

ББК 22.162я73
Г70
УДК 517.98 (07)

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук Ю. Л. Далецкий (Киевский политехнический институт), д-р физ.-мат. наук М. Л. Горбачук, канд. физ.-мат. наук В. А. Кутовой (Институт математики АН УССР)

Редакция литературы по математике и физике
Редактор Г. Г. Рубан

Городецкий В. В. и др.

Г70 Методы решения задач по функциональному анализу: Учеб. пособие / В. В. Городецкий, Н. И. Нагнибида, П. П. Настасиев. — К.: Выща шк., 1990. — 479 с.: ил.

ISBN 5-11-002126-0

Даны основные топологические понятия, изложена теория линейных операторов в нормированных пространствах. Описаны основные классы абстрактных пространств (метрические, топологические, нормированные и гильбертовы). Приведены решения задач разной степени трудности. Особое внимание уделено самостоятельной работе студентов.

Для студентов университетов, обучающихся по специальностям «Математика», «Прикладная математика».

Г 1602080000—097 56—90
М 211 (04)—90

ББК 22.162я73

ISBN 5-11-002126-0

© В. В. Городецкий, Н. И. Нагнибида,
П. П. Настасиев, 1990

Каждая решенная мною задача становилась образцом, который служил впоследствии для решения других задач.

Рене Декарт

Курс функционального анализа, изучаемый студентами специальностей «Математика» и «Прикладная математика» в университетах, а также в некоторых технических вузах, относится к одному из наиболее абстрактных и поэтому довольно трудному курсу. Абстрактность позволяет исследовать далекие, на первый взгляд, друг от друга вопросы. Сегодня концепции функционального анализа и его аппарат пронизывают почти все области математики (а также ряд смежных дисциплин, например: гидромеханику, статистическую физику, квантовую механику, квантовую теорию поля), объединяя их в единое целое. Поэтому необходимо научить студентов активно применять методы и принципы функционального анализа, а также освоить методику решения соответствующих задач.

На практические занятия по этому курсу выделяется очень мало времени. Студенты не успевают выработать и закрепить необходимые навыки при решении стандартных (и, тем более, нестандартных) задач. Поэтому желающий овладеть ими должен много заниматься самостоятельно (особенно это касается студентов-заочников). В математике одним из лучших способов глубокого усвоения предмета является решение задач, где используются изучаемые теоретические сведения. К сожалению, достаточно полных сборников задач по функциональному анализу, отвечающих программе этого курса, в настоящее время нет. Еще более остро ощущается нехватка пособий, способных помочь студенту в его самостоятельной работе. Предлагаемая книга ставит своей целью восполнить эти пробелы.

Структура пособия такова. Каждый параграф начинается с изложения основных понятий и теоретических сведений. Это связано с тем, что в литературе имеются некоторые различия в терминологии, в системе основных понятий, а также в схемах построения разделов функционального анализа. Мы считаем, что предлагаемое изложение будет полезным и удобным для читателя. В каждом параграфе решается достаточное число примеров и задач, иллюстрирующих основные методы функционального анализа. В конце параграфа приведены задачи для самостоятельной работы.

В гл. 1 дано построение меры и интеграла Лебега. На конкретном материале рассматриваются основные топологические понятия, изучаемые более абстрактно в остальных главах. Речь идет о свойствах и структуре открытых и замкнутых множеств в $\mathbb{R}^n$, различных типах сходимостей функциональных последовательностей, полноте лебеговых пространств, преобразовании Фурье в пространствах интегрируемых

функций и др. Рассматриваются операции интегрирования и дифференцирования на отрезке числовой оси.

В гл. 2 изучаются основные классы абстрактных пространств: метрические, линейные топологические, нормированные и гильбертовы.

В гл. 3 приведена теория линейных операторов в нормированных пространствах, которая составляет основу функционального анализа.

К концу XIX ст. естественное развитие математического анализа и других смежных дисциплин привело к необходимости расширения понятия интеграла. Определение интеграла Римана, как предела римановых сумм, рассчитано, в первую очередь, на то, чтобы интегрируемыми оказались все непрерывные или кусочно-непрерывные в замкнутой ограниченной области функции. Хотя некоторые типы разрывных функций также интегрируемы по Риману, однако класс их весьма узок. При построении интеграла Римана область интегрирования разбивается на множества сравнительно несложной формы (например, в одномерном случае промежутки интегрирования разбиваются только на промежутки и используется лишь понятие длины промежутка). Поэтому возникает необходимость распространить понятие длины промежутка, площади фигуры и объема тела на множества более сложной природы. Это было осуществлено Лебегом в его теории меры. На базе этой теории удалось дать новое совершенное и гибкое понятие интеграла, введенное Лебегом. При этом класс интегрируемых по Лебегу функций значительно шире, чем интегрируемых по Риману. Кроме того, интеграл Лебега имеет ряд других замечательных свойств, отличных от интеграла Римана. Это связано с тем, что он более гибко приспособлен к операциям предельного перехода. Поэтому в современных математических исследованиях лебегова конструкция интеграла вытеснила риманову.

§ 1. МЕРА ЛЕБЕГА В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1. Мера параллелепипедов и ее свойства. Введем понятие m -мерного евклидова пространства. Пусть m — любое натуральное число.

Точкой m -мерного пространства называется m вещественных чисел $\xi_1, \dots, \xi_m$, расположенных в определенном порядке. Обозначим эту точку через $x = (\xi_1, \dots, \xi_m)$, где $\xi_1, \dots, \xi_m$ — координаты точки x . Множество всех точек $x = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ (при заданном значении m) называется m -мерным евклидовым пространством $\mathbb{R}^m$. При $m = 1$ будем писать $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$, поскольку одномерное пространство $\mathbb{R}$ можно отождествить с совокупностью вещественных чисел или точек на прямой. При $m = 2$ и $m = 3$ рассматриваем плоскость $\mathbb{R}^2$ и пространство $\mathbb{R}^3$.

Пусть $A_1, A_2, \dots, A_m$ — произвольные множества пространства $\mathbb{R}$. Тогда их декартовым произведением $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m$ называется множество пространств $\mathbb{R}^m$

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m = \{x = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m : \xi_1 \in A_1, \dots, \xi_m \in A_m\}.$$

Например, пространство $\mathbb{R}^m$ является декартовым произведением множеств $A_1 = \mathbb{R}, \dots, A_m = \mathbb{R}$, т. е. $\mathbb{R}^m = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$.

Промежутком A числовой оси $\mathbb{R}$ называется отрезок $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$, или интервал $(a; b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$, или один из полуинтервалов $[a; b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$, $(a; b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$, где $a \leq b$.

Промежуток, в котором хотя бы одно из чисел является бесконечно большим ($a = -\infty, b = +\infty$), называется неограниченным промежутком. Будем рассматривать лишь те промежутки на $\mathbb{R}$, для которых a и b конечны. Мерой (или длиной) такого промежутка A называется число $\mu_1(A) = b - a$.

Параллелепипедом P пространства $\mathbb{R}^m$ называется декартово произведение $P = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m$ промежутков $A_1, A_2, \dots, A_m$ числовой прямой $\mathbb{R}$. При $m =$

$\equiv 1$ параллелепипед совпадает с промежутком, при $m = 2$ — с прямоугольником, а при $m = 3$ — с обычным параллелепипедом. Если $P = (a_1; b_1) \times \dots \times (a_m; b_m) = \{x = (\xi_1, \dots, \xi_m) : a_j < \xi_j < b_j, j = 1, 2, \dots, m\}$, то P называется *открытым параллелепипедом*, а $P = [a_1; b_1] \times \dots \times [a_m; b_m] = \{x = (\xi_1, \dots, \xi_m) : a_j \leq \xi_j \leq b_j, j = 1, 2, \dots, m\}$ — *замкнутым параллелепипедом* в $\mathbb{R}^m$.

Рассмотрим параллелепипед $P = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m$, в котором каждый промежуток A_j совпадает либо с отрезком $[a_j; b_j]$, либо с интервалом $(a_j; b_j)$, либо с одним из полуинтервалов $[a_j; b_j)$, $(a_j; b_j]$. Тогда мерой (объемом) такого параллелепипеда

называется число $\mu_m(P) = \prod_{j=1}^m (b_j - a_j)$.

При $m = 1$ мера параллелепипеда совпадает с длиной промежутка, при $m = 2$ — с площадью прямоугольника, а при $m = 3$ — с объемом обычного параллелепипеда.

Отметим, что пустое множество $\emptyset$ также является параллелепипедом. Например, $\emptyset = [a_1; b_1] \times [a_2; b_2] \times \dots \times [a_m; b_m]$. Вполне естественно считать $\mu_m(\emptyset) = 0$.

Теорема 1. Совокупность $\mathcal{P}_m$ всех параллелепипедов пространства $\mathbb{R}^m$ обладает следующими свойствами:

1) пустое множество $\emptyset$ является параллелепипедом, т. е. $\emptyset \in \mathcal{P}_m$;

2) пересечение конечного числа параллелепипедов из $\mathcal{P}_m$ является параллелепипедом, т. е. если $P_k \in \mathcal{P}_m$ ($k = 1, 2, \dots, n$), то $\bigcap_{k=1}^n P_k \in \mathcal{P}_m$;

3) если P и Q — два параллелепипеда в $\mathbb{R}^m$, причем $Q \subset P$, то в $\mathcal{P}_m$ существует конечное число непересекающихся параллелепипедов $P_1, P_2, \dots, P_n$ таких, что $P \setminus Q = P_1 \cup \dots \cup P_n$.

Теорема 2. Каждому параллелепипеду $P \in \mathcal{P}_m$ можно поставить в соответствие действительное число (меру) $\mu_m(P)$. При этом выполняются такие условия:

1) $\mu_m(P) \geq 0$ для каждого $P \in \mathcal{P}_m$;

2) мера $\mu_m(P)$ аддитивна, т. е. если $P = \bigcup_{k=1}^n P_k$ и $P_k \cap P_j = \emptyset$ при $k \neq j$, то

$$\mu_m(P) = \sum_{k=1}^n \mu_m(P_k).$$

Из теорем 1 и 2 следует, что если параллелепипеды P и Q в $\mathbb{R}^m$ такие, что $Q \subset P$, то $\mu_m(Q) \leq \mu_m(P)$. Это свойство называется *свойством монотонности меры*. Распространим меру $\mu_m(P)$, определенную для параллелепипедов, на более широкий класс множеств, сохранив при этом свойства 1) и 2).

2. Мера элементарных множеств и ее свойства. Множество $E \subset \mathbb{R}^m$ называется *элементарным*, если его можно представить хотя бы одним способом как объединение конечного числа попарно непересекающихся параллелепипедов $P_1, \dots, P_n$, т. е. $E = \bigcup_{k=1}^n P_k$ и $P_k \cap P_j = \emptyset$ при $k \neq j$.

Теорема 3. Объединение, пересечение, разность и симметрическая разность двух элементарных множеств является элементарным множеством.

Симметрической разностью $A \Delta E$ множеств A и E называют множество $A \Delta E = (A \setminus E) \cup (E \setminus A) = (A \cup E) \setminus (A \cap E)$.

Объединение и пересечение конечного числа элементарных множеств является элементарным множеством.

Класс всех элементарных множеств пространства $\mathbb{R}^m$ обозначим символом $\mathcal{E}_m$. На классе $\mathcal{E}_m$ введем меру множеств следующим образом. Пусть множество $E \in \mathcal{E}_m$ представимо в виде $E = \bigcup_{k=1}^n P_k$, где параллелепипеды $P_1, \dots, P_n$ попарно не пересекаются, т. е. $P_k \cap P_j = \emptyset$ при $k \neq j$. Тогда меру элементарного множества определим с помощью равенства $\mu_m(E) = \sum_{k=1}^n \mu_m(P_k)$.

Мера $\mu_m(E)$ не зависит от способа разложения E в сумму конечного числа попарно непересекающихся параллелепипедов.

Основные свойства меры элементарных множеств отражены в следующей теореме.

Теорема 4. Мера μ_m , определенная на классе $\mathcal{E}_m$, обладает такими свойствами:

1) для каждого $E \in \mathcal{E}_m$ мера множества $\mu_m(E)$ является действительным неотрицательным числом;

2) мера $\mu_m(E)$ аддитивна, т. е. если $E = \bigcup_{k=1}^n E_k$ и $E_k \cap E_j = \emptyset$ при $k \neq j$,

то $\mu_m(E) = \sum_{k=1}^n \mu_m(E_k)$;

3) если $E \in \mathcal{E}_m$ и $\{E_k\}$ — конечная или счетная система элементарных множеств такая, что $E \subset \bigcup_k E_k$, то $\mu_m(E) \leq \sum_k \mu_m(E_k)$.

Свойство 3) меры μ_m называется *счетной полуаддитивностью* меры μ_m . Из него и аддитивности меры μ_m получаем *свойство счетной аддитивности* (или σ -аддитивности), состоящее в том, что если элементарное множество E представлено в виде объединения счетного числа непересекающихся элементарных множеств E_k ($k \in \mathbb{N}$),

т. е. $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ и $E_k \cap E_j = \emptyset$ при $k \neq j$, то $\mu_m(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_m(E_k)$.

3. Внешняя мера множеств пространства $\mathbb{R}^m$. В этом пункте рассмотрим специальную функцию, определенную на классе ограниченных множеств пространства $\mathbb{R}^m$ и имеющую важное значение в теории меры. Напомним, что множество $A \subset \mathbb{R}^m$ называется *ограниченным*, если существует параллелепипед (или шар), содержащий множество A . Будем также говорить, что множество $A \subset \mathbb{R}^m$ покрывается системой множеств $\{B_l\}$, где l пробегает некоторое множество индексов I , если $A \subset \bigcup_{l \in I} B_l$.

Определение 1. Внешней мерой ограниченного множества $A \subset \mathbb{R}^m$ называется неотрицательное число $\mu_m^*(A) = \inf_{A \subset \bigcup_k P_k} \sum_k \mu_m(P_k)$, где нижняя грань берется по всевозможным покрытиям множества A конечными или счетными системами параллелепипедов $\{P_k\}$ пространства $\mathbb{R}^m$.

Из определения следует, что внешняя мера $\mu_m^*(A)$ элементарного множества $E \in \mathcal{E}_m$ совпадает с мерой $\mu_m(E)$, т. е. $\mu_m^*(E) = \mu_m(E)$. Кроме того, произвольное ограниченное счетное множество A имеет внешнюю меру $\mu_m^*(A) = 0$.

Теорема 5. Если A — ограниченное множество в $\mathbb{R}^m$, а $\{A_k\}$ — конечная или счетная система ограниченных множеств в $\mathbb{R}^m$ такая, что $A \subset \bigcup_k A_k$, то $\mu_m^*(A) \leq \sum_k \mu_m^*(A_k)$.

Если для ограниченных множеств A, B пространства $\mathbb{R}^m$ справедливо включение $A \subset B$, то $\mu_m^*(A) \leq \mu_m^*(B)$, т. е. внешняя мера μ_m^* является монотонной.

Таким образом, согласно теореме 5, внешняя мера μ_m^* ограниченных множеств обладает свойством счетной полуаддитивности. Однако она не является счетно-аддитивной (см. замечание 2 к примеру 6).

4. Мера Лебега ограниченных множеств пространства $\mathbb{R}^m$.

Определение 2. Ограниченное множество $A \subset \mathbb{R}^m$ называется *измеримым в смысле Лебега*, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое элементарное множество $E \in \mathcal{E}_m$, что $\mu_m^*(A \Delta E) \leq \varepsilon$. При этом мерой Лебега измеримого множества A называется число $\mu_m(A) = \mu_m^*(A)$.

Следовательно, ограниченное множество A измеримо, если его можно «сколь угодно точно приблизить» элементарными множествами. Произвольное элементарное множество $E \in \mathcal{E}_m$ измеримо по Лебегу и его мера (см. п. 2) совпадает с мерой Лебега. Аналогично, исходя из определения, получаем, что ограниченное множество $A \subset$

$\subset \mathbb{R}^m$, у которого $\mu_m^*(A) = 0$, измеримо по Лебегу и $\mu_m(A) = 0$ (это следует из равенства $\mu_m^*(A \setminus \emptyset) = \mu_m^*(A) = 0$). В частности, каждое ограниченное счетное множество $A \subset \mathbb{R}^m$ измеримо и $\mu_m(A) = 0$. Отметим, что в силу монотонности внешней меры μ_m^* , если $B \subset A$ и $\mu_m^*(A) = 0$, то $\mu_m^*(B) = 0$. Тогда каждое подмножество ограниченного множества меры нуль является также множеством меры нуль (свойство полноты меры Лебега).

Теорема 6. Пусть $\mathcal{U}_m'$ — совокупность всех ограниченных измеримых по Лебегу множеств пространства $\mathbb{R}^m$. Тогда, если объединение $A = \bigcup_k A_k$ конечного или счетного числа ограниченных измеримых множеств A_k является ограниченным множеством, то $A \in \mathcal{U}_m'$. Пересечение $A = \bigcap_k A_k$ конечного или счетного числа ограниченных измеримых множеств A_k также является ограниченным измеримым множеством пространства $\mathbb{R}^m$.

Отсюда следует, что разность и симметрическая разность двух ограниченных измеримых множеств пространства $\mathbb{R}^m$ — измеримое множество.

Теорема 7. Каждому ограниченному измеримому по Лебегу множеству $A \subset \mathbb{R}^m$ (т. е. $A \in \mathcal{U}_m'$) можно поставить в соответствие действительное число $\mu_m(A)$, причем выполняются такие условия:

1) $\mu_m(A) \geq 0$ ($\forall A \in \mathcal{U}_m'$);

2) если $A \in \mathcal{U}_m'$ и $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, где $A_k \in \mathcal{U}_m'$ и $A_k \cap A_l = \emptyset$ при $k \neq l$, то

$$\mu_m(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_m(A_k).$$

Таким образом, мера Лебега ограниченных измеримых множеств в $\mathbb{R}^m$ является σ -аддитивной.

Из теоремы 7 следует, что если $A, B \in \mathcal{U}_m'$ и $A \subset B$, то $\mu_m(B \setminus A) = \mu_m(B) - \mu_m(A)$. Кроме того, $\mu_m(A) \leq \mu_m(B)$.

Счетная аддитивность меры Лебега позволяет получить такие теоремы.

Теорема 8. Пусть ограниченные множества $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots$ пространства $\mathbb{R}^m$ измеримы и $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_k \subset \dots$. Если объединение $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ — ограниченное множество, то $\mu_m(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_m(A_k)$.

Теорема 9. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots$ — измеримые ограниченные множества пространства $\mathbb{R}^m$ и $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_k \supset \dots$. Если $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$, то $\mu_m(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_m(A_k)$.

5. Мера Лебега неограниченных множеств пространства $\mathbb{R}^m$. Рассмотрим в $\mathbb{R}^m$ фиксированную неубывающую последовательность параллелепипедов $P_n^* = [-n; n] \times [-n; n] \times \dots \times [-n; n]$, исчерпывающую все пространство $\mathbb{R}^m$: $\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n^* = \mathbb{R}^m$.

Пусть A — некоторое множество в $\mathbb{R}^m$, не обязательно ограниченное. Построим по этому множеству монотонную последовательность $A(n) = A \cap P_n^*$ ($n \in \mathbb{N}$) и введем понятие измеримости множества A .

Определение 3. Множество $A \subset \mathbb{R}^m$ называется измеримым в смысле Лебега, если для каждого натурального $n \in \mathbb{N}$ измеримы множества $A(n)$. Мера Лебега такого множества A называется предел $\mu_m(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_m(A(n))$.

Поскольку последовательность $(\mu_m(A(n)))_{n=1}^{\infty}$ является монотонно неубывающей,

то предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_m(A(n))$ всегда существует. Однако не исключено, что этот предел равен $+\infty$, т. е. $\mu_m(A) = +\infty$. Например, если $A = \mathbb{R}^m$, то $A(n) = \mathbb{R}_n^*$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ и поэтому $\mathbb{R}^m$ измеримо и $\mu_m(\mathbb{R}^m) = +\infty$. Если A — произвольное счетное множество в $\mathbb{R}^m$, то оно измеримо и $\mu_m(A) = 0$.

Если A — ограниченное множество, то $A(n) = A$ ($\forall n \geq n_0$). Поэтому измеримость такого множества A в смысле определения 3 равносильна его измеримости в смысле определения 2 и в обоих случаях меры совпадают.

Таким образом, определение меры Лебега параллелепипедов, элементарных, ограниченных и неограниченных множеств обладает свойством перманентности, т. е. классы этих множеств расширяются и при этом мера множества, принадлежащего разным классам, одна и та же.

Замечание. Можно показать, что неограниченное множество $A \subset \mathbb{R}^m$ измеримо тогда и только тогда, когда измеримо пересечение $A \cap B$ данного множества A с любым измеримым ограниченным множеством B . Кроме того, $\mu_m(A) = \sup_{\tilde{A} \subset A} \mu_m(\tilde{A})$, где точная верхняя грань берется по всем измеримым ограниченным множествам $\tilde{A}$, содержащимся в A .

Пусть $\mathfrak{M}$ — класс всех измеримых по Лебегу множеств пространства $\mathbb{R}^m$ (иногда эти измеримые множества называют μ_m -измеримыми). Справедливы такие теоремы.

Теорема 10. Объединение и пересечение конечного или счетного числа измеримых множеств пространства $\mathbb{R}^m$ является измеримым множеством.

Следовательно, разность и симметрическая разность двух измеримых множеств также измеримые множества.

Теорема 11. Мера Лебега, определенная на классе $\mathfrak{M}$, имеет такие свойства:

1) $\mu_m(A) \geq 0$ для каждого $A \in \mathfrak{M}$;

2) если измеримые множества $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots$ такие, что $A_k \cap A_l = \emptyset$ при

$k \neq l$ и $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, то $\mu_m(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_m(A_k)$.

Отметим, что каждая из частей последнего равенства может быть равна $+\infty$.

Из теоремы 11 следует, что если $A \supset B$ и оба эти множества измеримы, то $\mu_m(A) = \mu_m(B) + \mu_m(A \setminus B)$. Если дополнительно предположить конечность меры $\mu_m(B)$, то $\mu_m(A \setminus B) = \mu_m(A) - \mu_m(B)$. Мера Лебега на $\mathfrak{M}$ также является полной, т. е. если $A \in \mathfrak{M}$ и $\mu_m(A) = 0$, то каждое подмножество $B \subset A$ измеримо и $\mu_m(B) = 0$.

Теорема 8 справедлива и для последовательности неограниченных измеримых множеств. А именно: если $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_k \subset \dots$ — последовательность измеримых множеств пространства $\mathbb{R}^m$ и $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, то $\mu_m(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_m(A_k)$.

Теорема 9 переносится на неограниченные множества в следующем виде.

Теорема 12. Пусть $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_k \supset \dots$ — измеримые множества пространства $\mathbb{R}^m$ и $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$. Если $\mu_m(A_1) < +\infty$, то $\mu_m(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_m(A_k)$.

Теорема 12 не всегда верна, если не учитывать условие $\mu_m(A_1) < +\infty$. Например, если $(A_k = [k; +\infty) \times [k; +\infty) \times \dots \times [k; +\infty))_{k=1}^{\infty}$ — последовательность измеримых множеств пространства $\mathbb{R}^m$, то $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_k \supset \dots \supset \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \emptyset$. Но поскольку для каждого $k \in \mathbb{N}$ $\mu_m(A_k) = +\infty$, то равенство $\mu_m(\emptyset) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_m(A_k)$ нарушается.

Непустая совокупность $\mathfrak{M}$ множеств пространства $\mathbb{R}^m$ называется *кольцом*, если вместе с двумя своими элементами она содержит их объединение, пересечение и разность, т. е. если $A \in \mathfrak{M}$ и $B \in \mathfrak{M}$, то $A \cup B \in \mathfrak{M}$, $A \cap B \in \mathfrak{M}$ и $A \setminus B \in \mathfrak{M}$. Например, совокупности $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ и $\mathfrak{M}_3$ являются кольцами, а $\mathfrak{M}_4$ не будет кольцом потому, что

разность двух параллелепипедов не является параллелепипедом. Класс множеств $\mathfrak{M}$ пространства $\mathbb{R}^m$ называется σ -кольцом, если $\mathfrak{M}$ является кольцом и объединение счетного числа элементов множества $\mathfrak{M}$ также принадлежит $\mathfrak{M}$, т. е. если $A_k \in \mathfrak{M}$ ($k = 1, 2, \dots$), то $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{M}$. Если σ -кольцо $\mathfrak{M}$ такое, что само пространство $\mathbb{R}^m$ принадлежит $\mathfrak{M}$, то $\mathfrak{M}$ называется σ -алгеброй. Таким образом, смысл теоремы 10 состоит в том, что совокупность $\mathfrak{M}_m$ всех измеримых множеств пространства $\mathbb{R}^m$ образует σ -алгебру, а мера Лебега μ_m является на $\mathfrak{M}_m$ σ -аддитивной.

Движением в пространстве $\mathbb{R}^m$ называется всякое взаимно однозначное соответствие $\mathbb{R}^m$ на себя, при котором расстояние между любыми двумя точками равно расстоянию между их образами. Напомним, что расстояние $\rho(x; y)$ между точками $x = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ и $y = (\eta_1, \dots, \eta_m)$ пространства $\mathbb{R}^m$ определяется по формуле

$$\rho(x; y) = \sqrt{\sum_{j=1}^m (\xi_j - \eta_j)^2}.$$

Например, движением в $\mathbb{R}^m$ является параллельный перенос. Можно доказать, что всякое движение φ есть аффинное преобразование с определителем, равным единице,

т. е. если $x^* = \varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}^m$, то $\xi_j^* = \sum_{i=1}^m \alpha_{j,i} \xi_i + \beta_j$ и $\det(\alpha_{j,i})_{j,i=1}^m = 1$, где β_j и $\alpha_{j,i}$ — действительные числа, а $x^* = (\xi_1^*, \dots, \xi_m^*)$, $x = (\xi_1, \dots, \xi_m)$. Однако не всякое аффинное преобразование с определителем, равным единице, является движением. Например, преобразование $\xi_1^* = 2\xi_1$, $\xi_2^* = \frac{1}{2}\xi_2$ плоскости $\mathbb{R}^2$ не является движением.

Множества A_1 и A_2 из $\mathbb{R}^m$ называются *конгруэнтными*, если одно из них — образ другого при некотором движении.

Теорема 13. Мера Лебега μ_m инвариантна относительно движения, т. е. если множества A_1 и A_2 пространства $\mathbb{R}^m$ конгруэнтны и одно из них измеримо, то другое также измеримо и $\mu_m(A_1) = \mu_m(A_2)$.

6. Класс измеримых множеств. Охарактеризуем совокупность всех измеримых множеств в $\mathbb{R}^m$. Для этого напомним вначале ряд важных фактов, относящихся к понятиям открытого и замкнутого множеств пространства $\mathbb{R}^m$.

Пусть $a \in \mathbb{R}^m$ и r — положительное число. Тогда множество $\{x \in \mathbb{R}^m : \rho(x, a) < r\}$ называется *открытым шаром* (шаром) пространства $\mathbb{R}^m$ с центром в точке a радиуса r и обозначается $B(a, r)$. *Замкнутым шаром* с центром в точке $a \in \mathbb{R}^m$ радиуса r называется множество $B[a, r] = \{x \in \mathbb{R}^m : \rho(x, a) \leq r\}$. Всякий открытый шар пространства $\mathbb{R}^m$ с центром в точке $a \in \mathbb{R}^m$ называется *окрестностью* точки a . Окрестность радиуса ε называется ε -окрестностью.

Замечание. В пространстве $\mathbb{R}^m$ можно ввести понятие параллелепипедальной окрестности точки $a \in \mathbb{R}^m$ (в отличие от выше рассмотренных, которые называются сферическими). Если $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$, то ее параллелепипедальной ε -окрестностью называется открытый параллелепипед $(a_1 - \varepsilon; a_1 + \varepsilon) \times \dots \times (a_m - \varepsilon; a_m + \varepsilon)$. Легко показать, что каждая сферическая окрестность точки a содержит некоторую ее параллелепипедальную окрестность и наоборот.

Пусть A — некоторое множество пространства $\mathbb{R}^m$. Тогда точка $a \in \mathbb{R}^m$ называется *внутренней точкой* множества A , если существует ее окрестность $B(a, \varepsilon)$ (или же параллелепипедальная окрестность), что $B(a, \varepsilon) \subset A$. Множество $G \subset \mathbb{R}^m$ называется *открытым*, если каждая его точка является внутренней для G . Например, шар $B(a, r)$ и открытый параллелепипед — открытые множества. Удобно считать, что пустое множество $\emptyset$ также является открытым. Тогда совокупность всех открытых множеств пространства $\mathbb{R}^m$ обладает такими свойствами:

- 1) $\emptyset \in \mathbb{R}^m$ — открытые множества;

2) пересечение конечного числа открытых множеств является открытым множеством;

3) объединение произвольного числа открытых множеств является открытым множеством.

Теорема 14. *Всякое непустое открытое множество $G \subset \mathbb{R}^m$ является объединением не более чем счетного числа открытых (или замкнутых) параллелепипедов, которые попарно не имеют общих (в случае замкнутых параллелепипедов) внутренних точек.*

Из этой теоремы, а также теоремы 10 следует, что каждое открытое множество $G \subset \mathbb{R}^m$ является измеримым в $\mathbb{R}^m$, т. е. $G \in \mathcal{U}_m$.

Отметим, что представление открытого множества пространства $\mathbb{R}^m$ в форме, указанной в теореме 14, возможно не единственным образом. В одномерном пространстве теореме 14 можно придать более четкий характер. А именно: если интервал $(a; b)$ содержится в открытом множестве $G \subset \mathbb{R}$, но $a \notin G$ и $b \notin G$, то этот интервал называется *составляющим интервалом* множества G . Два составляющих интервала открытого множества или полностью совпадают, или не пересекаются.

Теорема 14'. *Каждое непустое открытое множество G числовой прямой $\mathbb{R}$ представимо единственным образом в виде объединения конечного или счетного множества его составляющих интервалов: $G = \bigcup_k (a_k, b_k)$, где $a_k \notin G$ и $b_k \notin G$ для каждого k .*

$$\text{Очевидно, } \mu_1(G) = \sum_k (b_k - a_k).$$

Отметим, что множества вида $(-\infty; +\infty)$, $(a; +\infty)$ и $(-\infty; b)$ также включаем в число составляющих интервалов.

Множество $F \subset \mathbb{R}^m$ называется *замкнутым* (в $\mathbb{R}^m$), если его дополнение $\mathbb{R}^m \setminus F$ является открытым множеством. Например, замкнутый шар $B[a; r]$ или замкнутый параллелепипед — замкнутые множества в $\mathbb{R}^m$. Из свойств 1) — 3) открытых множеств следует, что:

- 1) $\emptyset$ и $\mathbb{R}^m$ — замкнутые множества;
- 2) пересечение любого числа замкнутых множеств является замкнутым множеством;
- 3) объединение конечного числа замкнутых множеств является замкнутым множеством.

Поскольку пространство $\mathbb{R}^m$ измеримо, то каждое замкнутое множество $F \subset \mathbb{R}^m$ является измеримым в $\mathbb{R}^m$, т. е. $F \in \mathcal{U}_m$.

Замечание. В случае $F \subset \mathbb{R}$ из теоремы 14' следует, что открытое множество $G = \mathbb{R} \setminus F$ представляется в виде объединения его составляющих интервалов, т. е. $G = \bigcup_k (a_k, b_k)$, где $a_k \notin G$ и $b_k \notin G$ при каждом k . Следовательно, замкнутое множество F представимо в виде $F = \mathbb{R} \setminus \bigcup_k (a_k, b_k)$, и поэтому составляющие интервалы (a_k, b_k) множества G назовем *дополнительными интервалами* множества F .

Замкнутые множества пространства $\mathbb{R}^m$ можно охарактеризовать и с помощью понятия предельных точек. Точка $x \in \mathbb{R}^m$ называется *предельной точкой* множества $A \subset \mathbb{R}^m$, если произвольная окрестность $B(x, \varepsilon)$ точки x содержит бесконечное число элементов множества A (или хотя бы одну точку из A , отличную от x). Совокупность всех предельных точек множества A обозначается через A' и называется его *производным множеством*. Объединение $A \cup A'$ называется *замыканием* множества A и обозначается $\bar{A}$.

Пусть $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ — последовательность точек пространства $\mathbb{R}^m$ и $a \in \mathbb{R}^m$. Последовательность (x_k) *сходится к точке a* (или имеет своим пределом точку a), если $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(x_k, a) = 0$. Запишем это так: $x_k \rightarrow a$ при $k \rightarrow \infty$ или $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$.

Теорема 15. *Точка $a \in \mathbb{R}^m$ является предельной точкой множества $A \subset \mathbb{R}^m$ тогда и только тогда, когда существует последовательность $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ различных точек множества A такая, что $x_k \rightarrow a$ при $k \rightarrow \infty$.*

Теорема 16. *Множество F пространства $\mathbb{R}^m$ замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки, т. е. $F \supset F'$. Иными словами, F замкнуто в том и только том случае, когда $F = \bar{F}$.*

Частным случаем замкнутых множеств являются совершенные множества. Множество $A \subset \mathbb{R}^m$ называется *совершенным*, если $A = A'$, т. е. если каждая его точка является предельной точкой A . Например, замкнутый шар или замкнутый параллелепипед являются совершенными множествами.

Понятным примером совершенного множества является *канторово множество* на числовой прямой. Пусть F_0 является отрезком $[0; 1]$ числовой прямой $\mathbb{R}$. Удалим из него интервал $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$, а оставшееся замкнутое множество обозначим через F_1 (т. е. $F_1 = [0; 1] \setminus \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$). Из F_1 удалим интервалы $\left(\frac{1}{9}; \frac{2}{9}\right)$ и $\left(\frac{7}{9}; \frac{8}{9}\right)$, а оставшееся замкнутое множество, состоящее из четырех отрезков, обозначим через F_2 . В каждом из этих четырех отрезков удалим средний интервал длиной $\left(\frac{1}{3}\right)^3$ и т. д. Продолжая этот процесс, получим убывающую последовательность $F_0 \supset F_1 \supset \dots \supset F_k \supset \dots$ замкнутых множеств. Пусть $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$.

Полученное замкнутое множество F называется *канторовым*. Оно является множеством мощности континуума (т. е. можно построить взаимно однозначное соответствие между F и отрезком $[0; 1]$). Кроме того, если искать меру Лебега множества $G = [0; 1] \setminus F$ с использованием длин выбрасываемых интервалов, то получим, что $\mu_1(F) = 0$, т. е. канторово множество F является множеством меры нуль.

С помощью открытых и замкнутых множеств пространства $\mathbb{R}^m$ можно конструировать и более сложные измеримые множества. Говорят, что множество $A \subset \mathbb{R}^m$ является *множеством типа G_δ* , если его можно представить в виде пересечения счетного множества открытых множеств $\{G_k\}_{k=1}^{\infty}$, т. е. $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$. Аналогично, множество $A \subset \mathbb{R}^m$ называется *множеством типа F_σ* , если его можно представить в виде объединения счетного множества замкнутых множеств $\{F_k\}_{k=1}^{\infty}$, т. е. $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$.

Теорема 17. *Всякое множество пространства $\mathbb{R}^m$ типа G_δ или F_σ измеримо.*

Рассмотрим более широкий класс множеств пространства $\mathbb{R}^m$. Если множество $A \subset \mathbb{R}^m$ можно получить, исходя из замкнутых и открытых множеств, с помощью применения конечного числа или счетного множества операций объединения, пересечения и разности, то оно называется *борелевым множеством* пространства $\mathbb{R}^m$. Класс $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ борелевых множеств является σ -алгеброй.

Теорема 18. *Каждое борелево множество пространства $\mathbb{R}^m$ является измеримым.*

Обратная теорема не верна: существуют примеры измеримых множеств, не являющихся борелевыми. Первый пример такого множества был построен М. Я. Суслинным, который открыл важный и обширный класс A -множеств, каждое из которых является измеримым. Этот класс содержит в себе класс всех борелевых множеств, но существенно шире его.

Множества типа G_δ и F_σ являются не только важными примерами измеримых множеств. С их помощью можно аппроксимировать любое измеримое множество.

Теорема 19. *Внешняя мера любого множества $A \subset \mathbb{R}^m$ равна точной нижней грани мер всевозможных открытых множеств G , содержащих A , т. е. $\mu_m^*(A) = \inf_{G \supset A} \mu_m(G)$.*

Кроме того, мера произвольного измеримого множества $A \subset \mathbb{R}^m$ равна точной верхней грани мер всевозможных замкнутых множеств F , содержащихся в A , т. е. $\mu_m(A) = \sup_{F \subset A} \mu_m(F)$.

Отсюда получаем, что для каждого измеримого множества $A \subset \mathbb{R}^m$ и любого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество $G \subset \mathbb{R}^m$ и замкнутое $F \subset \mathbb{R}^m$, что $F \subset A \subset G$, $\mu_m(G \setminus A) < \varepsilon$ и $\mu_m(A \setminus F) < \varepsilon$.

Теорема 20. Для каждого измеримого множества A пространства $\mathbb{R}^m$ существуют такие множества H типа F_σ и K типа G_δ , что $H \subset A \subset K$, $\mu_m(H) = \mu_m(A) = \mu_m(K)$ и $\mu_m(K \setminus H) = 0$.

Таким образом, множество A представляется в виде объединения непересекающихся множеств H типа F_σ и $A_0 = A \setminus H$ меры нуль, т. е. $A = H \cup A_0$. Аналогично $A = K \setminus A'_0$, где K — множество типа G_δ и $\mu_m(A'_0) = \mu_m(K \setminus A) = 0$.

Однако не каждое множество пространства $\mathbb{R}^m$ измеримо. Справедлива следующая теорема.

Теорема 21. Каждое измеримое множество $A \subset \mathbb{R}^m$, мера $\mu_m(A)$ которого положительна ($\mu_m(A) > 0$), содержит неизмеримое подмножество.

Сравним класс измеримых по Жордану множеств пространства $\mathbb{R}^m$ с классом $\mathcal{M}_m$ измеримых множеств по Лебегу. Напомним, что если A — ограниченное множество в $\mathbb{R}^m$, то его верхняя $\bar{\mu}_m(A)$ и нижняя $\underline{\mu}_m(A)$ меры Жордана вводятся с помощью соотношений

$$\underline{\mu}_m(A) = \sup_{E \subset A} \mu_m(E) \quad \text{и} \quad \bar{\mu}_m(A) = \inf_{E \supset A} \mu_m(E),$$

где в первом случае точная верхняя грань берется по всем элементарным множествам $E \subset A$, а во втором — точная нижняя грань рассматривается по всем элементарным множествам $E \supset A$. Тогда ограниченное множество $A \subset \mathbb{R}^m$ называется *измеримым по Жордану*, если $\bar{\mu}_m(A) = \underline{\mu}_m(A)$. Это число назовем *мерой Жордана* множества A и обозначим его $\tilde{\mu}_m(A)$, т. е. $\tilde{\mu}_m(A) = \underline{\mu}_m(A) = \bar{\mu}_m(A)$. Если A — неограниченное множество пространства $\mathbb{R}^m$, то его называют *измеримым по Жордану*, если *каждое* множество $A(n) = A \cap P_n^*$ ($n \in \mathbb{N}$) измеримо по Жордану, и полагают $\tilde{\mu}_m(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mu}_m(A(n))$.

Отметим, что совокупность измеримых по Жордану множеств образует кольцо, но не σ -кольцо (см. замечание 2 к примеру 6).

Теорема 22. Каждое множество A пространства $\mathbb{R}^m$, измеримое по Жордану, является измеримым по Лебегу и справедливо равенство $\mu_m(A) = \tilde{\mu}_m(A)$.

Отметим, что обратное утверждение неверно (см. пример 6).

Рассмотрим неотрицательную функцию $y = f(x_1, \dots, x_m)$, определенную на измеримом по Жордану множестве A пространства $\mathbb{R}^m$. Тогда множество $\Gamma(f) = \{(x_1, \dots, x_m; y) \in \mathbb{R}^{m+1} : 0 \leq y \leq f(x_1, \dots, x_m), (x_1, \dots, x_m) \in A\}$ называется *подграфиком функции f* (при $m = 1$ подграфик функции f называют криволинейной трапецией, построенной по функции f). Если функция f интегрируема по Риману на множестве A , то ее подграфик $\Gamma(f)$ является измеримым множеством по Жордану и

$$\tilde{\mu}_m(\Gamma(f)) = \int_A \dots \int f(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m$$

(теорема о геометрическом смысле интеграла Римана). Поэтому, согласно теореме 22, множество $\Gamma(f)$ измеримо по Лебегу и справедлива формула

$$\mu_m(\Gamma(f)) = \int_A \dots \int f(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m.$$

Если речь идет о фиксированном пространстве $\mathbb{R}^m$, то вместо обозначения *меры Лебега* μ_m в этом пространстве пишут μ .

Более детально о мере Лебега в евклидовом пространстве см. в [12; 20].

* Здесь (и в дальнейшем) обозначение A' не связано с понятием производного множества для A .

Примеры решения задач

1. Доказать, что множество $A \subset \mathbb{R}$ борелево и вычислить его меру $\mu_1(A)$, если: а) $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(n - \frac{1}{3^n}; n + \frac{1}{2^n} \right)$;

б) $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[n^n; n^n + \frac{1}{\ln(n+1)} \right] \setminus \mathbb{Q}$.

Решение. а) Покажем, что полуинтервал $(a; b]$ или $[a; b)$ числовой оси $\mathbb{R}$ является борелевым множеством (более того, множеством типа G_δ). Действительно, $(a; b] = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left(a; b + \frac{1}{k} \right)$. Поэтому множество A является объединением счетного числа борелевых множеств $A_n = \left(n - \frac{1}{3^n}; n + \frac{1}{2^n} \right)$ ($n \in \mathbb{N}$). В этом случае говорят, что оно имеет тип $G_{\sigma\sigma}$. Тогда, учитывая, что класс борелевых множеств образует σ -алгебру, находим, что A борелево и потому μ_1 -измеримо. Для вычисления меры $\mu_1(A)$ отметим, что множества A_n ($n \in \mathbb{N}$) попарно не пересекаются. Тогда в силу σ -аддитивности меры Лебега имеем

$$\mu_1(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1 \left(\left(n - \frac{1}{3^n}; n + \frac{1}{2^n} \right) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right) = \frac{3}{2}.$$

б) Пусть $A' = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[n^n; n^n + \frac{1}{\ln(n+1)} \right]$. Отсюда получаем, что A' является множеством типа F_σ , и поэтому оно борелево. Множество $\mathbb{Q}$ — счетное и, следовательно, имеет тип F_σ , поскольку его можно представить как объединение счетного числа одноточечных множеств $\{r_n\}$, где все $r_n \in \mathbb{Q}$. Тогда и множество $A = A' \setminus \mathbb{Q}$ является борелевым (как разность борелевых). Из равенства $A' = A \cup \mathbb{Q}$, где $\mathbb{Q} = A' \cap \mathbb{Q}$, и аддитивности меры μ_1 имеем $\mu_1(A) = \mu_1(A')$ (напомним, что мера $\mu_1(\mathbb{Q})$ счетного множества $\mathbb{Q}$ равна нулю). Поскольку множества $A'_n = \left[n^n; n^n + \frac{1}{\ln(n+1)} \right]$ ($n \in \mathbb{N}$) — непересекающиеся, то согласно свойству счетной аддитивности меры μ_1

$$\mu_1(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1 \left(\left[n^n; n^n + \frac{1}{\ln(n+1)} \right] \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}.$$

Из известного неравенства $\ln(1+x) < x$ ($\forall x > 0$) имеем $\frac{1}{\ln(1+n)} > \frac{1}{n}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$). Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$ является расходящимся, и поэтому $\mu_1(A) = +\infty$.

