Издательство Калининградского государственного университета

С. В. Мациевский

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КУЛЬТУРА

4	9	2
3	5	7
8	1	6

٤	٩	٢
٣	٥	٧
٨	١	٦

Калининград

2001

Издательство Калининградского государственного университета

С. В. Мациевский

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КУЛЬТУРА

Учебное пособие

Калининград

2001

УДК 51(075)
ББК 22.11я73
М 367

Рецензент
кафедра высшей математики
Калининградского государственного технического университета

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Калининградского государственного университета.

Мациевский С. В.
М 367 Математическая культура: Учебное пособие / Калининград: Изд-во КГУ, 2001.— 72 с.
ISBN 5-88874-227-9.

Учебное пособие написано на основе лекционных курсов, читаемых автором на факультетах романо-германской филологии и славянской филологии и журналистики Калининградского госуниверситета.

Математический анализ, алгебра и геометрия изучаются в школе и поэтому не рассматриваются в данном пособии.

Содержание учебного пособия полностью соответствует государственному образовательному стандарту высшего образования для гуманитарных факультетов государственных университетов.

Предназначено для факультетов, на которых курс математики не относится к основным.

Ил.: 81, библ.: 28 назв.

На обложке: единственный с точностью до преобразований симметрии магический квадрат 3 × 3, записанный обычными числами и числами, применяемыми в арабских странах.

УДК 51(075)
ББК 22.11я73

ISBN 5-88874-227-9
© Мациевский С. В., 2001

Королева наук

«Математика — кузница мышления»,— повествует древнекитайская рукопись. А само слово «математика» произошло от греческого «μάθημα» (матэма) — наука, знание. Вся история человечества убедительно подтверждает эти замечательные характеристики нашей древнейшей науки. «Тот, кто не знает математики,— говорил в XIII веке известный английский философ Роджер Бэкон,— не может узнать никакой другой науки и даже не может обнаружить своего невежества». А великий Кант писал: «Учение о природе будет содержать науку в собственном смысле лишь в той мере, в какой может быть применена к ней математика».

В наши дни трудно себе представить любую отрасль знаний, где не применялась бы математика. Поэтому приобщение к знакомству с ней широкого круга читателей, даже не склонных к точным наукам, играет большую роль.

Небольшая по объему книжка С. В. Мациевского «Математическая культура» помогает гуманитариям по-новому взглянуть на математику, увидеть в ней не только набор громоздких вычислений, формул и трудных доказательств, а живую науку, познакомиться с историей ее развития, со многими выдающимися математиками, а также с некоторыми важными математическими понятиями и теориями, играющими большую роль в жизни.

Книга С. В. Мациевского состоит из трех глав. В первой главе дана краткая характеристика основных периодов исторического развития математики и достижений многих выдающихся математиков. Во второй главе автор знакомит читателей с основными числовыми множествами и их обобщениями на произвольные множества. Большое внимание уделено теории вероятностей и теории графов. Дана также краткая характеристика простейших понятий комбинаторной топологии. Дано много конкретных примеров, облегчающих восприятие теоретического материала.

Наконец, в заключительной, третьей главе предложены занимательные игры, иллюстрирующие применение изложенного во второй главе теоретического материала и развивающие навыки самостоятельной творческой работы.

Конечно, в такой небольшой по объему книге автору не удалось более глубоко осветить вопросы истории математики и более полно представить области высшей математики, но читатель без труда может расширить эти знания, прочитав соответствующие разделы из рекомендованной автором в конце книги научной и учебной литературы.

В приведенном алфавитном указателе дано свыше 500 математических понятий. К сожалению, характеристики некоторых из них слишком кратки и трудны для восприятия «нематематической» аудиторией. Может быть, число этих понятий следовало бы уменьшить, учитывая ограниченность объема книги, но, по-видимому, автор хотел показать величие математики как самой абстрактной, но в то же время самой нужной современному обществу науки.

Профессор В. С. Малаховский

Моим друзьям и «врагам»

Предисловие

Автор считает, что в данном пособии в какой-то мере решена невыполнимая задача: предоставить математические знания нематематикам.

В монографию не включены прикладные области математики (математическая статистика, математическая лингвистика и т. д.). Изложение проведено на достаточно высоком абстрактном уровне без привлечения примеров из естествознания и обществознания.

Пользуясь редким случаем, автор выражает особую признательность Владиславу Степановичу Малаховскому, своему учителю и научному руководителю, любезно согласившемуся проделать нелегкий труд по чтению и редакции данной рукописи, сделавшему это с замечательной глубиной, принципиальностью и тщательностью, обнаружившему целый ряд ошибок и неточностей и написавшему великолепное предисловие, которое автор явно не заслужил.

Автор благодарен кафедре высшей математики Калининградского государственного технического университета, ее заведующему профессору Борису Аркадьевичу Альтшулю, и особенно прекрасному преподавателю этой кафедры доценту Алле Александровне Юровой за весьма благоприятную рецензию.

Нельзя не отметить также труд студентов филологического факультета и факультетов романо-германской филологии и славянской филологии и журналистики, на язвительные замечания которых автор отвечал не менее едкими изменениями деталей читаемого курса.

Интерес к этому изданию бессменной и самоотверженной заведующей библиотекой КГУ Александры Дмитриевны Шкицкой явился одним из стимулов, поддерживающих автора.

Отдельно хочется отметить руководство Калининградского государственного университета за предоставленные возможности написать настоящее пособие и воспользоваться услугами Издательства КГУ.

Введение

Просило сердце: «Поучи хоть раз!»
Я начал с азбуки: «Запомни — „Аз“».
И слышу: «Хватит! Все в начальном слоге,
А дальше — беглый, вечный пересказ».

Омар Хайям. Рубаи.
Перевод Н. Тенигиной.

Не только язык делает человека человеком, математическое мышление — неотъемлемая часть человеческого духа. Возможно, без математики нет и языка… Математическая культура — составная часть современной культуры, в том числе и массовой.

У первобытных племен названия чисел были неотделимы от названия перечисляемых предметов: «две реки», «три лошади». С появлением отвлеченного понятия о числе родилась математика.

Что такое современная математика? ***Математика*** — *наука*, *классифицирующая* с достаточно общей точки зрения возможные типы *количественных отношений* и *пространственных форм*.

Каждая наука имеет свой язык. Обучение основам языка современной математики и составляет содержание данного учебного пособия. Для выполнения этой задачи были использованы следующие принципы: 1) представление возможно большего числа новых разделов математики; 2) исключение второстепенных понятий, не требующихся для дальнейшего изложения, и доказательств длиннее двух слов (чем, собственно, и отличается математика для нематематиков). Одним словом, погружение в математику осуществляется на строго дозированную мелкую глубину, но по возможно большой площади.

Пособие предоставляет систему необходимого минимума математических терминов и понятий, которые могут быть востребованы как при работе переводчика, так и при изучении других предметов, особенно таких, как логика и прикладная лингвистика. Глава 1 предназначена для самостоятельного изучения студентами. Содержание главы 2 полностью записывалось на доске, при этом 2 страницы укладывались в 1 пару. Начинается и заканчивается эта глава двумя краеугольными камнями современной математики: теорией множеств и топологией. С материалом главы 3 и студентами автор работал в компьютерном классе.

Глава 1. История математики

И со свечкой искали они, и с умом,
С упованьем и крепкой дубиной,
Понижением акций грозили притом
И пленяли улыбкой невинной.
Льюис Кэрролл. Охота на Снарка.

Историю математики иногда разбивают на 4 периода.

№	Период	Краткая характеристика
1	Зарождение математики: до 6 в. до н. э.	Математика не является самостоятельной отраслью знания. В Египте, Вавилоне, Индии и Китае появляются начатки арифметики, геометрии, алгебры и тригонометрии.
2	Элементарная математика: 6 в. до н. э.— 17 в.	В Древней Греции возникает математика как самостоятельная наука. Развивается в арабских странах. Дедуктивное изложение элементарной геометрии, возникновение теории чисел, понятия действительного числа, создание алгебры как буквенного исчисления. Основное понятие — величина.
3	Математика переменных величин: 17—19 вв.	Появление математического и функционального анализа, дифференциальных и интегральных уравнений, проективной и аналитической геометрии. Основное понятие — функция.
4	Современная математика: с 19 в.	Взрывное развитие математики и проникновение ее во все области науки и практической деятельности. Планомерное изучение математикой самой себя: количественных отношений и пространственных форм. Обоснование математики: возникновение теории множеств и математической логики. Развитие теории вероятностей и вычислительной математики.

§1. Зарождение математики

1. Каменный век. Наши первоначальные представления о числе и форме относятся к очень отдаленной эпохе древнего каменного века — палеолита. Но пока не произошел переход от простого собирания пищи к активному ее производству, от охоты и рыболовства к земледелию, от палеолита к неолиту, люди мало продвинулись в понимании числовых величин и пространственных отношений.

2. Древний Восток. Хотя торговля и процветала в обществах древнего Востока, хозяйственной основой были села, обособленные и консервативные. Поэтому можно говорить о египетской, вавилонской, китайской и индийской математике.

Восточная математика возникла как прикладная наука, имевшая целью облегчить календарные расчеты, распределение урожая, организацию общественных работ и сбор налогов. В ней не было попыток дать то, что называется доказательством; имеются только предписания, алгоритмы: «делай то-то и так-то». Восточная математика никогда не могла освободиться от тысячелетнего влияния технических проблем и проблем управления, для пользы которых она и была создана.

Самой развитой была вавилонская математика. Именно ей человечество обязано как ***шестидесятеричной системой счисления***, используемой в настоящее время при измерении времени и углов (градусы измеряются от 0° до 360°, в минуте 60 секунд, в часе 60 минут), так и атрибутом современной десятичной системы счисления — позиционностью, благодаря которой в Вавилоне был изобретен нуль как принцип записи чисел, а не как знак (вначале «нулем» служил просто пропуск разряда). Значение позиционности для человечества сродни значению алфавита.

3. Книга перемен. Первое упоминание о комбинаторных вопросах встречается в китайских рукописях XII—XIII вв. до н. э. (точно датировать эти рукописи невозможно, поскольку в 213 г. до н. э. император Цин Ши-хуан приказал сжечь все книги). Там писалось, что все в мире является сочетанием двух начал: мужского ян, дискретная линия – –, и женского инь, непрерывная линия —. В рукописи «Же-ким» («Книга перемен (перестановок)») показаны все соединения этих знаков по три.

☰	☱	☲	☳	☴	☵	☶	☷
7	6	5	4	3	2	1	0
k'ien небо	tui облака	li огонь	chőn гроза	sűn ветер	k'an вода	kőn горы	k'un земля
Юг	Юго-восток	Восток	Северо-восток	Юго-запад	Запад	Северо-запад	Север

В той же рукописи приведен ***магический квадрат*** порядка 3 «ло-шу» — числовая таблица 3 × 3, в которой размещены первые 9 натуральных чисел, причем их сумма в каждой горизонтали, вертикали и диагонали одна и та же.

4	**9**	**2**
3	**5**	**7**
8	**1**	**6**

§2. Период элементарной математики

1. Греческая математика. Самая важная роль в развитии западной математики принадлежит античной греческой цивилизации. Находясь в постоянном контакте с народами Востока, Вавилоном и Египтом, греки не довольствовались усвоением их знаний и создали абстрактную и дедуктивную математику. Греки — прежде всего геометры.

Математические исследования и философские рассуждения были в Древней Греции тесно связаны между собой. Платон, согласно легенде, при входе в свою школу написал: «Пусть никто не знающий геометрии не входит сюда». Евклид, согласно преданию, заявил царю, попросившего быстро научить его наукам: «к геометрии нет царской дороги».

2. Ионическая система счисления. Постепенно аттическая система счисления была заменена ионической; ее использование распространилось в Александрию (с III в. до н. э.). Это алфавитная десятичная аддитивная (непозиционная) система счисления образована из 24 букв ***греческого алфавита*** (финикийского происхождения) и двух архаичных букв.

Ионическая система счисления и греческий алфавит

№ в алфавите	Буква алфавита	Русское название	Обозн. число	Латинское обозн.	№ в алфавите	Буква алфавита	Русское название	Обозн. число	Латинское обозн.	№ в алфавите	Буква алфавита	Русское название	Обозн. число	Латинское обозн.
1	α	а́льфа	1	a	9	ι	йо́та	10	i	17	ρ	ро	100	r
2	β	бе́та	2	b	10	ϰ	ка́ппа	20	c	18	σ	си́гма	200	s
3	γ	га́мма	3	g	11	λ	ля́мбда	30	l	19	τ	та́у	300	t
4	δ	де́льта	4	d	12	μ	мю	40	m	20	υ	ю́псилон	400	y
5	ε	э́псилон	5	e	13	ν	ню	50	n	21	φ	фи	500	ph
—	ϛ	сти́гма	6	—	14	ξ	кси	60	x	22	χ	хи	600	ch
6	ζ	дзе́та	7	z	15	ο	омикро́н	70	o	23	ψ	пси	700	ps
7	η	э́та	8	e	16	π	пи	80	p	24	ω	оме́га	800	o
8	θ	тхе́та	9	th	—	ϙ	ко́ппа	90	—	—	ϡ	сампи́	900	—

3. Абак. Поскольку письменный счет в греческих системах счисления был очень сложным, вычисления часто проводили на абаке — счетной доске, на которой параллельные линии обозначали единицы, десятки, сотни и т. д. На них помещали число жетонов, соответствующее единицам, десяткам и т. д. рассматриваемого числа.

Абак широко применялся римлянами, а позднее и на средневековом христианском Западе даже после введения десятичной позиционной системы счисления, которой мы пользуемся в наши дни. В СССР счеты, дети абака, применялись вплоть до перестройки.

4. Математические проблемы античности. Всего насчитывается три знаменитые математические проблемы античности.

Квадратура круга — нахождение квадрата, площадь которого равна площади заданного круга.

Удвоение куба — определение ребра куба, имеющего объем вдвое больше объема заданного куба.

Трисекция угла — разделение любого заданного угла на три части.

Значение этих проблем в том, что, не решаясь с помощью циркуля и линейки, они стали средством для проникновения в новые области математики.

5. Фалес. В 6 в. до н. э. в период расцвета греческих торговых полисов Малой Азии сложилась форма абстрактного мышления, ставшая основой всей западной науки. Впервые ионийский рационализм поставил не только восточный вопрос «как?», но и вопрос «почему?». Согласно преданию отцом греческой математики и ***Ионийской школы*** является купец Фалес из Милета, который в первой половине 6 в. посетил Вавилон и Египет.

Древнегреческая математика развивалась последовательно, несколькими школами, использовавшими достижения своих предшественников.

6. Пифагор. Пифагор родился на острове Самос вблизи Милета в первой половине 6 в. до н. э. После долгих путешествий в Египте и Вавилоне он обосновался на юге Италии в Кротоне и основал братство религиозного, философского и научного характера с политическим уклоном. Основу всего он видел в числе, о чем свидетельствует его девиз: «Всё есть число».

По-видимому, пифагорейцы умели доказывать ***теорему Пифагора***: «Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов».

Пифагорейская школа заложила основы греческой арифметики, изучая только целые числа; ее арифметика геометрична. Она же открыла иррациональные числа и сокрушила пифагорейскую точку зрения о представимости мира целыми числами, вызвав первый кризис в истории математики.

7. Целые числа. Пифагорейцы открыли разные виды целых чисел.

Совершенное число — число, равное сумме своих делителей, исключая себя. Пять первых совершенных чисел: 6, 28, 496, 8 128, 33 550 336. Пифагорейцы считали число 6 символом души, число 28 отвечало числу многих ученых обществ, а в XII веке церковь учила: тому, кто найдет новое совершенное число, уготовано вечное блаженство.

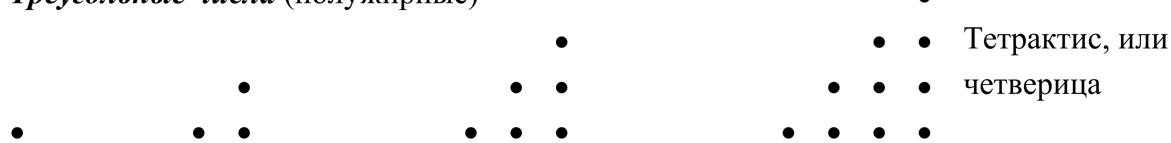
Два числа называются ***дружественными***, если каждое из них равно сумме делителей другого, исключая это другое. Древним грекам была известна только одна пара дружественных чисел: 220 и 284.

Для мистика-пифагорейца Совокупность Чисел состояла из следующих фигур-начал. ***Монада*** — число 1, начало принципа тождества. ***Диада*** — число 2, первое четное, а также женское число, начало принципа непротиворечия. ***Триада*** — число 3, первое нечетное, а также мужское число. И т. д. И, наконец, ***декада*** — количество точек, содержащееся в ***тетрактис, или четверице*** (фигуре, изображающей 4-е треугольное число), тайном символе членов пифагорейского содружества.

8. Многоугольные числа. Как видно из вышеизложенного, арифметика пифагорейцев обладает выраженной наглядностью: свойства многоугольных чисел можно непосредственно видеть на простых геометрических фигурах, которые их изображают. Эти фигуры и многоугольные числа приведены ниже.

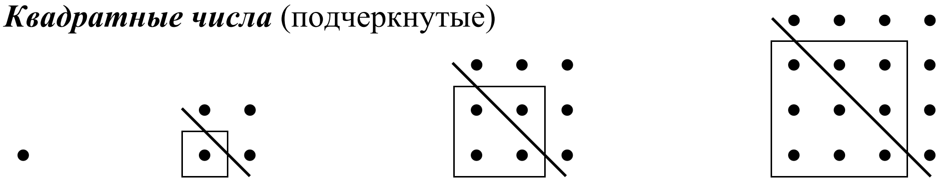
Многоугольные, или фигурные, числа

Треугольные числа (полужирные)



1   **3** = 1 + 2   **6** = 1 + 2 + 3   **10** = 1 + 2 + 3 + 4

Квадратные числа (подчеркнутые)



1     $\underline{4} = \underline{\mathbf{1}} + \mathbf{3}$ $\underline{9} = \underline{4} + 5 = \mathbf{3} + \mathbf{6}$ $\underline{16} = \underline{9} + 7 = \mathbf{6} + \mathbf{10}$

9. Пропорции. Пифагорейцы создали теорию пропорций.

Музыкальная пропорция: $\frac{x}{a} = \frac{h}{y}$, где x и y — два любых натуральных числа, $a = \frac{x+y}{2}$ — их ***среднее арифметическое***, $h = \frac{2xy}{x+y}$ — их ***среднее гармоническое***.

Золотое сечение: $\varphi/a = (a - \varphi)/\varphi$, где a — любое число. Если $a = 1$, то $\varphi = (\sqrt{5} - 1)/2$. Первые приближения золотого такого сечения φ следующие: 1/1, 1/2, 2/3, 3/5, 5/8,…, где 1, 1, 2, 3, 5, 8,…— числа Фибоначчи (см. ниже).

10. Зенон. Основатель ***Элейской школы*** (V в. до н. э.) Парменид — первый, кто строго различал чувственное и умопостигаемое. Элеаты не приняли пифагорейскую доктрину «всё есть число». Если дискретные объекты можно представить целыми числами, то иначе обстоит дело в случае непрерывных величин — длин, площадей, объемов

Зенон Элейский ок. 450 г. до н. э. сформулировал несколько парадоксов, или ***апорий*** (тупиков). Это было первое столкновение двух концепций: ***континуалистской***, трактовавшей число и материю как бесконечно делимые, и ***атомистской***, провозглашающей существование первичных неделимых элементов. Приведем некоторые из апорий Зенона.

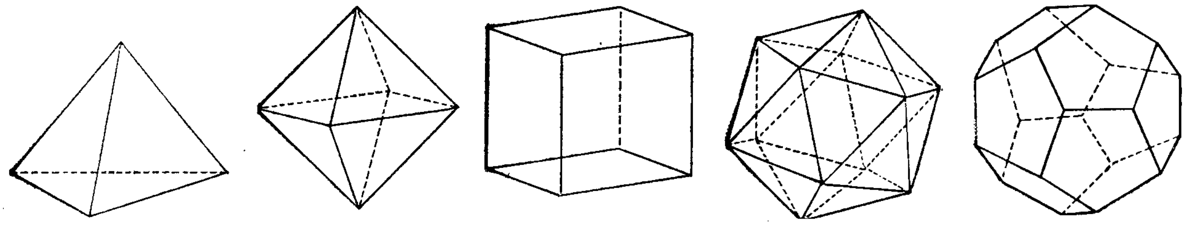
Ахилл и черепаха. Ахилл соревнуется в беге с черепахой и дает ей фору. Пока он добежит до точки старта черепахи, последняя проползет дальше. Пока Ахилл снова добежит до точки, где только что была черепаха, она опять проползет, и т. д. Если пространство бесконечно делимо, Ахилл никогда не догонит черепаху.

Дихотомия (деление на два). Прежде чем пройти целиком некоторый отрезок, тело должно вначале пройти его половину. Но для этого нужно вначале пройти половину этой половины, и т. д., так что движение никогда не сможет начаться.

Стрела. В некий момент своего полета стрела находится в некоторой точке пространства в неподвижном состоянии. Поскольку это верно в каждый момент ее полета, стрела вообще не может находиться в движении.

