2.37) и равенство

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|x - x^m\| = 0.$$

Переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$ в (2.36), получаем (2.32). ■

В качестве первого приложения теоремы 2.7 покажем, что полугруппы, соответствующие аппроксимации Иосиды m -диссипативного оператора A , сходятся к полугруппе, соответствующей A . Это непосредственное следствие такого утверждения:

Предложение 2.8. Пусть оператор A m -диссипативен и A_h — его аппроксимация Иосиды для $h > 0$. Тогда

(i) A_h m -диссипативен.

(ii) $\lim_{h \downarrow 0} \|E_h^{A_h} x - E_h^A x\| = 0$ для любых $\lambda > 0$ и $x \in X$.

Доказательство. Пусть $A_h = h^{-1}(E_h^A - I)$, где $\|E_h^A\|_{\text{Lip}} \leq 1$. Тогда (i) вытекает из следующей леммы.

Лемма 2.9. Пусть $C : X \rightarrow X$ есть сжатие ($\|C\|_{\text{Lip}} \leq 1$). Тогда оператор $\lambda(C - I)$ m -диссипативен при $\lambda \geq 0$.

Доказательство леммы 2.9. Для $x, y \in X$ и $h > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \| (x - y) - h\lambda [(Cx - Cy) - (x - y)] \| &= \\ &= \| (1 + h\lambda)(x - y) - h\lambda(Cx - Cy) \| \geq \\ &\geq (1 + h\lambda) \| x - y \| - h\lambda \| x - y \| = \| x - y \|. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\lambda(C - I)$ диссипативен. Рассмотрим далее уравнение

$$x - h\lambda(Cx - x) = y$$

для $y \in X$. Оно эквивалентно уравнению

$$x = h\lambda(1 + h\lambda)^{-1}[Cx + (h\lambda)^{-1}y].$$

Заметим, что $\|S\|_{\text{Lip}} < 1$, где $S(x) := h\lambda(1 + h\lambda)^{-1}[Cx + (h\lambda)^{-1}y]$. По теореме Пикара — Банаха о неподвижной точке отображение S имеет неподвижную точку. ■

Продолжим доказательство предложения 2.8.

(ii) Положим $y := E_\lambda^A x$ и $y_h := E_{\lambda h}^A x$. Тогда $y - \lambda A y \ni x$ и $y_h - \lambda A_h y_h = x$. Поэтому $y - \lambda A_h y = x + \lambda z - \lambda A_h y$, где $z \in Ay$. Так как A_h диссипативен, то

$$\|y_h - y\| \leq \|\lambda z - \lambda A_h y\| \leq \lambda(\|z\| + \|Ay\|) = M,$$

где M не зависит от h . Значит, $\|y_h\| \leq \|y\| + M$ и

$$\|A_h y_h\| = \lambda^{-1} \|y_h - x\| \leq \lambda^{-1}(\|y\| + M + \|x\|).$$

Кроме того, так как A диссипативен и

$$\begin{aligned} E_h^A y_h - \lambda A E_h^A y_h \ni E_\lambda^A y_h - y_h + x, \\ y - \lambda A y \ni x, \end{aligned}$$

то

$$\|y - E_h^A y_h\| \leq \|E_h^A y_h - y_h\|.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|y - y_h\| &\leq \|y - E_h^A y_h\| + \|E_h^A y_h - y_h\| \leq 2 \|E_h^A y_h - y_h\| = \\ &= 2h \|A_h y_h\| \leq 2h\lambda^{-1}(\|y\| + M + \|x\|), \end{aligned}$$

и $\|y - y_h\|$ стремится к нулю при $h \downarrow 0$. ■

Следствие 2.10. Пусть A m -диссипативен в X . Тогда для любых $x \in \mathcal{D}(A)$ и $s > 0$

$$\lim_{h \downarrow 0} \max_{t \in [0, s]} \|T_{A_h}(t)x - T_A(t)x\| = 0, \quad (2.38)$$

где A_h есть аппроксимация Иосиды оператора A .

Так как оператор A_h липшиц-непрерывен, то соответствующая ему полугруппа может быть получена с помощью решения задачи Коши

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= A_h u, \quad t \geq 0, \\ u(0) &= x \in X \end{aligned} \quad (2.39)$$

$(T_h(t) := u(t, x))$. Можно предполагать, что $T_h = T_{A_h}$.

Предложение 2.11. Пусть оператор $A: X \rightarrow X$ m -диссипативен и липшиц-непрерывен. Тогда функция $u: [0, \infty) \rightarrow X$, определенная как $u(t) := T_A(t)x$, $x \in X$, непрерывно дифференцируема на $[0, \infty)$ и удовлетворяет соотношениям

$$\frac{du}{dt}(t) = Au(t), \quad t \geq 0, \quad u(0) = x.$$

Доказательство. Для $t > 0$ и $n \geq 1$

$$E_{t/n}^A x - x = (t/n) A E_{t/n}^A x,$$

$$(E_{t/n}^A)^2 x - E_{t/n}^A x = (t/n) A (E_{t/n}^A)^2 x,$$

$$(E_{t/n}^A)^n x - (E_{t/n}^A)^{n-1} x = (t/n) A (E_{t/n}^A)^n x.$$

Складывая эти равенства, получим

$$(E_{t/n}^A)^n x - x = (t/n) \sum_{j=1}^n A (E_{t/n}^A)^j x.$$

Так как по теореме 2.3 $\lim_{n \rightarrow \infty} (E_{t/n}^A)^n x = T_A(t)x$, заключаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t}{n} \sum_{j=1}^n A (E_{t/n}^A)^j x$$

существует. Кроме того, функция $t \rightarrow Au(t) = AT_A(t)x$ непрерывна, следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{t}{n} \right) \sum_{j=1}^n Au \left(\frac{jt}{n} \right) = \int_0^t Au(z) dz.$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \left\| \left(\frac{t}{n} \right) \sum_{j=1}^n Au \left(\frac{jt}{n} \right) - \left(\frac{t}{n} \right) \sum_{j=1}^n A (E_{t/n}^A)^j x \right\| &\leq \\ &\leq \frac{t}{n} \|A\|_{\text{Lip}} \sum_{j=1}^n \left\| u \left(\frac{jt}{n} \right) - (E_{t/n}^A)^j x \right\|. \end{aligned}$$

Используя (2.11), имеем

$$\|u(jt/n) - (E_{jt/jn}^A)^j x\| \leq |Ax| \frac{j^t}{n} \sqrt{1/j}$$

при $j = 1, \dots, n$. (Отметим, что $|Ax| = \|Ax\|$, так как A непрерывен.) Отсюда

$$\begin{aligned} \left\| \left(\frac{t}{n} \right) \sum_{j=1}^n Au \left(\frac{j^t}{n} \right) - \left(\frac{t}{n} \right) \sum_{j=1}^n A (E_{t/n}^A)^j x \right\| = \\ = \left(\frac{t}{n} \right) \|A\|_{\text{Lip}} \cdot |Ax| \cdot t \cdot O(\sqrt{n}) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

В итоге получаем

$$u(t) - x = \int_0^t Au(z) dz \text{ для любого } t > 0.$$

Следовательно, $u \in C^1([0, \infty); X)$ и u есть единственное решение задачи Коши

$$\frac{du}{dt}(t) = Au(t), \quad t \geq 0, \quad u(0) = x. \quad \blacksquare$$

В качестве второго приложения теоремы 2.7 рассмотрим нелинейный вариант формулы Чернова. Мы будем использовать следующую оценку.

Предложение 2.12 (оценка Чернова). Пусть $C: X \rightarrow X$ — сжатие, $\lambda > 0$ и $x \in X$. Тогда, если мы обозначим через $u_\lambda(t; x)$ единственное решение задачи Коши

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \lambda^{-1}(Cu - u), \quad t \geq 0, \\ u(0) &= x, \end{aligned}$$

то имеет место оценка

$$\|u_\lambda(t; x) - C^n x\| \leq \sqrt{(n - t/\lambda)^2 + t/\lambda} \|x - Cx\| \quad (2.40)$$

при любых $n \geq 1$ и $t > 0$.

Доказательство. Заметим, что $u_\lambda(t; x) = u_1(t/\lambda; x)$. Поэтому достаточно доказать (2.40) для $\lambda = 1$. Обозначим $u_1(t; x)$ через $u(t)$. Тогда

$$u(t) = e^{-t}x + \int_0^t e^{-(t-s)}Cu(s)ds.$$

Заметим, что $C^n x = e^{-t} C^n x + \int_0^t e^{-(t-s)} C^n x \, ds$. Отсюда

$$\begin{aligned} \|u(t) - C^n x\| &\leq e^{-t} \|x - C^n x\| + \int_0^t e^{-(t-s)} \|Cu(s) - C^n x\| \, ds \leq \\ &\leq e^{-t} \|x - C^n x\| + \int_0^t e^{-(t-s)} \|u(s) - C^{n-1} x\| \, ds \end{aligned}$$

(здесь $C^0 = I$) для $n \geq 1$. Если $x = Cx$, то (2.40) выполнено. В противном случае положим

$$\varphi_n(t) := \|u(t) - C^n x\| \cdot \|x - Cx\|^{-1} \text{ для } n = 0, 1, 2, \dots$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \|x - C^n x\| &\leq \\ &\leq \|x - Cx\| + \|Cx - C^2 x\| + \dots + \|C^{n-1} x - C^n x\| \leq \\ &\leq n \|x - Cx\|. \end{aligned}$$

Следовательно, φ_n удовлетворяет оценке

$$\varphi_n(t) \leq e^{-t} n + \int_0^t e^{-(t-s)} \varphi_{n-1}(s) \, ds, \quad n \geq 1, \quad t \geq 0. \quad (2.41)$$

Наконец,

$$\varphi_0(t) \leq t, \quad t \geq 0. \quad (2.42)$$

Действительно, в силу леммы 9 и липшиц-непрерывности оператор $C - I$ m -диссипативен. Тогда, согласно предложению 2.11, $u(t) = T_{C-I}(t)x$, и, следовательно, пользуясь (2.12), получаем

$$\|u(t) - x\| = \|u(t) - u(0)\| \leq \|(C - I)x\| t = \|(C - I)x\| t.$$

Значит, неравенство (2.42) выполняется. Оценка (2.42) может быть получена и напрямую. Дадим схему доказательства. Обозначим через S_{C-I} полугруппу, построенную по оператору $C - I$, положив $S_{C-I}(t)x = u(t; x)$, где $u(t; x)$ есть единственное решение задачи Коши

$$\frac{du}{dt} = (C - I)u, \quad u(0) = x.$$

Непосредственно проверяется, что

$$\|S_{C-I}(t)x - S_{C-I}(t)y\| \leq \|x - y\|$$

для всех $t > 0$ и $x, y \in X$. Тогда

$$\|u(t+x; h) - u(t; x)\| \leq \|u(h; x) - u(0; x)\|$$

для всех $t > 0$ и $h > 0$. Разделив на h и устремив h к нулю, получаем

$$\left\| \frac{du}{dt}(t) \right\| \leq \left\| \frac{d^+u}{dt}(0) \right\| = \|(C - I)x\|.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \|u(t) - x\| &= \|u(t) - u(0)\| = \left\| \int_0^t \frac{du}{ds}(s) ds \right\| \leq \\ &\leq \int_0^t \left\| \frac{du}{ds}(s) \right\| ds \leq t \|(C - I)x\|, \end{aligned}$$

что доказывает (2.42).

Утверждается, что $\Phi_n(t) := \varphi_n^2(t)$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \Phi_n(t) &\leq e^{-t}n^2 + \int_0^t e^{-(t-s)}\Phi_{n-1}(s) ds, \quad t \geq 0, \quad n \geq 1, \\ \Phi_0(t) &\leq t^2, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Достаточно доказать первое неравенство. Один из путей сделать это — определить на пространстве $\mathbb{R} \times C[0, t]$ скалярное произведение

$$\langle (\alpha, f), (\beta, g) \rangle := e^{-t}\alpha\beta + \int_0^t e^{-(t-s)}f(s)g(s) ds$$

для $(\alpha, f), (\beta, g) \in \mathbb{R} \times C[0, t]$. Отметим, что $\langle (1, 1), (1, 1) \rangle = 1$. Тогда, используя неравенство Коши — Шварца, получим

$$\begin{aligned} \left(e^{-t}\alpha + \int_0^t e^{-(t-s)}f(s) ds \right)^2 &\leq \langle (1, 1), (\alpha, f) \rangle^2 \leq \\ &\leq \langle (1, 1), (1, 1) \rangle \cdot \langle (\alpha, f), (\alpha, f) \rangle = \\ &= e^{-t}\alpha^2 + \int_0^t e^{-(t-s)}f^2(s) ds. \end{aligned}$$

Теперь (2.43) следует из (2.41). Обозначим далее через $X_n(t)$ последовательность функций

$$\begin{cases} X_n(t) = e^{-t}n^2 + \int_0^t e^{-(t-s)}X_{n-1}(s) ds, & n \geq 1, \quad t \geq 0, \\ X_0(t) = t^2 + t, & t \geq 0. \end{cases} \quad (2.44)$$

Легко проверить, что $\Phi_n(t) \leq X_n(t)$, $t \geq 0$, $n \geq 0$. Наконец, (2.44) эквивалентно

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} X_n(t) + X_n(t) = X_{n-1}(t), & n \geq 1, \quad t > 0, \\ X_n(0) = n^2, & n \geq 1, \\ X_0(t) = t^2 + t, & t \geq 0. \end{cases} \quad (2.45)$$

Заметим, что $X_n(t) = (t-n)^2 + t$, $t \geq 0$, $n \geq 0$, и, таким образом, $\Phi_n(t) \leq \sqrt{(n-t)^2 + t}$. ■

Следующий аппроксимационный результат — простое следствие оценки Чернова.

Предложение 2.13. Пусть A m -диссипативен в X и T_A — соответствующая полугруппа. Тогда для любых $x \in X$ и $s > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, s]} \|T_{A_n}(t)x - T_A(t)x\| = 0,$$

где $A_n := n(T_A(1/n) - I)$.

Замечание. Как отмечалось в § 2.1, это утверждение имеет место для любой нелинейной сжимающей полугруппы T , заданной на замкнутом множестве из X .

Приступим к доказательству нелинейной формулы Чернова. Пусть оператор A m -диссипативен в X , и пусть $F(\lambda)$, $\lambda > 0$, — семейство сжатий, определенное всюду на X . Тогда для любого $\lambda > 0$ оператор $A_{(\lambda)} := \lambda^{-1}(F(\lambda) - I)$ m -диссипативен в силу леммы 2.9 и липшиц-непрерывен. Поэтому операторы $E_h^{A_{(\lambda)}}$ корректно определены при $h > 0$.

Теорема 2.14. Предположим, что

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \|E_h^{A_{(\lambda)}}x - E_h^A x\| = 0 \quad (2.46)$$

для некоторого $h > 0$ и любого $x \in X$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, s]} \left\| F\left(\frac{t}{n}\right)^n x - T_A(t)x \right\| = 0$$

для любых $s > 0$ и $x \in \overline{\mathcal{D}(A)}$.

Доказательство. Пусть $x \in \overline{\mathcal{D}(A)}$, $s > 0$ и $t \in [0, s]$. Для $h > 0$ положим $y := E_h^A x$ и $y_\lambda := E_h^{A_{(\lambda)}} x$. Тогда

$$\begin{aligned} \left\| F\left(\frac{t}{n}\right)^n x - T_A(t)x \right\| &\leq \left\| F\left(\frac{t}{n}\right)^n x - F\left(\frac{t}{n}\right)^n y_\lambda \right\| + \\ &+ \left\| F\left(\frac{t}{n}\right)^n y_\lambda - T_A(t)y \right\| + \|T_A(t)y - T_A(t)x\| \leq \\ &\leq \|x - y_\lambda\| + \|x - y\| + \left\| F\left(\frac{t}{n}\right)^n y_\lambda - T_A(t)y \right\|. \end{aligned}$$

Выберем $\lambda = t/n$; тогда

$$\begin{aligned} & \left\| F\left(\frac{t}{n}\right)^n y_{t/n} - T_A(t)y \right\| \leq \\ & \leq \left\| F\left(\frac{t}{n}\right)^n y_{t/n} - T_{A(t/n)}(t) y_{t/n} \right\| + \left\| T_{A(t/n)}(t) y_{t/n} - T_A(t)y \right\|. \end{aligned}$$

Замечая, что в силу (2.46) и теоремы 2.7 (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_{t/n} - y\| = 0$, выводим из теоремы 2.7, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, s]} \|T_{A(t/n)}(t) y_{t/n} - T_A(t)y\| = 0. \quad (2.47)$$

С другой стороны, используя (2.40) и предложение 2.11, получаем

$$\begin{aligned} & \left\| F\left(\frac{t}{n}\right)^n y_{t/n} - T_{A(t/n)}(t/n) y_{t/n} \right\| \leq \\ & \leq \sqrt{(n - t/(t/n))^2 + t/(t/n)} \cdot \left\| y_{t/n} - F\left(\frac{t}{n}\right) y_{t/n} \right\| = \\ & = \sqrt{n} \left\| y_{t/n} - F\left(\frac{t}{n}\right) y_{t/n} \right\|. \end{aligned}$$

Существует такое $M(h) > 0$, не зависящее от n , что для $t \in [0, s]$

$$\left\| y_{t/n} - F\left(\frac{t}{n}\right) y_{t/n} \right\| \leq \left(\frac{t}{n}\right) M(h). \quad (2.48)$$

Действительно, $E_h^{A(t/n)}x - hA_{(t/n)}E_h^{A(t/n)}x = x$, а значит, $A_{(t/n)}y_{t/n} = h^{-1}(y_{t/n} - x)$ и

$$\|A_{(t/n)}y_{t/n}\| \leq h^{-1}(\|y_{t/n}\| + \|x\|) \leq h^{-1}M =: M(h),$$

где M не зависит от t и n . Тогда

$$\left\| y_{t/n} - F\left(\frac{t}{n}\right) y_{t/n} \right\| = \left(\frac{t}{n}\right) \|A_{(t/n)}y_{t/n}\| \leq \left(\frac{t}{n}\right) M(h),$$

что доказывает (2.48), и, следовательно,

$$\left\| F\left(\frac{t}{n}\right)^n y_{t/n} - T_{A(t/n)}\left(\frac{t}{n}\right) y_{t/n} \right\| \leq M(h) t \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}. \quad (2.49)$$

Из (2.47) и (2.49) получаем, что

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, s]} \|F(t/n)^n y_{t/n} - T_A(t)y\| = 0, \\ & \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left\{ \max_{t \in [0, s]} \|F(t/n)^n x - T_A(t)x\| \right\} \leq 2\|x - y\|. \end{aligned}$$

Наконец, так как $x \in \overline{\mathcal{D}(A)}$ и $\lim_{h \downarrow 0} y = \lim_{h \downarrow 0} E_h^A x = x$, то

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left\{ \max_{t \in [0, s]} \|F(t/n)^n x - T_A(t)x\| \right\} = 0. \quad \blacksquare$$

Приложение. Если X — гильбертово пространство и A m -диссипативен и однозначен, то легко проверяется, что

$$F(\lambda) := \left(I + \frac{1}{2} \lambda A\right) \left(I - \frac{1}{2} \lambda A\right)^{-1}$$

удовлетворяет условиям теоремы 2.14. Это доказывает сходимость схемы Кранка — Николсон в гильбертовом пространстве см. Kato [1978].

2.4. Задача Коши и m -диссипативные операторы

В § 2.2 мы построили нелинейную сжимающую полугруппу T_A , порожденную m -диссипативным оператором A в X . В § 2.3 мы доказали, что эта полугруппа есть «предел» нелинейных сжимающих полугрупп T_{A_h} , порожденных аппроксимациями Иосиды A_h , и что $t \rightarrow u_h(t, x) = T_{A_h}(t)x$ есть единственное решение задачи Коши

$$\frac{du}{dt} = A_h u, \quad t \geq 0,$$

$$u(0) = x.$$

Естественно возникает вопрос: будет ли функция $t \rightarrow u(t, x) = T_A(t)x$ решением задачи

$$\frac{du}{dt} \in Au, \quad t > 0,$$

$$u(0) = x.$$

В линейном случае, когда $\mathcal{D}(A) = X$, $t \rightarrow T_A(t)x$ дифференцируема справа в точке $t = t_0 \geq 0$ тогда и только тогда, когда $T_A(t_0)x \in \mathcal{D}(A)$. В нелинейном случае в произвольном банаховом пространстве имеет место лишь импликация в одну сторону:

Теорема 2.15. Пусть оператор A m -диссипативен в X , T_A — соответствующая полугруппа и $x \in \overline{\mathcal{D}(A)}$. Если функция $t \rightarrow T_A(t)x$ дифференцируема справа в точке $t_0 \geq 0$, то

$$(i) \quad T_A(t_0)x \in \mathcal{D}(A),$$

$$(ii) \quad \frac{d^+}{dt} T(t)x|_{t=t_0} \in AT_A(t_0)x.$$

Для доказательства теоремы 2.15 нам будет необходимо дифференцировать функцию $t \rightarrow \|u(t)\|$. То есть необходимо дифференцировать норму.

Для $x, y \in X$ функция $t \rightarrow \|x + ty\|$ выпукла; значит, функция $t \rightarrow t^{-1}(\|x + ty\| - \|x\|)$ не убывает при $t \neq 0$ и в нуле существуют левый и правый пределы. Мы будем использовать

следующие обозначения. Для $x, y \in X$ и $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$[x, y]_{\lambda} := \lambda^{-1} (\|x + \lambda y\| - \|x\|), \quad (2.50)$$

$$[x, y]_{+} := \inf_{\lambda > 0} [x, y]_{\lambda} = \lim_{\lambda \downarrow 0} [x, y]_{\lambda}, \quad (2.51)$$

$$[x, y]_{-} := \sup_{\lambda < 0} [x, y]_{\lambda} = \lim_{\lambda \uparrow 0} [x, y]_{\lambda}. \quad (2.52)$$

Имеет место такое утверждение (см. Sgandall [1986]).

Предложение 2.16. Пусть $x, y, z \in X$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда

$$(0) [x, y]_{-} = -[x, -y]_{+},$$

$$(1) [\cdot, \cdot]_{+} : X \times X \rightarrow \mathbb{R} \text{ полунепрерывно сверху.}$$

$$(2) [\alpha x, \beta y]_{+} = |\beta| \cdot [x, y]_{+}, \text{ если } \alpha\beta > 0,$$

$$(3) [x, \alpha x + y]_{+} = \alpha \|x\| + [x, y]_{+},$$

$$(4) |[x, y]_{+}| \leq \|y\| \text{ и } [0, y]_{+} = \|y\|,$$

$$(5) -[x, -y]_{+} \leq [x, y]_{+},$$

$$(6) [x, y + z]_{+} \leq [x, y]_{+} + [x, z]_{+},$$

$$(7) |[x, y]_{+} - [x, z]_{+}| \leq \|y - z\|,$$

$$(8) \text{ если функция } u: (t_1, t_2) \rightarrow X \text{ дифференцируема слева в точ-}$$

ке t_2 , то

$$\frac{d^-}{dt} \|u(t)\| \Big|_{t=t_2} = \left[u(t_2), \frac{d^- u}{dt}(t_2) \right]_{-};$$

если функция $u: [t_1, t_2) \rightarrow X$ дифференцируема справа в точке t_1 , то

$$\frac{d^+}{dt} \|u(t)\| \Big|_{t=t_1} = \left[u(t_1), \frac{d^+ u}{dt}(t_1) \right]_{+},$$

(9) $[x, y]_{+} \geq 0$ тогда и только тогда, когда $\|x\| \leq \|x + \lambda y\|$ при всех $\lambda > 0$.

Доказательство. Докажем утверждения (0), (5), (6), (8) и (9), которые понадобятся в дальнейшем.

$$(0) \text{ следует из того, что } [x, -y]_{\lambda} = -[x, y]_{-\lambda}.$$

$$(5) \text{ следует из (0) и неравенства } [x, y]_{-} \leq [x, y]_{+}.$$

$$(6) \text{ следует из неравенства}$$

$$[x, y + z]_{\lambda} \leq [x, y]_{2\lambda} + [x, z]_{2\lambda}, \quad \lambda > 0.$$

$$(8) \left\| \left\| u(t_1) + h \frac{d^+ u}{dt}(t_1) + o(h) \right\| - \left\| u(t_1) - h \frac{d^+ u}{dt}(t_1) \right\| \right\| = o(h) \\ \text{при } h > 0. \text{ Отсюда}$$

$$h^{-1} [\|u(t_1 + h) - u(t_1)\|] = h^{-1} \left[\left\| u(t_1) + h \frac{d^+ u}{dt}(t_1) \right\| - \right. \\ \left. - \|u(t_1)\| + o(h) \right] = \left[u(t_1), \frac{d^+ u}{dt}(t_1) \right]_h + h^{-1} o(h)$$

при $h > 0$. Следовательно, $\frac{d^+}{dt} \|u(t)\| \Big|_{t=t_1}$ существует и равна $\left[u(t_1), \frac{d^+}{dt} u(t_1) \right]_+$. Другое утверждение из (8) доказывается аналогично.

(9) тривиально. ■

В качестве упражнения читатель может вычислить $[\cdot, \cdot]_+$ и $[\cdot, \cdot]_-$ для L_p -норм, $1 \leq p \leq \infty$; см. также дополнение 1. Для доказательства теоремы 2.15 нам понадобятся еще две леммы.

Лемма 2.17. Пусть A есть m -диссипативный оператор в X . Если $x, y \in X$ удовлетворяют условию

$$[x - u, v - y]_+ \geq 0 \text{ при всех } [u, v] \in A, \quad (2.53)$$

то $x = E_1^A(x - y) \in \mathcal{D}(A)$ и $A_1(x - y) = y \in Ax$.

Доказательство. Докажем, что $E_1^A(x - y) \in \mathcal{D}(A)$ и $A_1(x - y) \in AE_1^A(x - y)$. Возьмем в (2.53) $u = E_1^A(x - y)$ и $v = A_1(x - y)$. Тогда

$$[x - E_1^A(x - y), A_1(x - y) - y]_+ \geq [x - E_1^A(x - y), A_1(x - y) - y]_+ \geq 0.$$

Отсюда следует, что

$$\|x - E_1^A(x - y) + A_1(x - y) - y\| \geq \|x - E_1^A(x - y)\|.$$

Имеем $x - y = E_1^A(x - y) - A_1(x - y)$ и, значит, $\|x - E_1^A(x - y)\| = 0$, $x = E_1^A(x - y)$ и $y = A_1(x - y)$, так как $I = E_1^A - A_1$. ■

Лемма 2.18. Пусть A m -диссипативен в X . Тогда при любых $z \in X$, $\lambda, \mu > 0$

$$(A_\lambda)_\mu x = A_{\lambda+\mu} x, \quad (2.54)$$

$$\lim_{\mu \downarrow 0} (A_\lambda)_\mu x = A_\lambda x. \quad (2.55)$$

Доказательство. (i) Заметим, что если $[\xi, \eta] \in A$ и $v > 0$, то $\xi = E_v^A(\xi - v\eta)$ и $\eta = A_v(\xi - v\eta)$. Положим $y := (A_\lambda)_\mu x$. Тогда $y = \mu^{-1}(z - x)$, где z удовлетворяет уравнению $z - \mu A_\lambda z = x$, и, следовательно, $y = A_\lambda z$. Кроме того, $A_\lambda z = \lambda^{-1}(w - z)$, где w таково, что $w - \lambda A w \ni z$. Таким образом, мы получаем, что $x = z - \mu y = w - \lambda A_\lambda z - \mu y = w - (\lambda + \mu)y$. Так как $w \in \mathcal{D}(A)$, то $y = A_\lambda z \in AE_\lambda^A z = Aw$, откуда $y = A_{\lambda+\mu}(w - (\lambda + \mu)y) = A_{\lambda+\mu} x$.

(ii) $(A_\lambda)_\mu x = A_\lambda E_\mu^{A_\lambda} x$. A_λ липшиц-непрерывен и

$$\|E_\mu^{A_\lambda} x - x\| = \mu \|(A_\lambda)_\mu x\| \leq \mu \|A_\lambda x\| = \mu \|A_\lambda x\|$$

в силу (2.16). Поэтому $\lim_{\mu \downarrow 0} (A_\lambda)_\mu x = A_\lambda x$. ■

Доказательство теоремы 2.15. Пусть $A_h, h > 0$, — аппроксимация Иосиды оператора A , а T_{A_h} — соответствующая полугруппа. Мы знаем, что функция $t \rightarrow u_h(t) := T_{A_h}(t)x_0$ принадлежит $C^1([0, \infty); X)$ для любого $x_0 \in X$ и удовлетворяет условиям $du_h/dt = A_h u_h, t \geq 0$, и $u_h(0) = x_0$. Так как A_h диссипативен (см. предложение 2.8), то

$$\| (u_h(t) - x) - \lambda (A_h u_h(t) - A_h x) \| \geq \| u_h(t) - x \|$$

для всех $t \geq 0, \lambda > 0$ и $x \in X$. Поэтому $[u_h(t) - x, A_h x - A_h u_h(t)]_\lambda \geq 0$ для любого $\lambda > 0$. Кроме того, $A_h u_h(t) = (du_h/dt)(t)$ для любого $t > 0$, и, значит,

$$\left[u_h(t) - x, A_h x - \frac{d^- u_h}{dt}(t) \right]_\lambda \geq 0$$

для любых $\lambda > 0, t > 0, x \in X$. Взяв инфимум по $\lambda > 0$, получаем

$$\left[u_h(t) - x, A_h x - \frac{d^- u_h}{dt}(t) \right]_+ \geq 0$$

при всех $t > 0$ и $x \in X$. Используя предложение 2.16 (6), получаем, что

$$-\left[u_h(t) - x, -\frac{d^- u_h}{dt}(t) \right]_+ \leq [u_h(t) - x, A_h x]_+$$

при всех $t > 0$ и $x \in X$. Пользуясь предложениями 2.16(0) и 2.16(8) и дифференцируемостью u_h , для всех $x \in X$ имеем

$$\frac{d^-}{dt} \| u_h(t) - x \| \leq [u_h(t) - x, A_h x]_+, \quad t > 0$$

и

$$\frac{d^-}{dt} \| u_h(t) - x \| \leq [u_h(t) - x, A_h x]_\lambda, \quad \lambda > 0.$$

Интегрируя от s до t для $0 \leq s < t$, при $h > 0, x \in X, \lambda > 0$ получим

$$\| u_h(t) - x \| \leq \| u_h(s) - x \| + \int_s^t [u_h(\tau) - x, A_h x]_\lambda d\tau.$$

Заменим x на $E_1^{A_h} \xi$ с $\xi \in X$. Тогда (см. (2.54))

$$A_h x = A_h E_1^{A_h} \xi = (A_h)_1 \xi = (A_1)_h \xi.$$

Переходя к пределу при $h \downarrow 0$ и пользуясь (2.55), получаем

$$\| u(t) - E_1^A \xi \| \leq \| u(s) - E_1^A \xi \| + \int_s^t [u(\tau) - E_1^A \xi, A_1 \xi]_\lambda d\tau$$

при всех $\xi \in X$, $0 \leq s < t$. Если функция $t \rightarrow T_A(t)$ дифференцируема справа в точке t_0 , то из оценки

$$\|u(t_0+h) - E_1^A \xi\| - \|u(t_0) - E_1^A \xi\| \leq \int_{t_0}^{t_0+h} [u(\tau) - E_1^A \xi, A_1 \xi]_\lambda d\tau$$

при $h > 0$ следует, что

$$\frac{d^+}{dt} \|u(t_0) - E_1^A \xi\| \Big|_{t=t_0} \leq [u(t_0) - E_1^A \xi, A_1 \xi]_\lambda$$

для любых $\lambda > 0$ и $\xi \in X$. Из предложения 2.16(8) вытекает, что

$$\left[u(t_0) - E_1^A \xi, \frac{d^+}{dt} u(t_0) \right]_+ \leq [u(t_0) - E_1^A \xi, A_1 \xi]_+$$

для любого $\xi \in X$. Теперь из предложения 2.16(6) получаем, что при любом $\xi \in X$

$$\left[u(t_0) - E_1^A \xi, A_1 \xi - \frac{d^+}{dt} u(t_0) \right]_+ \geq 0.$$

Далее для $[u, v] \in A$ положим $\xi := u - v$. Тогда $E_1^A \xi = u$ и $A_1 \xi = v$ и, следовательно,

$$\left[u(t_0) - u, v - \frac{d^+}{dt} u(t_0) \right]_+ \geq 0$$

для любых $[u, v] \in A$. Применив лемму 2.17, получаем

$$u(t_0) \in \mathcal{D}(A) \quad \text{и} \quad \frac{d^+}{dt} u(t_0) \in Ax.$$

Это завершает доказательство теоремы. ■

Замечание. Если $x \in \mathcal{D}(A)$, то, как видно из (2.12), отображение $t \rightarrow T_A(t)x$ липшиц-непрерывно. Отсюда вытекает, что если X обладает свойством Радона — Никодима (в частности, если X рефлексивно), то $t \rightarrow T_A(t)x$ дифференцируемо п. в. на $[0, \infty)$, откуда следует, что

$$\frac{d^+ u}{dt}(t) \in Au(t)$$

п. в. на $[0, \infty)$, где $u(t) := T_A(t)x$. Если X — гильбертово пространство, то

$$\frac{d^+ u}{dt}(t) \in Au(t)$$

всюду на $[0, \infty)$ (см. Brezis [1973]). Кроме того,

$$\frac{d^+ u}{dt}(t) = A^0 u(t),$$

где A^0x обозначает элемент из Ax с минимальной нормой. Однако во многих интересных случаях X не обладает свойством Радона—Никодима (например, если $X = L_1(\Omega)$, см. гл. 4) и дифференцируемость u не следует из общей теории.

2.5. Квазисжимающие полугруппы

В этом коротком параграфе мы вновь сформулируем без доказательства основные теоремы предыдущих трех параграфов в случае, когда оператор $A \subset X \times X$ не обязательно m -диссипативен, однако $A - \omega I$ является m -диссипативным при некотором $\omega > 0$. Назовем такой оператор *квази- m -диссипативным* в X . Везде далее будем считать, что ω — фиксированное положительное вещественное число. Если оператор $A - \omega I$ m -диссипативен, то легко проверить, что $\mathcal{R}(I - hA) = X$ при $0 < h < \omega^{-1}$. Кроме того, $(I - hA)^{-1}$ есть график оператора при $h \in (0, \omega^{-1})$ и $\mathcal{R}(I - hA)^{-1} = \mathcal{D}(A)$.

Теорема 2.19. Пусть оператор $A - \omega I$ m -диссипативен. Тогда для любых $t \geq 0$ и $x \in \overline{\mathcal{D}(A)}$ последовательность $\{(I - tA/n)^{-n}x\}_{n > t\omega}$ является в X последовательностью Коши. Ее предел, который мы обозначим $T_A(t)x$, принадлежит $\overline{\mathcal{D}(A)}$. Отображение $T_A(t): \overline{\mathcal{D}(A)} \rightarrow \overline{\mathcal{D}(A)}$ удовлетворяет условиям

$$T_A(t+s)x = T_A(t)T_A(s)x, \quad t, s \geq 0, \quad x \in \overline{\mathcal{D}(A)}, \quad (2.56)$$

$$T_A(0) = I|_{\overline{\mathcal{D}(A)}}, \quad (2.57)$$

$$\|T_A(t)x - T_A(t)y\| \leq e^{\omega t} \|x - y\|, \quad t \geq 0, \quad x, y \in \overline{\mathcal{D}(A)}, \quad (2.58)$$

$$t \rightarrow T_A(t)x \text{ непрерывно на } [0, \infty) \text{ при любом } x \in \overline{\mathcal{D}(A)}. \quad (2.59)$$

Кроме того, сходимость последовательности $\{(I - tA/n)^{-n}x\}$ равномерна на любом компакте.

Замечание. Полугруппа $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, удовлетворяющая условиям (2.58) и (2.59), иногда называется *квазисжимающей*.

Полугруппа T_A , определенная в теореме 2.19, «устойчива по A » в следующем смысле.

Теорема 2.20. Пусть операторы $A - \omega I$ и $A_n - \omega I$, $n = 1, 2, \dots$, m -диссипативны при некотором $\omega > 0$.

(i) Если при некотором $h_0 \in (0, \omega^{-1})$ и любом $y \in X$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(I - h_0 A_n)^{-1}y - (I - h_0 A)^{-1}y\| = 0, \quad (2.60)$$

то (2.60) имеет место для любых $h \in (0, \omega^{-1})$ и $y \in X$.

(ii) Если при некотором $h_0 \in (0, \omega^{-1})$ и любом $y \in X$ равенство (2.60) имеет место и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0, \text{ где } x \in \overline{\mathcal{D}(A)}, x_n \in \overline{\mathcal{D}(A_n)},$$

то для каждого $s > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, s]} \|T_{A_n}(t)x_n - T_A(t)x\| = 0.$$

Пусть $A - \omega I$ m -диссипативен в X . Тогда A_h , определенный в (2.7) для $h \in (0, \omega^{-1})$, липшиц-непрерывен, $A_h - \omega I$ m -диссипативен и

$$\lim_{h \downarrow 0} \|(I - \lambda A_h)^{-1}y\| = 0$$

при любых $y \in X$ и $\lambda \in (0, \omega^{-1})$. По теореме 2.20

$$\lim_{h \downarrow 0} \max_{t \in [0, s]} \|T_{A_h}(t)x - T_A(t)x\| = 0$$

для всех $x \in \overline{\mathcal{D}(A)}$. Имеет место теорема, аналогичная теореме 2.15:

Теорема 2.21. Пусть $A - \omega I$ m -диссипативен при некотором $\omega > 0$. Пусть $T_A -$ полугруппа, определенная в теореме 2.19. Если $x \in \overline{\mathcal{D}(A)}$ и $t \rightarrow T_A(t)x$ дифференцируема справа в точке $t_0 \geq 0$, то

$$(i) T_A(t_0)x \in \mathcal{D}(A),$$

$$(ii) \left. \frac{d^+}{dt} T_A(t)x \right|_{t=t_0} \in AT(t_0)x.$$

Наконец, приведем последнюю теорему этого параграфа.

Теорема 2.22. Пусть $\omega > 0$ и $F(\lambda): X \rightarrow X$ удовлетворяет условию

$$\|F(\lambda)x - F(\lambda)y\| \leq e^{\omega\lambda} \|x - y\|, \quad x, y \in X, \quad \lambda \in (0, \lambda_0). \quad (2.61)$$

Тогда отображение $A_{(\lambda)} := \lambda^{-1}(F(\lambda) - I)$, $\lambda \in (0, \lambda_0)$, липшиц-непрерывно и оператор $A_{(\lambda)} - \lambda^{-1}(e^{\omega\lambda} - 1)I$ m -диссипативен. Если, кроме того,

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \|(I - h_0 A_{(\lambda)})^{-1}y - (I - h_0 A)^{-1}y\| = 0$$

при каждом $y \in X$, некотором $h_0 \in (0, \lambda_0(e^{\omega\lambda_0} - 1)^{-1})$ и некотором операторе A , для которого $A - \omega I$ m -диссипативен, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, s]} \left\| F\left(\frac{t}{n}\right)^n x - T_A(t)x \right\| = 0$$

для любых $s > 0$ и $x \in \overline{\mathcal{D}(A)}$, где $T_A -$ полугруппа, определенная в теореме 2.19.

Упражнение. Сформулировать и доказать аналоги (2.11) и (2.12) для случая, когда $A - \omega I$ m -диссипативен.

Глава 3

Порождение линейных полугрупп

3.1. C_0 -полугруппы линейных сжатий

Цель этого параграфа — доказать теоремы Хилле — Йосиды и Троттера — Невё — Като, о которых шла речь в § 2.1. Мы по-прежнему будем использовать обозначения $C(X)$ и $D(X)$, введенные в § 2.1.

Теорема 3.1. Пусть $T(t): X \rightarrow X$, $t \geq 0$, есть C_0 -полугруппа (линейных) сжатий. Тогда A_T , генератор полугруппы $T(t)$, определенный посредством (2.0), удовлетворяет следующим условиям:

(i) A_T m -диссипативен и плотно определен,

(ii) $(\omega I - A_T)^{-1} y = \int_0^\infty e^{-\omega t} T(t)y \, dt$ для всех $\omega > 0$ и $y \in X$.

Доказательство. Пусть $T(t) \in C(X)$. Для $h > 0$ определим оператор

$$A_{T,h} := h^{-1}(T(h) - I). \quad (3.1)$$

$A_{T,h}$ ограничен, $\|A_{T,h}\| \leq 2h^{-1}$ и $A_{T,h}$ m -диссипативен в силу леммы 2.9. Кроме того, $x \in \mathcal{D}(A_T)$ тогда и только тогда, когда $\lim_{h \downarrow 0} A_{T,h}x$ существует. Для $t > 0$ и $x \in X$ определим оператор

$$R_{T,t}x := t^{-1} \int_0^t T(s)x \, ds. \quad (3.2)$$

Легко видеть, что $R_{T,t}$ ограничен в X , $\|R_{T,t}\| \leq 1$ и $\lim_{t \downarrow 0} R_{T,t}x = x$ при всех $x \in X$. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3.2. (i) Для $h, t > 0$

$$A_{T,h}R_{T,t} = R_{T,t}A_{T,h}, \quad (3.3)$$

$$A_{T,h}R_{T,t} = A_{T,t}R_{T,h}. \quad (3.4)$$

(ii) Для $t > 0$, $x \in X$ справедливо включение $R_{T,t}x \in \mathcal{D}(A_T)$ и

$$A_T R_{T,t}x = A_{T,t}x. \quad (3.5)$$

Для $h > 0$ и $x \in \mathcal{D}(A_T)$

$$A_{T,h}x = R_{T,h}A_Tx \text{ и} \quad (3.6)$$

$[x, y] \in A_T \Leftrightarrow A_{T,h}x = R_{T,h}y$ при всех $h > 0$.

Доказательство. (3.3). При $x \in X$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} A_{T,h}R_{T,t}x &= h^{-1}(T(h) - I)t^{-1} \int_0^t T(\tau)x d\tau = \\ &= t^{-1} \int_0^t T(\tau)h^{-1}(T(h) - I)x d\tau = R_{T,t}A_{T,h}x. \end{aligned}$$

(3.4).

$$\begin{aligned} htA_{T,h}R_{T,t}x &= (T(h) - I) \int_0^t T(\tau)x d\tau = \\ &= \int_0^t (T(\tau+h)x - T(\tau)x) d\tau = \\ &= \int_h^{t+h} T(\tau)x d\tau - \int_0^t T(\tau)x d\tau = \\ &= \int_t^{t+h} T(\tau)x d\tau - \int_0^h T(\tau)x d\tau = \\ &= \int_0^h (T(\tau+t)x - T(\tau)x) d\tau = \\ &= \int_0^h (T(t) - I)T(\tau)x d\tau = \\ &= (T(t) - I) \int_0^h T(\tau)x d\tau = htA_{T,t}R_{T,h}x. \end{aligned}$$

(3.5). Из (3.4) получаем

$$\lim_{h \downarrow 0} A_{T,h}R_{T,t}x = A_{T,t}(\lim_{h \downarrow 0} R_{T,h}x) = A_{T,t}x.$$

(3.6) проверяется аналогично. ■

Так как $A_{T,h}$ диссипативен и $A_Tx = \lim_{h \downarrow 0} A_{T,h}x$ для $x \in \mathcal{D}(A_T)$, то $\|x\| \leq \lim_{h \downarrow 0} \|x - \lambda A_{T,h}x\| = \|x - \lambda A_Tx\|$ для всех $\lambda > 0$ и $x \in \mathcal{D}(A_T)$. Следовательно, A_T диссипативен.

Для $x \in X$ в силу леммы 3.2 $R_{T,t}x \in \mathcal{D}(A_T)$ и $\lim_{t \rightarrow 0} R_{T,t}x = x$, откуда следует, что $\mathcal{D}(A_T)$ плотно в X . Докажем далее, что A_T замкнут. Пусть последовательность $[x_n, y_n] \in A_T$ такова, что $\lim_{n \rightarrow \infty} [x_n, y_n] = [x, y]$, где $[x, y] \in X \times X$. Используя (3.6), получаем

$$A_{T,h}x_n = R_{T,h}A_Tx_n = R_{T,h}y_n,$$

и, значит,

$$A_{T,h}x = R_{T,h}y.$$

Поэтому $\lim_{h \rightarrow 0} A_{T,h}x = y$ и $[x, y] \in A_T$. Остается показать, что при всех $\omega > 0$ и $y \in X$ элемент

$$x_\omega := \int_0^\infty e^{-\omega t} T(t) y dt$$

принадлежит $\mathcal{D}(A_T)$ и $(\omega I - A_T)x_\omega = y$. Для $y \in X$ определим

$$v(t) := \int_0^t T(\tau) y d\tau.$$

Тогда очевидно, что $v \in C^1([0, \infty); X)$, $dv/dt(t) = T(t)y$ и в силу (3.5)

$$A_T v(t) = A_T t R_{T,t} y = t A_{T,t} y = T(t)y - y.$$

Следовательно,

$$\frac{dv}{dt}(t) = A_T v(t) + y, \quad t \geq 0.$$

Полагая $T_\omega(t) := e^{-\omega t} T(t)$, $\omega > 0$, $t \geq 0$ и $v_\omega(t) := \int_0^t T_\omega(\tau) y d\tau$,

получаем

$$\frac{dv_\omega}{dt}(t) = A_{T_\omega} v_\omega(t) + y,$$

откуда

$$\omega v_\omega(t) + \frac{dv_\omega}{dt}(t) = A_{T_\omega} v_\omega(t) + y, \quad t \geq 0, \quad (3.7)$$

поскольку $A_{T_\omega} = A_T - \omega I$. Ясно, что $x_\omega = \lim_{t \rightarrow \infty} v_\omega(t)$ существует и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dv_\omega}{dt}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\omega t} T(t) y = 0.$$

Так как A_T замкнут, то из (3.7) следует, что $x_\omega \in \mathcal{D}(A_T)$ и $(\omega I - A_T)x_\omega = y$. ■

В следующем предложении мы докажем, что если $T \in C(X)$ и A_T — генератор T , то $t \rightarrow u(t) := T(t)x$ есть единственное решение задачи Коши

$$\frac{du}{dt} = A_T u, \quad t > 0,$$

$$u(0) = x$$

при $x \in \mathcal{D}(A_T)$.

Предложение 3.3. (i) Пусть $T \in C(X)$ и A_T — генератор этой полугруппы. Если $u(t) := T(t)x$ для $x \in \mathcal{D}(A_T)$, $t \geq 0$, то $u \in C^1([0, \infty); X)$, $u(t) \in \mathcal{D}(A_T)$ при $t \geq 0$ и $\frac{du}{dt}(t) = A_T u(t)$ при $t > 0$. Кроме того,

$$A_T T(t)x = T(t)A_T x, \quad t \geq 0. \quad (3.8)$$

(ii) Пусть A диссипативен, $u \in C([0, \infty); X) \cap C^1((0, \infty); X)$ и

$$\begin{cases} u(t) \in \mathcal{D}(A), & t > 0, \\ \frac{du}{dt}(t) = Au(t), & t > 0, \\ u(0) = x & \text{при некотором } x \in X. \end{cases}$$

Тогда $\|u(t)\| \leq \|x\|$ при всех $t > 0$. В частности, если $x = 0$, то $u(t) = 0$ при всех $t > 0$.

Доказательство. (i) Для $h > 0$, $t \geq 0$, $x \in \mathcal{D}(A_T)$

$$h^{-1}[u(t+h) - u(t)] = h^{-1}[T(t+h)x - T(t)x] = T(t)A_{T,h}x.$$

Так как $x \in \mathcal{D}(A_T)$ и оператор $T(t)$ непрерывен, то

$$\frac{d^+}{dt} u(t) = T(t)A_T(x).$$

Аналогично для $t > 0$, $h \in (0, t)$ и $x \in \mathcal{D}(A_T)$

$$\begin{aligned} h^{-1}[u(t) - u(t-h)] &= h^{-1}[T(t-h)T(h)x - T(t-h)x] = \\ &= T(t-h)A_{T,h}x. \end{aligned}$$

Ясно, что

$$\lim_{h \downarrow 0} T(t-h)A_{T,h}x = T(t)A_T x,$$

откуда

$$\frac{d^-}{dt} u(t) = T(t)A_T x = \frac{d^+}{dt} u(t), \quad t > 0.$$

Кроме того, при $h > 0$ и $t \geq 0$ имеем

$$T(t)A_{T,h} = A_{T,h}T(t),$$

а из этого следует, что $T(t)x \in \mathcal{D}(A_T)$ при $x \in \mathcal{D}(A_T)$ и

$$A_T T(t)x = T(t)A_T x,$$

что доказывает (3.8). Наконец, так как $t \rightarrow T(t)A_T x$ принадлежит $C([0, \infty); X)$, то функция $t \rightarrow u'(t) = T(t)A_T x$ также непрерывна на $[0, \infty)$ и $u \in C^1([0, \infty); X)$.

(ii) Так как A диссипативен и $u(t) \in \mathcal{D}(A)$, $t > 0$, то

$$[u(t), -Au(t)]_+ \geq 0 \text{ при } t > 0$$

в силу предложения 2.16(9). Отсюда, опять же в силу предложения 2.16, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|u(t)\| &= \left[u(t), \frac{du}{dt}(t) \right]_- = - \left[u(t), -\frac{du}{dt}(t) \right]_+ = \\ &= -[u(t), -Au(t)]_+ \leq 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $t \rightarrow \|u(t)\|$ не возрастает на $[0, \infty)$, и так как функция $t \rightarrow \|u(t)\|$ непрерывна на $[0, \infty)$, то $\|u(t)\| \leq \|u(0)\| = \|x\|$. ■

Как и в § 2.1, обозначим через $\mathcal{G}: C(X) \rightarrow D(X)$ отображение, определенное равенством $\mathcal{G}(T) = A_T$.

Теорема 3.4. *Отображение $\mathcal{G}: C(X) \rightarrow D(X)$ есть биекция. Для любого $A \in D(X)$ $\mathcal{G}^{-1}(A) = T_A$, где T_A — полугруппа, соответствующая оператору A согласно теореме 2.3. Кроме того, последовательность $\{T_n\} \subset C(X)$ сходится к T в $C(X)$ тогда и только тогда, когда последовательность $\{\mathcal{G}(T_n)\} \subset D(X)$ сходится к $\mathcal{G}(T)$ в $D(X)$.*

Доказательство. Инъективность $\mathcal{G}$. Пусть $T_1, T_2 \in C(X)$ таковы, что $A_{T_1} = A_{T_2} = A \in D(X)$. Из предложения 3.3 следует, что $T_1(t)x = T_2(t)x$ при любых $t \geq 0$ и $x \in \mathcal{D}(A)$. А так как $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$ и операторы $T_1(t)$ и $T_2(t)$ ограничены, это верно и для всего X .

Сюръективность $\mathcal{G}$ и равенство $\mathcal{G}(T_A) = A$. Пусть $A \in D(X)$ и T_A — соответствующая полугруппа, определенная в теореме 2.3. Тогда $T_A \in C(X)$. (Отметим, что $T_A(t)$ — линейные операторы, определенные на $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$.) Нам необходимо доказать, что $\mathcal{G}(T_A) = A$. Положим $u(t) = T_A(t)x$ для $t \geq 0$ и $x \in \mathcal{D}(B)$, где $B = \mathcal{G}(T_A)$. Производная $(d^+u/dt)(0)$ существует по определению, и, более того, $(d^+u/dt)(0) = Bx$. По теореме 2.15 $x \in \mathcal{D}(A)$ и $(d^+u/dt)(0) = Ax$. Значит, $B \subseteq A$, но B m -диссипативен и A диссипативен, а потому (см. предложение 3.8 (i)) $B = A$.

Свойство непрерывности отображений $\mathcal{G}$ и $\mathcal{G}^{-1}$. Если $A_n \rightarrow A$ в $D(X)$, то $\mathcal{G}^{-1}(A_n) = T_{A_n} \rightarrow T_A = \mathcal{G}^{-1}(A)$ в $C(X)$ согласно теореме 2.7. Если $T_n \rightarrow T$ в $C(X)$, т. е. выполнено условие (2.4),

то по теореме 3.1(ii) имеем

$$\|(\omega I - A_{T_n})^{-1} y - (\omega I - A_T)^{-1} y\| \leq \int_0^{\infty} e^{-\omega t} \|T_n(t)y - T(t)y\| dt$$

при всех $y \in X$ и $\omega > 0$. Пусть $\varepsilon > 0$: Тогда можно найти такое $s > 0$, что

$$\int_s^{\infty} e^{-\omega t} \|T_n(t)y - T(t)y\| dt \leq \int_s^{\infty} 2e^{-\omega t} \|y\| dt < \varepsilon/2.$$

В силу (2.4) существует такое $N \in \mathbb{Z}^+$, что при $n > N$

$$\int_0^s e^{-\omega t} \|T_n(t)y - T(t)y\| dt < \varepsilon/2.$$

Отсюда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(\omega I - A_{T_n})^{-1} y - (\omega I - A_T)^{-1} y\| = 0.$$

Отметим, наконец, что для $A \in D(X)$ при $h > 0$ выполняется равенство $E_h^A = h^{-1}(h^{-1}I - A)^{-1}$. ■

3.2. C_0 -полугруппы ограниченных линейных операторов

В этом параграфе мы распространим теоремы § 3.1 на класс C_0 -полугрупп ограниченных линейных операторов.

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — вещественное нормированное пространство. Однопараметрическая полугруппа линейных операторов в $(X, \|\cdot\|)$ — это семейство линейных операторов $T(t): X \rightarrow X$, $t \geq 0$, удовлетворяющее условиям

$$\begin{cases} T(t+s) = T(t)T(s), & t, s \geq 0, \\ T(0) = I. \end{cases} \quad (3.9)$$

Справедливо утверждение: либо

$$\sup_{t \in [0, s]} \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} \|T(t)x\| = \infty \text{ при всех } s > 0, \quad (3.10)$$

либо

$$\sup_{t \in [0, s]} \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} \|T(t)x\| < \infty \text{ при всех } s > 0. \quad (3.11)$$

Действительно, если (3.10) не выполняется, то существуют такие $s_0 > 0$ и $M_0 > 0$, что $\|T(t)\| \leq M_0$ при $t \in [0, s_0]$. Очевидно,

что $M_0 > 1$ и для $n \geq 1$

$$\sup_{t \in [0, ns_0]} \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} \|T(t)x\| = \max_{1 \leq k \leq n} \sup_{t \in [0, s_0]} \|T(kt)\| \leq M_0^n.$$

Мы будем интересоваться только полугруппами, удовлетворяющими условию (3.11). Для этих полугрупп легко доказать, что существуют такие $M \geq 1$ и $\omega \in \mathbb{R}$, что

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad t \geq 0. \quad (3.12)$$

Полугруппа, удовлетворяющая условию (3.12), имеет единственное непрерывное расширение на пополнение пространства $(X, \|\cdot\|)$, если X не полно, и, более того, это расширение также есть полугруппа, удовлетворяющая (3.12). Поэтому мы будем предполагать, что $(X, \|\cdot\|)$ — вещественное банахово пространство.

Пусть $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ — однопараметрическая полугруппа линейных операторов в вещественном банаховом пространстве $(X, \|\cdot\|)$, удовлетворяющая (3.12). Если элемент $x \in X$ таков, что отображение $t \rightarrow T(t)x$ непрерывно справа в нуле, то $t \rightarrow T(t)x \in C([0, \infty); X)$ и потому

$$X_0 := \{x \in X: \lim_{t \downarrow 0} T(t)x = x\} \quad (3.13)$$

есть подпространство, инвариантное относительно $T(t)$ при всех $t \geq 0$. Оно также замкнуто в X , и, значит, $T(t)|_{X_0}: X_0 \rightarrow X_0$ есть C_0 -полугруппа ограниченных линейных операторов в X_0 , удовлетворяющая (3.12). Может оказаться, что $X_0 = \{0\}$. Мы будем предполагать, что $X_0 = X$. Наконец, заметим, что если $\{T(t)\}_{t \geq 0}: X \rightarrow X$ есть C_0 -полугруппа ограниченных линейных операторов в банаховом пространстве X , то, как следует из принципа равномерной ограниченности, T удовлетворяет (3.11), а значит, и (3.12). Поэтому если $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ — однопараметрическая полугруппа линейных ограниченных операторов в банаховом пространстве X , удовлетворяющая условию (3.10), то $X_0 \neq X$, где X_0 определено в (3.13). Обозначим через $S(M; \omega)$ множество всех C_0 -полугрупп ограниченных линейных операторов в вещественном банаховом пространстве $(X, \|\cdot\|)$, удовлетворяющих (3.12). Как и в § 3.1, через A_T обозначим генератор полугруппы $T \in S(M; \omega)$. Справедливо следующее обобщение теоремы 3.1.

Теорема 3.5. Пусть $T(t): X \rightarrow X$, $t \geq 0$, есть C_0 -полугруппа ограниченных линейных операторов на $(X, \|\cdot\|)$, удовлетворяющая (3.12). Тогда A_T — генератор T , определенный в (2.0), — обладает следующими свойствами:

(i) $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$.

(ii) При любом $\lambda > \omega$ отображение $\lambda I - A_T: \mathcal{D}(A_T) \rightarrow X$ есть биекция и $(\lambda I - A_T)^{-1}: X \rightarrow X$ ограничено.

(iii) При всех $\lambda > \omega$ и $n \in \mathbb{Z}^+$

$$\|(\lambda I - A_T)^{-n}\| \leq M(\lambda - \omega)^{-n}. \quad (3.14)$$

(iv) При всех $\lambda > \omega$ и $y \in X$

$$(\lambda I - A_T)^{-1} y = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) y dt. \quad (3.15)$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что если T удовлетворяет (3.12), то $T_\omega(t) := e^{-\omega t} T(t)$ удовлетворяет оценке $\|T_\omega(t)\| \leq M, t \geq 0$, и $A_{T_\omega} = A_T - \omega I$. Для всех $x \in X$ определим

$$\|x\| := \sup_{t \geq 0} \|T_\omega(t)x\|. \quad (3.16)$$

Тогда $\|\cdot\|$ есть норма на X и

$$\|x\| \leq \|x\| \leq M \|x\|, \quad x \in X. \quad (3.17)$$

Таким образом, $\|\cdot\|$ — эквивалентная норма на X , и

$$\|T_\omega(t)\| = \sup_{s \geq 0} \|T_\omega(s) T_\omega(t)x\| = \sup_{s \geq t} \|T_\omega(s)x\| \leq \|x\|.$$

Значит, T_ω есть C_0 -полугруппа сжатий в $(X, \|\cdot\|)$. Ясно, что $\mathcal{D}(A_{T_\omega})$ и A_{T_ω} , определенные посредством (2.0) в $(X, \|\cdot\|)$, состоят из тех же самых и в $(X, \|\cdot\|)$. Следовательно, $\overline{\mathcal{D}(A_{T_\omega})} = X$, поскольку $\overline{\mathcal{D}(A_T)} = X$ в силу теоремы 3.1 (i). Это доказывает (i). Применяя снова теорему 3.1 (i), получим, что

$$(\mu I - A_{T_\omega}): \mathcal{D}(A_{T_\omega}) = \mathcal{D}(A_T) \rightarrow X$$

есть биекция для $\mu > 0$ и оператор $(\mu I - A_{T_\omega})^{-1}$ ограничен. Более того, при всех $x \in X$ и $n \in \mathbb{Z}^+$

$$\|(\mu I - A_{T_\omega})^{-n} x\| \leq \mu^{-n} \|x\|.$$

Так как $A_{T_\omega} = A_T - \omega I$, то

$$\begin{aligned} \|(\lambda I - A_T)^{-n} x\| &\leq \|(\lambda I - A_T)^{-n} x\| \leq (\lambda - \omega)^{-n} \|x\| \leq \\ &\leq M(\lambda - \omega)^{-n} \|x\|, \end{aligned}$$

что доказывает (3.14). Теперь (3.15) непосредственно следует из теоремы 3.1 (ii). ■

Обозначим через $G(M; \omega)$ класс всех линейных плотно определенных операторов A в X , для которых отображение $\lambda I - A: \mathcal{D}(A) \rightarrow X$ является биекцией при $\lambda > \omega$, оператор

$(\lambda I - A)^{-1}: X \rightarrow X$ ограничен и

$$\|(\lambda I - A)^{-n}\| \leq M(\lambda - \omega)^{-n} \quad \text{при } \lambda > \omega \text{ и } n \in \mathbb{Z}^+.$$

По теореме 3.5 мы можем определить отображение $\mathcal{G}_{M, \omega}: S(M; \omega) \rightarrow G(M; \omega)$, положив $\mathcal{G}_{M, \omega}(T) := A_T$ для $T \in S(M; \omega)$. Имеет место следующее обобщение теоремы 3.4.

Теорема 3.6. При всех $M \geq 1$ и $\omega \in \mathbb{R}$

(i) $\mathcal{G}_{M, \omega}: S(M; \omega) \rightarrow G(M; \omega)$ есть биекция.

(ii) Для любого $A \in G(M; \omega)$ и $h > 0$, такого, что $h\omega < 1$, оператор $I - hA: \mathcal{D}(A) \rightarrow X$ является биекцией, $\lim_{n \rightarrow \infty} (I - tA/n)^{-n} x$ существует для всех $x \in X$, $t \geq 0$, и сходимость равномерна на каждом ограниченном t -интервале. Если

$$T_A(t)x := \lim_{n \rightarrow \infty} (I - tA/n)^{-n} x,$$

то $T_A \in S(M; \omega)$.

(iii) $\mathcal{G}_{M, \omega}^{-1}(A) = T_A$ при любом $A \in G(M; \omega)$. Кроме того, $t \mapsto T_A(t)x$, $x \in \mathcal{D}(A)$, есть единственное решение в $C([0, \infty); X) \cap C^1([0, \infty); X)$ задачи Коши

$$\begin{cases} u(t) \in \mathcal{D}(A), & t > 0, \\ \frac{du}{dt}(t) = Au(t), & t > 0, \\ u(0) = x. \end{cases} \quad (3.18)$$

(iv) Если $\{T_n\}$ — последовательность из $S(M; \omega)$ и $T \in S(M; \omega)$, то формула

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, s]} \|T_n(t)x - T(t)x\| = 0 \quad (3.19)$$

имеет место при любых $s > 0$ и $x \in X$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (I - hA_{T_n})^{-1}x = (I - hA_T)^{-1}x \quad (3.20)$$

при любых $x \in X$ и $h > 0$, удовлетворяющих условию $h\omega < 1$.

Доказательство. Докажем сначала (i), (ii), (iii) для $\omega = 0$, $M > 1$.

Инъективность $\mathcal{G}_{M, 0}$. Пусть $T_1, T_2 \in S(M, 0)$ таковы, что $A_{T_1} = A_{T_2} = A \in G(M, 0)$. Пусть $x \in \mathcal{D}(A)$ и $u_i(t) = T_i(t)x$, $t \geq 0$, $i = 1, 2$. Определим

$$\|y\|_i := \sup_{t \geq 0} \|T_i(t)y\| \quad \text{для } y \in X, \quad i = 1, 2.$$

Так как полугруппа T_1 является сжимающей по отношению к норме $\|\cdot\|_1$, то оператор A в силу теоремы 3.1 диссипативен

относительно нормы $\|\cdot\|_1$, и задача (3.18) имеет хотя бы одно решение при $x \in \mathcal{D}(A)$ в силу предложения 3.3. Так как $A = A_{T_1}$, мы получаем, что u_1 есть решение (3.18). Рассуждая аналогично для u_2 , получим, что $T_1(t)x = T_2(t)x$, $t \geq 0$, $x \in \mathcal{D}(A)$. Поскольку $T_1(t)$, $T_2(t)$ ограничены на $\mathcal{D}(A) = X$, то получаем, что $T_1 = T_2$.

Сюръективность $\mathcal{G}_{M,0}$. Пусть $A \in G(M; 0)$. Тогда

$$\|(I - hA)^{-n}\| \leq M \quad \text{при всех } n \in \mathbb{Z}^+ \text{ и } h > 0.$$

Для $x \in X$ и $\mu > 0$ определим

$$\|x\|_\mu := \sup_{n \geq 0} \|(I - \mu A)^{-n} x\|. \quad (3.21)$$

Очевидно, что $\|\cdot\|_\mu$ есть норма на X ,

$$\|x\| \leq \|x\|_\mu \leq M \|x\|, \quad x \in X, \quad (3.22)$$

и

$$\|(I - \mu A)^{-1} x\|_\mu \leq \|x\|_\mu, \quad x \in X. \quad (3.23)$$

Кроме того,

$$\|(I - \lambda A)^{-1} x\|_\mu \leq \|x\|_\mu, \quad x \in X, \quad \lambda > \mu > 0. \quad (3.24)$$

Действительно, для $0 < \mu < \lambda$ имеем

$$(I - \lambda A)^{-1} = (I - \mu A)^{-1} \left[\left(\frac{\mu}{\lambda} \right) I + \left(1 - \frac{\mu}{\lambda} \right) (I - \lambda A)^{-1} \right], \quad (3.25)$$

так как

$$\begin{aligned} (I - \mu A)^{-1} \left[\left(\frac{\mu}{\lambda} \right) I + \left(1 - \frac{\mu}{\lambda} \right) (I - \mu A)^{-1} \right] &= \\ &= (I - \mu A)^{-1} \left[\left(\frac{\mu}{\lambda} \right) (I - \lambda A) + \left(1 - \frac{\mu}{\lambda} \right) I \right] (I - \lambda A)^{-1} = \\ &= (I - \mu A)^{-1} (I - \mu A) (I - \lambda A)^{-1} \end{aligned}$$

с учетом того, что

$$\mathcal{R}[(I - \lambda A)^{-1}] \subseteq \mathcal{D}(A).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|(I - \lambda A)^{-1} x\|_\mu &= \left\| (I - \mu A)^{-1} \left[\left(\frac{\mu}{\lambda} \right) I + \left(1 - \frac{\mu}{\lambda} \right) (I - \lambda A)^{-1} \right] x \right\|_\mu \leq \\ &\leq \frac{\mu}{\lambda} \|x\|_\mu + \left(1 - \frac{\mu}{\lambda} \right) \|(I - \lambda A)^{-1} x\|_\mu, \end{aligned}$$

что доказывает (3.24), откуда, в свою очередь, получаем

$$\|(I - \lambda A)^{-n} x\|_\mu \leq \|x\|_\mu, \quad n \in \mathbb{Z}^+.$$

А из (3.22) вытекает, что

$$\|(I - \lambda A)^{-n} x\| \leq \|x\|_\mu \quad \text{для } \lambda > \mu.$$

Следовательно, $\|x\|_\lambda \leq \|x\|_\mu$ при $\lambda > \mu$. Положим далее

$$|x| := \sup_{\mu > 0} \|x\|_\mu = \lim_{\mu \downarrow 0} \|x\|_\mu \text{ для } x \in X. \quad (3.26)$$

Выражение (3.26) есть норма на X , удовлетворяющая условию

$$\|x\| \leq |x| \leq M \|x\|, \quad x \in X, \quad (3.27)$$

и из (3.24) мы получаем, что

$$|(I - \lambda A)^{-1} x| \leq |x|, \quad \lambda > 0, \quad x \in X. \quad (3.28)$$

Следовательно, A m -диссипативен в $(X, |\cdot|)$ и плотно определен. Кроме того,

$$\|T_A(t)x\| \leq |T_A(t)x| \leq |x| \leq M \|x\|, \quad x \in X, \quad t \geq 0,$$

и $T_A \in S(M; 0)$. Значит, по теореме 3.4 $\mathcal{G}_{M,0}$ сюръективно и (ii)–(iii) следуют из предложения 3.3 и теоремы 3.4.

Если $\omega \neq 0$ и $T \in S(M; \omega)$, то отображение T_ω , определенное формулой

$$T_\omega(t) = e^{-\omega t} T(t), \quad t \geq 0,$$

удовлетворяет условиям $T_\omega \in S(M, 0)$, $A_{T_\omega} = A_T - \omega I$ и $A_{T_\omega} \in G(M; 0)$. Легко видеть, что $\mathcal{G}_{M,\omega}$ инъективно. Обратно, если $A \in G(M; \omega)$, то $A - \omega I \in G(M; 0)$ и $\mathcal{G}_{M,\omega}$ также сюръективно согласно теореме 3.4. Осталось доказать, что если $A \in G(M; \omega)$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(I - \frac{t}{n} A \right)^{-n} x = e^{\omega t} T_{A - \omega I}(t) x, \quad t \geq 0, \quad x \in X,$$

равномерно на каждом ограниченном t -интервале. Имеем

$$\begin{aligned} \left(I - \frac{t}{n} A \right)^{-n} x &= \left[\left(1 - \frac{\omega t}{n} \right) I - \frac{t}{n} (A - \omega I) \right]^{-n} x = \\ &= \left(1 - \frac{\omega t}{n} \right)^{-n} \left[I - \frac{t_n}{n} (A - \omega I) \right]^{-n} x, \end{aligned}$$

где $t_n = (1 - \omega t/n)^{-1} t$. Теперь $B := A - \omega I$ m -диссипативен и плотно определен по отношению к норме $|\cdot|$, введенной в (3.26). Далее из (2.24) получаем для $x \in \mathcal{D}(B)$

$$\begin{aligned} \left\| \left(I - \frac{t}{n} B \right)^{-n} x - \left(I - \frac{t_n}{n} B \right)^{-n} x \right\| &\leq \\ &\leq M \cdot \|Bx\| \sqrt{(t - t_n)^2 + \min(t, t_n) \cdot \frac{t + t_n}{n}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, s]} \left\| \left(I - \frac{t}{n} B \right)^{-n} x - \left(I - \frac{t_n}{n} B \right)^{-n} x \right\| = 0$$

для любого $s > 0$. Отсюда вытекает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, s]} \left\| \left(I - \frac{t}{n} (A - \omega I) \right)^{-n} x - e^{\omega t} T_{A - \omega I}(t) x \right\| = 0$$

для всех $s > 0$, $x \in \mathcal{D}(A)$, а значит, и для всех $x \in \overline{\mathcal{D}(A)} = X$. Это завершает доказательство (i), (ii), (iii).

(iv) Необходимость — простое следствие (3.15). Достаточность и некоторые ее обобщения будут доказаны в теореме 3.32. ■

3.3. Диссипативные операторы

В этом параграфе мы приведем некоторые результаты о диссипативных операторах в вещественном банаховом пространстве.

Предложение 3.7. Пусть оператор $A: \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ диссипативен. Тогда

(i) Если A допускает замыкание, то его замыкание также диссипативно.

(ii) Если $\overline{\mathcal{D}(A)} \cong \mathcal{R}(A)$, в частности если A плотно определен, то A допускает замыкание.

(iii) A замкнут тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}(I - hA)$ замкнута при любом $h > 0$ (или, что то же самое, при некотором $h_0 > 0$).

(iv) $\mathcal{R}(I - h_0 A) = X$ для некоторого $h_0 > 0$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}(I - hA) = X$ при любом $h > 0$, т. е. когда A m -диссипативен.

Доказательство. (i) следует непосредственно из определения диссипативности.

(ii) Пусть $x_n \in \mathcal{D}(A)$, $y \in X$ таковы, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = y$. Необходимо показать, что $y = 0$. Пусть $z \in \mathcal{D}(A)$. Тогда при $h > 0$

$$\|x_n + hz\| \leq \|x_n + hz - hA(x_n + hz)\|,$$

откуда в пределе получаем

$$\|hz\| \leq \|h(z - y) - h^2Az\|.$$

Следовательно, $\|z\| \leq \|z - y - hAz\|$, и, переходя к пределу при $h \downarrow 0$, получаем, что $\|z\| \leq \|z - y\|$. Так как $y \in \mathcal{R}(\overline{A}) \subseteq \overline{\mathcal{D}(A)}$, то существует последовательность $\{z_n\} \subset \mathcal{D}(A)$, сходящаяся к y . Значит, $\|y\| \leq 0$ и $y = 0$.

(iii) Если A замкнут, то $\mathcal{R}(I - hA)$ замкнута при любом $h > 0$.

Пусть $h > 0$ и последовательности $x_n \in \mathcal{D}(A)$ и $f_n := x_n - hAx_n$ таковы, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$. Так как A диссипативен, $\|x_n -$

$-x_m \|\leq \|f_n - f_m\|$ и $\{x_n\}$ — последовательность Коши, сходящаяся к $x \in X$. Тогда $Ax_n = h^{-1}(x_n - f_n)$ сходится к $h^{-1}(x - f)$. Поскольку A замкнут, $x \in \mathcal{D}(A)$ и $Ax = h^{-1}(x - f)$. Следовательно, $f \in \mathcal{R}(I - hA)$.

Из того что $\mathcal{R}(I - hA) = X$ при любом $h > 0$, вытекает, что $\mathcal{R}(I - h_0A) = X$ при некотором $h = h_0 > 0$.

$\mathcal{R}(I - h_0A) = X \Rightarrow A$ замкнут.

Пусть $[x_n, y_n] \in A$ такова, что $\lim_{n \rightarrow \infty} [x_n, y_n] = [x, y]$. Положим $f_n := x_n - h_0Ax_n$. Тогда f_n сходится к $f = x - h_0y$. Поскольку множество $\mathcal{R}(I - h_0A)$ замкнуто, то существует такое $z \in \mathcal{D}(A)$, что $f = z - h_0Az$. Но A диссипативен, поэтому $\|x - z\| \leq \|f - f\| = 0$ и, следовательно, $x = z$ и $Ax = y$.

(iv) Предположим, что $\mathcal{R}(I - h_0A) = X$ при некотором $h_0 > 0$. Тогда $\mathcal{R}(I - hA) = X$ при $h \in (h_0/2, \infty)$. Действительно, пусть $f \in X$ и $h \in (h_0/2, \infty)$. Тогда равенство $x - hAx = f$ эквивалентно тому, что $x - h_0Ax = (h_0/h)f + (1 - h_0/h)x$ или

$$x = (I - h_0A)^{-1} \left(\frac{h_0}{h} f + \left(1 - \frac{h_0}{h} \right) x \right) =: F(x).$$

Так как $1 - h_0/h \in (-1, 1)$ и $\|(I - h_0A)^{-1}\| \leq 1$, то получаем, что $F: X \rightarrow X$ липшиц-непрерывно и $\|F\|_{\text{Lip}} < 1$. По теореме Банаха о неподвижной точке F имеет в X единственную неподвижную точку. Следовательно, $f \in \mathcal{R}(I - hA)$ и $\mathcal{R}(I - hA) = X$ для $h > h_0/2$. По индукции получаем, что $\mathcal{R}(I - hA) = X$ для любого $h > 0$. ■

Предложение 3.8. Пусть оператор $A: \mathcal{D}(A) \subseteq X \rightarrow X$ m -диссипативен. Тогда

(i) A максимально диссипативен, т. е. если B диссипативен и $A \subseteq B$, то $A = B$.

(ii) Если X рефлексивно, то $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$.

(iii) Если $X_0 := \overline{\mathcal{D}(A)}$ и A_0 — сужение A на X_0 , т. е.

$$\begin{cases} \mathcal{D}(A_0) := \{x \in \mathcal{D}(A): Ax \in X_0\}, \\ A_0x := Ax \text{ для } x \in \mathcal{D}(A_0), \end{cases}$$

то A m -диссипативен и плотно определен в $(X_0, \|\cdot\|)$.

Доказательство. (i) Вложение $A \subseteq B$ в смысле графиков в $X \times X$ влечет за собой $(I - A)^{-1} \subseteq (I - B)^{-1}$. Так как $\mathcal{D}((I - A)^{-1}) = \mathcal{R}(I - A) = X$, то $\mathcal{D}((I - B)^{-1}) = X$. Более того, $(I - B)^{-1}$ — график однозначного оператора в X , так как B диссипативен. Значит, $(I - A)^{-1} = (I - B)^{-1}$, откуда следует, что $I - A = I - B$ и, таким образом, $A = B$.

(ii) Возьмем функционал $x^* \in X^*$, такой, что $\langle x, x^* \rangle = 0$ для всех $x \in \mathcal{D}(A)$. Необходимо показать, что $x^* = 0$. Так как

$E_h^A x \in \mathcal{D}(A)$ при $h > 0$, то при любом $x \in \mathcal{D}(A)$

$$\langle A_h x, x^* \rangle = h^{-1} \langle E_h^A x - x, x^* \rangle = 0.$$

Для $x \in \mathcal{D}(A)$ в силу (2.13) и (2.16) имеем $\lim_{h \downarrow 0} E_h^A x = x$ и $\|A_h x\| \leq \|Ax\|$. Так как X рефлексивно, то существуют такие последовательность $h_n \downarrow 0$ и $z \in X$, что

$$w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} A_{h_n} x = z$$

или

$$w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} A E_{h_n}^A x = z.$$

A замкнут (см. предложение 3.7 (iii)), а значит, и слабо замкнут. Следовательно, $z = Ax$. Тогда

$$\langle Ax, x^* \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle A_{h_n} x, x^* \rangle = 0,$$

и мы получаем, что $\langle x - Ax, x^* \rangle = 0$ при всех $x \in \mathcal{D}(A)$. Так как A m -диссипативен, то $\mathcal{R}(I - A) = X$ и $x^* = 0$.

(iii) Ясно, что A_0 диссипативен. Для $h > 0$ и $f \in X_0$ существует такой элемент $x \in \mathcal{D}(A)$, что $x - hAx = f$, так как A m -диссипативен. Тогда $Ax = h^{-1}(x - f) \in X_0$, а значит, $x \in \mathcal{D}(A_0)$ и A_0 m -диссипативен в X_0 . Кроме того, $x = E_h^A f$ сходится к f при $h \downarrow 0$, поскольку $f \in \overline{\mathcal{D}(A)}$. Поэтому $\mathcal{D}(A_0)$ плотно в X_0 . ■

Следствие 3.9. Пусть оператор A m -диссипативен (линеен) в X и T_A — сжимающая C_0 -полугруппа на $\overline{\mathcal{D}(A)}$, определенная в теореме 2.3. Тогда генератор полугруппы T_A есть сужение A на $\overline{\mathcal{D}(A)}$.

Доказательство. Обозначим через B генератор полугруппы T_A в $\mathcal{D}(A)$. По теореме 2.15 $Bx = Ax$ при всех $x \in \mathcal{D}(B)$. Так как $Bx \in \mathcal{D}(A)$, то $Bx = A_0 x$ при всех $x \in \mathcal{D}(B)$. Здесь A_0 есть сужение A на $\overline{\mathcal{D}(A)}$. Значит, $B \subseteq A_0$ на $\mathcal{D}(A)$. Так как B m -диссипативен и A_0 диссипативен в $\mathcal{D}(A)$, то $B = A_0$ по предложению 3.8 (i). ■

Пусть $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ диссипативен и плотно определен. Тогда A допускает замыкание, и это замыкание диссипативно в силу предложения 3.7. Пусть A^* обозначает сопряженный к A в $(X^*, \|\cdot\|)$. Заметим, что A^* является также сопряженным и к замыканию A в X .

Предложение 3.10. Пусть $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ диссипативен и плотно определен. Тогда следующие утверждения эквивалентны.

- (i) A^* диссипативен в $(X^*, \|\cdot\|)$.
- (ii) $\mathcal{R}(I - hA)$ плотно в X при любом $h > 0$.
- (iii) $\mathcal{R}(I - h_0 A)$ плотно в X при некотором $h_0 > 0$.
- (iv) Замыкание оператора A m -диссипативно.
- (v) Оператор A^* m -диссипативен в $(X^*, \|\cdot\|)$.

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii). Мы должны доказать, что равенство $\langle x - hAx, x^* \rangle = 0$ при всех $x \in \mathcal{D}(A)$ и некотором $h > 0$ влечет за собой равенство $x^* = 0$. Ясно, что $x^* \in \mathcal{D}(A^*)$ и $\langle x, x^* - hA^*x^* \rangle = 0$ при любом $x \in \mathcal{D}(A)$. Так как $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$, то $x^* - hA^*x^* = 0$, но A^* диссипативен, а следовательно, $x^* = 0$.

Импликация (ii) $\Rightarrow$ (iii) очевидна.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Пусть $\tilde{A}$ обозначает замыкание A . Тогда $\tilde{A}$ замкнут и $\mathcal{R}(I - h_0\tilde{A})$ замкнуто в силу предложения 3.7 (iii). Кроме того, $\mathcal{R}(I - h_0\tilde{A}) \supseteq \overline{\mathcal{R}(I - h_0A)} = X$, и, значит, по предложению 3.7 (iv) оператор A m -диссипативен.

(iv) $\Rightarrow$ (v). Имеет место равенство $\overline{A^*} = \tilde{A}^*$. Докажем сначала, что A^* диссипативен. Так как $\mathcal{D}(\tilde{A}) = X$, то

$$\|x^*\| = \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(\tilde{A}) \\ \|x\| \leq 1}} |\langle x, x^* \rangle|$$

для любого $x^* \in X^*$. В частности, для $x^* \in \mathcal{D}(A^*)$ и $h > 0$, используя диссипативность $\tilde{A}$, получим

$$\begin{aligned} \|x^* - hA^*x^*\| &= \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(\tilde{A}) \\ \|x\| \leq 1}} |\langle x, x^* - hA^*x^* \rangle| = \\ &= \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(\tilde{A}) \\ \|x\| \leq 1}} |\langle x - h\tilde{A}x, x^* \rangle| \geq \\ &\geq \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(\tilde{A}) \\ \|x - h\tilde{A}x\| \leq 1}} |\langle x - h\tilde{A}x, x^* \rangle|. \end{aligned}$$

Так как $\mathcal{R}(I - h\tilde{A}) = X$, то

$$\sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(\tilde{A}) \\ \|x - h\tilde{A}x\| < 1}} |\langle x - h\tilde{A}x, x^* \rangle| = \sup_{\substack{y \in X \\ \|y\| \leq 1}} |\langle y, x^* \rangle| = \|x^*\|.$$

Значит, A^* диссипативен. Докажем далее, что $\mathcal{R}(I - hA^*) = X^*$. Пусть $f^* \in X^*$, и положим $x^* = [(I - h\tilde{A})^{-1}]^* f^*$ для $h > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} |\langle f - h\tilde{A}f, x^* \rangle| &= |\langle f - h\tilde{A}f, [(I - h\tilde{A})^{-1}]^* f^* \rangle| = \\ &= |\langle (I - h\tilde{A})^{-1}(f - h\tilde{A}f), f^* \rangle| = |\langle f, f^* \rangle| < \|f^*\| \cdot \|f\| \end{aligned}$$

для $f \in \mathcal{D}(\tilde{A})$. Поэтому $x^* \in \mathcal{D}(A^*)$ и

$$\langle f, (I - hA^*)x^* \rangle = \langle (I - h\tilde{A})f, x^* \rangle = \langle f, f^* \rangle.$$

А так как $\mathcal{D}(\tilde{A})$ плотно в X , то $(I - h\tilde{A})^* x^* = f^*$ и $\mathcal{R}(I - h\tilde{A}) = X^*$.

Импликация (v) $\Rightarrow$ (i) очевидна. ■

Предложение 3.11. Пусть оператор $A: \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ m -диссипативен и плотно определен. Тогда

- (i) A^* m -диссипативен в $(X^*, \|\cdot\|)$.
- (ii) $E_h^{A^*} = (E_h^A)^*$ и $(A^*)_h = (A_h)^*$, $h > 0$.
- (iii) $\mathcal{D}(A^*)$ слабо $*$ -плотно в X^* .
- (iv) $\mathcal{D}(A^*) = \{x^* \in X^*: \sup_{h>0} \|A_h^* x^*\| < \infty\}$.

Доказательство. (i) Так как A m -диссипативен, то $\mathcal{R}(I - hA) = X$ и A^* m -диссипативен в силу предложения 3.10.

(ii) Равенство $E_h^{A^*} = (E_h^A)^*$ вытекает из последней части доказательства предложения 3.10, и тогда

$$(A^*)_h = h^{-1}(E_h^{A^*} - I) = (h^{-1}(E_h^A - I))^* = (A_h)^*.$$

(iii) Пусть $x^* \in X^*$; тогда $E_h^{A^*} x^* \in \mathcal{D}(A^*)$ при любых $h > 0$ и для любого $x \in X$

$$\lim_{h \downarrow 0} \langle x, E_h^{A^*} x^* \rangle = \lim_{h \downarrow 0} \langle E_h^A x, x^* \rangle = \langle x, x^* \rangle.$$

Следовательно, $\mathcal{D}(A^*)$ слабо $*$ -плотно в X^* .

(iv) Из (2.13) и (2.16) следует, что

$$\mathcal{D}(A^*) \subseteq \{x^* \in X^*: \sup_{h \downarrow 0} \|A_h^* x^*\|_* < \infty\}.$$

Предположим, что существует такое $M > 0$, что $\|(A^*)_h x^*\| \leq M$ при всех $h > 0$. Необходимо проверить, что $x^* \in \mathcal{D}(A^*)$. Для

любого $x \in \mathcal{D}(A)$ имеем

$$\begin{aligned} |\langle Ax, x^* \rangle| &= \lim_{h \downarrow 0} |\langle A_h x, x^* \rangle| = \\ &= \lim_{h \downarrow 0} |\langle x, (A_h)^* x^* \rangle| = \lim_{h \downarrow 0} |\langle x, (A^*)_h x^* \rangle| \leq \\ &\leq \sup_{h > 0} |\langle x, (A^*)_h x^* \rangle| \leq M \|x\|. \end{aligned}$$

Значит, $x^* \in \mathcal{D}(A^*)$. ■

Замечания. (а) Если X рефлексивно и $A \in D(X)$, то в силу предложения 3.11 оператор A^* m -диссипативен и $\mathcal{D}(A^*)$ плотно в X^* (см. предложение 3.8 (ii)). Значит, $A^* \in D(X^*)$. Более того, $A = A^{**}$ и

$$\mathcal{D}(A) = \{x \in X: \sup_{h > 0} \|A_h x\| < \infty\} = \{x \in X: |Ax| < \infty\}.$$

(б) Если X — гильбертово пространство и A замкнут, плотно определен, диссипативен, симметричен, но не самосопряжен, то A^* не диссипативен. Действительно, если A^* был бы диссипативным, то A должен был бы быть m -диссипативным по предложению 3.11 (i). Кроме того, $A \subseteq A^*$ и диссипативность A^* должна повлечь за собой, с учетом предложения 3.8 (i), равенство $A = A^*$. Но A не является самосопряженным. Другими словами, симметричный диссипативный оператор A в гильбертовом пространстве самосопряжен тогда и только тогда, когда A m -диссипативен, что в свою очередь эквивалентно диссипативности оператора A^* .

Пример. Пусть $X = L_2[0, 1]$, $\mathcal{D}(A) = \{u \in W_{2,2}(0, 1): u(0) = u(1) = u'(0) = u'(1) = 0\}$ и $Au = u''$ для $u \in \mathcal{D}(A)$. Тогда A замкнут, плотно определен, диссипативен и симметричен, но не m -диссипативен.

Мы завершаем этот параграф обсуждением небольшого, но интересного обобщения понятия диссипативности, введенного в работе Arendt, Chernoff, Kato [1982]. Пусть X — вещественное векторное пространство. Функция $p: X \rightarrow \mathbb{R}$ называется *сублинейной*, если

$$\begin{cases} p(x+y) \leq p(x) + p(y), & x, y \in X, \\ p(\lambda x) = \lambda p(x), & \lambda \geq 0, x \in X. \end{cases}$$

При этом ясно, что $p(x) + p(-x) \geq 0$ для $x \in X$. Если $p(x) + p(-x) > 0$ при $x \neq 0$, то p называется *half-нормой* на X .

Линейный оператор $A: \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ называется *p -диссипативным*, если

$$p(x) \leq p(x - hAx), \quad h > 0, \quad x \in \mathcal{D}(A). \quad (3.29)$$

Оператор A диссипативен в $(X, \|\cdot\|)$ тогда и только тогда, когда он p -диссипативен относительно $p(x) = \|x\|$.

Заметим, что равенство $\|x\|_p := \max(p(x), p(-x))$, $x \in X$, задает норму на X , и если p непрерывен, то $\|x\|_p$ тоже непрерывна и существует такое $M > 0$, что $\|x\|_p \leq M \|x\|$ для любого $x \in X$. Обратно, если $\|x\|_p \leq M \|x\|$ для любого $x \in X$, то $\|x\|_p$ непрерывна, так же, как и p . Как и в предложении 3.7, имеет место такое утверждение:

Предложение 3.12. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — вещественное банахово пространство и $p: X \rightarrow \mathbb{R}$ — вещественный непрерывный сублинейный функционал на X . Пусть $A: \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ есть p -диссипативный оператор. Тогда

(i) Если A допускает замыкание, то оно также p -диссипативно.

(ii) Если, кроме того, p есть half-норма и если $\overline{\mathcal{D}(A)} \supseteq \mathcal{A}(A)$, то A допускает замыкание.

Заметим, что если A замкнут, то $\mathcal{A}(I - hA)$ не обязательно замкнута при $h > 0$. Тем не менее если $\|\cdot\|_p$ — эквивалентная норма на X , то A также диссипативен по отношению к норме $\|\cdot\|_p$, и мы можем применить предложение 3.7 с $(X, \|\cdot\|_p)$ вместо $(X, \|\cdot\|)$.

Так как сублинейный функционал является выпуклым, то для $x, y \in X$, $\lambda \neq 0$ можно определить

$$p'_\lambda(x, y) := \lambda^{-1}(p(x + \lambda y) - p(x)), \quad (3.30)$$

$$p'(x, y) := \inf_{\lambda > 0} p'_\lambda(x, y) = \lim_{\lambda \downarrow 0} p'_\lambda(x, y). \quad (3.31)$$

Отметим далее, что

$$\sup_{\lambda < 0} p'_\lambda(x, y) = \lim_{\lambda \uparrow 0} p'_\lambda(x, y) = -p'(x, -y) \quad (3.32)$$

(см. дополнение 1). Тогда предложение 2.16 выполняется с заменой $[x, y]_+$ (соответственно $[x, y]_-$) на $p'(x, y)$ (соответственно $-p'(x, -y)$).

Определение 3.13. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — вещественное банахово пространство и $p: X \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывный сублинейный функционал. Тогда оператор $A: \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ называется *строго p -диссипативным*, если

$$p'(x, Ax) \leq 0 \text{ для любого } x \in \mathcal{D}(A). \quad (3.33)$$

Ясно, что строго p -диссипативный оператор A является p -диссипативным.

Теорема 3.14. Пусть p — сублинейный непрерывный функционал на X .

(i) Пусть A p -диссипативен в X и $\overline{\mathcal{D}(A)} \supseteq \mathcal{R}(A)$. Тогда A строго p -диссипативен.

(ii) Пусть A строго p -диссипативен в X и B p -диссипативен в X . Тогда $A + B$ p -диссипативен в X .

(iii) Пусть A плотно определен и диссипативен в X и B диссипативен в X . Тогда $A + B$ диссипативен.

Доказательство. (i) Пусть $x, y \in \mathcal{D}(A)$ и $\lambda > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} p(x + \lambda Ax) &= p(x + \lambda y + \lambda(Ax - y)) \leq \\ &\leq p(x + \lambda y) + \lambda p(Ax - y) \leq p(x + \lambda y) + \lambda M \|Ax - y\| \leq \\ &\leq p((I - \lambda A)(x + \lambda y)) + \lambda M \|Ax - y\| = \\ &= p(x + \lambda(y - Ax) - \lambda^2 Ay) + \lambda M \|Ax - y\| \leq \\ &\leq p(x) + \lambda p(y - Ax) + p(-\lambda^2 Ay) + \lambda M \|Ax - y\| \leq \\ &\leq p(x) + 2M\lambda \|Ax - y\| + M\lambda^2 \|Ay\|. \end{aligned}$$

Для $\lambda > 0$

$$\lambda^{-1} [p(x + \lambda Ax) - p(x)] \leq 2M \|Ax - y\| + M\lambda \|Ax\|.$$

Следовательно,

$$p'(x, Ax) \leq 2M \|Ax - y\|.$$

Так как $\overline{\mathcal{D}(A)} \supseteq \mathcal{R}(A)$, мы получаем, что $p'(x, Ax) \leq 0$.

(ii) Для $x, y, z \in X$

$$p'(x, y + z) \geq p'(x, y) - p'(x, -z).$$

Действительно,

$$p'(x, y) = p'(x, -z + y + z) \leq p'(x, -z) + p'(x, y + z).$$

Значит, если $x \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$, то

$$p'(x, -(Ax + Bx)) \geq p'(x, -Bx) - p'(x, Ax) \geq 0.$$

(iii) непосредственно следует из (i) и (ii). ■

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — вещественное банахово пространство и $p: X \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывный сублинейный функционал. Тогда линейный оператор $E: X \rightarrow X$ называется p -сжатием, если $p(Ex) \leq p(x)$ для любого $x \in X$. Справедлива

Теорема 3.15. Пусть $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ есть C_0 -полугруппа ограниченных линейных операторов в X и A_T — ее генератор. Тогда $T(t)$ является p -сжатием при всех $t \geq 0$ в том и только том случае, когда A_T p -диссипативен.

Доказательство. Пусть $T(t)$, $t \geq 0$, суть p -сжатия в X . Тогда для $x \in \mathcal{D}(A_T)$, $h > 0$, $t > 0$

$$p(x - ht^{-1}(T(t)x - x)) = p((1 + ht^{-1})x - ht^{-1}T(t)x) \geq \\ \geq p((1 + ht^{-1})x) - p(ht^{-1}T(t)x) = (1 + ht^{-1})p(x) - ht^{-1}p(T(t)x),$$

так как p есть half-норма. Кроме того, поскольку $p(T(t)x) \leq p(x)$, то

$$(1 + ht^{-1})p(x) - ht^{-1}p(T(t)x) \geq (1 + ht^{-1})p(x) - ht^{-1}p(x) = p(x).$$

Поскольку p непрерывен, мы получаем, что $p(x - hA_T x) \geq p(x)$ и оператор A_T p -диссипативен.

Пусть A_T p -диссипативен. Из § 3.2 мы знаем, что T удовлетворяет (3.12) при некоторых $M \geq 1$ и $\omega \in \mathbb{R}$. Кроме того, при $\omega h < 1$ оператор $I - hA_T$ обратим и $\mathcal{R}(I - hA_T) = X$. Так как A_T диссипативен, то $p((I - hA_T)^{-1}x) \leq p(x)$ для любых $x \in X$ и h , таких, что $h\omega < 1$. По индукции получаем, что

$$p((I - hA_T)^{-n}x) \leq p(x), \quad x \in X \text{ и } h\omega < 1.$$

Пусть $t > 0$. Тогда $p((I - (t/n)A_T)^{-n}x) \leq p(x)$ для $n > t\omega$. Пользуясь теоремой 3.6 и непрерывностью p , устанавливаем, что

$$p(T(t)x) = \lim_{n \rightarrow \infty} p\left(\left(I - \frac{t}{n}A\right)^{-n}x\right) \leq p(x)$$

для всех $x \in X$. Это завершает доказательство теоремы. ■

3.4. Сопряженные полугруппы

Пусть $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ есть C_0 -полугруппа ограниченных линейных операторов в банаховом пространстве $(X, \|\cdot\|)$, удовлетворяющая (3.12). Тогда $\{T^*(t)\}_{t \geq 0}$, где $T^*(t)$ — оператор, сопряженный к $T(t)$, в сопряженном пространстве $(X^*, \|\cdot\|)$, есть также полугруппа ограниченных линейных операторов, удовлетворяющих условию

$$\|T^*(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad t \geq 0. \quad (3.34)$$

Семейство $\{T^*(t)\}_{t \geq 0}$ не обязательно является C_0 -полугруппой. Например, если $X = L_p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, и

$$(T(t)u)(x) := u(t + x), \quad t, x \in \mathbb{R},$$

то $\{T^*(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ есть C_0 -группа сжатий в $(L_p(\Omega))^*$, если $p > 1$, но для $p = 1$ это не так. Из предложений 3.8 (ii) и 3.11 (i) следует, что семейство, сопряженное сильно непрерывной полугруппе, в рефлексивном банаховом пространстве также сильно непрерывно. В случае произвольного нерефлексивного банахова пространства это не так. Известно лишь, что семейство $T^*(t)$ слабо

*-непрерывно (это означает непрерывность в слабой *-топологии). Мы обозначим через $X^\odot$ подпространство в X^* , на котором полугруппа $T^*(t)$ сильно непрерывна. В следующей теореме мы покажем, что $X^\odot$ замкнуто и инвариантно относительно $T^*(t)$, и положим $T^\odot(t) = T^*(t)|_{X^\odot}$. Тогда $\{T^\odot(t)\}_{t \geq 0}$ — также сильно непрерывная полугруппа на $X^\odot$.

Теорема 3.16. Пусть $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ есть C_0 -полугруппа ограниченных линейных операторов в банаховом пространстве $(X, \|\cdot\|)$ с генератором A . Пусть $\{T^*(t)\}_{t \geq 0}$ — сопряженная к ней полугруппа, и, наконец, пусть $X^\odot$ — подпространство, на котором $T^*(t)$ сильно непрерывна. Тогда

- (i) $t \rightarrow T^*(t)x^*$ слабо *-непрерывна на $[0, \infty)$.
- (ii) $t \rightarrow T^*(t)x^*$ слабо *-дифференцируема справа в нуле тогда и только тогда, когда $x^* \in \mathcal{D}(A^*)$.
- (iii) Если $x^* \in \mathcal{D}(A^*)$, то $T^*(t)x^* \in \mathcal{D}(A^*)$ для $t > 0$, функция $t \rightarrow T^*(t)x^*$ слабо *-дифференцируема и

$$\frac{d}{dt} \langle x, T^*(t)x^* \rangle = \langle x, A^*T^*(t)x^* \rangle = \langle x, T^*(t)A^*x^* \rangle$$

при всех $x \in X$ и $t \geq 0$.

- (iv) $X^\odot = \overline{\mathcal{D}(A^*)}$.
- (v) $X^\odot$ инвариантно относительно $T^*(t)$, $t \geq 0$, и $\{T^\odot(t)\}_{t \geq 0}$, сужение $\{T^*(t)\}_{t \geq 0}$ на $X^\odot$, является C_0 -полугруппой ограниченных операторов на $X^\odot$.
- (vi) Генератор полугруппы $\{T^\odot(t)\}_{t \geq 0}$, который мы обозначим $A^\odot$, есть сужение A^* на $X^\odot$.
- (vii) $\mathcal{D}(A^\odot)$ слабо *-плотно в X^* .
- (viii) Если X рефлексивно, то $X^\odot = X^*$ и $A^\odot = A^*$.

Доказательство. Из § 3.2 мы знаем, что $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ удовлетворяет условию (3.12) при некоторых $M \geq 1$ и $\omega \in \mathbb{R}$. Предположим без потери общности, что $\omega = 0$. Кроме того, используя эквивалентную норму, определенную в (3.16), мы можем положить, что $M = 1$. Тогда по теореме 3.1 оператор A m -диссипативен и плотно определен в X . Снова обозначим норму (3.16) через $\|\cdot\|$.

(i) Очевидно, что отображение $t \rightarrow \langle x, T^*(t)x^* \rangle = \langle T(t)x, x^* \rangle$ непрерывно при любых $x^* \in X^*$ и $t \geq 0$.

(ii) Предположим, что $x^* \in \mathcal{D}(A^*)$. Из (3.5) получим, что $R_{T,h}x \in \mathcal{D}(A)$ при любом $x \in X$ и $AR_{T,h}x = A_{T,h}x$. Тогда

$$\langle x, (A_{T,h})^*x^* \rangle = \langle R_{T,h}x, A^*x^* \rangle$$

и

$$\langle x, A^*x^* \rangle = \lim_{h \downarrow 0} \langle R_{T,h}x, A^*x^* \rangle = \lim_{h \downarrow 0} \langle x, (A_{T,h})^*x^* \rangle.$$

Если

$$\mathcal{D}(\tilde{B}) := \{x^* \in X^*: w^* - \lim_{h \downarrow 0} h^{-1} (T^*(h) - I) x^* \text{ существует}\}$$

и

$$\tilde{B}x^* := w^* - \lim_{h \downarrow 0} h^{-1} (T^*(h) x^* - x^*)$$

для $x^* \in \mathcal{D}(\tilde{B})$, то $A^* \subseteq \tilde{B}$. Обратно, если $x^* \in \mathcal{D}(\tilde{B})$, то для любого $x \in \mathcal{D}(A)$

$$\begin{aligned} \langle Ax, x^* \rangle &= \lim_{h \downarrow 0} \langle h^{-1} (T(h)x - x), x^* \rangle = \\ &= \lim_{h \downarrow 0} \langle x, h^{-1} (T^*(h)x^* - x^*) \rangle = \langle x, \tilde{B}x^* \rangle. \end{aligned}$$

Тогда $\tilde{B} \subseteq A^*$ и, значит, $A^* = \tilde{B}$, что и доказывает (ii).

(iii) доказывается подобно предложению 3.3(i). Заметим, что отображение $T^*(t): X^* \rightarrow X^*$ слабо $*$ -непрерывно при любом $t > 0$ как сопряженное к ограниченному оператору в X .

(iv) — (v). Если $t \rightarrow T^*(t)x^*$ непрерывно справа в нуле, то $t \rightarrow T^*(t)x^*$ непрерывно на $[0, \infty)$ и для $t > 0$, $x \in \mathcal{D}(A)$

$$\left\langle Ax, \left| \frac{1}{t} \int_0^t T^*(s)x^* ds \right. \right\rangle = \langle R_{T, t} Ax, x^* \rangle = \langle A_{T, t} x, x^* \rangle$$

в силу теоремы 3.6. Тогда

$$\left| \left\langle Ax, \frac{1}{t} \int_0^t T^*(s)x^* ds \right\rangle \right| \leq 2t^{-1} \|x^*\| \cdot \|x\|$$

для любого $x \in \mathcal{D}(A)$ и

$$t^{-1} \int_0^t T^*(s)x^* ds \in \mathcal{D}(A^*).$$

Кроме того,

$$x^* = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t T^*(s)x^* ds$$

и $x^* \in \overline{\mathcal{D}(A^*)}$. Теперь из предложения 3.11 (i), (ii) следует m -диссипативность A^* и равенство $E_h^{A^*} = (E_h^A)^*$. Для $x \in X$ и $x^* \in \mathcal{D}(A^*)$, применяя теорему 2.3, получаем

$$\begin{aligned} \langle x, T_{A^*}(t)x^* \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x, (E_{t/n}^{A^*})^n x^* \rangle = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle (E_{t/n}^A)^n x, x^* \rangle = \langle T(t)x, x^* \rangle = \langle x, T^*(t)x^* \rangle \end{aligned}$$

для $t \geq 0$. Отсюда следует, что $T^*(t)x^* = T_{A^*}(t)x^*$ для $x^* \in \mathcal{D}(A^*)$, и, значит, функция $t \rightarrow T^*(t)x^*$ сильно непрерывна на $[0, \infty)$. Это доказывает (iv) и (v).

(vi) Так как $T^\odot(t) = T_{A^*}(t)$, $t \geq 0$, то (vi) вытекает из следствия 3.9.

(vii) $\mathcal{D}(A^\odot)$ плотно в $X^\odot$ (предложение 3.8) и, следовательно, слабо $*$ -плотно в $X^\odot = \mathcal{D}(A^*)$. Но $\mathcal{D}(A^*)$ слабо $*$ -плотно в X^* (предложение 3.11(iii)).

(viii) непосредственно следует из предложения 3.8 (ii). ■

В качестве приложения предыдущей теоремы мы дадим характеристику класса Фавара C_0 -полугруппы сжатий в X и (применив стандартную процедуру, описанную в § 3.2) произвольной C_0 -полугруппы ограниченных операторов в X .

Определение 3.17. Пусть $T \in C(X)$. Тогда класс Фавара $\text{Fav}(T)$ определяется следующим образом:

$$\text{Fav}(T) := \{x \in X: \sup_{h>0} \|h^{-1}(T(h)x - x)\| < \infty\}.$$

Предложение 3.18. Пусть $T \in C(X)$ и A_T — генератор полугруппы T . Тогда для $x \in X$

$$\sup_{h>0} \|A_T, hx\| = \sup_{h>0} \|(A_T)_h x\|, \quad (3.35)$$

где $A_{T,h}$ определено в (3.1), а $(A_T)_h$ — аппроксимация Иосиды оператора A_T .

Доказательство. Для $\mu > 0$ и $x \in X$ справедливо равенство

$$T_\mu(t)x - x = \int_0^t \frac{d}{ds} T_\mu(s)x ds,$$

где $T_\mu(t)$ — полугруппа, порожденная оператором $(A_T)_\mu$. При $s \geq 0$

$$\left\| \frac{d}{ds} T_\mu(s)x \right\| \leq \left\| \frac{d}{ds} T_\mu(0)x \right\| = \|(A_T)_\mu x\|.$$

Тогда

$$t^{-1} \|T_\mu(t)x - x\| \leq \|(A_T)_\mu x\|$$

при $t > 0$, $\mu > 0$ и $x \in X$. Отсюда

$$\frac{1}{t} \|T(t)x - x\| \leq \sup_{\mu>0} \|(A_T)_\mu x\|$$

и

$$\sup_{t>0} \|A_T, tx\| \leq \sup_{\mu>0} \|(A_T)_\mu x\|.$$

Обратно,

$$\lim_{\mu \downarrow 0} (A_{T, h})_{\mu} x = \lim_{\mu \downarrow 0} A_{T, h} E_{\mu}^{A_{T, h}} x = A_{T, h} x$$

и

$$\| (A_{T, h})_{\mu} x \| = \| E_{\mu}^{A_{T, h}} A_{T, h} x \| \leq \| A_{T, h} x \|.$$

Таким образом,

$$\sup_{\mu > 0} \| (A_{T, h})_{\mu} x \| = \| A_{T, h} x \|.$$

Значит,

$$\begin{aligned} \sup_{\mu > 0} \| (A_T)_{\mu} x \| &= \sup_{\mu > 0} \lim_{h \downarrow 0} \| (A_{T, h})_{\mu} x \| \leq \sup_{\mu > 0} \sup_{h > 0} \| (A_{T, h})_{\mu} x \| = \\ &= \sup_{h > 0} \sup_{\mu > 0} \| (A_{T, h})_{\mu} x \| = \sup_{h > 0} \| A_{T, h} x \|. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Заметим, что из (2.13) следует равенство

$$\sup_{h > 0} \| (A_T)_{h} x \| = |A_T x|.$$

Поэтому

$$\text{Fav}(T) = \{x \in X : |A_T x| < \infty\}.$$

Ясно, что

$$\mathcal{D}(A_T) \subseteq \text{Fav}(T),$$

причем может оказаться, что класс Фавара шире, чем $\mathcal{D}(A_T)$. Например, если $X = \text{BUC}(\mathbb{R})$ (пространство ограниченных равномерно непрерывных функций на $\mathbb{R}$) снабжено sup -нормой и

$$(T(t)u)(x) := u(t+x), \quad t, x \in \mathbb{R},$$

то

$$\mathcal{D}(A_T) = \{u \in \text{BUC}(\mathbb{R}) : u'(x) \text{ существует при всех } x \in \mathbb{R} \text{ и } u' \in \text{BUC}(\mathbb{R})\}.$$

При этом $u \in \text{Fav}(T)$ тогда и только тогда, когда $u \in \text{Lip}(\mathbb{R}) \cap \text{BUC}(\mathbb{R})$.

Для $T \in C(X)$ возьмем T^* , $X^{\odot}$, $T^{\odot}$, как в теореме 3.16. Тогда $(X^{\odot}, \| \cdot \|)$ — банахово пространство, так как $X^{\odot}$ замкнуто в X^* . Кроме того, $T^{\odot} \in C(X^{\odot})$. Пусть $X^{\odot*}$ — пространство, сопряженное к $X^{\odot}$, $T^{\odot*}$ — полугруппа, сопряженная к $T^{\odot}$. Так как $X^{\odot}$ слабо $*$ -плотно в X^* (теорема 3.16), X можно вложить в $X^{\odot*}$, положив при любом $x \in X$ и $x^{\odot} \in X^{\odot}$

$$i(x)(x^{\odot}) := \langle x, x^{\odot} \rangle.$$

Тогда если $i(x) = 0$, то $x = 0$; поэтому i инъективно. Кроме того,

$$\| i(x) \| = \sup_{\substack{x^{\odot} \in X^{\odot} \\ \| x^{\odot} \| \leq 1}} |\langle x, x^{\odot} \rangle| \leq \| x \|$$

для всех $x \in X$. Для $x^* \in X^*$ с $\|x^*\| \leq 1$ и для $t > 0$ имеет место включение

$$(R_{T, t})^* x^* \in \mathcal{D}((A_T)^*) \subset X^\odot$$

(см. доказательство теоремы 3.16 (iv), (v)) и

$$\|(R_{T, t})^* x^*\| \leq 1.$$

Следовательно, для любых $x \in X$ и $t > 0$

$$\begin{aligned} \|i(x)\| &\geq \sup_{\substack{x^* \in X^* \\ \|x^*\| \leq 1}} |\langle x, (R_{T, t})^* x^* \rangle| = \\ &= \sup_{\substack{x^* \in X^* \\ \|x^*\| \leq 1}} |\langle R_{T, t} x, x^* \rangle| = \|R_{T, t} x\|. \end{aligned}$$

Отсюда, переходя к пределу при $t \downarrow 0$, получаем

$$\|i(x)\| \geq \|x\|.$$

Следовательно, $i: X \rightarrow X^{\odot*}$ есть изометрия, но не обязательно сюръекция, и $i(X)$ замкнуто в $X^{\odot*}$. Далее мы будем отождествлять X с $i(X)$. Пусть $x \in X$ и $x^\odot \in X^\odot$, тогда

$$\begin{aligned} \langle T(t)x, x^\odot \rangle &= \langle x, T^*(t)x^\odot \rangle = \langle x, T^\odot(t)x^\odot \rangle = \\ &= \langle T^{\odot*}(t)x, x^\odot \rangle, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Отсюда $T(t) \subseteq T^{\odot*}(t)$ в $X^{\odot*}$. По теореме 3.16 оператор $A_T^{\odot*}$ есть слабый $*$ -генератор полугруппы $T^{\odot*}$; следовательно, $A_T \subseteq A_T^{\odot*}$ в $X^{\odot*}$. Если обозначить через $X^{\odot\odot}$ замыкание $\mathcal{D}(A_T^{\odot*})$ в $X^{\odot*}$, то нам известно (см. теорему 3.16), что $X^{\odot\odot}$ есть максимальное инвариантное подпространство $X^{\odot*}$, на котором полугруппа $T^{\odot*}$ сильно непрерывна. Обозначим через $T^{\odot\odot}$ сужение полугруппы $T^{\odot*}(t)$ на $X^{\odot\odot}$. Тогда $T^{\odot\odot} \in C(X^{\odot\odot})$. Ясно, что $X \subseteq X^{\odot\odot}$ и генератор $T^{\odot\odot}$ является сужением $A_T^{\odot*}$ на $X^{\odot\odot}$; обозначим его через $A_T^{\odot\odot}$. Очевидно, что $A_T \subseteq A_T^{\odot\odot}$. Тогда

$$\begin{aligned} \{x \in X^{\odot*}: \sup_{h>0} h^{-1} \|T^{\odot*}(h)x - x\| < \infty\} = \\ = \{x \in X^{\odot\odot}: \sup_{h>0} h^{-1} \|T^{\odot\odot}(h)x - x\| < \infty\} = \text{Fav}(T^{\odot\odot}). \end{aligned}$$

Пользуясь предложением 3.18, получаем

$$\text{Fav}(T^{\odot\odot}) = \{x \in X^{\odot\odot}: \sup_{h>0} \|(A_T^{\odot\odot})_h x\| < \infty\}.$$

Отметим далее, что $(A_T^{\odot\odot})_h x = (A_T^{\odot*})_h x$ для $x \in X^{\odot\odot}$. Отсюда в силу теоремы 3.11 (iv)

$$\text{Fav}(T^{\odot\odot}) = \{x \in X^{\odot\odot} : \sup_{h>0} \|(A_T^{\odot*})_h x\| < \infty\} \subseteq \mathcal{D}(A_T^{\odot*}).$$

Обратно, если $x \in \mathcal{D}(A_T^{\odot*})$, то в силу (2.12), (2.13), (2.15), (2.17)

$$\sup_{t>0} t^{-1} \|T^{\odot*}(t)x - x\| < \infty.$$

Поэтому, так как $\mathcal{D}(A_T^{\odot*}) \subseteq \overline{\mathcal{D}(A_T^{\odot*})} = X^{\odot\odot}$, то

$$\text{Fav}(T^{\odot\odot}) = \mathcal{D}(A_T^{\odot*}).$$

Следовательно,

$$\text{Fav}(T) = X \cap \mathcal{D}(A_T^{\odot*}). \quad (3.36)$$

Если $X = X^{\odot\odot}$ (будем говорить в этом случае, что X $\odot$ -рефлексивно относительно A_T), то

$$\text{Fav}(T) = \mathcal{D}(A_T^{\odot*}).$$

В частности, если X рефлексивно, то $\text{Fav}(T) = \mathcal{D}(A_T^{**}) = \mathcal{D}(A_T)$. Дадим в заключение другую характеристику класса $\text{Fav}(T)$. Заметим, что

$\text{Fav}(T) = \{x \in X : \text{существуют константа } M > 0 \text{ и последовательность } \{x_n\} \text{ из } \mathcal{D}(A_T), \text{ такие, что}$

$$\|A_T x_n\| \leq M \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x\}.$$

Действительно, если $\{x_n\} \subset \mathcal{D}(A_T)$, $\|A_T x_n\| \leq M$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, то

$$\|T(t)x_n - x_n\| \leq t \|A_T x_n\| \leq Mt$$

в силу (2.12). Следовательно, $\|T(t)x - x\| \leq Mt$ для $t > 0$ и $x \in \text{Fav}(T)$. Обратно, если $x \in \text{Fav}(T)$, то существует такое $M > 0$, что $\|(A_T)_h x\| \leq M$ для всех $h > 0$. Тогда

$$E_h^{A_T} x \in \mathcal{D}(A_T), \quad \|A E_h^{A_T} x\| = \|(A_T)_h x\| \leq M$$

и $\lim_{h \downarrow 0} E_h^{A_T} x = x$.