2. Пусть $A \subset \mathbb{R}^2$. Доказать, что A — борелево множество, и найти $\mu_2(A)$, если: а) $A = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \times \mathbb{R}$; б) $A = ([0; 3] \times [1; 2]) \setminus (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$; в) $A = \{x \in \mathbb{R} : \cos x \in \mathbb{Q}\} \times (0, +\infty)$.

Решение. а) Вначале рассмотрим множество $A' = \mathbb{Q} \times \mathbb{R}$. Поскольку множество $\mathbb{Q}$ — счетное, то A' можно представить в виде объединения счетного числа прямых вида $A'_n = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : x = r_n, y \in \mathbb{R}\}$, где r_n — некоторое рациональное число, и $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \dots, r_n, \dots\}$. Множества A'_n замкнуты и потому μ_2 -измеримы. Следовательно, множество $A' = \bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n$ является множеством типа F_σ и потому борелевым.

Найдем меру $\mu_2(A')$. Согласно свойству счетной аддитивности меры μ_2 , имеем $\mu_2(A') = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2(A'_n)$. Определим меру $\mu_2(A'_n) (\forall n \in \mathbb{N})$. Для этого найдем μ_2 -меру отрезка $B = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : x = a, c \leq y \leq d\}$, где a, c и d — некоторые действительные числа. Этот отрезок можно считать параллелепипедом $[a; a] \times [c; d]$ и поэтому, согласно определению, $\mu_2(B) = 0$. Рассмотрим прямую $B' = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : x = a, y \in \mathbb{R}\}$. Тогда $B' = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : x = a, -n \leq y \leq n\}$ и поэтому B' является μ_2 -измеримым, а $\mu_2(B') = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_2(\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : x = a, -n \leq y \leq n\}) = 0$. Следовательно, $\mu_2(A'_n) = 0$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, $\mu_2(A') = 0$.

Наконец, заданное множество A представим в виде $A = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \setminus (\mathbb{Q} \times \mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \setminus A'$, откуда следует, что A борелево и $\mu_2(A) = \mu_2(\mathbb{R}^2) = +\infty$.

б) Пусть $A' = (0; 3] \times [1; 2)$. Тогда из равенства $A' = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\left[\frac{1}{n}; 3 \right] \times \left[1; 2 - \frac{1}{n} \right] \right)$ следует, что A' является множеством типа F_σ , т. е. оно борелево. Кроме того, A' — прямоугольник и $\mu_2(A') = 3$. Поскольку множество $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ — счетное, то, как было отмечено выше, оно имеет тип F_σ и $\mu_2(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) = 0$. Поэтому $A = A' \setminus (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$ — борелево множество и $\mu_2(A) = \mu_2(A') = 3$.

в) Множество $A' = \{x \in \mathbb{R} : \cos x \in \mathbb{Q}\}$ является счетным, поскольку таковым является $\mathbb{Q}$. Следовательно, A' представимо в виде $A' = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ и $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : x = x_n, y > 0\}$. Кроме того, множество $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : x = x_n, y > 0\}$ можно представить в виде

$$\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : x = x_n, y > 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ (x; y) \in \mathbb{R}^2 : x = x_n, y \geq \frac{1}{k} \right\},$$

т. е. оно имеет тип F_σ . Поэтому A борелево и

$$\mu_2(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2(\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : x = x_n, y > 0\}) = 0.$$

3. Доказать, что множество $A \subset \mathbb{R}^2$ является μ_2 -измеримым и найти $\mu_2(A)$, если:

а) $A = \left\{ (x; y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, 0 \leq y < \frac{a^2}{a^2 + x^2} \right\}$, где $a > 0$ — фиксированное число;

б) $A = \left\{ (x; y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 1, 0 \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right\}$;

в) $A = \left\{ (x; y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, 0 < y < e^{-x} |\sin x| \right\}$;

г) $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ (x; y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [n, n+1), 0 \leq y \leq \frac{(x-n)^n}{n} \right\}$.

Решение. а) Множество A является неограниченным, и поэтому рассмотрим последовательность $A(n) = \left\{ (x; y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-n; n], \right.$

$\left. 0 \leq y < \frac{a^2}{a^2 + x^2} \right\}$, $n \in \mathbb{N}$. Каждое из множеств $A(n)$ измеримо в смысле Жордана, поскольку его граница состоит из четырех непрерывных линий. Следовательно, все $A(n)$ являются μ_2 -измеримыми, а тогда и A — μ_2 -измеримо. Кроме того, $\mu_2(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_2(A(n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mu}_2(A(n))$.

Напомним, что мера Жордана подграфика функции вычисляется с помощью интеграла Римана, т. е.

$$\mu_2(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n \frac{a^2 dx}{a^2 + x^2} = a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{a^2 + x^2} = a \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = a\pi.$$

Замечание. Измеримость множества A можно получить и другим путем. А именно: $A = \left\{ (x; y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, 0 < y < \frac{a^2}{a^2 + x^2} \right\} \cup \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, y = 0\}$ и поэтому A измеримо как объединение открытого множества и прямой линии $y = 0$.

б) Множество A — также неограниченное. Поэтому согласно определению 3 нужно рассмотреть последовательность множеств:

$$\begin{aligned} A(n) &= A \cap ([-n; n] \times [-n; n]) = \\ &= \left\{ (x; y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 1, 0 \leq y \leq \min \left\{ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, n \right\} \right\} = \\ &= \left\{ (x; y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq \frac{\sqrt{n^2-1}}{n}, 0 \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right\} \cup \\ &\cup \left\{ (x; y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x \leq \frac{\sqrt{n^2-1}}{n}, y = n \right\} \cup \\ &\cup \left\{ (x; y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\sqrt{n^2-1}}{n} \leq x < 1, y = n \right\}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Каждое из множеств $A(n)$ измеримо в смысле Жордана и, следовательно,

но, μ_2 -измеримо. Поэтому A — μ_2 -измеримо и

$$\begin{aligned}\mu_2(A) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mu}_2(A(n)) = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^{\sqrt{\frac{n^2-1}{n}}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + n \left(1 - \frac{\sqrt{n^2-1}}{n} \right) \right) = \\ &= 2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2 \arcsin x \Big|_0^1 = \pi.\end{aligned}$$

Замечание. Множество A имеет тип G_δ , поскольку справедливо равенство

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{ (x; y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 1, -\frac{1}{k} < y < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{k} \right\}.$$

в) Представим исследуемое множество в виде объединения неубывающей последовательности множеств

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq n\pi, 0 < y < e^{-x} |\sin x|\}.$$

Каждое из множеств $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq n\pi, 0 < y < e^{-x} |\sin x|\}$ измеримо в смысле Жордана и поэтому μ_2 -измеримо. Значит, A является μ_2 -измеримым, а

$$\begin{aligned}\mu_2(A) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mu}_2 \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq n\pi, 0 < y < e^{-x} |\sin x|\} = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-x} |\sin x| dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} |\sin x| dx = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\pi} \int_0^{\pi} e^{-t} \sin t dt = \frac{e^{-\pi} + 1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-\pi})^n = \frac{1 + e^{-\pi}}{2(1 - e^{-\pi})}.\end{aligned}$$

г) Каждое из множеств $A_n = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [n, n+1), 0 \leq y \leq \frac{(x-n)^n}{n}\}$ измеримо в смысле Жордана и, следовательно, в смысле Лебега. Его мера

$$\mu_2(A_n) = \int_n^{n+1} \frac{(x-n)^n}{n} dx = \frac{(x-n)^{n+1}}{n(n+1)} \Big|_n^{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Поэтому множество A μ_2 -измеримо и, согласно свойству σ -аддитивности меры Лебега,

$$\begin{aligned}\mu_2(A) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1.\end{aligned}$$

4. Показать, что тела, ограниченные поверхностями $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$ и $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$, являются μ_3 -измеримыми, и найти их меры Лебега.

Решение. Изобразим заданные тела геометрически. Графиком первой поверхности является двуполостный гиперболоид, ось симметрии которого совпадает с осью OX , а второй — эллипсоид. Поэтому имеем три тела T_1, T_2 и T_3 (рис. 1), ограниченные этими двумя поверхностями. Эти три тела ограничены непрерывными поверхностями и, следовательно, они измеримы в смысле Жордана, а также в смысле Лебега.

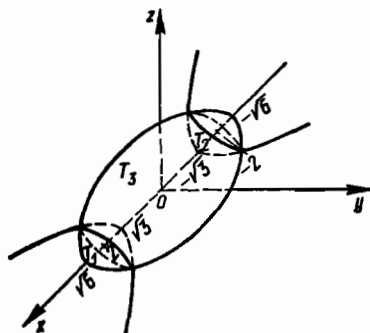


Рис. 1

Кроме того, $\mu_3(T_1) = \mu_3(T_2)$. Поэтому найдем $\mu_3(T_1)$ — объем тела T_1 . Поверхности $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$ и $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$ пересекаются по эллипсам $\frac{y^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2} + \frac{z^2}{(\sqrt{3})^2} = 1$, лежа-

щих в плоскостях $x = 2$ и $x = -2$. Объем тела T_1 можно вычислить с помощью интеграла Римана, двойного или тройного интеграла. Если использовать интеграл Римана, то для этого нужно рассмотреть сечения те-

ла плоскостями $x = \text{const}$. Для $x \in [\sqrt{3}, 2]$ в сечении получаем эллипсы

$$\frac{y^2}{\left(2\sqrt{\frac{x^2}{3}-1}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(3\sqrt{\frac{x^2}{3}-1}\right)^2} = 1,$$

а для $x \in [2, \sqrt{6}]$ — эллипсы

$$\frac{y^2}{\left(2\sqrt{1-\frac{x^2}{6}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(3\sqrt{1-\frac{x^2}{6}}\right)^2} = 1.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mu_3(T_1) &= \int_{\sqrt{3}}^2 6\pi \left(\frac{x^2}{3} - 1\right) dx + \int_2^{\sqrt{6}} 6\pi \left(1 - \frac{x^2}{6}\right) dx = \\ &= \left[6\pi \left(\frac{x^3}{9} - x\right)\right]_{\sqrt{3}}^2 + \left[x - \frac{x^3}{18}\right]_2^{\sqrt{6}} = 4\pi(\sqrt{6} + \sqrt{3} - 4). \end{aligned}$$

С помощью двойного интеграла вычислим меру $\mu_3(T_1)$:

$$\mu_3(T_1) = \iint_A \left(\sqrt{6\left(1 - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9}\right)} - \sqrt{3\left(1 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9}\right)} \right) dx dy,$$

где A — эллипс $\frac{y^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2} + \frac{z^2}{(\sqrt{3})^2} = 1$. Тогда замена переменных $y = 2r \cos \varphi$, $z = 3r \sin \varphi$, где $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, приведет к указанному результату. Аналогично $\mu_3(T_1) = \iiint_{T_1} dx dy dz$. Далее,

этот тройной интеграл приведем к кратному. Таким образом, $\mu_3(T_1) = \mu_3(T_2) = 4\pi(\sqrt{6} + \sqrt{3} - 4)$.

Для определения $\mu_3(T_2)$ введем множество $T = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} \leq 1\}$, являющееся эллипсоидом. Оно μ_3 -измеримо, как замкнутое множество (оно даже измеримо в смысле Жордана). Напомним, что объем эллипсоида T , т. е. его мера Жордана $\tilde{\mu}_3(T)$, вычисляется по известным формулам и $\tilde{\mu}_3(T) = 8\sqrt{6}\pi$. Тогда $T_3 = T \setminus (T_1 \cup T_2)$ и поэтому $\mu_3(T_3) = \mu_3(T) - \mu_3(T_1) - \mu_3(T_2) = 8\sqrt{6}\pi - 8\pi(\sqrt{6} + \sqrt{3} - 4) = 8\pi(4 - \sqrt{3})$.

5. Построим на плоскости $\mathbb{R}^2$ множество A следующим образом: разделим квадрат $[0; 1] \times [0; 1]$ прямыми $x = \frac{1}{3}$, $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{1}{3}$, $y = \frac{2}{3}$ на 9 одинаковых квадратов и выбросим центральный открытый квадрат (т. е. квадрат $(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}) \times (\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$). Затем каждый из оставшихся восьми замкнутых квадратов аналогично делим на 9 одинаковых квадратиков и выбрасываем все центральные открытые квадратики; продолжаем этот процесс неограниченно. Множество, оставшееся после счетного числа шагов, обозначим через A (оно называется «ковром Серпиньского»). Доказать, что A является μ_2 -измеримым множеством, и найти $\mu_2(A)$.

Решение. Множество A получается из квадрата $[0; 1] \times [0; 1]$ удалением счетного числа открытых множеств; поэтому A — замкнутое множество и, следовательно, оно μ_2 -измеримо. Найдем $\mu_2(A)$. Пусть A_1 — открытый квадрат $(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}) \times (\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$, A_2 — объединение открытых центральных квадратиков, которые удаляются на втором шагу. Аналогично вводим множества $A_3, \dots, A_k, \dots$. Все они открыты, непересекающиеся и $\mu_2(A_k) = \frac{8^{k-1}}{9^k}$. Поэтому

$$\mu_2(A) = \mu_2([0; 1] \times [0; 1]) - \sum_{k=1}^{\infty} \mu_2(A_k) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8^{k-1}}{9^k} = 0.$$

Замечание. Можно показать, что множество A является совершенным и нигде не плотным. Оно аналогично множеству Кантора, которое рассматривается на отрезке $[0; 1]$ числовой оси $\mathbb{R}$.

6. Доказать, исходя лишь из определений, что множество $A \subset \mathbb{R}^1$ иррациональных чисел сегмента $[0; 1]$ неизмеримо по Жордану, но измеримо по Лебегу. Найти его меру Лебега $\mu_1(A)$.

Решение. Вначале найдем верхнюю меру Жордана $\bar{\mu}_1(A)$. Для определения $\bar{\mu}_1(A)$ достаточно ограничиться элементарными множествами E отрезка $[0; 1]$, содержащими A . Если $E \in \mathfrak{E}$ и $A \subset E \subset [0; 1]$, то мера (Жордана или Лебега) множества E удовлетворяет неравенству $\mu_1(E) \geq 1$. Действительно, пусть $\mu_1(E) < 1$. Тогда множество $B = [0; 1] \setminus E$ имеет положительную лебегову меру и поэтому не является счетным, что, конечно, невозможно из-за включения $E \supset A$. Таким образом, если элементарное множество E отрезка $[0; 1]$ покрывает заданное множество A , то $\mu_1(E) \geq 1$. Поэтому $\bar{\mu}_1(A) \geq 1$. Но, поскольку $[0; 1] \supset A$ и $\mu_1([0; 1]) = 1$, то $\bar{\mu}_1(A) = 1$.

Если элементарное множество E содержится в A , то покажем, что $\mu_1(E) = 0$. Действительно, в противном случае $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$, где все P_k являются промежутками числовой оси $\mathbb{R}$ и $P_k \cap P_l = \emptyset$ при $k \neq l$. При этом имеется хотя бы один промежуток, скажем P_l , не являющийся пустым. Но поскольку непустой промежуток P_l вместе с иррациональными точками содержит и рациональные, то в E имеются и рациональные числа, что невозможно согласно выбору E .

Следовательно, $\mu_1(A) = 0$ и, таким образом, $\mu_1(A) \neq \bar{\mu}_1(A)$, а множество A неизмеримо по Жордану.

Покажем, что множество A измеримо по Лебегу. Поскольку A ограничено, то используем определение 2 измеримости по Лебегу ограниченного множества. Пусть ε — произвольное положительное число. В качестве элементарного множества E , фигурирующего в определении 2, возьмем отрезок $[0; 1]$. Тогда множество $A \Delta [0; 1] = [0; 1] \setminus A$ является множеством всех рациональных чисел сегмента $[0; 1]$, и поэтому оно счетно. Следовательно, $\mu^*(A \Delta [0; 1]) = \mu^*([0; 1] \setminus A) = 0 < \varepsilon$ и множество A измеримо по Лебегу. Осталось найти его меру Лебега $\mu_1(A)$. Пусть $\{P_k\}$ — конечное или счетное число промежутков числовой оси, покрывающих множество A , т. е. $\bigcup_k P_k \supset A$. Для вычисления

внешней меры $\mu_1^*(A)$ множества A можно считать, $\bigcup_k P_k \subset [0; 1]$.

Покажем, что $\sum_k \mu_1(P_k) \geq 1$. Действительно, если $\sum_k \mu_1(P_k) < 1$, то, введя в рассмотрение измеримое по Лебегу множество $P = \bigcup_k P_k$, имеем $\mu_1(P) \leq \sum_k \mu_1(P_k) < 1$. Поэтому множество $C = [0; 1] \setminus P$ является множеством положительной лебеговой меры $\mu_1(C) = 1 - \mu_1(P) > 0$. Следовательно, C не может быть счетным, а тогда оно содержит и иррациональные точки отрезка $[0; 1]$. Поэтому множество P не содержит всех иррациональных точек из $[0; 1]$, что противоречит включению $P \supset A$. Таким образом, $\sum_k \mu_1(P_k) \geq 1$, а тогда $\mu_1^*(A) \geq 1$. Поскольку $A \subset [0; 1]$, $\mu_1^*(A) \leq \mu^*([0; 1]) = 1$. Поэтому в действительности $\mu_1^*(A) = 1$, и поскольку A измеримо по Лебегу, то $\mu_1(A) = 1$.

Замечание 1. Измеримость по Лебегу множества A и его меру $\mu_1(A)$ можно получить и другим путем. Так, если обозначить через $\mathbb{Q}_0$ множество всех рациональных

чисел отрезка $[0; 1]$, то $\mathbb{Q}_0$ измеримо по Лебегу как счетное множество и $\mu_1(\mathbb{Q}_0) = 0$. Поэтому $A = [0; 1] \setminus \mathbb{Q}_0$ является измеримым множеством по Лебегу как разность таковых и $\mu_1(A) = \mu_1([0; 1]) - \mu_1(\mathbb{Q}_0) = 1$.

Замечание 2. Поскольку измеримые по Жордану множества пространства $\mathbb{R}$ образуют кольцо, то из рассмотренного примера видно, что множество $\mathbb{Q}_0$ (см. замечание 1) также является неизмеримым по Жордану. Отметим, что этот факт можно доказать и непосредственно (как и в примере 6). Но поскольку $\mathbb{Q}_0$ является счетным множеством, то его можно представить в виде $\mathbb{Q}_0 = \{r_1, r_2, \dots\}$, где $r_1, r_2, \dots$ — все рациональные числа сегмента $[0; 1]$. Очевидно, каждое одноточечное множество $\{r_n\}$ измеримо по Жордану и $\bar{\mu}_1(\{r_n\}) = 0$. Но $\mathbb{Q}_0$ как их объединение не является измеримым по Жордану. Следовательно, совокупность измеримых по Жордану множеств не образует σ -кольца и мера Жордана не является счетно-аддитивной. Именно в этих свойствах скрыт глубокий недостаток мероопределения по Жордану и видны значительные преимущества определения меры Лебега.

7. Найти меру множества A тех точек отрезка $[0; 1]$, которые допускают разложение в бесконечную десятичную дробь без использования цифры 5.

Решение. Напомним, что каждое действительное число из отрезка $[0; 1]$ допускает представление в виде бесконечной десятичной дроби $0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$, где все a_n являются цифрами. По определению, $A = \{0, a_1 a_2 \dots a_n \dots : a_n \neq 5, \forall n \in \mathbb{N}\}$. Изучим структуру множества A . Для этого рассмотрим множество, являющееся дополнением A ко всему отрезку, т. е. $[0; 1] \setminus A$. Пусть A_1 — множество чисел отрезка $[0; 1]$, допускающих разложение в бесконечную десятичную дробь вида $0, 5 a_2 a_3 \dots a_n \dots$, где $a_n (n \geq 2)$ — любые цифры, т. е. $A = \{0, 5 a_2 a_3 \dots a_n \dots\}$. Тогда A_1 совпадает с интервалом $(0,5; 0,6)$ и поэтому A_1 измеримо, а $\mu_1(A_1) = \frac{1}{10}$. Аналогично рассмотрим множество $A_2 = \{0, a_1 5 a_3 \dots a_n \dots\}$, где все цифры $a_n (n \neq 2)$ любые, но $a_1 \neq 5$. Множество A_2 измеримо, поскольку представляется в виде объединения интервалов: $A_2 = \bigcup_{\substack{s=0 \\ s \neq 5}}^9 (0, s5; 0, s6)$ и $\mu_1(A_2) = \frac{9}{10^2}$. Продолжим этот процесс

до бесконечности. Для каждого натурального числа k рассмотрим множество $A_k = \{0, a_1 \dots a_{k-1} 5 a_{k+1} \dots\}$, где все цифры $a_n (n \neq k)$ любые, но $a_1 \neq 5, \dots, a_{k-1} \neq 5$. Тогда

$$A_k = \bigcup_{\substack{s_1=0 \\ s_1 \neq 5}}^9 \dots \bigcup_{\substack{s_{k-1}=0 \\ s_{k-1} \neq 5}}^9 (0, s_1 \dots s_{k-1} 5; 0, s_1 \dots s_{k-1} 6).$$

Поэтому A_k измеримо и $\mu_1(A_k) = \frac{9^{k-1}}{10^k}$. Отметим, что, в силу построения, $A_k \cap A_l = \emptyset$, если $k \neq l$.

Если возвратиться к множеству A , то $A = [0; 1] \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Значит, множество A измеримо и согласно свойству счетной аддитивности меры Лебега получаем

$$\mu_1(A) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \mu_1(A_k) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9^{k-1}}{10^k} = 0.$$

Следовательно, A является множеством меры нуль.

Замечание. Из представления $A = [0; 1] \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ и того, что A_k являются объединениями непересекающихся интервалов, следует, что A является замкнутым множеством (даже совершенным) и нигде не плотным, т. е. любой интервал сегмента $[0; 1]$ содержит другой интервал, свободный от точек множества A (согласно построению).[‡]

8. Показать, что если A — измеримое множество отрезка $[a; b]$ числовой оси $\mathbb{R}$ и $\mu_1(A) = \lambda > 0$, то функция $f(x) = \mu_1([a; x] \cap A)$ непрерывна на $[a; b]$ и принимает все значения от 0 до λ .

Решение. Поскольку множества A и $[a; x]$ ($a \leq x \leq b$) измеримы и ограничены, то функция f действительно определена на отрезке $[a; b]$. Покажем, что она непрерывна. Если x — произвольная, но фиксированная точка сегмента $[a; b]$ и Δx такое, что $x + \Delta x \in [a; b]$, то

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = \mu_1([a; x + \Delta x] \cap A) - \mu_1([a; x] \cap A).$$

Для оценки разности этих мер используем неравенство

$$|\mu_m^*(A_1) - \mu_m^*(A_2)| \leq \mu_m^*(A_1 \Delta A_2), \quad (1)$$

где A_1 и A_2 — произвольные ограниченные множества пространства $\mathbb{R}^m$.

Неравенство (1) получаем следующим образом. Очевидно, что $A_1 \subset A_2 \cup (A_1 \Delta A_2)$ и $A_2 \subset A_1 \cup (A_1 \Delta A_2)$. Отсюда, согласно теореме 5, для внешней меры имеем неравенства $\mu_m^*(A_1) \leq \mu_m^*(A_2) + \mu_m^*(A_1 \Delta A_2)$ и $\mu_m^*(A_2) \leq \mu_m^*(A_1) + \mu_m^*(A_1 \Delta A_2)$, которые равносильны (1).

Чтобы воспользоваться неравенством (1), покажем, что

$$([a; x + \Delta x] \cap A) \Delta ([a; x] \cap A) \subset [x; x + \Delta x] \cap A, \quad \text{если } \Delta x > 0, \quad (2)$$

и

$$([a; x + \Delta x] \cap A) \Delta ([a; x] \cap A) \subset [x + \Delta x; x] \cap A, \quad \text{если } \Delta x < 0. \quad (3)$$

Действительно, если $\Delta x > 0$ и $t \in ([a, x + \Delta x] \cap A) \Delta ([a, x] \cap A)$, то $t \in ([a, x + \Delta x] \cap A) \setminus ([a, x] \cap A)$. Следовательно, $t \in [a, x + \Delta x] \cap A$ и $t \notin [a, x] \cap A$. Поэтому $t \in [x, x + \Delta x] \cap A$ и неравенство (2) доказано. Аналогично доказывается неравенство (3).

Таким образом, используя неравенства (1) — (3), получаем для $\Delta x > 0$

$$|\Delta f(x)| \leq \mu_1([x; x + \Delta x] \cap A) \leq \mu_1([x; x + \Delta x]) = \Delta x,$$

а для $\Delta x < 0$

$$|\Delta f(x)| \leq \mu_1([x + \Delta x; x] \cap A) \leq \mu_1([x + \Delta x; x]) = -\Delta x.$$

Из этих двух неравенств имеем $|\Delta f(x)| \leq |\Delta x|$ ($\forall \Delta x$). Следовательно, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x) = 0$ функция f непрерывна в точке $x \in [a; b]$. В силу произвольности точки $x \in [a; b]$ заключаем, что f непрерывна на всем отрезке $[a; b]$.

Далее используя монотонность меры Лебега μ_1 , получаем, что $\mu_1([a; x + \Delta x) \cap A) \geq \mu_1([a; x) \cap A)$, если $\Delta x > 0$. Поэтому функция f является монотонно неубывающей. Кроме того, $f(a) = \mu_1([a; a) \cap A) = 0$, а $f(b) = \mu_1([a; b) \cap A) = \mu_1([a; b] \cap A) = \mu_1(A) = \lambda$. Тогда непрерывная функция f на сегменте $[a; b]$ принимает все промежуточные значения между 0 и λ .

9. Можно ли построить в замкнутом параллелепипеде $P \subset \mathbb{R}^m$ замкнутое множество $F \neq P$ так, чтобы $\mu_m(F) = \mu_m(P)$?

Решение. Докажем, что множество F построить нельзя. В самом деле, пусть, наоборот, такое замкнутое множество F , что $F \subset P$, $F \neq P$ и $\mu_m(F) = \mu_m(P)$, существует. Тогда множество $G = P \setminus F$ является непустым и открытым. Иначе, если $x \in G$ и нет окрестности $B(x; \varepsilon) \subset G$, то в каждой окрестности точки x есть точки не из множества G , т. е. из F . Тогда точка x является предельной для F и поэтому $x \in F$, что невозможно, поскольку $x \in G$. Следовательно, G действительно является непустым открытым множеством. Поэтому G измеримо и $\mu_m(G) = \mu_m(P \setminus F) = \mu_m(P) - \mu_m(F) = 0$. Кроме того, если $x_0 \in G$, то существует окрестность $B(x_0; \varepsilon) \subset G$, где $\varepsilon > 0$. Тогда $\mu_m(G) \geq \mu_m(B(x_0; \varepsilon)) > 0$. Полученное противоречие и доказывает наше утверждение.

10. Показать, что в каждом ограниченном измеримом множестве $A \subset \mathbb{R}$ положительной меры имеется пара точек с рациональным расстоянием.

Решение. Предположим, что имеется ограниченное измеримое множество $A \subset \mathbb{R}$ положительной меры, т. е. $\mu_1(A) > 0$, не содержащее точек, расстояние между которыми является рациональным. Множество $\mathbb{Q}_0$ всех рациональных точек отрезка $[0; 1]$ является счетным, и поэтому его можно занумеровать, т. е. $\mathbb{Q}_0 = \{r_1, r_2, \dots\}$. Рассмотрим последовательность множеств $A + r_k = \{x + r_k : x \in A\}$ ($\forall k \in \mathbb{N}$). Поскольку множества $A + r_k$ и A конгруэнтны, то $A + r_k$ измеримо и $\mu_1(A + r_k) = \mu_1(A)$. Следовательно, измеримо и множество $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A + r_k)$. Кроме того, множество B является ограниченным. Действительно, поскольку A ограничено, то существует такое число M , что $|x| \leq M$ для всех $x \in A$. Поскольку произвольное y из B можно представить в виде $y = x + r_k$ с некоторыми $x \in A$ и $r_k \in \mathbb{Q}_0$, то $|y| \leq |x| + |r_k| \leq M + 1$ для каждого $y \in B$, т. е. B — ограниченное множество. Значит, мера $\mu_1(B)$ конечна. Кроме того, множества $A + r_k$ и $A + r_l$ при $k \neq l$ не пересекаются. Иначе существовали бы такие точки x_1 и x_2 в A , что $x_1 + r_k = x_2 + r_l$, т. е. $|x_1 - x_2| = |r_l - r_k|$. Поэтому в A нашлись бы точки (например, x_1 и x_2), расстояние между которыми рационально, что противоречит допущению. Таким образом, в действительности $(A + r_k) \cap (A + r_l) = \emptyset$ для $k \neq l$. Согласно свойству счетной аддитивности меры Лебега μ_1 , имеем

$$\mu_1(B) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_1(A + r_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_1(A) = +\infty.$$

Последнее противоречит конечности $\mu_1(B)$. Следовательно, сформулированное утверждение является истинным.

11. Доказать, что если A — произвольное множество пространства $\mathbb{R}^{m-1}$, то множество $\tilde{A} = \{(\xi_1, \dots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m : (\xi_1, \dots, \xi_{m-1}) \in A, \xi_m = 1\}$ μ_m -измеримо и $\mu_m(\tilde{A}) = 0$.

Решение. Пусть A является ограниченным множеством пространства $\mathbb{R}^{m-1}$. Тогда существует такой параллелепипед $P \in \mathcal{P}_{m-1}$, что $A \subset P$. Не нарушая общности, можем считать, что $\alpha = \mu_{m-1}(P) > 0$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ построим параллелепипед

$$\tilde{P}_\varepsilon = \left\{ (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m : (\xi_1, \dots, \xi_{m-1}) \in P, 1 - \frac{\varepsilon}{2\alpha} < \xi_m < 1 + \frac{\varepsilon}{2\alpha} \right\},$$

содержащий множество $\tilde{A}$. Кроме того, согласно определению меры параллелепипеда, имеем

$$\mu_m(\tilde{P}_\varepsilon) = \mu_{m-1}(P) \cdot \mu_1\left(\left(1 - \frac{\varepsilon}{2\alpha}, 1 + \frac{\varepsilon}{2\alpha}\right)\right) = \mu_{m-1}(P) \cdot \frac{\varepsilon}{\alpha} = \varepsilon.$$

Поэтому для внешней меры $\mu_m^*(\tilde{A})$ множества $\tilde{A}$ справедлива оценка $\mu_m^*(\tilde{A}) \leq \mu_m^*(\tilde{P}_\varepsilon) = \mu_m(\tilde{P}_\varepsilon) = \varepsilon$, из которой следует, что $\tilde{A}$ является измеримым в $\mathbb{R}^m$ множеством меры нуль (поскольку $\mu_m^*(\tilde{A}) = 0$).

Пусть A — неограниченное множество пространства $\mathbb{R}^{m-1}$. Рассмотрим последовательность параллелепипедов $(P^*(n))_{n=1}^\infty$ пространства $\mathbb{R}^m$, а именно: $P^*(n) = [-n; n] \times \dots \times [-n; n]$. Аналогично, пусть $(P(n))_{n=1}^\infty$ — последовательность параллелепипедов пространства $\mathbb{R}^{m-1}$, где $P(n) = [-n; n] \times \dots \times [-n; n]$. Тогда легко проверить, что $\tilde{A} \cap P^*(n) = \{(\xi_1, \dots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m : (\xi_1, \dots, \xi_{m-1}) \in A \cap P(n), \xi_m = 1\}$. Поскольку для каждого $n \in \mathbb{N}$ множество $A \cap P(n)$ ограничено, то, согласно предыдущим рассуждениям, получаем, что множество $\tilde{A} \cap P^*(n)$ μ_m -измеримо в $\mathbb{R}^m$ и $\mu_m(\tilde{A}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_m(\tilde{A} \cap P^*(n)) = 0$.

Замечание. Аналогично можно доказать, что если A — любое множество в $\mathbb{R}^{m-1}$, то $\tilde{A} = \{(\xi_1, \dots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m : (\xi_1, \dots, \xi_{m-1}) \in A, \xi_m = c\}$, где c — некоторое число, измеримо в $\mathbb{R}^m$ и $\mu_m(\tilde{A}) = 0$.

12. Построить на плоскости $\mathbb{R}^2$ такое μ_2 -измеримое множество, проекции которого на обе координатные оси неизмеримы по Лебегу.

Решение. Рассмотрим на координатных осях OX и OY неизмеримые множества B_1 и B_2 соответственно (см. теорему 21) и построим множества

$$A_1 = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : x \in B_1, y = 0\} \text{ и } A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, y \in B_2\},$$

которые, согласно примеру 11, являются μ_2 -измеримыми. Поэтому μ_2 -измеримым будет множество $A_1 \cup A_2$. Но проекция $A_1 \cup A_2$ на ось OX совпадает с μ_1 -неизмеримым множеством $B_1 \cup \{0\}$, а на ось OY —

с μ_1 -неизмеримым множеством $B_2 \cup \{0\}$. Следовательно, $A_1 \cup A_2$ является искомым множеством.

13. Доказать, что множество $A \subset \mathbb{R}^m$ измеримо тогда и только тогда, когда для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое открытое в $\mathbb{R}^m$ множество $G \supset A$, что $\mu_m^*(G \setminus A) < \varepsilon$.

Решение. Необходимость. Пусть A является μ_m -измеримым множеством в $\mathbb{R}^m$. Тогда, согласно замечанию, приведенному после теоремы 19, для каждого $\varepsilon > 0$ имеется такое открытое в $\mathbb{R}^m$ множество $G \supset A$, что $\mu_m^*(G \setminus A) < \varepsilon$.

Достаточность. Пусть n — произвольное натуральное число. Из условия задачи для $\varepsilon = \frac{1}{n}$ находим такое открытое множество $G_n \supset A$, что $\mu_m^*(G_n \setminus A) < \frac{1}{n}$. Рассмотрим множество $\tilde{A} = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, являющееся измеримым. Покажем, что $\tilde{A} \setminus A$ является множеством меры нуль. Действительно, для каждого $n \in \mathbb{N}$ имеем включение $\tilde{A} \setminus A \subset G_n \setminus A$. Поэтому $0 \leq \mu_m^*(\tilde{A} \setminus A) \leq \mu_m^*(G_n \setminus A) < \frac{1}{n}$. Отсюда следует, что $\mu_m^*(\tilde{A} \setminus A) = 0$. Таким образом, $\tilde{A} \setminus A$ является множеством меры нуль, а множество $A = \tilde{A} \setminus (\tilde{A} \setminus A)$ измеримо.

14. Доказать, что множество точек сходимости произвольной последовательности непрерывных на замкнутом множестве $F \subset \mathbb{R}^m$ функций является μ_m -измеримым; более того, оно имеет тип $F_{\sigma\delta}$ (т. е. представляется в виде пересечения счетного числа множества типа F_σ).

Решение. Пусть $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ — последовательность непрерывных функций, заданных на F , и A — множество всех точек из F , в каждой из которых эта последовательность сходится. Если $x_0 \in A$, то числовая последовательность $(f_n(x_0))_{n=1}^{\infty}$ является сходящейся, т. е., согласно критерию Коши, она фундаментальна. Таким образом, для $x_0 \in A$ и произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такой номер n_0 , что если $n \geq n_0$ и $k \geq n_0$, то $|f_n(x_0) - f_k(x_0)| \leq \varepsilon$. Если $\varepsilon = \frac{1}{v}$, где $v \in \mathbb{N}$, то для $x_0 \in A$ имеем

$$\forall v \in \mathbb{N} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, k \geq n_0 |f_n(x_0) - f_k(x_0)| \leq \frac{1}{v}. \quad (4)$$

Поскольку (4) равносильно сходимости числовой последовательности $(f_n(x_0))_{n=1}^{\infty}$, то

$$A = \bigcap_{v=1}^{\infty} \bigcup_{n_0=1}^{\infty} \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \bigcap_{k=n_0}^{\infty} \left\{ x \in F : |f_n(x) - f_k(x)| \leq \frac{1}{v} \right\}. \quad (5)$$

Изучим множество $F_{n,k}^v = \left\{ x \in F : |f_n(x) - f_k(x)| \leq \frac{1}{v} \right\}$. Оно является замкнутым. Действительно, если x^* является предельной точкой множества $F_{n,k}^v$, то найдется такая последовательность $(x_\mu)_{\mu=1}^{\infty}$ точек из $F_{n,k}^v$, что $x_\mu \rightarrow x^*$. Отсюда следует, что $(x_\mu)_{\mu=1}^{\infty} \subset F$ и, в силу

замкнутости F , $x^* \in F$. Поскольку $x_\mu \in F_{n,k}^\nu$ для произвольного $\mu \in \mathbb{N}$, то выполняется неравенство $|f_n(x_\mu) - f_k(x_\mu)| \leq \frac{1}{\nu} \ (\forall \mu \in \mathbb{N})$.

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $\mu \rightarrow \infty$ и учитывая непрерывность на F функций f_n и f_k , получаем $|f_n(x^*) - f_k(x^*)| \leq \frac{1}{\nu}$, т. е. $x^* \in F_{n,k}^\nu$. Таким образом, $F_{n,k}^\nu$ является замкнутым множеством. Поэтому замкнутым будет и множество

$$F_{n_0}^\nu = \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \bigcap_{k=n_0}^{\infty} F_{n,k}^\nu \quad (\nu, n_0 \in \mathbb{N}),$$

а тогда множество $\bigcup_{n_0=1}^{\infty} F_{n_0}^\nu = F^\nu$ имеет тип F_σ .

Наконец, множество A представимо в виде $A = \bigcap_{\nu=1}^{\infty} F^\nu$, т. е. оно является множеством типа $F_{\sigma\delta}$, и поэтому оно измеримо. Впрочем, измеримость A следует уже из представления (5), если обратить внимание на то, что все замкнутые множества $F_{n,k}^\nu$ измеримы.

15. Показать, что совокупность борелевых множеств $\mathcal{B}_m = \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ пространства $\mathbb{R}^m$ образует наименьшую σ -алгебру, содержащую все открытые параллелепипеды.

Решение. Отметим, что $\mathcal{B}_m$ образует σ -алгебру. Поэтому надо доказать, что если Ω_m — некоторая σ -алгебра множеств пространства $\mathbb{R}^m$, содержащая все открытые параллелепипеды, то $\Omega_m \supset \mathcal{B}_m$. Пусть G — открытое множество в $\mathbb{R}^m$. Тогда G является объединением не более чем счетного числа открытых параллелепипедов и поэтому $G \in \Omega_m$. Каждое замкнутое множество F , являющееся разностью $F = \mathbb{R}^m \setminus G$, где $G = \mathbb{R}^m \setminus F$ — открытое множество, также принадлежит Ω_m . Поэтому σ -алгебра Ω_m содержит все открытые и замкнутые множества пространства $\mathbb{R}^m$. Тогда согласно свойств σ -алгебры классу Ω_m будут принадлежать и все множества из $\mathbb{R}^m$, получающиеся из открытых замкнутых множеств с помощью применения конечного или счетного числа операций объединения, пересечения и разности. Следовательно, все элементы σ -алгебры $\mathcal{B}_m$ являются элементами σ -алгебры Ω_m , т. е. $\mathcal{B}_m \subset \Omega_m$.

16. Доказать, что если множества $A_1, \dots, A_n, \dots$ пространства $\mathbb{R}^m$ являются μ_m -измеримыми и $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_m(A_n) < +\infty$, то множество B , состоящее из всех точек пространства $\mathbb{R}^m$, которые принадлежат бесконечному числу множеств последовательности $(A_n)_{n=1}^{\infty}$, измеримо и $\mu_m(B) = 0$.

Решение. Изучим структуру множества B . Пусть $x \in B$. Тогда для каждого номера n найдется номер $k \geq n$ такой, что $x \in A_k$. Очевидно, что верно и обратное. Поэтому

$$x \in B \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists k \geq n : x \in A_k.$$

Отсюда следует, что $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} A_k$. Значит, множество B измеримо, как пересечение и объединение бесконечного числа измеримых множеств.

Найдем меру множества B . Из включения $B \subset \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, справедливо-го для каждого n , получаем $\mu_m(B) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu_m(A_k) \ (\forall n)$. Но поскольку остаток $\sum_{k=n}^{\infty} \mu_m(A_k)$ сходящегося ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_m(A_k)$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, то $\mu_m(B) = 0$.

Замечание. Введенное в примере 16 множество B называется верхним пределом последовательности $(A_m)_{m=1}^{\infty}$ и обозначается $\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} A_m$, т. е. $\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} A_m = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=m}^{\infty} A_k$.

Нижним пределом последовательности множеств $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ называется множество $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$. Оно также измеримо, если измеримыми являются все A_n . Если верхний и нижний пределы равны, то их общее значение называется пределом последовательности множеств $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ и обозначается $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$.

17. Доказать, что для каждого ограниченного множества $A \subset \mathbb{R}^m$ можно построить такое множество $\tilde{A}$ типа G_δ , что $\tilde{A} \supset A$ и $\mu_m^*(A) = \mu_m(\tilde{A})$.

Решение. Исходя из теоремы 19, для каждого натурального n , положив $\varepsilon = \frac{1}{n}$, найдем такое открытое множество $G_n \subset \mathbb{R}^m$, что $G_n \supset A$ и $\mu_m(G_n) \leq \mu_m^*(A) + \frac{1}{n}$.

Покажем, что множество $\tilde{A} = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ является искомым множеством типа G_δ . Действительно, $\tilde{A} \supset A$. Кроме того, для каждого $n \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства

$$\mu_m^*(A) \leq \mu_m(\tilde{A}) = \mu_m(\tilde{A}) \leq \mu_m(G_n) \leq \mu_m^*(A) + \frac{1}{n},$$

из которых при $n \rightarrow \infty$ получаем искомое равенство $\mu_m^*(A) = \mu_m(\tilde{A})$.

18. Пусть $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ — произвольная монотонно возрастающая последовательность множеств пространства $\mathbb{R}^m$ и $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ — ограниченное множество. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_m^*(A_n) = \mu_m^*(A)$.