11. Платон (427—347), ученик Сократа, жил в период упадка Афин. Ок. 377 г. до н. э. он основал философскую школу ***Академию***, в течение века руководившей всей интеллектуальной жизнью Афин. Закрыта в 529 г. н. э. христианским императором Юстинианом за языческие идеи. Не будучи математиком, Платон уделял математике важное место в своей *воспитательной* системе. Он ставил вопрос о природе и структуре математики. Его ученики первыми осознали абстрактный характер математических объектов.

Правильные многогранники, или платоновы тела, или космические фигуры



Тетраэдр Октаэдр Куб (гексаэдр) Икосаэдр Додекаэдр

12. Аристотель. Аристотель (384—322 гг. до н. э.), самый известный ученик Платона, воспитатель Александра Македонского. В 344 г. до н. э. Аристотель вернулся в Афины и создал там школу, разместившуюся в гимнасии, примыкающем к ***Лицею*** — храму Аполлона Ликейского.

«Знать — это установить при помощи доказательства»,— писал Аристотель. Обладать знанием — означает не созерцать, как у Платона, а провести рассуждение, подчиняющееся некоторым правилам. Аристотель стал основоположником логики. Классифицировав знания, Аристотель заложил разделение науки на отдельные дисциплины.

13. Евклид. Александр Македонский создал огромную империю. Ее столица Александрия стала культурным центром народов от Египта до Индии. В 3 в. до н. э. появились профессиональные ученые. В Александрии непосредственный преемник Александра — Птолемей Сотер — построил большой научный центр ***Музей*** со знаменитой библиотекой, насчитывающей 700 000 томов.

Евклид, влиятельнейший математик всех времен, преподавал там геометрию. На просьбу Птолемея быстро обучить его математике он заявил, что к геометрии «нет царского пути».

Его наиболее знаменитое произведение — 13 книг ***«Начал»***. В истории Запада «Начала», после Библии, наибольшее число раз изданная и более всего изучаемая книга. Большая часть школьной геометрии заимствована буквально из первых 6 книг. Изложение Евклида построено в виде строго логических выводов теорем из системы определений, аксиом и постулатов.

Приведем все пять постулатов (Евклид, с. 14—15).

I. От всякой точки до всякой точки можно провести прямую линию.

II. Ограниченную прямую можно непрерывно продолжать по прямой.

III. Из всякого центра и всяким раствором может быть описан круг.

IV. Все прямые углы равны между собой.

V. Прямая, падающая на две прямые, образует внутренние углы, меньшие в сумме двух прямых, то продолженные неограниченно эти прямые встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых.

Попытки в течение ряда веков доказать этот странный длинно сформулированный ***пятый постулат, или постулат о параллельных*** привели к открытию неевклидовых геометрий, а V постулат был признан аксиомой.

В книге XIII исследованы все пять правильных многогранников и доказано, что их существует только пять.

14. Архимед. Величайшим математиком эпохи эллинизма и всего древнего мира был Архимед (287—212), живший в Сиракузах, где он был советником царя Гиерона. Имя Архимеда связано с его теоремой о потере веса телами, погруженными в жидкость. Но наиболее важный вклад в математику он внес теоремами о площадях плоских фигур и об объемах тел.

Обилие вычислений у Архимеда отличает его от большинства творческих математиков Греции. Это придает его трудам, при всех их типично греческих особенностях, восточный оттенок.

Конец Александрийской школы и эллинистической культуры символизирует смерть Гипатии (Ипатии), убитой в 415 г. приверженцами св. Кирилла. Гипатия писала комментарии к классикам математики, участвовала в переиздании «Начал» Евклида. Ее судьба сделала ее героиней романа Чарльза Кингсли.

Римляне не поддерживали научной деятельности, большинство христианских церквей ее осуждали, жгли языческие трактаты.

15. Арабская цивилизация. Необъясним феномен внезапного возникновения ислама. Меньше чем через сто лет после смерти Магомета (632) объединенные им древние кочевые племена Аравии под началом его последователей — халифов — завоевали обширные территории от Испании до Индии, где с VII по XIII вв. развивалась арабская цивилизация. Любой труд, чтобы получить вес в науке, должен был быть написан на арабском языке. Все завоеванные народы — греческие эрудиты, эмигрировавшие от преследований христиан, андалузцы, берберы, сирийцы, евреи, сабеи, турки и т. д. — были вовлечены в единый поток исследований. Прежние местные культуры имели больше возможностей, чем при греческом господстве.

Арабский язык очень богат: для каждого понятия имеется большое разнообразие синонимов. Поэтому при переводе предшествующих трудов возникли проблемы идентификации понятий, способствующие концептуальному углублению знаний. В решении этих проблем приняли участие филологи и лингвисты. В течение восьми веков арабы играли роль хранителей мудрости и просветителей. Для арабского ученого характерны разносторонние интересы и выдающиеся способности во всех областях: от математики и врачевания до географии и поэзии.

Арабская математика достигла своего апогея в работах Самаркандской школы. Но после смерти Улугбека в 1449 г. школа распалась.

В недрах арабской цивилизации зародилась по-настоящему оперативная наука. Средневековому христианскому Западу понадобились века, чтобы усвоить это наследие и достичь подобного уровня.

Наряду с алфавитным порядком в арабском языке существует абджадный, числовой порядок. В старину арабы пользовались абджадными буквами для обозначения дат, чисел в арифметике и т. д.

Ниже приведена ***система Абджад***, представляющая собой кодирование арабских букв числами и наоборот, широко использующаяся и в настоящее время для передачи тайных посланий в литературных и поэтических произведениях, а также для обозначения разделов в книгах и при перечислениях.

Система Абджад и арабский алфавит

№ в алфавите	Буква алфавита	Русское название	Обознач. число	№ в алфавите	Буква алфавита	Русское название	Обознач. число	№ в алфавите	Буква алфавита	Русское название	Обознач. число
1	ا	алиф	1	28	ي	йа	10	21	ق	каф	100
2	ب	ба	2	22	ك	каф	20	10	ر	ра	200
5	ج	джим	3	23	ل	лам	30	13	ش	шин	300
8	د	даль	4	24	م	мим	40	3	ت	та	400
26	ه	ха	5	25	ن	нун	50	4	ث	са	500
27	و	вау	6	12	س	син	60	7	خ	ха	600
11	ز	зайн	7	18	ع	айн	70	9	ذ	заль	700
6	ح	ха	8	20	ف	фа	80	15	ض	дад	800
16	ط	та	9	14	ص	сад	90	17	ظ	за	900
								19	غ	гайн	1000

16. Ал-Хорезми. Багдад — первый крупный научный центр при правлении ал-Мансура (754—775) и Гарун ал-Рашида (786—809). Там к 9 в. сформировалась собственная арабская математическая культура. При арабском завоевании многое в Багдаде осталось нетронутым. Даже ислам был воспринят в видоизмененной форме (шиизм); христиане, евреи, огнепоклонники, как и прежде, вносили свой вклад в культурную жизнь багдадского халифата.

Первым знаменитым ученым багдадской школы был уроженец Хивы Мухаммед ибн Муса ал-Хорезми. В латинских переводах этот автор именовался как Algorizmi, Algorismus и Algorithmus, откуда в современном математическом языке появился термин «алгоритм».

Алгебра ал-Хорезми, арабский текст которой сохранился, была озаглавлена «Хисаб ал-джабр ва-л-мукабала». От латинского перевода слова «ал-джабр» — «алгебра» и произошел современный термин.

17. Омар Хайям (Ал-Хайями, 1048—1131), астроном и философ, родился в Нишапуре (Иран); восемнадцать лет прожил в Исфахане, где руководил обсерваторией под покровительством султана Малик-шаха. Хайям известен на Западе и Востоке как автор «Рубайят». Ему приписывают около тысячи рубаи:

(LIX)

Я рассчитал — твердит людей молва —
Весь ход времен. Но дней ведь только два
Изъял навек я из календаря:
Тот, что не знаем — завтра, не вернем — вчера.

Омар осуществил реформу персидского календаря в 1079 г., но позже его календарь был заменен мусульманским лунным календарем. В книге «Комментарии к трудностям во введениях книги Евклида» он пытался доказать пятый постулат Евклида от противного, рассматривая обе гипотезы, входящие в отрицание постулата: 1) в четырехугольнике с двумя прямыми углами при основании и равными боковыми сторонами («равнобедренном двупрямоугольнике») верхние углы острые; 2) верхние углы тупые,— являющиеся теоремами неевклидовой геометрии.

18. Десятичная система. Наиболее известным достижением индийской математики является современная десятичная позиционная система счисления, а также изобретение нуля как знака. Сочетание позиционной и десятичной системы произошло в Индии, при этом была вытеснена более древняя непозиционная система. Первое известное применение десятичной позиционной системы относится к 595 г.

Научный мир ислама смог познакомиться с так называемой индийской системой после перевода на арабский язык «Сиддханты» (ок. 773). Знаки, применявшиеся в Индии для записи цифр позиционной системы, были разнообразны, но сохранились только 2 главных типа: 1) обозначения, применявшиеся восточными арабами; 2) цифры «гобар», применявшиеся западными арабами в Испании. Знаки 1-го типа сейчас применяются только в арабском мире. Наши цифры, традиционно называемые арабскими, произошли из системы «гобар»: Папа Сильвестр II в 991 г. познакомил с ними Северную Европу, где они постепенно получили современное начертание.

В таблице ниже приведены современные цифры, использующиеся в большинстве стран, и цифры, применяемые в арабских странах.

Индийские цифры (в большинстве стран)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Арабские цифры (в арабских странах)	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	٠

19. Век великих переводов. С XII в. европейцам, чтобы получить доступ к арабской науке, пришлось преодолевать языковый барьер, подобно тому как за несколько веков до этого арабы были вынуждены овладеть греческим языком. Век XII — век великих переводов.

Самый плодовитый переводчик Герардо Кремонский (1114—1187) перевел с «компаньонами» в Толедо более 80 работ: вариант «Начал» Евклида, труды Архимеда, Аристотеля, ал-Хорезми, «Канон» Авиценны и др.

20. Фибоначчи. Крупнейший математик христианского средневековья Леонардо Пизанский (ок. 1170 — после 1250), которого прозвали Фибоначчи («сын Боначчо»). После путешествия по Востоку в качестве купца написал математическую «Книгу абака» (Liber abaci, 1202), возникшую под влиянием «Начал» Евклида, трудов ал-Хорезми и др.

Этот математик открыл ***ряд Фибоначчи*** 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21…, получающийся очень просто: каждый член ряда (кроме первых двух) есть сумма двух предыдущих. Ряд Фибоначчи естественным образом получается при решении следующей задачи: сколько пар кроликов происходит от одной пары, если: 1) кролики не дохнут; 2) каждая пара каждый месяц порождает новую пару; 3) новая пара становится производителем не сразу, а только со второго месяца?

§3. Период математики переменных величин

1. Ферма. После арабов арифметику возродил Пьер де Ферма (1601—1665), юрист из Тулузы (Франция). Математикой он занимался в свободное время и не оставил ни одной законченной работы, однако это хобби сделало Ферма основоположником аналитической геометрии, исчисления бесконечно малых, теории вероятностей. Особенно знамениты его заметки на полях «Арифметики» Диофанта, переведенной с греческого на латынь.

Среди этих заметок на полях Диофанта находится знаменитая «великая теорема Ферма»: для целых $n > 2$ равенство $x^n + y^n = z^n$ невозможно, если x, y, z — целые $\mathbb{Z}$ или рациональные $\mathbb{Q}$ числа. При $n = 2$ получаем семейство прямоугольных треугольников, известных еще с древности (например, $3^2 + 4^2 = 5^2$). Эту теорему доказывали более 300 лет и достигли больших успехи как в ее решении для различных n, так и в развитии арифметики. Доказательство получено лишь недавно, причем оно излишне сложно.

Интерес к вероятностям возбуждало прежде всего страховое дело, но исторически источником теории вероятностей были задачи из области азартных игр в кости и карты, до сих пор являющихся удобной моделью этой теории. Ферма вдвоем с Блезом Паскалем в 1654 г. установил некоторые из основных положений теории вероятностей.

2. Паскаль. Блез Паскаль (1623—1662) был сыном Этьена Паскаля (в честь которого названа кривая «улитка Паскаля»). Первым изобрел в 1641 или 1642 году счетную суммирующую машину, поэтому в его честь назвали распространенный язык программирования Паскаль.

Треугольник Паскаля — это таблица чисел — биноминальных коэффициентов, в которой по боковым сторонам равностороннего треугольника стоят единицы, а каждое из остальных чисел равно сумме двух чисел, стоящих над ним слева и справа. Получаем, что строка с номером $n + 1$ — это коэффициенты разложения ***бинома*** $(a + b)^n$.

```
        1
       1 1
      1 2 1
     1 3 3 1
    1 4 6 4 1
  1 5 10 10 5 1
.....................
```

Первый отрезок, параллельный стороне треугольника Паскаля, составляют натуральные числа, второй — треугольные числа (см. выше).

Суммы чисел слегка наклонных строк дают числа Фибоначчи (см. выше): $1, 1, 1 + 1 = 2, 1 + 2 = 3, 1 + 3 + 1 = 5, 1 + 4 + 3 = 8, \ldots$.

Паскаль известен не только как великий математик. Стендаль, Л. Н. Толстой, И. С. Тургенев характеризовали Паскаля как величайшего писателя XVII века.

3. Декарт. Рене Декарт (1596—1650) был родом из Турени (Франция), служил в армии, умер в Стокгольме, куда был приглашен шведской королевой. Вместе с многими другими великими мыслителями XVII века Декарт искал общий метод мышления, который бы позволял быстро делать изобретения и выявлять истину в науке. Декарт опубликовал свою «Геометрию» в качестве применения своего общего метода объединения алгебры и геометрии. Декарт первым применил развитую алгебру арабов к геометрии древних, и под влиянием этой книги развилась ***аналитическая геометрия***, широко использующая методы алгебры в геометрии. В его честь названа прямоугольная равномерная система координат.

4. Математический анализ. Общий метод дифференцирования и интегрирования, построенный с полным понимаем того, что один процесс является обратным по отношению к другому, мог быть открыт только людьми, овладевшими как геометрическим методом греков, так и алгебраическим методом Декарта,— Ньютоном и Лейбницем.

Исаак ***Ньютон*** (1643—1727) был сыном землевладельца в Линкольншире, учился в Кембридже. Ньютон был профессором Кембриджа, а в конце жизни — начальником монетного двора. Его исключительный авторитет в первую очередь основан на его «Математических принципах натуральной философии» (1687), огромном томе, содержащем аксиоматическое построение механики и закон тяготения. Ньютон строго математически вывел эмпирически установленные законы Кеплера движения планет и дал динамическое объяснение приливов и многих явлений при движении небесных тел. Его аксиоматическая трактовка требовала абсолютности пространства и абсолютности времени. Ньютон открыл свою «теорию флюксий», как он называл анализ, в течение 1665—1666 гг., спасаясь от чумы в Кембридже у себя в родной деревне.

Готфрид Вильгельм ***Лейбниц*** (1646—1716) родился в Лейпциге, а почти всю жизнь провел при ганноверском дворе на службе у герцогов. Он одним из первых после Паскаля изобрел счетную машину. Основной движущей пружиной его жизни были поиски всеобщего метода для овладения наукой. Лейбниц — один из самых плодовитых изобретателей математических символов. Изобретение анализа — результат его поисков универсального языка, в частности, языка, выражающего изменение и движение.

5. Эйлер. Из Базеля (Швейцария) вышел самый плодовитый математик XVIII столетия, если только не всех времен,— Леонард Эйлер (1707—1783). Молодой Эйлер работал в Петербургской академии сначала с 1725 до 1741гг., а затем с 1766 до 1783гг. уже при Екатерине. Он был дважды женат и имел 13 детей. Хотя он потерял в 1735г. один глаз, а в 1766г.— второй, ничто не могло ослабить его огромную продуктивность. Слепой Эйлер, пользуясь своей феноменальной памятью, продолжал диктовать свои открытия. В течение его жизни увидели свет 530 его книг и статей; умирая, он оставил много рукописей, которые Петербургская академия публиковала в течение последующих 47 лет.

Эйлеру принадлежат заметные результаты во всех областях математики, существовавших в его время. Он публиковал свои открытия не только в статьях различного объема, но и в многих обширных руководствах, где упорядочен и кодифицирован материал, который собирали поколения. В некоторых областях изложение Эйлера было почти что окончательным. Колоссальный авторитет его руководств привел к упрочению ряда его обозначений в алгебре и в анализе.

§4. Период современной математики

1. Неевклидова геометрия. Неевклидова геометрия в XVIII в. называлась также ***астральной геометрией***: только за евклидовой геометрией признавали возможность описывать физическое пространство. Догма евклидовой структуры пространства подкреплялась положениями немецкого философа Иммануила ***Канта*** (1724—1804), считавшего, что евклидово пространство априорно предшествует всякому опыту.

Карл Фридрих ***Гаусс*** (1777—1855), «король математиков», первый признал за неевклидовой геометрией право представлять физическое пространство. Уже в 1813 г. Гаусс разработал эту «странную геометрию», но так ничего и не опубликовал.

Творцами неевклидовой геометрии признаны также Николай Иванович ***Лобачевский*** (1792—1856), профессор Казанского университета, и Янош ***Бойяи*** (1802—1860), венгерский офицер. Независимо друг от друга каждый из них около 1825 г. не только разработал теорию, аналогичную теории Гаусса, но также способствовал ее распространению.

Первая приоритетная публикация Лобачевского, книга «О началах геометрии», вышла из печати в 1829 г., тогда как Бойяи опубликовал свои результаты только в 1832 г. Более того, в 1926 г. Лобачевский выступил с докладом о своем открытии в Казанском университете, через несколько дней после отставки попечителя университета, который с 1819 по 1826 год преследовал там всякую свободную мысль.

Но идеи Лобачевского не были поняты ни в университете, ни в других ученых кругах, он отстаивал свою геометрию все оставшуюся жизнь. Однако бесплодность всех попыток добиться понимания и признания своих научных идей преждевременно состарили гениального человека. Ослепший, он за год до смерти продиктовал последнюю книгу «Пангеометрия».

Эти идеи обобщил профессор Гёттингенского университета Бернгард ***Риман*** (1826—1866) в 1867 г., охватив единой теорией геометрии Евклида, Лобачевского и Римана. При этом для перехода от геометрии Евклида к геометрии Лобачевского требуется замена только одной аксиомы — пятого постулата Евклида, но для перехода к геометрии Римана — вместе с пятым постулатом необходимо заменить еще некоторые аксиомы.

Евклидова и неевклидовы геометрии

Геометрия	Число параллельных к прямой, проходящих через точку вне прямой	Сумма α углов треугольника	Знак кривизны R пространства	Зависимость площади треугольника S от R и α
Евклида	1	π	$R = 0$	Нет
Лобачевского	Бесконечное множество	Меньше π	$R < 0$	$S = R^2(\pi - \alpha)$
Римана	0	Больше π	$R > 0$	$S = R^2(\alpha - \pi)$

2. Гаусс. Карл Фридрих Гаусс (1777—1855) родился в семье поденщика. Брауншвейгский герцог соизволил обратить внимание на молодого Гаусса — вундеркинда и позаботился о его обучении. В 1795—1798 гг. юный гений учился в Гёттингене. С 1807 г. до самой смерти он без тревог и забот спокойно работал директором обсерватории и профессором его родного университета. Как и его современники Кант, Гёте, Бетховен и Гегель, он стоял в стороне от больших политических битв, разыгрывавшихся в других странах, но в своей области он энергично выразил новые идеи своего века.

Еще в школе маленький Гаусс поражал своими способностями. Например, когда все ученики класса весь урок вычисляли на своих маленьких грифельных досках сумму натуральных чисел от 1 до 100, Гаусс решил сразу эту задачу устно (правильно сгруппировав числа) и просидел весь урок, глядя на учителя (ответы показывались только в конце урока).

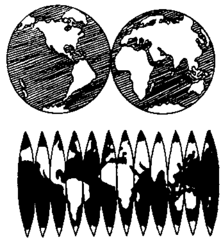
Теперь мы уже знаем, что Гаусс уже в 1800 г. открыл эллиптические функции и около 1816 г. овладел неевклидовой геометрией. Но по этим вопросам он никогда ничего не публиковал, не желая публично затрагивать какие-либо спорные вопросы и вносить беспокойство в свою жизнь.

3. Галуа. Эварист Галуа (1811—1832), сын мэра маленького городка вблизи Парижа, дважды не был принят в Политехническую школу и лишь затем поступил в Нормальную школу, но был оттуда уволен. Он старался просуществовать, обучая математике, как республиканец участвовал в революции 1830 г., несколько месяцев провел в тюрьме и был убит на дуэли из-за женщины в 21 год. Накануне дуэли он написал одному из своих друзей резюме своих открытий в теории уравнений.