Мы завершим этот параграф несколькими дополнительными замечаниями, касающимися более общего случая, когда $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ не является сжимающей полугруппой, но выполняется оценка

$$\|T(t)\| \leq M e^{\omega t}, \quad t \geq 0.$$

Введем в X новую норму следующим образом:

$$\|x\|' := \sup_{\substack{x^\odot \in X^\odot \\ \|x^\odot\| \leq 1}} |\langle x, x^\odot \rangle|, \quad x \in X.$$

Далее эту норму будем называть *штрих-нормой*. Рассуждая, как и при доказательстве изометричности i в случае $T \in C(X)$, можно проверить, что

$$\|x\|' \leq \|x\| \leq M \|x\|', \quad x \in X.$$

Поэтому вложение $i: X \rightarrow X^{\odot*}$ есть непрерывная инъекция с нормой $M^{-1} \leq \|i\| \leq 1$. Если X оснащено штрих-нормой, то оно может быть вложено в $X^{\odot\odot}$ с помощью естественного отображения, и в этом смысле полугруппа $T^{\odot\odot}$ есть расширение T . Наконец, можно легко показать, что штрих-норма в $X^\odot$,

$$\|x^\odot\|' = \sup_{\substack{x^{\odot\odot} \in X^{\odot\odot} \\ \|x^{\odot\odot}\| \leq 1}} |\langle x^\odot, x^{\odot\odot} \rangle|, \quad x^\odot \in X^\odot,$$

совпадает с первоначальной нормой. Оставляем это в качестве упражнения читателю.

3.5. Ограниченные возмущения сопряженных полугрупп

Пусть X — произвольное банахово пространство и A_0 — генератор сильно непрерывной полугруппы $\{T_0(t)\}_{t \geq 0}$, которую мы будем называть *невозмущенной полугруппой*. Пусть $B: X \rightarrow X$ — ограниченный линейный оператор. Стандартный результат теории возмущений полугрупп гласит, что замкнутый оператор $A = A_0 + B$ с областью определения $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A_0)$ также порождает сильно непрерывную полугруппу. Эта так называемая *возмущенная полугруппа* может быть найдена с помощью интегрального уравнения

$$T(t)x = T_0(t)x + \int_0^t T_0(t-s)BT(s)x ds, \quad t \geq 0, \quad x \in X, \quad (3.37)$$

которое иногда называют *формулой Дюамеля* или *формулой вариации произвольной постоянной*. Применяя метод последовательных приближений, можно получить следующее представление $T(t)$ в виде ряда, сходящегося по норме:

$$T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t), \quad t \geq 0,$$

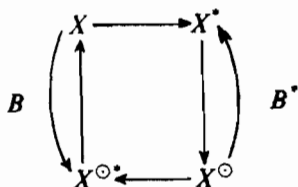
где при любом $k \geq 1$ и $x \in X$

$$T_k(t)x = \int_0^t T_0(t-s) B T_{k-1}(s)x ds. \quad (3.38)$$

В этом выражении, так же как и в (3.37), интеграл рассматривается как риманов интеграл.

В этом параграфе мы покажем, что в случае, когда X нерефлексивно, можно получить обобщение этой теоремы о возмущении, используя теорию сопряженных полугрупп, изложенную в предыдущем параграфе.

Предположим, что $(X, \|\cdot\|)$ — банахово пространство и $\{T_0(t)\}_{t \geq 0}$ — некоторая C_0 -полугруппа на X с генератором A_0 . Всюду до конца этого параграфа мы будем предполагать, что пространство X $\odot$ -рефлексивно относительно A_0 . Мы будем отождествлять X и $X^{\odot\odot}$ с помощью вложения i . Пусть далее B — ограниченный линейный оператор, отображающий X в $X^{\odot*}$. Тогда B^* отображает $X^{\odot**}$ в X^* , однако здесь нас интересует лишь его сужение на $X^{\odot}$. Ситуацию можно представить следующей диаграммой:



В этом случае формула вариации произвольной постоянной (3.37) не имеет смысла, если B действует в $X^{\odot*}$. Для того чтобы придать ей смысл, введем понятие слабого $*$ -интеграла Римана.

Пусть Z — банахово пространство и Z^* — сопряженное к нему. Если $u^*: [a, b] \rightarrow Z^*$ — функция, непрерывная в слабой $*$ -топологии, то можно определить риманов интеграл

$$\int_a^b \langle z, u^*(t) \rangle dt$$

для любого $z \in Z$. Следующая оценка очевидна:

$$\left| \int_a^b \langle z, u^*(t) \rangle dt \right| \leq (b-a) \|z\| \cdot \sup_{a \leq t \leq b} \|u^*(t)\|.$$

Заметим, что в силу принципа равномерной ограниченности каждая слабо $*$ -непрерывная функция ограничена по норме. Поэтому

отображение

$$z \rightarrow \int_a^b \langle z, u^*(t) \rangle dt$$

определяет непрерывный линейный функционал на Z , т. е. элемент из Z^* , который мы обозначим

$$\int_a^b u^*(t) dt.$$

По понятным соображениям мы будем называть этот интеграл *слабым $*$ -интегралом Римана*.

Вернемся к нашим рассуждениям. Если функция $f: [0, t] \rightarrow X^{\odot*}$ непрерывна по норме, то $s \rightarrow T_0^{\odot*}(t-s)f(s)$ — слабая $*$ -непрерывная функция на $[0, t]$ со значениями в $X^{\odot*}$; поэтому можно определить ее слабый $*$ -интеграл Римана. Справедлива следующая лемма.

Лемма 3.19. Пусть $f: [0, \tau] \rightarrow X^{\odot*}$ — непрерывная по норме функция. Тогда

$$t \rightarrow \int_0^t T_0^{\odot*}(t-s)f(s) ds$$

— непрерывная по норме X -значная функция на $[0, \tau]$. Если дополнительно $T_0(t)$ удовлетворяет (3.12), то

$$\left\| \int_0^t T_0^{\odot*}(t-s)f(s) ds \right\| \leq \frac{M}{\omega} (e^{\omega t} - 1) \sup_{0 \leq s \leq t} \|f(s)\|$$

при любом $t \in [0, \tau]$ ($\leq M \sup_{0 \leq s \leq t} \|f(s)\|$, если $\omega = 0$).

Доказательство. Положим для $t \in [0, \tau]$

$$F(t) = \int_0^t T_0^{\odot*}(t-s)f(s) ds.$$

Покажем сначала, что $F(t) \in X$, $t \in [0, \tau]$. Для этого надо доказать, что

$$T_0^{\odot*}(h)F(t) \rightarrow F(t), \quad h \downarrow 0,$$

в топологии равномерной сходимости. Непосредственные вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} \|T_0^{\odot*}(h)F(t) - F(t)\| \leq & \left\| \int_0^h T_0^{\odot*}(s)f(t-s)ds \right\| + \\ & + \left\| \int_t^{t+h} T_0^{\odot*}(s)f(t+h-s)ds \right\| + \\ & + \left\| \int_h^t T_0^{\odot*}(s)\{f(t+h-s) - f(t-s)\}ds \right\|. \end{aligned}$$

Очевидно, что первое и второе слагаемые при $h \downarrow 0$ имеют порядок $O(h)$. Последний член не превосходит

$$K \sup_{0 \leq s \leq t} \|f(t+h-s) - f(t-s)\|$$

при достаточно большом K . В силу непрерывности f эта величина также сходится к нулю при $h \downarrow 0$. Это доказывает, что $F(t) \in X$.

Для доказательства непрерывности по норме заметим, что

$$\begin{aligned} \|F(t+h) - F(t)\| \leq & \|T_0^{\odot*}(h)F(t) - F(t)\| + \\ & + \left\| \int_0^h T_0^{\odot*}(s)f(t+h-s)ds \right\|. \end{aligned}$$

Очевидно, что оба слагаемых справа стремятся к нулю при $h \downarrow 0$. Лемма доказана. ■

Предположим теперь, что B непрерывно отображает X в $X^{\odot*}$. Мы можем построить полугруппу $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ на X с помощью формулы вариации произвольной постоянной

$$T(t)x = T_0(t)x + \int_0^t T_0^{\odot*}(t-s)BT(s)x ds, \quad x \in X, \quad t \geq 0, \quad (3.39)$$

где интеграл понимается как слабый $*$ -интеграл Римана. С помощью леммы 3.19 легко доказывается следующая теорема о возмущении.

Теорема 3.20. Пусть $\{T_0(t)\}_{t \geq 0}$ есть C_0 -полугруппа на X с генератором A_0 и X $\odot$ -рефлексивно относительно A_0 . Пусть $B: X \rightarrow X^{\odot*}$ — ограниченный линейный оператор. Тогда на X существует единственная C_0 -полугруппа $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, такая, что (3.39) имеет место при всех $t \geq 0$ и $x \in X$. Более того, если $\{T_0(t)\}_{t \geq 0}$ удовлетворяет (3.12), то $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ удовлетворяет

оценке

$$\|T(t)\| \leq M e^{\bar{\omega} t}, \quad t \geq 0,$$

где $\bar{\omega} = \omega + M \|B\|$.

Как и в первоначальной ситуации, когда B действовал в X , мы можем получить $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ методом последовательных приближений:

$$T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t), \quad t \geq 0, \quad (3.40)$$

где

$$T_k(t) = \int_0^t T_0^{\odot*}(t-s) B T_{k-1}(s) ds, \quad t \geq 0, \quad k \geq 1. \quad (3.41)$$

Пусть $U(t) = T(t) - T_0(t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)$ или, иначе,

$$U(t)x = \int_0^t T_0^{\odot*}(t-s) B T x ds, \quad t \geq 0, \quad x \in X. \quad (3.42)$$

Тогда по лемме 3.19

$$\|U(t)\| \leq M (e^{\bar{\omega} t} - e^{\omega t}), \quad t \geq 0. \quad (3.43)$$

Важным следствием этой оценки является такой результат.

Теорема 3.21. Пространства $X^{\odot}$ и $X^{\odot\odot}$ для возмущенной полугруппы $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ совпадают с соответствующими пространствами для невозмущенной полугруппы $\{T_0(t)\}_{t \geq 0}$. В частности, X $\odot$ -рефлексивно относительно A , генератора полугруппы T .

Доказательство. Из соотношения $\|U^*(t)\| = \|U(t)\| \rightarrow 0$ при $t \downarrow 0$ следует, что $X^{\odot}$ не изменяется при возмущении оператором B . Далее, так как $X^{\odot}$ инвариантно относительно $T_0^*(t)$ и $T^*(t)$, это же верно и относительно $U^*(t)$. Пусть $U^{\odot}(t)$ — сужение $U^*(t)$ на $X^{\odot}$; тогда $T^{\odot}(t) = T_0^{\odot}(t) + U^{\odot}(t)$ и $T^{\odot*}(t) = T_0^{\odot*}(t) + U^{\odot*}(t)$. Ясно, что $\|U^{\odot}(t)\| = \|U^{\odot*}(t)\|$, $t \downarrow 0$, и поэтому отображение $t \rightarrow T^{\odot*}(t)x^{\odot*}$ непрерывно по норме тогда и только тогда, когда $x^{\odot*} \in X^{\odot\odot}$. Для завершения доказательства осталось заметить, что $X^{\odot\odot} = X$ по условию. ■

Осталось описать генератор возмущенной полугруппы. Это делается в следующей теореме.

Теорема 3.22. Пусть A — генератор полугруппы $\{T(t)\}_{t \geq 0}$. Тогда

- (a) $\mathcal{D}(A = \{x \in \mathcal{D}(A_0^{\odot*}): A_0^{\odot*}x + Bx \in X\},$
 $Ax = A_0^{\odot*}x + Bx, \quad x \in \mathcal{D}(A),$
 (b) $\mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(A_0^*),$
 $A^*x^{\odot} = A_0^*x^{\odot} + B^*x^{\odot}, \quad x^{\odot} \in \mathcal{D}(A^*).$
 (c) $\mathcal{D}(A^{\odot}) = \{x^{\odot} \in \mathcal{D}(A^*): A_0^*x^{\odot} + B^*x^{\odot} \in X^{\odot}\},$
 $A^{\odot}x^{\odot} = A_0^*x^{\odot} + B^*x^{\odot}, \quad x^{\odot} \in \mathcal{D}(A^{\odot}).$
 (d) $\mathcal{D}(A^{\odot*}) = \mathcal{D}(A_0^{\odot*}),$
 $A^{\odot*}x = A_0^{\odot*}x + Bx, \quad x \in \mathcal{D}(A^{\odot*}).$

Доказательство. Докажем последовательно (b), (c), (d) и (a).

(b) Из теоремы 3.16 (iv) мы знаем, что $\mathcal{D}(A^*) \subseteq X^{\odot}$. Легко видеть, что для любого $x^{\odot} \in X^{\odot}$

$$\frac{1}{h} U^*(h) x^{\odot} \rightarrow B^* x^{\odot} \quad \text{при } h \downarrow 0,$$

в слабой $*$ -топологии в X^* . Отсюда и из теоремы 3.16 (iii) получаем, что $x^{\odot} \in \mathcal{D}(A^*)$ тогда и только тогда, когда $h^{-1} (T_0^*(h) x^{\odot} - x^{\odot})$ сходится в слабой $*$ -топологии при $h \downarrow 0$. Это эквивалентно тому, что $x^{\odot} \in \mathcal{D}(A_0^*)$, и для таких $x^{\odot}$ получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} (T^*(h) x^{\odot} - x^{\odot}) &= \frac{1}{h} (T_0^*(h) x^{\odot} - x^{\odot}) + \\ &+ \frac{1}{h} U^*(h) x^{\odot} \rightarrow A_0^* x^{\odot} + B^* x^{\odot} \quad \text{при } h \downarrow 0. \end{aligned}$$

Это доказывает утверждение (b).

(c) теперь непосредственно следует из теоремы 3.16(v).

(d) получается аналогично (b).

(a) следует из (d) и равенства $A = A^{\odot\odot}$. ■

Из этого доказательства вытекает, что генератор A полугруппы $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ легко получается перестановкой пространств X^* , $X^{\odot}$ и $X^{\odot*}$. Важное следствие последней теоремы состоит в том, что область определения $\mathcal{D}(A^*)$ не зависит от возмущения B . Аналогичное замечание справедливо и для $\mathcal{D}(A^{\odot*})$. Однако область определения A (и также $A^{\odot}$), вообще говоря, зависит от B . В § 10.2 мы обсудим пример, где вся информация об операторе B содержится в области определения оператора A — ситуация совсем не такая исключительная, как может показаться на первый взгляд.

A posteriori ясно, что мы могли бы сначала рассмотреть $\{T_0^\odot(t)\}_{t \geq 0}$ как невозмущенную полугруппу (на $X^\odot$) и рассматривать $B^*: X^\odot \rightarrow X^*$ как возмущение. Если мы вычислим $S(t)$ по формуле вариации произвольной постоянной

$$S(t)x^\odot = T_0^\odot(t)x^\odot + \int_0^t T_0^*(t-s)B^*S(s)x^\odot ds, \quad (3.44)$$

то $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ будет C_0 -полугруппой на $X^\odot$ (даже если X не является $\odot$ -рефлексивным относительно A_0) и $S(t) = T^\odot(t)$, если X $\odot$ -рефлексивно.

Из теоремы 3.22(d) следует, что класс Фавара не меняется при возмущении полугруппы:

$$\text{Fav}(T_0) = \text{Fav}(T) = \mathcal{D}(A_0^{\odot*}).$$

В заключение параграфа отметим, что свойства компактности и неприводимости возмущенных полугрупп изучаются в § 9.3.

3.6. Коммутативные суммы m -диссипативных операторов

В этом параграфе мы изучим неоднородную задачу Коши

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt}(t) &= A_0 u(t) + f(t), \quad t > 0, \\ u(0) &= x, \end{aligned} \quad (3.45)$$

где A_0 есть m -диссипативный оператор в вещественном банаховом пространстве X и $x \in X$, $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow X$ заданы. Для этого будет использован результат работы Da Prato, Grisvard [1975] о сумме двух «коммутирующих» m -диссипативных операторов.

Пусть A и B — два m -диссипативных оператора в вещественном банаховом пространстве X . Мы будем считать, что A и B «коммутируют», т. е. выполняется равенство

$$E_\lambda^A E_\mu^B = E_\mu^B E_\lambda^A \quad \text{при всех } \lambda, \mu > 0. \quad (3.46)$$

Предложение 3.23. Пусть A и B суть m -диссипативные операторы, удовлетворяющие условию (3.46). Тогда оператор $A + B$ замыкаем.

Доказательство. Пусть последовательность $x_n \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$, $n \in \mathbb{Z}^+$, такова, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} (A + B)x_n = y \in X$. Мы должны доказать, что $y = 0$. Ясно, что

$$E_1^A E_1^B (A + B)x_n = E_1^B E_1^A A x_n + E_1^A E_1^B B x_n = E_1^B A_1 x_n + E_1^A B_1 x_n$$

и, следовательно,

$$E_1^A E_1^B y = \lim_{n \rightarrow \infty} E_1^A E_1^B (A+B) x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} E_1^B A_1 x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} E_1^A B_1 x_n = 0.$$

Значит, $E_1^B y = (I-A) E_1^A E_1^B y = 0$ и аналогично $y = (I-B) E_1^B y = 0$. ■

Если A и B m -диссипативны в X и B плотно определен, то в соответствии с теоремой 3.14 (iii) $A+B$ диссипативен. Если дополнительно A и B «коммутируют», то справедлива

Теорема 3.24. Пусть A и B — m -диссипативные операторы в X , удовлетворяющие условию (3.46). Если B плотно определен, то

- (i) $\mathcal{R}(I - h(A+B)) \supseteq \mathcal{D}(A) + \mathcal{D}(B)$ при любом $h > 0$.
- (ii) Оператор $\overline{A+B}$ m -диссипативен в X .
- (iii) При любом $\mu > 0$ оператор $A + B_\mu$ m -диссипативен в X и

$$\lim_{\mu \downarrow 0} E_h^{A+B_\mu} x = \overline{E_h^{A+B}} x$$

при всех $h > 0$ и $x \in X$.

- (iv) При любом $\lambda > 0$ оператор $A_\lambda + B$ m -диссипативен и

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} E_h^{A_\lambda+B} x = \overline{E_h^{A+B}} x$$

при всех $h > 0$ и $x \in X$.

Доказательство. Доказательство будет проведено в несколько шагов.

- (а) Для любых $x \in \mathcal{D}(A)$ и $\mu > 0$ имеем $E_\mu^B x \in \mathcal{D}(A)$ и $AE_\mu^B x = E_\mu^B Ax$. Действительно, если $x \in \mathcal{D}(A)$, положим $y = x - Ax$. Тогда $x = E_1^A y$ и

$$E_\mu^B x = E_\mu^B E_1^A y = E_1^A E_\mu^B y \in \mathcal{D}(A).$$

Поэтому

$$AE_\mu^B x = AE_1^A E_\mu^B y = A_1 E_\mu^B y = (E_1^A - I) E_\mu^B y = E_\mu^B A_1 y = E_\mu^B Ax.$$

Аналогично доказываются следующие утверждения.

- (b) $E_\lambda^A x \in \mathcal{D}(B)$ и $BE_\lambda^A x = E_\lambda^A Bx$ для любых $x \in \mathcal{D}(B)$ и $\lambda > 0$.

- (с) При любом $\mu > 0$ оператор $A + B_\mu$ m -диссипативен. Диссипативность $A + B_\mu$ следует из теоремы 3.14(iii), и в соответствии с предложением 3.7(iv) достаточно доказать, что $\mathcal{R}(I - (A+B_\mu)) = X$. Для $y \in X$ равенство $x = Ax + B_\mu x + y$ эквивалентно $(1 + \mu)x = \mu Ax + E_\mu^B x + \mu y$ или

$$x = R_\mu x, \quad (3.47)$$

где

$$R_\mu x := E_{\mu/(1+\mu)}^A \left(\frac{1}{1+\mu} E_\mu^B x + \frac{\mu}{1+\mu} y \right). \quad (3.48)$$

Ясно, что $R_\mu \in \text{Lip}(X)$ и $\|R_\mu\|_{\text{Lip}} \leq (1+\mu)^{-1} < 1$. Поэтому по теореме Банаха о неподвижной точке существует такой $x \in X$, что $x = R_\mu x$. Следовательно, $A + B_\mu$ m -диссипативен.

(d) Аналогично $A_\lambda + B$ m -диссипативен при любом $\lambda > 0$.

(e) Пусть при $y \in \mathcal{D}(B)$ и $\mu > 0$ элемент x_μ удовлетворяет равенству

$$x_\mu = Ax_\mu + B_\mu x_\mu + y. \quad (3.49)$$

Покажем, что $\lim_{\mu \rightarrow 0} x_\mu$ существует. Положим

$$L_\mu = A + B_\mu, \quad L = A + B \quad (3.50)$$

и

$$S_\mu = I - \frac{1}{1+\mu} E_{\mu/(1+\mu)}^A E_\mu^B. \quad (3.51)$$

Из (3.48) и (3.51) следует, что

$$x_\mu = S_\mu^{-1} \left(\frac{\mu}{1+\mu} y \right). \quad (3.52)$$

Кроме того, так как при любых $\lambda, \mu, \nu > 0$

$$E_\lambda^A E_\nu^B S_\mu = S_\mu E_\lambda^A E_\nu^B,$$

то

$$E_\lambda^A E_\nu^B S_\mu^{-1} = S_\mu^{-1} E_\lambda^A E_\nu^B, \quad \lambda, \mu, \nu > 0. \quad (3.53)$$

Из (3.53), (3.46) для $y \in \mathcal{D}(B)$ следует, как и в шаге (a), что $x_\mu \in \mathcal{D}(B)$ и

$$Bx_\mu = (I - L_\mu)^{-1} By. \quad (3.54)$$

Так как $x_\mu \in \mathcal{D}(A)$, то $x_\mu \in \mathcal{D}(L) = \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$ и

$$\begin{aligned} (I - L)(I - L_\mu)^{-1} y - y &= \\ &= (I - L_\mu)(I - L_\mu)^{-1} y + (L_\mu - L)(I - L_\mu)^{-1} y - y = \\ &= (B_\mu - B)(I - L_\mu)^{-1} y = (I - L_\mu)^{-1} (B_\mu - B) y. \end{aligned}$$

А в силу того, что $\|(I - L_\mu)^{-1}\| \leq 1$, получаем, что

$$\|(I - L)(I - L_\mu)^{-1} y - y\| \leq \|By - B_\mu y\|.$$

И поскольку $\overline{\mathcal{D}(B)} = X$, то $\lim_{\mu \downarrow 0} \|By - B_\mu y\| = 0$ и $\lim_{\mu \downarrow 0} \|(I - L)x_\mu - y\| = 0$. Кроме того,

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \downarrow 0} \|B_\mu x_\mu - Bx_\mu\| &= \\ &= \lim_{\mu \downarrow 0} \|(x_\mu - Ax_\mu - Bx_\mu) - (x_\mu - Ax_\mu - B_\mu x_\mu)\| = \\ &= \lim_{\mu \downarrow 0} \|(I - L)x_\mu - y\| = 0. \end{aligned}$$

Положим $z_\mu = B_\mu x_\mu - Bx_\mu$. Тогда $x_\mu = Ax_\mu + Bx_\mu + y + z_\mu$. Так как $A + B$ диссипативен, то

$$\|x_\mu - x_\nu\| \leq \|(y + z_\mu) - (y + z_\nu)\| = \|z_\mu - z_\nu\|.$$

Следовательно, $\{x_\mu\}$ есть сеть Коши и $\lim_{\mu \downarrow 0} x_\mu$ существует.

(f) Пусть при $\tilde{y} \in X$ и $\mu > 0$ элемент $\tilde{x}_\mu$ удовлетворяет равенству

$$\tilde{x}_\mu = Ax_\mu + B_\mu \tilde{x}_\mu + \tilde{y}. \quad (3.55)$$

Мы утверждаем, что $\lim_{\mu \downarrow 0} \tilde{x}_\mu$ существует. Пусть для $y \in \mathcal{D}(B)$ и $\mu > 0$ элемент x_μ удовлетворяет (3.49). Тогда, поскольку $A + B_\mu$ диссипативен,

$$\begin{aligned} \|\tilde{x}_\mu - \tilde{x}_\nu\| &\leq \|\tilde{x}_\mu - x_\mu\| + \|x_\mu - x_\nu\| + \|x_\nu - \tilde{x}_\nu\| \leq \\ &\leq 2\|\tilde{y} - y\| + \|x_\mu - x_\nu\|. \end{aligned}$$

Так как $\overline{\mathcal{D}(B)} = X$ и $\{x_\mu\}$ — сеть Коши, то и $\{\tilde{x}_\mu\}$ — также сеть Коши и $\lim_{\mu \downarrow 0} \tilde{x}_\mu$ существует.

(g) Если $y \in \mathcal{D}(B)$, то $x := \lim_{\mu \downarrow 0} (I - L_\mu)^{-1}y$ принадлежит $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$ и

$$x = Ax + Bx + y. \quad (3.56)$$

Положим $x_\mu = (I - L_\mu)^{-1}y$. Мы знаем, что $\lim_{\mu \downarrow 0} x_\mu$ существует. Определим $x = \lim_{\mu \downarrow 0} x_\mu$. Нам также известно, что $x_\mu \in \mathcal{D}(B)$ и выполнено равенство (3.54). Отсюда следует, что $\lim_{\mu \downarrow 0} (I - L_\mu)^{-1}By$ существует и, значит, $x \in \mathcal{D}(B)$ и $Bx = \lim_{\mu \downarrow 0} Bx_\mu$ в силу замкнутости B . Теперь, так как $\lim_{\mu \downarrow 0} \|B_\mu x_\mu - Bx_\mu\| = 0$, то

$$\lim_{\mu \downarrow 0} Ax_\mu = \lim_{\mu \downarrow 0} (x_\mu - B_\mu x_\mu - y) = x - Bx - y.$$

Поэтому в силу замкнутости A имеем $x \in \mathcal{D}(A)$ и выполняется (3.56).

(h) $\mathcal{R}(I - h(A + B)) \supseteq \mathcal{D}(A) + \mathcal{D}(B)$ при любом $h > 0$. Так как hA и hB удовлетворяют тем же условиям, что A и B ,

и так как $\mathcal{D}(hA) = \mathcal{D}(A)$ и $\mathcal{D}(hB) = \mathcal{D}(B)$, достаточно доказать утверждение только для $h = 1$. Из (g) следует, что $\mathcal{R}(I - (A + B)) \supseteq \mathcal{D}(B)$. Пусть $y \in \mathcal{D}(A)$ и x_μ удовлетворяет (3.49). Положим $x = \lim_{\mu \downarrow 0} x_\mu$. Из (3.53), (3.46) и включения $y \in \mathcal{D}(A)$ вытекает, что

$$Ax_\mu = (I - L_\mu)^{-1} Ay.$$

Поэтому $\lim_{\mu \downarrow 0} Ax_\mu$ существует и в силу замкнутости оператора A имеем $x \in \mathcal{D}(A)$ и $Ax = \lim_{\mu \downarrow 0} Ax_\mu$. Значит,

$$\lim_{\mu \downarrow 0} B_\mu x_\mu = \lim_{\mu \downarrow 0} (x_\mu - Ax_\mu - y) = x - Ax - y$$

и

$$\lim_{\mu \downarrow 0} \|x_\mu - E_\mu^B x_\mu\| = \lim_{\mu \downarrow 0} \mu \|B_\mu x_\mu\| = 0.$$

Следовательно, $\lim_{\mu \downarrow 0} E_\mu^B x_\mu = x$. Поскольку B замкнут и

$$\lim_{\mu \downarrow 0} BE_\mu^B x_\mu = x - Ax - y,$$

то $x \in \mathcal{D}(B)$ и x удовлетворяет (3.56).

(i) $\overline{A+B}$ m -диссипативен. Действительно, оператор $A+B$ допускает замыкание, диссипативен и $\mathcal{R}(I - h(A+B)) \supseteq \mathcal{D}(B)$ при $h > 0$. Поэтому $\overline{A+B}$ диссипативен и $\mathcal{R}(I - h(\overline{A+B})) \supseteq \mathcal{D}(B)$ замкнута в силу предложения 3.7 (i), (iii). Кроме того, $\mathcal{R}(I - h(A+B)) \supseteq \mathcal{D}(B)$ в силу (h) и $\mathcal{D}(B) = X$ по предположению. Отсюда

$$\mathcal{R}(I - h(\overline{A+B})) \supseteq \overline{\mathcal{R}(I - h(A+B))} \supseteq \overline{\mathcal{D}(B)} = X.$$

Следовательно, $\overline{A+B}$ m -диссипативен.

(j)

$$\lim_{\mu \downarrow 0} E_h^{A+B_\mu} x = E_h^{\overline{A+B}} x$$

при всех $x \in X$ и $h > 0$. Учитывая теорему 2.7(i), достаточно доказать утверждение для $h = 1$. Из (g), замечая, что $A + B \subseteq \overline{A+B}$, мы получаем

$$\lim_{\mu \downarrow 0} E_1^{A+B_\mu} x = E_1^{\overline{A+B}} x$$

для $x \in \mathcal{D}(B)$. Теперь утверждение следует из того, что $E_1^{A+B_\mu}$ и $E_1^{\overline{A+B}}$ — сжатия, и из плотности $\mathcal{D}(B)$ в X .

(k) $\lim_{\lambda \downarrow 0} E_h^{A_\lambda+B}$ существует для любых $h > 0$ и $x \in X$. Снова достаточно проверить это утверждение для $h = 1$. Так как

$A_\lambda + B$ m -диссипативен, то

$$E_1^{A_\lambda + B} x = \int_0^\infty e^{-t} T_{A_\lambda + B}(t) x dt$$

в силу теоремы 3.1. Кроме того, легко проверяется, что

$$\lim_{\mu \downarrow 0} E_h^{A_\lambda + B_\mu} x = E_h^{A_\lambda + B} x$$

при любых $h > 0$ и $x \in X$. (Фактически это частный случай теоремы 3.24 (iii), но, пользуясь ограниченностью A_λ , доказательство можно упростить.) Отсюда по теореме 3.4 следует, что

$$\lim_{\mu \downarrow 0} \max_{t \in [0, s]} \|T_{A_\lambda + B}(t) x - T_{A_\lambda + B_\mu}(t) x\| = 0$$

при всех $s > 0$ и $x \in X$. Но $T_{A_\lambda + B_\mu}(t)x = T_{A_\lambda}(t)T_{B_\mu}(t)x$ для всех $x \in X$, $t \geq 0$, $\lambda, \mu > 0$, так как $A_\lambda B_\mu = B_\mu A_\lambda$. Поэтому

$$x_\lambda := E_1^{A_\lambda + B} x = \int_0^\infty e^{-t} T_{A_\lambda}(t) T_B(t) x dt.$$

Покажем, что $\{x_\lambda\}$ есть сеть Коши. Пусть $\lambda, \nu, \varepsilon > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \|x_\lambda - x_\nu\| &\leq \left\| \int_0^M e^{-t} (T_{A_\lambda}(t) - T_{A_\nu}(t)) T_B(t) x dt \right\| + 2 \int_M^\infty e^{-t} dt \|x\| = \\ &= \left\| \int_0^M e^{-t} (T_{A_\lambda}(t) - T_{A_\nu}(t)) T_B(t) x dt \right\| + 2e^{-M} \|x\| \end{aligned}$$

при произвольном $M > 0$. Выберем M так, чтобы $2e^{-M} \|x\|$ было меньше, чем $\varepsilon/2$. Остается доказать, что

$$x_{\lambda, M} := \int_0^M T_{A_\lambda}(t) e^{-t} T_B(t) x dt$$

есть сеть Коши. Так как $t \rightarrow e^{-t} T_B(t) x \in C([0, M]; X)$, то существуют такие $n \in \mathbb{Z}^+$ и $y_1, \dots, y_n \in X$, что

$$\|e^{-t} T_B(t) x - y_i\| \leq (2M)^{-1} \varepsilon/4 \text{ для } t \in [(i-1)M/n, iM/n], \\ i = 1, \dots, n.$$

Тогда

$$\|x_{\lambda, M} - x_{\nu, M}\| \leq \varepsilon/4 + \sum_{i=1}^n \left\| \int_{(i-1)M/n}^{iM/n} (T_{A_\lambda}(t) y_i - T_{A_\nu}(t) y_i) dt \right\|.$$

Достаточно доказать, что

$$\int_{(i-1)M/n}^{iM/n} T_{A_\lambda}(t) y_i dt$$

есть сеть Коши при $i = 1, \dots, n$. Заметим, что

$$\int_{(i-1)M/n}^{iM/n} T_{A_\lambda}(t) y_i dt = \int_0^{iM/n} T_{A_\lambda}(t) y_i dt - \int_0^{(i-1)M/n} T_{A_\lambda}(t) y_i dt,$$

и, значит, достаточно показать, что $\int_0^t T_{A_\lambda}(s) y ds$ — сеть Коши при любых $t > 0$ и $y \in X$. Мы знаем (см. доказательство теоремы 3.1), что $v_\lambda(t) := \int_0^t T_{A_\lambda}(s) y ds$ удовлетворяет условиям

$$\frac{dv_\lambda}{dt}(t) = A_\lambda v_\lambda(t) + y, \quad t \geq 0,$$

$$v_\lambda(0) = 0.$$

Положим $C_\lambda x = A_\lambda x + y$ для $x \in X$. Тогда C_λ — нелинейный m -диссипативный липшиц-непрерывный оператор в X . В силу предложения 2.11 $v_\lambda(t) = T_{C_\lambda}(t) 0$, $t \geq 0$, $\lambda > 0$. Покажем, что

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} E_h^{C_\lambda} f = E_h^C f$$

для любых $f \in X$, $h > 0$ с $Cz := Az + y$ для любого $z \in \mathcal{D}(A)$. (Заметим, что C также нелинеен и m -диссипативен в X .) Действительно, пусть при некоторых $f \in X$, $h > 0$ элемент x_λ таков, что

$$x_\lambda = h(A_\lambda x_\lambda + y) + f$$

или, что то же самое,

$$x_\lambda = hA_\lambda x_\lambda + hy + f.$$

Тогда

$$x_\lambda = E_h^{A_\lambda}(hy + f)$$

и в силу предложения 2.8

$$x := \lim_{\lambda \downarrow 0} x_\lambda = E_h^A(hy + f).$$

Значит, $x \in \mathcal{D}(A)$ и $x = hAx + hy + f$ или $x = hCx + f$, т. е. $x = E_h^C f$. Нужное утверждение доказано. Теперь по теореме 2.7 получаем

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} v_\lambda(t) = T_C(t) 0, \quad t \geq 0.$$

Итак, мы доказали, что $\lim_{\lambda \downarrow 0} E_1^{A_\lambda + B} x$ существует при любом $x \in X$.

(1) Если $y \in \mathcal{D}(B)$, то $x = \lim_{\lambda \downarrow 0} (I - (A_\lambda + B))^{-1} y$ принадлежит $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$ и выполняется равенство (3.56). Пусть x_λ удовлетворяет условию

$$x_\lambda = A_\lambda x_\lambda + Bx_\lambda + y.$$

Тогда, так же, как и в (с), мы получаем, что

$$x_\lambda = E_{\lambda/(1+\lambda)}^B \left(\frac{1}{1+\lambda} E_\lambda^A x_\lambda + \frac{\lambda}{1+\lambda} y \right),$$

и $x_\lambda \in \mathcal{D}(B)$. Более того,

$$Bx_\lambda = (I - (A_\lambda + B))^{-1} By,$$

и, значит, $\lim_{\lambda \downarrow 0} Bx_\lambda$ существует в силу утверждения (к). Отсюда в силу замкнутости B получаем, что $x \in \mathcal{D}(B)$ и $Bx = \lim_{\lambda \downarrow 0} Bx_\lambda$. Тогда

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} A_\lambda x_\lambda = \lim_{\lambda \downarrow 0} (x_\lambda - Bx_\lambda - y) = x - Bx - y$$

и

$$\|E_\lambda^A x_\lambda - x_\lambda\| = \lambda \|A_\lambda x_\lambda\|$$

стремится к нулю при $\lambda \downarrow 0$. Так как $A_\lambda x_\lambda = A E_\lambda^A x_\lambda$ и A замкнут, получаем, что $x \in \mathcal{D}(A)$, $Ax = \lim_{\lambda \downarrow 0} A_\lambda x_\lambda$ и $x = Ax + Bx + y$.

(m) При любых $x \in X$ и $h > 0$

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} E_h^{A_\lambda + B} x = E_h^{\overline{A+B}} x.$$

Доказательство аналогично доказательству шага (j). Это завершает доказательство теоремы. ■

Замечание. В действительности ч. (iv) теоремы 3.24 не содержится в работе Da Prato, Grisvard [1975].

Замечание. Если A и B m -диссипативны в X и удовлетворяют условию (3.46), то B_0 , сужение B на $X_0 := \mathcal{D}(B)$, m -диссипативен в X и плотно определен в соответствии с предложением 3.8. Кроме того, A_0 , сужение A на X_0 , m -диссипативен в X_0 . Операторы A_0 и B_0 удовлетворяют условию (3.46) в X_0 . Поэтому мы можем применить теорему 3.24 к A_0 и B_0 в X . В частности, $\overline{A_0 + B_0}$ m -диссипативен в X_0 .

В последней части этого параграфа мы покажем, как использовать теорему 3.24 для решения задачи (3.45).

Рассмотрим неоднородную задачу Коши (3.45) с замкнутым оператором A_0 в вещественном банаховом пространстве $(X, \|\cdot\|)$, $x \in X$ и $f \in L_1(0, T; X)$ при некотором $T > 0$. Здесь $L_1(0, T; X)$ — пространство интегрируемых по Бохнеру функций на $[0, T]$ с обычной нормой

$$\|f\|_{L_1(0, T; X)} = \int_0^T \|f(t)\| dt.$$

Будем говорить, что u — *сильное решение* (3.45) в $L_1(0, T; X)$, если

- (i) $u \in W_{1,1}(0, T; X)$ (следовательно, и $u \in C([0, T]; X)$),
- (ii) $u(t) \in \mathcal{D}(A_0)$, $t \in [0, T]$,
- (iii) $u'(t) = A_0 u(t) + f(t)$ п. в. на $[0, T]$,
- (iv) $u(0) = x$.

Замечания. (i) Так же как и в предложении 3.3(ii), доказывается, что если A_0 m -диссипативен, $x = 0$ и $f = 0$, то $u(t) = 0$ п. в. на $[0, T]$. Следовательно, (3.45) имеет по крайней мере одно сильное решение в $L_1(0, T; X)$, если A_0 m -диссипативен.

(ii) Если u — сильное решение (3.45), то $v(t) = e^{\omega t} u(t)$, $\omega \in \mathbb{R}$, $t \in [0, T]$, — сильное решение (3.45) с оператором $A_0 + \omega I$ вместо A_0 и правой частью $t \rightarrow e^{\omega t} f(t)$ вместо f .

(iii) Если u — сильное решение (3.45) в $L_1(0, T; X)$, то u также есть сильное решение (3.45) в $L_1(0, T; X)$, где X снабжено эквивалентной нормой.

Нам будет удобно вместо (3.45) рассматривать задачу

$$\begin{aligned} u(t) &= A_0 u(t) - \frac{du}{dt}(t) + f(t), \\ u(0) &= x, \end{aligned} \tag{3.57}$$

и всюду далее мы будем предполагать, что A_0 m -диссипативен в X .

Чтобы доказать существование сильного решения (3.57) в $L_1(0, T; X)$, введем следующие операторы A и B в $L_1(0, T; X)$. Положим

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(A) &:= \{u \in L_1(0, T; X) : u(t) \in \mathcal{D}(A_0) \text{ п. в. в } [0, T] \\ &\text{и существует такое } v \in L_1(0, T; X), \text{ что} \\ &v(t) = A_0 u(t) \text{ п. в. в } [0, T]\}. \end{aligned}$$

Для $u \in \mathcal{D}(A)$ определим $(Au)(t) = A_0 u(t)$ п. в. в $[0, T]$. Нетрудно проверяется, что A m -диссипативен в $L_1(0, T; X)$. Положим

$$\mathcal{D}(B) := \{u \in W_{1,1}(0, T; X) : u(0) = 0\}$$

и

$$Bu = -\frac{du}{dt} \quad \text{для } u \in \mathcal{D}(B).$$

Можно показать, что B m -диссипативен и плотно определен в $L_1(0, T; X)$. Предполагая, что $x \in \mathcal{D}(A_0)$, и обозначая $v(t) = u(t) - x$, мы можем записать (3.57) в виде

$$\begin{aligned} v(t) &= A_0 v(t) - \frac{dv}{dt}(t) + f(t) - x + A_0 x, \quad t \in [0, T], \\ v(0) &= 0. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Положим для удобства $g(t) = f(t) - x + A_0 x$. Тогда u есть сильное решение (3.57) в $L_1(0, T; X)$ в том и только том случае, когда v удовлетворяет равенству

$$v = Av + Bv + g. \quad (3.59)$$

Легко проверить, что (3.57) выполнено, и тогда по теореме 3.24 уравнение (3.59) имеет решение $v \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$ при любом $g \in \mathcal{D}(A) + \mathcal{D}(B)$. В частности, если $f \in W_{1,1}(0, T; X)$ и $f(0) + A_0 x \in \mathcal{D}(A_0)$, то (3.57) имеет сильное решение в $L_1(0, T; X)$. Заметим, что так как A_0 замкнут, $\mathcal{D}(A_0)$, оснащенное нормой графика, есть банахово пространство, которое мы обозначим через X_{A_0} , и $\mathcal{D}(A) = L_1(0, T; X_{A_0})$. Если $f \in L_1(0, T; X_{A_0})$ и $A_0 x \in \mathcal{D}(A_0)$, то (3.57) имеет сильное решение в $L_1(0, T; X)$. Если $x \notin \mathcal{D}(A_0)$ и $f = 0$, то можно сказать, что функция $t \rightarrow e^{-t} T_{A_0}(t)x$ будет обобщенным решением (3.57). Заметим, что

$$e^{-t} T_{A_0}(t)x = \lim_{\lambda \downarrow 0} e^{-t} T_{A_0, \lambda}(t)x,$$

где $A_{0, \lambda}$ — аппроксимация Иосиды оператора A_0 . Если $x = 0$ и $f \in L_1(0, T; X)$, то при любом $\lambda > 0$ задача

$$\begin{aligned} u(t) &= A_{0, \lambda} u(t) - \frac{du}{dt}(t) + f(t), \\ u(0) &= 0 \end{aligned}$$

имеет единственное решение u_λ в $W_{1,1}(0, T; X)$ и по теореме 3.24 (iv) в $L_1(0, T; X)$ существует $\lim_{\lambda \downarrow 0} u_\lambda$. Действительно, при $\lambda > 0$ нетрудно проверить, что

$$u_\lambda(t) = \int_0^t T_{A_0, \lambda}(t-s) f(s) ds, \quad t \in [0, T].$$

Если $\overline{\mathcal{D}(A_0)} = X$, то

$$u(t) = \lim_{\lambda \downarrow 0} u_\lambda(t) = \int_0^t T_{A_0}(t-s) f(s) ds.$$

Тогда для $x \in X$ и $f \in L_1(0, T; X)$

$$u(t) := T_{A_0}(t)x + \int_0^t T_{A_0}(t-s)f(s)ds$$

обычно называют *обобщенным решением* (3.45). Если $\overline{\mathcal{D}(A_0)} \neq X$, то для $x \in \overline{\mathcal{D}(A_0)}$ и $f \in L_1(0, T; X)$ функция

$$u(t) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \left[T_{A_0, \lambda}(t)x + \int_0^t T_{A_0, \lambda}(t-s)f(s)ds \right]$$

корректно определена,

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} T_{A_0, \lambda}(t)x = T_{A_0}(t)x,$$

однако

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \int_0^t T_{A_0, \lambda}(t-s)f(s)ds \neq \int_0^t T_{A_0}(t-s)f(s)ds,$$

так как $T_{A_0}(t): \overline{\mathcal{D}(A_0)} \rightarrow \overline{\mathcal{D}(A_0)}$. Это «решение» есть предел сильных решений в $L_1(0, T; X)$ по теореме 3.24, т. е. существуют такие $x_n \in \mathcal{D}(A_0)$, $f_n \in L_1(0, T; X)$, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ в X , $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ в $L_1(0, T; X)$ и сильные решения u_n в $L_1(0, T; X)$ задач

$$\frac{du}{dt} = A_0 u + f_n,$$

$$u(0) = x_n$$

сходятся к u в $L_1(0, T; X)$. Можно показать, что функция u принадлежит $C([0, T]; X)$. Очевидно, что можно применить теорему 3.24 в других пространствах, кроме $L_1(0, T; X)$, и получить другие результаты о регулярности, но здесь мы этого делать не будем.

Мы завершим этот параграф обсуждением связи между теоремой 3.24 и понятием n -параметрической полугруппы.

Определение 3.25. Семейство ограниченных линейных операторов $\{T(t): t \in \mathbb{R}_+^n\}$ в банаховом пространстве X называется C_0 - n -параметрической полугруппой ограниченных линейных операторов в X , если

$$(i) \quad T(t+s) = T(t)T(s), \quad t, s \in \mathbb{R}_+^n,$$

$$(ii) \quad T(0) = I,$$

$$(iii) \quad \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \in \mathbb{R}_+^n}} T(t)x = x \quad \text{для любого } x \in X.$$

Отметим следующий результат.

Предложение 3.26. Пусть $\{T(t): t \in \mathbb{R}_+^n\}$ есть C_0 - n -параметрическая полугруппа ограниченных линейных операторов в X . Тогда

(i) $T(t) = \prod_{k=1}^n T_k(t_k)$, где $t = (t_1, \dots, t_k, \dots, t_n)$ и $T_k(t_k): X \rightarrow X$ — однопараметрические C_0 -полугруппы в X при $k = 1, \dots, n$. Через A_k мы обозначим генератор полугруппы T_k с областью определения $\mathcal{D}(A_k)$, $k = 1, \dots, n$.

(ii) Если $f \in \mathcal{D}(A_k)$, то $T(t)f \in \mathcal{D}(A_k)$ для $f \in \mathbb{R}_+^n$ и $A_k T(t)f = T(t)A_k f$ для $t \in \mathbb{R}_+^n$, $k = 1, \dots, n$.

(iii) $\bigcap_{k=1}^n \mathcal{D}(A_k)$ плотно в X и является банаховым пространством с нормой

$$\|f\| = \|f\| + \sum_{k=1}^n \|A_k f\|.$$

(iv) Если $f \in \mathcal{D}(A_j) \cap \mathcal{D}(A_j A_k)$, то $f \in \mathcal{D}(A_k A_j)$ и $A_k A_j f = A_j A_k f$, $j \neq k$.

В частности, если A и B m -диссипативны, «коммутируют» в смысле (3.46) и плотно определены, то они — «частные» генераторы (производные) C_0 -2-параметрической полугруппы сжатий:

$$T(t_1, t_2) := T_A(t_1) T_B(t_2) = T_B(t_2) T_A(t_1).$$

Кроме того, по теореме 3.24 $\overline{A+B}$ m -диссипативен, плотно определен и является генератором полугруппы $t \rightarrow T(t, t) =: T(t)$. Далее

$$T(t)x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[T_A\left(\frac{t}{n}\right) T_B\left(\frac{t}{n}\right) \right]^n x = \lim_{n \rightarrow \infty} [E_{t/n}^A E_{t/n}^B]^n x.$$

Справедливо более общее утверждение:

Теорема 3.27. Пусть A и B — плотно определенные m -диссипативные операторы в банаховом пространстве X . Если $\overline{A+B}$ также плотно определен и m -диссипативен, то

$$T_{\overline{A+B}}(t)x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[T_A\left(\frac{t}{n}\right) T_B\left(\frac{t}{n}\right) \right]^n x, \quad (3.60)$$

$$T_{\overline{A+B}}(t)x = \lim_{n \rightarrow \infty} [E_{t/n}^A E_{t/n}^B]^n x \quad (3.61)$$

для любого $x \in X$ равномерно на каждом ограниченном t -интервале.

Доказательство. Учитывая теорему 2.14, достаточно показать, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \|E_h^{C_\lambda} x - E_h^{\overline{A+B}} x\| = 0 \quad (3.62)$$

для всех $x \in X$ и некоторого $h > 0$. Здесь $C_\lambda := \lambda^{-1} (T_A(\lambda) T_B(\lambda) - I)$, $\lambda > 0$, для (3.60) и $C_\lambda := \lambda^{-1} (E_\lambda^A E_\lambda^B - I)$, $\lambda > 0$, для (3.61). Заметим, что операторы $T_A(\lambda) T_B(\lambda)$ и $E_\lambda^A E_\lambda^B$ — сжатия. Доказательство (3.62) будет дано в § 3.7, точнее, в предложениях 3.33 и 3.34. ■

Простой пример, где выполняются условия теоремы 3.27, — случай относительно ограниченного возмущения оператора A .

Теорема 3.28. Пусть A m -диссипативен и плотно определен в X , а B диссипативен в X . Если $\mathcal{D}(B) \supseteq \mathcal{D}(A)$ и $\|Bx\| \leq a \|Ax\| + b \|x\|$ для любого $x \in \mathcal{D}(A)$ и некоторых $a \in [0, 1)$ и $b \geq 0$, то $A + B$ m -диссипативен и плотно определен.

Доказательство. Ясно, что по теореме 3.14 $A + B$ плотно определен и диссипативен. В силу предложения 3.7 достаточно доказать, что $\mathcal{R}(I - (A + B)) = X$. Предположим, что $A + \lambda B$ m -диссипативен при некотором $\lambda \in [0, 1)$. Рассмотрим уравнение

$$x = (A + \lambda B)x + hBx + f \quad (3.63)$$

при $h > 0$ и $f \in X$. Обозначив $C = A + \lambda B$ и $y = x - Cx$, запишем (3.63) в эквивалентной форме:

$$y = hBE_1^C y + f. \quad (3.64)$$

Если BE_1^C ограничен в X и $\|BE_1^C\|$ ограничена равномерно по $\lambda \in [0, 1)$, то (3.64) однозначно разрешимо при любом $f \in X$, если

$$h \|BE_1^C\| < 1. \quad (3.65)$$

Тогда, взяв сначала $\lambda = 0$ и $h_0 > 0$, удовлетворяющее (3.65), мы сможем решить (3.64), а затем и (3.63) с $\lambda = h_0$, $h = h_0$, а потом по индукции получим m -диссипативность оператора $A + \lambda B$ при всех $\lambda \in [0, 1 + h_0)$. Остается оценить норму BE_1^C . Для $x \in X$ имеем

$$\|BE_1^C x\| \leq a \|AE_1^C x\| + b \|E_1^C x\|$$

по предположению. Однако

$$\begin{aligned} \|AE_1^C x\| &= \|-AE_1^C x\| = \|(I - A - \lambda B)E_1^C x - (I - \lambda B)E_1^C x\| = \\ &= \|x + \lambda BE_1^C x - E_1^C x\| \leq \\ &\leq \lambda \|BE_1^C x\| + 2\|x\| \leq \|BE_1^C x\| + 2\|x\|. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|BE_1^C x\| \leq a \|BE_1^C x\| + (2a + b) \|x\|$$

и

$$\|BE_1^C\| \leq (1 - a)^{-1} (2a + b),$$

где правая часть не зависит от λ . ■

Следствие 3.29. Пусть A m -диссипативен и плотно определен в X , а B диссипативен и $\mathcal{D}(B) \supseteq \mathcal{D}(A)$. Если существуют такие $a, b \geq 0$ и $\alpha \in (0, 1)$, что

$$\|Bx\| \leq a \|Ax\|^\alpha \|x\|^{1-\alpha} + b \|x\|$$

при всех $x \in \mathcal{D}(A)$, то $A + B$ m -диссипативен и плотно определен.

Доказательство. Из неравенства Юнга следует, что

$$\|Ax\|^\alpha \|x\|^{1-\alpha} \leq \alpha \varepsilon^{\alpha-1} \|Ax\| + (1 - \alpha) \varepsilon^{-(1-\alpha)^{-1}} \|x\|$$

для любых $\varepsilon > 0$ и $x \in \mathcal{D}(A)$. Выбрав $\varepsilon > 0$ так, чтобы $\alpha \varepsilon^{\alpha-1} < 1$, мы можем применить теорему 3.28. ■

3.7. C_0 -полугруппы в комплексных банаховых пространствах

Пусть $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ — полугруппа ограниченных линейных операторов в вещественном банаховом пространстве $(X, \|\cdot\|)$, удовлетворяющая (3.11) (а значит, и (3.12)). Мы уже видели в § 3.2, что если $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ сильно непрерывна, то (3.11) — следствие принципа равномерной ограниченности. Положим

$$\omega_0(T) := \inf \{ \omega \in \mathbb{R} : \exists M \geq 1 \forall t \geq 0 \|T(t)\| \leq M e^{\omega t} \}. \quad (3.66)$$

$\omega_0(T)$ называется *типом полугруппы* $T(t)$. Ясно, что $\omega_0(T) < \infty$, однако $\omega_0(T)$ может равняться $-\infty$. Заметим, что $\omega_0(T^*) = \omega_0(T)$, где T^* — полугруппа, сопряженная к T . Если T — сжимающая полугруппа, то $\omega_0(T) \leq 0$. Если в X ввести другую, но эквивалентную норму, то тип полугруппы T не изменится. Тип можно определить и другим способом.

Предложение 3.30. Пусть $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ — полугруппа, удовлетворяющая (3.12). Тогда

$$\omega_0(T) = \inf_{t > 0} t^{-1} \ln \|T(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \ln \|T(t)\|.$$

Доказательство. Если $\omega_0(T) = -\infty$, то для любого $n \in \mathbb{N}$ существует такое $M_n \geq 1$, что $\|T(t)\| \leq M_n e^{-nt}$. Следовательно,

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \ln \|T(t)\| \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \ln M_n - n = -n.$$

Поэтому

$$\inf_{t>0} t^{-1} \ln \|T(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \ln \|T(t)\| = -\infty.$$

Если $\omega_0(T) > -\infty$, то для любых $\varepsilon > 0$ и $n \in \mathbb{Z}^+$ существует такая последовательность $t_n > 0$, что $\|T(t_n)\| > ne^{(\omega_0(T) - \varepsilon)t_n}$. Ясно, что $\sup_{n \in \mathbb{Z}^+} t_n = \infty$. Отсюда

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \ln \|T(t)\| \geq \omega_0(T) - \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\omega_0(T) \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \ln \|T(t)\|.$$

Положим $p(t) = \ln \|T(t)\|$. Заметим, что

$$\begin{aligned} p(t+s) &= \ln \|T(t+s)\| = \ln \|T(t)T(s)\| \leq \ln (\|T(t)\| \cdot \|T(s)\|) = \\ &= \ln \|T(t)\| + \ln \|T(s)\| = p(t) + p(s). \end{aligned}$$

Функция, обладающая таким свойством, называется *субаддитивной*. Пусть теперь $t > t_0$ и $n \in \mathbb{Z}^+$ таковы, что $nt_0 \leq t < (n+1)t_0$. Тогда

$$\frac{p(t)}{t} \leq \frac{p(nt_0)}{t} + \frac{p(t-nt_0)}{t} \leq \frac{nt_0}{t} \frac{p(t_0)}{t_0} + \frac{p(t-nt_0)}{t}.$$

Заметим, что $t - nt_0 \leq t_0$; поэтому

$$\|T(t - nt_0)\| \leq \sup_{s \in [0, t_0]} \|T(s)\| < \infty.$$

Тогда получаем

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{p(t)}{t} \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{nt_0}{t} \right) \cdot \frac{p(t_0)}{t} = \frac{p(t_0)}{t_0}.$$

Следовательно,

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \ln \|T(t)\| = \inf_{t>0} t^{-1} \ln \|T(t)\|.$$

Наконец, для $\varepsilon > 0$ существует такое $M_\varepsilon > 0$, что $t^{-1}p(t) \leq \leq t^{-1} \ln M_\varepsilon + (\omega_0(T) + \varepsilon)$ при $t > 0$. Значит, $\inf_{t>0} t^{-1} \ln \|T(t)\| \leq \leq \omega_0(T) + \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$. ■

Если A является m -диссипативным оператором в $(X, \|\cdot\|)$ и T_A — полугруппа на $\overline{\mathcal{D}(A)}$, порожденная A (теорема 2.3), то $\omega_0(T_A) \leq 0$. Если $\omega_0(T_A) < 0$, то для любого $\omega \in (\omega_0(T_A), 0)$ существует эквивалентная норма (см. § 3.2), в которой оператор $A - \omega I$ m -диссипативен и тип $T_{A-\omega I}$ равен $\omega_0(T_A) - \omega$. Если полугруппа $T_{A-\omega_0(T_A)I}$ ограничена, т. е.

$$\sup_{t \geq 0} \|T_{A-\omega_0(T_A)I}(t)\| < \infty,$$

то существует эквивалентная норма, в которой оператор $A - \omega_0(T_A)I$ m -диссипативен и тип полугруппы, порожденной $A - \omega_0(T_A)I$, равен нулю. Этим оправдывается следующее определение: m -диссипативный оператор A в вещественном банаховом пространстве $(X, \|\cdot\|)$ называется *вполне m -диссипативным*, если $A - \omega_0(T_A)I$ также m -диссипативен. Тогда для любого $\omega \in [\omega_0(T_A), 0)$ оператор $A - \omega I$ также m -диссипативен в X с исходной нормой.

Замечание. Если $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ — сильно непрерывная полугруппа с генератором A , то вместо $\omega_0(T)$ иногда мы будем писать $\omega_0(A)$.

Рассмотрим теперь комплексификацию вещественного банахова пространства $(X, \|\cdot\|)$; т. е. $X_{\mathbb{C}} = X + iX$, оснащенное нормой $\|z\|_{\mathbb{C}} := \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \|\cos \theta \cdot x + \sin \theta \cdot y\|$, где $z = x + iy$, $x, y \in X$ (см. дополнение 2). Тогда если $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ — полугруппа ограниченных операторов в X , мы положим

$$T_{\mathbb{C}}(t)z := T(t)x + iT(t)y$$

для $z = x + iy$, $x, y \in X$ и $t \geq 0$; $T_{\mathbb{C}}$ есть полугруппа ограниченных операторов и для нее $\|T(t)\| \leq \|T_{\mathbb{C}}(t)\| \leq M \|T(t)\|$ при некотором $M \geq 1$ для всех $t \geq 0$. В частности, $\omega_0(T_{\mathbb{C}}) = \omega_0(T)$. Заметим, что если в $X_{\mathbb{C}}$ выбрать эквивалентную норму, то тип полугруппы $T_{\mathbb{C}}$ останется равен $\omega_0(T)$. Если $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ есть C_0 -полугруппа операторов в X , то отображение $t \rightarrow T_{\mathbb{C}}(t)z$ сильно непрерывно в $(X_{\mathbb{C}}, \|\cdot\|_{\mathbb{C}})$ и $\{T_{\mathbb{C}}(t)\}_{t \geq 0}$ также называется C_0 -полугруппой на $X_{\mathbb{C}}$.

Далее всюду мы будем предполагать, что $(X, \|\cdot\|)$ — комплексное банахово пространство и $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ есть C_0 -полугруппа ограниченных линейных операторов в X , т. е. $T(t) : X \rightarrow X$ — непрерывные линейные операторы в X при $t \geq 0$ и $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ является C_0 -полугруппой операторов в $(X, \|\cdot\|)$, рассматриваемом как вещественное банахово пространство. Ясно, что норма $T(t)$ в $(X, \mathbb{R}, \|\cdot\|)$ и норма $T(t)$ в $(X, \mathbb{C}, \|\cdot\|)$ совпадают, а $\omega_0(T)$, тип T , определяется соотношением (3.66). Поэтому для любого $\omega > \omega_0(T)$ существует такое $M_{\omega} \geq 1$, что (3.12) выполняется, и для любых $\lambda \in \mathbb{C}$ с $\operatorname{Re} \lambda > \omega_0(T)$ и $f \in X$ интеграл

$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} T(t) f dt$ корректно определен. Кроме того, из основной леммы о преобразовании Лапласа (см., например, Butzer, Berens [1967]) следует, что отображение $\lambda \rightarrow \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} T(t) f dt$ голоморфно

в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda > \omega_0(T)$. При $\operatorname{Re} \lambda > \omega_0(T)$, $n \geq 1$ имеет место равенство

$$\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^n \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) dt = \int_0^\infty (-t)^n e^{-\lambda t} T(t) f dt. \quad (3.67)$$

Далее, если A_T — генератор T , определенный в (2.0), то ясно, что A_T линеен (по отношению к полю $\mathbb{C}$). Для $\omega > \omega_0(T)$ отображение $\omega I - A_T: \mathcal{D}(A_T) \rightarrow X$ является биекцией и

$$(\omega I - A_T)^{-1} f = \int_0^\infty e^{-\omega t} T(t) f dt, \quad f \in X, \quad (3.68)$$

по теореме 3.5, где рассмотрен случай вещественного пространства. Оператор $(\omega I - A_T)^{-1}$ линеен (по отношению к полю $\mathbb{C}$) и ограничен. Поэтому $\omega \in \rho(A_T)$, где $\rho(A_T)$ — резольвентное множество оператора A_T .

Если $\gamma \in \mathbb{R}$, то $\{e^{-i\gamma t} T(t)\}_{t \geq 0}$ есть C_0 -полугруппа ограниченных операторов в X (по отношению к полю $\mathbb{R}$), тип которой равен $\omega_0(T)$, а генератор равен $A = A_T - i\gamma I$. Тогда из (3.68) мы получаем, что $\lambda \in \rho(A_T)$ и

$$(\lambda I - A_T)^{-1} f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) f dt, \quad f \in X,$$

при $\operatorname{Re} \lambda > \omega_0(T)$. В частности, если $\sigma(A_T)$, спектр A_T , непуст, то $\operatorname{Re} \lambda \leq \omega_0(T)$ для любого $\lambda \in \sigma(A_T)$. Объединим эти результаты в следующей теореме.

Теорема 3.31. Пусть $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ есть C_0 -полугруппа ограниченных линейных операторов в комплексном банаховом пространстве $(X, \|\cdot\|)$. Пусть A_T — ее генератор и $\omega_0(T)$ — тип. Тогда

(i) Для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ с $\operatorname{Re} \lambda > \omega_0(T)$ λ лежит в $\rho(A_T)$, резольвентном множестве оператора A_T .

(ii) $(\lambda I - A_T)^{-1} f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) f dt$, $f \in X$ и $\operatorname{Re} \lambda > \omega_0(T)$. Кроме

того, если $\|T(t)\| \leq M e^{\omega t}$, $t \geq 0$, то для $\operatorname{Re} \lambda > \omega$

$$\|(\lambda I - A_T)^{-n}\| \leq M (\operatorname{Re} \lambda - \omega)^{-n}, \quad n \in \mathbb{Z}^+. \quad (3.69)$$

Доказательство. Необходимо доказать лишь последнее утверждение. Если (3.12) выполнено, то $\omega \geq \omega_0(T)$ и для $\operatorname{Re} \lambda > \omega$ неравенство (3.69) следует из (3.14), если снова рассмотреть полугруппу $\{e^{it \operatorname{Im} \lambda} T(t)\}_{t \geq 0}$. Оценку (3.69) можно также доказать,

используя равенство

$$\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^n (\lambda I - A_T)^{-1} f = (-1)^n n! (\lambda I - A_T)^{-(n+1)} f$$

при $n \in \mathbb{N}$ и $f \in X$ и (3.67). Тогда

$$\begin{aligned} \|(\lambda I - A_T)^{-(n+1)} f\| &= \frac{1}{n!} \left\| \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^n (\lambda I - A_T)^{-1} f \right\| = \\ &= \frac{1}{n!} \left\| \int_0^\infty (-t)^n e^{-\lambda t} T(t) f dt \right\| = \\ &= \frac{1}{n!} \left\| \int_0^\infty (-t)^n e^{-(\lambda - \omega)t} e^{-\omega t} T(t) f dt \right\| \leq \\ &\leq M \frac{1}{n!} \|f\| \int_0^\infty t^n e^{-(\operatorname{Re} \lambda - \omega)t} dt = \\ &= M (\operatorname{Re} \lambda - \omega)^{-n-1} \|f\|. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Теперь мы готовы сформулировать и доказать обобщение теоремы 3.6(iv).

Теорема 3.32. Пусть $M \geq 1$, $\omega \in \mathbb{R}$ и $\{T_n\}$ — последовательность C_0 -полугрупп ограниченных линейных операторов в комплексном банаховом пространстве $(X, \|\cdot\|)$, удовлетворяющих условиям $\|T_n(t)\| \leq M e^{\omega t}$, $t \geq 0$, с генераторами A_n . Предположим, что для некоторого $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ с $\operatorname{Re} \lambda_0 > \omega$

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_0 I - A_n)^{-1} f$ существует для любого $f \in X$. Положим $Rf := \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_0 I - A_n)^{-1} f$, $f \in X$.

(ii) Предположим, что R имеет плотную в X область значений. Тогда существует единственная C_0 -полугруппа ограниченных линейных операторов $\{T(t)\}$, удовлетворяющая условиям

$$\begin{aligned} \|T(t)\| &\leq M e^{\omega t}, \quad t \geq 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, s]} \|T_n(t) f - T(t) f\| &= 0, \quad s > 0, \quad f \in X. \end{aligned}$$

Кроме того, генератор A_T полугруппы T удовлетворяет равенству $(\lambda_0 I - A_T)^{-1} = R$.

Доказательство. Имея в виду замену A_n на $A_n - (i \cdot \operatorname{Im} \lambda_0 + \omega)I$, мы можем считать, что $\omega = 0$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ и $\lambda_0 > 0$. По теореме 3.31 имеем

$$\|(\lambda I - A_n)^{-m}\| \leq M \lambda^{-m}, \quad m, n \in \mathbb{Z}^+, \quad \lambda > 0,$$

а это эквивалентно тому, что $\|(I - h A_n)^{-m}\| \leq M$, $m, n \in \mathbb{Z}^+$, $h > 0$. Для $n \in \mathbb{Z}^+$ определим банаховы пространства $(X_n, \|\cdot\|_n)$,

положив $X_n = X$ и

$$\|x\|_n := \sup_{\mu > 0} \sup_{m \geq 0} \|(I - \mu A_n)^{-m} x\|, \quad x \in X_n. \quad (3.70)$$

Из доказательства теоремы 3.6 следует, что A_n m -диссипативен и плотно определен в $(X_n, \|\cdot\|_n)$ и что

$$\|x\| \leq \|x\|_n \leq M \|x\|, \quad x \in X, \quad n \in \mathbb{Z}^+. \quad (3.71)$$

Следовательно, X_n — банахово пространство. Обозначим далее через E векторное пространство всех таких последовательностей $\{x_n\}$, где $x_n \in X_n$, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ существует в X . Ясно, что E есть банахово пространство с нормой

$$\|\hat{x}\|_E := \sup_{n \geq 0} \|x_n\|_n,$$

где $\hat{x} = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$. Пусть

$$\mathcal{D}(\hat{A}) := \{\hat{x} \in E: x_n \in \mathcal{D}(A_n), \quad n \in \mathbb{Z}^+ \text{ и } \{A_n x_n\} \in E\}.$$

Для $\hat{x} \in \mathcal{D}(\hat{A})$ положим

$$\hat{A}\hat{x} := \{A_n x_n\}.$$

Так как $\|x_n\|_n \leq \|x_n - h A_n x_n\|_n$ при любом $n \in \mathbb{Z}^+$, $x_n \in \mathcal{D}(A_n)$ и $h > 0$, то получаем, что

$$\|\hat{x}\|_E \leq \|\hat{x} - h \hat{A}\hat{x}\|_E$$

для любых $\hat{x} \in \mathcal{D}(\hat{A})$ и $h > 0$. Значит, $\hat{A}$ диссипативен. Покажем, что $\mathcal{R}(I - h_0 \hat{A}) = E$ для $h_0 = \lambda_0^{-1}$. Действительно, если $\hat{f} \in E$, то существуют такие $x_n \in \mathcal{D}(A_n)$, что $x_n - h_0 A_n x_n = f_n$ при всех $n \in \mathbb{Z}^+$, так как A_n m -диссипативны. Покажем далее, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ существует. Пусть $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ и $y_n \in \mathcal{D}(A_n)$ таковы, что $y_n - h_0 A_n y_n = f$. По предположению $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (I - h_0 A_n)^{-1} f$ существует. Кроме того, элемент $x_n - y_n$ удовлетворяет равенству

$$x_n - y_n = h_0 A_n (x_n - y_n) + f_n - f.$$

Следовательно,

$$\|x_n - y_n\|_n \leq \|f_n - f\|_n \leq M \|f_n - f\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Значит, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ существует. Кроме того, $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n x_n = h^{-1} \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - f_n)$ существует; поэтому $\hat{x} := \{x_n\} \in \mathcal{D}(\hat{A})$ и выполняется равенство $\hat{x} - h_0 \hat{A}\hat{x} = \hat{f}$. В силу предложения 3.7(iv) оператор $\hat{A}$ m -диссипативен в E . Отсюда следует, в частности, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (I - h A_n)^{-1} y$ существует для всех $y \in X$ и $h > 0$

(выберем $f = \{y, y, y, \dots\}$). Наконец, докажем, что $\mathcal{D}(\hat{A})$ плотно в E . Пусть $\hat{f} = \{f_n\}$, где $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$, и пусть $\varepsilon > 0$. По предположению существует такое $\tilde{y} \in X$, что

$$\|\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_0 I - A_n)^{-1} \tilde{y} - f\| < \frac{\varepsilon}{3M}$$

Тогда элемент $y := h_0 \tilde{y}$ удовлетворяет неравенству

$$\|\lim_{n \rightarrow \infty} (I - h_0 A_n)^{-1} y - f\| < \frac{\varepsilon}{3M}$$

Выберем $N \in \mathbb{Z}^+$ так, чтобы выполнялись неравенства $\|f_n - f\| < \varepsilon/3M$ и

$$\|(I - h_0 A_n)^{-1} y - \lim_{m \rightarrow \infty} (I - h_0 A_m)^{-1} y\| < \frac{\varepsilon}{3M}$$

для $n > N$. Положим $x_n := (I - h_0 A_n)^{-1} y$ для $n \geq N$. Тогда

$$\|x_n - f_n\| \leq M \|x_n - f\| < \varepsilon \text{ для } n > N.$$

Здесь $x_n \in \mathcal{D}(A_n)$, $n > N$, и $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n x_n$ существует. Для $n = 0, \dots, N$ выберем $x_n \in \mathcal{D}(A_n)$ так, чтобы $\|x_n - f_n\|$ было меньше εM^{-1} . Это возможно, так как $\overline{\mathcal{D}(A_n)} = X$. Тогда $\|x_n - f_n\| < \varepsilon$ при $n \in \mathbb{Z}^+$ и $\|\hat{x} - \hat{f}\| \leq \varepsilon$. Так как $\hat{x} \in \mathcal{D}(\hat{A})$, то $\mathcal{D}(\hat{A})$ плотно в E . Поэтому $\hat{A}$ есть генератор C_0 -полугруппы сжатий в E , которую мы обозначим $\hat{T} = \{\hat{T}_n\}$. Определим для $\hat{x} = \{x_n\}$ операторы $P_n \hat{x} = x_n$, $n \in \mathbb{Z}^+$. Ясно, что $P_n^2 = P_n$ и $\|P_n\| = 1$. Кроме того,

$$P_n (I - h\hat{A})^{-1} \hat{x} = (I - h\hat{A})^{-1} P_n \hat{x} = (I - hA)^{-1} x_n$$

для любых $\hat{x} \in E$ и $h > 0$. Поэтому по теореме 2.3 $P_n \hat{T}(t) P_n \hat{x} = T_n(t) x_n$, $t \geq 0$, $n \in \mathbb{Z}^+$ и $\hat{x} \in E$. Кроме того, для любых $x \in X$ и $t \geq 0$ существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(t) x$. Положим $T(t)x := \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(t) x$. Отображение $T(t): X \rightarrow X$ есть полугруппа линейных операторов в X , удовлетворяющая условию $\|T(t)\| \leq M$, $t \geq 0$. Кроме того, из теоремы 2.3 для любых $\hat{x} \in \mathcal{D}(\hat{A})$ и $t, s \geq 0$

$$\|\hat{T}(t) \hat{x} - \hat{T}(s) \hat{x}\|_E \leq \|\hat{A} \hat{x}\|_E \cdot |t - s|.$$

Выберем $\hat{x} = (I - h_0 \hat{A})^{-1} \hat{f}$, $\hat{f} \in E$, где $\hat{f} = \{f, f, \dots\}$, и положим $x = \lim_{n \rightarrow \infty} (I - h_0 A_n^{-1}) f$. Имеет место оценка

$$\|T_n(t) x_n - T_n(s) x_n\| \leq \sup_{n \geq 1} \|T_n(t) x_n - T_n(s) x_n\|,$$

где $x_n := (I - h_0 A_n)^{-1} f$. Тогда

$$\begin{aligned} \sup_{n \geq 1} \| (T_n(t) - T_n(s)) x_n \| &\leq \sup_{n \geq 1} \| (T_n(t) - T_n(s)) x_n \|_n = \\ &= \| (\hat{T}(t) - \hat{T}(s)) \hat{x} \|_E \leq \| \hat{A}x \|_E \cdot |t - s|. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\| T_n(t)x - T_n(s)x \| \leq 2M \| x - x_n \| + \| \hat{A}x \|_E \cdot |t - s|,$$

поэтому $T_n(t)x$ сходится равномерно к $T(t)x$ на любом ограниченном t -интервале на плотном в X подмножестве. А так как $\| T(t) \| \leq M$, то $T_n(t)x$ сходится равномерно к $T(t)x$ на любом ограниченном t -интервале при любом $x \in X$ и функция $t \rightarrow T(t)x$ сильно непрерывна. Пусть A_T — генератор полугруппы T . Тогда $A_T \in G(M, 0)$, и в силу (3.15)

$$(\lambda I - A_T)^{-1} y = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) y dt \quad \text{для } \lambda > 0.$$

Отсюда следует, что

$$Ry = \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda I - A_n)^{-1} y = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_n(t) y dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) y dt$$

при $\lambda > 0$ и $y \in X$. Здесь мы использовали теорему 3.4. ■

Рассмотрим теперь частный случай, где выполняются предположения теоремы 3.32.

Предложение 3.33. Пусть $A: \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ — такой плотно определенный диссипативный оператор, что его замыкание $\bar{A}$ m -диссипативно. Пусть $A_n: X \rightarrow X$ — последовательность ограниченных диссипативных операторов, удовлетворяющих условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n x = Ax \quad \text{для любого } x \in \mathcal{D}(A). \quad (3.72)$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \| E_h^{A_n} x - E_h^{\bar{A}} x \| = 0 \quad (3.73)$$

для любых $h > 0$ и $x \in X$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что все A_n m -диссипативны. Действительно, для $n \in \mathbb{Z}^+$ оператор $I - hA_n$ является биекцией при $h \| A_n \| < 1$. По предложению 3.7(iv) оператор A_n m -диссипативен. В силу теоремы 2.7(i) достаточно проверить (3.73) при $h = 1$. Так как $E_1^{A_n}$ и $E_1^{\bar{A}}$ — сжатия, то доста-

точно проверить (3.73) для плотного в X подмножества. Так как $\mathcal{D}(A)$ плотно в X и $\bar{A}$ m -диссипативен, то $\mathcal{R}(I - A)$ плотно в X (можно воспользоваться предложением 3.10 или проверить непосредственно). Поэтому достаточно показать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|E_1^{A_n}(x - Ax) - E_1^{\bar{A}}(x - Ax)\| = 0$$

для любого $x \in \mathcal{D}(A)$. Так как $Ax = \bar{A}x$, то

$$\begin{aligned} \|E_1^{A_n}(x - Ax) - E_1^{\bar{A}}(x - \bar{A}x)\| &= \\ &= \|(E_1^{A_n}x - x) - E_1^{A_n}Ax\| = \|(A_n)_1x - E_1^{A_n}Ax\| = \\ &= \|E_1^{A_n}A_nx - E_1^{A_n}Ax\| \leq \|A_nx - Ax\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Здесь $(A_n)_1$ — аппроксимация Иосиды оператора A_n . ■

Завершим доказательство теоремы 3.27.

Предложение 3.34. Пусть A и B — плотно определенные m -диссипативные операторы в X . Тогда для любого $x \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$

$$\lim_{t \downarrow 0} t^{-1}(T_A(t)T_B(t)x - x) = (A + B)x \quad (3.74)$$

и

$$\lim_{h \downarrow 0} h^{-1}(E_h^A E_h^B x - x) = (A + B)x.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} t^{-1}(T_A(t)T_B(t)x - x) &= \\ &= T_A(t)t^{-1}(T_B(t)x - x) + t^{-1}(T_A(t)x - x) \rightarrow Bx + Ax \end{aligned}$$

при $t \downarrow 0$, так как $\|T_A(t)\| \leq 1$ и $\lim_{t \downarrow 0} T_A(t)y = y$, $y \in X$. Аналогично

$$\begin{aligned} h^{-1}(E_h^A E_h^B x - x) &= E_h^A h^{-1}(E_h^B x - x) + h^{-1}(E_h^A x - x) = \\ &= E_h^A B_h x + A_h x \rightarrow Bx + Ax \text{ при } h \downarrow 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

L_1 -теория полугрупп нелинейной диффузии**4.1. Введение**

Рассмотрим задачу Коши

$$(I) \quad \begin{cases} u_t = (\varphi(u))_{xx}, & (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

где φ есть максимальный монотонный график в $\mathbb{R}^2$ с областью определения $\mathcal{D}(\varphi)$: см. § 2.1 и дополнение 1. Уравнения такого типа возникают во многих физических задачах.

Пример 4.1 (а) Уравнения движения жидкости в пористой среде, где

$$\varphi(u) = |u|^m \cdot \text{sign}(u), \quad m > 0.$$

(б) Задача Стефана, где φ постоянна на интервале $I \subset \mathcal{D}(\varphi)$ и строго монотонно возрастает на $\mathcal{D}(\varphi) \setminus I$.

Из теории уравнений с частными производными хорошо известно, что задача (I) при подходящем выборе u_0 и φ имеет единственное решение, которое мы обозначим $u(t; u_0)$. Это решение удовлетворяет условиям $u(t+s; u_0) = u(t; u(s; u_0))$ и $u(0; u_0) = u_0$ и часто дополнительно принципу сравнения

$$u_0 \geq v_0 \text{ влечет за собой } u(t; u_0) \geq u(t; v_0) \text{ при всех } t \geq 0 \quad (4.1)$$

и закону сохранения массы (в этой главе через $\int_{\mathbb{R}} u$ обозначается $\int_{\mathbb{R}} u(x) dx$)

$$\int_{\mathbb{R}} u(t; u_0) = \int_{\mathbb{R}} u_0 \text{ при всех } t \geq 0. \quad (4.2)$$

Ниже будет пояснено, что если $u(t; u_0) \in L_1(\mathbb{R})$ таково, что при всех $t \geq 0$ выполняются соотношения (4.1) и (4.2), то $u(t; \cdot)$ определяет полугруппу сжатий на $L_1(\mathbb{R})$.

Пусть L — отображение в $L_1(\mathbb{R})$, сохраняющее интеграл, т. е.

$$\int_{\mathbb{R}} L(f) = \int_{\mathbb{R}} f \text{ для всех } f \in L_1(\mathbb{R}), \quad (4.3)$$

и пусть $f \vee g = \max(f, g)$ и $r^+ = r \vee 0$. Следующий результат получен в работе Crandall, Tartar [1980].

Предложение 4.2. Пусть $K \subset L_1(\mathbb{R})$ таково, что $f, g \in K$ влечет за собой $f \vee g \in K$. Пусть отображение $L: K \rightarrow L_1(\mathbb{R})$ удовлетворяет условию (4.3) при $f \in K$. Тогда следующие три свойства эквивалентны:

(а) если $f, g \in K$, то $f \leq g$ п.в. влечет за собой $Lf \leq Lg$ п.в.;

(b) $\int_{\mathbb{R}} (L(f) - L(g))^+ \leq \int_{\mathbb{R}} (f - g)^+$ для $f, g \in K$;

(с) $\|L(f) - L(g)\|_1 \leq \|f - g\|_1$.

Доказательство. Покажем, что (а) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (с) $\Rightarrow$ (а). Пусть $f, g \in K$. Тогда $f \vee g \in K$ и из (а) получаем, что $L(f \vee g) \geq L(g)$, откуда следует, что $L(f \vee g) - L(g) \geq 0$, и $L(f \vee g) \geq L(f)$, откуда, в свою очередь, $L(f \vee g) - L(g) \geq L(f) - L(g)$. Итак, получаем, что $(L(f) - L(g))^+ \leq L(f \vee g) - L(g)$ и

$$\int_{\mathbb{R}} (L(f) - L(g))^+ \leq \int_{\mathbb{R}} (L(f \vee g) - L(g)) = \int_{\mathbb{R}} (f \vee g - g) = \int_{\mathbb{R}} (f - g)^+,$$

так как $f \vee g = g + (f - g)^+$. Используя равенство $|s| = s^+ + (-s)^+$, получаем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |L(f) - L(g)| &= \int_{\mathbb{R}} (L(f) - L(g))^+ + \int_{\mathbb{R}} (L(g) - L(f))^+ \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} (f - g)^+ + \int_{\mathbb{R}} (g - f)^+ = \int_{\mathbb{R}} |f - g|. \end{aligned}$$

Наконец, если $f, g \in K$, $f \leq g$ и выполнено (с), равенство $2s^+ = |s| + s$ дает

$$\begin{aligned} 2 \int_{\mathbb{R}} (L(f) - L(g))^+ &= \int_{\mathbb{R}} |L(f) - L(g)| + \int_{\mathbb{R}} (L(f) - L(g)) \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |f - g| + \int_{\mathbb{R}} (f - g) = 2 \int_{\mathbb{R}} (f - g)^+ = 0. \end{aligned}$$

Отсюда $L(f) - L(g) \leq 0$ п.в. ■

Приведем интересное приложение этого предложения. Рассмотрим скалярный закон сохранения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

где функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема, и его разностную аппроксимацию

$$U_i^{n+1} = U_i^n + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \{f(U_{i+1}^n) - f(U_{i-1}^n)\} + \frac{1}{2} \{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n\},$$

где $i \in \mathbb{Z}$ и $n \in \mathbb{Z}^+$. Запишем это разностное уравнение в виде

$$U_i^{n+1} = L(U^n)_i, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{Z}^+,$$

и положим $K = \{U \in l^1: a \leq U_i \leq b, i \in \mathbb{Z}, a, b \in \mathbb{R}\}$. Тогда отображение $L: K \rightarrow l^1$ удовлетворяет уравнению сохранения

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} L(U)_i = \sum_{i=-\infty}^{\infty} U_i.$$

Далее, если условие

$$(\Delta t / \Delta x) \cdot \max_{a \leq r \leq b} |f'(r)| \leq 1 \tag{4.4}$$

выполняется, то L также сохраняет порядок на K , т. е.

$$L(U)_i > L(V)_i, \text{ когда } U_i \geq V_i \text{ при всех } i \in \mathbb{Z}.$$

Теперь из предложения 4.2 следует, что L — сжатие. Следовательно, (4.4) является условием устойчивости.

Из гл. 2 известно, что если оператор $A: \mathcal{D}(A) \subseteq X \rightarrow X$ m -диссипативен в банаховом пространстве X , то он порождает полугруппу сжатий $\{T_A(t)\}_{t \geq 0}$ на $\overline{\mathcal{D}(A)}$. Абстрактная функция $u: [0, \infty) \rightarrow X$, определенная формулой

$$u(t) = T_A(t) u_0, \quad u_0 \in \overline{\mathcal{D}(A)} \text{ и } t \geq 0,$$

есть единственное интегральное решение абстрактной задачи

$$\begin{aligned} \text{(II)} \quad & \frac{du}{dt} \in Au, \\ & u(0) = u_0. \end{aligned}$$

Обзор работ по этому вопросу см. в гл. 2 или статьях Crandall [1976] и Evans [1977].

Запишем сначала задачу нелинейной диффузии (I) в абстрактной форме как задачу (II) в случае $X = L_1(\mathbb{R})$. Затем при подходящих условиях на u_0 и f мы покажем, что полугрупповое решение $u(t)$ есть слабое решение задачи (I). Более точно, если

$$u(t, x) := u(t)(x) = T_A(t)u_0(x), \quad t > 0, x \in \mathbb{R},$$

то функция u такова, что

$$u_t = (f(u))_{xx} \quad \text{в } \mathcal{D}'((0, \infty) \times \mathbb{R})$$

(где $\mathcal{D}'((0, \infty) \times \mathbb{R})$ обозначает пространство распределений на $(0, \infty) \times \mathbb{R}$) и

$$\lim_{t \downarrow 0} u(t) = u_0 \quad \text{в } L_1(\mathbb{R}).$$

Мы рассмотрим вопрос о непрерывной зависимости u от φ и, наконец, обсудим свойства гладкости полугруппового решения уравнения пористой среды.

Замечание 4.3. Из предложения 4.2 следует, что нет надежды на то, что теория m -диссипативных операторов применима к эволюционным задачам, решения которых обладают свойством сохранения масс, но не удовлетворяют принципу сравнения.

Для того чтобы дать абстрактную формулировку уравнения $u_t - (\varphi(u))_{xx} = 0$ в банаховом пространстве $L_1(\mathbb{R})$, определим оператор $A_\varphi: \mathcal{D}(A_\varphi) \subseteq L_1(\mathbb{R}) \rightarrow L_1(\mathbb{R})$, который формально задается равенством $A_\varphi(u) = (\varphi(u))''$ следующим образом. Положим

$$\mathcal{D}(A_\varphi) = \{u \in L_1(\mathbb{R}): \exists w \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}), \text{ такая, что } w(x) \in \varphi(u(x)) \text{ п. в. и } w'' \in L_1(\mathbb{R}) \text{ в смысле распределений}\}$$

и определим

$$A_\varphi u = w'' \text{ для всех } u \in \mathcal{D}(A_\varphi).$$

Покажем сначала, что оператор A_φ m -диссипативен в $L_1(\mathbb{R})$. Для этого мы должны доказать, что

(*) $E_{\lambda^\varphi}^\lambda$ есть сжатие в $L_1(\mathbb{R})$ при всех $\lambda > 0$, т. е. при $u_i \in \mathcal{D}(A_\varphi)$ и $f_i \in L_1(\mathbb{R})$, удовлетворяющих равенствам $u_i - \lambda A_\varphi u_i = f_i$, $i = 1, 2$, необходимо показать, что

$$\|u_1 - u_2\|_1 \leq \|f_1 - f_2\|_1.$$

(**) $\mathcal{R}(I - \lambda A_\varphi) = L_1(\mathbb{R})$. Для этого мы должны доказать, что при любой $f \in L_1(\mathbb{R})$ существует такая функция $u \in \mathcal{D}(A_\varphi)$, что

$$u - A_\varphi u = f.$$

При решении этого уравнения в $L_1(\mathbb{R})$ мы ищем такие функции u и w , что

$$u - w'' = f \text{ в } \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \text{ и } w(x) \in \varphi(u(x)) \text{ п. в. в } \mathbb{R}.$$

Нам будет удобно работать с отображением β , обратным к φ , т. е. $\beta = \varphi^{-1}$. Это также максимальный монотонный график в $\mathbb{R}^2$. В терминах β имеем

$$u - w'' = f \text{ в } \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \text{ и } u(x) \in \beta(w(x)) \text{ п. в. в } \mathbb{R}$$

или просто

$$-w'' + \beta(w) \ni f \text{ на } \mathbb{R}. \quad (P)$$

Это уравнение изучается в последующих двух параграфах. Мы рассматриваем случай, когда $0 \in \beta(0)$ с $0 \in \text{int } \mathcal{R}(\beta)$, и случай, когда $\mathcal{R}(\beta) \subseteq (0, \infty)$.

4.2. Случай $0 \in \beta(0)$ и $0 \in \text{int } \mathcal{R}(\beta)$

Вместо задачи (Р) рассмотрим возмущенную задачу

$$\varepsilon w - w'' + \beta(w) \ni f \text{ при } \varepsilon > 0. \quad (P_\varepsilon)$$

Пусть $Aw := w'' - \varepsilon w$ для $w \in \mathcal{D}(A) = \{u \in L_1(\mathbb{R}): u'' \in L_1(\mathbb{R})\}$. Тогда линейный оператор A обладает следующими свойствами:

- (I) A плотно определен и m -диссипативен в $L_1(\mathbb{R})$,
 (II) для произвольных $\lambda > 0$ и $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R})$

$$\sup_{\mathbb{R}} (I - \lambda A)^{-1} f \leq \max \{0, \sup_{\mathbb{R}} f\},$$

- (III) $\varepsilon \|u\|_1 \leq \|Au\|_1$ для всех $u \in \mathcal{D}(A)$.

Теорема 4.4. Пусть линейный оператор A удовлетворяет условиям I, II, III. Тогда для любой функции $f \in L_1(\mathbb{R})$ существует единственная функция $w \in \mathcal{D}(A)$, такая, что

$$-Aw(x) + \beta(w(x)) \ni f(x) \text{ п.в. на } \mathbb{R}. \quad (4.5)$$

Кроме того, если $f, \hat{f} \in L_1(\mathbb{R})$ и $w, \hat{w}$ — соответствующие решения (4.5), то

$$\|(f + Aw) - (\hat{f} + A\hat{w})\|_1 \leq \|f - \hat{f}\|_1 \quad (4.6)$$

и

$$\|A(w - \hat{w})\|_1 \leq 2\|f - \hat{f}\|_1. \quad (4.7)$$

Для доказательства нам понадобится следующая лемма.

Лемма 4.5. Пусть γ — максимальный монотонный график в $\mathbb{R}^2$ и $0 \in \gamma(0)$. Предположим, что A удовлетворяет условиям (I) и (II). Пусть также $1 \leq p \leq \infty$ и $w \in \mathcal{D}(A) \cap L_p(\mathbb{R})$, причем $Aw \in L_{p'}(\mathbb{R})$, и пусть функция $g \in L_p(\mathbb{R})$ такова, что $g(x) \in \gamma(w(x))$. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}} Aw(x) g(x) dx \leq 0.$$

Доказательство теоремы 4.4. Докажем сначала неравенства (4.6) и (4.7), откуда в силу свойства III следует единственность. Будем писать $f \in Bv$, если п.в. на $\mathbb{R}$ выполнены условия $f(x) \in \beta(v(x))$ и $f, v \in L_1(\mathbb{R})$. Пусть $g = f + Aw \in B(w)$ и $\hat{g} = \hat{f} + A\hat{w} \in B(\hat{w})$. Тогда $g - \hat{g} = f - \hat{f} + A(w - \hat{w})$. Определим функцию

$$h(x) = \begin{cases} +1, & \text{если } g(x) > \hat{g}(x) \text{ или } w(x) > \hat{w}(x), \\ 0, & \text{если } g(x) = \hat{g}(x) \text{ или } w(x) = \hat{w}(x), \\ -1, & \text{если } g(x) < \hat{g}(x) \text{ или } w(x) < \hat{w}(x). \end{cases}$$

Тогда h корректно определена на $\mathbb{R}$ и $h(x) \in \text{sign}\{w(x) - \hat{w}(x)\}$, где $\text{sign}[r] = 1$ для $r > 0$, $\text{sign}[r] = -1$ для $r < 0$ и $\text{sign}[0] = [-1, 1]$. Применим лемму 4.5 для $p = 1$, $p' = \infty$, $w = w - \hat{w}$ и $\gamma = \text{sign}$. Тогда

$$(h, A(w - \hat{w})) \leq 0, \quad (4.8)$$

где $(u, v) = \int_{\mathbb{R}} u(x) v(x) dx$. Так как $h(x) \in \text{sign}\{g(x) - \hat{g}(x)\}$,

то из (4.8) получаем

$$\|g - \hat{g}\|_1 = (h, g - \hat{g}) \leq (f - \hat{f}, h) \leq \|f - \hat{f}\|_1.$$

Отсюда непосредственно следует (4.7). ■

Замечание 4.6. При доказательстве оценки (4.6) мы использовали лишь свойства I и II оператора A , которые имеют место и при $\varepsilon = 0$. Это в точности означает диссипативность оператора A_φ .

Установим далее существование решения задачи (P_ε) . Покажем сначала, что

$$\mathcal{R}(-A + B) \text{ замкнута.}$$

Пусть последовательность $\{f_n\} \subset \mathcal{R}(-A + B)$ такова, что $f_n \rightarrow f$ в $L_1(\mathbb{R})$. Тогда существует такая последовательность $\{w_n\}$ из $\mathcal{D}(A)$, что $-Aw_n + Bw_n \ni f_n$. Используя неравенство (4.7) и III, мы убеждаемся, что последовательности $\{w_n\}$ и $\{Aw_n\}$ являются последовательностями Коши в $L_1(\mathbb{R})$ и $w_n \rightarrow w$ и $Aw_n \rightarrow Aw$ в силу замкнутости A . Так как $f_n + Aw_n \in Bw_n$ и β максимален, то получаем, что $f + Aw \in Bw$. Отсюда следует, что $f \in \mathcal{R}(-A + B)$.

$$\mathcal{R}(-A + B) \text{ плотна в } L_1(\mathbb{R}).$$

Пусть β_λ — аппроксимация Иосиды отображения β :

$$\beta_\lambda = \frac{1}{\lambda} (I - (I + \lambda\beta)^{-1}), \quad \lambda > 0.$$

Для $\mu > 0$ рассмотрим уравнение

$$\mu w - Aw + \beta_\lambda(w) = f, \quad f \in L_1(\mathbb{R}). \quad (4.9)$$

Перепишем (4.9) в следующем виде:

$$\mu\lambda w - \lambda Aw + w = \lambda f + (I + \lambda\beta)^{-1}w$$

или

$$w = \frac{1}{1 + \lambda\mu} \left(I - \frac{\lambda}{1 + \lambda\mu} A \right)^{-1} (\lambda f + (I + \lambda\beta)^{-1}w). \quad (4.10)$$

Оператор, стоящий в (4.10) справа, есть произведение двух сжатий в $L_1(\mathbb{R})$ и числа, меньшего единицы. Поэтому он является строгим сжатием и имеет неподвижную точку $w \in \mathcal{D}(A)$. Если

дополнительно $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R})$, то, используя (II) и принцип неподвижной точки в $L_1(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R})$, получаем, что $w, Aw \in L_\infty(\mathbb{R})$.

Пусть $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R})$, и обозначим через w_λ решение (4.9). Тогда из (4.10) имеем

$$\|w_\lambda\| \leq \frac{1}{(1+\lambda\mu)} \{\lambda \|f\| + \|w_\lambda\|\}$$

или

$$\|w_\lambda\| \leq \frac{1}{\mu} \|f\|, \quad (4.11)$$

где $\|\cdot\|$ обозначает норму в $L_1(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R})$. Умножим уравнение (4.9) на $\text{sign}(w_\lambda)$. Тогда

$$\mu |w_\lambda| = Aw_\lambda \text{sign}(w_\lambda) + |\beta_\lambda(w_\lambda)| \leq |f|.$$

Используя лемму 4.5, получаем, что $(Aw_\lambda, \text{sign}(w_\lambda)) \leq 0$ и, значит,

$$\|\beta_\lambda(w_\lambda)\|_1 \leq \|f\|_1 \quad \forall \lambda > 0.$$

Далее умножим уравнение (4.9) на $|\beta_\lambda(w_\lambda)|^{p-2} \beta_\lambda(w_\lambda)$. Тогда

$$\begin{aligned} \mu \cdot |\beta_\lambda(w_\lambda)|^{p-2} \cdot \beta_\lambda(w_\lambda) w_\lambda - Aw_\lambda |\beta_\lambda(w_\lambda)|^{p-2} \beta_\lambda(w_\lambda) + |\beta_\lambda(w_\lambda)|^p = \\ = f \cdot |\beta_\lambda(w_\lambda)|^{p-2} \cdot \beta_\lambda(w_\lambda). \end{aligned}$$

При интегрировании этого равенства первые два слагаемых будут положительны. Следовательно,

$$\int_{\mathbb{R}} |\beta_\lambda(w_\lambda)|^p \leq \int_{\mathbb{R}} |f| \cdot |\beta_\lambda(w_\lambda)|^{p-1} \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p \right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}} |\beta_\lambda(w_\lambda)|^p \right)^{1-1/p};$$

Отсюда

$$\|\beta_\lambda(w_\lambda)\|_p \leq \|f\|_p \quad \forall p \geq 1. \quad (4.12)$$

В частности, $\{w_\lambda\}$ и $\{\beta_\lambda(w_\lambda)\} \in L_2(\mathbb{R})$. Покажем, что обе эти последовательности являются последовательностями Коши. Вычтем почленно уравнения для w_α и w_δ и умножим полученное равенство на $(w_\alpha - w_\delta)$. В результате получим

$$\begin{aligned} \mu (w_\alpha - w_\delta)^2 - A (w_\alpha - w_\delta) (w_\alpha - w_\delta) + \\ + (\beta_\alpha(w_\alpha) - \beta_\delta(w_\delta)) (w_\alpha - w_\delta) = 0. \end{aligned}$$

Еще раз используя лемму 4.5, приходим к неравенству

$$\mu \|w_\alpha - w_\delta\|_2^2 + (\beta_\alpha(w_\alpha) - \beta_\delta(w_\delta), w_\alpha - w_\delta) \leq 0.$$

Преобразуем второе слагаемое. Так как

$$w_\alpha - w_\delta = \{w_\alpha - (I + \alpha\beta)^{-1}w_\alpha\} + \\ + \{(I + \alpha\beta)^{-1}w_\alpha - (I + \delta\beta)^{-1}w_\delta\} - \{w_\delta - (I + \delta\beta)^{-1}w_\delta\}$$

и

$$((I + \alpha\beta)^{-1}w_\alpha - (I + \delta\beta)^{-1}w_\delta)(\beta_\alpha(w_\alpha) - \beta_\delta(w_\delta)) \geq 0,$$

то получаем, что

$$\mu \|w_\alpha - w_\delta\|_2^2 + (\beta_\alpha(w_\alpha) - \beta_\delta(w_\delta), \alpha\beta_\alpha(w_\alpha) - \delta\beta_\delta(w_\delta)) \leq 0.$$

Следовательно, $\{w_\lambda\}$ — сеть Коши в $L_2(\mathbb{R})$. Можно также показать, что $\{\beta_\lambda(w_\lambda)\}$ — сеть Коши в $L_2(\mathbb{R})$. Поэтому $w_\lambda \rightarrow w$ и $\beta_\lambda(w_\lambda) \rightarrow g$ в $L_2(\mathbb{R})$.

Поскольку оценки (4.11) и (4.12) равномерны по $\lambda > 0$, то отсюда следует, что

$$w, g \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R}) \text{ и } g \in \beta(w),$$

так как β максимален. Таким образом, $(\mu I - A)w_\lambda \rightarrow f - g$ в $L_2(\mathbb{R})$ при $\lambda \downarrow 0$. Пусть $v = (\mu I - A)^{-1}(f - g)$. Тогда $v \in \mathcal{D}(A) \cap L_\infty(\mathbb{R})$ и

$$(\mu I - A)(v - w_\lambda) \rightarrow 0 \text{ в } L_2(\mathbb{R}).$$

Умножая это выражение на $(v - w_\lambda)$ и еще раз используя лемму 4.5, получаем

$$\mu \|v - w_\lambda\|_2^2 + (\text{положительное слагаемое}) \rightarrow 0 \text{ при } \lambda \downarrow 0.$$

Поэтому $w_\lambda \rightarrow v$ в $L_2(\mathbb{R})$ и $v = w$. Определение v дает

$$\mu w - Aw + g = f \text{ или } \mu w - Aw + \beta(w) \ni f.$$

Положим далее, что $\mu \rightarrow 0$. Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$ и $f^\mu \rightarrow f$ в $L_1(\mathbb{R})$ при $\mu \downarrow 0$, где $f^\mu \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R})$. Рассмотрим задачу

$$\mu w^\mu + Aw^\mu + Bw^\mu \ni f^\mu.$$

Используем оценку (4.7) с $\hat{w} = 0$ и $\beta + \mu I$ вместо β . Тогда получаем, что

$$\varepsilon \|w^\mu\|_1 \leq \|Aw^\mu\|_1 \leq 2 \|f^\mu\|_1.$$

Следовательно, $\mu w^\mu \rightarrow 0$ в $L_1(\mathbb{R})$ и $f = \lim (f^\mu - w^\mu) \in \lim (-Aw^\mu + Bw^\mu)$. Это показывает, что f принадлежит замыканию $\mathcal{R}(-A + B)$, что завершает доказательство. ■

Докажем далее лемму 4.5 и приведем несколько интересных оценок. Введем сначала множество

$$J_0 := \{j : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty] : j \text{ выпукла, полунепрерывна снизу} \\ \text{и } j(0) = 0\}.$$

Лемма 4.7. Пусть отображение $L: L_1(\mathbb{R}) \rightarrow L_1(\mathbb{R})$ удовлетворяет условиям

$$\|Lu - Lv\|_1 \leq \|u - v\|_1 \text{ при всех } u, v \in L_1(\mathbb{R})$$

и

$$\min\{0, \inf u\} \leq Lu(x) \leq \max\{0, \sup u\} \text{ для } u \in L_1(\mathbb{R}),$$

и пусть $j \in J_0$. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}} j(Lu(x)) dx \leq \int_{\mathbb{R}} j(u(x)) dx \quad (4.13)$$

для всех таких $u \in L_1(\mathbb{R})$, что $j \circ u \in L_1(\mathbb{R})$.

Доказательство. Возьмем $t \geq 0$ и рассмотрим функции $j_1, j_2 \in J_0$, заданные равенствами

$$j_1(r) = (r - t)^+ \text{ и } j_2(r) = (-r - t)^+.$$

Пусть далее $y(x) = \min\{u(x), t\}$ для $u \in L_1(\mathbb{R})$. Пользуясь принципом максимума для L , получим, что $Ly(x) \leq t$. Поэтому

$$(Lu(x) - t)^+ \leq (Lu(x) - Ly(x))^+ \leq |Lu(x) - Ly(x)|.$$

Интегрирование по $\mathbb{R}$ и использование свойства сжатия дает

$$\int_{\mathbb{R}} (Lu(x) - t)^+ \leq \int_{\mathbb{R}} |u(x) - y(x)| = \int_{\mathbb{R}} (u(x) - t)^+,$$

что совпадает с (4.13) при $j = j_1$. Аналогично выводится неравенство (4.13) для $j = j_2$. Объединяя полученное, приходим к неравенству

$$\int_{\mathbb{R}} [t(Lu(x) - t)]^+ \leq \int_{\mathbb{R}} [t(u(x) - t)]^+. \quad (4.14)$$

Рассмотрим далее выпуклые комбинации j_1 и j_2 . Заметим, что любая гладкая функция $j \in J_0$ может быть записана в виде

$$j(r) = \int_{\mathbb{R}} \frac{j''(t)}{|t|} [t(r - t)]^+ dt.$$

Тогда, умножая (4.14) на $j''(t)/|t|$, интегрируя и пользуясь теоремой Фубини, получим (4.13) для любой гладкой функции $j \in J_0$. Если $j \in J_0$ произвольна, то построим такую гладкую аппроксимацию $j_\lambda \in J_0$, что $j_\lambda \uparrow j$ при $\lambda \rightarrow 0$. Можно взять, например,

$$j_\lambda(r) = \inf_t \left\{ \frac{1}{2\lambda} |r - t|^2 + j(t) \right\}.$$

Пример 4.8. Пусть $j \in J_0$ задана в виде

$$j(r) = \begin{cases} 0, & r \leq 0, \\ \infty, & r > 0. \end{cases}$$

Тогда

$$j_\lambda(r) = \begin{cases} 0, & r \leq 0, \\ \frac{r^2}{2\lambda}, & r > 0 \end{cases}$$

и

$$\int_{\mathbb{R}} j_\lambda(Lu(x)) \leq \int_{\mathbb{R}} j_\lambda(u(x)) \leq \int_{\mathbb{R}} j(u(x)).$$

Это приводит к включению $j(Lu) \in L_1(\mathbb{R})$ и неравенству (4.13). ■

Доказательство леммы 4.5. Пусть $L_\lambda = (I - \lambda A)^{-1}$ и $j \in J_0$ такова, что $\partial j = \gamma$. Тогда L_λ обладает свойством сжатия и удовлетворяет принципу максимума (см. лемму 4.7). Пусть $u \in \mathcal{D}(A) \cap L_p(\mathbb{R})$ и $g \in L_{p'}(\mathbb{R})$ таковы, что $g(x) \in \partial j(u(x))$ п.в. Имеем

$$\begin{aligned} j(L_\lambda u(x)) - j(u(x)) &\geq g(x) [L_\lambda u(x) - u(x)] = \\ &= \lambda g(x) L_\lambda (Au(x)) \text{ п.в.,} \end{aligned} \quad (4.15)$$

а также

$$j(0) - j(u(x)) \geq g(x) (0 - u(x)) \text{ п.в.}$$

или

$$0 \leq j(u(x)) \leq g(x)u(x) \text{ п.в.}$$

Это показывает, что $j \circ u \in L_1(\mathbb{R})$. Применяя лемму 4.7, получим

$$\int_{\mathbb{R}} j(L_\lambda u(x)) \leq \int_{\mathbb{R}} j(u(x)).$$

Поэтому из (4.15) следует, что

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) L_\lambda (Au(x)) dx \leq 0.$$

Для завершения доказательства рассмотрим три случая:

$p = 1$. Тогда $g \in L_\infty(\mathbb{R})$ и $Au \in L_1(\mathbb{R})$. Так как A m -диссипативен в $L_1(\mathbb{R})$ и $\mathcal{D}(A) = L_1(\mathbb{R})$, то $L_\lambda(Au) = E_\lambda^A(Au) \rightarrow Au$ в $L_1(\mathbb{R})$ при $\lambda \downarrow 0$. Отсюда получаем необходимый результат для этого случая.

$1 < p < \infty$. Тогда $Au \in L_p(\mathbb{R})$ и $g \in L_{p'}(\mathbb{R})$. Применим лемму 4.7 с $j(r) = |r|^p$. Это дает оценку $\|L_\lambda Au\|_p \leq \|Au\|_p$, $1 < p < \infty$, откуда получаем, что $L_\lambda Au \rightarrow Au$ слабо в $L_p(\mathbb{R})$, что завершает доказательство.

$p = \infty$. В этом случае свойство II дает $\|L_{\lambda_k} A u\|_{\infty} \leq \|A u\|_{\infty}$. Тогда существует такая подпоследовательность $\{\lambda_k\}$, что $L_{\lambda_k} A u \rightarrow A u$ п.в. Применяя теорему Лебега об ограниченной сходимости, получаем нужный результат. ■

Прежде чем вернуться к задаче (P), докажем еще две оценки.

Предложение 4.9. Пусть $j \in J_0$ и $f \in L_1(\mathbb{R})$ таковы, что $j \circ f \in L_1(\mathbb{R})$, и пусть w есть решение задачи (P_{ϵ}) . Тогда

$$\int_{\mathbb{R}} j(f + Aw) \leq \int_{\mathbb{R}} j(f).$$

Доказательство. Определим отображение $L: L_1(\mathbb{R}) \rightarrow L_1(\mathbb{R})$ равенством $Lf = f + Aw$, где w — решение задачи (P_{ϵ}) . Тогда L есть сжатие в $L_1(\mathbb{R})$. Теперь предложение будет следовать из леммы 4.7, если мы докажем, что L удовлетворяет принципу максимума. Пусть $k = \max\{0, \sup f\}$ и $g = f + Aw$. Мы должны показать, что $g(x) \leq k$ п.в. на $\mathbb{R}$. Предположим, что $k \in \mathcal{R}(\beta)$, в противном случае это неравенство очевидно. Итак, пусть существует такое $l \geq 0$, что $k \in \beta(l)$. Положим

$$h(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } u(x) > l \text{ или } g(x) > k, \\ 0 & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Ясно, что $h(x) \in \gamma(u(x))$, где $\gamma(r) = [\text{sign}(r - l)]^+$. Использование леммы 4.5 с $p = 1$ дает

$$0 \leq (-Aw, h) = (f - g, h) \leq (k - g, h).$$

Но $g(x) \geq k$, если $u(x) > l$. Значит, $g(x) \leq k$ п.в. Аналогично, $g(x) \geq \min\{0, \inf f\}$. ■

Заметим, что из предложения 4.9 и его доказательства следует неравенство $\|f - Aw\|_p \leq \|f\|_p$, если $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_p(\mathbb{R})$ и $1 \leq p \leq \infty$.

Предложение 4.10. Пусть $f, \hat{f} \in L_1(\mathbb{R})$ и $w, \hat{w}$ — соответствующие решения задачи (P_{ϵ}) . Тогда

$$\|(f + Aw) - (\hat{f} + A\hat{w})\|_1 \leq \|f - \hat{f}\|_1;$$

кроме того, если $f \leq \hat{f}$, то $f + Aw \leq \hat{f} + A\hat{w}$ и $w \leq \hat{w}$ п.в. на $\mathbb{R}$.