Решение. Отметим, что если множества A_n ($n \in \mathbb{N}$) измеримы, то доказываемое равенство выполняется согласно теореме 8. Поэтому заменим внешние меры множеств A_n мерами, используя пример 14. Пусть для каждого $n \in \mathbb{N}$ $\tilde{A}_n$ — множество типа G_δ такое, что $A_n \subset \tilde{A}_n$

и $\mu_m(\tilde{A}_n) = \mu_m^*(A_n)$. Позаботимся еще и о том, чтобы последовательность $(\tilde{A}_n)$ также была неубывающей, т. е. чтобы $\tilde{A}_1 \subset \tilde{A}_2 \subset \dots \subset \tilde{A}_n \subset \dots$. Если это не так, то рассмотрим последовательность множеств $\tilde{A}'_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} \tilde{A}_k$ ($n \in \mathbb{N}$). Тогда $\tilde{A}'_n$ являются также множествами типа G_δ и, кроме того, $\tilde{A}'_n \supset A_n$, поскольку для каждого $k \geq n$ имеем $\tilde{A}_k \supset A_k \supset A_n$. Найдем меру множества $\tilde{A}'_n$: $\mu_m^*(A_n) \leq \mu_m(\tilde{A}'_n) \leq \mu_m^-(\tilde{A}_n) = \mu_m^*(A_n)$, т. е. $\mu_m(\tilde{A}'_n) = \mu_m^*(A_n)$. Из построения последовательности $(\tilde{A}'_n)_{n=1}^{\infty}$ непосредственно следует, что $\tilde{A}'_1 \subset \tilde{A}'_2 \subset \dots \subset \tilde{A}'_n \subset \dots$. Таким образом, можно считать, что для заданной последовательности множеств $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ построена такая последовательность $\tilde{A}_1 \subset \tilde{A}_2 \subset \dots \subset \tilde{A}_n \subset \dots$ множеств типа G_δ , для которой $\mu_m^-(\tilde{A}_n) = \mu_m^*(A_n)$ ($\forall n \in \mathbb{N}$). Тогда, согласно теореме 8,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_m^*(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_m(\tilde{A}_n) = \mu_m(\tilde{A}),$$

где $\tilde{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n$. Осталось доказать, что $\mu_m(\tilde{A}) = \mu_m^*(A)$.

Из очевидных включений $A_n \subset A \subset \tilde{A}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) следует, что $\mu_m(\tilde{A}_n) = \mu_m^*(A_n) \leq \mu_m^*(A) \leq \mu_m(\tilde{A})$ ($\forall n \in \mathbb{N}$). Переходя в последнем неравенстве к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем искомое равенство $\mu_m^*(A) = \mu_m(\tilde{A})$.

19. Доказать, что совокупность $\mathfrak{M}_m$ всех измеримых множеств пространства $\mathbb{R}^m$ равносильна с совокупностью всех подмножеств множества $\mathbb{R}^m$.

Решение. Напомним, что $\mathbb{R}^m$ является множеством мощности континуума, а совокупность всех его подмножеств имеет мощность гиперконтинуума 2^c (согласно определению). Поэтому необходимо доказать, что множество $\mathfrak{M}_m$ также имеет мощность 2^c . Для решения этой задачи удобно различать случаи $m = 1$ и $m > 1$.

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}$ и совокупность $\mathfrak{M}_1$. Мощность $\mathfrak{M}_1$ не превосходит 2^c , поскольку $\mathfrak{M}_1$ является частью множества всех подмножеств $\mathbb{R}$. Кроме того, канторово множество F является множеством μ_1 -меры нуль и вместе с тем имеет мощность c . Поэтому, согласно полноте меры μ_1 , каждое из подмножеств множества F μ_1 -измеримо. Следовательно, совокупность всех подмножеств множества F является частью $\mathfrak{M}_1$ и имеет мощность 2^c . Поэтому мощность $\mathfrak{M}_1$ не меньше, чем 2^c . Таким образом, класс $\mathfrak{M}_1$ имеет мощность гиперконтинуума 2^c .

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^m$ и класс $\mathfrak{M}_m$ измеримых множеств в $\mathbb{R}^m$ ($m > 1$). Совокупность $\mathfrak{M}_m$ имеет мощность, не превосходящую 2^c . Если рассмотреть множество $A = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_2 = \dots = x_m =$

$= 0$ }, то оно имеет мощность континуума и $\mu_m(A) = 0$ (см. пример 11). Согласно свойству полноты меры μ_m , каждое из подмножеств множества A является μ_m -измеримым. Поэтому мощность $\mathfrak{M}_m$ не превосходит 2^c . Следовательно, класс $\mathfrak{M}_m$ является множеством мощности гиперконтинуума 2^c .

Замечание. Именно то обстоятельство, что совокупность всех измеримых множеств $\mathfrak{M}_m$ равносильна множеству всех подмножеств пространства $\mathbb{R}^m$, не позволяет эффективно построить пример неизмеримого множества в $\mathbb{R}^m$. Полезно в этой связи также отметить, что совокупность $\mathfrak{B}_m = \mathfrak{B}(\mathbb{R}^m)$ имеет мощность континуума c (это утверждение рекомендуем доказать самостоятельно).

Задачи для самостоятельной работы

1. Доказать, что множество $A \subset \mathbb{R}$ является борелевым, и найти его меру $\mu_1(A)$, если:

а) $A = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0; 1]$; б) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^4 \in \mathbb{Q}\}$;

в) $A = [a; +\infty)$; г) $A = (-\infty; -b]$.

2. Доказать, что множество $A \subset \mathbb{R}^2$ является борелевым, и найти его меру $\mu_2(A)$, если:

а) $A = \{x \in \mathbb{R} : e^x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\} \times [0; 2]$;

б) $A = \{x \in \mathbb{R} : \sin x \in \mathbb{Q}\} \times \mathbb{R}$;

в) $A = \left\{ (x; y) \in \mathbb{R}^2 : |\sin x| < \frac{1}{2}, (x+y) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \right\} \cup \{[0; 1] \times [0; 1]\}$.

3. Доказать, что множество $A \subset \mathbb{R}^3$ является борелевым, и найти его меру $\mu_3(A)$, если:

а) $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$; б) $A = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \times (0; 1] \times (0; +\infty)$;

в) $A = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 : (x+y+z) \in \mathbb{Z}\}$;

г) $A = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z > 0\}$.

4. Доказать, что множество $A \subset \mathbb{R}$ является борелевым, и вычислить его меру $\mu_1(A)$, если:

а) $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(n - \frac{1}{2^n}; n + \frac{1}{2^n} \right)$; б) $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} [n - e^{-n}; n + 4^{-n}]$;

в) $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(n+1)^2}; \frac{1}{n^2} \right)$; г) $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} [n^3 - 5^{-n}; n^3 + 5^{-n}] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$;

д) $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\ln n; \ln(n+1)) \setminus \mathbb{Z}$.

5. Построить последовательность $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ борелевых множеств (а) — е) — на прямой; ж) — л) — на плоскости) такую, что:

а) $\mu_1(A_n) = 1, n \geq 1, \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{R}$;

б) $\mu_1(A_n) = +\infty, A_n \supset A_{n+1}, n \geq 1, \mu_1\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$;

в) $\mu_1(A_n) = +\infty, A_n \supset A_{n+1}, n \geq 1, \mu_1\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1$;

г) $\mu_1(A_n) = +\infty, n \geq 1, \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{N}$;

д) $\mu_1(A_n) = \frac{1}{n}, n \geq 1, \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{P}$, где $\mathbb{P}$ — множество простых чисел;

е)* $\mu_1(A_n) = +\infty, A_n \cap A_j = \emptyset, n \neq j, n, j = 1, 2, \dots$;

ж) $\mu_2(A_n) = +\infty, A_n \supset A_{n+1}, n \geq 1, \mu_2\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$;

$$\text{з) } \mu_2(A_n) = 1, n \geq 1, \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{R}^2;$$

$$\text{и) } \mu_2(A_n) = +\infty, n \geq 1, \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};$$

$$\text{к) } \mu_2(A_n) = \frac{1}{2^n}, n \geq 1, \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{R} \times \{0\};$$

$$\text{л) } \mu_2(A_n) = \frac{1}{2^n}, n \geq 1, \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

6. Доказать, что множество $A \subset \mathbb{R}^2$ является μ_2 -измеримым, и найти $\mu_2(A)$, если:

$$\text{а) } A = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, 0 \leq y \leq x^2 e^{-x^2}\};$$

$$\text{б) } A = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1, \ln x < y < \ln^2 x\};$$

$$\text{в) } A = \left\{ (x; y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x < 2a, -\sqrt{\frac{x^3}{2a-x}} \leq y \leq \sqrt{\frac{x^3}{2a-x}} \right\};$$

$$\text{г) } A = B \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, \text{ где } B = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 1\},$$

$$B_n = \left\{ (x; y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4^{2n}} \right\}.$$

7. Доказать, что множество $A \subset \mathbb{R}^3$ является μ_3 -измеримым, если:

а) $A = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x; y), (x, y) \in [a_1; b_1] \times [a_2; b_2]\}$, где f — непрерывная на прямоугольнике $[a_1; b_1] \times [a_2; b_2]$ функция; найти $\mu_3(A)$;

$$\text{б) } A = \left\{ (x; y; z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \frac{1}{(1+|x|^a)(1+|y|^b)}, (x; y) \in \mathbb{R}^2 \right\};$$

при каких a и b мера $\mu_3(A)$ конечна?

$$\text{в) } A = \left\{ (x; y; z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \frac{1}{(x^2+y^2)^a}, x^2+y^2 \leq 1 \right\};$$

найти $\mu_3(A)$;

$$\text{г) } A = \left\{ (x; y; z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \frac{1}{x^a y^b}, x \geq 1, xy \geq 1 \right\};$$

при каких a и b мера $\mu_3(A)$ конечна?

д) $A = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \exp(-(x^2+y^2)^a), (x; y) \in [0; +\infty) \times [0; +\infty)\}$, где $a > 0$; найти $\mu_3(A)$.

8. Доказать, исходя из определений, что множество $A = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}\} \cap ([0; 1] \times [0; 1])$ μ_2 -неизмеримо в смысле Жордана, но μ_2 -измеримо по Лебегу.

9. Доказать, что множество $A = ([0; 1] \times [0; 1] \times \mathbb{Q}_0) \cup ([-1; 0] \times [-1; 0] \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}_0))$, где $\mathbb{Q}_0$ — множество рациональных чисел отрезка $[0; 1]$, является μ_3 -неизмеримым в смысле Жордана, но μ_3 -измеримым по Лебегу. Пусть $S(a)$ —

сечение множества A плоскостью $z = a \in [0; 1]$. Доказать, что $\int_0^1 \mu_2(S(z)) dz = 1$.

10. Доказать, что множество Кантора F отрезка $[0; 1]$ неизмеримо по Жордану.

11. Пусть a — произвольное число такое, что $0 < a < 1$. Построим множество A с помощью счетного числа шагов следующим образом. На первом шаге удалим из сегмента $[0; 1]$ интервал A_1 длины $\frac{a}{2}$, расположенный симметрично относительно середины отрезка $[0; 1]$ (назовем такой интервал средним интервалом). На втором шаге из оставшихся двух сегментов удалим средние интервалы длины $\frac{a}{8}$ каждый. Обозначим объединение этих интервалов A_2 . На третьем шаге из оставшихся четырех сегментов удалим средние интервалы длины $\frac{a}{32}$ каждый. Обозначим объединение этих четырех интервалов через A_3 . Продолжим этот процесс неограниченно. Пусть $A =$

— $[0; 1] \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Доказать, что множество A является μ_1 -измеримым, $\mu_1(A) = 1 - a$

и оно не содержит целиком ни одного отрезка. Показать также, что A несчетно.

12. Построим на плоскости $\mathbb{R}^2$ множество A следующим образом: разделим квадрат $[0; 1] \times [0; 1]$ прямыми $x = \frac{1}{3}$, $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{1}{3}$, $y = \frac{2}{3}$ на 9 одинаковых квадратов.

Четыре замкнутых квадрата, примыкающих к вершинам основного квадрата, назовем квадратами первого ранга, а их объединение обозначим A_1 . Затем каждый из квадратов первого ранга разделим на 9 одинаковых замкнутых квадратиков, и те из них, которые примыкают к вершинам соответствующего квадрата первого ранга, назовем квадратами второго ранга; объединение всех 16 замкнутых квадратов второго ранга обозначим A_2 и т. д. Ясно, что $A_1 \supset A_2 \supset \dots$. Общую часть $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ назовем

«кладбищем Серпиньского». Доказать, что A — нигде не плотное замкнутое множество и $\mu_2(A) = 0$.

13. «Канторовой гребенкой» называется множество A на плоскости $\mathbb{R}^2$, состоящее из всех тех точек (x, y) , координаты которых удовлетворяют следующим условиям: $x \in [0; 1]$, $y \in F$, где F — канторово множество отрезка $[0; 1]$. Доказать, что A — нигде не плотное замкнутое множество и $\mu_2(A) = 0$.

14. Пусть множество $A \subset \mathbb{R}^m$ имеет μ_m -меру нуль. Должно ли его замыкание $\bar{A}$ быть множеством μ_m -меры нуль?

15. Доказать, что если A — неограниченное множество положительной меры на прямой $\mathbb{R}$, то в нем найдется хотя бы одна пара точек, расстояние между которыми рационально.

16. Доказать, что в каждом множестве $A \subset [0; 1]$ положительной меры существует такая пара точек, расстояние между которыми иррационально.

17. Доказать, что множество тех точек отрезка $[0; 1]$, десятичное разложение которых невозможно без цифры 5, μ_1 -измеримо. Найти его меру.

18. Доказать, что множество всех точек прямой $\mathbb{R}$, которые допускают разложение в десятичную дробь без использования цифры 5 после запятой, является множеством μ_1 -меры нуль.

19. Доказать, что множество A всех точек отрезка $[0; 1]$, в разложении которых в бесконечную десятичную дробь фигурируют все цифры от 1 до 9, является μ_1 -измеримым; найти его меру.

20*. Найти меру Лебега подмножества отрезка $[0; 1]$, состоящего из чисел, у которых в десятичной записи цифра 2 встречается раньше, чем цифра 3.

21. Доказать, что для любой конечной или счетной совокупности $(A_n)_n$ μ_m -измеримых множеств пространства $\mathbb{R}^m$ справедливо неравенство

$$\sum_n \mu_m(A_n) \leq \mu_m\left(\bigcup_n A_n\right) + \sum_{i < j} \mu_m(A_i \cap A_j).$$

22. В замкнутом параллелепипеде P с ребрами единичной длины заданы n измеримых множеств $A_1, \dots, A_n$, причем

$$\sum_{k=1}^n \mu_m(A_k) > n - 1.$$

Доказать, что $A = \bigcap_{k=1}^n A_k$ имеет положительную меру, т. е. $\mu_m(A) > 0$.

23. Внутренней мерой множества $A \subset [0; 1]$ называется число $\mu_1^*(A) = 1 - \mu_1^*([0; 1] \setminus A)$. Доказать, что $\mu_1^*(A) \geq \mu_1(A)$.

24. В обозначениях задачи 23 доказать, что множество $A \subset [0; 1]$ измеримо по Лебегу тогда и только тогда, когда $\mu_1^*(A) = \mu_1^*(A)$.

25. Доказать, что объединение счетного множества множеств типа F_σ имеет тип F_σ .

26. Доказать, что пересечение счетного множества множеств типа G_δ имеет тип G_δ .

27. Доказать, что дополнение множеств типа F_σ до $\mathbb{R}^m$ имеет тип G_δ , а дополнение множеств типа G_δ — тип F_σ .

28. Доказать, что множество всех рациональных точек пространства $\mathbb{R}$ является множеством типа F_σ и не является множеством типа G_δ .

29. Доказать, что никакое счетное всюду плотное в $\mathbb{R}^m$ множество не может иметь тип G_δ .

30. Привести пример множества, не являющегося ни множеством типа F_σ , ни множеством типа G_δ .

31. Доказать, что множество $A = \{x \in \mathbb{R}^m : \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f_n(x)| = +\infty\}$, где $(f_n(x))_{n=1}^\infty$ — последовательность непрерывных на $\mathbb{R}^m$ функций, имеет тип G_δ .

32. Пусть $y = f(x)$ — непрерывная действительная функция, заданная на измеримом множестве $A \subset \mathbb{R}^m$. Доказать, что для каждого действительного числа c множества $\{x \in A : f(x) > c\}$, $\{x \in A : f(x) \geq c\}$, $\{x \in A : f(x) < c\}$ и $\{x \in A : f(x) \leq c\}$ являются μ_m -измеримыми.

33. Доказать, что совокупность всех измеримых множеств меры нуль пространства $\mathbb{R}^m$ образует σ -кольцо.

34. Пусть множество $A \subset \mathbb{R}^m$. Доказать равносильность следующих утверждений:

- A — μ_m -измеримо;
- для каждого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество G такое, что $G \supset A$ и $\mu_m^*(G \setminus A) < \varepsilon$;
- для каждого $\varepsilon > 0$ существует замкнутое множество F такое, что $F \subset A$ и $\mu_m^*(A \setminus F) < \varepsilon$;
- существует множество K типа G_δ такое, что $K \supset A$ и $\mu_m^*(K \setminus A) = 0$;
- существует множество H типа F_σ такое, что $H \subset A$ и $\mu_m^*(A \setminus H) = 0$.

35. Доказать, что для измеримости множества $A \subset \mathbb{R}^m$ необходимо и достаточно выполнения любого из следующих условий:

- для каждого $\varepsilon > 0$ существуют замкнутое множество F и открытое G такие, что $F \subset A \subset G$ и $\mu_m(G \setminus F) < \varepsilon$;
- существуют множества K типа G_δ и H типа F_σ такие, что $H \subset A \subset K$ и $\mu_m(K \setminus H) = 0$.

Ответы. 1. а) 1; б) 0; в), г) $+\infty$. 2. а) $+\infty$; б) 0; в) $\frac{\pi}{6}$; г) 3. а), в), г) 0; б) $+\infty$. 4. а) 2; б) $\frac{4}{3} + \frac{e}{e-1}$; в) 1; г) $\frac{5}{2}$; д) $+\infty$. 6. а) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$; б) 3; в) $3\pi a^2$; г) $\frac{14\pi}{15}$. 7. а) 0; б) $a > 1$ и $b > 1$; в) если $a < 1$, то $\mu_2(A) = \frac{1}{2-2a}$ и $\mu_2(A) = +\infty$ при $a \geq 1$; г) $a > b > 1$; д) $\frac{\pi}{4a} \Gamma\left(\frac{1}{a}\right)$. 17. 1. 19. 1. 20. $\frac{1}{2}$.

§ 2. ОБЩЕЕ ПОНЯТИЕ МЕРЫ. ПРОДОЛЖЕНИЕ МЕРЫ С ПОЛУКОЛЬЦА НА КОЛЬЦО

В предыдущем параграфе была построена теория меры Лебега в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$. При этом мы исходили из понятия меры параллелепипедов и распространили ее на более широкий класс множеств — σ -алгебру $\mathfrak{M}_m$ измеримых множеств,

Но в ряде задач теории вероятностей, в математической физике и функциональном анализе возникает необходимость рассмотрения меры множеств в пространствах, отличных от $\mathbb{R}^n$, или меры в $\mathbb{R}^n$, отличной от меры Лебега. В этом случае мера также распространяется с некоторой совокупности множеств (образующих полукольцо) на более широкий класс множеств, являющихся σ -алгеброй.

1. Системы множеств. Пусть X — некоторое непустое фиксированное множество. Далее в этом параграфе будем рассматривать системы множеств, каждое из которых является подмножеством множества X .

Непустая система множеств $\mathfrak{R}$ называется *кольцом*, если она обладает свойством: из $A \in \mathfrak{R}$ и $B \in \mathfrak{R}$ следует, что $A \cap B \in \mathfrak{R}$ и $A \Delta B \in \mathfrak{R}$. Поскольку для произвольных множеств A и B $A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B)$ и $A \setminus B = A \Delta (A \cap B)$, то из $A \in \mathfrak{R}$ и $B \in \mathfrak{R}$ следует также принадлежность к кольцу $\mathfrak{R}$ множеств $A \cup B$ и $A \setminus B$. Таким образом, кольцо множеств $\mathfrak{R}$ есть система множеств, замкнутая по отношению к операции объединения и пересечения, вычитания и образования симметрической разности. Методом математической индукции легко получить, что если множества

$A_1, \dots, A_n$ принадлежат кольцу $\mathfrak{R}$, то множества $\bigcup_{k=1}^n A_k$ и $\bigcap_{k=1}^n A_k$ также являются эле-

ментами $\mathfrak{R}$. Отметим, что пустое множество $\emptyset$ принадлежит кольцу $\mathfrak{R}$, поскольку $\emptyset = A \setminus A$, где $A \in \mathfrak{R}$. Система множеств, состоящая только из пустого множества, представляет собой наименьшее возможное кольцо множеств.

Пусть в кольце множеств $\mathfrak{R}$ имеется элемент, содержащий все другие множества из $\mathfrak{R}$. Тогда этот элемент называется *единицей кольца* $\mathfrak{R}$, а само кольцо $\mathfrak{R}$ — *алгеброй множеств*. Например, совокупность 2^X всех подмножеств множества X образует алгебру множеств с единицей X . Аналогично класс $\mathfrak{M}_m$ измеримых по Лебегу множеств пространства $\mathbb{R}^m$ является алгеброй множеств с единицей $\mathbb{R}^m$. Вместе с тем совокупность $\mathfrak{M}'_m$ всех ограниченных измеримых по Лебегу множеств в $\mathbb{R}^m$ образует кольцо, не являющееся алгеброй множеств.

Непосредственно из определения следует, что пересечение произвольного числа колец является кольцом. Поэтому для любой системы множеств S пересечение всех колец, содержащих эту систему, образует кольцо $\mathfrak{R}(S)$. Оно содержит S и, вместе с тем, само содержится в любом кольце $\mathfrak{R} \supset S$. Кольцо $\mathfrak{R}(S)$ называется *минимальным кольцом*, порожденным S .

В теории меры наряду с понятием кольца важную роль играет более общее понятие — понятие полукольца множеств.

Система множеств $\mathfrak{H}$ называется *полукольцом*, если она содержит пустое множество $\emptyset$, замкнута по отношению к образованию пересечения (т. е. если $A \in \mathfrak{H}$ и $B \in \mathfrak{H}$, то $A \cap B \in \mathfrak{H}$) и обладает свойством: из принадлежности к $\mathfrak{H}$ множеств

A и $A_1 \subset A$ вытекает возможность представления A в виде $A = \bigcup_{k=1}^l A_k$, где A_k — по-

парно непересекающиеся множества из $\mathfrak{H}$. Кольцо множеств всегда является полукольцом. Примером полукольца, не являющегося кольцом, есть совокупность $\mathcal{P}_m$ всех параллелепипедов пространства $\mathbb{R}^m$.

Методом математической индукции можно доказать, что если множества $A_1, \dots, A_n, A$ принадлежат полукольцу $\mathfrak{H}$, причем множества A_k попарно не пересекаются, и $A_k \subset A$ ($k = 1, 2, \dots, n$), то A можно представить в виде объединения непересекающихся множеств полукольца $\mathfrak{H}$, т. е. $A = \bigcup_{k=1}^l A_k$, где $l \geq n$ и $A_k \cap A_l = \emptyset$

для $k \neq l$.

Кроме того, полезно утверждение: если $A_1, \dots, A_n$ — произвольная совокупность множеств полукольца $\mathfrak{H}$, то в $\mathfrak{H}$ найдется такая конечная система попарно непересекающихся множеств $B_1, \dots, B_l$, что каждое A_k можно представить в виде объединения $A_k = \bigcup_{j \in I_k} B_j$ некоторых множеств из $\{B_1, B_2, \dots, B_l\}$.

Если S — произвольная система множеств, то фактическое описание кольца $\mathfrak{R}(S)$, исходя из элементов системы S , довольно сложно. Оно вполне обозримо в том важном случае, когда S является полукольцом.

Теорема 1. Если $\mathfrak{N}$ — полукольцо, то $\mathfrak{R}(\mathfrak{N})$ совпадает с системой всех множеств A , допускающих представление в виде объединения конечного числа (своего для каждого множества A) попарно непересекающихся множеств из $\mathfrak{N}$, т. е. $A = \bigcup_{k=1}^n A_k$.

Введем следующие понятия. Кольцо множеств называется σ -кольцом, если оно вместе с каждой последовательностью множеств $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots$ содержит их объединение $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. σ -алгеброй называют σ -кольцо с единицей.

Кольцо множеств называется δ -кольцом, если оно вместе с каждой последовательностью множеств $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots$ содержит их пересечение $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$. Аналогично δ -алгеброй называют σ -кольцо с единицей. Используя формулы двойственности, находим, что каждая δ -алгебра является σ -алгеброй и наоборот. Примером σ -алгебры есть совокупность 2^X всех подмножеств множества X . Как следует из § 1, класс $\mathfrak{M}_m$ измеримых по Лебегу множеств пространства $\mathbb{R}^m$ образует σ -алгебру.

Пусть S — непустая система множеств. Тогда σ -алгебра $\mathfrak{B}$ называется неприводимой (по отношению к S), если $\mathfrak{B} \supset S$, и единицей алгебры $\mathfrak{B}$ будет множество $\bigcup_{A \in S} A$.

Теорема 2. Для произвольной непустой системы множеств S существует неприводимая σ -алгебра $\mathfrak{B}(S)$, содержащая S и содержащаяся в любой σ -алгебре, содержащей S . Эта σ -алгебра $\mathfrak{B}(S)$ называется минимальной σ -алгеброй над системой S . Например, σ -алгебра $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^m)$ борелевых множеств пространства $\mathbb{R}^m$ является минимальной σ -алгеброй над совокупностью всех замкнутых параллелепипедов в $\mathbb{R}^m$.

2. Продолжение меры с полукольца на порожденное им кольцо.

Определение 1. Функция множеств $\mu(A)$ называется мерой, если:

- 1) ее область определения $\mathfrak{N}_\mu \subset 2^X$ является полукольцом множеств;
- 2) значения функции $\mu(A)$ ($\forall A \in \mathfrak{N}_\mu$) действительны и неотрицательны;
- 3) мера $\mu(A)$ аддитивна, т. е. если множество $A \in \mathfrak{N}_\mu$ представляется в виде

объединения $A = \bigcup_{k=1}^n A_k$ попарно непересекающихся множеств A_k полукольца $\mathfrak{N}_\mu$, то

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k).$$

Отметим, что из представления $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset$ вытекает, что для любой меры μ справедливо равенство $\mu(\emptyset) = 0$.

Определение 2. Мера $\tilde{\mu}$, определенная на полукольце $\mathfrak{N}_{\tilde{\mu}}$, называется продолжением меры μ , если $\mathfrak{N}_\mu \subset \mathfrak{N}_{\tilde{\mu}}$ и для каждого множества $A \in \mathfrak{N}_\mu$ справедливо равенство

$$\mu(A) = \tilde{\mu}(A).$$

Пусть мера μ определена на полукольце $\mathfrak{N}_\mu$. Тогда каждое множество $A \in \mathfrak{R}(\mathfrak{N}_\mu)$ допускает представление в виде объединения попарно непересекающихся множеств $A_1, \dots, A_n$ полукольца $\mathfrak{N}_\mu$: $A = \bigcup_{k=1}^n A_k$. Поэтому естественно положить

$$\tilde{\mu}(A) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k) \quad (\forall A \in \mathfrak{R}(\mathfrak{N}_\mu)). \quad (1)$$

Справедлива такая теорема.

Теорема 3. Для каждой меры μ , заданной на некотором полукольце $\mathfrak{N}_\mu$, существует одно и только одно продолжение $\tilde{\mu}$, имеющее своей областью определения кольцо $\mathfrak{R}(\mathfrak{N}_\mu)$. Это продолжение определяется формулой (1).

Если мера μ задана на кольце $\mathfrak{R}_\mu$, то она обладает свойством монотонности, т. е. когда $A \in \mathfrak{R}_\mu$, $B \in \mathfrak{R}_\mu$ и $A \subset B$, то $\mu(A) \leq \mu(B)$. Кроме того, если множеств

ва $A_1, A_2, \dots, A_n$ являются элементами кольца $\mathfrak{R}_\mu$ и $A \subset \bigcup_{k=1}^n A_k$, то $\mu(A) \leq \sum_{k=1}^n \mu(A_k)$ (свойство полуаддитивности меры μ).

В различных вопросах математического анализа возникает необходимость рассмотрения не только конечного, но и счетного числа множеств. Поэтому условие аддитивности меры заменяется более сильным требованием счетной аддитивности.

Определение 3. Мера μ называется *счетно-аддитивной*, или *σ -аддитивной*, если для любых множеств $A, A_1, A_2, \dots, A_k, \dots$, принадлежащих ее области определения $\mathfrak{M}$ и удовлетворяющих условиям $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, A_k \cap A_j = \emptyset$ при $k \neq j$, справедливо равенство $\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$.

Например, мера Лебега μ_m , определенная на полукольце $\mathfrak{M}'_m$ всех ограниченных измеримых по Лебегу множеств пространства $\mathbb{R}^m$, является σ -аддитивной.

Теорема 3 для σ -аддитивных мер μ , определенных на полукольце $\mathfrak{M}_\mu$, получает свое дальнейшее развитие.

Теорема 4. Для каждой σ -аддитивной меры μ , заданной на полукольце множеств $\mathfrak{M}_\mu$, ее продолжение $\tilde{\mu}$, определенное с помощью формулы (1), на кольцо $\mathfrak{R}(\mathfrak{M}_\mu)$ также является счетно-аддитивной мерой.

Продолжение $\tilde{\mu}$ меры μ также обозначим символом μ .

Для σ -аддитивных мер, областью определения которых является кольцо множеств, справедливы такие основные свойства.

Теорема 5. Пусть мера μ , определенная на кольце множеств $\mathfrak{R}$, σ -аддитивна, а множества $A, A_1, A_2, \dots, A_k, \dots$ принадлежат $\mathfrak{R}$. Тогда

1) если $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset A$ и $A_k \cap A_j = \emptyset$ при $k \neq j$, то $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \leq \mu(A)$;

2) если $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, то $\mu(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ (счетная полуаддитивность меры μ).

Отметим, что свойство счетной полуаддитивности меры μ (свойство 2)), равносильно ее σ -аддитивности, но иногда легче проверить свойство счетной полуаддитивности.

3. Лебегово продолжение меры, определенной на полукольце с единицей. Из предыдущего пункта следует, что σ -аддитивную меру μ , определенную на полукольце множеств $\mathfrak{M}$, можно продолжить с сохранением свойства σ -аддитивности на кольцо $\mathfrak{R}(\mathfrak{M})$. Оказывается, σ -аддитивная мера μ допускает продолжение на более широкий класс множеств, чем кольцо $\mathfrak{R}(\mathfrak{M})$. Это осуществляется с помощью лебегова продолжения.

Пусть на некотором полукольце множеств $\mathfrak{M}$ с единицей E (т. е. $E \in \mathfrak{M}$ и E содержит все элементы полукольца $\mathfrak{M}$) задана счетно-аддитивная мера μ . Определим на системе 2^E всех подмножеств множества E функцию $\mu^*(A)$ — внешнюю меру множества $A \in 2^E$.

Определение 4. Внешней мерой множества $A \subset E$ называется число $\mu^*(A) = \inf_{\bigcup_k B_k \supset A} \sum_k \mu(B_k)$, где нижняя грань берется по всем покрытиям $\bigcup_k B_k \supset A$ множества A конечными или счетными системами множеств $B_k \in \mathfrak{M}$.

Нетрудно проверить, что внешняя мера элементов полукольца $\mathfrak{M}$ и кольца $\mathfrak{R}(\mathfrak{M})$ совпадает с мерой μ .

Внешняя мера обладает важным свойством счетной полуаддитивности: если $A \subset \bigcup_k A_k$, где (A_k) — конечная или счетная система множеств, то $\mu^*(A) \leq \sum_k \mu^*(A_k)$.

Определение 5. Множество $A \subset E$ называется *измеримым по Лебегу* или *μ -измеримым*, если для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такое множество $B \in \mathfrak{R}(\mathfrak{M})$, что $\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$.

При этом мерой Лебега множества A , которая обозначается $\mu(A)$, считаем его внешнюю меру $\mu^*(A)$, т. е. полагаем $\mu(A) = \mu^*(A)$.

Из определения следует, что все множества кольца $\mathfrak{R}(\mathfrak{N})$ являются измеримыми в смысле Лебега и их мера Лебега совпадает с исходной мерой μ (поэтому для меры Лебега употребляется то же обозначение μ , что и для исходной).

Обозначим через $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_\mu$ совокупность всех измеримых по Лебегу (относительно меры μ) множеств, содержащихся в E . Тогда, как отмечалось выше, $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{R}(\mathfrak{N}) \subset \subset \mathfrak{M}_\mu$.

Теорема 6. Система $\mathfrak{M}_\mu$ всех измеримых множеств образует σ -алгебру множеств с единицей E . Мера Лебега μ , определенная на $\mathfrak{M}_\mu$, обладает всеми свойствами меры и является счетно-аддитивной на $\mathfrak{M}_\mu$.

Из этой теоремы следует непрерывность меры μ на $\mathfrak{M}_\mu$, т. е. если $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_k \supset \dots$ — убывающая последовательность измеримых множеств ($A_k \in \mathfrak{M}_\mu$, $\forall k \in \mathbb{N}$) и $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$, то $\mu(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k)$, а если $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_k \subset \dots$ — возрастающая последовательность измеримых множеств и $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, то также $\mu(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k)$.

Определение 6. Лебеговым продолжением σ -аддитивной меры μ , заданной на полукольце $\mathfrak{N}$ с единицей E , называется мера Лебега $\mu(A)$, определенная на системе всех измеримых множеств $\mathfrak{M}_\mu$ и совпадающая на $\mathfrak{M}_\mu$ с внешней мерой $\mu^*(A)$.

Мера Лебега μ обладает еще одним важным свойством — свойством полноты. Мера μ , рассматриваемая на полукольце $\mathfrak{N}$, называется *полной*, если из равенства $\mu(A) = 0$ (для некоторого множества $A \in \mathfrak{N}$) следует, что каждое подмножество $A' \subset \subset A$ также принадлежит $\mathfrak{N}$ и $\mu(A') = 0$. Но не каждая мера μ является полной. Примером неполной меры служит мера Лебега μ_m , определенная на полукольце $\mathcal{P}_m$ всех параллелепипедов пространства $\mathbb{R}^m$ ($m \geq 2$). Дело в том, что не любое подмножество параллелепипеда нулевой меры является параллелепипедом.

Теорема 7. Лебегово продолжение любой σ -аддитивной меры, заданной на полукольце $\mathfrak{N}$, полно.

Отметим, что любую σ -аддитивную меру, определенную на σ -алгебре, можно продолжить до полной, положив ее равной нулю на любом подмножестве каждого множества исходной нулевой меры.

Кроме того, если μ — σ -аддитивная мера на кольце $\mathfrak{R}$, то существует единственная счетно-аддитивная мера, определенная на наименьшей σ -алгебре $\mathfrak{B}(\mathfrak{R})$, содержащей $\mathfrak{R}$, и являющаяся продолжением меры μ .

4. Лебегово продолжение меры, заданной на полукольце без единицы. Если σ -аддитивная мера μ определена на полукольце $\mathfrak{N}$ без единицы, то ее лебегово продолжение строится аналогично (с некоторыми незначительными изменениями). Пусть X — рассматриваемое нами фиксированное множество и μ — σ -аддитивная мера, определенная на полукольце $\mathfrak{N}$ без единицы подмножеств X . Для определения внешней меры множества $A \subset X$ ограничимся такими покрытиями $\bigcup_k B_k \supset A$ элементами кольца $\mathfrak{R}(\mathfrak{N})$, для которых сумма $\sum_k \mu(B_k)$ является конечной.

Пусть S_{μ^*} — система всех множеств $A \subset X$, для каждого из которых существует конечное или счетное покрытие $\bigcup_k B_k \supset A$ множествами $B_k \in \mathfrak{R}(\mathfrak{N})$, для которых $\sum_k \mu(B_k) < +\infty$. Тогда для произвольного множества $A \in S_{\mu^*}$ положим

$$\mu^*(A) = \inf_{\bigcup_k B_k \supset A} \sum_k \mu(B_k).$$

Определение множества, измеримого по Лебегу, аналогично: множество $A \in S_{\mu^*}$ называется измеримым по Лебегу или μ -измеримым, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует множество $B \in \mathfrak{R}(\mathfrak{N})$ такое, что $\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$. При этом мерой Лебега $\mu(A)$

множества A считают число $\mu(A) = \mu^*(A)$. Пусть $\mathfrak{M}'_\mu$ — система всех измеримых множеств. Тогда $\mathfrak{R}(\mathfrak{M}) \subset \mathfrak{M}'_\mu$ и исходная мера любого множества $A \in \mathfrak{R}(\mathfrak{M})$ совпадает с мерой Лебега этого множества.

Теорема 8. Совокупность $\mathfrak{M}'_\mu$ измеримых по Лебегу множеств образует кольцо множеств и мера Лебега μ на ней обладает всеми свойствами σ -аддитивной меры. Более того, $\mathfrak{M}'_\mu$ является δ -кольцом. Если множества A_k ($k \in \mathbb{N}$) измеримы, то $A = \bigcup_{k=1}^n A_k$ будет измеримым тогда и только тогда, когда $\mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right)$ ограничены некоторой постоянной, не зависящей от $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 9. Система всех μ -измеримых подмножеств измеримого множества $A \in \mathfrak{M}'_\mu$ образует σ -алгебру.

5. Расширение понятия измеримости множеств в случае σ -конечной меры. Если исходная σ -аддитивная мера μ задана на полукольце множеств $\mathfrak{N}$ без единицы, то ее лебегово продолжение не всегда оказывается определенным на достаточно широком классе множеств. Например, если $X = \mathbb{R}^m$ и $\mu = \mu_m$ — мера Лебега, заданная на полукольце $\mathcal{P}_m$ всех параллелепипедов, то ее лебегово продолжение не содержит в качестве измеримых множеств всего пространства $\mathbb{R}^m$, внешних шаров и т. д., т. е. множеств, имеющих бесконечную лебегову меру. Естественно желание расширить понятие измеримости множеств, допуская для меры и бесконечные значения с тем, чтобы класс измеримых множеств был σ -алгеброй (а не только δ -кольцом, как в случае, рассмотренном в п. 4). При этом ограничимся практически наиболее важным случаем σ -конечной меры.

Определение 7. σ -аддитивная мера μ , заданная на некотором полукольце $\mathfrak{N}$ подмножеств множества X , называется σ -конечной, если все X можно представить как объединение счетного числа множеств из $\mathfrak{N}$ (но не объединением конечного числа множеств из $\mathfrak{N}$): $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, $\mu(X_n) < +\infty$ ($\forall n \in \mathbb{N}$).

Пусть σ -аддитивная мера μ , определенная на полукольце $\mathfrak{N}$ подмножеств множества X , является σ -конечной. Тогда $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} B'_k$, где $B'_k \in \mathfrak{N}$ ($\forall k \in \mathbb{N}$). Переходя

от полукольца $\mathfrak{N}$ к кольцу множеств $\mathfrak{R}(\mathfrak{N})$, можно считать, что $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$, где $B_k \cap B_j = \emptyset$ при $k \neq j$ и все $B_k \in \mathfrak{R}(\mathfrak{N})$. Применяя к мере μ лебегово продолжение, получим меру μ , определенную на кольце $\mathfrak{M}'_\mu$.

Рассмотрим совокупность $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}'_\mu$ всех таких подмножеств $A \subset X$, что $A \cap B_k \in \mathfrak{M}'_\mu$ ($\forall k \in \mathbb{N}$). При этом $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A \cap B_k)$ и поэтому считаем мерой $\mu(A)$ сумму ряда

$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A \cap B_k)$, если он сходится, или считаем ее равной $+\infty$, если ряд расходится.

Каждое множество из $\mathfrak{M}'_\mu$ называется измеримым по Лебегу или μ -измеримым, а мера μ , определенная на $\mathfrak{M}'_\mu$, — мерой Лебега.

Теорема 10. Пусть счетно-аддитивная мера μ является σ -конечной и определенной на полукольце $\mathfrak{N}$ подмножеств множества X . Тогда справедливы следующие утверждения:

1) построенная система множеств $\mathfrak{M}'_\mu$ образует σ -алгебру измеримых множеств, не зависящую от выбора непересекающихся множеств B_k из $\mathfrak{R}(\mathfrak{N})$ и удовлетворяющих условию $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = X$;

2) мера μ σ -аддитивна на $\mathfrak{M}'_\mu$;

3) совокупность множеств $A \in \mathfrak{M}'_\mu$, для которых $\mu(A) < +\infty$, совпадает с δ -кольцом $\mathfrak{M}'_\mu$, и на этом кольце исходная мера и новая совпадают.

Множество X , счетно-аддитивная σ -конечная мера μ (рассматриваемая на σ -алгебре $\mathcal{U}_\mu$ подмножеств множества X и являющаяся лебеговым продолжением μ с полукольца $\mathcal{N}$ на $\mathcal{U}_\mu$) и σ -алгебра $\mathcal{U}_\mu$ образуют измеримое пространство $(X, \mathcal{U}_\mu, \mu)$. Если $X \in \mathcal{U}_\mu$ и $\mu(X) = 1$, то измеримое пространство $(X, \mathcal{U}_\mu, \mu)$ называется вероятностным пространством, а мера μ — вероятностной мерой.

6. Примеры наиболее употребляемых измеримых пространств.

1) Мера Лебега в пространстве $\mathbb{R}^m$. Пусть $\mathcal{P}_m$ — полукольцо всех параллелепипедов пространства $\mathbb{R}^m$, а μ_m — мера Лебега, определенная на $\mathcal{P}_m$. Тогда лебегово-продолжение меры μ_m с $\mathcal{P}_m$ на σ -алгебру $\mathcal{U}_m$ измеримых по Лебегу множеств пространства $\mathbb{R}^m$ образует измеримое пространство $(\mathbb{R}^m, \mathcal{U}_m, \mu_m)$.

2) Мера Лебега — Стильеса. Пусть на отрезке $[a; b]$ числовой оси $\mathbb{R}$ задана монотонно неубывающая функция $\mathcal{F}$, которую для определенности считаем непрерывной слева. Определим на полукольце $\mathcal{N}$ всех полуинтервалов вида $[\alpha; \beta)$, принадлежащих основному сегменту $[a; b]$, меру $\mu_{\mathcal{F}}$ с помощью равенства

$$\mu_{\mathcal{F}}[\alpha; \beta) = \mathcal{F}(\beta) - \mathcal{F}(\alpha). \quad (2)$$

Тогда можно доказать, что эта мера $\mu_{\mathcal{F}}$ является счетно-аддитивной на полукольце $\mathcal{N}$ (см. пример 8). Поэтому ее можно распространить с помощью лебегова продолжения до меры $\mu_{\mathcal{F}}$, определенной на некоторой σ -алгебре $\mathcal{U}_{\mathcal{F}} \supset \mathcal{N}(\mathcal{N})$. $\mu_{\mathcal{F}}$ -измеримых множеств отрезка $[a; b]$. Отметим, что совокупность $\mathcal{U}_{\mathcal{F}}$ содержит все борелевы множества отрезка $[a; b]$. Меру $\mu_{\mathcal{F}}$, полученную таким построением, называют мерой Лебега — Стильеса, отвечающей функции $\mathcal{F}$, а саму функцию $\mathcal{F}$ — производящей функцией этой меры. Тогда $([a; b], \mathcal{U}_{\mathcal{F}}, \mu_{\mathcal{F}})$ образует измеримое пространство.