Это письмо содержало ***теорию групп***, ключ к современным алгебре и геометрии. В теории Галуа нашли свое естественное место старые проблемы, такие, как трисекция угла, удвоение куба, решение алгебраических уравнений любой степени. Математическая общественность не знала об этом письме до того, как Лиувилль напечатал большую часть работ Галуа в своем журнале в 1846 г., когда Коши уже начал печатать свои работы по теории групп. Объединяющий подход Галуа признан одним из самых выдающихся достижений математики XIX столетия. Возможно, проживи Галуа дольше, современная математика вдохновлялась бы больше всего Парижем и школой Лагранжа, а не Гёттингеном и школой Гаусса.

4. Многообразие. Есть разные способы построения карты поверхности земного шара. Все они сводятся к проекции выпуклой сферической поверхности глобуса на плоскость. Однако доказано, что построить взаимно-однозначное непрерывное проектирование всей сферы на плоскость невозможно.

Только после открытия шарообразности Земли, путешествий Христофора Колумба, Васко да Гама, Магеллана была осознана необходимость карт, учитывающих сферичность поверхности земного шара. Разработке теории проектирования и ее приложениям (к картографированию и к живописи, графике) большое внимание уделял, в частности, А. Дюрер.



Сегодня при изготовлении глобусов на сферу наклеиваются вплотную друг к другу по долготе узкие диски с изображением земной поверхности (см. рис.). Эта идея конструирования сложного объекта из нескольких более простых объектов путем их склейки и лежит в основе построения одного класса геометрических объектов — ***многообразий***.

В наиболее четком виде понятие многообразия оформилось в работах Гаусса во время его исследований в области геодезии и картографирования земной поверхности. Сам термин «многообразие» был введен в математику Риманом в лекции «О гипотезах, лежащих в основании геометрии».

Глава 2. Высшая математика

§ 1. Число

За основу берем цифру, равную 3
(С 3 удобней всего начинать),
Приплюсуем сперва 842
И умножим на 75.

Разделив результат на 650
(Ничего в этом трудного нет),
Вычтем 100 без 5 и получим почти
Безошибочно точный ответ.

Льюис Кэрролл. Охота на Снарка.

Введение

Что делает человека человеком? «Глубокое внутреннее переживание, настоящее *пробуждение собственного* я, делающее ребенка высшим человеком, членом той культуры, к которой он принадлежит, отмечает начало числового и словесного понимания.» (Освальд Шпенглер. Закат Европы.) Впрочем, еще Платон писал, что «Мы… никогда не стали бы разумными, если бы исключили число из человеческой природы».

п. 1. Натуральное число

1. Цифра. ***Число*** — основное понятие математики. Числа записываются при помощи ***цифр***. Слово «цифра» происходит от арабского «цифр» — пустое место. Вплоть до XVIII века наш нуль назывался «цифрой», а в английском языке до сих пор одно из значений слова «цифра» (cipher) — нуль. Обычно используют 10 арабских цифр 1—9, 0.

Века, года н. э., месяцы при указании дат и порядковые числительные могут записываться римскими цифрами. ***Римские цифры*** — особые знаки для десятичных разрядов I = 1, X = 10, C = 100, M = 1000 и их половин V = 5, L = 50, D = 500. Числа записывают при помощи повторения римских цифр, используя два правила: 1) если большая цифра стоит перед меньшей, то они складываются (принцип сложения). Например, II = 2, III = 3, VI = 6; 2) если же меньшая — перед большей, то меньшая вычитается из большей (принцип вычитания). Но последнее правило применяется только во избежание четырехкратного повторения одной и той же цифры. Например, IV = 4, IX = 9, XL = 40.

Упр. 1. Запишите римскими цифрами все числа от 1 до 100.

2. Натуральное число. Леопольд Кронекер когда-то произнес: «Натуральное число создал господь бог, все прочее — дело рук человеческих». ***Натуральные числа, или натуральный ряд*** — это числа 1, 2, 3 и т. д. до бесконечности. Обозначение натурального ряда: $\mathbb{N}$.

Натуральные числа обладают следующими важными свойствами: 1) следующее натуральное число получается из предыдущего прибавлением 1; 2) натуральных чисел бесконечно много; 3) не существует самого большого натурального числа.

Упр. 2. Нарисуйте магический квадрат 3-го порядка, т. е. таблицу 3 × 3 с цифрами от 1 до 9, причем сумма трех цифр на любой прямой (3 горизонтали, 3 вертикали и 2 диагонали) должна быть одной и той же.

п. 2. Действительное число

Целые числа — это числа вида n, $-n$ и 0, где n — натуральное число. Обозначение: $\mathbb{Z}$. Все целые числа можно записать так: …, –2, –1, 0, 1, 2, … Отсюда следует, что любое натуральное число является также и целым.

Рациональные числа — это числа вида p/q, где p и q — целые числа, причем $q \neq 0$. Обозначение: $\mathbb{Q}$. Примеры: –1, –2/3, –1/2, –1/4, 0, 1/2, 2/3, 1/4, 1. Очевидно, что любое целое число является рациональным.

Действительные, или вещественные, числа, или континуум, получают из рациональных чисел с помощью некоего предельного процесса. Это — наши обычные числа. Обозначение: $\mathbb{R}$. Рациональное число — всегда действительное.

Действительные, но не рациональные числа называются ***иррациональными числами***. Обозначение: $\mathbb{I}$. Примеры: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{2}$, π, e, ln 10, sin 1.

Алгебраические числа $\mathbb{A}$ — корни многочленов с целыми коэффициентами. Корень квадратного двучлена $x^2 - 2$ — число $\sqrt{2}$. Рациональное число — частный случай алгебраического. Примеры: –1, –1/2, 0, 1/2, 1, $\sqrt{2}, \sqrt{3}$.

Действительные числа, не являющиеся алгебраическими, называются ***трансцендентными числами***. Обозначение: $\mathbb{T}$. Например: π, e, ln 10, sin 1.

Упр. 3. Нарисуйте схему соотношения чисел $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{A}$, $\mathbb{R}$.

п. 3. Системы счисления

1. Десятичная система счисления. Система приемов представления натуральных чисел называется ***счислением, или нумерацией***.

Римское счисление — ***непозиционное***, т. к. в записи числа каждая цифра имеет одно и то же значение: цифра I всегда означает 1, цифра X — 10 и т. д.

Если же значение цифры зависит от ее расположения в записи числа, то система счисления — ***позиционная***. Количество цифр позиционной системы счисления называется ее ***основанием***. по которому и именуют систему.

Обычная система счисления — позиционная и ***десятичная***, т. е. состоит из 10 разных цифр. Значение цифры зависит от ее положения в записи числа. Например, если цифра 1 стоит в числе справа, то она значит 1, если на 2-м месте справа, то 10, а на 3-м месте — 100.

2. Недесятичные системы счисления. Компьютеры в своей работе пользуются ***двоичной системой счисления***, т. е. позиционной системой счисления, состоящей из двух цифр 0 и 1. Арифметические операции в этой системе выполняются особенно просто, т. к. таблица умножения имеет вид $1_2 \times 1_2 = 1_2$, а таблица сложения — $1_2 + 1_2 = 10_2$.

Упр. 4. Запишите в двоичной системе счисления числа от 1 до 32.

Программисты используют также позиционную ***шестнадцатеричную систему счисления***, имеющей цифры 0, 1, …, 9, A, B, C, D, E, F.

Упр. 5. Запишите в шестнадцатеричной системе числа от 1 до 32.

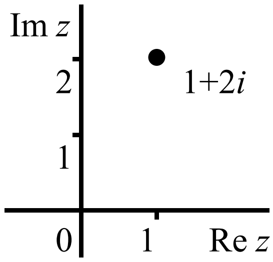
п. 4. Комплексное число

Не каждый многочлен с целыми коэффициентами имеет корни. Например, квадратный двучлен x^2+1 корней не имеет,— среди действительных чисел нет числа, квадрат которого равен –1. А теперь добавим к действительным числам некое число i, квадрат которого равен –1: $i^2=-1$. Это число называется ***мнимой единицей***. Обозначение: $i\equiv\sqrt{-1}$.

Полученный таким образом набор чисел вместе с результатами арифметических операций над ними называют ***комплексными числами*** $\mathbb{C}$. Комплексные числа z записывают в виде $z=x+iy$, где x и y — вещественные числа, i — мнимая единица. $x=\operatorname{Re} z$ называется ***вещественной частью*** комплексного числа z, $y=\operatorname{Im} z$ — ***мнимой частью***.

Действительные числа — частный случай комплексных при $y=0$. Не действительные числа, т. е. комплексные при $y\neq 0$, называютя ***мнимыми***. Любой многочлен с коэффициентами из $\mathbb{C}$ имеет корень в $\mathbb{C}$!

Комплексные числа наглядно изображают на координатной плоскости: на горизонтальной оси лежат вещественные числа $\operatorname{Re} z$, а на вертикальной — мнимые числа $\operatorname{Im} z$. На рисунке показано число $z = 1 + 2i$.



Упр. 6. Изобразите числа $z = 1–2i$, $z = –1+2i$, $z = –1–2i$.

п. 5. Теория групп

1. Слово. Не только числа можно складывать, умножать и т. д.

Алфавит А — любая совокупность символов. Пусть это все русские буквы: а, б, …, я. ***Слово*** над алфавитом A — любая конечная последовательность символов из A. Примеры слов: <а>,<аа>,<мама>,<абырвалг>,< >.

Слово может быть и пустым, т. е. вовсе не содержать символов — последнее слово в примерах. Пустое слово обозначают буквой $\lambda\equiv< >$. Другие, не пустые слова будем обозначать малыми латинскими буквами.

Произведением, или композицией, слов a и b называется слово $c = a\otimes b$, полученное приписыванием к слову a справа от него слова b.

Пример композиции: a = <ли>, b = <па>, $c = a\otimes b$ = <липа>.

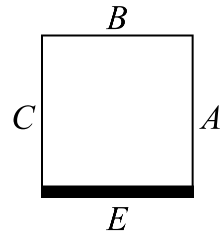
Пустое слово λ не содержит символов, поэтому для любого слова a имеем: $a\otimes\lambda=\lambda\otimes a=a$. Таким образом, пустое слово λ при перемножении слов ведет себя как единица при перемножении чисел.

Двойные умножения записываются без скобок: $a\otimes b\otimes c$, т. к. умножение слов ***ассоциативно, или сочетательно***: $(a\otimes b)\otimes c=a\otimes(b\otimes c)$.

Упр. 7. Проверьте на 2 примерах, что композиция слов ассоциативна.

2. Самосовмещение. Равенство, или конгруэнтность, фигур в геометрии устанавливается перемещением: если существует перемещение, при котором одна фигура отображается на другую, то эти фигуры равны. Перемещение, при котором некоторая фигура отображается на себя, назовем ***самосовмещением***.

Рассмотрим повороты ***квадрата*** вокруг его центра. Тогда ***самосовмещение квадрата*** определяется тем, на какую сторону ляжет выделенная сторона E. Получаем всего 4 различных самосовмещения: e — тождественное (поворот на 0°), a — поворот на 90° (сторона E попадает на A), b — поворот на 180° и c — поворот на 270°.



Произведение $x \cdot y$ любых двух ***самосовмещений*** определяется как композиция поворотов: сначала выполняется поворот x, а затем — поворот y. Имеет место ***ассоциативность*** $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ для любых 3 самосовмещений.

Упр. 8. Приведите 2 примера ассоциативности произведения самосовмещений.

Для любого самосовмещения x поворот e выполняет роль единицы, поскольку $x \cdot e = e \cdot x = x$. Имеем 1-ю строку и 1-й столбец таблицы умножения поворотов квадрата. Например, прозведение $a \cdot a = b$, т. к. поворот на 90°+90° дает 180°.

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b		
b	b			
c	c			

Упр. 9. Заполните до конца эту таблицу умножения.

Всякому повороту x соответствует единственный обратный поворот x^{-1} такой, что $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$. Например, поскольку $a \cdot c = e$, то $a^{-1} = c$.

Упр. 10. Чеиу равно b^{-1}, c^{-1}, e^{-1}?

3. Группа. Обобщим два предыдущих пункта. ***Группой*** называется совокупность объектов G, для любых двух элементов которой a и b определена операция $(a, b) \to a * b$ (обычно «умножение» иди «сложение»). Причем эта операция должна удовлетворять следующим трем ***аксиомам группы***.

I. **Ассоциативность**. Для любых трех элементов a, b и c из группы G имеет место тождество $(a * b) * c \equiv a * (b * c)$.

II. **Существование единицы группы**. Существует такой элемент e группы G, что для любого другого элемента a имеем: $e * a = a * e = e$.

III. **Существование обратного элемента**. Для любого элемента a из группы G найдется такой ***обратный элемент*** b, что $a * b = b * a = e$.

Если выполняется только аксиома I, то имеем ***полугруппу***.

Группа (полугруппа) называется ***коммутативной, или абелевой***, если операция группы (полугруппы) коммутативна. Это означает, что для любых a и b произведение $a * b$ перестановочно: $a * b = b * a$.

Примеры.

1. Совокупность слов (п. 1) — полугруппа с единицей неабелева, т. к. если a = <ли>, b = <па>, то $a \otimes b$ = <липа>, но $b \otimes a$ = <пали>, т. е. $a \otimes b \neq b \otimes a$.

2. Повороты квадрата образуют абелеву группу.

3. Натуральные числа $\mathbb{N}$ с операцией сложения образуют абелеву полугруппу без единицы, а с операцией умножения — абелеву полугруппу с единицей.

4. Целые числа $\mathbb{Z}$ с операцией сложения образуют абелеву группу.

5. Действительные числа $\mathbb{R}$ с операцией сложения образуют одну абелеву группу, а без нуля с операцией умножения — другую абелеву группу.

§ 2. Теория множеств

Кто-то выдвинул робко отчаянный план:
Рассадить их по двум кораблям.
Но решительно не пожелал капитан
Экипаж свой делить пополам.

Льюис Кэрролл. Охота на Снарка.

п. 1. Множество

1. Задание. Множество — одно из самых часто употребляемых понятий в повседневной жизни, имеет множество синонимов (класс, косяк, набор, обойма, стадо, стая…), иногда со специальными оттенками.

Множество — любое собрание, коллекция любых объектов. Обозначение: прописные латинские буквы A, B, C… ***Элемент множества*** — любой объект множества: $a \in A$. Обозначение не принадлежности: $i \notin A$.

Слово «любые» заменяется символом $\forall$ — ***квантором всеобщности***, а слово «существует» — символом $\exists$ — ***квантором существования***.

Примеры множеств.

1. Арабские цифры: $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 0\}$.
2. Римские цифры: $R = \{$I, X, C, M, V, L, D$\}$.
3. Слова русского языка: $S = \{\forall s$: s — слово русского языка$\}$.
4. Тексты на русском языке: $T = \{\forall t$: t — тексты на русском языке$\}$.

Множество ***конечно***, если оно содержит натуральное или нулевое число элементов, и ***бесконечно***, если оно не является конечным. Обозначение числа элементов множества A: $|A|$. В примерах все множества конечны, причем $|A| = 10$, $|R| = 7$.

Упр. 1. Выписать множества всех русских, латинских и греческих букв с их названиями по образцу: $R = \{$А, а, «А», Б, б, «Бэ», В, в, «Вэ», …$\}$.

2. Подмножество. Множество A называется ***подмножеством*** множества B, или множество A ***принадлежит*** множеству B, если $\forall$ элемент A принадлежит также и B. Обозначение: $A \subset B$. Множество A ***не принадлежит*** множеству B, если $\exists\ x$: $x \in A$ и $x \notin B$. Обозначение: $A \not\subset B$.

Пустым множеством, или нуль-множеством, называется множество $\varnothing = \{\forall x$: $x \notin \varnothing\}$. Считается, что $\forall A\ \varnothing \subset A$. Существует только одно пустое множество. Заметим, что $\varnothing \neq \{\varnothing\}$.

Подмножество $A \subset B$ называется ***собственным***, если $A \neq B$ и $A \neq \varnothing$. Подмножества A и $\varnothing$ множества A называются ***тривиальными***.

Булеаном множества A называется множество всех подмножеств множества A. Обозначается готической буквой $\mathfrak{M}(A)$.

Примеры.

1. Пусть $A = \{1, 2\}$, $B = \{1\}$, $C = \{3\}$. Тогда $B \subset A$, $C \not\subset A$, $C \not\subset B$, $B \not\subset C$, $A \not\subset B$, $A \not\subset C$. Из них B — собственное подмножество A.

2) $\varnothing = \{\forall x$: x — цифра русского алфавита$\}$.

3) $\mathfrak{M}(\{1, 2\}) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$,— в множестве 4 элемента.

Упр. 2. Выписать множество $\mathfrak{M}(\{1, 2, 3\})$. Чему равно $|\mathfrak{M}(\{1, 2, 3\})|$?

п. 2. Отношение эквивалентности

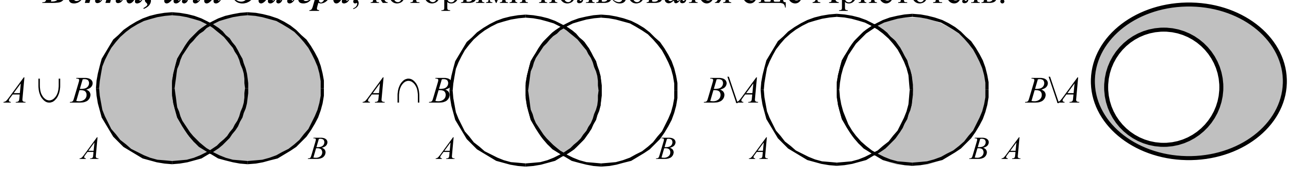
1. Операции на множествах. ***Объединение, или сумма, множеств*** A и B называется множество $A \cup B = A + B = \{\forall x: x \in A \text{ или } x \in B\}$.

Пересечением, или произведением, множеств A и B называется множество $A \cap B = A \cdot B = AB = \{\forall x: x \in A \text{ и } x \in B\}$.

Имеют место ***законы идемпотентности***: $A \cup A = A$, $A \cap A = A$.

Разностью множеств B и A называется множество $B \backslash A = B - A = \{\forall x: x \in B \text{ и } x \notin A\}$. Если $A \subset B$, то разность множеств $B \backslash A$ называется ***дополнением множества*** A до множества B

Для изображения операций на множествах используют ***диаграммы Венна, или Эйлера***, которыми пользовался еще Аристотель.



Упр. 3. Нарисуйте на диаграммах Венна: 1) ***симметрическую разность*** $A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$; 2) множество $(A \cup B) \backslash (B \cap A)$.

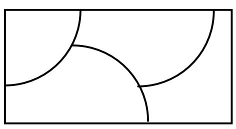
2. Отношение эквивалентности. Любое множество φ пар элементов множества A: $\varphi = \{(a, b): a \in A, b \in A\}$,— называется ***бинарным отношением*** на множестве A. Элементы a и b ***находятся в отношении*** φ, если $(a, b) \in \varphi$.

Если из того, что $(a, b) \in \varphi$, следует, что также и $(b, a) \in \varphi$, то отношение φ ***симметрично, или взаимно***.

Если из того, что $(a, b) \in \varphi$ и $(b, c) \in \varphi$, следует, что $(a, c) \in \varphi$, то отношение φ ***транзитивно, или переходно***.

Если $\forall a \in A$ $(a, a) \in \varphi$, то отношение φ ***рефлексивно***.

Отношение эквивалентности — бинарное отношение, одновременно симметричное, транзитивное и рефлексивное. Обозначение: $\sim$, $a \sim b$.



2. Классификация. ***Разбиение множества A на классы, или классификация*** — разбиение A на попарно непересекающиеся подмножества, ***классы***, дающие в сумме все A.

Теорема. Если на множестве определено отношение эквивалентности, то тем самым множество разбито на классы эквивалентных элементов. И наоборот, если множество классифицировано, то на нем задано отношение эквивалентности: входящие в один класс элементы эквивалентны.

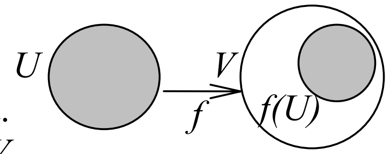
Примеры.

1. «Быть одного рода» — отношение эквивалентности на множестве существительных русского языка. Докажем это. Симметричность: если слова a и b одного рода, то b и a тоже. Транзитивность: если a и b одного рода, а также b и c одного рода, то a и c того же рода. Рефлексивность:

слово всегда того рода, какой имеет. Итак, имеем три класса на множестве существительных: мужской, женский и средний роды.

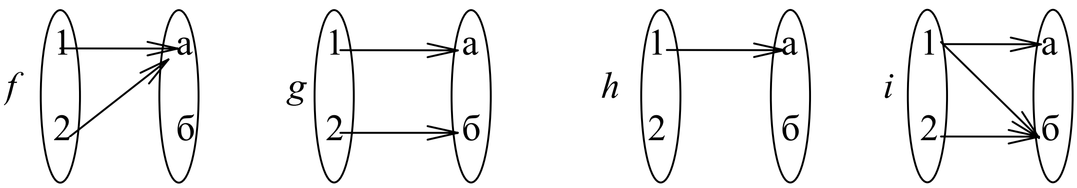
2. Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ можно разбить на два класса: алгебраические числа и трансцендентные числа.