Доказательство. Пусть $g = f + Aw$ и $\hat{g} = \hat{f} + A\hat{w}$. Тогда $g \in Bw$ и $\hat{g} \in B\hat{w}$. Пусть h — характеристическая функция множества E , определенного следующим образом:

$$E = \{x: \hat{w}(x) > w(x)\} \cup \{x: \hat{g}(x) > g(x)\}.$$

Умножим равенство $\hat{g} - g - A(\hat{w} - w) = \hat{f} - f$ на h и проинтегрируем. Снова пользуясь леммой 4.5, находим

$$\int_E (\hat{g} - g) \leq \int_E (\hat{f} - f) = \int_{\mathbb{R}} [\hat{f} - f]^+.$$

В силу монотонности $\hat{g}(x) \leq g(x)$ на $\mathbb{R} \setminus E$, и потому

$$\int_E (\hat{g} - g) = \int_{\mathbb{R}} [\hat{g} - g]^+ \leq \int_{\mathbb{R}} [\hat{f} - f]^+.$$

Далее, пусть $f \leq \hat{f}$. Тогда ясно, что $f + Aw \leq \hat{f} + A\hat{w}$. Пусть $w_\mu, \hat{w}_\mu$ — решения уравнений

$$\mu w_\mu + Aw_\mu + \beta(w_\mu) \ni f \quad \text{и} \quad \mu \hat{w}_\mu + A\hat{w}_\mu + \beta(\hat{w}_\mu) \ni \hat{f}.$$

Мы доказали, что $g_\mu = f + Aw_\mu \leq \hat{f} + A\hat{w}_\mu = \hat{g}_\mu$, где $g_\mu \in \beta(w_\mu) + \mu w_\mu$, $\hat{g}_\mu \in \beta(\hat{w}_\mu) + \mu \hat{w}_\mu$. Монотонность β дает $w_\mu \leq \hat{w}_\mu$. Устремляя μ к нулю, получаем $w \leq \hat{w}$ п. в. ■

Пусть теперь ε стремится к нулю, и вернемся к задаче (P):

$$-w'' + \beta(w) \ni f \quad \text{на } \mathbb{R}. \quad (P)$$

Дадим сначала несколько определений.

Определение 4.11. Функция $w: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ называется *решением* задачи (P), если: (i) $w \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R})$, (ii) $w'' \in L_1(\mathbb{R})$ в смысле распределений, (iii) $w''(x) + f(x) \in \beta(w(x))$ п. в. на $\mathbb{R}$.

Определение 4.12. Говорят, что задача (P) *корректна* на множестве $\mathcal{L} \subseteq L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R})$, если

(i) для любой функции $f \in L_1(\mathbb{R})$ задача (P) имеет по крайней мере одно решение $w \in \mathcal{L}$. Положим

$$G_\beta(f) = \{w \in \mathcal{L}: w \text{ есть решение задачи (P)}\}.$$

(ii) $L_\beta f := \{f + w'' : w \in G_\beta(f)\}$ состоит в точности из одного элемента для любого $f \in L_1(\mathbb{R})$.

$$(iii) \int_{\mathbb{R}} j(L_\beta f) \leq \int_{\mathbb{R}} j(f) \quad \text{для всех } f \in L_1(\mathbb{R}) \text{ и } j \in J_0.$$

$$(iv) \int_{\mathbb{R}} [L_\beta f - L_\beta g]^+ \leq \int_{\mathbb{R}} [f - g]^+ \quad \text{для } f, g \in L_1(\mathbb{R}).$$

Замечания 4.13. (a) Из (iii) при $j(r) = |r|$ следует, что $\|L_\beta f\|_1 \leq \|f\|_1$.

(b) Взяв в (iv) $g \geq f$, получим, что $L_\beta g \geq L_\beta f$.

(с) Меняя в (iv) g и f местами, получим, что

$$\|L_\beta f - L_\beta g\|_1 \leq \|f - g\|_1.$$

Таким образом, если (P) корректна в $\mathcal{L}$, то L_β является *сохраняющим порядком сжатием* на $L_1(\mathbb{R})$.

В первой части этого параграфа мы доказали, что для любой функции $f \in L_1(\mathbb{R})$ существует единственная функция $w_\varepsilon \in L_1(\mathbb{R})$, такая, что $w_\varepsilon'' \in L_1(\mathbb{R})$ и

$$-w_\varepsilon'' + \varepsilon w_\varepsilon + \beta(w_\varepsilon) \ni f \text{ п.в. на } \mathbb{R}.$$

Оператор $Aw = w''$ удовлетворяет условиям I и II теоремы 4.4. Этого достаточно, чтобы доказать предложения 4.9 и 4.10. Поэтому в случае возмущенной задачи (iii) и (iv) остаются справедливыми при замене β на $\beta + \varepsilon I$. Значит, задача (P_ε) , где β заменено на $\beta + \varepsilon I$, также корректна в $\mathcal{L} = L_1(\mathbb{R})$.

Пусть теперь $\varepsilon \downarrow 0$. Справедлива следующая лемма.

Лемма 4.14. Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$ и w_ε — соответствующее решение задачи (P_ε) . Пусть $u_\varepsilon = w_\varepsilon'' + f = L_{\beta+\varepsilon I} f$. Предположим, что семейство $\{w_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ равномерно ограничено в $L_\infty(\mathbb{R})$. Тогда множество $\{(w_\varepsilon, u_\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$ предкомпактно в $(L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}))^2$. Если дополнительно $\varepsilon_k \downarrow 0$ и $(w_{\varepsilon_k}, u_{\varepsilon_k}) \rightarrow (w, u)$, то

$$u = w'' + f \in L_1(\mathbb{R}) \text{ и } u \in \beta(w).$$

Кроме того, $\int_{\mathbb{R}} j(u) \leq \int_{\mathbb{R}} j(f)$ для любого $j \in J_0$.

Доказательство. Заметим, что

- (i) $L_{\beta+\varepsilon I}$ есть сжатие в $L_1(\mathbb{R})$,
- (ii) $L_{\beta+\varepsilon I}$ инвариантен относительно сдвига,
- (iii) $L_{\beta+\varepsilon I}(0) = 0$.

Из этих замечаний следует, что $u_\varepsilon = L_{\beta+\varepsilon I} f$ удовлетворяет неравенствам

$$\|u_\varepsilon\|_1 \leq \|f\|_1$$

и

$$\int_{\mathbb{R}} |u_\varepsilon(x+h) - u_\varepsilon(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x+h) - f(x)| \quad \forall h \in \mathbb{R}.$$

Поскольку оператор сдвига непрерывен в $L_1(\mathbb{R})$, то получаем, что семейство $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ предкомпактно в $L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Кроме того, имеем неравенство $\int_{\mathbb{R}} j(u_\varepsilon) \leq \int_{\mathbb{R}} j(f)$. Если $\varepsilon_k \rightarrow 0$ и $u_{\varepsilon_k} \rightarrow u$

в $L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R})$, то из леммы Фату следует, что $\int_{\mathbb{R}} j(u) \leq \int_{\mathbb{R}} j(f)$.

При любом $\varepsilon > 0$ функции w_ε удовлетворяют условиям

$$\varepsilon \|w_\varepsilon\|_1 \leq \|f\|_1 \quad \text{и} \quad \|w_\varepsilon''\|_1 \leq 2 \|f\|_1.$$

Тогда из соотношений

$$w'_\varepsilon(x) - w'_\varepsilon(y) = \int_y^x w_\varepsilon''(s) ds \quad \text{и} \quad w_\varepsilon'' \in L_1(\mathbb{R})$$

следует, что

$$\|w'_\varepsilon\|_\infty \leq \|w_\varepsilon''\|_1 \leq 2 \|f\|_1.$$

Поэтому семейство $\{w_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ равномерно непрерывно на $\mathbb{R}$. Кроме того, по предположению $\{w_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ ограничено в $L_\infty(\mathbb{R})$. Значит, существуют такие последовательности $\varepsilon_k \rightarrow 0$ и $\{w_k\}$, что $w_{\varepsilon_k} \rightarrow w$ равномерно на каждом компакте из $\mathbb{R}$. Теперь, так как $w_{\varepsilon_k}'' = u_{\varepsilon_k} - f$, $(u_{\varepsilon_k} - f, \varphi) \rightarrow (u - f, \varphi)$ и $(w_{\varepsilon_k}'', \varphi) = (w_{\varepsilon_k}, \varphi'') \rightarrow (w, \varphi'')$ при $\varepsilon_k \downarrow 0$ для всех $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, то

$$w'' = u - f \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Кроме того, поскольку $u_\varepsilon \in \beta(w_\varepsilon)$ и β максимален, $u \in \beta(w)$ п.в. ■

Замечание 4.15. Если известно, что w — единственное решение задачи (P) и $L_\beta f = w'' + f$, то $u_\varepsilon = L_{\beta+\varepsilon I} f \rightarrow L_\beta f$. Так как

$$\int_{\mathbb{R}} [L_{\beta+\varepsilon I} f - L_{\beta+\varepsilon I} g]^+ \leq \int_{\mathbb{R}} [f - g]^+ \quad \text{для всех } \varepsilon > 0,$$

то снова используем лемму Фату для получения (iv).

Ниже мы покажем, что два решения задачи (P) в $L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R})$ различаются на константу. Поэтому $L_\beta f$ единственно и замечание 4.15 справедливо.

Рассмотрим сначала некоторые априорные оценки решения w задачи (P). Так как $w'' \in L_1(\mathbb{R})$, то $w' \in L_\infty(\mathbb{R})$ и пределы $w'(\pm\infty)$ существуют. Предположим теперь, например, что $w'(+\infty) \neq 0$. Тогда $|w(x)| \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$. Однако $0 \in \text{int } \mathcal{R}(\beta)$, что противоречит тому, что $w'' + f \in \beta(w)$ и $w'' + f \in L_1(\mathbb{R})$. Поэтому $w'(\pm\infty) = 0$ и $\|w'\|_\infty \leq \|w''\|_1$.

Пусть $j \in J_0$ таково, что $\partial j = \beta$. Тогда $j(w)' = uw'$ п.в. и $\|j(w)'\|_1 \leq \|u\|_1 \|w'\|_\infty$. Таким образом, $j(w) \in L_\infty(\mathbb{R})$ и $j(w)(\pm\infty)$ существует. В частности, $j(w)(\pm\infty) = 0$. Отсюда следует, что $\|j(w)\|_\infty \leq \|u\|_1 \|w'\|_\infty$. Но с другой стороны, $j(r) \rightarrow \infty$ при $|r| \rightarrow \infty$, так как $0 \in \text{int } \mathcal{R}(\beta)$. Поэтому $w \in L_\infty(\mathbb{R})$.

Если $w'' \in L_1(\mathbb{R})$ и $w \in L_\infty(\mathbb{R})$, то для любой неубывающей функции $p \in L_\infty(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$

$$\int_{\mathbb{R}} p'(w(x)) \{w'(x)\}^2 + \int_{\mathbb{R}} p(w(x)) w''(x) = 0. \quad (4.16)$$

Пусть w_1 и w_2 — два решения задачи (P). Тогда

$$u_1 = w_1' + f, \quad u_1 \in \beta(w_1), \quad (4.17)$$

$$u_2 = w_2' + f, \quad u_2 \in \beta(w_2). \quad (4.18)$$

Из монотонности β следует, что $(u_1 - u_2)(w_1 - w_2) \geq 0$ на $\mathbb{R}$. Равенства (4.17) и (4.18) дают $(w_1' - w_2')(w_1 - w_2) \geq 0$, а также $(w_1' - w_2')p(w_1 - w_2) \geq 0$, если мы выберем $p(0) = 0$. Первый член в (4.16) теперь дает $w_1' - w_2' = 0$, откуда следует, что $w_1 - w_2 = c$ на $\mathbb{R}$.

Проводя подобные выкладки с решением w_ε задачи (P_ε) , получим, что

$$\left\| \frac{\varepsilon}{2} w_\varepsilon^2 + j(w_\varepsilon) \right\|_\infty \leq \|u_\varepsilon\|_1 \|w_\varepsilon'\|_\infty \leq 2 \|f\|_1^2.$$

Отсюда следует, что семейство $\{w_\varepsilon\}$ равномерно ограничено в $L_\infty(\mathbb{R})$.

Следствие. Задача (P) корректна в $L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R})$.

Подытожим полученные оценки решения w задачи (P):

$$\|w'\|_\infty \leq \|w''\|_1 \leq 2 \|f\|_1,$$

$$\|j(w)\|_\infty \leq \|u\|_1 \cdot \|w'\|_\infty \leq 2 \|f\|_1^2, \text{ если } \partial j = \beta.$$

Пусть $f, \hat{f} \in L_1(\mathbb{R})$ и $w \in G_\beta(f), \hat{w} \in G_\beta(\hat{f})$. Так как $(w - \hat{w})'(\pm \infty) = 0$, то

$$\|w' - \hat{w}'\|_\infty \leq \|w'' - \hat{w}''\|_1 \leq 2 \|f - \hat{f}\|_1.$$

Наконец, отметим, что

$$\int_{\mathbb{R}} L_\beta f = \int_{\mathbb{R}} f \quad \text{для } f \in L_1(\mathbb{R}).$$

4.3. Случай $\mathcal{R}(\beta) \equiv (0, \infty)$

Этот случай возникает при изучении нелинейного уравнения диффузии

$$u_t = (\ln u)_{xx}, \quad u > 0.$$

Здесь $\varphi(u) = \ln u$ и $\beta(w) = e^w$. Снова рассмотрим задачу (P), которую мы обозначим здесь (P_f) :

$$-w'' + \beta(w) \ni f \text{ на } \mathbb{R}. \quad (P_f)$$

Основываясь на результатах предыдущего параграфа, дадим определение.

Определение 4.16. Функцию $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ назовем *решением* задачи (P_f) для $f \in L_1(\mathbb{R})$, если

- (i) w, w' локально абсолютно непрерывны на $\mathbb{R}$.
- (ii) $f(x) + w''(x) \in \beta(w(x))$ п.в. на $\mathbb{R}$.
- (iii) $w'(\pm\infty) = 0$.

Дадим также

Определение 4.17. Назовем *минимальным сечением* величину $\beta^0(r) = \inf \{s : s \in \beta(r)\}$ при $r \in \mathcal{D}(\beta)$.

Замечание 4.18. $\beta^0(r)$ — неубывающая функция на $\mathcal{D}(\beta)$.

Теорема 4.19. Следующие утверждения эквивалентны:

- (i) Для $f \in L_1(\mathbb{R})$ задача (P_f) имеет решение тогда и только тогда, когда $\int f > 0$.
- (ii) Существует некоторая функция $f \in L_1(\mathbb{R})$, для которой задача (P_f) имеет решение.
- (iii) Существует некоторое $a \in \mathbb{R}$, такое, что

$$(-\infty, a] \subseteq \mathcal{D}(\beta) \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^a \beta^0(r) dr < \infty.$$

Доказательство. Докажем предложение в следующем порядке: (i) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i). Определим сначала $L_1(\mathbb{R})_+ := \{f \in L_1(\mathbb{R}) : \int f > 0\}$. Заметим, что условие $f \in L_1(\mathbb{R})_+$ необходимо для существования решения (P_f) . Это следует из того, что $w'' + f > 0$ п.в. и

$$0 < \|f + w''\|_1 = \int_{\mathbb{R}} (f + w'') = \int_{\mathbb{R}} f < \|f\|_1. \quad (4.19)$$

Кроме того,

$$\|w''\|_1 \leq 2 \|f\|_1 \quad (4.20)$$

и

$$\|w'\|_{\infty} \leq \|w''\|_1 \leq 2 \|f\|_1. \quad (4.21)$$

(i) $\Rightarrow$ (iii). Если $f \in L_1(\mathbb{R})_+$ и w есть решение (P_f) , то в силу (4.21) $\|w'\|_{\infty} \leq 2 \|f\|_1$. Поэтому существует такая положительная константа c , что

$$w(x) \geq cx, \quad x \leq -1.$$

Далее

$$f(x) + w''(x) \geq \beta^0(w(x)) \geq \beta^0(cx) > 0 \quad \text{для п.в. } x < -1.$$

Следовательно,

$$\|f\|_1 \geq \|f + w''\|_1 \geq \int_{-\infty}^{-1} \beta^0(cx) dx = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{-c} \beta^0(s) ds.$$

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Предположим, что существует такое $a \in \mathbb{R}$, что

$$\int_{-\infty}^a \beta^0(r) dr < \infty.$$

Утверждается, что существует такая функция $g: (-\infty, a] \rightarrow \mathbb{R}$, что $g \geq 1$ и g не возрастает на $(-\infty, a]$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \infty$ и

$$\int_{-\infty}^a \beta^0(x) g(x) dx < \infty.$$

Пусть g — такая функция. Определим $v: (-\infty, -1] \rightarrow \mathbb{R}$ из условий

$$\begin{aligned} v'(x) &= \frac{1}{g(v(x))}, \quad x < -1, \\ v(-1) &= a - 1. \end{aligned}$$

Мы видим, что $v' > 0$ и $v'' > 0$, а также $\lim_{x \rightarrow -\infty} v(x) = -\infty$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} v'(x) = 0$. Наконец, $v'' \in L_1(-\infty, -1)$ и

$$\int_{-\infty}^{-1} \beta^0(v(x)) dx = \int_{-\infty}^{a-1} \beta^0(y) g(y) dy < \infty.$$

Определим далее функцию $\bar{w}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, такую, что $\bar{w}$ является четной и гладкой на $\mathbb{R}$, $\bar{w}(x) = v(x)$ для $-\infty < x \leq -1$ и $\bar{w}(x) < a$ всюду. Определим, наконец,

$$f(x) := -\bar{w}''(x) + \beta^0(\bar{w}(x)) \in L_1(\mathbb{R}).$$

Тогда $\bar{w}$ есть решение задачи (P_f) .

Опишем теперь построение g .

Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ — убывающая последовательность $a_1 > \dots > a_n > a_{n+1} > \dots$, такая, что

$$\int_{-\infty}^{a_n} \beta^0(x) dx < \frac{1}{n^2}.$$

Пусть g — такая гладкая невозрастающая функция, что $g(a_n) = \sqrt{n}$ для $n = 1, 2, \dots$ и $g = 1$ на $[a_1, a]$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \beta^0(x) g(x) dx &= \int_{a_1}^a \beta^0(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{a_{n+1}}^{a_n} \beta^0(x) g(x) dx \leq \\ &\leq \int_{a_1}^a \beta^0(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+1} \int_{a_{n+1}}^{a_n} \beta^0(x) dx < \int_{a_1}^a \beta^0(x) dx + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^2} < \infty. \end{aligned}$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) следует из лемм 4.20, 4.21 и 4.22 (см. ниже). ■

Лемма 4.20. Пусть $f, g \in L_1(\mathbb{R})_+$ и $\int f > \int g$. Если задача (P_g) имеет решение, то и (P_f) разрешима.

Лемма 4.21. Пусть выполнено условие (ii) теоремы 4.19, и пусть V задано формулой

$$V := \left\{ f \in L_1(\mathbb{R})_+ : \exists g \in L_1(\mathbb{R})_+, \int f > \int g \text{ и } \right. \\ \left. \text{задача } (P_g) \text{ разрешима} \right\}.$$

Тогда V плотно в $L_1(\mathbb{R})_+$.

Лемма 4.22. Множество тех $f \in L_1(\mathbb{R})_+$, для которых (P_f) имеет решение, замкнуто в $L_1(\mathbb{R})_+$.

Мы докажем здесь только лемму 4.21. Доказательства лемм 4.20 и 4.22 см. в работе Crandall, Evans [1975].

Доказательство леммы 4.21. Выберем такую функцию $f \in L_1(\mathbb{R})_+$, для которой задача (P_f) имеет решение $\bar{w}$. В силу (ii) это возможно. Для заданного $\varepsilon > 0$ мы построим такое $g \in L_1(\mathbb{R})_+$, что $\|g\|_1 < \varepsilon$ и (P_g) имеет решение. Для $\delta, M > 0$ определим

$$\bar{w}_{\delta, M} = \bar{w}(\delta x) - M.$$

Тогда $\bar{w}_{\delta, M}$ есть решение $(P_{f_{\delta, M}})$, где

$$f_{\delta, M}(x) \equiv -\bar{w}_{\delta, M}''(x) + \beta^0(\bar{w}_{\delta, M}(x)) = -\delta^2 \bar{w}''(\delta x) + \beta^0(\bar{w}(\delta x) - M).$$

Теперь для достаточно малых δ

$$\|\bar{w}_{\delta, M}'\|_1 = \delta \|\bar{w}'\|_1 < \varepsilon/2.$$

Кроме того, $\beta^0(\bar{w}(\delta x) - M) \rightarrow 0$ при $M \rightarrow \infty$. Это следует из утверждения (ii), которое выполняется только тогда, когда $\int_{-\infty}^a \beta^0(r) dr < \infty$. По теореме о монотонной сходимости мы можем выбрать M настолько большим, что

$$\|\beta^0(\bar{w}(\delta x) - M)\|_1 < M\varepsilon/2.$$

Тогда $g := f_{\delta, M}$ удовлетворяет оценке $\|g\|_1 < \varepsilon$. Для завершения доказательства возьмем $f \in L_1(\mathbb{R})_+$ и положим $h = f + g$. Тогда $h \in L_1(\mathbb{R})_+$ и $\int h > \int g$ и задача (P_g) имеет решение. Поэтому $h \in V$. А из неравенства $\|h - f\|_1 < \varepsilon$ следует плотность V в $L_1(\mathbb{R})_+$. ■

Замечание 4.23. Теорема 4.19 утверждает, что решение w задачи (P_f) существует тогда и только тогда, когда $f \in L_1(\mathbb{R})_+$. Положим $Lf := w'' + f$, где w — решение (P_f) . Как и в § 4.2, можно доказать следующие факты:

(a) L есть сжатие в $L_1(\mathbb{R})$.
 (b) $\int [Lf - Lg]^+ \leq \int [f - g]^+$ для $f, g \in L_1(\mathbb{R})_+$, т. е. L сохраняет порядок.

(c) $\int j(Lf(x)) \leq \int j(f(x))$ для $f \in L_1(\mathbb{R})_+$ и $j \in J_0$.

(d) Если $m \leq f(x) \leq M$ п.в., $m \leq 0$, $M \geq 0$, то $m \leq Lf(x) \leq M$ п.в. (см. доказательство предложения 4.10).

(e) Решения (P_f) неограничены: $w(x) \rightarrow -\infty$ при $|x| \rightarrow \infty$. Это следует из того, что

$$f + w'' \in \beta(w), \quad f + w'' \geq \beta^0(w) \text{ и } f + w'' \in L_1(\mathbb{R}).$$

(f) Задача (P_f) имеет единственное решение. Пусть w и $\hat{w}$ — два решения задачи (P_f) . Как и в § 4.2, прежде всего доказываем, что $w(x) - \hat{w}(x) = c$. Отсюда получаем, что $Lf(x) \in \beta(\hat{w}(x)) \cap \beta(\hat{w}(x) + c)$ п.в. Используя условие $\hat{w}(x) \rightarrow -\infty$ при $|x| \rightarrow \infty$, мы можем выбрать x так, чтобы $\hat{w}(x)$ было точкой строгого возрастания β^0 : $\beta^0(\hat{w}(x)) < \beta^0(\hat{w}(x) + r)$ для любого $r > 0$. Отсюда следует, что $c = 0$.

(g) Так как $w'(\pm\infty) = 0$, то $\int_{\mathbb{R}} Lf = \int_{\mathbb{R}} f$.

4.4. Полугрупповое решение

Из результатов, полученных в § 4.2 и 4.3, непосредственно следует, что оператор A_Φ удовлетворяет условиям:

(i) A_Φ m -диссипативен в $L_1(\mathbb{R})$,

(ii) $E_{\lambda}^{A_{\Phi}}$ сохраняет порядок в $L_1(\mathbb{R})$,

(iii) $E_{\lambda}^{A_{\Phi}}$ удовлетворяет принципу максимума, т. е. если $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_{\infty}(\mathbb{R})$ такова, что $m \leq f(x) \leq M$ п. в., то $m \leq E_{\lambda}^{A_{\Phi}} f(x) \leq M$ п. в.

Пусть $u_0 \in \overline{\mathcal{D}(A_{\Phi})}$ и $\varepsilon > 0$. Рассмотрим неявную разностную схему

$$\begin{cases} u_{\varepsilon}(t) - u_{\varepsilon}(t - \varepsilon) = \varepsilon A_{\Phi} u_{\varepsilon}(t), & t > 0, \\ u_{\varepsilon}(t) = u_0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Тогда $u_{\varepsilon}(t) = E_{\varepsilon}^{A_{\Phi}} u_{\varepsilon}(t - \varepsilon)$ для $t > 0$. Итерируя, находим, что

$$u_{\varepsilon}(t) = (E_{\varepsilon}^{A_{\Phi}})^{[t/\varepsilon]+1} u_0 \quad \text{для } t > 0,$$

где $[t/\varepsilon]$ — наибольшее целое число из интервала $(-\infty, t/\varepsilon]$.

Теорема 2.3 о порождении полугрупп дает

$$u(t) = T_{A_{\Phi}}(t) u_0 = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} u_{\varepsilon}(t),$$

где сходимость равномерна на $[0, T]$ с любым $T > 0$, т. е.

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup_{t \in [0, T]} \|T_{A_{\Phi}}(t) u_0 - u_{\varepsilon}(t)\|_1 = 0.$$

Из принципа максимума для $E_{\lambda}^{A_{\Phi}}$ следует, что если $u_0 \in \overline{\mathcal{D}(A_{\Phi})} \cap L_{\infty}(\mathbb{R})$ и $m \leq u_0(x) \leq M$, то $u(t, x) := T_{A_{\Phi}}(t) u_0(x)$ удовлетворяет оценке

$$m \leq u(t, x) \leq M \quad \text{п. в. на } [0, \infty) \times \mathbb{R}.$$

Кроме того, поскольку $E_{\lambda}^{A_{\Phi}}$ сохраняет порядок, оценка $u_0(x) \geq v_0(x)$ п. в. на $\mathbb{R}$ влечет за собой $u(t, x) \geq v(t, x)$ п. в. на $[0, \infty) \times \mathbb{R}$, где $v(t, x) := T_{A_{\Phi}}(t) v_0(x)$ для $(t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$.

Наконец, имеет место закон сохранения масс

$$\int_{\mathbb{R}} u(t, x) dx = \int_{\mathbb{R}} u_0(x) dx \quad \text{для всех } t > 0.$$

Теорема 4.24. Пусть $u_0 \in \overline{\mathcal{D}(A_{\Phi})} \cap L_{\infty}(\mathbb{R})$ и $\varphi: \mathcal{D}(\varphi) \rightarrow \mathbb{R}$ — такие непрерывные неубывающие функции, что либо $\varphi(0) = 0$ и $0 \in \text{int} \mathcal{D}(\varphi)$, либо $\mathcal{D}(\varphi) \subset (0, \infty)$. Тогда $u(t, x)$ — слабое решение задачи (I), удовлетворяющее условию $\lim_{t \downarrow 0} \|u(t) - u_0\|_1 = 0$.

Доказательство. Ясно, что $\beta = \varphi^{-1}$ удовлетворяет условиям § 4.2 и 4.3. Определим $u_{\varepsilon}(t) = (E_{\lambda}^{A_{\Phi}})^{[t/\varepsilon]+1} u_0$ для $t > 0$ и $u_{\varepsilon}(t) = u_0$ для $t \leq 0$. При каждом $t > 0$ функция $u_{\varepsilon}(t, x)$ удовлетво-

ряет условию

$$\frac{1}{\varepsilon} \{u_\varepsilon(t, x) - u_\varepsilon(t - \varepsilon, x)\} = A_\varphi u_\varepsilon(t, x) \quad \text{в } \mathcal{D}'(0, \infty)$$

или

$$\frac{1}{\varepsilon} \{u_\varepsilon(t, x) - u_\varepsilon(t - \varepsilon, x)\} = w_\varepsilon''(t, x) \quad \text{в } \mathcal{D}'(0, \infty),$$

или

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} \{u_\varepsilon(t, x) - u_\varepsilon(t - \varepsilon, x)\} \xi(x) dx - \int_{\mathbb{R}} w_\varepsilon(t, x) \xi''(x) dx = 0$$

при $\xi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $w_\varepsilon = \varphi(u_\varepsilon)$. Пусть далее $\zeta \in C_0^\infty(0, \infty)$. Умножим равенство на ζ и проинтегрируем. Тогда получим

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\varepsilon} \{u_\varepsilon(t, x) - u_\varepsilon(t - \varepsilon, x)\} \zeta(t) \xi(x) dx dt &= \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \varphi(u_\varepsilon(t, x)) \zeta(t) \xi''(x) dx dt. \end{aligned}$$

Положим $f(t, x) = \zeta(t) \xi(x)$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \{u_\varepsilon(t, x) - u_\varepsilon(t - \varepsilon, x)\} f(t, x) dx dt &= \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} u_\varepsilon(t, x) f(t, x) dx dt - \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^\infty \int_{\mathbb{R}} u_\varepsilon(t, x) f(t + \varepsilon, x) dx dt = \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} u_\varepsilon(t, x) \frac{f(t, x) - f(t + \varepsilon, x)}{\varepsilon} dx dt, \end{aligned}$$

так как $f \in C_0^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R})$. Для того чтобы перейти к пределу при $\varepsilon \downarrow 0$, воспользуемся следующими фактами:

- (i) $u_\varepsilon \rightarrow u$ п. в.,
- (ii) $\varphi(u_\varepsilon) \rightarrow \varphi(u)$ п. в. (в силу непрерывности φ),
- (iii) $\|u_\varepsilon\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty$ для всех $\varepsilon > 0$,
- (iv) теоремой об ограниченной сходимости. Тогда получим

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \{u(t, x) f_t(t, x) - \varphi(u(x, t)) f_{xx}(t, x)\} dx dt = 0$$

для всех $f \in C_0^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R})$. ■

Замечание 4.25. В работе Brezis, Crandall [1979] показано, что если $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна, не убывает и $\varphi(0) = 0$, то ограниченное слабое решение задачи (I), удовлетворяющее условию $\lim_{t \downarrow 0} \|u(t) - u_0\|_1 = 0$, единственно.

4.5. Непрерывная зависимость от φ

В этом параграфе мы изучаем зависимость от φ решений задачи (I), где функция $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна, не убывает и удовлетворяет условиям $\varphi(0) = 0$, $0 \in \text{int } \mathcal{D}(\varphi)$ и $u_0 \in \overline{\mathcal{D}(A_\varphi)} \cap L_\infty(\mathbb{R})$. Как отмечалось в § 4.4, полугрупповое решение u принадлежит $C([0, \infty); L_1(\mathbb{R})) \cap L_\infty((0, \infty) \times \mathbb{R})$ и удовлетворяет дифференциальному уравнению в смысле распределений. Пусть $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ — последовательность непрерывных неубывающих функций $\varphi_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям $\varphi_n(0) = 0$ и $0 \in \text{int } \mathcal{D}(\varphi_n)$, и пусть $\{u_{0n}\}_{n \geq 0}$ — такая последовательность функций $u_{0n}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, что $u_{0n} \in \overline{\mathcal{D}(A_{\varphi_n})} \cap L_\infty(\mathbb{R})$. Для каждого $n \geq 1$ рассмотрим задачу

$$(I_n) \quad \begin{cases} u_t = (\varphi_n(u))_{xx}, & (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_{0n}(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Единственное слабое решение задачи (I_n) мы обозначим u_n . Ясно, что $u_n \in C([0, T]; L_1(\mathbb{R})) \cap L_\infty((0, \infty) \times \mathbb{R})$. Справедлив следующий результат о непрерывной зависимости.

Теорема 4.26. Пусть u_n — решение задачи (I_n) для $n \geq 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(r) = \varphi(r) \quad \text{для } r \in \mathbb{R}$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_{0n} = u_0 \quad \text{в } L_1(\mathbb{R}).$$

Тогда $u_n \rightarrow u$ в $C([0, \infty); L_1(\mathbb{R}))$, где u есть слабое решение задачи (I).

Замечание 4.27. Когда $\varphi(r) = |r|^m \cdot \text{sign } r$, $m > 1$, и $u_0 \geq 0$, классический подход к исследованию задачи (I) (см., например, Олейник, Калашников, Чжоу [1958]) состоит в замене u_0 на $u_0 + 1/n$ и устремлении $n \rightarrow \infty$. В условиях теоремы 4.26 эта аппроксимация соответствует выбору $\varphi_n(r) = \varphi(r) + r/n$.

Теорема 4.26 — прямое следствие теоремы 2.7, так как $\varphi_n \rightarrow \varphi$ влечет за собой $A_{\varphi_n} \rightarrow A_\varphi$ в смысле резольвент, т. е. если $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} E_1^{\varphi_n} f = E_1^\varphi f$ для всех $f \in L_1(\mathbb{R})$. Мы рассмотрим более общий случай, когда $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ и φ — максимальные монотонные графики в $\mathbb{R}^2$ и $\varphi_n \rightarrow \varphi$ при $n \rightarrow \infty$.

Замечание 4.28. Когда мы пишем $\varphi_n \rightarrow \varphi$, $n \rightarrow \infty$, то имеем в виду, что $\varphi_n^0(r) \rightarrow \varphi^0(r)$ п.в. на $\mathbb{R}$, когда $n \rightarrow \infty$. Здесь φ^0 означает минимальное сечение: см. определение 4.17.

Определим сначала класс максимальных монотонных графиков в $\mathbb{R}^2$. Пусть $\delta, r_0 > 0$ — заданные числа. Положим $\Phi_{\delta, r_0} = \{\varphi \text{ — максимальный монотонный график в } \mathbb{R}^2: 0 \in \varphi(0) \text{ и } |\varphi^0(\pm\delta)| < r_0!\}$.

Предложение 4.29. Пусть $\delta, r_0 > 0$ и $f \in L_1(\mathbb{R})$. Тогда множество $\{E_1^A \varphi f: \varphi \in \Phi_{\delta, r_0}\}$ предкомпактно в $L_1(\mathbb{R})$.

Доказательство. Положим $E = E_1^A \varphi$. Из § 4.2 известно, что $E: L_1(\mathbb{R}) \rightarrow L_1(\mathbb{R})$ — сжатие, удовлетворяющее условию $E0 = 0$. Поэтому

$$\|Ef\|_1 \leq \|f\|_1 \text{ для всех } \varphi \in \Phi_{\delta, r_0}.$$

Кроме того, E инвариантно относительно сдвигов, т. е. если $u = Ef$, то $u_h = Ef_h$, где $f_h(x) = f(x+h)$ и $u_h(x) = u(x+h)$ для всех $h \in \mathbb{R}$. Отсюда следует, что

$$\|Ef_h - Ef\|_1 \leq \|f_h - f\|_1 \text{ для всех } h \in \mathbb{R}.$$

Поскольку сдвиг непрерывен на $L_1(\mathbb{R})$, отсюда следует, что $\{E_1^A \varphi f: \varphi \in \Phi_{\delta, r_0}\}$ предкомпактно в $L_1^{loc}(\mathbb{R})$. Для доказательства предкомпактности в $L_1(\mathbb{R})$ осталось показать, что

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x| > R} |Ef(x)| dx = 0 \text{ равномерно по } \varphi \in \Phi_{\delta, r_0}. \quad (4.22)$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем $M, R_0 > 0$ так, чтобы

$$\|(f - M\chi_{\{|x| \leq R_0\}})^+\|_1 < \varepsilon,$$

где χ_S означает характеристическую функцию множества $S \subseteq \mathbb{R}$. Для сокращения обозначения положим $g = M\chi_{\{|x| \leq R_0\}}$. Так как $f \leq f^+ \leq g + (f - g)^+$ и E сохраняет порядок, то

$$(Ef)^+ \leq Ef^+ \leq E(g + (f - g)^+).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int_{|x| > R} (Ef)^+ &\leq \int_{|x| > R} Eg + \int_{|x| > R} |E(g + (f - g)^+) - Eg| \leq \\ &\leq \int_{|x| \geq R} Eg + \|(f - g)^+\|_1 < \int_{|x| \geq R} Eg + \varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно, достаточно показать, что $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x| > R} Eg = 0$ равномерно по $\varphi \in \Phi_{\delta, r_0}$, вместо того, чтобы проверять то же

самое для $(Ef)^+$. Оценивая $(Ef)^-$ аналогично, убеждаемся, что (4.22) имеет место для любой функции $f \in L_1(\mathbb{R})$, если оно выполнено для функций вида $f = \pm M\chi_{\{|x| \leq R_0\}}$. Рассмотрим снова задачу

$$-w'' + \beta(w) \ni f \text{ (с } \beta = \varphi^{-1}). \quad (P)$$

Полагая $u = Ef$, имеем $u = f + w''$ (w есть решение (P)) и $u \in \beta(w)$. Необходимо показать, что

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x| > R} u(x) dx = 0 \text{ равномерно по } \varphi \in \Phi_{\delta, r_0}.$$

Заметим, что это условие выполнено, если $\lim_{R \rightarrow \infty} w'(\pm R) = 0$ равномерно по $\varphi \in \Phi_{\delta, r_0}$. Так как в обоих случаях доказательство одинаково, мы рассмотрим только случай $w'(+R)$. Из принципа максимума для E следует, что

$$w''(x) + f(x) = Ef(x) \geq 0 \text{ п.в. на } \mathbb{R}. \quad (4.23)$$

Значит, $w''(x) \geq 0$ для п.в. $x > R_0$. Таким образом, мы получим, что $w'(r) \geq w'(s)$ и $w(r) \geq w(s) + (r-s)w'(s)$ для всех $r \geq s \geq R_0$. Тогда либо $w'(s) \leq 0$, либо $w(\infty) = \infty$. Однако $|\beta(\pm r_0)| \geq \delta$, так как $\varphi \in \Phi_{\delta, r_0}$. Этот факт, а также то, что $w(+\infty) = \infty$ и $u \in \beta(w)$, противоречат условию $u \in L_1(\mathbb{R})$. Поэтому $w'(s) \leq 0$ для всех $s > R_0$. Отсюда следует, что $w(s)$ и $w''(s) \in \beta(w(s))$ убывают по s при $s > R_0$. Зафиксируем $x > R_0$. Тогда

$$\begin{aligned} w''(2x) \cdot x &\leq \int_x^{2x} w''(s) ds = \int_x^{2x} (w''(s) + f(s)) ds \leq \\ &\leq \|w'' + f\|_1 \leq \|f\|_1 = 2MR_0. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$w''(x) \leq \frac{4MR_0}{x} \text{ для всех } x > 2R_0.$$

Возьмем теперь константу $L > 4MR_0/\delta$. Тогда для $x > L$ имеем $w''(x) < \delta$ и поэтому

$$|w(x)| < r_0 \text{ равномерно по } \varphi \in \Phi_{\delta, r_0}.$$

Наконец, используем еще раз (4.23). Получим

$$w(t) - w(r) = \int_r^t w'(s) ds \leq (t-r)w'(t), \quad t \geq r \geq R_0$$

или

$$w(r) \geq w(t) + (t-r)(-w'(t)), \quad t \geq r \geq$$

и $(t - L)(-w'(t)) \leq 2r_0$ для $t > L$. Отсюда $w'(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ равномерно по $\varphi \in \Phi_{\delta, r_0}$, что завершает доказательство предложения. ■

Далее мы докажем теорему, из которой теорема 4.26 следует непосредственно.

Теорема 4.30. Пусть $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ и φ — максимальные монотонные графики в $\mathbb{R}^2$, которые содержат нуль и удовлетворяют условию $\varphi_n \rightarrow \varphi$ при $n \rightarrow \infty$. Пусть далее $0 \in \text{int } \mathcal{D}(\varphi)$. Тогда

$$A_{\varphi_n} \rightarrow A_{\varphi} \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

в смысле резольвент.

Доказательство. Зафиксируем $f \in L_1(\mathbb{R})$. Так как $0 \in \text{int } \mathcal{D}(\varphi)$, то существует такое $\delta > 0$, что $(-\delta, \delta) \in \mathcal{D}(\varphi)$. Положим $r_0 = \max \{-\varphi^0(-\delta/2), \varphi^0(\delta/2)\} + 1$. Тогда $\varphi_n \in \Phi_{\delta, r_0}$ для достаточно больших n и можно применить предложение 4.29. Мы покажем, что существование подпоследовательности $\{\varphi_{n_k}\}$, для которой $u_{n_k} := E_1^{A_{\varphi_{n_k}}} f \rightarrow u$ в $L_1(\mathbb{R})$, влечет за собой $u = E_1^{A_{\varphi}} f$. Так как $u_{n_k} = f + w_{n_k}''$, то

$$w_{n_k}'' \rightarrow u - f \quad \text{в } L_1(\mathbb{R}).$$

Из § 4.2 мы знаем, что

$$\|j_{n_k}[w_{n_k}]\|_{\infty} \leq 2\|f\|_1^2,$$

где $\partial j_{n_k} = \beta_{n_k} = \varphi_{n_k}^1$. Тогда из $\varphi_{n_k} \in \Phi_{\delta, r_0}$ следует равномерная ограниченность в $L_{\infty}(\mathbb{R})$ последовательности $\{w_{n_k}\}$. Следовательно, существуют подпоследовательность $\{w_{n_l}\}$ и функция $w \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R})$, такие, что $w_{n_l} \rightarrow w$ п.в. в $\mathbb{R}$. Отсюда вытекает, что $w'' = f - u$. Поскольку φ максимальный монотонный и $u_{n_l} \in \varphi_{n_l}(w_{n_l})$, имеем $u \in \varphi(w)$. Поэтому $u = E_1^{A_{\varphi}} f$. ■

Имеет место следующее важное следствие.

Теорема 4.31. Пусть φ — такой максимальный монотонный график в $\mathbb{R}^2$, что $0 \in \varphi(0)$ и $0 \in \text{int } \mathcal{D}(\varphi)$. Пусть A_{φ} и $\mathcal{D}(A_{\varphi})$ такие, как в § 4.1. Тогда

$$\overline{\mathcal{D}(A_{\varphi})} = \{v \in L_1(\mathbb{R}) : \inf \mathcal{D}(\varphi) \leq v(x) \leq \sup \mathcal{D}(\varphi) \text{ п.в.}\}.$$

Замечание 4.32. В теореме 4.26 предполагалось, что $\mathcal{D}(\varphi) = \mathbb{R}$. Поэтому $\overline{\mathcal{D}(A_{\varphi})} = L_1(\mathbb{R})$.

Доказательство. Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$ такова, что $\inf \mathcal{D}(\varphi) \leq f(x) \leq \sup \mathcal{D}(\varphi)$ п.в. на $\mathbb{R}$. Для $\lambda > 0$ положим $u_{\lambda} = E_{\lambda}^{A_{\varphi}} f = (I - \lambda A_{\varphi})^{-1} f = (I - A_{\lambda\varphi})^{-1} f = E_1^{A_{\lambda\varphi}} f$. Тогда $u_{\lambda} \in \mathcal{D}(A_{\varphi})$. Далее

$\lambda \varphi \rightarrow \varphi_0$, когда $\lambda \downarrow 0$, где

$$\varphi_0(r) = \begin{cases} \{0\}, & \inf \mathcal{D}(\varphi) < r < \sup \mathcal{D}(\varphi), \\ [-\infty, 0], & r = \inf \mathcal{D}(\varphi), \\ [0, \infty), & r = \sup \mathcal{D}(\varphi). \end{cases}$$

Используя теорему 4.30, получаем, что $u_\lambda \rightarrow E_1^{A\varphi_0} f$ при $\lambda \downarrow 0$. Теперь, поскольку $\beta = \varphi_0^{-1}$ и w — решение задачи $-w'' + \beta(w) \ni f$, то очевидно, что $w = 0$ — единственное решение, так как $f \in \mathcal{R}(\beta)$. Поэтому $E_1^{A\varphi_0} f = w'' + f = f$, что завершает доказательство. ■

4.6. Регулярность

Формальные преобразования для задачи

$$(I') \quad \begin{cases} u_t = (|u|^m \operatorname{sign} u)_{xx}, & (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

при $m \neq 1$ и $m > 0$ показывают, что если $u(t, x)$ — решение, соответствующее начальному значению u_0 , то

$$v(t, x) = \lambda^{1/(m-1)} u(\lambda t, x), \quad \lambda > 0,$$

есть решение, отвечающее начальному значению $\lambda^{1/(m-1)} u_0$. Поэтому соответствующая полугруппа $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ в $L_1(\mathbb{R})$ удовлетворяет равенству

$$T(t)(\lambda^{1/(m-1)} u_0) = \lambda^{1/(m-1)} T(\lambda t) u_0 \quad \text{для } \lambda > 0 \text{ и } t \geq 0$$

для всех $u_0 \in L_1(\mathbb{R})$. Этим мотивируется следующая теорема.

Теорема 4.33. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — нормированное векторное пространство и $C \subseteq X$ — подмножество, удовлетворяющее условию $rC \subseteq C$, $r \geq 0$. Пусть $T(t): C \rightarrow X$ для любого $t \geq 0$ таково, что

(i) $T(t)(\lambda^{1/(m-1)} x) = \lambda^{1/(m-1)} T(\lambda t) x$ для $\lambda > 0$ и $x \in C$ ($m > 0$, $\neq 1$),

(ii) $\|T(t)x - T(t)\hat{x}\| \leq L \|x - \hat{x}\|$ для $x, \hat{x} \in C$,

(iii) $T(t)0 = 0$.

Тогда для любых $x \in C$ и $h, t > 0$

$$\|T(t+h)x - T(t)x\| \leq 2L \|x\| \cdot \left| 1 - \left(1 + \frac{h}{t}\right)^{1/(1-m)} \right|. \quad (4.24)$$

ткуда

$$\lim_{h \downarrow 0} \left\| \frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} \right\| \leq \frac{2L \|x\|}{|m-1|} \cdot \frac{1}{t}. \quad (4.25)$$

Доказательство. Положим $\lambda = (1 + h/t)$. Для любого $x \in C$

$$T(t+h)x - T(t)x =$$

$$= T(\lambda t)x - T(t)x = \lambda^{-1/(m-1)} T(t)(\lambda^{1/(m-1)}x) - T(t)x =$$

$$= \lambda^{-1/(m-1)} \{T(t)(\lambda^{1/(m-1)}x) - T(t)x\} + (\lambda^{-1/(m-1)} - 1) T(t)x, \quad (4.26)$$

где мы воспользовались свойством (i). Используя далее (ii) и (iii), получим

$$\|T(t+h)x - T(t)x\| \leq \lambda^{-1/(m-1)} \cdot L \cdot |\lambda^{1/(m-1)} - 1| \cdot \|x\| +$$

$$+ L \cdot |\lambda^{-1/(m-1)} - 1| \cdot \|x\| = 2L \cdot |1 - \lambda^{1/(1-m)}| \cdot \|x\|.$$

Это приводит к (4.24). Неравенство (4.25) получается теперь непосредственно. ■

Предположим теперь, что X — полуупорядоченное векторное пространство.

Теорема 4.34. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — полуупорядоченное векторное пространство с отношением порядка $\geq$. Пусть отображение $T(t): C \rightarrow X$, $t \geq 0$, таково, что

$$T(t)x \geq T(t)y, \text{ если } x, y \in C \text{ и } x \geq y, \quad (4.27)$$

где C описано в теореме 4.33, а $T(t)$ обладает свойством (i). Тогда для любых $x \in C$, $x \geq 0$ и $t, h > 0$ имеем

$$(m-1) \{T(t+h)x - T(t)x\} \geq (m-1) \left\{ \left(1 + \frac{h}{t}\right)^{1/(1-m)} - 1 \right\} T(t)x. \quad (4.28)$$

Доказательство. В случае $m > 1$ используем равенство (4.26). Так как $\lambda > 1$ и $\lambda^{1/(m-1)} > 1$, то $\lambda^{1/(m-1)}x \geq x$ (поскольку $x \geq 0$) и

$$\lambda^{-1/(m-1)} \{T(t)(\lambda^{1/(m-1)}x) - T(t)x\} \geq 0$$

в силу (4.27). Поэтому из (4.26) получим

$$T(t+h)x - T(t)x \geq (\lambda^{-1/(m-1)} - 1) T(t)x, \quad (4.29)$$

откуда (4.28) следует непосредственно. Когда $m < 1$, мы получаем неравенство, обратное (4.29). Умножая на $m - 1$, снова приходим к (4.28). ■

Применив (4.25) и (4.28) к полугрупповым решениям задачи (I'), получим

$$\overline{\lim}_{h \downarrow 0} \int_R \frac{|u(t+h, x) - u(t, x)|}{h} dx \leq \frac{1}{t} \frac{2}{|m-1|} \int_R |u_0(x)| dx,$$

и для $u_0 \geq 0$ (что влечет за собой $u(t) \geq 0$)

$$-(m-1) \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} u \zeta_t \geq - \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \frac{u}{t} \zeta$$

для $\zeta \in C_0^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R})$, $\zeta \geq 0$. Это приводит к неравенству

$$(m-1) u_t \geq -\frac{u}{t} \text{ в } \mathcal{D}'((0, \infty) \times \mathbb{R}). \quad (4.30)$$

Замечание. Подобные результаты могут быть получены для решений дифференциальных уравнений в частных производных других типов, к которым применима теория полугрупп, например $u_t + (|u|^m \cdot \text{sign } u)_x = 0$ или $u_t = (|u_x|^m \cdot \text{sign } (u_x))_x$. При этом все возникающие полугруппы обладают свойством (i) из теоремы 4.33.

Часть II

Аналитические полугруппы

Глава 5

Операторное исчисление аналитических полугрупп

5.1. Банаховы пары: терминология

Пусть $\mathcal{E}$ обозначает класс всех таких пар банаховых пространств $E = (E_1, E_0)$, что E_1 *плотно* вложено в E_0 . Пара $E \in \mathcal{E}$ будет называться *банаховой парой*. Отображение вложения из E_1 в E_0 будем обозначать через j_E или просто j .

Для заданных банаховых пар $E = (E_1, E_0)$ и $F = (F_1, F_0)$ *отображением банаховых пар* из E в F будем называть любой ограниченный линейный оператор $T: E_0 \rightarrow F_0$, такой, что $T(E_1)$ содержится в F_1 . Таким образом, имеем следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} E_0 & \xrightarrow{T} & F_0 \\ \cup & & \cup \\ E_1 & \xrightarrow{T} & F_1 \end{array}$$

Из теоремы о замкнутом графике следует, что для любого отображения банаховых пар $T: E \rightarrow F$ линейный оператор $T|_{E_1}: E_1 \rightarrow F_1$ ограничен. Множество всех отображений банаховых пар из E в F будем обозначать через $\mathcal{L}(E, F)$. Оно является векторным пространством и, наделенное нормой

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E, F)} = \max(\|T\|_{\mathcal{L}(E_0, F_0)}, \|T\|_{\mathcal{L}(E_1, F_1)}),$$

становится банаховым пространством. Как обычно, если $E = F$, то мы пишем $\mathcal{L}(E)$ вместо $\mathcal{L}(E, E)$. Пространство $\mathcal{L}(E)$ — банахова алгебра.

Если E — банахова пара, а X — такое банахово пространство, что $E_1 \subset X \subset E_0$ (вложения непрерывны, но не обязательно плотны), то пространство X называется *промежуточным пространством* пары E . Пространство X является промежуточным пространством с показателем θ при некотором $\theta \in (0, 1)$, если для всех $x \in E_1$ выполняется неравенство

$$\|x\|_X \leq C \|x\|_{E_0}^{1-\theta} \cdot \|x\|_{E_1}^{\theta},$$

где C не зависит от x .

5.2. Классы генераторов $Gen(E)$ и $Hol(E)$

Пусть задана банахова пара $E = (E_1, E_0)$, и пусть $A: E_1 \rightarrow E_0$ — ограниченный линейный оператор. Мы можем рассматривать A как неограниченный линейный оператор в E_0 с областью определения $\mathcal{L}(A) = E_1$. Определим $Gen(E)$ как множество всех операторов $A \in \mathcal{L}(E_1, E_0)$, таких, что соответствующий неограниченный оператор в E_0 замкнут и порождает C_0 -полугруппу в E_0 . Из теоремы Хилле — Йосиды следует, что для всех $\lambda \in \mathbb{C}$, таких, что $\operatorname{Re} \lambda$ больше некоторого числа $\omega_0 \in \mathbb{R}$, оператор $\lambda j - A: E_1 \rightarrow E_0$ является изоморфизмом.

Нам понадобится подмножество множества $Gen(E)$, обозначаемое $Hol(E)$. Это подмножество определяется следующим образом:

Определение. Если $A \in \mathcal{L}(E_1, E_0)$, то $A \in Hol(E)$ тогда и только тогда, когда при некотором $\omega \in \mathbb{R}$ отображение

$$(\lambda j - A): E_1 \rightarrow E_0$$

является изоморфизмом при всех λ с $\operatorname{Re} \lambda \geq \omega$ и обратный оператор $(\lambda j - A)^{-1}: E_0 \rightarrow E_1$ равномерно ограничен по λ ($\operatorname{Re} \lambda \geq \omega$).

По определению $Hol(E) \subset \mathcal{L}(E_1, E_0)$. Однако неочевидно, что $Hol(E) \subset Gen(E)$. Этот факт будет установлен в § 5.4.

Обратный оператор $(\lambda j - A)^{-1}$ называется *резольвентой* оператора A в точке λ и обозначается через $R(\lambda, A)$, или, короче, $R(\lambda)$. Множество тех $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых $R(\lambda)$ существует, называется *резольвентным множеством* оператора A и обозначается $\rho(A)$, а его дополнение, как известно, есть *спектр* оператора A ; его обозначают $\sigma(A)$. Следует заметить, что резольвента $R(\lambda)$ является оператором, действующим из E_0 в E_1 , тогда как обычно ее определяют как ограниченный оператор на E_0 , т. е. рассматривают оператор $j \circ R(\lambda)$. Эти два оператора в некотором смысле «одинаковы». Тем не менее из равенства

$$j \circ R(\lambda) = \lambda^{-1}(\lambda j - A + A) R(\lambda) = \lambda^{-1}(1 + AR(\lambda)) \quad (\lambda \neq 0),$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} \lambda \geq \omega$, получаем

$$\|j \circ R(\lambda)\| \leq \frac{C}{|\lambda|},$$

если для тех же λ выполняется оценка $\|R(\lambda)\| \leq C'$.

5.3. Резольвента

Пусть задан $A \in Hol(E)$, и предположим, что $R(\lambda)$ существует при $\operatorname{Re} \lambda \geq \omega$, причем при этих же λ справедлива оценка $\|R(\lambda)\| \leq M$. Тогда имеет место

Лемма 5.1. *Существует такое число θ ($0 < \theta < \pi/2$), что $\Sigma_{\omega, \theta} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\omega - \lambda)| < \theta\}$ содержит спектр $\sigma(A)$ оператора A . Кроме того, резольвента оператора A равномерно ограничена на $\mathbb{C} \setminus \Sigma_{\omega, \theta}$.*

Доказательство. Выберем $\lambda \in \mathbb{C}$ с $\operatorname{Re} \lambda = \omega$. Для любого $\mu \in \mathbb{C}$ оператор

$$(\lambda + \mu)j - A = (1 + \mu j \circ R(\lambda))(\lambda j - A)$$

обратим тогда и только тогда, когда обратим оператор $1 + \mu j \circ R(\lambda)$. Таким образом, если $\|\mu \cdot j \circ R(\lambda)\| < 1$, то $\lambda + \mu \in \rho(A)$ и в силу разложения в ряд

$$R(\lambda + \mu) = R(\lambda) \sum_{k=0}^{\infty} (-\mu)^k (j \circ R(\lambda))^k$$

получаем, что

$$\|R(\lambda + \mu)\| \leq \|R(\lambda)\| \cdot (1 - \|\mu\| \cdot \|j \circ R(\lambda)\|)^{-1}.$$

Используя оценку $\|j \circ R(\lambda)\| \leq C|\lambda|^{-1}$, мы устанавливаем, что

$$\begin{aligned} \|R(\lambda + \mu)\| &\leq \\ &\leq \|R(\lambda)\| \left(1 - \frac{C\|\mu\|}{\|\operatorname{Im} \lambda\|}\right)^{-1} \end{aligned}$$

равномерно по μ , если выбрать $\|\mu\| \leq \|\operatorname{Im} \lambda\|/2C$.

При этом условии $\lambda + \mu$ может принимать любые значения вне $\Sigma_{\omega, \theta}$ при некотором θ , что и доказывает лемму. ■

Естественно, что если $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_{\omega, \theta}$, то

$$\|j \circ R(\lambda)\| \leq C|\lambda|^{-1},$$

где C — некоторая константа.

Учитывая вид множества $\Sigma_{\omega, \theta}$, содержащего спектр $\sigma(A)$, оператор $A \in \operatorname{Hol}(E)$ иногда называют **секториальным оператором**.

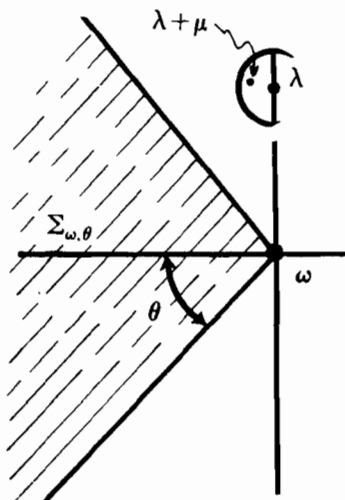


Рис. 1.

5.4. Теоремы о возмущениях

Пусть A — оператор из $\operatorname{Hol}(E)$, и пусть $B \in \mathcal{L}(E_1, E_0)$. В данном параграфе мы приведем некоторые условия на A и B , и:

которых вытекает, что $A + B \in \text{Hol}(E)$. Все эти результаты о возмущениях основаны на следующем факте:

Лемма 5.2. Если $A \in \text{Hol}(E)$, $B \in \mathcal{L}(E_1, E_0)$ и $\lambda \in \rho(A)$ удовлетворяют либо условию

$$\|R(\lambda, A)B\| \leq 1/2,$$

либо условию

$$\|BR(\lambda, A)\| \leq 1/2,$$

то $\lambda \in \rho(A + B)$ и

$$\|R(\lambda, A + B)\| \leq 2 \|R(\lambda, A)\|.$$

В частности, если эти условия выполняются для всех λ с $\text{Re } \lambda \geq \omega_0$ при некотором ω_0 , то $A + B \in \text{Hol}(E)$.

Доказательство. Утверждение немедленно следует из равенства

$$\lambda j - A - B = (1 - BR(\lambda))(\lambda j - A) = (\lambda j - A)(1 - R(\lambda)B).$$

Действительно, в условиях леммы имеем

$$R(\lambda, A + B) = \sum_{k=0}^{\infty} (R(\lambda, A)B)^k R(\lambda, A)$$

или

$$R(\lambda, A + B) = R(\lambda, A) \sum_{k=0}^{\infty} (BR(\lambda, A))^k. \quad \blacksquare$$

Первым применением данной леммы является.

Теорема 5.3. Множество $\text{Hol}(E)$ открыто в $\mathcal{L}(E_1, E_0)$ (в топологии операторной нормы).

Доказательство. Поскольку $R(\lambda, A)$ равномерно ограничена при $\text{Re } \lambda \geq \omega$, мы получаем $\|BR(\lambda)\| \leq 1/2$, если норма $\|B\|$ достаточно мала. Поэтому для малых по норме B оператор $A + B$ принадлежит $\text{Hol}(E)$. $\blacksquare$

Пусть X — такое промежуточное пространство пары E , что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists C_\varepsilon > 0 \quad \forall x \in E_1 : \|x\|_X \leq \varepsilon \|x\|_{E_1} + C_\varepsilon \|x\|_{E_0}.$$

Любое промежуточное пространство с показателем $\theta \in (0, 1)$ удовлетворяет этому условию.

Теорема 5.4. Если $A \in \text{Hol}(E)$ и $B \in \mathcal{L}(X, E_0)$, то $A + B|_{E_1} \in \text{Hol}(E)$.

Доказательство. Пусть $k: E_1 \hookrightarrow X$ обозначает вложение, и пусть $R(\lambda, A) = R(\lambda)$ равномерно ограничена при $\text{Re } \lambda \geq \omega_0$.

Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$

$$\|k \circ R(\lambda)\| \leq \varepsilon \|R(\lambda)\| + C_\varepsilon \|j \circ R(\lambda)\| \leq K \left(\varepsilon + \frac{C_\varepsilon}{|\lambda|} \right)$$

при некоторой константе K . Теперь для произвольного $\delta > 0$ можно выбрать достаточно малое $\varepsilon > 0$, а затем $\omega_1 > \omega_0$, так что $\|k \circ R(\lambda)\| < \delta$ при всех λ с $\operatorname{Re} \lambda \geq \omega_1$. Для этих λ мы получаем

$$\|B \circ k \circ R(\lambda)\| \leq \delta \cdot \|B\|_{X \rightarrow E_0}.$$

Наконец, положив $\delta = (2 \|B\|)^{-1}$ и используя лемму 5.2, получаем $A + B \circ k \in \operatorname{Hol}(E)$. ■

Для того чтобы доказать следующую теорему о возмущениях, нам понадобится

Лемма 5.5. Пусть $A \in \operatorname{Hol}(E)$. Если резольвента $R(\lambda)$ равномерно ограничена при $\operatorname{Re} \lambda \geq \omega$, то для любого $x \in E_0$

$$\lim_{\substack{|\lambda| \rightarrow \infty \\ \operatorname{Re} \lambda \geq \omega}} \|R(\lambda)x\|_{E_1} = 0.$$

Доказательство. Ввиду равномерной ограниченности $R(\lambda)$ нам достаточно доказать лемму для всех x из плотного подмножества пространства E_0 , например E_1 . Легко проверить, что для произвольного $\mu_0 \in \mathbb{C}$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E_0 & \xrightarrow{j \circ R(\lambda)} & E_0 \\ \mu_0 j - A \uparrow & & \uparrow \mu_0 j - A \\ E_1 & \xrightarrow{R(\lambda) \circ j} & E_1 \end{array}$$

коммутативна. Поэтому для фиксированного $\mu_0 \in \rho(A)$ получаем

$$\|R(\lambda) \circ j\| = \|(\mu_0 j - A)^{-1} \circ j \circ R(\lambda) (\mu_0 j - A)\| \leq C \cdot |\lambda|^{-1}.$$

Из последнего неравенства следует сходимость $R(\lambda)x \rightarrow 0$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$ для любого $x \in E_1$. ■

Используя установленную лемму, мы покажем, что справедлива

Теорема 5.6. Пусть $A \in \operatorname{Hol}(E)$. Тогда для произвольного компактного оператора $B: E_1 \rightarrow E_0$ оператор $A + B$ принадлежит $\operatorname{Hol}(E)$.

Доказательство. Допустим, что $R(\lambda, A) = R(\lambda)$ равномерно ограничена при $\operatorname{Re} \lambda \geq \omega_0$. Для $\lambda \in \mathbb{C}$ с $\operatorname{Re} \lambda \geq \omega_0$ положим

$$K \quad \text{замыкание в } E_0 \text{ множества } \{Bx : \|x\|_{E_1} \leq 1\},$$

$$f_\lambda(y) = \|R(\lambda)y\|_{E_1} \quad (y \in K).$$

В силу предположений множество K является компактным метрическим пространством, а функции f_λ на K равномерно липшищ-непрерывны и равномерно ограничены. Поэтому по теореме Арцела — Асколи семейство функций $\{f_\lambda\}$ предкомпактно в $C(K)$. По лемме 5.5 $f_\lambda(x)$ поточечно сходятся к нулю при $|\lambda| \rightarrow \infty$. Отсюда, используя предкомпактность семейства $\{f_\lambda\}$ в $C(K)$, получаем, что f_λ сходятся к нулю равномерно. Таким образом, найдется $\omega_1 > \omega_0$, такое, что $\sup_{y \in K} |f_\lambda(y)| \leq 1/2$ при всех λ из полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda \geq \omega_1$. Итак, используя определения множества K и семейства $\{f_\lambda\}$, получаем $\|R(\lambda)B\| \leq 1/2$ при всех λ с $\operatorname{Re} \lambda \geq \omega_1$. Следовательно, $A + B \in \operatorname{Hol}(E)$. ■

5.5. Операторное исчисление

В этом параграфе мы определим выражение $f(A)$ для любого оператора $A \in \operatorname{Hol}(E)$ и произвольной аналитической функции $f(\lambda)$, которая задана на некоторой окрестности спектра $\sigma(A)$ и достаточно быстро убывает на бесконечности. Используем для этой цели интеграл Данфорда. Материал данного параграфа можно рассматривать как непосредственное обобщение случая, когда оператор A является ограниченным оператором в банаховом пространстве.

Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — область, определяемая следующим образом:

$$G := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(-\lambda)| \leq \theta \text{ или } |\lambda| \leq \varepsilon\}.$$

Для любой функции $f: G \rightarrow \mathbb{C}$, которая непрерывна на G и аналитична в $\operatorname{int} G$, положим

$$\omega_f(r) := \sup \{|f(\lambda)| : |\lambda| = r, \lambda \in G\}.$$

Множество функций f , для которых величина

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \omega_f(r) \frac{dr}{r} + \sup_{r>0} \omega_f(r) \stackrel{\text{def}}{=} \|f\|_{\mathcal{F}}$$

конечна, будем обозначать через $\mathcal{F}$. Множество $\mathcal{F}$, наделенное нормой $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$, становится коммутативной банаховой алгеброй без единицы.

Определим $\mathcal{A}$ как подмножество множества $\operatorname{Hol}(E)$, состоящее из тех $A \in \operatorname{Hol}(E)$, для которых $\{\lambda : |\arg(\lambda)| \leq \pi - \theta\} \subset \rho(A)$ и $\|R(\lambda, A)\| \leq C$ при $\lambda \in \mathbb{C}$ из сектора $|\arg(\lambda)| \leq \pi - \theta$ при некоторой константе C . Легко проверить, что $\mathcal{A}$ открыто в $\mathcal{L}(E_1, E_0)$. Этот факт устанавливается, как и в § 5.4, путем разложения $(\lambda j - A - B)^{-1}$ в ряд по степеням оператора B .

Всюду далее мы будем рассматривать A из $\mathcal{A}$. Это не ограничивает общности, поскольку для каждого $A \in \operatorname{Hol}(E)$ можно

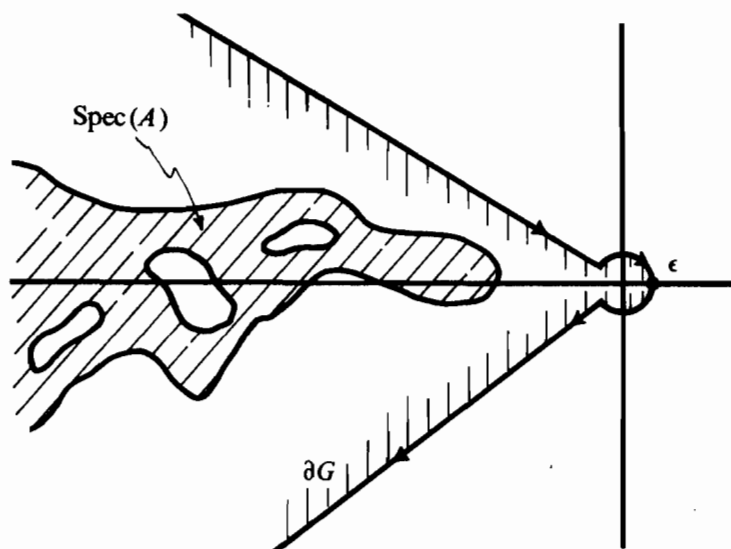


Рис. 2.

найти такое $k \in \mathbb{R}$, что $A - k \cdot j \in \mathcal{A}$, если величина θ выорана подходящим образом. Для любых $f \in \mathcal{F}$ и $A \in \mathcal{A}$ пусть

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} f(\lambda) j \circ R(\lambda, A) d\lambda,$$

где кривая ∂G ориентирована снизу вверх. Интеграл может быть интерпретирован как интеграл Бохнера. Подынтегральное выражение — непрерывная функция со значениями в $\mathcal{L}(E_0)$, и потому она измерима. Из оценки $\|j \circ R(\lambda)\| \leq C/|\lambda|$ и предположения $f \in \mathcal{F}$ следует, что интеграл существует (т. е. подынтегральная функция суммируема). Поскольку аналогичная оценка справедлива для $R(\lambda) \circ j$, легко видеть, что $f(A)$ отображает E в E_1 и что $f(A): E_1 \rightarrow E_1$ — ограниченный оператор. Таким образом, $f(A)$ — отображение банаховых пар, $f(A) \in \mathcal{L}(E)$.

Теорема 5.7. *Отображение $(f, A) \mapsto f(A)$ из $\mathcal{F} \times \mathcal{A}$ в $\mathcal{L}(E)$ аналитично.*

Доказательство. Поскольку $f(A)$ линейно по f , то достаточно доказать, что $A \mapsto f(A)$ аналитично при фиксированной функции $f \in \mathcal{F}$. Пусть оператор $B \in \mathcal{L}(E_1, E_0)$ достаточно мал по

норме. При этом условии справедливо разложение в ряд

$$j \circ R(\lambda, A+B) = j \circ R(\lambda, A) \sum_{h=0}^{\infty} (BR(\lambda, A))^h,$$

и поэтому

$$f(A+B) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} (f^{(h)}(A) B), \quad (*)$$

где $f^{(h)}(A) B$ имеют вид

$$f^{(h)}(A) B = \frac{h!}{2\pi i} \int_{\partial G} f(\lambda) j \circ R(\lambda, A) (BR(\lambda, A))^h d\lambda.$$

Используя равномерную ограниченность $R(\lambda, A)$ на ∂G и включение $f \in \mathcal{F}$, можно легко проверить, что при малом B ряд $(*)$ сходится. ■

Очевидно, что при фиксированном $A \in \mathcal{A}$ отображение $f \mapsto f(A)$ линейно. Мы покажем, что это отображение согласовано с операцией умножения на $\mathcal{F}$ и $\mathcal{L}(E)$. Начнем с двух лемм.

Лемма 5.8. Пусть $A \in \mathcal{A}$ фиксировано и γ — контур в G , который окружает спектр $\sigma(A)$. Тогда

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\lambda) j \circ R(\lambda, A) d\lambda.$$

Замечание. Мы оставляем читателю возможность самостоятельно уточнить высказывание «окружает спектр $\sigma(A)$ ».

Доказательство. Это на самом деле теорема Коши. Подынтегральное выражение $f(\lambda) j \circ R(\lambda)$ аналитично в области, заключенной между γ и ∂G , и достаточно быстро стремится к нулю при $|\lambda| \rightarrow \infty$. ■

Лемма 5.9. Если $\lambda, \mu \in \rho(A)$, то

$$(\lambda - \mu) R(\lambda) \circ j \circ R(\mu) = R(\mu) - R(\lambda).$$

Замечание. Это тождество известно как *резольвентное уравнение* (тождество Гильберта). Оно легко проверяется путем умножения обеих частей равенства на $\lambda j - A$ слева и на $\mu j - A$ справа.

Теорема 5.10. Для фиксированного $A \in \mathcal{A}$ отображение $f \mapsto f(A)$ из $\mathcal{F}$ в $\mathcal{L}(E)$ является гомоморфизмом алгебр.

Доказательство. Мы уже знаем, что $f(A)$ линейно по f ; поэтому нам достаточно проверить, что $(fg)(A) = f(A)g(A)$ для

любых $f, g \in \mathcal{F}$. Запишем произведение $f(A)g(A)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} f(A)g(A) &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\partial G} \int_{\partial G} f(\lambda) g(\mu) j \circ R(\lambda) \circ j \circ R(\mu) d\mu d\lambda = \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\partial G} \int_{\gamma} f(\lambda) g(\mu) j \circ R(\lambda) \circ j \circ R(\mu) d\mu d\lambda = \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\partial G} \int_{\gamma} f(\lambda) g(\mu) \frac{j \circ R(\lambda) - j \circ R(\mu)}{\mu - \lambda} d\mu d\lambda \end{aligned}$$

(по лемме 5.8). Последнее выражение состоит из двух слагаемых, первое из которых — это

$$\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\partial G} f(\lambda) j \circ R(\lambda) \left(\int_{\gamma} \frac{g(\mu)}{\mu - \lambda} d\mu\right) d\lambda.$$

Поскольку $g \in \mathcal{F}$, то существует последовательность чисел $r_n \uparrow \infty$, таких, что $r_n \omega_g(r_n) \downarrow 0$. Поэтому по теореме Коши

$$\int_{\gamma} \frac{g(\mu)}{\mu - \lambda} d\mu = 0$$

для всех $\lambda \in \partial G$, и, следовательно, первое слагаемое нашего представления $f(A)g(A)$ равно нулю. Остается второе слагаемое, которое ввиду теоремы Фубини приобретает вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\partial G} \int_{\gamma} f(\lambda) g(\mu) \frac{j \circ R(\mu)}{\lambda - \mu} d\mu d\lambda = \\ = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\gamma} g(\mu) j \circ R(\mu) \left(\int_{\partial G} \frac{f(\lambda)}{\lambda - \mu} d\lambda\right) d\mu. \end{aligned}$$

Снова воспользовавшись теоремой Коши, получаем

$$\int_{\partial G} \frac{f(\lambda)}{\lambda - \mu} d\lambda = 2\pi i f(\mu), \quad \mu \in \gamma.$$

Итак,

$$f(A)g(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g(\mu) f(\mu) j \circ R(\mu) d\mu = (fg)(A). \quad \blacksquare$$

Мы завершим этот параграф следующим результатом. Определим $\mathcal{L}_s(E)$ как векторное пространство $\mathcal{L}(E)$ с топологией, порождаемой сильными топологиями на $\mathcal{L}(E_0)$ и $\mathcal{L}(E_1)$. Семейство операторов $T_\lambda \in \mathcal{L}_s(E)$ сходится к оператору $T \in \mathcal{L}_s(E)$, если для любых $x \in E_i$ ($i = 0, 1$) $T_\lambda x$ сходится в E_i к Tx .

Теорема 5.11. Пусть заданы $A \in \mathcal{A}$, $f \in \mathcal{F}$. Тогда семейство операторов $\{f(tA): 0 \leq t \leq 1\}$ равномерно ограничено в $\mathcal{L}(E)$. Более того, $f(tA)$ стремится в $\mathcal{L}_s(E)$ к $f(0)$ при $t \downarrow 0$.

Доказательство. Имеет место следующее представление для $f(tA)$:

$$f(tA) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} f(\lambda) j \circ (\lambda j - tA)^{-1} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} f(\lambda) j \circ R\left(\frac{\lambda}{t}\right) \frac{d\lambda}{t}.$$

Из оценок

$$\|j \circ R(\lambda)\|, \|R(\lambda) \circ j\| \leq C/|\lambda|$$

следует, что $\|j \circ R(\lambda)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{C}{|\lambda|}$. Поэтому

$$\|f(tA)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\partial G} |f(\lambda)| \cdot \frac{C}{|\lambda/t|} \cdot \frac{|d\lambda|}{t} \leq \frac{C}{2\pi} \int_{\partial G} \omega_f(|\lambda|) \frac{|d\lambda|}{|\lambda|}.$$

Это означает, что $f(tA)$ равномерно ограничены в $\mathcal{L}(E)$, а значит, в $\mathcal{L}(E_1)$ и $\mathcal{L}(E_0)$. Для того чтобы доказать сильную сходимость, достаточно показать (по принципу равномерной ограниченности), что $f(tA)x \rightarrow f(0)x$ в E_i для всех x из плотного подмножества пространств E_i ($i = 0, 1$). Сначала мы покажем, что $f(tA)j(x) \rightarrow f(0)j(x)$ в E_0 для всех $x \in E_1$. Выберем $\mu_0 \in \mathbb{C} \setminus G$, такое, что $\mu_0 \in \rho(A)$. Тогда любой $x \in E_1$ может быть записан в виде $R(\mu_0)y$ при некотором $y \in E_0$. Из резольвентного уравнения получаем

$$f \circ R(\lambda) \circ j \circ R(\mu_0)y = \frac{j \circ R(\lambda)y}{\mu_0 - \lambda} + \frac{j \circ R(\mu_0)y}{\lambda - \mu_0}.$$

Используя следующее представление для $f(tA)$:

$$\begin{aligned} f(tA) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} f(\lambda') j \circ R\left(\frac{\lambda'}{t}\right) \frac{d\lambda'}{t} = \frac{1}{2\pi i} \int_{t^{-1}\partial G} f(t\lambda) j \circ R(\lambda) d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} f(t\lambda) j \circ R(\lambda) d\lambda \end{aligned}$$

(по теореме Коши), мы можем $f(tA)x = f(tA) \circ j \circ R(\mu_0)y$ записать в виде

$$f(tA) \circ j \circ R(\mu_0)y = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{j \circ R(\lambda)y}{\mu_0 - \lambda} f(t\lambda) d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{j \circ R(\mu_0)y}{\lambda - \mu_0} f(t\lambda) d\lambda.$$

По теореме Коши второе слагаемое в этой сумме обращается в нуль. Подынтегральное выражение в первом слагаемом мажорируется величиной $|\mu_0 - \lambda|^{-1} \cdot \|j \circ R(\lambda)y\| \cdot \|f\|_{\mathcal{F}}$, которая при $|\lambda| \rightarrow \infty$ есть $O(|\lambda|^{-2})$. Используя теорему о мажорантной

сходимости при $t \downarrow 0$, получаем

$$f(tA)x \rightarrow \frac{1}{2\pi i} f(0) \int_{\partial G} \frac{j \circ R(\lambda) y}{\mu_0 - \lambda} d\lambda.$$

Подынтегральное выражение в последнем интеграле аналитично на $\mathbb{C} \setminus (G \cup \{\mu_0\})$ и оценивается на бесконечности как $O(|\lambda|^{-2})$. Поэтому в E_0 мы имеем

$$f(tA)x \rightarrow f(0) j \circ R(\mu_0) y = f(0) x.$$

Таким образом, доказано, что $f(tA) \rightarrow f(0)$ в $\mathcal{L}_s(E_0)$ при $t \downarrow 0$. Осталось установить сходимость в $\mathcal{L}_s(E_1)$. Пусть задан $y \in E_0$. Тогда $R(\mu_0)y \in E_1$. Поскольку $R(\mu_0)$ коммутирует с $f(tA)$, получаем

$$f(tA) R(\mu_0) y = R(\mu_0) f(tA) y,$$

и, используя тот факт, что $f(tA)y$ стремится к $f(0)y$ в E_0 при $t \downarrow 0$, убеждаемся, что

$$f(tA) R(\mu_0) y \rightarrow f(0) R(\mu_0) y \quad \text{в } E_1 (t \downarrow 0).$$

Так как любой $x \in E_1$ может быть представлен в виде $R(\mu_0)y$ при соответствующем $y \in E_0$, то $f(tA) \rightarrow f(0)$ в $\mathcal{L}_s(E_1)$. Теорема доказана. ■

5.6. Экспоненциальное отображение

Используя операторное исчисление, развитое в предыдущем разделе, мы построим полугруппу $\{\exp(tA)\}_{t \geq 0}$ для $A \in \text{Hol}(E)$. Как уже подсказывают обозначения, окажется, что A является генератором полугруппы $\{\exp(tA)\}_{t \geq 0}$. В частности, мы получим включение $\text{Hol}(E) \subset \text{Gen}(E)$.

Пусть заданы банахова пара $E = (E_1, E_0)$ и $A \in \text{Hol}(E)$. Как и в § 5.5, предположим, что $A \in \mathcal{A}$, т. е. при некоторых постоянных C и θ ($0 < \theta < \pi/2$) выполняются неравенства

$$\{\lambda : |\arg(\lambda)| \leq \pi - \theta\} \subset \rho(A)$$

и

$$\|R(\lambda, A)\| \leq C \quad \text{при всех } \lambda \in \mathbb{C} \text{ и } |\arg(\lambda)| \leq \pi - \theta.$$

Рассмотрим функцию $e_t(\lambda)$, определенную формулой

$$e_t(\lambda) = e^{t\lambda}$$

для всех t из сектора

$$S = \{t \in \mathbb{C} : t \neq 0, |\arg(t)| \leq \pi/2 - \theta\}.$$

Легко видеть, что при каждом $t \in S$ функция $e_t(\lambda)$ принадлежит классу $\mathcal{F}$, введенному в § 5.5. Таким образом, можно опре-

делить

$$e^{tA} = e_t(A), \quad t \in S.$$

Семейство операторов $e_t(A)$ обладает следующими свойствами:

Теорема 5.12. (а) *Отображение $t \in S \rightarrow e_t(A) \in \mathcal{L}(E)$ голоморфно;*

(b) *для любого $\varphi < \pi/2 - \theta$ имеем $e_t(A) \xrightarrow{s} 1$ при $t \rightarrow 0$ и $|\arg(t)| \leq \varphi$;*

(c) $e_{t+s}(A) = e_t(A) e_s(A)$ при всех $t, s \in S$.

Доказательство. (а) Это утверждение следует из того факта, что отображение $t \in S \rightarrow e_t \in \mathcal{F}$ голоморфно. Действительно, производная

$$\frac{d}{dt}(e_t(\lambda)) = \lambda e_t(\lambda)$$

принадлежит $\mathcal{F}$.

(b) Из теоремы 5.11 следует, что $e_t(A)$ сильно сходится к 1 при t , стремящемся к нулю по прямой $\arg(t) = \text{const}$. Доказательство, данное в теореме 5.11, можно легко модифицировать, чтобы установить, что $e_t(A) \xrightarrow{s} 1$, когда $t \rightarrow 0$ в секторе $|\arg(t)| \leq \varphi$.

(c) Это утверждение непосредственно следует из равенства

$$e_t(\lambda) e_s(\lambda) = e_{t+s}(\lambda)$$

и того факта, что $f \mapsto f(A)$ — гомоморфизм алгебр из $\mathcal{F}$ в $\mathcal{L}(E)$. ■

Следствие. Семейство $\{e_t(A)\}_{t \geq 0}$ является C_0 -полугруппой.

Замечание. Утверждение (а) теоремы 5.12 может быть усилено следующим образом: экспоненциальное отображение

$$A \in \mathcal{A} \mapsto e^A \in \mathcal{L}(E)$$

голоморфно.

Это непосредственно следует из теоремы 5.7.

Мы уже знаем, что $\{e^{tA}\}_{t \geq 0}$ является C_0 -полугруппой, которая аналитически продолжается на $t \in S$. В то же время не совсем очевидно, что A — генератор полугруппы $\{e^{tA}\}_{t \geq 0}$. Следующие леммы показывают, что это действительно так.

Лемма 5.13. Пусть заданы $A \in \mathcal{A}$, $f \in \mathcal{F}$ и $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus G$. Тогда

$$j \circ R(\lambda, A) f(A) = g(A),$$

где $g \in \mathcal{F}$ определяется формулой

$$g(\lambda) := (\lambda_0 - \lambda)^{-1} f(\lambda)$$

(напомним, что множество G определено в § 5.5).

Доказательство. Из резольвентного уравнения следует, что

$$\begin{aligned} j \circ R(\lambda_0, A) f(A) &= (2\pi i)^{-1} \int_{\partial G} f(\lambda) j \circ R(\lambda_0, A) \circ j \circ R(\lambda, A) d\lambda = \\ &= (2\pi i)^{-1} \int_{\partial G} \left\{ f(\lambda) \frac{j \circ R(\lambda, A)}{\lambda_0 - \lambda} + f(\lambda) \frac{j \circ R(\lambda_0, A)}{\lambda - \lambda_0} \right\} d\lambda. \end{aligned}$$

Второй интеграл по теореме Коши равен нулю. Оставшееся слагаемое по определению равно $g(A)$. ■

Замечание. Равенство $j \circ R(\lambda_0, A) f(A) = g(A)$ имеет место в $\mathcal{L}(E)$. В $\mathcal{L}(E_0)$ мы имеем $j \circ R(\lambda_0, A) f(A) = g(A)$, а в $\mathcal{L}(E_1)$ справедливо равенство $R(\lambda_0, A) \circ j \circ f(A) = g(A)$.

Лемма 5.14. Для $x_0 \in E_1$ рассмотрим

$$x(t) = e_t(A)x_0, \quad 0 \leq t < \infty.$$

Тогда $x \in C^0([0, \infty); E_1)$, $j \circ x \in C^1([0, \infty); E_0)$ и выполняется равенство

$$(j \circ x)'(t) = Ax(t), \quad 0 \leq t < \infty.$$

Доказательство. Положим $e'_t(\lambda) = \lambda e_t(\lambda)$. Мы знаем, что функция $x(t)$ аналитична на $(0, \infty)$ и $x'(t) = e'_t(A)x_0$. Поэтому

$$A^{-1}(j \circ x)'(t) = R(0, A) \circ j \circ e'_t(A)x_0 = e_t(A)x_0.$$

Из теоремы 5.12 вытекает, что $e_t(A)x_0 \in C^0([0, \infty); E_1)$. Отсюда получаем

$$(j \circ x)'(t) = Ae_t(A)x_0 = Ax(t),$$

и, следовательно, $j \circ x \in C^1([0, \infty); E_0)$. ■

Теорема 5.15. Пусть $A \in \mathcal{A}$. Тогда A является генератором C_0 -полугруппы $\{e_t(A)\}_{0 \leq t < \infty}$.

Доказательство. По теореме Хилле — Йосиды семейство $\{e_t(A)\}_{t \geq 0}$ имеет генератор $B: \mathcal{D}(B) \rightarrow E_0$, у которого область определения $\mathcal{D}(B)$ плотна в множестве E_0 . Мы собираемся показать, что $E_1 = \mathcal{D}(B)$ и что $Ax = Bx$ при всех $x \in \mathcal{D}(B)$.

Область определения оператора B — это

$$\mathcal{D}(B) = \{x \in E_0 : (t \rightarrow e_t(A)x) \in C^1([0, \infty); E_1)\},$$

и на $\mathcal{D}(B)$ выполняется равенство

$$Bx = \lim_{t \downarrow 0} \frac{e_t(A)x - x}{t}.$$

Из предыдущей леммы получаем, что $E_1 \subset \mathcal{D}(B)$ и что $B|_{E_1}$ и A совпадают. Остается доказать включение $\mathcal{D}(B) \subset E_1$. Пусть дан $x_0 \in \mathcal{D}(B)$. Тогда, беря производную от $x(t) = e_t(A)x_0$, получим функцию $x'(t) = e'_t(A)x_0$, непрерывную вплоть до точки $t = 0$. Таким образом, функция

$$A^{-1}x'(t) = R(0, A)e'_t(A)x_0 = e_t(A)x_0$$

принадлежит $C^0([0, \infty); E_1)$, причем

$$\lim_{t \downarrow 0} e_t(A)x_0 = x_0 \in E_1.$$

Теорема доказана. ■

5.7. Некоторые оценки функции e^{tA}

Пусть задан оператор $A \in \text{Hol}(E)$. Определим по индукции множества

$$E_k(A) := \{x \in E_{k-1}(A) : Ax \in E_{k-1}(A)\}, \quad k \geq 2,$$

при $E_1(A) = E_1$, $E_0(A) = E_0$. Пространства E_k ($k \geq 2$) зависят от оператора A . Легко проверить, что

$$E_k = \mathcal{R}((j \circ R(\lambda_0, A))^k) \text{ при любом } \lambda_0 \in \rho(A),$$

где $\mathcal{R}(\cdot)$ означает область значений оператора. Все E_k плотны в E_0 . Пространства E_k заданы таким образом, что для $x \in E_k$ корректно определено $A^k x = A \circ \dots \circ Ax$ и $A^k x \in E_0$.

Теорема 5.16. Пусть $A \in \mathcal{A}$. Тогда $e_t(A)x \in E_k$, $k = 0, 1, \dots$, при любом $t > 0$ и любом $x \in E_0$. Кроме того,

$$\|A^k e_t(A)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{C}{t^k} \quad (k \geq 1, 0 < t \leq 1).$$

Доказательство. Положим $e_t^{(k)}(\lambda) = \lambda^k e^{t\lambda}$. Тогда $e_t^{(k)} \in \mathcal{F}$ при всех $t > 0$ и $k = 0, 1, 2, \dots$. Поскольку $A \in \mathcal{A}$, то $0 \in \rho(A)$ и $(j \circ A^{-1})^k e_t^{(k)}(A)x = e_t(A)x$.

Другими словами, $e_t(A)x \in E_k$ и

$$A^k e_t(A)x = e_t^{(k)}(A)x.$$

(Строго говоря, следовало бы писать $(A \circ j^{-1})^k$ вместо A^k .) Таким образом,

$$t^k A^k e_t(A)x = e_t^{(k)}(tA)x,$$

причем по теореме 5.11 правая часть равенства равномерно ограничена в E_0 при $0 < t \leq 1$. Отсюда следует доказываемая оценка. ■

Замечание. Можно несколько уточнить теорему 5.11. На самом деле для произвольного $x \in E_0$

$$\|A^k e_t(A) x\|_{E_0} = o(t^{-k}) \quad (t \downarrow 0)$$

а не $O(t^{-k})$. Действительно, семейство операторов $t^k A^k e_t(A)$ совпадает с семейством $e_1^{(k)}(tA)$, которое при $t \downarrow 0$ сильно сходится к $e_1^{(k)}(0) = 0$.

Из этой теоремы следует, что множество $\bigcap_{k \geq 1} E_k$ плотно в E_0 . На самом деле имеет место более сильный результат. Назовем элемент $x \in E_\infty := \bigcap_{k \geq 1} E_k$ *целым*, если

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{k!} A^k x \right\|_{E_0}^{1/k} = 0.$$

Множество целых векторов обозначим через E_ω . Справедлива

Теорема 5.17. Пусть задан $x_0 \in E_0$, и пусть $x(t) = e_t(A)x_0$, $0 \leq t < \infty$. В этом случае

- (а) $x_0 \in E_k$ тогда и только тогда, когда $x(\cdot) \in C^k([0, \infty); E_0)$;
- (б) $x_0 \in E_\omega$ тогда и только тогда, когда $x(\cdot)$ продолжается до целой функции со значениями в E_0 ;
- (с) множество E_ω плотно в E_0 .

Доказательство. (а) Если $x \in C^k([0, \infty); E_0)$, то функция

$$x^{(k)}(t) = e_t^{(k)}(A) x_0$$

непрерывна в E_0 вплоть до $t=0$ и, таким образом,

$$(j \circ A^{-1})^k x^{(k)}(t) = e_t(A) x_0.$$

Поэтому

$$x_0 = (j \circ A^{-1})^k x^{(k)}(0) \in E_k.$$

Обратно, если $x_0 \in E_k$, то $x_0 = (j \circ A^{-1})^k y_0$ при некотором $y_0 \in E_0$ и функция

$$x^{(k)}(t) = e_t^{(k)}(A) (j \circ A^{-1})^k y_0 = e_t(A) y_0$$

непрерывна вплоть до $t=0$. Поэтому $x \in C^k([0, \infty); E_0)$.

(б) Если $x(t)$ продолжается до целой функции, то $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k t^k$ и $x \in C^\infty([0, \infty); E_0)$. Следовательно, $x_0 \in E_k$ при всех $k \geq 0$ и

$$\frac{1}{k!} A^{-k} x_0 = x_k \quad \text{при } k = 0, 1, 2, \dots$$

Условие $x_0 \in E_\omega$ эквивалентно условию $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \|x_k\|^{1/k} = 0$, которое выполняется, так как $x(t)$ — целая функция. Для доказа-

тества необходимости предположим, что задан элемент $x_0 \in E_\omega$. Тогда $x_0 \in E_k$ при всех $k \geq 0$, и $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{k!} A^k x_0 \right\|_{E_0}^{1/k} = 0$. Поскольку $j \circ R(\lambda, A)$ и $e_t(A)$ коммутируют, то пространства E_k ($k \geq 1$) инвариантны относительно $e_t(A)$. Поэтому

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \|x^{(k)}(t)\|_{E_0} \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \|e_t(A)\| \cdot \|x^{(k)}(0)\|_{E_0} = M \|A^k x_0\|_{E_0},$$

и как следствие получаем

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{0 \leq t \leq 1} \left\| \frac{1}{k!} x^{(k)}(t) \right\|_{E_0} \right\}^{1/k} = 0.$$

Это означает, что разложение в ряд Тейлора функции $x(t)$ в точке $t = 0$ сходится и дает функцию $x(t)$ на всем интервале $0 \leq t \leq 1$. Для завершения доказательства (b) заметим, что разложение в ряд Тейлора $x(\cdot)$ в точке $t = 0$ есть целая функция, которая должна совпадать с $x(t)$ на $0 \leq t < \infty$. Отсюда следует аналитичность $x(t)$ при $t > 0$.

(с) Напомним, что запись $A \in \mathcal{A}$ означает выполнение включения

$$\{\lambda : |\arg(\lambda)| \leq \pi - \theta\} \subset \rho(A)$$

и равномерную ограниченность резольвенты $R(\lambda, A)$ при значениях λ из указанного множества. Для произвольного $A \in \mathcal{A}$ задан гомоморфизм алгебр $f \in \mathcal{F} \mapsto f(A) \in \mathcal{L}(E)$, где множество $\mathcal{F}$ содержит функции $f(\lambda)$, определенные на

$$G = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(-\lambda)| \leq \theta \text{ или } |\lambda| \leq \varepsilon\}.$$

Пусть теперь $\alpha > 1$ — произвольное число со свойством $2\alpha\theta < \pi$. Тогда функция

$$f(\lambda) = \exp(a - (a - \lambda)^\alpha)$$

принадлежит $\mathcal{F}$, если $a > \varepsilon$ (так как точка ветвления $\lambda = a$ функции f лежит вне G). В самом деле, справедливо неравенство

$$|f(\lambda)| \leq \exp(a - |a - \lambda|^\alpha \cos(\alpha\theta)).$$

(Мы настоятельно рекомендуем читателю для проверки этой оценки набросать рисунок.) В силу быстрого убывания функции $f(\lambda)$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$ произведение

$$e_t(\lambda) f(\varepsilon\lambda), \quad t \in \mathbb{C}, \quad \varepsilon > 0$$

определяет целую функцию от t со значениями в $\mathcal{F}$. Используя операторное исчисление, мы получаем целую функцию $e_t(A) f(\varepsilon A)$ от $t \in \mathbb{C}$ со значениями в $\mathcal{L}(E)$. Пусть задан вектор $x_0 \in E_0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ функция $x_\varepsilon(t) = e_t(A) f(\varepsilon A) x_0$

является целой функцией аргумента t , причем $x_\varepsilon(0) \in E$. В то же время $x_\varepsilon(0) = f(\varepsilon A)x_0$ сходится к x_0 при $\varepsilon \downarrow 0$ (по теореме 5.11), и поэтому множество E_ω плотно в E_0 . ■

Замечание. Если в приведенном здесь доказательстве взять x_0 из E_1 , то $f(\varepsilon A)x_0$ сойдется к x_0 в норме E_1 . Значит, мы получим плотность множества E_ω в E_1 .

5.8. Примеры и упражнения

Пусть $L_2^s(\mathbb{R})$ — подпространство пространства $L_2(\mathbb{R})$,

$$L_2^s(\mathbb{R}) := \{f \in L_2(\mathbb{R}) : |x|^s \cdot f(x) \in L_2\}$$

с квадратом нормы

$$\|f\|_s^2 = \int_{\mathbb{R}} (1 + |x|^{2s}) |f(x)|^2 dx.$$

Вложение $L_2^s \hookrightarrow L_2$ плотное, и поэтому при произвольном $s > 0$ определена банахова пара $L^{(s)} = (L_2^s(\mathbb{R}), L_2(\mathbb{R}))$. Определим оператор $A_s : L_2^s \rightarrow L_2$ формулой

$$(A_s f)(x) = -|x|^s f(x).$$

Упражнение 5.18. Докажите, что $A_s \in \text{Hol}(L^{(s)})$ при всех $s > 0$, и покажите, что $\sigma(A_s) = (-\infty, 0]$.

Рассмотрим далее оператор B_s ($s > 0$), который определяется формулой

$$(B_s f)(x) := (-|x|^s + ix) f(x).$$

Упражнение 5.19. (а) Докажите, что $B_s \in \mathcal{L}(\bar{L}_2^s, L_2)$, где $\bar{s} = \min(s, 1)$.

(б) Докажите, что $B_s \in \text{Hol}(\bar{L}_2^s)$ тогда и только тогда, когда $s \geq 1$.

(с) Найдите $\sigma(B_s)$ при $s > 0$.

Итак, B_s не порождает при $s \in (0, 1)$ аналитической полугруппы. Тем не менее, если $s \in (0, 1)$, то B_s с областью определения L_2^s порождает сильно непрерывную полугруппу, которая имеет вид

$$\exp(tB_s) f(x) = e^{(-|x|^s + ix)t} f(x) \quad (0 \leq t < \infty).$$

Упражнение 5.20. (а) Покажите, что операторнозначная функция $t \mapsto \exp(tB_s)$ принадлежит $C^\infty((0, \infty); \mathcal{L}(L_2(\mathbb{R})))$ при $s \in (0, 1)$.

(б) Докажите, что область значений $\exp(tB_s)$ содержится

в $\mathcal{D}(B_s) = L_2^1(\mathbb{R})$ и при $0 < s < 1$ выполняется оценка

$$\|B_s \exp(tB_s)\| \leq C \cdot t^{-1/s}, \quad 0 < t \leq 1,$$

где $C > 1$ — некоторая константа, не зависящая от t .

Результаты этого упражнения показывают, что существуют C^∞ -полугруппы, которые не являются аналитическими, и что оценка из теоремы 5.16 для таких полугрупп не выполняется. Действительно, можно показать, что если $\{e^{tA}\}_{t \geq 0}$ является C_0 -полугруппой на банаховом пространстве X , для которой $e^{tA}(X) \subset \mathcal{D}(A)$ при $t > 0$, то $A \in \text{Hol}((\mathcal{D}(A), X))$ тогда и только тогда, когда операторы $\{tAe^{tA}\}_{0 < t \leq 1}$ равномерно ограничены на X . Доказательство можно найти в большинстве учебников по теории линейных полугрупп операторов (см., например, Davies [1980]).

Упражнение 5.21. Пусть заданы банахова пара $E = (E_1, E_0)$ и оператор $A \in \text{Hol}(E)$. По теореме 5.16 имеет место оценка $\|Ae^{tA}x\|_{\mathcal{L}(E_0)} = O(t^{-1})$ при $t \downarrow 0$. Докажите, что для произвольного $x \in E_0$ можно получить

$$\|Ae^{tA}x\|_{E_0} = o(t^{-1}) \quad (t \downarrow 0)$$

без использования теоремы 5.11.

Указание. Поскольку E_1 плотно в E_0 , то для любого $\varepsilon > 0$ возможно представление $x = y_\varepsilon + z_\varepsilon$, где $y_\varepsilon \in E_1$, $z_\varepsilon \in E_0$, $\|z_\varepsilon\|_{E_0} \leq \varepsilon$. Запишите теперь $Ae^{tA}x = Ae^{tA}z_\varepsilon + e^{tA}Ay_\varepsilon$ и оцените отдельно каждое слагаемое.

Упражнение 5.22. Рассмотрите оператор $C: L_2^{(1)}(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$, определенный следующим образом:

$$(Cf)(x) := [-\ln(1 + |x|) + ix]f(x).$$

(а) Покажите, что C порождает на $L_2(\mathbb{R})$ сильно непрерывную полугруппу e^{tC} .

(б) Покажите, что $\mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}))$ -значная функция $t \mapsto e^{tC}$ на $\mathbb{R}_+$ имеет точно k непрерывных производных, когда $k < t \leq k+1$ (при $k = 0, 1, \dots$).

Упражнение 5.23. Пусть E — банахова пара, где

$$E_0 = \{u \in C([0, 1]): u(1) = 0\},$$

$$E_1 = \{u \in C^1([0, 1]): u, u' \in E_0\},$$

а оператор $D \in \mathcal{L}(E_1, E_0)$ определен равенством

$$Df(x) := f'(x).$$

(а) Покажите, что D порождает на E_0 сильно непрерывную полугруппу e^{tD} .

(б) Вычислите резольвенту оператора D и покажите, что D имеет пустой спектр.

(с) Проверьте, что $D \notin \text{Hol}(E)$ (указание: при $t \geq 1$ имеем $e^{tD} = 0$).

Последнее упражнение показывает, что даже в том случае, когда спектр оператора $D: E_1 \rightarrow E_0$ содержится в некотором секторе $\{\lambda: |\arg(-\lambda)| < \theta\}$, оператор D не обязан порождать аналитическую полугруппу. Для этого в действительности необходима соответствующая оценка на резольвенту.

Упражнение 5.24. Дробные степени. Пусть $E = (E_1, E_0)$ и $A \in \mathcal{A}$ определены как и в § 5.5 (согласно операторному исчислению). Для каждого $z \in \mathbb{C}$ с $\text{Re } z > 0$ положим

$$f_z(\lambda) = (1 - \lambda)^{-z} = e^{-z \ln(1 - \lambda)},$$

где ветвь функции $\ln(1 - \lambda)$ определена на комплексной плоскости с разрезом по $[1, \infty)$ и выбрана так, что $\ln(1) = 0$.

(а) Покажите, что $f_z \in \mathcal{F}$ (обозначения см. в § 5.5).

Поэтому функциональное исчисление может быть использовано для определения

$$(1 - A)^{-z} = f_z(A) \quad (\text{Re } z > 0).$$

(б) Проверьте, что при $\text{Re } z, \text{Re } w > 0$ справедливо равенство

$$(1 - A)^{-z} \circ (1 - A)^{-w} = (1 - A)^{-(z+w)}.$$

(с) Покажите, что имеет место равенство

$$(1 - A)^{-z} = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty t^{z-1} e^{tA} e^{-t} dt,$$

где $\Gamma(z)$ — эйлерова гамма-функция.

Указание. Интеграл следует интерпретировать как $\mathcal{L}(E)$ -значный интеграл Бохнера. Используйте операторное исчисление для определения e^{tA} .

(д) Проверьте, что при $n = 1, 2, \dots$ выражение $(1 - A)^{-n}$ действительно есть n -я степень обратного оператора к $1 - A$.

Упражнение 5.25. Гауссовы полугруппы. Для $1 \leq p < \infty$ положим $E_0 = L_p(\mathbb{R})$ и

$$E_1 = W_p^2(\mathbb{R}) = \{f \in L_p(\mathbb{R}) : f', f'' \in L_p(\mathbb{R})\}.$$

Пусть $A \in \mathcal{L}(E_1, E_0)$ определен как $Af(x) = \frac{1}{2} f''(x)$.

(a) Найдите резольвенту оператора A .

Ответ. $\sigma(A) = (-\infty, 0]$. При $\lambda \in \rho(A)$ оператор $(\lambda I - A)^{-1}$ задается сверткой с

$$G_\lambda(x) = (2\lambda)^{-1/2} \exp(-(2\lambda)^{1/2}|x|).$$

(b) Проверьте, что $A \in Hol(E)$.

Указание. Используйте неравенство Юнга

$$\|f * g\|_{L_p} \leq \|f\|_{L_1} \cdot \|g\|_{L_p}.$$

(c) Применяя операторное исчисление, покажите, что e^{tA} задается сверткой с $(2\pi t)^{-1/2} \exp(-x^2/2t)$.

Интерполяция и максимальная регулярность

6.1. Интерполяционные методы

Интерполяционный метод (интерполяционный функтор) — это отображение I из класса банаховых пар $\mathcal{E}$ в класс банаховых пространств $\mathcal{B}$, удовлетворяющее следующим двум аксиомам:

- (1) Если $X = I(E)$, то $E_1 \subset X \subset E_0$;
- (2) Если заданы две пары $E, F \in \mathcal{E}$ и отображение пар $T \in \mathcal{L}(E, F)$, то T отображает $I(E)$ в $I(F)$.

$$\begin{array}{ccc} E_0 & \xrightarrow{T} & F_0 \\ \cup & & \cup \\ I(E) & \xrightarrow{T} & I(F) \\ \cup & & \cup \\ E_1 & \xrightarrow{T} & F_1 \end{array}$$

Из теоремы о замкнутом графике следует, что T является ограниченным оператором из $I(E)$ в $I(F)$.

Интерполяционный метод I называется *интерполяционным методом типа $\theta \in (0, 1)$* , если существует константа C , при которой

$$\|T\|_{I(E), I(F)} \leq C \|T\|_{E_1, F_1}^\theta \cdot \|T\|_{E_0, F_0}^{1-\theta}.$$

Метод называется *точным методом типа θ* , если можно взять $C = 1$. Следующая лемма иллюстрирует использование свойства (2). Напомним, что промежуточные пространства были определены в пятой главе.

Лемма 6.1. *Если I — метод типа θ , то для любой пары E пространство $X = I(E)$ является промежуточным пространством с показателем θ .*

Доказательство. Пусть фиксирован $x \in E_1$, а F — пара $(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. Определим $T \in \mathcal{L}(F, E)$ формулой $Ts = sx$ ($\forall s \in \mathbb{C}$). Тогда

$$\|T\|_{\mathbb{C}, E_k} = \|x\|_{E_k} \quad (k = 0, 1)$$

и $\|T\|_{\mathbb{C}, X} = \|x\|_X$, что совместно с аксиомой (2) в определении интерполяционного метода влечет за собой

$$\|x\|_X \leq C \|x\|_{E_1}^\theta \cdot \|x\|_{E_0}^{1-\theta}. \quad \blacksquare$$

6.2. Непрерывный интерполяционный метод

В этом параграфе мы построим однопараметрическое семейство методов I_θ ($0 < \theta < 1$) и докажем, что построенный метод I_θ является точным типа θ . Для любой пары E определим банахово пространство $V_\theta(E)$ функций $u: \mathbb{R}_+ \rightarrow E_1$

$V_\theta(E) = \{u \in C(\mathbb{R}_+; E_1) \cap C^1(\mathbb{R}_+; E_0)\}$: функции $t \rightarrow t^{1-\theta} \|u(t)\|_{E_1}$ и $t \rightarrow t^{1-\theta} \|u'(t)\|_{E_0}$ ограничены и стремятся к нулю при $t \downarrow 0$.

Ясно, что $V_\theta(E)$ является векторным пространством, и оно становится банаховым пространством, если его наделить нормой

$$\|u\|_{V_\theta(E)} = \sup_{t>0} t^{1-\theta} \cdot \max(\|u(t)\|_{E_1}, \|u'(t)\|_{E_0}).$$

Поскольку для $u \in V_\theta(E)$ производная $u'(t)$ оценивается как $o(t^{\theta-1})$ в E_0 при $t \downarrow 0$, то функция $u(t)$ равномерно непрерывна и в пространстве E_0 справедливо равенство

$$u(0) = \lim_{t \downarrow 0} u(t) = u(1) - \int_0^1 u'(s) ds.$$

Таким образом, задано отображение

$$r_\theta: V_\theta(E) \rightarrow E_0, \quad r_\theta(u(\cdot)) = u(0),$$

которое является ограниченным и линейным.

Определение. Положим $I_\theta(E) = \mathcal{R}(r_\theta)$, а норму на $I_\theta(E)$ зададим так:

$$\|x\|_\theta = \inf \{ \|u\|_{V_\theta(E)} : r_\theta u = x \}.$$

Если мы отождествим $\mathcal{R}(r_\theta)$ с $V_\theta(E)/\mathcal{N}(r_\theta)$ (где $\mathcal{R}(\cdot)$ и $\mathcal{N}(\cdot)$ обозначают область значений и ядро соответственно), то норма на $I_\theta(E)$ совпадает с факторнормой на $V_\theta(E)/\mathcal{N}(r_\theta)$. Итак, $I_\theta(E)$ является банаховым пространством.

Теорема 6.2. Метод I_θ является точным интерполяционным методом типа θ ($0 < \theta < 1$).

Доказательство. Очевидно, что $I_\theta(E) \subset E_0$. Далее, если задан $x \in E_1$, то функция $u(t) = \zeta(t)x$, где $\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $\zeta(0) = 1$, принадлежит пространству $V_\theta(E)$, причем $u(0) = x$. Поэтому $E_1 \subset I_\theta(E)$. Остается проверить свойство (2). Пусть имеются две банаховы пары $E, F \in \mathcal{C}$ и оператор $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Для произвольного положительного числа α определим $T^{(\alpha)}: V_\theta(E) \rightarrow$

→ $V_\theta(F)$ по формуле

$$(T^{(\alpha)}u)(t) = T(u(\alpha t)) \quad (0 < t < \infty).$$

Так определенный оператор $T^{(\alpha)}$ линеен и ограничен. Если задан элемент $x \in I_\theta(E)$, то для некоторого $u \in I_\theta(E)$ можно записать $x = u(0)$ и поэтому $Tx = (T^{(\alpha)}u)(0)$. Таким образом, $Tx \in I_\theta(F)$. Поэтому I_θ — интерполяционный метод.

Наконец, вычислим норму оператора T . Поскольку $\|Tx\|_{I_\theta(F)} \leq \|T^{(\alpha)}u\|_{V_\theta(F)}$, то при всех $u \in V_\theta(E)$ с $u(0) = x$ имеем

$$\|Tx\|_{I_\theta(F)} \leq \|T^{(\alpha)}\| \cdot \|u\|_{V_\theta(E)}.$$

Отсюда

$$\|Tx\|_{I_\theta(F)} \leq \|T^{(\alpha)}\| \cdot \|x\|_{I_\theta(E)}.$$

Норму $T^{(\alpha)}$ можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned} \sup_{t>0} t^{1-\theta} \|(T^{(\alpha)}u)(t)\|_{F_1} &\leq \|T\|_1 \sup_{t>0} t^{1-\theta} \|u(\alpha t)\|_{E_1} \leq \\ &\leq \alpha^{\theta-1} \cdot \|T\|_1 \cdot \|u\|_{V_\theta(E)} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \sup_{t>0} t^{1-\theta} \|(T^{(\alpha)}u)'(t)\|_{F_0} &\leq \|T\|_0 \cdot \sup_{t>0} \alpha t^{1-\theta} \|u'(\alpha t)\|_{E_0} \leq \\ &\leq \alpha^\theta \|T\|_0 \cdot \|u\|_{V_\theta(E)}. \end{aligned}$$

Поэтому имеет место неравенство

$$\|T^{(\alpha)}\| \leq \max(\alpha^\theta \|T\|_0, \alpha^{\theta-1} \|T\|_1).$$

Положив $\alpha = \|T\|_1 / \|T\|_0$, получаем

$$\|T^{(\alpha)}\| \leq \|T\|_1^\theta \cdot \|T\|_0^{1-\theta}.$$

Таким образом,

$$\|T\|_{I_\theta(E), I_\theta(F)} \leq \|T\|_{E_1, F_1}^\theta \cdot \|T\|_{E_0, F_0}^{1-\theta}. \quad \blacksquare$$

6.3. Другой способ описания I_θ

Если задана банахова пара E , то может оказаться достаточно трудно найти $I_\theta(E)$, исходя из приведенного определения. К счастью, есть другие способы описания пространства $I_\theta(E) \subset E_0$. Один из путей — следующий: для того чтобы определить, принадлежит заданный элемент $x \in E_0$ пространству $I_\theta(E)$ или нет, мы исследуем, насколько хорошо этот элемент x может быть аппрок-

смирован элементами из E_1 . Более того, определим подпространство X пространства E_θ следующим образом: $x \in X$ тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{a_n, b_n\} \in E_1 \times E_0$ с свойствами

- (1) $x = a_n + b_n$,
- (2) $\|a_n\|_{E_1} = o(2^{n(1-\theta)}) \quad (n \rightarrow \infty)$,
- (3) $\|b_n\|_{E_0} = o(2^{-n\theta}) \quad (n \rightarrow \infty)$.

В принятых обозначениях справедлива

Теорема 6.3. $I_\theta(E) = X$.