Эту конструкцию можно несколько обобщить. Пусть G — некоторое открытое множество числовой оси $\mathbb{R}$ и на нем задана монотонно неубывающая функция $\mathcal{F}$, являющаяся непрерывной слева. Для полукольца всех полуинтервалов вида $[\alpha; \beta)$, содержащихся в G , определим меру $\mu_{\mathcal{F}}$ $[\alpha; \beta) = \mathcal{F}(\beta) - \mathcal{F}(\alpha)$. Тогда можно доказать, что эта мера $\mu_{\mathcal{F}}$ является σ -аддитивной на этом полукольце и поэтому она допускает распространение до счетно-аддитивной меры, заданной на некоторой σ -алгебре $\mathcal{U}_{\mathcal{F}}$ подмножеств множества G . Таким образом, получаем измеримое пространство $(G, \mathcal{U}_{\mathcal{F}}, \mu_{\mathcal{F}})$. Мера $\mu_{\mathcal{F}}$ также называется мерой Лебега — Стильеса на G , отвечающей функции $\mathcal{F}$, а сама $\mathcal{F}$ — производящей функцией этой меры. В частности, можно рассматривать измеримое пространство $(\mathbb{R}, \mathcal{U}_{\mathcal{F}}, \mu_{\mathcal{F}})$. В этом случае, если $\mathcal{F}$ — ограниченная монотонно неубывающая непрерывная слева на $\mathbb{R}$ функция, то получим σ -аддитивную конечную меру на всей прямой $\mathbb{R}$. Мера $\mu_{\mathcal{F}}$ ($\mathbb{R}$) всей прямой $\mathbb{R}$ при этом равна $\mathcal{F}(+\infty) - \mathcal{F}(-\infty)$, где $\mathcal{F}(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{F}(x)$ и $\mathcal{F}(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \mathcal{F}(x)$. Иногда считают, что $\mathcal{F}(-\infty) = 0$ (это всегда можно получить, рассматривая новую функцию $\mathcal{F}(x) - \mathcal{F}(-\infty)$). Если существует интегрируемая на $\mathbb{R}$ неотрицательная функция $y = p(x)$, $x \in \mathbb{R}$ такая, что $\mathcal{F}(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt$ ($\forall x \in \mathbb{R}$), то функцию p называют плотностью меры Лебега — Стильеса $\mu_{\mathcal{F}}$.

Построим меру Лебега — Стильеса в пространстве $\mathbb{R}^m$ ($m \geq 2$). Пусть G — некоторое открытое множество в $\mathbb{R}^m$, а функция $\mathcal{F}$, определенная на G , считается непрерывной на G . Для открытого параллелепипеда P пространства $\mathbb{R}^m$

$$P = \{x = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m : a_j < \xi_j < b_j, j = 1, 2, \dots, m\}$$

введем обозначение $(a; b)$, где $a = (a_1, \dots, a_m)$, $b = (b_1, \dots, b_m)$ и $a_j \leq b_j$, $j = 1, 2, \dots, m$. Аналогично для этих же a и b запишем $[a; b] = \{x = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m :$

: $a_j \leq \xi_j \leq b_j$, $j = 1, \dots, m$), $[a; b] = \{x = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m : a_j \leq \xi_j \leq b_j, j = 1, \dots, m\}$, $(a; b] = \{x = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m : a_j < \xi_j \leq b_j, j = 1, \dots, m\}$. Тогда для каждого параллелепипеда $P \subset G$ вида $(a; b)$, $(a; b]$, $[a; b)$ или $[a; b]$ введем функцию множеств

$$\mu_{\mathcal{F}}(P) = \Sigma (-1)^{\nu(c)} \mathcal{F}(c_1, \dots, c_m),$$

где суммирование проводим по всем точкам $c = (c_1, \dots, c_m)$, у которых каждое c_k принимает значение a_j или b_j , а $\nu(c)$ — число тех координат, для которых $c_k = a_k$. Рассмотрим функции $\mathcal{F}$, где для любого $P \subset G$ имеем $\mu_{\mathcal{F}}(P) \geq 0$ (эти функции называются монотонно неубывающими функциями многих переменных). Например, если функция $y = \mathcal{F}(\xi_1, \dots, \xi_m)$, $x = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in G$, имеет непрерывную смешанную производную $\mathcal{F}_{\xi_1 \dots \xi_m}(x)$, неотрицательную в каждой точке $x \in G$, то $\mathcal{F}$ — монотонно неубывающая на G .

Можно показать, что рассматриваемая мера $\mu_{\mathcal{F}}$ является σ -аддитивной на полукольце $\mathcal{H}$ всех параллелепипедов вида $(a; b)$, $(a; b]$, $[a; b)$ или $[a; b]$. Поэтому с помощью лебегова продолжения ее можно распространить до счетно-аддитивной меры на некоторой σ -алгебре $\mathcal{U}_{\mathcal{F}}$ подмножеств множества G . Элементы σ -алгебры $\mathcal{U}_{\mathcal{F}}$ называются измеримыми в смысле Лебега — Стильеса (или $\mu_{\mathcal{F}}$ -измеримыми) множествами. Построенная мера $\mu_{\mathcal{F}}$ называется мерой Лебега — Стильеса на $\mathcal{U}_{\mathcal{F}}$, отвечающая функции $\mathcal{F}$, а сама $\mathcal{F}$ — производящей функцией этой меры. Отметим, что σ -алгебра $\mathcal{U}_{\mathcal{F}}$ содержит все борелевы множества, содержащиеся в G . Таким образом, $(G, \mathcal{U}_{\mathcal{F}}, \mu_{\mathcal{F}})$ образует измеримое пространство. В частности, таковым является $(\mathbb{R}^m, \mathcal{U}_{\mathcal{F}}, \mu_{\mathcal{F}})$. Если положить $\mathcal{F}(\xi_1, \dots, \xi_m) = \xi_1, \dots, \xi_m$, то соответствующая мера Лебега — Стильеса $\mu_{\mathcal{F}}$ совпадает с мерой Лебега μ_m и классы $\mathcal{U}_{\mathcal{F}}$ и $\mathcal{U}_m$ также совпадают.

3) *Меры, построенные по весовым функциям.* Пусть на некотором фиксированном измеримом по Жордану множестве $B \subset \mathbb{R}^m$ определена неотрицательная интегрируемая по Риму или интегрируемая в несобственном смысле функция $y = g(x)$, $x \in B$. Тогда на кольце $\mathcal{H}$ всех измеримых по Жордану множеств $A \subset B$ с помощью функции g определим меру

$$\mu(A) = \int_A \dots \int g(\xi_1, \dots, \xi_m) d\xi_1 \dots d\xi_m.$$

Эта мера распространяется стандартным лебеговым продолжением до меры μ , определенной на некоторой σ -алгебре $\mathcal{U}_{\mu}$ подмножеств множества B . Система $\mathcal{U}_{\mu}$ содержит все борелевы множества, являющиеся подмножествами B . Функция g , определяющая эту меру, называется *весом* или *весовой функцией*. Таким образом, нами построено измеримое пространство $(B, \mathcal{U}_{\mu}, \mu)$. В частности, можно рассматривать измеримое пространство $(\mathbb{R}^m, \mathcal{U}_{\mu}, \mu)$, а если $m = 1$ и $B = [a; b]$, то речь идет о пространстве $([a; b], \mathcal{U}_{\mu}, \mu)$.

4) *Каноническая гауссова мера в пространстве всех последовательностей.* Пусть s — множество всех вещественных последовательностей $x = (\xi_1, \dots, \xi_m, \dots)$. Определим в s полукольцо $\mathcal{H}$ всех множеств A вида

$$A = \{x \in s : \xi_j \in \Delta_j, j = 1, 2, \dots, n\}, \quad (3)$$

где $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ — ограниченные или неограниченные промежутки числовой оси $\mathbb{R}$. Такие множества A называются цилиндрическими множествами или *брусами* в s . Сопоставим каждому брусу A , заданному с помощью равенства (3), меру

$$\omega(A) = \frac{1}{\sqrt{\pi^n}} \int_{\Delta_1} \dots \int_{\Delta_n} \exp\left(-\sum_{k=1}^n \xi_k^2\right) d\xi_1 \dots d\xi_n. \quad (4)$$

Нетрудно проверить, что так введенная мера ω корректно определена. Дело в том, что одно и то же множество A , заданное в виде (3), допускает и другое представление. Например,

$$A = \{x \in s : \xi_1 \in \Delta_1, \dots, \xi_n \in \Delta_n, \xi_{n+1} \in \mathbb{R}\}.$$

Тогда из формулы (4) следует, что $\omega(A)$ не зависит от представления A в том или ином виде. Примем без доказательства, что мера ω является σ -аддитивной мерой на полукольце $\mathcal{H}$ (доказательство см. [84, с. 26—30]). Поэтому с помощью лебегова продолжения она распространяется до счетно-аддитивной меры ω , определенной на некоторой σ -алгебре $\mathcal{U}_\omega$ подмножеств множества s . Таким образом, построено измеримое пространство $(s, \mathcal{U}_\omega, \omega)$. Мера ω называется канонической гауссовой мерой на s .

5) *Мера Винера*. Рассмотрим множество $C_0[0; \pi]$ всех непрерывных вещественнозначных функций $x = x(t)$, определенных на отрезке $[0; \pi]$ числовой оси $\mathbb{R}$, и таких, что $x(0) = 0$. Множество $A \subset C_0[0; \pi]$ называется *цилиндрическим*, если существует такое конечное число точек $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ из $(0; \pi]$ и промежутки $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ пространства $\mathbb{R}$, что

$$A = \{x(t) \in C_0[0; \pi] : x(t_j) \in \Delta_j, j = 1, 2, \dots, n\}. \quad (5)$$

Тогда совокупность $\mathcal{H}_w$ всех цилиндрических множеств в $C_0[0; \pi]$ образует полукольцо с единицей $E = C_0[0; \pi]$. Сопоставим множеству A , заданному в виде (5), число

$$\begin{aligned} \mu_w(A) = & \frac{1}{\sqrt{\pi^n t_1 (t_2 - t_1) \dots (t_n - t_{n-1})}} \int_{\Delta_1} \dots \\ & \dots \int_{\Delta_n} \exp \left\{ -\frac{\xi_1^2}{t_1} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(\xi_{k+1} - \xi_k)^2}{t_{k+1} - t_k} \right\} d\xi_1 \dots d\xi_n. \end{aligned} \quad (6)$$

Можно проверить, что функция множеств μ_w определена на $\mathcal{H}_w$ корректно и является мерой на полукольце $\mathcal{H}_w$. Н. Винер доказал, что мера μ_w является σ -аддитивной мерой на $\mathcal{H}_w$ (более простое, чем у Винера, доказательство см. в [84, с. 82—84]). Поэтому ее можно распространить до счетно-аддитивной меры μ_w , определенной на некоторой σ -алгебре $\mathcal{U}_w \supset \mathcal{H}_w$ подмножеств множества $C_0[0; \pi]$. Эта мера μ_w называется мерой Винера в $C_0[0; \pi]$. Следовательно, тройка $(C_0[0; \pi], \mathcal{U}_w, \mu_w)$ образует измеримое винеровское пространство.

Мера Винера μ_w имеет глубокий физический смысл. Так, формула (6) определяет вероятность того, что частица, совершающая броуновское движение, в моменты времени $t_1, \dots, t_n$ находится в промежутках $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ соответственно. Эта мера обладает рядом интересных свойств. Например, как и подсказывает ее физическая интерпретация, множество функций, дифференцируемых хотя бы в одной точке отрезка $[0; \pi]$, образует множество меры нуль. Следовательно, совокупность нигде не дифференцируемых функций образует множество полной меры, т. е. ее мера равна единице.

Более подробно об изложенном здесь материале см. в [20; 27; 38].

Примеры решения задач

1. Пусть A — фиксированное подмножество множества X . Описать наименьшую σ -алгебру $\mathcal{B}$ с единицей X , содержащую A .

Решение. Из условий задачи получаем, что искомая σ -алгебра содержит в качестве своих элементов множества X и A . Поэтому она содержит и их разность $X \setminus A$. Кроме того, как отмечалось выше, пустое множество $\emptyset$ также является элементом искомой σ -алгебры. Таким образом, каждая σ -алгебра с единицей X , содержащая множество A , должна иметь в качестве своих элементов множества $\emptyset, A, X \setminus A$ и X . Система множеств $\{\emptyset, A, X \setminus A, X\}$ образует кольцо, а поскольку она

конечна, то она является и σ -кольцом. Элемент X — единица этого кольца. Поэтому искомой σ -алгеброй является алгебра $\mathcal{B} = \{\emptyset, A, X \setminus A, X\}$. Отметим, что система множеств $\{\emptyset, A\}$ также образует σ -алгебру, содержащую A , но ее единицей будет множество A . Эта последняя σ -алгебра является неприводимой по отношению к A , а σ -алгебра $\mathcal{B}$ такой не является.

2. Пусть $X = \mathbb{R}$, а $\mathfrak{K}$ — совокупность всех конечных объединений непересекающихся полуинтервалов вида $(a; b]$ числовой оси $\mathbb{R}$. Доказать, что $\mathfrak{K}$ является кольцом, но не σ -кольцом.

Решение. Пусть $\mathfrak{K}$ — совокупность всех полуинтервалов вида $(a; b]$ числовой оси $\mathbb{R}$. Тогда система $\mathfrak{K}$ содержит пустое множество $\emptyset$ (например, $\emptyset = (1; 1)$) и является замкнутой относительно пересечения двух множеств. Кроме того, если для полуинтервалов $(c; d]$ и $(a; b]$ справедливо включение $(c; d] \subset (a; b]$, то $(a; b]$ представим в виде объединения непересекающихся полуинтервалов: $(a; b] = (a; c] \cup (c; d] \cup (d; b]$. Следовательно, система множеств $\mathfrak{K}$ является полукольцом. Отметим, что $\mathfrak{K}$ не образует кольцо. Тогда, согласно теореме 1, заданная совокупность $\mathfrak{K}$ является наименьшим кольцом, содержащим $\mathfrak{K}$. Следовательно, $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}(\mathfrak{K})$. Покажем, что $\mathfrak{K}$ не является σ -кольцом.

Действительно, все множества $A_n = \left(0; 1 - \frac{1}{n}\right]$ ($n \in \mathbb{N}$) принадлежат кольцу $\mathfrak{K}$, а их объединение $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(0; 1 - \frac{1}{n}\right] = (0; 1) \notin \mathfrak{K}$.

3. Пусть f — отображение множества X в множество Y . Для любой непустой системы S подмножеств Y рассмотрим совокупность $f^{-1}(S)$ всех полных прообразов множеств $B \in S$, т. е. $f^{-1}(S) = \{f^{-1}(B) : B \in S\}$. Доказать, что справедливы следующие утверждения:

- если S — кольцо, то $f^{-1}(S)$ также кольцо;
- если S — σ -алгебра, то $f^{-1}(S)$ также σ -алгебра.

Решение. а) Отметим, что совокупность множеств $f^{-1}(S)$ является не пустой, поскольку $S \neq \emptyset$. Рассмотрим множества A_1 и A_2 , принадлежащие $f^{-1}(S)$. Тогда существуют такие элементы B_1 и B_2 кольца S , что $A_j = f^{-1}(B_j)$ ($j = 1, 2$). Поэтому, на основании соответствующих свойств полных прообразов, заключаем, что $A_1 \cup A_2 = f^{-1}(B_1 \cup B_2)$, $A_1 \cap A_2 = f^{-1}(B_1 \cap B_2)$ и $A_1 \setminus A_2 = f^{-1}(B_1 \setminus B_2)$, которые легко проверяются. Следовательно, множества $A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2$ и $A_1 \setminus A_2$ также принадлежат $f^{-1}(S)$. Отсюда получаем, что симметрическая разность $A_1 \Delta A_2 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_1)$ также является элементом системы множеств $f^{-1}(S)$. Значит, класс множеств $f^{-1}(S)$ образует кольцо.

б) Пусть E — единица алгебры S . Тогда, согласно определению, множество E содержит все элементы $B \in S$. Поэтому $A \subset f^{-1}(E)$ для каждого $A \in f^{-1}(S)$. Тогда $f^{-1}(E)$ является единицей кольца $f^{-1}(S)$, а совокупность $f^{-1}(S)$ образует алгебру. Осталось показать, что $f^{-1}(S)$ является σ -алгеброй. С этой целью рассмотрим бесконечную последовательность множеств $A_k = f^{-1}(B_k)$ алгебры $f^{-1}(S)$, где $B_k \in S$ ($\forall k \in \mathbb{N}$). Используя свойство полного прообраза объединения бесконеч-

ного числа множеств, получаем

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}(B_k) = f^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = f^{-1}(B),$$

где $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \in S$. Таким образом, $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in f^{-1}(S)$, и поэтому совокупность $f^{-1}(S)$ образует σ -алгебру.

4. Привести пример кольца, которое было бы замкнутым относительно счетных пересечений (т. е. было бы δ -кольцом), но не было бы σ -кольцом.

Решение. Покажем, что совокупность $\mathfrak{M}'$ всех ограниченных, измеримых по Лебегу множеств пространства $\mathbb{R}^m$ является одним из примеров искомого кольца. Действительно, как отмечалось в § 1, система множеств $\mathfrak{M}'$ образует кольцо. Известно, что если $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность ограниченных, измеримых по Лебегу множеств в $\mathbb{R}^m$, то их пересечение $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ является измеримым множеством и к тому же ограниченным. Поэтому совокупность $\mathfrak{M}'$ образует δ -кольцо. Теперь рассмотрим последовательность замкнутых параллелепипедов $P(n) = [-n; n] \times \dots \times [-n; n]$ ($n \in \mathbb{N}$) пространства $\mathbb{R}^m$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ параллелепипед $P(n) \in \mathfrak{M}'$, но тем не менее $\bigcup_{n=1}^{\infty} P(n) = \mathbb{R}^m \notin \mathfrak{M}'$. Следовательно, δ -кольцо $\mathfrak{M}'$ не является σ -кольцом.

Другими примерами искомого кольца могут быть совокупность всех конечных подмножеств некоторого бесконечного множества X , а также класс всех ограниченных множеств пространства $\mathbb{R}^m$.

5. Пусть X — множество всех рациональных чисел отрезка $[0; 1]$, а система множеств $\mathfrak{M}$ состоит из пересечений X с произвольными интервалами $(a; b)$, отрезками $[a; b]$ или полуинтервалами $[a; b)$, $(a; b]$ сегмента $[0; 1]$, где $a \leq b$. Если множество $A_{a,b} \in \mathfrak{M}$ совпадает с одним из множеств $(a; b) \cap X$, $[a; b) \cap X$, $(a; b] \cap X$ и $[a; b] \cap X$, то $\mu(A_{a,b}) = b - a$. Доказать, что функция множеств μ , определенная на $\mathfrak{M}$, является мерой, но не σ -аддитивной мерой.

Решение. Покажем, что система $\mathfrak{M}$ образует полукольцо. Пусть $A_{a,b}$ и $A_{c,d}$ — произвольные множества совокупности $\mathfrak{M}$. Например, $A_{a,b} = (a; b) \cap X$ и $A_{c,d} = [c; d] \cap X$. Найдем их пересечение $A_{a,b} \cap A_{c,d}$. Если $d \leq a$ или $c \geq b$, то $A_{a,b} \cap A_{c,d} = \emptyset \in \mathfrak{M}$. В других случаях $A_{a,b} \cap A_{c,d} = A_{\alpha,\beta}$, где $\alpha = \max(a, c)$, а $\beta = \min(b, d)$, т. е. пересечение $A_{a,b} \cap A_{c,d}$ также является элементом кольца $\mathfrak{M}$. Если множества $A_{a,b}$ и $A_{c,d}$ имеют иной вид, то аналогичные рассуждения также приводят к тому, что $A_{a,b} \cap A_{c,d} \in \mathfrak{M}$. Таким образом, пересечение двух произвольных элементов системы $\mathfrak{M}$ является элементом этой совокупности. Пусть множества $A_{a,b}$ и $A_{c,d}$ из $\mathfrak{M}$ таковы, что $A_{a,b} \subset A_{c,d}$. Например, для определенности считаем $A_{a,b} = [a; b] \cap X$, а $A_{c,d} = [c; d] \cap X$. Тогда множество $A_{c,d}$ можно представить в виде объединения трех попарно непересекающихся множеств

$A_{c,d} = A_{a,b} \cup ((c; a) \cap X) \cup ((b; d] \cap X)$, принадлежащих совокупности $\mathfrak{M}$. Аналогичное представление множества $A_{c,d}$ в виде непересекающихся элементов системы $\mathfrak{M}$, одним из которых является $A_{a,b}$, справедливо во всех остальных случаях выбора $A_{a,b}$ и $A_{c,d}$. Таким образом, рассматриваемая совокупность $\mathfrak{M}$ является полукольцом.

Докажем, что функция множеств μ обладает всеми свойствами меры, определенной на полукольце $\mathfrak{M}$. Поскольку, согласно определению, все значения функции μ вещественны и неотрицательны, то остановимся на проверке ее аддитивности. Пусть $A_{a_j, b_j} = \Delta_j \cap X$ ($j = 1, \dots, n$), где $\Delta_j \subset [0; 1]$ суть промежутки, концами которых являются числа a_j, b_j , — попарно непересекающиеся множества полукольца $\mathfrak{M}$, причем $\bigcup_{j=1}^n A_{a_j, b_j} = A_{a,b}$ также принадлежит $\mathfrak{M}$. Отсюда следует, что промежутки Δ_j попарно не пересекаются и (возможно после новой нумерации промежутков Δ_j) $a = a_1 \leq b_1 = a_2 \leq b_2 = a_3 \leq \dots = a_n \leq b_n = b$.

Поэтому справедливо равенство

$$\mu(A_{a,b}) = b - a = b_1 - a_1 + b_2 - a_2 + \dots + b_n - a_n = \sum_{j=1}^n \mu(A_{a_j, b_j}),$$

доказывающее, что функция μ конечно аддитивна. Следовательно, функция множеств μ обладает всеми свойствами меры.

Отметим, что если множество A состоит из одной рациональной точки r отрезка $[0; 1]$, т. е. $A = \{r\}$, то $A = [r; r] \cap X \in \mathfrak{M}$, и поэтому $\mu(A) = 0$. Множество X является счетным: $X = \{r_1, r_2, \dots, r_n, \dots\}$.

Тогда $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{r_n\}$, и если мера μ была бы σ -аддитивной, то $\mu(X) =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu\{r_n\} = 0$. Однако $X = [0; 1] \cap X$, и поэтому $\mu(X) = 1$. Полученное противоречие показывает, что мера μ не является счетно-аддитивной на $\mathfrak{M}$.

6. Пусть $X = \mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, а $\mathfrak{M}$ — совокупность всех конечных подмножеств (включая и пустое $\emptyset$) множества X . Для каждого $A \in \mathfrak{M}$ определим число $\mu(A)$, равное количеству элементов множества A . Построить лебегово продолжение меры μ .

Решение Совокупность множеств $\mathfrak{M}$ является кольцом, а поэтому и полукольцом. Функция множеств μ , определенная на $\mathfrak{M}$, удовлетворяет всем условиям меры. Поскольку объединение счетного числа попарно непересекающихся множеств кольца $\mathfrak{M}$ никогда не принадлежит $\mathfrak{M}$, то можно считать, что мера μ является σ -аддитивной. Отметим, что мера μ σ -конечна. Действительно, множество $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{n\}$ и каждое множество $\{n\}$ принадлежит $\mathfrak{M}$. Поэтому, согласно теореме 10, эта мера μ имеет лебегово продолжение на некоторое σ -кольцо подмножеств множества X . Опишем это продолжение.

Кольцо $\mathfrak{M}$ не имеет единицы. Поэтому лебегово продолжение меры μ будем осуществлять согласно п. 4. Рассмотрим произвольное подмно-

жество B множества X . Вначале опишем все те покрытия $\bigcup_k A_k \supset B$ множества B элементами A_k кольца $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(\mathfrak{N})$, для которых $\sum_k \mu(A_k) < +\infty$. Поскольку для произвольного непустого множества

A_k его мера $\mu(A_k) \geq 1$, то такие покрытия осуществляются только конечными наборами. Но объединение конечного числа элементов кольца $\mathfrak{N}$ снова принадлежит $\mathfrak{N}$. Таким образом, $\mu^*(B) = \inf_{A \supset B} \mu(A)$, где $\inf$ берем по всем элементам A кольца $\mathfrak{N}$, содержащим B . Отсюда следует, что множество B является конечным и $\mu^*(B) = \mu(B)$. Докажем что μ -измеримыми в смысле Лебега будут только множества кольца $\mathfrak{N}$. Действительно, произвольное множество $B \in \mathfrak{N}$ является μ -измеримым, поскольку для каждого $\varepsilon > 0$ имеем $\mu^*(B \Delta B) = 0 < \varepsilon$. Однако, если множество B бесконечно, то для произвольного конечного множества $A \in \mathfrak{N}$ симметрическая разность $B \Delta A$ есть бесконечное множество, и поэтому $\mu^*(B \Delta A)$ не может быть меньше любого $\varepsilon > 0$. Следовательно, система $\mathfrak{M}_\mu$ всех μ -измеримых множеств совпадает с $\mathfrak{N}$, а мера Лебега — с исходной мерой μ .

Поскольку мера μ на $\mathfrak{N}$ является σ -конечной, то можно расширить понятие измеримости, допуская для меры μ бесконечные значения (см. п. 5). А именно, представим множество X в виде объединения попарно непересекающихся множеств кольца $\mathfrak{N}$, например $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{k\}$.

Тогда пересечения произвольного множества $A \subset X$ с одноточечными множествами $\{k\}$, $k \in \mathbb{N}$, являются конечными множествами, т. е. элементами σ -кольца $\mathfrak{M}_\mu$. Поэтому, согласно определению, множество A μ -измеримо и $\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A \cap \{k\})$. Отсюда, если A — конечное

множество, то его мера $\mu(A)$ равна числу его элементов. Если же A — бесконечно, то $\mu(A) = +\infty$.

Следовательно, класс $\mathfrak{M}_\mu$ всех μ -измеримых по Лебегу множеств совпадает с совокупностью всех подмножеств множества X , а σ -аддитивная мера μ на нем определяется тем, что $\mu(A)$ равна числу элементов A , если A — конечно, и $\mu(A) = +\infty$, если A — бесконечно.

7. Пусть на отрезке $X = [0; 1]$ задана неотрицательная функция $f(x)$. Для каждого конечного множества $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ точек отрезка $[0; 1]$ положим $\mu(A) = \sum_{k=1}^n f(x_k)$. Доказать, что функция множеств μ является счетно-аддитивной, но не σ -конечной мерой.

Решение. Рассмотрим систему $\mathfrak{N}$ всех конечных подмножеств множества X . Тогда $\mathfrak{N}$ является кольцом. Функция множеств μ вещественнозначна и неотрицательна на $\mathfrak{N}$. Очевидно, функция является аддитивной на кольце $\mathfrak{N}$. Следовательно, μ обладает всеми свойствами меры. Более того, функция множеств μ σ -аддитивна. Действительно, если $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, где A и все A_k являются элементами кольца $\mathfrak{N}$, $A_k \cap A_j = \emptyset$, если $k \neq j$, то начиная с некоторого номера N множества,

$A_k = \emptyset$. Поэтому $A = \bigcup_{k=1}^N A_k$ и, согласно свойству конечной аддитивности меры μ , $\mu(A) = \sum_{k=1}^N \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$.

Покажем, что мера μ не является σ -конечной. В противном случае отрезок $[0; 1]$ можно было бы представить в виде объединения счетного числа множеств из кольца $\mathfrak{M}$ (т. е. конечных множеств). Но объединение счетного числа конечных множеств является счетным множеством, а отрезок $[0; 1]$ — несчетное множество. Полученное противоречие доказывает правильность сформулированного утверждения.

8. Пусть множество X является отрезком $[a; b]$ числовой оси $\mathbb{R}$, а $\mathfrak{M}$ — совокупность всех полуинтервалов вида $[\alpha; \beta)$, принадлежащих основному сегменту $[a; b]$. Определим на $\mathfrak{M}$ функцию множеств $\mu_{\mathcal{F}}[\alpha; \beta) = \mathcal{F}(\beta) - \mathcal{F}(\alpha)$, где $y = \mathcal{F}(x)$ — монотонно неубывающая непрерывная слева функция, заданная на $[a; b]$. Доказать, что $\mu_{\mathcal{F}}$ является σ -аддитивной мерой на полукольце $\mathfrak{M}$. Найти $\mu_{\mathcal{F}}(\alpha; \beta)$, $\mu_{\mathcal{F}}(\alpha; \beta]$ и $\mu_{\mathcal{F}}[\alpha; \beta]$.

Решение. Как и в примере 2, можно показать, что совокупность $\mathfrak{M}$ является полукольцом множеств отрезка $[a; b]$. Поскольку функция $\mathcal{F}$ монотонная, то $\mu_{\mathcal{F}}$ — неотрицательная. Покажем, что функция множеств $\mu_{\mathcal{F}}$ аддитивна. Пусть $[\alpha; \beta) = \bigcup_{k=1}^n [\alpha_k; \beta_k)$, где все полуинтервалы $[\alpha_k; \beta_k) \subset [a; b]$ попарно не пересекаются. Тогда (возможно, после некоторого изменения нумерации этих полуинтервалов) $\alpha = \alpha_1 < \beta_1 = \alpha_2 < \beta_2 = \alpha_3 < \dots < \beta_n = \beta$, и поэтому

$$\begin{aligned} \mu_{\mathcal{F}}[\alpha; \beta) &= \mathcal{F}(\beta) - \mathcal{F}(\alpha) = \mathcal{F}(\beta_n) - \mathcal{F}(\alpha_n) + \mathcal{F}(\beta_{n-1}) - \\ &\quad - \mathcal{F}(\alpha_{n-1}) + \dots + \mathcal{F}(\beta_1) - \mathcal{F}(\alpha_1) = \sum_{k=1}^n \mu_{\mathcal{F}}[\alpha_k; \beta_k). \end{aligned}$$

Таким образом, функция множеств $\mu_{\mathcal{F}}$ действительно является мерой, определенной на полукольце $\mathfrak{M}$. Нетрудно проверить, что эта мера монотонна.

Установим σ -аддитивность меры $\mu_{\mathcal{F}}$. Вначале докажем, что $\mu_{\mathcal{F}}$ обладает свойством счетной полуаддитивности. Пусть $[\alpha; \beta) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} [\alpha_k; \beta_k) \subset [a; b]$, где промежутки $[\alpha_k; \beta_k)$ попарно не пересекаются. Поскольку $\mu_{\mathcal{F}}[\alpha; \beta) = \mathcal{F}(\beta) - \mathcal{F}(\alpha)$ и функция $\mathcal{F}$ непрерывна слева, то для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $\mathcal{F}(\beta) - \mathcal{F}(\beta - \delta) < \varepsilon$. Аналогично для каждого $k \in \mathbb{N}$ найдем такие $\delta_k > 0$, что $\mathcal{F}(\alpha_k) - \mathcal{F}(\alpha_k - \delta_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$. Для новых промежутков имеем очевидное

включение: $[\alpha; \beta - \delta) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (\alpha_k - \delta_k; \beta_k)$. Поэтому, согласно теореме Гейне — Бореля, из этого бесконечного покрытия можно извлечь конечное подпокрытие, т. е. существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $[\alpha; \beta - \delta) \subset$

$\subset \bigcup_{k=1}^n (\alpha_k - \delta_k; \beta_k)$. Отсюда следует включение $[\alpha; \beta - \delta) \subset \bigcup_{k=1}^n [\alpha_k - \delta_k; \beta_k)$.

Если подобрать δ_k столь малыми, что полуинтервалы $[\alpha_k - \delta_k; \beta_k)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) попарно не пересекаются, то на основании свойств аддитивности и монотонности $\mu_{\mathcal{F}}$ получим

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\beta - \delta) - \mathcal{F}(\alpha) &\leq \sum_{k=1}^n [\mathcal{F}(\beta_k) - \mathcal{F}(\alpha_k - \delta_k)] \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} [\mathcal{F}(\beta_k) - \mathcal{F}(\alpha_k - \delta_k)]. \end{aligned}$$

Воспользовавшись выбором δ и δ_k , имеем

$$\begin{aligned} \mu_{\mathcal{F}}[\alpha; \beta) &= \mathcal{F}(\beta) - \mathcal{F}(\alpha) \leq \sum_{k=1}^{\infty} [\mathcal{F}(\beta_k) - \mathcal{F}(\alpha_k)] + 2\varepsilon = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mu_{\mathcal{F}}[\alpha_k; \beta_k] + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства, устремляя ε к нулю, находим $\mu_{\mathcal{F}}[\alpha; \beta) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_{\mathcal{F}}[\alpha_k; \beta_k)$, т. е. мера Лебега — Стильтьеса $\mu_{\mathcal{F}}$ на $[a; b]$ действительно является σ -полуаддитивной.

Для доказательства ее счетной аддитивности допустим, что $[\alpha; \beta) = \bigcup_{k=1}^{\infty} [\alpha_k; \beta_k)$, где $[\alpha_k; \beta_k)$ попарно не пересекаются. Тогда для произвольного натурального $n \in \mathbb{N}$ справедливо включение $\bigcup_{k=1}^n [\alpha_k; \beta_k) \subset [\alpha; \beta)$, из которого в силу монотонности и аддитивности меры $\mu_{\mathcal{F}}$ имеем $\mu_{\mathcal{F}}[\alpha; \beta) \geq \sum_{k=1}^n \mu_{\mathcal{F}}[\alpha_k; \beta_k)$.

Если в последнем неравенстве устремить n к $+\infty$, то $\mu_{\mathcal{F}}[\alpha; \beta) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_{\mathcal{F}}[\alpha_k; \beta_k)$. Однако, согласно свойству σ -полуаддитивности, имеем $\mu_{\mathcal{F}}[\alpha; \beta) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_{\mathcal{F}}[\alpha_k; \beta_k)$. Эти два последних неравенства приводят к равенству

$$\mu_{\mathcal{F}}[\alpha; \beta) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_{\mathcal{F}}[\alpha_k; \beta_k),$$

показывающему, что $\mu_{\mathcal{F}}$ является σ -аддитивной мерой на $\mathfrak{N}$. Поэтому на основании теоремы 6 она допускает продолжение на систему $\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}$ всех $\mu_{\mathcal{F}}$ -измеримых множеств отрезка $[a; b]$.

Прежде чем найти меры множеств $(\alpha; \beta)$, $(\alpha; \beta]$ и $[\alpha; \beta]$, докажем, что они $\mu_{\mathcal{F}}$ -измеримы. Для этого представим их с помощью операций

объединения и пересечения посредством множеств вида $\{\alpha, \beta\}$, а именно:

$$(\alpha; \beta) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left[\alpha + \frac{1}{k}; \beta \right),$$

$$[\alpha; \beta] = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left[\alpha - \frac{1}{k}; \beta + \frac{1}{k} \right), \quad (\alpha; \beta] = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left[\alpha + \frac{1}{k}; \beta \right) \cup \{\beta\}.$$

Согласно свойству непрерывности меры $\mu_{\mathcal{F}}$ на $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$, имеем:

$$\begin{aligned} \mu_{\mathcal{F}}(\alpha; \beta) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{\mathcal{F}} \left[\alpha + \frac{1}{k}; \beta \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\mathcal{F}(\beta) - \mathcal{F} \left(\alpha + \frac{1}{k} \right) \right] = \\ &= \mathcal{F}(\beta) - \mathcal{F}(\alpha + 0), \\ \mu_{\mathcal{F}}[\alpha; \beta] &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{\mathcal{F}} \left[\alpha - \frac{1}{k}; \beta + \frac{1}{k} \right) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\mathcal{F} \left(\beta + \frac{1}{k} \right) - \mathcal{F} \left(\alpha - \frac{1}{k} \right) \right] = \mathcal{F}(\beta + 0) - \mathcal{F}(\alpha), \\ \mu_{\mathcal{F}}(\alpha; \beta] &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{\mathcal{F}} \left[\alpha + \frac{1}{k}; \beta \right) + \mu_{\mathcal{F}}\{\beta\} = \mathcal{F}(\beta) - \mathcal{F}(\alpha + 0) + \\ &+ \mu_{\mathcal{F}}\{\beta\}. \end{aligned}$$

Осталось найти меру $\mu_{\mathcal{F}}\{\beta\}$ точки β . Из представления $\{\beta\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left[\beta; \beta + \frac{1}{k} \right)$ следует, что $\mu_{\mathcal{F}}\{\beta\} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\mathcal{F} \left(\beta + \frac{1}{k} \right) - \mathcal{F}(\beta) \right] = \mathcal{F}(\beta + 0) - \mathcal{F}(\beta)$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mu_{\mathcal{F}}(\alpha; \beta] &= \mathcal{F}(\beta) - \mathcal{F}(\alpha + 0) + \mathcal{F}(\beta + 0) - \mathcal{F}(\beta) = \\ &= \mathcal{F}(\beta + 0) - \mathcal{F}(\alpha + 0). \end{aligned}$$

Замечание 1. Отметим, что, в отличие от меры Лебега μ_1 на $[a; b]$, мера Лебега — Стильеса $\mu_{\mathcal{F}}$ отдельной точки не обязана равняться нулю. Например, если на отрезке $[-1; 1]$ задана неубывающая непрерывная слева функция

$$\mathcal{F}(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leq x \leq 0, \\ 1, & 0 < x \leq 1, \end{cases}$$

то $\mu_{\mathcal{F}}\{0\} = \mathcal{F}(0 + 0) - \mathcal{F}(0) = 1 - (-1) = 2$. Тем более, не всякое счетное множество сегмента $[a; b]$ имеет $\mu_{\mathcal{F}}$ -меру нуль.

Замечание 2. Аналогично доказывается счетная аддитивность меры Лебега — Стильеса $\mu_{\mathcal{F}}$, определенной на полукольце $\mathcal{N}$ всех конечных промежутков вида $[\alpha; \beta]$ числовой оси $\mathbb{R}$.

Замечание 3. Если бы рассматривалась совокупность $\mathcal{N}$ всех полуинтервалов вида $(\alpha; \beta]$ (отрезка $[a; b]$ или всей числовой оси $\mathbb{R}$), а функция $\mathcal{F}$, порождающая меру Лебега — Стильеса $\mu_{\mathcal{F}}$, была непрерывной справа, то аналогично мера $\mu_{\mathcal{F}}$ также была бы σ -аддитивной на $\mathcal{N}$. В этом случае полагают $\mu_{\mathcal{F}}(\alpha; \beta] = \mathcal{F}(\beta) - \mathcal{F}(\alpha)$. В некоторых учебниках рассматриваются именно такие функции $\mathcal{F}$, порождающие меру $\mu_{\mathcal{F}}$.

9. Пусть $\mathcal{N}$ — совокупность всех конечных полуинтервалов вида $[\alpha, \beta)$ числовой оси $\mathbb{R}$, а $\mathcal{F}$ — неубывающая непрерывная слева на $\mathbb{R}$

функция. Определим на $\mathfrak{M}$ меру Лебега — Стильеса $\mu_{\mathcal{F}}$ равенством $\mu_{\mathcal{F}}[\alpha; \beta) = \mathcal{F}(\beta) - \mathcal{F}(\alpha)$. Доказать, что класс $\mathfrak{M}_{\mathcal{F}}$ всех $\mu_{\mathcal{F}}$ -измеримых множеств, полученных с помощью лебегова продолжения меры $\mu_{\mathcal{F}}$, совпадает с совокупностью $2^{\mathbb{R}}$ всех подмножеств числовой оси $\mathbb{R}$, если

$$\begin{aligned} \text{а) } \mathcal{F}(x) &= \begin{cases} 0, & -\infty < x \leq 0, \\ 1, & 0 < x < +\infty; \end{cases} \\ \text{б) } \mathcal{F}(x) &= \begin{cases} 0, & -\infty < x \leq 0, \\ -[-x], & 0 < x \leq 2, \\ 5, & 2 < x < +\infty. \end{cases} \end{aligned}$$

Найти меру Лебега — Стильеса $\mu_{\mathcal{F}}(A)$ для каждого $A \in 2^{\mathbb{R}}$.

Решение. а) Из определения меры $\mu_{\mathcal{F}}$ на полукольце $\mathfrak{M}$ следует, что $\mu_{\mathcal{F}}[\alpha; \beta) = 0$, если полуинтервал $[\alpha; \beta)$ не содержит точку $x = 0$, и $\mu_{\mathcal{F}}[\alpha; \beta) = 1$, если $0 \in [\alpha; \beta)$. Распространим меру $\mu_{\mathcal{F}}$ на кольцо $\mathfrak{M}(\mathfrak{M})$.

Если $A \in \mathfrak{M}(\mathfrak{M})$, то, согласно теореме 1, имеем $A = \bigcup_{k=1}^n [\alpha_k; \beta_k)$, причем полуинтервалы $[\alpha_k; \beta_k)$ попарно не пересекаются. Поэтому, если $0 \notin A$, то $0 \notin [\alpha_k; \beta_k)$ ($k = 1, \dots, n$) и $\mu_{\mathcal{F}}(A) = \sum_{k=1}^n \mu_{\mathcal{F}}[\alpha_k; \beta_k) = 0$. Если $0 \in A$, то имеем только одно из множеств $[\alpha_k; \beta_k)$, содержащее $x = 0$, а тогда $\mu_{\mathcal{F}}(A) = 1$. Следовательно, мера $\mu_{\mathcal{F}}$ каждого множества A кольца $\mathfrak{M}(\mathfrak{M})$ либо равна единице (если $0 \in A$), либо равна нулю (если $0 \notin A$). Поскольку мера $\mu_{\mathcal{F}}$ является σ -аддитивной на $\mathfrak{M}$ (см. пример 8), то для нее можно построить ее лебегово продолжение.