п. 3. Функция



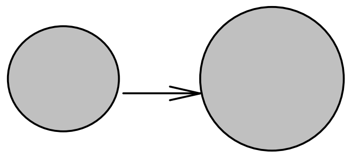
1. Определение. Пусть U и V — два множества. ***Функцией, или отображением***, из U в V называется такая зависимость, когда для *любого* $x \in U$ $\exists$ *единственный* $y \in V$. Здесь x — ***аргумент функции, или независимая переменная***, y — ***значение функции, или зависимая переменная***. Обозначения: $f: U \to V$; $y = f(x)$.

Примеры. Пусть $U = \{1, 2\}$, $V = \{а, б\}$. Зададим следующие зависимости: 1) зависимость f: $f(1) = а$, $f(2) = а$; 2) зависимость g: $g(1) = а$, $g(2) = б$; 3) зависимость h: $h(1) = а$; 4) зависимость i: $i(1) = а$, $i(1) = б$, $i(2) = б$.

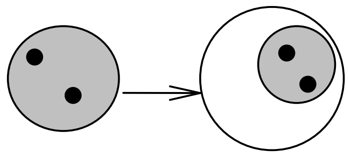


Упр. 4. Какие из зависимостей f, g, h, i — функции, а какие — нет?

2. Биекция. Функция $f: U \to V$ называется ***сюръекцией, или отображением «на»***, если $f(U) = V$, т. е. образ множества U равен множеству V. Поэтому функция не является сюръекцией, если $\exists x \in V$: $x \notin f(U)$.



Функция $f: U \to V$ называется ***инъекцией, или вложением***, если $\forall x_1, x_2 \in U, x_1 \neq x_2$ их образы тоже различны: $f(x_1) \neq f(x_2)$. Отсюда функция не является инъекцией, если $\exists\, x_1, x_2 \in U$: $x_1 \neq x_2$, но $f(x_1) = f(x_2)$.



Функция $f: U \to V$ называется ***биекцией, или взаимно-однозначным соответствием***, если она сюръективна и инъективна одновременно.

Обозначение биекции: $f: U \leftrightarrow V$.

Упр. 5. Какие из примеров f, g, h, i сюръекции, инъекции, биекции? Нарисуйте иллюстрацию к понятию «биекция».

3. Принцип Дирихле: для любого *конечного* множества U понятия инъекции, сюръекции и биекции при отображении этого множества *на себя* $f: U \to U$ совпадают!

Принцип Дирихле формулируют еще так: если в n «ящиках» лежит $n + 1$ «предмет», то хотя бы в одном «ящике» лежит более 1 «предмета».

Пример. Контрольную работу из 6 вариантов пишут 14 студентов. Докажем, что хотя бы один вариант пишут более двух студентов. Пусть варианты — «ящики», а пары студентов — «предметы». Имеем 6 «ящиков» и 7 «предметов». Тогда по принципу Дирихле хотя бы в одном «ящике» лежит более одного «предмета». Другими словами, хотя бы один вариант пишут более двух студентов.

п. 4. Мощность и порядковый тип

1. Эквивалентность. Два множества U и V ***эквивалентны***, если между ними можно построить биекцию. Обозначение: $U \sim V$.

Два множества, эквивалентные третьему, эквивалентны.

$\forall$ бесконечное множество эквивалентно некоему своему собственному подмножеству! Это еще одно определение ***бесконечного множества***.

Пример. Натуральные числа $\mathbb{N}$ эквивалентны:: 1) квадратам натуральных чисел: $x \leftrightarrow x^2$; 2) натуральным степеням числа 2: $x \leftrightarrow 2^x$.

Упр. 6. Выписать биекции для чисел от 1 до 10 в этих примерах.

2. Мощность. ***Мощность множества (кардинальное число, кардинал)*** — это то общее, что есть у любых двух эквивалентных множеств, то, что остается после абстрагирования как от качества элементов, так и от их порядка. Обозначение мощности множества U: $|U|$.

Для конечного множества мощность — это просто число элементов. Для булеана *конечного* множества $|\mathfrak{M}(U)| = 2^{|U|}$,— число элементов.

Множество, эквивалентное множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$, называется ***счетным***. Его мощность обозначается $\aleph_0$ (читается «алеф нуль»): $|U| \equiv \aleph_0$.

Свойства счетных множеств: 1) любое натуральное число меньше, чем $\aleph_0$; 2) таким образом, $\aleph_0$ — наименьшая бесконечная мощность.

Множество ***несчетно***, если его мощность больше, чем счетна.

Множество имеет ***мощность континуума***, если оно эквивалентно множеству всех вещественных чисел отрезка [0, 1]. Обозначение мощности континуума: $\aleph$. $\aleph$ — наименьшая несчетная мощность.

Примеры. Натуральные, целые, рациональные и алгебраические числа — счетные множества, тогда как трансцендентные, иррациональные, действительные и комплексные числа имеют мощность континуума.

3. Изоморфизм. Бинарное отношение φ называется ***антисимметричным***, если из $(a, b) \in \varphi$ и $(b, a) \in \varphi$ следует, что $a = b$.

Частичная упорядоченность — бинарное отношение на множестве, одновременно антисимметричное, транзитивное и рефлексивное. Множество с таким отношением ***частично упорядочено***. Если два элемента множества упорядочены, т. е. $(a, b) \in \varphi$, то они ***сравнимы***: $a \leqslant b$.

Упр. 7. Определим на множестве слов отношение $\lll$: $a \lll b$, если слово a — часть b. Например, <да> $\lll$ <еда>, <еда> $\lll$ <беда>. Привести по четыре других примера сравнимых и несравнимых слов.

Функция $f: U \to V$ является ***изоморфизмом*** частично упорядоченных множеств U и V, если: 1) функция f — биекция; 2) образы $f(a)$ и $f(b)$ сравнимы тогда и только тогда, когда сравнимы a и b. Множества U и V ***изоморфны***, если можно построить изоморфизм между ними.

Пример. Русский алфавит изоморфен первым 33 натуральным числам.

4. *Порядковый тип* — это то общее, что присуще любым двум изоморфным между собой частично упорядоченным множествам.

Множество упорядочено, или линейно упорядочено, если сравнимы *любые два* его элемента. Любое множество можно упорядочить!

Упорядоченное множество ***вполне упорядочено***, если каждое его непустое подмножество содержит наименьший элемент.

Порядковое число (трансфинитное число, ординальное число, ординал, — это порядковый тип вполне упорядоченного множества.

§ 3. Теория вероятностей

А Банкир, положение дел оценя,
Предложил то, что именно надо:
Договор страхованья квартир от огня
И на случай ущерба от града.

Льюис Кэрролл. Охота на Снарка.

п. 1. Вероятность

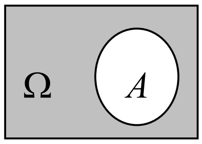
1. Интуитивное определение. ***Эксперимент, или опыт*** — действие, которое возможно повторить. Любимый эксперимент — ***бросание монеты***: монета падает кверху либо гербом, либо решеткой. Тот факт, что монета упала, например, гербом кверху, называется ***событием, или исходом***.

Повторим эксперимент n раз и разделим количество выпавших гербов на n,— получим некоторое число — ***частоту события***. Произведем еще несколько серий этого эксперимента и вычислим для каждой серии эту частоту. *Эксперимент* обладает свойством ***статистической устойчивости***, если все полученные *частоты* близки при достаточно больших n. Частоты выпадения герба группируются около 0,5.

Число, около которого колеблется *частота события A*, и называется ***вероятностью события A***. Обозначение: $\mathbf{P}(A)$. ***Теория вероятностей*** изучает математические модели *случайных экспериментов*, непременно обладающих свойством *статистической устойчивости*.

2. Математическое определение. ***Пространство элементарных событий*** — $\forall$ конечное или счетное множество, т.е. ***дискретное пространство***. Обозначения: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$, или $\Omega = \{\omega_i, i = 1, 2, \ldots\}$. Каждому элементу Ω — ***элементарному событию*** $\omega_i \in \Omega$, $i = 1, 2, \ldots$— отвечает число $\mathbf{P}(\omega_i)$ — ***вероятность элементарного события***. Эти вероятности всегда подчиняются следующим ***аксиомам вероятности***:

1) $0 \le \mathbf{P}(\omega_i) \le 1$; 2) $\sum\limits_{\omega_i \in \Omega} \mathbf{P}(\omega_i) = 1$.



Событие (исход) — $\forall$ подмножество $A \subset \Omega$ множества Ω. Элементарные события $\omega_i \in A$ ***благоприятны*** для A. ***Вероятность события*** *A* — это сумма вероятностей событий $\omega_i \in A$: $\mathbf{P}(A) = \sum\limits_{\text{щ}_i \in \text{Б}} \mathbf{P}(\omega_i)$.

Если $\mathbf{P}(A) = 1$, то событие A называется ***достоверным***, если $\mathbf{P}(A) = 0$ — ***невозможным***. Очевидно, что $\mathbf{P}(\Omega) = 1$, $\mathbf{P}(\varnothing) = 0$.

Пример. Эксперимент — ***бросание монеты***. Пространство элементарных событий состоит из 2 событий. Их вероятности в сумме дают 1/2 + 1/2 = 1.

> Упр. 1. Найти вероятность того, что количество очков, выпавших при бросании игральной кости (т.е. игрального кубика), равно 1 или 6.

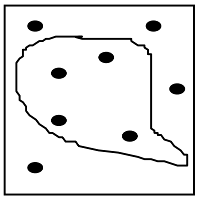
3. Алгоритм нахождения вероятности. Как же находить вероятности? 1. ***Пространство элементарных событий*** Ω есть множество всех мыслимых событий эксперимента. 2. Если из соображений симметрии очевидно, что все элементарные события равновероятны, то тогда Ω конечно, и $\forall\omega_i \in \Omega$ $\mathbf{P}(\omega_i)=1/|\Omega|$. 3. $\mathbf{P}(A) = |A|/|\Omega|$.

Пример. Из 25 экзаменационных билетов — 5 «счастливые». У какого студента больше вероятность взять «счастливый» билет: первого или второго? Пусть «счастливые номера» — 1, 2, 3, 4, 5. Рассмотрим пространство $\Omega = \{(i, j): i, j = 1, \ldots, 25, i \neq j\}$, где i — номер билета, взятого 1-м студентом, j — 2-м. Применим алгоритм нахождения вероятности события. Элементарные события равновероятны, и $|\Omega| = 600$. Событие A «1-й студент взял „счастливый“ билет» имеет вид $A =\{(i, j): i=1, 2, 3, 4, 5, j=1,\ldots,25, i\neq j\}$, и $|A| = 120$. Событие B «2-й взял „счастливый“ билет» имеет вид $B =\{(i, j): i=1, \ldots, 25, j=1, 2, 3, 4, 5, i \neq j\}$, и $|B| = 120$. Следовательно, $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = 120/600 = 1/5$.

п. 2. Случайные числа

1. Метод Монте-Карло. При решении некоторых вероятностных задач проще провести тысячи повторений эксперимента, чем получить ответ теоретическим путем. Обычно для этой цели используются компьютеры. Ответ получается усреднением полученного множества результатов. Это — ***метод Монте-Карло*** решения вероятностных задач.

Метод Монте-Карло используется и при решении обычных задач, которые можно свести к функциям. В этом случае случайным образом выбирается аргумент функции, а ответ получается также усреднением.



Пример. Найдем площадь области A внутри сложной кривой. Поместим область A в единичный квадрат E и будем «бросать» наугад на него точки. «Наугад» означает, что вероятность попадания точки на $\forall$ участок квадрата площади p равна p. При этом бросании некоторые точки попадут внутрь A, а другие нет. Доля точек, попавших в A, и есть приближение к площади A.

2. Случайные числа. Для проведения подобных экспериментов используют случайные числа. ***Случайные числа*** — упорядоченное множество цифр, полученных в результате какого-либо случайного процесса.

Последовательности случайных чисел могут быть любой конечной длины. Опубликованы таблицы с миллионом случайных чисел. Сейчас случайные числа получают на компьютере сразу при решении задач.

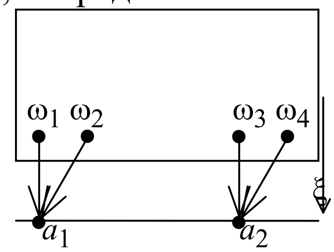
Большинство таблиц случайных чисел строится случайной выборкой в пространстве элементарных событий {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. В приложении 1 приведена таблица случайных чисел.

Пример. Четверо юношей приобрели доску и костюмы для виндсерфинга, причем Саша внес 10% стоимости комплекта, Боря внес 20%, Витя — 30% и Гена — 40%. 8 марта каждый из них хотел бы воспользоваться комплектом, и они решают бросить жребий так, чтобы их шансы были равны той части стоимости комплекта, которую они внесли. Построим пространство событий, состоящее из 4 событий с вероятностями

0,1, 0,2, 0,3 и 0,4. Для этого один из юношей с завязанными глазами ставит точку в таблицу случайных чисел. Отметим число, расположенное ближе всех к этой точке. Если это 0, то комплект получит Саша, если 1 или 2 — Боря, если 3, 4 или 5 — Витя, если 6, 7, 8 или 9 — Гена.

п. 3. Случайная величина

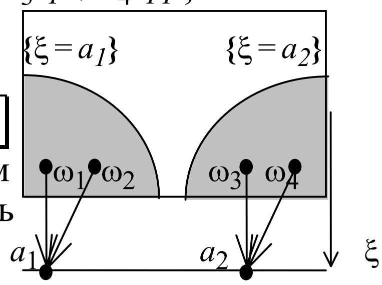
1. Определение. Рассмотрим дискретное пространство элементарных событий Ω, элементам которого $\omega \in \Omega$ отвечает вероятность $\mathbf{P}(\omega)$. ***Случайной величиной*** ξ называется функция $\xi(\omega)$, определенная на множестве Ω и принимающая вещественные значения.



Среди возможных значений $\xi(\omega)$, отвечающим различным $\omega \in \Omega$, не обязательно все различны. Обозначим различные возможные значения ξ через $a_1, a_2, \ldots$ (эти вещественные числа a_i не обязательно расположены в порядке возрастания или убывания).

Пример. Бросаются две монеты. Сколько из них выпадет гербом кверху? Ответ — число, определяемое исходом эксперимента: 0, 1, 2. Пространство элементарных событий $\Omega = \{\omega_1 = \text{гг},\ \omega_2 = \text{гр},\ \omega_3 = \text{рг},\ \omega_4 = \text{рр}\}$.

Имеем случайную величину $\xi = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.



Упр. 2. Написать случайную величину для 3 монет.

2.Распределение случайной величины. Обозначим $\{\xi = a_i\} \equiv \{\omega\colon \omega \in \Omega,\ \xi(\omega) = a_i\}$. Очевидно, что $\{\xi = a_i\}$ есть подмножество множества Ω, т.е. событие. Обозначим через p_i вероятность этого события $\{\xi = a_i\}$:

$p_i = \mathbf{P}\{\xi = a_i\} = \sum\limits_{\omega:\xi(\omega)=a_i} \mathbf{P}(\omega)$. Таблица вида $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots \\ p_1 & p_2 & \ldots \end{pmatrix}$, где в верхней строчке стоят возможные значения случайной величины ξ, а в нижней строчке под каждым значением стоит вероятность $p_i = \mathbf{P}\{\xi = a_i\}$ того, что случайная величина ξ принимает это значение, называется ***распределением, или таблицей вероятностей, или функцией вероятностей, случайной величины*** ξ.

Пример. Найти распределение числа выпавших гербов для 2 монет.

Решение. См. пример п.1. Пространство Ω состоит из 4 событий; для $\forall\omega$ имеем: $\mathbf{P}(\omega) = 1/4$. Искомое распределение: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1/4 & 2/4 & 1/4 \end{pmatrix}$.

Упр. 3. Найти распределение числа выпавших гербов для 3 монет.

В приложениях теории вероятностей обычно имеют дело с распределениями случайных величин. Например, при бросании пяти монет проще зарегистрировать $\xi(\omega)$, а не элементарные события ω. Следовательно, регистрируются значения функции, но не значения аргумента. Необычайно существенно то, что при разных ω случайная величина $\xi(\omega)$ может принимать одинаковое значение: множество $\{a_1, a_2, \ldots\}$ значений случайной величины гораздо проще, чем все множество Ω. Поэтому может получиться так, что невозможно узнать вероятности $\mathbf{P}(\omega)$, но можно определить по частотам вероятности $p_i = \mathbf{P}\{\xi = a_i\}$.

п. 4. Математическое ожидание

1. Матожидание. Обычно редукция к распределению случайной величины все равно недостаточна: множество значений случайной величины $\{a_1, a_2, \ldots\}$ бывает слишком большим (и даже бесконечным!), чтобы определить из опыта соответствующие им вероятности p_i.

Опишем распределение *одним* экспериментальным параметром.

Пусть дана случайная величина $\xi(\omega)$. Тогда, если ряд $\sum\limits_{\omega\in\Omega} \xi(\omega)\mathbf{P}(\omega)$ ***сходится абсолютно***, что означает, что значение его суммы не зависит от порядка слагаемых, то его сумма $\mathbf{M}\xi = \mu = \Sigma\xi(\omega)\mathbf{P}(\omega)$ называется ***математическим ожиданием, или средним значением*** случайной величины ξ. Если же сходимость неабсолютная, т.е. ***условная***, то случайная величина не имеет матожидания. Можно доказать, что $\mathbf{M}\xi = \Sigma a_i p_i$.

Примеры.

1. Найти матожидание числа выпавших гербов для 2 монет. См. примеры в §3. Получаем: $\mathbf{M}\xi = \Sigma a_i p_i = 0\times1/4 + 1\times2/4 + 2\times1/4 = 1$.

2. В США вероятность 25-летнему человеку прожить 1 год составляет 0,992. Страховая компания страхует жизнь такого человека на год на сумму Z1000, страховой взнос — Z10. Какую прибыль ожидает получить компания? Величина прибыли есть случайная величина ξ со значениями Z+10 (если застрахованный не умрет) и Z–990 (если умрет). Имеем распределение $\begin{pmatrix} +10 & -990 \\ 0,992 & 0,008 \end{pmatrix}$, т.е. $\mathbf{M}\xi = 10\cdot0,992 - 990\cdot0,008 = 2(Z)$.

Упр. 4. Найти матожидания: 1) числа выпавших гербов для 3 монет; 2) числа выпавших очков игральной кости.

2. Закон больших чисел. Продуктивно рассматривать не одно событие или случайную величину, а много. Случайные величины возникают в приложениях как результаты измерений, причем либо сами измерения подвержены случайным ошибкам, либо объекты измерения выбираются случайным образом. Тем не менее справедливо правило: даже когда результаты отдельных измерений $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ сильно колеблются, их средние арифметические $(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n)/n$ очень устойчивы.

Пример. В литературе можно найти сведения, что при бросании монеты герб выпадал следующие количества раз: 1) в десяти сериях по 1000 бросаний — 502, 511, 497, 529, 504, 476, 507, 528, 504, 529; 2) в серии 24 000 раз — 12 012; 3) в серии 4040 раз — 2048. Следовательно, частоты выпадений герба группируются около 0,5, хотя и не равны никогда этому числу.

В математике это явление устойчивости средних и отражает ***закон больших чисел***.

§ 4. Теория графов

Для чего, в самом деле, полюса, параллели,
Зоны, тропики и зодиаки?
И команда в ответ: «В жизни этого нет,
Это — чисто условные знаки».

Льюис Кэрролл. Охота на Снарка.

п. 1. Граф

1. Граф. Два множества: конечное непустое множество V и множество X неупорядоченных пар *различных* элементов из V,— называются ***графом***.

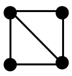
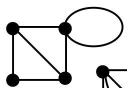
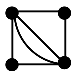
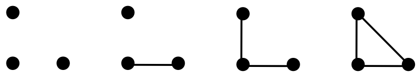
Вершины графа — элементы множества V, ***ребра графа*** — элементы X.

Две вершины графа ***смежные***, если они соединены ребром.

Число вершин называется ***порядком графа***. Граф с $p = |V|$ вершинами и $q = |X|$ ребрами называется ***(p, q)-графом***.

Два графа ***изоморфны*** и *не различаются*, если существует биекция множеств их вершин, сохраняющая смежность вершин.

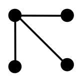
Примеры.

1. (4, 5)-граф: 
2. Не граф: фигура с ребром-петлей: 
3. Не граф: фигура с кратными ребрами: 
4. Существует всего 4 разных графа порядка 3. 

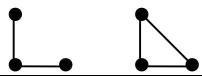
Упр. 1. Нарисуйте все 11 графов порядка 4, упорядочив их по количеству имеющихся ребер.

2. Связный граф. ***Маршрут*** —последовательность *вершин* графа такая, что любые две последовательные вершины смежные, вместе с *ребрами*, их соединяющими. ***Цепь*** — маршрут, у которого все ребра различны.

Примеры.

1. Две цепи из трех разных ребер: 
2. Три разные ребра, из которых нельзя образовать цепь: 

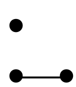
Если в цепи и все вершины различны, кроме, быть может, первой и последней, то это ***простая цепь***. Граф называется ***связным***, если любые две различные его вершины соединены *простой цепью*.

Пример. Существуют всего два связных графа порядка 3. 

Упр. 2. Нарисуйте все 6 связных графов порядка 4.