Доказательство. « $\subset$ ». Возьмем $x \in I_\theta(E)$. Тогда $x = u(0)$ для некоторой функции $u \in V_\theta(E)$. Рассмотрим представление (1), где

$$\begin{aligned} a_n &= u(2^{-n}), \\ b_n &= x - u(2^{-n}) \end{aligned}$$

(так, что $a_n + b_n = x$). Поскольку $u \in V_\theta(E)$, то

$$\|a_n\|_{E_1} = 2^{n(1-\theta)} \cdot \|(2^{-n})^{1-\theta} u(2^{-n})\|_{E_1} = o(2^{n(1-\theta)}) \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

$$-b_n = \int_0^{2^{-n}} u'(s) ds.$$

Отсюда

$$\|b_n\|_{E_0} \leq \sup_{0 < s \leq 2^{-n}} \|s^{1-\theta} u'(s)\|_{E_0} \cdot \int_0^{2^{-n}} t^{\theta-1} dt,$$

и потому $\|b_n\|_{E_0} = o(2^{-n\theta}) \quad (n \rightarrow \infty)$. Следовательно, $x \in X$.

« $\supset$ ». Выберем $x \in X$. Тогда существуют такие $a_n \in E_1$, что

$$\|a_n\|_{E_1} = o(2^{n(1-\theta)}) \quad \text{и} \quad \|x - a_n\|_{E_0} = o(2^{-n\theta}) \quad (n \rightarrow \infty).$$

При $n \leq 0$ положим $a_n = 0$. Далее построим положительную C^∞ -функцию $\varphi(x)$ с носителем в $(1/4, 1)$, обладающую свойством $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(2^n x) = 1$. Можно, например, взять

$$\varphi(x) = \psi(x) \cdot \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi(2^n x) \right)^{-1},$$

где

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1/4 \text{ или } x \geq 1, \\ \exp(-((1-x)(4x-1))^{-1}), & 1/4 < x < 1. \end{cases}$$

Построив такую функцию $\varphi(x)$, положим

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \varphi(2^n t) \quad (0 < t < \infty).$$

Покажем, что $u \in V_\theta(E)$. Для этого рассмотрим равенство

$$t^{1-\theta} u(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n t^{1-\theta} \varphi(2^n t).$$

В этой сумме только три слагаемых не равны нулю; пусть они имеют индексы $n = N-1$, N и $n = N+1$. Поскольку для этих значений n $\varphi(2^n t) \neq 0$, то $1/16 < 2^N \cdot t < 4$ и, значит, $t^{1-\theta} \leq C \cdot 2^{-N(1-\theta)}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \|t^{1-\theta} u(t)\|_{E_1} &\leq \text{const} \cdot 2^{-N(1-\theta)} \cdot (\|a_N\| + \|a_{N-1}\| + \|a_{N+1}\|) = \\ &= o(1) \quad (N \rightarrow \infty \text{ или } t \downarrow 0). \end{aligned}$$

Далее запишем равенство

$$u(t) = x + (u(t) - x) = x + \sum_{n \in \mathbb{Z}} (a_n - x) \varphi(2^n t).$$

Продифференцировав это равенство по t , получим

$$u'(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (a_n - x) \cdot 2^n \varphi'(2^n t).$$

Как и в предыдущем случае, устанавливаем, что

$$\begin{aligned} t^{1-\theta} \|u'(t)\|_{E_0} &\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} t^{1-\theta} \|a_n - x\|_{E_0} \cdot 2^n |\varphi'(2^n t)| \leq \\ &\leq \text{const} \cdot 2^N 2^{-N(1-\theta)} (\|a_{N-1} - x\|_{E_0} + \|a_N - x\|_{E_0} + \|a_{N+1} - x\|_{E_0}) = \\ &= o(1) \quad (N \rightarrow \infty \text{ или } t \downarrow 0). \end{aligned}$$

Эти оценки показывают, что $u \in V_\theta(E)$. Поскольку, как легко видеть, $u(0) = x$, то мы установили, что $x \in I_\theta(E)$ и, значит, $X = I_\theta(E)$. ■

Замечание. Выражение

$$\inf_{n \geq 1} \{ \sup (2^{-n(1-\theta)} \|a_n\|_{E_1}, 2^{n\theta} \|b_n\|_{E_0}) \},$$

где $\inf$ берется по всем последовательностям $\{a_n, b_n\}$ со свойством $a_n + b_n = x$, определяет норму на X , которая эквивалентна норме пространства $I_\theta(E)$. Доказательство этого факта мы оставляем читателю. (Указание. Показать, что данное выражение опре-

деляет норму, в которой X полно, и применить теорему о замкнутом графике к тождественному отображению $\text{id} : X \rightarrow I_\theta(E)$.)

Понятно, что число 2 в определении пространства X может быть заменено на произвольное вещественное число $a > 1$.

Незначительной модификацией пространства X является пространство Y , определяемое следующим образом. Элемент x принадлежит Y тогда и только тогда, когда существуют элементы $c_n \in E_1$ ($n \geq 1$) со свойствами

$$(1) \quad x = \sum_{n \geq 1} c_n,$$

$$(2) \quad \|c_n\|_{E_1} = o(2^{n(1-\theta)}), \quad \|c_n\|_{E_0} = o(2^{-n\theta}).$$

Теорема 6.4. $Y = I_\theta(E)$.

Доказательство. Мы покажем, что $Y = X$. Пусть $x = \sum c_n \in Y$, где c_n выбраны, как указано выше. Определим

$$a_n = \sum_{k=1}^n c_k, \quad b_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k.$$

Тогда поскольку $\|c_n\|_{E_1} = o(2^{n(1-\theta)})$ и $a_n + b_n = x$, то

$$\|a_n\|_{E_1} \leq \sum_{k=1}^n \|c_k\|_{E_1} = o(2^{n(1-\theta)}).$$

Аналогично

$$\|b_n\|_{E_0} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \|c_k\|_{E_0} = o(2^{-n\theta}).$$

Таким образом, $x \in X$.

Обратно, пусть дан $x \in X$. Тогда существуют a_n, b_n , такие, что $x = a_n + b_n$ и

$$\|a_n\|_{E_1} = o(2^{n(1-\theta)}), \quad \|b_n\|_{E_0} = o(2^{-n\theta}).$$

Легко видеть, что $c_n = a_n - a_{n-1}$ удовлетворяет условию $|c_n|_{E_1} = o(2^{n(1-\theta)})$ и $\|c_n\|_{E_0} = o(2^{-n\theta})$ (заметим, что $a_n - a_{n-1} = -b_n + b_{n-1}$). Поэтому мы имеем $x \in Y$. ■

Два описания пространства $I_\theta(E)$, которые мы только что дали (пространства X и Y), справедливы для произвольной банаховой пары $E \in \mathcal{E}$. В дальнейшем мы будем предполагать, что существует некоторый оператор *позитивного типа* $A \in \mathcal{L}(E_1, E_0)$, и покажем, что такой оператор может быть использован для описания пространства $I_\theta(E)$.

Оператор $A \in \mathcal{L}(E_1, E_0)$ называется оператором *позитивного типа*, если при некотором $\lambda_0 > 0$, во-первых, $[\lambda_0, \infty) \subset \rho(A)$,

а, во-вторых, резольвента $R(\lambda, A) = (\lambda j - A)^{-1}$ оператора A удовлетворяет следующему условию:

$R(\lambda, A)$ равномерно ограничена в $\mathcal{L}(E_0, E_1)$ при $\lambda_0 \leq \lambda < \infty$.

В частности, любой $A \in Hol(E)$ является оператором положительного типа. Действительно, если A порождает C_0 -полугруппу, то A — оператор положительного типа. Начиная с этого момента, мы будем рассматривать некоторый фиксированный оператор положительного типа A . Выбрав этот оператор, определим пространство $Z \subset E_0$ следующим образом:

$$Z = \{x \in E_0: \lim_{t \rightarrow \infty} t^0 \|R(t, A)x\|_{E_1} = 0\}.$$

Норма

$$\|x\|_Z = \sup_{\lambda_0 \leq t < \infty} t^0 \|R(t, A)x\|_{E_1}$$

превращает Z в банахово пространство.

Теорема 6.5. $I_\theta(E) = Z$ с точностью до эквивалентности норм.

Доказательство. Пусть $x \in Z$. Рассмотрим функцию

$$u(t) = \zeta(t) t^{-1} \cdot R(t^{-1}, A)x,$$

где $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R})$ с $\zeta(t) \equiv 1$ вблизи $t = 0$ и $\text{supp}(\zeta) \subset (-\infty, \lambda_0^{-1})$. Мы утверждаем, что $u \in V_\theta(E)$. Действительно, при $t \downarrow 0$ получаем

$$\|u(t)\|_{E_1} = t^{-1} \|R(t^{-1}, A)x\|_{E_1} = o(t^{-1+\theta}).$$

Поскольку

$$u'(t) = \frac{d}{dt} (j - tA)^{-1} x = t^{-1} \cdot R\left(\frac{1}{t}, A\right) \cdot A \cdot t^{-1} \cdot R\left(\frac{1}{t}, A\right) x,$$

то

$$\|j \circ u'(t)\|_{E_0} \leq \left\| t^{-1} j \circ R\left(\frac{1}{t}, A\right) \right\| \cdot \|A\| \cdot \|u(t)\|_{E_1}.$$

Выражение $t^{-1} \cdot j \circ R(t^{-1}, A)$ может быть переписано в виде

$$t^{-1} \cdot j \circ R\left(\frac{1}{t}, A\right) = \left(\frac{1}{t} j - A + A\right) R\left(\frac{1}{t}, A\right) = 1 + AR\left(\frac{1}{t}, A\right)$$

и, как легко видеть, равномерно ограничено в $\mathcal{L}(E_0)$ при $t \downarrow 0$. Следовательно, $\|j \circ u'(t)\|_{E_0} = o(t^{\theta-1})$ и потому $u \in V_\theta(E)$. Наконец, заметим, что $u(0) = x$. Это вытекает из равенства

$$u(t) = x + AR\left(\frac{1}{t}, A\right) x,$$

если заметить, что второе слагаемое стремится к нулю при $t \downarrow 0$ (последнее утверждение может быть установлено подобно доказательству леммы 5.5). Эти рассуждения означают, что $x \in I_\theta(E)$, т. е. показано включение $Z \subset I_\theta(E)$.

Для доказательства обратного включения выберем некоторый $x \in I_\theta(E)$. Тогда $x = u(0)$ для некоторой функции $u \in V_\theta(E)$ и справедливо равенство

$$R(t, A)x = R(t, A)u(t^{-1}) - \int_0^{t^{-1}} R(t, A)u'(s) ds.$$

Первое слагаемое справа оценивается следующим образом:

$$\|R(t, A)u(t^{-1})\|_{E_1} \leq \text{const} \cdot t^{-1} \|u(t^{-1})\|_{E_1} = o(t^{\theta-1}),$$

а второе слагаемое — так:

$$\begin{aligned} \left\| R(t, A) \int_0^{t^{-1}} u'(s) ds \right\|_{E_1} &\leq \text{const} \cdot \left\| \int_0^{t^{-1}} u'(s) ds \right\|_{E_0} \leq \\ &\leq \text{const} \cdot \int_0^{t^{-1}} \|u'(s)\|_{E_0} ds = o(t^\theta). \end{aligned}$$

Складывая эти два неравенства, мы получаем $\|R(t, A)x\|_{E_1} = o(t^\theta)$ при $t \rightarrow \infty$, и, следовательно, $x \in Z$. Итак, мы доказали, что Z и $I_\theta(E)$ совпадают. ■

Эквивалентность норм на Z и $I_\theta(E)$ следует из теоремы о замкнутом графике или из более детального рассмотрения приведенного выше доказательства.

Мы закончим этот раздел еще одним описанием пространства $I_\theta(E)$. Пусть $A \in \mathcal{L}(E_1, E_0)$ является генератором C_0 -полугруппы. Тогда по теореме Хилле — Йосиды A — оператор положительного типа. Обозначим через $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ полугруппу, порождаемую оператором A . Для произвольного $x \in E_0$ функция $x(t) = T(t)x$ из $[0, 1]$ в E_0 всюду непрерывна. Снова опираясь на теорему Хилле — Йосиды, мы получаем следующее описание пространства E_1 :

$$x \in E_1 \iff x(\cdot) \in C^1([0, 1]; E_0).$$

Таким образом, вложенное пространство E_1 определяется свойствами гладкости $x(\cdot)$ ($0 \leq t \leq 1$). Сейчас мы дадим аналогичное описание интерполяционного пространства $I_\theta(E)$.

Определим *l-гёльдерово* пространство $h_0^\theta(E_0)$ как множество всех таких функций $u \in C([0, 1]; E_0)$, для которых

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup_{|t-s| \leq \varepsilon} \varepsilon^{-\theta} \|u(t) - u(s)\|_{E_0} = 0.$$

Введем на $h_0^\theta(E_0)$ норму

$$\|u\|_{h_0^\theta} = \|u(0)\|_{E_0} + \sup_{\varepsilon > 0} \{\varepsilon^{-\theta} \cdot \sup_{|t-s| \leq \varepsilon} \|u(t) - u(s)\|_{E_0}\}.$$

Пространство $h_0^\theta(E_0)$ с такой нормой становится банаховым, и мы получаем следующий результат:

Теорема 6.6. *Элемент $x \in E_0$ принадлежит пространству $I_\theta(E)$ тогда и только тогда, когда $x(\cdot) = T(\cdot)x \in h_0^\theta(E_0)$. Норма*

$$x \rightarrow \|T(\cdot)x\|_{h_0^\theta(E_0)}$$

эквивалентна норме пространства $I_\theta(E)$.

Прежде чем доказывать эту теорему, приведем лемму, которая гласит, что гладкость функции $x(\cdot)$ определяется ее поведением в точке $t = 0$.

Лемма 6.7. *Пусть задан элемент $x \in E_0$. Тогда*

$$x(\cdot) \in h_0^\theta \iff \lim_{t \downarrow 0} t^{-\theta} \|x(t) - x\|_{E_0} = 0.$$

Доказательство. Импликация $\Rightarrow$ очевидна, и мы докажем обратную:

$\Leftarrow$. Для любых $t, s \in [0, 1]$ при $t \geq s$

$$\|x(t) - x(s)\|_{E_0} = \|T(s)(x(t-s) - x)\|_{E_0},$$

$$\|x(t) - x(s)\|_{E_0} \leq \text{const} \cdot \|x(t-s) - x\|_{E_0} = o(|t-s|^\theta),$$

когда $|t-s| \downarrow 0$. Отсюда $x(\cdot) \in h_0^\theta(E_0)$, если $\|x(t) - x\|_{E_0} = o(t^\theta)$. ■

Доказательство теоремы 6.6. Пусть задана $x \in I_\theta(E)$, и, значит, $x = u(0)$ для некоторой функции $u \in V_\theta(E)$. Тогда

$$x = u(t) - \int_0^t u'(s) ds,$$

и мы можем оценить $\|T(t)x - x\|_{E_0}$ следующим образом:

$$\|T(t)u(t) - u(t)\|_{E_0} \leq Ct \cdot \|u(t)\|_{E_1} = o(t^\theta)$$

и

$$\left\| \int_0^t (T(t)u'(s) - u'(s)) ds \right\|_{E_0} \leq C \int_0^t \|u'(s)\|_{E_0} ds = o(t^\theta).$$

Поэтому $\|T(t)x - x\|_{E_0} = o(t^0)$, и по предыдущей лемме получаем $T(\cdot)x \in h_0^0(E_0)$.

Обратно, пусть $T(\cdot)x$ принадлежит $h_0^0(E_0)$ при некотором $x \in E_0$. Рассмотрим

$$u(t) = \frac{1}{t} \int_0^t T(s)x ds = S(t)x,$$

т. е. $S(t)$ — осреднение $T(s)$ на интервале $0 \leq s \leq t$. Мы утверждаем, что $u \in V_0(E)$. Действительно, $u'(t)$ дается формулой

$$u'(t) = \frac{1}{t} T(t)x - \frac{1}{t^2} \int_0^t T(s)x ds = \frac{1}{t^2} \int_0^t (T(t) - T(s))x ds.$$

Поскольку $T(\cdot)x$ принадлежит $h_0^0(E_0)$, то производная $u'(t)$ может быть оценена как

$$\|u'(t)\|_{E_0} = o(t^{\theta-1}).$$

Для того чтобы установить принадлежность $u(t) \in E_1$ при $t > 0$, мы замечаем, что $S(t)$ ограниченно действует из E_0 в E_1 и что

$$AS(t) = t^{-1}(T(t) - 1).$$

В самом деле, если $x \in E_1$, то $T(t)x \in E_1$. Более того, поскольку $x(\cdot) \in C^1([0, 1]; E_0)$ и $x'(t) = Ax(t)$,

$$AS(t)x = \frac{1}{t} \int_0^t AT(s)x ds = t^{-1}(T(t)x - x).$$

Используя теперь плотность E_1 в E_0 и ограниченность $t^{-1}(T(t) - 1)$ на E_0 , можно легко доказать наше утверждение об ограниченности $S(t)$. Снова возвращаясь к $u(\cdot)$, заметим, что E_1 -норма функции $u(t)$ эквивалентна $\|u(t)\|_{E_0} + \|Au(t)\|_{E_0}$. Здесь первое слагаемое ограничено при $t \downarrow 0$, а второе слагаемое — это

$$\|Au(t)\|_{E_0} = \|AS(t)x\|_{E_0} = t^{-1} \|T(t)x - x\|_{E_0} = o(t^{\theta-1}).$$

Таким образом, функция u действительно принадлежит пространству $V_0(E)$, и так как $u(0) = x$, то элемент x принадлежит $I_\theta(E)$. Итак, $x \in I_\theta(E)$ тогда и только тогда, когда $x(\cdot) \in h_0^0(E_0)$. Как и ранее, мы оставляем вопрос об эквивалентности норм читателю. ■

6.4. Неоднородная задача Коши

В гл. 5 мы видели, что задача Коши

$$x'(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0,$$

где $A \in Hol(E)$ и $x_0 \in E_1$ для некоторой банаховой пары $E = (E_1, E_0)$, может быть решена с помощью операторного

исчисления. Решение, разумеется, имеет вид $e^{tA} x_0$. В этом параграфе мы рассмотрим неоднородную задачу Коши

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + f(t), & 0 < t \leq T, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (\text{НЗК})$$

Формально эта задача имеет следующее решение:

$$x(t) = e^{tA} x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} f(s) ds.$$

Это равенство известно как *формула вариации произвольной постоянной*. Возникает вопрос, имеет ли смысл это представление и является ли оно решением (НЗК). Ввиду теории, изложенной в предыдущей главе, можно считать первое слагаемое $e^{tA} x_0$ уже изученным. Поэтому, считая с этого момента, что $x_0 = 0$, сконцентрируем наше внимание на выражении

$$Sf(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} f(s) ds,$$

где, как обычно, нам задана банахова пара E и $A \in \text{Hol}(E)$. Наш первый результат говорит, что все хорошо, если на функцию $f(t)$ наложить сильные ограничения.

Лемма 6.8. *Если $f \in C([0, T]; E_1)$, то $x(t) = Sf(t)$ обладает свойствами*

$$x \in C([0, T]; E_1) \cap C^1([0, T]; E_0)$$

и

$$x'(t) = Ax(t) + f(t), \quad x(0) = 0.$$

Доказательство. Поскольку операторы e^{tA} ($0 \leq t \leq T$) равномерно ограничены и сильно непрерывны в $\mathcal{L}(E_1)$, то интеграл, определяющий $Sf(t)$, существует (как интеграл Бохнера) и по теореме о мажорантной сходимости он представляет непрерывную E_1 -значную функцию. В силу леммы 5.14

$$jx(t) = \int_0^t j \circ e^{(t-s)A} f(s) ds = \int \int_{s+r \leq t} Ae^{rA} f(s) dr ds + \int_0^t f(s) ds.$$

Сделав в первом интеграле замену $s + r = \tau$, $r = \rho$, получим

$$jx(t) = \int_0^t \int_0^\tau Ae^{\rho A} f(\tau - \rho) d\rho d\tau + \int_0^t f(s) ds = \int_0^t (Ax(\tau) + f(\tau)) d\tau.$$

Отсюда видно, что $jx(t) \in C^1$, а функция $x(t)$ есть решение уравнения $x'(t) - Ax(t) = f(t)$. Очевидно, что выполняется и условие $x(0) = 0$ ■.

Таким образом, если f является E_1 -значной функцией, то мы располагаем классическим решением НЗК. Следующая лемма демонстрирует нам, чего можно ожидать, если f принимает значения в E_0 .

Лемма 6.9. Пусть задана $f \in C([0, T]; E_0)$ и, как и выше, $x(t) = Sf(t)$. Тогда для любого $\theta \in [0, 1)$ мы имеем $x \in C^\theta([0, T]; E_0)$ и $x \in C([0, T]; E_\theta)$, где E_θ обозначает непрерывное интерполяционное пространство $I_\theta(E)$.

Доказательство. Вновь используя равномерную ограниченность и сильную непрерывность операторов e^{tA} в $\mathcal{L}(E_0)$, легко видеть, что $x = Sf \in C([0, T]; E_0)$. Для того чтобы убедиться, что $x(t) \in E_\theta$, мы используем критерий теоремы 6.6, т. е. проверим, является ли $e^{\tau A} x(t)$ гёльдерово непрерывной по τ в точке $\tau = 0$. Из равенства

$$\begin{aligned} e^{\tau A} x(t) - x(t) &= \int_0^t (e^{(\tau+s)A} - e^{sA}) f(t-s) ds = \\ &= \int_0^t \int_0^\tau A e^{(\sigma+s)A} f(t-s) d\sigma ds \end{aligned}$$

следует, что

$$\|e^{\tau A} x(t) - x(t)\|_{E_0} \leq \max_{0 \leq s \leq T} \|f(s)\|_{E_0} \cdot \int_0^t \int_0^\tau \|A e^{(\sigma+s)A}\|_{\mathcal{L}(E_0)} d\sigma ds.$$

Используя оценку из теоремы 5.16, получаем

$$\begin{aligned} \|e^{\tau A} x(t) - x(t)\|_{E_0} &\leq C \cdot \max_{0 \leq s \leq T} \|f(s)\|_{E_0} \cdot \int_0^t \int_0^\tau \frac{d\sigma ds}{\sigma+s} \leq \\ &\leq C \max_{0 \leq s \leq T} \|f(s)\|_{E_0} \cdot \tau \ln(1/\tau). \end{aligned}$$

Поэтому $\|e^{\tau A} x(t) - x(t)\|_{E_0} = o(\tau^\theta)$ для любого $\theta < 1$ равномерно по $t \in [0, T]$, так что $x(t) \in E_\theta$ и $\|x(t)\|_{E_\theta}$ равномерно ограничена. Мы оставляем читателю проверку непрерывности функции $t \mapsto x(t)$ из $[0, T]$ в E_θ .

Проверим теперь, что $x \in C^\theta([0, T]; E_0)$. Для любого $\tau > 0$ имеем

$$x(t+\tau) - x(t) = \int_t^{t+\tau} e^{(t+\tau-s)A} f(s) ds + \int_0^t (e^{(t+\tau-s)A} - e^{(t-s)A}) f(s) ds$$

и, следовательно,

$$\|x(t+\tau) - x(t)\|_{E_0} \leq C \cdot \max \|f(s)\|_{E_0} \left\{ \tau + \int_0^t \|e^{(s+\tau)A} - e^{sA}\| ds \right\}.$$

Только что мы видели, как оценивается оставшийся интеграл. Получаем

$$\|x(t+\tau) - x(t)\|_{E_0} \leq C \cdot \max_{0 \leq s \leq T} \|f(s)\|_{E_0} \cdot \tau \cdot \ln(1/\tau).$$

Ясно, что $x \in C^0([0, T]; E_0)$ при всех $\theta < 1$. ■

Эта лемма несколько разочаровывает нас, так как мы хотели бы, чтобы $x \in C([0, T]; E_1)$ и $x \in C^1([0, T]; E_0)$, если $f \in C([0, T]; E_0)$. Более того, эта лемма не позволяет нам считать функцию $x(t)$ решением НЗК. К сожалению, примеры показывают, что в общем случае лемма 6.9 является оптимальной в том смысле, что нельзя положить θ равным 1 (см. упр. 6.21 и 6.19). Действительно, в работе Baillon [1980] показано, что если условия $E_1 \neq E_0$ и $f \in C([0, T]; E_0)$ влекут за собой $x \in C([0, T]; E_1)$, то банахово пространство E_0 содержит подпространство, изоморфное (c_0) . Один из путей выхода из создавшегося положения — предположить дополнительную гладкость f , например, считать, что $f \in C^\alpha([0, T]; E_0)$. В этом случае можно показать, что $x(t) = Sf(t)$ принадлежит $C^{1+\alpha}([0, T]; E_0) \cap C^\alpha([0, T]; E_1)$ и является решением задачи Коши. Эта ситуация описана в книге Pazy [1983]. В следующем параграфе мы дадим другое решение, которое дано в работах Da Prato, Grisvard [1975, 1979].

6.5. Максимальная регулярность

Для $k = 2, 3, 4 \dots$ мы определим, как и в § 5.7, пространства $E_k (= \mathcal{D}(A^k))$. Пусть $0 < \theta < 1$; положим $E_{1+\theta} = I_\theta(E_2, E_1)$. Легко проверить, что $A \in \text{Hol}(E_2, E_1)$, и, интерполируя (аксиома (2) в § 6.1), мы также доказываем, что $A \in \text{Hol}(E_{1+\theta}, E_0)$. Наш следующий результат получен в работе Da Prato, Grisvard [1979].

Теорема 6.10. Пусть задана функция $f \in C([0, T]; E_0)$ и определено выражение

$$x(t) \equiv Sf(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} f(s) ds.$$

Тогда $x \in C([0, T]; E_{1+\theta}) \cap C^1([0, T]; E_0)$ и справедливо равенство $x'(t) = Ax(t) + f(t)$.

Для того чтобы убедить читателя, что это замечательный результат, мы определим F как банахову пару $(E_{1+\theta}, E_0)$ и вновь прочтем лемму 6.9, подставляя F там, где стоит E . То, что мы

не могли доказать тогда (т. е. случай $\theta = 1$), можно получить при некоторых условиях на банахову пару F и оператор $A \in Hol(F)$ (эти условия: F должно определяться как $(E_{1+\theta}, E_\theta)$, а $A \in Hol(F)$ может быть расширен до $A \in Hol(E)$).

Доказательство теоремы 6.10. Доказательство делится на две части. В первой части, используя соображения плотности, покажем, что достаточно получить априорную оценку на $x = Sf$ для «хороших» функций f . Потом мы установим эту априорную оценку. Поскольку перенос утверждения с плотного множества на все пространство стандартен, мы дадим только его набросок и основное внимание уделим априорной оценке.

Получать оценку будем так. Пусть задана функция $f \in C([0, T]; E_1)$. Положим

$$x(t) = Sf(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} f(s) ds.$$

Так как $A \in Hol((E_2, E_1))$, то по лемме 6.9 получаем, что $x \in C([0, T]; E_{1+\theta})$, а в силу леммы 6.8 — что $x' \in C([0, T]; E_\theta)$. Предположим, что существует константа $C < \infty$, не зависящая от f , такая, что выполняется неравенство

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|x(t)\|_{E_{1+\theta}} \leq C \cdot \max_{0 \leq t \leq T} \|f(t)\|_{E_\theta}. \quad (\text{КОЭРЦ})^1$$

Используя эту оценку, мы докажем теорему. Пусть задана функция $f \in C([0, T]; E_\theta)$. Для малых $\varepsilon > 0$ определим

$$f_\varepsilon(t) = \exp(\varepsilon A) f(t).$$

Тогда $f_\varepsilon \in C([0, T]; E_1)$ и f_ε равномерно сходится к f (в E_θ -норме) при $\varepsilon \downarrow 0$. Рассмотрим соответствующие функции $x_\varepsilon = Sf_\varepsilon$. Из априорной оценки следует, что x_ε равномерно сходятся (в $E_{1+\theta}$) к некоторой функции $x \in C([0, T]; E_{1+\theta})$. Поскольку все функции x_ε удовлетворяют уравнению $x'_\varepsilon(t) = Ax_\varepsilon(t) + f_\varepsilon(t)$, то они также сходятся и в $C^1([0, T]; E_\theta)$. Поэтому $x \in C^1([0, T]; E_\theta)$. Наконец, из оценки, полученной в доказательстве леммы 6.9, легко усмотреть, что x_ε сходится в $C([0, T]; E_\theta)$ к Sf . Отсюда $x = Sf$.

Осталось доказать априорную оценку. Прежде чем провести выкладки, сделаем некоторые предположения относительно оператора A . Более точно, будем предполагать, что для некоторого $\theta \in (0, \pi/2)$ выполняются условия

(а) оператор $\lambda j - A$ обратим, если $|\arg(\lambda)| \leq \pi/2 + \theta$;

¹⁾ Иногда это свойство называют коэрцитивностью или коэрцитивной разрешимостью. — Прим. перев.

(b) константа $C = \sup \{ \|(\lambda j - A)^{-1}\|_{E_0 E_1} : |\arg(\lambda)| \leq \pi/2 + \theta \}$ конечна.

Поскольку $A \in Hol(E)$, то существует число $\omega \in \mathbb{R}$, такое, что $A + \omega j$ удовлетворяет этим условиям. Взяв такое ω , сделаем замену $x(t) = e^{\omega t} y(t)$. Новая неизвестная удовлетворяет уравнению $y'(t) = (A + \omega j)y(t) + e^{-\omega t} f(t)$. Ясно, что оценка типа (КОЭРЦ) для y влечет за собой подобную же оценку для x . Поэтому мы будем считать, что A удовлетворяет условиям (a) и (b). Из этих условий следует, что оператор $A : E_1 \rightarrow E_0$ является изоморфизмом. В частности, нормы $\|x\|_{E_1+\theta}$ и $\|Ax\|_{E_0}$ эквивалентны. Чтобы оценить $\|x\|_{E_0}$, используем описание пространства E_0 , данное в теореме 6.5. Так, для любого $\alpha > 0$ вычислим величину

$$\alpha^\theta \|(\alpha j - A)^{-1} Ax\|_{E_1}$$

и возьмем супремум по всем $\alpha \geq 0$. Используя операторное исчисление из § 5.5, получаем следующее тождество:

$$\begin{aligned} \alpha^\theta (\alpha j - A)^{-1} Ax(t) &= \alpha^\theta \int_0^t (\alpha j - A)^{-1} A e^{(t-s)A} f(s) ds = \\ &= \frac{\alpha^\theta}{2\pi i} \int_0^t \int_\Gamma \frac{\lambda e^{(t-s)\lambda}}{\alpha - \lambda} (\lambda j - A)^{-1} \cdot f(s) d\lambda ds. \end{aligned}$$

Здесь контур $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : \arg(z) = \pm(\pi/2 + \theta)\}$ ориентирован «вниз». Вновь используя теорему 6.5, получаем

$$\|(\lambda j - A)^{-1} f(s)\|_{E_1} \leq C |\lambda|^{-\theta} \|f(s)\|_{E_0} \leq C \cdot M |\lambda|^{-\theta},$$

где $M = \max_{0 \leq t \leq T} \|f(t)\|_{E_0}$. Значит, мы установили, что

$$\begin{aligned} \alpha^\theta \|(\alpha j - A)^{-1} Ax(t)\|_{E_1} &\leq \frac{C \cdot \alpha^\theta}{2\pi} M \int_0^t \int_\Gamma \frac{|e^{(t-s)\lambda}| \cdot |\lambda|^{1-\theta}}{|\alpha - \lambda|} ds |d\lambda| \leq \\ &\leq \frac{C \cdot M \alpha^\theta}{\sin \theta} \cdot \int_\Gamma \frac{|d\lambda|}{|\alpha - \lambda| \cdot |\lambda|^\theta}, \end{aligned}$$

где интеграл вычислен по ds . Оставшийся интеграл можно оценить, используя замену $\alpha\mu = \lambda$ и замечая, что контур Γ инвариантен относительно расширения. Итак,

$$\alpha^\theta \|(\alpha j - A)^{-1} Ax(t)\|_{E_1} \leq \frac{CM}{\sin \theta} \cdot \int_\Gamma \frac{|d\mu|}{|1 - \mu| \cdot |\mu|^\theta} \leq C' \cdot M.$$

Если теперь взять супремум по α , то мы получаем оценку (КОЭРЦ). Теорема доказана. ■

6.6. Примеры и упражнения

Первые два примера иллюстрируют использование интерполяционных неравенств.

Пусть $E = (E_1, E_0)$ — банахова пара, а F — промежуточное банахово пространство с показателем θ ($0 < \theta < 1$) для E . Напомним, что это означает включения $E_1 \subset F \subset E_0$ и при любом $x \in E_1$ имеет место неравенство

$$\|x\|_F \leq C \cdot \|x\|_{E_1}^\theta \cdot \|x\|_{E_0}^{1-\theta},$$

где константа C не зависит от x .

Упражнение 6.11. Пусть $f: [0, 1] \rightarrow E_1$ — такая ограниченная функция, что функция $j \circ f: [0, 1] \rightarrow E_0$ непрерывна. Тогда функция $j_F \circ f: [0, 1] \rightarrow F$ также непрерывна (здесь $j_F: E_1 \rightarrow F$ обозначает вложение).

Упражнение 6.12. Пусть G — банахово пространство, а $T: G \rightarrow E_1$ — такой ограниченный линейный оператор, что оператор $j_1 \circ T: G \rightarrow E_0$ является компактным. Тогда оператор $j_F \circ T: G \rightarrow F$ также компактен.

В общем случае достаточно трудно описать пространство $I_\theta(E)$ для данной пары E . Следующий пример является, по-видимому, наиболее простым.

Пусть E_0 — пространство последовательностей

$$(c_0) = \{ \{x_n\} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \}$$

с нормой $\|\{x_n\}\|_{E_0} = \sup \{ |x_n| : n = 1, 2, \dots \}$. Определим пространство

$$E_1 = \{ \{x_n\} \in E_0 : \lim_{n \rightarrow \infty} nx_n = 0 \}$$

с нормой $\|\{x_n\}\|_{E_1} = \sup \{ |nx_n| : n = 1, 2, \dots \}$. Оператор $A: E_1 \rightarrow E_0$, заданный формулой

$$(Ax)_n = -nx_n \quad (n = 1, 2, \dots),$$

принадлежит $Hol(E)$.

Упражнение 6.13. Непрерывное интерполяционное пространство $I_\theta(E)$ состоит из тех последовательностей $\{x_n\}$, для которых $|x_n| = o(n^{-\theta})$ ($n \rightarrow \infty$). Норма в $I_\theta(E)$ эквивалентна норме

$$\|\{x_n\}\|_\theta = \sup \{ n^\theta |x_n| : n = 1, 2, \dots \}.$$

Указание. Используйте теорему 6.6.

Другой пример, когда описание пространства $I_\theta(E)$ достаточно просто, имеет следующий вид. Пусть T — тор $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, и по-

ложим

$$E_0 = C(T), \quad E_1 = C^1(T).$$

Для произвольного $\theta \in (0, 1)$ определим так называемое *l-гёльдерово* пространство $h_0^\theta(T)$ условием

$$f \in h_0^\theta(T) \iff \lim_{s \downarrow 0} \sup_{x-y \leq s} \varepsilon^{-\theta} |f(x) - f(y)| = 0.$$

На $h_0^\theta(T)$ задана норма

$$\|f\|_{h_0^\theta(T)} = |f(0)| + \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\theta}.$$

Упражнение 6.14. При $0 < \theta < 1$

$$I_\theta(E) = h_0^\theta(T).$$

Указание. Оператор $D: E_1 \rightarrow E_0$, определенный формулой $Df(x) = f'(x)$, порождает сильно непрерывную полугруппу $(e^{tD}f)(x) = f(x+t)$. Используйте теорему 6.6.

В следующих упражнениях читателю предлагается тщательно рассмотреть банахово пространство $h_0^\theta(T)$. Первое упражнение показывает, что $h_0^\theta(T)$ может быть получено путем интерполяции между различными банаховыми парами.

Пусть $W_\infty^1(T)$ — пространство функций $f \in C(T)$, производные которых в смысле распределений принадлежат $L_\infty(T)$. Можно показать, что $W_\infty^1(T)$ совпадает с пространством липшиц-непрерывных функций на T . Пространство $W_\infty^1(T)$ банахово с нормой

$$\|f\|_{W_\infty^1} = |f(0)| + \operatorname{ess\,sup}_{x \in T} |f'(x)|,$$

а $C^1(T)$ является замкнутым подпространством в W_∞^1 .

Упражнение 6.15. Покажите, что $I_\theta(E) = I_\theta(F)$, где $E = (C^1(T), C(T))$, а $F = (W_\infty^1(T), C(T))$.

Указание. Очевидно, что $I_\theta(E) \subset I_\theta(F)$. Используя «усреднитель», легко показать, что любая $f \in W_\infty^1(T)$ может быть представлена как $f = g_\varepsilon + h_\varepsilon$, где $g_\varepsilon \in C^1(T)$ и $h_\varepsilon \in C(T)$ удовлетворяют неравенствам $\|g_\varepsilon\|_{C^1} \leq 2\|f\|_{W_\infty^1}$ и $\|h_\varepsilon\|_{C(T)} \leq \varepsilon$. Здесь число $\varepsilon > 0$ может быть взято сколь угодно малым. Пусть теперь $f \in I_\theta(F)$. Тогда по теореме 6.3 можно представить $f = a_n + b_n$, где $\|a_n\|_{W_\infty^1} = o(2^{n(1-\theta)})$, $\|b_n\|_C = o(2^{-n\theta})$. Сглаживая, можно записать $a_n = a'_n + a''_n$, где $\|a'_n\|_{C^1} = o(2^{n(1-\theta)})$ и $\|a''_n\|_C \leq 10^{-n}$. Положив $b'_n = b_n + a''_n$, снова по теореме 6.3 находим, что $f = a'_n + b'_n$ принадлежит пространству $I_\theta(E)$.

Следующее упражнение продемонстрирует нам, что пространство $h_0^\theta(T)$ изоморфно (как топологическое векторное пространство) пространству последовательностей (c_0) . Сначала введем

некоторые обозначения. Для $n = 0, 1, 2, \dots$ и $k = 1, 2, \dots, 2^n$ определим функцию

$$g_{k,n}(x) = \max(0, 1 - |2^{n+1}x - 2k + 1|)$$

при $0 \leq x \leq 1$. Поскольку $g_{k,n}(0) = g_{k,n}(1)$, мы можем рассматривать $g_{k,n}$ как элемент $C(T)$, а точнее $W_\infty^1(T)$. Функция $g_{k,n}$ кусочно линейна с максимумом единица, с носителем ширины 2^{-n} и с центром в точке $(2k-1)2^{-(n+1)}$ (нарисуйте график). Определим подпространство $V_n \subset W_\infty^1$ как линейную оболочку $g_{k,n}$ ($1 \leq k \leq 2^n$) при $n = 0, 1, \dots$. Если положить $V_{-1} = \{c \cdot 1 : c \in \mathbb{C}\}$, то пространства V_n ($n \geq -1$) порождают плотное подпространство в $C(T)$. Для каждого n определим проектор p_n в $C(T)$ на V_n по формуле

$$p_{-1}(f) = f(0) \quad (n = -1),$$

$$(p_n f)(x) = - \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{2} \left\{ f\left(\frac{k-1}{2^n}\right) - 2f\left(\frac{k-1/2}{2^n}\right) + f\left(\frac{k}{2^n}\right) \right\} g_{k,n}(x) \quad (n \geq 0).$$

Упражнение 6.16. (а) Проверьте, что $p_n \circ p_m = 0$ при $n \neq m$.

(б) Для произвольной $f \in h_0^\theta(T)$ выполняется неравенство

$$\|p_n(f)\|_{C(T)} \leq 2^{-n\theta} \|f\|_{h_0^\theta(T)}.$$

Более того, $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{n\theta} \|p_n(f)\|_{C(T)} = 0$.

(Указание. $a - 2b + c = (a - b) - (b - c)$.)

(с) На подпространстве V_n нормы пространств $C(T)$ и $W_\infty^1(T)$ эквивалентны, поскольку V_n конечномерно. Показать, что при $f \in V_n$

$$\|f\|_{W_\infty^1} = 2^{-n-1} \|f\|_{C(T)}.$$

(д) Показать, что существует такая константа c , не зависящая от $\theta \in (0, 1)$, что для всех $f \in W_\infty^1(T)$ имеет место оценка

$$c \cdot \theta(1-\theta) \cdot \|f\|_{h_0^\theta(T)} \leq \sup_{n \geq -1} 2^{n\theta} \|p_n(f)\|_{C(T)}.$$

Указание. Нужно оценить $f(x) - f(y)$ при заданных $x, y \in T$. Фиксируйте целое $N \geq 0$, такое, что $2^{-N} \leq |x - y| < 2^{-N+1}$. Запишите $f = g + h$, где $g = p_1(f) + \dots + p_N(f)$ и $h = p_{N+1}(f) + \dots$. Теперь можно оценить $|h(x) - h(y)| \leq \leq 2 \|h\|_{C(T)}$, используя неравенство треугольника: $|h(x) - h(y)| \leq \leq 2 \sum_{k > N} \|p_k(f)\|_{C(T)}$. Для того чтобы оценить $|g(x) - g(y)|$, используйте включение $g \in W_\infty^1$. Получаем $|g(x) - g(y)| \leq \sum_{k=-1}^N \|p_k(f)\|_{W_\infty^1} \cdot |x - y|$. С помощью ч. (с) данного

упражнения вычислите сумму. Сложение обоих членов приводит к нужной оценке для $|f(x) - f(y)|$; в завершение следует сравнить $2^{-N\theta}$ с $|x - y|^\theta$.

(е) Для произвольного $f \in C(T)$ включение $f \in h_0^\theta(T)$ имеет место тогда и только тогда, когда $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{n\theta} \|p_n(f)\|_{C(T)} = 0$. Покажите это и сделайте вывод, что $h_0^\theta(T)$ изоморфно пространству последовательностей (c_0) .

Как следствие мы получаем, что интерполяционное пространство $I_\theta(E)$ банаховой пары E не обязано быть изоморфным ни одному из пространств E_0 или E_1 (поскольку $h_0^\theta(T) \cong (c_0)$, $h_0^\theta(T)$ имеет сепарабельное сопряженное пространство, изоморфное пространству l_1 , а пространство $C(T)$ — нет).

Следующие упражнения выясняют взаимосвязь между интерполяционными пространствами $I_\theta(E)$ и так называемыми *пространствами дробных степеней*. Пусть $E = (E_1, E_0)$ — банахова пара $A \in \text{Hol}(E)$. В § 5.7 были определены пространства E_k ($k = 2, 3, \dots$). Попросту говоря, $E_k = \mathcal{D}(A^k)$. Для любого θ из $0 < \theta < 1$ положим $E_{k+\theta} = I_\theta(E_{k+1}, E_k)$.

Упражнение 6.17 (обозначения, как и в упр. 5.24). (а) Для всех $n = 1, 2, 3, \dots$ покажите, что

$$(1 - A)^{-n}: E_s \rightarrow E_{s+n}$$

— изоморфизм при любом $s \geq 0$.

Указание. Используйте интерполяционное свойство.

(b) Покажите, что $(1 - A)^{-\sigma}$ — ограниченный оператор из E_s в $E_{s+\text{Re } \sigma}$, когда s и $s + \text{Re } \sigma$ не целые.

Указание. Рассуждайте подобно доказательству теоремы 6.10. Сначала, используя ч. (а), сведите задачу к случаю $0 < s < 1$ и $0 < \text{Re } \sigma < 1$. Далее, пусть задан $x \in E_1$. Тогда элемент $(1 - A)^{-\sigma}x \in E_1$ представим в виде

$$(1 - A)^{-\sigma}x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (1 - \lambda)^{-\sigma} (\lambda j - A)^{-1} x d\lambda,$$

где Γ — тот же контур, что и в доказательстве теоремы 6.10. Если $\text{Re } \sigma + s < 1$, то для оценки $\|(1 - A)^{-\sigma}x\|_{E_{s+\text{Re } \sigma}}$ используйте теорему 6.5. Если $1 < \text{Re } \sigma + s < 2$, то тем же путем оценивается $\|A(1 - A)^{-\sigma}x\|_{E_{s+\text{Re } \sigma-1}}$.

(с) В условиях ч. (b) оператор $(1 - A)^{-\sigma}$ является изоморфизмом из E_s на $E_{s+\text{Re } \sigma}$.

Указание. Для целого $N > \text{Re } \sigma$ из упр. 5.24 следует $(1 - A)^{-\sigma-N}(1 - A)^{-\sigma} = (1 - A)^{-N}$. Используйте теперь ч. (а).

Эти примеры показывают, что дробные степени $(1 - A)^{-z}$ хорошо себя ведут, исключая случай пространств E_s с целым s . Сейчас

мы введем новую шкалу банаховых пространств, известную как *пространства дробных степеней* оператора A .

Для вещественного $s > 0$ определим

$$D_s = (1 - A)^{-s}(E_0) = \{(1 - A)^{-s}x : x \in E_0\}.$$

Если $s \in \mathbb{Z}^+$, то D_s и E_s совпадают. Для любого $s > 0$ оператор $(1 - A)^{-s}$ — биекция из E_0 в D_s . Обратный оператор будем обозначать через $(1 - A)^s : D_s \rightarrow E_0$. Если наделить D_s нормой

$$\|x\|_{D_s} = \|(1 - A)^s x\|_{E_0},$$

то оно становится банаховым пространством и $(1 - A)^{-s}$, как легко видеть, является изоморфизмом из E_0 на D_s .

Упражнение 6.18. Показать, что при $0 < \theta < 1$ имеет место включение $D_\theta \subset I_\theta(E) \subset E_0$.

Указание. Если $x \in D_\theta$, то $x = (1 - A)^{-\theta} y$ и из упр. 5.24 находим

$$x = \frac{1}{\Gamma(\theta)} \int_0^\infty e^{tA} y e^{-t} t^{\theta-1} dt.$$

Определим при $n \geq 1$

$$a_n = \frac{1}{\Gamma(\theta)} \int_{2^{-n}}^{2^{1-n}} e^{tA} y e^{-t} t^{\theta-1} dt$$

и при $n = 0$

$$a_0 = \frac{1}{\Gamma(\theta)} \int_1^\infty e^{tA} y e^{-t} t^{\theta-1} dt.$$

Используя упр. 5.21 вместе с теоремой 6.4, покажите, что $x \in E_\theta$.

В оставшихся нескольких упражнениях читателю предлагается осмыслить результаты § 6.5 о максимальной регулярности.

Пусть $E = (E_1, E_0)$ — банахова пара и $A \in \text{Hol}(E)$. Мы будем говорить, что оператор A обладает свойством MR (*максимальная регулярность*), если для любой функции $f \in C([0, 1]; E_0)$ функция

$$Sf(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} f(s) ds$$

принадлежит пространству $C([0, 1]; E_1)$. По теореме о замкнутом графике (и теореме 6.9) получаем, что если оператор A обладает свойством MR, то S — ограниченный оператор из $C([0, 1]; E_0)$ в $C([0, 1]; E_1)$.

Упражнение 6.19. (а) Пусть E — банахова пара из упр. 6.13, и пусть оператор A задан формулой $(ax)_n = -nx_n$. Тогда оператор A обладает свойством MR.

(б) Пусть E_0 — пространство последовательностей l_p ($1 \leq p < \infty$), и пусть E_1 — его плотное подпространство, заданное так:

$$E_1 = \left\{ \{x_n\} \in l_p : \sum_{n=1}^{\infty} |nx_n|^p < \infty \right\}$$

с указанной при определении нормой. Снова рассмотрим оператор $A: E_1 \rightarrow E_0$, определенный формулой $(Ax)_n = -nx_n$. Тогда оператор A принадлежит $Hol(E)$, но не обладает свойством максимальной регулярности.

Указание. Пусть e_n есть n -й единичный вектор в l_p . Выберите неотрицательную непрерывную функцию $g(t)$ на $[0, \infty)$ с носителем $\text{supp}(g) \subset [1/2, 1]$ и $g(3/4) \neq 0$. Определите $f_n(t)$ формулой $f_n(t) = g(2^n(1-t))e_{2^n}$ (при $n = 1, 2, \dots$). Тогда $f_n \in C([0, 1]; E_0)$ и $\|f_n(t)\|_{E_0} \leq 1$. Поскольку f_n имеют непересекающиеся носители, то $h_N = f_1 + \dots + f_N \in C([0, 1]; E_0)$ и $\|h_N(t)\|_{E_0} \leq 1$. Простые выкладки показывают, что если $c = \int_0^\infty e^{-\tau} g(\tau) d\tau$, то $Sf_n(1) = c \cdot 2^{-n} \cdot e_{2^n}$. Поэтому $\|h_N(1)\|_{E_1} = cN^{1/p}$ и, значит, S не может быть ограниченным оператором из $C([0, 1]; E_0)$ в $C([0, 1]; E_1)$.

Рассмотрим теперь *гауссовы полугруппы* на $C(T)$ (см. упр. 5.25). Положим $E_0 = C(T)$ и $E_1 = C^2(T)$. Тогда оператор A , определенный формулой

$$Af(x) = f''(x),$$

принадлежит множеству $Hol(E)$. Действительно, полугруппа e^{tA} определяется следующим образом:

$$(e^{tA}f)(x) = \int_T G(t, x-y)f(y)dy,$$

где

$$G(t, z) = (4\pi t)^{-1/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(z+n)^2}{4t}\right).$$

Можно показать, что при $0 < \theta < 1$ и $\theta \neq 1/2$ пространство $I_\theta(E)$ является l -гёльдеровым (читатель может проверить это самостоятельно). Более точно,

$$I_\theta(E) = h_0^{2\theta}(T) \quad (0 < \theta < 1, \theta \neq 1/2),$$

где $h_0^{1+\sigma}(T)$ содержит те функции из $C^1(T)$, производные которых принадлежат $h_0^\sigma(T)$ ($0 < \sigma < 1$). Неоднородная задача Коши

§ 6.5 может быть записана в виде

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= f(x, t), \quad x \in T, \quad 0 \leq t \leq 1, \\ u(x, 0) &= 0, \end{aligned} \quad (\text{НЗК})$$

т. е. это *неоднородное уравнение теплопроводности*.

Упражнение 6.20. Используйте результаты о максимальной регулярности для того, чтобы установить следующую априорную оценку. Пусть задана $f \in C^\infty(T \times [0, 1])$ и функция $u \in C^\infty(T \times [0, 1])$ является классическим решением (НЗК). Тогда

$$[u_{xx}]_\theta + [u_t]_\theta \leq c \cdot [f]_\theta,$$

где c не зависит от f и $[\cdot]_\theta$ означает норму

$$[v]_\theta = \max_{T \times [0, 1]} |v| + \sup_{\substack{x \neq y \\ 0 \leq t \leq 1}} \frac{|v(x, t) - v(y, t)|}{|x - y|^\theta}$$

при $0 < \theta < 1$.

В последнем упражнении мы показываем, что оператор $Af(x) = f''(x)$ на паре $E = (C^2(T), C(T))$ не обладает свойством максимальной регулярности.

Упражнение 6.21. (а) Пусть $\varphi(x, t)$ есть C^∞ -функция на $\mathbb{R}^2$ такая, что

$$\varphi(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{если } x^2 + |t| \geq 1, \\ 1, & \text{если } x^2 + |t| \leq 3/4. \end{cases}$$

Рассмотрите функцию

$$u_N(x, t) = \sum_{k=1}^N \varphi(2^k x, 2^{2k} t) (x^2 + 2t).$$

Покажите, что функция $f_N = (u_N)_t - (u_N)_{xx}$ удовлетворяет неравенству

$$\max_{T \times [0, 1]} |f_N(x, t)| \leq M$$

(с константой M , не зависящей от N) и при этом

$$\max_{T \times [0, 1]} |(u_N)_{xx}| \geq (u_N)_{xx}(0, 0) = N.$$

(б) Докажите, что оператор $A \in \text{Hol}(E)$ не обладает свойством максимальной регулярности.

Часть III

Позитивные полугруппы

Глава 7

Генераторы позитивных полугрупп

7.1. Простейшие свойства позитивных полугрупп

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — полуупорядоченное банахово пространство (вещественное или комплексное) с положительным конусом X^+ . Пусть $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ есть C_0 -полугруппа линейных операторов на X с генератором A . Как обычно, мы обозначаем тип полугруппы (границу роста) $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ через ω_0 (см. § 3.7), т. е.

$$\omega_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \|T(t)\|}{t} = \inf_{t > 0} \frac{\ln \|T(t)\|}{t}.$$

Полугруппа $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ называется *позитивной*, если все операторы $T(t)$ при $t \geq 0$ являются положительными, т. е. $T(t)X^+ \subset X^+$ для каждого $t \geq 0$. Мы будем часто пользоваться следующим критерием позитивности полугруппы.

Предложение 7.1. C_0 -полугруппа $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ является позитивной тогда и только тогда, когда резольвента $R(\lambda, A)$ положительна при всех $\lambda > \omega_0$ (эквивалентно, $R(\lambda, A)$ является положительным оператором при всех $\lambda > \lambda_0$ для некоторого $\lambda_0 \geq \omega_0$).

Доказательство. Предположим сначала, что полугруппа $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ позитивна. Как известно (см. теоремы 3.5 и 3.31), для любого $\lambda > \omega_0$ выполняется равенство

$$R(\lambda, A)x = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt$$

для каждого $x \in X$. Отсюда, поскольку X^+ замкнут, получаем, что $R(\lambda, A)x \geq 0$, лишь только $x \geq 0$.

Обратно, если $R(\lambda, A)x \geq 0$ при всех $\lambda > \lambda_0$ ($\lambda_0 \geq \omega_0$), то (см. теорему 3.6) из равенства

$$T(t)x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n}{t} R\left(\frac{n}{t}, A\right) \right\}^n x, \quad x \in X, \quad t > 0,$$

следует, что $T(t)x \geq 0$ для всех $0 \leq x \in X$. ■

Замкнутый линейный оператор A называется *резольвентно положительным*, если существует такое число λ_0 , что $(\lambda_0, \infty) \subset \rho(A)$ и $R(\lambda, A) \geq 0$ при всех $\lambda > \lambda_0$.

Следующее предложение показывает, что в случае позитивности C_0 -полугруппы $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ области определения $\mathcal{D}(A)$ и $\mathcal{D}(A^*)$, где A^* — сопряженный оператор к оператору A , содержит достаточно много положительных элементов.

Предложение 7.2. Пусть $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ — позитивная C_0 -полугруппа. Тогда $\mathcal{D}(A) \cap X^+$ плотно в X^+ в топологии нормы $\|\cdot\|$, а множество $\mathcal{D}(A^*) \cap (X^*)^+ \cap \sigma(X^*, X)$ — плотно в $(X^*)^+$.

Доказательство. Возьмем произвольный элемент $0 \leq x \in X$. Тогда для $t > 0$ выполняется $t^{-1} \int_0^t T(s)x ds \geq 0$. Более того, $t^{-1} \int_0^t T(s)x ds \rightarrow x$ по норме при $t \downarrow 0$ и $t^{-1} \int_0^t T(s)x ds \in \mathcal{D}(A)$ для всех $t > 0$ (см. лемму 3.2). Поэтому множество $\mathcal{D}(A) \cap X^+$ плотно в X^+ .

Чтобы доказать вторую часть предложения, заметим, что в силу предыдущего предложения резольвента $R(\lambda, A)$ положительна для всех $\lambda > \omega_0$ и $\lambda R(\lambda, A)x \rightarrow x$ по норме при $\lambda \rightarrow \infty$ для каждого $x \in X$ (см. обсуждение результатов теоремы 2.2). Далее, поскольку $R(\lambda, A)X = \mathcal{D}(A)$, то очевидно, что $R(\lambda, A)^*X^* = \mathcal{D}(A^*)$. Отсюда для каждого $0 \leq \varphi \in X^*$ следует, что $0 \leq \lambda R(\lambda, A)^*\varphi \in \mathcal{D}(A^*)$ при всех $\lambda > \omega_0$ и $\lambda R(\lambda, A)^*\varphi \rightarrow \varphi$ сходится в слабой $*$ -топологии при $\lambda \rightarrow \infty$. ■

Спектральная грань C_0 -полугруппы $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ с генератором A определяется формулой

$$s(A) = \sup \{\operatorname{Re} \lambda : \lambda \in \sigma(A)\},$$

причем считается, что $s(A) = -\infty$, если $\sigma(A) = \emptyset$.

Комплексное число λ с $\operatorname{Re} \lambda > \omega_0$ принадлежит резольвентному множеству $\rho(A)$ и

$$R(\lambda, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt$$

при всех $x \in X$ (интеграл сходится абсолютно по норме). Отсюда следует, что $s(A) \leq \omega_0$. Вообще говоря, последнее неравенство может быть строгим (возможна ситуация, когда $-\infty = s(A) < \omega_0$; примеры будут приведены в § 8.1 и 9.1). Если C_0 -полугруппа $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ позитивна, то резольвента $R(\lambda, A)$ имеет указанное выше представление для всех λ со свойством $\operatorname{Re} \lambda > s(A)$ (хотя в этом случае интеграл не обязан сходиться абсолютно). Для доказательства нам потребуется лемма.

Лемма 7.3. Пусть X — банахово пространство и $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ есть C_0 -полугруппа в X с генератором A . Если при всех $x \in X$, всех $\varphi \in X^*$ и некотором $\lambda \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} |\langle T(t)x, \varphi \rangle| dt < \infty,$$

то $\lambda > s(A)$. Более того, если $\operatorname{Re} \mu > \lambda$, то для каждого $x \in X$

$$R(\mu, A)x = \int_0^{\infty} e^{-\mu t} T(t)x dt,$$

где интеграл сходится по норме как несобственный интеграл Римана.

Доказательство. Для $\mu \in \mathbb{C}$ с $\operatorname{Re} \mu \geq \lambda$ определим функцию

$$R_t(\mu)x = \int_0^t e^{-\mu s} T(s)x ds, \quad x \in X,$$

при $t \geq 0$. Ясно, что $R_t(\mu) \in \mathcal{L}(X)$ при указанных t и μ . Если $x \in X$ и $\varphi \in X^*$, то

$$\begin{aligned} |\langle R_t(\mu)x, \varphi \rangle| &\leq \int_0^t e^{-s \operatorname{Re} \mu} |\langle T(s)x, \varphi \rangle| ds \leq \\ &\leq \int_0^{\infty} e^{-\lambda s} |\langle T(s)x, \varphi \rangle| ds < \infty, \end{aligned}$$

и по принципу равномерной ограниченности найдется такая константа M , что $\|R_t(\mu)\| \leq M$ для всех $t \geq 0$ и всех μ со свойством $\operatorname{Re} \mu > \lambda$. Интегрируя по частям, получаем

$$R_t(\mu)x = e^{-(\mu-\lambda)t} R_t(\lambda)x + (\mu-\lambda) \int_0^t e^{-(\mu-\lambda)s} R_s(\lambda)x ds$$

при всех $x \in X$ и $\operatorname{Re} \mu > \lambda$. Поскольку $\|e^{-(\mu-\lambda)t} R_t(\lambda)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и

$$\int_0^{\infty} \|e^{-(t-\lambda)s} R_s(\lambda)x\| ds \leq M \|x\| \int_0^{\infty} e^{-s \operatorname{Re} (\mu-\lambda)} ds < \infty,$$

то существует предел

$$\begin{aligned} R(\mu)x &= \int_0^\infty e^{-\mu s} T(s)x ds = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-\mu s} T(s)x ds = \\ &= (\mu - \lambda) \int_0^\infty e^{-(\mu - \lambda)s} R_s(\lambda)x ds. \end{aligned}$$

Заметим, что сходимость равномерна на $\{\mu \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \mu \geq \lambda + \delta\}$ при любом $\delta > 0$. Значит, $R(\mu)x$ — аналитическая функция по μ в области $\{\mu \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \mu > \lambda\}$. Далее, $R(\mu) \in \mathcal{L}(X)$ и $\|R(\mu)\| \leq M$ при всех μ с $\operatorname{Re} \mu > \lambda$. Поскольку $R(\mu) = R(\mu, A)$, если $\operatorname{Re} \mu > \omega_0$, то из аналитичности $R(\mu)$ следует, что $\{\mu \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \mu > \lambda\} \subset \rho(A)$ и $R(\mu) = R(\mu, A)$, если $\operatorname{Re} \mu > \lambda$. Наконец, поскольку $\|R(\mu, A)\| \leq M$ при всех μ со свойством $\operatorname{Re} \mu > \lambda$, то ясно, что $s(A) < \lambda$. Лемма полностью доказана. ■

Прежде чем сформулировать следующую теорему, мы напомним некоторые факты, связанные с преобразованием Лапласа. Пусть $f(t)$ — локально интегрируемая функция на $[0, \infty)$. Преобразование Лапласа функции f определяется так:

$$\mathcal{L}(f; z) := \int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt$$

при всех $z \in \mathbb{C}$, для которых интеграл сходится (как несобственный интеграл). Если интеграл сходится при некотором $z_0 \in \mathbb{C}$, то он существует при всех $z \in \mathbb{C}$ со свойством $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} z_0$, и, следовательно, областью сходимости является полуплоскость. Определим *абсциссу сходимости* $\sigma_c = \inf \{\operatorname{Re} z : \mathcal{L}(f; z) \text{ существует}\}$. Функция $\mathcal{L}(f; z)$ аналитична в $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \sigma_c\}$. В общем случае, $\mathcal{L}(f; z)$ не обязана иметь особенностей на оси сходимости, т. е. возможно, что $\mathcal{L}(f; z)$ имеет аналитическое продолжение в полуплоскость, которая содержит в себе $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \sigma_c\}$. Тем не менее, если f является положительной функцией, то такая ситуация невозможна вследствие теоремы Прингсгейма — Ландау: если f — положительная локально интегрируемая функция на $[0, \infty)$, то абсцисса сходимости σ_c есть особая точка преобразования Лапласа $\mathcal{L}(f; z)$.

Теперь вернемся к позитивным полугруппам в полуупорядоченном банаховом пространстве, которое может предполагаться комплексным.

Теорема 7.4. Пусть X — полуупорядоченное банахово пространство с нормальным и воспроизводящим положительным кону-

сом X^+ . Предположим, что $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ — позитивная C_0 -полугруппа с генератором A . Тогда $s(A) = \sup \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \in \sigma(A)\}$ и

$$R(\mu, A)x = \int_0^\infty e^{-\mu t} T(t)x dt$$

при всех $x \in X$ и всех $\mu \in \mathbb{C}$ с $\operatorname{Re} \mu > s(A)$, где интеграл существует как сильно сходящийся несобственный интеграл.

Доказательство. Достаточно доказать, что для любого $\lambda \in \mathbb{R}$, для которого $[\lambda, \infty) \subset \rho(A)$, выполняется $s(A) < \lambda$ и что интегральное представление $R(\mu, A)$ имеет место при всех $\mu \in \mathbb{C}$ со свойством $\operatorname{Re} \mu > \lambda$. С этой целью зафиксируем $\lambda \in \mathbb{R}$ со свойством $[\lambda, \infty) \subset \rho(A)$. Выберем элементы $0 \leq x \in X$ и $0 \leq \varphi \in X^*$ и рассмотрим на $[0, \infty)$ неотрицательную непрерывную функцию $f(t) = \langle T(t)x, \varphi \rangle$. Абсцисса сходимости σ_c функции $\mathcal{L}(f; \mu)$ удовлетворяет неравенству $\sigma_c \leq \omega_0$, причем $\mathcal{L}(f; \mu) = \langle R(\mu, A)x, \varphi \rangle$ для всех μ с $\operatorname{Re} \mu > \omega_0$. Далее, функция $\langle R(\mu, A)x, \varphi \rangle$ аналитична по μ в некотором открытом множестве, содержащем $[\lambda, \infty)$, и по теореме Прингсгейма — Ландау число σ_c является особой точкой функции $\mathcal{L}(f; \mu)$. Поэтому $\sigma_c < \lambda$ и

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} \langle T(t)x, \varphi \rangle dt < \infty.$$

Поскольку оба конуса X^+ и $(X^*)^+$ воспроизводящие (напомним, что X^+ нормальный), то

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} |\langle T(t)x, \varphi \rangle| dt < \infty$$

при всех $x \in X$ и всех $\varphi \in X^*$. Используя лемму 7.3, получаем требуемый результат. ■

Так как спектр $\sigma(A)$ замкнут, то из данного результата при сделанных предположениях немедленно вытекает, что $s(A) \in \sigma(A)$ при $\sigma(A) \neq \emptyset$. Поведение резольвенты $R(\mu, A)$ в точке $s(A)$ будет обсуждаться в § 8.2 и 8.3. Далее нам будут полезны следующие два следствия из предыдущей теоремы.

Следствие 7.5. Если $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ — позитивная C_0 -полугруппа с генератором A в полупорядоченном банаховом пространстве X с воспроизводящим нормальным положительным конусом, то $R(\lambda, A) \geq 0$ при всех $\lambda > s(A)$. Более того, если X — банахова структура, то

$$|R(\mu, A)x| \leq R(\operatorname{Re} \mu, A)|x|$$

для всех $x \in X$ и всех $\mu \in \mathbb{C}$ с $\operatorname{Re} \mu > s(A)$.

Доказательство. Первое утверждение очевидно ввиду интегрального представления $R(\lambda, A)$ из предыдущей теоремы. Предположим теперь, что X — банахова структура, и выберем μ со свойством $\operatorname{Re} \mu > s(A)$. Тогда

$$\left| \int_0^t e^{-\mu s} T(s) x \, ds \right| \leq \int_0^t e^{-s \operatorname{Re} \mu} T(s) |x| \, ds$$

для всех $t \geq 0$. Устремляя $t \rightarrow \infty$, мы получаем $|R(\mu, A)x| \leq R(\operatorname{Re} \mu, A)|x|$. ■

Приведем некоторые результаты, связанные с неприводимыми полугруппами. Для удобства ограничимся банаховыми структурами. Для начала напомним некоторые сопутствующие факты. Пусть X — банахова структура. Элемент $0 \leq u \in X$ называется *квазивнутренним*, если $\bar{X}_u = X$ (где через X_u обозначен главный идеал, отвечающий элементу u). Заметим, что $0 \leq u \in X$ является квазивнутренним тогда и только тогда, когда $\langle u, \varphi \rangle > 0$ при всех $0 < \varphi \in X^*$. Пусть задан положительный линейный оператор T из X в себя. Замкнутый идеал J в X называется *T -инвариантным*, если $T(J) \subset J$. Оператор называется *неприводимым*, если в X только $\{0\}$ и X являются T -инвариантными замкнутыми идеалами. Кроме того, оператор T называется *строго неприводимым*, если Tu является квазивнутренним элементом для каждого $0 < u \in X$. Ясно, что строго неприводимый оператор является неприводимым.

Пусть теперь $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ — позитивная C_0 -полугруппа на X . Замкнутый идеал J в X называется *$\{T(t)\}$ -инвариантным*, если J является $T(t)$ -инвариантным при всех $t \geq 0$, и $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ называется *неприводимой*, если только $\{0\}$ и X являются $\{T(t)\}$ -инвариантными замкнутыми идеалами. Далее, $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ называется *строго неприводимой*, если все операторы $T(t)$, $t > 0$, являются строго неприводимыми.

Предложение 7.6. Для позитивной C_0 -полугруппы $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ с генератором A в банаховой структуре X следующие утверждения эквивалентны:

- (i) полугруппа $\{T(t)\}$ неприводима;
- (ii) для любых $0 < x \in X$ и $0 < \varphi \in X^*$ существует такое $t \geq 0$, что $\langle T(t)x, \varphi \rangle > 0$;
- (iii) резольвента $R(\lambda, A)$ строго неприводима при всех (для некоторого) $\lambda > s(A)$;
- (iv) резольвента $R(\lambda, A)$ неприводима при всех (для некоторого) $\lambda > s(A)$.

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii). Выберем $0 < \varphi \in X^*$ и определим множество

$$J = \{x \in X : \langle T(t)x, \varphi \rangle = 0 \text{ при всех } t \geq 0\},$$

которое является замкнутым $\{T(t)\}$ -инвариантным идеалом в X . Поскольку $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ неприводима и $J \neq X$, то $J = \{0\}$ и, значит, выполняется (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Предположим, что $0 < u \in X$ и $\lambda > s(A)$. Из теоремы 7.4 получаем

$$\langle R(\lambda, A)u, \varphi \rangle = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \langle T(t)u, \varphi \rangle dt > 0$$

при всех $0 < \varphi \in X^*$. Отсюда следует, что $R(\lambda, A)u$ является квазивнутренним элементом в X^+ .

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Тривиально.

(iv) $\Rightarrow$ (i). Эта импликация немедленно следует из теоремы 7.4, поскольку любой замкнутый $\{T(t)\}$ -инвариантный идеал в X является $R(\lambda, A)$ -инвариантным при каждом $\lambda > s(A)$. ■

В связи с утверждением (ii) заметим, что $\{T(t)\}$ является строго неприводимой тогда и только тогда, когда $\langle T(t)x, \varphi \rangle > 0$ при каждом $t > 0$, если $0 < x \in X$ и $0 < \varphi \in X^*$. В общем случае неприводимые полугруппы не являются строго неприводимыми (рассмотрите полугруппы сдвигов). Однако для позитивных аналитических полугрупп эти два понятия, как показано в следующем утверждении, совпадают.

Предложение 7.7. *Предположим, что $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ — позитивная аналитическая полугруппа на банаховой структуре X . Если $0 \leq u \in X$ и $0 \leq \varphi \in X^*$ таковы, что $\langle T(t_0)u, \varphi \rangle = 0$ при некотором $t_0 > 0$, то $\langle T(t)u, \varphi \rangle = 0$ при всех $t \geq 0$.*

Доказательство. Пусть $0 \leq x \in X$ и $0 \leq x_n \in X$ ($n = 1, 2, \dots$) таковы, что $\sum_{n=1}^\infty \|x - x_n\| < \infty$. Тогда существует элемент $y \in X$ со свойствами: $0 \leq y \leq x_n$ и $\|x - y\| \leq \sum_{n=1}^\infty \|x - x_n\|$. Действительно, заменив x_n на $x_n \wedge x$, мы можем предположить, что $0 \leq x_n \leq x$ при всех n . Положим теперь $y_n = x_1 \wedge \dots \wedge x_n$. Тогда $0 \leq y_n - y_{n+1} \leq x - x_{n+1}$ и, значит, $\|y_n - y_{n+1}\| \leq \|x - x_{n+1}\|$ при всех n . Отсюда $\sum_{n=1}^\infty \|y_n - y_{n+1}\| < \infty$. Последнее означает, что $\{y_n: n = 1, 2, \dots\}$ — последовательность Коши в X и, следовательно, $y_n \rightarrow y$ для некоторого $y \in X$. Заметим, что $0 \leq y \leq y_n \leq x_n$ при всех n . Кроме того,

$$0 \leq x - y_n = x - x_1 \wedge \dots \wedge x_n \leq \sum_{k=1}^n (x - x_k),$$

так что

$$\|x - y_n\| \leq \sum_{k=1}^n \|x - x_k\| \leq \sum_{k=1}^\infty \|x - x_k\|$$

при всех n . Отсюда получаем

$$\|x - y\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|x - x_k\|.$$

Вернемся к доказательству нашего предложения. Выберем последовательность $t_n \downarrow 0$ со свойством $\sum_{n=1}^{\infty} \|T(t_n)u - u\| < \infty$. В силу предыдущих соображений для каждого $m = 1, 2, \dots$ существует такой элемент $v_m \in X$, что $0 \leq v_m \leq T(t_n)u$ при всех $n \geq m$ и $\|u - v_m\| \leq \sum_{n=m}^{\infty} \|T(t_n)u - u\|$. В частности, $\|u - v_m\| \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Для $n \geq m$ получаем

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle T(t_0 - t_n)v_m, \varphi \rangle &\leq \langle T(t_0 - t_n)T(t_n)u, \varphi \rangle = \\ &= \langle T(t_0)u, \varphi \rangle = 0 \end{aligned}$$

и потому функция $f_m(t) = \langle T(t)v_m, \varphi \rangle$ имеет нули в точках $t_0 - t_n$ ($n \geq m$). В силу предположений функция f_m является сужением аналитической функции на $(0, \infty)$, и поскольку $t_0 - t_n \uparrow t_0$, то $f_m(t) = 0$ при всех $t \geq 0$. Наконец, в силу сходимости $v_m \rightarrow u$ при $m \rightarrow \infty$ получаем, что $\langle T(t)u, \varphi \rangle = 0$ для всех $t \geq 0$. ■

Следствие 7.8. *Неприводимая позитивная аналитическая полугруппа в банаховой структуре является строго неприводимой.*

Из предложения 7.7 следует, в частности, что для позитивной аналитической полугруппы $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ в функциональном банаховом пространстве носитель функции $T(t)f$ не зависит от t при всех $t > 0$ для произвольной функции $f \geq 0$.

7.2. half-нормы и диссипативные операторы

В этом параграфе мы обсудим некоторые свойства сублинейных функционалов и их связь с положительными конусами в полуупорядоченных банаховых пространствах. Кроме того, мы рассмотрим операторы, диссипативные по отношению к этим сублинейным функционалам, которые будут использоваться для описания позитивных (сжимающих) полугрупп в полуупорядоченном банаховом пространстве.

Пусть X — вещественное векторное пространство. Напомним, что функционал $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ называется *сублинейным*, если $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ и $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ при всех $x, y \in X$ и всех $0 \leq \lambda \in \mathbb{R}$. Заметим, что $p(x) + p(-x) \geq p(0) = 0$ и поэтому $\max(p(x), p(-x)) \geq 0$ при всех $x \in X$. Сублинейный функционал p называется *half-нормой*, если $\max(p(x), p(-x)) > 0$ для любых $x \neq 0$ в X . Если p есть half-норма, то $\|x\|_p = \max(p(x), p(-x))$ определяет норму на X , которая называется *нормой, индуцируемой функционалом p* . Заметим, что $|p(x)| \leq \|x\|_p$.

Выбрав функционал $p: X \rightarrow \mathbb{R}$, определим множество $X^p = \{x \in X: p(-x) \leq 0\}$, которое является клином в X , т. е. если $x, y \in X^p$, то $x + y \in X^p$ и $\lambda x \in X^p$ при всех $\lambda \geq 0$. Если p есть half-норма, то X^p — конус, т. е. $X^p \cap (-X^p) = \{0\}$, и поэтому X^p порождает частичную упорядоченность следующим образом: $x \leq y$, если $y - x \in X^p$. В этой ситуации X является частично упорядоченным пространством с положительным конусом $X^+ = X^p$.

С этого момента мы будем предполагать, что X — банахово пространство и сублинейный функционал $p: X \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывен, т. е. $|p(x)| \leq C \|x\|$ при всех $x \in X$ и некоторой константе $C \geq 0$. Ясно, что X^p замкнут и, если p есть half-норма, то X — полуупорядоченное банахово пространство с индуцированной упорядоченностью и $\|x\|_p \leq C \|x\|$ при всех $x \in X$. Кроме того, заметим, что условие $x \leq y$ влечет за собой $p(x) \leq p(y)$ и равенство $\|x\|_p = p(x)$ при всех $x \in X^p$. В частности, $\|\cdot\|_p$ является монотонной нормой по отношению к индуцируемой упорядоченности, т. е. $\|x\|_p \leq \|y\|_p$, если $0 \leq x \leq y$ в X .

Обратно, предположим, что X — полуупорядоченное банахово пространство с положительным конусом X^+ . Для $x \in X$ определим функционал

$$p(x) = \text{dist}(-x, X^+) = \inf \{\|x + y\|: y \in X^+\}.$$

Этот функционал является непрерывным сублинейным функционалом на X . Ясно, что p есть half-норма на X и $X^p = X^+$. Эта half-норма p называется канонической half-нормой, соответствующей заданной полуупорядоченности. Заметим, что $0 \leq p(x) \leq \|x\|$ и $\|x\|_p \leq \|x\|$ при всех $x \in X$. В общем случае нормы $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_p$ не эквивалентны. Напомним, что положительный конус X^+ является нормальным, если существует такая константа $M > 0$, что норма $\|\cdot\|$ M -монотонна, т. е. $\|x\| \leq M \|y\|$, если $0 \leq x \leq y$ в X . Используя каноническую half-норму, мы получаем следующее описание нормальных конусов.

Предложение 7.9. Положительный конус X^+ в полуупорядоченном пространстве X является нормальным тогда и только тогда, когда норма, индуцированная канонической half-нормой, эквивалентна исходной норме в X .

Доказательство. Поскольку $\|\cdot\|_p$ — монотонная норма, то достаточно показать, что норма $\|\cdot\|_p$ эквивалентна исходной норме, если X^+ нормален. В этой связи заметим, что

$$\|x\|_p = \inf \{\max(\|y\|, \|z\|): y, z \in X, z \leq x \leq y\}$$

при всех $x \in X$. Предположим теперь, что $\|\cdot\|$ является M -моно-

тонной и $z \leq x \leq y$. Тогда получаем

$$\begin{aligned} \max(\|y\|, \|z\|) &\geq \frac{1}{2} \|z - y\| \geq \frac{1}{2M} \|x - z\| \geq \\ &\geq \frac{1}{2M} \|x\| - \frac{1}{2M} \max(\|y\|, \|z\|). \end{aligned}$$

Отсюда находим, что $\max(\|y\|, \|z\|) \geq (2M + 1)^{-1} \|x\|$. Следовательно, $\|x\|_p \geq (2M + 1)^{-1} \|x\|$ при всех $x \in X$. ■

Предположим, что p — сублинейный функционал на банаховом пространстве X . Субдифференциал $\partial p(x)$ функционала p в точке $x \in X$ состоит из всех элементов $\varphi \in X^*$ со свойствами $\langle x, \varphi \rangle = p(x)$ и $\langle y, \varphi \rangle \leq p(y)$ для всех $y \in X$ (см. дополнение 1, замечание Д.1.26). Если p есть half-норма и X — полуупорядоченное банахово пространство с $X^+ = X^p$ и с сопряженным положительным конусом $(X^*)^+ = \{\varphi \in X^* : \langle x, \varphi \rangle \geq 0 \text{ при всех } x \in X^+\}$, то $\partial p(x) \subset (X^*)^+$ для всех $x \in X$. Действительно, если $\varphi \in \partial p(x)$ и $y \in X^+$, то $\langle -y, \varphi \rangle \leq p(-y) \leq 0$ и поэтому $\langle y, \varphi \rangle \geq 0$.

Пример 7.10. (i) Если $(X, \|\cdot\|)$ — банахово пространство, то $p(x) = \|x\|$ является half-нормой с $X^p = \{0\}$. Заметим, что $\partial p(x) = \{\varphi \in X^* : \|\varphi\| = 1 \text{ и } \langle x, \varphi \rangle = \|x\|\}$ при всех $x \neq 0$ в X , при этом $\partial p(0) = \{\varphi \in X^* : \|\varphi\| \leq 1\}$.

(ii) Пусть X — полуупорядоченное банахово пространство с канонической half-нормой p . Если $\varphi \in X^*$, то $\langle y, \varphi \rangle \leq p(y)$ при всех $y \in X$ тогда и только тогда, когда $\varphi \geq 0$ и $\|\varphi\| \leq 1$. В самом деле, если $\langle y, \varphi \rangle \leq p(y)$ при всех $y \in X$, то, как мы заметили выше, $\varphi \in (X^*)^+$ и $|\langle y, \varphi \rangle| \leq \|y\|_p \leq \|y\|$, т. е. $\|\varphi\| \leq 1$. Для доказательства обратного утверждения выберем $y, z \in X$, $z \geq 0$. Тогда $\langle y, \varphi \rangle \leq \langle y + z, \varphi \rangle \leq \|y + z\|$, что влечет за собой $\langle y, \varphi \rangle \leq p(y)$. Из этих наблюдений получаем

$$\partial p(x) = \{\varphi \in X^* : \varphi \geq 0, \|\varphi\| \leq 1 \text{ и } \langle x, \varphi \rangle = p(x)\}$$

для любого $x \in X$. Более того, если $p(x) > 0$, то легко видеть, что $\|\varphi\| = 1$ при каждом $\varphi \in \partial p(x)$.

(iii) Пусть X — банахова структура. Мы утверждаем, что каноническая half-норма p в X имеет вид $p(x) = \|x^+\|$ при всех $x \in X$. Действительно, поскольку функционал p удовлетворяет соотношению $p(x) = \inf \{\|x + y\| : 0 \leq y \in X\}$ и $x^+ = x + x^-$, то ясно, что $p(x) \leq \|x^+\|$. Для произвольного $0 \leq y \in X$ получаем $\|x + y\| \geq (x + y)^+ \geq x^+$; поэтому $\|x + y\| \geq \|x^+\|$. Отсюда следует, что $p(x) \geq \|x^+\|$. Норма, индуцируемая функционалом p , задается формулой $\|x\|_p = \max(\|x^+\|, \|x^-\|)$ при всех $x \in X$. Эта норма монотонна, и она эквивалентна исходной норме $\|\cdot\|$. Заметим, что в общем случае норма $\|\cdot\|_p$ не является нормой

структуры. Из (ii) получаем

$$\partial p(x) = \{\varphi \in X^*: \varphi \geq 0, \|\varphi\| \leq 1 \text{ и } \langle x, \varphi \rangle = \|x^+\|\}$$

при каждом $x \in X$. Кроме того, $\langle x^-, \varphi \rangle = 0$ при всех $\varphi \in \partial p(x)$. Действительно, $\|x^+\| = \langle x^+, \varphi \rangle - \langle x^-, \varphi \rangle$; поэтому $\langle x^-, \varphi \rangle + \|x^+\| = \langle x^+, \varphi \rangle \leq \|x^+\|$ и, следовательно, $\langle x^-, \varphi \rangle = 0$. Итак, $\langle x^+, \varphi \rangle = \langle x, \varphi \rangle = \|x^+\|$ при всех $\varphi \in \partial p(x)$ и потому $\partial p(x) \subset \subset \partial p(x^+) \subset \partial N(x^+)$, где $N(x) = \|x\|$.

(iv) Пусть X — банахова структура и задан положительный функционал $0 < \varphi \in X^*$. Для $x \in X$ положим $p(x) = \langle x^+, \varphi \rangle$; тогда p — сублинейный функционал, который, вообще говоря, не является half-нормой. Заметим, что $\partial p(x) = \{\varphi \in X^*: 0 \leq \psi \leq \varphi \text{ и } \langle x, \psi \rangle = \langle x^+, \varphi \rangle\}$ и $\langle x^-, \psi \rangle = 0$, если $\psi \in \partial p(x)$.

(v) Пусть Ω — компактное хаусдорфово пространство. Рассмотрим пространство $X = C(\Omega)$ вещественных непрерывных функций на Ω , которое является банаховой структурой с суп-нормой и поточечной упорядоченностью. Каноническая half-норма на $C(\Omega)$ определяется так:

$$p(f) = \|f^+\|_\infty = \inf\{\lambda \geq 0: f^+ \leq \lambda 1\},$$

(где функция 1 задается следующим образом: $1(\omega) = 1$ при всех $\omega \in \Omega$), а индуцируемая норма $\|f\|_p = \max(\|f^+\|_\infty, \|f^-\|_\infty) = \|f\|_\infty$. Другая естественная half-норма на $C(\Omega)$ определяется так:

$$\hat{p}(f) = \inf\{\lambda \in \mathbb{R}: f \leq \lambda 1\}.$$

Конус, порождаемый функционалом $\hat{p}$, является положительным конусом в $C(\Omega)$, а норма, индуцируемая функционалом $\hat{p}$, является суп-нормой. Наконец, $p(f) = \max(\hat{p}(f), 0)$ при всех $f \in C(\Omega)$.

Пусть p — непрерывный сублинейный функционал на вещественном банаховом пространстве X . Предположим, что A — линейный оператор из линейного многообразия $\mathcal{D}(A) \subset X$ в X . Напомним, что A является p -диссипативным, если $p(x) \leq p(x - tAx)$ при всех $t \geq 0$ и всех $x \in \mathcal{D}(A)$, что эквивалентно условию

$$p'(x; -Ax) = \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} \{p(x - tAx) - p(x)\} \geq 0$$

при всех $x \in \mathcal{D}(A)$ (см. § 3.3). Далее оператор A называется строго p -диссипативным, если $p'(x; Ax) \leq 0$ при всех $x \in \mathcal{D}(A)$. Поскольку $-p'(x; -Ax) \leq p'(x; Ax)$, то ясно, что строго p -диссипативный оператор является p -диссипативным. Эквивалентность следующих утверждений вытекает из предложения А.1.24:

(1) оператор A является p -диссипативным тогда и только тогда, когда для каждого $x \in \mathcal{D}(A)$ существует $\varphi \in \partial p(x)$, такой, что $\langle Ax, \varphi \rangle \leq 0$.

(2) оператор A является строго p -диссипативным тогда и только тогда, когда $\langle Ax, \varphi \rangle \leq 0$ при всех $\varphi \in \partial p(x)$ и всех $x \in \mathcal{D}(A)$.

Мы напомним, в частности, что для плотно определенных операторов, как это следует из результатов о диссипативности, полученных в теореме 3.14, понятия p -диссипативности и строгой p -диссипативности совпадают. Кроме того, если p есть half-норма, то любой p -диссипативный оператор A замыкаем, и замыкание $\tilde{A}$ является строго p -диссипативным оператором.

Пример 7.11. Если X — банахова структура и p — каноническая half-норма, т. е. $p(x) = \|x^+\|$, то p -диссипативный оператор называют *дисперсивным*. Из примера 7.10 (iii) и предыдущих соображений следует, что оператор $A: \mathcal{D}(A) \rightarrow X$ является дисперсивным тогда и только тогда, когда для каждого $x \in \mathcal{D}(A)$ существует элемент $0 \leq \varphi \in X^*$ со свойствами $\|\varphi\| \leq 1$ и $\langle x, \varphi \rangle = \|x^+\|$, причем $\langle Ax, \varphi \rangle \leq 0$. Заметим, что последнее условие тривиально удовлетворяется при всех $x \in \mathcal{D}(A)$ с $x^+ = 0$.

Рассмотрим теперь частный случай, когда $X = L_2(\Omega, \mu)$. отождествляя, как обычно, X^* с $L_2(\Omega, \mu)$ и полагая $N(f) = \|f\|_2$, получаем $\partial N(f) = \{f/\|f\|\}$ при всех $f \neq 0$ в L_2 . Как отмечено в примере 7.10 (iii), $\partial p(f) \subset \partial N(f^+)$ и потому $\partial p(f) = \partial N(f^+) = \{f^+/\|f^+\|\}$ при всех $f \in L_2$ с $f^+ \neq 0$. Отсюда видно, что оператор A в L_2 является дисперсивным тогда и только тогда, когда $\langle Af, f^+ \rangle \leq 0$ при всех $f \in \mathcal{D}(A)$.

Пусть X — вещественное банахово пространство и $p: X \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow$ сублинейный функционал. Линейное отображение T в X называется p -сжатием, если $p(Tx) \leq p(x)$ при всех $x \in X$. Ясно, что конус $X^p = \{x \in X: p(-x) \leq 0\}$ инвариантен относительно любого p -сжатия в X . В частности, если X — полуупорядоченное банахово пространство с канонической half-нормой p , то любое p -сжатие в X является положительным оператором. Предположим теперь, что $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ является C_0 -полугруппой на X с генератором A . Если оператор $T(t)$ есть p -сжатие при каждом $t \geq 0$, то $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ называется p -сжимающей полугруппой. Следующее предложение доказано в гл. 3 (теорема 3.15).

Предложение 7.12. C_0 -полугруппа $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ является p -сжимающей полугруппой тогда и только тогда, когда ее генератор A является p -диссипативным.

В этом предложении заранее предполагается, что A есть генератор C_0 -полугруппы, хотя во многих ситуациях p -диссипативность вместе с условием на область значений гарантирует, что A является генератором C_0 -полугруппы. Для простоты мы будем рассматривать случай, когда p — каноническая half-норма в полуупорядоченном банаховом пространстве.

Предложение 7.13. Пусть X — полуупорядоченное банахово

пространство с нормальным положительным конусом, и пусть p — каноническая half-норма на X . Для линейного оператора $A: \mathcal{D}(A) \rightarrow X$ следующие два утверждения эквивалентны:

- (i) A является генератором p -сжимающей C_0 -полугруппы;
- (ii) A плотно определен, p -диссипативен и $\mathcal{R}(\lambda I - A) = X$ при некотором $\lambda > 0$.

Доказательство. Как и ранее, пусть $\|x\|_p = \max(p(x), p(-x))$ — норма, индуцируемая функционалом p . Поскольку X^+ нормален, то из предложения 7.9 следует, что норма $\|\cdot\|_p$ эквивалентна исходной норме в X . Кроме того, очевидно, что любой p -диссипативный оператор в X является диссипативным оператором по отношению к $\|\cdot\|_p$. Таким образом, эквивалентность утверждений (i) и (ii) следует теперь из теоремы Хилле — Йосиды (см. теорему 3.4) и предложения 7.12. ■

Заметим, что в полуупорядоченном банаховом пространстве X с канонической half-нормой p любое положительное сжатие T есть p -сжатие. Действительно, если $x \in X$, то

$$p(Tx) = \inf \{ \|y\|: y \in X, Tx \leq y \} \leq \inf \{ \|Ty\|: y \in X, x \leq y \} \leq \inf \{ \|y\|: y \in X, x \leq y \} = p(x).$$

Для того чтобы выполнялось обратное утверждение, необходима более сильная связь между нормой и упорядоченностью в X . Напомним, что норма в X называется монотонной, если $\|x\| \leq \|y\|$, когда $0 \leq x \leq y$. Далее, операторная норма в $\mathcal{L}(X)$ называется положительно достижимой, если

$$\|T\| = \sup \{ \|Tx\|: 0 \leq x \in X, \|x\| \leq 1 \}$$

для любого положительного оператора T в $\mathcal{L}(X)$ (см. по поводу этого свойства дополнение Д.2.3). В полуупорядоченном банаховом пространстве с монотонной нормой и положительно достижимой операторной нормой, в частности, в банаховой структуре любое p -сжатие является положительным сжатием. В самом деле, так как норма монотонна, то $p(x) = \|x\|$ при всех $0 \leq x \in X$. Поэтому если T есть p -сжатие в X , то T положителен и $\|Tx\| = p(Tx) \leq p(x) = \|x\|$ при всех $0 \leq x \in X$. Поскольку операторная норма положительно достижима, то $\|T\| \leq 1$. Учитывая эти замечания и предыдущее предложение, получаем следующий результат.

Предложение 7.14. Пусть X — банахово пространство с монотонной нормой и операторная норма в $\mathcal{L}(X)$ положительно достижима. Пусть p — каноническая half-норма в X . Для линейного оператора $A: \mathcal{D}(A) \rightarrow X$ следующие условия эквивалентны:

- (i) A — генератор позитивной сжимающей полугруппы;

(ii) A плотно определен, p -диссипативен и $\mathcal{R}(\lambda I - A) = X$ при некотором $\lambda > 0$.

Это предложение справедливо, в частности, в банаховой структуре.

Следствие 7.15. Пусть X — банахова структура и $A: \mathcal{D}(A) \rightarrow X$ линеен. Следующие утверждения эквивалентны:

- (i) A — генератор позитивной сжимающей полугруппы;
- (ii) A плотно определен, $\mathcal{R}(\lambda I - A) = X$ при некотором $\lambda > 0$ и A дисперсивен (т. е. при любом $x \in \mathcal{D}(A)$ существует $0 \leq \varphi \in X^*$, удовлетворяющий условиям $\|\varphi\| \leq 1$ и $\langle x, \varphi \rangle = \|x^+\|$, такой, что $\langle Ax, \varphi \rangle \leq 0$).

Если в утверждении (ii) предыдущего предложения вместо условия $\mathcal{R}(\lambda I - A) = X$ при некотором $\lambda > 0$ предположить только, что $\mathcal{R}(\lambda I - A)$ плотно в X при некотором $\lambda > 0$, то, как нетрудно видеть, замыкание оператора A — генератор позитивной сжимающей полугруппы.

Следующее предложение описывает генераторы позитивных C_0 -полугрупп (не обязательно сжимающих) и является аналогом теоремы Хилле — Йосиды — Филлипса.

Предложение 7.16. Пусть X — полупорядоченное банахово пространство с монотонной нормой, а операторная норма в $\mathcal{L}(X)$ положительно достижима. Каноническую half-норму в X обозначим через ρ . Линейный оператор $A: \mathcal{D}(A) \rightarrow X$ — генератор позитивной C_0 -полугруппы $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, удовлетворяющей оценке $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$, тогда и только тогда, когда

- (i) A замкнут и плотно определен;
- (ii) $(\omega, \infty) \subset \rho(A)$ и

$$\rho(R(\lambda, A)^n x) \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n} \cdot \rho(x), \quad x \in X,$$

при всех $\lambda > \omega$ и всех $n = 1, 2, \dots$.

Доказательство. Результат следует из теоремы Хилле — Йосиды — Филлипса (см. теоремы 3.5 и 3.6), если принять во внимание, что норма $\|x\|_p = \max(\rho(x), \rho(-x))$ эквивалентна исходной норме в X . ■

Следствие 7.17. Пусть X — банахова структура. Линейный оператор $A: \mathcal{D}(A) \rightarrow X$ является генератором позитивной C_0 -полугруппы $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ с оценкой $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ тогда и только тогда, когда

- (i) A замкнут и плотно определен;
- (ii) $(\omega, \infty) \subset \rho(A)$ и

$$\|[R(\lambda, A)^n x]^+\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n} \|x^+\|, \quad x \in X,$$

при всех $\lambda > \omega$ и всех $n = 1, 2, \dots$.

Дисперсивность можно рассматривать как абстрактный «принцип максимума». В самом деле, пусть $X = C(\Omega)$ — банахова структура, состоящая из всех вещественных функций на компактном хаусдорфовом пространстве Ω , а A — плотно определенный линейный оператор в $C(\Omega)$. Тогда оператор A дисперсивен в том и только в том случае, когда $Af(\omega) \leq 0$, если $f \in \mathcal{D}(A)$ и $\omega \in \Omega$, причем $f(\omega) = \|f^+\|_\infty$. Это утверждение вытекает из следующего наблюдения: для любых $f \in C(\Omega)$ и $\omega \in \Omega$ с $f(\omega) = \|f^+\|_\infty$ функционал φ_ω , равный значению в точке ω , принадлежит $\partial p(f)$ (где, как и ранее, p обозначает каноническую half-норму в $C(\Omega)$). В следующем параграфе мы более детально обсудим случай, когда $X = C(\Omega)$.

7.3. Свойство внедиагональной положительности

В предыдущем параграфе мы описали генераторы позитивных сжимающих полугрупп в терминах диссипативности с соответствующими подходящими сублинейными функционалами. В противоположность диссипативности положительность не является метрическим свойством. Более точно, если A — генератор позитивной C_0 -полугруппы в полуупорядоченном банаховом пространстве, то то же самое имеет место для оператора $A - \lambda I$ при всех $\lambda \in \mathbb{R}$. Следовательно, описание позитивности в терминах генератора в общем более сложная задача. В этом и следующем параграфах такие описания будут приведены. В частности, в пространствах с порядковой единицей ситуация становится вполне удовлетворительной.

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — вещественное банахово пространство с положительным конусом X^+ . Как и ранее, каноническую half-норму обозначим через p . Начнем с определений.

Определение 7.18. Линейный оператор $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow X$ обладает свойством внедиагональной положительности (СВП), если $\langle Au, \varphi \rangle \geq 0$, когда $0 \leq u \in \mathcal{D}(A)$ и $0 \leq \varphi \in X^*$, причем $\langle u, \varphi \rangle = 0$.

Прежде всего заметим, что если оператор A — генератор позитивной C_0 -полугруппы $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, то A обладает СВП. Действительно, возьмем $0 \leq u \in \mathcal{D}(A)$ и $0 \leq \varphi \in X^*$, такие, что $\langle u, \varphi \rangle = 0$. Тогда

$$\langle Au, \varphi \rangle = \lim_{t \downarrow 0} \frac{\langle T(t)u, \varphi \rangle - \langle u, \varphi \rangle}{t} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{\langle T(t)u, \varphi \rangle}{t} \geq 0.$$

Далее, СВП для произвольного оператора A содержательно, только если $\mathcal{D}(A)$ содержит достаточно много положительных элементов. Для оправдания названия «свойство внедиагональной положительности» рассмотрим конечномерный случай.

Пример 7.19. Пусть $X = \mathbb{R}^n$ с покомпонентной полуупорядоченностью и $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — линейный оператор, определенный матрицей (a_{ij}) в стандартном базисе. Мы утверждаем, что A обладает СВП тогда и только тогда, когда $a_{ij} \geq 0$ при всех $i \neq j$. Действительно, предположим, что оператор A обладает СВП и $i \neq j$. Тогда $\langle e_j, e_i \rangle = 0$, $e_j \geq 0$, $e_i \geq 0$ и $a_{ij} = \langle Ae_j, e_i \rangle \geq 0$. Обратно, допустим, что $a_{ij} \geq 0$ при всех $i \neq j$, и возьмем элементы $0 \leq x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $0 \leq y = (y_1, \dots, y_n) \in (\mathbb{R}^n)^* = \mathbb{R}^n$, обладающие свойством $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n y_i x_i = 0$. Тогда $y_i x_i = 0$ ($i = 1, \dots, n$), и, следовательно,

$$\langle Ax, y \rangle = \sum_{i \neq j} a_{ij} y_i x_j + \sum_i a_{ii} y_i x_i = \sum_{i \neq j} a_{ij} y_i x_j \geq 0,$$

т. е. оператор A обладает СВП.

Рассмотрим теперь полугруппу $\{e^{tA}\}_{t \geq 0}$, порождаемую оператором A . Она непрерывна по любой норме в $\mathbb{R}^n$. Если полугруппа $\{e^{tA}\}_{t \geq 0}$ позитивна, то из предыдущих рассуждений следует, что A обладает СВП. Обратно, предположим, что A обладает СВП. Тогда $a_{ij} \geq 0$ при всех $i \neq j$ и существует такое $\lambda \in \mathbb{R}$, что $B = A + \lambda I \geq 0$, откуда следует, что $e^{tA} = e^{-\lambda t} e^{tB} \geq 0$ при всех $t \geq 0$. Итак, можно сделать заключение, что следующие утверждения эквивалентны:

- (1) оператор A обладает СВП;
- (2) $a_{ij} \geq 0$ при $i \neq j$, т. е. внедиагональные элементы матрицы (a_{ij}) неотрицательны;
- (3) полугруппа $\{e^{tA}\}_{t \geq 0}$ с генератором A состоит из положительных операторов.

Этот пример показывает, что естественным является вопрос, влечет ли за собой в общем случае СВП генератора позитивность полугруппы. Прежде чем мы утвердительно ответим на этот вопрос для случая пространств с порядковой единицей, сделаем несколько общих замечаний.

Замечание 7.20. (i) Из определения следует, что если оператор $A: \mathcal{D}(A) \rightarrow X$ обладает СВП, то оператор $A - \lambda I$ также обладает СВП при любом $\lambda \in \mathbb{R}$.

(ii) Если оператор $A: \mathcal{D}(A) \rightarrow X$ строго p -диссипативен, то A обладает СВП. Напомним, что как и в примере 7.10 (ii)

$$\partial p(x) = \{\varphi \in X^*: \varphi \geq 0, \|\varphi\| \leq 1 \text{ и } \langle x, \varphi \rangle = p(x)\}$$

при всех $x \in X$. Предположим теперь, что $0 \leq u \in \mathcal{D}(A)$ и $0 < \varphi \in X^*$ таковы, что $\langle u, \varphi \rangle = 0$. Из равенства $p(-u) = 0$ следует, что $\varphi / \|\varphi\| \in \partial p(-u)$, и поскольку A строго p -диссипативен, то $\langle A(-u), \varphi \rangle \leq 0$, т. е. $\langle Au, \varphi \rangle \geq 0$.

(iii) В некотором смысле СВП утверждает, что нелокальная часть оператора положительна; это проиллюстрировано

в примере 7.19. Чтобы сформулировать данное утверждение более точно, ограничимся рассмотрением банаховой структуры. Предположим, что X — банахова структура и $A: \mathcal{D}(A) \rightarrow X$ — линейный оператор. Напомним, что через X_u обозначают главный идеал, порожденный элементом $0 \leq u \in X$, т. е. $X_u = \{x \in X: |x| \leq n \cdot u \text{ при некотором } n \in \mathbb{N}\}$. Следующие утверждения эквивалентны:

- (1) оператор A обладает СВП;
- (2) отрицательная часть $(Au)^-$ элемента Au содержится в $\bar{X}_u$ при каждом $0 \leq u \in \mathcal{D}(A)$.

От противного предположим, что A обладает СВП и существует такой элемент $0 \leq u \in \mathcal{D}(A)$, что $(Au)^- \notin \bar{X}_u$. В этом случае существует элемент $0 \leq \varphi \in X^*$, такой что $\langle x, \varphi \rangle = 0$ при всех $x \in \bar{X}_u$ и $\langle (Au)^-, \varphi \rangle > 0$. Пусть ψ — минимальное положительное расширение сужения φ на идеал, порожденный элементом $(Au)^-$. Тогда $\langle u, \psi \rangle = 0$, $\langle (Au)^+, \psi \rangle = 0$ и $\langle (Au)^-, \psi \rangle > 0$. Поскольку в силу предположения оператор A обладает СВП, то $\langle Au, \psi \rangle \geq 0$ и мы приходим к противоречию, так как

$$0 \leq \langle Au, \psi \rangle = \langle (Au)^+, \psi \rangle - \langle (Au)^-, \psi \rangle = -\langle (Au)^-, \psi \rangle < 0.$$

Это означает, что из (1) вытекает (2). Для доказательства обратной импликации, предположим, что выполняется (2) и заданы элементы $0 \leq u \in \mathcal{D}(A)$, $0 \leq \varphi \in X^*$ со свойством $\langle u, \varphi \rangle = 0$. Тогда $\langle x, \varphi \rangle = 0$ при всех $x \in \bar{X}_u$ и поскольку $\langle (Au)^-, \varphi \rangle = 0$, то $\langle Au, \varphi \rangle \geq 0$.

Обратимся теперь к случаю пространств с порядковой единицей. В примерах, которые мы имели ранее в виду, фигурировали пространства вещественных непрерывных функций на некотором компактном хаусдорфовом пространстве или самосопряженная часть унитарной C^* -алгебры. Напомним, что элемент e в (вещественном) полуупорядоченном банаховом пространстве X называется порядковой единицей, если для любого $x \in X$ существует $0 \leq \lambda \in \mathbb{R}$, такое, что $-\lambda e \leq x \leq \lambda e$, а это, как известно (см. дополнение Д.2.2), эквивалентно условию $e \in \text{int} X^+$. Для $e \in \text{int} X^+$ определим функционал Φ_e на X следующим образом:

$$\Phi_e(x) = \inf \{\lambda \geq 0: x \leq \lambda e\}, \quad x \in X.$$

Заметим, что $x \leq \Phi_e(x) e$ при всех $x \in X$. В следующей лемме мы соберем некоторые свойства функционала Φ_e .

Лемма 7.21. *Функционал Φ_e является непрерывной half-нормой на X , которая индуцирует заданную полуупорядоченность на X . Кроме того, норма, индуцируемая функционалом Φ_e в X , является нормой порядковой единицы $\|\cdot\|_e$, соответствующей элементу e , т. е.*

$$\max(\Phi_e(x), \Phi_e(-x)) = \|x\|_e = \inf \{\lambda \geq 0: -\lambda e \leq x \leq \lambda e\}$$

при всех $x \in X$ и Φ_e — каноническая half-норма, соответствующая заданной полуупорядоченности и норме порядковой единицы $\|\cdot\|_e$.

Доказательство. Нетривиальным утверждением, по-видимому, является только непрерывность Φ_e . Поскольку $e \in \text{int } X^+$, то существует $\delta > 0$, такое, что шар $B(e, \delta)$ содержится в X^+ . Из $e - \delta \cdot \|x\|^{-1}x \in B(e, \delta) \subset X^+$ следует, что $\Phi_e(x) \leq \delta^{-1} \|x\|$, т. е. Φ_e непрерывен. ■

Дальнейшая наша цель — увязать СВП со свойством Φ_e -диссипативности для подходящей порядковой единицы e . Нам будет полезна следующая лемма.

Лемма 7.22. Пусть X — полуупорядоченное банахово пространство и $e \in \text{int } X^+$. Если элемент $x \in X$ таков, что $\Phi_e(x) > 0$, то $\langle e, \varphi \rangle = 1$ при всех $\varphi \in \partial\Phi_e(x)$.

Доказательство. Предположим, что $x \in X$ и $\Phi_e(x) > 0$. Выберем $\varphi \in \partial\Phi_e(x)$ так, что $\langle x, \varphi \rangle = \Phi_e(x)$ и $\langle y, \varphi \rangle \leq \Phi_e(y)$ при всех $y \in X$. Как показано в замечании § 7.2 (см. замечание после предложения 7.9), это влечет за собой $\varphi \geq 0$. Поэтому из $x \leq \Phi_e(x)e$ следует

$$\Phi_e(x) = \langle x, \varphi \rangle \leq \Phi_e(x) \langle e, \varphi \rangle \leq \Phi_e(x) \Phi_e(e) = \Phi_e(x),$$

и, значит, $\Phi_e(x) = \Phi_e(x) \langle e, \varphi \rangle$. Поскольку $\Phi_e(x) > 0$, то $\langle e, \varphi \rangle = 1$. ■

В связи со следующей леммой заметим, что для любого плотно определенного линейного оператора A в полуупорядоченном банаховом пространстве X с порядковой единицей пересечение $\mathcal{D}(A) \cap \text{int } X^+$ непусто.

Лемма 7.23. Пусть X — полуупорядоченное банахово пространство, $A: \mathcal{D}(A) \rightarrow X$ — плотно определенный линейный оператор, и предположим, что $e \in \mathcal{D}(A) \cap \text{int } X^+$. Следующие утверждения эквивалентны:

- (i) оператор A является Φ_e -диссипативным;
- (ii) оператор A обладает СВП и $Ae \leq 0$;
- (iii) имеем $Ae \leq 0$ и для всех $\lambda > 0$ (или, что эквивалентно, существует достаточно большое $\lambda > 0$ такое, что) из условий $x \in \mathcal{D}(A)$ и $(\lambda I - A)x \geq 0$ следует, что $x \geq 0$.

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii). Поскольку оператор A плотно определен, то он строго Φ_e -диссипативен, и из замечания 7.20(ii) следует, что A обладает СВП. Остается показать, что $Ae \leq 0$, т. е. что $\Phi_e(Ae) = 0$. Предположим противное, т. е. пусть $\Phi_e(Ae) > 0$, и возьмем элемент $\varphi \in \partial\Phi_e(Ae)$. По предыдущей лем-

ме $\langle e, \varphi \rangle = 1$ и, значит, $\varphi \in \partial\Phi_e(e)$. Поскольку A строго Φ_e -диссипативен, то $\langle Ae, \varphi \rangle \leq 0$, что противоречит неравенству $\langle Ae, \varphi \rangle = \Phi_e(Ae) > 0$. Таким образом, $Ae \leq 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Выберем $x \in \mathcal{D}(A)$ и $\lambda > 0$ и предположим, что $(\lambda I - A)x \geq 0$, т. е. $Ax \leq \lambda x$. Предположим, что $\Phi_e(-x) > 0$, и возьмем произвольный $\varphi \in \partial\Phi_e(-x)$. Из предыдущей леммы получаем $\langle e, \varphi \rangle = 1$ и поэтому $\langle \Phi_e(-x)e + x, \varphi \rangle = 0$. Поскольку $\Phi_e(-x)e + x \geq 0$ и $\varphi \geq 0$, то предположения относительно A влекут за собой неравенство $\langle \Phi_e(-x)Ae + Ax, \varphi \rangle \geq 0$. Используя то, что $Ae \leq 0$, мы приходим к противоречию:

$$0 \leq \Phi_e(-x) \langle -Ae, \varphi \rangle \leq \langle Ax, \varphi \rangle \leq \lambda \langle x, \varphi \rangle = -\lambda \Phi_e(-x) < 0.$$

Следовательно, $\Phi_e(-x) = 0$ и, значит, $x \geq 0$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Выберем $x \in \mathcal{D}(A)$. Мы должны показать, что для любого достаточно малого $\alpha > 0$ выполняется неравенство $\Phi_e(x) \leq \Phi_e(x - \alpha Ax)$. Выберем такое $\alpha > 0$, что $(\alpha^{-1}I - A)z \geq 0$, $z \in \mathcal{D}(A)$, влечет за собой $z \geq 0$. Заметив, что $(I - \alpha A)e \geq e$, получаем

$$\begin{aligned} \Phi_e(x - \alpha Ax) &= \inf \{ \lambda \geq 0: (I - \alpha A)x \leq \lambda e \} \geq \\ &\geq \inf \{ \lambda \geq 0: (I - \alpha A)x \leq \lambda (I - \alpha A)e \} \geq \\ &\geq \inf \{ \lambda \geq 0: x \leq \lambda e \} = \Phi_e(x). \end{aligned}$$

Поскольку в силу предположений на оператор A существует достаточно малое $\alpha > 0$ с указанным выше свойством, то мы получаем Φ_e -диссипативность оператора A . ■

Легко видеть, что в (ii) предыдущей леммы условие $Ae \leq 0$ можно заменить на предположение, что A является диссипативным относительно нормы $\|\cdot\|_e$, порожденной порядковой единицей.

Следующее предложение дает более точную взаимосвязь между СВП и Φ_e -диссипативностью. Удобно ввести следующие обозначения. Предположим, что X — полуупорядоченное банахово пространство и $e \in \text{int } X^+$. Для $x \in X$ определим

$$\hat{\Phi}_e(x) = \inf \{ \lambda \in \mathbb{R}: x \leq \lambda e \}.$$

Тогда $\hat{\Phi}_e$ — непрерывная half-норма в X (заметим, что $|\hat{\Phi}_e(x)| \leq \|x\|_e$), $x \leq \hat{\Phi}_e(x)e$ при всех $x \in X$ и $\Phi_e(x) = \max(\hat{\Phi}_e(x), 0)$.

Более того, полуупорядоченность, введенная функционалом $\hat{\Phi}_e$, совпадает с заданной полуупорядоченностью в X , а норма, порождаемая функционалом $\hat{\Phi}_e$, является нормой $\|\cdot\|_e$. Предположим теперь, что $A: \mathcal{D}(A) \rightarrow X$ плотно определен, $e \in \mathcal{D}(A) \cap \text{int } X^+$ и что $A - \lambda \cdot I$ является Φ_e -диссипативным. По предыдущей лемме ((i) $\Rightarrow$ (ii)) это влечет за собой $Ae \leq \lambda e$ и, значит, $\hat{\Phi}_e(Ae) \leq \lambda$. Обратно, предположим, что оператор A обладает СВП и возьмем $\lambda \geq \hat{\Phi}_e(Ae)$. Тогда оператор $A - \lambda \cdot I$ обладает СВП и $(A - \lambda I)e \leq 0$. Из леммы следует, что $A - \lambda \cdot I$ является

Φ_e -диссипативным. Сделанные замечания показывают, что если оператор A плотно определен в X и обладает СВП, то

$$\hat{\Phi}_e(Ae) = \min \{ \lambda \in \mathbb{R} : A - \lambda \cdot I \text{ является } \Phi_e\text{-диссипативным} \} = \\ = \min \{ \lambda \in \mathbb{R} : A - \lambda \cdot I \text{ является } \|\cdot\|_e\text{-диссипативным} \}.$$

Сопоставление предыдущих рассуждений и леммы 7.23 приводит к следующему результату.