С этой целью найдем вначале внешнюю меру множеств $A \in 2^{\mathbb{R}}$. Напомним, что $\mu_{\mathcal{F}}^*(A) = \inf \sum_k \mu_{\mathcal{F}}(A_k)$, где нижняя грань берется по всем конечным или счетным покрытиям $\bigcup_k A_k$ множества A элементами A_k полукольца $\mathfrak{M}$. Если $A = (0; +\infty)$, то, рассматривая покрытие $(0; +\infty) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{k}; k \right)$, имеем $\mu_{\mathcal{F}}^*(0; +\infty) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_{\mathcal{F}}\left[\frac{1}{k}; k \right) = 0$. Следовательно, $\mu_{\mathcal{F}}^*(0; +\infty) = 0$. Аналогично, $\mu_{\mathcal{F}}^*(-\infty; 0) = 0$. Если же рассматривать множество $A = \{0\}$, то для каждого его покрытия $\bigcup_k A_k$ множествами $A_k \in \mathfrak{M}$ имеется хотя бы одно из них, содержащее точку $x = 0$. Поэтому $\sum_k \mu_{\mathcal{F}}(A_k) \geq 1$, т. е. $\mu_{\mathcal{F}}^*(A) \geq 1$. Далее пользуясь покрытием $A = \{0\} \subset [-1; 1]$, получаем, что $\mu_{\mathcal{F}}^*(A) \leq 1$. Таким образом, в действительности $\mu_{\mathcal{F}}^*(\{0\}) = 1$. Рассмотрим теперь произвольные множества $A \in 2^{\mathbb{R}}$. Из свойства монотонности внешней меры $\mu_{\mathcal{F}}^*$ (состоящем в том, что если $A_1 \subset A_2$, то $\mu_{\mathcal{F}}^*(A_1) \leq \mu_{\mathcal{F}}^*(A_2)$) следует, что $\mu_{\mathcal{F}}^*(A) = 0$, если $A \subset (0; +\infty)$ или $A \subset (-\infty; 0)$. Если же $\{0\} \subset A$, то $\mu_{\mathcal{F}}^*(A) \geq 1$.

≥ 1 . Кроме того, для такого A , рассматривая, например, покрытие $A \subset \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} [k; k+1)$, имеем $\mu_{\mathcal{F}}^*(A) \leq 1$. Следовательно, если $0 \in A$, то $\mu_{\mathcal{F}}^*(A) = 1$.

Покажем, что произвольное множество $A \in 2^{\mathbb{R}}$ является $\mu_{\mathcal{F}}$ -измеримым. Действительно, если $A \subset (0; +\infty)$ или $A \subset (-\infty; 0)$, то $\mu_{\mathcal{F}}^*(A) = 0$, а поэтому A $\mu_{\mathcal{F}}$ -измеримо и $\mu_{\mathcal{F}}(A) = 0$. Если же $0 \in A$, то из неравенства $\mu_{\mathcal{F}}^*(A \Delta [-1; 1]) = \mu_{\mathcal{F}}^*((A \setminus [-1; 1]) \cup [-1; 1] \setminus A) = 0 < \varepsilon$, справедливого для каждого $\varepsilon > 0$, заключаем, что множество A является $\mu_{\mathcal{F}}$ -измеримым и $\mu_{\mathcal{F}}(A) = \mu_{\mathcal{F}}^*(A) = 1$.

Замечание. Этот пример также показывает, что мера Лебега — Стieltjesа $\mu_{\mathcal{F}}$ существенно отличается от меры Лебега μ_1 на $\mathbb{R}$. В самом деле, как отмечалось в § 1, всегда существует μ_1 -ненормированное подмножество μ_1 -измеримого множества положительной меры. В примере 9 все подмножества числовой оси $\mathbb{R}$ являются $\mu_{\mathcal{F}}$ -измеримыми. Кроме того, μ_1 -мера точки (и даже произвольного счетного множества) пространства $\mathbb{R}$ равна нулю. А в рассматриваемом примере $\mu_{\mathcal{F}}(\{0\}) = 1$.

б) Из определения меры $\mu_{\mathcal{F}}$ на полукольце $\mathfrak{M}$ следует, что $\mu_{\mathcal{F}}[\alpha; \beta) = 0$, если полуинтервал $[\alpha; \beta)$ не содержит точек 0, 1 и 2. Если $0 \in [\alpha; \beta)$, но точки $x = 1$ и $x = 2$ ему не принадлежат, то $\mu_{\mathcal{F}}[\alpha; \beta) = 1$. Аналогично, если $1 \in [\alpha; \beta)$, но $0 \notin [\alpha; \beta)$, $2 \notin [\alpha; \beta)$, то $\mu_{\mathcal{F}}[\alpha; \beta) = 1$. Наконец, если $2 \in [\alpha; \beta)$, но $0 \notin [\alpha; \beta)$ и $1 \notin [\alpha; \beta)$, то $\mu_{\mathcal{F}}[\alpha; \beta) = 3$. Далее, мера $\mu_{\mathcal{F}}$ является σ -аддитивной на полукольце $\mathfrak{M}$ (см. пример 8) и поэтому можно построить ее лебегово продолжение. Для этого вначале она стандартным образом продолжается на наименьшее кольцо $\mathfrak{M}(\mathfrak{M})$, содержащее $\mathfrak{M}$.

Рассмотрим теперь внешнюю меру $\mu_{\mathcal{F}}^*$. Если вначале взять множество $A = (-\infty; 0)$, то из равенства $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left[-k; -\frac{1}{k}\right)$ имеем $\mu_{\mathcal{F}}^*(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_{\mathcal{F}}\left[-k; -\frac{1}{k}\right) = 0$, т. е. $\mu_{\mathcal{F}}^*(A) = 0$. Аналогично, внешние меры интервалов $(0; 1)$, $(1; 2)$ и $(2; +\infty)$ также равны нулю. Найдем $\mu_{\mathcal{F}}^*(\{2\})$. Поскольку полуинтервал $\left[\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$ содержит точку $x = 2$, то $\mu_{\mathcal{F}}^*(\{2\}) \leq 3$. Однако, каждое покрытие $\{2\} \subset \bigcup_k A_k$, где все $A_k \in \mathfrak{M}$, обладает тем свойством, что $\sum_k \mu_{\mathcal{F}}(A_k) \geq 3$. Поэтому согласно определению внешней меры $\mu_{\mathcal{F}}^*(\{2\}) \geq 3$ и, таким образом, в действительности $\mu_{\mathcal{F}}^*(\{2\}) = 3$. Аналогично приходим к выводу, что $\mu_{\mathcal{F}}^*(\{0\}) = \mu_{\mathcal{F}}^*(\{1\}) = 1$. Как и в случае а), нетрудно получить, что если A не содержит ни одной из точек $x = 0$, $x = 1$ и $x = 2$, то $\mu_{\mathcal{F}}^*(A) = 0$. Если множеству A

принадлежит хотя бы одна из точек $x = 0$, $x = 1$ или $x = 2$, то $\mu_{\mathcal{F}}^*(A) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \in A}}^2 p_k$, где $p_0 = p_1 = 1$, а $p_2 = 3$.

Поскольку каждое множество внешней $\mu_{\mathcal{F}}^*$ -меры нуль $\mu_{\mathcal{F}}$ -измеримо, то произвольное множество $A \in 2^{\mathbb{R}}$, не содержащее точек $x = 0$, $x = 1$ и $x = 2$, является $\mu_{\mathcal{F}}$ -измеримым и $\mu_{\mathcal{F}}(A) = \mu_{\mathcal{F}}^*(A) = 0$. Если $A \cap \{0, 1, 2\} \neq \emptyset$, то оно также $\mu_{\mathcal{F}}$ -измеримо и $\mu_{\mathcal{F}}(A) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \in A}}^2 p_k$. Покажем последнее, рассмотрев для примера случай, когда $1 \in A$ и $2 \in A$, но $0 \notin A$. Тогда, поскольку $\mu_{\mathcal{F}}^*\left(A \triangle \left[\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)\right) = 0$, множество A является $\mu_{\mathcal{F}}$ -измеримым и $\mu_{\mathcal{F}}(A) = \mu_{\mathcal{F}}^*(A) = p_1 + p_2 = 4$. Аналогично рассматриваются остальные случаи.

10. Пусть $\mathfrak{M}$ — совокупность всех конечных промежутков числовой оси $\mathbb{R}$. Определим на $\mathfrak{M}$ функцию множеств

$$\mu(A) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_A e^{-x^2} dx \quad (\forall A \in \mathfrak{M})$$

(если $A = \emptyset$ или A состоит только из одной точки, то считаем $\mu(A) = 0$). Доказать, что функция μ является σ -аддитивной мерой на $\mathfrak{M}$. Найти $\mu(\mathbb{R})$ и $\mu([0; +\infty))$.

Решение. Совокупность $\mathfrak{M}$ образует полукольцо, а функция μ принимает только действительные и неотрицательные значения. Покажем, что μ — аддитивная функция множеств. Если промежуток A представлен в виде объединения $A = \bigcup_{k=1}^n A_k$ конечного числа непересекающихся промежутков A_k числовой оси $\mathbb{R}$, то по свойству аддитивности интеграла имеем

$$\mu(A) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_A e^{-x^2} dx = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{A_k} e^{-x^2} dx = \sum_{k=1}^n \mu(A_k).$$

Следовательно, функция множеств μ является мерой, определенной на полукольце $\mathfrak{M}$. Докажем, что она σ -аддитивна. Пусть промежуток A представлен в виде объединения $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ счетного числа попарно непересекающихся промежутков A_k . Из свойства σ -аддитивности меры Лебега μ_1 следует, что $\mu_1(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_1(A_k)$. Поэтому для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $n_0 \in \mathbb{N}$, что при $N > n_0$ $\sum_{k=N+1}^{\infty} \mu_1(A_k) < \varepsilon$. Рассмотрим представление промежутка A в виде $A = \left(\bigcup_{k=1}^N A_k\right) \cup \tilde{A}_N$, где $\tilde{A}_N = A \setminus \bigcup_{k=1}^N A_k$ — измеримое по Жордану множество (как разность таковых). Тогда мера

Жордана $\tilde{\mu}_1(A)$ оценивается следующим образом:

$$\tilde{\mu}_1(\tilde{A}_N) = \mu_1(\tilde{A}_N) = \mu_1\left(\bigcup_{k=N+1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=N+1}^{\infty} \mu_1(A_k) < \varepsilon.$$

Поэтому, согласно свойству аддитивности интеграла, имеем

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{A_k} e^{-x^2} dx + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\tilde{A}_N} e^{-x^2} dx = \sum_{k=1}^N \mu(A_k) + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\tilde{A}_N} e^{-x^2} dx. \end{aligned}$$

Оценим соответствующий интеграл

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\tilde{A}_N} e^{-x^2} dx \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \tilde{\mu}_1(\tilde{A}_N) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}}.$$

Таким образом, для каждого $\varepsilon > 0$ найден номер n_0 такой, что как только $N > n_0$, то $\left| \mu(A) - \sum_{k=1}^N \mu(A_k) \right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}}$.

Поэтому $\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$, и, следовательно, мера μ , порожденная весовой функцией, является σ -аддитивной на полукольце $\mathcal{N}$. Эту меру можно распространить, используя лебегово продолжение меры, до некоторой счетно-аддитивной меры μ , заданной на σ -кольце $\mathcal{M}_{\mu}$ μ -измеримых множеств. Поскольку каждое открытое множество G числовой оси можно представить в виде объединения не более чем счетного числа интервалов, то $G \in \mathcal{M}_{\mu}$. Тогда и каждое замкнутое множество $F \subset \mathbb{R}$ является μ -измеримым. Поэтому произвольное борелево множество числовой оси $\mathbb{R}$ μ -измеримо, и поскольку $\mathbb{R} = \bigcup_{k=1}^{\infty} [-k; k]$,

то

$$\mu(\mathbb{R}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu[-k; k] = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-k}^k e^{-x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 1.$$

Поскольку бесконечный промежуток $[0; +\infty)$ является борелевым множеством, то он также μ -измерим. Из представления $[0; +\infty) = \{0\} \cup (0; +\infty) = \{0\} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{k}; k\right]$ следует, что

$$\mu([0; +\infty)) = \mu(\{0\}) + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{1}{k}}^k e^{-x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}.$$

11. Пусть $y = g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, — фиксированная положительная функция, обладающая свойством $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = 1$. Рассмотрим на множестве $\mathfrak{N}$ с числовых последовательностей полукольцо $\mathfrak{N}$ всех цилиндрических множеств A вида $A = \{x = (\xi_1, \dots, \xi_n, \dots) \in s: \xi_j \in \Delta_j, j = 1, \dots, n\}$, где Δ_j — промежутки числовой оси $\mathbb{R}$. Для каждого такого множества A положим $\mu(A) = \prod_{j=1}^n \int_{\Delta_j} g(x) dx$. Доказать, что функция множеств μ является мерой, определенной на полукольце $\mathfrak{N}$.

Решение. Отметим, что функция множеств μ определена на $\mathfrak{N}$ корректно. Действительно, если рассмотреть такие два представления цилиндрического множества A , что

$$A = \{x \in s: \xi_j \in \Delta_j, j = 1, \dots, n\} = \{x \in s: \xi_1 \in \Delta_1, \dots, \xi_n \in \Delta_n, \xi_{n+1} \in \mathbb{R}\},$$

то, с одной стороны, $\mu(A) = \prod_{j=1}^n \int_{\Delta_j} g(x) dx$, а с другой —

$$\mu(A) = \prod_{j=1}^n \int_{\Delta_j} g(x) dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = \prod_{j=1}^n \int_{\Delta_j} g(x) dx.$$

Функция множеств μ принимает только действительные и неотрицательные значения. Покажем, что она аддитивна на $\mathfrak{N}$. Пусть цилиндрическое множество $A \in \mathfrak{N}$ представлено объединением $A = \bigcup_{k=1}^m A_k$ конечного числа попарно непересекающихся множеств $A_k \in \mathfrak{N}$. Поскольку множеств A_k ($k = 1, \dots, m$) конечное число, то существует такой номер n_0 , что каждое A_k можно представить в виде: $A_k = \{x \in s: \xi_j \in \Delta_j^{(k)}, j = 1, \dots, n_0\}$, где $\Delta_j^{(k)}$ — некоторые промежутки числовой оси. Множество A также представим в виде $A = \{x \in s: \xi_j \in \Delta_j, j = 1, \dots, n_0\}$, где Δ_j — промежутки в $\mathbb{R}$. Тогда

$$\Delta_1 \times \dots \times \Delta_{n_0} = \bigcup_{k=1}^m (\Delta_1^{(k)} \times \dots \times \Delta_{n_0}^{(k)}),$$

причем промежутки $\Delta_1^{(k)} \times \dots \times \Delta_{n_0}^{(k)}$ пространства $\mathbb{R}^{n_0}$ попарно не пересекаются. Поэтому, используя свойство аддитивности интеграла в пространстве $\mathbb{R}^{n_0}$, имеем

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \int_{\Delta_1 \times \dots \times \Delta_{n_0}} g(x_1) \dots g(x_{n_0}) dx_1 \dots dx_{n_0} = \\ &= \sum_{k=1}^m \int_{\Delta_1^{(k)} \times \dots \times \Delta_{n_0}^{(k)}} g(x_1) \dots g(x_{n_0}) dx_1 \dots dx_{n_0} = \sum_{k=1}^m \mu(A_k). \end{aligned}$$

Следовательно, функция множеств μ , определенная на полукольце $\mathfrak{N}$, действительно является мерой.

Замечание. Можно показать, что мера μ является σ -аддитивной на $\mathfrak{M}$. В частности, каноническая гауссова мера ω является счетно-аддитивной на $\mathfrak{M}$. Поэтому ее можно продолжить до σ -аддитивной меры ω , определенной на некоторой σ -алгебре $\mathfrak{M}_\omega$ подмножеств множества s .

12. Доказать, что множество $A \subset s$ является ω -измеримым, и найти $\omega(A)$, если:

а) $A = \{x \in s : |\xi_n| \leq \sqrt{\ln(n+2)}, n \in \mathbb{N}\};$

б) $A = \{x \in s : |\xi_n| \leq \sqrt{\ln(n+2)} + 1, n \in \mathbb{N}\}.$

Решение. а) Если рассмотреть последовательность ω -измеримых цилиндрических множеств $A_N = \{x \in s : |\xi_n| \leq \sqrt{\ln(n+2)}, 1 \leq n \leq N\}$, то $A = \bigcap_{N=1}^{\infty} A_N$, и поэтому A является также ω -измеримым.

Кроме того, согласно свойству непрерывности меры ω , имеем $\omega(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \omega(A_N)$. Следовательно,

$$\omega(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\ln(n+2)}} e^{-x^2} dx \right).$$

Поэтому надо исследовать на сходимость бесконечное произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\ln(n+2)}} e^{-x^2} dx \right).$$

Для этого вначале докажем, что при $t > \frac{1}{\sqrt{2}}$ справедливы неравенства

$$\frac{1}{4t} e^{-t^2} < \int_t^{+\infty} e^{-x^2} dx < \frac{1}{2t} e^{-t^2}, \quad (7)$$

из которых как следствие получаем

$$1 - \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-t^2} < \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-x^2} dx < 1 - \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-t^2}. \quad (8)$$

Действительно, $\int_t^{+\infty} e^{-x^2} dx < \int_t^{+\infty} \frac{2x}{2t} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2t} e^{-t^2}$.

Кроме того, касательная к кривой $y = e^{-x^2}$ в точке $x = t$ имеет угловой коэффициент $-2te^{-t^2}$ и, когда $t > \frac{1}{\sqrt{2}}$, она проходит ниже графика функции. Эта касательная пересекает ось абсцисс в точке $x = t + \frac{1}{2t}$. Поэтому площадь треугольника, ограниченного касательной, линиями $x = t$ и $y = 0$, равна $\frac{1}{4t} e^{-t^2}$. Следовательно,

$\int_t^{+\infty} e^{-x^2} dx > \frac{1}{4t} e^{-t^2}$. Поэтому неравенства (7) доказаны.

Используя неравенства (8), оценим общий член рассматриваемого бесконечного произведения. Имеем

$$1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}(n+2)\sqrt{\ln(n+2)}} \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\ln(n+2)}} e^{-x^2} dx < 1 - \frac{1}{2\sqrt{\pi}(n+2)\sqrt{\ln(n+2)}}.$$

Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}(n+2)\sqrt{\ln(n+2)}}$ расходящийся, то исследуемое произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\ln(n+2)}} e^{-x^2} dx \right)$$

является расходящимся к нулю. Поэтому множество A имеет ω -меру нуль, т. е. $\omega(A) = 0$.

б) Как и выше, множество A является ω -измеримым и

$$\omega(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\ln(n+2)+1}} e^{-x^2} dx \right).$$

Поэтому исследуем на сходимость бесконечное произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\ln(n+2)+1}} e^{-x^2} dx \right).$$

Воспользовавшись неравенствами (8), оценим общий член этого произведения

$$1 - \frac{e^{-2\sqrt{\ln(n+2)-1}}}{\sqrt{\pi}(n+2)(\sqrt{\ln(n+2)+1})} < \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\ln(n+2)+1}} e^{-x^2} dx < 1 - \frac{e^{-2\sqrt{\ln(n+2)-1}}}{2\sqrt{\pi}(n+2)(\sqrt{\ln(n+2)+1})}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-2\sqrt{\ln(n+2)}}}{(n+2)(\sqrt{\ln(n+2)+1})}$ является сходящимся, поскольку справедливо неравенство

$$\frac{e^{-2\sqrt{\ln(n+2)}}}{(n+2)(\sqrt{\ln(n+2)+1})} \leq \frac{1}{4(\ln(n+2))(n+2)(\sqrt{\ln(n+2)+1})}.$$

Поэтому исследуемое бесконечное произведение сходится и

$$\omega(A) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\ln(n+2)+1}} e^{-x^2} dx \right).$$

Следовательно, $\omega(A) > 0$.

13. Вычислить меру Винера множества $A = \left\{ x(t) \in C_0[0; \pi] : x\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0, x(\pi) > 0 \right\}$.

Решение. Множество A является цилиндрическим, и поэтому оно μ_w -измеримо. Его мера вычисляется по формуле (6), в которой следует положить $n = 2$, $t_1 = \frac{\pi}{2}$, $t_2 = \pi$, а $\Delta_1 = (-\infty; 0)$ и $\Delta_2 = (0; +\infty)$. Следовательно, мера Винера множества A определяется соотношением

$$\mu_w(A) = \frac{2}{\pi^2} \int_{-\infty}^0 \int_0^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{\xi_1^2 + (\xi_2 - \xi_1)^2}{\frac{\pi}{2}} \right\} d\xi_1 d\xi_2.$$

В последнем интеграле перейдем к полярным координатам $\xi_2 = r \cos \varphi$, $\xi_1 = r \sin \varphi$; при этом угол φ изменяется от $-\frac{\pi}{2}$ до 0 (IV четверть), а $r \geq 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} \mu_w(A) &= \frac{2}{\pi^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 d\varphi \int_0^{+\infty} \exp \left\{ -r^2 \frac{2 \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi - 2 \sin \varphi \cos \varphi}{\frac{\pi}{2}} \right\} r dr = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{d\varphi}{2 \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi - 2 \sin \varphi \cos \varphi} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi (2 \operatorname{tg}^2 \varphi + 1 - 2 \operatorname{tg} \varphi)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{2t^2 + 2t + 1} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

14. Доказать, что множество $A = \{x = x(t) \in C_0[0; \pi] : x(t) \geq 0, \forall t \in [0; \pi]\}$ является μ_w -измеримым множеством винеровского пространства и оно принадлежит наименьшей σ -алгебре, содержащей все цилиндрические множества.

Решение. Пусть $\{t_1, \dots, t_n, \dots\}$ — последовательность всех рациональных чисел отрезка $[0; \pi]$. Поскольку все функции пространства $C_0[0; \pi]$ непрерывные, а рациональные точки всюду плотны на сегменте $[0; \pi]$, то исследуемое множество можно представить в виде

$$A = \{x = x(t) \in C_0[0; \pi] : x(t_n) \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Поэтому справедливо равенство $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x = x(t) \in C_0[0; \pi] : x(t_n) \geq 0\}$.

Но каждое из множеств $\{x = x(t) \in C_0[0; \pi] : x(t_n) \geq 0\}$ является объединением счетного числа цилиндрических множеств

$$\{x = x(t) \in C_0[0; \pi] : x(t_n) \geq 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x = x(t) \in C_0[0; \pi] : 0 \leq x(t_n) \leq k\}.$$

Следовательно, множество A представляется в виде

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x = x(t) \in C_0[0; \pi] : 0 \leq x(t_n) \leq k\},$$

откуда следует μ_ω -измеримость A и то, что оно принадлежит наименьшей σ -алгебре, содержащей все цилиндрические множества.

Предположение о том, что исходная мера μ задана на полукольце, а не на некоторой произвольной системе, существенно для однозначности ее продолжения. Следующий пример подтверждает это.

15. Рассмотрим в единичном квадрате $X = [0; 1] \times [0; 1]$ плоскости $\mathbb{R}^2$ систему S вертикальных и горизонтальных прямоугольников, у которых длина или ширина равна единице, и припишем каждому такому прямоугольнику меру μ , равную его площади. Указать хотя бы два разных продолжения этой меры на алгебру, порожденную S .

Решение. Проверим, что система S не является полукольцом. Действительно, пересечение двух прямоугольников $[a; b] \times [0; 1]$ и $[0; 1] \times [c; d]$ системы есть прямоугольник $[a; b] \times [c; d] \notin S$, если $[a; b] \neq [0; 1]$ и $[c; d] \neq [0; 1]$.

Пусть $\mathfrak{H}(S)$ — наименьшая алгебра, порожденная системой S , а $\mathfrak{H}(\mathfrak{M})$ — наименьшая алгебра, порожденная полукольцом $\mathfrak{M}$ всех прямоугольников квадрата X . Очевидно, что $\mathfrak{H}(S) \subset \mathfrak{H}(\mathfrak{M})$.

Нетрудно показать, что рассматриваемая на S функция множеств μ является мерой. Проверим, для примера, свойство аддитивности (конечной или счетной) функции μ . Если прямоугольник A системы S представлен в виде объединения конечного или счетного числа попарно непересекающихся прямоугольников A_k системы S , то эти прямоугольники A_k должны быть одного вида: либо вертикальные, либо все горизонтальные. Допустим, что все $A_k = [a_k; b_k] \times [0; 1]$. Тогда $A = \bigcup_k ([a_k; b_k] \times [0; 1])$, и поэтому множество A имеет такой же вид: $A = [a; b] \times [0; 1]$. Отсюда $[a; b] = \bigcup_k [a_k; b_k]$, и поскольку $A_k \cap A_j = \emptyset$ при $k \neq j$, то $[a_k; b_k] \cap [a_j; b_j] = \emptyset$ для этих же k и j . Согласно свойству счетной аддитивности меры Лебега μ_1 , имеем $b - a = \sum_k \mu_1[a_k; b_k]$. Поэтому переходя к множествам A и A_k , получаем

$$\sum_k \mu(A_k) = \sum_k \mu([a_k; b_k] \times [0; 1]) = \sum_k \mu_1[a_k; b_k] = b - a = \mu(A).$$

Следовательно, функция множеств μ является σ -аддитивной.

Чтобы указать хотя бы два разных продолжения этой меры на кольцо $\mathfrak{H}(S)$, зафиксируем в единичном квадрате X одну из его диагоналей d_1 . Нетрудно проверить, что мера Лебега μ_1 пересечения прямоугольника $P = [a; b] \times [0; 1]$ (или $Q = [0; 1] \times [a; b]$) с этой диагональю равна $\sqrt{2}(b - a)$. Поэтому для таких прямоугольников системы S имеем $\mu([a; b] \times [0; 1]) = \frac{1}{\sqrt{2}} \mu_1(P \cap d_1) = b - a$ и $\mu([0; 1] \times [a; b]) = \frac{1}{\sqrt{2}} \mu_1(Q \cap d_1) = b - a$.

Перейдем теперь к функции множеств, заданной на кольце $\mathfrak{N}(\mathfrak{N})$, которая множеству $A \in \mathfrak{N}(\mathfrak{N})$ сопоставляет число $v_1(A) = \frac{1}{\sqrt{2}} \mu_1 \times (A \cap d_1)$. Проверим, что функция v_1 является σ -аддитивной мерой на $\mathfrak{N}(\mathfrak{N})$. Докажем, например, ее счетную аддитивность. Действительно, пусть $A = \bigcup_k A_k$, где A и все A_k принадлежат $\mathfrak{N}(\mathfrak{N})$, $A_k \cap A_j = \emptyset$ при $k \neq j$.

Тогда, используя σ -аддитивность меры Лебега μ_1 , имеем

$$v_1(A) = \frac{1}{\sqrt{2}} \mu_1(A \cap d_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k \mu_1(A_k \cap d_1) = \sum_k v_1(A_k),$$

т. е. функция множеств v_1 счетно-аддитивна на $\mathfrak{N}(\mathfrak{N})$. Эта мера v_1 совпадает с исходной мерой μ на системе S .

Аналогично, если рассмотреть на $\mathfrak{N}(\mathfrak{N})$ σ -аддитивную меру $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \mu_1(A \cap d_2)$, где d_2 — другая диагональ квадрата X , то также $v_2(P) = \mu(P)$ для каждого $P \in S$. Таким образом, σ -аддитивные меры v_1 и v_2 являются продолжениями меры μ на кольцо $\mathfrak{N}(\mathfrak{N}) \supset \mathfrak{N}(S)$. Покажем, что это различные меры на $\mathfrak{N}(S)$. Действительно, прямоугольник $A = \left[0; \frac{1}{2}\right] \times \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ принадлежит $\mathfrak{N}(S)$, поскольку он является пересечением двух элементов $\left[0; \frac{1}{2}\right] \times [0; 1]$ и $[0; 1] \times \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ системы S . Одна из мер, например, $v_1(A) = \frac{1}{2}$, а другая $v_2(A) = \mu_1(A \cap d_2) = \mu_1(\emptyset) = 0$.

Таким образом, указано два различных продолжения меры μ на кольцо $\mathfrak{N}(S)$. Если S является полукольцом, то такого быть не может.

Задачи для самостоятельной работы

1. Доказать, что совокупность всех ограниченных прямоугольников вида $\{\xi_1; \xi_2\} \in \mathbb{R}^2$, $a_1 \leq \xi_1 < b_1$, $a_2 \leq \xi_2 < b_2$ является полукольцом, не имеющим единицы.

2. Доказать, что совокупность всех ограниченных подмножеств пространства $\mathbb{K}^n$ образует кольцо, но не является ни σ -кольцом, ни σ -алгеброй.

3. Доказать, что пересечение произвольной совокупности σ -алгебр является σ -алгеброй, а объединение двух σ -алгебр не является, вообще говоря, σ -алгеброй.

4. Пусть $\mathfrak{N}$ — кольцо множеств, $A \in \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N}_A$ — совокупность всех множеств вида $A \cap B$, где $B \in \mathfrak{N}$. Доказать, что $\mathfrak{N}_A$ — алгебра, единицей которой является A , если $\mathfrak{N}$ — σ -кольцо, то $\mathfrak{N}_A$ — σ -алгебра.

5. Доказать, что для произвольного множества X множество всех его конечных подмножеств образует кольцо. При каком условии на множество X это кольцо будет а) алгеброй, б) σ -кольцом?

6. Доказать, что для произвольного бесконечного множества X множество всех его не более чем счетных подмножеств образует σ -кольцо. При каком условии на X это кольцо будет алгеброй?

7. Доказать, что для произвольного несчетного множества X σ -алгебру образует множество всех таких подмножеств X , что либо само это подмножество, либо его дополнение до X не более чем счетно.

8. Доказать, что полукольцо множеств $\mathfrak{N}$ будет кольцом, если объединение любых двух множеств из $\mathfrak{N}$ принадлежит $\mathfrak{N}$.

9. Доказать, что если алгебра множеств $\mathfrak{N}$ такова, что пересечение каждой последовательности ее элементов принадлежит этой алгебре, то $\mathfrak{N}$ есть σ -алгебра.

10. Класс множеств $\mathcal{M}$ называется монотонным классом, если:

1) для любой последовательности множеств $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ такой, что $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$ из $A_n \in \mathcal{M}$ следует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M};$$

2) для любой последовательности множеств $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ такой, что $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$, из $A_n \in \mathcal{M}$ следует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}.$$

Доказать, что алгебра $\mathcal{B}$ является σ -алгеброй тогда и только тогда, когда она является монотонным классом.

11. Монотонный класс (см. задачу 10) $\mathcal{M}(S)$ называется наименьшим монотонным классом, содержащим совокупность S , если:

1) $S \subset \mathcal{M}(S)$;

2) для любого монотонного класса $\mathcal{M}$, содержащего S , $\mathcal{M}(S) \subset \mathcal{M}$.

Доказать, что для любой совокупности S существует наименьший монотонный класс, содержащий S .

12. Пусть $\mathcal{R}$ — алгебра. Тогда наименьшая σ -алгебра $\mathcal{B}(\mathcal{R})$, содержащая $\mathcal{R}$, совпадает с наименьшим монотонным классом $\mathcal{M}(\mathcal{R})$, содержащим $\mathcal{R}$. Доказать это утверждение.

13. Пусть X — фиксированное множество и $A_0 \subset X$. Через $\mathcal{U}$ обозначим систему всех таких подмножеств $A \subset X$, что либо $A_0 \subset A$, либо $A \cap A_0 = \emptyset$. Доказать, что $\mathcal{U}$ является σ -алгеброй.

14. Пусть $\bar{\mathcal{R}}$ — совокупность всех замкнутых множеств в $\mathbb{R}^m$, а $\mathcal{R}$ — класс всех открытых множеств пространства $\mathbb{R}^m$. Доказать, что наименьшая σ -алгебра, порожденная системой $\bar{\mathcal{R}}$, совпадает с наименьшей σ -алгеброй, порожденной системой $\mathcal{R}$, и является σ -алгеброй $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ всех борелевых множеств в $\mathbb{R}^m$.

15. Характеристической функцией множества A называется функция

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A, \\ 0, & \text{если } x \notin A. \end{cases}$$

Пусть S — некоторая система подмножеств множества X , а $\tilde{S}$ — совокупность всех характеристических функций множеств из S . Доказать, что $\tilde{S}$ — кольцо множеств тогда и только тогда, когда $\tilde{S}$ — алгебраическое кольцо относительно умножения и сложения по модулю 2.

16. Доказать, что декартово произведение полуколец является полукольцом, а декартово произведение колец не является, вообще говоря, кольцом.

17. Пусть $\mathcal{U}$ — σ -алгебра подмножеств X и $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность элементов этой алгебры. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n \in \mathcal{U}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n \in \mathcal{U}$ (определение $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ см. в § 1).

18. Является ли следующая система множеств полукольцом, кольцом, алгеброй:

а) $\{[a; b] \subset \mathbb{R} : a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q} \text{ и } a < b\} \cup \emptyset$;

б) $\{[a; b] \subset \mathbb{R} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \text{ и } a < b\} \cup \emptyset$;

в) $\{[a; b] \subset \mathbb{R} : a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ и } a < b\} \cup \emptyset$;

г) $\{[a; b] \subset \mathbb{R} : a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{N} \text{ и } a < b\} \cup \emptyset$;

д) $\{[a; b] \subset \mathbb{R} : a \leq b\}$;

е) $\{[a_1; b_1] \times [a_2; b_2] \subset \mathbb{R}^2 : a_i < b_i, i = 1, 2\} \cup \emptyset$?

19. Пусть μ — мера, заданная на кольце $\mathcal{R}$. Доказать, что:

а) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$ для произвольных $A \in \mathcal{R}$ и $B \in \mathcal{R}$;

б) если $\bigcup_{k=1}^n A_k \subset A$, $n \in \mathbb{N}$, то $\sum_{k=1}^n \mu(A_k) \leq \mu(A)$, где A и все A_k — элементы

кольца $\mathcal{R}$, причем $A_k \cap A_l = \emptyset$ при $k \neq l$;

в) если $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset A$, то $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \leq \mu(A)$, где A и все A_k — элементы кольца

$\mathfrak{A}$, причем $A_k \cap A_l = \emptyset$ при $k \neq l$;

г) $\mu(A \Delta B) \leq \mu(A \Delta C) + \mu(C \Delta B)$ для произвольных A, B, C из кольца $\mathfrak{A}$;

д) $|\mu(A) - \mu(B)| \leq \mu(A \Delta B)$ для множеств A и B из $\mathfrak{A}$;

е) $\mu(A \Delta B) = \mu(A) + \mu(B) - 2\mu(A \cap B)$, если $A, B \in \mathfrak{A}$.

20. Пусть μ_1 и μ_2 — σ -аддитивные меры на кольце $\mathfrak{A}$. Доказать, что для произвольных неотрицательных чисел α и β функция множеств $\mu = \alpha\mu_1 + \beta\mu_2$ также является σ -аддитивной мерой на $\mathfrak{A}$.

21. Пусть $\mathfrak{A}$ — кольцо и μ — мера, заданная на $\mathfrak{A}$. Доказать, что μ является σ -аддитивной мерой на $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда μ непрерывна снизу, т. е. когда для произвольной монотонно возрастающей последовательности $A_1 \subset A_2 \subset \dots$

$\subset A_n \subset \dots$ элементов $\mathfrak{A}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}$, имеем $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$.

22. Пусть $x_0 \in X$ и для произвольного подмножества A множества X определена функция множеств μ следующим образом: $\mu(A) = 0$, если $x_0 \notin A$, $\mu(A) = 1$, если $x_0 \in A$. Доказать, что μ — счетно-аддитивная мера на σ -алгебре 2^X .

23. Пусть $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ — произвольное счетное множество, а $\{p_1, p_2, \dots, p_n, \dots\}$ — последовательность неотрицательных действительных чисел. Определим для каждого подмножества $A \subset X$ величину $\mu(A) = \sum_{n: x_n \in A} p_n$. Дока-

зать, что μ — σ -аддитивная мера на σ -алгебре 2^X .

24. Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — измеримое пространство. Доказать, что совокупность всех множеств меры нуль образует σ -алгебру.

25. Пусть $\mathfrak{A}_1$ — σ -алгебра подмножеств множества X , $\mathfrak{A}_2$ — σ -алгебра подмножеств множества Y , а $T: X \rightarrow Y$ — такое отображение, что $T^{-1}(\mathfrak{A}_2) \subset \mathfrak{A}_1$. Если μ — σ -аддитивная мера на $\mathfrak{A}_1$, то для каждого $B \in \mathfrak{A}_2$, положим $\nu(B) = \mu(T^{-1}(B))$. Доказать, что ν — σ -аддитивная мера на $\mathfrak{A}_2$ (мера ν называется образом меры μ при отображении T).

26. На алгебре всех подмножеств рациональных чисел $\mathbb{Q}$ определить σ -аддитивную меру μ так, чтобы мера каждого рационального числа была положительна, а мера $\mu(\mathbb{Q}) = 1$.

27. Пусть множество $X = [a; b] \subset \mathbb{R}$, а $\mathfrak{A}$ — совокупность всех полуинтервалов вида $(\alpha; \beta]$, принадлежащих основному сегменту $[a; b]$. Определим на $\mathfrak{A}$ функцию множеств $\mu_{\mathcal{F}}(\alpha; \beta] = \mathcal{F}(\beta) - \mathcal{F}(\alpha)$, где $y = \mathcal{F}(x)$ — монотонно неубывающая непрерывная справа функция, заданная на $[a; b]$. Доказать, что $\mu_{\mathcal{F}}$ является σ -аддитивной мерой на полукольце $\mathfrak{A}$. Найти $\mu_{\mathcal{F}}(\alpha; \beta)$, $\mu_{\mathcal{F}}[\alpha; \beta]$ и $\mu_{\mathcal{F}}[\alpha; \beta]$.

28. Пусть на $\mathbb{R}$ задана неубывающая функция $\mathcal{F}$. Определим на совокупности $\mathfrak{A}$ всех ограниченных промежутков числовой оси $\mathbb{R}$ функцию множеств $\mu_{\mathcal{F}}(\alpha; \beta) = \mathcal{F}(\beta - 0) - \mathcal{F}(\alpha + 0)$, $\mu_{\mathcal{F}}[\alpha; \beta) = \mathcal{F}(\beta - 0) - \mathcal{F}(\alpha - 0)$, $\mu_{\mathcal{F}}(\alpha; \beta] = \mathcal{F}(\beta + 0) - \mathcal{F}(\alpha + 0)$ и $\mu_{\mathcal{F}}[\alpha; \beta] = \mathcal{F}(\beta + 0) - \mathcal{F}(\alpha - 0)$. Доказать, что функция $\mu_{\mathcal{F}}$ является σ -аддитивной мерой на полукольце $\mathfrak{A}$.

29*. Соотношением $\mu_{\mathcal{F}}[a, b] = \mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(a)$ устанавливается взаимно однозначное соответствие между мерами Лебега — Стильеса $\mu_{\mathcal{F}}$ на полукольце $\mathfrak{A}$ всех конечных промежутков вида $[a; b]$ на числовой оси $\mathbb{R}$ и производящими функциями $\mathcal{F}$, определяемое с точностью до эквивалентности. Доказать это утверждение. При этом две производящие функции, разность которых постоянна, называются эквивалентными.

30. Пусть $\mathfrak{A}$ — совокупность всех ограниченных промежутков вида $[a; b]$, где $a \leq b$, числовой оси $\mathbb{R}$. Если функция $y = \mathcal{F}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, — неубывающая и непрерывная слева, то определим на $\mathfrak{A}$ функцию множеств $\mu_{\mathcal{F}}[a; b] = \mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(a)$. Доказать, что произвольное множество $A \subset \mathbb{R}$ является $\mu_{\mathcal{F}}$ -измеримым, и найти

$\mu_{\mathcal{F}}(A)$, если:

$$\text{а) } \mathcal{F}(x) = \begin{cases} -2, & -\infty < x \leq e, \\ 3, & e < x < +\infty; \end{cases} \quad \text{б) } \mathcal{F}(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x \leq 1, \\ 2, & 1 < x \leq 3, \\ 5, & 3 < x < +\infty; \end{cases}$$

$$\text{в) } \mathcal{F}(x) = \begin{cases} 1, & -\infty < x \leq 0, \\ -[-e^x], & 0 < x \leq 1, \\ 5, & 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

31. Пусть $\mathcal{F}(x) = -[-x]$, $x \in \mathbb{R}$. Определить $\mu_{\mathcal{F}}(A)$, если:

а) $A = \mathbb{Q} \cap [-n; n]$, $n \in \mathbb{N}$;

б) $A = [-n; n]$, $n \in \mathbb{N}$;

в) $A = \{x > 0 : \ln x < 2\}$;

г) $A = (-n; n) \setminus \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{N}$.

32. Пусть в $\mathbb{R}^m$ задана функция $\mathcal{F}(x_1, \dots, x_m)$ такая, что смешанная производная $\frac{\partial^m \mathcal{F}}{\partial x_1 \dots \partial x_m}$ непрерывна и неотрицательна. Определим для любого из параллелепипедов P вида $(a; b)$, $[a; b)$, $(a; b]$ или $[a; b]$, где $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ и $b = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$, функцию этих множеств

$$\mu_{\mathcal{F}}(P) = \sum (-1)^{v(c)} \mathcal{F}(c_1, \dots, c_m),$$

где суммирование производится по всем точкам $c = (c_1, \dots, c_m)$, у которых каждое c_k принимает значение a_k или b_k , а $v(c)$ — число тех координат, для которых $c_k = a_k$. Доказать σ -аддитивность меры $\mu_{\mathcal{F}}$ на полукольце $\mathcal{P}_m$.

33. Доказать, что если $\mathcal{F}_1(\xi_1), \dots, \mathcal{F}_m(\xi_m)$ — конечные монотонно неубывающие непрерывные слева функции на $\mathbb{R}$, то функция $\mathcal{F}(\xi_1, \dots, \xi_m) = \prod_{k=1}^m \mathcal{F}_k(\xi_k)$

является производящей функцией меры Лебега-Стилтьеса в $\mathbb{R}^m$.

34. Пусть $\mathcal{M}$ — совокупность всех полуинтервалов вида $(a, b]$, где $0 \leq a \leq b < +\infty$, числовой оси $\mathbb{R}$. Определим на $\mathcal{M}$ функцию множеств, считая $\mu(a; b] = b - a$, если $a > 0$, и $\mu(a; b] = 1$, если $a = 0$. Показать, что μ является мерой на $\mathcal{M}$, но не счетно-аддитивной.

35. Внутренней мерой множества $A \subset [0; 1]$ называется число $\mu_*(A) = 1 - \mu_1^*(\{0; 1\} \setminus A)$, где μ_1^* — внешняя мера Лебега. Доказать, что $\mu_1^*(A) \geq \mu_*(A)$.

36. В обозначениях задачи 35 доказать, что множество $A \subset [0; 1]$ измеримо по Лебегу тогда и только тогда, когда $\mu_1(A) = \mu_1^*(A)$.

37*. Пусть σ -аддитивная мера μ задана на полукольце $\mathcal{M}$ с единицей, а μ^* — отвечающая ей внешняя мера. Множество $A \subset X$ называется измеримым по Каратеодори, если для любого подмножества $B \subset X$ справедливо равенство

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A).$$

Доказать, что множество A измеримо по Лебегу тогда и только тогда, когда оно измеримо по Каратеодори.