3. *Подграфом* данного графа называется граф, состоящий из вершин и ребер данного графа. $\forall$ граф разбивается на непересекающиеся связные подграфы — ***компоненты*** — следующим образом. Зададим *отношение эквивалентности* на множестве вершин графа: две вершины ***эквивалентны, или связаны***, если $\exists$ простая цепь, их соединяющая. Тогда множество вершин графа распадается на связные классы эквивалентности.

Очевидно, что связный граф состоит из одной компоненты. Граф ***несвязен***, если число его компонент больше 1.

Пример. Единственный 2-компонентный граф порядка 3. 

Упр. 3. Нарисуйте все три 2-компонентных графа порядка 4.

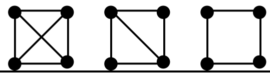
п. 2. Эйлеров граф

1. Эйлеров граф. Цепь ***замкнута***, если первая вершина цепи совпадает с последней. Связный граф ***эйлеров***, если $\exists$ *замкнутая цепь*, проходящая через *каждое* ребро графа. Такая цепь также называется ***эйлеровой***.

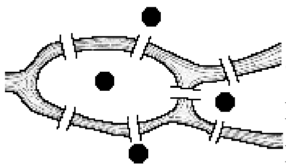
Замечание. По определению цепи, каждое ребро проходится только один раз, а вершины могут проходиться многократно.

Если условие замкнутости цепи эйлерова графа необязательно, то такой *граф* называется ***полуэйлеровым***. Очевидно, что каждый эйлеров граф является также и полуэйлеровым.

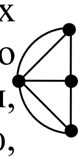
Примеры.

1. Три графа: не эйлеров, полуэйлеров и эйлеров. 

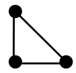
Упр. 4. Нарисуйте понятным образом на этих графах эйлерову цепь.



2. Эйлер первым решил задачу о кёнигсбергских мостах (см. рис. слева): можно ли пройти по всем мостам, пройдя по каждому 1 раз? Соединив точки на рисунке ребрами-мостами, получим задачу: имеет ли следующий ***общий граф*** (т.е. граф, имеющий петли и параллельные ребра, см. рис. справа) *Эйлерову цепь*?



3. Для обвода рисунка не отрывая карандаша от бумаги и не проводя никакую линию дважды его граф должен быть полуэйлеров.

4. Существует только один эйлеров граф порядка 3: 

Упр. 5. Нарисуйте единственный эйлеров граф порядка 4 и все четыре эйлерова графа порядка 5.

2. *Степень вершины* графа — число ребер, выходящих из этой вершины.

Имеет место следующее замечательное утверждение: *связный* граф тогда и только тогда *эйлеров*, когда *каждая* его вершина имеет четную степень.

Аналогично доказывается, что *связный* граф тогда и только тогда *полуэйлеров*, когда в нем нечетные степени имеют *не более двух* вершин. Существует алгоритм построения эйлеровой цепи в данном эйлеровом графе, т.е. рисования фигуры не отрывая карандаша от бумаги и не проводя линии дважды.

Сумма степеней всех вершин всегда *четное число*, равное удвоенному числу ребер,— ведь каждое ребро участвует в этой сумме ровно 2 раза. Этот результат называют ***леммой о рукопожатиях***: если несколько человек обменялись рукопожатиями, то общее число пожатых рук четно. Следствие: в любом графе число вершин нечетной степени всегда четно.

В полуэйлеровом графе с двумя вершинами нечетной степени незамкнутая цепь начинается в одной такой вершине и кончается в другой. Полуэйлеров граф либо совсем не имеет вершин нечетной степени (и тогда это эйлеров граф), либо имеет две таких вершины.

Упр. 6. Имеет ли граф из примера 2 эйлерову цепь (можно ли пройти по старым кёнигсбергким мостам, побывав на каждом только 1 раз)? Почему?

п. 3. Дерево

1. Цикл. Цепь называется ***циклом***, если она замкнутая и простая (т.е. в цепи все вершины различны, кроме, быть может, первой и последней).

Цикл длины три называется ***треугольником***.

Пример. На рисунке имеются следующие цепи:

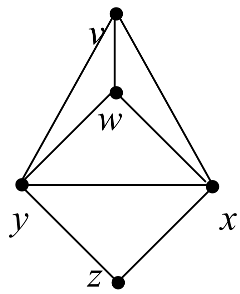
1) цепь $v \to w \to x \to y \to z \to x$;

2) простая цепь $v \to w \to x \to y \to z$;

3) замкнутая цепь $v \to w \to x \to y \to z \to x \to v$;

4) цикл $v \to w \to x \to y \to v$;

5) треугольник $v \to w \to x \to v$.



2. Дерево. ***Лесом*** называется граф, не содержащий циклов. Связный лес называется ***деревом***.

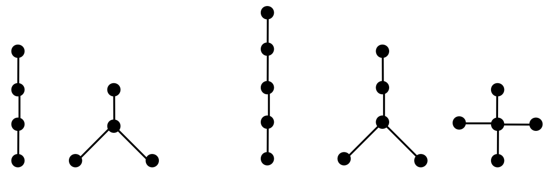
Граф является деревом тогда и только тогда, когда любые две его вершины соединены ровно одной простой цепью.

Очевидно, что дерево не содержит циклов, но, добавляя к нему 1 ребро, получаем ровно 1 цикл.

Дерево порядка n имеет n – 1 ребро.

Примеры.

1. Существуют только два дерева порядка 4, и только три — порядка 5.



Упр. 7. Нарисуйте все 6 деревьев порядка 6.

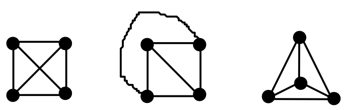
2. ***Задача о соединении городов***. Соединить города железными дорогами так, чтобы были соединены любые два города при минимальной длине железных дорог. Решением этой задачи является дерево. Имеется алгоритм для его построения.

3. ***Задача о коммивояжере***. Коммивояжер желает посетить несколько городов, заехав в каждый хотя бы один раз и проделав путь наименьшей длины. Общий алгоритм решения этой задачи неизвестен.

3. Планарный граф. Изображенный на плоскости граф так, что никакие два его ребра не пересекаются, называется ***плоским***. Граф, изоморфный плоскому графу, называется ***планарным***.

Граф ***полный***, если в нем *любые* две вершины *смежны*. Полный граф порядка n обозначается K_n. Граф K_5 не планарен, поскольку его нельзя нарисовать на плоскости без пересечений ребер.

Пример. Изоморфные полные планарные графы порядка 4. Первый из этих графов не плоский.



Упр. 8. Нарисуйте на плоскости полный граф K_5.

Каждый подграф планарного графа планарен.

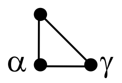
Граф, имеющий непланарный подграф, непланарен.

п. 4. Раскрашенный граф

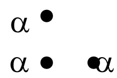
1. Хроматическое число. Граф ***k-раскрашиваемый***, если каждую вершину можно раскрасить в один из k цветов так, что все смежные вершины — разных цветов. Если граф k-раскрашивамый, но не (k–1)-раскрашиваемый, то он — ***k-хроматический***, а число k —***хроматическое число*** графа. Хроматическое число обозначим греческой буквой χ. Цвета вершин графов будем также обозначать греческими буквами.

Примеры.

1. Имеем: $\chi(K_n) = n$. В частности, $\chi(K_3) = 3$.



2. Граф без ребер называется ***пустым***. Для него всегда $\chi = 1$.



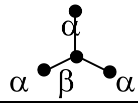
Упр. 9. Выпишите в виде таблицы все 11 графов порядка 4 и соответствующие им хроматические числа.

2. Двудольные графы. Граф ***двудольный***, если все его вершины *можно* окрасить в *два* цвета так, чтобы любое ребро имело разноцветные концы. Если при этом *каждая* вершина *одного цвета* соединена ребром с *каждой* вершиной *другого цвета*, то граф ***полный двудольный*** и обозначается $K_{m,n}$, где n — число вершин одного цвета, m — другого.

Граф $K_{m,n}$ имеет ровно $m + n$ вершин и mn ребер.

Примеры.

1. Граф $K_{3,3}$ не планарен.
2. Граф $K_{1,n}$ называется ***звездным***. Пример: граф $K_{1,3}$.



Упр. 10. Нарисуйте на плоскости граф $K_{3,3}$.

Теорема. Любой граф, имеющий подграфом K_5 или $K_{3,3}$, непланарен. И наоборот: любой непланарный граф содержит подграф K_5 или $K_{3,3}$.

Замечание. В пространстве этой проблемы нет. Любой граф можно вложить в трехмерное пространство так, чтобы его ребра не пересекались.

3. *Гипотеза четырех красок*. Впервые сформулировал эту гипотезу студент-дипломник Лондонского университета в 1852 году: *любую карту на плоскости можно раскрасить только четырьмя красками так, что никакие две смежные страны не имеют один цвет*. История этой гипотезы — самая длительная и волнующая в теории графов.

Переведем задачу на язык графов. Карте *сопоставим граф* следующим образом. Пусть вершинами графа будут столицы всех стран, а ребрами — дороги, соединяющие столицы соседних стран (разумеется, территории стран подразумеваются связными, т.е. состоящими из одного куска, а соседние страны имеют общую протяженную границу). Тогда формулировка гипотезы изменится на следующую: любой планарный граф 4-раскрашиваем.

Несложно доказать, что пяти красок достаточно. Но четырех…

В 1975 году с помощью компьютера был закончен просмотр 8 571 случая, к которым была сведена эта проблема. В настоящее время считается, что гипотеза четырех красок решена положительно.

Упр. 11. Нарисуйте карту Европы и раскрасьте все страны четырьмя красками так, чтобы никакие две смежные страны не имели один цвет.

§ 5. Цепь Маркова

И решил Браконьер в одиночку рискнуть,
И, влекомый высокою целью,
Он бесстрашно свернул на нехоженый путь
И пошел по глухому ущелью.

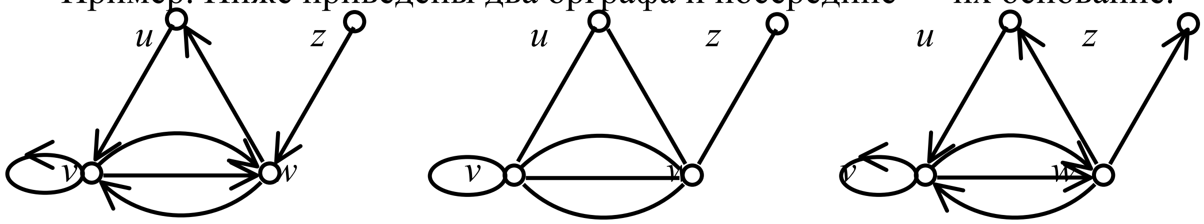
Льюис Кэрролл. Охота на Снарка.

п. 1. Орграф

1. Определение. ***Орграфом, или ориентированным графом***, называется пара (V, A), где V — непустое множество элементов, называемых ***вершинами***, а A — множество *упорядоченных* (не обязательно различных) пар вершин из V, называемых ***дугами, или ориентированными ребрами***. Дуга, у которой 1-й элемент — вершина v, а второй — вершина w, называется дугой из v в w и обозначается (v, w). Заметим, что дуги (v, w) и (w, v) различны!

Граф, полученный из орграфа «удалением стрелок», т.е. заменой всех дуг на ребра, называется ***основанием*** орграфа.

Пример. Ниже приведены два орграфа и посередине — их основание.



Упр. 1. Выпишите множество V вершин и множество A дуг этих орграфов.

Два орграфа ***изоморфны***, если существует изоморфизм между их основаниями, сохраняющий порядок вершин на каждой дуге.

Упр. 2. В примере приведены два орграфа. Они изоморфны? Почему?

2. Орцикл. ***Ориентированный маршрут*** в орграфе — это последовательность дуг, где окончание предыдущей является началом следующей. ***Орцепь*** — это ориентированный маршрут, у которого все дуги различны. ***Простая орцепь*** — это орцепь, у которой различны и все вершины, кроме, быть может, первой и последней. Орцепь ***замкнута***, когда ее первая вершина совпадает с последней. ***Орцикл*** — это замкнутая простая орцепь.

Упр. 3. Выпишите все три орцикла для орграфов из примера.

3. Связность. Орграф ***связен, или слабо связен***, если связно его основание. Другими словами, связный орграф нельзя представить в виде объединения двух различных орграфов.

Орграф ***сильно связен, или орсвязен***, если для любых двух его вершин v и w существует простая орцепь из v в w. Ясно, что любой сильно связный граф связен, но обратное неверно.

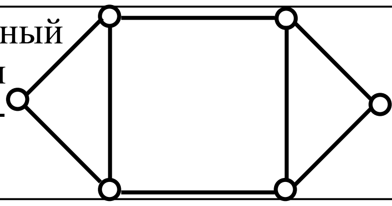
Упр. 4. Оба орграфа из примера связны. Они сильно связны? Почему?

Рассмотрим план города, на всех улицах которого одностороннее движение. Тогда связность соответствующего орграфа означает, что можно проехать из любого пункта в любой другой, *не обращая внимания* на односторонность движения. А сильная связность означает, что это можно сделать, *выполняя правила* одностороннего движения.

Когда карту улиц можно превратить в систему с односторонним движением так, чтобы можно было проехать из любого пункта в любой другой? Если город состоит из двух частей, связанных одним мостом, или имеется тупик, то так сделать нельзя. Но если нет тупиков и таких мостов, то всегда найдется подходящая система односторонних дорог.

Мы получили следующую теорему. Связный граф можно превратить в сильно связный орграф тогда и только тогда, когда каждое ребро графа содержится по крайней мере в одном цикле.

Упр. 5. Превратите граф на рисунке в сильно связный орграф, нарисовав стрелки на его ребрах. Придумайте и запишите алгоритм, превращающий любой граф, удовлетворяющий условию теоремы, в сильно связный орграф.



п. 2. Матричное исчисление

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

1. ***Матрица*** — прямоугольная таблица чисел. ***(m × n)-матрица*** состоит из m строк и n столбцов чисел a_{ij}, где $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$. Для ***квадратной матрицы*** $m = n$, и размер матрицы n называется ее ***порядком***.

В дальнейшем матрицей будет квадратная матрица ($n \times n$). ***Главная диагональ*** матрицы — диагональ с числами a_{ii}. Матрица ***диагональная***, если все числа матрицы, кроме главной диагонали, равны 0. Матрица ***симметричная***, если она симметрична относительно своей главной диагонали.

Сумма матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ — матрица $C = A + B = (a_{ij} + b_{ij})$. ***Произведение*** $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ — матрица $C = AB = (c_{ij})$, где $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$.

Пример. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$. Тогда $A + B = \begin{pmatrix} 1+8 & 2+7 \\ 3+6 & 4+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 9 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}$,

$AB = \begin{pmatrix} 1\cdot8+2\cdot6 & 1\cdot7+2\cdot5 \\ 3\cdot8+4\cdot6 & 3\cdot7+4\cdot5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 17 \\ 48 & 41 \end{pmatrix}$.

Упр. 6. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Найдите матрицы $A + B$, $B + A$, $A + O$, $O + A$ и AB, BA, AE, EA, AC, CA.

2. ***Матрица смежности*** графа с множеством вершин $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ — квадратная матрица $A = (a_{ij})$ порядка n, в которой элемент a_{ij} равен числу ребер графа, соединяющих v_i и v_j. Смежная матрица графа симметрична.

Матрица смежности орграфа с вершинами $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ — квадратная матрица $A = (a_{ij})$ $(n \times n)$, где элемент a_{ij} равен числу дуг (v_i, v_j) орграфа.

Упр. 7. Вычислите три матрицы смежности для двух орграфов и их графа-основания из примера выше.

п. 3. Цепь Маркова

1. Случайное блуждание. Хорошо известна задача о пьянице, стоящем между кабачками «Черный кот» (ЧК) и «Золотой дракон» (ЗД). Каждую минуту он либо передвигается на 10м в сторону ЧК с вероятностью 1/2, либо в сторону ЗД с вероятностью 1/3, либо остается на месте с вероятностью 1/6. Такое поведение называется ***случайным блужданием***.

Пусть оба кабачка «поглощающие»: если пьяница попадает в один из них, то он там и остается, расстояние между кабачками 50м, и пьяница находится в 20м от ЗД. Обозначим места, где пьяница может остановиться, через $E_1, \ldots, E_6$ (здесь E_1 и E_6 — ЧК и ЗД соответственно). Тогда его начальное положение E_4 задается ***вектором*** (строкой чисел) $x = (0, 0, 0, 1, 0, 0)$, i-я компонента которого равна вероятности того, что он сначала находится в E_i.

Легко посчитать, что по прошествию одной минуты вероятности его местоположения описываются вектором (0, 0, 1/2, 1/6, 1/3, 0).

Упр. 8. Выпишите вектор местоположения пьяницы через две минуты.

Теперь понятно, что вычисление вероятности нахождения пьяницы в заданном месте по прошествии k минут становится затруднительным.

2. Определение. Назовем ***вектором вероятностей*** вектор-строку, все компоненты которого неотрицательны и дают в сумме единицу. Тогда ***матрица перехода P*** — это квадратная матрица, т.е. квадратная таблица, в которой каждая строка является вектором вероятностей. Каждый элемент матрицы p_{ij} называется вероятностью перехода из позиции E_i (которой соответствует строка матрицы) в позицию E_j.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/6 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/6 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/6 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/6 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

В нашем случае имеем (6×6)-матрицу $P = (p_{ij})$. Например, $p_{23} = 1/3$, $p_{24} = 0$. Заметим, что все p_{ij} неотрицательны и сумма элементов любой из строк равна 1.

Цепью Маркова называется пара (P, x), где P есть $(n \times n)$-матрица перехода, а x есть $(1 \times n)$-вектор-строка — начальный вектор вероятностей.

Позиции E_i (в случае с пьяницей этих позиций 6) называются ***состояниями*** цепи Маркова, и в дальнейшем будут описаны разные способы их классификации.

Нас интересует следующее: за какое наименьшее время можно попасть из одного данного состояния в другое. Например, в задаче о пьянице из E_4

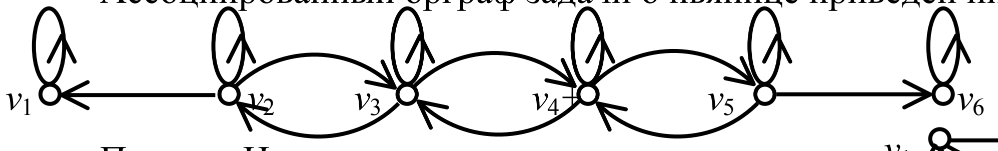
в E_1 можно попасть за 3 минуты и вообще нельзя попасть из E_1 в E_4. Итак, интересны не сами вероятности p_{ij}, а то, положительны они или нет.

Упр. 9. За какое наименьшее время в задаче о пьянице можно попасть из E_1 в E_6? А из E_2 в E_6?

п. 4. Ассоциированный орграф

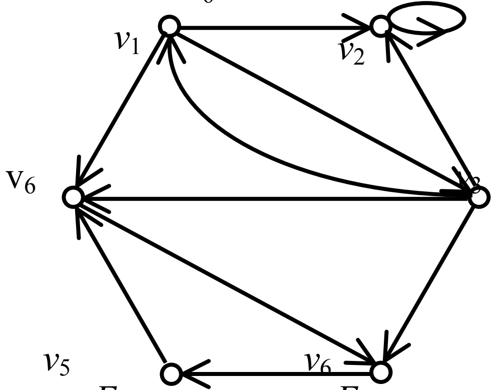
1. Ассоциированный орграф цепи Маркова — это такой орграф, где каждое состояние E_i представлено соответствующей ему вершиной v_i, а дуги из v_i в v_j проведены для тех и только тех вершин, для которых $p_{ij} \neq 0$.

Ассоциированный орграф задачи о пьянице приведен ниже.



Пример. Ниже приведена еще одна матрица перехода цепи Маркова и ее ассоциированный орграф.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/2 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & 0 & 1/12 & 0 & 1/12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Теперь ясно, что в цепи Маркова из состояния E_i в состояние E_j можно попасть в том и только в том случае, если в ассоциированном орграфе существует орцепь из v_i в v_j, и что наименьшее возможное время попадания равно длине кратчайшей из таких орцепей.

2. Классификация. Цепь Маркова, в которой из любого состояния можно попасть в любое другое, ***неприводима***. Цепь Маркова неприводима тогда и только тогда, когда ее ассоциированный орграф сильно связен.

Упр. 10. Выше описаны две цепи Маркова. Они неприводимы? Почему?

Различают те состояния, в которые продолжают возвращаться независимо от продолжительности процесса, и другие. Более точно: если начальное состояние есть E_i и вероятность возвращения в E_i на некотором более позднем шаге равна 1, то E_i ***возвратно, или рекуррентно***; в противном случае состояние E_i ***невозвратно***. Состояние, из которого нельзя попасть ни в какое другое, называется ***поглощающим***.

Пример. В задаче о пьянице состояния E_1 и E_6 возвратны, а все другие состояния невозвратны. Также эти состояния E_1 и E_6 поглощающие.

Упр. 11. Какие состояния во 2-й цепи невозвратны, а какие поглощающие?