Предложение 7.24. Если A — плотно определенный линейный оператор в полуупорядоченном банаховом пространстве X и $e \in \mathcal{D}(A) \cap \text{int } X^+$, то следующие утверждения эквивалентны:

- (i) оператор A обладает СВП;
- (ii) оператор $A - \lambda \cdot I$ является Φ_e -диссипативным при некотором (при любом) $\lambda \geq \hat{\Phi}_e(Ae)$;

(iii) при всех $\alpha > \hat{\Phi}_e(Ae)$ (или, что эквивалентно, существует такое достаточно большое α , что) из условий $x \in \mathcal{D}(A)$ и $(\alpha \cdot I - A)x \geq 0$ следует $x \geq 0$.

Поскольку плотно определенный Φ_e -диссипативный оператор допускает замыкание, причем это замыкание Φ_e -диссипативно (см. теорему 3.14), а область определения плотно определенного оператора содержит порядковую единицу, то мы немедленно получаем из данного предложения такое следствие.

Следствие 7.25. Пусть X — полуупорядоченное банахово пространство с порядковой единицей и A — плотно определенный линейный оператор в X . Если A обладает СВП, то A допускает замыкание, и его замыкание $\tilde{A}$ обладает СВП.

Условие (iii) предыдущего предложения, конечно, тесно связано с предположением о положительности резольвенты $R(\alpha, A)$. Однако оператор $\alpha I - A$ не обязан быть сюръективным и потому $R(\alpha, A)$ не обязана существовать при $\alpha > \hat{\Phi}_e(Ae)$. Мы утверждаем, что если оператор A обладает СВП и $\alpha > \hat{\Phi}_e(Ae)$, причем $\mathcal{R}(\alpha I - A) = X$, то $\alpha \in \rho(A)$. Действительно, если $\lambda = \hat{\Phi}_e(Ae)$, то оператор $A - \lambda I$ является Φ_e -диссипативным, и поскольку $\alpha I - A = (\alpha - \lambda)I - (A - \lambda I)$, то $\alpha I - A$ инъективен. Таким образом, $\alpha I - A$ является биекцией из $\mathcal{D}(A)$ на X . Поэтому остается доказать, что оператор $\alpha I - A$ замкнут. В силу следствия 7.25 оператор A допускает замыкание, и его замыкание $\tilde{A}$ удовлетворяет тем же условиям, что и A . В частности, оператор $\alpha I - \tilde{A}$ является биекцией из $\mathcal{D}(\tilde{A})$ на X . Поскольку $\alpha I - A \subset \alpha I - \tilde{A}$ и $\alpha I - A$ биекция, то $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(\tilde{A})$, т. е. A замкнут. Итак, $\alpha \in \rho(A)$ и из предложения 7.24 (iii) вытекает, что $R(\alpha, A) \geq$

≥ 0 . Эти наблюдения приводят нас к следующему описанию резольвентно положительных операторов.

Предложение 7.26. *Предположим, что X — полупорядоченное банахово пространство и $\text{int } X^+ \neq \emptyset$. Пусть оператор A — плотно определенный линейный оператор в X . Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *оператор A обладает СВП и $\mathcal{R}(\alpha I - A) = X$ при достаточно больших вещественных α ;*

(ii) *$\alpha \in \rho(A)$ и $R(\alpha, A) \geq 0$ для всех достаточно больших вещественных α .*

Гораздо больше можно сказать в случае, когда положительный конус в X является нормальным. Прежде чем рассмотреть эту ситуацию, мы отметим другое интересное следствие из предложения 7.24.

Теорема 7.27. *Пусть A — генератор C_0 -полугруппы $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ в полупорядоченном банаховом пространстве X и $\text{int } X^+ \neq \emptyset$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *$\{T(t)\}_{t \geq 0}$ является позитивной полугруппой;*

(ii) *оператор A обладает СВП;*

(iii) *$R(\alpha, A) \geq 0$ при всех достаточно больших вещественных α .*

Доказательство. Эквивалентность утверждений (i) и (iii) доказана в предложении 7.1. Кроме того, импликация (i) $\Rightarrow$ (ii) установлена в начале данного параграфа. Остается показать, что (ii) влечет за собой (i). Выберем произвольный $e \in \mathcal{D}(A) \cap \text{int } X^+$ и $\lambda \geq \hat{\Phi}_e(Ae)$. В силу предложения 7.24 оператор $A - \lambda I$ является Φ_e -диссипативным. Ввиду предложения 7.12 мы получаем, что $\{e^{-\lambda t} T(t)\}_{t \geq 0}$ является Φ_e -сжимающей полугруппой и потому позитивной. Следовательно, $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ позитивна. ■

Напомним, что тип C_0 -полугруппы $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ определяется как

$$\omega_0 = \inf_{t > 0} \frac{\ln \|T(t)\|}{t},$$

а спектральная грань оператора A есть $s(A) = \sup \{\text{Re } \lambda : \lambda \in \sigma(A)\}$. Как уже отмечалось, $-\infty \leq s(A) \leq \omega_0 < \infty$. Если X — полупорядоченное банаховое пространство и $\text{int } X^+ \neq \emptyset$, то X^+ является нормальным тогда и только тогда, когда для любого $e \in \text{int } X^+$ норма, порожденная порядковой единицей $\|\cdot\|_e$, эквивалентна исходной норме. Теперь мы в состоянии доказать основной результат данного параграфа. Для удобства изложения мы выделим в самостоятельное утверждение следующую лемму.

Лемма 7.28. *Пусть X — полупорядоченное банахово пространство и $\text{int } X^+ \neq \emptyset$. Предположим, что A — плотно определенный линейный оператор в X , обладающий СВП. Если $\lambda \in \rho(A) \cap \mathbb{R}$*

таково, что $R(\lambda, A) \geq 0$, то существует $e \in \mathcal{D}(A) \cap \text{int } X^+$ со свойством $Ae \leq \lambda e$.

Доказательство. Поскольку $\mathcal{D}(A)$ плотное, то существует $w \in \mathcal{D}(A) \cap \text{int } X^+$. Полагая $e := R(\lambda, A)w$, получаем $0 \leq e \in \mathcal{D}(A)$ и $(\lambda I - A)e = w \geq 0$ и, значит, $Ae \leq \lambda e$. Чтобы доказать, что e является порядковой единицей в X , достаточно доказать, что e есть квазивнутренняя точка (см. предложение А.2.10). Для этой цели возьмем $0 < \varphi \in X^*$ и предположим, что $\langle e, \varphi \rangle = 0$. Теперь СВП влечет за собой $\langle Ae, \varphi \rangle \geq 0$. Более того, $\langle w, \varphi \rangle > 0$, так как w — порядковая единица. Отсюда и из равенства $\lambda e := Ae + w$ приходим к противоречию: $0 = \langle \lambda e, \varphi \rangle = \langle Ae, \varphi \rangle + \langle w, \varphi \rangle \geq \langle w, \varphi \rangle > 0$. Итак, элемент e обладает необходимыми свойствами. ■

Теорема 7.29. Пусть X — полупорядоченное банахово пространство с нормальным положительным конусом и $\text{int } X^+ \neq \emptyset$. Если A — плотно определенный линейный оператор в X , то следующие утверждения эквивалентны:

- (i) A — генератор положительной C_0 -полугруппы в X ;
- (ii) A обладает СВП и $\mathcal{R}(\lambda I - A) = X$ при всех достаточно больших вещественных λ ;
- (iii) $\lambda \in \rho(A)$ и $R(\lambda, A) \geq 0$ для всех достаточно больших вещественных λ .

Кроме того, если оператор A удовлетворяет одному из перечисленных условий, то

$$s(A) = \omega_0 = \inf \{ \lambda \in \mathbb{R} : Ae \leq \lambda e$$

при некотором $e \in \mathcal{D}(A) \cap \text{int } X^+ \}$.

Доказательство. В силу предложения 7.26 и теоремы 7.27 необходимо установить импликацию (ii) $\Rightarrow$ (i) и дополнительное утверждение. Для этого возьмем $e \in \mathcal{D}(A) \cap \text{int } X^+$. Поскольку X^+ — нормальный конус, то норма порядковой единицы $\|\cdot\|_e$ эквивалентна исходной норме $\|\cdot\|$. Далее, норма $\|\cdot\|_e$ абсолютно монотонна и абсолютно мажорируема (т. е. $\|\cdot\|_e$ — сильная норма Рисса, см. § Д. 2.3) и Φ_e является канонической half-нормой по отношению к $\|\cdot\|_e$. Теперь возьмем $\lambda = \hat{\Phi}_e(Ae)$; тогда из предложения 7.24 следует, что оператор $A - \lambda I$ Φ_e -диссипативный, и в силу предложения 7.14 оператор $A - \lambda I$ порождает положительную $\|\cdot\|_e$ -сжимающую полугруппу $\{S(t)\}_{t \geq 0}$. Поэтому A порождает положительную C_0 -полугруппу $\{e^{\lambda t} S(t)\}_{t \geq 0}$ и (i) выполняется. Заметим, что тип полугруппы, порожденной оператором A , удовлетворяет оценке $\omega_0 \leq \lambda = \hat{\Phi}_e(A)$. Отсюда $\omega_0 \leq \inf \{ \lambda \in \mathbb{R} : Ae \leq \lambda e \text{ для некоторого } e \in \mathcal{D}(A) \cap \text{int } X^+ \}$.

Для доказательства обратного неравенства выберем $\lambda > s(A)$. Тогда $\lambda \in \rho(A)$ и в силу следствия 7.5 $R(\lambda, A) \geq 0$. Из леммы 7.28

получаем $e \in \mathcal{D}(A) \cap \text{int} X^+$, причем $Ae \leq \lambda e$ и, значит,

$$\inf \{ \lambda \in \mathbb{R} : Ae \leq \lambda e \text{ при всех } e \in \mathcal{D}(A) \cap \text{int} X^+ \} \leq s(A).$$

Учитывая последние два неравенства и то, что $s(A) \leq \omega_0$, получаем последнее утверждение теоремы. ■

Замечание 7.30. В условиях предыдущей теоремы имеем:

(i) Обозначив

$$\lambda_0 = \inf \{ \hat{\Phi}_e(Ae) : e \in \mathcal{D}(A) \cap \text{int} X^+ \},$$

получаем

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \inf \{ \lambda \in \mathbb{R} : Ae \leq \lambda e \text{ при некотором } e \in \mathcal{D}(A) \cap \text{int} X^+ \} = \\ &= \omega_0 = s(A) \end{aligned}$$

Внимательное рассмотрение доказательства предыдущей теоремы показывает, что формулировку (ii) в ней можно заменить на

(ii)' оператор A обладает СВП и $\mathcal{R}(\lambda I - A) = X$ при некотором $\lambda > \lambda_0$.

Кроме того, следует заметить, что если оператор A удовлетворяет условиям теоремы и $\lambda \in \mathbb{R}$ таково, что $\lambda \in \rho(A)$ и $R(\lambda, A) \geq 0$, то $\lambda > s(A)$.

(ii) $s(A) > -\infty$. В самом деле, возьмем произвольный элемент $e \in \mathcal{D}(A) \cap \text{int} X^+$. Тогда $Ae \geq \lambda e$ при некотором $\lambda \in \mathbb{R}$. Предположим, что $\lambda > s(A)$. В этом случае $R(\lambda, A) \geq 0$, откуда $e = R(\lambda, A)(\lambda e - Ae) \leq 0$. Полученное противоречие доказывает утверждение. В частности, мы получили, что $\sigma(A) \neq \emptyset$.

(iii) Из предыдущей теоремы вытекает, что любой резольвентно положительный оператор в полуупорядоченном банаховом пространстве с нормальным конусом и порядковой единицей порождает C_0 -полугруппу, которая обязательно позитивна.

Прежде чем проиллюстрировать на ряде примеров, что предположение $\text{int} X^+ \neq \emptyset$ в предыдущей теореме нельзя опустить, мы обсудим случай, когда пространство X является банаховой структурой непрерывных функций.

Пример 7.31. Предположим, что $Y = C(\Omega)$ — банахова структура вещественных непрерывных функций на некотором компактном хаусдорфовом пространстве Ω . Как обычно, рассмотрим на $C(\Omega)$ суп-норму. Пусть A — плотно определенный линейный оператор в $C(\Omega)$. Мы утверждаем, что оператор A обладает СВП тогда и только тогда, когда $(Au)(\omega) \geq 0$, если $0 \leq u \in \mathcal{D}(A)$ и $u(\omega) = 0$, $\omega \in \Omega$. В самом деле, прежде всего предположим, что A удовлетворяет предыдущим условиям и что $0 \leq u \in \mathcal{D}(A)$ и $0 \leq \varphi \in C(\Omega)^*$, причем $\langle u, \varphi \rangle = 0$. Пусть μ — мера Бореля, представляющая φ , т. е. $\langle f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f d\mu$ при всех $f \in C(\Omega)$. Обозначим носитель

меры μ через $\text{supp}(\mu)$. Тогда $u(\omega) = 0$ при всех $\omega \in \text{supp}(\mu)$ и поскольку мы предполагаем, что $(Au)(\omega) \geq 0$ при всех $\omega \in \text{supp}(\mu)$, то $\langle Au, \varphi \rangle = \int_{\Omega} Au d\mu \geq 0$. Таким образом, A облада-

ет СВП. Обратно, если оператор A обладает СВП и $u(\omega) = 0$ при некоторых $0 \leq u \in \mathcal{D}(A)$ и $\omega \in \Omega$, то, обозначая функционал, дающий значение в точке ω , через φ_{ω} , получаем $\langle u, \varphi_{\omega} \rangle = 0$ и $\langle Au, \varphi_{\omega} \rangle \geq 0$, т. е. $(Au)(\omega) \geq 0$. Предполагая, что A — генератор C_0 -полугруппы в $C(\Omega)$, из предыдущих рассуждений и теоремы 7.29 (или теоремы 7.27) получаем эквивалентность следующих утверждений:

- (1) $(Au)(\omega) \geq 0$, если $0 \leq u \in \mathcal{D}(A)$ и $\omega \in \Omega$ таковы, что $u(\omega) = 0$;
- (2) полугруппа $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ состоит из положительных операторов.

Специфической особенностью позитивных C_0 -полугрупп $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ в $C(\Omega)$ является в силу равенства $\|T(t)\| = \|T(t)1\|_{\infty}$ непрерывная зависимость от t функции $\|T(t)\|$. В частности, $\|T(t)\| \rightarrow 1$ при $t \downarrow 0$. Пусть A — генератор $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, и предположим, что $1 \in \mathcal{D}(A)$, как и во многих примерах. Полагая $\omega = \|A1\|_{\infty}$, получаем $(A - \omega \cdot I)1 \leq 0$, и потому из леммы 7.23 следует, что $A - \omega I$ является Φ_1 -диссипативным. Итак, $A - \omega I$ порождает $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_{\infty}$ -сжимающую полугруппу, т. е. $\|e^{-\omega t} T(t)\| \leq 1$. Отсюда $\|T(t)\| \leq e^{\|A1\| \cdot t}$ при всех $t \geq 0$. Следует заметить, что если $1 \notin \mathcal{D}(A)$, то оценка $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$ при $\omega \in \mathbb{R}$ не обязана выполняться. Пусть $\Omega = [0, \infty]$ — одноточечная компактификация $\mathbb{R}^+$, и предположим что функция $0 < w \in C[0, \infty]$ отделена от нуля. Для $f \in C[0, \infty]$ положим

$$(T(t)f)(x) = \frac{w(x+t)}{w(x)} f(x+t), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Тогда $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ — позитивная C_0 -полугруппа в $C[0, \infty]$ (заметим, что оператор умножения на w есть изоморфизм пространства $C[0, \infty]$ в себя). Кроме того,

$$\|T(t)\| = \|T(t)1\|_{\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} \frac{w(x+t)}{w(x)}$$

и

$$\frac{\ln \|T(t)\|}{t} \geq \frac{\ln w(t) - \ln w(0)}{t}, \quad t > 0.$$

Это показывает, что если взять функцию w , такую, что $\ln w$ имеет верхнюю правую производную в точке 0, равную ∞ , то оценка $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$ ($t \geq 0$) не может выполняться ни при каком $\omega \in \mathbb{R}$. Заметим, наконец, что $1 \in \mathcal{D}(A)$ тогда и только тогда, когда функция w дифференцируема и $w' \in C[0, \infty]$.

Далее мы покажем, как критерий теоремы 7.29 можно использовать, чтобы установить, что оператор является генератором позитивной C_0 -полугруппы в пространстве $C(\Omega)$. Рассмотрим пространство $X = C[0, 1]$ и определим посредством формулы $Af = -f'$ оператор A с максимальной областью определения $C^{(1)}[0, 1]$. Легко видеть, что оператор A не является генератором C_0 -полугруппы на этой максимальной области определения. Мы наложим граничные условия в виде $f'(0) = \langle f, B \rangle$, где $B \in C[0, 1]^*$, т. е. мы рассмотрим A на области определения

$$\mathcal{D}(A) = \{f \in C^{(1)}[0, 1] : f'(0) = \langle f, B \rangle\}.$$

Нетрудно видеть, что $\mathcal{D}(A)$ плотно в $C[0, 1]$. Запишем $B = m_0\delta - \mu$, где δ — значение в нуле и $\mu \perp \delta$ (т. е. μ представляет собой меру Бореля с нулевой массой в точке 0). Сначала предположим, что A — генератор позитивной C_0 -полугруппы $\{T(t)\}_{t \geq 0}$. Заметим, что $\langle Af, \delta \rangle = \langle f, -B \rangle$ при всех $f \in \mathcal{D}(A)$ и, значит, $\delta \in \mathcal{D}(A^*)$ и $A^*\delta = -B$. Выберем $0 \leq u \in C[0, 1]$, такую, что $\langle u, \delta \rangle = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \langle u, \mu \rangle &= \langle u, -B \rangle = \langle u, A^*\delta \rangle = \lim_{t \downarrow 0} \left\langle \frac{T(t)u - u}{t}, \delta \right\rangle = \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \left\langle \frac{T(t)u}{t}, \delta \right\rangle \geq 0. \end{aligned}$$

Поскольку $\mu \perp \delta$, то $\mu \geq 0$. Условие $\mu \geq 0$ достаточно для того, чтобы A был генератором позитивной C_0 -полугруппы. Действительно, по теореме 7.29 достаточно показать, что A обладает СВП и оператор $\lambda I - A$ сюръективен при всех достаточно больших λ . Предположим, что $0 \leq u \in \mathcal{D}(A)$ и $0 \leq \varphi \in C[0, 1]^*$ обладают свойством $\langle u, \varphi \rangle = 0$. Тогда $u(\omega) = 0$ при всех $\omega \in \text{supp } \varphi$. Если $\omega \in [0, 1]$ и $u(\omega) = 0$, то $u'(\omega) = 0$, и если $u(0) = 0$, то $u'(0) = \langle u, B \rangle = -\langle u, \mu \rangle \leq 0$. Таким образом, $\langle Au, \varphi \rangle \geq 0$, и, значит, A обладает СВП. Наконец, используя тот факт, что $\langle e^{-\lambda x}, \mu \rangle \downarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$, простыми вычислениями показываем, что уравнение $\lambda f + f' = g$ имеет решение $f \in \mathcal{D}(A)$ при любом $g \in C[0, 1]$ для всех достаточно больших значений λ . Отсюда получаем, что A — генератор позитивной C_0 -полугруппы в $C[0, 1]$ тогда и только тогда, когда $\mu \geq 0$.

Как было обещано, мы приведем некоторые примеры, показывающие, что существование порядковой единицы в теореме 7.29 существенно. Первый пример показывает, что в общем случае свойство СВП генератора не гарантирует позитивности полугруппы, а второй пример демонстрирует, что резольвентно положительный оператор не обязан быть генератором C_0 -полугруппы (см. замечание 7.30 (с)).

Пример 7.32. (i) Пусть $X = L_2[0, 1]$ — банахова структура

с поточечной упорядоченностью. Пусть $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ есть C_0 -полугруппа в $L_2 = L_2[0, 1]$, определенная формулой

$$T(t)f(x) = (-1)^n f(x+t-n), \text{ если } n \leq x+t \leq n+1.$$

Генератор A полугруппы $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ дается формулой $Af = f'$ с областью определения, состоящей из абсолютно непрерывных функций f в L_2 , таких, что $f' \in L_2$ и $f(0) = -f(1)$. Ясно, что полугруппа $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ не позитивна, и нетрудно видеть, что A обладает СВП. Кроме того, множество $\mathcal{D}(A)^+$ плотно в L^+ .

(ii) Пусть $X = C_0(\mathbb{R})$ — банахова структура, состоящая из всех вещественных непрерывных функций на $\mathbb{R}$, стремящихся к нулю на бесконечности. Пусть $v \in L_\infty + L_1$ — положительная непрерывная дифференцируемая функция на $\mathbb{R}$, которая отделена от нуля. Определим оператор A в $C_0(\mathbb{R})$ посредством формулы

$$Af = -\frac{(fv)'}{v}$$

с областью определения

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ f \in C_0(\mathbb{R}) : f \text{ непрерывно дифференцируема и} \right.$$

$$\left. \frac{(fv)'}{v} \in C_0(\mathbb{R}) \right\}.$$

Обозначим через $C_{00}^{(1)}(\mathbb{R})$ пространство всех непрерывно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$ с компактным носителем. Ясно, что $C_{00}^{(1)}(\mathbb{R})$ содержится в $\mathcal{D}(A)$ и потому A плотно определен. Кроме того, простые рассуждения показывают, что A замкнут. Легко проверить, что любые $\lambda > 0$ принадлежат $\rho(A)$ и

$$R(\lambda, A)g(x) = \frac{1}{v(x)} \int_{-\infty}^x e^{-\lambda(x-y)} g(y) v(y) dy$$

при всех $g \in C_0(\mathbb{R})$. Следовательно, A — резольвентно положительный оператор. Мы утверждаем, что функция v может быть выбрана таким образом, что A не является генератором C_0 -полугруппы в $C_0(\mathbb{R})$. Для этого предположим, что A — генератор полугруппы $\{T(t)\}_{t \geq 0}$. Выберем произвольную функцию $f \in C_{00}^{(1)}(\mathbb{R})$ и положим

$$f_t(x) = \frac{v(x-t)}{v(x)} f(x-t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0.$$

Тогда $f_t \in C_{00}^{(1)}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}(A)$ при всех $t \geq 0$ и $f_0 = f$. Кроме того, легко проверить, что отображение $t \rightarrow f_t$ дифференцируемо (относительно $\sup$ -нормы) с производной Af_t . Можно заключить, что $f_t = T(t)f$ при всех $t \geq 0$ (см. Davies [1980], теорема 1.7). Поскольку $C_{00}^{(1)}(\mathbb{R})$ плотно в $C_0(\mathbb{R})$, то непрерывность $T(t)$ влечет

за собой

$$T(t)f(x) = \frac{v(x-t)}{v(x)} f(x-t), \quad x \in \mathbb{R},$$

при всех $f \in C_0(\mathbb{R})$ и всех $t \geq 0$. Поэтому при фиксированном t функция $v(x-t)/v(x)$ переводит $C_0(\mathbb{R})$ в себя и потому

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{v(x-t)}{v(x)} < \infty$$

при всех $t \geq 0$. Теперь мы определим v так, чтобы A не был генератором C_0 -полугруппы в $C_0(\mathbb{R})$. Пусть v_1 — положительная непрерывно дифференцируемая интегрируемая функция на $\mathbb{R}$, причем $v_1(-n) = n!$ при $n \in \mathbb{N}$. Положим $v(x) = 1 + v_1(x)$. Ясно, что v удовлетворяет всем условиям на v , наложенным в начале примера, но поскольку

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{v(x-1)}{v(x)} = \infty,$$

то из предыдущих рассуждений следует, что соответствующий оператор A не является генератором C_0 -полугруппы в $C_0(\mathbb{R})$.

Далее скажем несколько слов о комплексном случае. Предположим, что X — комплексное полуупорядоченное банахово пространство, т. е. $X = X_{\mathbb{R}} + iX_{\mathbb{R}}$ — комплексификация вещественного банахова пространства $X_{\mathbb{R}}$. Как обычно, обозначим $X^+ = X_{\mathbb{R}}^+$. Для любого $z \in X$, $z = x + iy$, $x, y \in X_{\mathbb{R}}$, сопряженный элемент определяется как $\bar{z} = x - iy$. Подмножество $M \subset X$ называется замкнутым относительно сопряжения, если условие $z \in M$ влечет за собой $\bar{z} \in M$. Мы опускаем простую проверку следующего варианта теоремы 7.29.

Теорема 7.33. Пусть $X = X_{\mathbb{R}} + iX_{\mathbb{R}}$ — комплексное полуупорядоченное банахово пространство с нормальным положительным конусом и порядковой единицей. Если A — плотно определенный линейный оператор в X с областью определения, замкнутой относительно сопряжения, то следующие утверждения эквивалентны:

- (i) оператор A — генератор позитивной C_0 -полугруппы на X ;
- (ii) $\mathcal{R}(M - A) = X$ для всех достаточно больших вещественных λ и $\operatorname{Re} \langle Ax, \varphi \rangle \geq 0$, если $x \in \mathcal{D}(A)$ и $0 \leq \varphi \in X^*$ при $\operatorname{Re} x \geq 0$ и $\operatorname{Re} \langle x, \varphi \rangle = 0$;
- (iii) $\lambda \in \rho(A)$ и $R(\lambda, A) \geq 0$ при достаточно больших вещественных λ .

Следует заметить, что каждое из утверждений (i) и (ii) влечет за собой замкнутость относительно сопряжения $\mathcal{D}(A)$.

Для пространства с мерой (S, Σ, μ) пространство $L_{\infty}(S, \mu)$ всех μ -существенно ограниченных (вещественных) функций на S

является банаховой структурой с порядковой единицей (с суп-нормой) и поэтому предыдущий результат применим, в частности, к этому пространству. Мы закончим этот параграф, заметив, что $L_\infty(S, \mu)$ принадлежит классу банаховых пространств X , которые обладают свойством, что любая C_0 -полугруппа на X равномерно непрерывна в операторной топологии (т. е. генератор ограничен). Для этого мы напомним, что банахово пространство называется *пространством Гротендика*, если каждая $\sigma(X^*, X)$ -сходящаяся последовательность $\sigma(X^*, X^{**})$ -сходится. Ясно, что рефлексивные пространства являются пространствами Гротендика, но не наоборот. Действительно, если $X = C(\Omega)$ с квази-стоуновым компактным пространством Ω (в этом случае банахова структура $C(\Omega)$ дедекиндова σ -полна), то X является пространством Гротендика (см. Schaefer [1974], теорема II.10.4). В частности, $L_\infty(S, \mu)$ — пространство Гротендика.

Предложение 7.34. Если $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ есть C_0 -полугруппа в пространстве Гротендика, то сопряженные полугруппы $\{T^*(t)\}_{t \geq 0}$ и $\{T^{**}(t)\}_{t \geq 0}$ сильно непрерывны в X^* и X^{**} соответственно.

Доказательство. Сначала докажем, что $(T^*(t_n) - I)\varphi_n \rightarrow 0$ слабо в X^* при $n \rightarrow \infty$, как только $t_n \downarrow 0$ и $\varphi_n \in X^*$, причем $\|\varphi_n\| = 1$ ($n = 1, 2, \dots$). Действительно, при всех $x \in X$ мы имеем

$$\begin{aligned} |\langle x, (T^*(t_n) - I)\varphi_n \rangle| &= |\langle T(t_n) - I, x \rangle \varphi_n| \leq \\ &\leq \|T(t_n)x - x\|. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $(T^*(t_n) - I)\varphi_n \rightarrow 0$ в топологии $\sigma(X^*, X)$. Поскольку X — пространство Гротендика, то $(T^*(t_n) - I)\varphi_n \rightarrow 0$ слабо в X^* . В частности, $T^*(t_n)\varphi \rightarrow \varphi$ слабо при любой последовательности $t_n \downarrow 0$ и всех $\varphi \in X^*$ и, значит, $\{T^*(t)\}_{t \geq 0}$ есть $\sigma(X^*, X^{**})$ -непрерывная полугруппа. Из работы Davies [1980] и предложения 1.23 следует, что $\{T^*(t)\}_{t \geq 0}$ есть C_0 -полугруппа в X^* . Осталось показать, что $\{T^{**}(t)\}_{t \geq 0}$ сильно непрерывна на X^{**} . Предположим противное, а именно, что существуют $\Phi \in X^{**}$, $\varepsilon > 0$ и последовательность $t_n \downarrow 0$, такие, что $\|(T^{**}(t_n) - I)\Phi\| > \varepsilon$ при всех n . Для каждого n существует $\varphi_n \in X^*$ со свойствами $\|\varphi_n\| = 1$ и $|\langle (T^{**}(t_n) - I)\Phi, \varphi_n \rangle| > \varepsilon$ при всех n , т. е. $|\langle \Phi, (T^*(t_n) - I)\varphi_n \rangle| > \varepsilon$ при всех n . Из первой части доказательства следует сходимость $(T^*(t_n) - I)\varphi_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ в топологии $\sigma(X^*, X^{**})$, что противоречит предположению. ■

Пространство $L_\infty(S, \mu)$ наделено еще и другим важным свойством, так называемым свойством *Данфорда — Петтиса*. Напомним, что банахово пространство X обладает свойством Данфорда — Петтиса, если для любого банахова пространства Y любой слабо компактный оператор $T: X \rightarrow Y$ отображает компакт-

ные подмножества из X на компактные подмножества из Y (эквивалентное определение: если любой слабо компактный оператор $T: X \rightarrow Y$ переводит слабо компактные последовательности в сильно сходящиеся). Банахово пространство X обладает свойством Данфорда—Петтиса тогда и только тогда, когда для произвольного банахова пространства Y и любой непрерывной билинейной формы F на $X \times Y$ из слабой сходимости $x_n \rightarrow x$ в X и $y_n \rightarrow y$ в Y вытекает $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n, y_n) = F(x, y)$ (см. Shaefer [1974], теорема II.9.7). В частности, если X обладает свойством Данфорда—Петтиса и $x_n \in X$, $\varphi_n \in X^*$ ($n = 1, 2, \dots$) таковы, что $x_n \rightarrow 0$ слабо в X и $\varphi_n \rightarrow 0$ слабо в X^* , то $\langle x_n, \varphi_n \rangle \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Пространства $C(\Omega)$ и $L_\infty(S, \mu)$ обладают свойством Данфорда—Петтиса. Следует заметить, что рефлексивное пространство со свойством Данфорда—Петтиса является конечномерным.

Лемма 7.35. Пусть X — банахово пространство со свойством Данфорда—Петтиса. Если операторы $T_n \in \mathcal{L}(X)$ ($n = 1, 2, \dots$) таковы, что $T_n^* \rightarrow 0$ и $T_n^{**} \rightarrow 0$ сильно при $n \rightarrow \infty$, то $\|T_n^2\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

Доказательство. Для $n = 1, 2, \dots$ найдутся элементы $x_n \in X$ и $\varphi_n \in X^*$, такие, что $\|x_n\| \leq 2$, $\|\varphi_n\| = 1$ и $\|T_n^2\| = \langle T_n^2 x_n, \varphi_n \rangle = \langle T_n x_n, T_n^* \varphi_n \rangle$. Для любого $\varphi \in X^*$ выполняется $|\langle T_n x_n, \varphi \rangle| \leq 2 \|T_n^* \varphi\|$, откуда следует, что $T_n x_n \rightarrow 0$ слабо, поскольку $T_n^* \rightarrow 0$ сильно. Подобным образом из сильной сходимости $T_n^{**} \rightarrow 0$ вытекает слабая сходимость $T_n^* \varphi_n \rightarrow 0$ в X^* . Теперь, поскольку X обладает свойством Данфорда—Петтиса, из предыдущих замечаний следует, что $\|T_n^2\| = \langle T_n x_n, T_n^* \varphi_n \rangle \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. ■

Наконец, мы в состоянии доказать последний результат этого параграфа.

Теорема 7.36. В пространстве Гротендика со свойством Данфорда—Петтиса любая C_0 -полугруппа является равномерно непрерывной в операторной топологии (т. е. ее генератор ограничен).

Доказательство. Пусть $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ есть C_0 -полугруппа в пространстве Гротендика X со свойством Данфорда—Петтиса. В силу предложения 7.34 оба семейства $\{T^*(t)\}_{t \geq 0}$ и $\{T^{**}(t)\}_{t \geq 0}$ являются C_0 -полугруппами соответственно на X^* и X^{**} . Для $t > 0$ определим $S_t \in \mathcal{L}(X)$ по формуле

$$S_t x = \frac{1}{t} \int_0^t T(s) x ds, \quad x \in X.$$

Поскольку $T(t) \rightarrow I$ сильно при $t \downarrow 0$, то $S_t \rightarrow I$ сильно при $t \downarrow 0$. Теперь ясно, что сопряженные S_t^* и S_t^{**} задаются аналогичными

интегралами с $T(s)$, замененной соответственно на $T^*(s)$ и $T^{**}(s)$ и, в частности, $S_t^* \rightarrow I$ и $S_t^{**} \rightarrow I$ сильно при $t \downarrow 0$. Теперь из леммы 7.35 следует, что $\|(S_t - I)^2\| \rightarrow 0$ и потому $r(S_t - I) \rightarrow 0$ при $t \downarrow 0$. Фиксируем $t_0 > 0$ со свойством $r(S_{t_0} - I) < 1$. Тогда оператор S_{t_0} обратим в $\mathcal{L}(X)$. Определим $B = t_0 S_{t_0}$ и $A = (T(t_0) - I)B^{-1}$. Простые вычисления показывают, что

$$(T(t) - I)Bx = (T(t_0) - I) \int_0^t T(s)x \, ds, \quad x \in X,$$

и потому $(T(t) - I)x = \int_0^t (T(s)Ax) \, ds$. Таким образом, $T(t)x$ является дифференцируемой функцией по t и

$$\frac{d}{dt}\{T(t)x\} = AT(t)x$$

при всех $t \geq 0$ и всех $x \in X$. Отсюда следует, что A порождает $\{T(t)\}_{t \geq 0}$. Поскольку A ограничен, то $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ является равномерно непрерывной. ■

Следствие 7.37. Пусть (S, Σ, μ) — пространство с мерой. Любая C_0 -полугруппа в банаховом пространстве $L_\infty(S, \mu)$ равномерно непрерывна.

7.4. Неравенство Като

В предыдущем параграфе было дано описание генераторов позитивных C_0 -полугрупп в банаховом пространстве с порядковой единицей. Наличие порядковой единицы существенно для этих результатов, как показано в примере 7.32. В данном параграфе мы обсудим описание этих генераторов в терминах так называемого абстрактного неравенства Като в банаховой структуре, которое не привлекает понятия порядковой единицы. Это абстрактное неравенство Като — обобщение неравенства Като для лапласиана Δ на $\mathbb{R}^n$: неравенство

$$\operatorname{Re}(\operatorname{sign} f \cdot \Delta f) \leq \Delta |f|$$

имеет место для всех $f \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ при $\Delta f \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ (где, как обычно, $\operatorname{sign} f = \bar{f}/|f|$). Это неравенство связано с позитивностью полугруппы, порожденной лапласианом Δ в $L_2(\mathbb{R}^n)$. Более детальные исторические соображения о неравенстве Като и его взаимосвязи с позитивными полугруппами мы дадим в библиографических замечаниях в конце книги.

Пусть X — банахова структура. Мы ограничимся вещественным пространством (хотя многие результаты легко переносятся на комплексное пространство). Более того, для удобства мы будем

сначала предполагать, что X порядково σ -полно. Для произвольного $x \in X$ обозначим через P_x дизъюнктивный проектор в X на главную полосу $B_x = \{x\}^{dd}$, порожденную элементом x (см. § Д.2.4). Наша первая задача — дать подходящее определение «sign x » при $x \in X$. Для этого при любом $x \in X$ определим *знаковое отображение*, или *sign-отображение* $\sigma_x = P_{x^+} - P_{x^-}$. Легко видеть, что σ_x обладает следующими свойствами:

- (i) $\sigma_x(x) = |x|$;
- (ii) $|\sigma_x(y)| \leq |y|$ при всех $y \in X$;
- (iii) $\sigma_x(y) = 0$ для всех $y \in X$ при $y \perp x$.

Более того, оператор σ_x определяется свойствами (i) — (iii) однозначно. Заметим, что $|\sigma_x(y)| = |\sigma_x(|y|)|$ при всех $y \in X$ (см. приложение Д.2.4). Имея в виду свойство (i), оператор σ_x будем обозначать *sign x* . Если, например, $X = L_p(S, \mu)$, $1 \leq p \leq \infty$, то σ_f есть умножение на функцию *sign f* , как определено в начале этого параграфа.

Пусть $A: \mathcal{D}(A) \rightarrow X$ — плотно определенный замкнутый оператор. Возможный вариант абстрактного неравенства Като на первый взгляд записывается как $\sigma_x(Ax) \leq A|x|$ при всех $x \in \mathcal{D}(A)$. Однако трудность заключается в том, что в общем случае из условия $x \in \mathcal{D}(A)$ не следует $|x| \in \mathcal{D}(A)$. Поэтому предыдущее неравенство можно понимать в слабом смысле. Как обычно, через $A^*: \mathcal{D}(A^*) \rightarrow X^*$ обозначим оператор, сопряженный к A .

Определение. Оператор A удовлетворяет (абстрактному) *неравенству Като*, если

$$\langle \sigma_x(Ax), \varphi \rangle \leq \langle |x|, A^*\varphi \rangle$$

при всех $x \in \mathcal{D}(A)$ и всех $0 \leq \varphi \in \mathcal{D}(A^*)$.

Ясно, что неравенство Като для оператора A нетривиально только в ситуации, когда $\mathcal{D}(A^*)$ содержит достаточно много положительных элементов. Будет показано, что $A - \lambda I$ удовлетворяет неравенству Като при всех $\lambda \in \mathbb{R}$, если ему удовлетворяет сам A .

Замечание 7.38. Несколько слов о взаимосвязи между неравенством Като и свойством внедиагональной положительности (СВП). Пусть X есть σ -полная банахова структура, и предположим дополнительно, что норма порядково σ -непрерывна (здесь X является порядково σ -полным с порядково непрерывной нормой). Предположим, что оператор A удовлетворяет неравенству Като, и пусть $\mathcal{D}(A^*)^+$ является $\sigma(X^*, X)$ -плотным в $(X^*)^+$, так что $\mathcal{D}(A^*)^+$ содержит достаточно много положительных элементов (см. предложение 7.2). Взяв произвольный $0 \leq x \in \mathcal{D}(A)$, из неравенства Като получаем $\langle P_x(Ax), \varphi \rangle \leq \langle x, A^*\varphi \rangle = \langle Ax, \varphi \rangle$ при всех

$0 \leq \varphi \in \mathcal{D}(A^*)$. В силу предположения о $\mathcal{D}(A^*)^+$ получаем, что $\langle P_x(Ax), \varphi \rangle \leq \langle Ax, \varphi \rangle$ при всех $0 \leq \varphi \in X^*$ и поэтому $P_x(Ax) \leq Ax$ при всех $0 \leq x \in \mathcal{D}(A)$. Теперь предположим, что $0 \leq x \in \mathcal{D}(A)$ и $0 \leq \varphi \in X^*$ таковы, что $\langle x, \varphi \rangle = 0$. Норма в X порядково σ -непрерывна и потому φ является порядково σ -непрерывным линейным функционалом. Поскольку $P_x(Ax) \in \{x\}^{dd}$, то из $\langle x, \varphi \rangle = 0$ получаем $\langle P_x(Ax), \varphi \rangle = 0$. Из предыдущих наблюдений получаем $\langle Ax, \varphi \rangle \geq \langle P_x(Ax), \varphi \rangle = 0$. Итак, мы доказали, по крайней мере, что если X имеет порядково σ -непрерывную норму и $\mathcal{D}(A^*)$ содержит достаточно много положительных элементов, то неравенство Като для A влечет за собой СВП.

Прежде чем показать, что генератор позитивной C_0 -полугруппы удовлетворяет неравенству Като, мы напомним следующий факт. Если A — генератор C_0 -полугруппы $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ в банаховом пространстве X , то

$$\lim_{t \downarrow 0} \left\langle \frac{T(t)x - x}{t}, \varphi \right\rangle = \langle x, A^*\varphi \rangle$$

при всех $x \in X$ и всех $\varphi \in \mathcal{D}(A^*)$. Действительно, если $t > 0$, то

$$\frac{1}{t} \int_0^t T(s)x \, ds \in \mathcal{D}(A) \text{ и } A\left(\frac{1}{t} \int_0^t T(s)x \, ds\right) = \frac{T(t)x - x}{t}$$

при всех $x \in X$. Поэтому если $\varphi \in \mathcal{D}(A^*)$, то

$$\begin{aligned} \lim_{t \downarrow 0} \left\langle \frac{T(t)x - x}{t}, \varphi \right\rangle &= \lim_{t \downarrow 0} \left\langle A\left(\frac{1}{t} \int_0^t T(s)x \, ds\right), \varphi \right\rangle = \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \left\langle \frac{1}{t} \int_0^t T(s)x \, ds, A^*\varphi \right\rangle = \langle x, A^*\varphi \rangle, \end{aligned}$$

поскольку $\frac{1}{t} \int_0^t T(s)x \, ds \rightarrow x$ (по норме) при $t \downarrow 0$.

Предложение 7.39. Если A — генератор позитивной C_0 -полугруппы $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ в порядково σ -полной банаховой структуре X , то A удовлетворяет неравенству Като.

Доказательство. Предположим, что $x \in \mathcal{D}(A)$ и $0 \leq \varphi \in \mathcal{D}(A^*)$. Тогда

$$\begin{aligned} \langle \sigma_x(Ax), \varphi \rangle &= \lim_{t \downarrow 0} \left\langle \sigma_x\left(\frac{T(t)x - x}{t}\right), \varphi \right\rangle = \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \left\langle \frac{\sigma_x(T(t)x) - |x|}{t}, \varphi \right\rangle \leq \\ &\leq \lim_{t \downarrow 0} \left\langle \frac{T(t)|x| - |x|}{t}, \varphi \right\rangle = \langle |x|, A^*\varphi \rangle. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Как замечено ранее, для того чтобы неравенство Като влекло за собой позитивность полугруппы, порождаемой оператором A , мы должны наложить условие, обеспечивающее то, что $\mathcal{D}(A^*)$ содержит достаточно много положительных элементов. Недостаточно предположить, что $\mathcal{D}(A^*)^+$ $\ast$ -слабо плотно в $(X^*)^+$. Действительно, генератор в примере 7.32 (i) удовлетворяет неравенству Като, $\mathcal{D}(A^*)^+$ является $\ast$ -слабо плотным в $(X^*)^+$ и $\mathcal{D}(A)^+$ плотно в X^+ в исходной норме, хотя полугруппа не позитивна. Для того чтобы сформулировать достаточные условия на $\mathcal{D}(A^*)$, удобно ввести дополнительную терминологию. Пусть X — банахова структура. Подмножество K из $(X^*)^+$ называется *строго положительным*, если из условий $0 \leq x \in X$ и $\langle x, \varphi \rangle = 0$ при всех $\varphi \in K$ вытекает, что $x = 0$. Заметим, что множество $(X^*)^+$ строго положительно. Линейный функционал $\varphi \in X^*$ называется *строго положительным*, если множество $K = \{\varphi\}$ является строго положительным. Далее, элемент $u \in X$ называется *положительным собственным субвектором* линейного оператора $A: \mathcal{D}(A) \rightarrow X$, если $0 < u \in \mathcal{D}(A)$ и $Au \leq \lambda u$ при некотором $\lambda \in \mathbb{R}$.

Предложение 7.40. Если A — генератор позитивной C_0 -полугруппы $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ в банаховой структуре X , то существует строго положительное подмножество $K \subset (X^*)^+$, состоящее из собственных субвекторов оператора A^* . Кроме того, если на X существует строго положительный линейный функционал, то A^* имеет строго положительный собственный субвектор.

Доказательство. Пусть M — строго положительное подмножество в $(X^*)^+$, и выберем $\lambda \in \mathbb{R}$, такое, что $\lambda \in \rho(A)$ и $R(\lambda, A) \geq 0$. Определим, $K = R(\lambda, A)^*(M)$. Ясно, что $K \subset \mathcal{D}(A^*)^+$. Если $\psi \in K$, то $\psi = R(\lambda, A)^*\varphi$ при некотором $\varphi \in M$ и потому

$$A^*\psi = [AR(\lambda, A)]^*\varphi = [\lambda R(\lambda, A) - I]^*\varphi = \lambda\psi - \varphi \leq \lambda\psi.$$

Итак, K состоит из положительных собственных субвекторов оператора A^* . Осталось показать, что K строго положительно. Для этой цели предположим, что $0 \leq x \in X$ обладает свойством $\langle x, \psi \rangle = 0$ при всех $\psi \in K$. Тогда $\langle R(\lambda, A)x, \varphi \rangle = 0$ при всех $\varphi \in M$ и, значит, $R(\lambda, A)x = 0$, так как M строго положительно. Отсюда следует, что $x = 0$, и доказательство завершено. ■

Далее мы покажем, что неравенство Като в совокупности с существованием положительного множества собственных субвекторов оператора A^* влечет за собой позитивность полугруппы, порождаемой оператором A .

В § 7.2 мы говорили, что оператор $A: \mathcal{D}(A) \rightarrow X$ называется p -диссипативным относительно некоторого (непрерывного) сублинейного функционала p на X , если $p(x) \leq p(x - tAx)$ при всех $x \in \mathcal{D}(A)$ и всех $t \geq 0$. Далее, оператор A является p -дисси-

позитивным тогда и только тогда, когда для каждого $x \in \mathcal{D}(A)$ существует $\varphi \in \partial r(x)$, такое, что $\langle Ax, \varphi \rangle \leq 0$, где $\partial r(x)$ обозначает субдифференциал r в точке x . Взяв $0 \leq \varphi \in X^*$, определим $r_\varphi(x) = \langle x^+, \varphi \rangle$ при всех $x \in X$. Ясно, что r_φ является сублинейным функционалом на X и, как уже отмечено в примере 7.10 (iv),

$$\partial r_\varphi(x) = \{ \psi \in X^*: 0 \leq \psi \leq \varphi \text{ и } \langle x, \psi \rangle = \langle x^+, \varphi \rangle \}$$

при всех $x \in X$.

Лемма 7.41. *Предположим, что A — плотно определенный линейный оператор в порядково σ -полной банаховой структуре X , и пусть $0 \leq \varphi \in \mathcal{D}(A^*)$ таков, что $A^*\varphi \leq 0$. Если $\langle \sigma_x(Ax), \varphi \rangle \leq \langle |x|, A^*\varphi \rangle$ при всех $x \in \mathcal{D}(A)$, то A является r_φ -диссипативным.*

Доказательство. Фиксируем $x \in \mathcal{D}(A)$. Мы должны показать, что существует $\psi \in \partial r_\varphi(x)$, такой, что $\langle Ax, \psi \rangle \leq 0$. Положим $\pi = (\sigma_x + I)/2$ и определим $\psi = \pi^*\varphi$. Поскольку $0 \leq \pi \leq I$, то ясно, что $0 \leq \psi \leq \varphi$. Более того, $\langle x, \psi \rangle = \langle \pi x, \varphi \rangle = \langle x^+, \varphi \rangle = r_\varphi(x)$, откуда следует, что $\psi \in \partial r_\varphi(x)$. Наконец, поскольку $A^*\varphi \leq 0$, то

$$\begin{aligned} \langle Ax, \psi \rangle &= \frac{1}{2} \langle (\sigma_x + I)Ax, \varphi \rangle = \frac{1}{2} \langle \sigma_x(Ax), \varphi \rangle + \frac{1}{2} \langle Ax, \varphi \rangle \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \langle |x|, A^*\varphi \rangle + \frac{1}{2} \langle x, A^*\varphi \rangle = \langle x^+, A^*\varphi \rangle \leq 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Замечание 7.42. Предположения предыдущей леммы могут быть ослаблены. Действительно, достаточно предполагать, что существует сердцевина $\mathcal{D}_0$ оператора A , такая, что $\langle \sigma_x(Ax), \varphi \rangle \leq \langle |x|, A^*\varphi \rangle$ при $x \in \mathcal{D}_0$. В самом деле, доказательство леммы демонстрирует, что сужение A на $\mathcal{D}_0$ является r_φ -диссипативным, и из непрерывности r_φ мы получаем, что A является r_φ -диссипативным.

Предложение 7.43. *Если A — генератор C_0 -полугруппы $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ в порядково σ -полной банаховой структуре X , то следующие утверждения эквивалентны:*

- (i) $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ является позитивной C_0 -полугруппой;
- (ii) существует строго положительное множество K , состоящее из собственных субвекторов оператора A^* , и существует сердцевина $\mathcal{D}_0$ оператора A , такая, что $\langle \sigma_x(Ax), \varphi \rangle \leq \langle |x|, A^*\varphi \rangle$ при всех $x \in \mathcal{D}_0$ и всех $\varphi \in K$.

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii). Существование такого множества K следует из предложения 7.40, и из предложения 7.39 получаем,

что $\langle \sigma_x(Ax), \varphi \rangle \leq \langle |x|, A^*\varphi \rangle$ при всех $x \in \mathcal{D}(A)$ и всех $0 \leq \varphi \in \mathcal{D}(A^*)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Фиксируем элемент $\varphi \in K$. По определению собственного субвектора существует такое $\lambda \in \mathbb{R}$, что $A^*\varphi \leq \lambda\varphi$. Положим $B = A - \lambda I$; тогда $B^*\varphi \leq 0$ и $\langle \sigma_x(Bx), \varphi \rangle \leq \langle |x|, B^*\varphi \rangle$ при всех $x \in \mathcal{D}_0$. Отсюда по лемме 7.41 (и в силу приведенного замечания) оператор B является p_φ -диссипативным. Более того, B порождает C_0 -полугруппу $\{e^{-\lambda t} T(t)\}_{t \geq 0}$. Из предложения 7.12 мы получаем, что $\{e^{-\lambda t} T(t)\}_{t \geq 0}$ является p_φ -сжимающей полугруппой, т. е.

$$p_\varphi(e^{-\lambda t} T(t)x) \leq p_\varphi(x), \quad t \geq 0,$$

при всех $x \in X$. Значит, по определению p_φ из

$$e^{-\lambda t} \langle [T(t)x]^+, \varphi \rangle \leq \langle x^+, \varphi \rangle, \quad t \geq 0,$$

для всех $x \in X$ следует, что $\langle [T(t)x]^+, \varphi \rangle = 0$ при любом $x \leq 0$ в X . Это выполняется при всех $\varphi \in K$. Поскольку K строго положительно, мы получаем, что $[T(t)x]^+ = 0$ при всех $x \leq 0$ в X , и потому $T(t)x \geq 0$ для любых $0 \leq x \in X$ и всех $t \geq 0$. Предложение полностью доказано. ■

Следующая теорема моментально вытекает из предыдущего предложения.

Теорема 7.44. Пусть $A: \mathcal{D}(A) \rightarrow X$ — генератор C_0 -полугруппы $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ в порядково σ -полной банаховой структуре X . Тогда $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ позитивна в том и только том случае, когда оператор A удовлетворяет следующим двум условиям:

- (i) оператор A удовлетворяет неравенству Като;
- (ii) A^* обладает строго положительным множеством собственных субвекторов.

Во многих известных банаховых структурах X (например, если $X = L_p(\Omega, \mu)$, где (Ω, Σ, μ) есть σ -конечное пространство с мерой) существует строго положительный функционал в X^* . Для таких пространств следующий результат легко следует из предложений 7.40 и 7.43.

Следствие 7.45. Предположим, что X есть порядково σ -полная банахова структура со строго положительным линейным функционалом. C_0 -полугруппа $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ в X с генератором A является позитивной тогда и только тогда, когда существует строго положительный собственный субвектор φ оператора A^* , такой, что $\langle \sigma_x(Ax), \varphi \rangle \leq \langle |x|, A^*\varphi \rangle$ при всех $x \in \mathcal{D}(A)$.

Детальный анализ доказательства предложения 7.43 показывает, что порядковая σ -полнота пространства X используется только

для установления существования sign-отображения σ_x . Если X — банахова структура, которая не является порядково σ -полной (например, если $X = C[0, 1]$), то такое sign-отображение не обязано существовать в X . Однако при каноническом вложении X может быть рассмотрено как векторная подструктура второй сопряженной X^{**} (см. § Д.2.4). Поскольку X^{**} — порядково полная банахова структура, sign-отображение существует при всех элементах из X^{**} . Поэтому, рассматривая X как банахову подструктуру в X^{**} , для каждого $x \in X$ можно определить отображение σ из X в X^{**} , такое, что $\sigma(x) = |x|$, $|\sigma(y)| \leq |y|$ для каждого $y \in X$ и $\sigma(y) = 0$ при $y \perp x$. В противоположность единственности sign-отображения в пространстве X , следует заметить, вообще говоря, что такое $\sigma: X \rightarrow X^{**}$ не однозначно определяется своими тремя свойствами. Действительно, возможно, что элемент $x \in X$ имеет (однозначно определенное) sign-отображение σ_x в X (если X порядково σ -полно), которое не совпадает с сужением sign-отображения элемента x в пространстве X^{**} . Кроме того, в некоторых случаях может оказаться, что для каждого элемента $x \in X$ существует линейный оператор σ_x из X в X^{**} со свойствами $\sigma_x(x) = |x|$, $|\sigma_x(y)| \leq |y|$ при всех $y \in X$ и $\sigma_x(y) = 0$ при всех $y \perp x$, но это отображение σ_x не равно сужению sign-отображения элемента x в X^{**} . Обращаясь к примеру, предположим, что $X = C(\Omega)$ для некоторого компактного хаусдорфова пространства Ω . Как обычно, борелевская функция $\text{sign } f$ на Ω определяется как

$$\text{sign } f(\omega) = \begin{cases} \frac{f(\omega)}{|f(\omega)|}, & \text{если } f(\omega) \neq 0; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Умножение на $\text{sign } f$ является оператором σ_f из $C(\Omega)$ в $\mathcal{B}(\Omega)$, банахову структуру всех ограниченных борелевских функций на Ω . Естественным образом $\mathcal{B}(\Omega)$ может быть рассмотрена как подпространство второго сопряженного $C(\Omega)^{**}$, но вообще говоря, σ_f не является сужением на $C(\Omega)$ sign-отображения f в $C(\Omega)^{**}$. Читателю следует иметь этот пример в виду, когда рассматривается следующее предложение, доказательство которого во многом совпадает с доказательством предложения 7.43. Заметим, что мы не используем в доказательстве свойство $\sigma_x(\{x\}^{dd}) = \{0\}$.

Предложение 7.46. Пусть X — банахова структура, и предположим, что для каждого $x \in X$ существует линейное отображение σ_x из X в X^{**} , такое, что $\sigma_x(x) = |x|$ и $|\sigma_x(y)| \leq |y|$ при всех $y \in X$. Если $\mathcal{A}$ — генератор C_0 -полугруппы $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ в X , то следующие два утверждения эквивалентны:

- (i) полугруппа $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ позитивна;

(ii) существует строго положительное множество K , состоящее из собственных субвекторов оператора A^* , и существует сердцевина $\mathcal{D}_0$ оператора A , такие, что $\langle \sigma_x(Ax), \varphi \rangle \leq \langle |x|, A^*\varphi \rangle$ при всех $x \in \mathcal{D}_0$ и всех $\varphi \in K$.

Если использовать обобщение предложения 7.43, то очевидно, как сформулировать соответствующие обобщения теоремы 7.44 и следствия 7.45.

В гильбертовом пространстве тесно примыкает к неравенству Като так называемый критерий Берлинга — Дини позитивности полугрупп, порождаемых самосопряженными неотрицательными операторами. Вкратце, пусть $\mathcal{H} = L_2(S, \mu)$ — пространство всех комплексных интегрируемых с квадратом функций на σ -конечном пространстве с мерой (S, Σ, μ) с обычной порядковой структурой и скалярным произведением. Предположим, что H — неотрицательный самосопряженный оператор в $\mathcal{H}$. Поскольку $\langle Hf, f \rangle \geq 0$ при всех $f \in \mathcal{H}$, то оператор $-H$ является диссипативным и потому $-H$ порождает сжимающую полугруппу $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ в $\mathcal{H}$. Заметим, что все операторы $T(t)$ самосопряжены. Действительно, если $\{E(\cdot)\}$ означает спектральную меру оператора H , то

$$T(t)f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dE(\lambda) f$$

при любом $f \in \mathcal{H}$ и $t \geq 0$. Кроме того, напомним, что квадратичная форма Q_H , соответствующая H , определяется как

$$Q_H(f) = \begin{cases} \langle H^{1/2}f, H^{1/2}f \rangle & \text{при } f \in \mathcal{D}(H^{1/2}), \\ \infty & \text{при } f \notin \mathcal{D}(H^{1/2}). \end{cases}$$

Эквивалентное определение:

$$Q_H(f) = \int_0^\infty \lambda d \langle Ef, f \rangle$$

при всех $f \in \mathcal{H}$ и область определения $\mathcal{Q}(H) = \mathcal{D}(H^{1/2})$ состоит точно из тех элементов $f \in \mathcal{H}$, для которых интеграл конечен. Используя эти обозначения, мы сформулируем теорему Берлинга — Дини.

Теорема 7.47. Пусть H — самосопряженный неотрицательный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = L_2(S, \mu)$, и пусть $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ — сжимающая полугруппа, порождаемая оператором $-H$. Следующие предположения эквивалентны:

- (i) $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ — позитивная полугруппа;
- (ii) область определения квадратичной формы $\mathcal{Q}(H)$ — под-

структура в $\mathcal{H}$ и $Q_H(|f|) \leq Q_H(f)$ при всех $f \in \mathcal{Q}(H)$ (эквивалентно $Q_H(|f|) \leq Q_H(f)$ при всех $f \in \mathcal{H}$).

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii). Сначала заметим, что

$$\left\langle \frac{f - T(t)f}{t}, f \right\rangle = \int_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1 - e^{-\lambda t}}{t} d\langle Ef, f \rangle$$

при всех $f \in \mathcal{H}$, и потому в силу монотонной сходимости

$$\lim_{t \downarrow 0} \left\langle \frac{f - T(t)f}{t}, f \right\rangle = \int_{\lambda=0}^{\infty} \lambda d\langle Ef, f \rangle = Q_H(f)$$

при всех $f \in \mathcal{H}$. Теперь предположим, что $T(t) \geq 0$ для любого $t \geq 0$. Тогда $|T(t)f| \leq T(t)|f|$ и в силу определения скалярного произведения в $\mathcal{H} = L_2$

$$\langle T(t)f, f \rangle \leq \langle |T(t)f|, |f| \rangle \leq \langle T(t)|f|, |f| \rangle$$

для всех $f \in \mathcal{H}$. Поскольку $\langle f, f \rangle = \langle |f|, |f| \rangle$, то

$$\left\langle \frac{|f| - T(t)|f|}{t}, |f| \right\rangle \leq \left\langle \frac{f - T(t)f}{t}, f \right\rangle$$

при всех $f \in \mathcal{H}$ и всех $t > 0$. Полагая $t \downarrow 0$, мы находим, что $Q_H(|f|) \leq Q_H(f)$ для всех $f \in \mathcal{H}$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Как уже отмечалось в предложении 7.1, мы должны показать, что $R(\lambda, -H) = (\lambda I + H)^{-1} \geq 0$ для любых $\lambda > 0$. Для этого фиксируем $\lambda > 0$, выберем $0 \leq u \in \mathcal{H}$ и положим $h = (\lambda I + H)^{-1}u$. Определим неотрицательную квадратичную форму Q на $\mathcal{H}$ формулой

$$Q(f) = Q_H(f) + \lambda \langle f, f \rangle,$$

причем $\mathcal{Q}(Q) = \mathcal{Q}(H)$. Простые выкладки показывают, что для любого $g \in \mathcal{Q}(H)$ со свойством $\operatorname{Re} g \geq 0$

$$\begin{aligned} Q(h+g) &= Q(h) + Q(g) + 2\operatorname{Re} \langle (\lambda I + H)h, g \rangle = \\ &= Q(h) + Q(g) + 2\langle u, \operatorname{Re} g \rangle \geq \\ &\geq Q(h) + Q(g) \geq Q(h) \end{aligned}$$

и $Q(h+g) = Q(h)$ тогда и только тогда, когда $g = 0$. По предположению $Q(|h|) \leq Q(h)$, и, взяв $g = |h| - h$, из предыдущего утверждения получаем $Q(|h|) = Q(h)$. Отсюда $g = 0$, т. е. $h = |h| \geq 0$. Это показывает, что $(\lambda I + H)^{-1} \geq 0$ и доказательство завершено. ■

Теория Перрона—Фробениуса для позитивных полугрупп

8.1. Теоремы об отображении спектра

В начале этого века Перрон и Фробениус обнаружили, что положительная квадратная матрица $L = (l_{ij})$ обладает рядом замечательных свойств. Так например, множество собственных значений, равных по модулю величине спектрального радиуса матрицы, является мультипликативно циклическим (определение см. в § 8.2). С тех пор их результаты развивались в различных направлениях: имеется большая литература о положительных (или сохраняющих порядок) линейных операторах. В настоящей главе мы опишем применение теории Перрона — Фробениуса к сильно непрерывным позитивным полугруппам. По поводу терминологии мы отсылаем читателя к дополнениям 2 и 3.

Если A — ограниченный линейный оператор и $T(t) = e^{tA}$, $t \geq 0$, то $\sigma(T(t)) = e^{t\sigma(A)} = \{e^{t\lambda} : \lambda \in \sigma(A)\}$. В общем случае такого простого соотношения между спектром полугруппы и спектром ее генератора нет. Дадим для иллюстрации несколько контрпримеров.

Пример 8.1. Пусть l_n^2 обозначает n -мерное гильбертово пространство, и пусть H — прямая сумма гильбертовых пространств, состоящая из всех последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$, где $x_n \in l_n^2$, для которых $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < \infty$. Скалярное произведение в H определяется как $(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n, y_n)$. Если $L_n : l_n^2 \rightarrow l_n^2$ — линейные операторы, такие, что $\sup_n \|L_n\| < \infty$, то мы можем определить прямую сумму L этих операторов следующим образом: $Lx = (L_1x_1, L_2x_2, \dots)$ для каждого $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in H$. Очевидно, $\|L\| \leq \sup_n \|L_n\|$. Пусть для каждого n оператор Q_n на l_n^2 определен матрицей

$$Q_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $Q_n^n = 0$ (т. е. Q_n — нильпотент) и потому $\sigma(Q_n) = \{0\}$. Очевидно, что $\|Q_n\| = 1$. Положим $A_n = Q_n + inI_n$, где I_n — единичный оператор на l_n^2 . Ясно, что $\sigma(A_n) = \{in\}$. Пусть $\{T_n(t)\}_{t \geq 0}$ — полугруппа, порождаемая оператором A_n , т. е.

$$T_n(t) = e^{tA_n} = e^{int} \cdot e^{tQ_n}, \quad t \geq 0.$$

Тогда $\|T_n(t)\| \leq e^t$ при каждом $n = 1, 2, \dots$. Для $t \geq 0$ определим $T(t)$ как прямую сумму операторов $T_n(t)$. Легко видеть, что $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ есть C_0 -полугруппа на H (на самом деле $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ может быть расширена до C_0 -группы на H). Очевидно, что $\|T(t)\| \leq \sup_n \|T_n(t)\| \leq e^t$, $t \geq 0$. Мы утверждаем, что $\|T(t)\| = e^t$. Для доказательства этого утверждения выберем в качестве $v_n \in l_n^2$ элемент $(n^{-1/2}, n^{-1/2}, \dots, n^{-1/2})$. Тогда

$$\|T(t)(0, \dots, 0, v_n, 0, \dots, 0)\| = \|T_n(t)v_n\| \rightarrow e^t$$

при $n \rightarrow \infty$. Отсюда получаем, что $\|T(t)\| = e^t$.

Теперь мы определим генератор A и его спектр $\sigma(A)$. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq in$ ($n = 1, 2, \dots$), и пусть $R_n(\lambda): l_n^2 \rightarrow l_n^2$ определен по формуле

$$R_n(\lambda) = (\lambda I_n - A_n)^{-1} = ((\lambda - in)I_n - Q_n)^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{Q_n^k}{(\lambda - in)^{k+1}},$$

где использовано то, что $Q_n^n = 0$. Отсюда для каждого n , удовлетворяющего $|\lambda - in| \geq r > 1$, получаем неравенство $\|R_n(\lambda)\| \leq r/(r-1)$ и, следовательно, $\sup_n \|R_n(\lambda)\| < \infty$. Пусть теперь $R(\lambda)$ — прямая сумма операторов $R_n(\lambda)$. Нетрудно показать, что

$$\mathcal{R}(R(\lambda)) = \left\{x = (x_1, x_2, \dots) \in H: \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \|x_n\|^2 < \infty\right\}.$$

Если $x \in \bigoplus_{n=1}^{\infty} l_n^2$ (алгебраическая прямая сумма всех l_n^2), то легко видеть, что $x \in \mathcal{D}(A)$ (т. е. $\lim_{t \rightarrow 0} t^{-1}(T(t)x - x)$ существует) и $Ax = (A_1x_1, A_2x_2, \dots)$. Значит, $(\lambda I - A)R(\lambda)x = x$ при всех $x \in \bigoplus_{n=1}^{\infty} l_n^2$, $\lambda \neq in$. Поскольку A замкнут, то $(\lambda I - A)R(\lambda) = I$ при всех $\lambda \neq in$ и, значит, $R(\lambda) = R(\lambda, A)$ для любого $\lambda \in \rho(A)$. Итак,

$$\mathcal{D}(A) = \mathcal{R}(R(\lambda)) = \left\{x: \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \|x_n\|^2 < \infty\right\}.$$

Легко видеть, что при каждом $x \in \mathcal{D}(A)$ $Ax = (A_1x_1, A_2x_2, \dots)$ и $R(\lambda)(\lambda I - A)x = x$ при любом $\lambda \neq in$. Отсюда $\sigma(A) = \{in: n = 1, 2, \dots\}$ и потому

$$\sigma(T(t)) \neq e^{t\sigma(A)}. \blacksquare$$

В этом параграфе мы опишем различные соотношения между спектром сильно непрерывной полугруппы $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ на банаховом пространстве X и спектром ее генератора A . В этой связи будут полезны следующие тождества:

$$(e^{\lambda t} - T(t))x = (\lambda I - A) \int_0^t e^{\lambda(t-s)} T(s) x ds, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad x \in X, \quad (8.1a)$$

$$(e^{\lambda t} - T(t))x = \int_0^t e^{\lambda(t-s)} T(s) (\lambda I - A) x ds, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad x \in \mathcal{D}(A). \quad (8.1b)$$

Эти тождества могут быть установлены следующим образом. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ и $t \geq 0$ фиксированы. Отображение $x \rightarrow \int_0^t e^{\lambda(t-s)} T(s) x ds$ определяет ограниченный линейный оператор на X и для каждого $x \in X$ и $h > 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} (T(h) - I) \int_0^t e^{\lambda(t-s)} T(s) x ds = \\ = \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \int_h^{t+h} e^{\lambda(t-s)} T(s) x ds + \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_t^{t+h} e^{\lambda(t-s)} T(s) x ds - \\ - \frac{1}{h} \int_0^h e^{\lambda(t-s)} T(s) x ds, \end{aligned}$$

и при $h \downarrow 0$ выражение справа сходится к

$$\lambda \int_0^t e^{\lambda(t-s)} T(s) x ds + T(t) x - e^{\lambda t} x.$$

Отсюда следует, что

$$\int_0^t e^{\lambda(t-s)} T(s) x ds \in \mathcal{D}(A)$$

и

$$A \int_0^t e^{\lambda(t-s)} T(s) x ds = \lambda \int_0^t e^{\lambda(t-s)} T(s) x ds + T(t) x - e^{\lambda t} x.$$

Значит, выполняется (8.1a). Утверждение (8.1b) получаем, используя равенство

$$A \int_0^t e^{\lambda(t-s)} T(s) x ds = \int_0^t e^{\lambda(t-s)} T(s) A x ds, \quad x \in \mathcal{D}(A).$$

Для подмножества Y множества X обозначим через $\text{span } Y$ множество произвольных линейных комбинаций любых элементов множества Y , а через $\overline{\text{span } Y}$ — его замыкание.

Лемма 8.2.

$$(a) \mathcal{N}(\lambda I - A) = \bigcap_{t \geq 0} \mathcal{N}(e^{\lambda t} I - T(t)),$$

$$(b) \mathcal{N}(e^{\lambda t} I - T(t)) = \overline{\text{span}} \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{N}\left(\lambda I + \frac{2\pi i k}{t} I - A\right).$$

Доказательство. (a) Из (8.1b) легко усмотреть включение $\mathcal{N}(\lambda I - A) \subseteq \bigcap_{t \geq 0} \mathcal{N}(e^{\lambda t} I - T(t))$. С другой стороны, если $T(t)x = e^{\lambda t}x$, $t \geq 0$, то $t^{-1}(T(t)x - x) \rightarrow \lambda x$ при $t \downarrow 0$ и, значит, $x \in \mathcal{N}(\lambda I - A)$.

(b) Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$. Из (a) следует, что

$$\overline{\text{span}} \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{N}(\lambda + 2\pi i k t^{-1} I - A) \subseteq \mathcal{N}(e^{\lambda t} I - T(t)).$$

Несколько больше усилий требуется, чтобы установить обратное включение. Пусть $\tau > 0$ фиксировано. Для любого неотрицательного целого k , любого $t \geq 0$ и любого $x \in \mathcal{N}(e^{\lambda \tau} I - T(\tau))$ получаем

$$T(t + k\tau)x = T(t)T(k\tau)x = e^{k\lambda\tau}T(t)x.$$

Определим $S(t)$ как сужение $e^{-\lambda t}T(t)$ на $Z := \mathcal{N}(e^{\lambda\tau}I - T(\tau))$. Поскольку $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ оставляет Z инвариантным, то $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ определяет τ -периодическую полугруппу на Z . Можно расширить $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ до группы, полагая

$$S(-t) = S(t)^{-1} = S(n\tau - t), \text{ если } 0 \leq t \leq n\tau.$$

Если B является генератором $\{S(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$, то из (8.1a) получаем

$$R(\mu, B) = (1 - e^{-\mu\tau})^{-1} \int_0^\tau e^{-\mu t} S(t) x dt, \quad \mu \in \rho(B).$$

Таким образом, $R(\mu, B)$ — мероморфная функция на $\mathbb{C}$ с полюсами порядка не более единицы в точках $\lambda_k = 2\pi i k \tau^{-1}$, $k \in \mathbb{Z}$. Для вычета P_k в точке λ_k справедлива формула

$$P_k x = 1/\tau \int_0^\tau e^{-\lambda_k t} S(t) x dt,$$

т. е. P_k является k -м коэффициентом Фурье периодической функции $t \rightarrow S(t)$. Имеют место следующие свойства:

$$(i) P_k P_l = P_k \delta_{kl} \text{ при } k, l \in \mathbb{Z};$$

$$(ii) x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_k x, \text{ если } x \in \mathcal{D}(B);$$

$$(iii) Z = \overline{\text{span}} \left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} P_k \mathbb{Z} \right);$$

$$(iv) S(t)x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\lambda_k t} P_k x, \text{ если } x \in \mathcal{D}(B);$$

$$(v) Bx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k P_k x, \text{ если } x \in \mathcal{D}(B^2).$$

(i) легко доказывается. Мы ограничимся утверждением (ii). Остальные свойства получаются автоматически. Пусть $x \in \mathcal{D}(B)$. Покажем, что ряд $\sum_{k=-\infty}^{\infty} P_k x$ суммируем. Пусть $y = Bx$. Тогда $P_k y = P_k Bx = \lambda_k P_k x$. Для всех положительных целых N, M и любого $x^* \in Z^*$ получаем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=-M}^N \langle P_k x, x^* \rangle \right| &= \left| \sum_{k=-M}^N \frac{1}{\lambda_k} \langle P_k y, x^* \rangle \right| \leq \\ &\leq \left(\sum_{k=-M}^N \frac{1}{|\lambda_k|^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=-M}^N |\langle P_k y, x^* \rangle|^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Из неравенства Бесселя следует, что

$$\sum_{k=-M}^N |\langle P_k y, x^* \rangle|^2 \leq \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} |\langle S(t)y, x^* \rangle|^2 dt \leq C^2 \|x^*\|^2,$$

где

$$C = \left(\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \|S(t)y\|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Таким образом,

$$\left| \sum_{k=-M}^N \langle P_k x, x^* \rangle \right| \leq C \|x^*\| \cdot \left(\sum_{k=-M}^N \frac{1}{|\lambda_k|^2} \right)^{1/2}.$$

Отсюда

$$\left\| \sum_{k=-M}^N P_k x \right\| \leq C \left(\sum_{k=-M}^N \frac{1}{|\lambda_k|^2} \right)^{1/2}.$$

Эта оценка доказывает суммируемость ряда. Положим

$$z := \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_k x.$$

Очевидно, коэффициенты Фурье непрерывных функций $t \rightarrow \langle S(t)z, x^* \rangle$ и $t \rightarrow \langle S(t)x, x^* \rangle$ одинаковы при каждом $x^* \in Z^*$. Поэтому две функции совпадают. Так, в частности,

$$\langle S(0)z, x^* \rangle = \langle S(0)x, x^* \rangle$$

при любом $x^* \in Z^*$ и, следовательно,

$$x = z = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_k x,$$

что и доказывает (ii).

Из (v) немедленно следует $\mathcal{R}(P_k) = \mathcal{N}(\lambda_k I - B)$, а из (ii) мы выводим, что

$$\overline{\text{span}} \left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{N}(\lambda_k I - B) \right) = Z = \mathcal{N}(e^{\lambda \tau} I - T(\tau)).$$

Ясно, что

$$\overline{\text{span}} \left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{N}(\lambda_k I - B) \right) \subseteq \overline{\text{span}} \left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{N}((\lambda + \lambda_k) I - A) \right). \quad \blacksquare$$

Сейчас мы в состоянии доказать следующие теоремы об отображении спектра.

Предложение 8.3. Для любого $t \geq 0$

$$(a) \quad e^{t\sigma(A)} \subseteq \sigma(T(t));$$

$$(b) \quad e^{t\sigma_p(A)} = \sigma_p(T(t)) \setminus \{0\};$$

$$(c) \quad e^{t(\sigma_p(A) \cup \sigma_r(A))} = (\sigma_p(T(t)) \cup \sigma_r(T(t))) \setminus \{0\};$$

$$(d) \quad e^{t\sigma_{ap}(A)} \subseteq \sigma_{ap}(T(t));$$

(e) если $\lambda \in \sigma_c(A)$ и ни одно из чисел $\lambda + 2\pi i k t^{-1}$ ($k \in \mathbb{Z}$) не содержится в $\sigma_p(A) \cup \sigma_r(A)$, то $e^{\lambda t} \in \sigma_c(T(t))$.

Доказательство. (a) Предположим, что $e^{\lambda t} \in \rho(T(t))$. Тогда $(e^{\lambda t} I - T(t))^{-1}$ существует. Из (8.1a) и (8.1b) мы делаем вывод, что

$$(\lambda I - A) \int_0^t e^{\lambda(t-s)} T(s) (e^{\lambda t} I - T(t))^{-1} x ds = x, \quad x \in X,$$

$$(e^{\lambda t} I - T(t))^{-1} \int_0^t e^{\lambda(t-s)} T(s) (\lambda I - A) x ds = x, \quad x \in \mathcal{D}(A).$$

Последнее равенство может быть переписано как

$$\int_0^t e^{\lambda(t-s)} T(s) (e^{\lambda t} I - T(t))^{-1} (\lambda I - A) x ds = x, \quad x \in \mathcal{D}(A).$$

Мы заключаем, что

$$(\lambda I - A)^{-1} x = \int_0^t e^{\lambda(t-s)} T(s) (e^{\lambda t} I - T(t))^{-1} x ds, \quad x \in X.$$

Отсюда и следует (а).

(b) следует из леммы 8.2.

(с) Мы используем *двойственность* для доказательства (с). В общем случае сопряженная полугруппа $\{T^*(t)\}_{t \geq 0}$ на X^* не является сильно непрерывной. Пусть $X^\odot = \{x^* \in X^* : \lim_{t \downarrow 0} T^*(t)x^* = x^*\}$. Заметим, что $X^\odot$ инвариантно относительно $T^*(t)$. Если $T^\odot(t)$ — сужение на $X^\odot$, то $\{T^\odot(t)\}_{t \geq 0}$ определяет C_0 -полугруппу на $X^\odot$ и ее генератор $A^\odot$ есть часть оператора A^* в $X^\odot$. См. также § 3.4. Выполняются следующие соотношения между спектрами

$$\sigma_r(A) \subseteq \sigma_p(A^\odot) \subseteq \sigma_r(A) \cup \sigma_p(A), \\ \sigma_r(T(t)) \subseteq \sigma_p(T^\odot(t)) \subseteq \sigma_r(T(t)) \cup \sigma_p(T(t)), \quad t \geq 0.$$

Эти результаты можно найти в работе Hille, Phillips [1957]. Комбинируя эти включения и равенство $\sigma_p(T^\odot(t)) \setminus \{0\} = e^{t\sigma_p(A^\odot)}$ (которое доказано в (b)), получаем (с).

(d) следует из тождества (8.1а, b);

(e) следует из (а), (b) и (с). ■

Подобный результат имеет место для *существенного спектра* (Браудера), который обсуждается в § Д.3.1). Для удобства мы напомним здесь его определение. Для замкнутого линейного оператора L комплексное число λ принадлежит существенному спектру (Браудера) $\sigma_{ess}(L)$, если выполняется по крайней мере одно из следующих условий:

(C₁) число λ является предельной точкой спектра $\sigma(L)$;

(C₂) подпространство $M_\lambda(L) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{N}((\lambda I - L)^k)$ бесконечномерно;

(C₃) множество $\mathcal{R}(\lambda I - L)$ незамкнуто.

Предложение 8.4. Для любого $t \geq 0$ справедливо включение $e^{t\sigma_{ess}(A)} \subseteq \sigma_{ess}(T(t))$.

Доказательство. Пусть $t > 0$ фиксировано, и предположим, что $e^{\lambda t} \in \sigma(T(t)) \setminus \sigma_{ess}(T(t))$ при некотором $\lambda \in \mathbb{C}$. Мы покажем, что $\lambda \notin \sigma_{ess}(A)$. Это эквивалентно тому, что не выполняется ни одно из условий (C₁) — (C₃).

1. Предположим, что λ — предельная точка спектра $\sigma(A)$. Пусть $\lambda_k \in \sigma(A)$, $\lambda_k \neq \lambda$, $k = 1, 2, \dots$, и $\lambda_k \rightarrow \lambda$ при $k \rightarrow \infty$. Тогда $e^{\lambda_k t} \rightarrow e^{\lambda t}$ при $k \rightarrow \infty$ и $e^{\lambda_k t} \neq e^{\lambda t}$, когда k достаточно велико, так как $e^{\lambda_k t} = e^{\lambda t}$ влечет за собой $\operatorname{Re} \lambda_k = \operatorname{Re} \lambda$ и $\operatorname{Im} \lambda_k = \operatorname{Im} \lambda + 2m\pi/t$ при некотором $m \in \mathbb{Z}$. Поскольку $e^{\lambda t}$ является

изолированной точкой спектра $\sigma(T(t))$, это невозможно. Поэтому (C_1) не выполняется.

2. Покажем, что $M_\lambda(A) \subseteq M_{e^{\lambda t}I - T(t)}$. Из леммы 8.2 получаем, что $\mathcal{N}(\lambda I - A) \subseteq \mathcal{N}(e^{\lambda t}I - T(t))$. Предположим, что $\mathcal{N}((\lambda I - A)^k) \subseteq \mathcal{N}((e^{\lambda t}I - T(t))^k)$ при некотором $k \geq 1$. Пусть $x \in \mathcal{N}((\lambda I - A)^{k+1})$. Тогда $(\lambda I - A)^k x \in \mathcal{N}(\lambda I - A)$, и потому $(\lambda I - A)^k x \in \mathcal{N}(e^{\lambda t}I - T(t))$. Отсюда

$$0 = (e^{\lambda t}I - T(t))(\lambda I - A)^k x = (\lambda I - A)^k (e^{\lambda t}I - T(t))x$$

и, следовательно,

$$(e^{\lambda t}I - T(t))x \in \mathcal{N}((\lambda I - A)^k) \subseteq \mathcal{N}((e^{\lambda t}I - T(t))^k).$$

Итак,

$$x \in \mathcal{N}((e^{\lambda t}I - T(t))^{k+1}).$$

Поскольку $\dim M_{e^{\lambda t}I - T(t)}$ конечна, то же выполняется для $M_\lambda(A)$ и потому (C_2) также не удовлетворяется.

3. Наконец, покажем, что $\mathcal{R}(\lambda I - A)$ замкнуто. Поскольку $\mathcal{N}(e^{\lambda t}I - T(t))$ конечномерно, то существует замкнутое подпространство Y в X , такое, что

$$\mathcal{N}(e^{\lambda t}I - T(t)) \oplus Y = X.$$

Достаточно показать, что $(\lambda I - A)Y$ замкнуто, так как $(\lambda I - A)\mathcal{N}(e^{\lambda t}I - T(t))$ конечномерно и потому замкнуто. Из теоремы о замкнутом графике и из замкнутости $\mathcal{R}(e^{\lambda t}I - T(t))$, следует, что существует константа $c > 0$, такая, что $\|e^{\lambda t}x - T(t)x\| \geq c\|x\|$ при любом $x \in Y$. Из (8.1b) вытекает для каждого $x \in \mathcal{D}(A)$ неравенство

$$\|e^{\lambda t}x - T(t)x\| \leq m\|\lambda x - Ax\|$$

при некоторой положительной константе m , которая может зависеть от λ . Комбинируя оба неравенства, получаем

$$\|\lambda x - Ax\| \geq \frac{c}{m}\|x\|, \quad x \in Y \cap \mathcal{D}(A),$$

и из замкнутости оператора $\lambda I - A$ следует замкнутость $\mathcal{R}(\lambda I - A)$. Поэтому (C_3) также не выполняется. Предложение доказано. ■

В некоторых ситуациях соотношение

$$e^{t\sigma(A)} = \sigma(T(t)) \setminus \{0\}, \quad t \geq 0,$$

выполняется всегда. Прежде всего, если $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ становится компактной (т. е. компактна, начиная с некоторого конечного t), то $\sigma(T(t)) \setminus \{0\} = \sigma_p(T(t)) \setminus \{0\}$ для любого $t \geq 0$, и соотношение следует из предложения 8.3. Достаточно просто показать, что $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ становится равномерно непрерывной в операторной топологии, как только $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ становится компактной. Следующий результат мы приведем без доказательства; см. Davies [1980].

Предложение 8.5. Если $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ становится равномерно непрерывной, то $e^{t\sigma(A)} = \sigma(T(t)) \setminus \{0\}$ при $t \geq 0$.

Мы напомним определение типа (или границы роста) $\omega_0(A)$ полугруппы $\{T(t)\}_{t \geq 0}$:

$$\omega_0(A) = \inf_{t > 0} \frac{1}{t} \ln \|T(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|T(t)\|. \quad (8.2)$$

Для любого $\omega > \omega_0(A)$ найдется константа $M(\omega) \geq 1$, такая, что

$$\|T(t)\| \leq M(\omega)e^{\omega t}, \quad t \geq 0.$$

Для $\lambda \in \mathbb{C}$ с $\operatorname{Re} \lambda > \omega_0(A)$ резольвента $R(\lambda, A)$ представима в виде

$$R(\lambda, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt, \quad x \in X, \quad (8.3)$$

где интеграл сходится по норме. Спектральный радиус $r(T(t))$ полугруппы $T(t)$ равен

$$r(T(t)) = e^{\omega_0 t}, \quad t \geq 0, \quad (8.4)$$

где $\omega_0 = \omega_0(A)$. Аналогичный результат имеет место для существенного спектрального радиуса $r_{ess}(T(t))$ (см. (Д.3.6) в дополнении Д.3):

$$r_{ess}(T(t)) = e^{\omega_{ess} t}, \quad t \geq 0, \quad (8.5)$$

где $\omega_{ess} = \omega_{ess}(A)$ — *существенный тип* или *существенная граница роста*, которая определяется формулами

$$\omega_{ess}(A) = \inf_{t > 0} \frac{1}{t} \ln |T(t)|_\alpha = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |T(t)|_\alpha. \quad (8.6)$$

Здесь $|\cdot|_\alpha$ означает меру некомпактности (дополнение А.3.1). Из неравенства $|T(t)|_\alpha \leq \|T(t)\|$ (см. лемму А.3.5а) немедленно вытекает, что

$$\omega_{ess}(A) \leq \omega_0(A).$$

Если полугруппа $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ становится компактной, то $\omega_{ess}(A) = -\infty$. Мы напомним определение спектральной границы $s(A)$ генератора A . Положим

$$s(A) = \sup \{\operatorname{Re} \lambda : \lambda \in \sigma(A)\}, \quad (8.7)$$

если $\sigma(A) \neq \emptyset$, и $s(A) = -\infty$, если $\sigma(A) = \emptyset$. Мы определим также число $s_1(A)$ формулой

$$s_1(A) = \sup \{\operatorname{Re} \lambda : \lambda \in \sigma(A) \setminus \sigma_{ess}(A)\}. \quad (8.8)$$

Имеют место соотношения

$$s_1(A) \leq s(A) \leq \omega_0(A).$$

В примере 8.1 выполняется $s(A) = 0$ и $\omega_0(A) = 1$.

Предложение 8.6. (a) $\sup \{\operatorname{Re} \lambda : \lambda \in \sigma_{ess}(A)\} \leq \omega_{ess}(A)$;
(b) $\omega_0(A) = \max \{s(A), \omega_{ess}(A)\} = \max \{s_1(A), \omega_{ess}(A)\}$.

Доказательство. (a) Предположим, что $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$. Тогда по предложению 8.4 $e^{\lambda t} \in \sigma_{ess}(T(t))$ и потому $e^{\omega_{ess} t} = r_{ess}(T(t)) \geq e^{\lambda t}$, $t \geq 0$. Отсюда вытекает (a).

(b) Пусть $\gamma := \max \{s_1(A), \omega_{ess}(A)\}$. Тогда $\gamma \leq \omega_0(A)$. Для доказательства $\gamma \geq \omega_0(A)$ в силу (8.4) достаточно показать, что $r(T(t)) \leq e^{\gamma t}$. Пусть $t > 0$ и $z \in \sigma(T(t))$, $z \neq 0$. Если $z \in \sigma_{ess}(T(t))$, то $|z| \leq r_{ess}(T(t)) = e^{\omega_{ess}(A)t} \leq e^{\gamma t}$. Если $z \notin \sigma_{ess}(T(t))$, то в силу теоремы Д.3.3 $z \in \sigma_p(T(t))$. В силу предложения 8.3 получаем $z = e^{\lambda t}$ при некотором $\lambda \in \sigma_p(A)$. Если число λ было бы элементом из $\sigma_{ess}(A)$, то число z было бы в силу предложения 8.4 элементом $\sigma_{ess}(T(t))$, что противоречит основному предположению. Поэтому $\lambda \in \sigma(A) \setminus \sigma_{ess}(A)$ и $|z| = e^{t \operatorname{Re} \lambda} \leq e^{ts_1(A)} \leq e^{\gamma t}$, что и доказывает равенство $\gamma = \omega_0(A)$. Поскольку $s_1(A) \leq s(A) \leq \omega_0(A)$, то предложение доказано. ■

8.2. Спектральные свойства позитивных полугрупп

В этом параграфе мы считаем, что X — банахова структура (вещественная или комплексная) с конусом положительных элементов X^+ . Мы называем подмножество $V \subset \mathbb{C}$ *мультипликативно циклическим*, если из $\lambda \in V$ следует, что $(\lambda/|\lambda|)^k \cdot |\lambda| \in V$ при любом $k \in \mathbb{Z}$, и мы называем V *аддитивно циклическим*, если из $\lambda \in V$ следует, что $\operatorname{Re} \lambda + ik \operatorname{Im} \lambda \in V$ при каждом $k \in \mathbb{Z}$.

Сначала напомним некоторые результаты из гл. 7. Пусть $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ — позитивная C_0 -полугруппа на X с генератором A . Тогда для любого $\lambda > s(A)$ резольвента $R(\lambda, A)$ — положительный оператор. Это следует из равенства

$$R(\lambda, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt, \quad x \in X, \quad \operatorname{Re} \lambda > s(A), \quad (8.9)$$

где интеграл сходится по норме как несобственный интеграл Римана (см. теорему 7.4). *Периферийный спектр* $\sigma_+(A)$ оператора A определяется формулой

$$\sigma_+(A) = \{\lambda \in \sigma(A) : \operatorname{Re} \lambda = s(A)\}.$$

Очевидно $\sigma_+(A) \subseteq \partial\sigma(A)$, где $\partial\sigma(A)$ — граница спектра $\sigma(A)$.

Теорема 8.7. Пусть $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ — позитивная C_0 -полугруппа с генератором A . Тогда

- (a) $s(A) \in \sigma(A)$, если $\sigma(A) \neq \emptyset$;
- (b) $R(\lambda, A) \geq 0$ при всех $\lambda > s(A)$;
- (c) если $s(A)$ — полюс резольвенты $R(\lambda, A)$ порядка p и если $\mu \in \sigma_+(A)$ — другой полюс, то его порядок меньше или равен p .

Доказательство. Относительно (a) и (b) мы отсылаем читателя к теореме 7.4 и следствию 7.5. Здесь будет доказан п. (c). Пусть $s(A) = 0$ (это можно предполагать без потери общности) — полюс резольвенты порядка p и $iv \in \sigma_+(A)$ — другой ее полюс. Для $x \in X$ и $\varepsilon > 0$ имеем

$$\varepsilon^{p+1} \|R(\varepsilon + iv, A)x\| \leq \varepsilon^{p+1} \|R(\varepsilon, A)|x|\|,$$

причем правая часть стремится к нулю при $\varepsilon \downarrow 0$. Отсюда следует требуемый результат. ■

Прежде чем продолжить, мы напомним некоторые понятия из теории банаховых структур (см. дополнение 2). Для $u \in X$ мы обозначим через X_u главный идеал, отвечающий элементу u . Пусть π_u — единственный элемент в $Z(\bar{X}_u)$ (см. § Д.2.4), такой, что $\pi_u |u| = u$. Определим последовательность $\{u^{(n)}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ в X :

$$u^{(n)} = \pi_u^n |u|, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (8.10)$$

Здесь $\pi_u^{-1} = \pi_{\bar{u}}$, где $\bar{u}$ — сопряженный элемент к u . Пусть J — замкнутый идеал в X и $L \in \mathcal{L}(X)$. Тогда J называется L -инвариантным, если $LJ \subseteq J$. Пусть $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ является C_0 -полугруппой; тогда J называется $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ -инвариантным, если $T(t)J \subseteq J$ при всех $t \geq 0$. Наконец, если $R(\lambda)$ — псевдорезольвента на D , то J называется $R(\lambda)$ -инвариантным, если $R(\lambda)J \subseteq J$ для любого $\lambda \in D$. Следующая лемма связывает свойство положительности и сжимаемость.

Лемма 8.8. Пусть u — квазивнутренняя точка конуса X^+ , и пусть L — ограниченный линейный оператор на X , удовлетворяющий равенству $Lu = u$. Тогда $L \geq 0$ в том и только том случае, когда $LX_u \subseteq X_u$ и $\|L\|_u \leq 1$.

Доказательство. Если $L \geq 0$, то $LX_u \subseteq X_u$ (это следует из $Lu = u$) и $\|L\|_u = \|Lu\|_u = \|u\|_u = 1$. Прежде чем доказать обратное утверждение, заметим, что для любого элемента x в банаховой структуре X следующие утверждения эквивалентны:

- (i) $-u \leq x \leq u$;
- (ii) $\|x - i r u\|_u^2 \leq 1 + r^2$ при всех $r \in \mathbb{R}$.

Теперь предположим, что $\|L\|_u \leq 1$, и пусть $x \in X_u \cap X^+$. Без потери общности можно предполагать, что $0 \leq x \leq 2u$ или, что

эквивалентно, $-u \leq x - u \leq u$. Отсюда

$$\|x - u - iru\|_u \leq \sqrt{1 + r^2}$$

при всех $r \in \mathbb{R}$ и потому $\|Lx - u - iru\|_u \leq \sqrt{1 + r^2}$. Таким образом, $-u \leq Lx - u \leq u$ и, значит, $Lx \geq 0$. Поскольку $\bar{X}_u = X$, то $Lx \geq 0$ при любом $x \in X^+$. Лемма доказана. ■

Лемма 8.9. Пусть $\Lambda, L \in \mathcal{L}(X)$ удовлетворяют неравенству $|\Lambda x| \leq L|x|$ при всех $x \in X$. Пусть $u \in X$ таков, что $|u|$ — квазивнутренний элемент из X^+ , $L|u| = |u|$ и $\Lambda u = u$. Тогда $L = \pi_u^{-1} \Lambda \pi_u$.

Доказательство. Если положить $\tilde{L} := \pi_u^{-1} \Lambda \pi_u$, то для $x \in X$

$$|\tilde{L}x| = |\pi_u^{-1} \Lambda \pi_u x| = |\Lambda \pi_u x| \leq L|\pi_u x| = L|x|. \quad (*)$$

Поскольку $L|u| = |u|$ и $L \geq 0$, то из предыдущей леммы получаем $\|L\|_{|u|} \leq 1$. Из (*) тогда следует, что $\|\tilde{L}\|_{|u|} \leq 1$. Более того,

$$\tilde{L}|u| = \pi_u^{-1} \Lambda \pi_u |u| = \pi_u^{-1} \Lambda u = \pi_u^{-1} u = |u|,$$

и используя лемму 8.8 еще раз, получаем $\tilde{L} \geq 0$. Из (*) мы делаем вывод, что $0 \leq \tilde{L} \leq L$, и потому

$$\|L - \tilde{L}\|_{|u|} = \|(L - \tilde{L})|u|\|_{|u|} = 0.$$

Лемма доказана. ■

Предложение 8.10. Пусть L — положительный линейный оператор на X (и потому ограниченный), и предположим, что $Lu = \alpha u$ и $L|u| = |u|$ при некотором $u \in X$ и $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$. Тогда для любого $k \in \mathbb{Z}$ имеем $Lu^{(k)} = \alpha^k u^{(k)}$.

Доказательство. Очевидно, что L оставляет $\bar{X}_u$ инвариантным. Пусть L_0 — сужение оператора L на $\bar{X}_u$ и $\Lambda_0 := \alpha^{-1} L_0$. Тогда $\bar{X}_u$, u , Λ_0 и L_0 подчиняются условиям леммы 8.9, и мы получаем $L_0 = \pi_u^{-1} \Lambda_0 \pi_u = \alpha^{-1} \pi_u^{-1} L_0 \pi_u$. Итерирование дает $L_0^k = \alpha^{-k} \pi_u^{-k} L_0 \pi_u^k$. Применяя этот оператор к $|u|$, доказываем предложение. ■

Этот результат имеет такое

Следствие 8.11. Пусть L — структурный гомоморфизм на X . Тогда множество $\sigma_p(L)$ мультипликативно циклично.

Доказательство. Пусть $\lambda \in \sigma_p(L)$, $\lambda \neq 0$, и пусть $u \in X$, $u \neq 0$, таковы, что $Lu = \lambda u$. Ясно, что $\tilde{L} = |\lambda|^{-1} L$ удовлетворяет предположениям предложения 8.10 с $\alpha = \lambda |\lambda|^{-1}$. Следствие доказано. ■

Предложение 8.12. Пусть $u \in X$, $v \in \mathbb{R}$, D — подмножество в $\mathbb{C}$, содержащее все λ с $\operatorname{Re} \lambda > 0$, и $R(\lambda)$ — псевдорезольвента на D , удовлетворяющая условиям

- (i) $|R(\lambda)x| \leq R(\operatorname{Re} \lambda)|x|$, $x \in X$, $\operatorname{Re} \lambda > 0$;
- (ii) $\lambda R(\lambda + iv)u = u$ при некотором $\lambda \in \mathbb{C}$ с $\operatorname{Re} \lambda > 0$;
- (iii) $\lambda R(\lambda)|u| = |u|$ при некотором $\lambda \in \mathbb{C}$ с $\operatorname{Re} \lambda > 0$.

Тогда

- (a) $\lambda R(\lambda + ikv)u^{(k)} = u^{(k)}$, $k \in \mathbb{Z}$, $\operatorname{Re} \lambda > 0$;
- (b) $R(\lambda) = \pi_u^{-1}R(\lambda + iv)\pi_u$, $\operatorname{Re} \lambda > 0$, если $|u|$ — квазивнутренняя точка конуса X^+ .

Доказательство. Заметим для начала, что в (ii) и (iii) слово «некотором» можно заменить на слово «любом».

(a) Идеал $J = \overline{X}_u$ инвариантен относительно $R(\lambda)$ при всех λ с $\operatorname{Re} \lambda > 0$. Пусть $R_J(\lambda)$ — сужение $R(\lambda)$ на J . Тогда $\lambda R_J(\lambda)$ и $\lambda R_J(\lambda + iv)$ удовлетворяют условиям предложения 8.9 при $\lambda > 0$ и потому

$$\lambda R_J(\lambda) = \pi_u^{-1}\lambda R_J(\lambda + iv)\pi_u, \quad \lambda > 0.$$

Поэтому аналитические функции $\lambda \mapsto \lambda R_J(\lambda)$ и $\lambda \mapsto \pi_u^{-1}\lambda R_J(\lambda + iv)\pi_u$ совпадают на $\mathbb{R}_+$; отсюда следует, что

$$\lambda R_J(\lambda) = \pi_u^{-1}\lambda R_J(\lambda + iv)\pi_u, \quad \operatorname{Re} \lambda > 0. \quad (*)$$

Итерируя, получаем

$$\lambda R_J(\lambda) = \pi_u^{-k}\lambda R_J(\lambda + ikv)\pi_u^k, \quad \operatorname{Re} \lambda > 0, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Теперь, применяя к $|u|$, приходим к соотношению

$$\pi_u^{-k}\lambda R(\lambda + ikv)u^{(k)} = \lambda R(\lambda)|u| = |u|, \quad \operatorname{Re} \lambda > 0, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Отсюда вытекает (a). Если $|u|$ — квазивнутренний элемент в X^+ , то $R(\lambda) = R_J(\lambda)$, так как $J = \overline{X}_u = X$. В этом случае (b) следует из (*). ■

Если $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ — позитивная C_0 -полугруппа, то резольвента $R(\lambda, A)$ удовлетворяет условию (i) предложения 8.12:

$$|R(\lambda, A)x| \leq R(\operatorname{Re} \lambda, A)|x|, \quad x \in X, \quad \operatorname{Re} \lambda > s(A). \quad (8.11)$$

Этот факт легко получить из (8.9). Предположим, что $s(A) > -\infty$. Заменяя, если необходимо, A на $A - s(A) \cdot I$, мы всегда можем считать, что $s(A) = 0$. Если существуют элементы $u \in X$ и $v \in \mathbb{R}$, такие, что $A|u| = 0$ и $Au = ivu$, то $R(\lambda) = R(\lambda, A)$ удовлетворяет условиям (ii) и (iii) предложения 8.12. Поэтому при любом $k \in \mathbb{Z}$ и $\lambda \in \mathbb{C}$ с $\operatorname{Re} \lambda > 0$ выполняется равенство

$$\lambda R(\lambda + ikv, A)u^{(k)} = u^{(k)},$$

которое эквивалентно равенству

$$Au^{(k)} = i\nu ku^{(k)}.$$

Если дополнительно $|u|$ — квазивнутренний элемент из X^+ , то

$$R(\lambda, A) = \pi_u^{-1} R(\lambda + i\nu, A) \pi_u,$$

при всех λ с $\operatorname{Re} \lambda > 0$. Это влечет за собой $\pi_u \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A)$ и $A = \pi_u^{-1} (A - i\nu) \pi_u$ на $\mathcal{D}(A)$. Подведем итог сказанному в следующем предложении.

Предложение 8.13. Пусть A — генератор позитивной C_0 -полугруппы и $s(A) = 0$. Пусть существуют элемент $u \in X$ и число $\nu \in \mathbb{R}$, такие, что $A|u| = 0$ и $Au = i\nu u$. Тогда

- (а) $Au^{(k)} = i\nu ku^{(k)}$, $k \in \mathbb{Z}$;
- (б) если дополнительно $|u|$ — квазивнутренний элемент конуса X^+ , то $\pi_u \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A)$ и $A = \pi_u^{-1} (A - i\nu) \pi_u$ на $\mathcal{D}(A)$.

Заметим, что если (б) удовлетворяется, то для соответствующей полугруппы $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ выполняется равенство

$$T(t) = \pi_u^{-1} e^{-i\nu t} T(t) \pi_u, \quad t \geq 0,$$

и, следовательно, $\sigma(T(t)) = e^{-i\nu t} \sigma(T(t))$ при $t \geq 0$.

Теперь мы в состоянии доказать основной результат этого параграфа.

Теорема 8.14. Пусть $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ — позитивная C_0 -полугруппа на X , и предположим, что $s(A) > -\infty$ является полюсом резольвенты $R(\lambda, A)$. Тогда $\sigma_+(A)$ аддитивно цикличесен.

Доказательство. Без потери общности можно предположить, что $s(A) = 0$. Предположим сначала, что 0 — простой полюс резольвенты $R(\lambda, A)$. Предположим, что $i\nu \in \sigma_+(A)$ при некотором $\nu \in \mathbb{R}$. Тогда для любого $\lambda \in \rho(A)$ получаем $(\lambda - i\nu)^{-1} \in \partial \sigma(R(\lambda, A)) \subseteq \sigma_{ap}(R(\lambda, A))$. Заметим, что $\sigma(R(\lambda, A)) \setminus \{0\} = \{(\lambda - \mu)^{-1} : \mu \in \sigma(A)\}$. Пусть $\hat{X}$ — расширение X , описанное в дополнении Д.3.3, и пусть $\hat{R}(\lambda)$ — псевдорезольвента на $\hat{X}$, индуцируемая резольвентой $R(\lambda, A)$. Непосредственно получаем

$$|\hat{R}(\lambda) \hat{x}| \leq \hat{R}(\operatorname{Re} \lambda) |\hat{x}|, \quad \hat{x} \in \hat{X}, \quad \operatorname{Re} \lambda > 0. \quad (i)$$

Имеем $(\lambda - i\nu)^{-1} \in \sigma_p(\hat{R}(\lambda))$, если $\operatorname{Re} \lambda > 0$. Теперь зафиксируем $\lambda \in \mathbb{C}$ с $\operatorname{Re} \lambda > 0$. Существует элемент $\hat{u} \in \hat{X}$, такой, что

$$\hat{R}(\lambda) \hat{u} = (\lambda - i\nu)^{-1} \hat{u}.$$

Из предложения А.3.9 получаем, что это соотношение выполняется при всех λ с $\operatorname{Re} \lambda > 0$. Отсюда

$$\begin{aligned}\lambda \hat{R}(\lambda + iv)\hat{u} &= \hat{u}, \quad \operatorname{Re} \lambda > 0, \\ \lambda \hat{R}(\lambda) | \hat{u} | &\geq | \hat{u} |, \quad \lambda > 0.\end{aligned}\quad (\text{ii})$$

Второе соотношение следует из (i). Существует элемент $\varphi \in (\hat{X}^+)^*$, такой, что $\langle | \hat{u} |, \varphi \rangle > 0$. По предположению $\lambda = 0$ — простой полюс резольвенты $R(\lambda, A)$ и это же верно для $\hat{R}(\lambda)$. Поэтому подмножество $\{\lambda \hat{R}(\lambda)^* \varphi : 0 < \lambda < 1\}$ множества $\hat{X}^*$ ограничено по норме. Пусть $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность, сходящаяся к нулю при $n \rightarrow \infty$. Тогда замыкание множества $\{\lambda_n \hat{R}(\lambda_n)^* \varphi\}_{n=1}^\infty$ *-слабо компактно и потому оно имеет *-слабо предельную точку φ . Мы покажем, что

$$\langle x, \lambda \hat{R}(\lambda)^* \varphi \rangle = \langle x, \varphi \rangle \text{ при всех } x \in X.$$

Пусть $x \in X$. Поскольку множество $\{\lambda \lambda_n \hat{R}(\lambda)^* \hat{R}(\lambda_n)^* \varphi\}_{n=1}^\infty$ ограничено по норме, то существует подпоследовательность $\{\lambda \lambda_{n_k} \hat{R}(\lambda)^* \hat{R}(\lambda_{n_k})^* \varphi\}_{k=1}^\infty$ (которая может зависеть от x), такая, что

$$\begin{aligned}\langle x, \lambda \lambda_{n_k} \hat{R}(\lambda)^* \hat{R}(\lambda_{n_k})^* \varphi \rangle &= \left\langle x, \frac{\lambda \cdot \lambda_{n_k}}{\lambda - \lambda_{n_k}} \hat{R}(\lambda_{n_k})^* \varphi \right\rangle - \\ &- \left\langle x, \frac{\lambda \cdot \lambda_{n_k}}{\lambda - \lambda_{n_k}} \hat{R}(\lambda)^* \varphi \right\rangle \rightarrow \langle x, \varphi \rangle \text{ при } k \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

Но поскольку

$$\langle x, \lambda \lambda_{n_k} \hat{R}(\lambda)^* \hat{R}(\lambda_{n_k})^* \varphi \rangle \rightarrow \langle x, \lambda \hat{R}(\lambda)^* \varphi \rangle \text{ при } k \rightarrow \infty,$$

то $\varphi = \lambda \hat{R}(\lambda)^* \varphi$. Кроме того, из (ii) мы получаем

$$0 < \langle | \hat{u} |, \varphi \rangle \leq \langle \lambda \hat{R}(\lambda) | \hat{u} |, \varphi \rangle = \langle | \hat{u} |, \lambda \hat{R}(\lambda)^* \varphi \rangle,$$

и, значит, $\langle | \hat{u} |, \varphi \rangle > 0$. Теперь мы должны доказать, что

$$\lambda \hat{R}(\lambda)^* \varphi = \varphi, \quad \operatorname{Re} \lambda > 0 \text{ и } \langle | \hat{u} |, \varphi \rangle > 0. \quad (\text{iii})$$

Идеал $\hat{J} = \{\hat{x} \in \hat{X} : \langle | \hat{x} |, \varphi \rangle = 0\}$ является $\hat{R}(\lambda)$ -инвариантным в силу (i) и (ii). Пусть $\tilde{R}(\lambda)$ — псевдорезольвента на $\tilde{X} =$

$= \hat{X}/\hat{J}$, индуцируемая $\hat{R}(\lambda)$. Тогда

$$|\tilde{R}(\lambda)\tilde{x}| \leq \tilde{R}(\operatorname{Re} \lambda) |\tilde{x}|, \quad \tilde{x} \in \tilde{X}, \quad \operatorname{Re} \lambda > 0. \quad (i')$$

Пусть $\tilde{u}$ — канонический образ элемента $\hat{u}$. Очевидно, что

$$\lambda \tilde{R}(\lambda + i\nu) \tilde{u} = \tilde{u}, \quad \operatorname{Re} \lambda > 0.$$

Из $\langle \tilde{u}, \varphi \rangle > 0$ мы заключаем, что $\hat{u} \notin \hat{J}$ или, что эквивалентно, $\tilde{u} \neq 0$. Если $\lambda > 0$, то в силу (iii)

$$\langle \lambda \hat{R}(\lambda) | \hat{u} | - | \hat{u} |, \varphi \rangle = 0.$$

Отсюда $\lambda \hat{R}(\lambda) | \hat{u} | - | \hat{u} | \in \hat{J}$ и поэтому

$$\lambda \tilde{R}(\lambda) | \tilde{u} | = | \tilde{u} |.$$

Итак,

$$\lambda \tilde{R}(\lambda + i\nu) \tilde{u} = \tilde{u}, \quad \operatorname{Re} \lambda > 0;$$

$$\lambda \tilde{R}(\lambda) | \tilde{u} | = | \tilde{u} |, \quad \lambda > 0, \quad (ii')$$

и из предложения 8.12 получаем

$$\lambda \tilde{R}(\lambda + ik\nu) \tilde{u}^{(k)} = \tilde{u}^{(k)}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \operatorname{Re} \lambda > 0.$$

Следовательно, $(\lambda - ik\nu)^{-1} \in \sigma(\tilde{R}(\lambda))$ при всех $k \in \mathbb{Z}$. Отсюда следует (предложение Д.3.10), что $(\lambda - ik\nu)^{-1} \in \sigma(\hat{R}(\lambda)) = \sigma(R(\lambda, A))$, т. е. $ik\nu \in \sigma(A)$.

Предположим теперь, что мы можем доказать рассматриваемый результат для полюсов порядка меньше чем p ($p \geq 2$), и предположим, что $s(A) = 0$ является полюсом порядка p резольвенты $R(\lambda, A)$. Пусть

$$Q := \lim_{\lambda \downarrow 0} \lambda^p R(\lambda, A),$$

т. е. $Q = B_{-p}$, где B_{-p} определено в (Д.3.4). Тогда $Q \in \mathcal{L}(X)$ и $Q > 0$. Более того,

$$QA = AQ = \lim_{\lambda \downarrow 0} \lambda^p AR(\lambda, A) = \lim_{\lambda \downarrow 0} (-\lambda^p I + \lambda^{p+1} R(\lambda, A)) = 0.$$

Пусть идеал J в X определяется формулой

$$J = \{x \in X : Q|x| = 0\}.$$

Поскольку $T(t)Qx = QT(t)x$ при всех $x \in X$, то J является $\{T(t)\}$ -инвариантным. Пусть $\tilde{X} = X/J$. Тогда $\tilde{Q} = 0$ и 0 является

полюсом резольвенты $R(\lambda, \tilde{A})$ порядка меньше чем p . Из этого наблюдения и предложения Д.3.10 нетрудно усмотреть, что наш результат справедлив для полюсов любого порядка. ■

Замечание 8.15. Теорему 8.14 можно доказать и при более слабых предположениях. Говорят, что C_0 -полугруппа $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ удовлетворяет (w) -условию, если семейство операторов $\{(\lambda - s(A))R(\lambda, A) : \lambda > s(A)\}$ равномерно ограничено. Полугруппа (w) -разрешима, если существует такая цепочка

$$\{0\} = J_0 \subseteq J_1 \subseteq \dots \subseteq J_{n-1} \subseteq J_n = X,$$

$\{T(t)\}$ -инвариантных идеалов, что при каждом $k = 1, \dots, n$ полугруппа $\{T_k(t)\}_{t \geq 0}$ на $X_k = J_k/J_{k-1}$, индуцируемая полугруппой $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, удовлетворяет (w) -условию. Если $s(A)$ — полюс резольвенты, то полугруппа является (w) -разрешимой. Можно показать, что заключения теоремы остаются справедливыми, если мы только предположим, что $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ является позитивной полугруппой, которая (w) -разрешима.

8.3. Спектральные свойства неприводимых полугрупп

Мы напомним, что позитивная C_0 -полугруппа $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ называется неприводимой, если только $\{0\}$ и X являются замкнутыми $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ -инвариантными идеалами в X . Неприводимость полугруппы эквивалентна неприводимости резольвенты ее генератора; см. предложение 7.6.

Для неприводимых полугрупп имеет место более сильный результат, чем теорема 8.14. Прежде чем установить этот результат, мы рассмотрим весьма специфический, но поясняющий многое пример.

Пример 8.16. Марковские полугруппы. Пусть $X = C(K)$ — банахова структура непрерывных функций на компактном хаусдорфовом пространстве K . Марковская полугруппа на $C(K)$ по определению есть позитивная C_0 -полугруппа $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, удовлетворяющая условию

$$T(t)1 = 1, \quad t \geq 0,$$

где 1 — функция на K , которая тождественно равна единице. Очевидно, для генератора A полугруппы $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ имеем $A1 = 0$. Если $f \in C(K)$, $\|f\| \leq 1$, то $|f| \leq 1$. Отсюда $|T(t)f| \leq T(t)|f| \leq T(t)1 = 1$ и, значит, $\|T(t)\| = 1$, $t \geq 0$. Отсюда

$$s(A) = \omega_0(A) = 0.$$

Прежде чем идти далее, мы заметим, что марковские полугруппы играют очень важную роль в теории марковских процессов.