38. Пусть $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{M} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3, 4\}\}$. Положим $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(\{1\}) = \mu(\{2\}) = 1$, $\mu(\{3, 4\}) = 2$. Доказать, что μ — σ -аддитивная мера на полукольце $\mathcal{M}$. Продолжить эту меру на полукольцо $\mathcal{N}(\mathcal{M})$. Построить внешнюю меру μ^* на совокупности 2^X . Описать лебегово продолжение меры μ на σ -кольцо μ -измеримых по Лебегу множеств.

39. Пусть $\mathcal{R}$ — кольцо, $\sigma(\mathcal{R})$ — минимальное σ -кольцо, содержащее кольцо $\mathcal{R}$; μ_1, μ_2 — σ -конечные меры на $\sigma(\mathcal{R})$, и для произвольного $A \in \mathcal{R}$ имеем $\mu_1(A) \leq \mu_2(A)$. Доказать, что для любого $A \in \sigma(\mathcal{R})$ также справедливо неравенство $\mu_1(A) \leq \mu_2(A)$.

40. Пусть μ — σ -конечная мера на кольце $\mathcal{R}$. Доказать, что внешняя мера μ^* , построенная по мере μ , является σ -конечной.

41. Пусть μ — σ -аддитивная мера на алгебре $\mathfrak{A}$ подмножеств множества X . Рассмотрим внешнюю меру μ^* на системе 2^X и $\mathfrak{B}(\mathfrak{A})$ — наименьшую σ -алгебру, содержащую $\mathfrak{A}$. Доказать, что для произвольного $A \subset X$

$$\mu^*(A) = \inf \{ \mu(B) : A \subset B, B \in \mathfrak{B}(\mathfrak{A}) \},$$

где $\mu(B)$ — значение лебегова продолжения меры μ с алгебры $\mathfrak{A}$ на алгебру $\mathfrak{U}_\mu$ всех μ -измеримых множеств.

42. Пусть $A \subset X$ и выполнены предположения задачи 41. Доказать, что A является μ -измеримым тогда и только тогда, когда $A = B \cup C$, где $B \in \mathfrak{B}(\mathfrak{A})$ и $\mu^*(C) = 0$.

43. Пусть множество $A \subset X$ и выполнены предположения задачи 41. Если для произвольного $\varepsilon > 0$ существуют такие два множества B и C из σ -алгебры $\mathfrak{B}(\mathfrak{A})$, что $C \subset A \subset B$ и $\mu^*(B \setminus C) < \varepsilon$, то A является μ -измеримым. Доказать это утверждение.

44. Пусть $X = [0; 1] \times [0; 1]$ — единичный квадрат плоскости $\mathbb{R}^2$ и $\mathfrak{A}$ — кольцо всех прямоугольников, принадлежащих X , вида $P_{a,b} = \{(\xi_1, \xi_2) \in X : a \leq \xi_1 < b, 0 \leq \xi_2 \leq 1\}$. Определим на $\mathfrak{A}$ функцию множеств $\mu(P_{a,b}) = b - a$. Описать вид лебегова продолжения меры μ .

45. В условиях и обозначениях задачи 44 доказать, что множество $A = \{(\xi_1, \xi_2) \in X : 0 \leq \xi_1 \leq 1, \xi_2 = \frac{1}{3}\}$ не является μ -измеримым, и найти $\mu^*(A)$.

46. Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — вероятностное пространство. Доказать, что если последовательность (A_n) μ -измеримых множеств такова, что $\mu(A_n) = 1$ для каждого $n \in \mathbb{N}$, то $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1$.

47. Пусть μ — счетно-аддитивная мера на σ -кольце $\mathfrak{A}$, $A \in \mathfrak{A}$ и $\mu(A) < +\infty$. Рассмотрим некоторый класс S попарно непересекающихся множеств, $S \subset \mathfrak{A}$. Доказать, что множество $\{B \in S : \mu(A \cap B) \neq 0\}$ не более чем счетно.

48. Доказать, что «ограниченный параллелепипед» в бесконечномерном пространстве s (т. е. множество $A = \{(\xi_1, \dots, \xi_n, \dots) \in s : a_n \leq \xi_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}\}$, где числовые последовательности $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ ограничены), является ω -измеримым. Найти $\omega(A)$.

49. Доказать, что множество $A = \left\{(\xi_1, \dots, \xi_n, \dots) \in s : \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2 < +\infty\right\}$ (часто обозначаемое символом l_2) является ω -измеримым множеством ω -меры нуль.

50. Пусть $A_\beta = \{(\xi_1, \dots, \xi_n, \dots) \in s : |\xi_n| \leq \sqrt{\ln n} + \beta, n \geq n_\beta\}$, где $\beta \in \mathbb{R}$ и n_β — такой номер, начиная с которого $\sqrt{\ln n} + \beta > 0$. Доказать, что для каждого β множество A_β является ω -измеримым и $\omega(A_\beta) = 0$ при $\beta \leq 0$, а для $\beta > 0$ $\omega(A_\beta) > 0$. Показать, что $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \omega(A_\beta) = 1$.

51*. Пусть $A = \left\{(\xi_1, \dots, \xi_n, \dots) \in s : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\xi_n|}{\sqrt{\ln n}} = 1\right\}$. Доказать, что множество A является ω -измеримым и $\omega(A) = 1$.

52. Доказать, что если B — μ_m -измеримое множество пространства $\mathbb{R}^m$, то множество $A = \{(\xi_1, \dots, \xi_n, \dots) \in s : (\xi_1, \dots, \xi_m) \in B\}$, называемое цилиндрическим с основанием B , является ω -измеримым. Показать, что если B является μ_m -измеримым в смысле Жордана, то

$$\omega(A) = \frac{1}{\sqrt{\pi^m}} \int_B \dots \left(e^{-\sum_{k=1}^m \xi_k^2} d\xi_1 \dots d\xi_m \right).$$

53. Пусть $0 < t_1 < t_2 \leq \pi$ и a, b — произвольные действительные числа. Доказать, что множество $A = \{x(t) \in C_0[0; \pi] : a \leq x(t_2) - x(t_1) \leq b\}$ является μ_ω -измеримым, и найти его меру μ_ω .

54. Пусть B — μ_m -измеримое множество пространства $\mathbb{R}^m$ и $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m \leq \pi$. Определим цилиндрическое множество $A = \{x(t) \in C_0[0; \pi]: (x(t_1), \dots, x(t_m)) \in B\}$. Доказать, что A является μ_ω -измеримым и если B — $\tilde{\mu}_m$ -измерим в смысле Жордана, то

$$\mu_\omega(A) = \frac{1}{\sqrt{\pi^m t_1(t_2 - t_1) \dots (t_m - t_{m-1})}} \int_B \dots \int e^{-\frac{\xi_1^2}{t_1} - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(\xi_{k+1} - \xi_k)^2}{t_{k+1} - t_k}} d\xi_1 \dots d\xi_m.$$

55. Пусть $\mathfrak{N}_\omega$ — совокупность всех цилиндрических множеств пространства $C_0[0; \pi]$. Доказать, что множество $A = \{x(t) \in C_0[0; \pi]: \max_{0 \leq t \leq \pi} |x(t)| \leq 1\}$ принадлежит наименьшей σ -алгебре $\mathfrak{B}(\mathfrak{N}_\omega)$, содержащей $\mathfrak{N}_\omega$.

Ответы. 5. а), б) X — конечное. 6. X — счетное. 18. В случаях б) и в) указанные системы множеств являются полукольцами. 27. $\mu_{\mathcal{F}}(\alpha; \beta) = \mathcal{F}(\beta - 0) - \mathcal{F}(\alpha)$, $\mu_{\mathcal{F}}[\alpha; \beta) = \mathcal{F}(\beta - 0) - \mathcal{F}(\alpha - 0)$, $\mu_{\mathcal{F}}[\alpha; \beta] = \mathcal{F}(\beta) - \mathcal{F}(\alpha - 0)$. 30. а) $\mu_{\mathcal{F}}(A) = 5$, если $e \in A$, и $\mu_{\mathcal{F}}(A) = 0$, если $e \notin A$; б) $\mu_{\mathcal{F}}(A) = 5$, если $1 \in A$ и $3 \in A$; $\mu_{\mathcal{F}}(A) = 2$, если $1 \in A$, но $3 \notin A$; $\mu_{\mathcal{F}}(A) = 3$, если $3 \in A$, но $1 \notin A$. В остальных случаях $\mu_{\mathcal{F}}(A) = 0$; в) $\mu_{\mathcal{F}}(A) = 4$, если $0 \in A$, $\ln 2 \in A$ и $1 \in A$; $\mu_{\mathcal{F}}(A) = 2$, если $1 \in A$, но $0 \notin A$ и $\ln 2 \notin A$; $\mu_{\mathcal{F}}(A) = 1$, если $\ln 2 \in A$, но $0 \notin A$ и $1 \notin A$; $\mu_{\mathcal{F}}(A) = 1$, если $0 \in A$, но $\ln 2 \notin A$ и $1 \notin A$; $\mu_{\mathcal{F}}(A) = 2$, если $0 \in A$, $\ln 2 \in A$, но $1 \notin A$; $\mu_{\mathcal{F}}(A) = 3$, если $\ln 2 \in A$, $1 \in A$, но $0 \notin A$; $\mu_{\mathcal{F}}(A) = 3$, если $0 \in A$ и $1 \in A$, но $\ln 2 \notin A$. В остальных случаях $\mu_{\mathcal{F}}(A) = 0$. 31. а) $\mu_{\mathcal{F}}(A) = 2n + 1$; б) $\mu_{\mathcal{F}}(A) = 2n + 1$; в) $\mu_{\mathcal{F}}(A) = 7$; г) $\mu_{\mathcal{F}}(A) = 2n - 1$. 44. μ -измеримы только множества вида $A \times [0; 1]$, где множество A является μ_1 -измеримым на отрезке $[0; 1]$.

45. $\mu^*(A) = 1$. 48. $\omega(A) = 0$. 53. $\mu_\omega(A) = \frac{1}{\sqrt{\pi(t_2 - t_1)}} \int_a^b e^{-\frac{\xi^2}{t_2 - t_1}} d\xi$.

§ 3. ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

Пусть X — некоторое непустое множество, $\mathfrak{U}$ — σ -алгебра подмножеств множества X , а μ — счетно-аддитивная мера, определенная на $\mathfrak{U}$.

1. Измеримые функции и их свойства. Рассмотрим измеримое пространство $(X, \mathfrak{U}, \mu)$ и напомним, что множества, принадлежащие σ -алгебре $\mathfrak{U}$, называются μ -измеримыми (или просто измеримыми, если известно, о какой мере идет речь). Пусть на множестве $A \in \mathfrak{U}$ определена числовая функция $y = f(x)$, $x \in A$, т. е. f отображает A в $\mathbb{R}$. Функция f называется *измеримой* по Лебегу или μ -измеримой, если для произвольного числа $c \in \mathbb{R}$ ее лебеговы множества $\{x \in A : f(x) < c\}$, $\{x \in A : f(x) \leq c\}$, $\{x \in A : f(x) > c\}$ и $\{x \in A : f(x) \geq c\}$ являются μ -измеримыми, т. е. принадлежат σ -алгебре $\mathfrak{U}$. Можно показать, что измеримость одного из лебеговых множеств для каждого числа $c \in \mathbb{R}$ влечет измеримость остальных лебеговых множеств (см. пример 1). Таким образом, для измеримости функции $y = f(x)$, $x \in A$, необходимо и достаточно, чтобы одно из лебеговых множеств этой функции при каждом $c \in \mathbb{R}$ было μ -измеримым. В частности, если рассматривается измеримое пространство $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu_m)$ где $\mathfrak{B}_m = \mathfrak{B}(\mathbb{R}^m)$ — совокупность борелевых множеств в $\mathbb{R}^m$, а μ_m — мера Лебега в $\mathbb{R}^m$, то μ_m -измеримые функции $y = f(x)$, определенные на борелевых множествах $A \in \mathfrak{B}_m$, называются *борелевыми* (или $\mathfrak{B}_m$ -измеримыми). Следовательно, функция $y = f(x)$, $x \in A$, где $A \in \mathfrak{B}_m$, называется борелевой функцией, если для каждого $c \in \mathbb{R}$, например, множество $\{x \in A : f(x) < c\}$ борелево в $\mathbb{R}^m$.

Можно показать (см. пример 5), что если $y = g(x)$, $x \in A$, является μ -измеримой функцией, а $z = f(y)$ — борелевая функция, определенная на числовой оси $\mathbb{R}$, то

функция $z = f(g(x))$, $x \in A$, μ -измерима. В частности, если f — непрерывная на $\mathbb{R}$ функция, то $z = f(g(x))$, $x \in A$, μ -измерима.

Теорема 1. Если f и g — две μ -измеримые функции, определенные на измеримом множестве A , то функции $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$, $y = f(x)g(x)$ и $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ (в последнем случае при условии, что $g(x) \neq 0$ для каждого $x \in A$), заданные на A , также μ -измеримы.

Следующее свойство класса измеримых функций выгодно отличает их от совокупности непрерывных функций, являющихся основным объектом изучения в классическом математическом анализе.

Теорема 2. Пусть последовательность $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ μ -измеримых функций, определенных на множестве $A \in \mathcal{U}$, сходится в каждой точке $x \in A$ к функции $y = f(x)$, $x \in A$. Тогда предельная функция $y = f(x)$, $x \in A$, является μ -измеримой.

Наличие меры μ на σ -алгебре $\mathcal{U}$ позволяет ввести ряд новых (полезных в теории интеграла Лебега) понятий. Две функции f и g , заданные на μ -измеримом множестве $A \subset X$, называются эквивалентными (или μ -эквивалентными), если множество $\{x \in A : f(x) \neq g(x)\}$ является подмножеством множества μ -меры нуль. В частности если мера μ — полная на σ -алгебре $\mathcal{U}$, то f и g эквивалентны, если $\mu\{x \in A : f(x) \neq g(x)\} = 0$. Эквивалентные функции называются еще почти всюду равными (или почти всюду равными относительно меры μ). Эквивалентность функций обозначается так: $f \sim g$ на A или $f(x) \stackrel{\text{п.в.}}{=} g(x)$ на A . Если две функции f и g , заданные на измеримом множестве A , эквивалентны, то они одновременно измеримы. Введем еще одно важное понятие — понятие сходимости почти всюду. Пусть $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ — последовательность функций, заданных на μ -измеримом множестве A . Тогда говорят, что эта последовательность сходится почти всюду на множестве A к функции $y = f(x)$, $x \in A$, если последовательность $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ сходится к функции $f(x)$ в каждой точке x множества A , кроме, быть может, некоторого подмножества множества меры нуль, содержащегося в A . Иными словами, последовательность $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$, $x \in A$, сходится почти всюду на множестве A к функции $y = f(x)$, $x \in A$, если существует такое измеримое множество $B \subset A$ меры нуль и множество $A_B \subset B$, что для каждого $x \in A \setminus A_B$ справедливо равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$. Сходимость почти

всюду обозначается так: $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \stackrel{\text{п.в.}}{=} f(x)$ на A , или $f_n(x) \xrightarrow{\text{п.в.}} f(x)$ на A , или $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ (п. в. на A).

Вообще, в этой связи полезно дать следующее определение. Если некоторое высказывание справедливо в одних точках множества $A \subset X$ и, может быть, оно не справедливо в других точках, образующих подмножество некоторого множества меры нуль, то говорят, что данное высказывание справедливо почти всюду на множестве A (или для почти всех x из A). Например, если множество точек разрыва функции $y = f(x)$, $x \in A$, является измеримым множеством меры нуль, то функцию f назовем непрерывной почти всюду на множестве A . Аналогично, среди функций, допускающих бесконечные значения, выделяются функции, которые могут принимать значения $+\infty$ или $-\infty$ только на множестве меры нуль (или на его подмножестве). О таких функциях говорят, что они почти всюду конечны.

Важность понятия сходимости почти всюду характеризуется такой теоремой.

Теорема 3. Пусть $(X, \mathcal{U}, \mu)$ — измеримое пространство и σ -аддитивная мера μ полная. Если последовательность μ -измеримых функций $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ и функция $f(x)$ заданы на μ -измеримом множестве $A \subset X$ и $f_n(x) \rightarrow f(x)$ почти всюду на A , то функция f также измерима на A .

Отметим, что если функции f_n ($n \in \mathbb{N}$) и f являются только почти всюду конечными на A , то в этом случае теорема 3 остается правильной.

В 1911 г. Д. Ф. Егоровым была доказана следующая важная теорема, устанавливающая связь между понятиями сходимости почти всюду и равномерной сходимости.

Теорема 4 (Д. Ф. Ег о р о в а). Если последовательность μ -измеримых и почти всюду конечных функций $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ и почти всюду конечная функция $f(x)$ заданы

на μ -измеримом множестве $A \subset X$ с $\mu(A) < +\infty$ и $f_n(x) \rightarrow f(x)$ почти всюду на A , то для любого $\delta > 0$ существует такое измеримое множество $A_\delta \subset A$, что:

1) $\mu(A_\delta) > \mu(A) - \delta$;

2) на множестве A_δ последовательность $(f_n(x))_{n=1}^\infty$ сходится к $f(x)$ равномерно.

т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A_\delta} |f_n(x) - f(x)| = 0$.

В теории измеримых функций (а также и в теории вероятностей) существенную роль играет еще одно понятие сходимости функциональной последовательности — *сходимость по мере*. Для простоты изложения вначале рассмотрим функции с конечными значениями. Пусть на μ -измеримом множестве $A \subset X$ заданы последовательность $(f_n(x))_{n=1}^\infty$ μ -измеримых функций и функция $f(x)$. Говорят, что последовательность $(f_n)_{n=1}^\infty$ сходится по мере μ на множестве A к функции f , если для любого $\sigma > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu \{x \in A : |f_n(x) - f(x)| \geq \sigma\} = 0.$$

Если $\mu(A) < +\infty$, то предыдущее условие означает, что множество $\{x \in A : |f_n(x) - f(x)| < \sigma\}$ имеет меру, которая при $n \rightarrow \infty$ становится сколь угодно близкой к мере всего A . Для сходимости по мере используем обозначения: $f_n \xrightarrow{\mu} f$ на A , или $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \stackrel{\mu}{=} f(x)$ на A .

Замечание. Определение сходимости по мере имеет аналогичный смысл и для функций, почти всюду конечных. Однако в этом случае нужно помнить, что множество $\{x \in A : |f_n(x) - f(x)| < \sigma\}$ может не быть дополнением к $\{x \in A : |f_n(x) - f(x)| \geq \sigma\}$. Ведь, кроме этих двух множеств, в A может содержаться еще непустое подмножество меры 0, состоящее из тех точек, где разность $f_n(x) - f(x)$ не имеет смысла.

Теорема 5 (А. Лебега). Если последовательность μ -измеримых функций $(f_n(x))_{n=1}^\infty$ сходится почти всюду к μ -измеримой функции $f(x)$ на μ -измеримом множестве A с $\mu(A) < +\infty$, то эта последовательность сходится по мере к функции $f(x)$ на A .

В теореме Лебега нельзя отбросить условие конечности меры $\mu(A) < +\infty$, т. е. на множестве A с $\mu(A) = +\infty$ из сходимости почти всюду не всегда вытекает сходимость по мере.

Отметим также, что теорема 5 остается правильной и для последовательности почти всюду конечных функций.

Можно показать, что из сходимости последовательности функций по мере, вообще говоря, не следует ее сходимость почти всюду. Действительно, определим для каждого натурального n на полуотрезке $(0; 1] = A \subset \mathbb{R}$ функции $f_1^{(n)}, f_2^{(n)}, \dots$, $f_n^{(n)}$ следующим образом:

$$f_k^{(n)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } \frac{k-1}{n} < x \leq \frac{k}{n}, \\ 0 & \text{при } x \notin \left(\frac{k-1}{n}; \frac{k}{n} \right]. \end{cases}$$

Занумеровав эти функции в виде функциональной последовательности, получим последовательность, которая сходится по мере Лебега μ_1 к нулевой функции, но в то же время она не сходится в каждой точке $x \in (0; 1]$.

Таким образом, теорема Лебега не может быть обращена в полной мере. Тем не менее справедлива следующая теорема.

Теорема 6 (Ф. Рисса). Если последовательность μ -измеримых функций $(f_n(x))_{n=1}^\infty$ сходится по мере к μ -измеримой функции $f(x)$ на измеримом множестве A , то существует такая подпоследовательность $(f_{n_k}(x))_{k=1}^\infty$, которая сходится к $f(x)$ почти всюду на A .

Измеримые функции могут быть аппроксимированы «простыми» измеримыми функциями. Функция $y = h(x)$, определенная на X , называется простой, если она

μ -измерима и принимает не более чем счетное множество значений. Нетрудно проверить, что функция $h(x)$, принимающая не более чем счетное число различных значений $y_1, y_2, \dots, y_k, \dots$, μ -измерима тогда и только тогда, когда все множества $A_k = \{x \in X : h(x) = y_k\}$ μ -измеримы.

Теорема 7. Для μ -измеримости функции $y = f(x)$, $x \in A$, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность простых функций $(h_n(x))_{n=1}^{\infty}$, $x \in X$, которая равномерно сходится к функции $f(x)$ на множестве A .

Это определение μ -измеримой функции относится к функциям, заданным на произвольных множествах и в общем случае никак не связано с понятием непрерывной функции. Однако если речь идет о функциях, определенных на μ_m -измеримых подмножествах евклидова пространства $\mathbb{R}^m$, то справедлива следующая теорема.

Теорема 8 (Н. Н. Лузина). Если функция f — μ_m -измерима и почти всюду конечна на μ_m -измеримом множестве $A \subset \mathbb{R}^m$, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует такая непрерывная во всем $\mathbb{R}^m$ функция φ_ε , что $\mu_m \{x \in A : f(x) \neq \varphi_\varepsilon(x)\} < \varepsilon$.

Отметим, что если в теореме Лузина функция f ограничена на A (т. е. $|f(x)| \leq M, \forall x \in A$), то функцию $\varphi_\varepsilon(x)$ также можно выбрать так, что $|\varphi_\varepsilon(x)| \leq M$ для любого $x \in \mathbb{R}^m$.

Из теоремы Лузина следует, что каждую измеримую функцию можно приблизить непрерывными функциями.

Теорема 9 (М. Фреше). Если функция f μ_m -измерима и почти всюду конечна на μ_m -измеримом множестве $A \subset \mathbb{R}^m$, то существует такая последовательность $(\varphi_n(x))_{n=1}^{\infty}$ непрерывных на $\mathbb{R}^m$ функций, что $\varphi_n(x) \rightarrow f(x)$ почти всюду на A при $n \rightarrow \infty$.

2. Интеграл Лебега и его свойства. В этом пункте рассматривается измеримое пространство $(X, \mathfrak{A}, \mu)$, где счетно-аддитивная мера μ предполагается σ -конечной и полной. Определим интеграл Лебега от вещественнозначных функций, заданных на μ -измеримых множествах, являющихся подмножествами X . Удобно различать два случая в зависимости от того, является ли мера $\mu(X)$ конечной или бесконечной.

1. Пусть измеримое пространство $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ таково, что $\mu(X)$ конечна, т. е. $\mu(X) < +\infty$. Вначале введем понятие интеграла Лебега для простых функций. Пусть h — некоторая простая функция, принимающая значения $y_1, y_2, \dots, y_k, \dots$, причем $y_k \neq y_j$ при $k \neq j$, и A — некоторое μ -измеримое подмножество X . Тогда простая функция h называется интегрируемой или суммируемой по мере μ на множестве A , если ряд

$$\sum_k y_k \mu(A_k), \quad \text{где } A_k = \{x \in A : h(x) = y_k\} \quad (1)$$

абсолютно сходится. Если h — интегрируемая функция, то сумма ряда (1) называется **интегралом Лебега** от h по множеству A и обозначается так:

$$\int_A h(x) d\mu = \sum_k y_k \mu(A_k).$$

Требование абсолютной сходимости ряда (1) обусловлено тем, что интеграл Лебега $\int_A h(x) d\mu$ от простой функции h не должен зависеть от порядка нумерации значений этой функции, т. е. сумма ряда (1) не должна зависеть от перестановки слагаемых этого ряда, что возможно лишь тогда, когда ряд (1) сходится абсолютно.

В определении интеграла Лебега от простой функции h предполагается, что все ее значения y_k различны. Однако если измеримое множество A представлено в виде объединения $A = \bigcup_k B_k$ попарно непересекающихся измеримых множеств B_k и на каждом B_k функция h постоянна, т. е. $h(x) = h_k, \forall x \in B_k$, то $\int_A h(x) d\mu =$

$= \sum_k h_{k\mu}(B_k)$, причем простая функция h интегрируема на A тогда и только тогда, когда ряд $\sum_k h_{k\mu}(B_k)$ сходится абсолютно.

Определение 1. Назовем измеримую функцию $y = f(x)$, $x \in A$, интегрируемой или суммируемой по Лебегу на μ -измеримом множестве A , если существует последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$, $x \in X$, простых интегрируемых на A функций, равномерно сходящаяся на A к функции $f(x)$. Предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) d\mu \quad (2)$$

обозначим $\int_A f(x) d\mu$ и назовем интегралом Лебега функции f по множеству A .

Отметим, что интегрируемую функцию f на множестве A называют еще μ -интегрируемой на A , если надо подчеркнуть, что речь идет о мере μ . Это определение корректно, т. е. для любой интегрируемой на A функции f предел (2) существует и не зависит от последовательности простых функций, равномерно сходящейся на A к f .

Нетрудно проверить, что для простых функций определение 1 совпадает с ранее введенным определением интегрируемости. Кроме того, каждая ограниченная измеримая на измеримом множестве A функция является интегрируемой по Лебегу на A . В частности, постоянная функция $f(x) = c$, $x \in A$, интегрируема на A и

$$\int_A f(x) d\mu = \int_A c d\mu = c \cdot \mu(A).$$

Напомним основные свойства интеграла Лебега:

1) если функции $y = f(x)$, $x \in A$, и $y = g(x)$, $x \in A$, интегрируемы на μ -измеримом множестве A , то для произвольных действительных чисел α и β функция $y = \alpha f(x) + \beta g(x)$, $x \in A$, также интегрируема на A и

$$\int_A [\alpha f(x) + \beta g(x)] d\mu = \alpha \int_A f(x) d\mu + \beta \int_A g(x) d\mu$$

(свойство линейности интеграла Лебега);

2) если функции f и g измеримы на измеримом множестве A и $f(x) = g(x)$ почти всюду на A , то они интегрируемы на A лишь одновременно и $\int_A f(x) d\mu = \int_A g(x) d\mu$ (т. е. изменение значений интегрируемой функции на множестве меры нуль не нарушает интегрируемость функции и при этом сохраняется величина интеграла);

3) если интегрируемые на измеримом множестве A функции f и g удовлетворяют почти всюду на A неравенству $f(x) \leq g(x)$, то $\int_A f(x) d\mu \leq \int_A g(x) d\mu$; в частности, если интегрируемая на A функция f ограничена, т. е. $m \leq f(x) \leq M$ для всех (или почти для всех) $x \in A$, то

$$m \cdot \mu(A) \leq \int_A f(x) d\mu \leq M \cdot \mu(A);$$

4) если измеримое множество A такое, что $\mu(A) = 0$, то каждая функция f , определенная на A , является μ -интегрируемой и $\int_A f(x) d\mu = 0$;

5) измеримая функция $y = f(x)$, $x \in A$, интегрируема на A тогда и только тогда, когда $y = |f(x)|$, $x \in A$, интегрируема на A ; при этом $\left| \int_A f(x) d\mu \right| \leq \int_A |f(x)| d\mu$;

6) если неотрицательная функция φ интегрируема на A и измеримая функция $y = f(x)$, $x \in A$, удовлетворяет почти всюду на A неравенству $|f(x)| \leq \varphi(x)$, то f также интегрируема на A ;

7) если f — интегрируемая функция на измеримом множестве A , а множество A представлено в виде объединения $A = \bigcup_k A_k$ попарно непересекающихся измеримых множеств, то функция f интегрируема на каждом A_k , ряд $\sum_k \int_{A_k} |f(x)| d\mu$ абсолютно сходится и справедливо равенство

$$\int_A f(x) d\mu = \sum_k \int_{A_k} f(x) d\mu$$

(свойство σ -аддитивности интеграла Лебега);

8) если измеримое множество A представляется в виде объединения $A = \bigcup_k A_k$ попарно непересекающихся измеримых множеств A_k , измеримая функция $y = f(x)$, $x \in A$, интегрируема на каждом A_k и ряд $\sum_k \int_{A_k} |f(x)| d\mu$ сходится, то функция f интегрируема на A и

$$\int_A f(x) d\mu = \sum_k \int_{A_k} f(x) d\mu;$$

9) если функция $y = f(x)$, $x \in A$, интегрируема на измеримом множестве A , то для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $\left| \int_a f(x) d\mu \right| < \varepsilon$ для всякого измеримого множества $a \subset A$ такого, что $\mu(a) < \delta$ (свойство абсолютной непрерывности интеграла Лебега);

10) если неотрицательная функция $y = f(x)$, $x \in A$, интегрируема на A и $\int_A f(x) d\mu = 0$, то $f(x) = 0$ почти всюду на A .

Из этих свойств интеграла Лебега получаем такое утверждение: пусть $y = f(x)$, $x \in X$, — неотрицательная функция, интегрируемая на множестве X . Тогда функция множеств $\mathcal{F}(A) = \int_A f(x) d\mu$, определенная для всех измеримых множеств $A \in \mathfrak{U}$, неотрицательна и σ -аддитивна, т. е. $\mathcal{F}$ является счетно-аддитивной мерой на σ -алгебре $\mathfrak{U}$. Кроме того, эта функция множеств $\mathcal{F}(A)$, $A \in \mathfrak{U}$, связана исходной мерой условием: если $\mu(A) = 0$, то и $\mathcal{F}(A) = 0$.

Напомним также *неравенство Чебышева*: если f — неотрицательная и интегрируемая на A функция, а число $c > 0$, то

$$\mu\{x \in A : f(x) \geq c\} \leq \frac{1}{c} \int_A f(x) d\mu.$$

2. Рассмотрим теперь случай, когда измеримое пространство $(X, \mathfrak{U}, \mu)$ такое, что $\mu(X) = +\infty$. Поскольку мы предполагаем, что мера μ σ -конечна, то X может быть представлено как объединение монотонно возрастающей последовательности μ -измеримых множеств X_n , $n \in \mathbb{N}$, конечной меры: $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, $X_n \subset X_{n+1}$, и $\mu(X_n) < +\infty$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Такую последовательность множеств $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ назовем исчерпывающей.

Определение 2. Пусть неотрицательная измеримая функция f определена на измеримом множестве A , имеющем, возможно, бесконечную меру. Тогда она называется интегрируемой или суммируемой по Лебегу на A , если для некоторой исчерпывающей последовательности множеств $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ функция f интегрируема на каждом множестве $A_n = A \cap X_n$ конечной меры и существует конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} f(x) d\mu. \quad (3)$$

Этот предел называется интегралом Лебега от f по множеству A и обозначается символом $\int_A f(x) d\mu$.

Нетрудно убедиться в том, что при любом выборе исчерпывающей последовательности $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ предел (3) будет одним и тем же. Кроме того, из свойства абсолютной непрерывности интеграла Лебега следует, что если $\mu(A) < +\infty$, то определения 1 и 2 равносильны.

Замечание. Отметим, что какова бы ни была исчерпывающая последовательность множеств $(X_n)_{n=1}^{\infty}$, предел (3) всегда существует, поскольку числовая последовательность $\int_{A_n} f(x) d\mu$, $n \in \mathbb{N}$, является неубывающей. Но этот предел может рав-

няться $+\infty$. Иногда полагают в этом случае, что и $\int_A f(x) d\mu = +\infty$. Но, тем не менее, функция f называется суммируемой (или интегрируемой) лишь тогда, когда предел (3) конечен для некоторой исчерпывающей последовательности.

Пусть на измеримом множестве A (возможно, что $\mu(A) = +\infty$) задана измеримая функция f , которая может принимать значения обоих знаков. Введем положительную и отрицательную части функции f :

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \geq 0, \\ 0, & \text{если } f(x) < 0, \end{cases} \quad f_-(x) = \begin{cases} -f(x), & \text{если } f(x) \leq 0, \\ 0, & \text{если } f(x) > 0, \end{cases}$$

где $x \in A$. Иными словами,

$$f_+(x) = \frac{1}{2} [|f(x)| + f(x)], \quad f_-(x) = \frac{1}{2} [|f(x)| - f(x)]$$

или $f_+(x) = \max(f(x), 0)$, $f_-(x) = \max(-f(x), 0)$ для $x \in A$.

Тогда функцию f можно представить в виде разности двух неотрицательных функций: $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$, $x \in A$. Очевидно, что функции f_+ и f_- также являются измеримыми на A .

Определение 3. Измеримая функция f называется интегрируемой или суммируемой по Лебегу на измеримом множестве A , если интегрируемы на A функции f_+ и f_- . При этом величина интеграла Лебега $\int_A f(x) d\mu$ определяется формулой

$$\int_A f(x) d\mu = \int_A f_+(x) d\mu - \int_A f_-(x) d\mu.$$

Отметим, что если $\mu(A) < +\infty$, то определение 3 равносильно определению 1.

Для интегралов на измеримом множестве бесконечной меры справедливы все свойства 1) — 3) и 5) — 10) интегралов Лебега по множествам конечной меры. Следует только отметить, что неравенства

$$m \cdot \mu(A) \leq \int_A f(x) d\mu \leq M \cdot \mu(A),$$

фигурирующие в свойстве 3), теперь не являются правильными, поскольку постоянная функция неинтегрируема на множестве A , если $\mu(A) = +\infty$. Таким образом, в этом случае не каждая ограниченная измеримая функция интегрируема на A .

Совокупность всех интегрируемых по Лебегу функций на измеримом множестве A обозначается символом $L(A, \mu)$ или $L(A)$.

Замечание. Предложенная схема построения интеграла Лебега не единственно возможна. Остановимся коротко и на некоторых других (но эквивалентных приведенной выше) схемах.

A) Построение интеграла Лебега, восходящее к Лебегу. Пусть вначале измеримая и ограниченная функция $y = f(x)$, $x \in A$, задана на измеримом множестве A конечной меры (т. е. $\mu(A) < +\infty$). Если выполняется неравенство $m \leq f(x) \leq M$ для всех $x \in A$, где m и M — некоторые числа, то рассмотрим некоторое раз-

биеие П сегмента $[m; M]$ точками $m = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n = M$. Соотнесем, далее, каждому полуинтервалу $(y_k; y_{k+1})$ измеримое множество $A_k = \{x \in A : y_k \leq f(x) < y_{k+1}\}$ и положим $\lambda = \lambda(\Pi) = \max_{0 \leq k \leq n-1} (y_{k+1} - y_k)$. Введем *нижнюю* и *верхнюю суммы Лебега* s и S функции f , отвечающие разбиению Π ,

$$s = s_{\Pi}(f) = \sum_{k=0}^{n-1} y_k \mu(A_k), \quad S = S_{\Pi}(f) = \sum_{k=0}^{n-1} y_{k+1} \mu(A_k).$$

Нетрудно показать, что множество всех нижних сумм Лебега $\{s_{\Pi}(f)\}$ ограничено сверху (например, любой верхней суммой Лебега $S_{\Pi}(f)$), а множество всех верхних сумм Лебега $\{S_{\Pi}(f)\}$ ограничено снизу (например, произвольной нижней суммой Лебега $s_{\Pi}(f)$). Поэтому существуют и являются конечными величины $\mathcal{J}_*(f) = \sup_{\Pi} s_{\Pi}(f)$, $\mathcal{J}^*(f) = \inf_{\Pi} S_{\Pi}(f)$, которые берутся по всем разбиениям Π отрезка $[m; M]$. Число $\mathcal{J}_*(f)$ называется *нижним интегралом* функции f по множеству A , а $\mathcal{J}^*(f)$ — *верхним интегралом* функции f по A . Вполне естественно ограниченную измеримую функцию f назвать интегрируемой по Лебегу на множестве A , если $\mathcal{J}_*(f) = \mathcal{J}^*(f)$. Это общее число называется интегралом Лебега функции f по множеству A и обозначается символом $\int_A f(x) d\mu = \mathcal{J}_*(f) = \mathcal{J}^*(f)$. Из очевидного неравенства $0 \leq S_{\Pi}(f) - s_{\Pi}(f) \leq \lambda \cdot \mu(A)$ следует, что каждая ограниченная измеримая функция f является интегрируемой на измеримом множестве A , если $\mu(A) < +\infty$.

Интеграл Лебега для неограниченной измеримой функции $y = f(x)$, определенной на измеримом множестве A , мера которого конечна, определяется так. Пусть вначале функция $y = f(x)$, $x \in A$, неотрицательна на A . Рассмотрим последовательность $(f_N(x))_{N=1}^{\infty}$ срезов функции $f(x)$, определяемых равенствами

$$f_N(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \leq N, \\ N, & \text{если } f(x) > N. \end{cases}$$

Тогда каждая из функций $f_N(x)$ является ограниченной измеримой на A и поэтому интегрируемой на A . Поскольку эта последовательность неубывающая: $f_N(x) \leq f_{N+1}(x)$ ($\forall x \in A$ и $\forall N \in \mathbb{N}$), то существует предел $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_A f_N(x) d\mu$. Если этот предел конечен, то неотрицательная функция $y = f(x)$, $x \in A$, называется *интегрируемой* или *суммируемой* по Лебегу на множестве A . В этом случае интегралом Лебега функции f по множеству A называется предел

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_A f_N(x) d\mu = \int_A f(x) d\mu.$$

Пусть теперь неограниченная измеримая функция $y = f(x)$, определенная на измеримом множестве A , мера которого конечна, принимает значения обоих знаков. Тогда для определения интегрируемости f на A воспользуемся разложением $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$, $x \in A$. Поэтому функцию f называют интегрируемой или суммируемой по Лебегу на множестве A , если интегрируемыми на A являются функции f_+ и f_- . При этом полагаем

$$\int_A f(x) d\mu = \int_A f_+(x) d\mu - \int_A f_-(x) d\mu.$$

Интегрируемость измеримой функции, заданной на множестве бесконечной меры, определяется, как и раньше, с помощью систем исчерпывающих множеств.

Б) В этой конструкции определение интеграла Лебега также начинаем со случая ограниченной измеримой функции $y = f(x)$, заданной на измеримом множестве A , мера которого конечна. Для этого рассмотрим произвольное разбиение Π множества A на конечное число попарно непересекающихся измеримых множеств

$A_k, k = 1, 2, \dots, n$, т. е. пусть $A = \bigcup_{k=1}^n A_k$. Имея такое разбиение Π , полагаем $M_k = \sup_{x \in A_k} f(x), m_k = \inf_{x \in A_k} f(x) (k = 1, 2, \dots, n)$. Для данного разбиения Π множества A ограниченной измеримой функции $y = f(x), x \in A$, составим суммы

$$S_{\Pi}(f) = \sum_{k=1}^n M_k \cdot \mu(A_k), \quad s_{\Pi}(f) = \sum_{k=1}^n m_k \cdot \mu(A_k)$$

и назовем их *верхней и нижней суммами Лебега — Дарбу*. Можно показать (аналогично римановской теории интегрирования), что множество $\{S_{\Pi}(f)\}_{\Pi}$ верхних сумм Лебега — Дарбу ограничено снизу (например, любой нижней суммой Лебега — Дарбу), а множество $\{s_{\Pi}(f)\}_{\Pi}$ нижних сумм Лебега — Дарбу ограничено сверху (например, произвольной верхней суммой Лебега — Дарбу). Далее вводим верхний $\mathcal{J}^*(f)$ и нижний $\mathcal{J}_*(f)$ интегралы функции f по множеству A с помощью равенств: $\mathcal{J}^*(f) = \inf_{\Pi} S_{\Pi}(f), \mathcal{J}_*(f) = \sup_{\Pi} s_{\Pi}(f)$. Тогда естественно назвать ограниченную измеримую на множестве A с $\mu(A) < +\infty$ функцию f интегрируемой или суммируемой по Лебегу, если $\mathcal{J}^*(f) = \mathcal{J}_*(f)$. Это общее число называют интегралом Лебега функции f на множестве A и обозначают $\int_A f(x) d\mu$. Каждая ограниченная

измеримая функция $y = f(x)$, определенная на измеримом множестве A , мера которого конечна, является интегрируемой по Лебегу на A .

Пусть теперь неотрицательная измеримая и почти всюду конечная функция f определена на измеримом множестве A , мера которого может равняться и $+\infty$. Рассмотрим всевозможные измеримые подмножества $a \subset A$, имеющие конечную меру, на которых функция f ограничена, и положим

$$\int_A f(x) d\mu = \sup_a \int_a f(x) d\mu.$$

При этом, если $\int_A f(x) d\mu < +\infty$, то функцию f называют интегрируемой или суммируемой по Лебегу на множестве A , а величину $\int_A f(x) d\mu$ — ее интегралом по множеству A .

Если измеримая функция f , определенная на измеримом множестве A , мера которого может равняться $+\infty$, принимает значения разных знаков, то снова исходим из представления $f(x) = f_+(x) - f_-(x), x \in A$. Тогда функция f называется *интегрируемой или суммируемой по Лебегу* на множестве A , если такими на A являются неотрицательные функции f_+ и f_- . Для интегрируемой функции f на A полагаем

$$\int_A f(x) d\mu = \int_A f_+(x) d\mu - \int_A f_-(x) d\mu.$$

В) Теперь рассмотрим иной интересный подход к построению интеграла Лебега — так называемую *схему Даниэля*. В этой схеме для построения интеграла Лебега не требуется изначального введения счетно-аддитивной меры, определенной на σ -алгебре $\mathcal{U}$ подмножеств множества X . Наоборот, σ -алгебра $\mathcal{U}$ и σ -аддитивная мера μ на ней будут построены как следствия развития понятия интеграла Лебега. Таким образом, в этой схеме считаем заданным лишь непустое множество X , на котором не выделена ни σ -алгебра $\mathcal{U}$, ни мера μ .

Пусть на этом множестве X задано семейство $H = H(X)$ вещественных функций $h(x), x \in X$, которые называем элементарными.

Предполагаем, что семейство H содержит функцию $h(x) = 1, x \in X$, и:

а) вместе с любыми функциями $h_1(x), h_2(x) (x \in X)$ содержит также функции $\alpha h_1(x) + \beta h_2(x), x \in X$, при любых вещественных α и β ;

б) вместе с каждой функцией $h(x), x \in X$, содержит ее модуль $|h(x)|, x \in X$.