Состояние ***периодическое*** *с периодом t (t >1)*, если в него можно вернуться только по истечению времени, кратного t; если такого t нет, то состояние ***непериодическое***. Каждое состояние E_i, для которого $p_{ii} \neq 0$, непериодическое. Поэтому каждое поглощающее состояние непериодическое.

Пример. В задаче о пьянице все состояния непериодические.

Упр. 12. Какой период имеет каждое состояние во 2-й цепи Маркова?

Состояние цепи Маркова называется ***эргодическим***, если оно одновременно возвратно и непериодично. Если *любое состояние* цепи Маркова эргодично, то она называется ***эргодической цепью***. Эргодические цепи очень важны во многих отношениях.

§ 6. Топология

Но все уже тропа становилась, и мрак
Постепенно окутал округу,
Так что сами они не заметили как
Их притерло вплотную друг к другу.
Льюис Кэрролл. Охота на Снарка.

п. 1. Гомеоморфизм

1. ***Топология*** — раздел математики, исследующий идею непрерывности. В соединении с алгеброй топология составляет общую основу математики.

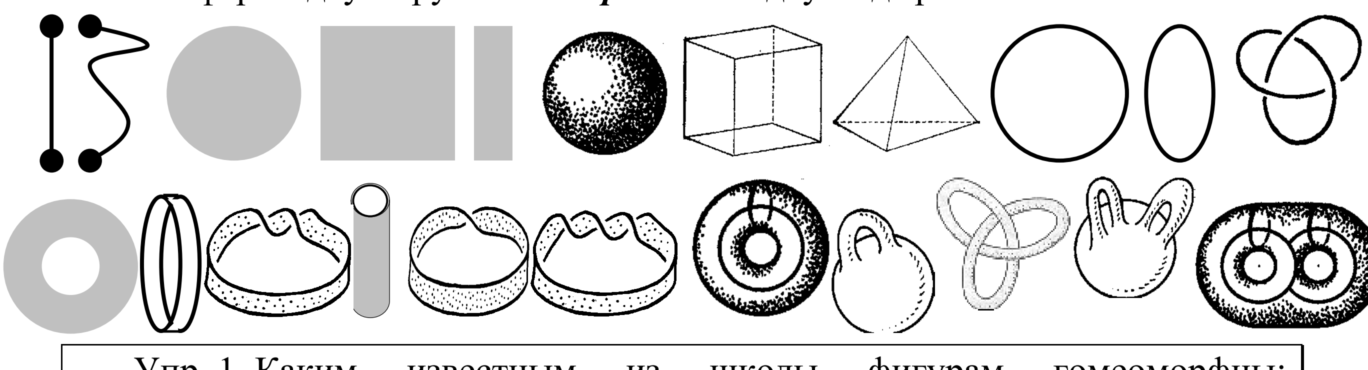
Фигура, или топологическое пространство — подмножество нашего однородного евклидового пространства, между точками которого задано некоторое отношение близости. Будем рассматривать фигуры не как жесткие тела, а как объекты, сделанные как бы из очень эластичной резины, допускающие непрерывную деформацию, сохраняющую их качественные свойства.

Одномерная фигура называется ***кривой***, двумерная — ***поверхностью***.

2. Гомеоморфизм. Отображение одной фигуры на другую ***непрерывно***, когда соседние точки исходной фигуры переходят в соседние точки образа. Две фигуры ***гомеоморфны, или топологически эквивалентны***, если они изоморфны и между ними можно построить непрерывное отображение. Такое взаимно-однозначное непрерывное отображение фигур называется ***гомеоморфизмом***. Другими словами, фигуры ***гомеоморфны***, если одну можно перевести в другую непрерывной деформацией.

Примеры. Гомеоморфны следующие фигуры (из разных групп фигуры не гомеоморфны), изображенные на рисунке ниже..

1. Отрезок и кривая без самопересечений.
2. Круг, внутренность квадрата, лента.
3. Сфера, поверхность куба и тетраэдра.
4. Окружность, эллипс и заузленная окружность.
5. Кольцо на плоскости (круг с дыркой), кольцо в пространстве, два раза перекрученное кольцо, боковая поверхность цилиндра..
6. ***Лист Мёбиуса***, т.е. один раз перекрученное кольцо, и три раза перекрученное кольцо.
7. Поверхность ***тора*** (бублика), сфера с ручкой и заузленный тор.
8. Сфера с двумя ручками и ***крендель*** с двумя дырками.



Упр. 1. Каким известным из школы фигурам гомеоморфны: 1) окружность; 2) круг; 3) сфера и 4) шар? Нарисуйте эти фигуры.

п. 2. Двусторонние поверхности

1. ***Сторона*** — часть поверхность, по которой может ползать муравей; при этом он не должен переползать через край поверхности, если он есть. Другими словами, сторона обладает свойством ***связности*** — любые 2 точки на стороне можно соединить кривой, принадлежащей этой же стороне.

Край — это кривая, разделяющая стороны поверхности. Поверхность ***замкнутая***, если она не имеет ни одного края.

Лента — это поверхность с 1 краем и 2 сторонами.

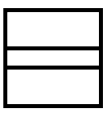
Кольцо — это поверхность с 2 краями и 2 сторонами.

Упр. 2. Вырежьте из бумаги ленту. Склейте из нее кольцо, соединив противоположные стороны без перекручивания. Проведите линию по стороне кольца на равном расстоянии от краев: на одной стороне — красную, на другой — синюю. Разрежьте ленту по этой линии, что получилось?

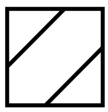
2. ***Степень связности, или связность*** — максимальное число разрезов, которые можно провести на поверхности так, чтобы она не распалась на два отдельных куска, перестав быть связной. ***Разрез*** имеет форму кривой. Если поверхность имеет края, то разрез должен идти от края до края (быть может, другого). Если поверхность ***замкнутая***, то разрез тоже должен быть ***замкнутым***, т.е. должен иметь форму замкнутой кривой.

Лента имеет связность 0. Кольцо имеет связность 1. После первого разрешенного разреза кольцо превращается в ленту.

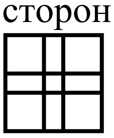
Сферу можно определить как замкнутую двустороннюю поверхность со связностью 0. ***Тор*** — замкнутая двусторонняя поверхность со связностью 2. Тор превращается после первого разреза в кольцо. ***Крендель*** с двумя дырками — замкнутая двусторонняя поверхность со связностью 4. На рисунке выше на торе и кренделе нанесены соответственно 2 и 4 разреза.



Итак, из квадрата можно склеить кольцо, или поверхность цилиндра, соединив противоположные стороны без перекручивания. Этот процесс обозначается так, как показано слева.



Из квадрата можно склеить сферу, соединив две пары смежных сторон (правую с нижней, левую с верхней), как показано справа.



Склеив сначала из квадрата цилиндр (кольцо), а затем, согнув цилиндр, соединив его края, получим тор. Схема приведена слева.

3. ***Хроматическое число*** — максимальное число *классов*, на которые можно разбить поверхность так, чтобы каждые два класса имели общую границу. Если каждый класс покрасить в свой цвет, то для любых двух цветов найдутся соседние области, выкрашенные в эти цвета.

Хроматические числа квадрата, кольца и сферы равны 4, тора — 7. Разобьем квадрат (или прямоугольник) на разноцветные классы и каждому цвету присвоим свой номер. Если из такого квадрата склеить кольцо, сферу или тор, получим соответственно разбиение кольца, сферы или тора.

п. 3. Односторонние поверхности

1. ***Лист Мёбиуса*** — кольцо, перекрученное один раз.

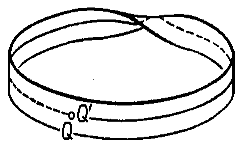
Упр. 3. Склейте лист Мёбиуса, соединив концы ленты, предварительно перекрутив один конец на 180°. Проведите посередине листа Мёбиуса параллельно краю линию красным карандашом. Затем посередине между красной линией и краем проведите линию синим карандашом.

Разрежьте лист Мёбиуса по красной линии. Что получилось? То, что получилось, разрежьте по синей линии. Что получилось?

Снова сделайте лист Мёбиуса с красной и синей линиями. Разрежьте его сразу по синей линии. Что получилось?

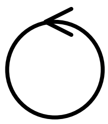
Лист Мёбиуса — пример односторонней поверхности. Лист Мёбиуса имеет 1 край, связность 1 и хроматическое число 6.

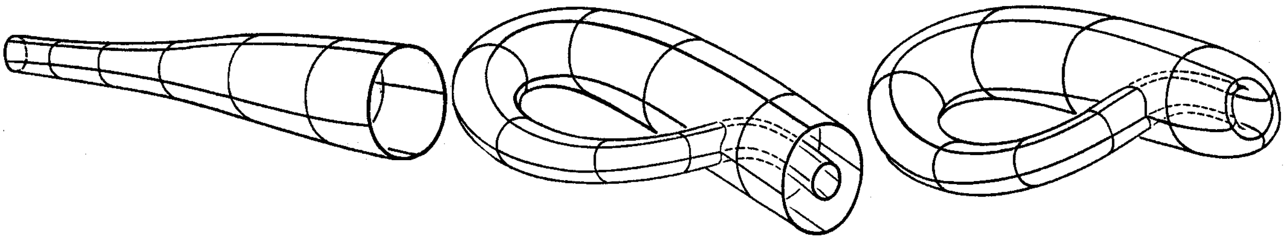
2. Ориентируемость. Нарисуем на прозрачном листе Мёбиуса линию s вдоль и посередине листа, начав с какой-то точки Q и закончив через оборот в той же точке Q' с другой стороны модели. Это — свойство односторонней поверхности. Если двигаться по одну сторону от кривой s (по одному ее «берегу») от точки Q, то вернемся в ту же точку Q', оказавшись по другую сторону кривой s (на другом ее «берегу»). Такая кривая s имеет 1 ***берег*** (см. рис.).



На двусторонних поверхностях все кривые двубережные. На односторонних поверхностях можно построить замкнутую однобережную кривую. Односторонние поверхности и однобережные кривые взаимно обусловливают друг друга. Первое свойство относится к расположению поверхности в пространстве, второе — к расположению кривой на поверхности.

Построим вокруг точки Q кривой s малую ***ориентируемую окружность***, т.е. окружность с направлением обхода (см. рис.). Будем двигать центр этой окружности по кривой s. Тогда окружность придет в ту же точку Q' ориентированной в противоположном направлении. Поверхность ***ориентируема***, если при движении вдоль любой ее замкнутой кривой окружность сохраняет ориентируемость. Двусторонние поверхности ориентируемы, односторонние — неориентируемы.





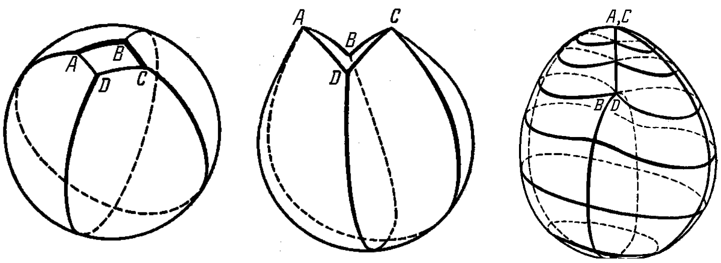
3. ***Бутылка Клейна*** — замкнутая односторонняя поверхность. Бутылка Клейна склеивается из цилиндра, как и тор, но края цилиндра перед склеиванием «смотрят» не друг на друга, а в одну сторону (см. рис.). Ее связность 2; после 1-го разреза она превращается в кольцо или в лист Мёбиуса.

п. 4. Проективная плоскость

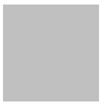
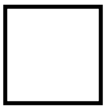
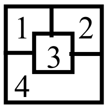
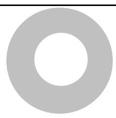
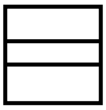
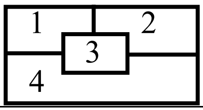
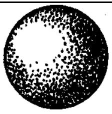
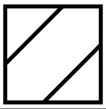
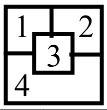
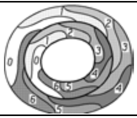
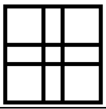
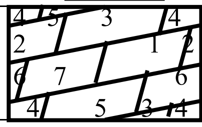
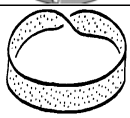
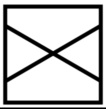
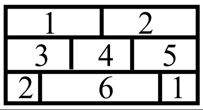
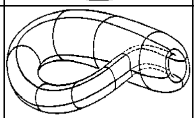
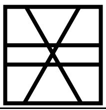
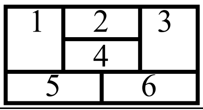
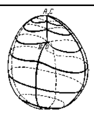
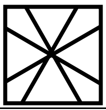
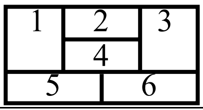
1. Проективная плоскость. ***Проективная геометрия*** — раздел геометрии, изучающий ***проективные*** свойства фигур, свойтсва, не меняющиеся при проектировании. Это такие свойства, как ***коллинеарность*** точек, т.е. принадлежность их одной прямой, и порядок алгебраической кривой. Эта геометрия возникла при научном обосновании перспективы в живописи.

При проектировании одной плоскости на другую точки плоскости могут уйти в бесконечность. Поэтому ***проективная плоскость*** получается из обычной эвклидовой дополнением последней ***бесконечно удаленными точками***, образующими ***бесконечно удаленную прямую***. Итак, проективная плоскость — замкнутая односторонняя поверхность, что и отражено в таблице. При разрезе проективная плоскость превращается в лист Мёбиуса.

Проективную плоскость можно склеить из квадрата (см. рис.), как тор и бутылку Клейна. Сначала деформируем квадрат, превратив его в поверхность шара без четырехугольника $ABCD$. Теперь склеим AB с CD и DA с BC так, чтобы совпали точки A с C и B с D. Для этого приподнимем точки A и C и опустим точки B и D. Получим замкнутую поверхность с линией самопересечения в виде отрезка, топологическую эквивалентную проективной плоскости.



2. Классификация. Рассмотренные выше топологические свойства не изменяются при гомеоморфизме поверхностей и называются ***топологическими инвариантами***. Сведем их в одну таблицу.

Поверхность	Изображение	Склеивание из квадрата	Число сторон	Число краев	Связность	Хроматическое число и карта раскраски
Квадрат			2	1	0	4 
Кольцо			2	2	1	4 
Сфера			2	0	0	4 
Тор			2	0	2	7 
Лист Мёбиуса			1	1	1	6 
Бутылка Клейна			1	0	2	6 
Проективная плоскость			1	0	1	6 

Глава 3. Факультативные занятия

§ 1. Полимино

Человеческая культура возникает и развертывается в игре, как игра.

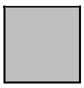
Йохан Хейзинга. Homo Ludens.

п. 1. Домино

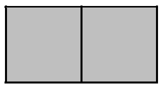
Полимино в достаточной степени вошло в человеческую культуру, чтобы быть темой отдельного параграфа.

Полимино — фигуры, составленные из одноклеточных квадратов так, что каждый квадрат примыкает хотя бы к одному соседнему, имеющему с ним общую сторону. ***Простейшие типы полимино*** — всевозможные комбинации из менее чем 5 квадратов. Предполагается, что полимино можно вращать (т. е. поворачивать на 90, 180 или 270°) и зеркально отражать (переворачивать), не меняя формы самих фигур.

Изобразим первые простейшие типы полимино: из одного квадрата «составлено» ***мономино***, из двух — ***домино***, а из трех можно составить аж две разные фигуры ***тримино***!

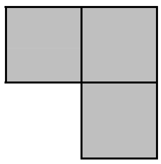


Мономино



Домино

I тримино

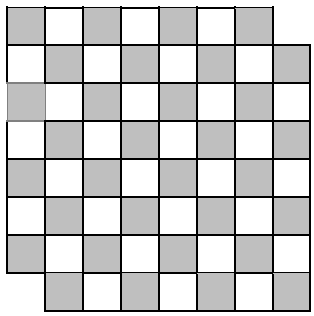


L тримино

Чтобы узнать, что такое полимино, нужно наработать опыт. А опыт, привычка возникает при решении задач.

Задание 1.

Дана шахматная доска, из которой вырезана пара противоположных угловых клеток (см. рисунок), и коробка домино, каждое из которых покрывает ровно две клетки шахматной доски. Возможно ли целиком покрыть такую доску с помощью 31 кости домино (без свободных клеток и наложений)?



Задание 2.

Полимино, составленные из четырех квадратов, называются ***тетрамино***. Сколько всего существует тетрамино?

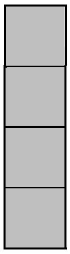
Нарисуйте и назовите их.

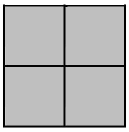
п. 2. Тетрис

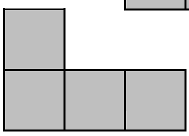
Ответ на задание 1: нет.

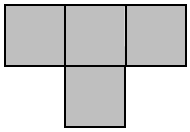
Каждая положенная на нашу доску (см.) кость домино обязательно покроет одно белое и одно черное поле, а N костей домино — N белых и N черных полей, то есть *поровну* тех и других. Но наша доска содержит больше черных клеток, чем белых, и потому ее *нельзя* покрыть костями домино. (Типичное рассуждение комбинаторной геометрии!)

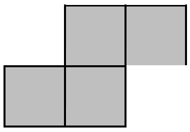
Ответ на задание 2: существует пять тетрамино.

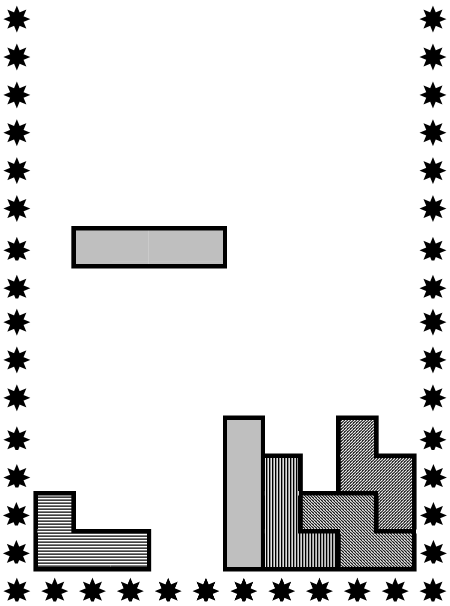

I тетрамино


O тетрамино


L тетрамино


T тетрамино


N тетрамино



Тетрамино известно тем, что советский программист Алексей Пажитнов в 1980 году изобрел компьютерную игру ***Тетрис***, быстро ставшую мировым бестселлером.

Классический Тетрис состоит в том, что в стакан на экране падают тетрамино. Игра заканчивается, когда стакан заполнится доверху. Поэтому нужно постараться уложить тетрамино вплотную друг к другу. Имеется одна возможность продлить игру: когда какой-нибудь слой полностью заполнен, то такой слой исчезает.

Слева изображен фрагмент игры в Тетрис: когда I-тетрамино опустится вниз, то исчезнет 2-й слой снизу.

Придумано множество вариантов Тетриса. Есть тетрисы с трехмерными фигурами в пространстве…

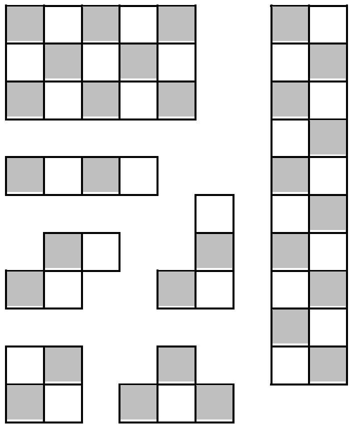
Задание 3.

Докажите, что из пяти различных тетрамино нельзя сложить никакой прямоугольник.

Задание 4.

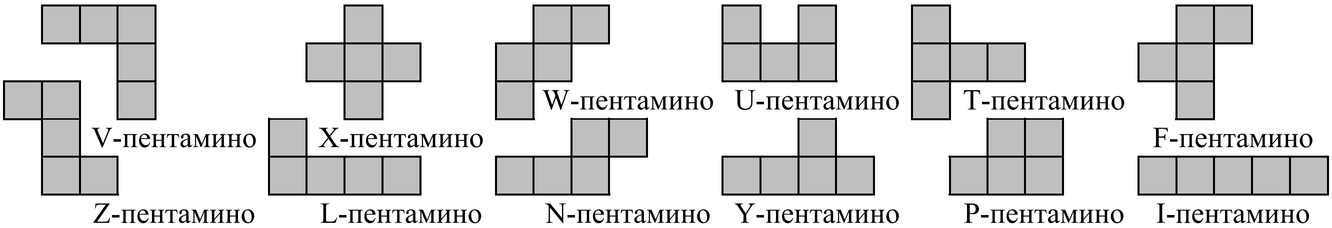
Полимино, составленные из пяти квадратов, называются ***пентамино***. Сколько всего существует пентамино? Нарисуйте и назовите их.