До конца примера предполагаем, что $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ — неприводимая марковская полугруппа, и сосредоточим наше внимание на так называемом периферийном точечном спектре $\sigma_{p+}(A)$, который определяется формулой

$$\sigma_{p+}(A) = \sigma_p(A) \cap \sigma_+(A).$$

Очевидно, $0 \in \sigma_{p+}(A)$, поскольку $A1 = 0$. Заметим, что если $\omega_{ess}(A) < 0$, то $\sigma_{p+}(A) = \sigma_+(A)$. Предположим, что

$$Af = ivf,$$

где $v \in \mathbb{R}$ и $f \in C(K)$ при $\|f\| = 1$. Тогда

$$T(t)f = e^{ivt}f, \quad t \geq 0.$$

Отсюда

$$0 < \|f\| = \|T(t)f\| \leq T(t)\|f\| \leq T(t)1 = 1, \quad t \geq 0,$$

или, что эквивалентно,

$$0 \leq T(t)(1 - \|f\|) \leq 1 - \|f\|, \quad t \geq 0.$$

Пусть $J = \{h \in C(K) : h(k) = 0, \text{ если } \|f(k)\| = 1\}$. Тогда $J = \bar{X}_u$, где $u = 1 - \|f\|$. Очевидно, что в силу $0 \leq T(t)u \leq u$ множество X_u является $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ -инвариантным. Это означает, что J является замкнутым $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ -инвариантным идеалом в $C(K)$. Поскольку $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ неприводима и $J \neq X$ (в частности, $1 \notin J$), мы получаем $J = \{0\}$, что возможно только тогда, когда

$$\|f\| = 1.$$

Итак,

$$Af = ivf \text{ и } A\|f\| = 0.$$

Из предложения 8.13 мы находим

$$(i) \quad Af^{(k)} = ikvf^{(k)}, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$(ii) \quad A = \pi_f^{-1}(A - iv)\pi_f, \quad \mathcal{D}(A) = \pi_f \mathcal{D}(A).$$

Предположим, что существует $\tilde{f} \in C(K)$, такая, что $A\tilde{f} = iv\tilde{f}$. Определив для каждого $k \in K$ функцию $u_k \in C(K)$ по формуле

$$u_k = \tilde{f}(k)f - f(k)\tilde{f},$$

получаем, что $Au_k = ivu_k$ и, как и ранее, $|u_k| = c \cdot 1$ при некоторой константе c . Поскольку $u_k(k) = 0$, то $c = 0$ и, значит, $u_k = 0$. Отсюда следует геометрическая простота собственного числа iv . Предположим, что

$$Ag = i\mu g,$$

где $\mu \in \mathbb{R}$ и $g \in C(K)$ с $\|g\| = 1$. Используя (ii), получаем

$$i\mu g = Ag = \pi_f^{-1}(A - iv)\pi_f g.$$

Отсюда

$$A(\bar{f}g) = i(\mu - \nu)\bar{f}g.$$

Здесь мы использовали равенство $\pi_{\bar{f}}^{-1}g = \bar{f} \cdot g$, которое следует из того, что $|f| = 1$. Поэтому $\sigma_{p+}(A)$ — аддитивная подгруппа в $i\mathbb{R}$.

Из (ii) для любого $\lambda \in \rho(A)$ вытекает, что

$$R(\lambda, A) = \pi_{\bar{f}}^{-1}R(\lambda + i\nu, A)\pi_{\bar{f}}.$$

Отсюда следует, что каждое $i\nu \in \sigma_{p+}(A)$ является полюсом резольвенты $R(\lambda, A)$, если 0 есть полюс, и, более того, они имеют один и тот же порядок.

Предположим теперь, что 0 действительно является полюсом резольвенты $R(\lambda, A)$ порядка $p \geq 1$. Если $p > 1$, то

$$0 \neq Q = \lim_{\lambda \downarrow 0} \lambda^p R(\lambda, A)$$

является положительным оператором. Более того,

$$Q1 = \lim_{\lambda \downarrow 0} \lambda^p R(\lambda, A)1 = \lim_{\lambda \downarrow 0} \lambda^{p-1}1 = 0.$$

Если $h \in C(K)$, то $|h| \leq \|h\| \cdot 1$. Отсюда следует, что $|Qh| \leq Q|h| \leq \|h\|Q1 = 0$ и, значит, $Q = 0$. Мы пришли к противоречию. Это означает, что $p = 1$.

Мы закончим этот пример коротким резюме.

Пусть $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ — неприводимая марковская полугруппа на $C(K)$. Тогда $\sigma_{p+}(A)$ является подгруппой в $i\mathbb{R}$, или, что эквивалентно, существует $\nu \in \mathbb{R}$, такое, что $\sigma_{p+}(A) = i\nu\mathbb{Z}$. Геометрическая кратность каждого собственного числа в $\sigma_{p+}(A)$ равна единице. Если дополнительно $s(A) = 0$ является полюсом резольвенты, то $\sigma_{p+}(A)$ состоит из простых полюсов $R(\lambda, A)$. ■

Сформулируем основной результат этого параграфа.

Теорема 8.17. Пусть $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ — позитивная C_0 -полугруппа и $s(A) > -\infty$ — полюс резольвенты $R(\lambda, A)$. Тогда

(а) $s(A)$ — простой полюс геометрической кратности единица; более того, существует квазивнутренний элемент $x_0 \in X^+$, такой, что

$$Ax_0 = s(A)x_0,$$

и строго положительный элемент $x_0^* \in (X^+)^*$, такой, что

$$A^*x_0^* = s(A)x_0^*.$$

(b) $\sigma_+(A) = s(A) + i\nu\mathbb{Z}$ при некотором $\nu \geq 0$ и эти элементы являются простыми полюсами резольвенты $R(\lambda, A)$ алгебраической кратности один.

Доказательство. (а) Предположим для удобства, что $s(A) = 0$, и пусть p — порядок полюса 0 резольвенты $R(\lambda, A)$. Положим

$$Q := \lim_{\lambda \downarrow 0} \lambda^p R(\lambda, A).$$

Тогда $Q > 0$ и $QT(t) = T(t)Q = Q$ при $t \geq 0$. Поэтому

$$J = \{x \in X: Q|x| = 0\}$$

является $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ -инвариантным идеалом, и поскольку $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ неприводим и $J \neq X$ (так как $Q > 0$), получаем, что $J = \{0\}$. Если $p > 1$, то $Q^2 = 0$ ($Q^2 = B_{-p}^- = B_{-2p+1}$; см. дополнение Д.3а). Мы пришли к противоречию. Поэтому $p = 1$.

Пусть $x \in X^+$ таков, что $x_0 = Qx > 0$. Тогда $Ax_0 = 0$ и, значит, $T(t)x_0 = x_0$ и $\bar{X}_{x_0}$ является $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ -инвариантным идеалом. Поэтому $\bar{X}_{x_0} = X$ и, следовательно, x_0 есть квазивнутренняя точка в X^+ . Пусть $x_0^* > 0$ таков, что $A^*x_0^* = 0$ (x_0^* имеет вид Q^*x^*). Тогда $T(t)^*x_0^* = x_0^*$. Множество

$$J = \{x \in X: \langle |x|, x_0^* \rangle = 0\}$$

есть $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ -инвариантный идеал и, значит, $J = \{0\}$. Отсюда следует, что x_0^* строго положителен. Перенормировав, получаем $\langle x_0, x_0^* \rangle = 1$.

Пусть теперь $x > 0$ удовлетворяет условиям $Ax = 0$ и $\langle x, x_0^* \rangle = 1$. Мы докажем, что $x = x_0$. Очевидно, что справедливо неравенство $T(t)|x - x_0| \geq |T(t)(x - x_0)| = |x - x_0|$. Если бы $T(t)|x - x_0| > |x - x_0|$, то мы приходим к неравенству $\langle T(t)|x - x_0|, x_0^* \rangle > \langle |x - x_0|, x_0^* \rangle$, что противоречит $\langle T(t)|x - x_0|, x_0^* \rangle = \langle |x - x_0|, T(t)^*x_0^* \rangle = \langle |x - x_0|, x_0^* \rangle$. Итак, мы получаем $T(t)|x - x_0| = |x - x_0|$ и $A|x - x_0| = 0$. Пусть теперь $u = |x - x_0| + (x - x_0)$, $v = |x - x_0| - (x - x_0)$. Тогда $u, v \in X^+$, $Au = Av = 0$ и u, v дизъюнкты. Поскольку $Au = 0$, то u — квазивнутренняя точка в X^+ или $u = 0$ и то же относится и к v . Поскольку любая квазивнутренняя точка является слабой порядковой единицей, то $u = 0$ или $v = 0$ (см. § Д.2.4). Предположим, что $v = 0$ (случай $u = 0$ исследуется аналогично). Тогда $|x - x_0| = x - x_0$ влечет за собой цепочку равенств $\langle |x - x_0|, x_0^* \rangle = \langle x - x_0, x_0^* \rangle = 1 - 1 = 0$ и мы получаем $x = x_0$.

Далее, предположим, что $y \in X$ и $Ay = 0$. Пусть $y = y^+ - y^-$, где $y^-, y^+ \in X^+$. Очевидно, что $T(t)|y| \geq |y|$, и, как и выше, можно исключить возможность того, что $T(t)|y| > |y|$. Поэтому $T(t)|y| = |y|$, т. е. $T(t)(y^- + y^+) = (y^- + y^+)$. Из $T(t)y = y$ вытекает равенство $T(t)(y^+ - y^-) = y^+ - y^-$, и поэтому $T(t)y^+ = y^+$ и $T(t)y^- = y^-$. Как и выше, показывается, что $y^+ = \langle y^+, x_0^* \rangle x_0$,

$y^- = \langle y^-, x_0^* \rangle x_0$, откуда $y = \langle y, x_0^* \rangle x_0$ и, следовательно, установлена геометрическая простота точки $s(A) = 0$.

(b) Предположим, что $\sigma_+(A) \subseteq \sigma_p(A)$. Этого всегда можно добиться путем перехода к расширению банахова пространства $\hat{X}$ так же, как в доказательстве теоремы 8.14. Пусть $iv \in \sigma_+(A)$ и $Au = ivu$ при некотором $u \in X$, $u \neq 0$. Тогда $T(t)u = e^{ivt}u$, откуда $T(t)|u| \geq |T(t)u| = |u|$ и, используя те же рассуждения, что и в доказательстве (a), получаем равенство. Итак, $A|u| = 0$, и мы можем применить предложение 8.13, и, следовательно,

$$Au^{(k)} = ikvu^{(k)}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$A = \pi_u^{-1}(A - iv)\pi_u, \quad \pi_u \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A).$$

Отсюда

$$R(\lambda, A) = \pi_u^{-k} R(\lambda + ikv, A) \pi_u^k$$

и мы получаем, что ikv ($k \in \mathbb{Z}$) — простые полюсы резольвенты $R(\lambda, A)$ геометрической кратности единица. Для того чтобы показать, что $\sigma_+(A)$ есть подгруппа в $i\mathbb{R}$, выберем $i\mu \in \sigma_+(A)$ и $v \in X$, такие, что $Av = i\mu v$. Тогда

$$R(\lambda, A) = \pi_v^{-1} R(\lambda + i\mu, A) \pi_v.$$

Сопоставляя это с равенством

$$R(\lambda, A) = \pi_u^{-1} R(\lambda + iv, A) \pi_u,$$

получаем, что

$$R(\lambda, A) = \pi_u \pi_v^{-1} R(\lambda + i\mu - iv, A) \pi_v \pi_u^{-1}.$$

Отсюда следует желаемый результат. ■

Асимптотическое поведение

9.1. Устойчивость

Предположим, что A — комплексная $n \times n$ -матрица, и рассмотрим полугруппу $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ в $\mathbb{C}^n$, определенную по формуле $T(t) = e^{tA}$. Пусть в $\mathbb{C}^n$ задана некоторая норма и соответствующая ей операторная норма для матриц. Хорошо известно, что следующие утверждения эквивалентны:

- (i) $\|e^{tA}\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$;
- (ii) $\|e^{tA} x\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ для каждого $x \in \mathbb{C}^n$;
- (iii) $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ для всех собственных значений $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ оператора A .

Утверждение (ii) эквивалентно тому, что любое решение $y = y(t)$ задачи Коши $y' = Ay$, $y(0) = x$ сходится к 0 при $t \rightarrow \infty$ (т. е. нуль является асимптотически устойчивым решением системы $y' = Ay$). Рассмотрим теперь произвольное (комплексное) банахово пространство X , и пусть $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ есть C_0 -полугруппа с генератором A . Ясно, что в этом случае из условия (i) следует утверждение (ii), но в общем (бесконечномерном) случае эти утверждения, как показывают следующие примеры, не эквивалентны.

Пример 9.1. (i) Пусть $X = C_0(\mathbb{R}^+)$ — банахово пространство всех непрерывных функций на $\mathbb{R}^+$, обращающихся в нуль на бесконечности, с $\sup$ -нормой. Положим $T(t)f(x) = f(x+t)$ для всех $f \in C_0(\mathbb{R}^+)$ и всех $t \geq 0$. Тогда $\|T(t)\| = 1$ при всех $t \geq 0$ и $\|T(t)f\|_\infty \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ для всех $f \in C_0(\mathbb{R}^+)$.

(ii) Пусть $X = l_1$, и пусть A — умножение на последовательность $(-\alpha_1, -\alpha_2, \dots)$, где $\alpha_j > 0$ и $\alpha_j \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$. Тогда $T(t) = e^{tA}$ есть умножение на последовательность $(e^{-\alpha_1 t}, e^{-\alpha_2 t}, \dots)$, и поэтому $\|T(t)\| = \|(e^{-\alpha_1 t}, \dots)\|_\infty = 1$ при всех $t \geq 0$. Однако если $x \in l_1$, то $\|T(t)x\|_1 \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Ясно, что полугруппа $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ со свойством $T(t)x \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ для каждого $x \in X$ является ограниченной. C_0 -полугруппа $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, для которой $\|T(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, называется *равномерно устойчивой*. Напомним, что тип (граница

роста) полугруппы $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ определяется формулой

$$\omega_0(A) = \omega_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \|T(t)\|}{t} = \inf_{t > 0} \frac{\ln \|T(t)\|}{t}.$$

Для $\omega > \omega_0$ существует такое $M = M_\omega \geq 0$, что $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ при всех $t \geq 0$. Ясно, что $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ равномерно устойчива тогда и только тогда, когда $\omega_0 < 0$.

Далее, мы напомним, что спектральная грань $s(A)$ генератора A определяется формулой

$$s(A) = \sup \{ \operatorname{Re} \lambda : \lambda \in \sigma(A) \},$$

причем $-\infty \leq s(A) \leq \omega_0 < \infty$. Условие (iii) соответствует условию $s(A) < 0$. Из предыдущих рассуждений следует, что равномерная устойчивость $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ влечет за собой $s(A) < 0$. Рассмотрим теперь задачу, когда же условие $s(A) < 0$ влечет за собой равномерную устойчивость полугруппы $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, т. е. условие $\omega_0 < 0$. Этот вопрос можно переформулировать так: в каком случае для C_0 -полугрупп выполняется равенство $\omega_0 = s(A)$? Последнее равенство иногда называют *условием роста относительно спектра*.

Как отмечено в § 8.1 (формула (8.4)), спектральный радиус полугруппы $T(t)$ выражается формулой $r(T(t)) = e^{\omega_0 t}$. Отсюда следует, что $\omega_0 = s(A)$ выполняется, по крайней мере, для полугрупп с ограниченным генератором (т. е. для равномерно непрерывных полугрупп). Действительно, если оператор A ограничен, то по теореме об отображении спектра $\sigma(T(t)) = e^{t\sigma(A)}$, откуда $r(T(t)) = e^{ts(A)}$ и, следовательно, $s(A) = \omega_0$. Как продемонстрировано в примере 8.1, теорема об отображении спектра в только что использованном виде не имеет места в случае неограниченных генераторов. В самом деле, полугруппа в этом примере такова, что $s(A) = 0$ и $\omega_0 = 1$ и, следовательно, неравенство $s(A) < \omega_0$ возможно даже в гильбертовом пространстве.

Тем не менее, имеются классы полугрупп, для которых равенство $s(A) = \omega_0$ выполняется. Напомним, что равенство $e^{t\sigma(A)} = \sigma(T(t)) \setminus \{0\}$, $t \geq 0$, выполняется для любой C_0 -полугруппы, которая становится равномерно непрерывной (как уже отмечалось в предложении 8.5). Рассуждая, как и выше, мы получаем следующий результат.

Предложение 9.2. *Если A порождает C_0 -полугруппу, становящуюся равномерно непрерывной, то $s(A) = \omega_0$. В частности, равенство $s(A) = \omega_0$ выполняется для аналитических полугрупп и для полугрупп, становящихся компактными.*

Теперь рассмотрим задачу: выполняется ли равенство $s(A) = \omega_0$ для позитивных C_0 -полугрупп в банаховой структуре. Как

показано в теореме 7.4, для положительной C_0 -полугруппы $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ с генератором A выполняется равенство

$$s(A) = \sup \{ \lambda \in \mathbb{R} : \lambda \in \sigma(A) \};$$

при этом резольвента при $\operatorname{Re} \lambda > s(A)$ представима в виде

$$R(\lambda, A)x = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt$$

для всех $x \in X$ (где интеграл существует как несобственный сходящийся по норме). Следующий пример показывает, что для положительных C_0 -полугрупп в банаховой структуре возможно строгое неравенство $s(A) < \omega_0$.

Пример 9.3. Рассмотрим $\mathbb{R}^+$ с лебеговой мерой m и определим пространство $L_p = L_p(\mathbb{R}^+, dm) \cap L_1(\mathbb{R}^+, e^x dm)$, $1 < p < \infty$, которое является банаховым пространством функций относительно нормы

$$\rho(f) = \left(\int_0^{\infty} |f(x)|^p dm(x) \right)^{1/p} + \int_0^{\infty} |f(x)| e^x dm(x).$$

Заметим, что ρ порядково непрерывна и обладает свойством Фату, но L_p не является рефлексивным. Для $t \geq 0$ определим операторы $T(t)$ в L_p по формуле $T(t)f(x) = f(x+t)$. Легко видеть, что $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ является C_0 -полугруппой на L_p и $\|T(t)\| \leq 1$ при всех $t \geq 0$. Кроме того, используя, что $p > 1$, нетрудно увидеть, что $\|T(t)\| = 1$ при всех $t \geq 0$ и потому $\omega_0 = 0$ (заметим, что полугруппа сдвигов в $L_1(\mathbb{R}^+, e^x dm)$ имеет тип, равный -1). Обозначим генератор $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ через A . Тогда $\mathcal{D}(A)$ состоит из всех (локально) абсолютно непрерывных функций f в L_p , причем $f' \in L_p$ и $Af = f'$ для всех $f \in \mathcal{D}(A)$. Очевидно, $\lambda \in \sigma_p(A)$, если $\operatorname{Re} \lambda < -1$, поэтому $s(A) \leq -1$. Мы утверждаем, что $s(A) = -1$. Нам достаточно доказать теперь, что при $\operatorname{Re} \lambda > -1$ уравнение $\lambda f - f' = g$ имеет единственное решение $f \in L_p$ для любого $g \in L_p$. Решение этого уравнения имеет вид

$$f(x) = \int_x^{\infty} e^{\lambda(x-s)} g(s) ds, \quad x \geq 0,$$

(поскольку $g \in L_1(\mathbb{R}^+, e^x dx)$, интеграл сходится при всех $\operatorname{Re} \lambda > -1$), и простые выкладки показывают, что $f \in L_p$. Решение является единственным, поскольку функция $e^{\lambda x}$ не принадлежит L_p при $\operatorname{Re} \lambda > -1$. Отсюда мы получаем, что $s(A) = -1$, тогда как $\omega_0 = 0$.

Мы можем изменить предыдущий пример таким образом, чтобы получить положительную C_0 -полугруппу $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ в рефлексивной банаховой структуре со свойствами $s(A) = -\infty$ и $\omega_0 = 0$. Действительно, пусть $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ — полугруппа сдвигов в банаховом пространстве функций

$$L_p = L_q(\mathbb{R}^+, dm) \cap L_p(\mathbb{R}^+, e^{px^2} dm)$$

($1 < p < q < \infty$), где норма p определяется как и выше.

Из теоремы 7.29 следует, что равенство $\omega_0 = s(A)$ выполняется для положительных C_0 -полугрупп в полуупорядоченном банаховом пространстве X с нормальным конусом X^+ и $\text{int } X^+ \neq \emptyset$. Этот результат, конечно, применим к случаю, когда X является банаховой структурой $C(\Omega)$ для некоторого компактного хаусдорфова пространства Ω . Следующий результат будет весьма полезным для того, чтобы исследовать некоторые другие ситуации, когда $s(A) = \omega_0$.

Предложение 9.4. Пусть $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ есть C_0 -полугруппа в банаховом пространстве X с генератором A . Если существует $1 \leq p < \infty$, такое, что

$$\int_0^\infty \|T(t)x\|^p dt < \infty \quad \text{при всех } x \in X,$$

то полугруппа $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ равномерно устойчива (т. е. $\omega_0 < 0$).

Доказательство. Сначала приведем некоторые соображения. Предположим, что F — положительная непрерывная вещественная функция на $\mathbb{R}^+$, для которой существует константа $M \geq 0$, такая, что $F(t+s) \leq MF(t)$ при всех $0 \leq s \leq 1$. Тогда $\int_0^\infty F(t) dt < \infty$ влечет за собой $F(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Действительно, если $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 0$ не выполняется, то существуют $\delta > 0$ и последовательность $t_1 < t_2 < \dots \uparrow \infty$, такие, что $F(t_j) \geq \delta$ при всех j . Мы можем считать, что $t_{j+1} - t_j > 1$ при $j = 1, 2, \dots$. Из предположений относительно F следует, что $F(t_j) \leq MF(t)$ для всех $t \in [t_j - 1, t_j]$ и потому $F(t) \geq M^{-1}\delta > 0$ при всех $t \in [t_j - 1, t_j]$ и всех $j = 1, 2, \dots$. Это противоречит предположению $\int_0^\infty F(t) dt < \infty$.

Для доказательства предложения зафиксируем $x \in X$ и рассмотрим функцию $F(t) = \|T(t)x\|^p$, $t \geq 0$. Существует константа $C > 0$, для которой $\|T(t)\| \leq C$ при всех $0 \leq t \leq 1$ и потому $F(t+s) \leq C^p F(t)$ для всех $0 \leq s \leq 1$. Из приведенных выше

рассуждений следует, что $F(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Итак, мы показали, что $\|T(t)x\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ для всех $x \in X$, что, в частности, влечет за собой ограниченность $\|T(t)\| \leq K$ для любых $t \geq 0$ и некоторой константы K . Кроме того, если $t > 0$ и $x \in X$, то

$$\begin{aligned} \|T(t)x\|^p &= \int_0^t \|T(t-s)\|^p \|T(s)x\|^p ds \leq \int_0^t \|T(t-s)\|^p \|T(s)x\|^p ds \leq \\ &\leq K^p \int_0^t \|T(s)x\|^p ds. \end{aligned}$$

Это показывает, что для любого $x \in X$ найдется константа M_x со свойством $\|t^{1/p}T(t)x\| \leq M_x$ при всех $t \geq 0$, и, следовательно, $t^{1/p}\|T(t)\| \leq M$ при всех $t \geq 0$, где M — некоторая константа. Поэтому $\|T(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, и мы можем утверждать, что $\omega_0 < 0$. ■

В качестве первого приложения предыдущего предложения докажем следующий результат.

Теорема 9.5. Если A — генератор позитивной C_0 -полугруппы $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ в банаховой структуре $L_1(\Omega, \mu)$, то $s(A) = \omega_0$.

Доказательство. Достаточно показать, что из $s(A) < 0$ следует $\omega_0 < 0$. Если $s(A) < 0$, то из теоремы 7.4 вытекает существование интеграла

$$\int_0^\infty T(t)f dt$$

для всех $f \in L_1(\Omega, \mu)$ как несобственного сходящегося по норме. Выберем произвольную функцию $0 \leq f \in L_1(\Omega, \mu)$. Поскольку L_1 -норма аддитивна на положительных элементах, то

$$\int_0^R \|T(t)f\|_1 dt = \left\| \int_0^R T(t)f dt \right\|_1$$

при всех $R \geq 0$, откуда

$$\int_0^\infty \|T(t)f\|_1 dt = \left\| \int_0^\infty T(t)f dt \right\|_1 < \infty.$$

Поэтому $\int_0^\infty \|T(t)f\|_1 dt < \infty$ при любой $f \in L_1(\Omega, \mu)$ и в силу предложения 9.4 мы получаем, что $\omega_0 < 0$. ■

Следующий случай, который мы рассмотрим, будет $X = L_2(\Omega, \mu)$. Мы начнем с некоторых замечаний и введем некоторые обозначения. Предположим, что $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ есть C_0 -полугруппа в банаховом пространстве X с генератором A . Для любого $z \in \mathbb{C}$ с $\operatorname{Re} z > \omega_0$ имеем

$$R(z, A)x = \int_0^{\infty} e^{-zt} T(t)x dt, \quad x \in X$$

(абсолютно сходящийся интеграл). Поскольку для любого $\omega > \omega_0$ существует константа $M = M_\omega$, такая, что $\|T(t)\| \leq M e^{\omega t}$ при всех $t \geq 0$, то для произвольного $\alpha > \omega_0$ существует константа C со свойством

$$\|R(\alpha + i\beta, A)\| \leq C_\alpha \text{ при всех } \beta \in \mathbb{R},$$

т. е. семейство $\{R(\alpha + i\beta, A): \beta \in \mathbb{R}\}$ равномерно ограничено при всех $\alpha > \omega_0$.

Предположим теперь, что X — банахова структура и $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ — позитивная полугруппа. Для $z \in \mathbb{C}$ с $\operatorname{Re} z > s(A)$ имеем

$$R(z, A)x = \int_0^{\infty} e^{-zt} T(t)x dt$$

(несобственный интеграл) при всех $x \in X$, и, таким образом, записав $z = \alpha + i\beta$ при $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, получаем $|R(\alpha + i\beta, A)x| \leq \|R(\alpha, A)\| |x|$ при всех $x \in X$ (см. следствие 7.5). Поэтому

$$\|R(\alpha + i\beta, A)\| \leq \|R(\alpha, A)\| \text{ при всех } \beta \in \mathbb{R}$$

и, значит, семейство $\{R(\alpha + i\beta, A): \beta \in \mathbb{R}\}$ равномерно ограничено при всех $\alpha > s(A)$. Заметим, что, как вытекает из следующей теоремы и примера 8.1, предыдущее утверждение в общем случае не выполняется для C_0 -полугрупп, которые не позитивны.

Прежде чем сформулировать очередную теорему, напомним некоторые простые факты, касающиеся преобразования Фурье векторнозначных функций. Для любого банахова пространства X пространство X -значных интегрируемых по Бохнеру функций на $\mathbb{R}$ (по мере Лебега) обозначим через $L_1(\mathbb{R}, X)$. Для каждого $F \in L_1(\mathbb{R}, X)$ преобразование Фурье, как обычно, определяется так:

$$\hat{F}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tau t} F(t) dt, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Функция $\hat{F}(\tau)$ является непрерывной функцией из $\mathbb{R}$ в X . Если $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство и $F \in L_1(\mathbb{R}, \mathcal{H}) \cap L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$,

то $\hat{F} \in L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ и $\|\hat{F}\|_2 = \|F\|_2$ (где $\|\cdot\|_2$ означает норму в пространстве $L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$). Этот факт можно легко получить из скалярнозначного случая, используя ортонормированные системы. Преобразование Фурье расширяется до изометрии из $L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ на себя. Это, вообще говоря, не так, если $\mathcal{H}$ заменить на произвольное банахово пространство.

Теорема 9.6. Если $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ есть C_0 -полугруппа в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ с генератором A , то

$$\omega_0 = \inf \{ \alpha \in \mathbb{R} : \alpha + i\beta \in \rho(A) \text{ при всех } \beta \in \mathbb{R} \text{ и } \{R(\alpha + i\beta, A)\}_{\beta \in \mathbb{R}} \text{ равномерно ограничена} \}.$$

Доказательство. Обозначая $\inf$ правой части через s_0 , из предыдущего замечания получаем $s_0 \leq \omega_0$. Без потери общности мы можем предположить, что $\omega_0 = 0$ (заменяя, если надо, A на $A - \omega_0 I$). Для удобства обозначим $R(z) = R(z, A)$ при всех $z \in \rho(A)$ и будем писать $z = \alpha + i\beta$ с $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. По определению для любого $\alpha > s_0$ существует константа C_α , такая, что $\|R(\alpha + i\beta)\| \leq C_\alpha$ при всех β . Для $z = \alpha + i\beta$ с $\alpha > s_0$ и $x \in \mathcal{H}$ определим функции

$$F_x^z(t) = e^{-z|t|} T(|t|) x, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$G_x^z(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \{R(z + i\tau)x + R(z - i\tau)x\}, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Если $\alpha > 0 = \omega_0$, то $F_x^z \in L_1(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ и $\hat{F}_x^z = G_x^z$. Заметим, что $F_x^z \in L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ и потому $G_x^z \in L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ и $\|G_x^z\|_2 = \|F_x^z\|_2$ при $\alpha > 0$. Действительно,

$$\|F_x^z\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\alpha|t|} \|T(|t|)x\|^2 dt \leq K_\alpha^2 \|x\|^2$$

при некоторой константе $K_\alpha \geq 0$, зависящей только от $\alpha > 0$. Предположим теперь, что $s_0 < \omega_0 = 0$, и пусть $x \in \mathcal{D}(A^2)$ фиксировано. Для $z \in \mathbb{C}$ с $\alpha > s_0$ и всех $\tau \neq 0$ из резольвентного уравнения получаем

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi} G_x^z(\tau) &= R(z + i\tau)x + R(z - i\tau)x = \\ &= R(z + i\tau)R(z)(zI - A)x + R(z - i\tau)R(z)(zI - A)x = \\ &= -\frac{1}{i\tau} [R(z + i\tau) - R(z)](zI - A)x + \\ &\quad + \frac{1}{i\tau} [R(z - i\tau) - R(z)](zI - A)x = \\ &= -\frac{1}{i\tau} [R(z + i\tau) - R(z - i\tau)](zI - A)x, \end{aligned}$$

и, повторяя рассуждения, находим

$$\sqrt{2\pi} G_x^z(\tau) = -\frac{1}{\tau^2} [R(z+i\tau) + R(z-i\tau) - 2R(z)] (zI - A)^2 x.$$

Поскольку $z = \alpha + i\beta$, $\alpha > s_0$ и $\tau \in \mathbb{R}$, из определения числа s_0 следует, что

$$\sqrt{2\pi} \|G_x^z(\tau)\| \leq \frac{2}{\tau^2} (C_\alpha + \|R(z)\|) \|(zI - A)^2 x\|.$$

Эта оценка с учетом непрерывности G_x^z показывает, что $G_x^z \in L_1(\mathbb{R}, \mathcal{H}) \cap L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$. Поэтому мы можем рассмотреть $\tilde{G}_x^z$ — обратное преобразование Фурье к G_x^z , которое определяется по формуле

$$\tilde{G}_x^z(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau t} \{R(z+i\tau)x + R(z-i\tau)x\} d\tau.$$

Как отмечалось ранее, если $\alpha > 0$, то $G_x^z = \hat{F}_x^z$, и потому $\tilde{G}_x^z = F_x^z$ при $\alpha > 0$. Мы утверждаем, что $\tilde{G}_x^z = F_x^z$ при всех $z = \alpha + i\beta$ с $\alpha > s_0$. Действительно, зафиксируем временно $t \in \mathbb{R}$. Очевидно, что $F_x^z(t)$ является аналитической функцией от z . Мы покажем, что функция $z \rightarrow \tilde{G}_x^z(t)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} z = \alpha > s_0$. Для этой цели обозначим через Γ замкнутый контур в $\{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} z > s_0\}$. Поскольку функция $z \rightarrow G_x^z(\tau)$ аналитична, то по теореме Фубини получаем

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \tilde{G}_x^z(t) dz &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \oint_{\Gamma} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau t} G_x^z(\tau) d\tau \right\} dz = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau t} \left\{ \oint_{\Gamma} G_x^z(\tau) dz \right\} d\tau = 0. \end{aligned}$$

Поэтому по теореме Морера $\tilde{G}_x^z(t)$ является аналитической функцией по z в $\{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} z > s_0\}$. В силу единственности аналитического продолжения мы получаем $\tilde{G}_x^z(s) = F_x^z(s)$ при всех $\operatorname{Re} z = \alpha > s_0$.

Итак, мы показали, что $\tilde{G}_x^z = F_x^z$ при всех $\alpha > s_0$ и всех $x \in \mathcal{D}(A^2)$. Это, в частности, влечет за собой равенство $\|F_x^z\|_2 = \|G_x^z\|_2$ при всех $x \in \mathcal{D}(A^2)$ и всех $\alpha > s_0$. Выберем теперь $\alpha \in \mathbb{R}$ со свойствами $s_0 < \alpha < 0$ и $2|\alpha| \|R(\alpha)\| < 1$. Используя равенства

$$R(\alpha + i\tau) = [I - 2\alpha R(\alpha + i\tau)] R(-\alpha + i\tau),$$

$$R(\alpha - i\tau) = [I - 2\alpha R(\alpha - i\tau)] R(-\alpha - i\tau),$$

получаем

$$[I - 2\alpha R(\alpha - i\tau)] \cdot [I - 2\alpha R(\alpha + i\tau)] G_x^{-\alpha}(\tau) = \\ = [I - 2\alpha R(\alpha)] G_x^{\alpha}(\tau).$$

В силу выбора α оператор $[I - 2\alpha R(\alpha)]^{-1}$ существует в $L(\mathcal{H})$ и, значит,

$$G_x^{\alpha}(\tau) = [I - 2\alpha R(\alpha)]^{-1} [I - 2\alpha R(\alpha - i\tau)] \cdot [I - 2\alpha R(\alpha + i\tau)] G_x^{-\alpha}(\tau).$$

Поскольку $\|R(\alpha \pm i\tau)\| \leq C_{\alpha}$ при всех $\tau \in \mathbb{R}$, то существует константа M_{α} (не зависящая от x и τ), такая, что $\|G_x^{\alpha}(\tau)\| \leq M_{\alpha} \|G_x^{-\alpha}(\tau)\|$ при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и поэтому

$$\|G_x^{\alpha}\|_2 \leq M_{\alpha} \|G_x^{-\alpha}\|_2$$

при всех $x \in \mathcal{D}(A^2)$. Учитывая предыдущие результаты, получаем

$$\|F_x^{\alpha}\|_2 = \|G_x^{\alpha}\|_2 \leq M_{\alpha} \|G_x^{-\alpha}\|_2 = M_{\alpha} \|F_x^{-\alpha}\|_2 \leq M_{\alpha} K_{-\alpha} \|x\|$$

для любого $x \in \mathcal{D}(A^2)$, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\alpha|t|} \|T(|t|)x\|^2 dt \leq M_{\alpha}^2 K_{-\alpha}^2 \|x\|^2, \quad x \in \mathcal{D}(A^2).$$

Поскольку $\mathcal{D}(A^2)$ плотно в $\mathcal{H}$, то нетрудно видеть, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\alpha|t|} \|T(|t|)x\|^2 dt < \infty$$

при всех $x \in \mathcal{H}$ и, значит,

$$\int_0^{\infty} \|e^{-\alpha t} T(t)x\|^2 dt < \infty, \quad x \in \mathcal{H}.$$

Применение предложения 9.4 показывает, что полугруппа $\{e^{-\alpha t} T(t)\}_{t \geq 0}$ сильно устойчива, т. е. $\omega_0 - \alpha < 0$. Отсюда следует неравенство $-\alpha < 0$, которое противоречит предположению $s_0 < \alpha < 0$. Таким образом, мы заключаем, что $s_0 = 0 = \omega_0$. Теорема доказана. ■

Комбинируя предыдущую теорему с некоторыми замечаниями, предшествующими теореме 9.6, можно получить следующий результат.

Теорема 9.7. Если $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ — позитивная C_0 -полугруппа с генератором A в банаховой структуре $\mathcal{H} = L_2(\Omega, \mu)$, то $\omega_0 = s(A)$.

В последней части настоящего параграфа мы опишем спектральную границу $s(A)$ генератора A , порождающего позитивную полугруппу $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, в терминах экспоненциальной границы роста решения задачи Коши

$$u'(t) = Au(t), \quad u(0) = x \in \mathcal{D}(A),$$

т. е. в терминах экспоненциальной границы роста орбит $\{T(t)x\}_{t \geq 0}$ при $x \in \mathcal{D}(A)$.

Напомним некоторые сопутствующие факты. Пусть X — банахово (комплексное) пространство, и предположим, что $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ есть C_0 -полугруппа в X с генератором A . Для любого $x \in X$ экспоненциальной границей роста $\omega(x)$ орбиты $\{T(t)x\}_{t \geq 0}$ называют

$$\omega(x) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \|T(t)x\|}{t}.$$

Нетрудно показать, что

$$\omega(x) = \inf \{ \omega \in \mathbb{R} : \exists \text{ константа } M_\omega \text{ со свойством } \|T(t)x\| \leq M_\omega e^{\omega t}, t \geq 0 \}$$

и что $\omega(x)$ является абсциссой абсолютной сходимости преобразования Лапласа функции $T(t)x$, т. е.

$$\omega(x) = \inf \left\{ \lambda \in \mathbb{R} : \int_0^\infty e^{-\lambda t} \|T(t)x\| dt < \infty \right\}$$

(см. первую часть доказательства предложения 9.4). Следует отметить, что тип (экспоненциальная граница роста) ω_0 полугруппы $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ можно представить так:

$$\omega_0 = \sup \{ \omega(x) : x \in X \}.$$

Кроме ω_0 мы рассмотрим экспоненциальную границу роста решений задачи Коши, определяемую следующим образом:

$$\omega_1 = \sup \{ \omega(x) : x \in \mathcal{D}(A) \}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\omega_1 = \inf \left\{ \lambda \in \mathbb{R} : \int_0^\infty e^{-\lambda t} \|T(t)x\| dt < \infty \text{ при всех } x \in \mathcal{D}(A) \right\}.$$

Прежде чем сформулировать следующее предложение, мы напомним, что при любом $\lambda \in \mathbb{C}$ с $\operatorname{Re} \lambda > \omega_0$ резольвента $R(\lambda, A)$ оператора A представляется в виде абсолютно сходящегося пре-

образования Лапласа

$$R(\lambda, A)x = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt, \quad x \in X.$$

В то же время, как отмечалось ранее, возможно, что при $\lambda \in \mathbb{C}$ с $\operatorname{Re} \lambda \leq \omega_0$ интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt$$

существует при каждом $x \in X$ как несобственный сходящийся интеграл. Такие λ принадлежат $\rho(A)$ и резольвента $R(\lambda, A)$ представляется предыдущим интегралом. Заметим, что если $\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt$ сходится при некотором $\lambda \in \mathbb{C}$, то $\int_0^{\infty} e^{-\mu t} T(t)x dt$ сходится при всех $\mu \in \mathbb{C}$ с $\operatorname{Re} \mu > \operatorname{Re} \lambda$.

Предложение 9.8. Если $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ есть C_0 -полугруппа на банаховом пространстве X , то

$$\omega_1 = \inf \left\{ \lambda \in \mathbb{R} : \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt \text{ существует для всех } x \in X \right\}.$$

Доказательство. Обозначим $\inf$ правой части через s_1 и возьмем $\lambda > s_1$. По формуле (8.1b)

$$(e^{-\lambda t} I - T(t))x = \int_0^t e^{\lambda(t-s)} T(s)(\lambda I - A)x ds$$

при всех $x \in \mathcal{D}(A)$ и потому

$$T(t)x = e^{\lambda t} \left\{ x - \int_0^t e^{-\lambda s} T(s)(\lambda I - A)x ds \right\}$$

при $x \in \mathcal{D}(A)$. Поскольку $\lambda > s_1$, то для любого $x \in \mathcal{D}(A)$ существует константа M_x , такая, что

$$\left\| \int_0^t e^{-\lambda s} T(s)(\lambda I - A)x ds \right\| \leq M_x$$

при всех $t \geq 0$ и, следовательно, $\|T(t)x\| \leq e^{\lambda t} (\|x\| + M_x)$ при всех $t \geq 0$. Отсюда получаем $\lambda > \omega_1$, и, значит, $s_1 \geq \omega_1$.

Для доказательства обратного неравенства выберем $\lambda > \omega_1$ и положим

$$S(t)x = \int_0^t e^{-\lambda s} T(s)x ds$$

при всех $x \in X$ и $t \geq 0$. Ввиду того, что $\lambda > \omega_1$, легко усмотреть существование $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t)x = \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)x ds$ при каждом $x \in \mathcal{D}(A)$. Поэтому для того чтобы показать существование $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t)x$ при каждом $x \in X$, в силу плотности $\mathcal{D}(A)$ в X достаточно доказать равномерную ограниченность $\{S(t)\}_{t \geq 0}$. Для этой цели фиксируем $x \in X$ и положим $z = S(1)x$. Нетрудно видеть, что $z \in \mathcal{D}(A)$ и

$$S(n)x = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda k} T(k)z.$$

Используя неравенство $\lambda > \omega_1$, легко проверить сходимость ряда $\sum_{k=0}^\infty e^{-\lambda k} T(k)z$. Итак, мы показали, что последовательность $\{S(n)x: n = 1, 2, \dots\}$ сходится при всех $x \in X$ и поэтому линейные операторы $\{S(n)\}_{n=1}^\infty$ равномерно ограничены. Наконец, поскольку при $n \leq t < n+1$

$$S(t) = S(t-n) + e^{-\lambda(t-n)} T(t-n) S(n),$$

то семейство $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ является равномерно ограниченным и, следовательно, предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S(t)x = \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)x ds$$

существует при всех $x \in X$. Поэтому $\lambda > s_1$ и, значит, $s_1 \leq \omega_1$. На этом доказательство предложения завершается. ■

Следующий результат немедленно получается из теоремы 7.4 и предыдущего предложения.

Следствие 9.9. Если A порождает позитивную C_0 -полугруппу $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ в банаховой структуре, то

$$s(A) = \omega_1 = \sup \{\omega(x): x \in \mathcal{D}(A)\}.$$

9.2. Асимптотическое поведение позитивных полугрупп

На протяжении этого параграфа будем предполагать, что X — банахова структура и что $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ — сильно непрерывная полугруппа на X с генератором A . В гл. 8 мы привели весьма

подробный анализ периферийного спектра $\sigma_+(A)$ оператора A при условии, что $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ является позитивной или даже неприводимой полугруппой. Если, кроме того, выполняется неравенство $\omega_{ess}(A) < \omega_0(A)$, то можно сказать гораздо больше. Заметим, что в силу предложения 8.6 условие $\omega_{ess}(A) < \omega_0(A)$ влечет за собой равенство $\omega_0(A) = s(A)$.

Теорема 9.10. Пусть $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ — позитивная C_0 -полугруппа и выполняется неравенство $\omega_{ess}(A) < \omega_0(A)$. Тогда

- (а) $\sigma_+(A) = \{s(A)\}$ и существует число $\varepsilon > 0$ со свойствами
- (i) $\omega_{ess}(A) \leq s(A) - \varepsilon$;
 - (ii) $\operatorname{Re} \lambda \leq s(A) - \varepsilon$ при всех $\lambda \in \sigma(A)$, $\lambda \neq s(A)$.
- (б) Если дополнительно $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ неприводима, то $s(A)$ является полюсом первого порядка резольвенты $R(\lambda, A)$ геометрической кратности единица.

Доказательство. (а) Из предложения 8.6 (а) следует, что $s(A)$ — полюс резольвенты $R(\lambda, A)$. Без потери общности мы можем считать, что $s(A) = 0$. Предположим, что $iv \in \sigma_+(A)$ для некоторого $v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Тогда по теореме 8.14 $ikv \in \sigma_+(A)$ при каждом $k \in \mathbb{Z}$. Пусть $t > 0$ таково, что $vt/2\pi$ — иррациональное число. Из предложения 8.3 легко выводится включение $e^{ikhvt} \in \sigma(T(t))$ для каждого $k \in \mathbb{Z}$, и поэтому в силу замкнутости спектра оператора $T(t)$ получаем $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \subseteq \sigma(T(t))$. Отсюда следует, что $1 \leq r_{ess}(T(t)) = e^{\omega_{ess}(A)t}$ и, значит, $0 \leq \omega_{ess}(A) = s(A) = \omega_0(A)$. Но это противоречит условиям теоремы. Поэтому $\sigma_+(A) = \{s(A)\}$.

Предположим теперь, что $\lambda_k \in \sigma(A)$ со строго возрастающей вещественной частью $\operatorname{Re} \lambda_k$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \lambda_k = s(A) = 0$. Пусть $t > 0$ фиксировано. Тогда $e^{\lambda_k t} \in \sigma(T(t))$, $|e^{\lambda_k t}| < |e^{\lambda_{k+1} t}|$ и $|e^{\lambda_k t}| \rightarrow 1$. Поэтому $\sigma(T(t))$ имеет предельную точку на $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, и, значит, $\omega_{ess}(A) \geq 0$. Полученное противоречие доказывает теорему.

(б) следует из теоремы 8.17. ■

Предположим, что $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ — позитивная полугруппа с условием $\omega_{ess}(A) < \omega_0(A)$. Тогда в силу предложения 8.6 (б) получаем $s(A) = \omega_0(A)$. Пусть $\lambda_0 := s(A)$ и $\varepsilon \geq 0$ выбрано, как и в теореме 9.10(а). Поскольку $\lambda_0 \in \sigma(A) \setminus \sigma_{ess}(A)$, то λ_0 — полюс резольвенты $R(\lambda, A)$ и мы можем разложить пространство X следующим образом (теорема А.3.1):

$$X = \mathcal{N}((\lambda_0 I - A)^p) \oplus \mathcal{R}((\lambda_0 I - A)^p), \quad (9.1)$$

где p — порядок полюса. Оба пространства в (9.1) инвариантны относительно $T(t)$. Пусть P — конечномерный проектор на

$\mathcal{N}((\lambda_0 I - A)^p)$, соответствующий этому разложению, т. е. $P = B_{-1}$, где B_{-1} определено в (Д.3.4). Пусть

$$\tilde{T}(t) = T(t; (I - P), \quad t \geq 0.$$

Ясно, что $\tilde{T}(t)$ является сужением $T(t)$ на инвариантное подпространство $\mathcal{R}((\lambda_0 I - A)^p)$ и $\{\tilde{T}(t)\}_{t \geq 0}$ определяет сильно непрерывную полугруппу на этом подпространстве. Ее генератор $\tilde{A}$ есть сужение A на $\mathcal{R}((\lambda_0 I - A)^p)$. Спектр оператора $\tilde{A}$ имеет вид

$$\sigma(\tilde{A}) = \sigma(A) \setminus \{\lambda_0\}.$$

Как следствие, получаем, что

$$s(\tilde{A}) \leq \lambda_0 - \varepsilon.$$

Очевидно, что

$$\omega_{ess}(\tilde{A}) \leq \omega_{ess}(A) \leq \lambda_0 - \varepsilon,$$

и в силу предложения 8.6(b) находим

$$\omega_0(\tilde{A}) \leq \lambda_0 - \varepsilon.$$

Для любого $\eta \in (0, \varepsilon)$ существует константа $\tilde{M}(\eta) \geq 1$ со свойством

$$\|\tilde{T}(t)x\| \leq \tilde{M}(\eta)e^{(\lambda_0 - \eta)t} \|x\|$$

при любом $x \in \mathcal{R}((\lambda_0 I - A)^p)$. Отсюда следует, что при любом $x \in X$

$$\begin{aligned} \|T(t)(I - P)x\| &= \|\tilde{T}(t)(I - P)x\| \leq \\ &\leq \tilde{M}(\eta)e^{(\lambda_0 - \eta)t} \|(I - P)x\| \leq M(\eta)e^{(\lambda_0 - \eta)t} \|x\|, \\ &\quad t \geq 0, \end{aligned}$$

где $M(\eta) = \tilde{M}(\eta) \|I - P\|$.

Если дополнительно известно, что λ_0 — простой полюс, то $p = 1$ и

$$AP = PA = \lambda_0 P,$$

откуда

$$T(t)P = PT(t) = e^{\lambda_0 t} P, \quad t \geq 0.$$

Для любого $x \in X$ и $t \geq 0$ мы получаем

$$T(t)x = T(t)(Px + (I - P)x) = e^{\lambda_0 t} Px + T(t)(I - P)x$$

и, следовательно,

$$\|e^{-\lambda_0 t} T(t)x - Px\| \leq M(\eta)e^{-\eta t} \|x\|, \quad t \geq 0, \quad (9.2)$$

при любом $\eta \in (0, \varepsilon)$. В частности, если полугруппа $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ неприводима, то λ_0 — простой полюс $R(\lambda, A)$. Более того, его геометрическая кратность равна единице. Из теоремы 8.17 следует, что существует квазивнутренняя точка $x_0 \in X^+$ и строго положительный функционал $x_0^* \in (X^*)^+$, такие, что

$$A_0 x_0 = \lambda_0 x_0, \quad A^* x_0^* = \lambda_0 x_0^*, \quad \langle x_0, x_0^* \rangle = 1. \quad (9.3)$$

Проектор P является оператором ранга один и определяется формулой

$$Px = \langle x, x_0^* \rangle x_0.$$

Мы суммируем сказанное в следующей теореме.

Теорема 9.11. Пусть $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ — позитивная C_0 -полугруппа, удовлетворяющая неравенству $\omega_{ess}(A) < \omega_0(A)$. Пусть p — порядок полюса $\lambda_0 = s(A)$ резольвенты $R(\lambda, A)$, и пусть P — проектор на $\mathcal{N}((\lambda_0 I - A)^p)$ вдоль $\mathcal{R}((\lambda_0 I - A)^p)$. Наконец, пусть число $\varepsilon > 0$ такое, как в теореме 9.10.

(а) Для любого $\eta \in (0, \varepsilon)$ существует константа $M(\eta) \geq 1$, такая, что

$$\|T(t)(I - P)\| \leq M(\eta) e^{(\lambda_0 - \eta)t}, \quad t \geq 0.$$

(б) Если $p = 1$, то для любого $\eta \in (0, \varepsilon)$

$$\|e^{-\lambda_0 t} T(t) - P\| \leq M(\eta) e^{-\eta t}, \quad t \geq 0.$$

(с) Если $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ неприводима и элементы x_0, x_0^* определены в (9.3), то для любого $\eta \in (0, \varepsilon)$ и $x \in X$ справедлива оценка

$$\|e^{-\lambda_0 t} T(t)x - \langle x, x_0^* \rangle x_0\| \leq M(\eta) e^{-\eta t} \|x\|, \quad t \geq 0.$$

9.3. Компактность и неприводимость возмущенных полугрупп

В этом параграфе мы исследуем свойства компактности и неприводимости возмущенных полугрупп (с «возмущением» в смысле § 3.5). Результаты, которые мы получаем, могут иногда быть использованы для доказательства правомерности предположений теоремы 9.11, в частности, неравенства $\omega_{ess}(A) < \omega_0(A)$ и неприводимости полугруппы. Наш случай описан в § 3.5. Как бы то ни было, мы тут же получаем, что все результаты легко переносятся на случай, когда возмущение является ограниченным линейным оператором из X в X .

Напомним кратко ситуацию § 3.5. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — банахово пространство, а $\{T_0(t)\}_{t \geq 0}$ есть C_0 -полугруппа с генератором A_0 , и предположим, что X является $\odot$ -рефлексивным относительно A_0 . Пусть $B: X \rightarrow X^{\odot*}$ — ограниченный линейный

оператор, и пусть $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ — полугруппа, которая получена методом вариации произвольной постоянной:

$$T(t)x = T_0(t)x + \int_0^t T_0^{\odot*}(t-s)BT(s)x ds, \quad t \geq 0, \quad x \in X. \quad (9.4)$$

За деталями относительно этой формулы читателю следует обратиться к § 3.5. Полугруппу $\{T_0(t)\}_{t \geq 0}$ мы называем *невозмущенной* полугруппой, B называем *возмущением*, а $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ — *возмущенной* полугруппой. С помощью метода последовательных приближений получаем следующее сходящееся по норме разложение в ряд:

$$T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t), \quad t \geq 0, \quad (9.5)$$

где

$$T_k(t)x = \int_0^t T_0^{\odot*}(t-s)BT_{k-1}(s)x ds \quad (9.6)$$

при всех $t \geq 0$, $k \geq 1$ и $x \in X$. Пусть

$$U(t) = T(t) - T_0(t), \quad t \geq 0,$$

или, что эквивалентно,

$$U(t)x = \int_0^t T_0^{\odot*}(t-s)BT(s)x ds, \quad t \geq 0, \quad x \in X. \quad (9.7)$$

Применяя в (9.4) преобразование Лапласа, приходим к равенству

$$R(\lambda, A) = R(\lambda, A_0) + R(\lambda, A_0^{\odot*})BR(\lambda, A), \quad (9.8)$$

при всех $\lambda \in \rho(A_0) \cap \rho(A)$. Для достаточно больших $\operatorname{Re} \lambda$, а точнее, если λ таково, что $\|R(\lambda, A_0)\| < \|B\|^{-1}$, получаем

$$R(\lambda, A) = [I - R(\lambda, A_0^{\odot*})B]^{-1}R(\lambda, A_0),$$

или, что эквивалентно,

$$R(\lambda, A) = \sum_{k=0}^{\infty} [R(\lambda, A_0^{\odot*})B]^k R(\lambda, A_0). \quad (9.9)$$

На самом деле это явное выражение для $R(\lambda, A)$ может быть использовано для проверки условий теоремы Хилле — Йосиды на оператор A и, следовательно, доказательства того, что A порождает C_0 -полугруппу. Отображение

$$\lambda \rightarrow R(\lambda, A_0^{\odot*})B$$

определяет аналитическую в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda > \omega_0(A_0)$ функцию со значениями в $\mathcal{L}(X)$.

Следующий результат вытекает из (9.8) и того факта, что (слабо) компактные операторы на X образуют замкнутый двусторонний идеал в $\mathcal{L}(X)$.

Предложение 9.12. *Резольвента $R(\lambda, A_0)$ является (слабо) компактной при любом $\lambda \in \rho(A_0)$ тогда и только тогда, когда $R(\lambda, A)$ является (слабо) компактной при любом $\lambda \in \rho(A)$.*

Предложение 9.13. *Если для любого λ с $\operatorname{Re} \lambda > s(A_0)$ оператор $R(\lambda, A_0^{\odot*})B$ компактен, то множество $\{\lambda \in \sigma(A) : \operatorname{Re} \lambda > s(A_0)\}$ содержит не более счетного числа изолированных точек λ_k и каждая λ_k лежит вне существенного спектра оператора A , или, что эквивалентно, $\sigma_{ess}(A) \subseteq \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda \leq s(A_0)\}$.*

Доказательство. Достаточно показать, что $\sigma_{ess}(A) \cap \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda > s(A_0)\} = \emptyset$. Предположим, что существует точка $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$ со свойством $\operatorname{Re} \lambda > s(A_0)$. Выберем число $\gamma \in \rho(A)$, удовлетворяющее условиям $\operatorname{Im} \gamma = \operatorname{Im} \lambda$ и $\operatorname{Re} \gamma > s(A)$. По теореме об отображении существенного спектра (теорема Д.3.6) мы получаем, что $(\gamma - \lambda)^{-1} \in \sigma_{ess}(R(\gamma, A))$. Поэтому

$$r_{ess}(R(\gamma, A)) \geq \left| \frac{1}{\gamma - \lambda} \right| \geq \frac{1}{\operatorname{Re} \gamma - \operatorname{Re} \lambda} > \frac{1}{\operatorname{Re} \gamma - s(A_0)}.$$

С другой стороны,

$$r_{ess}(R(\gamma, A)) = r_{ess}(R(\gamma, A_0)),$$

так как $R(\gamma, A) - R(\gamma, A_0) = R(\gamma, A_0^{\odot*})BR(\gamma, A) -$ компактный оператор. Однако

$$r_{ess}(R(\gamma, A_0)) \leq r(R(\gamma, A_0)) \leq \frac{1}{\operatorname{Re} \gamma - s(A_0)},$$

что противоречит предыдущему неравенству. Предложение доказано. ■

Для $\lambda \in \rho(A_0)$ определим ограниченный линейный оператор $K(\lambda): X \rightarrow X$ по формуле

$$K(\lambda) = R(\lambda, A_0^{\odot*})B. \quad (9.10)$$

Ниже нам будет ясно, что вопрос, при каких условиях операторы $U(t)$ становятся компактными, является очень важным: см. предложение 9.20. Для того чтобы быть в состоянии на него ответить, нам необходимы две следующие леммы.

Лемма 9.14. *Для каждого $\lambda \in \rho(A_0)$ и $x \in X$*

$$R(\lambda, A_0)U(t)x = \int_0^t T_0(t-s)K(\lambda)T(s)x ds, \quad t \geq 0.$$

Доказательство. Пусть $x \in X$, $x^\odot \in X^\odot$, $t \geq 0$ и $\lambda \in \rho(A_0)$. Тогда

$$\begin{aligned}
 & \left\langle \int_0^t T_0(t-s) K(\lambda) T(s) x ds, x^\odot \right\rangle = \\
 &= \int_0^t \langle T_0(t-s) R(\lambda, A_0^{\odot*}) B T(s) x, x^\odot \rangle ds = \\
 &= \int_0^t \langle R(\lambda, A_0^\odot) T_0^\odot(t-s) x^\odot, B T(s) x \rangle ds = \\
 &= \int_0^t \langle T_0^\odot(t-s) R(\lambda, A_0^\odot) x^\odot, B T(s) x \rangle ds = \\
 &= \int_0^t \langle R(\lambda, A_0^\odot) x^\odot, T_0^{\odot*}(t-s) B T(s) x \rangle ds = \\
 &= \left\langle \int_0^t T_0^{\odot*}(t-s) B T(s) x ds, R(\lambda, A_0^\odot) x^\odot \right\rangle = \\
 &= \left\langle R(\lambda, A_0^{\odot*}) \int_0^t T_0^{\odot*}(t-s) B T(s) x ds, x^\odot \right\rangle.
 \end{aligned}$$

Отсюда следует утверждение леммы. ■

Пусть $I \subseteq [0, \infty)$ и $V(t)$ — отображение из I в $\mathcal{L}(X)$. Говорим, что V является *и-непрерывным* на I , если V непрерывно на I относительно равномерной операторной топологии на $\mathcal{L}(X)$.

Лемма 9.15. Если $U(t)$ является *и-непрерывной* на $[t_0, \infty)$, то

$$U(t) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda [R(\lambda, A) T(t) - R(\lambda, A_0) T_0(t)]$$

при любом $t \geq t_0$, где предел понимается в равномерной операторной топологии.

Доказательство. Если $\lambda \in \mathbb{R}$ достаточно велико, то

$$\begin{aligned}
 R(\lambda, A) T(t) x - R(\lambda, A_0) T_0(t) x &= \\
 &= \int_0^\infty e^{-\lambda s} \{T(s) T(t) x - T_0(s) T_0(t) x\} ds = \\
 &= \int_0^\infty e^{-\lambda s} U(t+s) x ds, \quad t \geq 0, \quad x \in X.
 \end{aligned}$$

Таким образом, мы получаем

$$\begin{aligned} \lambda R(\lambda, A) T(t)x - \lambda R(\lambda, A_0) T_0(t)x - U(t)x = \\ = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda s} \{U(t+s) - U(t)\} x ds, \quad t \geq 0, \quad x \in X. \end{aligned}$$

Для любого $t \geq 0$, $x \in X$ и $h > 0$ имеет место оценка

$$\begin{aligned} \|\lambda R(\lambda, A) T(t)x - \lambda R(\lambda, A_0) T_0(t)x - U(t)x\| \leq \\ \leq \int_0^h \lambda e^{-\lambda s} \|U(t+s) - U(t)\| \cdot \|x\| ds + \\ + \int_h^\infty \lambda e^{-\lambda s} \|U(t+s)x - U(t)x\| ds \leq \\ \leq \sup_{0 \leq s \leq h} \|U(t+s) - U(t)\| \cdot \|x\| + \frac{4M\lambda}{\lambda - \bar{\omega}} e^{\bar{\omega}t} e^{-(\lambda - \bar{\omega})h} \|x\|. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали, что

$$\|U(t+s)x - U(t)x\| \leq (\|T_0(t+s)\| + \|T(t+s)\| + \|T_0(t)\| + \|T(t)\|) \|x\|$$

и $\|T_0(t)\|, \|T(t)\| \leq M e^{\bar{\omega}t}$, $t \geq 0$, где $\|T_0(t)\| \leq M e^{\omega t}$ и $\bar{\omega} = \omega + M \|B\|$ (см. теорему 3.20). Итак,

$$\begin{aligned} \|\lambda R(\lambda, A) T(t) - \lambda R(\lambda, A_0) T_0(t) - U(t)\| \leq \\ \leq \sup_{0 \leq s \leq h} \|U(t+s) - U(t)\| + C e^{-\lambda h}, \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

при любом $h > 0$. Наконец, утверждение леммы следует из u -непрерывности функции $U(t)$. ■

Теперь мы можем доказать следующую теорему.

Теорема 9.16. Пусть $U(t)$ есть u -непрерывная функция на $[t_0, \infty)$ и $K(\lambda)$ — компактный оператор при достаточно большом $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда оператор $U(t)$ компактен при любом $t \geq t_0$.

Доказательство. В силу предыдущей леммы и того факта, что компактные операторы образуют замкнутый идеал в $\mathcal{L}(X)$, достаточно доказать компактность операторов

$$\begin{aligned} \lambda [R(\lambda, A) T(t) - R(\lambda, A_0) T_0(t)] = \\ = \lambda [R(\lambda, A) - R(\lambda, A_0)] T(t) + \lambda R(\lambda, A_0) U(t), \quad t \geq t_0, \end{aligned}$$

при достаточно больших $\lambda \in \mathbb{R}$. Поскольку

$$R(\lambda, A) - R(\lambda, A_0) = \sum_{n=1}^{\infty} K(\lambda)^n R(\lambda, A_0)$$

являются компактными операторами, нам остается доказать компактность

$$R(\lambda, A_0) U(t)$$

при достаточно больших λ . Воспользуемся леммой 9.14:

$$R(\lambda, A_0) U(t) x = \int_0^t T_0(t-s) K(\lambda) T(s) x ds.$$

Положим $V_\lambda(t) = R(\lambda, A_0) U(t)$, $t \geq 0$. Пусть $\mathbb{B} = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$. Мы должны показать, что множество $V_\lambda(t) \mathbb{B}$ — относительно компактное подмножество пространства X при любом $t \geq 0$. Пусть теперь $t \geq 0$ фиксировано. Предположим, что мы можем доказать относительную компактность в X подмножества

$$\bigcup_{0 \leq s \leq t} T_0(t-s) K(\lambda) T(s) \mathbb{B}.$$

Для $x \in \mathbb{B}$ получаем

$$V_\lambda(t) x \in \overline{\text{co}} \left(\bigcup_{0 \leq s \leq t} T_0(t-s) K(\lambda) T(s) \mathbb{B} \right),$$

где для подмножества $Y \subset X$ запись $\overline{\text{co}}(Y)$ означает замыкание его выпуклой оболочки (см. дополнение 3). По теореме Мазура множество

$$\overline{\text{co}} \left(\bigcup_{0 \leq s \leq t} T_0(t-s) K(\lambda) T(s) \mathbb{B} \right)$$

компактно, что и завершает основное доказательство.

Теперь докажем, что множество

$$\bigcup_{0 \leq s \leq t} T_0(t-s) K(\lambda) T(s) \mathbb{B}$$

действительно относительно компактно в X . Пусть

$$V := K(\lambda) \left(\bigcup_{0 \leq s \leq t} T(s) \mathbb{B} \right).$$

Тогда в силу компактности $K(\lambda)$ и ограниченности $T(s)$ ($0 \leq s \leq t$) множество V относительно компактно. Очевидно,

$$\bigcup_{0 \leq s \leq t} T_0(t-s) K(\lambda) T(s) \mathbb{B} \subseteq \bigcup_{0 \leq s \leq t} T_0(s) V.$$

Если сужение $T_0(s)$ на V является u -непрерывной на $[0, t]$ функцией, то теорема будет полностью доказана. Установим u -непрерывность.

Пусть $L > 0$ таково, что $\|T_0(s)\| \leq L$, $s \in [0, t]$. Пусть $\varepsilon > 0$. Поскольку V относительно компактно, то существует $\varepsilon/3L$ -сеть $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ со свойством $V \subseteq \bigcup_{i=1}^m B(v_i, \varepsilon/3L)$, где $B(v_i,$

$\varepsilon/3L$) — замкнутые шары с центрами в v_i и радиуса $\varepsilon/3L$. Для произвольного $i = 1, \dots, m$ функция $s \rightarrow T_0(s) v_i$ является равномерно непрерывной на $[0, t]$. Поэтому существуют $\delta_i > 0$, такие, что $\|T_0(s) v_i - T_0(\sigma) v_i\| \leq \varepsilon/3$, если $|s - \sigma| < \delta_i$. Положим $\delta = \min(\delta_1, \dots, \delta_m)$. Пусть теперь $v \in V$, и выберем $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, такое, что $v \in B(v_i, \varepsilon/3L)$. Тогда

$$\begin{aligned} \|T_0(s)v - T_0(\sigma)v\| &\leq \|T_0(s)v - T_0(s)v_i\| + \|T_0(s)v_i - T_0(\sigma)v_i\| + \\ &+ \|T_0(\sigma)v_i - T_0(\sigma)v\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Итак, u -непрерывность функции $T_0(s) : V \rightarrow X$ на $[0, t]$ доказана. ■

Замечание 9.17. (i) Важным выводом из этой теоремы является такое следствие: если $T_0(t)$ есть u -непрерывная на $[t_0, \infty)$ функция и резольвента $R(\lambda, A_0)$ компактна, то $T_0(t)$ является компактным оператором при $t \geq t_0$. Для того чтобы это установить, положим $B = I$. Тогда $U(t) = (e^t - 1) T_0(t)$, и доказательство следствия заканчивается применением теоремы 9.16.

(ii) Заметим, что доказательство теоремы становится тривиальным, если дополнительно предполагать компактность резольвенты $R(\lambda, A_0)$.

(iii) Условие u -непрерывности функции $U(t)$ в теореме 9.16 нельзя опустить. Более того, если $U(t)$ компактна на $\mathbb{R}_+$, то $U(t)$ является u -непрерывной на $\mathbb{R}_+$. Это получается так же, как в предыдущем доказательстве.

Укажем теперь критерий для проверки u -непрерывности функции $U(t)$.

Предложение 9.18. Пусть $k \geq 1$ и $t_0 \geq 0$. Если $T_1(t) = \dots = T_{k-1}(t) = 0$ при $t \geq t_0$ и $T_k(t)$ является u -непрерывной на $[0, \infty)$, то $U(t)$ является u -непрерывной на $[t_0, \infty)$.

Доказательство. Чуть позже мы докажем, что если для любого целого $i \geq 1$ $T_{i-1}(t)$ есть u -непрерывная функция на $[0, \infty)$, то $T_i(t)$ является u -непрерывной на $[0, \infty)$. Итак, если $T_k(t)$ есть u -непрерывная функция на $[0, \infty)$, то по индукции мы получаем, что $T_{k+1}(t)$, $T_{k+2}(t)$ и т. д. также u -непрерывны на $[0, \infty)$. При $t \geq 0$ мы имеем $U(t) = \sum_{i=1}^{\infty} T_i(t)$ и, если $t \geq t_0$, то $U(t) = \sum_{i=k}^{\infty} T_i(t)$. Поэтому $U(t)$ является u -непрерывной на $[t_0, \infty)$.

Пусть $T_i(t)$ есть u -непрерывная на $[0, \infty)$ функция. Имеем

$$\begin{aligned} \|T_{i+1}(t+h) - T_{i+1}(t)\| &\leq \left\| \int_t^{t+h} T_0^{\odot*}(s) B T_i(t+h-s) ds \right\| + \\ &+ \left\| \int_0^t T_0^{\odot*}(s) B \{T_i(t+h-s) - T_i(t-s)\} ds \right\|. \end{aligned}$$

Легко видеть, что первое слагаемое справа стремится к нулю при $h \downarrow 0$. Что касается второго слагаемого, то справедлива оценка

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t T_0^{\odot*}(s) B \{T_i(t+h-s) - T_i(t-s)\} ds \right\| &\leq \\ &\leq \frac{M}{\omega} (e^{\omega t} - 1) \|B\| \cdot \sup_{0 \leq s \leq t} \|T_i(s+h) - T_i(s)\|, \end{aligned}$$

причем правая часть также стремится к нулю при $h \downarrow 0$ в силу u -непрерывности $T_i(t)$. Предложение полностью доказано. ■

Замечания 9.19. (i) Важным частным случаем данного предложения является такое утверждение: если $T_1(t)$ есть u -непрерывная на $\mathbb{R}_+$ функция, то $U(t)$ также есть u -непрерывная функция на $\mathbb{R}_+$.

(ii) Если $U(t)$ есть u -непрерывная функция на $\mathbb{R}_+$, то $U^{\odot*}(t)$ отображает $X^{\odot*}$ в X . Для того чтобы увидеть это, положим $x^{\odot*} \in X^{\odot*}$ и определим $y_h \in X$ по формуле $y_h = h^{-1} \int_0^h U^{\odot*}(t + s)x^{\odot*} ds$, где интеграл понимается как слабый $*$ -интеграл Римана (см. § 3.5). Понятно, что $y_h \rightarrow U^{\odot*}(t)x^{\odot*}$ при $h \downarrow 0$ в топологии нормы $X^{\odot*}$. В то же время X — замкнутое подпространство в $X^{\odot*}$. Утверждение доказано.

Если $U(t)$ становится компактной, начиная с $t \geq t_0$, то

$$\|T(t)\|_\alpha = \|T_0(t) + U(t)\|_\alpha = \|T_0(t)\|_\alpha \leq \|T_0(t)\|$$

при $t \geq t_0$ (см. лемму Д.3.8). Из (8.2) и (8.6) получаем

$$\omega_{ess}(A) \leq \omega_0(A_0).$$

Предложение 9.20. Если $U(t) = T(t) - T_0(t)$ становится компактной, то $\omega_{ess}(A) \leq \omega_0(A_0)$.

Наконец, сосредоточим наше внимание на свойствах позитивности и неприводимости полугрупп. Наш основной результат связывает неприводимость возмущенной полугруппы $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ с неприводимостью невозмущенной полугруппы $\{T_0(t)\}_{t \geq 0}$ и возмущения B или, лучше, с неприводимостью операторов $K(\lambda)$. На протяжении всей оставшейся части этого параграфа будем считать, что X — банахова структура. Тогда X^* — также банахова структура. В общем случае, как показали Грабош и Негель¹⁾ $X^{\odot}$ не будет банаховой структурой. Тем не менее, будучи

¹⁾ Grabosch A., Nagel R. Order structure of the semigroup dual: a counterexample. — Kon. Ned. Akad. wetensch. 1989. 92, N 2, p. 199 — 201. — Прим. перев.

замкнутым подпространством банаховой структуры X^* , банахово пространство $X^\odot$ наделено частичной упорядоченностью. Если $\{T_0(t)\}_{t \geq 0}$ — позитивная полугруппа на X и определенный в (9.10) оператор $K(\lambda)$ является положительным (или, что эквивалентно, $B: X \rightarrow X^{\odot*}$ положителен), то $U(t)$ является положительным оператором при любом $t \geq 0$. Это следует из разложения в ряд

$$U(t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t), \quad t \geq 0,$$

где $T_k(t)$ заданы в (9.6). Заметим, что оператор вложения $i: X \rightarrow X^{\odot*}$ (см. § 3.4) отображает конус X^+ в $(X^{\odot*})^+$. Следовательно, $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ — также позитивная полугруппа и, более того, при любом $t \geq 0$

$$0 \leq T_0(t) \leq T(t).$$

Отсюда получаем

$$\omega_0(A_0) \leq \omega_0(A).$$

Для достаточно больших $\lambda \in \mathbb{R}$ выполняется соотношение

$$0 \leq R(\lambda, A_0) \leq R(\lambda, A),$$

которое влечет

$$s(A_0) \leq s(A).$$

Сейчас мы докажем важный критерий для проверки свойства неприводимости возмущенной полугруппы $\{T(t)\}_{t \geq 0}$. Доказательство этого результата опирается на следующее утверждение: замкнутый идеал J в X инвариантен относительно $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ тогда и только тогда, когда J инвариантен относительно $R(\lambda, A)$ при $\lambda > s(A)$ (ср. с предложением 7.6).

Теорема 9.21. Пусть X — банахова структура, $\{T_0(t)\}_{t \geq 0}$ — позитивная полугруппа и B — положительный оператор. Возмущенная полугруппа $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ неприводима тогда и только тогда, когда лишь $J = \{0\}$ и $J = X$ являются замкнутыми идеалами со свойствами

- (i) $T_0(t)J \subseteq J, \quad t \geq 0,$
- (ii) $K(\lambda)J \subseteq J.$

Доказательство. Предположим сначала, что $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ неприводима. Пусть J — замкнутый идеал в X , удовлетворяющий условиям (i) и (ii). Тогда $R(\lambda, A_0)J \subseteq J, K(\lambda)J \subseteq J$, и из (9.9) мы получаем, что $R(\lambda, A)J \subseteq J$ и, следовательно, $J = \{0\}$ или $J = X$.

Для доказательства утверждения в другую сторону предположим, что только $\{0\}$ и X являются замкнутыми идеалами, удовлетворяющими (i) и (ii). Мы доказываем, что $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ или, что эквивалентно, $R(\lambda, A)$ (где $\lambda > s(A)$) является неприводимой. Пусть J — замкнутый идеал в X , удовлетворяющий условию $R(\lambda, A)J \subseteq J$ при $\lambda > s(A)$. Мы намерены показать, что отсюда следует $J = \{0\}$ или X . Для каждого $x \in J$ получаем

$$|R(\lambda, A_0)x| \leq R(\lambda, A_0)|x| \leq R(\lambda, A)|x| \in J.$$

Отсюда $R(\lambda, A_0)J \subseteq J$ или, что эквивалентно, $T_0(t)J \subseteq J$ при $t \geq 0$. Пусть снова $x \in J$. Тогда при $\lambda > s(A)$

$$\begin{aligned} |R(\lambda, A_0^{\odot*})BR(\lambda, A)x| &\leq R(\lambda, A_0^{\odot*})BR(\lambda, A)|x| = \\ &= (R(\lambda, A) - R(\lambda, A_0))|x| \leq \\ &\leq R(\lambda, A)|x| \in J, \end{aligned}$$

и, значит, $R(\lambda, A_0^{\odot*})BR(\lambda, A)x \in J$. Если $\mu > s(A)$, то

$$R(\mu, A_0)R(\lambda, A_0^{\odot*})BR(\lambda, A)x \in J,$$

и из резольвентного тождества получаем

$$(R(\mu, A_0^{\odot*}) - R(\lambda, A_0^{\odot*}))BR(\lambda, A)x \in J.$$

Умножим $(R(\mu, A_0^{\odot*}) - R(\lambda, A_0^{\odot*}))BR(\lambda, A)x$ на λ и устремим $\lambda \rightarrow \infty$. В силу замкнутости идеала J и сходимости $\lambda R(\lambda, A)x \rightarrow x$ при $\lambda \rightarrow \infty$ получаем $R(\mu, A_0^{\odot*})Bx \in J$, т. е. $K(\mu)x \in J$. Таким образом, условия (i) и (ii) выполняются и, следовательно, $J = \{0\}$ или X . Отсюда получаем неприводимость полугруппы $\{T(t)\}_{t \geq 0}$. ■

Следствие 9.22. Пусть $\{T_0(t)\}_{t \geq 0}$ — позитивная C_0 -полугруппа на банаховой структуре X с генератором A_0 . Пусть $B: X \rightarrow X$ — положительный ограниченный линейный оператор, и пусть $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ — полугруппа, порожденная оператором $A = A_0 + B$. Тогда полугруппа $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ неприводима в том и только том случае, когда лишь $J = \{0\}$ и $J = X$ являются замкнутыми идеалами, удовлетворяющими условиям

- (i) $T_0(t)J \subseteq J$ при $t \geq 0$;
- (ii) $BJ \subseteq J$.

Доказательство. Если $B \in \mathcal{L}(X)$, то из теоремы 9.21 (ii) при условии $x \in J$ следует, что $R(\lambda, A_0)Bx \in J$. Домножая, как и при доказательстве теоремы 9.21, на λ , устремляя $\lambda \rightarrow \infty$ и используя замкнутость J , мы получаем $Bx \in J$. Отсюда следует требуемый результат. ■

Глава 10

Два примера структурированной популяционной динамики

10.1. Рост и деление клеток, зависящие от их размера

Рассмотрим популяцию клеток, которые характеризуются размером s . Показателем размера может быть длина клетки, ее объем, содержание ДНК или какая-либо другая характеристика, которая сохраняется при делении. Любой рост клеток в детерминистическом случае описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{ds}{dt} = g(s).$$

Функция g предполагается такой, чтобы клетки не могли вырасти за границу $s = 1$ (см. предположение 10.1). Далее мы представляем себе гибель и деление как случайный процесс, и пусть $\mu(s)$ и $b(s)$ означают вероятности того, что в единицу времени материнская клетка размера s соответственно погибает или делится на две дочерние клетки, каждая из которых имеет размер $s/2$. Мы предполагаем также, что клетки не могут делиться при размере, меньшем, чем a ($0 < a < 1$), и, следовательно, клеток размера меньше, чем $a/2$, не существует. Относительно функций g , μ и b сделаем следующие предположения.

Предположения 10.1.

[A_g] $g \in C^1\left[\frac{1}{2}a, 1\right]$, $g(s) > 0$, $s \in \left[\frac{1}{2}a, 1\right)$; $g(1) = 1$ и $g'(1) \neq 0$;

[A_μ] функция μ липшиц-непрерывна и неотрицательна на $\left[\frac{1}{2}a, 1\right]$;

[A_b] функция b липшиц-непрерывна на $\left[\frac{1}{2}a, 1\right]$; $b(s) = 0$ при $s \in \left[\frac{1}{2}a, a\right]$; $b(s) > 0$ при $s \in (a, 1]$.

Естественно, это не самые слабые условия, при которых будет справедлива излагаемая здесь теория. Однако в данной главе мы не стремимся к большей общности.

Пусть $u(t, s)$ — плотность размера во время t , т. е. $\int_{s_1}^{s_2} u(t, s) ds$ есть число клеток величины от s_1 до s_2 . Тогда $u(t, s)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, s) + \frac{\partial}{\partial s}(g(s)u(t, s)) = -\mu(s)u(t, s) - b(s)u(t, s) + 4b(2s)u(t, 2s) \quad (10.1)$$

с граничными условиями

$$u(t, a/2) = 0 \quad \text{при } t > 0, \quad (10.2)$$

которые гарантируют невозможность появления клеток величины $s = a/2$. Последнее слагаемое справа в (10.1) следует считать нулем при $s \geq 1/2$. Мы задаем начальные условия

$$u(0, s) = \varphi(s). \quad (10.3)$$

Будем предполагать, что $\varphi \in X := L_1[a/2, 1]$, и займемся поиском решений $u(t, \cdot) \in X$, для которых $t \rightarrow u(t, \cdot)$ непрерывно относительно нормы в X , в нашем случае L_1 -нормы. Можно записать (10.1)–(10.3) как абстрактную задачу Коши в X :

$$\frac{du}{dt}(t) = Au(t), \quad u(0) = \varphi, \quad (10.4)$$

где замкнутый оператор A с областью определения

$$\mathcal{D}(A) =$$

$$= \{\psi \in X: g\psi \text{ абсолютно непрерывна и } \psi(a/2) = 0\} \quad (10.5)$$

задан формулой

$$(A\psi)(s) = -\frac{d}{ds}(g(s)\psi(s)) - \mu(s)\psi(s) - b(s)\psi(s) + 4b(2s)\psi(2s). \quad (10.6)$$

Мы пишем

$$A = A_0 + B, \quad (10.7)$$

где замкнутый оператор A_0 с областью определения $\mathcal{D}(A_0) = \mathcal{D}(A)$ задается дифференциальным выражением

$$(A_0\psi)(s) = -\frac{d}{ds}(g(s)\psi(s)) - \mu(s)\psi(s) - b(s)\psi(s),$$

а $B: X \rightarrow X$ — линейный ограниченный оператор

$$(B\psi)(s) = 4b(2s)\psi(2s).$$

Пусть $S(t, s)$ — решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dS}{dt}(t, s) = g(S(t, s)), \quad S(0, s) = s.$$

Тогда $S(t, s) = G^{inv}(1 + G(s))$, где

$$G(s) = \int_{a/2}^s \frac{d\xi}{g(\xi)},$$

а символ G^{inv} означает функцию, обратную к функции G . Мы можем интерпретировать $S(t, s)$ как размер индивидуумов во время t , имевших во время 0 размер s . Заметим, что для любого $a/2 \leq s < 1$ выполняется

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S(t, s) = 1.$$

Пусть

$$E(s) = \exp\left(-\int_{a/2}^s \frac{\mu(\xi) + b(\xi)}{g(\xi)} d\xi\right), \quad a/2 \leq s \leq 1. \quad (10.8)$$

Отметим, что $E(1) = 0$. При $\sigma \leq s$ отношение $E(s)/E(\sigma)$ можно интерпретировать как вероятность того, что клетка размера σ достигнет величины s , не погибнув и не разделившись. Очевидно, что A_0 порождает C_0 -полугруппу $\{T_0(t)\}_{t \geq 0}$, для которой можно выписать явное выражение

$$\begin{aligned} (T_0(t)\varphi)(s) &= \\ &= \begin{cases} \frac{E(s)}{g(s)} \cdot \frac{g(S(-t, s))}{E(S(-t, s))} \cdot \varphi(S(-t, s)) & \text{при } \frac{a}{2} < S(-t, s), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \end{aligned} \quad (10.9)$$

Формула вариации постоянной (например, (3.37)) приобретает вид

$$\begin{aligned} u(t, s) &= \frac{E(s)}{g(s)} \cdot \left\{ \left(\frac{g}{E} \varphi \right)(S(-t, s)) + \right. \\ &\quad \left. + 4 \int_0^t \frac{g(S(-\tau, s))}{E(S(-\tau, s))} - b(2S(-\tau, s)) \cdot n(t-\tau, 2S(-\tau, s)) d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (10.10)$$

Ряд

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)\varphi,$$

где $T_k(t)$ определены в (3.38), можно интерпретировать как *разложение по генерации*: $u_0(t) = T_0(t)\phi$ представляет клетки нулевого поколения, т. е. все клетки, которые существовали в момент времени нуль и еще не погибли и не разделились. По индукции $u_k(t) = T_k(t)\phi$ представляет собой клетки k -го поколения, состоящие из всех дочерних клеток, порожденных $(k-1)$ -м поколением.

Из (10.10) можно получить решение $u(t, \cdot) = T(t)\phi$ задачи (10.4). Здесь $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ — полугруппа, порождаемая оператором $A = A_0 + B$. Мы хотим применить теорему 9.11, которая дает описание поведения решения за большой промежуток времени. Прежде чем сделать это, следует проверить два условия:

(i) $\omega_{ess}(A) < \omega_0(A)$,

(ii) полугруппа $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ неприводима.

Сначала покажем, что условие (i) выполняется, если сделать следующее предположение относительно скорости роста g .

Предположение 10.2. $g(2s) < 2g(s)$ при $s \in [a/2, 1/2]$.

Обратим внимание на то, что в силу предположения 10.1 $[A_g]$ это предположение выполняется в окрестности $s = 1/2$.

Лемма 10.3. Пусть $U(t)$ — оператор-функция, определенная в (3.42), т. е.

$$U(t) = T(t) - T_0(t), \quad t \geq 0.$$

Тогда оператор $U(t)$ компактен при всех $t \geq 0$.

Доказательство. Очевидно, что оператор $K(\lambda) = R(\lambda, A_0)B$ является компактным. В силу теоремы 9.16 с учетом предложения 9.18 нам достаточно показать, что $T_1(t)$ непрерывна на $\mathbb{R}_+$ в равномерной операторной топологии. Мы располагаем следующим явным выражением:

$$\begin{aligned} (T_1(t)\phi)(s) &= 4 \frac{E(s)}{g(s)} \int_0^t \left(\frac{g}{E} \right) (S(-\tau, s)) \cdot \left(\frac{b}{g} E \right) (2S(-\tau, s)) \times \\ &\quad \times \left(\frac{g}{E} \right) (S(-t+\tau, 2S(-\tau, s))) d\tau. \end{aligned}$$

Сделав замену $\xi = S(-t+\tau, 2S(-\tau, s))$ для τ и положив $z = S(-\tau, s)$, получаем

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \{g(2z) - 2g(z)\} \frac{g(\xi)}{g(2z)}.$$

Доказательство u -непрерывности $T_1(t)$ на $[0, \infty)$ (в силу предположения 10.2

$$\left| \frac{d\xi}{d\tau} \right| \neq 0)$$

становится простым упражнением и оставляется читателю. ■

Из предложения 9.20 следует неравенство

$$\omega_{ess}(A) \leq \omega_0(A_0). \quad (10.11)$$

Лемма 10.4. $\omega_0(A_0) = -\mu(1) - b(1) =: -\beta$.

Доказательство. Пусть $c := -g(1) > 0$. В силу предположения 10.1 существуют положительные константы m_1, m_2, m_3, m_4 со свойствами

$$m_1(1-s)e^{-ct} \leq 1 - S(t, s) \leq m_2(1-s)e^{-ct},$$

$$m_3(1-s)^{\beta/c} \leq E(s) \leq m_4(1-s)^{\beta/c}.$$

Для $\varphi \in X$ из (10.9) получаем

$$\begin{aligned} \|T_0(t)\varphi\| &= \int_{S(0,t)}^1 \frac{E(s)}{g(s)} \cdot \left(\frac{g}{E} |\varphi| \right) (S(-t, s)) ds = \\ &= \int_0^1 \frac{E(S(t, \xi))}{E(\xi)} |\varphi(\xi)| d\xi \leq \\ &\leq \int_0^1 \frac{m_4(m_2(1-\xi)e^{-ct})^{\beta/c}}{m_3(1-\xi)^{\beta/c}} |\varphi(\xi)| d\xi = Me^{-\beta t} \|\varphi\|, \end{aligned}$$

где $M = \frac{m_4}{m_3} \cdot m_2^{\beta/c}$. Подобным же образом при $0 \leq \varphi$ можно показать, что

$$\|T_0(t)\varphi\| \geq me^{-\beta t} \|\varphi\|,$$

где $m = \frac{m_3}{m_4} m_1^{\beta/c}$. Отсюда находим $\omega_0(A_0) = -\beta$. ■

Предложение 10.5. $\omega_{ess}(A) \leq \omega_0(A)$.

Доказательство. Мы уже отмечали, что оператор $K(\lambda) = R(\lambda, A_0)B$ компактен при $\lambda \in \rho(A_0)$. Поэтому если $1 \in \sigma(K(\lambda))$, то $1 \in \sigma_p(K(\lambda))$. Пусть $K(\lambda)\psi = \psi$ при некотором элементе $\psi \in X$; тогда $A\psi = \lambda\psi$. Предположим, что мы можем доказать

существование числа $\lambda \in \mathbb{R}$ со свойствами $\lambda > -\beta$ и $r(K(\lambda)) = 1$. Тогда $1 \in \sigma_p(K(\lambda))$ (см. § Д.3.3). (Оператор $K(\lambda)$ является положительным при $\lambda > -\beta$.) Итак, мы получаем, что $s(A) \geq \lambda > -\beta = \omega_0(A_0) \geq \omega_{ess}(A)$, откуда и следует утверждение предложения. Поскольку функция $\lambda \rightarrow r(K(\lambda))$ непрерывна на $(-\beta, \infty)$ и $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} r(K(\lambda)) = 0$, то для восполнения пробела, связанного с существованием λ , достаточно установить неравенство $\lim_{\lambda \downarrow -\beta} r(K(\lambda)) > 1$. Мы докажем это, следуя Крейну и Рутману: пусть $L \in \mathcal{L}^+(X)$ и $\psi \in X^+$, $\psi \neq 0$, обладают свойством

$$L\psi \geq c\psi \text{ при некоторой } c > 0,$$

тогда $r(L) \geq c$. Как и при доказательстве предыдущей леммы, мы можем оценить E_λ так:

$$l_1(1-s)^{(\beta+\operatorname{Re} \lambda)/c} \leq |E_\lambda(s)| \leq l_2(1-s)^{(\beta+\operatorname{Re} \lambda)/c},$$

где l_1, l_2 — некоторые положительные константы. Таким образом, существует положительная константа C , такая, что при любых $\lambda > -\beta$ и $\psi \in X^+$ справедливо неравенство

$$[K(\lambda)\psi](s) \geq C(1-s)^{(\beta+\lambda)/c-1} \int_{a/2}^s b(2\xi)\psi(2\xi) d\xi.$$

Положим $p = \lambda + \beta > 0$ и определим функцию

$$\psi_p(s) = \begin{cases} 0, & \text{если } s \in \left[\frac{a}{2}, \frac{a+1}{2}\right), \\ (1-s)^{-1+p}, & \text{если } s \in \left[\frac{a+1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Существует положительное число $\tilde{b} > 0$, такое, что $b(s) > \tilde{b}$ при любом $s \in \left[\frac{a+1}{2}, 1\right]$. Для $s \geq \frac{a+1}{2}$ получаем

$$\begin{aligned} [K(\lambda)\psi_p](s) &\geq C(1-s)^{-1+p} \int_{a/2}^{1/2} b(2\xi)\psi_p(2\xi) d\xi = \\ &= \frac{C}{2}(1-s)^{-1+p} \int_a^1 b(\xi)\psi_p(\xi) d\xi \geq \\ &\geq \frac{C}{2}(1-s)^{-1+p} \int_{(a+1)/2}^1 \tilde{b}(1-\xi)^{-1+p} d\xi = \\ &= \frac{\tilde{b} \cdot C}{2p} \left(\frac{1-a}{2}\right)^p \psi_p(s). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при любом $\lambda > -\beta$ выполняется неравенство

$$r(K(\lambda)) \geq \frac{\tilde{b}C}{2(\lambda+\beta)} \left(\frac{1-a}{2} \right)^{\lambda+\beta}$$

и, значит, $r(K(\lambda)) \rightarrow \infty$ при $\lambda \downarrow -\beta$. Предложение полностью доказано. ■

Замечание. Так как пространство X есть в данном случае L_1 -пространство, то (см. теорему 9.5)

$$s(A) = \omega_0(A).$$

Мы продолжим наше изложение доказательством неприводимости возмущенной полугруппы. Используем для этой цели следствие 9.22. Поэтому для начала опишем замкнутые идеалы в $X = L_1[a/2, 1]$.

Каждый замкнутый идеал J в $L_1[a/2, 1]$ имеет вид

$$J = J_\Omega = \{\varphi \in L_1[a/2, 1] : \varphi \text{ равна нулю на } \Omega\},$$

где Ω — измеримое подмножество в $[a/2, 1]$.

Предложение 10.6. Полугруппа $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ неприводима.

Доказательство. Согласно следствию 9.22, все будет установлено, если мы покажем, что $\{T_0(t) : t \geq 0\} \cup \{B\}$ неприводимо. Пусть J — замкнутый идеал в $X = L_1[a/2, 1]$, инвариантный относительно $\{T_0(t)\}_{t \geq 0}$. Следовательно, $J = J_\Omega = \{\varphi \in X : \varphi \text{ равна нулю на } \Omega\}$ при некотором измеримом подмножестве Ω в $[a/2, 1]$. Поскольку $T_0(t)J \subseteq J$ при любом $t \geq 0$, то мы получаем

$$s \in \Omega \wedge S(-t, s) \geq a/2 \Rightarrow S(-t, s) \in \Omega. \quad (*)$$

Из $BJ \subseteq J$ следует импликация

$$s \in \Omega \cap (a/2, 1/2) \Rightarrow 2s \in \Omega. \quad (**)$$

Учитывая (*) и (**), получаем

$$\Omega = \emptyset \text{ или } \Omega = [a/2, 1],$$

что соответствует следующим двум вариантам:

$$J = X \text{ или } J = \{0\}.$$

Итак, неприводимость полугруппы $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ доказана. ■

Следующий результат вытекает из теоремы 9.11.

Теорема 10.7. Существуют $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, $\lambda_0 > -\beta$, $\varepsilon_0 > 0$, $\varphi_0 \in L_1^+[a/2, 1]$ и $\varphi_0^* \in L_\infty^+[a/2, 1]$, которые п. в. положительны, причем для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ найдется константа $M(\varepsilon) \geq 1$ со свой-

ством

$$\| e^{-\lambda_0 t} T(t) \varphi - \langle \varphi, \varphi_0^* \rangle \varphi_0 \| \leq M(\varepsilon) e^{-\varepsilon t} \| \varphi \|, \quad t \geq 0,$$

при всех $\varphi \in L_1[a/2, 1]$.

Мы называем λ_0 истинной скоростью роста (или параметром Мальтуса), а φ_0 — устойчивым распределением размера.

10.2. Динамика популяций, структурированных по возрасту

В предыдущем параграфе возмущение B было ограниченным линейным оператором из X в X , и это обстоятельство позволяло воспользоваться обычной теорией возмущений C_0 -полугрупп. В настоящем параграфе мы рассмотрим пример динамики структурированных популяций, для которой достаточно удобным оказывается аппарат § 3.5.

Рассмотрим следующую систему:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, a) + \frac{\partial u}{\partial a}(t, a) = -\mu(a)u(t, a), \quad t > 0, \quad 0 < a < 1, \quad (10.12)$$

$$u(t, 0) = \int_0^1 b(\alpha)u(t, \alpha)d\alpha, \quad t > 0, \quad (10.13)$$

$$u(0, a) = \varphi(a), \quad 0 \leq a \leq 1. \quad (10.14)$$

Эта задача Коши описывает эволюцию во времени популяции, структурированной по возрасту. В этой системе переменная t означает время, a — возраст, а $u(t, a)$ — плотность возрастной группы в момент времени t , причем $\int_{a_1}^{a_2} u(t, a) da$ — число особей в момент t , имеющих возраст между a_1 и a_2 . Далее $\mu(a)$ и $b(a)$ — соответственно смертность и рождаемость на одну особь. Граничное условие (10.13) отражает тот факт, что все новорожденные имеют нулевой возраст. Наконец, неявно предполагается, что особей старше единицы не существует (это, например, так, если μ имеет неинтегрируемую особенность в $a = 1$) или они не размножаются ($b(a) = 0$, если $a \geq 1$), и в этом случае ими можно пренебречь. Предположим временно, что $\varphi \in X := L_1[0, 1]$. Чуть позже станет ясно, что мы можем предполагать для начальных условий включение $\varphi \in M[0, 1]$ — это пространство, состоящее из всех регулярных борелевых мер на $[0, 1]$. Поскольку $L_1[0, 1] \cong M_a[0, 1]$, то $L_1[0, 1]$ непрерывно вкладывается в $M[0, 1]$, где $M_a[0, 1]$ — замкнутое подпространство пространства $M[0, 1]$, содержащее все абсолютно непрерывные меры. Будем считать до конца параграфа справедливым следующее предположение.

Предположение 10.8. $\mu, b \in L_{\infty}^+ [0, 1]$.

Ниже мы покажем, что система (10.12)–(10.14) может быть рассмотрена как «ограниченное» (в смысле § 3.5) возмущение системы, которая получается, если граничные условия (10.13) заменить на

$$u(t, 0) = 0 \quad \text{при} \quad t > 0.$$

Чтобы получить это, мы переформулируем (10.12), (10.15), (10.14) как следующую абстрактную задачу Коши в X :

$$\frac{du}{dt}(t) = A_0 u(t), \quad u(0) = \varphi,$$

где A_0 — замкнутый линейный оператор в X , задаваемый формулами

$$\mathcal{D}(A_0) = \{\varphi \in W_{1,1} [0, 1] : \varphi(0) = 0\},$$

$$A_0 \varphi = -\varphi' - \mu \varphi.$$

Легко проверить, что A_0 порождает C_0 -полугруппу $\{T_0(t)\}_{t \geq 0}$, в явном виде задаваемую так:

$$(T_0(t)\varphi)(a) = \begin{cases} \frac{E(a)}{E(a-t)} \varphi(a-t), & t \leq a, \\ 0, & t > a, \end{cases}$$

где

$$E(a) = \exp \left(- \int_0^a \mu(\alpha) d\alpha \right).$$

Сопряженное пространство — это $X^* = L_{\infty} [0, 1]$, а слабо *-непрерывная полугруппа $\{T_0^*(t)\}_{t \geq 0}$ на X^* имеет вид

$$(T_0^*(t)\psi)(a) = \begin{cases} \frac{E(a+t)}{E(a)} \psi(a+t), & a+t \leq 1, \\ 0, & a+t > 1. \end{cases}$$

Ее слабый *-генератор A_0^* определяется так:

$$\mathcal{D}(A_0^*) = \{\psi \in W_{\infty,1} [0, 1] : \psi(1) = 0\},$$

$$A_0^* \psi = \psi' - \mu \psi.$$

Понятно, что

$$X^{\odot} = C_0 [0, 1] = \{\psi \in C [0, 1] : \psi(1) = 0\}$$

и действие $T_0^{\odot}(t)$ определяется так же, как и действие $T_0^*(t)$. Оператор $A_0^{\odot}$ является частью оператора A_0^* в $X^{\odot}$, и поэтому

$$\mathcal{D}(A_0^{\odot}) = \{\psi \in X^{\odot} \cap W_{\infty,1} [0, 1] : \psi' - \mu \psi \in X^{\odot}\},$$

$$A_0^{\odot} \psi = \psi' - \mu \psi.$$

Снова находя сопряженное, получаем

$$X^{\odot*} = M_0[0, 1] = \{\Phi \in M[0, 1]: \Phi(\{1\}) = 0\}.$$

Примем следующие соглашения. Элементы из $M[0, 1]$ обозначим заглавными буквами. Однако если $\Phi \in M[0, 1]$ абсолютно непрерывна, то обозначаем соответствующий элемент из $L_1[0, 1]$ через φ :

$$\Phi(\Omega) = \int_{\Omega} \varphi(a) da$$

для любого борелевского множества $\Omega \subset [0, 1]$.

Полугруппа $T_0^{\odot*}(t)$ определяется так:

$$(T_0^{\odot*}(t)\Phi)(\Omega) = \int_{\Omega-t} \frac{E(a+t)}{E(a)} \Phi(da), \quad t \geq 0,$$

где $\Omega-t = \{a-t: a \in \Omega, a \geq t\}$ для любого борелевского множества $\Omega \subset [0, 1]$. Легко проверить, что

$$\mathcal{Z}(A_0^{\odot*}) = \{\Phi \in M_a[0, 1]: \varphi(a) = F[0, a] \text{ при некотором } F \in M[0, 1]\},$$

$$(A_0^{\odot*}\Phi)(\Omega) = -F(\Omega) - \int_{\Omega} \mu(a) \Phi(da), \quad \Phi \in \mathcal{Z}(A_0^{\odot*}).$$

Очевидно, что

$$X^{\odot\odot} = \{\Phi \in X^{\odot*}: \Phi \text{ абсолютно непрерывна}\}.$$

Итак, $X^{\odot\odot} = M_a[0, 1]$, и его можно отождествить с $X = L_1(0, 1]$. Мы получаем:

Предложение 10.9. *Пространство X является $\odot$ -рефлексивным относительно A_0 .*

Пусть $B: X \rightarrow X^{\odot*}$ — ограниченный линейный оператор, который определяется следующим образом:

$$B\varphi = \Delta \cdot \int_0^1 b(\alpha) \varphi(\alpha) d\alpha,$$

где $\Delta \in X^{\odot*} = M[0, 1]$ — мера Дирака, сосредоточенная в нуле. Пусть A — возмущение оператора A_0 оператором B , как указано в теореме 3.22(a), т. е.

$$\mathcal{Z}(A) = \{\Phi \in \mathcal{Z}(A_0^{\odot*}): A_0^{\odot*}\Phi + B\Phi \in X\},$$

$$A\Phi = A_0^{\odot*}\Phi + B\Phi.$$

Отождествляя $M_a[0, 1]$ и $L_1[0, 1]$, получаем

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ \varphi \in W_{1,1}[0, 1] : \varphi(0) = \int_0^1 b(a) \varphi(a) da \right\},$$

$$A\varphi = -\varphi' - \mu\varphi.$$

Как показано в § 3.5, оператор A порождает сильно непрерывную полугруппу $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ на X , которая соответствует решению исходной системы (10.12)–(10.14). Заметим, что в этом примере вся информация об операторе B определяется областью $\mathcal{D}(A)$ ввиду того, что действие оператора A такое же, как действие оператора A_0 .

В силу двойственности решение системы (10.12)–(10.14) можно получить для борелевской меры φ , которая не обязана лежать в L_1 . Для этого положим

$$u(t, \cdot; \Phi) = T^{\odot*}(t) \Phi, \quad t \geq 0,$$

при $\Phi \in X^{\odot*} = M_0[0, 1]$.

Другой путь чтобы получить результаты данного параграфа — рассмотреть сопряженную систему

$$\frac{dv}{dt}(t) = A^{\odot}v(t), \quad v(0) = \psi \in X^{\odot},$$

или, в развернутом виде,

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t, a) - \frac{\partial v}{\partial a}(t, a) = -\mu(a)v(t, a) + b(a)v(t, 0),$$

$$v(t, 1) = 0,$$

$$v(0, a) = \psi(a).$$

Заметим, что последнее слагаемое в правой части уравнения в частных производных порождает возмущение $B^* : X^{\odot} \rightarrow X^*$, которое имеет вид

$$(B^* \varphi)(a) = b(a) \varphi(0).$$

Подобно тому, как это было сделано в предыдущем параграфе, можно рассмотреть асимптотическое поведение решения $u(t, \cdot; \varphi)$, используя результаты § 9.2 и 9.3. Можно показать, что полугруппа $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ становится компактной, а при дополнительном предположении $b(a) > 0$ п. в. на $(1-\varepsilon, 1)$ полугруппа $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ является неприводимой.

Заканчивая данный параграф, отметим, что для этого частного примера существуют и другие методы доказательства существова-

ния и единственности решения и исследования его асимптотического поведения. А именно, легко выписать интегральное уравнение

Вольтерра для функции рождаемости $y(t) = \int_0^1 b(a) u(t, a) da$.

Связь с полугруппой $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ определяется формулой

$$(T(t)\varphi)(a) = \begin{cases} \frac{E(a)}{E(a-t)} \varphi(a-t), & t \leq a, \\ E(a) y(t-a), & t > a. \end{cases}$$

Дополнения

Дополнение 1

Выпуклые функции

В этом дополнении собраны основные свойства выпуклых функций в линейных пространствах. В частности, речь пойдет о непрерывности, субдифференциалах и дифференцируемости. В случае, когда пространство гильбертово, субдифференциальные отображения выпуклых функций дают нам примеры максимально монотонных (m -аккретивных) отображений. Все рассматриваемые здесь векторные пространства предполагаются вещественными.

Д.1.1. Определения и элементарные свойства

В этом параграфе мы рассматриваем функции F , определенные на вещественном векторном пространстве X , со значениями в $(-\infty, \infty] = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Для такой функции F множество

$$\text{dom}(F) = \{x \in X: F(x) < \infty\}$$

называется ее *эффективной областью определения*. Если $\text{dom}(F) \neq \emptyset$, то F называется *собственной*. *Надграфик* функции F есть подмножество в $X \times \mathbb{R}$, определенное формулой

$$\text{epi}(F) = \{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R}: F(x) \leq \alpha\}.$$

Ясно, что $\text{dom}(F)$ есть в точности проекция $\text{epi}(F)$ на X .

Определение Д.1.1. Функция $F: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ называется *выпуклой*, если $F(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda F(x) + (1 - \lambda)F(y)$ для всех $x, y \in X$ и всех $0 \leq \lambda \leq 1$.

Замечание Д.1.2. Непосредственно проверяются следующие утверждения:

(i) Если $F: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ выпукла, то $F(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i F(x_i)$ для любых $x_i \in X$ ($i = 1, 2, \dots, n$) и всех $0 \leq \lambda_i \leq 1$, где $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

(ii) Если F выпукла, то $\text{dom}(F)$ — выпуклое подмножество в X , т. е. $\lambda x + (1 - \lambda)y \in \text{dom}(F)$, если $x, y \in \text{dom}(F)$ и $0 \leq \lambda \leq 1$. Кроме того, если $\mathcal{U} \subseteq X$, $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ и если мы положим

$F(x) = f(x)$ для $x \in \mathcal{U}$ и $F(x) = \infty$ для $x \notin \mathcal{U}$, то F выпукла тогда и только тогда, когда $\mathcal{U}$ и f выпуклы.

(iii) Функция $F: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ выпукла тогда и только тогда, когда $\text{epi}(F)$ — выпуклое подмножество в $X \times \mathbb{R}$. Если F выпукла, то множества $\{x \in X: F(x) \leq \alpha\}$ и $\{x \in X: F(x) < \alpha\}$ выпуклы при любом $\alpha \in \mathbb{R}$.

(iv) Если функции $F, G: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ выпуклы и $\lambda \geq 0$, то $F + G$ и λF также выпуклы. Кроме того, если $\{F_\tau\}$ — семейство выпуклых функций, то функция F , определенная формулой $F(x) = \sup_\tau F_\tau(x)$ для $x \in X$, выпукла.

Собственную выпуклую функцию F из X в $(-\infty, \infty]$ будем называть *строго выпуклой*, если $F(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda F(x) + (1 - \lambda)F(y)$ для всех $x, y \in \text{dom}(F)$, $x \neq y$, и всех $0 < \lambda < 1$.

Пусть теперь X — локально выпуклое топологическое векторное пространство. Как обычно, функция $F: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ называется *полуниепрерывной снизу* (п.н.с.), если множества $\{x \in X: F(x) \leq \alpha\}$ замкнуты при всех $\alpha \in \mathbb{R}$. Легко видеть, что F п.н.с. тогда и только тогда, когда $\text{epi}(F)$ — замкнутое множество в $X \times \mathbb{R}$. Кроме того, поточечный супремум семейства п.н.с. функций — также п.н.с. функция.

Обозначим через X^* топологическое пространство, сопряженное к X . Хорошо известный факт, что выпуклое подмножество в X замкнуто тогда и только тогда, когда оно $\sigma(X, X^*)$ -замкнуто, имеет непосредственное, но интересное следствие: выпуклая функция $F: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ является п.н.с. тогда и только тогда, когда она $\sigma(X, X^*)$ -п.н.с.

Определение Д.1.3. Для локально выпуклого пространства X через $\Gamma_\infty(X)$ обозначим семейство всех п.н.с. выпуклых функций $F: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ и через $\Gamma(X)$ — множество всех собственных функций из $\Gamma_\infty(X)$.

Из упомянутых замечаний следует, что $\alpha F + \beta G \in \Gamma_\infty(X)$, если $F, G \in \Gamma_\infty(X)$ и $\alpha, \beta \geq 0$, и что поточечный супремум семейства функций из $\Gamma_\infty(X)$ также принадлежит $\Gamma_\infty(X)$. Простейшие функции из $\Gamma(X)$, — конечно, *непрерывные аффинные функции* на X , т. е. функции g , заданные формулой $g(x) = \langle x, x^* \rangle + \alpha$, где $x^* \in X^*$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Семейство всех таких аффинных функций будет обозначаться через $A(X)$. Из сказанного ранее следует, что поточечный супремум любого подмножества из $A(X)$ — функция из $\Gamma_\infty(X)$. Следующее утверждение показывает, что каждая функция из $\Gamma_\infty(X)$ представляется в таком виде.

Предложение Д.1.4. Если X — локально выпуклое пространство и $F \in \Gamma_\infty(X)$, то $F(x) = \sup \{g(x): g(x) \in Ax \text{ и } g \leq F\}$ при всех $x \in X$.

Прежде чем доказывать это предложение, напомним следующие две теоремы об отделимости, которые будут использоваться в дальнейшем. Предположим, что X — локальное выпуклое пространство и что A и B — непустые выпуклые подмножества в X . Тогда

(1) если $\text{int } A \neq \emptyset$ и $(\text{int } A) \cap B = \emptyset$, то существует такой ненулевой функционал $x^* \in X^*$, что $\sup \{ \langle x, x^* \rangle : x \in A \} \leq \inf \{ \langle x, x^* \rangle : x \in B \}$;

(2) если A замкнуто, B компактно и $A \cap B = \emptyset$, то существует такой функционал $x^* \in X^*$, что $\sup \{ \langle x, x^* \rangle : x \in A \} < \inf \{ \langle x, x^* \rangle : x \in B \}$ (как обычно, мы предполагаем, что локальное выпуклое пространство хаусдорфово).

Доказательство предложения Д.1.4. Возьмем $F \in \Gamma(X)$, $x_0 \in X$ и $\alpha_0 \in \mathbb{R}$, такие, что $\alpha_0 < F(x_0)$. Мы должны показать, что существует такая функция $g \in A(X)$, что $g \leq F$ и $\alpha_0 < g(x_0)$. Так как $\text{epi}(F)$ — замкнутое выпуклое подмножество пространства $X \times \mathbb{R}$ и $(x_0, \alpha_0) \notin \text{epi}(F)$, то существует такой линейный функционал $\Phi \in (X \times \mathbb{R})^*$, что $\langle (x_0, \alpha_0), \Phi \rangle < \gamma < \langle (x, \alpha), \Phi \rangle$ для всех $(x, \alpha) \in \text{epi}(F)$ и некоторого вещественного γ . Используя каноническую идентификацию $(X \times \mathbb{R})^*$ и $X^* \times \mathbb{R}$, находим такие $x^* \in X^*$ и $\beta \in \mathbb{R}$, что

$$\langle x_0, x^* \rangle + \beta \alpha_0 < \gamma < \langle x, x^* \rangle + \beta \alpha$$

для всех $(x, \alpha) \in \text{epi}(F)$. Предположим сначала, что $\beta \neq 0$. Возьмем любое $x \in \text{dom}(F)$. Тогда $\gamma < \langle x, x^* \rangle + \beta \alpha$ для всех $\alpha \geq F(x)$, откуда следует, что $\beta > 0$. Теперь в качестве g можно взять аффинную функцию, определенную как $g(x) = -\langle x, \beta^{-1}x^* \rangle + \beta^{-1}\gamma$. Заметим, что из условия $x_0 \in \text{dom}(F)$ следует, что $\beta \neq 0$, так как в этом случае $(x_0, F(x_0)) \in \text{epi}(F)$. Пусть теперь $\beta = 0$, т. е. $\langle x_0, x^* \rangle < \gamma < \langle x, x^* \rangle$ для всех $x \in \text{dom}(F)$. Определим $h \in A(X)$ формулой $h(x) = -\langle x, x^* \rangle + \gamma$. Тогда $h(x_0) > 0$ и $h(x) < 0$ для всех $x \in \text{dom}(F)$. Поскольку $\text{dom}(F) \neq \emptyset$, из первой части доказательства следует, что существует такая функция $f \in A(X)$, что $f \leq F$. Значит, $f + \lambda h \leq F$ для всех $\lambda > 0$. Возьмем теперь $\lambda > 0$ настолько большим, чтобы $f(x_0) + \lambda h(x_0)$ было больше α_0 , и положим $g = f + \lambda h$. ■

Необходимо заметить, что из установленного предложения, в частности, следует, что для любой функции $F \in \Gamma(X)$ существует такая функция $g \in A(X)$, что $g \leq F$.