В силу свойства а) совокупность $\mathbf{H}$ представляет собой линейное пространство. Следствием из свойства б) является то, что вместе с функцией h в пространстве $\mathbf{H}$ входит ее положительная часть $h_+(x) = \frac{1}{2} [|h(x)| + h(x)]$, $x \in X$, и отрицательная часть $h_-(x) = \frac{1}{2} [|h(x)| - h(x)]$, $x \in X$, а вместе с функциями $h_1(x)$ и $h_2(x)$ — также $\max(h_1(x), h_2(x))$ и $\min(h_1(x), h_2(x))$, $x \in X$.

Далее предполагаем, что каждой элементарной функции $h(x)$, $x \in X$, сопоставлено число $\int_X h(x) d\mu$, называемое элементарным интегралом функции h по множеству X , удовлетворяющее условиям:

- 1) $\int_X [\alpha h_1(x) + \beta h_2(x)] d\mu = \alpha \int_X h_1(x) d\mu + \beta \int_X h_2(x) d\mu$ для любых $h_1(x) \in \mathbf{H}$, $h_2(x) \in \mathbf{H}$ и любых вещественных α и β ,
- 2) $\int_X h(x) d\mu \geq 0$, если $h \in \mathbf{H}$ и $h(x) \geq 0$ для каждого $x \in X$;
- 3) если последовательность функций $(h_n(x))_{n=1}^\infty$ семейства $\mathbf{H}$ стремится убывая к нулю (в каждой точке $x \in X$), то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X h_n(x) d\mu = 0.$$

Оказывается, что при выполнении условий 1) — 3) совокупность элементарных функций может быть расширена до некоторой совокупности $L(X, \mu) = L(X)$ функций, определенных на X , и элементарный интеграл при этом распространяется из $\mathbf{H}$ на $L(X)$, т. е. определяется интеграл $\int_X f(x) d\mu$ для каждой функции $f \in L(X)$.

Класс $L(X)$ называется совокупностью интегрируемых или суммируемых по Лебегу на множестве X функций, а интеграл $\int_X f(x) d\mu$ — интегралом Лебега функции f по X . Отметим в общих чертах это расширение.

Вначале введем важное для этой конструкции интеграла Лебега понятие множества меры нуль. Множество $A \subset X$ называется множеством меры нуль, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует монотонно возрастающая последовательность элементарных функций $0 \leq h_1(x) \leq h_2(x) \leq \dots$ таких, что для каждого $x \in A$ $\sup_n h_n(x) \geq$

≥ 1 , но $\int_X h_n(x) d\mu < \varepsilon$. Имея понятие множества меры нуль, общепринятым образом вводят понятия «сходимости почти всюду» и «функция почти всюду конечна». Вещественная функция $y = f(x)$, $x \in X$, называется измеримой по Лебегу, если она почти всюду конечна и может быть представлена как предел почти всюду сходящейся последовательности элементарных функций.

Введем класс функций, который обозначается L^+ : функция $y = \varphi(x)$, $x \in X$, принадлежит по определению классу L^+ , если она может быть представлена как предел (в смысле сходимости почти всюду) монотонно возрастающей на X последовательности элементарных функций h_n , причем интегралы от этих функций ограничены в совокупности:

$$\exists c \in \mathbb{R} : \int_X h_n(x) d\mu \leq c \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

В этом случае для $\varphi \in L^+$ естественно положить

$$\int_X \varphi(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X h_n(x) d\mu.$$

Наконец, функция $y = f(x)$, $x \in X$, называется интегрируемой или суммируемой по Лебегу, если она может быть представлена в виде разности $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$, $x \in X$, двух функций φ и ψ из класса L^+ . Ее интегралом Лебега называют число

$$\int_X f(x) d\mu = \int_X \varphi(x) d\mu - \int_X \psi(x) d\mu.$$

Совокупность всех интегрируемых по Лебегу на X функций, как отмечалось выше, обозначается $L(X)$.

Измеримые множества и мера Лебега вводятся так. Множество $A \subset X$ называется *измеримым по Лебегу*, если измерима его характеристическая функция $\chi_A(x)$, $x \in X$, т. е. функция, равная единице на A и нулю вне A . Для измеримого множества $A \subset X$ его мерой Лебега естественно считать число $\mu(A) = \int_X \chi_A(x) d\mu$. В частности, все множество X измеримо, поскольку $\chi_X(x) \equiv 1$ является элементарной функцией и $\mu(X) = \int_X 1 \cdot d\mu$. Тогда класс $\mathfrak{M}$ всех измеримых множеств образует σ -алгебру и мера μ на ней σ -аддитивна. Таким образом, мы рассмотрели схему Даниэля для случая, когда $\mu(X)$ конечна (это обусловлено тем, что функция $h(x) \equiv 1$, $x \in X$, принадлежит $N(X)$). Аналогично, но с некоторыми изменениями, эта конструкция используется и в более общей ситуации, когда, возможно, $\mu(X) = +\infty$, т. е. функция $h(x) \equiv 1$, $x \in X$, не обязательно является элементарной.

Приведем некоторые примеры использования схемы Даниэля.

а) Пусть $X = [a; b]$ — ограниченный отрезок числовой оси $\mathbb{R}$. Вещественная функция h , заданная на сегменте $[a; b]$, называется *ступенчатой*, если отрезок $[a; b]$ можно разбить на части с помощью точек деления $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ так, что функция h постоянна на каждом интервале $(x_k; x_{k+1})$ разбиения, т. е. $h(x) = y_k$, $x \in (x_k; x_{k+1})$, где y_k — постоянные ($k = 0, 1, \dots, n-1$). В точках разбиения можно не интересоваться значениями ступенчатой функции, поскольку этих точек конечное число (и, тем самым, эти точки образуют множество меры нуль). Для такой ступенчатой функции h определим интеграл, полагая

$$\int_{[a;b]} h(x) d\mu = \sum_{k=0}^{n-1} y_k (x_{k+1} - x_k).$$

Тогда в качестве совокупности $N([a; b])$ элементарных функций берем класс всех ступенчатых функций, определенных на отрезке $[a; b]$, а введенный выше интеграл от этих функций — в качестве элементарного интеграла. Можно проверить, что все условия а), б) и 1) — 3) выполняются. Далее по схеме Даниэля строим класс $L([a; b])$ интегрируемых по Лебегу на $[a; b]$ функций, σ -алгебру $\mathfrak{M}$ измеримых по Лебегу подмножеств отрезка $[a; b]$ и счетно-аддитивную меру Лебега μ на $\mathfrak{M}$. Аналогичные построения можно осуществить и на конечном интервале $(a; b)$ числовой оси $\mathbb{R}$.

б) Пусть $X = [a; b]$ — ограниченный отрезок числовой оси $\mathbb{R}$. В качестве класса $N([a; b])$ элементарных функций рассмотрим совокупность всех вещественных непрерывных функций, определенных на $[a; b]$ (или даже класс интегрируемых по Риману на $[a; b]$ функций). *Элементарным интегралом* $\int_{[a;b]} h(x) d\mu$ непрерывной функции $y = h(x)$, $x \in [a; b]$, назовем ее интеграл Римана, т. е. положим

$$\int_{[a;b]} h(x) d\mu = \int_a^b h(x) dx.$$

Можно показать, что указанные ранее условия, налагаемые на класс элементарных функций и элементарный интеграл, выполняются. Поэтому по схеме Даниэля построим совокупность $L([a; b])$ (совпадающую с аналогичным классом в примере а)) интегрируемых по Лебегу на $[a; b]$ функций, σ -алгебру $\mathfrak{M}$ измеримых по Лебегу подмножеств отрезка $[a; b]$ и счетно-аддитивную меру Лебега μ на $\mathfrak{M}$.

Аналогичные построения можно осуществить также на конечном интервале $(a; b)$ числовой оси $\mathbb{R}$.

в) Если $X = (a; b)$ — бесконечный интервал, то в качестве совокупности элементарных функций можно взять класс ступенчатых функций, или класс непрерывных функций, или класс интегрируемых по Риману функций, причем каждая функция должна быть равна нулю вне некоторого конечного интервала, своего для каждой функции (такие функции называются *финитными*). Элементарным интегралом элементарной функции называют ее интеграл Римана по интервалу $(a; b)$. Класс $L(a; b)$ интегрируемых по Лебегу функций, σ -алгебра измеримых подмножеств интервала $(a; b)$ и счетно-аддитивная мера Лебега μ на $\mathcal{U}$ строятся в этом случае по схеме Даниэля так же, как и раньше.

г) Пусть $X = P$ — ограниченный параллелепипед пространства $\mathbb{R}^m$. Если параллелепипед P разбит на конечное число непересекающихся параллелепипедов $P_1, \dots, P_n$, то функции, постоянная на каждом P_i , называется *ступенчатой функцией*. Интеграл от ступенчатой функции h , принимающей в параллелепипеде P_i значение y_i , определяется формулой

$$\int_P h(x) d\mu_m = \sum_{i=1}^n y_i \mu_m(P_i).$$

Тогда класс всех ступенчатых функций, определенных на P , образует совокупность $\mathcal{H}(P)$ элементарных функций, а интеграл Римана $\int_P h(x) d\mu_m$ от ступенчатой функции является элементарным.

В качестве класса $\mathcal{H}(P)$ элементарных функций можно было бы также взять совокупность всех непрерывных функций на параллелепипеде P или интегрируемых по Риману функций на параллелепипеде P . Элементарным интегралом таких функций будет интеграл Римана от них по параллелепипеду P .

Таким образом, в этом случае также можно использовать схему Даниэля и построить измеримое пространство $(P, \mathcal{U}_m, \mu_m)$.

Если параллелепипед P пространства $\mathbb{R}^m$ неограничен, то класс $L(P)$ интегрируемых на P функций, σ -алгебра $\mathcal{U}_m$ измеримых подмножеств множества P и σ -аддитивная мера μ_m на $\mathcal{U}_m$ строятся так же, как и в примере в).

д) Пусть X совпадает с пространством s всех вещественных последовательностей $x = (\xi_1, \dots, \xi_n, \dots)$. Вещественная функция $y = f(x)$, определенная на множестве s , называется *цилиндрической*, если существуют $m \in \mathbb{N}$ и непрерывная на $\mathbb{R}^m$ функция $f^{[m]}(\xi_1, \dots, \xi_m)$ такие, что

$$f(x) = f^{[m]}(\xi_1, \dots, \xi_m) \quad (\forall x \in s).$$

Совокупность всех цилиндрических функций образует класс $\mathcal{H}(s)$ элементарных функций. Для цилиндрической функции $f(x) = f^{[m]}(\xi_1, \dots, \xi_m)$, $x = (\xi_1, \dots, \xi_n, \dots) \in s$, определим элементарный интеграл с помощью равенства

$$\int_s f(x) d\omega = \frac{1}{V \pi^m} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f^{[m]}(\xi_1, \dots, \xi_m) \cdot e^{-\sum_{k=1}^m \xi_k^2} d\xi_1 \dots d\xi_m.$$

Можно доказать, что все условия а), б) и 1) — 3), которым подчинены класс элементарных функций и элементарный интеграл, в этом случае выполняются. Следовательно, по схеме Даниэля можно построить совокупность $L(s, \omega) = L(s)$ интегрируемых по Лебегу функций, σ -алгебру $\mathcal{U}_\omega$ измеримых подмножеств пространства s и счетно-аддитивную каноническую гауссову меру ω на $\mathcal{U}_\omega$.

е) Пусть $X = C_0[0; \pi]$ — совокупность всех непрерывных функций $x = x(t)$, $0 \leq t \leq \pi$, удовлетворяющих условию $x(0) = 0$. Вещественная функция $y = f(x)$, определенная на $C_0[0; \pi]$, называется *цилиндрической*, если существуют разбиение отрезка $[0; \pi]$ точками $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = \pi$ и непрерывная на $\mathbb{R}^m$

функция $f^{[m]}(\xi_1, \dots, \xi_m)$ такие, что

$$f(x) = f^{[m]}(x(t_1), \dots, x(t_m)) \quad (\forall x \in C_0[0; \pi]).$$

Для цилиндрической функции f определим интеграл, полагая:

$$\int_{C_0[0; \pi]} f(x) d\mu_w = \frac{1}{\sqrt{\pi^m t_1(t_2 - t_1) \dots (t_m - t_{m-1})}} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f^{[m]}(\xi_1, \dots, \xi_m) \times \\ \times e^{-\frac{\xi_1^2}{t_1} - \sum_{k=2}^m \frac{(\xi_k - \xi_{k-1})^2}{t_k - t_{k-1}}} \cdot d\xi_1 \dots d\xi_m.$$

Тогда совокупность всех цилиндрических функций образует класс $H(C_0[0; \pi])$ элементарных функций, а введенный для них интеграл является элементарным интегралом. Следовательно, по схеме Даниэля можно построить совокупность $L(C_0[0; \pi], \mu_w) = L(C_0[0; \pi])$ интегрируемых по Винеру функций, σ -алгебру $\mathfrak{U}_w$ -измеримых по Винеру подмножеств пространства $C_0[0; \pi]$ и σ -аддитивную меру Винера μ_w на $\mathfrak{U}_w$.

3. **Предельный переход под знаком интеграла.** Связь интегралов Лебега и Римана. В этом пункте рассматривается вопрос о том, когда из сходимости (в том или ином смысле) на измеримом множестве A последовательности интегрируемых функций $(f_n(x))_{n=1}^\infty$, $x \in A$, к функции $f(x)$, $x \in A$, следует интегрируемость f на A и справедливость равенства $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) d\mu = \int_A f(x) d\mu$.

Если ответ на этот вопрос положительный, то говорят, что возможен предельный переход под знаком интеграла. Рассмотрим в этой связи интеграл Лебега по лебеговой мере μ_1 на отрезке $[0; \pi]$ числовой оси $\mathbb{R}$. Пусть дана функциональная последовательность непрерывных на $[0; \pi]$ функций

$$f_n(x) = \begin{cases} n \sin nx, & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{n}, \\ 0, & \text{если } \frac{\pi}{n} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Тогда каждая функция этой последовательности интегрируема по Лебегу, поскольку она ограничена и измерима на $[0; \pi]$. Кроме того, для каждой точки $x \in [0; \pi]$ $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \equiv f(x)$. Однако, $\int_{[0; \pi]} f_n(x) d\mu_1 = 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Следовательно,

но, равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0; \pi]} f_n(x) d\mu_1 = \int_{[0; \pi]} f(x) d\mu_1$ не является правильным. Поэтому

ожидать утверждений типа «из $f_n(x) \rightarrow f(x)$ следует $\int_A f_n(x) d\mu \rightarrow \int_A f(x) d\mu$ » без дополнительных предположений о характере сходимости f_n к своему пределу нельзя.

Теорема 10 (А. Лебега). Пусть на измеримом множестве $A \subset X$ задана последовательность $(f_n(x))_{n=1}^\infty$ интегрируемых на A функций, которая сходится по мере к некоторой функции $f(x)$ (т. е. $f_n \xrightarrow{\mu} f$ на A). Если существует неотрицательная интегрируемая на A функция $\varphi(x)$, что $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$ при каждом n для почти всех $x \in A$, то f также интегрируема на A и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) d\mu = \int_A f(x) d\mu.$$

Замечание. 1) Теорема Лебега остается в силе, если в ее формулировке сходимость по мере заменить на сходимость почти всюду к измеримой функции f .

2) Неотрицательная интегрируемая функция φ , фигурирующая в теореме Лебега, называется *интегрируемой мажорантой* функциональной последовательности $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$, $x \in A$.

Для монотонных последовательностей справедлива несколько более сильная теорема.

Теорема 11 (Б. Леви). Пусть на измеримом множестве $A \subset X$ задана неубывающая последовательность $f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \leq f_n(x) \leq \dots$, $x \in A$, интегрируемых функций, интегралы от которых ограничены в совокупности

$$\exists L \in \mathbb{R} : \int_A f_n(x) d\mu \leq L \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Тогда почти всюду на A существует конечный предел $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, функция f интегрируема на A и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) d\mu = \int_A f(x) d\mu.$$

Условие монотонного неубывания функций $f_n(x)$ можно заменить в теореме В. Леви условием их монотонного невозрастания.

Следствие. Если $(g_n(x))_{n=1}^{\infty}$ — последовательность неотрицательных интегрируемых на измеримом множестве $A \subset X$ функций и $\sum_{n=1}^{\infty} \int_A g_n(x) d\mu < +\infty$,

то почти всюду на A функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ сходится и

$$\int_A \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A g_n(x) d\mu.$$

Теорема 12 (П. Фату). Пусть на измеримом множестве $A \subset X$ задана последовательность $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ неотрицательных интегрируемых функций, которая сходится почти всюду на A к некоторой функции $f(x)$, $x \in A$, и интегралы от функций этой функциональной последовательности ограничены в совокупности

$$\exists L \in \mathbb{R} : \int_A f_n(x) d\mu \leq L \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Тогда функция f интегрируема на A и $\int_A f(x) d\mu \leq L$.

Замечание. Теорема Фату остается в силе, если в ее формулировке сходимость почти всюду заменить на сходимость по мере.

Теорема 13. Пусть на некотором измеримом по Жордану множестве A пространства $\mathbb{R}^m$ задана интегрируемая по Риману функция $y = f(x)$, $x = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in A$. Тогда эта функция интегрируема по Лебегу на A относительно меры Лебега μ_m и справедливо равенство

$$\int_A \dots \int f(\xi_1, \dots, \xi_m) d\xi_1 \dots d\xi_m = \int_A f(x) d\mu_m.$$

Таким образом, класс $L(A)$ интегрируемых по Лебегу функций в пространстве $\mathbb{R}^m$ содержит всю совокупность интегрируемых по Риману функций и интеграл Лебега является продолжением интеграла Римана на $L(A)$. Поэтому для интеграла Лебега по мере Лебега употребляется то же обозначение, что и для интеграла Римана.

Например, часто используют обозначение $\int_a^b f(x) dx$ для интеграла $\int_{[a;b]} f(x) d\mu_1$,

интеграл $\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy$ обозначает интеграл Лебега $\int_{[a; b] \times [c; d]} f(x, y) d\mu_2$ от функции двух переменных (x, y) или употребляют обозначение $\int_A \dots \int_A f(\xi_1, \dots, \xi_m) d\xi_1 \dots d\xi_m$ вместо интеграла Лебега $\int_A \dots \int_A f(\xi_1, \dots, \xi_m) d\mu_m = \int_A f(x) d\mu_m$ функции f по μ_m -измеримому множеству $A \subset \mathbb{R}^m$.

В терминах меры Лебега можно сформулировать удобный для применения критерий интегрируемости функции по Риману.

Теорема 14. Для того чтобы ограниченная на параллелепипеде $P \subset \mathbb{R}^m$ функция $y = f(x)$ была интегрируемой по Риману, необходимо, и достаточно, чтобы она была непрерывной почти всюду, т. е. множество ее точек разрыва являлось множеством μ_m -меры нуль.

4. Прямое произведение мер. Теорема Фубини. В математическом анализе важную роль играет теорема о сведении двойного (или вообще многократного) интеграла к повторному. В теории кратных интегралов Лебега в этом плане основным результатом является теорема Фубини. Прежде чем ее сформулировать, приведем ряд понятий и утверждений.

Если $X_1, \dots, X_m$ — некоторые непустые множества, то упорядоченный набор $(x_1, \dots, x_m)$, где $x_k \in X_k$, называется *прямым произведением множеств* $X_1, \dots, X_m$ и обозначается символом $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m$. В частности, если $X_1 = X_2 = \dots = X_m = X$, то это множество является m -й степенью множества X : $X^m = X \times X \times \dots \times X$. Например, координатное m -мерное пространство $\mathbb{R}^m$ есть m -я степень числовой прямой $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$.

Если $S_1, S_2, \dots, S_m$ — системы подмножеств множеств $X_1, X_2, \dots, X_m$, то $S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_m$ обозначает совокупность подмножеств множества $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m$, представимых в виде $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m$, где $A_k \in S_k, k = 1, 2, \dots, m$. Если $S_1 = S_2 = \dots = S_m$, то S есть m -я степень множества S_1 , т. е. $S = S_1^m$.

Например, система $\mathcal{P}_m$ параллелепипедов пространства $\mathbb{R}^m$ является m -й степенью системы промежутков числовой оси $\mathbb{R}$.

Нетрудно доказать, что если системы $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \dots, \mathcal{N}_m$ являются полукольцами подмножеств соответственно множеств $X_1, X_2, \dots, X_m$, то их прямое произведение $\mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2 \times \dots \times \mathcal{N}_m$ также является полукольцом. Однако из предположения, что системы $\mathcal{N}_k (k = 1, \dots, m)$ суть кольца (или σ -алгебры), еще не вытекает, вообще говоря, что произведение $\mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2 \times \dots \times \mathcal{N}_m$ является кольцом (соответственно σ -алгеброй).

Пусть на полукольцах $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \dots, \mathcal{N}_m$ подмножеств множеств $X_1, X_2, \dots, X_m$ соответственно заданы меры $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m$. Определим на полукольце $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2 \times \dots \times \mathcal{N}_m$ меру $\mu = \nu_1 \times \nu_2 \times \dots \times \nu_m$ формулой $\mu(A) = \nu_1(A_1) \nu_2(A_2) \dots \nu_m(A_m)$, где $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m \in \mathcal{N}$. Мера μ называется *произведением мер* $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m$. Например, мера Лебега μ_m в $\mathbb{R}^m$ является m -й степенью линейной меры Лебега μ_1 .

Теорема 15. Если меры $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m$ σ -аддитивны соответственно на полукольцах $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \dots, \mathcal{N}_m$, то их произведение $\mu = \nu_1 \times \nu_2 \times \dots \times \nu_m$ также является σ -аддитивной мерой на полукольце $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2 \times \dots \times \mathcal{N}_m$.

Если меры $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m$ σ -аддитивны, заданы соответственно на σ -алгебрах $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m$ подмножеств множеств $X_1, X_2, \dots, X_m$, то их произведением назовем лебегово продолжение меры $\nu_1 \times \nu_2 \times \dots \times \nu_m$, определенной на полукольце $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \times \dots \times \mathcal{B}_m$. Это продолжение обозначим символом $\nu_1 \otimes \nu_2 \otimes \dots \otimes \nu_m$.

Далее для простоты обозначений и формулировок утверждений будем рассматривать произведение только двух мер. Пусть имеем два измеримых пространства $(X, \mathcal{X}, \mu_x)$ и $(Y, \mathcal{Y}, \mu_y)$, причем меры μ_x и μ_y предполагаются полными и σ -конечными. Тогда на некоторой σ -алгебре $\mathcal{U}$ μ -измеримых множеств, являющихся подмножествами множества $X \times Y$, определена σ -аддитивная мера $\mu = \mu_x \otimes \mu_y$. Пусть A — некоторое множество из $X \times Y$. Для каждого фиксированного $x \in X$ введем множество $A_x = \{y \in Y : (x, y) \in A\}$. Аналогично для каждого фиксированного $y \in Y$ рассмот-

рим множество $A_y = \{x \in X : (x, y) \in A\}$. Например, если X и Y — числовые прямые, а, следовательно, $X \times Y$ — плоскость, то A_{x_0} есть проекция на ось Y сечения множества A прямой $x = x_0$.

Теорема 16. Пусть A — μ -измеримое множество произведения $X \times Y$. Тогда для почти всех $x \in X$ (в смысле меры μ_x) множества A_x являются μ_y -измеримыми, функция $\mu_y(A_x) : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ μ_x -интегрируема на X и справедливо равенство

$$\mu(A) = \int_X \mu_y(A_x) d\mu_x.$$

Аналогичное утверждение справедливо также для множества A_y и поэтому верно равенство

$$\mu(A) = \int_Y \mu_x(A_y) d\mu_y.$$

Пусть $Y = \mathbb{R}$, а $\mu_y = \mu_1$ — линейная мера Лебега на Y . Рассмотрим неотрицательную функцию $y = f(x)$, определенную на множестве $A \subset X$. Тогда подграфом функции f называется множество

$$\{(x, y) \in X \times \mathbb{R} : x \in A, 0 \leq y \leq f(x)\} \equiv \Gamma(f).$$

Теорема 17. Если неотрицательная функция $y = f(x)$, $x \in A$, μ_x -интегрируема на $A \subset X$, то ее подграфик $\Gamma(f)$ является $\mu_x \otimes \mu_1 = \mu$ -измеримым и $\mu(\Gamma(f)) = \int_A f(x) d\mu_x$.

Теорема 17 имеет определенный геометрический смысл: интеграл Лебега от неотрицательной функции представляет собой меру подграфика этой функции.

Если $X = \mathbb{R}$, множество A — отрезок $[a; b] \subset \mathbb{R}$, а функция $f(x)$ интегрируема по Риману, то теорема 17 сводится к известному выражению интеграла через площадь криволинейной трапеции $\Gamma(f)$.

Теорема 18 (Г. Ф у б и н и). Рассмотрим два измеримых пространства $(X, \mathfrak{A}_x, \mu_x)$ и $(Y, \mathfrak{A}_y, \mu_y)$, причем предполагаем, что меры μ_x и μ_y счетно-аддитивны, σ -конечны и полны. Тогда можно рассмотреть измеримое пространство $(X \times Y, \mathfrak{A}, \mu)$, где $\mu = \mu_x \otimes \mu_y$, а $\mathfrak{A}$ — σ -алгебра μ -измеримых подмножеств множества $X \times Y$. Пусть функция $z = f(x, y)$ μ -интегрируема на μ -измеримом множестве $A \subset X \times Y$. Тогда для почти всех x (в смысле меры μ_x) функция $f(x, y)$ μ_y -интегрируема на A_x (аналогично для почти всех y в смысле меры μ_y функция $f(x, y)$ μ_x -интегрируема на A_y) и справедливо равенство

$$\int_A f(x, y) d\mu = \int_X \left(\int_{A_x} f(x, y) d\mu_y \right) d\mu_x = \int_Y \left(\int_{A_y} f(x, y) d\mu_x \right) d\mu_y. \quad (4)$$

Сведение двойного интеграла к повторному по формуле (4) возможно и без условия μ -интегрируемости f . Например, справедлива такая теорема.

Теорема 19 (Л. Т о н е л л и). Пусть функция $z = f(x, y)$ μ -измерима на множестве $A \subset X \times Y$. Тогда функция $z = f(x, y)$ μ_y -измерима на A_x при почти всех $x \in X$ (относительно меры μ_x) и аналогично $f(x, y) = \mu_x$ -измерима на A_y при почти всех $y \in Y$ (относительно меры μ_y), причем если существует хотя бы один из повторных интегралов

$$\int_X \left(\int_{A_x} |f(x, y)| d\mu_y \right) d\mu_x \text{ или } \int_Y \left(\int_{A_y} |f(x, y)| d\mu_x \right) d\mu_y,$$

то $z = f(x, y)$ является μ -интегрируемой на A и справедливы равенства (4).

Как показывают примеры, из существования повторных интегралов

$$\int_X \left(\int_{A_x} f(x, y) d\mu_y \right) d\mu_x \text{ и } \int_Y \left(\int_{A_y} f(x, y) d\mu_x \right) d\mu_y$$

не следует, вообще говоря, ни их равенство, ни μ -интегрируемость функции f на A .

5. Интеграл Лебега как функция множеств. Теорема Радона — Никодима. Пусть $\mathcal{X}, \mathcal{U}, \mu$ — измеримое пространство, причем $\mu(X) < +\infty$. Рассмотрим интегрируемую на X функцию $y = f(x)$, $x \in X$. Тогда f является интегрируемой на каждом измеримом множестве $A \subset X$ и, следовательно, интеграл

$$\Phi(A) = \int_A f(x) d\mu \quad (5)$$

(с фиксированной f) представляет собой функцию множеств, определенную на σ -алгебре $\mathcal{U}$ всех измеримых множеств пространства X .

Из свойства σ -аддитивности интеграла Лебега следует, что функция множеств $\Phi(A)$, $A \in \mathcal{U}$, является счетно-аддитивной на $\mathcal{U}$, т. е. если измеримое множество A представлено в виде объединения $A = \bigcup_k A_k$ конечного или счетного числа попарно

непересекающихся измеримых множеств, то $\Phi(A) = \sum_k \Phi(A_k)$.

Таким образом, функция Φ , определенная равенством (5), обладает всеми свойствами σ -аддитивной меры, за исключением, может быть, неотрицательности. Отметим, что если $f(x) \geq 0$ для почти всех $x \in X$, то $\Phi(A) \geq 0$ для каждого $A \in \mathcal{U}$. Исходя из этого дадим такое определение.

Определение 4. Пусть X — непустое множество и $\mathcal{U}$ — некоторая σ -алгебра подмножеств множества X , на которой определена конечная σ -аддитивная функция множеств Φ . Тогда эта функция множеств Φ называется *знакопеременной мерой* или *зарядом*.

Рассмотрим заряд Φ , определенный на σ -алгебре $\mathcal{U}$ подмножеств множества X . Множество $A^- \in \mathcal{U}$ называется отрицательным относительно Φ , если $\Phi(A^- \cap A) \leq 0$ для каждого $A \in \mathcal{U}$; аналогично $A^+ \in \mathcal{U}$ называется положительным относительно Φ , если $\Phi(A^+ \cap A) \geq 0$ для любого $A \in \mathcal{U}$.

Теорема 20. Если Φ — заряд, определенный на σ -алгебре $\mathcal{U}$ подмножеств множества X , то существует такое множество $A^- \in \mathcal{U}$, что A^- отрицательно и $A^+ = X \setminus A^-$ положительно относительно Φ .

Разбиение множества $X = A^- \cup A^+$, $A^- \cap A^+ = \emptyset$, на отрицательную A^- и положительную A^+ части относительно заряда Φ называется *разложением Хана*. Разложение Хана, вообще говоря, не единственно. Однако если имеются два таких разложения $X = A_1^- \cup A_1^+$ и $X = A_2^- \cup A_2^+$, то для произвольного $A \in \mathcal{U}$

$$\Phi(A \cap A_1^-) = \Phi(A \cap A_2^-), \quad \Phi(A \cap A_1^+) = \Phi(A \cap A_2^+).$$

Следовательно, на σ -алгебре $\mathcal{U}$ заряд Φ однозначно определяет две неотрицательные функции множеств

$$\Phi^+(A) = \Phi(A \cap A^+), \quad \Phi^-(A) = -\Phi(A \cap A^-),$$

называемые соответственно *верхней* и *нижней вариациями заряда* Φ . Кроме того, эти вариации обладают такими свойствами.

1) $\Phi(A) = \Phi^+(A) - \Phi^-(A)$ для каждого $A \in \mathcal{U}$;

2) Φ^+ и Φ^- представляют собой неотрицательные σ -аддитивные функции множеств на σ -алгебре $\mathcal{U}$, т. е. они являются счетно-аддитивными мерами на $\mathcal{U}$.

Представление функции $\Phi = \Phi^+ - \Phi^-$ в виде разности верхней и нижней вариаций заряда Φ называется *разложением Жордана* заряда Φ . Отметим, что функция множеств $|\Phi|(A) = \Phi^+(A) + \Phi^-(A)$, $A \in \mathcal{U}$, также является σ -аддитивной мерой на $\mathcal{U}$, которая называется *полной вариацией* заряда Φ .

Пусть $(X, \mathcal{U}, \mu)$ — измеримое пространство. Тогда с помощью σ -аддитивной меры μ , определенной на σ -алгебре $\mathcal{U}$, можно указать основные типы зарядов Φ , заданных на $\mathcal{U}$. Заряд Φ , определенный на множествах $A \in \mathcal{U}$, сосредоточен на μ -измеримом множестве $A_0 \in \mathcal{U}$, если $\Phi(A) = 0$ для каждого $A \subset X \setminus A_0$, $A \in \mathcal{U}$. Множество A_0 при этом называется *носителем* заряда Φ . Заряд Φ называется *непрерывным*, если $\Phi(A) = 0$ для любого одноточечного множества $A \in \mathcal{U}$. Заряд Φ называется *дискретным*, если он сосредоточен на некотором конечном или счетном множестве. Иными сло-

вами, заряд Φ дискретен, если существует конечное или счетное множество точек $c_1, c_2, \dots$, что для каждого $A \in \mathfrak{U}$ $\Phi(A) = \sum_{c_k \in A} \Phi(c_k)$. Заряд Φ называется *абсолютно непрерывным* (относительно заданной меры μ), если $\Phi(A) = 0$ для каждого μ -измеримого множества A , для которого $\mu(A) = 0$. Заряд Φ называется *сингулярным* (относительно меры μ), если он сосредоточен на некотором множестве нулевой μ -меры. Очевидно, только нулевой заряд является одновременно абсолютно непрерывным и сингулярным.

Примером абсолютно непрерывного заряда может служить заряд Φ , определенный с помощью интеграла Лебега по формуле (5). Оказывается, что этим исчерпываются все абсолютно непрерывные относительные меры μ заряды.

Теорема 21 (Радона — Никодима). Пусть μ — некоторая σ -аддитивная мера, определенная на σ -алгебре $\mathfrak{U}$ подмножеств множества X , а Φ — заряд, заданный на $\mathfrak{U}$ и абсолютно непрерывный относительно μ . Тогда существует такая μ -интегрируемая функция f на X , что $\Phi(A) = \int_A f(x) d\mu$ ($\forall A \in \mathfrak{U}$). Функция f , называемая *производной заряда Φ по мере μ* , определяется однозначно (с точностью до μ -эквивалентности).

Отметим, что в некоторых литературных источниках для производной заряда Φ по мере μ используется обозначение $\frac{d\Phi}{d\mu}(x) = f(x)$.

Относительно теории интеграла Лебега см. также в [1; 20; 23; 33; 38].

Примеры решения задач

1. Пусть $(X, \mathfrak{U}, \mu)$ — измеримое пространство. Доказать, что измеримость одного из лебеговых множеств функции $y = f(x)$, $x \in A$ ($A \in \mathfrak{U}$) для каждого числа $c \in \mathbb{R}$ влечет измеримость всех остальных лебеговых множеств функции f . Доказать также, что функция $y = f(x)$, $x \in A$, измерима тогда и только тогда, когда для произвольного борелевого множества $B \subset \mathbb{R}$ множество $f^{-1}(B) = \{x \in A : f(x) \in B\}$ измеримо.

Решение. Допустим, что для каждого $c \in \mathbb{R}$ лебегово множество, например, вида $\{x \in A : f(x) < c\}$ измеримо. Покажем измеримость остальных лебеговых множеств функции f . Рассмотрим вначале множество вида $\{x \in A : f(x) \geq c\}$. Очевидно, что $\{x \in A : f(x) \geq c\} = A \setminus \{x \in A : f(x) < c\}$. Поэтому исследуемое лебегово множество измеримо как разность двух измеримых. Теперь рассмотрим лебегово множество $\{x \in A : f(x) \leq c\}$. Очевидно, неравенство $f(x) \leq c$, рассматриваемое для $x \in A$, равносильно совокупности неравенств $f(x) < c + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, также рассматриваемых на множестве A . Тогда, используя теоретико-множественную операцию пересечения, получим

$$\{x \in A : f(x) \leq c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ x \in A : f(x) < c + \frac{1}{n} \right\}.$$

Отсюда следует, что множество $\{x \in A : f(x) \leq c\}$ измеримо как пересечение счетного числа измеримых множеств. Наконец, поскольку $\{x \in A : f(x) > c\} = A \setminus \{x \in A : f(x) \leq c\}$, лебегово множество вида $\{x \in A : f(x) > c\}$ также измеримо.

Рекомендуем читателю аналогично убедиться в том, что измеримость одного из других четырех видов лебеговых множеств влечет измеримость всех остальных лебеговых множеств. Таким образом,

функция f измерима, если измеримо при каждом $c \in \mathbb{R}$ одно из лебеговых множеств.

Докажем, что измеримость функции $y = f(x)$, $x \in A$, на множестве A равносильна измеримости множеств вида $\{x \in A : f(x) \in B\} = f^{-1}(B)$ для каждого борелевого множества B числовой оси $\mathbb{R}$. Поскольку множества $(-\infty; c)$, $(-\infty; c]$, $(c; +\infty)$ и $[c; +\infty)$, где $c \in \mathbb{R}$, борелевы, то из измеримости всех множеств вида $f^{-1}(B)$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, следует измеримость лебеговых множеств функции f . Поэтому функция f измерима на A .

Допустим далее, что функция f измерима на A . Докажем измеримость всех множеств вида $f^{-1}(B)$, где $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Если $B = G$ — открытое множество числовой оси $\mathbb{R}$, то его можно представить в виде объединения $G = \bigcup_k (\alpha_k; \beta_k)$ не более чем счетного числа его составляющих интервалов. Поэтому

$$f^{-1}(G) = \bigcup_k f^{-1}(\alpha_k; \beta_k) = \bigcup_k \{x \in A : \alpha_k < f(x) < \beta_k\}.$$

Поскольку множества $\{x \in A : \alpha_k < f(x) < \beta_k\}$ представляются в виде разностей лебеговых множеств $\{x \in A : f(x) < \beta_k\} \setminus \{x \in A : f(x) \leq \alpha_k\}$ функции f , то $f^{-1}(G)$ измеримо как объединение не более чем счетного числа измеримых множеств. Пусть теперь борелево множество $B = F$ является замкнутым множеством числовой оси $\mathbb{R}$. Тогда $F = \mathbb{R} \setminus G$, где $G = \mathbb{R} \setminus F$ — открытое множество. Поэтому множество $f^{-1}(F) = f^{-1}(\mathbb{R} \setminus G) = A \setminus f^{-1}(G)$ измеримо как разность измеримых множеств A и $f^{-1}(G)$. Если борелево множество B является объединением $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ счетного числа открытых или замкнутых мно-

жеств B_k , то из равенства $f^{-1}(B) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}(B_k)$ следует измеримость $f^{-1}(B)$. Аналогично, если $B = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$, где каждое B_k открыто или замкнуто, то множество $f^{-1}(B) = \bigcap_{k=1}^{\infty} f^{-1}(B_k)$ измеримо. Следовательно, согласно определению класса борелевых множеств $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, для произвольного $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ множество $f^{-1}(B)$ является измеримым.

Замечание. В определении измеримости на множестве $A \subset X$ функции $y = f(x)$, $x \in A$, требуется измеримость множества A . Однако если мера μ полная и f почти всюду конечна на A , то измеримость A следует из измеримости лебеговых множеств одного из видов для каждого $c \in \mathbb{R}$. Действительно, с точностью до множества меры нуль справедливо равенство $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in A : f(x) < n\}$ и поэтому A измеримо, если для каждого $n \in \mathbb{N}$ измеримыми являются множества $\{x \in A : f(x) < n\}$.

2. Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — измеримое пространство. Доказать, что функция $y = f(x)$, $x \in A \subset X$, измерима на A тогда и только тогда, когда для произвольного рационального числа r множество $\{x \in A : f(x) < r\}$ измеримо.

Решение. Согласно примеру 1 достаточно показать, что для каждого действительного числа c лебегово множество $\{x \in A : f(x) < c\}$ измеримо. Для этого рассмотрим произвольную монотонно возрастающую последовательность рациональных чисел $(r_n)_{n=1}^{\infty}$, стремящуюся при $n \rightarrow \infty$ к числу c . Тогда, если для $x \in A$ выполняется неравенство $f(x) < c$, то, поскольку последовательность $(r_n)_{n=1}^{\infty}$, возрастая, стремится к c , существует номер n такой, что $f(x) < r_n$. Обратно, если для $x \in A$ найдется такой номер n , что $f(x) < r_n$, то и подавно $f(x) < c$. Следовательно, используя операцию объединения множеств, имеем

$$\{x \in A : f(x) < c\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in A : f(x) < r_n\}.$$

Из измеримости множеств $\{x \in A : f(x) < r_n\}$ следует, что множество $\{x \in A : f(x) < c\}$ измеримо. Поэтому функция f измерима на A .

3. Пусть A — неизмеримое (в смысле лебеговой меры μ_1) подмножество отрезка $[0; 1] \subset \mathbb{R}$ и на $\mathbb{R}$ определена функция

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in A, \\ -x, & x \notin A. \end{cases}$$

Исследовать на μ_1 -измеримость функцию f на множестве $\mathbb{R}$. Показать, используя этот пример, что если для каждого действительного числа c множество $\{x \in \mathbb{R} : g(x) = c\}$ μ_1 -измеримо, то функция g не обязательно измерима на $\mathbb{R}$.

Решение. Докажем, что функция f неизмерима на $\mathbb{R}$. Действительно, рассмотрим ее лебегово множество $\{x \in \mathbb{R} : f(x) < 0\}$. Поскольку точка $x < 0$ не принадлежит множеству A ($A \subset [0; 1]$), то $f(x) = -x > 0$. Однако, если $x > 0$ и $x \notin A$, то $f(x) = -x < 0$. Если же $x > 0$ и $x \in A$, то $f(x) = x > 0$. Следовательно, лебегово множество $\{x \in \mathbb{R} : f(x) < 0\}$ равно объединению множеств $(0; 1] \setminus A$ и $(1; +\infty)$

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) < 0\} = ((0; 1] \setminus A) \cup (1; +\infty).$$

Поскольку A — неизмеримое подмножество отрезка $[0; 1]$, то $(0; 1] \setminus A$ также неизмеримо (иначе A было бы измеримо как дополнение к $(0; 1]$ измеримого множества $(0; 1] \setminus A$). Поэтому и объединение $((0; 1] \setminus A) \cup (1; +\infty)$ не является μ_1 -измеримым множеством. Таким образом, лебегово множество $\{x \in \mathbb{R} : f(x) < 0\}$ μ_1 -неизмеримо. Следовательно, функция f неизмерима на $\mathbb{R}$.

Для рассматриваемой функции f при каждом действительном c множество $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = c\}$ является или пустым, или одноточечным, или двухточечным. Следовательно, для любого $c \in \mathbb{R}$ множество $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = c\}$ μ_1 -измеримо (имеет μ_1 -меру нуль), но функция f неизмерима на $\mathbb{R}$.

Замечание. Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — измеримое пространство и $A \subset X$ — некоторое измеримое множество. Тогда, если функция $y = f(x)$, $x \in A$, измерима на A , то для каждого числа $c \in \mathbb{R}$ множество $\{x \in A : f(x) = c\}$ является пересечением лебеговых множеств $\{x \in A : f(x) \leq c\}$ и $\{x \in A : f(x) \geq c\}$ и поэтому множество $\{x \in A : f(x) = c\}$ измеримо. Рассмотренный пример показывает, что обратное утверждение правильно не всегда.

4. Рассмотрим измеримое пространство $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{M}_m, \mu_m)$. Доказать, что непрерывная на измеримом множестве $A \subset \mathbb{R}^m$ функция является измеримой на A .

Решение. Пусть вначале $A = F$ является замкнутым множеством пространства $\mathbb{R}^m$. Для доказательства измеримости функции f на F рассмотрим ее множество Лебега вида $F_c = \{x \in F : f(x) \leq c\}$, где $c \in \mathbb{R}$. Покажем, что оно замкнуто в $\mathbb{R}^m$. Для этого пусть точка x^* является предельной для F_c , т. е. $x^* \in F_c'$. Тогда существует последовательность $(x_n)_{n=1}^\infty$ точек множества F_c , сходящаяся при $n \rightarrow \infty$ к x^* . Поэтому $x_n \in F$ и $f(x_n) \leq c$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Отсюда, используя замкнутость множества F и непрерывность f , получаем, что $x^* \in F$ и $f(x^*) \leq c$. Следовательно, $x^* \in F_c$ и множество F_c замкнуто, а поэтому μ_m -измеримо. Таким образом, непрерывная функция на замкнутом множестве F измерима в смысле Лебега на F .