п. 3. Пентикс

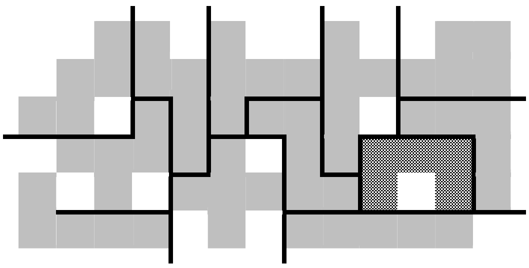


Ответ на задание 3. При складывании любой фигуры 5 тетрамино займут ровно 20 одноклеточных квадратов. Существуют всего два 20-клеточных прямоугольника: 2×10 и 4×5. А теперь раскрасим в шахматном порядке и оба прямоугольника, и все пять тетрамино (см. рис.). Получаем, что 4 тетрамино,— ***уравновешенные***,— покрывают две черные и две белые клетки. Пятое, Т-тетрамино,— ***неуравновешенное***,— покрывает три клетки одного цвета и одну — другого. Поэтому все пять тетрамино покроют *нечетное* число клеток каждого цвета и не смогут покрыть оба прямоугольника, содержащих по 10 клеток каждого цвета.

Ответ на задание 4: существует всего 12 пентамино.

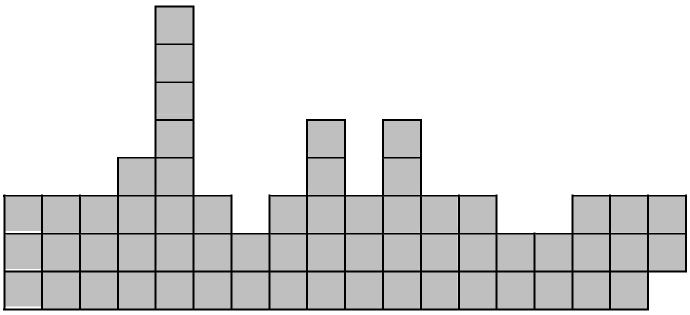


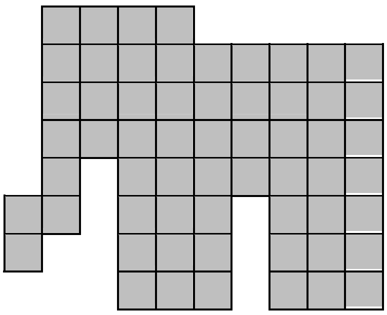
Вариант тетриса — спортивная компьютерная игра ***Пентикс***. В ней в стакан падают не только тетрамино, но все полимино от мономино до пентамино включительно. При Алтайском госуниверситете (АГУ) зарегистрирована Алтайская федерация пентикса (АФП) и открыт в интернете пентиксный клуб «Стакан Пажитнова». Попасть туда и набрать рейтинг можно с интернетовского адреса АГУ: tbs.dcn-asu.ru.



Комплект пентамино легко сделать. На рис. показано, как вырезать 12 пентамино из прямоугольника 6×13. U-пентамино требует отдельного вырезания.

Задание 5. Сложите из 12 элементов пентамино прямоугольник 12×3 и эти 2 фигуры.

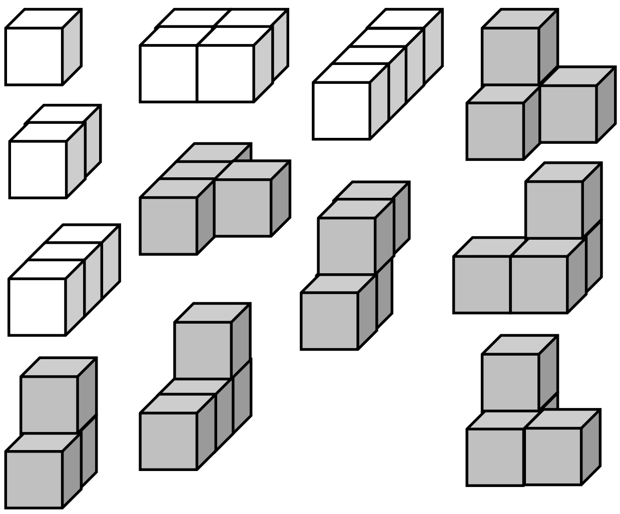




Задание 6. Полимино можно сложить из кубов. Нарисуйте все пространственные полимино низших порядков, т. е. вплоть до тетрамино.

п. 4. Кубики Сома

Ответ на задание 6. Слева нарисованы все пространственные полимино

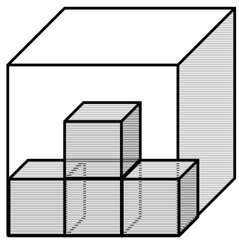


низших порядков вплоть до тетрамино. Здесь полимино задается с точностью до положения в пространстве.

Заметим, что первая *существенно пространственная фигура*, т. е. такая фигура, что все образующие ее кубы нельзя расположить в одной плоскости, находится лишь среди тетрамино. Это связано с тем обстоятельством, что любые три точки, например, центры кубов, всегда принадлежат одной плоскости, тогда как для четырех точек это необязательно.

Два из трех существенно пространственных тетрамино «зеркально равны» друг другу,— они отличаются один от другого, как левый ботинок от правого. Их можно рассматривать как получающиеся зеркальным отображением друг друга.

Один датчанин придумал игру «Кубики Сома». ***Кубики Сома*** представляют собой семь заштрихованных на рис. пространственных тел: шесть тетрамино и одно тримино. Суть игры сводится к тому, чтобы сложить из семи перечисленных тел куб размером $3 \times 3 \times 3$, а также множество других занимательных пространственных фигур.



Можно доказать, что в собранном из кубиков Сома кубе Т-тетрамино может располагаться только единственным образом, показанном на рисунке справа.

Легко просчитать на компьютере, что всего различных вариантов сбора куба $3 \times 3 \times 3$ из кубиков Сома, разумеется, не считая поворотов и зеркальных отражений, ровно 240. При таком расчете можно воспользоваться свойством Т-тетрамино, описанным выше.

Задание 7.

Сделайте кубики Сома. Затем соберите куб $3 \times 3 \times 3$ и зарисуйте его.

Существуют трехмерные обобщения компьютерной игры Тетрис. Одно из них — игра BlockOut — включено в постоянную коллекцию игр автора.

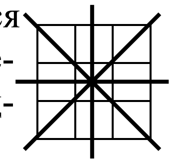
§ 2. Крестики-нолики

Игру нельзя отрицать (никто не скажет,
что игра — искусственное понятие).
Йохан Хейзинга. Homo Ludens.

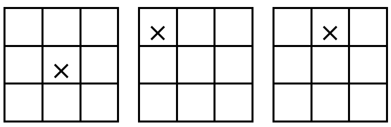
п. 1. Крестики-нолики

Исследуем известную игру ***крестики-нолики***. Правила следующие:: 1) играют на доске 3 × 3; 2) ***ходят*** по очереди: 1-й игрок ставит крестик на любое свободное поле, 2-й игрок — нолик; 3) ***выигрывает*** тот, кто первым поставит в ряд 3 своих значка (по вертикали, горизонтали или диагонали).

Исследование будем проводить перебором ***позиций***, получающихся при ходах противников. Поскольку у игрового поля 3 × 3 имеются 4 оси зеркальной симметрии (см. рис.), то позиции, получающиеся друг из друга зеркальным отражением относительно либо одной, либо двух осей подряд будем считать идентичными.

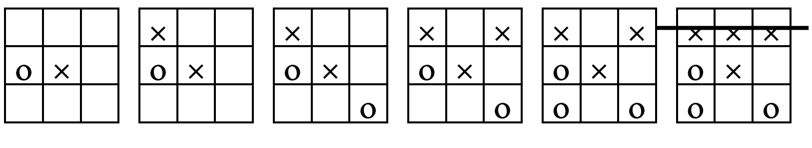


Это означает, что первый игрок может поставить первый крестик только на три различных поля (см. рис.), т. к. остальные 6 полей получаются из этих трех зеркальным отражением относительно одной из осей симметрии, т. е. эти 6 полей ***эквивалентны*** одному из трех нарисованных.



Задание 1. Нарисуйте оси симметрии для каждого из этих крестиков, относительно которых получаются из них остальные 6 крестиков.

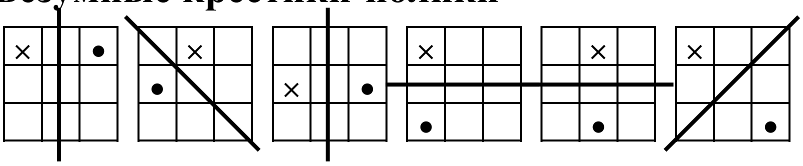
Покажем, что если первый игрок поставил первый крестик в центр поля, а второй игрок поставил первый нолик на середину любой стороны, то второй игрок форсированно проигрывает (если, конечно, первый игрок не поддается, а играет правильно). Пусть второй игрок поставил нолик на середину левой стороны. Достаточно рассмотреть этот случай, т. к. остальные 3 случая (второй игрок ставит нолик на середину других сторон) эквивалентны этому (получаются из него зеркальной симметрией). Тогда выигрышная партия первого игрока показана слева. Этот выигрыш ***форсирован***, т. к. первый игрок выигрывает независимо от ходов второго игрока.



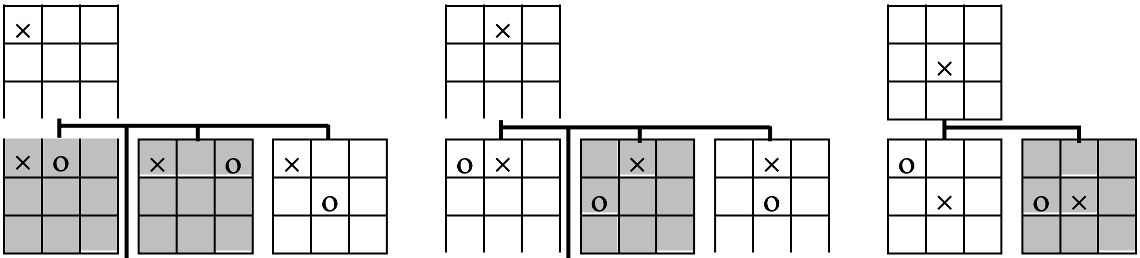
Задание 2. Сколько всего *разных* ноликов — с учетом симметрии — может поставить второй игрок в ответ на каждый из трех первых ходов первого игрока? Нарисуйте все эти *разные* ответы второго игрока, а также остальные эквивалентные ответы с осями симметрии. Какие из этих ответов приводят к *форсированному* проигрышу второго игрока? Докажите.

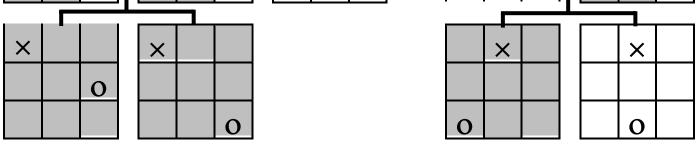
Существуют игры-гибриды тетриса и крестиков-ноликов: это все ***цветные тетрисы***, где пропадают ряды из 3 и более элементов одного цвета (Columns, Tetcolor и другие).

п. 2. Безумные крестики-нолики



Ответ на задание 1. Слева изображены точками 6 оставшихся первых ходов первого игрока и зеркальные симметрии, которыми они получаются из трех разных ходов первого игрока, описанных в п. 1.





Ответ на задание 2. Существует 12 разных первых ходов второго игрока. Все они приведены на дереве вариантов. 7 из них закрашены: они ведут к форсированному проигрышу второго игрока.

4 проигрышных ответа 2-го игрока приходится на первый ход 1-го игрока в угол. Следовательно, с новичками, плохо играющими в эту игру, нужно начинать первым ходом в угол, и тогда только единственный ответ 2-го игрока не ведет к проигрышу. Поэтому если ответ 2-го игрока достаточно случаен, то в 4 случаях из 5 2-й игрок форсированно проигрывает!

Задание 3. На дереве выше изображены 15 досок с ходами. Дорисуйте дерево ходов до конца: 1) с учетом симметрии, рисуя только разные ходы; 2) дерево обрывается, если позиция ведет к форсированному выигрышу или ничьей; 3) игроки не совсем тупые и реагируют на непосредственную угрозу поставить 3-й знак. Есть ли позиции с форсированным выигрышем 2-го игрока? Может ли 2-й игрок заставить выиграть 1-го? А наоборот? Сколько всего получилось *разных* досок с ходами?

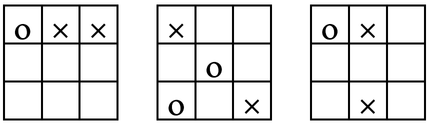
Можно играть в ***поддавки***: тот, кто выстроит ряд из своих знаков, проигрывает. Здесь, как и в обычных крестиках-ноликах, при правильной игре обоим игрокам гарантирована ничья, хотя инициатива уже у ноликов. В поддавках у крестиков есть надежная стратегия: на первом ходу крестик ставится в центр, а затем крестики симметрично повторяют ходы ноликов.

Следующая разновидность игры еще интереснее: это ***безумные крестики-нолики***. Здесь каждый игрок при своем ходе может поставить как крестик, так и нолик — что ему заблагорассудится. Побеждает тот, кто первым закончит ряд из одинаковых знаков, безразлично каких. Однако игроки оказываются в неравном положении: начинающий всегда выигрывает. Можно играть и ***безумные поддавки***: ходят любыми знаками и проигрывает тот, кто первым образует ряд из трех одинаковых знаков.

Задание 4. Найдите и нарисуйте выигрыш первого игрока в безумных крестиках-ноликах. Кто выигрывает в безумных поддавках? Докажите.

п. 3. Крестики-нолики на бесконечном поле

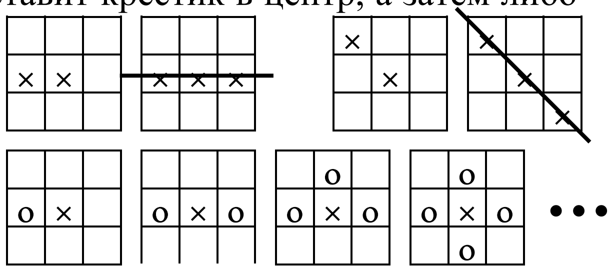
Ответ на задание 3. Ответы на все вопросы положительные. Слева



показаны следующие позиции, в которых соответственно: 1) второй игрок форсированно выигрывает; 2) второй игрок заставляет выиграть первого игрока; 3) первый игрок заставляет выиграть второго игрока.

Теперь понятно, что после того, как новички научатся отвечать на крестик в углу, нужно начинать игру с крестика на стороне: в дереве ходов гораздо больше позиций, где первый игрок форсированно выигрывает, на ветке с первым крестиком на стороне.

Ответ на задание 4. Первый игрок ставит крестик в центр, а затем либо выигрывает следующим ходом, либо ставит симметрично тот же знак, что и второй игрок. Некоторые варианты нарисованы справа, последний из которых не доведен до конца. В безумных поддавках при правильной игре никто не выигрывает: каждому игроку гарантирована ничья.



Следующее усложнение ***крестиков-ноликов*** предложены ***Силверманом***: играют любыми знаками, как в безумном варианте, но теперь один из противников выигрывает, если сводит игру к ничьей (ни у кого нет ряда из трех одинаковых знаков), а другой — если на доске все же образуется ряд из трех любых одинаковых знаков.

Задание 5. Докажите, что в крестиках-ноликах Силвермана побеждает тот, кто выстраивает ряд из трех знаков независимо от очередности хода.

Однако самые популярные — это ***крестики-нолики на бесконечном поле***: двое по очереди ставят свои знаки на клетчатой бумаге, стремясь поставить в ряд пять своих знаков. По теории, крестики всегда могут выиграть. Однако на практике у крестиков лишь небольшое преимущество.

На компьютере есть старинная игра ***го-моку*** — крестики-нолики на ограниченном квадратном поле 19 × 19.

Задание 6. Выиграйте крестиками в го-моку у компьютера. Ноликами.

Обобщение крестиков-ноликов на бесконечном поле и игры Go-moku — игра Lines (линии), придуманная, как и тетрис, в России. В этой игре на поле 9×9 нужно выстраивать в один или несколько рядов 5 или более шариков одного цвета.

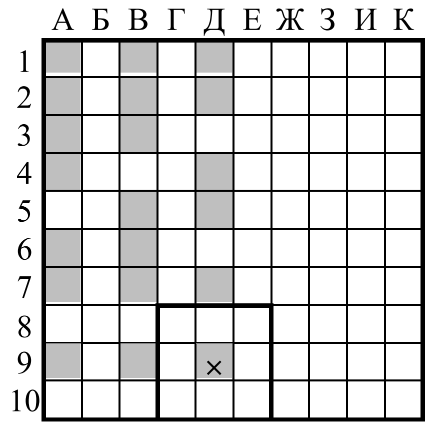
Обобщение игры Lines — игра Balls (шарики), в которой, в зависимости от варианта игры, нужно собирать из шариков одного цвета разные геометрические фигуры. Lines — просто один из вариантов этой игры, где фигурой является одна или больше линий из 5 или более шариков.

§ 3. Морскойбой

Всякая игра есть прежде всего и в первую голову свободная деятельность.

Йохан Хейзинга. Homo Ludens.

п. 1. Правила



У нас будут такие правила. У каждого из двух игроков есть две таблицы 10×10. Строки таблиц обозначаются цифрами, столбцы — буквами (см. рис.). Тогда каждая клетка таблицы однозначно определяется буквой и цифрой (***метод координат***).

Каждый игрок на одной из таблиц расставляет свой флот: один линкор — 4 клетки подряд по вертикали или по горизонтали; два крейсера — по 3 клетки; три двуклеточных эсминца и четыре одноклеточных подводных лодки. При этом корабли *не должны иметь общих точек*. Расположение кораблей — военная тайна игрока, однако честный игрок посылает противнику запечатанный пакет с копией расстановки своих кораблей, вскрываемый *после* игры (см. рис.).

Затем игроки по очереди обмениваются выстрелами. Каждый ***ход*** — выстрел по одной из клеток таблицы противника. При этом противник отвечает «мимо», если эта клетка не является частью одного из его кораблей, «попал» в противном случае, и добавляет «убил», если это была последняя неубитая клетка одного из кораблей. Если выстрел «мимо», право выстрела переходит к противнику, иначе игрок продолжает стрелять. ***Выигрывает*** тот, кто первым потопит весь флот противника (с учетом первого хода).

На одной таблице стоит собственный флот игрока, на другой отмечаются удары по таблице противника и их результаты. Желательно учитывать, что когда один из кораблей противника «убит», то стрелять по клеткам, соседними с этим кораблем, бессмысленно, т. к. там не может быть кораблей (корабли не имеют общих точек). Например, если на рис. потоплена подводная лодка на Д9, то стрелять вокруг нее в квадрате 3×3 бесполезно.

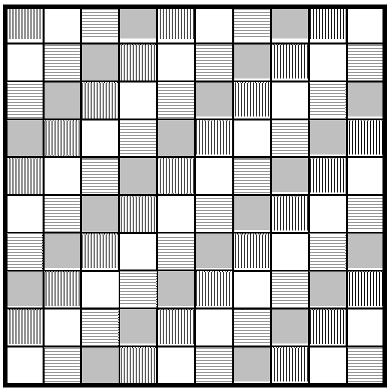
Чем может помочь математика игроку в морской бой?

> Задание 1.
>
> На доске 10×10 расположен один линкор. По скольким клеткам надо нанести удары, чтобы наверняка попасть в линкор?
>
> Придумайте план из возможно меньшего числа выстрелов, гарантирующий попадание в линкор.

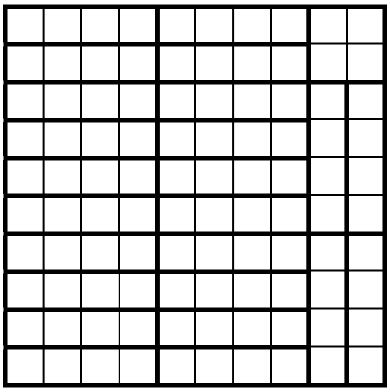
Придумайте план из *наименьшего* числа выстрелов n, т. е. докажите: 1) данный план гарантирует попадание в линкор, где бы он ни находился в таблице; 2) не существует такого плана с числом выстрелов $n - 1$.

п. 2. Как попасть в линкор?

Ответ на задание 1. План — это множество клеток доски такое, что, выстрелив по всем его клеткам, мы обязательно попадем в линкор. Если выстрелить по всем 100 клеткам, то, конечно, линкор будет задет.



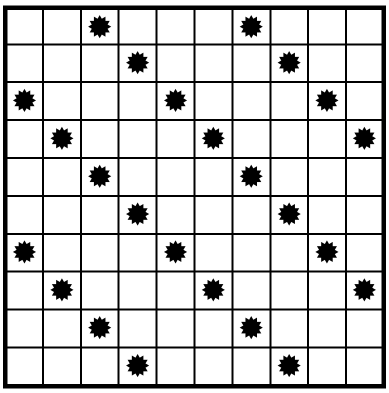
Но 100 выстрелов — это слишком много. Интуиция подсказывает, что выгодней стрелять по диагоналям, расположенным как можно дальше друг от друга, но чтобы при этом линкор не мог втиснуться между этими диагоналями. Поэтому раскрасим диагонали доски четырьмя красками, как на рисунке справа. Имеем четыре плана стрельбы: по клеткам с вертикальной штриховкой, горизонтальной, белым или серым. На доске всего 25 клеток с вертикальной штриховкой, 25 — с горизонтальной, 26 белых и 24 серых.