Замечание Д.1.5. Пусть как и выше, X — локально выпуклое пространство, и пусть F — некоторая функция из X в $(-\infty, \infty]$. Тогда Γ -регуляризация G функции F определяется так:

$$G(x) := \sup \{ g(x) : g \in A(X) \text{ и } g \leq F \}$$

для $x \in X$. Если F не имеет миноранты $g \in A(X)$, то функция G тождественно равна $-\infty$. Поэтому мы будем рассматривать лишь функции F , имеющие непрерывные аффинные миноранты. Ясно, что $G \in \Gamma_\infty(X)$ и G есть фактически наибольшая функция из $\Gamma_\infty(X)$, которая мажорируется F . Далее нетрудно убедиться, что $\text{epi}(G)$ есть в точности замкнутая выпуклая оболочка множества $\text{epi}(F)$. В § Д.1.3 будет дано другое описание Γ -регуляризации функции F в терминах сопряженных функций.

В заключение параграфа приведем несколько примеров.

Примеры Д.1.6. Предположим, что X — локально выпуклое пространство.

(i) Пусть K — выпуклое подмножество в X , содержащее 0. Для $x \in X$ положим

$$\rho_K(x) = \inf \{ \lambda > 0 : x \in \lambda K \},$$

где, как обычно, $\inf \emptyset = \infty$. Тогда ρ_K — *сублинейный функционал* на X со значениями в $[0, \infty]$, т. е. $\rho_K(x+y) \leq \rho_K(x) + \rho_K(y)$ и $\rho_K(\alpha x) = \alpha \rho_K(x)$ для всех $x, y \in X$ и $\alpha \geq 0$. В частности, ρ_K — выпуклая функция на X ; она называется *калибровочным функционалом* или *функционалом Минковского* на K . Заметим, что

$$\text{dom}(\rho_K) = \bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda K$$

— конус, порожденный множеством K , и что $\text{dom}(\rho_K) = X$ тогда и только тогда, когда K — поглощающее множество. Далее ясно, что

$$\{x \in X : \rho_K(x) < 1\} \subseteq K \subseteq \{x \in X : \rho_K(x) \leq 1\},$$

и легко видеть, что ρ_K непрерывен тогда и только тогда, когда 0 есть внутренняя точка множества K . Если K — замкнутое выпуклое множество, то $K = \{x \in X : \rho_K(x) \leq 1\}$ и ρ_K — п.н.с.

(ii) Для любого непустого подмножества K пространства X *опорный функционал* $p_K: X^* \rightarrow (-\infty, \infty]$ определяется формулой

$$p_K(x^*) = \sup \{ \langle x, x^* \rangle : x \in K \}$$

для всех $x^* \in X^*$. Очевидно, что p_K сублинеен и что опорный функционал замкнутой выпуклой оболочки множества K совпадает с p_K . Предположим поэтому, что K — замкнутое выпуклое подмножество в X . Будучи поточечным супремумом $\sigma(X^*, X)$ -непрерывных функционалов, p_K является $\sigma(X^*, X)$ -п.н.с. Эффективная область определения $\text{dom}(p_K)$ есть конус в X^* , который называется *барьерным конусом* множества K . Из упомянутой тео-

ремы об отделимости непосредственно следует, что

$$K = \{x \in X: \langle x, x^* \rangle \leq p_K(x^*) \text{ для всех } x^* \in X^*\},$$

откуда видно, в частности, что K определяется своим опорным функционалом. Поляра множества K определяется, как обычно, формулой

$$K^0 = \{x^* \in X^*: \langle x, x^* \rangle \leq 1 \text{ для всех } x \in K\}$$

и является $\sigma(X^*, X)$ -замкнутым выпуклым подмножеством в X^* , содержащим нуль. Аналогично, для любого подмножества M пространства X^* поляра M^0 есть $\sigma(X, X^*)$ -замкнутое выпуклое подмножество в X . Для $x^* \in X^*$

$$\begin{aligned} \rho_{K^0}(x^*) &= \inf \{\lambda > 0: x^* \in \lambda K^0\} = \\ &= \inf \{\lambda > 0: \langle x, x^* \rangle \leq \lambda \text{ для всех } x \in K\} \\ &= p_K(x^*), \end{aligned}$$

откуда видно, что $\rho_{K^0} = p_K$. Если мы дополнительно предположим, что $0 \in K$, то аналогично получим равенство $\rho_K = \rho_{K^0}$ (заметим, что в этом случае $K^{00} = K$ по теореме о биполяре).

(iii) Для непустого подмножества K пространства X индикаторная функция I_K определяется следующим образом: $I_K(x) = 0$, если $x \in K$, и $I_K(x) = \infty$ в противном случае. Тогда $\text{dom}(I_K) = K$, и I_K выпукла тогда и только тогда, когда K выпукло, а I_K — п.н.с. в том и только том случае, когда K замкнуто. Легко видеть, что Γ -регуляризация функции I_K есть индикаторная функция замкнутой выпуклой оболочки множества K .

Д.1.2. Непрерывность

Вещественная выпуклая функция, определенная на интервале из $\mathbb{R}$, непрерывна на внутренности этого интервала. В этом параграфе мы обсудим некоторые обобщения этого результата на локально выпуклые пространства и, в частности, на банаховы пространства. Пусть X — локально выпуклое пространство и $F: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ — выпуклая функция. Мы начнем с простой, но полезной леммы.

Лемма Д.1.7. *Если F ограничена сверху (конечной константой) в некоторой окрестности точки $x_0 \in X$, то она непрерывна в точке x_0 .*

Доказательство. Без потери общности можно считать, что $x_0 = 0$ и $F(0) = 0$. Предположим, что $F(x) \leq M$ для всех x из некоторой симметричной окрестности нуля U . Заметим, что отсюда следует неравенство $|F(x)| \leq M$ для всех $x \in U$. Действительно,

если $x \in U$, то и $-x \in U$, и $2F(0) \leq F(x) + F(-x)$; поэтому $-F(x) \leq F(-x) \leq M$. Далее, если $0 < \varepsilon < 1$, то $F(\varepsilon x) \leq \varepsilon F(x)$ для всех $x \in X$, откуда видно, что $F(x) \leq \varepsilon M$ для всех $x \in \varepsilon U$. Так как εU — симметричная окрестность нуля, то, значит, $|F(x)| \leq \varepsilon M$ для всех $x \in \varepsilon U$. ■

Предложение Д.1.8. Следующие два утверждения эквивалентны:

(i) F ограничена сверху на некотором непустом открытом подмножестве пространства X .

(ii) F непрерывна на внутренности ее эффективной области определения, и эта внутренность непуста.

Доказательство. Очевидно, что (ii) влечет за собой (i). Предположим, что F ограничена сверху на некотором непустом открытом подмножестве X . В силу предыдущей леммы достаточно показать, что каждая точка множества $\text{int}(\text{dom}(F))$ имеет окрестность, на которой F ограничена сверху. Без ограничения общности мы можем предполагать, что $F(x) \leq M$ для всех x из некоторой открытой окрестности нуля U . Возьмем произвольную точку $y \in \text{int}(\text{dom}(F))$. Тогда существует такое $\lambda > 1$, что $\lambda y \in \text{dom}(F)$ и $y + (1 - \lambda^{-1})U$ — окрестность точки y , которая содержится в $\text{dom}(F)$, поскольку $\text{dom}(F)$ выпукло. Для $z = y + (1 - \lambda^{-1})x$ с $x \in U$ получаем

$$F(z) \leq \lambda^{-1}F(\lambda y) + (1 - \lambda^{-1})F(x) \leq \lambda^{-1}F(\lambda y) + (1 - \lambda^{-1})M,$$

а это показывает, что F ограничена сверху на $y + (1 - \lambda^{-1})U$. ■

Доказанное предложение имеет непосредственное следствие для конечномерных пространств. Действительно, если $\dim X < \infty$, то любая точка в $\text{int}(\text{dom}(F))$ имеет окрестность, содержащуюся в $\text{dom}(F)$ и являющуюся выпуклой оболочкой конечного числа точек, и поэтому F ограничена сверху в окрестности этой точки. Это приводит к следующему результату, обобщающему факт, отмеченный в начале этого параграфа.

Следствие Д.1.9. Если X конечномерно, то F непрерывна на внутренности эффективной области определения.

Необходимо отметить, что если F полунепрерывна сверху в некоторой точке p из $\text{dom}(F)$, то она ограничена сверху в некоторой окрестности Γ и, следовательно, F непрерывна на $\text{int}(\text{dom}(F))$. Это не так для полунепрерывных снизу функций, что видно на примере нормы в пространстве, сопряженном к банахову пространству X , которая $\sigma(X^*, X)$ -п.н.с., но не является $\sigma(X^*, X)$ -непрерывной. Тем не менее для непрерывности в равномерной топологии банахова пространства справедливо следующее утверждение.

Предложение Д.1.10. Если X — банахово пространство и $F: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ — п.н.с. выпуклая функция, то F непрерывна на внутренней ее эффективной области определения.

Доказательство. Учитывая предыдущее предложение, достаточно показать, что F ограничена сверху на некотором непустом открытом множестве. Без потери общности можно считать, что $0 \in \text{int}(\text{dom}(F))$ и что $F(0) = 0$. Выберем произвольное $\alpha > 0$ и положим $K = \{x \in X: F(x) \leq \alpha\}$. Тогда K — выпуклое замкнутое подмножество в X , и поскольку сужение F на любое одномерное подпространство пространства X непрерывно в нуле, то K является поглощающим и, следовательно, $\bigcup_{n=1}^{\infty} nK = X$.

По теореме Бэра о категориях существует такое n_0 , что $\text{int}(n_0 K) \neq \emptyset$ и, значит, $\text{int} K \neq \emptyset$. Поэтому $\text{int} K$ — непустое открытое множество в X , на котором F ограничена сверху, что доказывает предложение. ■

Предположим, что X — локально выпуклое пространство и что $F: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ — выпуклая функция. Как уже отмечалось, F есть п.н.с. функция тогда и только тогда, когда $\text{epi}(F)$ — замкнутое подмножество в $X \times \mathbb{R}$. Непрерывность F может быть также выражена в терминах $\text{epi}(F)$. В самом деле, используя предложение Д.1.8, легко видеть, что F непрерывна на $\text{int}(\text{dom}(F))$ и $\text{int}(\text{dom}(F)) \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $\text{int}(\text{epi}(F))$ непусто.

Д.1.3. Сопряженные (полярные) функции

Пусть X — локально выпуклое пространство и X^* — пространство, топологически сопряженное к X . На X^* рассмотрим $\sigma(X^*, X)$ -топологию. Тогда сопряженное к X^* пространство — это X . Пусть F — функция из X в $(-\infty, \infty]$.

Определение Д.1.11. Функция $F^*: X^* \rightarrow [-\infty, \infty]$, определенная формулой

$$F^*(x^*) = \sup \{ \langle x, x^* \rangle - F(x) : x \in X \}$$

для всех $x^* \in X^*$, называется сопряженной (полярной) функцией к F .

Заметим, что равенство $F^*(x^*) = -\infty$ возможно тогда и только тогда, когда $F \equiv +\infty$. Если мы предположим, что F собственная, то F^* принимает значения в $(-\infty, \infty]$. Кроме того, ясно, что супремум в определении F^* можно брать только по x из $\text{dom}(F)$. Если $\alpha \in \mathbb{R}$, то неравенство $F^*(x^*) \leq \alpha$ эквивалентно неравенству $\langle x, x^* \rangle - \alpha \leq F(x)$ для всех $x \in \text{dom}(F)$, и поэтому F^* — собственная функция тогда и только тогда, когда F

имеет непрерывную аффинную миноранту. Очевидно, что если I собственная, то $\langle x, x^* \rangle \leq F(x) + F^*(x^*)$ для всех $x \in X, x^* \in X^*$.

Предположим, что F — собственная функция. Так как F^* есть поточечный супремум семейства функций из $A(X^*)$, то $F^* \in \Gamma_\infty(X^*)$ и $F^* \in \Gamma(X^*)$ тогда и только тогда, когда F имеет миноранту в $A(X)$. В частности, из предложения Д.1.4 следует, что $F^* \in \Gamma(X^*)$, если $F \in \Gamma(X)$.

Вторая сопряженная F^{**} к функции F определяется как сопряженная функция к F^* , т. е.

$$F^{**}(x) = \sup \{ \langle x, x^* \rangle - F^*(x^*) : x^* \in X^* \}.$$

Если F собственная и имеет непрерывную аффинную миноранту, то $F^* \in \Gamma(X^*)$ и, значит, $F^{**} \in \Gamma(X)$.

Напомним (см. замечание Д.1.5), что если собственная функция $F: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ имеет миноранту в $A(X)$, то Γ -регуляризация функции F есть наибольший элемент в $\Gamma(X)$, мажорируемый F . Следующее предложение дает иную характеристику этой Γ -регуляризации.

Предложение Д.1.12. Если F — собственная функция из X в $(-\infty, \infty]$, имеющая непрерывную аффинную миноранту, то F^{**} есть Γ -регуляризация функции F . В частности, если $F \in \Gamma(X)$, то $F^{**} = F$.

Доказательство. Как уже отмечалось, $F^{**} \in \Gamma(X)$. Если $x^* \in \text{dom}(F^*)$, то из определения F^* ясно, что $\langle x, x^* \rangle - F^*(x^*) \leq F(x)$ для всех $x \in X$, и, значит, из определения F^{**} следует, что $F^{**}(x) \leq F(x)$ для всех $x \in X$. Предположим теперь, что g — такая функция из $A(X)$, что $g \leq F$. Тогда $g(x) = \langle x, x^* \rangle - \alpha$ для некоторых $x^* \in X^*$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ и поэтому $\langle x, x^* \rangle - \alpha \leq F(x)$ для всех $x \in X$. Следовательно, $F^*(x^*) \leq \alpha$, так что $g(x) \leq \langle x, x^* \rangle - F^*(x^*)$ для всех $x \in X$ и, значит, $g(x) \leq F^{**}(x)$ для всех $x \in X$. Так как, согласно предложению Д.1.4, каждая функция из $\Gamma(X)$ есть поточечный супремум функций из $A(X)$, откуда можно заключить, что F^{**} есть наибольший элемент из $\Gamma(X)$, мажорируемый F . ■

Из установленного предложения следует, что отображение $F \mapsto F^*$ есть биекция из $\Gamma(X)$ на $\Gamma(X^*)$. Если $F \in \Gamma(X)$ и $G \in \Gamma(X^*)$ таковы, что $F^* = G$ (и, значит, $G^* = F$), то будем говорить, что функции F и G находятся в двойственности по отношению друг к другу.

Пример Д.1.13. Пусть K — непустое подмножество локально выпуклого пространства X . Как и в примере Д.1.6 (iii), индикаторную функцию K обозначим I_K . Тогда для $x^* \in X^*$

$$\begin{aligned} I_K^*(x^*) &= \sup \{ \langle x, x^* \rangle - I_K(x) : x \in X \} = \\ &= \sup \{ \langle x, x^* \rangle : x \in K \} = p_K(x^*); \end{aligned}$$

поэтому сопряженная функция I_K^* есть в точности опорный функционал для множества K (см. пример Д.1.6 (iii)). Вторая сопряженная $I_K^{**} = r_K^*$ есть Γ -регуляризация I_K , и, значит, r_K^* — индикаторная функция замкнутой выпуклой оболочки множества K . Следовательно, если K замкнуто и выпукло, то функции I_K и r_K находятся в двойственности. Обратно, если $p: X^* \rightarrow (-\infty, \infty]$ есть сублинейный $\sigma(X^*, X)$ -п.н.с. функционал то p^* — индикаторная функция некоторого замкнутого выпуклого подмножества в X . Действительно, если p сублинеен, то $p^*(x) = p^*(2x)$ для всех $x \in X$, а это показывает, что $p^* = I_K$ для некоторого замкнутого выпуклого множества K из X , и так как $p = r^{**} = I_K^*$, то p — опорный функционал множества K . Из определения p^* также ясно, что $K = \{x \in X: \langle x, x^* \rangle \leq p(x^*)\}$ для всех $x^* \in X^*$, как уже отмечалось в примере Д.1.6 (ii). Аналогично, разумеется, п.н.с. сублинейные функционалы на X суть в точности сопряженные функции индикаторных функций $\sigma(X^*, X)$ -замкнутых выпуклых подмножеств в X^* .

Д.1.4. Субдифференциалы

Пусть X — локально выпуклое пространство и F — некоторая функция из X в $(-\infty, \infty]$. Функция $g \in A(X)$ называется *точной минорантой функции F* в точке $x \in X$, если $g \leq F$ и $g(x) = F(x)$. Тогда g дается формулой $g(y) = \langle y - x, x^* \rangle + F(x)$ для всех $y \in X$ при некотором $x^* \in X^*$.

Определение Д.1.14. Функция $F: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ называется *субдифференцируемой* в точке $x \in X$, если в $A(X)$ существует ее точная миноранта в точке x . Соответствующий $x^* \in X^*$ называется *субградиентом* функции F в точке x , а семейство всех субградиентов функции F в точке x называется ее *субдифференциалом* в точке x , который обозначается через $\partial F(x)$.

Отображение ∂F из X в X^* (многозначное) называется *субдифференциальным отображением* функции F . По определению область определения $\mathcal{D}(\partial F)$ состоит из всех точек, где F субдифференцируема. В следующем предложении собраны некоторые простые свойства отображения ∂F .

Предложение Д.1.15. *Предположим, что отображение $F: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ собственное. Тогда*

- (i) $x^* \in \partial F(x)$ в том и только том случае, когда $x \in \text{dom}(F)$ и $\langle y - x, x^* \rangle \leq F(y) - F(x)$ для всех $y \in X$.
- (ii) Если $\partial F(x) \neq \emptyset$, то $F(x) = F^{**}(x)$; если $F(x) = F^{**}(x)$, то $\partial F(x) = \partial F^{**}(x)$.
- (iii) $x^* \in \partial F(x)$ в том и только том случае, когда $\langle x, x^* \rangle = F(x) + F^*(x^*)$.

(iv) $\partial F(x)$ — выпуклое и $\sigma(X^*, X)$ -замкнутое подмножество в X^* ; если F непрерывна в точке x , то $\partial F(x)$ $\sigma(X^*, X)$ -компактно.

(v) $(\partial F)^{-1} \subseteq \partial F^*$; если $F \in \Gamma(X)$, то $(\partial F)^{-1} = \partial F^*$, т. е. $x^* \in \partial F(x)$ в том и только том случае, когда $x \in \partial F^*(x^*)$.

(vi) $0 \in \partial F(x)$ в том и только том случае, когда $F(x) = \min \{F(y) : y \in X\}$.

Доказательство. (i) Утверждение следует из определения, так как $x^* \in \partial F(x)$ тогда и только тогда, когда функция $g(y) = \langle y - x, x^* \rangle + F(x)$ есть миноранта функции F .

(ii) Если $\partial F(x) \neq \emptyset$, то отображение F собственное и имеет аффинную миноранту; поэтому по предложению Д.1.12 F^{**} есть Γ -регуляризация функции F . Если $x^* \in \partial F(x)$, то $\langle y - x, x^* \rangle + F(x) \leq F(y)$ для всех $y \in X$ и, значит, $\langle y - x, x^* \rangle + F(x) \leq F^{**}(y)$ для всех $y \in X$; поэтому $F(x) \leq F^{**}(x)$. И так как неравенство $F^{**}(x) \leq F(x)$ выполняется всегда, мы получаем, что $F^{**}(x) = F(x)$. Доказательство второго утверждения проводится аналогичным способом.

(iii) Как уже отмечалось в предыдущих параграфах, неравенство $\langle x, x^* \rangle \leq F(x) + F^*(x^*)$ всегда имеет место. Предположим теперь, что $\langle x, x^* \rangle = F(x) + F^*(x^*)$; тогда

$$\begin{aligned} \langle y - x, x^* \rangle &\leq \{F(y) + F^*(x^*)\} - \{F(x) + F^*(x^*)\} = \\ &= F(y) - F(x), \end{aligned}$$

и поэтому $x^* \in \partial F(x)$. Обратно, если $x^* \in \partial F(x)$, то

$$\langle y, x^* \rangle - F(y) \leq \langle x, x^* \rangle - F(x)$$

для всех $y \in \text{dom}(F)$, и из определения F^* следует, что

$$F^*(x^*) = \langle x, x^* \rangle - F(x).$$

(iv) Очевидно, что $\partial F(x)$ выпукло. Кроме того, из (iii) вытекает, что

$$\partial F(x) = \{x^* \in X^* : F^*(x^*) - \langle x, x^* \rangle \leq -F(x)\}$$

и потому функция $x^* \mapsto F^*(x^*) - \langle x, x^* \rangle$ является $\sigma(X^*, X)$ -п.н.с., откуда получаем, что $\partial F(x)$ $\sigma(X^*, X)$ -замкнуто. Далее, если F непрерывна в точке x , то она ограничена в окрестности x , и из теоремы Алаоглу — Бурбаки следует, что $\partial F(x)$ $\sigma(X^*, X)$ -компактно.

(v) Если $x^* \in \partial F(x)$, то $\langle x, x^* \rangle = F(x) + F^*(x^*)$. Теперь из того, что $F^{**} \leq F$, следует неравенство $F^{**}(x) + F^*(x^*) \leq \langle x, x^* \rangle$, и так как обратное неравенство всегда выполняется, получаем, что $x \in \partial F^*(x^*)$. Это показывает, что $(\partial F)^{-1} \subseteq \partial F^*$. Если $F \in \Gamma(X)$, то, согласно предложению Д.1.12, $F^{**} = F$; поэтому $(\partial F^*)^{-1} \subseteq \partial F$ и, следовательно, $(\partial F)^{-1} = \partial F^*$.

(vi) очевидно. ■

Геометрическую интерпретацию субдифференциала можно пояснить, рассмотрев надграфик функции. Подходящим образом применив теоремы об отделимости для выпуклых множеств к множеству $\text{epi}(F)$ в $X \times \mathbb{R}$, можно получить существование субградиента выпуклых функций в некоторых случаях. Это иллюстрируется следующим предложением.

Предложение Д.1.16. *Если выпуклая функция $F: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ непрерывна в $\text{int}(\text{dom}(F))$, то $\partial F(x) \neq \emptyset$ для всех $x \in \text{int}(\text{dom}(F))$, или, другими словами, $\text{int}(\text{dom}(F)) \subseteq \mathcal{D}(\partial F)$.*

Доказательство. Можно предположить, что $\text{int}(\text{dom}(F)) \neq \emptyset$. Как отмечалось в конце § Д.1.2, если F непрерывна на $\text{int}(\text{dom}(F))$, то $\text{int}(\text{epi}(F))$ непусто. Зафиксируем элемент $x \in \text{int}(\text{dom}(F))$. Тогда $(x, F(x))$ не содержится в $\text{int}(\text{epi}(F))$, и поэтому по теореме об отделимости выпуклых множеств (которая упоминалась в § Д.1.1) существует такое $\Phi \neq 0$ в $(X \times \mathbb{R})^*$, что $\langle (x, F(x)), \Phi \rangle \leq \langle (y, \beta), \Phi \rangle$ для всех $(y, \beta) \in \text{epi}(F)$. Следовательно, существуют такие $x^* \in X^*$ и $\alpha \in \mathbb{R}$, что $\langle x, x^* \rangle + \alpha F(x) \leq \langle y, x^* \rangle + \alpha \beta$ для всех (y, β) из $\text{epi}(F)$. Покажем, что $\alpha > 0$. Действительно, взяв в этом неравенстве $y = x$, получим, что $\alpha F(x) \leq \alpha \beta$ для всех $\beta \geq F(x)$; поэтому $\alpha \geq 0$. Если $\alpha = 0$, то $\langle x, x^* \rangle \leq \langle y, x^* \rangle$ для всех $y \in \text{dom}(F)$, и так как $x \in \text{int}(\text{dom}(F))$, то $x^* = 0$ — получено противоречие. Таким образом, $\alpha > 0$. Теперь $(y, F(y)) \in \text{epi}(F)$ для всех $y \in \text{dom}(F)$ и, значит, $\langle x, x^* \rangle + \alpha F(x) \leq \langle y, x^* \rangle + \alpha F(y)$, т. е. $\langle y - x, -\alpha^{-1}x^* \rangle \leq F(y) - F(x)$, откуда видно, что $-\alpha^{-1}x^* \in \partial F(x)$. ■

Замечание Д.1.17. Пусть K — замкнутое выпуклое подмножество пространства X . Точка $x \in K$ называется *опорной точкой* множества K , если существует такой элемент $x^* \neq 0$ в X^* , что $\langle x, x^* \rangle = \sup\{\langle y, x^* \rangle : y \in K\}$. В этой ситуации x^* называется *касательным функционалом* к K в точке x , а гиперплоскость $H = \{y \in X : \langle y, x^* \rangle = \langle x, x^* \rangle\}$ называется *опорной гиперплоскостью* к K в точке x . Ясно, что каждая опорная точка множества K принадлежит его (топологической) границе. Из теорем об отделимости выпуклых множеств непосредственно следует, что если $\text{int} K \neq \emptyset$, то каждая граничная точка множества K является его опорной точкой.

Предположим теперь, что F — собственная выпуклая (п.н.с.) функция из X в $(-\infty, \infty]$. Надграфик $\text{epi}(F)$ — (замкнутое) выпуклое подмножество в $X \times \mathbb{R}$. Гиперплоскость H в $X \times \mathbb{R}$, которая задается равенством $H = \{(y, \beta) : \langle y, x^* \rangle + \alpha \beta = c\}$ при некоторых $x^* \in X^*$ и $\alpha \neq 0$, называется *невертикальной*. Легко видеть, что субградиенты функции F (в точке x) соответствуют невертикальным опорным гиперплоскостям к $\text{epi}(F)$ (в точ-

ке $(x, F(x))$). Эти замечания — фактически главное место в доказательстве предыдущего предложения.

Если $\text{int } K = \emptyset$, то существуют, вообще говоря, граничные точки множества K , не являющиеся опорными. Однако в банаховом пространстве теорема Бишопа — Фелпса утверждает, что множество опорных точек произвольного замкнутого выпуклого множества K плотно в множестве его граничных точек. Соответствующий результат для выпуклых функций дает теорема Бронстеда — Рокафеллара, которая утверждает, что любая п.н.с. выпуклая функция F из банахова пространства X в $(-\infty, \infty]$ субдифференцируема на плотном подмножестве множества $\text{dom}(F)$, т. е. $\overline{\mathcal{D}(\partial F)} = \overline{\text{dom}(F)}$.

Родственная задача — описать множество касательных функционалов к заданному замкнутому выпуклому множеству K . Ясно, что если K слабо компактно, то каждый функционал $x^* \in X^*$ достигает своего супремума на K и, значит, любой $x^* \neq 0$ является касательным к K . Другая теорема Бишопа и Фелпса утверждает, что множество касательных функционалов к замкнутому выпуклому подмножеству банахова пространства X плотно в X^* . Наконец, в связи с этим отметим, что если каждый функционал $x^* \neq 0$ из X^* касателен к замкнутому выпуклому подмножеству K банахова пространства X , то K слабо компактно. Эта глубокая теорема принадлежит Джеймсу.

Если $F: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ и $\lambda > 0$, то ясно, что $\partial(\lambda F)(x) = \lambda \partial F(x)$ для всех $x \in X$. Далее, если F и G — две такие функции, то

$$\partial F(x) + \partial G(x) \subseteq \partial(F + G)(x)$$

для всех $x \in X$. В общем случае это вложение строгое, но во многих частных случаях выполняется равенство. Иногда оказывается полезен следующий результат.

Предложение Д.1.18. Если $F, G: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ — выпуклые функции, такие, что F непрерывна в некоторой точке из $\text{dom}(F) \cap \text{dom}(G)$, то $\partial(F + G)(x) = \partial F(x) + \partial G(x)$ для всех $x \in X$.

Доказательство. Возьмем $x_0 \in \text{dom}(F) \cap \text{dom}(G)$. Мы должны показать, что

$$\partial(F + G)(x_0) \subseteq \partial F(x_0) + \partial G(x_0).$$

Для удобства мы можем предположить, что $x_0 = 0$ и что $F(0) = G(0) = 0$. Возьмем теперь $x_0^* \in \partial(F + G)(0)$. Заменяя F на функцию $F - x_0^*$, мы можем предположить также, что $x_0^* = 0$. Поэтому необходимо доказать, что из включения $0 \in \partial(F + G)(0)$ следует включение $0 \in \partial F(0) + \partial G(0)$. Заметим, что условие $0 \in \partial(F + G)(0)$ эквивалентно тому, что $0 = F(0) + G(0) = \min_{x \in X} \{F(x) + G(x)\}$, т. е. $F(x) \geq -G(x)$ для всех $x \in X$.

Следовательно, выпуклое множество $K = \{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R} : \alpha \geq -G(x)\}$ не пересекается с $\text{int}(\text{epi}(F))$. Так как F непрерывна в некоторой точке области $\text{dom}(F)$, то внутренность $\text{epi}(F)$ непуста и, следовательно, существуют такие $x^* \in X^*$ и $\beta \in \mathbb{R}$, что

$$\sup \{ \langle x, x^* \rangle + \beta \alpha : (x, \alpha) \in \text{epi}(F) \} \leq \leq \inf \{ \langle x, x^* \rangle + \beta \alpha : (x, \alpha) \in K \},$$

т.е. $\langle x, x^* \rangle + \beta \alpha \leq 0$ для всех $(x, \alpha) \in \text{epi}(F)$ и $\langle x, x^* \rangle + \beta \alpha \geq 0$ для всех $(x, \alpha) \in K$. Заметим, что $\alpha \leq 0$. Покажем, что $\alpha < 0$. Действительно, $\alpha = 0$ влечет за собой неравенство $\langle x, x^* \rangle \leq 0$ для всех $x \in \text{dom}(F)$ и неравенство $\langle x, x^* \rangle \geq 0$ для всех $x \in \text{dom}(G)$. По предположению F непрерывна в некоторой точке области $\text{dom}(F) \cap \text{dom}(G)$ и потому $\text{dom}(G)$ имеет непустое пересечение с $\text{int}(\text{dom}(F))$ — получено противоречие. Следовательно, $\alpha < 0$ и, значит, $-\alpha^{-1}x^* \in \partial F(0)$ и $\alpha^{-1}x^* \in \partial G(0)$, откуда $0 \in \partial F(0) + \partial G(0)$. ■

Как и ранее, пусть X — локально выпуклое пространство и X^* — его сопряженное. Напомним, что (многозначное) отображение A из X в его сопряженное X^* называется *монотонным*, если $\langle x_1 - x_2, y_1^* - y_2^* \rangle \geq 0$ для всех $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(A)$ и $y_1^* \in Ax_1, y_2^* \in Ax_2$. Следующее предложение является обобщением того факта, что производная выпуклой функции, определенной на $\mathbb{R}$, монотонно возрастает.

Предложение Д.1.19. Если $F: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ — выпуклая функция, то ∂F — монотонное отображение из X в X^* .

Доказательство. Если $y_1^* \in \partial F(x_1)$ и $y_2^* \in \partial F(x_2)$, то, в частности,

$$\langle x_2, y_1^* \rangle - \langle x_1, y_1^* \rangle \leq F(x_2) - F(x_1)$$

и

$$\langle x_1, y_2^* \rangle - \langle x_2, y_2^* \rangle \leq F(x_1) - F(x_2).$$

Складывая эти два неравенства, получим, что $\langle x_1 - x_2, y_1^* - y_2^* \rangle \geq 0$. ■

В следующем параграфе мы увидим, что в случае, когда X — гильбертово пространство, о монотонности ∂F можно сказать намного больше.

Обсудим далее связь между субдифференциалами, производными по направлению и производными Гато. Пусть F — функция из локально выпуклого пространства X в $(-\infty, \infty]$.

Определение Д.1.20. Производная по направлению $F'(x; y)$ функции F в точке $x \in \text{dom}(F)$ в направлении $y \in X$ определяется

формулой

$$F'(x; y) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{F(x + \lambda y) - F(x)}{\lambda},$$

если этот предел существует. Если существует такое $x^* \in X^*$, что $F'(x; y) = \langle y, x^* \rangle$ для всех $y \in X$, то F называют дифференцируемой по Гато в точке x , а x^* называется производной Гато функции F в точке x , которая обозначается через $F'(x)$.

Производная по направлению $F'(x; y)$ также обозначается через $D_y F(x)$, а производная Гато функции F в точке x также обозначается через $\text{grad } F(x)$ (или $\nabla F(x)$) и называется градиентом функции F в точке x . Напомним, что F называется дифференцируемой по Фреше в точке x , если существует такой элемент $x^* \in X^*$, что

$$F(x + y) = F(x) + \langle y, x^* \rangle + R(x; \|y\|),$$

где $R(x; \|y\|)/\|y\| \rightarrow 0$ при $\|y\| \rightarrow 0$. Очевидно, что при этом F будет дифференцируема и по Гато в точке x и $x^* = F'(x)$.

Предположим теперь, что F — выпуклая функция из X в $(-\infty, \infty]$, и возьмем $x \in \text{dom}(F)$. В следующей лемме собраны некоторые простые свойства производных по направлению.

Лемма Д.1.21. (i) Для любого $y \in X$ существует производная по направлению $F'(x; y)$ (возможно равная $\pm\infty$).

(ii) Отображение $y \mapsto F'(x; y)$ из X в $[-\infty, \infty]$ сублинейно.

(iii) $-F'(x; -y) \leq F'(x; y)$ для всех $y \in X$.

(iv) Если $x \in \text{int}(\text{dom}(F))$, то $F'(x; y)$ конечна для любого $y \in X$.

(v) Если $x^* \in \partial F(x)$, то $-F'(x; y) \leq \langle y, x^* \rangle \leq F'(x; y)$ для любого $y \in X$.

Доказательство. (i) Если $y \in X$ и $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$, то из выпуклости F следует, что

$$\frac{F(x + \lambda_1 y) - F(x)}{\lambda_1} \leq \frac{F(x + \lambda_2 y) - F(x)}{\lambda_2},$$

и, значит, предел

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{F(x + \lambda y) - F(x)}{\lambda} = \inf_{\lambda > 0} \frac{F(x + \lambda y) - F(x)}{\lambda}$$

существует (возможно, он равен $\pm\infty$).

(ii) Очевидно, что $F'(x; \alpha y) = \alpha F'(x; y)$ для любых $\alpha \geq 0$ и $y \in X$. Возьмем теперь произвольные $y, z \in X$. Для $\lambda > 0$ из равенства $x + \lambda(y + z) = (x + 2\lambda y)/2 + (x + 2\lambda z)/2$ следует, что

$$\frac{F(x + \lambda(y + z)) - F(x)}{\lambda} \leq \frac{F(x + 2\lambda y) - F(x)}{2\lambda} + \frac{F(x + 2\lambda z) - F(x)}{2\lambda}$$

и, значит, $F'(x; y + z) \leq F'(x; y) + F'(x; z)$ (если правая часть имеет смысл).

(iii) следует непосредственно из сублинейности $F'(x; \cdot)$.

(iv) Предположим теперь, что $x \in \text{int}(\text{dom}(F))$, и возьмем $y \in X$. Можно выбрать $\lambda > 0$ так, чтобы $x + \lambda y \in \text{dom}(F)$ и $F'(x; y) \leq \lambda^{-1} \{F(x + \lambda y) - F(x)\} < \infty$. Таким же образом проверяется, что $F'(x; -y) < \infty$ и, следовательно, $F'(x; y) \geq -F'(x; -y) > -\infty$.

(v) Предположим, что $x^* \in \partial F(x)$. Для любых $y \in X$ и $\lambda > 0$ тогда имеем $\langle \lambda y, x^* \rangle \leq F(x + \lambda y) - F(x)$, откуда следует, что $\langle y, x^* \rangle \leq F'(x; y)$. Заменяя в этом неравенстве y на $-y$, получаем $-\langle y, x^* \rangle \leq F'(x; -y)$ и, значит, $-F'(x; -y) \leq \langle y, x^* \rangle$. ■

Следствие Д.1.22. Если $F: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ выпукла и дифференцируема по Гато в точке $x \in \text{dom}(F)$, то она субдифференцируема в точке x и $\partial F(x) = \{F'(x)\}$.

Доказательство. Для всех $z \in X$ имеем $F'(x; z) = \langle z, F'(x) \rangle$; значит,

$$F(y) - F(x) = F(x + (y - x)) - F(x) \geq F'(x; y - x) = \langle y - x, F'(x) \rangle$$

для всех $y \in X$. Это показывает, что $F'(x) \in \partial F(x)$. Далее, если $x^* \in \partial F(x)$, то $-F'(x; -y) \leq \langle y, x^* \rangle \leq F'(x; y)$ для всех $y \in X$; поэтому $x^* = F'(x)$. ■

Если F — выпуклая функция из X в $(-\infty, \infty]$ и если $x \in \text{dom}(F)$, то

$$\partial F(x) = \{x^* \in X^*: \langle y, x^* \rangle \leq F'(x; y) \forall y \in X\}.$$

Действительно, пусть $x^* \in X^*$ таков, что $\langle y, x^* \rangle \leq F'(x; y)$ для всех $y \in X$. Тогда

$$F(y) - F(x) = F(x + (y - x)) - F(x) \geq F'(x; y - x) \geq \langle y - x, x^* \rangle$$

для всех $y \in X$; следовательно, $x^* \in \partial F(x)$. Если F непрерывна в точке $x \in \text{dom}(F)$, то сублинейный функционал $y \mapsto F'(x; y)$ непрерывен. Действительно, в этом случае F ограничена в окрестности x и потому из неравенства $F'(x; y) \leq F(x + y) - F(x)$ следует, что $F'(x; \cdot)$ ограничена в окрестности нуля и, значит, непрерывна.

Лемма Д.1.23. Если выпуклая функция $F: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ непрерывна в точке $x \in \text{dom}(F)$, то для любого такого $\alpha \in \mathbb{R}$, что $-F'(x; -y) \leq \alpha \leq F'(x; y)$ при некотором $y \in X$, существует такой $x^* \in \partial F(x)$, что $\langle y, x^* \rangle = \alpha$.

Доказательство. При любом $y \in X$ положим $p(z) = F'(x; z)$. Тогда, как показано выше, $p: X \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывный сублиней-

ный функционал. Зададим теперь линейное подпространство $M = \{\lambda y: \lambda \in \mathbb{R}\}$ и определим элемент $m^* \in M^*$ из равенств $\langle \lambda y, m^* \rangle = \lambda \alpha$. Из неравенства $-p(-y) \leq \alpha \leq p(y)$ следует что $\langle z, m^* \rangle \leq p(z)$ для всех $z \in M$, и, значит, m^* допускает линейное продолжение x^* на X , удовлетворяющее неравенству $\langle z, x^* \rangle \leq p(z)$ при всех $z \in X$. Из непрерывности p следует, что $x^* \in X^*$. Как отмечалось выше, оценка $\langle z, x^* \rangle \leq F'(x; z)$ для всех $z \in X$ теперь влечет за собой $x^* \in \partial F(x)$. ■

Доказанная лемма имеет такое непосредственное следствие.

Предложение Д.1.24. Если выпуклая функция $F: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ непрерывна в точке $x \in \text{dom}(F)$, то $F'(x; y) = \max \{\langle y, x^* \rangle: x^* \in \partial F(x)\}$ и $-F'(x; -y) = \min \{\langle y, x^* \rangle: x^* \in \partial F(x)\}$ для всех $y \in X$.

Кроме того, теперь непосредственно доказывается следующий результат:

Предложение Д.1.25. Если выпуклая функция $F: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ непрерывна в точке $x \in \text{dom}(F)$, то следующие утверждения эквивалентны:

- (i) F дифференцируема по Гато в точке x .
- (ii) F субдифференцируема в точке x и $\partial F(x) = \{x^*\}$.
- (iii) $F'(x; y) = -F'(x; -y)$ для всех $y \in X$.
- (iv) Отображение $y \mapsto F'(x; y)$ линейно.
- (v) $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{F(x + \lambda y) - F(x)}{\lambda}$ существует при всех $y \in X$.

Прежде чем обсудить несколько примеров, сделаем замечание о субдифференциалах и сублинейных функционалах.

Замечание Д.1.26. Предположим, что отображение $p: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ сублинейно, и возьмем $x \in \text{dom}(p)$. Легко видеть, что производная по направлению обладает свойствами

- (i) $p'(x; y) \leq p(y)$ для всех $y \in X$ и
- (ii) $p'(x; x) = -p'(x; -x) = p(x)$.

Отметим далее, что

$$\partial p(x) = \{x^* \in X^*: \langle x, x^* \rangle = p(x) \text{ и } \langle y, x^* \rangle \leq p(y) \text{ для всех } y \in X\}.$$

Действительно, если $x^* \in \partial p(x)$, то $\langle y, x^* \rangle \leq p'(x; y) \leq p(y)$ для всех $y \in X$ и $p(x) = -p'(x; -x) \leq \langle x, x^* \rangle \leq p'(x; x) = p(x)$; поэтому $\langle x, x^* \rangle = p(x)$. Обратно, если элемент $x^* \in X^*$ таков, что $\langle y, x^* \rangle \leq p(y)$ для всех $y \in X$ и $\langle x, x^* \rangle = p(x)$, то $\langle y - x, x^* \rangle \leq p(y) - p(x)$ для всех $y \in X$, поэтому $x^* \in \partial p(x)$. Заметим, что если p непрерывно в точке x и x^* — линейный функционал, то оценка $\langle y, x^* \rangle \leq p(y)$ для всех y влечет за собой непрерывность x^* , т. е. $x^* \in X^*$.

Примеры Д.1.27. (i) Пусть K — замкнутое выпуклое подмножество локально выпуклого пространства X . Индикаторная функция I_K множества K (см. пример Д.1.6 (iii)) является п.н.с. выпуклой функцией на X . Непосредственно из определения следует, что $x^* \in \partial I_K(x)$ тогда и только тогда, когда $x \in K$ и $\langle y, x^* \rangle \leq \langle x, x^* \rangle$ для всех $y \in K$. Заметим, что $0 \in \partial I_K(x)$ при всех $x \in K$, и поэтому $\mathcal{D}(\partial I_K) = K$.

(ii) Пусть K — замкнутое выпуклое подмножество локально выпуклого пространства X и $0 \in K$. Калибровочный функционал ρ_K множества K (см. пример Д.1.6 (i)) есть п.н.с. выпуклая функция на X и $K = \{x \in X: \rho_K(x) \leq 1\}$. Из сказанного ранее следует, что $x^* \in \partial \rho_K(x)$ тогда и только тогда, когда $x \in \text{dom}(\rho_K)$, $\langle x, x^* \rangle = \rho_K(x)$ и $\langle y, x^* \rangle \leq \rho_K(y)$ для всех $y \in X$. Заметим, что условие $\langle y, x^* \rangle \leq \rho_K(y)$ при всех $y \in X$ эквивалентно тому, что $\langle y, x^* \rangle \leq 1$ при всех $y \in K$. Поэтому

$$\partial \rho_K(x) = \{x^* \in K^0: \langle x, x^* \rangle = \rho_K(x)\}$$

для всех $x \in \text{dom}(\rho_K)$. Кроме того, если $\rho_K(x) > 0$, то $x^* \in \partial \rho_K(x)$ тогда и только тогда, когда $\langle x, x^* \rangle = \rho_K(x)$ и $\sup\{\langle y, x^* \rangle: y \in K\} = 1$. Это показывает, в частности, что если $\rho_K(x) = 1$, то $x^* \in \partial \rho_K(x)$ тогда и только тогда, когда $\sup\{\langle y, x^* \rangle: y \in K\} = \langle x, x^* \rangle = 1$, и поэтому в данной ситуации $\partial \rho_K(x)$ состоит в точности из тех функционалов $x^* \in X^*$, для которых $\{y \in X: \langle y, x^* \rangle = 1\}$ — опорная гиперплоскость к K в точке x .

Предположим теперь дополнительно, что $0 \in \text{int } K$; тогда ρ_K непрерывна на X . Пусть x — граничная точка множества K , т. е. $\rho_K(x) = 1$. Из предложения Д.1.15 следует, что ρ_K дифференцируема по Гато в точке x с производной $\rho'_K(x)$ тогда и только тогда, когда K имеет единственную опорную гиперплоскость H в точке x , которая задается формулой $H = \{y \in X: \langle y, \rho'_K(x) \rangle = 1\}$. Такая граничная точка x множества K называется его *точкой гладкости*. В частности K , имеет единственную опорную гиперплоскость в каждой граничной точке тогда и только тогда, когда ρ_K дифференцируема по Гато всюду, кроме нуля.

Рассмотрим теперь случай, когда $K = B_X$ — замкнутый единичный шар банахова пространства X . Тогда $\rho_K(x) = \|x\|$ для всех $x \in X$, и в этой ситуации мы обозначаем производную по направлению $\rho'_K(x; y)$ через $[x, y]_+$. В силу сказанного выше для $x \neq 0$ имеем $\partial \rho_K(x) = \{x^* \in X^*: \|x^*\| = 1 \text{ и } \langle x, x^* \rangle = \|x\|\}$, т. е. $\partial \rho_K(x)$ состоит из всех *нормирующих функционалов* элемента x и $\partial \rho_K(0) = \{x^* \in X^*: \|x^*\| \leq 1\}$. Норма в X называется *гладкой*, если каждая точка сферы $S_X = \{x \in X: \|x\| = 1\}$ — точка гладкости для B_X . Следовательно, эквивалентны утверждения:

(i) $\|\cdot\|$ гладкая;

(ii) B_X имеет единственную опорную гиперплоскость в каждой точке S_X ;

(iii) норма дифференцируема по Гато в любой точке $x \neq 0$;

(iv) функционал $y \mapsto [x, y]_+$ линеен при всех $x \neq 0$.

Если выпуклая функция F на X задана формулой $F(x) = \|x\|^2/2$, то нетрудно проверить, что $\partial F(x) = \{x^* \in X^*: \|x^*\| = \|x\| \text{ и } \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2\}$ для всех $x \in X$. Отображение (многозначное) ∂F из X в X^* называется *отображением двойственности*. Теперь ясно, что отображение ∂F однозначено тогда и только тогда, когда норма в X гладкая.

Далее рассмотрим некоторые специальные классы банаховых пространств.

(а) Пусть (Ω, Σ, μ) — пространство с σ -конечной мерой, и рассмотрим вещественное банахово пространство $X = L_p(\Omega, \mu)$ с $1 < p < \infty$. Возьмем $f, g \in L_p(\Omega, \mu)$, где $f \neq 0$. Дифференцируя под знаком интеграла, получим

$$\frac{d}{d\lambda} (\|f + \lambda g\|_p^p) |_{\lambda=0} = p \int_{\Omega} g f |f|^{p-2} d\mu,$$

и потому функция $\lambda \mapsto \|f + \lambda g\|_p$ дифференцируема и

$$\frac{d}{d\lambda} (\|f + \lambda g\|_p) |_{\lambda=0} = \int_{\Omega} g \frac{f |f|^{p-2}}{\|f\|_p^{p-1}} d\mu.$$

Это значит, что норма $\|\cdot\|_p$ дифференцируема по Гато при $f \neq 0$, и производная по Гато равна $f |f|^{p-2} \|f\|_p^{1-p}$. (Как обычно, мы отождествляем пространство, сопряженное к L_p , с L_q , $p^{-1} + q^{-1} = 1$.)

(b) Рассмотрим вещественное банахово пространство $X = L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ на некотором пространстве (Ω, Σ, μ) с σ -конечной мерой. Норма $\|\cdot\|_1$ не является гладкой, однако оказывается возможным описать точки гладкости единичного шара в L_1 . Действительно, если $f \in L_1$, $\|f\|_1 = 1$, такова, что $f(\omega) \neq 0$ μ -п.в., то субдифференциал нормы в точке f состоит только из функции $f |f|^{-1}$. (Как обычно, L_1^* отождествляется с L_{∞} .) Если, однако, множество $N = \{\omega: f(\omega) = 0\}$ имеет положительную меру, то этот субдифференциал содержит все функции вида $f |f|^{-1} + h$, где $|h| \leq 1_N$ (здесь 1_N означает характеристическую функцию множества N) и поэтому такие точки f не являются гладкими.

(с) Пусть $X = C(\Omega)$ — пространство вещественных непрерывных функций на компактном хаусдорфовом пространстве с супремум-нормой. Норма в этом пространстве не является гладкой. В самом деле, субдифференциал нормы в точке f состоит из одного функционала тогда и только тогда, когда функция $|f|$ достигает своего максимума ровно в одной точке пространства Ω .

(d) Если $\mathcal{H}$ — вещественное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$, то норма дифференцируема по Гато в любой точке $x \neq 0$, и производная может быть отождествлена с $\|x\|^{-1}x$, т. е. $[x, y]_+ = (y, \|x\|^{-1}x)$ для всех $y \in \mathcal{H}$.

В заключение отметим, что возможна ситуация, когда замкнутый единичный шар в банаховом пространстве совсем не имеет гладких точек. Таковы, например, L_∞ -пространства на пространствах с неатолическими мерами. Заметим, однако, что если K — подмножество *сепарабельного* банахова пространства X с непустой внутренностью, то по теореме Мазура точки гладкости множества A составляют G_δ -множество, плотное в множестве его граничных точек. Соответствующая теорема для выпуклых функций утверждает, что выпуклая функция F , определенная на сепарабельном банаховом пространстве X со значениями в $(-\infty, \infty]$, непрерывная на $\text{int}(\text{dom}(F))$, дифференцируема по Гато на плотном G_δ -подмножестве из $\text{int}(\text{dom}(F))$. Этот результат следует из более общей теоремы. Как было показано в работе Zarantonello [1973], если A — (многозначное) монотонное отображение из сепарабельного банахова пространства X в X^* (ср. с предложением Д.1.19), то оно однозначно на некотором плотном G_δ -подмножестве из $\text{int}(\mathcal{D}(A))$.

Д.1.5. Выпуклые функции в гильбертовых пространствах

В этом параграфе H будет обозначать вещественное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$. Как обычно, H будет отождествляться со своим сопряженным. Напомним, что (многозначное) отображение A пространства H в себя, т. е. $A \subseteq H \times H$, называется *монотонным*, если $(x_1 - x_2, y_1 - y_2) \geq 0$ для всех $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(A)$ и $y_1 \in Ax_1, y_2 \in Ax_2$.

Далее, A называется *аккретивным*, если $(I + \lambda A)^{-1}$ есть сжатие при всех $\lambda > 0$, т. е. если $(\|x_1 - x_2\| \leq \|(x_1 - x_2) + \lambda(y_1 - y_2)\|)$ для любых элементов $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(A)$ и $y_1 \in Ax_1, y_2 \in Ax_2$ и всех $\lambda > 0$ (это эквивалентно тому, что $-A$ *диссипативно*, см. определение 2.2). Отметим, что A аккретивно тогда и только тогда, когда $[x_1 - x_2, y_1 - y_2]_+ \geq 0$, если $y_1 \in Ax_1$ и $y_2 \in Ax_2$. Так как $[x, y]_+ = \|x\|^{-1}(x, y)$ для любого $x \neq 0$ (и $[0, y] = \|y\|$), то ясно, что A монотонно тогда и только тогда, когда A аккретивно. Монотонное отображение A называется *максимально монотонным*, если из того, что $A \subseteq B$ и B монотонно, следует, что $A = B$ (или, что то же самое, $(x_1 - x, y_1 - y) \geq 0$ для всех $x \in \mathcal{D}(A)$ и $y \in Ax$ влечет за собой $x_1 \in \mathcal{D}(A)$ и $y_1 \in Ax_1$). Аккретивное отображение A называется *т-аккретивным*, если $\mathcal{R}(I + \lambda A) = H$ для всех $\lambda > 0$ (или, что эквивалентно, $\mathcal{R}(I + \lambda A) = H$ при некотором $\lambda > 0$). Легко видеть, что всякое

m -аккретивное отображение максимально монотонно, и можно показать, что обратное утверждение также справедливо. Если A m -аккретивно, то $(I + \lambda A)^{-1}$ при любом $\lambda > 0$ есть сжатие, отображающее X на $\mathcal{D}(A)$. Тогда $J_\lambda^A = (I + \lambda A)^{-1}$ при $\lambda > 0$ называется резольвентой отображения A (отметим, что $J_\lambda^A = E_\lambda^{-A}$, см. § 2.2) и отображение $A_\lambda = \lambda^{-1}(I - J_\lambda^A)$, $\lambda > 0$, называется аппроксимацией Иосиды оператора A .

Для любой выпуклой функции $F: H \rightarrow (-\infty, \infty]$ субдифференциальное отображение ∂F — это отображение H в себя, т. е. $\partial F \subseteq H \times H$. Как отмечалось в предложении Д.1.19, ∂F монотонно. Заметим, что если F — функция вида $F(x) = \|x\|^2/2$ для всех $x \in H$, то $\partial F = I$.

Предложение Д.1.28. Если $F \in \Gamma(H)$, то ∂F m -аккретивно.

Доказательство. Пусть задано $\lambda > 0$. Мы должны показать, что $\mathcal{R}(I + \lambda \partial F) = H$. Возьмем $y_0 \in H$ и рассмотрим выпуклую функцию G вида $G(x) = (2\lambda)^{-1} \|x - y_0\|^2 + F(x)$. Из предложения Д.1.18 следует, что $\partial G(x) = \lambda^{-1}(x - y_0) + \partial F(x)$, и, значит, $0 \in \partial G(x_0)$ тогда и только тогда, когда $y_0 = x_0 + \lambda \partial F(x_0)$. Поскольку $0 \in \partial G(x_0)$ тогда и только тогда, когда $G(0) = \inf_{x \in H} G(x)$, остается показать, что G ограничена снизу и достигает своего инфимума. Для этого, прежде всего, отметим, что по предложению Д.1.4 F имеет аффинную миноранту $g \in A(H)$; поэтому $G(x) \geq (2\lambda)^{-1} \|x - y_0\|^2 + g(x)$ для всех $x \in H$ и, значит, G ограничена снизу. Положим $\alpha = \inf_{x \in H} G(x)$, и пусть $\{x_n\}$ — такая последовательность, что $G(x_n) \downarrow \alpha$. Используя еще раз то, что F имеет аффинную миноранту, получаем, что $\{x_n\}$ ограничена и, следовательно, имеет подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, слабо сходящуюся к элементу $x_0 \in H$. Так как G п.н.с., то она также слабо п.н.с. (см. § Д.1.1), и, значит, $G(x_0) = \lim G(x_{n_k}) = \alpha$, и нужное утверждение получено. ■

Заметим, что из доказательства этого предложения следует, что функция $G(x) = (2\lambda)^{-1} \|x - y_0\|^2 + F(x)$ достигает своего минимума в единственной точке $J_\lambda^{\partial F} y_0 = (I + \lambda \partial F)^{-1} y_0$. Кроме того, в приведенном предложении подразумевается, что $\mathcal{D}(\partial F)$ непусто. Рассмотрим далее аппроксимацию Иосиды ∂F .

Предложение Д.1.29. Пусть $F \in \Gamma(H)$ и выпуклая функция F_λ , $\lambda > 0$, определена на H следующим образом:

$$F_\lambda(x) = \min_{y \in H} \{ \|y - x\|^2/2\lambda + F(y) \}$$

для всех $x \in H$. Тогда справедливы такие утверждения:

(i) $\text{dom } (F_\lambda) = H$, F_λ дифференцируема по Фреше и ее производная равна $F'_\lambda = \partial F_\lambda = (\partial F)_\lambda$, где $(\partial F)_\lambda$ — аппроксимация Иосиды функции F .

(ii) Область определения отображения ∂F плотна в эффективной области F , т. е. $\overline{\mathcal{D}(\partial F)} = \overline{\text{dom}(F)}$.

(iii) $F_\lambda(x) \uparrow F(x)$ при $\lambda \downarrow 0$ для любого $x \in H$.

Доказательство. Для удобства обозначим $A = \partial F$, где A m -аккретивен согласно предыдущему предложению. Как и ранее, J_λ^A обозначает резольвенту, а A_λ — аппроксимацию Иосиды оператора A при $\lambda > 0$. Напомним, что в § 2.2 установлено, что $A_\lambda \subseteq AJ_\lambda^A$ и что $\|A_\lambda x - A_\lambda y\| \leq (2/\lambda) \|x - y\|$ для любых $x, y \in H$. Кроме того, так как $A_\lambda = \lambda^{-1}(I - J_\lambda^A)$ и J_λ^A — сжатие, то операторы A_λ m -аккретивны.

(i) Как отмечалось выше, минимум в определении $F_\lambda(x)$ достигается в единственной точке $J_\lambda^A x$ при всех $x \in H$ и поэтому $\text{dom}(F_\lambda) = H$ и

$$F_\lambda(x) = (2\lambda)^{-1} \|J_\lambda^A x - x\|^2 + F(J_\lambda^A x) = (\lambda/2) \|A_\lambda x\|^2 + F(J_\lambda^A x).$$

Покажем, что $A_\lambda x \in \partial F_\lambda(x)$ при всех $x \in H$. Действительно, прежде всего заметим, что из включения $A_\lambda \subseteq AJ_\lambda^A$ следует, что $A_\lambda x \in \partial F_\lambda(J_\lambda^A x)$ и, значит,

$$(J_\lambda^A y - J_\lambda^A x, A_\lambda x) \leq F(J_\lambda^A y) - F(J_\lambda^A x)$$

для всех $y \in H$. Теперь для $y \in H$

$$\begin{aligned} F_\lambda(y) - F_\lambda(x) &= (\lambda/2) (\|A_\lambda y\|^2 - \|A_\lambda x\|^2) + (F(J_\lambda^A y) - F(J_\lambda^A x)) \geq \\ &\geq (\lambda/2) (\|A_\lambda y\|^2 - \|A_\lambda x\|^2) + (J_\lambda^A y - J_\lambda^A x, A_\lambda x) = \\ &= (y - x, A_\lambda x) + (\lambda/2) (\|A_\lambda y\|^2 - \|A_\lambda x\|^2) + \\ &\quad + \lambda (A_\lambda x - A_\lambda y, A_\lambda x) = \\ &= (y - x, A_\lambda x) + (\lambda/2) \|A_\lambda y - A_\lambda x\|^2 \geq (y - x, A_\lambda x), \end{aligned}$$

откуда видно, что $A_\lambda x \in \partial F_\lambda(x)$. Таким образом, мы доказали, что $A_\lambda \subseteq \partial F_\lambda$. Замечая, что и A_λ , и ∂F_λ m -аккретивны, получаем, что $A_\lambda = \partial F_\lambda$, откуда уже следует, что F_λ дифференцируема по Гато и ее производная F'_λ равна A_λ . Чтобы показать дифференцируемость по Фреше F_λ , возьмем $x, y \in H$ и заметим, что из вложения $A_\lambda y \in \partial F_\lambda(y)$ следует, что $F_\lambda(x) - F_\lambda(y) \geq (x - y,$

$A_\lambda y$). Отсюда

$$0 \leq F_\lambda(y) - F_\lambda(x) - (y - x, A_\lambda x) \leq (x - y, A_\lambda x - A_\lambda y) \leq (\lambda/2) \|x - y\|^2,$$

т. е. F_λ дифференцируема по Фреше.

(ii) Мы покажем, что $J_\lambda^A x \rightarrow x$ при $\lambda \downarrow 0$ для всех $x \in H$, для которых $\sup_{\lambda > 0} F_\lambda(x) = M < \infty$. Зафиксируем такое x . По предложению Д.1.4 существуют такие $z \in H$ и $\alpha \in \mathbb{R}$, что $F(y) \geq \langle y, z \rangle + \alpha$ для всех $y \in H$. Теперь

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\lambda} \|J_\lambda^A x - x\|^2 &\leq M - F(J_\lambda^A x) \leq M - \langle J_\lambda^A x, z \rangle - \alpha = \\ &= M + \langle x, z \rangle - \alpha + \langle J_\lambda^A x, z \rangle \leq \\ &\leq M + \langle x, z \rangle - \alpha + \frac{1}{2} \|z\|^2 + \frac{1}{2} \|J_\lambda^A x - x\|^2, \end{aligned}$$

откуда следует, что $\|J_\lambda^A x - x\| \rightarrow 0$ при $\lambda \downarrow 0$.

Поскольку $F_\lambda(x) \leq F(x)$ для всех x , отсюда получаем, что $J_\lambda^A(x)$ стремится к x при $\lambda \downarrow 0$ для всех $x \in \text{dom}(F)$, и так как $J_\lambda^A x \in \mathcal{D}(\partial F)$ при всех $\lambda > 0$, мы можем заключить, что $\mathcal{D}(\partial F)$ плотно в $\text{dom}(F)$.

(iii) Очевидно, что $\sup_{\lambda > 0} F_\lambda(x) \leq F(x)$ при всех $x \in H$. Для доказательства обратного неравенства мы можем предположить, что $\sup F_\lambda(x) < \infty$. Как и в (ii), затем устанавливается, что $J_\lambda^A x \rightarrow x$ при $\lambda \downarrow 0$, и из полунепрерывности снизу F следует, что

$$F(x) = \lim_{\lambda \downarrow 0} F(J_\lambda^A x) \leq \lim_{\lambda \downarrow 0} F_\lambda(x) = \sup_{\lambda > 0} F_\lambda(x);$$

доказательство завершено. ■

В замечании Д.1.17 было отмечено без доказательства, что $\mathcal{D}(\partial F)$ плотно в $\text{dom}(F)$ для любой функции $F \in \Gamma(X)$, где X — банахово пространство. Утверждение (ii) предыдущего предложения — частный случай этого общего результата.

Полуупорядоченные банаховы пространства

Д.2.1. Полуупорядоченные банаховы пространства

Цель данного дополнения — привести некоторую терминологию и результаты теории полуупорядоченных банаховых пространств, которая используется в параграфах о позитивных полугруппах. Вещественное векторное пространство X называется *полуупорядоченным векторным пространством*, если на X определено частичное упорядочение $\leq$ со следующими свойствами: если $x \leq y$ в X , то $x + z \leq y + z$ для всех $z \in X$ и $\lambda x \leq \lambda y$ при всех $0 \leq \lambda \in \mathbb{R}$. Данная частичная упорядоченность определяет в X *положительный клин* $X^+ = \{x \in X: x \geq 0\}$. Ясно, что X^+ — клин, т. е. $\alpha x + \beta y \in X^+$ при $x, y \in X^+$ и $0 \leq \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Кроме того, $X^+ \cap (-X^+) = \{0\}$, а такой клин X^+ называется (*положительным*) *конусом*. Обратно, по заданному конусу K в X определяется частичная упорядоченность $x \leq y$, если $y - x \in K$, и, таким образом, $(X, \leq)$ является полуупорядоченным векторным пространством с положительным конусом $X^+ = K$.

Вещественное банахово пространство $(X, \|\cdot\|)$ называется *полуупорядоченным банаховым пространством*, если X — полуупорядоченное векторное пространство и X^+ замкнут в исходной норме. Заметим, что любое полуупорядоченное банахово пространство является архимедовым, т. е. в нем из условия $0 \leq nx \leq y$ при всех $n = 1, 2, \dots$ следует $x = 0$. Действительно, если $0 \leq nx \leq y$ при всех n , то $n^{-1}y - x \in X^+$ при всех n , и в силу замкнутости X^+ получаем $-x \in X^+$. Из того, что X^+ — конус, вытекает, что $x = 0$.

Всюду далее будем предполагать, что X — полуупорядоченное банахово пространство с положительным конусом X^+ . Конус X^+ называется *воспроизводящим*, если $X = X^+ - X^+$ (X^+ называется *слабо воспроизводящим*, если множество $X^+ - X^+$ плотно в X в топологии исходной нормы). Если X^+ воспроизводящий, то из теоремы Бэра о категориях следует, что существует константа $C \geq 1$ со свойством, что любой элемент $x \in X$ представим в виде $x = y - z$, $y, z \in X^+$ и $\max(\|y\|, \|z\|) \leq C \|x\|$. Для заданных $x, y \in X$ обозначим через $[x, y]$ *конусный отрезок*, определяемый элементами x и y , т. е. $[x, y] = \{z \in X: x \leq z \leq y\}$. Подмножество S множества X называется *сплошным*, если из $x, y \in S$ следует, что $[x, y] \subseteq S$. Подмножество D в X называется *порядково ограни-*

ченным, если D содержится в некотором конусном отрезке. Заметим, что конусный отрезок замкнут в X .

Приведем некоторые свойства, которые связывают норму в X с частичной упорядоченностью.

Определение Д.2.1. (i) Положительный конус X^+ называется *нормальным*, если существует база окрестностей нуля (в топологии нормы), состоящая из сплошных множеств (т. е. если существуют число $\varepsilon > 0$ и сплошное множество S , такие, что $\varepsilon B \subseteq S \subseteq B$, где $B = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$).

(ii) Норма в пространстве X называется *M -монотонной*, если существует константа $M \geq 1$, для которой из условия $0 \leq x \leq y$ следует неравенство $\|x\| \leq M \|y\|$. Если $M = 1$, то норму называют *монотонной*.

Предложение Д.2.2. В полуупорядоченном банаховом пространстве X следующие условия эквивалентны:

- (i) X^+ нормален;
- (ii) порядково ограниченное множество ограничено по норме;
- (iii) норма в X является M -монотонной при некотором $M \geq 1$.

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii). Достаточно показать, что конусный отрезок $[0, x]$ ограничен по норме при $0 < x \in X$. По предположению существуют число $\varepsilon > 0$ и сплошное множество S , такие, что $\varepsilon B \subseteq S \subseteq B$. Тогда $\varepsilon \|x\|^{-1}x \in \varepsilon B \subseteq S$ и поэтому $[0, \varepsilon \|x\|^{-1}x] \subseteq S \subseteq B$. Отсюда следует, что $\|z\| \leq \varepsilon^{-1} \|x\|$ при всех $z \in [0, x]$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Предположим, что (iii) не выполняется. Тогда найдутся элементы $0 < x_n \leq y_n$ в X со свойством $\|x_n\| > 4^n \|y_n\|$, $n = 1, 2, \dots$. Заменив x_n и y_n соответственно на $\|y_n\|^{-1}x_n$ и $\|y_n\|^{-1}y_n$, можно считать, что $0 \leq x_n \leq y_n$, $\|y_n\| \leq 1$ и $\|x_n\| > 4^n$, $n = 1, 2, \dots$. Положив $y = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}y_n$, получим $0 \leq 2^{-n}x_n \leq 2^{-n}y_n \leq y$ при всех n . Поскольку $\|2^{-n}x_n\| > 2^n$, то это означает, что $[0, y]$ не ограничен по норме. Полученное противоречие доказывает импликацию (ii) $\Rightarrow$ (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (i). Как и ранее, обозначим $B = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$. Пусть S — сплошная оболочка B , т. е. $S = \bigcup \{[x, y] : x, y \in B\}$. Ясно, что S — сплошное множество и $B \subseteq S$. Предположим теперь, что $x \leq z \leq y$ при $x, y \in B$. Тогда $z = x + (z - x)$ и, поскольку $0 \leq z - x \leq y$, то в силу предположений о норме получаем $\|z\| \leq \|x\| + \|z - x\| \leq \|x\| + M \|y\| \leq M + 1$. Отсюда следует, что $S \subseteq (1 + M)B$, и поэтому X^+ нормален. ■

В связи с предыдущим предложением заметим, что из предложения 7.9 следует, что X^+ нормален тогда и только тогда, когда

в X существует монотонная норма, которая эквивалентна исходной норме.

Предположим, что X — полуупорядоченное банахово пространство с положительным конусом X^+ . *Сопряженный клин* в банаховом сопряженном пространстве X^* определяется формулой

$$(X^*)^+ = \{\varphi \in X^* : \langle x, \varphi \rangle \geq 0 \text{ при всех } x \geq 0\}.$$

Очевидно, что $(X^*)^+$ — замкнутый клин в X^* , и он является конусом тогда и только тогда, когда X^+ является слабо воспроизводящим. Элементы из $(X^*)^+$ называются *ограниченными по норме положительными линейными функционалами* на X . Следующее предложение показывает, что в некотором смысле существует достаточно много положительных линейных функционалов на X .

Предложение Д.2.3. *Элемент $x \in X$ принадлежит X^+ тогда и только тогда, когда $\langle x, \varphi \rangle \geq 0$ при всех $\varphi \in (X^*)^+$.*

Доказательство. По определению $(X^*)^+$, если $x \in X^+$, то $\langle x, \varphi \rangle \geq 0$ при всех $\varphi \in (X^*)^+$. Предположим теперь, что $x \in X \setminus X^+$. Поскольку X^+ является замкнутым выпуклым подмножеством, то по теореме Хана — Банаха существуют элемент $\varphi \in X^*$ и число $\alpha \in \mathbb{R}$ со свойствами $\langle x, \varphi \rangle < \alpha < \langle y, \varphi \rangle$ при всех $y \in X^+$. Поскольку из $y \in X^+$ следует, что $\lambda y \in X^+$ при всех $0 \leq \lambda \in \mathbb{R}$, то $\alpha < 0$ и $\langle y, \varphi \rangle \geq 0$ при всех $y \in X^+$. Отсюда $\varphi \in (X^*)^+$ и $\langle x, \varphi \rangle < 0$. Предложение доказано. ■.

Предложение Д.2.4. *Если положительный конус X^+ нормальный и воспроизводящий, то сопряженный конус $(X^*)^+$ также нормальный и воспроизводящий.*

Доказательство. Сначала докажем, что $(X^*)^+$ нормальный. Поскольку X^+ является воспроизводящим, то, как отмечалось в начале данного параграфа, существует константа $C \geq 1$, такая, что любой $x \in X$ допускает представление $x = x_1 - x_2$ при $x_1, x_2 \in X^+$ и $\max(\|x_1\|, \|x_2\|) \leq C \|x\|$. Предположим, что $0 \leq \psi \leq \varphi$ в X^* (заметим, что поскольку X^+ воспроизводящий, то $(X^*)^+$ — конус, и поэтому X^* — полуупорядоченное банахово пространство с положительным конусом $(X^*)^+$). Выберем $x \in X$ и, как и выше, запишем $x = x_1 - x_2$. Тогда

$$\begin{aligned} |\langle x, \psi \rangle| &\leq \langle x_1, \psi \rangle + \langle x_2, \psi \rangle \leq \langle x_1 + x_2, \varphi \rangle \leq \\ &\leq \|\varphi\| (\|x_1\| + \|x_2\|) \leq 2C \|\varphi\| \cdot \|x\|, \end{aligned}$$

и, значит, $\|\psi\| \leq 2C \|\varphi\|$. Это означает, что норма в X^* является $2C$ -монотонной, и, следовательно, $(X^*)^+$ нормален.

Теперь покажем, что $(X^*)^+$ воспроизводящий. Поскольку конус X^+ нормальный, то из предложения Д.2.2 получаем M -монотонность нормы в X при некотором $M \geq 1$. Пусть задан $\varphi \in X^*$.

Для $x \in X^+$ определим $p(x) = \sup \{ \langle z, \varphi \rangle : z \in [0, x] \}$. Заметим, что $p(x) < \infty$. Действительно, если $z \in [0, x]$, то $\langle z, \varphi \rangle \leq \| \varphi \| \cdot \| z \| \leq M \| \varphi \| \cdot \| x \|$ и, таким образом, $p(x) \leq M \cdot \| \varphi \| \cdot \| x \|$. Легко видеть, что $p(x+y) \geq p(x) + p(y)$ при всех $x, y \in X^+$ и $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ при всех $x \in X^+$ и $0 \leq \alpha \in \mathbb{R}$. Рассмотрим пространство $\mathbb{R} \times X$ с нормой $\|(\alpha, x)\| = |\alpha| + \|x\|$ и определим множество

$$K = \{(\alpha, x) \in \mathbb{R} \times X : (x \in X^+) \text{ и } 0 \leq \alpha \leq p(x)\},$$

которое является конусом в $\mathbb{R} \times X$. Следует заметить, что из предположений $(\alpha_n, x_n) \in K$ ($n = 1, 2, \dots$) и $x_n \rightarrow 0$ (по норме) в X ввиду неравенства $0 \leq \alpha_n \leq p(x_n) \leq M \| \varphi \| \cdot \| x_n \|$ получаем $\alpha_n \rightarrow 0$. Это означает, что $(1, 0) \notin \bar{K}$ и поэтому по теореме Хана — Банаха существуют $\eta \in (\mathbb{R} \times X)^*$ и константа c со свойством $\langle (1, 0), \eta \rangle < c < \langle (\alpha, x), \eta \rangle$ при всех $(\alpha, x) \in K$. Поскольку K — конус, то $\langle (1, 0), \eta \rangle < 0$ и $\langle (\alpha, x), \eta \rangle \geq 0$ при всех $(\alpha, x) \in K$. Мы можем считать, что $\langle (1, 0), \eta \rangle = -1$. В силу равенства $(\mathbb{R} \times X)^* = \mathbb{R} \times X^*$ существуют $\psi \in X^*$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, для которых $\langle (\alpha, x), \eta \rangle = \lambda \alpha + \langle x, \psi \rangle$ при всех $(\alpha, x) \in \mathbb{R} \times X$. На самом деле $\lambda = -1$ и, таким образом, $\langle (\alpha, x), \eta \rangle = -\alpha + \langle x, \psi \rangle$. Мы утверждаем, что $\psi \in (X^*)^+$. Действительно, если $x \in X^+$, то $(0, x) \in K$ и $\langle x, \psi \rangle = \langle (0, x), \eta \rangle \geq 0$. Кроме того, если $x \in X^+$, то $(p(x), x) \in K$ и, значит, $-p(x) + \langle x, \psi \rangle \geq 0$. Отсюда находим, что $\langle x, \varphi \rangle \leq p(x) \leq \langle x, \psi \rangle$. Таким образом, $\langle x, \psi - \varphi \rangle \geq 0$ при всех $x \in X^+$ и, следовательно, $\psi - \varphi \in (X^*)^+$. Используя равенство $\varphi = \psi - (\psi - \varphi)$, устанавливаем, что $(X^*)^+$ воспроизводящий. ■

Замечание. Если полуупорядоченное банахово пространство X обладает так называемым свойством разложения Рисса (т. е. если $0 \leq x, y \in X$ и $0 \leq z \leq x + y$, то z представляется как $z = u + v$, причем $0 \leq u \leq x$ и $0 \leq v \leq y$), то вторая часть доказательства установленного выше предложения может быть значительно упрощена. Действительно, в этой ситуации легко видеть, что функционал p не только супераддитивен, но и аддитивен на X^+ , а потому существует элемент $\psi_0 \in (X^*)^+$ со свойством $p(x) = \langle x, \psi_0 \rangle$ при всех $x \in X^+$. Итак, мы получаем необходимое разложение $\varphi = \psi_0 - (\psi_0 - \varphi)$ при $\varphi \leq \psi_0$. Кроме того, нетрудно видеть, что ψ_0 является супремумом линейных функционалов φ и 0 в полуупорядоченном банаховом пространстве X^* . Отсюда видно, что в этом случае X^* — векторная структура (см. § Д.2.4). В частности, любая векторная структура обладает свойством разложения Рисса.

Мы закончим этот параграф некоторыми замечаниями, связанными с комплексификацией вещественных банаховых пространств. Пусть $(X, \| \cdot \|)$ — вещественное банахово пространство. Про-

пространство $X \times X$ — комплексное векторное пространство с операциями $(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v)$ и $(\alpha + i\beta)(x, y) = (\alpha x - \beta y, \beta x + \alpha y)$ при всех $x, y, u, v \in X$ и всех $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Отображение $x \rightarrow (x, 0)$ является вещественно линейным изоморфизмом из X на линейное вещественное подпространство в $X \times X$. С помощью этого изоморфизма X отождествляется с вещественным линейным подпространством в $X \times X$, и ясно, что $X \times X = X \oplus iX$. Это пространство $X_{\mathbb{C}} = X \oplus iX$ называется *комплексификацией* вещественного пространства X . Наделим $X_{\mathbb{C}}$ нормой

$$\|x + iy\|_{\mathbb{C}} = \sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \|(\cos \theta)x + (\sin \theta)y\|, \quad x, y \in X.$$

Поскольку $\|x\|, \|y\| \leq \|x + iy\|_{\mathbb{C}} \leq \|x\| + \|y\|$, то очевидно, что $X_{\mathbb{C}}$ — банахово пространство. Заметим, что оператор вложения X в $X_{\mathbb{C}}$ есть изометрия. Если $z = x + iy \in X_{\mathbb{C}}$ при $x, y \in X$, то мы пишем $x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z$; аналогично примем запись $X = \operatorname{Re} X_{\mathbb{C}}$. Во многих случаях на $X_{\mathbb{C}}$ задана норма, которая превращает $X_{\mathbb{C}}$ в комплексное банахово пространство и сужение которой на X совпадает с исходной нормой, заданной на X . Такая норма не обязана быть равной норме $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$, но она эквивалентна ей.

Предположим, что X и Y — банаховы пространства с комплексификациями $X_{\mathbb{C}}$ и $Y_{\mathbb{C}}$ соответственно. Как обычно, через $\mathcal{L}(X, Y)$ обозначим банахово пространство всех (вещественных) линейных ограниченных операторов из X в Y , а через $\mathcal{L}(X_{\mathbb{C}}, Y_{\mathbb{C}})$ — пространство всех (комплексных) линейных ограниченных операторов из $X_{\mathbb{C}}$ в $Y_{\mathbb{C}}$. Любой оператор $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ имеет единственное расширение до $T_{\mathbb{C}} \in \mathcal{L}(X_{\mathbb{C}}, Y_{\mathbb{C}})$, который определяется по формуле $T_{\mathbb{C}}(x + iy) = Tx + iTy$ при всех $x, y \in X$. Отображение $T \mapsto T_{\mathbb{C}}$ есть вещественно линейный изоморфизм из $\mathcal{L}(X, Y)$ в $\mathcal{L}(X_{\mathbb{C}}, Y_{\mathbb{C}})$, и мы можем рассматривать $\mathcal{L}(X, Y)$ как вещественное линейное подпространство в $\mathcal{L}(X_{\mathbb{C}}, Y_{\mathbb{C}})$. Обратно, любой $T \in \mathcal{L}(X_{\mathbb{C}}, Y_{\mathbb{C}})$ может быть представлен единственным образом в виде $T = T_1 + iT_2$ при $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(X, Y)$. Действительно, положим $T_1 x = \operatorname{Re}(Tx)$ и $T_2(x) = \operatorname{Im}(Tx)$ при всех $x \in X$. Кроме того, если $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ с операторной нормой $\|T\|$, то $\|T\| = \|T_{\mathbb{C}}\|$, где $\|T_{\mathbb{C}}\|$ — операторная норма, в $\mathcal{L}(X_{\mathbb{C}}, Y_{\mathbb{C}})$ (в $X_{\mathbb{C}}$ и $Y_{\mathbb{C}}$ мы рассматриваем комплексификацию, отталкиваясь от исходных норм). Из предыдущих соображений следует, что пространство $\mathcal{L}(X_{\mathbb{C}}, Y_{\mathbb{C}})$ является комплексификацией пространства $\mathcal{L}(X, Y)$ как векторного пространства.

Однако, операторная норма в $\mathcal{L}(X_{\mathbb{C}}, Y_{\mathbb{C}})$ не является комплексификацией нормы в $\mathcal{L}(X, Y)$ (но эти нормы эквивалентны).

Определение Д.2.5. Комплексное банахово пространство называется *полуупорядоченным банаховым пространством*, если оно является комплексификацией вещественного полуупорядоченного банахова пространства.

Д.2.2. Полуупорядоченное банахово пространство с порядковой единицей

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — полуупорядоченное банахово пространство с положительным конусом X^+ .

Определение Д.2.6. Элемент $u \in X^+$ называется *порядковой единицей* в X , если для любого $x \in X$ существует такое $0 \leq \lambda \leq \mathbb{R}$, что $-\lambda u \leq x \leq \lambda u$.

Если X обладает порядковой единицей, то X^+ является воспроизводящим. Действительно, если $-\lambda u \leq x \leq \lambda u$, то $x = (x + \lambda u)/2 - (\lambda u - x)/2$, где $x + \lambda u \geq 0$, $\lambda u - x \geq 0$. Следующее предложение дает топологическое описание порядковых единиц.

Предложение Д.2.7. Элемент $u \in X^+$ является порядковой единицей тогда и только тогда, когда $u \in \text{int } X^+$.

Доказательство. Предположим сначала, что $u \in \text{int } X^+$. Тогда существует $\varepsilon > 0$, такое, что $B(u, \varepsilon) = \{x \in X: \|x - u\| \leq \varepsilon\} \subseteq X^+$. Возьмем некоторое $x \in X$, $x \neq 0$. Ясно, что $u \pm \varepsilon x / \|x\| \in B(u, \varepsilon)$ и, значит, $u \pm \varepsilon x / \|x\| \geq 0$. Отсюда $-\varepsilon^{-1} \|x\| \cdot u \leq x \leq \varepsilon^{-1} \|x\| \cdot u$. Поэтому u — порядковая единица.

Предположим теперь, что $u \in X^+$ — порядковая единица, т. е. $X = \bigcup_{\lambda > 0} [-\lambda u, \lambda u]$. По теореме Бэра о категориях существуют такие число $\lambda_0 > 0$ и элемент $w \in X$, что $w \in \text{int } [-\lambda_0 u, \lambda_0 u]$. Тогда $0 \in \text{int } ([-\lambda_0 u, \lambda_0 u] - w) \subseteq \text{int } [-\lambda_1 u, \lambda_1 u]$ при некотором $\lambda_1 > 0$ и, значит, $B(0, 1) \subseteq [-\alpha u, \alpha u]$ при некотором подходящем $\alpha > 0$. Отсюда следует, что $B(u, \alpha^{-1}) \subseteq X^+$, т. е. $u \in \text{int } X^+$. ■

Как отмечалось в предложении Д.2.2, X^+ является нормальным тогда и только тогда, когда каждый конусный отрезок в X ограничен по норме. Этот результат может быть усилен в пространствах с порядковой единицей.

Предложение Д.2.8. Если X — полуупорядоченное банахово пространство с $\text{int } X^+ \neq \emptyset$, то X^+ нормален тогда и только

тогда, когда существует элемент $u \in \text{int } X^+$, для которого конусный отрезок $[-u, u]$ ограничен по норме.

Доказательство. Предположим, что $u \in \text{int } X^+$ — такой элемент, для которого $\|x\| \leq M$ при всех $x \in [-u, u]$. Как и при доказательстве предыдущего предложения, найдется число $\varepsilon > 0$ со свойством $-\varepsilon^{-1}\|x\| \cdot u \leq x \leq \varepsilon^{-1}\|x\| \cdot u$ при всех $x \in X$. Предположим теперь, что даны $0 < z \leq y$ в X . Тогда $0 \leq \varepsilon\|y\|^{-1}y \leq u$ и $0 \leq \varepsilon\|y\|^{-1}z \leq u$. Отсюда $\|z\| \leq (\varepsilon^{-1}M)\|y\|$ и, значит, норма является $\varepsilon^{-1} \cdot M$ -монотонной. Обратное утверждение очевидно в силу предложения Д.2.2. ■

В общем случае ограниченное по норме подмножество в полуупорядоченном банаховом пространстве не является порядково ограниченным. В самом деле, взглянув на доказательство предложения Д.2.7, можно увидеть, что любое ограниченное по норме множество в X является порядково ограниченным тогда и только тогда, когда пространство X содержит порядковую единицу.

Пусть X — полуупорядоченное банахово пространство и $u \in \text{int } X^+$. *Норма порядковой единицы*, соответствующая элементу u , или u -норма, определяется формулой

$$\|x\|_u = \inf \{\lambda \geq 0 : -\lambda u \leq x \leq \lambda u\}, \quad x \in X.$$

Проверка того факта, что $\|\cdot\|_u$ является нормой, предоставляется читателю. Заметим, что $-\|x\|_u \cdot u \leq x \leq \|x\|_u \cdot u$ и поэтому предыдущий инфимум достигается, т. е. является минимумом. Как видно из доказательства предложения Д.2.7, существует $\varepsilon > 0$, для которого $-\varepsilon^{-1}\|x\| \cdot u \leq x \leq \varepsilon^{-1}\|x\| \cdot u$ при всех $x \in X$ и поэтому $\|x\|_u \leq \varepsilon^{-1}\|x\|$ при всех $x \in X$. Кроме того, норма $\|\cdot\|_u$ — абсолютно монотонная норма, т. е. если $-y \leq x \leq y$ в X , то $\|x\|_u \leq \|y\|_u$. В частности, $\|\cdot\|_u$ является монотонной. Из предыдущих рассуждений легко следует, что X^+ является нормальным тогда и только тогда, когда нормы $\|\cdot\|_u$ и $\|\cdot\|$ эквивалентны. Полуупорядоченное банахово пространство называется *пространством с порядковой единицей*, если существует такой элемент $u \in \text{int } X^+$, что $\|\cdot\| = \|\cdot\|_u$.

Имеется понятие внутреннего элемента, которое слабее чем понятие порядковой единицы.

Определение Д.2.9. Пусть X — полуупорядоченное банахово пространство. Элемент $u \in X^+$ называется *квазивнутренним*, если $\langle u, \varphi \rangle > 0$ при всех $0 < \varphi \in X^*$.

Если $u \in X^+$ — порядковая единица, то u — квазивнутренний элемент. Действительно, возьмем $0 \leq \varphi \in X^*$ и предположим, что $\langle u, \varphi \rangle = 0$. Для $x \in X$ существует такое $0 \leq \lambda \in \mathbb{R}$, что $-\lambda u \leq x \leq \lambda u$. Отсюда следуют неравенства $-\lambda \langle u, \varphi \rangle \leq \langle x, \varphi \rangle \leq \lambda \langle u, \varphi \rangle$ и, значит, $\langle x, \varphi \rangle = 0$. Поэтому $\varphi = 0$.

Кроме того, надо отметить, что $u \in X^+$ является квазивнутренним элементом тогда и только тогда, когда для любых $x \in X$ и $\varepsilon > 0$ существует $y \in X$ со свойствами $\|x - y\| \leq \varepsilon$ и $y \leq \lambda u$ при некотором $0 \leq \lambda \in \mathbb{R}$ (это последнее утверждение попросту говорит, что множество $\bigcup_{\lambda > 0} (\lambda u - X^+)$ плотно в X в исходной норме; их эквивалентность устанавливается прямым применением теоремы Хана — Банаха об отделении).

Предложение Д.2.10. Пусть X — полуупорядоченное банахово пространство и $\text{int } X^+ \neq \emptyset$. Элемент $u \in X^+$ является порядковой единицей тогда и только тогда, когда u — квазивнутренний элемент.

Доказательство. Как отмечалось выше, если u — порядковая единица, то она является квазивнутренным элементом. Предположим теперь, что $u \in X^+$ — квазивнутренний элемент и в то же время $u \notin \text{int } X^+$. Поскольку $\text{int } X^+ \neq \emptyset$, то по теореме Хана — Банаха об отделении существует $0 \neq \varphi \in X^*$ со свойством $\langle u, \varphi \rangle \leq \langle x, \varphi \rangle$ при всех $x \in X^+$. Поскольку $x \in X^+$, то при любом $\alpha \geq 0$ $\alpha x \in X^+$ и, следовательно, $\langle x, \varphi \rangle \geq 0$ при всех $x \in X^+$. В частности, $\langle u, \varphi \rangle \geq 0$. С другой стороны, $\langle u, \varphi \rangle \leq 0$, так как $0 \in X^+$ и, значит, $\langle u, \varphi \rangle = 0$. Элемент u является квазивнутренным и, следовательно, $\varphi = 0$, что противоречит его выбору. ■

Д.2.3. Положительные операторы

Пусть X и Y — полуупорядоченные банаховы пространства. Линейный оператор T из X в Y называется *положительным*, если $T(X^+) \subseteq Y^+$ или, что эквивалентно, если $Tx \leq Ty$ в Y , как только $x \leq y$ в X . Во многих случаях из положительности линейных операторов следует их ограниченность по норме.

Предложение Д.2.11. Если конус X^+ воспроизводящий, а Y^+ — нормальный конус, то каждый положительный линейный оператор T из X в Y ограничен по норме.

Доказательство. Как отмечалось в начале § Д.2.1, если конус X^+ воспроизводящий, то существует константа $C \geq 1$, для которой любой элемент $x \in X$ представляется в виде $x = x' - x''$, $x', x'' \geq 0$, причем $\max(\|x'\|, \|x''\|) \leq C \|x\|$. Кроме того, поскольку Y^+ нормален, то существует (в силу предложения Д.2.2) константа $M \geq 1$, такая, что из условия $0 \leq y \leq y'$ в Y вытекает неравенство $\|y\| \leq M \cdot \|y'\|$. Теперь предположим, что T — положительный линейный оператор из X в Y , который не является ограниченным по норме. Тогда существуют элементы $x_n \in X$ со свойством $\|x_n\| \leq 1$ и $\|Tx_n\| \geq 2n^3$ ($n = 1, 2, \dots$). Выберем $0 \leq x'_n, x''_n \in X$ со свойствами $x_n = x'_n - x''_n$ и $\max(\|x'_n\|, \|x''_n\|) \leq$

$\leq C \|x_n\|$ при всех n . Поскольку $\|Tx'_n\| + \|Tx''_n\| \geq \|Tx_n\| \geq 2n^3$, то либо $\|Tx'_n\| \geq n^3$, либо $\|Tx''_n\| \geq n^3$. Поэтому можно выбрать $0 \leq z_n \in X$, для которых $\|z_n\| \leq C$ и $\|Tz_n\| \geq n^3$ при всех n . Положим теперь $z = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} z_n$. Тогда $0 \leq n^{-2} z_n \leq z$ и $0 \leq n^{-2} Tz_n \leq Tz$ при всех n . Отсюда вытекает неравенство $n \leq n^{-2} \|Tz_n\| \leq M \|Tz\|$ при $n = 1, 2, \dots$, которое противоречит ограниченности величины $M \cdot \|Tz\|$. ■

В частном случае $Y = \mathbb{R}$ мы получаем следующий результат.

Следствие Д.2.12. *Если X — полуупорядоченное банахово пространство с воспроизводящим положительным конусом, то любой положительный линейный функционал на X ограничен по норме.*

Если мы сопоставим предыдущее следствие с предложением Д.2.4, то видим, что для полуупорядоченного банахова пространства X с воспроизводящим нормальным положительным конусом сопряженное банахово пространство X^* состоит в точности из тех линейных функционалов, которые могут быть представлены как разность двух положительных линейных функционалов.

Для заданных полуупорядоченных банаховых пространств X и Y множество всех ограниченных положительных линейных операторов из X в Y обозначим через $\mathcal{L}(X, Y)^+$. Множество $\mathcal{L}(X, Y)^+$, очевидно, является (сильно) замкнутым клином в банаховом пространстве $\mathcal{L}(X, Y)$. Если X^+ — воспроизводящий конус, то $\mathcal{L}(X, Y)^+$ — конус и поэтому $\mathcal{L}(X, Y)$ — полуупорядоченное банахово пространство. Следует заметить, что $\mathcal{L}(X, Y)^+$ только в исключительных случаях бывает воспроизводящим. Нетрудно видеть, что если X^+ — воспроизводящий, а Y^+ — нормальный конусы, то $\mathcal{L}(X, Y)^+$ нормален. Операторная норма в $\mathcal{L}(X, Y)$ называется *положительно достижимой*, если

$$\|T\| = \sup \{\|Tx\|: 0 \leq x \in X, \|x\| \leq 1\}$$

при всех $T \in \mathcal{L}(X, Y)^+$. Если операторная норма положительно достижима, то $\mathcal{L}(X, Y)^+$ — конус. Кроме того, если операторная норма положительно достижима и норма в Y монотонна, то операторная норма также монотонна.

Обсудим теперь некоторые, достаточные условия на X и Y для того, чтобы операторная норма была положительно достижимой. Для этой цели мы введем в полуупорядоченном банаховом пространстве $(X, \|\cdot\|)$ следующие понятия:

(i) норма $\|\cdot\|$ называется *абсолютно монотонной*, если из $-y \leq x \leq y$ в X следует, что $\|x\| \leq \|y\|$ (заметим, что абсолютная монотонность влечет за собой монотонность);

(ii) X^+ называется *аппроксимативно абсолютно доминирующим*, если для любого $x \in X$ и всех $\alpha > 1$ существует элемент

$y \in X^+$ со свойствами $-y \leq x \leq y$ и $\|y\| \leq \alpha \|x\|$ (заметим, что такой конус является воспроизводящим);

(iii) X^+ называется *абсолютно доминирующим*, если для любого $x \in X$ существует $y \in X^+$, такой, что $-y \leq x \leq y$, $\|y\| \leq \|x\|$;

(iv) норма $\|\cdot\|$ называется *нормой Рисса*, если она абсолютно монотонна и X^+ аппроксимативно абсолютно доминирующий; далее, норма $\|\cdot\|$ называется *сильной нормой Рисса*, если она абсолютно монотонна и X^+ абсолютно доминирующий.

Из приведенных определений следует, что

(1) норма $\|\cdot\|$ является нормой Рисса тогда и только тогда, когда $\|x\| = \inf \{\|y\| : -y \leq x \leq y, y \in X^+\}$ для каждого $x \in X$,

(2) норма $\|\cdot\|$ является сильной нормой Рисса тогда и только тогда, когда $\|x\| = \min \{\|y\| : -y \leq x \leq y, y \in X^+\}$. Пусть $-y \leq x \leq y$ в X . Тогда, очевидно, $(x+y)/2, (y-x)/2 \geq 0$. Поскольку $x = (x+y)/2 - (y-x)/2$ и $y = (y+x)/2 + (y-x)/2$, то нетрудно видеть, что норма $\|\cdot\|$ является нормой Рисса тогда и только тогда, когда

$$\|x\| = \inf \{\|u+v\| : x = u-v, 0 \leq u, v \in X\},$$

и является сильной нормой Рисса тогда и только тогда, когда инфимум можно заменить на минимум.

Предложение Д.2.13. Если X и Y — полуупорядоченные банаховы пространства, X^+ — аппроксимативно абсолютно доминирующий конус, а норма в Y абсолютно монотонна, то норма в $\mathcal{L}(X, Y)$ положительно достижима. В частности, если X — полуупорядоченное банахово пространство с нормой Рисса, то операторная норма в $\mathcal{L}(X)$ положительно достижима.

Доказательство. Возьмем $0 \leq T \in \mathcal{L}(X, Y)$, и положим $\|T\|_+ = \sup \{\|Tx\| : 0 \leq x \in X, \|x\| = 1\}$. Ясно, что $\|Tx\| \leq \|T\|_+ \cdot \|x\|$ при всех $0 \leq x \in X$ и $\|T\|_+ \leq \|T\|$. Выберем $\alpha > 1$. Для заданного $x \in X$ существует $u \in X^+$ со свойствами $-u \leq x \leq u$ и $\|u\| \leq \alpha \|x\|$. Поскольку T — положительный оператор, то $-Tu \leq Tx \leq Tu$ и поэтому $\|Tx\| \leq \|Tu\|$. Отсюда $\|Tx\| \leq \|Tu\| \leq \|T\|_+ \|u\| \leq \alpha \|T\|_+ \|x\|$. Это означает, что $\|T\| \leq \alpha \|T\|_+$. Поскольку число $\alpha > 1$ произвольно, то $\|T\| \leq \|T\|_+$. Таким образом, $\|T\| = \|T\|_+$. ■

Следствие Д.2.14. Если X — полуупорядоченное банахово пространство, причем конус X^+ аппроксимативно абсолютно доминирующий, то норма в X^* положительно достижима и монотонна.

Замечание. (1) Если $(X, \|\cdot\|)$ — полуупорядоченное банахово пространство и если существует эквивалентная норма Рисса в X , то ясно, что X^+ является воспроизводящим и нормаль-

ным. Обратно, если X^+ является воспроизводящим и нормальным, то, как нетрудно видеть, норма

$$|||x||| = \inf \{ \|u + v\| : 0 \leq u, v \in X, x = u - v \}, \quad x \in X,$$

определяет норму Рисса в X , которая эквивалентна исходной норме.

(2) Предположим, что X — полуупорядоченное банахово пространство и $u \in \text{int } X^+$. Мы утверждаем, что u -норма $\|\cdot\|_u$ является сильной нормой Рисса в X . Действительно, как уже отмечалось в § Д.2.2, $\|\cdot\|_u$ монотонна и $\|x\|_u \leq \|x\|$ и $\|x\| \leq \|x\|_u$ при всех $x \in X$, а значит, X^+ абсолютно доминирующий (относительно $\|\cdot\|_u$). Другими словами, норма в любом пространстве X с порядковой единицей является сильной нормой Рисса и в, частности, норма в $\mathcal{L}(X)$ положительно достижима.

Д.2.4. Банаховы структуры

Пусть X — полуупорядоченное векторное пространство (см. начало § Д.2.1). Если для любых двух элементов $x, y \in X$ существуют $\sup(x, y)$ и $\inf(x, y)$, то пространство X называется *векторной структурой* (или *пространством Рисса*). Как обычно, мы обозначаем $\sup(x, y)$ через $x \vee y$ и $\inf(x, y)$ через $x \wedge y$. Далее, мы обозначим $x^+ = x \vee 0$ и $x^- = (-x) \vee 0$. Тогда $x = x^+ - x^-$ и $x^+ \wedge x^- = 0$. В частности, положительный конус в векторной структуре является воспроизводящим. Более того, для любого элемента $x \in X$ определяется его *модуль* $|x| = x \vee (-x)$. Имеют место равенства $|x| = x^+ + x^- = x^+ \vee x^-$.

Норма $\|\cdot\|$ на векторной структуре X называется *нормой Рисса*, если из $|x| \leq |y|$ в X следует, что $\|x\| \leq \|y\|$ (надо отметить, что эта терминология согласована с терминологией, введенной в предыдущем параграфе). Если векторная структура X является банаховым пространством, наделенным нормой Рисса $\|\cdot\|$, то $(X, \|\cdot\|)$ называется *банаховой структурой*. Отметим, как это следует из предложения Д.2.11, что, если $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ — две нормы Рисса на векторной структуре X , причем $(X, \|\cdot\|_1)$ и $(X, \|\cdot\|_2)$ оба — банаховы пространства, то нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ эквивалентны.

Начиная с этого места, будем считать, что $(X, \|\cdot\|)$ — банахова структура. Введем некоторую терминологию и обозначения. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ в X называется *возрастающей*, если $x_n \leq x_{n+1}$ при всех n ; будем записывать это так: $x_n \uparrow$. Если дополнительно в X существует $\sup_n x_n = x$, то мы пишем $x_n \uparrow x$. Подмножество $\{x_\alpha\}$ в X называется *направленным вверх*, если для любой пары чисел α_1, α_2 существует число α_3 , для которого $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2} \leq x_{\alpha_3}$, что обозначается так: $x_\alpha \uparrow$, и если в X выполняются равенство $\sup_\alpha x_\alpha = x$, то мы пишем $x_\alpha \uparrow x$. Аналогично даются

определения убывающих последовательностей и направленных вниз подмножеств. Отметим, что если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ обладает свойствами $x_n \uparrow$ и $x_n \rightarrow x$ (но норме), то $x_n \uparrow x$. Введем теперь некоторые специальные классы подпространств в банаховой структуре X . Пусть Y — линейное подпространство в X . Тогда

(i) Y называется *векторной подструктурой* (или *подпространством Рисса*) пространства X , если из условия $x, y \in Y$ вытекают включения $x \vee y, x \wedge y \in Y$ (это эквивалентно условию, что $|x| \in Y$, если $x \in Y$).

(ii) Y называется *идеалом*, если из включений $y \in Y$ и $x \in X$ и неравенства $|x| \leq |y|$ вытекает, что $x \in Y$.

(iii) Идеал Y называется *полосой*, если он обладает следующим свойством: если $D \subseteq Y$ и существует $\sup D = x \in X$, то $x \in Y$ (или, что эквивалентно, Y — идеал, для которого из $0 \leq x_\alpha \uparrow x$, $x_\alpha \in Y$, следует включение $x \in Y$).

Нетрудно видеть, что идеал — векторная подструктура. Более того, замыкание по норме любого идеала (векторной подструктуры) также является идеалом (векторной подструктурой). Любая полоса в X замкнута по норме. Для элемента $z \in X$ обозначим через X_z идеал, порождаемый элементом z в X . Такой идеал называется *главным идеалом* и, как легко видеть,

$$X_z = \{x \in X: |x| \leq n|z| \text{ для некоторого } n \in \mathbb{N}\}.$$

Если $0 \leq u \in X$, то u является порядковой единицей в X (определение Д.2.6) тогда и только тогда, когда $X = X_u$. Кроме того, u — квазивнутренний элемент в X (определение Д.2.9) тогда и только тогда, когда $X = \overline{X_u}$.

Два элемента $x, y \in X$ называются *дизъюнктивными*, если $|x| \wedge |y| = 0$, что обозначают $x \perp y$. Для произвольного подмножества $D \subseteq X$ определим множество

$$D^d = \{x \in X: x \perp y \text{ при всех } y \in D\},$$

которое называется *дизъюнктивным дополнением к D* . Любое дизъюнктивное дополнение D^d — полоса в X . Ясно, что $D \subseteq D^{dd}$ и полоса, порожденная множеством D , содержится в D^{dd} . Поэтому можно показать (используя свойство архимедовости), что $B^{dd} = I$ для произвольной полосы B в X . Отсюда следует, что для любого $D \subseteq X$ полоса, порожденная множеством D , в точности равна D^d . Для любого элемента $z \in X$ обозначим через B_z полосу, порождаемую элементом z (или, что эквивалентно, полосу, порождаемую множеством X_z). Из предыдущих рассуждений следует, что $B_z = \{z\}^{dd}$ и такая полоса называется *главной полосой*. Ясно, что для любого $z \in X$ справедливы включения

$$X_z \subseteq \overline{X_z} \subseteq B_z = \{z\}^{dd}.$$

Если $0 \leq u \in X$ — такой элемент, что $\{u\}^{dd} = X$, то u называется *слабой порядковой единицей* в X . Элемент $0 \leq u \in X$ является слабой порядковой единицей тогда и только тогда, когда из условий $x \in X$ и $|x| \wedge u = 0$ следует, что $x = 0$. Более того, из предыдущего включения ясно, что любой квазивнутренний элемент является слабой порядковой единицей.

Для удобства мы упомянем другое полезное описание множеств $\bar{X}_z$ и B_z . Для любого $0 \leq z \in X$ имеем

$$\begin{aligned} (\bar{X}_z)^+ &= \{0 \leq x \in X : x \wedge (nz) \rightarrow x \text{ (по норме) при } n \rightarrow \infty\}, \\ B_z^+ &= \{0 \leq x \in X : x \wedge (nz) \uparrow x\}. \end{aligned}$$

Мы оставляем читателю формулировки соответствующих описаний квазивнутренних элементов и слабых порядковых единиц.

Полоса B в X называется *проекционной*, если $X = B \oplus B^d$. Проектор P на B вдоль B^d называется *дизъюнктым проектором* на B . Этот проектор удовлетворяет соотношению $0 \leq Px \leq x$ при всех $0 \leq x \in X$ (т. е. $0 \leq P \leq I$ в $\mathcal{L}(X)$). Обратно, если P — проектор в X и $0 \leq P \leq I$, то $P(X)$ — полоса и P — дизъюнктивный проектор на $P(X)$. Если все полосы в X являются проекционными, то мы говорим, что X обладает *проекционным свойством*.

Банахова структура X называется *порядково полной* (дедекиндово полной), если любое порядково ограниченное подмножество в X имеет супремум в X ; эквивалентно, если $0 \leq x_\alpha \uparrow \leq x$ в X , то существует $y \in X$ со свойством $x_\alpha \uparrow y$. Если X порядково полно, то оно обладает проекционным свойством. Действительно, если B — полоса в X , то проектор P_B на B задается в виде

$$P_B x = \sup \{y \in B : 0 \leq y \leq x\}, \quad 0 \leq x \in X,$$

где существование супремума гарантируется порядковой полнотой X . На самом деле можно показать, что порядковая полнота банаховой структуры эквивалентна проекционному свойству.

Если любая главная полоса в X является проекционной полосой, то говорят, что X обладает *главным проекционным свойством*, которое на самом деле эквивалентно *порядковой* (или *дедекиндовой*) σ -полноте пространства X (т. е. любое счетное порядково ограниченное подмножество в X имеет супремум). В этом случае проектор P_z на главную полосу B_z , порождаемую элементом $0 \leq z \in X$, определяется так:

$$P_z x = \sup \{x \wedge (nz) : n \in \mathbb{N}\}, \quad 0 \leq x \in X.$$

Замечательным и важным свойством проекторов на полосы является их коммутирование между собой. В самом деле, если P_A и P_B — проекторы соответственно на полосы A и B , то $A \cap B$ — также проекционная полоса и соответствующий проектор

определяется по формуле $P_{A \cap B} = P_A \cap P_B = P_B \cap P_A$. Кроме того, сумма $A + B$ — проекционная полоса и соответствующий проектор имеет вид $P_{A+B} = P_A + P_B - P_A P_B$ (следует отметить, что в общем случае сумма двух полос не обязана быть полосой).

Как и прежде, пусть X^* обозначает сопряженную банахову структуру к банаховой структуре X . В X^* рассмотрим полуупорядоченность, индуцируемую сопряженным конусом $(X^*)^+$, т. е. если $\varphi, \psi \in X^*$, то $\varphi \leq \psi$ тогда и только тогда, когда $\langle x, \varphi \rangle \leq \langle x, \psi \rangle$ при всех $0 \leq x \in X$. Как уже отмечалось в замечании после предложения Д.2.4, X^* — векторная структура и для каждого $\varphi \in X^*$ положительная часть $\varphi^+ = \sup(\varphi, 0)$ может быть определена так:

$$\langle x, \varphi^+ \rangle = \sup \{ \langle z, \varphi \rangle : z \in X, 0 \leq z \leq x \}, \quad 0 \leq x \in X.$$

Отсюда вытекает, что для $\varphi, \psi \in X^*$ функционалы $\varphi \vee \psi$ и $\varphi \wedge \psi$ определяются следующим образом

$$\begin{aligned} \langle x, \varphi \vee \psi \rangle &= \sup \{ \langle y, \varphi \rangle + \langle z, \psi \rangle : 0 \leq y, z \in X \text{ и } y + z = x \}, \\ \langle x, \varphi \wedge \psi \rangle &= \inf \{ \langle y, \varphi \rangle + \langle z, \psi \rangle : 0 \leq y, z \in X \text{ и } y + z = x \} \end{aligned}$$

при всех $0 \leq x \in X$. В частности,

$$\langle x, |\varphi| \rangle = \sup \{ |\langle y, \varphi \rangle| : y \in X, |y| \leq x \}$$

при всех $0 \leq x \in X$ и всех $\varphi \in X^*$. Заметим, что $|\langle x, \varphi \rangle| \leq \langle |x|, |\varphi| \rangle$ при всех $x \in X$ и $\varphi \in X^*$. Нетрудно показать, что по отношению к обычной сопряженной норме пространство X^* — банахова структура и

$$\|\varphi\| = \sup \{ \langle x, \varphi \rangle : 0 \leq x \in X, \|x\| \leq 1 \}$$

при всех $0 \leq \varphi \in X^*$. Более того, X^* является порядково полным. В самом деле, если $0 \leq \varphi_\alpha \uparrow \leq \psi$ в X^* , то $\varphi_0 = \sup_\alpha \varphi_\alpha$ определяется соотношением

$$\langle x, \varphi_0 \rangle = \sup_\alpha \langle x, \varphi_\alpha \rangle, \quad 0 \leq x \in X.$$

Введем дальнейшую терминологию. Норма $\|\cdot\|$ в банаховой структуре X называется *порядково σ -непрерывной*, если из $0 \leq x_n \in X$ ($n = 1, 2, \dots$) и $x_n \downarrow 0$ следует, что $\|x_n\| \downarrow 0$. Более того, если из $x_\alpha \downarrow 0$ следует $\|x_\alpha\| \downarrow 0$ для любого убывающего направленного подмножества в X , то $\|\cdot\|$ называется *порядково непрерывной* (подобная терминология употребляется для положительных линейных функционалов). Можно показать, что банахова структура с порядково непрерывной нормой является порядково полной. Кроме того, в банаховой структуре X следующие утверждения эквивалентны:

(1) норма в X порядково непрерывна;

(2) норма в X является порядково σ -непрерывной и пространство X порядково σ -полно.

Если X имеет порядково непрерывную норму, то полосы в X являются в точности замкнутыми идеалами в X (действительно, порядковая непрерывность нормы эквивалентна этому последнему свойству). В частности, $B_z = \overline{X}_z$ при всех $z \in X$ и в этой ситуации понятия квазивнутреннего элемента и слабой порядковой единицы совпадают.

Предположим, что K — компактное хаусдорфово пространство, и обозначим через $C(K)$ векторное пространство всех вещественных функций на K . Ясно, что относительно поточечной полуупорядоченности $C(K)$ является векторной структурой. Более того, наделенное $\sup$ -нормой $\|\cdot\|_\infty$, $C(K)$ становится банаховой структурой. Очевидно, функция 1, тождественно равная единице, является порядковой единицей в $C(K)$, а $\|\cdot\|_\infty$ равна 1-норме $\|\cdot\|_1$. Другими словами, $C(K)$ — пространство с порядковой единицей относительно порядковой единицы 1 (см. § Д.2.2). Для банаховых структур, которые являются пространствами с порядковой единицей, имеется теорема о представлении, аналогичная гельфандовскому представлению для коммутативных банаховых алгебр.

Теорема Д.2.15. (Теорема о представлении Крейнов — Какунитани.) *Предположим, что $(X, \|\cdot\|)$ — банахова структура, которая является пространством с порядковой единицей $0 \leq u \in X$ (так что $\|\cdot\| = \|\cdot\|_u$). Тогда существует единственное компактное хаусдорфово пространство K и линейная изометрия $x \mapsto \hat{x}$, которая сохраняет структурные операции из X на $C(K)$, причем $\hat{u} = 1$.*

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — банахова структура, и возьмем $0 \leq u \in X$. Ясно, что u — порядковая единица в главном идеале X_u , порожденном элементом u . Более того, нетрудно видеть, что X_u — банахово пространство относительно u -нормы $\|\cdot\|_u$. Поэтому $(X_u, \|\cdot\|_u)$ — банахова структура, которая является пространством с порядковой единицей, и по предыдущей теореме $(X_u, \|\cdot\|_u)$ изометрически изоморфно банаховой структуре $C(K_u)$ для некоторого компактного хаусдорфова пространства K_u . Следует отметить, что в общем случае u -норма $\|\cdot\|_u$ не эквивалентна исходной норме $\|\cdot\|$ на X_u .

Обсудим далее некоторые специальные классы линейных операторов в банаховых структурах. Линейный оператор T из X в Y , где X и Y — банаховы структуры, называется *структурным гомоморфизмом* или *гомоморфизмом Рисса*, если $\hat{T}(x \vee y) = (Tx) \vee (Ty)$ и $T(x \wedge y) = (Tx) \wedge (Ty)$ при всех $x, y \in X$. Ясно, что структурный гомоморфизм — положительный оператор. Линейный оператор T из X в Y является структурным гомоморфиз-

мом тогда и только тогда, когда $(Tx) \wedge (Ty) = 0$ в Y , если $x \wedge y = 0$ в X или, иначе, что эквивалентно, $|Tx| = |x|$ при всех $x \in X$. Кроме того, очевидно, что ядро $\mathcal{N}(T)$ структурного гомоморфизма T есть замкнутый идеал, а $\mathcal{R}(T)$ — векторная подструктура.

Как обычно, имеется стандартный путь построения структурных гомоморфизмов. Предположим, что J — замкнутый идеал в банаховой структуре X . Факторпространство X/J есть банахово пространство с нормой

$$\| [x] \| = \inf \{ \| y \| : y \in [x] \} = \inf \{ \| y \| : x - y \in J \},$$

где $[x] = x + J$. Обозначим каноническое отображение через T , т. е. $Tx = [x]$ при всех $x \in X$. Определим множество $(X/J)^+ = T(X^+)$, которое является клином в X/J . Более того, это конус. Действительно, если $[x] \in X/J$ таков, что существуют $0 \leq x_1, x_2 \in X$ со свойствами $x_1 \in [x]$ и $-x_2 \in [x]$, то $x - x_1, x + x_2 \in J$ и $x - x_1 \leq x \leq x + x_2$, откуда вытекает включение $x \in J$, т. е. $[x] = [0]$. Поэтому X/J — частично упорядоченное векторное пространство с положительным конусом $(X/J)^+$. Далее, нетрудно показать, что X/J — в действительности векторная структура, причем

$$\begin{aligned} [x] \vee [y] &= [x \vee y], \\ [x] \wedge [y] &= [x \wedge y] \end{aligned}$$

при всех $[x], [y] \in X/J$. В частности, $|[x]| = \|x\|$ при всех $[x] \in X/J$. Предположим теперь, что $|[x]| \leq |[y]|$. Положим $z = (x \wedge |y'|) \vee (-|y'|)$. Тогда $[z] = [x]$ и $|z| \leq |y'|$ при всех $y' \in [y]$ и, таким образом, $\|x\| \leq \|z\| \leq \|y'\|$ при всех $y' \in [y]$. Отсюда вытекает неравенство $\|x\| \leq \|y\|$ и, следовательно, X/J — банахова структура. Ясно, что каноническое отображение из X на X/J есть структурный гомоморфизм.

Другим примером структурного гомоморфизма является вложение банаховой структуры в ее второе сопряженное пространство. Пусть X — банахова структура; тогда сопряженное пространство X^* является порядково полной банаховой структурой и поэтому дважды сопряженное X^{**} — также порядково полная банахова структура. Пусть $j: X \rightarrow X^{**}$ каноническое вложение X в X^{**} , т. е. $\langle x, \varphi \rangle = \langle jx, \varphi \rangle$ при всех $x \in X$ и всех $\varphi \in X^*$. Тот факт, что j — структурный гомоморфизм, следует из так называемых *формул Намиоки*

$$\begin{aligned} \langle x \vee y, \varphi \rangle &= \sup \{ \langle x, \psi_1 \rangle + \langle y, \psi_2 \rangle : 0 \leq \psi_1, \psi_2 \in X^*, \\ &\quad \psi_1 + \psi_2 = \varphi \}, \\ \langle x \wedge y, \varphi \rangle &= \inf \{ \langle x, \psi_1 \rangle + \langle y, \psi_2 \rangle : 0 \leq \psi_1, \psi_2 \in X^*, \\ &\quad \psi_1 + \psi_2 = \varphi \} \end{aligned}$$

для всех $x, y \in X$ и всех $0 \leq \varphi \in X^*$. В частности, отсюда следует, что образ X при каноническом отображении есть банахова подструктура в X^{**} .

Важный и полезный класс операторов в банаховой структуре X есть *центр* $Z(X)$, *соответствующий* пространству X . Линейный оператор π из X в себя принадлежит центру $Z(X)$, если существует $0 \leq \lambda \in \mathbb{R}$, для которого $-\lambda x \leq \pi x \leq \lambda x$ при всех $0 \leq x \in X$. Ясно, что $Z(X)$ — подалгебра в $\mathcal{L}(X)$ и $Z(X)$ — полуупорядоченное векторное пространство с положительным клином $Z(X)^+ = \mathcal{Z}(X) \cap \mathcal{L}(X)^+$. Кроме того, очевидно, что единичный оператор I в X принадлежит $Z(X)$ и I — порядковая единица в $Z(X)$. Можно показать, что $Z(X)$ — векторная структура, причем

$$(\pi_1 \vee \pi_2)(x) = (\pi_1 x) \vee (\pi_2 x), \quad (\pi_1 \wedge \pi_2)(x) = (\pi_1 x) \wedge (\pi_2 x)$$

при всех $\pi_1, \pi_2 \in Z(X)$ и всех $0 \leq x \in X$. В частности, $|\pi|x = |\pi x|$, $\pi^+(x) = (\pi x)^+$ и $\pi^-(x) = (\pi x)^-$ при всех $\pi \in Z(X)$ и $0 \leq x \in X$. Кроме того, $Z(X)$ — коммутативная подалгебра алгебры $\mathcal{L}(X)$. Для произвольного $\pi \in Z(X)$ норма оператора $\|\pi\|$ равна порядковой норме $\|\pi\|_I$. В частности, это означает, что центр $Z(X)$ замкнут по норме в $\mathcal{L}(X)$. Следует заметить, что произвольный $\pi \in Z(X)$ является *сохраняющим полосу*, т. е. $\pi(B) \subseteq B$ для всех полос $B \subseteq X$, или, что эквивалентно, из $x \perp y$ в X вытекает $\pi x \perp y$ (т. е. π — *ортотоморфизм*). Нетривиальным результатом является то, что любой сохраняющий любую полосу линейный оператор в банаховой структуре X является ограниченным по норме и принадлежит $Z(X)$. Из этого последнего замечания следует, что $Z(X)$ действительно есть максимальная абелева подалгебра в $\mathcal{L}(X)$.

Если $X = C(K)$ для некоторого компактного хаусдорфова пространства K , то $Z(X)$ можно отождествить с пространством $C(K)$, действующим на себя умножением. Вообще говоря, центр может рассматриваться как алгебра «абстрактных операторов умножения» в X . Возможна ситуация, что центр $Z(X)$ тривиален, т. е. состоит из кратных единичному операторов. Тем не менее, любой проектор на полосу в X принадлежит $Z(X)$ и, таким образом, в порядково полной банаховой структуре центр имеет богатое строение.

Отметим также, что в банаховой структуре с квазивнутренним элементом центр содержит достаточно много элементов. Чтобы быть более точными, предположим, что $0 < e \in X$ — квазивнутренний элемент и, значит, $X = \bar{X}_e$. Поскольку произвольный оператор $\pi \in Z(X_e)$ продолжается по непрерывности единственным образом до $\pi \in Z(X)$, то центры $Z(X_e)$ и $Z(X)$ изоморфны. По теореме Д.2.15 Крейнов — Какутани о представлении существует компактное хаусдорфово пространство K_e , норма и структурный изоморфизм $x \mapsto \hat{x}$ из X_e на $C(K_e)$. Воспользовавшись предыду-

циями наблюдениями, мы устанавливаем, что $Z(X)$ изоморфен $C(K_e)$ и для любого $x \in X_e$ существует единственный $\pi \in Z(X)$ со свойством $\pi e = x$.

Последний результат можно применять и локально, например, к замыканию главного идеала в X , и показать, что для произвольного $u \in X$ существует единственный $\pi \in Z(\bar{X}_{|u})$ со свойством $\pi |u| = u$.

Мы закончим этот параграф некоторыми замечаниями, связанными с комплексификацией банаховой структуры. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — вещественная банахова структура, и пусть $X_{\mathbb{C}} = X \oplus \oplus iX$ — комплексификация векторного пространства X (см. последнюю часть § Д.2.1). Понятие модуля в X можно естественным образом обобщить на $X_{\mathbb{C}}$. В самом деле, если $z \in X_{\mathbb{C}}$, $z = x + iy$, $x, y \in X$, то существует

$$|z| = \sup \{(\cos \theta) x + (\sin \theta) y : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

в X (что можно увидеть, например, используя Д.2.15). Заметим, что $|x| \leq |z|$ и $|z| \leq |x| + |y|$. Более того, $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ при всех $z_1, z_2 \in X_{\mathbb{C}}$. Если $z = x + iy$, $x, y \in X$ и $\bar{z} = x - iy$, то $|\bar{z}| = |z|$.

Норма в X может быть продолжена на $X_{\mathbb{C}}$ следующим образом: $\|z\|_{\mathbb{C}} = \||z|\|$ при всех $z \in X_{\mathbb{C}}$ и тогда $(X_{\mathbb{C}}, \|\cdot\|_{\mathbb{C}})$ становится комплексным банаховым пространством, которое называется *комплексной банаховой структурой*. Все предыдущие результаты непосредственно переносятся на комплексные банаховы структуры. Мы заметим, в частности, что сопряженное пространство $X_{\mathbb{C}}^*$ — комплексификация пространства X^* , а сопряженная норма в $X_{\mathbb{C}}^*$ в точности является комплексификацией сопряженной нормы в X^* . Как и в вещественном случае, центр пространства $X_{\mathbb{C}}$ есть множество всех линейных операторов из $X_{\mathbb{C}}$ в себя, таких, что $|\pi z| \leq \lambda |z|$ при всех $z \in X_{\mathbb{C}}$ и всех $0 \leq \lambda \in \mathbb{R}$. Можно показать, что $Z(X_{\mathbb{C}})$ — комплексификация центра $Z(X)$. Для удобства использования мы явно сформулируем следующий результат, доказательство которого аналогично вещественному случаю.

Предложение Д.2.16. Пусть $X_{\mathbb{C}}$ — комплексная банахова структура. Для любого $z \in X_{\mathbb{C}}$ существует единственный элемент $\pi \in Z(\bar{X}_{|z})$ со свойством $\pi |z| = z$. Кроме того, оператор π обратим в $Z(\bar{X}_{|z})$ и $\pi^{-1} = \bar{\pi}$.

Некоторые результаты спектральной теории

Д.3.1. Существенный спектр Браудера

Пусть $X \neq \{0\}$ — комплексное банаховое пространство с нормой $\|\cdot\|$. Мы обозначаем его топологически сопряженное через X^* , и для двух элементов $x^* \in X^*$ и $x \in X$ отношение двойственности обозначим через $\langle x, x^* \rangle$. Пусть L — замкнутый линейный оператор в X с областью определения $\mathcal{D}(L)$. Мы обозначаем ядро и область значений оператора L соответственно через $\mathcal{N}(L)$ и $\mathcal{R}(L)$. Спектр оператора L обозначаем через $\sigma(L)$, точечный спектр — через $\sigma_p(L)$, остаточный спектр — через $\sigma_r(L)$, непрерывный спектр — через $\sigma_c(L)$ и, наконец, аппроксимативный точечный спектр — через $\sigma_{ap}(L)$. Резольвентное множество $\rho(L)$ по определению есть дополнение к спектру, т. е. $\rho(L) = \mathbb{C} \setminus \sigma(L)$. Множество всех линейных ограниченных операторов на X , являющееся банаховой алгеброй, обозначим через $\mathcal{L}(X)$. Для каждого элемента $L \in \mathcal{L}(X)$ можно определить спектральный радиус $r(L)$:

$$r(L) = \sup \{ |\lambda| : \lambda \in \sigma(L) \}.$$

Хорошо известный результат спектральной теории гласит, что для любого $L \in \mathcal{L}(X)$

$$r(L) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|L^n\|^{1/n}. \quad (\text{Д.3.1})$$

Обозначим через ∂V границу подмножества V множества $\mathbb{C}$. Для любого замкнутого линейного оператора L в X справедливо включение

$$\partial \sigma(L) \subseteq \sigma_{ap}(L). \quad (\text{Д.3.2})$$

Для любого $\lambda \in \rho(L)$ резольвента $R(\lambda, L)$ определяется как

$$R(\lambda, L) = (\lambda I - L)^{-1}.$$

Вместо $\lambda I - L$ мы часто пишем $\lambda - L$.

До конца этого параграфа будем предполагать, что оператор L — замкнутый линейный оператор на X . В частности, мы будем интересоваться изолированными точками спектра $\sigma(L)$. Пусть λ_0 — изолированная точка спектра $\sigma(L)$. Резольвента

$R(\lambda, K)$ может быть разложена в ряд Лорана в точке λ_0

$$R(\lambda, L) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^k B_k, \quad (\text{Д.3.3})$$

где для каждого целого k

$$B_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda - \lambda_0)^{-k-1} R(\lambda, L) d\lambda, \quad (\text{Д.3.4})$$

и Γ — такая положительно ориентированная окружность достаточно малого радиуса, что никакая другая точка, кроме λ_0 , из $\sigma(L)$ не лежит на или внутри Γ . Имеют место следующие соотношения:

$$B_{-k-1} B_{-l-1} = B_{-k-l-1}, \quad k, l \geq 0. \quad (\text{Д.3.5})$$

Приведем следующий результат без доказательства.

Теорема Д.3.1. (а) Оператор B_{-1} — проектор в X , области значений $\mathcal{R}(B_{-1})$ и $\mathcal{R}(I - B_{-1})$ замкнуты и сужение оператора L на $\mathcal{R}(B_{-1})$ является ограниченным оператором и имеет спектр $\{\lambda_0\}$;

(б) если область значений $\mathcal{R}(B_{-1})$ конечномерна, то λ_0 — полюс резольвенты $R(\lambda, L)$;

(с) если λ_0 — полюс резольвенты $\mathcal{R}(\lambda, L)$ порядка p , то λ_0 — собственное значение оператора L

$$\mathcal{R}(B_{-1}) = \mathcal{N}((\lambda_0 - L)^p) = \mathcal{N}((\lambda_0 - L)^{p+1}) = \dots,$$

$$\mathcal{R}(I - B_{-1}) = \mathcal{R}((\lambda_0 - L)^p) = \mathcal{R}((\lambda_0 - L)^{p+1}) = \dots$$

и

$$X = \mathcal{N}((\lambda_0 - L)^p) \oplus \mathcal{R}((\lambda_0 - L)^p).$$

Далее будем использовать следующее обозначение:

$$M_{\lambda_0}(L) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{N}((\lambda_0 - L)^k).$$

Мы называем $M_{\lambda_0}(L)$ *корневым подпространством* оператора L , соответствующим значению λ_0 , а $\dim M_{\lambda_0}$ — *алгебраической кратностью* значения λ_0 (которая равна нулю, если λ_0 не принадлежит множеству собственных значений оператора L).

Замечание Д.3.2. Если собственное значение λ_0 оператора L имеет конечную алгебраическую кратность, то существует целое число $p \geq 0$, такое, что

$$M_{\lambda_0}(L) = \mathcal{N}((\lambda_0 - L)^p).$$

Очень полезным в приложениях оказывается некоторое подмножество спектра, так называемый *существенный спектр (Браудера)* $\sigma_{ess}(L)$.

Определение. Комплексное число λ принадлежит множеству $\sigma_{ess}(L)$, если выполняется по крайней мере одно из следующих условий:

(C₁) число λ является предельной точкой спектра $\sigma(L)$;

(C₂) область значений $\mathcal{R}(\lambda - L)$ не замкнута;

(C₃) $M_\lambda(L)$ имеет бесконечную размерность.

Следующий результат дает весьма полезное описание точек спектра, не входящих в существенный спектр. Они иногда называются *нормальными собственными значениями*.

Теорема Д.3.3. Пусть $\lambda_0 \in \sigma(L) \setminus \sigma_{ess}(L)$. Тогда λ_0 является полюсом резольвенты $R(\lambda, L)$ и вычет B_{-1} — оператор конечно-го ранга.

Доказательство. Пусть $\lambda_0 \in \sigma(L) \setminus \sigma_{ess}(L)$. Тогда λ_0 является изолированной точкой спектра $\sigma(L)$ и $M_0 := M_{\lambda_0}(L)$ имеет конечную размерность. Ввиду теоремы Д.3.1 достаточно показать, что $M_0 = X_0$ где $X_0 = \mathcal{R}(B_{-1})$. Поскольку M_0 конечномерно, то (см. замечание Д.3.2) при некотором конечном $p \geq 1$ справедливо равенство $M_0 = \mathcal{N}((\lambda_0 - L)^p)$. Сначала покажем, что $M_0 \subseteq X_0$. Очевидно, что $\mathcal{N}((\lambda_0 - L)^0) = \{0\} \subseteq X_0$. Пусть $m \geq 0$, и предположим, что $\mathcal{N}((\lambda_0 - L)^m) \subseteq X_0$. Пусть $x \in \mathcal{N}((\lambda_0 - L)^{m+1})$ и $y = (\lambda_0 - L)x$. Тогда $y \in \mathcal{N}((\lambda_0 - L)^m) \subseteq X_0$. Если Γ — контур, определенный в (Д. 3.4), и $\lambda \in \Gamma$, то

$$y = \lambda_0 x - Lx = (\lambda_0 - \lambda)x + (\lambda - L)x$$

или, что эквивалентно,

$$(\lambda - L)^{-1}x = (\lambda_0 - \lambda)^{-1}(\lambda - L)^{-1}x - (\lambda_0 - \lambda)^{-1}x.$$

Поскольку $y \in X_0 = \mathcal{R}(B_{-1})$, то $y = B_{-1}z$ при некотором $z \in X$. Отсюда вытекает, что

$$(\lambda - L)^{-1}y = (\lambda - L)^{-1}B_{-1}z = B_{-1}(\lambda - L)^{-1}z.$$

Проинтегрировав по контуру Γ , получаем

$$\begin{aligned} B_{-1}x &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda - L)^{-1} x d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda_0 - \lambda)^{-1} (\lambda - L)^{-1} y d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda_0 - \lambda)^{-1} x d\lambda \end{aligned}$$

или, что эквивалентно,

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda_0 - \lambda)^{-1} (\lambda - L)^{-1} y d\lambda - B_{-1}x = \\ &= B_{-1} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda_0 - \lambda)^{-1} (\lambda - L)^{-1} z d\lambda - x \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует $x \in \mathcal{R}(B_{-1}) = X_0$. Поэтому $M_0 \subseteq X_0$. Мы утверждаем, что $M_0 = X_0$. Положим $L_0 = (L - \lambda_0)|_{X_0}$. Как нам известно из теоремы Д.3.1, оператор L_0 ограничен и $\sigma(L_0) = \{0\}$. Поэтому L_0 — квазинильпотент. Пусть $\tilde{X}_0 = X_0/M_0$ с обычной структурой банахова пространства, и пусть $\tilde{L}_0$ — оператор на $\tilde{X}_0$, индуцированный оператором L_0 , т. е. $\tilde{L}_0(x + M_0) = L_0x + M_0$. Для любого $k \geq 1$ оператор $\tilde{L}_0^k$ на $\tilde{X}_0$ индуцирован оператором L_0^k и $\|\tilde{L}_0^k\| \leq \|L_0^k\|$; следовательно, $r(\tilde{L}_0) \leq r(L_0) = 0$. С другой стороны, $\mathcal{R}(\tilde{L}_0)$ — замкнутое подпространство в $\tilde{X}_0$, так как его прообраз в X_0 при факторотображении есть $\mathcal{R}(L_0) + M_0$, $\mathcal{R}(L_0)$ — замкнутое подпространство в X_0 , а сумма замкнутого подпространства и конечномерного подпространства является замкнутым подпространством. Наконец, $\tilde{L}_0$ имеет тривиальное ядро, так как $\tilde{L}_0(x + M_0) = M_0$ влечет за собой $\tilde{L}_0x \in M_0$ и, значит, $x \in M_0$. Эти рассуждения доказывают, что $\tilde{L}_0$ является взаимно однозначным отображением $\tilde{X}_0$ на замкнутое подпространство $\mathcal{R}(\tilde{L}_0)$ пространства $\tilde{X}_0$. Если $\tilde{X}_0$ нетривиально, то по теореме об открытом отображении существует константа $c > 0$, такая, что

$$\|\tilde{L}_0x\| \geq c \|x\|, \quad x \in \tilde{X}_0.$$

Поэтому $\|\tilde{L}_0^kx\| \geq c^k \|x\|$, $x \in \tilde{X}_0$ и, следовательно, $r(\tilde{L}_0) \geq c$, что противоречит $r(\tilde{L}_0) = 0$. Отсюда получаем, что $\tilde{X}_0 = \{0\}$ и, значит, $X_0 = M_0$. ■

Таким образом, для любого $\lambda \notin \sigma_{ess}(L)$ существует целое $p \geq 0$ со свойствами:

$$\begin{aligned} (C'_1) \quad \mathcal{N}(\lambda - L) &\subset \mathcal{N}((\lambda - L)^2) \subset \dots \subset \mathcal{N}((\lambda - L)^p) = \\ &= \mathcal{N}((\lambda - L)^{p+1}) = \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (C'_2) \quad \mathcal{R}(\lambda - L) &\supset \mathcal{R}((\lambda - L)^2) \supset \dots \supset \mathcal{R}((\lambda - L)^p) = \\ &= \mathcal{R}((\lambda - L)^{p+1}) = \dots \end{aligned}$$

$(C'_3) \mathcal{N}(\lambda - L)$ имеет конечную размерность.

Обратное утверждение выполняется при некоторых дополнительных условиях.

Предложение Д.3.4. Пусть L — замкнутый оператор с непустым резольвентным множеством. Пусть число $\lambda \in \mathbb{C}$ удовлетворяет при некотором целом $p \geq 0$ условиям $(C'_1) - (C'_3)$. Тогда $\lambda \notin \sigma_{ess}(L)$.

Мы не приводим доказательства этого результата. Ниже нами будет доказана теорема об отображении спектра для существенного спектра Браудера. Для этой цели нужно следующее описание спектра $\sigma_{ess}(L)$ для ограниченного по норме оператора L . Обозначим через $\mathcal{K}(X)$ идеал компактных операторов.

Лемма Д.3.5. Пусть $L \in \mathcal{L}(X)$, и пусть $\mathcal{U}_L$ — максимальная абелева подалгебра в $\mathcal{L}(X)$, содержащая L . Пусть

$$\pi: \mathcal{U}_L \rightarrow \mathcal{U}_L / (\mathcal{U}_L \cap \mathcal{K}(X))$$

— канонический факторгомоморфизм (заметим, что $\mathcal{U}_L / (\mathcal{U}_L \cap \mathcal{K}(X))$ — снова банахова алгебра). Тогда

$$\sigma_{ess}(L) = \sigma(\pi(L)).$$

Доказательство. Если комплекснозначная функция f локально голоморфна на $\sigma(L)$, то $f(L) \in \mathcal{U}_L$. Предположим теперь, что $\lambda \notin \sigma_{ess}(L)$. Тогда $X = \mathcal{N}((\lambda - L)^p) \oplus \mathcal{R}((\lambda - L)^p)$ при некотором целом $p \geq 0$. Пусть P — проектор на $\mathcal{N}((\lambda - L)^p)$ вдоль $\mathcal{R}((\lambda - L)^p)$. Тогда P имеет конечномерный образ и, следовательно, $P \in \mathcal{K}(X)$. Поскольку P может быть представлен как $f(L)$, то $P \in \mathcal{U}_L \cap \mathcal{K}(X)$. Легко видеть, что $P + (\lambda - L)(I - P)$ является взаимно однозначным отображением из X на X и обратный к нему оператор принадлежит $\mathcal{U}_L$. Поэтому оператор

$$\pi(P + (\lambda - L)(I - P)) = \pi(\lambda - L) = \lambda E - \pi(L)$$

обратим, где E — единичный оператор в $\mathcal{U}_L / (\mathcal{U}_L \cap \mathcal{K}(X))$. Отсюда следует, что $\lambda \notin \sigma(\pi(L))$ и, значит,

$$\sigma(\pi(L)) \subset \sigma_{ess}(L).$$

Предположим теперь $\lambda \notin \sigma(\pi(L))$. Тогда существуют операторы $B \in \mathcal{U}_L$ и $C \in \mathcal{U}_L \cap \mathcal{K}(X)$ со свойством

$$B(\lambda - L) = (\lambda - L)B = I + C.$$

Это означает, что при любом $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}((\lambda - L)^k) &\subset \mathcal{N}((I + C)^k), \\ \mathcal{R}((\lambda - L)^k) &\supseteq \mathcal{R}((I + C)^k). \end{aligned}$$

Из теории Рисса следует выполнение условий $(C'_1) - (C'_3)$, а предложение Д.3.4 влечет за собой $\lambda \notin \sigma_{ess}(L)$. Отсюда

$$\sigma_{ess}(L) \subseteq \sigma(\pi(L)). \blacksquare$$

Теорема Д.3.6. (Теорема об отображении спектра.) (а) Пусть L — ограниченный линейный оператор, а f — комплекснозначная локально голоморфная на $\sigma(L)$ функция. Тогда

$$\sigma_{ess}(f(L)) = f(\sigma_{ess}(L)).$$

(б) Пусть L — замкнутый неограниченный линейный оператор с непустым резольвентным множеством, и пусть f — комплекснозначная локально голоморфная на расширенном спектре $\sigma(L) \cup \{\infty\}$ функция. Тогда

$$\sigma_{ess}(f(L)) \cup \{\infty\} = f(\sigma_{ess}(L) \cup \{\infty\}).$$

Доказательство. (а) Пусть L — ограниченный линейный оператор, и пусть D — ограниченная открытая окрестность спектра $\sigma(L)$ с границей ∂D (положительно ориентированной), причем $\bar{D}$ содержится в области определения функции f . Поскольку $\sigma(\pi(L)) \subseteq \sigma(L)$, то оператор $f(\pi(L))$ можно определить обычным образом. В силу непрерывности гомоморфизма π получаем

$$\begin{aligned} f(\pi(L)) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} f(\lambda) (\lambda E - \pi(L))^{-1} d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} f(\lambda) \pi((\lambda I - L)^{-1}) d\lambda = \\ &= \pi\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} f(\lambda) (\lambda I - L)^{-1} d\lambda\right) = \pi(f(L)). \end{aligned}$$

Очевидно, что $f(L) \in \mathcal{H}_L$ и ввиду предыдущей леммы

$$\begin{aligned} \sigma_{ess}(f(L)) &= \sigma(\pi(f(L))) = \sigma(f(\pi(L))) = \\ &= f(\sigma(\pi(L))) = f(\sigma_{ess}(L)). \end{aligned}$$

(б) Пусть теперь L — произвольный замкнутый неограниченный оператор с $\rho(L) \neq \emptyset$. Пусть $\alpha \in \rho(L)$, и определим $\Phi: \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ по формуле

$$\Phi(\lambda) := (\alpha - \lambda)^{-1}.$$

Определим $T \in \mathcal{L}(X)$ по формуле

$$T = \Phi(L) = (\alpha I - L)^{-1}.$$

Легко видеть, что для любого $\lambda \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq \lambda$ и $k = 1, 2, \dots$

$$\mathcal{A}((\Phi(\lambda)I - T)^k) = \mathcal{A}((\lambda I - L)^k),$$

$$\mathcal{R}((\Phi(\lambda)I - T)^k) = \mathcal{R}((\lambda I - L)^k).$$

Таким образом, из предложения Д.3.4. получаем

$$\sigma_{ess}(T) = \Phi(\sigma_{ess}(L) \cup \{\infty\}).$$

Заметим, что $0 \in \sigma_{ess}(T)$, так как $\mathcal{R}(T) = \mathcal{D}(L)$ не замкнуто.

$$\begin{aligned} \sigma_{ess}(f(L)) \cup \{\infty\} &= \sigma_{ess}(f \circ \Phi^{-1}(T)) = f \circ \Phi^{-1}(\sigma_{ess}(T)) = \\ &= f \circ \Phi^{-1}(\Phi(\sigma_{ess}(L) \cup \{\infty\})) = f(\sigma_{ess}(L) \cup \{\infty\}). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Если $L \in \mathcal{L}(X)$ и X — бесконечномерное пространство, то $\mathcal{U}_L \cap \mathcal{K}(X) \neq \mathcal{U}_L$ и в силу леммы Д.3.5 получаем

$$\sigma_{ess}(L) = \sigma(\pi(L)) \neq \emptyset.$$

Мы можем определить существенный спектральный радиус:

$$r_{ess}(L) = \sup \{|\lambda| : \lambda \in \sigma_{ess}(L)\}.$$

Есть и другая возможность описать $r_{ess}(L)$; это делается аналогично (Д.3.1). Прежде чем дать другое представление $r_{ess}(L)$, введем так называемую меру некомпактности.

Пусть Ω — ограниченное подмножество пространства X . Диаметр $\text{diam}(\Omega)$ множества Ω определим так:

$$\text{diam}(\Omega) = \sup \{\|x - y\| : x, y \in \Omega\}.$$

Определение Для ограниченного подмножества Ω в пространстве X мерой некомпактности называется число

$$\alpha(\Omega) = \inf \{d > 0 : \text{существует конечное число подмножеств } \Omega_1, \dots, \Omega_n \text{ в } X, \text{ таких, что } \text{diam}(\Omega_i) \leq d \text{ и } \Omega \subseteq \bigcup_{i=1}^n \Omega_i\}.$$

Мера некомпактности обладает следующими элементарными свойствами.

Лемма Д.3.7. Пусть $\Omega, \Omega_1, \Omega_2$ — ограниченные подмножества в пространстве X . Тогда

- (a) $\alpha(\Omega) = \alpha(\bar{\Omega})$;
- (b) $\alpha(\Omega) = 0$, если и только если множество $\bar{\Omega}$ компактно;
- (c) $\alpha(\lambda\Omega) = |\lambda| \alpha(\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{C}$;
- (d) $\alpha(\text{co}(\Omega)) = \alpha(\Omega)$, где $\text{co}(\Omega)$ означает выпуклую оболочку множества Ω ;
- (e) $\alpha(\Omega_1 \cup \Omega_2) = \max \{\alpha(\Omega_1), \alpha(\Omega_2)\}$,
 $\alpha(\Omega_1 \cap \Omega_2) \leq \min \{\alpha(\Omega_1), \alpha(\Omega_2)\}$,
 $\alpha(\Omega_1 + \Omega_2) \leq \alpha(\Omega_1) + \alpha(\Omega_2)$.

Для элемента $L \in \mathcal{L}(X)$ определим меру некомпактности $|L|_\alpha$ следующим образом:

$$|L|_\alpha = \inf \{k > 0: \alpha(L\Omega) \leq k\alpha(\Omega) \text{ для любого ограниченного подмножества } \Omega \text{ в пространстве } X\}.$$

Из леммы Д.3.7 легко получить следующие свойства меры некомпактности $|\cdot|_\alpha$.

Лемма Д.3.8. Пусть $L, K, L_1, L_2 \in \mathcal{L}(X)$. Тогда

- (a) $|L|_\alpha \leq \|L\|$;
- (b) $|\lambda L|_\alpha \leq |\lambda| \cdot |L|_\alpha$ для любого $\lambda \in \mathbb{C}$;
- (c) $|L|_\alpha = 0$, если и только если оператор L компактен;
- (d) если K — компактный оператор, то $|L + K|_\alpha = |L|_\alpha$;
- (e) $|L_1 + L_2|_\alpha \leq |L_1|_\alpha + |L_2|_\alpha$;
- (f) $|L_1 \cdot L_2|_\alpha \leq |L_1|_\alpha \cdot |L_2|_\alpha$.

Для любого $L \in \mathcal{L}(X)$ существенный спектральный радиус выражается по формуле

$$r_{ess}(L) = \lim_{n \rightarrow \infty} |L^n|_\alpha^{1/n}. \quad (\text{Д.3.6})$$

Относительно доказательства этого результата см. Nussbaum [1970]. Заметим, что если L — компактный оператор, то $r_{ess}(L) = 0$. Этот результат следует также из теории Рисса для компактных операторов.

Д.3.2. Псевдорезольвенты

Если L — замкнутый линейный оператор на X , то его резольвента $R(\lambda, L)$ является аналитической оператор-функцией на $\rho(L)$, которая удовлетворяет уравнению

$$R(\lambda, L) - R(\mu, L) = (\mu - \lambda) R(\lambda, L) R(\mu, L)$$

при любых $\lambda, \mu \in \rho(L)$. Это уравнение обычно называют резольвентным уравнением. Если на открытом множестве $D \subseteq \mathbb{C}$ задана аналитическая функция $R: D \rightarrow \mathcal{L}(X)$, удовлетворяющая уравнению

$$R(\lambda) - R(\mu) = (\mu - \lambda) R(\lambda) R(\mu), \quad \lambda, \mu \in D, \quad (\text{А.3.7})$$

то мы будем называть $R(\lambda)$ псевдорезольвентой.

Предложение Д.3.9. Пусть $R: D \rightarrow \mathcal{L}(X)$ — псевдорезольвента. Тогда выполняются следующие утверждения:

- (a) $R(\lambda) R(\mu) = R(\mu) R(\lambda)$ при любых $\lambda, \mu \in D$;
- (b) $\mathcal{N}(R(\lambda))$ и $\mathcal{R}(R(\lambda))$ не зависят от $\lambda, \lambda \in D$;
- (c) Пусть заданы $\mu \in \mathbb{C}$, $x \in X$ и при некотором $\lambda \in D$ справедливо равенство $(\lambda - \mu) R(\lambda) x = x$; тогда это равенство выполняется при любом $\lambda \in D$;

(d) псевдорезольвента $R(\lambda)$ является резольвентой плотно определенного замкнутого линейного оператора L , если и только если $\mathcal{N}(R(\lambda)) = \{0\}$ и $\mathcal{R}(R(\lambda))$ плотно в X . В этом случае L однозначно определяется оператор-функцией $R(\lambda)$.

Если $\lambda \in \mathbb{C}$ и $\lambda_0 \in D$, то существует не более чем один элемент $S \in \mathcal{L}(X)$ со свойством

$$R(\lambda_0) - S = (\lambda - \lambda_0) R(\lambda_0) S = (\lambda - \lambda_0) S R(\lambda_0).$$

Если такой S существует, то он удовлетворяет этому уравнению при любом $\lambda_0 \in D$ и в этом случае мы говорим, что R может быть продолжена до λ . Если $\lambda_0 \in D$, то для любого λ , удовлетворяющего оценке $|\lambda - \lambda_0| \leq \|R(\lambda_0)\|^{-1}$, справедливо разложение

$$R(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^k R(\lambda_0)^{k+1}.$$

Каждая псевдорезольвента в силу этих свойств имеет единственное максимальное продолжение, определенное на открытом подмножестве в $\mathbb{C}$.

Пусть X_0 — замкнутое подпространство в X , которое инвариантно относительно $R(\lambda)$, т. е. $R(\lambda)X_0 \subseteq X_0$, $\lambda \in D$. Пусть $R_0(\lambda)$ — сужение псевдорезольвенты $R(\lambda)$ на X_0 , и пусть $\tilde{R}_0(\lambda)$ — операторы, индуцируемые псевдорезольвентой $R(\lambda)$ на факторпространстве X/X_0 . Тогда обе оператор-функции $R_0(\lambda)$ и $\tilde{R}_0(\lambda)$ — псевдорезольвенты.

Предложение Д.3.10. Пусть $\lambda \in \bar{D} \setminus D$.

(a) Следующие утверждения эквивалентны:

- (i) псевдорезольвента R может быть продолжена до λ ;
- (ii) R_0 и $\tilde{R}_0$ обе могут быть продолжены до λ ;
- (iii) для некоторого (любого) $\lambda_0 \in D$ имеем $(\lambda_0 - \lambda)^{-1} \in \rho(R(\lambda_0))$.

(b) Псевдорезольвента R имеет полюс в точке λ , если обе функции R_0 и $\tilde{R}_0$ имеют полюсы в точке λ . Если p , p_0 и $\tilde{p}_0$ — соответствующие порядки полюсов, то

$$\max \{p_0, \tilde{p}_0\} \leq p \leq p_0 + \tilde{p}_0.$$

Доказательство. (a) (i) $\Rightarrow$ (ii). Если продолжение S псевдорезольвенты $R(\cdot)$ до λ существует, то в силу непрерывности $SX_0 \subseteq X_0$. Поэтому $S|_{X_0}$ и оператор, индуцируемый оператором S на X/X_0 , является продолжениями операторов R_0 и $\tilde{R}_0$ до λ .

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Пусть $\lambda_0 \in D$. Существуют операторы $S_0 \in \mathcal{L}(X_0)$ и $\tilde{S}_0 \in \mathcal{L}(X/X_0)$ со свойствами

$$\begin{aligned}(I - (\lambda_0 - \lambda) R_0(\lambda_0)) (I - (\lambda - \lambda_0) S_0) &= \\ &= (I - (\lambda - \lambda_0) S_0) (I - (\lambda_0 - \lambda) R_0(\lambda_0)) = I, \\ (I - (\lambda_0 - \lambda) \tilde{R}_0(\lambda_0)) (I - (\lambda - \lambda_0) \tilde{S}_0) &= \\ &= (I - (\lambda - \lambda_0) \tilde{S}_0) (I - (\lambda_0 - \lambda) \tilde{R}_0(\lambda_0)) = I.\end{aligned}$$

Отсюда $(\lambda_0 - \lambda)^{-1} \in \rho(R_0(\lambda_0)) \cap \rho(\tilde{R}_0(\lambda_0))$ и поэтому $(\lambda_0 - \lambda)^{-1} \in \rho(R(\lambda_0))$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Положим

$$S := (\lambda_0 - \lambda)^{-2} ((\lambda_0 - \lambda)^{-1} - R(\lambda_0))^{-1} - (\lambda_0 - \lambda)^{-1}.$$

Тогда $I - (\lambda - \lambda_0) S = (I - (\lambda_0 - \lambda) R(\lambda_0))^{-1}$ и псевдорезольвента может быть продолжена до λ формулой $R(\lambda) := S$.

(b) Предположим, что функция $R(\cdot)$ имеет полюс в точке λ . Пусть $\delta > 0$ выбрано из условия $\{\lambda_0 \in \mathbb{C} : 0 < |\lambda - \lambda_0| < \delta\} \subseteq D$. Пусть разложение в ряд Лорана функции R в точке λ имеет вид

$$R(\mu) = \sum_{k=-p}^{\infty} (\mu - \lambda)^k B_k,$$

где p — порядок полюса. Поскольку $R(\mu) X_0 \subseteq X_0$, $\mu \in D$, то мы получаем $B_k X_0 \subseteq X_0$ при всех $k \geq -p$. Пусть B_k^0 и $\tilde{B}_k^0$ — соответственно сужение B_k на X_0 и оператор, индуцируемый оператором B_k на X/X_0 . Тогда

$$R_0(\mu) = \sum_{k=-p}^{\infty} (\mu - \lambda)^k B_k^0,$$

$$\tilde{R}_0(\mu) = \sum_{k=-p}^{\infty} (\mu - \lambda)^k \tilde{B}_k^0.$$

Отсюда следует, что R_0 и $\tilde{R}_0$ также имеют в точке λ полюс, причем $\max\{p_0, \tilde{p}_0\} \leq p$. Если R_0 имеет в точке λ полюс порядка q , то $B_{-q-1}^0 = 0$, т. е. $B_{-q-1} X_0 = \{0\}$. Если, с другой стороны, $\tilde{R}_0$ имеет в точке λ полюс порядка r , то $\tilde{B}_{-r-1}^0 = 0$, т. е. $B_{-r-1} X \subseteq X_0$. Отсюда мы получаем, что $B_{-q-1} B_{-r-1} = 0$ и из (Д.3.5) находим $B_{-q-r-1} = 0$. Поэтому $p \leq q + r$. Теорема доказана. ■

Д.3.3. Расширенное банахово пространство $\hat{X}$

Пусть X — банахово пространство. Обозначим через $m(X)$ векторное пространство всех ограниченных отображений из $\mathbb{Z}^+$ в X . Каждый элемент из $m(X)$ может быть представлен ограниченной последовательностью $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ в X . Наделенное нормой

$$\|\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}\| = \sup\{\|x_n\| : n \in \mathbb{Z}^+\},$$

пространство $m(X)$ становится банаховым. Пусть $c_0(X)$ — подпространство пространства $m(X)$, содержащее все последовательности, сходящиеся к нулю. Обозначим через $\hat{X}$ факторпространство $m(X)/c_0(X)$. Тогда факторнорма элемента $\hat{x} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+} + c_0(X)$ из $\hat{X}$ определяется выражением

$$\|\hat{x}\| = \inf\{\|\{x_n + y_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}\| : \{y_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+} \in c_0(X)\}.$$

Легко проверить, что

$$\|\hat{x}\| = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|,$$

и с этой нормой пространство $\hat{X}$ становится банаховым. Очевидно, что X вкладывается в $\hat{X}$, причем каноническое отображение $\eta: X \rightarrow \hat{X}$, являющееся линейной изометрией, задается формулой

$$\eta(x) = \{x, x, \dots\} + c_0(X).$$

С каждым элементом $L \in \mathcal{L}(X)$ мы можем ассоциировать элемент $\hat{L} \in \mathcal{L}(\hat{X})$ следующим образом:

$$\hat{L}(\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+} + c_0(X)) = \{Lx_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+} + c_0(X).$$

Таким образом, банахова алгебра $\mathcal{L}(X)$ отображается в $\mathcal{L}(\hat{X})$ и это отображение есть алгебраический изоморфизм. Очевидно, справедливо равенство

$$\eta \circ L = \hat{L} \circ \eta.$$

Ниже мы покажем, что для любого $L \in \mathcal{L}(X)$

$$\|L\| = \|\hat{L}\|.$$

Чтобы доказать это, предположим сначала, что $\hat{x} \in \hat{X}$, $\hat{x} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+} + c_0(X)$. Тогда

$$\|\hat{L}\hat{x}\| = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|Lx_n\| \leq \|L\| \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|L\| \cdot \|\hat{x}\|;$$

поэтому $\|\hat{L}\| \leq \|L\|$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} \|\hat{L}\| &= \sup \{ \|\hat{L}\hat{x}\| : \hat{x} \in \hat{X}, \|\hat{x}\| = 1 \} \geq \\ &\geq \sup \{ \|\hat{L}\eta(x)\| : x \in X, \|x\| = 1 \} = \\ &= \sup \{ \|Lx\| : x \in X, \|x\| = 1 \} = \|L\| \end{aligned}$$

и равенство доказано.

Особенно интересным для нас является случай банаховой структуры X . В этой ситуации $m(X)$ также является банаховой структурой с покоординатной упорядоченностью. Модуль элемента на $m(X)$ определяется так:

$$|\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}| = \{|x_n|\}_{n \in \mathbb{Z}^+}.$$

Поскольку $c_0(X)$ — замкнутый идеал в $m(X)$, то $\hat{X} = m(X)/c_0(X)$ становится банаховой структурой. Более того, $\eta: X \rightarrow \hat{X}$ — структурный гомоморфизм, т. е. $|\eta(x)| = \eta(|x|)$ при всех $x \in X$.

Ограниченный линейный оператор L на X является положительным тогда и только тогда, когда его образ $\hat{L}$ является положительным. Следующий результат описывает соотношение между спектрами операторов L и $\hat{L}$.

Предложение Д.3.11. Для любого $L \in \mathcal{L}(X)$ имеют место утверждения

$$(a) \sigma(L) = \sigma(\hat{L});$$

$$(b) \sigma_{ap}(L) = \sigma_{ap}(\hat{L}) = \sigma_p(\hat{L});$$

$$(c) R(\lambda, L)^\wedge = R(\lambda, \hat{L}), \quad \lambda \in \rho(L) = \rho(\hat{L});$$

(d) число $\lambda_0 \in \sigma(L)$ является полюсом порядка p резольвенты $R(\lambda, L)$ тогда и только тогда, когда λ_0 — полюс порядка p резольвенты $R(\lambda, \hat{L})$.

Доказательство. Из $(\lambda - L)R(\lambda, L) = R(\lambda, L)(\lambda - L) = I$ получаем

$$(\lambda - \hat{L})R(\lambda, L)^\wedge = R(\lambda, L)^\wedge(\lambda - \hat{L}) = \hat{I}. \quad (*)$$

Отсюда следует, что $\rho(L) \subseteq \rho(\hat{L})$. Предположим теперь, что $\lambda \in \sigma(L)$. Тогда $\lambda \in \sigma_{ap}(L)$ или $\lambda \in \sigma_r(L)$. Если $\lambda \in \sigma_{ap}(L)$, то существует последовательность $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ в X со свойствами $\|x_n\| = 1$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda x_n - Lx_n) = 0$. Отсюда $\hat{x} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+} + c_0(X)$ удовлетворяет условиям $\|\hat{x}\| = 1$ и $\hat{L}\hat{x} = \lambda\hat{x}$ и потому $\lambda \in \sigma_p(\hat{L})$. С другой стороны, из условия $\lambda \in \sigma_{ap}(\hat{L})$ вытекает, что $\lambda \in \sigma_{ap}(L)$. Итак, (b) доказано. Если $\lambda \in \sigma_r(L)$, то $\mathcal{R}(\lambda - L)^\perp \neq \{0\}$. Выберем элементы $x_0^* \in \mathcal{R}(\lambda - L)^\perp \setminus \{0\}$ и $x_0 \in X \setminus \{0\}$. Пусть $U \in \mathcal{L}(X)$ определен по формуле $Ux = \langle x, x_0^* \rangle x_0$. Тогда $U(\lambda - L) = 0$, и значит, $\hat{U}(\lambda - \hat{L}) = 0$. Поскольку $\hat{U} \neq 0$, то $\lambda \in \sigma(\hat{L})$. Утверждение (a) доказано.

(с) следует из (*).

Число λ_0 является изолированной точкой спектра $\sigma(L)$ тогда и только тогда, когда λ_0 — изолированная точка спектра $\sigma(\hat{L})$. Понятно, что для таких чисел λ_0 соответствующие коэффициенты в разложении Лорана функций $R(\lambda, L)$ и $R(\lambda, \hat{L})$ в окрестности точки λ_0 связаны каноническим отображением. Итак, (d) доказано. ■

Мы завершим этот параграф следующим наглядным фактом.

Предложение Д.3.12. Пусть X — банахова структура и $L \in \mathcal{L}(X)$ — положительный оператор. Тогда $r(L) \in \sigma(L)$.

Доказательство. Случай $L = 0$ тривиален. Будем считать, что $L > 0$. Пусть $r := r(L)$ и $\lambda \in \sigma(L) \cap \{\lambda: |\lambda| = r\}$. Тогда $\lambda \in \partial\sigma(L) \subseteq \sigma_{ap}(L)$.

Пусть $\hat{L}$ — продолжение L на $\hat{X}$; тогда $\lambda \in \sigma_p(\hat{L})$. В этом случае существует элемент $\hat{x} \in \hat{X}$, $\|\hat{x}\| = 1$, со свойством $\hat{L}\hat{x} = \lambda\hat{x}$. Поскольку $L \geq 0$, то $\hat{L}|\hat{x}| \geq |\hat{L}\hat{x}| = r|\hat{x}|$. Если выбрать $\mu > r = r(L)$, то

$$R(\mu, \hat{L})|\hat{x}| = \sum_{j=0}^{\infty} \mu^{-j-1} \hat{L}^j |\hat{x}| \geq \frac{|\hat{x}|}{\mu - r}.$$

Таким образом, $\|R(\mu, \hat{L})|\hat{x}|\| \geq (\mu - r)^{-1}$. Полагая теперь $\mu \downarrow r$, получаем $\|R(\mu, \hat{L})|\hat{x}|\| \rightarrow \infty$. Последнее означает, что $r \in \sigma(\hat{L}) = \sigma(L)$. ■

Библиографические замечания

Глава 2

Основным источником информации по нелинейным эволюционным уравнениям с диссипативными (аккретивными) операторами в произвольных банаховых пространствах могла бы быть книга Бенилэна, Крэндалла и Пази, готовящаяся к печати (уже много лет!). Первые книги, посвященные этой тематике, — Barbu [1976], Browder [1976], Da Prato [1976], Martin [1976], Pavel [1982]. Последняя обзорная статья на эту тему — Crandall [1986], где можно найти основные ссылки. Отметим также обзоры Crandall [1976] и Evans [1978].

Теория «нелинейных полугрупп» в банаховых пространствах — это очаровательная теория, однако она никоим образом не решает проблем корректности нелинейных эволюционных уравнений в банаховых пространствах. По поводу этой фундаментальной проблемы мы отсылаем читателя к монументальной работе Като. Один из последних обзоров по этому вопросу — Kato [1986]. Теория нелинейных полугрупп играет чрезвычайно важную роль в изучении нелинейных эволюционных уравнений в банаховом пространстве, в частности, квазилинейных и полулинейных уравнений. Говоря о полулинейных уравнениях, отметим недавнюю книгу Von Wahl [1985]. Теория, представленная в этой главе, до сих пор не развита в приложении к эволюционным задачам с аккретивными операторами, так как пока изучена лишь однородная задача Коши. Неоднородная задача оказывается существенно сложнее. Однако уже имеются интересные примеры нелинейных сжимающих полугрупп, которые получаются с помощью теоремы Крэндалла — Лиггетта. Один из них обсуждается в гл. 4. Результаты § 2,3 и 2.4 заимствованы из статьи Brézis, Pazy [1970], [1972] и были распространены на нелинейный случай в диссертации Bénéilan [1972].

Глава 3

Список монографий по теории полугрупп включает книги Bellini-Morante [1979], Butzer, Berens [1967], van Casteren [1985], Davies [1980], Dunford, Schwartz [1958], Дынкин [1963], Fattorini [1983], Friedman [1969], Goldstein [1985], Hille, Phillips [1957], Kato [1976], Крейн [1967], Ladas, Lakshmikantham [1972], Nagel

[1986] Pazy [1983], Reed, Simon [1978], Riesz, Nagy [1955], Showalter [1977], Stein [1970], Tanabe [1979], Walker [1980], Yosida [1980] и т. д.

Содержание этой главы вполне стандартно, за исключением теоремы Да Прато — Гривара в § 3.6, не вошедшей в приведенный список. По поводу дальнейших исследований в некоммутативном случае мы отсылаем читателя к оригинальной работе Da Prato, Grisvard [1975]. Результаты § 3.5 взяты из статьи Clement, Diekmann, Gyllenberg, Heijmans, Thieme [в печати].

Основные понятия из функционального анализа, которые широко используются в этой главе, приведены, например, в дополнениях к книгам Butzer, Berens [1967], Brezis [1973]. Одно замечание по поводу обозначения E_h^A . Это обозначение не является стандартным. При изложении теории нелинейных полугрупп обычно рассматриваются аккретивные операторы и оператор $(I + \lambda A)^{-1}$ называется резольвентой оператора A . В линейной теории обычно рассматриваются диссипативные операторы и соответствующая резольвента оператора A задается формулой $R(\lambda, A) := (\lambda I - A)^{-1}$. Поскольку основная часть текста касается линейной теории, мы приняли «диссипативную» терминологию, используя, однако, вместо $R(\lambda, A)$ оператор $E_h^A = (I - \lambda A)^{-1}$, который допускает удобную интерпретацию, являясь оператором, возникающим при проведении одного шага схемы Эйлера. Поэтому E_h^A обозначает оператор Эйлера, ассоциированный с A .

Глава 4

Классические источники по нелинейным параболическим уравнениям — книги Friedman [1964] и Ладыженская, Солонников, Уральцева [1967]. Там рассмотрены невырождающиеся уравнения. Для задачи (I) это означает, что $\varphi' \in (\mu, \mu^{-1})$ на $\mathcal{D}(\varphi)$ при некотором $\mu \in (0, 1)$. Вырождающиеся уравнения, для которых φ' обращается в нуль в единственной точке области определения $\mathcal{D}(\varphi)$, впервые рассматривались в статье Олейник, Калашникова и Чжоу [1958]. Далее большое внимание уделено свойствам неотрицательных решений задачи (I) с $\varphi(s) = |s|^m \operatorname{sign}(s)$, $m > 0$. Заметим, что $\varphi'(r) \rightarrow \infty$ для $0 < m < 1$ при $r \rightarrow \infty$ и $\varphi'(0) = 0$ для $m > 1$. Для этого конкретного φ уравнение в частных производных называется уравнением пористой среды. Обзор результатов по этому уравнению до 1981 г. см. в статье Peletier [1981]. Относительно более поздних результатов см., например, Aronson, Caffarelli, Kamin [1983] или Vazquez [1984]. Там даны более поздние ссылки. Пример уравнения, где φ' равна нулю на целом интервале из $\mathcal{D}(\varphi)$, можно найти в статье Bertsch, de Mottoni, Peletier [1984].

Существование и единственность решения w возмущенной задачи (P_ε) в случае $0 \in \beta(0)$ и $0 \in \text{int } \mathcal{R}(\beta)$ изложены в статье Brezis, Strauss [1973], где эта задача изучена в более общей постановке. Там также даны доказательства важных оценок — предложений 4.9 и 4.10. Результаты, связанные с переходом к пределу при $\varepsilon \downarrow 0$, взяты из статьи Benilan, Brezis, Crandall [1975], где также рассматривался многомерный случай, а результаты для случая $\mathcal{R}(\beta) \subseteq (0, \infty)$ — из работы Crandall, Evans [1975]. Непрерывная зависимость от φ ограниченных слабых решений задачи (I) рассматривалась в статье Benilan, Crandall [1981a]. Там также дана характеристика множества $\mathcal{D}(A_\varphi)$. Свойство регулярности полугруппового решения задачи (I') , приведенное в § 4.6, взято из работы Benilan, Crandall [1981b]. Фактически из результата Верона Veron [1979] следует, что полугрупповое решение $u(t, x)$ ограничено на $[\delta, \infty) \times \mathbb{R}$ при любом $\delta > 0$. Поэтому оно совпадает со слабым решением задачи (I') . В статье Aronson, Benilan [1979] для любого неотрицательного слабого решения задачи (I') доказано, что

$$u_t \geq - \frac{u}{(m+1)t} \text{ в } \mathcal{D}'((0, \infty) \times \mathbb{R}).$$

Этот результат несколько сильнее, чем (4.30). Он также точен, что следует из сравнения его с точным решением Баренблатта [1952]. Аналогичная теорема для более широкого класса φ имеется в статье Crandall, Pierre [1982].

Заметим, наконец, что все сказанное для случая $0 \in \varphi(0)$ и $0 \in \text{int } \mathcal{D}(\varphi)$ обобщается на случай большей размерности.

Глава 5

Основы теории аналитических полугрупп — уже классика. Основные результаты можно найти в книге Hille, Phillips [1957]. Более поздние результаты представлены в книгах Davies [1980], Разу [1983] и Красносельский, Забрейко, Пустыльник, Соболевский [1966].

Глава 6

В этой главе обсуждается связь между теорией регулярности для неоднородной задачи Коши, с одной стороны, и теорией интерполяции банаховых пространств, с другой.

Основной результат этой главы — теорема 6.10, доказанная в статье Да Прато и Гривара Da Prato, Grisvard [1979]. Эта теорема есть частный случай их более раннего результата, а

именно, теоремы 3.11 (см. Da Prato, Grisvard [1975]). Приведенное здесь доказательство взято из их более поздней работы Da Prato, Grisvard [1979].

Для того чтобы сформулировать теорему 6.10, дано краткое изложение «непрерывного интерполяционного метода». Определение этого метода, которое мы приводим, взято из работы Da Prato, Grisvard [1979]; другое описание дано в теоремах 6.5 и 6.6. Можно показать, что непрерывный интерполяционный метод I_θ тесно связан с обычным вещественным методом интерполяции. Фактически $I_\theta(E)$ есть замыкание E_1 в $(E_1, E_0)_{\theta, \infty}$ (см. Bergh, Löfström [1976, лемма 3.1.3], Triebel [1978, § 1.7] и нашу теорему 6.3).

Для более полной информации по общей теории интерполяции и функциональным пространствам мы отсылаем читателя к книгам Bergh, Löfström [1976] и Triebel [1978]. Эти книги также содержат большое количество исторических замечаний.

После обсуждения теории интерполяции дается краткая сводка стандартных результатов, касающихся неоднородной задачи Коши. Эти и другие результаты, а также их обобщения имеются в книге Pazy [1983].

Глава 7

За последнее десятилетие существенно увеличилась библиография по позитивным полугруппам. В основном мы здесь пользуемся недавно вышедшей книгой под редакцией Нагеля Nagel [1986]. В этой главе мы не пытались представить полный обзор существующей литературы, а лишь сделали попытку отразить некоторые из работ, имеющих непосредственное отношение к рассматриваемым вопросам. Отметим, в частности, обзорную статью Batty, Robinson [1984] по теории позитивных полугрупп в упорядоченных банаховых пространствах.

Теорема 7.4 и предложение 7.6 получены в статье Greiner, Voigt, Wolff [1981], а предложение 7.7 и следствие 7.8 взяты из § 2.5 работы Batty, Robinson [1984].

§ 7.2, в основном, опирается на работу Arendt, Chernoff, Kato [1982]. См. также Batty, Robinson [1984], § 1.6 и 2.1. Предложение 7.16 и следствие 7.17 содержатся в § 2.2 последней статьи. Следствие 7.15 восходит к работе Phillips [1962].

Первая часть § 7.3, в частности, теоремы 7.27 и 7.29, основаны на работах Arendt, Chernoff, Kato [1982] и Batty, Robinson [1984]. Свойство внедиагональной положительности рассматривалось впервые в статье Evans, Nanche-Olsen [1979] для ограниченных генераторов. Приложение теоремы 7.29 к пространствам $C(K)$ взято из работы Arendt [1984c]. Вторая часть примера 7.31 и пример 7.32(ii) принадлежат Батти и Дэвису Batty, Davies [1983]. Пример 7.32 (i) имеется в статье Arendt [1984a].

Утверждения об автоматической равномерной непрерывности C_0 -полугрупп в пространствах Гротендика со свойством Данфорда — Петтиса, в частности, в L_∞ , взяты из статей Lotz [1984], [1985]. Предположение о том, что всякая C_0 -полугруппа в L_∞ равномерно непрерывна, было высказано Байоном. Кисимото и Робинсон Kishimoto, Robinson [1981] показали, что каждая позитивная C_0 -полугруппа в L_∞ равномерно непрерывна. А в работах Lotz [1985] и Coulhon [1984] было независимо доказано, что всякая позитивная C_0 -полугруппа в $C(K)$ -пространстве Гротендика равномерно непрерывна.

Абстрактное неравенство Като возникло из неравенства в смысле распределений $\operatorname{Re} [\operatorname{sign} f \cdot \Delta f] \leq \Delta |f|$, $f \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, для лапласиана Δ в $\mathbb{R}^n$, которое было доказано в Kato [1973]. Несколько лет спустя Саймон понял, что неравенство Като для Δ связано с позитивностью полугруппы, порожденной оператором Δ в $L_2(\mathbb{R}^n)$. Фактически Саймон показал (см. Simon [1977]), что позитивность сжимающей полугруппы, порожденной неотрицательным самосопряженным оператором A в $L_2(\mu)$, эквивалентна абстрактному неравенству Като для A . В этом случае неравенство Като тесно связано с так называемым критерием положительности Берлинга — Дини (см., например, Reed, Simon [1978], теорема XIII.50). В работе Nagel, Uhlig [1981] было высказано предположение, что абстрактное неравенство Като (подходящим образом сформулированное) характеризует позитивность C_0 -полугрупп в банаховых структурах. Это предположение было доказано независимо в работах Arendt [1984a], [1984b] и Schep [1985]. Наше изложение в § 7.4 следует статье Arendt [1984b].

Глава 8

Перрон Perron [1907] обнаружил, что у квадратной матрицы $A = (a_{ij})$, все элементы которой строго положительны, спектральный радиус $r(A)$ есть простое собственное значение, которому соответствует строго положительный собственный вектор. Фробениус Frobenius [1912] показал среди прочего, что спектр такой матрицы циклический. Книга Schaefer [1974] содержит детальное описание спектральной теории положительных частиц.

Пример 8.1 дан в статье Zabczyk [1975], но приведен также в книгах Davies [1980] и Schappacher [1983]. Лемма 8.2 имеется в книге Hille, Phillips [1957]. Доказательство, приведенное здесь, следует изложению в Schappacher [1983]. Предложение 8.3 (или часть его) можно найти в большинстве учебников по теории полугрупп, например, Hille, Phillips [1957] или Pazy [1983]. Нам известно, предложение 8.4 принадлежит Webb [1985]. Предложение 8.5 было доказано в книге Hille, Phillips [1957]. Более короткое доказательство, использующее преобразование Гельфанда

да, было дано в книге Davies [1980]. Существенный тип $\omega_{ess}(A)$ был введен Войгтом Voigt [1980] и независимо Прюссом Prüss [1981]. Однако первому автору была, по-видимому, незнакома характеристика существенного спектрального радиуса ограниченного линейного оператора через меру некомпактности (см. § Д.3.1), и он использовал (8.5) для определения $\omega_{ess}(A)$. Наше определение $\omega_{ess}(A)$ (см. (8.6)) следует работе Прюсса. Предложение 8.6 было впервые сформулировано в статье Prüss [1981], однако автор не привел доказательство. Впервые оно опубликовано Веббом Webb [1985].

Значительный вклад в спектральную теорию позитивных полугрупп принадлежит группе ученых из Тюбингена; см., в частности, Greiner [1981], [1982]. Материал § 8.2 и 8.3 взят из этих двух работ. Безусловно, почти все сказанное в этой главе также имеется в прекрасной книге Нагеля Nagel [1986]. Теорема 8.7 содержится в статье Greiner, Voigt, Wolff [1981]. Заметим, что в статье Greiner [1981] теорема 8.14 доказана при более слабых предположениях, как отмечено в замечании 8.15. Описание марковских полугрупп, данное в § 8.3, взято из книги Davies [1980]. (Некоторые авторы называют также такие полугруппы полугруппами Феллера — Маркова. Это вполне оправданно, если учесть вклад Феллера в теорию стохастических процессов — см. Feller [1971].) Для более подробного знакомства с теорией марковских полугрупп мы отсылаем читателя к книге Дынкина [1963]. Относительно большое внимание также уделено этому вопросу в книге Goldstein [1985]. Наконец, заслуживает внимания монография van Casteren [1985], где обсуждаются приложения теории полугрупп в теории вероятностей. Теорема 8.17 также взята из статьи Greiner [1981]. В заключение отметим статьи Derndinger [1980] и Derndinger, Nagel [1979], где имеются некоторые близкие результаты.

Глава 9

Изложение в § 9.1 опирается в основном на работы Nagel [1982], [1984]. Пример 9.3 предложен в статье Greiner, Voigt, Wolff [1981]. Предложение 9.4 восходит к Датко Datko [1970], а в представленном здесь виде имеется в книге Pazy [1983]. Теорема 9.5 принадлежит Грайнеру и содержится в работе Derndinger [1980]. Теорема 9.6 имеется в статье Gearhart [1978], но приведенное здесь доказательство почерпнуто из книги Nagel [1982]. Утверждение теоремы 9.7 можно найти в книге Nagel [1982] и в статье Greiner, Nagel [1983]. Как видно из примера 9.4, равенство $s(A) = \omega_0$, вообще говоря, не имеет места для произвольной C_0 -полугруппы в банаховой структуре X . Однако если $X =$

$= L_p(\mu)$ при $p = 1, 2$ или ∞ , равенство $s(A) = \omega_0$ для позитивных C_0 -полугрупп выполняется (случай $p = 1$ рассмотрен в теореме 9.5, $p = 2$ — в теореме 9.7, а в случае $p = \infty$ любая C_0 -полугруппа равномерно непрерывна (см. следствие 7.37) и, таким образом, равенство тривиально выполняется). Насколько нам известно, вопрос о выполнении равенства $s(A) = \omega_0$ при остальных значениях p открыт. В связи с этим отметим следующий результат из работы Voigt [1985]. Если $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ — позитивная C_0 -полугруппа, определенная в $L_p(\mu)$ при всех $p \in [p_1, p_2]$ с $p_1 < 2 < p_2$, и если тип не зависит от $p \in [p_1, p_2]$, то равенство $s(A) = \omega_0$ выполняется для всех $p \in [p_1, p_2]$. При доказательстве этого факта используется интерполяционная техника.

Последняя часть § 9.1, в частности, предложение 9.8 и следствие 9.9, взяты из работы Neubrander [в печати]. Результаты, касающиеся асимптотического поведения линейных C_0 -полугрупп, рассеяны по литературе. Многие из них можно найти в работе Schappacher [1983]. Две важнейшие области применения теории полугрупп — *теория переноса* и *структурированная популяционная динамика*. Относительно первого вопроса см. книгу Карег, Lekkerkerker, Hejtmank [1983] и статьи Vidav [1967], [1970], Greiner [1984a], Voigt [1984]. В связи с этим исторический интерес представляет более ранняя статья Birkhoff [1959]. Относительно больше внимания уделяется структурной популяционной динамике. Отметим здесь книги Webb [1985], Metz, Diekmann [1986], а также статьи Greiner [1984b] и Heijmans [1985], [1986].

Многие результаты, приведенные в § 9.3, были известны для случая ограниченных возмущений $B: X \rightarrow X$. В связи с этим отметим работы Phillips [1953], Vidav [1968], [1970], Voigt [1980], [1984]. Более общая теория, изложенная в § 9.3, развита в работе Clement, Diekmann, Gyllenberg, Heijmans, Thieme [в печати].

Глава 10.

Результаты § 10:1 принадлежат Хеймансу Heijmans [1985] [1986]. Похожая модель изучалась с другой точки зрения в работе Diekmann, Heijmans, Thieme [1984]. По поводу результатов § 10.2 см. Clement, Diekmann, Gyllenberg, Heijmans, Thieme [в печати]. Другие приложения теории полугрупп к моделям структурной популяционной динамики можно найти в книгах Webb [1985] и Metz, Diekmann [1986].

Дополнение 1

Существует обширная литература по выпуклому анализу, и в этом дополнении мы не стремились ко всей полноте изложения. Значительно больше информации по этому и близким вопросам

можно найти, например, в книгах Aubin, Ekeland [1984], Brezis [1973], Deimling [1985], Ekeland, Temam [1976], Holmes [1975], из которых заимствовано большинство материала этого раздела.

Дополнение 2

Подробное изложение теории полуупорядоченных банаховых пространств имеется в статье Batty, Robinson [1984]. По поводу теории банаховых решеток и положительных операторов см. Schaefer [1974] и Zaanen [1983].

Дополнение 3

Хорошее введение в спектральную теорию линейных операторов имеется в книгах Taylor, Lay [1979] и Kato [1976]. Третьим источником может служить монография Dowson [1978], где достаточно полно излагается спектральная теория и особое внимание уделяется спектральным операторам.

В литературе имеется много определений существенного спектра, что неизбежно сопровождается большим количеством неточностей. Определение, которое даем мы, принадлежит Браудеру Browder [1961]. Помимо этого встречаются определения существенного спектра по Вейлю, по Вольфу (или по Фредгольму) и по Като (см. Schappacher [1983], Kato [1976]). Браудеровский существенный спектр — самый широкий из них (мы отсылаем интересующегося читателя к статье Nagy [1971], где дано одиннадцать различных описаний существенного спектра и дана схема вложений).

Теорема Д.3.1 взята из книги Taylor, Lay [1979]. Теорема Д.3.3 принадлежит Браудеру; см. Browder [1981]. Предложение Д.3.4 есть непосредственное следствие теоремы V.10.2 из книги Taylor, Lay [1979]. Теорема об отображении спектра Д.3.6 и вспомогательная лемма Д.3.5 почерпнуты из статьи Gramsch, Lay [1971]. Мера некомпактности $\alpha(\cdot)$, введенная в этом дополнении, называется *мерой некомпактности Куратовского*. Очень близкое понятие — так называемая *шаровая мера некомпактности* $\beta(\cdot)$, которая определяется следующим образом. Пусть Ω — ограниченное подмножество в X ; тогда

$$\beta(\Omega) = \inf \{ r > 0 : \Omega \text{ может быть покрыто конечным числом шаров радиуса меньшего или равного } r \}.$$

$\alpha(\cdot)$ и $\beta(\cdot)$ эквивалентны в том смысле, что

$$\frac{1}{2} \beta(\Omega) \leq \alpha(\Omega) \leq 2\beta(\Omega).$$

Некоторые элементарные результаты, касающиеся $\alpha(\cdot)$, $\beta(\cdot)$, $|\cdot|_\alpha$ и $|\cdot|_\beta$ (последняя определяется аналогично $|\cdot|_\alpha$), в том числе леммы Д.3.7 и Д.3.8, можно найти в статье Nussbaum [1970] и книгах Martin [1976] и Schappacher [1983]. Характеристика существенного спектрального радиуса ограниченного линейного оператора — формула (Д.3.6) — принадлежит Нуссбауму; см. Nussbaum [1970]. Отметим, что для большинства других определений существенного спектра существенные спектральные радиусы совпадают. Если X есть так называемое Π_m -пространство (см. Гольдштейн, Маркус [1965]), то $|L|_\alpha$ и $|L|_\pi := \|\pi(L)\|$ — эквивалентные полунормы в $\mathcal{L}(X)$ (определение $\pi(L)$ см. в лемме Д.3.5), и в этом случае (Д.3.6) следует непосредственно из леммы Д.3.5. Насколько нам известно, вопрос об эквивалентности $|\cdot|_\alpha$ и $|\cdot|_\pi$ в произвольном банаховом пространстве X пока открыт.

Некоторые результаты о псевдорезольвентах, подобные предложению 3.9, можно найти в книгах Pazy [1983] и Kato [1976]. Предложение Д.3.10 принадлежит Грейнеру Greiner [1981].

Идея сопоставить в некотором смысле обобщенный собственный вектор (т. е. элемент расширенного банахова пространства $\hat{X}$) элементу аппроксимативного точечного спектра восходит к работе Berberian [1962]. Результаты § Д.3.3 были впервые опубликованы в таком виде Лотцом Lotz [1968], а также имеются в § V.1 книги Schaefer [1974].

Литература

- Об автомодельных движениях сжимаемой жидкости
л. мат., мех., т. 16, вып. 6, с. 679—698.
- А. С. [1965]. О мере некомпактности ограниченных
операторов. — Б сб.: Исследования по алгебре и мате-
мат. Гиншинев, с. 45—54.
- [1967]. Марковские процессы. — М.: Физматгиз.
- А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е.
линейные операторы в пространствах суммируемых функ-
ций. — М.: Наука.
- [1967]. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом
пространстве. — М.: Наука.
- А. О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. [1967]. Линейные
дифференциальные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967.
- А., Калашников А. С., Чжоу Юй-линь. [1958]. Задачи Коши
для нелинейных уравнений типа нестационарной фильтрации. —
Изв. АН СССР, сер. мат., т. 22, с. 667—704.
- Engelen S. [1986]. Abstract parabolic initial value problems. Report no. 22,
Mathematical Institute, University of Leiden.
- Engelen S. [to appear]. Analyticity of the interface of the porous media equation.
Proc. AMS.
- Freid W. [1984a]. Kato's inequality; a characterization of generators of
positive semigroups. Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A 84, 155—174.
- Freid W. [1984b]. Generators of Positive Semigroups and Resolvent Positive
Operators. Habilitationsschrift, Tübingen, 1984.
- Freid W. [1984c]. Generators of positive semigroups. In: Infinite-Dimensional
Systems. Proc. Conf. on Operator Semigroups Applications, 1—15, Lecture
Notes in Mathematics 1067, Springer-Verlag, 1984.
- Freid W., Chernoff P. R., Kato T. [1982]. A generalization of dissipativity
and positive semigroups. J. Operator Theory 8, 167—180.
- Grönson D. G., Bénilan Ph. [1979]. Régularité des solutions de l'équation des
milieux poreux dans $\mathbb{R}^N$. C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B, 288, 103—105.
- Grönson D. G., Caffarelli L. A., Kamin S. [1983]. How an initially stationary
interface begins to move in porous medium flow. SIAM J. Math. Anal. 14,
639—658.
- Aubin J.-P., Ekeland I. [1984]. Applied Nonlinear Analysis. John Wiley and
Sons, New York, 1984. [Имеется перевод: Обел Ж.-П., Экланд И. При-
кладной нелинейный анализ. — М.: Мир, 1988.]
- Baillon J. B. [1980]. Caractère borné de certains générateurs de semigroupes liné-
aires dans les espaces de Banach. C. R. Acad. Sc. Paris t. 290, 757—760.
- Ball J. M. [1977]. Strongly continuous semigroups, weak solutions and the
variation of constants formula. Proc. AMS 63, 370—373.
- Barbu V. [1976]. Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach
Spaces. Noordhoff, Leyden, 1976.

- Batty C. J. K., Davies E. B. [1983]. Positive semigroups and revolvants. *J. Operator Theory* 10, 357—363.
- Batty C.J.K., Robinson D. W. [1984]. Positive one-parameter semigroups on ordered Banach spaces. *Acta Appl. Math.* 1, 221—296.
- Belloni-Morante A. [1979]. *Applied Semigroups and Evolution Equations*. Oxford University Press, Oxford, 1979.
- Bénilan Ph. [1972]. Equation d'évolution dans un Espace de Banach Quelconque et Applications. Thesis, Orsay, 1972.
- Benilan Ph., Brezis H., Crandall M. G. [1975]. A semilinear elliptic equation in $L^1(\mathbb{R}^N)$. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Serie IV, Vol. III*, 523—555.
- Benilan Ph., Crandall M. G. [1981a]. The continuous dependence on ϕ of the solutions of $u_t = \Delta \phi(u)$. *Indiana Univ. Math. J.* 30, 161—177.
- Benilan Ph., Crandall M. G. [1981b]. Regularizing effects of homogeneous evolution equations. In: *Contributions to Analysis and Geometry*. Clark D. N., Pecelli C., Sacksteder R. (eds.), 23—39, Baltimore, 1981.
- Benilan Ph., Crandall M. G., Pazy A. [to appear]. Nonlinear Evolution Governed by Accretive Operators.
- Berberian S. K. [1962]. Approximate proper vectors. *Proc. AMS* 13, 111—114.
- Bergh J., Löfström J. [1976]. *Interpolation Spaces, An Introduction*. Springer-Verlag, Berlin, 1976. [Имеется перевод: Берг И., Лёфстрём И. Интерполяционные пространства. Введение.— М.: Мир, 1980.]
- Bertsch M., de Mottoni P., Peletier L. A. [1984]. The Stefan Problem with heating: appearance and disappearance of a mushy region. *Nonl. Anal.* 8, 1311—1336.
- Birkhoff G. [1959]. Positivity and criticality. *Proc. Symp. Appl. Math.* 10, 116—126, AMS, Providence.
- Brezis H. [1973]. *Opérateurs Maximaux Monotone et Semigroups de Contractions dans les Espaces de Hilbert*, Math. Studies 5, North-Holland, Amsterdam, 1973.
- Brézis H., Crandall M. G. [1979]. Uniqueness of solutions of the initial value problem for $u_t - \Delta \phi(u) = 0$. *J. Math. Pures et Appl.* 58, 153—162.
- Brézis H., Pazy A. [1970]. Accretive sets and differential equations in Banach spaces. *Israel J. Math.* 8, 367—383.
- Brézis H., Pazy A. [1972]. Convergence and approximation of semigroups of nonlinear operators in Banach spaces. *J. Funct. Anal.* 9, 63—74.
- Brezis H., Strauss W. [1973]. Semi-linear second-order elliptic equations in L^1 . *J. Math. Soc. Japan*, 25, 565—590.
- Browder F. E. [1961]. On the spectral theory of elliptic differential operators. *Math. Ann.* 142, 22—130.
- Browder F. E. [1976]. *Nonlinear Operators and Nonlinear Equations of Evolution in Banach Spaces*. *Proc. Symp. Pure Math.* 18, AMS, Providence, 1976.
- Butzer P. L., Berens H. [1967]. *Semigroups of Operators and Approximation*. Springer-Verlag, Berlin, 1967.
- van Casteren J. [1985]. *Generators of Strongly Continuous Semigroups*. Pitman, Boston, 1985.
- Chernoff P. [1968]. Note on product formulas for operator semigroups. *J. Funct. Anal.* 2, 238—242.
- Clement Ph., Diekmann O., Gyllenberg M., Heijmans H.J.A.M., Thieme H. R. [to appear]. Perturbation theory for dual semigroups. I. The sunreflexive case. To appear in: *Math. Ann. Parts II—IV in preparation*.
- Coulhon T. [1984]. Suites d'opérateurs sur un espace $C(K)$ de Grothendieck, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 298, série I, no. 1, 13—15.
- Crandall M. G. [1973]. A generalized domain for semigroup generators. *Proc. AMS* 37, 434—439.
- Crandall M. G. [1976]. An introduction to evolution governed by accretive operators. In: *Dynamical Systems: An International Symposium* Cesari L., Hale J. and La Salle J. (eds.), 131—165, Academic Press, New York, 1976.

- Crandall M. G. [1986]. Nonlinear semigroups and evolution governed by accretive operators. In: Proc. Symp. Pure Math. 45, Part I, 305—307, AMS, Providence, 1986.
- Crandall M. G., Evans L. C. [1975]. A singular semilinear equation in $L^1(\mathbb{R})$. MRC Technical Summary Report No 1566.
- Crandall M. G., Liggett T. [1971a]. A theorem and a counterexample in the theory of semigroups of nonlinear transformations. Trans. AMS 160, 263—278.
- Crandall M. G., Liggett T. [1971b]. Generation of semigroups of nonlinear transformations on general Banach spaces. Amer. J. Math. 93, 265—298.
- Crandall M. G., Pierre M. [1982]. Regularizing Effects for $u_t + A_\varphi(u) = 0$ in L^1 . J. Funct. Anal. 45, 194—212.
- Crandall M. G., Tartar L. [1980]. Some relations between nonexpansive and order preserving mappings. Proc. AMS 78, 385—390.
- Da Prato G. [1976]. Applications croissantes et équations d'évolution dans les espaces de Banach. Inst. Math. Vol. II. Academic Press, London, 1976.
- Da Prato G., Grisvard P. [1975]. Sommes d'opérateurs non linéaires et équations différentielles opérationnelles. J. Math. Pures Appl. 54, 305—387.
- Da Prato G., Grisvard P. [1979]. Equations d'évolution abstraites non linéaires de type parabolique. Ann. Mat. Pura. Appl. IV, 120, 329—296.
- Datko R. [1970]. Extending a theorem of A. M. Liapunov to Hilbert space. J. Math. Anal. Appl. 32, 610—616.
- Davies E. B. [1980]. One-parameter Semigroups. Academic Press, London, 1980.
- Deimling K. [1985]. Nonlinear Functional Analysis. Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- Derndinger R. [1980]. Über das Spektrum positiver Generatoren. Math. Z. 172, 281—293.
- Derndinger R., Nagel R. [1979]. Der Generator stark stetiger Verbandshalbgruppen auf $C(X)$ und dessen Spektrum. Math. Ann. 245, 159—177.
- Diekmann O., Heijmans H. J. A. M., Thieme H. R. [1984]. On the stability of the cell size distribution. J. Math. Biol. 19, 227—248.
- Dowson H. R. [1978]. Spectral Theory of Linear Operators. Academic Press, London, 1978.
- Dunford N., Schwartz J. T. [1958]. Linear Operators. Part I: General Theory. Interscience, New York, 1958. [Имеется перевод: Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория.— М.: ИЛ, 1962.]
- Ekeland I., Temam R. [1976]. Convex Analysis and Variational Problems. North-Holland, Amsterdam, 1976. [Имеется перевод: Экланд И., Темам Р. Комплексный анализ и вариационные задачи.— М.: Мир, 1979.]
- Evans D. E., Hanché-Olsen H. [1979]. The generators of positive semigroups. J. Funct. Anal. 32, 207—212.
- Evans L. C. [1977]. Nonlinear evolution equations in an arbitrary Banach space. Israel J. Math. 26, 1—42.
- Evans L. C. [1978]. Application of nonlinear semigroup theory to certain partial differential equations. In: Nonlinear Evolution Equations. Crandall M. G. (ed.), 163—188, Academic Press, New York, 1978.
- Fattorini H. O. [1983]. The Cauchy Problem. Addison-Wesley, London, 1983.
- Feller W. [1971]. An Introduction to Probability Theory and its Applications II (2nd ed.), John Wiley & Sons, New York, 1971. [Имеется перевод: Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2.— М.: Мир, 1982.]
- Friedman A. [1964]. Partial Differential Equations of Parabolic Type. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ., 1964. [Имеется перевод: Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа.— М.: Мир, 1968.]
- Friedman A. [1969]. Partial Differential Equations. Holt, Reinhart and Winston, New York, 1969.
- Frobenius G. [1912]. Über Matrizen aus nicht-negativen Elementen. Sitz-Berichte Kgl. Preuss. Acad. Wiss. Berlin (1912), 456—477.

- Gearhart L. [1978]. Spectral theory for contraction semigroups on Hilbert spaces. Trans. AMS 236, 385—394.
- Goldstein J. A. [1985]. Semigroups of Linear Operators and Applications. Oxford University Press, New York, 1985. [Имеется перевод: Голдстейн Дж. Подгруппы линейных операторов и их приложения: Минск, Научная думка, 1989.]
- Gramsch B., Lay D. [1971]. Spectral mapping theorems for essential spectra. Math. Ann. 192, 17—32.
- Greiner G. [1981]. Zur Perron—Frobenius-Theorie stark stetiger Halbgruppen. Math. Z. 177, 401—423.
- Greiner G. [1982]. Spektrum und Asymptotik stark stetiger Halbgruppen positiver Operatoren. Sitz.-ber. Heidelb. Acad. Wiss., Math.-Nat. Kl., 1982, 3 Abh.
- Greiner G. [1984a]. Spectral properties and asymptotic behavior of the linear transport equation. Math. Z. 185, 167—177.
- Greiner G. [1984b]. A typical Perron — Frobenius theorem with applications to an age-dependent population equation. In: Infinite Dimensional Systems. Proc. Conf. on Operator Semigroups and Applications, 86—100, Lecture Notes Math. 1067, Springer-Verlag, 1984.
- Greiner G., Nagel R. [1983]. On the stability of strongly continuous semigroups of positive operators on $L^2(\mu)$. Annali Scuola normale Sup. Pisa 10, 257—262.
- Greiner G., Voigt J., Wolff M. [1981]. On the spectral bound of the generators of semigroups of positive operators. J. Operator Theory 5, 245—256.
- Heijmans H. J.A.M. [1985]. Dynamics of Structured Populations. PhD Thesis, Amsterdam, 1985.
- Heijmans H.J.A.M. [1986]. Structured populations, linear semigroups, and positivity. Math. Z. 191, 599—617.
- Henry D. [1981]. Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations. Lecture Notes in Mathematics 840, Springer-Verlag, 1981. [Имеется перевод: Хенри Д. Геометрическая теория полунейных параболических уравнений. — М.: Мир, 1985.]
- Hille E., Phillips R. S. [1957]. Functional Analysis and Semigroups. AMS, Providence, 1957, [Имеется перевод: Хилле В., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. — М.: ИЛ, 1962].
- Holmes R. B. [1975]. Geometric Functional Analysis and its Applications. Springer-Verlag, New York, 1975.
- Kaper H. G., Lekkerkerker C. G., Hejtmanek J. [1982]. Spectral Methods in Linear Transport Theory. Birkhäuser, Basel, 1982.
- Kato T. [1973]. Schrödinger operators with singular potentials. Israel J. Math. 13, 135—148.
- Kato T. [1975]. Quasi-linear equations of evolution, with applications to partial differential equations. In: Lecture Notes in Mathematics 448, 27—70, Springer-Verlag, 1975.
- Kato T. [1976]. Perturbation Theory of Linear Operators (2nd ed.) Springer-Verlag, Berlin, 1976. [Имеется перевод: Като Т. Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.]
- Kato T. [1978]. Trotter's product formula for some nonlinear semigroups. In: Nonlinear Evolution Equations. Crandall M. G. (ed.), 155—162, Academic Press, New York, 1978.
- Kato T. [1986]. Nonlinear equations of evolution in Banach spaces. In: Proc. Symp. Pure Math. 45, Part II, 9—24, AMS, Providence, 1986.
- Kerscher W., Nagel R. [1984]. Asymptotic behaviour of one-parameter semigroups of positive operators. Acta App. Math. 2, 323—329.
- Kishimoto A., Robinson D. W. [1981]. Subordinate semigroups and order properties. J. Austral. Math. Soc. (series A) 31, 59—76.
- Kobayashi Y. [1974]. On approximation of nonlinear semigroups. Proc. Japan. Acad. 50, 729—734.

- Ladas G. E., Lakshmikantham V. [1972]. *Differential Equations in Abstract Spaces*. Academic Press, New York, 1972.
- Lotz H. P. [1968]. Über das Spektrum positiver Operatoren. *Math. Z.* 108, 15—23.
- Lotz H. P. [1984]. Tauberian theorems for operators on L^∞ and similar spaces. In: *Functional Analysis, Surveys and Recent Results III*, Bierstedt K.-D. and Fuchssteiner B. (eds.), 117—133, North-Holland, Amsterdam, 1984.
- Lotz H. P. [1985]. Uniform convergence of operators on L^∞ and similar spaces. *Math. Z.* 190, 207—220.
- Lumer G., Phillips R. S. [1961]. Dissipative operators in a Banach space. *Pacific J. Math.* 11, 679—698.
- Martin R. H. [1976]. *Nonlinear Operators and Differential Equations in Banach Spaces*. John Wiley & Sons, New York, 1976.
- Metz J.A.J., Diekmann O. (eds.) [1986]. *Dynamics of Physiologically Structured Populations*. Lecture Notes in Biomathematics 68, Springer-Verlag, 1986.
- Miyadera I., Oharu S. [1970]. Approximation of semigroups of nonlinear operators. *Tôhoku Math. J.* 22, 24—27.
- Nagel R. [1982]. Zur Charakterisierung stabiler Operatorhalbgruppen. Semesterbericht Funktionalanalysis Tübingen, Wintersemester 1981/82.
- Nagel R. [1984]. What can positivity do for stability? In: *Functional Analysis, Surveys and Recent Result III*, Bierstedt K.-D. and Fuchssteiner B. (eds.), 145—154, North-Holland, Amsterdam, 1984.
- Nagel R. (ed) [1986]. *One parameter Semigroups of Positive Operators*. Lecture Notes in Mathematics 1184, Springer-Verlag, 1986.
- Nagel R., Uhlir H. [1981]. An abstract Kato inequality for generators of positive semigroups on Banach lattices. *J. Operator Theory* 6, 113—123.
- Nagy B. [1976]. Spectral mapping theorem for semigroups of operators. *Acta Sci. Math.* 38, 343—351.
- Neubrander F. [to appear]. Laplace transform and asymptotic behaviour of strongly continuous semigroups. *Houston J. Math.*
- Nussbaum R. D. [1970]. The radius of the essential spectrum. *Duke Math. J.* 38, 473—478.
- Pavel N. H. [1982]. *Analysis of Some Nonlinear Problems in Banach Spaces and Applications*. Mimeographed Notes, University of Iasi, 1982.
- Pazy A. [1983]. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- Peletier L. A. [1981]. The porous media equation. In: *Applications of Nonlinear Analysis in the Physical Sciences*. H. Amann et al. (eds.), 229—241. Pitman, London, 1981.
- Perron O. [1907]. Zur Theorie der Matrizen. *Math. Ann.* 64, 248—263.
- Phillips R. S. [1953]. Perturbation theory for semi-groups of linear operators. *Trans. AMS* 74, 199—221.
- Phillips R. S. [1982]. Semigroups of positive contraction operators. *Czech. Math. J.* 12, 294—313.
- Prüss J. [1981]. Equilibrium solutions of age-specific population dynamics of several species. *J. Math. Biol.* 11, 65—84.
- Reed M., Simon B. [1978]. *Methods of Modern Mathematical Physics IV: Analysis of Operators*. Academic Press, New York, 1978. [Имеется перевод: Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. IV: Анализ операторов. — М.: Мир, 1982.]
- Reich S. [1986]. Nonlinear semigroups, holomorphic mappings and integral equations. In: *Proc. Symp. Pure Math.* 45, Part 2, 307—324, AMS, Providence, 1986.
- Riesz F., sz-Nagy B. [1955]. *Functional Analysis*. Ungar, New York, 1955. [Имеется перевод I изд.: Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1954.]
- Schaefer H. H. [1974]. *Banach Lattices and Positive Operators*. Springer-Verlag, Berlin, 1974.

- Shappacher W. [1983]. Asymptotic Behaviour of Linear C_0 -semigroups. Lecture Notes, Quaderni, Bari, 1983.
- Schep A. R. [1985]. Weak Kato-inequalities and positive semigroups. *Math. Z.* 190, 305—314.
- Showalter R. E. [1977]. Hilbert Space Methods for Partial Differential Equations. Pitman, London, 1977.
- Simon B. [1977]. An abstract Kato's inequality for generators of positivity preserving semigroups. *Indiana Univ. Math. J.* 26, 1067—1073.
- Stein E. M. [1970]. Topics in Harmonic Analysis Related to the Littlewood-Paley Theory. *Annals of Math. Study*. Princeton University Press, Princeton, 1970.
- Stone M. H. [1932]. On one-parameter groups in Hilbert space. *Ann. Math.* 33, 643—648.
- Tanabe H. [1979]. Equations of Evolution. Pitman, London, 1979.
- Taylor A. E., Lay D. C. [1979]. Introduction to Functional Analysis. John Wiley & Sons, New York, 1979.
- Triebel H. [1978]. Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators. North Holland, Amsterdam, 1978. [Имеется перевод: Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства и дифференциальные операторы. — М.: Мир, 1980.]
- Vazquez J. L. [1984]. The interface of one-dimensional flows in porous media. *Trans. AMS.* 285, 717—737.
- Veron L. [1979]. Effets regularisant de semi-groupes non lineaires dans des espaces de Banach. *Annales Faculté des Sciences Toulouse* 1, 171—200.
- Vidav I. [1968]. Existence and uniqueness of nonnegative eigenfunctions of the Boltzmann operator. *J. Math. Anal. Appl.* 22, 144—155.
- Vidav I. [1970]. Spectra of perturbed semigroups with applications to transport theory. *J. Math. Anal. Appl.* 30, 264—279.
- Voigt J. [1980]. A perturbation theorem for the essential spectral radius of strongly continuous semigroups. *Monatsh. für Math.* 90, 153—161.
- Voigt J. [1984]. Positivity in time dependent linear transport theory. *Acta Appl. Math.* 2, 311—331.
- Voigt J. [1985]. Interpolation for (positive) C_0 -semigroups on L_p -spaces. *Math. Z.* 188, 283—286.
- von Wahl W. [1985]. The equations of Navier — Stokes and Abstract Parabolic Equations. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1985.
- Walker J. A. [1980]. Dynamical Systems and Evolution Equations. Plenum Press, New York, 1980.
- Webb G. F. [1985]. Theory of Nonlinear Age-dependent Population Dynamics. Marcel Dekker, New York, 1985.
- Wolff M. [1978]. On C_0 -semigroups of lattice homomorphisms on a Banach lattice. *Math. Z.* 164, 69—80.
- Yosida K. [1980]. Functional Analysis (6th ed.). Springer-Verlag, Berlin, 1980. [Имеется перевод: Йосида К. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967.]
- Zaanen A. C. [1983]. Riesz Spaces II. North-Holland, Amsterdam, 1983.
- Zabczyk J. [1975]. A note on C_0 -semigroups. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Math. Astron. Phys.* 23, 895—898.
- Zarantonello E. H. [1973]. Dense single-valuedness of monotone operators. *Israel J. Math.* 15, 158—166.

Предметный указатель

- доминирующий конус (dominating cone) 306
- (∼ monotone)
- абстрактная задача Коши (abstract problem) 8
- абстрактное неравенство Като (abstract Kato inequality) 19, 209, 210
- абсцисса сходимости (abscissa of convergence) 183
- аддитивно циклическое подмножество (additively cyclic subset) 227
- аккретивное отображение (accretive mapping) 293
- m -аккретивное отображение (m -accretive mapping) 293
- аккретивный график (accretive graph) 28
- m -аккретивный график (m -accretive graph) 28
- аккретивный оператор (accretive operator) 24
- m -аккретивный оператор (m -accretive operator) 24
- C^* -алгебра (C^* -algebra) 19, 196
- алгебраическая кратность (algebraic multiplicity) 316
- аналитическая полугруппа (analytic semigroup) 9, 15, 138, 240
- аппроксимативно абсолютно доминирующий конус (approximately absolutely dominating cone) 305
- аппроксимативный точный спектр (approximate point spectrum) 223, 224, 315
- аппроксимация Иосиды (Yosida approximation) 11, 25, 30, 294
- полугрупп (∼ of semigroups) 38
- асимптотическое поведение (asymptotic behaviour) 9, 20, 239, 250
- банахов пара (Banach couple) 138
- структура (∼ lattice) 307
- барьерный конус (barrier cone) 278
- векторная подструктура (vector sublattice) 308
- структура (∼ lattice) 307
- возмущение (perturbation) 141, 254
- возмущенная полугруппа (perturbed semigroup) 82, 254
- возрастающая последовательность (increasing sequence) 307
- воспроизводящий конус (generating cone) 297
- вполне m -диссипативный оператор (m -dissipative operator) 103
- вторая сопряженная к функции (second conjugate of a function) 282
- выпуклая функция (convex function) 275
- гауссова полугруппа (Gaussian semigroup) 17, 156, 178
- l -гёльдерово пространство (little-Hölder space) 166
- генератор ((infinitesimal) generator) 7, 24, 27
- главная полоса (principal band) 308
- главное проекционное свойство (principal projection property) 309,
- главный идеал (principal ideal) 196, 308
- гладкая норма (smooth norm) 291
- градиент (gradient) 288
- граница роста (growth bound) 240
- граничный спектр (peripheral spectrum) 22
- дедекиндово (= порядково) полная банахова структура (Dedekind complete Banach lattice) 309
- σ -полная банахова структура (Dedekind σ -complete Banach lattice) 19, 207, 309
- диаметр (diameter) 321
- дизъюнктное дополнение (disjoint complement) 308

- дизъюнктивные элементы (disjoint element) 308
 дизъюнктивный проектор (band projection) 210, 309
 дисперсивный оператор (dispersive operator) 191
 диссипативное отображение (dissipative mapping) 293
 диссипативный график (dissipative graph) 28
 m -диссипативный график (m -dissipative graph) 28
 диссипативный оператор (dissipative operator) 9, 24
 m -диссипативный оператор (m -dissipative operator) 10, 24
 p -диссипативный оператор (p -dissipative operator) 72, 190, 212
 дифференцируемая по Гато функция (Gâteaux differentiable function) 288
 — — Фреше функция (Fréchet $\sim \sim$) 288
 доминирующее собственное значение (dominant eigenvalue) 20
 дробная степень операции (fractional power of an operator) 17

 задача Коши (initial value problem, Cauchy problem) 11, 49, 59, 110
 закон сохранения масс (mass conservation property) 14, 129
 замыкаемый (= допускающий замыкание) оператор (closable operator) 73, 88, 191
 знаковое отображение (= sign-отображение) (sign-mapping) 19, 210

 идеал (ideal) 185, 308
 T -инвариантный идеал (T -invariant ideal) 185
 $\{T(t)\}$ -инвариантный идеал ($\{T(t)\}$ -invariant ideal) 185
 индикаторная функция (indicator function) 279
 интеграл Данфорда (Danford integral) 143
 интерполяционный метод (= фуктор) типа θ (interpolation method of exponent θ) 158
 инфинитезимальный генератор (infinitesimal generator) 7, 24, 27
 истинная скорость роста (intrinsic growth rate) 270

 калибровочный функционал (gauge functional) 278
 каноническая half-норма (canonical half-norm) 188
 касательный функционал (tangent functional) 285
 квадратичная форма Q_H (quadratic form Q_H) 216
 квазивнутренний элемент (quasi-interior point) 185, 303
 квазисжимающая полугруппа (quasi-contractive semigroup) 54
 квазистоупово компактное пространство (quasi-Stonian compact space) 207
 квази- m -диссипативный оператор (quasi- m -dissipative operator) 54
 класс Фавара (Favard class) 13, 78
 клин (cone) 297
 коммутативные суммы m -диссипативных операторов (commutative sums of m -dissipative operators) 88
 комплексификация банахова пространства (complexification of Banach space) 103, 206, 301
 — банаховой структуры ($\sim \sim \sim$ lattice) 314
 комплексная банахова структура (complex Banach lattice) 314
 конус (proper cone) 18, 297
 конусный отрезок (order interval) 297
 корневое подпространство (generalized eigenspace) 316
 корректная задача (well-posed problem) 121
 критерий Берлинга — Дени (Beurling — Deny criterion) 20, 216

 лапласиан (Laplacian) 209

 максимальная регулярность (maximal regularity) 9, 177
 максимально диссипативный оператор (maximal dissipative operator) 68
 — монотонное отображение ($\sim$ monotone mapping) 293
 марковская полугруппа (Markov semigroup) 234
 мера некомпактности (measure-of-noncompactness) 20, 321
 — — Куратовского (Kuratowski $\sim$) 335

- метод последовательных приближений (method of successive approximations) 82, 86
- минимальное сечение (minimal section) 125, 132
- модуль (absolute value) 307
- монотонная норма (monotone norm) 188, 192, 298
- M -монотонная норма (M -monotone norm) 298
- монотонное отображение (monotone mapping) 287
- мультипликативно циклическое подмножество (multiplicatively cyclic subset) 227
- надграфик (epigraph) 275
- направленное вверх подмножество (upwards directed subset) 307
- вниз подмножество (downwards $\sim$) 308
- невертикальная полуплоскость (non-vertical hyperplane) 285
- невозмущенная полугруппа (unperturbed semigroup) 82, 254
- нелинейная сжимающая полугруппа (nonlinear contraction semigroup) 10, 24, 26
- неоднородная задача Коши (inhomogeneous initial value problem) 17 88, 96, 167
- неоднородное уравнение теплопроводности (inhomogenous heat equation) 179
- непрерывная аффинная функция (continuous affine functions) 276
- u -непрерывное отображение (u -continuous mapping) 256
- непрерывный интерполяционный метод (continuous interpolation method) 17, 159
- спектр ($\sim$ spectrum) 223, 224, 315
- неприводимая полугруппа (irreducible semigroup) 185, 234
- неприводимый оператор (irreducible operator) 185
- неявная разностная схема (backward difference scheme) 36, 129
- норма, индуцированная функционалом (norm induced by functional) 187
- порядковой единицы (order unit norm) 196, 303
- Рисса (Riesz $\sim$) 306, 307
- half-норма (half-norm) 18, 72, 187
- нормальное собственное значение (normal eigenvalues) 317
- нормальный конус (normal cone) 188, 298
- нормирующий функционал (norming functional) 291
- область значений (range) 24, 315
- область определения (domain) 8
- обобщенная область определения (generalized domain) 13, 31
- обобщенное решение (mild solution) 14, 38, 98
- обобщенный собственный вектор (generalized eigenvector) 336
- ограниченный по норме положительный линейный функционал (norm bounded positive linear functional) 299
- однопараметрическая полугруппа (ограниченных линейных операторов) (one-parameter semigroup (of bounded linear operators)) 7
- оператор позитивного типа (operator of positive type) 163
- сохраняющий полосу (band preserving $\sim$) 313
- Эйлера (Euler $\sim$) 10
- опорная гиперплоскость (supporting hyperplane) 285
- точка (support point) 285
- опорный функционал (support functional) 278
- ортоморфизм (orthomorphism) 313
- остаточный спектр (residual spectrum) 223, 224, 315
- отображение банаховых пар (map of Banach couples) 138
- двойственности (duality $\sim$) 292
- сохраняющее порядок (order preserving mapping) 112
- sign-отображение (sign-mapping) 19, 210
- оценка Чернова (Chernoff estimate) 44
- C_0 - n -параметрическая полугруппа (C_0 - n -parameter semigroup) 98
- параметр Мальтуса (Malthusian parameter) 270
- периферийный спектр (peripheral spectrum) 227
- точечный спектр ($\sim$ point spectrum) 235
- подмножество, замкнутое относительно сопряжения (conjugate clo-

- sed subset) 206
 подпространство *Pucca* (Riesz subspace) 308
 позитивная аналитическая полугруппа (positive analytic semigroup) 186
 — полугруппа ($\sim$ semigroup) 18, 180
 показатель (exponent) 138
 положительно достижимая норма (positively attained norm) 192, 305
 положительный клип (positive cone) 297
 — конус ($\sim$ proper cone) 18, 180, 297
 — оператор ($\sim$ operator) 18, 180, 304
 — собственный субвектор ($\sim$ subeigenvector) 212
 полоса (band) 308
 популяция, структурированная по возрасту (age-structured populations) 270
 полугруппа сжатий (contraction semigroup) 9
 —, становящаяся компактной, начиная с некоторого t_0 (eventually compact semigroup) 20, 226, 240
 —, — равномерно непрерывной, начиная с некоторого t_0 (eventually uniformly continuous) 21, 226, 240
 C_0 -полугруппа (C_0 -semigroup) 7, 61
 полунепрерывная снизу функция (lower semi-continuous function) 276
 полуупорядоченное банахово пространство (ordered Banach space) 297
 — — — с порядковой единицей ($\sim \sim \sim$ with order unit) 302
 — векторное пространство ($\sim$ vector space) 297
 поляр (polar) 279
 порядковая единица (order unit) 19, 196, 302
 порядково непрерывная норма (order continuous norm) 310
 — σ -непрерывная норма (σ -order continuous norm) 310
 — (= дедекиндово) полная банахова структура (Dedekind complete Banach lattice) 309
 — σ -полная банахова структура ($\sim \sigma$ -complete Banach lattice) 19, 207, 309
 — ограниченное подмножество (order bounded subset) 297, 298
 преобразование *Лапласа* (Laplace transform) 9, 183
 — *Фурье* (Fourier transform) 244
 принцип максимума (maximum principle) 19, 129, 194
 — сравнения (comparison $\sim$) 14
 проекционная полоса (projection band) 309
 проекционное свойство (projection property) 309
 производная *Гато* (Gâteaux derivative) 288
 — по направлению (directional $\sim$) 287, 293
 промежуточное банахово пространство (intermediate Banach space) 138, 173
 пространство *Гротендика* (Grothendieck space) 207
 — дробных степеней (fractional power $\sim$) 18, 176, 177
 — *Pucca* (Riesz $\sim$) 307
 — с порядковой единицей (order unit $\sim$) 303
 псевдорезольвента (pseudo resolvent) 323
 равномерно непрерывная полугруппа (uniformly continuous semigroup) 7, 208, 240
 — устойчивая полугруппа ($\sim$ stable semigroup) 21, 239
 разложение по генерации (generation expansion) 266
 разрешающий оператор (solution operator) 10
 (w)-разрешимая полугруппа ((w) -solvable semigroup) 234
 расширенное банахово пространство (extended Banach space) 325
 Γ -регуляризация (Γ -regularization) 277
 резольвента (resolvent) 139, 294
 резольвентно положительный оператор (resolvent positive operator) 181
 резольвентное множество (resolvent set) 8, 139, 315
 — уравнение = тождество *Гильберта* ($\sim$ equation) 145, 322
 рефлексивное пространство (reflexive space) 75, 207
 $\odot$ -рефлексивное пространство ($\odot$ -reflexive space) 81
 решение (solution) 121, 125
 свойство внедиагональной положительности (= ВДП-свойство =

- СВП) (positive-of-diagonal property, POD-property) 19, 194
 — Данфорда — Петтиса (Dunford — Pettis $\sim$) 207
 — Родона — Никодима (Rodon — Nikodym $\sim$) 53
 — разложения Рисса (Riesz decomposition $\sim$) 300
 — регулярности (regularity $\sim$) 15
 — MR ($\sim$ MR) 177
 секториальный оператор (sectorial operator) 140
 сжатие (contraction operator) 9
 p -сжатие (p -contraction) 74, 191
 сжимающая C_0 -полугруппа (contraction C_0 -semigroup) 9, 24
 p -сжимающая полугруппа (p -contraction semigroup) 191
 сжимающий оператор (contraction operator) 9
 сильная норма Рисса (strong Riesz norm) 306
 сильно непрерывная полугруппа (strongly continuous semigroup) 7
 сильное решение (strict solution) 96
 слабая порядковая единица (weak order unit) 309
 слабо воспроизводящий конус (weakly generating cone) 297
 — непрерывная полугруппа ($\sim$ continuous) semigroup) 7
 — *-непрерывная полугруппа ($\sim$ *-continuous semigroup) 7, 75 — 76
 слабый *-генератор (weak * (infinitesimal) generator) 80
 — *-интеграл Римана ($\sim$ * Riemann integral) 83, 84
 собственная функция (proper function) 275
 сопряженная полугруппа (dual semigroup) 13, 75
 — (= полярная) функция (conjugate function) 281
 — система (dual, backward system) 273
 сопряженное к банахову пространству (dual space of Banach space) 315
 сопряженный клин (dual cone) 299
 — положительный конус ($\sim$ positive (proper) cone) 189, 299
 — элемент (conjugate) 206
 спектр (spectrum) 139, 315
 спектральная грань (spectral bound) 20 — 21, 181, 200, 240
 спектральный радиус (spectral radius) 226, 204, 315
 сплошное подмножество (solid subset) 297
 строго выпуклая функция (strictly convex function) 276
 — p -диссипативный оператор ($\sim$ p -dissipative operator) 73, 190
 — доминирующее собственное значение ($\sim$ dominant eigenvalue) 22
 — неприводимая полугруппа (strongly irreducible semigroup) 185
 — неприводимый оператор ($\sim$ irreducible operator) 185
 — положительное подмножество (strictly positive subset) 212
 — положительный функционал ($\sim$ positive functional) 212
 структурная популяционная динамика (structured populations dynamics) 334
 структурный гомоморфизм (lattice homomorphism) 229, 311
 субаддитивная функция (subadditive function) 102
 субградиент (subgradient) 283
 субдифференциал (subdifferential) 283
 субдифференциальное отображение (subdifferential mapping) 283
 субдифференцируемая функция (subdifferentiable function) 283
 сублинейная функция (sublinear function) 72
 сублинейный функционал (sublinear functional) 187, 278
 существенная граница роста (essential growth bound) 266
 существенный спектр (Браудера) (Browder essential spectrum) 20, 224, 317
 — спектральный радиус ($\sim$ spectral radius) 226, 322
 — тип ($\sim$ type) 20, 266
 Схема Кранка — Николсона (Crank — Nicholson scheme) 49
 сходимость (convergence) 25
 теорема Берлинга — Дини (Beurling — Deny theorem) 20, 216
 — Крэндалла — Лиггетта о порождении (Crandall — Liggett generation $\sim$) 10, 29
 — Принсгейма — Ландау (Pringsheim — Landau $\sim$) 22, 183
 — Троттера — Неве — Камо (Trotter — Neveu — Kato $\sim$) 38, 56
 — Хилле — Йосиды (Hille — Yosida $\sim$)

- 9, 24—25, 56, 193
 теория переноса (transport theory) 334
 тип (type) 8, 101, 200, 239
 точечный спектр (point spectrum) 223, 224, 315
 точка гладкости (smooth point) 291
 точная миноранта (exact minorant) 283
- условие роста относительно спектра (spectrum determined growth condition) 240
 (ω)-условие (ω -condition) 234
 устойчивое распределение размера (stable size distribution) 270
- Формула вариации произвольной постоянной (variation-of-constant formula) 17, 82, 168
 — Дюамеля (Duhamel ~) 82
 функции в двойственности (functions in duality) 282
- функционал Минковского (Minkowski functional) 278
- целый вектор (entire vector) 152
 центр (center) 313
- шаровая мера некомпактности (ball measure-of-noncompactness) 335
 штрих-норма (prime norm) 82
- экспоненциальная граница роста (exponential growth bound) 248
 — — — решения задачи Коши (~ ~ ~ of solutions of the Cauchy problem)
 экспоненциальное отображение (exponential mapping) 148
 эффективная область определения (effective domain) 275
- ядро (null-space) 315

Оглавление ¹⁾

Предисловие редактора перевода	5
Предисловие	6
Глава 1. Введение	7
1.0. Предварительные сведения	7
1.1. Введение к ч. I	9
1.2. Введение к ч. II	15
1.3. Введение к ч. III	18
Часть I. Сжимающие полугруппы	24
Глава 2. Нелинейные сжимающие полугруппы и диссипативные операторы (Ф. Клемент)	24
2.1. Теоремы Хилле — Йосиды и Троттера — Невё — Като	24
2.2. Теорема Крэндалла — Лиггетта	29
2.3. Аппроксимация сжимающих полугрупп	38
2.4. Задача Коши и m -диссипативные операторы	49
2.5. Квазисжимающие полугруппы	54
Глава 3. Порождение линейных полугрупп (Ф. Клемент; § 3.5 — Х. Хейманс)	56
3.1. C_0 -полугруппы линейных сжатий	56
3.2. C_0 -полугруппы ограниченных линейных операторов	61
3.3. Диссипативные операторы	67
3.4. Сопряженные полугруппы	75
3.5. Ограниченные возмущения сопряженных полугрупп	82
3.6. Коммутативные суммы m -диссипативных операторов	88
3.7. C_0 -полугруппы в комплексных банаховых пространствах	101
Глава 4. L_1 -теория полугрупп нелинейной диффузии (К. ван Дуйн)	110
4.1. Введение	110
4.2. Случай $0 \in \beta(0)$ и $0 \in \text{int } \mathcal{R}(\beta)$	114
4.3. Случай $\mathcal{R}(\beta) \subseteq (0, \infty)$	124
4.4. Полугрупповое решение	128
4.5. Непрерывная зависимость от φ	131
4.6. Регулярность	135

¹⁾ Предисловие, гл. 1—4, дополнение 1 и библиографические замечания перевел В. В. Васильев, остальное — С. И. Пискарев.

Часть II. Аналитические полугруппы	138
Глава 5. Операторное исчисление аналитических полугрупп (С. Ангенент)	138
5.1. Банаховы пары: терминология	138
5.2. Классы генераторов $Gen(E)$ и $Hol(E)$	139
5.3. Резольвента	140
5.4. Теоремы о возмущениях	140
5.5. Операторное исчисление	143
5.6. Экспоненциальное отображение	148
5.7. Некоторые оценки функции e^{tA}	151
5.8. Примеры и упражнения	154
Глава 6. Интерполяция и максимальная регулярность (С. Ангенент)	158
6.1. Интерполяционные методы	158
6.2. Непрерывный интерполяционный метод	159
6.3. Другой способ описания I_θ	160
6.4. Неоднородная задача Коши	167
6.5. Максимальная регулярность	170
6.6. Примеры и упражнения	173
Часть III. Позитивные полугруппы	180
Глава 7. Генераторы позитивных полугрупп (Б. де Пахтер)	180
7.1. Простейшие свойства позитивных полугрупп	180
7.2. half-нормы и диссипативные операторы	187
7.3. Свойство внедиагональной положительности	194
7.4. Неравенство Като	209
Глава 8. Теория Перрона — Фробениуса для позитивных полугрупп (Х. Хейманс)	218
8.1. Теоремы об отображении спектра	218
8.2. Спектральные свойства позитивных полугрупп	227
8.3. Спектральные свойства неприводимых полугрупп	234
Глава 9. Асимптотическое поведение (Х. Хейманс, Б. де Пахтер)	239
9.1. Устойчивость	239
9.2. Асимптотическое поведение позитивных полугрупп	250
9.3. Компактность и неприводимость возмущенных полугрупп	253
Глава 10. Два примера структурированной популяционной динамики (Х. Хейманс)	263
10.1. Рост и деление клеток, зависящие от их размера	263
10.2. Динамика популяций, структурированных по возрасту	270
Дополнения	274
Дополнение 1. Выпуклые функции (Б. де Пахтер)	275
Д.1.1. Определения и элементарные свойства	275
Д.1.2. Непрерывность	279

Д.1.3. Сопряженные (полярные) функции	281
Д.1.4. Субдифференциалы	283
Д.1.5. Выпуклые функции в гильбертовых пространствах	293
Дополнение 2. Полуупорядоченные банаховы пространства (<i>Б. де Паптер</i>)	297
Д.2.1. Полуупорядоченные банаховы пространства	297
Д.2.2. Полуупорядоченное банахово пространство с порядковой единицей	302
Д.2.3. Положительные операторы	304
Д.2.4. Банаховы структуры	307
Дополнение 3. Некоторые результаты спектральной теории (<i>Х. Хейманс</i>)	315
Д.3.1. Существенный спектр Браудера	315
Д.3.2. Псевдорезольвенты	322
Д.3.3. Расширенное банахово пространство $\hat{X}$	325
Библиографические замечания	328
Литература	337
Предметный указатель	343