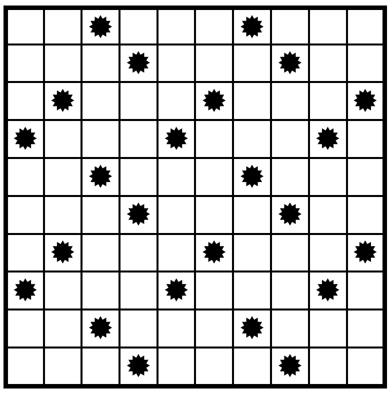


Все планы гарантируют попадание в линкор: где бы он ни находился, он занимает ровно одну клетку каждого цвета; поэтому, стреляя, например, по серому плану, мы не более чем за 24 выстрела попадем в линкор.

А теперь докажем, что не существует плана из 23 выстрелов. На рисунке справа расставлены 24 непересекающихся линкора. Любой план из 23 выстрелов оставит, по ***принципу Дирихле***, один из 24 линкоров без попадания. Следовательно, 23 выстрелов недостаточно.

Можно доказать, что существует всего два разных плана стрельбы из 24 выстрелов для попадания в линкор, которые изображены ниже (еще два можно получить зеркальным отражением этих двух планов).





Задание 2.

Придумайте план из *наименьшего* числа выстрелов для попадания: а) в крейсер; б) в эсминец; в) в подводную лодку; г) в один из кораблей эскадры, состоящей из одного линкора и одного крейсера.

п. 3. Первый выстрел

Ответ на задание 2. Следующие наименьшие планы находятся и доказываются аналогично заданию 1: а) 33 выстрела; б) 50 выстрелов; в) 100 выстрелов.

Пункт г) сложнее. Очевидно, что за 24 выстрела линкор будет задет, а вместе с ним и эскадра из одного линкора и одного крейсера.

А теперь докажем, что не существует плана из 23 выстрелов! Пусть произведено 23 выстрела. Тогда имеется один из 24 линкоров из решения задачи 1, в который нет попадания. Теперь докажем, что 24 крейсера можно расставить так, чтобы они *не перекрывались* и *не касались* нашего линкора. Крейсеры могут занимать 7 линий доски, параллельных линкору (для любого линкора из 24 из решения задачи 1). На этих семи линиях можно расположить $3 \times 7 = 21$ неперекрывающихся крейсеров. На трех остальных линиях можно всегда расположить *перпендикулярно* линкору еще 4 крейсера. Из этих 25 крейсеров по принципу Дирихле имеется хотя бы один, в который нет попадания из 23 выстрелов. Итак, найдены один линкор и один крейсер, не касающийся линкора, в которые нет попадания.

Итак, количество выстрелов, гарантирующее попадание в один из кораблей эскадры из линкора и крейсера, совпадает с количеством выстрелов, гарантирующих попадание в ее флагман! Можно получить аналогичные результаты и для эскадр, состоящих из другого состава кораблей.

На основе математической теории можно сформулировать рекомендацию: начинать бой с охоты на флагмана (линкор).

А с какого выстрела надо начинать?

Подсчитаем число различных положений линкора, при которых он попадает под выстрел по данной клетке. На рисунке справа на каждой клетке стоит число различных положений линкора, включающих эту клетку. Если все положения линкора равновероятны, то начинать охоту за линкором нужно с центрального квадрата 4×4.

2	3	4	5	5	5	5	4	3	2
3	4	5	6	6	6	6	5	4	3
4	5	6	7	7	7	7	6	5	4
5	6	7	8	8	8	8	7	6	5
5	6	7	8	8	8	8	7	6	5
5	6	7	8	8	8	8	7	6	5
5	6	7	8	8	8	8	7	6	5
4	6	5	7	7	7	7	6	5	4
3	4	6	6	6	6	6	5	4	3
2	3	4	5	5	5	5	4	3	2

Аналогично можно показать, что если положения кораблей равновероятны, то охоту за крейсером нужно начинать с центрального квадрата 6×6, а за эсминцем — 8×8. Однако такой план следует применять только при игре с компьютером, причем с такой компьютерной программой, которая расставляет корабли случайным образом. Одна из таких программ — Sea.

Еще один совет для игры с компьютером: если корабль ранен, то следующий выстрел нужно производить по клетке, принадлежащей возможно большему потенциальному количеству раненых кораблей.

§ 4. Игра «Жизнь»

…надо жить играя. Ведь люди в большей своей части куклы и лишь немного причастны истине.

Платон. Leges.

п. 1. Генетические законы

Игру «Жизнь» придумал математик Конуэй. Возникающие в процессе игры ситуации очень похожи на реальные процессы, происходящие при зарождении, развитии и гибели колонии живых организмов. Для игры «Жизнь» требуется бумага в клеточку.

Основная идея состоит в том, чтобы, начав с какого-нибудь простого расположения отмеченных клеток, проследить за эволюцией исходной позиции под действием «генетических законов» Конуэя, которые управляют рождением, гибелью и выживанием клеток. Обратим внимание на то, что каждую клетку окружают восемь соседних клеток (см. рис.).

8	1	5
4	✹	2
7	3	6

Генетические законы.

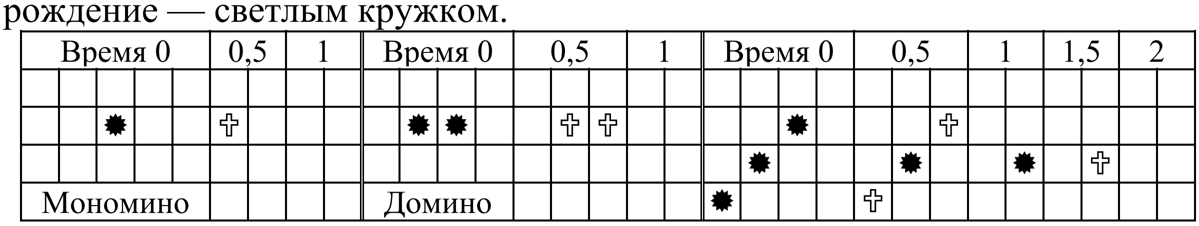
1. ***Выживание***. Каждая отмеченная клетка, имеющая двух или трех отмеченных соседей, выживает и переходит в следующее поколение.

2. ***Гибель***. Каждая отмеченная клетка, у которой больше трех отмеченных соседей (от 4 до 8), погибает из-за перенаселенности, а у которой меньше двух отмеченных соседей (0 или 1), погибает от одиночества.

3. ***Рождение***. Если пустая клетка имеет ровно трех отмеченных соседей, то на этой клетке происходит рождение нового организма, и на следующем ходу она становится отмеченной.

Гибель и рождение всех «организмов» происходят одновременно. Вместе взятые, они образуют одно поколение, один ход в эволюции.

Рассмотрим, что происходит с некоторыми простыми конфигурациями. Очевидно, что мономино и домино (см. § 1. Полимино) погибают на первом ходу от одиночества. Ниже приведена эволюция мономино, домино и одного триплета. Каждый ход будем отмечать целым временем: начальная конфигурация — время 0, отметки гибели и рождения — время 0,5, следующий ход — время 1, и т. д. Гибель организма отмечаем крестом, рождение — светлым кружком.



Рассмотренные выше три простейшие конфигурации погибли. Существуют ли начальные конфигурации, которые не вымирают?

Задание 1.

Нарисуйте эволюцию двух тримино и пяти тетрамино.

п. 2. Неумирающие конфигурации

Ответ на задание 1. Рассмотрим эволюцию обоих тримино.

Время 0					0,5				1					1,5		2	
		✸			✝									○		✸	
		✸		○	✸	○		✸	✸	✸			✝	✸	✝	✸	
		✸			✝									○		✸	
I тримино																	

		Время 0			0,5			1			2	
		✸	✸		✸	✸		✸	✸		✸	✸
		✸			✸	○		✸	✸		✸	✸
	L тримино											

Итак, в результате эволюции I тримино превращается в «Мигалку» с периодом 2, а L тримино — в устойчивую конфигурацию «Блок».

Ниже приведены результаты эволюции тетрамино.

0			1					0					1			2					0			1				2		
✸	✸		✸	✸									✸	✸		✸	✸				✸			✸	✸			✸	✸	
✸	✸		✸	✸			✸	✸	✸	✸			✸	✸	✸			✸			✸	✸		✸	✸		✸			✸
													✸	✸		✸	✸					✸		✸	✸			✸	✸	
O-тетрамино							I-тетрамино															N-тетрамино									

	0			1				2			3						0				4						9			
																										✸	✸	✸		
✸				✸			✸	✸			✸	✸					✸			✸	✸	✸		✸						✸
✸	✸	✸		✸	✸		✸	✸		✸			✸			✸	✸	✸		✸		✸		✸						✸
					✸		✸	✸			✸	✸								✸	✸	✸		✸						✸
																										✸	✸	✸		
L-тетрамино																T-тетрамино														

В результате эволюции O-, I-, N- и L-тетрамино превращаются в устойчивые конфигурации («Блок» и «Улей»), а T-тетрамино за 9 ходов превращается в «Навигационные огни» — четыре «Мигалки» с периодом 2.

Задание 2.

Найдите другие устойчивые конфигурации, кроме «Блока» и «Улья».

	✸			✸	
	✸	✸	✸	✸	
✸					✸
✸		✸	✸		✸
✸					✸
	✸	✸	✸	✸	

Было открыто множество интересных начальных конфигураций. Например, «Чеширский кот», изображенный справа. После исчезновения «улыбки» «Чеширского кота» отстается лишь «отпечаток кошачьей лапки».

Задание 3.

Нарисуйте 7-ходовую эволюцию «Чеширского кота».

Задание 4.

Нарисуйте эволюцию двенадцати пентамино (эволюцию F-пентамино рисовать до конца необязательно).

п. 3. Скорость света

Ответ на задание 2. Ниже приведены обычные устойчивые конфигурации.

	✹					✹	✹					✹	✹																	
✹		✹			✹			✹			✹			✹				✹				✹	✹			✹		✹	✹	
✹		✹				✹		✹			✹			✹			✹		✹			✹	✹			✹	✹		✹	
	✹						✹					✹	✹					✹												
«Улей»					«Каравай»						«Пруд»						«Ящик»					«Блок»				«Змея»				

	✹																✹						✹				✹	✹		
✹		✹					✹				✹	✹				✹		✹				✹		✹			✹		✹	
	✹		✹			✹		✹			✹		✹				✹		✹				✹		✹			✹		✹
		✹					✹	✹				✹	✹					✹		✹				✹	✹				✹	✹
																			✹											
«Баржа»						«Лодка»					«Корабль»				«Длинная баржа»							«Длинная лодка»					«Длинный корабль»			

Задание 5. Покажите, что это — устойчивые конфигурации.

Ответ на задание 4. Пять из 12 пентамино на пятом ходу погибают, две быстро переходят в устойчивые конфигурации из 7 клеток, а четыре превращаются в «Навигационные огни». 12-е F-пентамино рассмотрим ниже.

Одно из самых замечательных открытий Конуэя — конфигурация из 5 клеток — «Планер», эволюция которого показана ниже. Чтобы проследить относительное перемещение планера, закрашена неподвижная клетка. После второго хода планер сдвигается вниз на одну клетку и отражается относительно диагонали. В геометрии такой тип симметрии называется ***скользящей симметрией***. За два следующих хода планер выравнивается и сдвигается вправо на одну клетку.

Время 0							Время 1							Время 2							Время 3							Время 4			
	✹																														
		✹					✹		✹							✹						✹								✹	
✹	✹	✹						✹	✹					✹		✹							✹	✹							✹
								✹							✹	✹						✹	✹						✹	✹	✹

В игре «Жизнь» максимальная скорость распространения конфигурации равна скорости шахматного короля и называется ***скоростью света***. Поскольку «Планер» переходит сам в себя после 4 ходов и при этом опускается на 1 клетку по диагонали, то говорят, что «Планер» скользит по полю со скоростью, равной одной четвертой скорости света.

Были открыты «Космические корабли», перемещающиеся слева направо с половинной скоростью света. Их конфигурация чуть больше по размеру конфигурации «Планера».

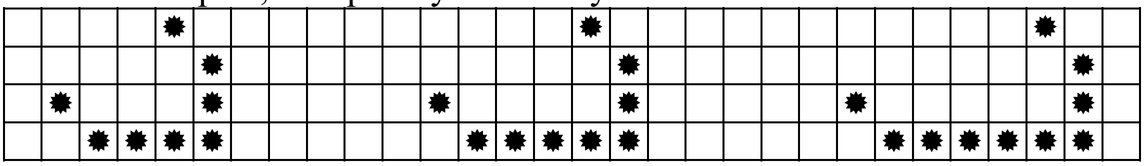
> Задание 6. Найдите хотя бы один «Космический корабль». Поможет в этом специальная компьютерная программа Life.

Кстати, F-пентамино превращается в устойчивую конфигурацию лишь после 1103-го хода: от центра удаляются 6 «Планеров», а вокруг бывшего F-пентамино остаются 19 устойчивых и мигающих конфигураций…

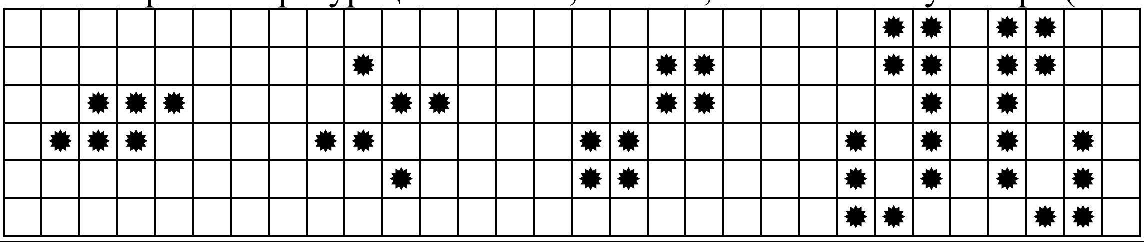
п. 4. «Планерное ружье»

Итак, с компьютерной программой можно легко проверить все задания.

Ответ на задание 6. Ниже приведены три «Космических корабля» легкого, среднего и тяжелого типов. Все они передвигаются горизонтально слева направо со скоростью, равной половине скорости света. В полете из них вылетают «искры», которые тут же гаснут.

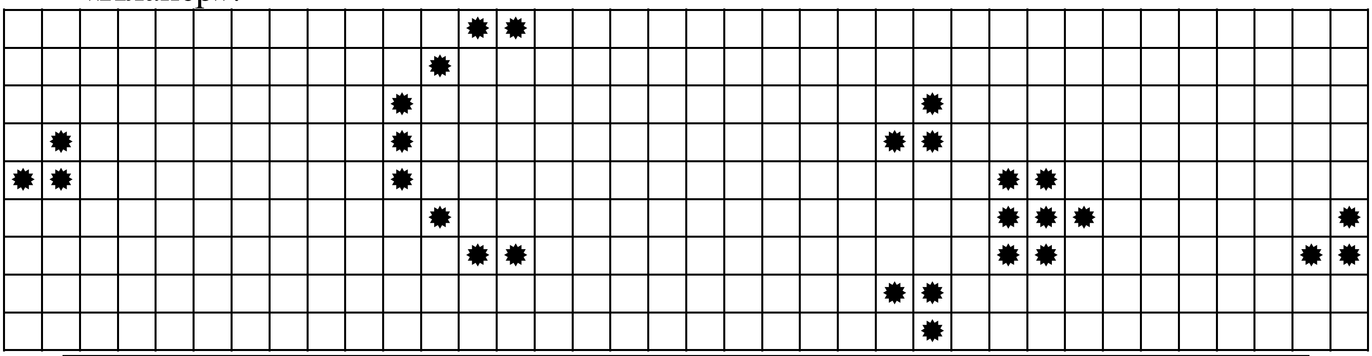


Рассмотрим конфигурации «Жаба», «Часы», «Бакен» и «Тумблер» (ниже).



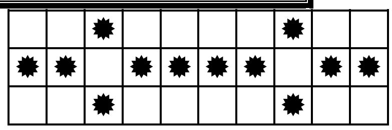
> Задание 7. Посмотрите, как «Жаба» «дышит», «Часы» «тикают», «Бакен» «зажигается» с периодом 2, а «Тумблер» «переключается» с периодом 14.

В ноябре 1970 года Конуэю пришлось выдать обещанную премию: группа математиков из Массачусетского технологического института построила «Ружье», стреляющее «Планерами»! Ниже приведена начальная конфигурация, которая превращается в такое «Ружье». На 40-м ходу из «Ружья» вылетает первый «Планер», через каждые 30 ходов — новый «Планер».



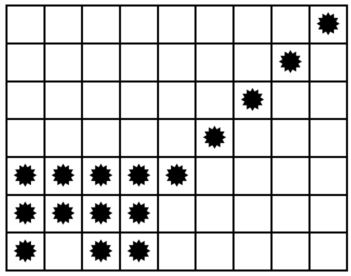
> Задание 8. Запустите на компьютере «Планерное ружье».

Та же группа исследователей обнаружила пентадекатлон, который уничтожает «Планеры», вылетевшие из «Ружья», располагаясь в правом нижнем



углу (см. справа).

«Жнейка» движется снизу вверх по бесконечной диагонали со скоростью света, осциллируя с периодом 4, и вдоль всего пути оставляет за собой «снопы» (см. справа).



Задание 9. Какие такие «снопы» оставляет «Жнейка»?

Задание 10. А как «работает» пентадекатлон?

Литература

1. История математики

1. **Даан-Дальмедико А., Пейффер Ж.** Пути и лабиринты. Очерки по истории математики.— М.: Мир, 1986.
3. **Депман И.** Рассказы о математике.— Л.:Детгиз, 1954.
3. **Идрис Шах**. Суфизм.— М.: Клышников, Комаров и К°, 1994.
4. **Малаховский В.С.** Введение в математику.— Калининград: Янтарный сказ, 1998.
5. **Малаховский В.С.** Избранные главы истории математики. Ч. 1.— Калининград: Изд-во КГУ, 2001.
6. **ʹОмар Х͜аййāм.**Трактаты.— М.: 1961.
7. **Соболевский С.И.** Древнегреческий язык.— СПб: Алетейя, 1999,
8. **Стройк Д.Я.** Краткий очерк истории математики.— М.: Наука, 1984.

2. Высшая математика

1. **Александров П.С.** Введение в теорию групп.—М.: Наука, 1980.
2. **Белага Э.Г.** Мини-геометрии (четыре фрагмента математики XX века).— М.: Знание, 1977.
3. **Гарднер М.** Математические досуги.— М., Мир, 1972.
4. **Гильберт Д., Кон-Фоссен С.** Наглядная геометрия.
5. **Гладкий А.В.** Конспект лекций по математической логике и теории множеств.— Калинин: КГУ, 1974.
6. **Гладкий А.В.** Язык математической логики.— Калинин: КГУ, 1977.
7. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа.— М.: Наука, 1976.
8. **Локоть Н.В.** Математика для нематематиков.— Мурманск: 1997.
9. **Малаховский В.С.** Введение в математику.— Калининград: 1998.
10. **Математическая энциклопедия**.— М.: Советская энциклопедия, 1977—1985.— Т. 1—5.
11. **Мостеллер Ф., Рурке Р., Томас Дж.** Вероятность.— М.: Мир, 1969.
12. **Рингель Р.** Теорема о раскраске карт.— М.: Мир, 1977.
13. **Саркисян А.А., Колягин Ю.М.** Познакомьтесь с топологией (на подступах к топологии).— М.: Просвещение, 1976.
14. **Тутубалин В. Н.** Теория вероятностей.— М.: МГУ, 1972.
15. **Уилсон Р.** Введение в теорию графов.— М.: Мир, 1977.
16. **Фомин А.Т.** Наглядная геометрия и топология: Математические образы в реальном мире.— М.: МГУ, 1998.

3. Факультативные занятия

1. **Гарднер М.** Математические досуги.— М., Мир, 1972.
2. **Гик Е.** Крестики и нолики // Квант.— 1994.— № 1.
3. **Голомб С.В.** Полимино.— М., Мир, 1975.
4. **Гусев В.А., Орлов А.И., Розенталь А.Л.** Внеклассная работа по математике в 6-8 классах.— М.: Просвещение, 1977.

Оглавление

Учебное издание

Сергей Валентинович Мациевский

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КУЛЬТУРА

Учебное пособие

Лицензия № 020345 от 27.12.91 г.
Издается в авторской редакции.
Оригинал-макет подготовлен С. В. Мациевским.

Набрано и распечатано в текстовом редакторе MS Word 8 в среде Windows 98
с использованием следующих лицензионных шрифтов:
Times New Roman (основной текст), Arial (заголовки), Courier New (таблица чисел), Symbol (математические символы и греческий), WP MathA (математические символы), Casper Open (математические буквы), WP Greek Century (древнегреческий), Heinkel (готика), WP Arabic Sihafa (арабский), WP Hebrew David (иврит), WP TypographicSymbols (символ Z).

Подписано в печать 02.04.01. Формат $60\times90^1/_{16}$.
Бумага для множительных аппаратов. Усл. печ. л. 4,5.
Уч.-изд. л. 3,5. Тираж 300 экз. Заказ

Издательство Калининградского государственного университета
236041, г. Калининград, ул. А. Невского, 14.