Пусть теперь A — произвольное μ_m -измеримое множество. Согласно теореме 20 из § 1 его можно представить в виде $A = (\bigcup_k F_k) \cup A_0$,

где все F_k — замкнутые множества в $\mathbb{R}^m$, а A_0 — множество μ_m -меры нуль. Покажем, что непрерывная (впрочем, даже любая) функция f измерима на множестве A_0 меры нуль. Действительно, каждое ее лебегово множество $\{x \in A_0 : f(x) < c\}$ является подмножеством множества A_0 . Поэтому на основании свойства полноты меры μ_m множества $\{x \in A_0 : f(x) < c\}$ измеримы и все они имеют меру нуль. Таким образом, непрерывная функция f измерима на всех подмножествах F_k и A_0 , составляющих множество A . Докажем, что f измерима на A . Для каждого $c \in \mathbb{R}$ имеем

$$\{x \in A : f(x) < c\} = \bigcup_k \{x \in F_k : f(x) < c\} \cup \{x \in A_0 : f(x) < c\}.$$

Поскольку по ранее доказанному все множества $\{x \in F_k : f(x) < c\}$ и $\{x \in A_0 : f(x) < c\}$ μ_m -измеримы, то таким является и множество $\{x \in A : f(x) < c\}$. Следовательно, функция f измерима на A .

Замечание. Таким образом, если рассматривать измеримое пространство $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{M}_m, \mu_m)$, то класс измеримых относительно меры Лебега μ_m функций содержит класс непрерывных функций. Причем он существенно шире класса непрерывных функций. Например, для $m = 1$ всюду разрывная функция Дирихле является μ_1 -измеримой.

5. Пусть $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ — измеримое пространство и функция $y = f(x)$, $x \in A$, измерима. Доказать, что если функция $z = \varphi(y)$ непрерывна на $\mathbb{R}$, то функция $z = \varphi(f(x))$, $x \in A$, измерима на A .

Решение. Рассмотрим произвольное действительное число c . Покажем, что прообраз $\varphi^{-1}((-\infty; c))$ является открытым множеством числовой оси $\mathbb{R}$. Действительно, пусть $y_0 \in \varphi^{-1}((-\infty; c))$, т. е. $\varphi(y_0) < c$. Поскольку функция φ непрерывна в точке y_0 , то для положительного числа $\varepsilon = c - \varphi(y_0)$ найдется такое $\delta > 0$, что если $|y - y_0| < \delta$, то $|\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \varepsilon$. Таким образом, для каждого y из δ -окрестности точки y_0 имеем $\varphi(y) < \varphi(y_0) + \varepsilon < \varphi(y_0) + c - \varphi(y_0) = c$. Поэтому все y из этой δ -окрестности точки y_0 принадлежат мно-

жеству $\varphi^{-1}((-\infty; c))$. Следовательно, прообраз $\varphi^{-1}((-\infty; c))$ является открытым множеством числовой оси и его можно представить в виде объединения не более чем счетного числа составляющих интервалов $\varphi^{-1}((-\infty; c)) = \bigcup_k (\alpha_k; \beta_k)$. Тогда лебегово множество сложной функции $\varphi(f)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \{x \in A : \varphi(f(x)) < c\} &= \bigcup_k f^{-1}((\alpha_k; \beta_k)) = \bigcup_k \{x \in A : \alpha_k < f(x) < \beta_k\} = \\ &= \bigcup_k (\{x \in A : f(x) < \beta_k\} \setminus \{x \in A : f(x) \geq \alpha_k\}). \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая измеримость лебеговых множеств $\{x \in A : f(x) < \beta_k\}$ и $\{x \in A : f(x) \geq \alpha_k\}$ измеримой на A функции f , получаем, что множество $\{x \in A : \varphi(f(x)) < c\}$ измеримо для каждого $c \in \mathbb{R}$. Следовательно, функция $\varphi(f)$ измерима на A .

Отметим, что из приведенного решения следует, что если функция f — борелева на A , а φ — непрерывна на $\mathbb{R}$, то $\varphi(f)$ — также борелева на A .

Замечание. Аналогично доказывается, что если имеется m измеримых функций $y_i = f_i(x)$, $x \in A$, где для каждого $i = 1, 2, \dots, m$ множества A_i μ -измеримы, а функция $z = \varphi(y_1, \dots, y_m)$ непрерывна на $\mathbb{R}^m$, то сложная функция $z = \varphi(f_1(x), \dots, f_m(x))$, $x \in A$, измерима на $\mathbb{R}^m$. Однако можно доказать, что из непрерывности функции φ и измеримости функции f не вытекает измеримость функции $f(\varphi(x))$.

6. Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — измеримое пространство и на измеримом множестве A задана последовательность $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ измеримых функций. Доказать, что на A измеримы функции $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ и $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

Решение. Введем обозначения: $h(x) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ и $g(x) = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$,

где $x \in A$. Для доказательства измеримости функции h исследуем ее множество Лебега $\{x \in A : h(x) \leq c\}$, где $c \in \mathbb{R}$. Из свойств верхнего предела следует, что если $x \in A$ и $h(x) \leq c$, то для каждого натурального числа k найдется номер N такой, что $f_n(x) < c + \frac{1}{k}$, как только $n \geq N$. Справедливо, очевидно, и обратное утверждение. Таким образом, для $x \in A$ получаем равносильность рассматриваемых утверждений

$$h(x) \leq c \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N} \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N : f_n(x) < c + \frac{1}{k}.$$

Отсюда, переходя к множествам, имеем

$$\{x \in A : h(x) \leq c\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n \geq N} \left\{x \in A : f_n(x) < c + \frac{1}{k}\right\}.$$

Поскольку функции f_n , $n \in \mathbb{N}$, измеримы, то их лебеговы множества $\left\{x \in A : f_n(x) < c + \frac{1}{k}\right\}$ также измеримы. Но совокупность измеримых множеств $\mathfrak{A}$ образует σ -алгебру и, следовательно, лебегово

множество $\{x \in A: h(x) \leq c\}$ функции h измеримо. Поэтому функция $h(x) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, $x \in A$, измерима на A .

Доказательство измеримости функции g проводится аналогично. А именно, для ее лебегова множества $\{x \in A: g(x) \geq c\}$, $c \in \mathbb{R}$, имеем представление

$$\{x \in A: g(x) \geq c\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n \geq N} \left\{x \in A: f_n(x) > c - \frac{1}{k}\right\},$$

из которого следует его измеримость.

Отметим также, что из примера 6 вытекает теорема 2 об измеримости предельной функции.

7. Доказать, что функция $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, μ_1 -измерима на $\mathbb{R}$, если:

а) $f(x) = \sin [x]$; б) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos (n e^x)}{n \sqrt[3]{n}}$;

в) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{x^4 + n^4}$; г) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n[x]}{1 + n^6 [x]^2}$;

д) $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \cos x}$.

Решение. а) Функция f принимает счетное число значений $\sin k$, $k \in \mathbb{Z}$. А именно, $f(x) = \sin k$, если x принадлежит промежутку $A_k = [k; k+1)$ и $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [k; k+1) = \mathbb{R}$. Так как промежутки A_k являются μ_1 -измеримыми, то исследуемая функция f также μ_1 -измерима на $\mathbb{R}$.

б) Рассматриваемый ряд непрерывных функций сходится равномерно на $\mathbb{R}$, поскольку $\frac{|\cos (n e^x)|}{n \sqrt[3]{n}} \leq \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}} \quad (\forall x \in \mathbb{R})$, а числовой ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{4}{3}}$ сходится. Поэтому сумма этого ряда, т. е. функция f , является непрерывной на $\mathbb{R}$ и, следовательно, μ_1 -измеримой.

При решении этого примера можно было бы не пользоваться теоремой о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда. Действительно, поскольку члены ряда являются μ_1 -измеримыми функциями и ряд сходится поточечно (так как он сходится равномерно), то, согласно теореме 2, функция f μ_1 -измерима.

в) Члены рассматриваемого ряда являются непрерывными на $\mathbb{R}$ функциями и поэтому μ_1 -измеримыми. Если $x \geq 0$, то эквивалентность $\operatorname{arctg} \frac{x}{n^4 + x^4} \sim \frac{x}{n^4}$ при $n \rightarrow \infty$ позволяет сделать вывод о сходимости этого функционального ряда для $x \geq 0$. Аналогично, если $x < 0$, то $-\operatorname{arctg} \frac{x}{n^4 + x^4} \sim -\frac{x}{n^4}$ при $n \rightarrow \infty$, и поэтому для рассматриваемых x ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{n^4 + x^4}$ сходится. Таким образом, заданный ряд

μ_1 -измеримых функций сходится на множестве $\mathbb{R}$. Тогда его сумма f , согласно теореме 2, также является μ_1 -измеримой функцией.

г) Функция $y = [x]$, $x \in \mathbb{R}$, является простой, принимающей целые значения $k \in \mathbb{Z}$ на μ_1 -измеримых множествах $A_k = [k; k+1)$ и поэтому μ_1 -измеримой. Тогда и все функции $y_n = \frac{n[x]}{1+n^5[x]^2}$, $x \in \mathbb{R}$, также μ_1 -измеримы, как частное μ_1 -измеримых функций. Кроме того, воспользовавшись при $[x] \neq 0$ эквивалентностью $\frac{n[x]}{1+n^5[x]^2} \sim \frac{[x]^{-1}}{n^4}$ при $n \rightarrow \infty$, получаем, что рассматриваемый функциональный ряд сходится на множестве $\mathbb{R}$ и, следовательно, функция f является μ_1 -измеримой.

д) Члены функционального ряда являются непрерывными функциями и, согласно принципу Лейбница, этот ряд сходится при каждом фиксированном $x \in \mathbb{R}$. Поэтому его сумма f является μ_1 -измеримой на $\mathbb{R}$ функцией.

8. Доказать, что функция $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, является μ_2 -измеримой на $\mathbb{R}^2$, если:

а) $f(x, y) = \text{sign} \sin \pi(x^2 + y^2)$; б) $f(x, y) = \cos \text{sh}([x] + [y])$;

в) $f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n(1+n[x^2+y^2])}$; г) $f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + e^{n\sqrt{x^2+y^2}}}$;

д) $f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n[xy]}{1+n^3[x^2+y^2]}$.

Решение. а) Исследуемая функция f является простой, принимающей значение 1 на множестве $A_1 = \bigcup_{k=0}^{\infty} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2k < x^2 + y^2 < 2k+1\}$, значение -1 на множестве $A_{-1} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2k+1 < x^2 + y^2 < 2k+2\}$ и значение 0 на множестве $A_0 = \bigcup_{k=0}^{\infty} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = k\}$.

Поскольку множества A_1 и A_{-1} являются открытыми, как объединение открытых колец, то они μ_2 -измеримы. Для каждого $k = 0, 1, \dots$ множество $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = k\}$ замкнуто и поэтому A_0 также μ_2 -измеримо, как объединение счетного числа μ_2 -измеримых множеств. Следовательно, простая функция f принимает значения 1, -1 и 0 на μ_2 -измеримых множествах A_1 , A_{-1} и A_0 соответственно. Поэтому функция f μ_2 -измерима на $\mathbb{R}^2$.

б) Функция $z = [x]$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, является простой, принимающей целые значения $k \in \mathbb{Z}$ на μ_2 -измеримых множествах $A_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : k \leq x < k+1\}$. Поэтому она μ_2 -измерима. Аналогично μ_2 -измеримой является простая функция $z = [y]$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, а следовательно, и их сумма $z = [x] + [y]$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

На основании примера 5 получаем, что исследуемая функция $f(x, y) = \cos \text{sh}([x] + [y])$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, μ_2 -измерима, как суперпозиция непрерывной и измеримой функций.

в) Каждый член рассматриваемого функционального ряда является μ_2 -измеримой на $\mathbb{R}^2$ функцией. Действительно, как и в

случае б), получаем, что $z = [x^2 + y^2]$ — простая измеримая функция, а $f_n(x, y) = e^{-n(1+[x^2+y^2])}$ — измерима на $\mathbb{R}^2$, как непрерывная функция от измеримой (см. пример 5). Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n(1+[x^2+y^2])}$ сходится в каждой точке $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, то из теоремы 2 следует, что функция $f(x, y)$ μ_2 -измерима на $\mathbb{R}^2$.

г) Все члены заданного функционального ряда являются непрерывными функциями и поэтому μ_2 -измеримыми на $\mathbb{R}^2$. Тогда на основании признака Лейбница сходимости знакопеременного ряда и теоремы 2 получаем, что функция $f(x, y)$ μ_2 -измерима на $\mathbb{R}^2$.

д) Поскольку функции $z = [xy]$ и $z = [x^2 + y^2]$ являются простыми μ_2 -измеримыми на $\mathbb{R}^2$, то для каждого номера n μ_2 -измеримой на $\mathbb{R}^2$ является функция $f_n(x, y) = \frac{n[xy]}{1 + n^2[x^2 + y^2]}$. Из сходимости на $\mathbb{R}^2$ заданного функционального ряда (что устанавливается с помощью признака сравнения) следует μ_2 -измеримость на $\mathbb{R}^2$ функции $f(x, y)$.

9. Для функции f построить последовательность простых измеримых функций, равномерно сходящихся к f , если:

$$\text{а) } f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}; \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \arctg x, & x > 0; \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Решение. Пусть некоторая функция f является измеримой и конечной на множестве A . Построим для этой функции последовательность $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ простых функций, полагая для каждого целого числа k $h_n(x) = \frac{k}{n}$ на множестве $\left\{x \in A: \frac{k}{n} \leq f(x) < \frac{k+1}{n}\right\}$. Так как функция f измерима на A , то множества $\left\{x \in A: \frac{k}{n} \leq f(x) < \frac{k+1}{n}\right\}$ для $k \in \mathbb{Z}$ и $n \in \mathbb{N}$ являются измеримыми, и поэтому все функции h_n измеримы на A . Кроме того, для каждого $x \in A$ справедливо неравенство $|f(x) - h_n(x)| < \frac{1}{n}$, из которого следует равномерная сходимость на A последовательности $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ к функции f .

Поскольку все рассматриваемые в этом примере функции измеримы (даже непрерывны), то к ним применим указанный процесс построения последовательности $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ простых измеримых функций, равномерно сходящихся к заданной измеримой функции f . А именно, в примере а) для целого k полагаем $h_n(x) = \frac{k}{n}$ на множестве $\left\{x \in \mathbb{R}: \frac{k}{n} \leq x^3 < \frac{k+1}{n}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}: \sqrt[3]{\frac{k}{n}} \leq x < \sqrt[3]{\frac{k+1}{n}}\right\}$. В примере б) считаем, что $h_n(x) = 0$ для $x \leq 0$, а на множествах $\left\{x > 0: \frac{k\pi}{2n} \leq \arctg x < \frac{(k+1)\pi}{2n}\right\} = \left\{x > 0: \operatorname{tg} \frac{k\pi}{2n} \leq x < \operatorname{tg} \frac{(k+1)\pi}{2n}\right\}$,

где $k = 0, 1, \dots, n-1$, полагаем $h_n(x) = \frac{k\pi}{2n}$. В примере в) определим $h_n(x, y) = \frac{k}{n}$ на множестве $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: \frac{k}{n} \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \frac{k+1}{n}\right\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: \left(\frac{k}{n}\right)^2 \leq x^2 + y^2 < \left(\frac{k+1}{n}\right)^2\right\}$, где $k = 0, 1, \dots$.

10. Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — измеримое пространство, а последовательность функций $(f_n(x))_{n=1}^\infty$, $x \in A$, сходится почти всюду относительно меры μ на множестве $A \in \mathfrak{A}$ к функции f . Доказать, что если φ — непрерывная на $\mathbb{R}$ функция, то $\varphi(f_n(x)) \rightarrow \varphi(f(x))$ почти всюду (в смысле меры μ) на A .

Решение. Пусть A_0 — такое μ -измеримое подмножество множества A , $\mu(A_0) = 0$, на котором последовательность $(f_n(x))_{n=1}^\infty$ не сходится к функции f . Тогда для каждой точки $x \in A \setminus A_0$ $f_n(x) \rightarrow f(x)$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому в силу непрерывности на $\mathbb{R}$ функции φ получаем $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(f_n(x)) = \varphi(f(x))$ ($\forall x \in A \setminus A_0$).

Таким образом, имеем такое множество A_0 меры нуль, что во всех точках множества $A \setminus A_0$ функциональная последовательность $(\varphi(f_n(x)))_{n=1}^\infty$ стремится при $n \rightarrow \infty$ к функции $\varphi(f(x))$. Следовательно, $\varphi(f_n(x)) \rightarrow \varphi(f(x))$ при $n \rightarrow \infty$ почти всюду относительно меры μ на множестве A .

11. Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — измеримое пространство, а $(f_n(x))_{n=1}^\infty$, $x \in X$, такая последовательность функций, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A_\varepsilon \in \mathfrak{A}, \quad \mu(X \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon, \quad \forall x \in A_\varepsilon \Rightarrow f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x).$$

Доказать, что $f_n(x) \rightarrow f(x)$ при $n \rightarrow \infty$ почти всюду относительно меры μ на множестве A .

Решение. Пусть k — произвольное натуральное число. Тогда, согласно условию задачи, для $\varepsilon = \frac{1}{k}$ найдем соответствующее μ -измеримое множество $A_{\frac{1}{k}}$ и положим $A^* = \bigcap_{k=1}^\infty (X \setminus A_{\frac{1}{k}})$. Множество A^*

является μ -измеримым, как пересечение счетного числа μ -измеримых множеств, и $\mu(A^*) \leq \mu(X \setminus A_{\frac{1}{k}}) < \frac{1}{k}$ ($\forall k \in \mathbb{N}$). Из последнего неравенства следует, что $\mu(A^*) = 0$. Теперь покажем, что в каждой точке $x \in X \setminus A^*$ справедливо равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$. Действительно, если

$x \in X \setminus A^* = X \setminus \bigcap_{k=1}^\infty (X \setminus A_{\frac{1}{k}}) = \bigcup_{k=1}^\infty A_{\frac{1}{k}}$, то существует такой номер k , что $x \in A_{\frac{1}{k}}$. А поэтому, согласно условию, в этой точке x имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$. Таким образом, $f_n(x) \rightarrow f(x)$ почти всюду относительно меры μ на X .

12. Доказать, что при $n \rightarrow \infty$:

а) $f_n(x) = x + \sin^n \pi x + \cos^n \pi x \rightarrow f(x) = x$ почти всюду на $\mathbb{R}$ относительно меры Лебега μ_1 ;

б) $f_n(x) = n^2 \chi_{\left[0; \frac{1}{n}\right]}(x) \rightarrow f(x) = 0$ почти всюду на $\mathbb{R}$ относительно меры Лебега μ_1 , где $\chi_{\left[0; \frac{1}{n}\right]}(x)$ — характеристическая функция множества $\left[0; \frac{1}{n}\right]$.

Решение. а) Вначале отметим, что в тех точках $x \in \mathbb{R}$, для которых $|\sin \pi x| < 1$ и $|\cos \pi x| < 1$, имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^n \pi x = 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n \pi x = 0$. Если же $x \in \mathbb{R}$ таково, что $\sin \pi x = \pm 1$ (или $\cos \pi x = \pm 1$), то предел функций $\sin^n \pi x$ (соответственно $\cos^n \pi x$) равен единице или не существует. Таким образом, рассмотрим множество $A_0 = \{x \in \mathbb{R} : \sin \pi x = \pm 1 \text{ или } \cos \pi x = \pm 1\} = \{k : k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{1}{2} + k : k \in \mathbb{Z}\right\}$. Множество A_0 — счетное (как объединение двух счетных множеств) и поэтому $\mu_1(A_0) = 0$. Тогда для каждой точки $x \in \mathbb{R} \setminus A_0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x + \sin^n \pi x + \cos^n \pi x) = x$$

и, следовательно, почти всюду на $\mathbb{R}$ (относительно меры Лебега μ_1) последовательность $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ сходится к $f(x)$.

б) Покажем, что заданная функциональная последовательность $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ сходится к функции $f(x) = 0$ в каждой точке множества $\mathbb{R}$, кроме $x = 0$. Если $x < 0$, то все $f_n(x) = 0$ и поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$.

Если $x > 0$, то найдется такой номер n_0 , что при $n \geq n_0$ имеем $\frac{1}{n} < x$, а для этих номеров n $f_n(x) = 0$. Следовательно, и в этом случае $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$. Таким образом, для всех $x \neq 0$ имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$. Поскольку мера Лебега одноточечного множества $\{0\}$ равна нулю, то рассматриваемое утверждение доказано.

Отметим, что в точке $x = 0$ n -я функция последовательности $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ равна n^2 и поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = \infty$, т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) \neq f(0)$.

13. Доказать, что при $n \rightarrow \infty$:

а) $f_n(x, y) = \sin^n x + \cos^n y \rightarrow f(x, y) = 0$ почти всюду на $A = [0; \pi] \times [0; \pi]$ относительно меры Лебега μ_2 ;

б) $f_n(x, y) = e^{xy} + e^{-n|x^2 - y|} \rightarrow f(x, y) = e^{xy}$ почти всюду на $\mathbb{R}^2$ относительно меры Лебега μ_2 ;

в) $f_n(x, y) = \cos^n \pi xy \rightarrow f(x, y) = 0$ почти всюду на $\mathbb{R}^2$ относительно меры Лебега μ_2 .

Решение. а) На отрезках $\{(x, y) : 0 \leq x \leq \pi, y = 0\}$, $\{(x, y) : 0 \leq x \leq \pi, y = \pi\}$ и $\left\{(x, y) : x = \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \pi\right\}$ функции $\cos y$ или $\sin x$ равны ± 1 и поэтому $\sin^n x + \cos^n y \not\rightarrow 0$.

Пусть множество A_0 равно объединению этих отрезков. Тогда множество A_0 является μ_2 -измеримым (оно даже элементарное) и $\mu_2(A_0) =$

$= 0$. Теперь отметим, что если $(x, y) \in A \setminus A_0$, то $|\sin x| < 1$ и $|\cos y| < 1$. Тогда для этих точек $(x, y) \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x, y) = 0$ и заданное утверждение доказано.

б) Если точка $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ и $x^2 \neq y$, то $e^{-n|x^2-y|} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому рассмотрим множество $A_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$ плоскости $\mathbb{R}^2$. Это множество является графиком непрерывной линии $y = x^2$. Следовательно, оно μ_2 -измеримо и $\mu_2(A_0) = 0$. Тогда для каждой точки $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus A_0 \lim_{n \rightarrow \infty} (e^{xy} + e^{-n|x^2-y|}) = e^{xy}$, и поэтому $f_n(x, y) \rightarrow f(x, y)$ почти всюду относительно меры Лебега на множестве $\mathbb{R}^2$.

в) Рассмотрим множество $A_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |\cos \pi xy| = 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = k, k \in \mathbb{Z}\}$, состоящее из счетного числа гипербол $xy = k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Поскольку каждая из этих гипербол образует μ_2 -измеримое множество меры нуль, то A_0 μ_2 -измеримо и $\mu_2(A_0) = 0$. Если $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus A_0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n \pi xy = 0$, и поэтому заданное утверждение полностью доказано.

14. Пусть $\mathcal{F}(x) = -[-x]$, $x \in \mathbb{R}$, — неубывающая и непрерывная слева на $\mathbb{R}$ функция, а $\mu_{\mathcal{F}}$ — соответствующая ей мера Лебега — Стильеса на σ -алгебре $2^{\mathbb{R}}$ всех подмножеств числовой оси $\mathbb{R}$.

Доказать, что:

а) функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, почти всюду относительно меры $\mu_{\mathcal{F}}$ равны на $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда $f(k) = g(k)$ для каждого $k \in \mathbb{Z}$; показать, что почти всюду в смысле меры $\mu_{\mathcal{F}}$ на $\mathbb{R}$ выполняются равенства $\cos^2 \pi x = 1$ и $x = [x]$;

б) функциональная последовательность $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$, $x \in \mathbb{R}$, сходится почти всюду на $\mathbb{R}$ относительно меры $\mu_{\mathcal{F}}$ к функции $f(x)$ тогда и только тогда, когда для каждого $k \in \mathbb{Z} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(k) = f(k)$.

Для функциональной последовательности $f_n(x) = \cos^{2n} \pi x$, $x \in \mathbb{R}$, показать, что $f_n(x) \rightarrow 0$ почти всюду на $\mathbb{R}$ относительно меры Лебега μ_1 и $f_n(x) \rightarrow 1$ почти всюду на $\mathbb{R}$ относительно меры Лебега — Стильеса $\mu_{\mathcal{F}}$.

Решение. а) Нетрудно проверить (см. § 2, пример 9), что все подмножества числовой оси $\mathbb{R}$ являются $\mu_{\mathcal{F}}$ -измеримыми множествами. Кроме того, для каждого множества $A \in 2^{\mathbb{R}} \mu_{\mathcal{F}}(A) = \sum_{k \in A} \mu_{\mathcal{F}}\{k\}$, где суммирование производим по всем целым $k \in A$ и $\mu_{\mathcal{F}}\{k\} = 1$. В частности, если множество A не содержит ни одной целой точки, то $\mu_{\mathcal{F}}(A) = 0$.

Пусть $f(x) \stackrel{n.s.}{=} g(x)$ на $\mathbb{R}$ относительно меры $\mu_{\mathcal{F}}$. Если бы в некоторой точке $k \in \mathbb{Z} f(k) \neq g(k)$, то, поскольку $\mu_{\mathcal{F}}\{k\} = 1$, мы имели бы противоречие с равенством $f(x) \stackrel{n.s.}{=} g(x)$ на $\mathbb{R}$ (в смысле меры $\mu_{\mathcal{F}}$).

Если же $f(k) = g(k)$ для каждого $k \in \mathbb{Z}$, то равенство $f(x) = g(x)$ несправедливо, возможно лишь на множестве $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Но

$\mu_{\mathcal{F}}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) = 0$, и, следовательно, $f(x) = g(x)$ почти всюду относительно меры $\mu_{\mathcal{F}}$ на $\mathbb{R}$. Таким образом, $f(x) \stackrel{n.s.}{=} g(x)$ на $\mathbb{R}$ относительно меры $\mu_{\mathcal{F}}$ тогда и только тогда, когда $f(k) = g(k)$ для каждого $k \in \mathbb{Z}$. В частности, поскольку $\cos^2 \pi k = 1$ и $[k] = k$ для произвольного $k \in \mathbb{Z}$, то $\cos^2 \pi x = 1$ и $[x] = x$ почти всюду на $\mathbb{R}$ в смысле меры $\mu_{\mathcal{F}}$. Отметим, что относительно меры Лебега μ_1 функция $\cos^2 \pi x \neq 1$ почти всюду на $\mathbb{R}$ и $[x] \neq x$ в смысле меры μ_1 почти всюду.

б) Если для каждого $k \in \mathbb{Z}$ выполняется равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(k) = f(k)$, то, поскольку $\mu_{\mathcal{F}}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ почти всюду на $\mathbb{R}$ относительно меры Лебега — Стильеса $\mu_{\mathcal{F}}$. Обратно, пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ почти всюду на $\mathbb{R}$ в смысле меры $\mu_{\mathcal{F}}$. Если в некоторой точке $k \in \mathbb{Z}$ имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(k) \neq f(k)$, то, поскольку $\mu_{\mathcal{F}}\{k\} = 1$, отсюда следует, что последовательность $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ не стремится почти всюду на $\mathbb{R}$ к функции $f(x)$.

Согласно доказанному утверждению, из равенства $\cos^2 \pi k = 1$, справедливого для каждого $k \in \mathbb{Z}$, получаем, что при $n \rightarrow \infty$ $\cos^{2n} \pi x \rightarrow 1$ почти всюду на $\mathbb{R}$ относительно меры $\mu_{\mathcal{F}}$. Если же рассмотреть меру Лебега μ_1 , то для $x \notin \mathbb{Z}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos^{2n} \pi x = 0$. Но мера Лебега $\mu_1(\mathbb{Z})$ равна нулю, и поэтому в смысле этой меры $\cos^{2n} \pi x \rightarrow 0$ почти всюду на $\mathbb{R}$ при $n \rightarrow \infty$.

15. Проиллюстрировать теорему Егорова на примере функциональной последовательности $(f_n(x) = x^n)_{n=1}^{\infty}$, $x \in [0; 1] = A$. Доказать, что не существует множества μ_1 -меры нуль отрезка $[0; 1]$, на котором последовательность $(x^n)_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится к функции $f(x) = 0$.

Решение. Рассмотрим произвольное положительное число $\delta > 0$. Если $\delta \geq 1$, то в качестве множества A_δ возьмем, например, отрезок $\left[0; \frac{1}{2}\right]$. Тогда $\mu_1\left[0; \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2} > \mu_1(A) - \delta = 1 - \delta$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]} |x|^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, т. е. на $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ последовательность $(x^n)_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится к функции $f(x) = 0$. Если же $\delta < 1$, то положим $A_\delta = \left[0; 1 - \frac{\delta}{2}\right]$. Тогда $\mu_1(A_\delta) = 1 - \frac{\delta}{2} > \mu_1(A) - \delta = 1 - \delta$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \left[0; 1 - \frac{\delta}{2}\right]} |x|^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\delta}{2}\right)^n = 0.$$

Докажем, что не существует такого μ_1 -измеримого множества $A_0 \subset [0; 1]$ меры нуль, для которого на $A \setminus A_0$ последовательность

$(x^n)_{n=1}^\infty$ равномерно сходится к функции $f(x) = 0$. Пусть, наоборот, такое множество A_0 существует. Тогда для каждого достаточно малого $\delta > 0$ пересечение $(A \setminus A_0) \cap [1 - \delta; 1]$ не пусто, ибо иначе $\mu_1(A \setminus A_0) \neq 1$. Поэтому существует такая последовательность $(x_k)_{k=1}^\infty$ точек множества $A \setminus A_0$, что $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 1$.

Поскольку на множестве $A \setminus A_0$ последовательность $(x^n)_{n=1}^\infty$ сходится к функции $f(x) = 0$ равномерно, то для каждого $\varepsilon > 0$ найдется номер n_0 , что $x^n < \varepsilon$ для всех номеров $n \geq n_0$ и всех $x \in A \setminus A_0$. Отсюда, считая $\varepsilon < 1$, для последовательности $(x_k)_{k=1}^\infty$ имеем $x_k^n < \varepsilon$ ($\forall k \in \mathbb{N}$ и $\forall n \geq n_0$).

Если в последнем неравенстве устремить k к бесконечности, то получаем противоречие: $1 \leq \varepsilon$. Таким образом, не существует такого μ_1 -измеримого множества A_0 меры нуль, что на $A \setminus A_0$ последовательность $(x^n)_{n=1}^\infty$ равномерно сходится к функции $f(x) = 0$.

16. Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — измеримое пространство и A — μ -измеримое подмножество множества X . Доказать, что если последовательность $(f_n(x))_{n=1}^\infty$ μ -измеримых конечных функций сходится по мере μ на A к μ -измеримой конечной функции $f(x)$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x)| \stackrel{\mu}{=} |f(x)|$ на A .

Решение. Рассмотрим произвольное положительное число σ и μ -измеримое множество $\{x \in A : ||f_n(x)| - |f(x)|| \geq \sigma\}$.

Из неравенства $||f_n(x)| - |f(x)|| \leq |f_n(x) - f(x)|$ получаем включение

$$\{x \in A : ||f_n(x)| - |f(x)|| \geq \sigma\} \subset \{x \in A : |f_n(x) - f(x)| \geq \sigma\},$$

из которого следует, что

$$\mu\{x \in A : ||f_n(x)| - |f(x)|| \geq \sigma\} \leq \mu\{x \in A : |f_n(x) - f(x)| \geq \sigma\}.$$

Если в последнем неравенстве устремить n к бесконечности, то получим, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu\{x \in A : ||f_n(x)| - |f(x)|| \geq \sigma\} = 0$, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x)| \stackrel{\mu}{=} |f(x)| \text{ на } A.$$

17. Исследовать на сходимость по указанной мере к функции f на измеримом множестве A следующие последовательности функций:

а) $(f_n(x) = x^n)_{n=1}^\infty$, $0 \leq x \leq 1$, относительно меры Лебега μ_1 на множестве $A = [0; 1]$;

б) $(f_n(x) = \cos^n x)_{n=1}^\infty$, $x \in \mathbb{R}$, относительно меры Лебега μ_1 на множестве $A = \mathbb{R}$;

в) $(f_n(x, y) = e^{-\sqrt{n}(x^2+y^2)})_{n=1}^\infty$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, относительно меры Лебега μ_2 на множестве $A = \mathbb{R}^2$.

Решение. а) Рассмотрим для произвольного $\sigma > 0$ μ_1 -измеримое множество $\{x \in [0; 1] : x^n \geq \sigma\} = [\sqrt[n]{\sigma}; 1]$. Отметим, что когда $\sigma > 1$,

то это множество пусто. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_1 \{x \in [0; 1]: x^n \geq \sigma\} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \sqrt[n]{\sigma}) = 0,$$

и поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n \stackrel{\mu_1}{=} 0$ на $[0; 1]$.

Сходимость по мере μ_1 заданной последовательности можно установить и другим путем. Действительно, поскольку последовательность $(x^n)_{n=1}^{\infty}$ сходится почти всюду относительно меры μ_1 на отрезке $[0; 1]$ к функции $f(x) = 0$, то по теореме 5 $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n \stackrel{\mu_1}{=} 0$ на $[0; 1]$.

б) Рассмотрим для произвольного положительного $\sigma \leq 1$ μ_1 -измеримое множество $\{x \in \mathbb{R} : |\cos x|^n \geq \sigma\} = \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} [-\arccos \sqrt[n]{\sigma} + k\pi, \arccos \sqrt[n]{\sigma} + k\pi]$. Тогда для этого σ и произвольного натурального n

$$\mu_1 \{x \in \mathbb{R} : |\cos x|^n \geq \sigma\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2 \arccos \sqrt[n]{\sigma} = +\infty.$$

Поэтому равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_1 \{x \in \mathbb{R} : |\cos x|^n \geq \sigma\} = 0$ не выполняется. Следовательно, заданная последовательность не сходится по мере μ_1 к функции $f(x) = 0$ на множестве $\mathbb{R}$. Отметим вместе с тем, что последовательность $(\cos^n x)_{n=1}^{\infty}$ сходится почти всюду на $\mathbb{R}$ в смысле меры μ_1 к функции $f(x) = 0$. Поэтому в теореме 5 (Лебега) условие конечности меры $\mu(A)$ является существенным.

в) Рассмотрим для произвольного $\sigma > 0$ μ_2 -измеримое множество $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : e^{-\sqrt{n}(x^2+y^2)} \geq \sigma\}$. Если $\sigma > 1$, то это множество является пустым и поэтому его μ_2 -мера равна нулю. Для $\sigma \leq 1$ имеем

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : e^{-\sqrt{n}(x^2+y^2)} \geq \sigma\} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \frac{\ln \sigma}{-\sqrt{n}} \right\}.$$

Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_2 \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : e^{-\sqrt{n}(x^2+y^2)} \geq \sigma\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi \ln \sigma}{-\sqrt{n}} = 0.$$

Таким образом, $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\sqrt{n}(x^2+y^2)} \stackrel{\mu_2}{=} 0$ на множестве $\mathbb{R}^2$.

18. Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — измеримое пространство конечной меры (т. е. $\mu(X) < +\infty$). Рассмотрим монотонно невозрастающую (почти всюду относительно меры μ) последовательность неотрицательных μ -измеримых функций $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$, заданных на μ -измеримом множестве A , сходящуюся на A по мере μ к функции $f(x) = 0$. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ почти всюду (в смысле меры μ) на A .

Решение. По теореме 6 Рисса существует последовательность $(f_{n_k}(x))_{k=1}^{\infty}$, сходящаяся почти всюду на A к функции $f(x) = 0$.

Пусть A' — множество меры нуль, на котором последовательность $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ не является монотонно невозрастающей, а A'' — также множество μ -меры нуль, на котором последовательность $(f_{n_k}(x))_{k=1}^{\infty}$ не сходится к $f(x) = 0$. Тогда множество $A_0 = A' \cup A''$ μ -измеримо и $\mu(A_0) \leq \mu(A') + \mu(A'') = 0$. Поскольку на множестве $A \setminus A_0$ справедливо равенство $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x) = 0$, то для каждого $x \in A \setminus A_0$ и $\varepsilon > 0$ найдется такой номер k_0 , что $f_{n_k}(x) < \varepsilon$, как только $k \geq k_0$. Тогда для произвольного номера $n \geq n_{k_0}$ в силу монотонности последовательности $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ на множестве $A \setminus A_0$ имеем $0 \leq f_n(x) \leq f_{n_k}(x) < \varepsilon$ ($x \in A \setminus A_0$).

Поэтому для каждого $x \in A \setminus A_0$ получаем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ и, следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ почти всюду в смысле меры μ на множестве A .

19. Пусть $\mathcal{F}(x) = -[-x]$, $x \in \mathbb{R}$, — неубывающая непрерывная слева на $\mathbb{R}$ функция, а $\mu_{\mathcal{F}}$ — соответствующая ей мера Лебега — Стильеса на σ -алгебре $2^{\mathbb{R}}$ всех подмножеств числовой оси $\mathbb{R}$. Рассмотрим на $\mathbb{R}$ последовательность функций $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ и функцию $f(x)$, которые принимают только конечные значения. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) d\mu_{\mathcal{F}} = \int_{\mathbb{R}} f(x) d\mu_{\mathcal{F}}$ на $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда последовательность $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно к $f(x)$ на множестве $\mathbb{Z}$.

Решение. Пусть вначале $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) d\mu_{\mathcal{F}} = \int_{\mathbb{R}} f(x) d\mu_{\mathcal{F}}$ на $\mathbb{R}$. Тогда для произвольного $\sigma > 0$ имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{\mathcal{F}} \{x \in \mathbb{R} : |f_n(x) - f(x)| \geq \sigma\} = 0. \quad (6)$$

Надо доказать, что последовательность $(f_n(k))_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится к функции $f(k)$ на множестве $\mathbb{Z}$, т. е. что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad \text{и} \quad \forall k \in \mathbb{Z} : |f_n(k) - f(k)| < \varepsilon. \quad (7)$$

Доказательство проведем методом от противного. Тогда

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall n_0 \quad \exists n \geq n_0 \quad \text{и} \quad \exists k \in \mathbb{Z} : |f_n(k) - f(k)| \geq \varepsilon.$$

Поэтому для произвольного номера n_0 найдется такой номер $n \geq n_0$, что $\mu_{\mathcal{F}} \{x \in \mathbb{R} : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \geq \mu_{\mathcal{F}} \{k\} = 1$. Отсюда $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{\mathcal{F}} \{x \in \mathbb{R} : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \neq 0$, что противоречит нашему допущению.

Положим в (7) $\varepsilon = \sigma$. Тогда для $n \geq n_0$ имеем включение

$$\{x \in \mathbb{R} : |f_n(x) - f(x)| \geq \sigma\} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z},$$

из которого следует, что $\mu_{\mathcal{F}} \{x \in \mathbb{R} : |f_n(x) - f(x)| \geq \sigma\} \leq \mu_{\mathcal{F}}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) = 0$. Поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{\mathcal{F}} \{x \in \mathbb{R} : |f_n(x) - f(x)| \geq \sigma\} = 0$, т. е. выполняется (6).

20. Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — измеримое пространство и $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ — последовательность μ -измеримых функций, сходящихся по мере μ на μ -измеримом множестве A к μ -измеримой функции $f(x)$. Доказать, что если функция g измерима и почти всюду конечна на A , то $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) g(x) d\mu = \int_A f(x) g(x) d\mu$ на A .

Решение. Пусть $A_0 \subset A$ — μ -измеримое множество, на котором функция g принимает бесконечные значения. Тогда по условию $\mu(A_0) = 0$ и, кроме того, справедливо представление

$$A_0 = \bigcap_{N=1}^{\infty} \{x \in A : |g(x)| \geq N\},$$

из которого в силу непрерывности меры μ получаем

$$\mu(A_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mu\{x \in A : |g(x)| \geq N\} = 0.$$

Следовательно, для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такой номер N_0 , что $\mu\{x \in A : |g(x)| \geq N_0\} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Рассмотрим теперь для каждого $\sigma > 0$ μ -измеримое множество, фигурирующее в определении сходимости по мере

$$\begin{aligned} \{x \in A : |f_n(x)g(x) - f(x)g(x)| \geq \sigma\} &= \{x \in A : |g(x)| \geq \\ &\geq N_0, |f_n(x)g(x) - f(x)g(x)| \geq \sigma\} \cup \{x \in A : |g(x)| < N_0, \\ &|f_n(x) - f(x)| \cdot |g(x)| \geq \sigma\}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \mu\{x \in A : |f_n(x)g(x) - f(x)g(x)| \geq \sigma\} &= \mu\{x \in A : |g(x)| \geq N_0, \\ &|f_n(x)g(x) - f(x)g(x)| \geq \sigma\} + \mu\{x \in A : |g(x)| < N_0, \\ &|f_n(x) - f(x)| \cdot |g(x)| \geq \sigma\} \leq \mu\{x \in A : |g(x)| \geq N_0\} + \\ &+ \mu\left\{x \in A : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\sigma}{N_0}\right\} < \frac{\varepsilon}{2} + \\ &+ \mu\left\{x \in A : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\sigma}{N_0}\right\}. \end{aligned}$$

По условию существует такой номер n_0 , что

$$\mu\left\{x \in A : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\sigma}{N_0}\right\} < \frac{\varepsilon}{2},$$

как только $n \geq n_0$. Таким образом, для каждого $\varepsilon > 0$ найден номер n_0 такой, что $\mu\{x \in A : |f_n(x)g(x) - f(x)g(x)| \geq \sigma\} < \varepsilon$ при $n \geq n_0$, т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu\{x \in A : |f_n(x)g(x) - f(x)g(x)| \geq \sigma\} = 0$.

21. Пусть μ_1 — мера Лебега на числовой прямой $\mathbb{R}$, а μ_2 — мера Лебега на плоскости $\mathbb{R}^2$. Вычислить интегралы Лебега:

$$1) \int_{[-3;3]} \operatorname{sign} \cos \pi x d\mu_1; \quad 2) \int_{(0;1]} \operatorname{sign} \sin \frac{\pi}{x} d\mu_1;$$

$$3) \iint_{[0;2] \times [0;2]} [x+y] d\mu_2; \quad 4) \iint_{x^2 \leq y \leq 4} \sqrt{y-x^2} d\mu_2.$$

Решение. 1) Функция $f(x) = \operatorname{sign} \cos \pi x$, $x \in [-3; 3]$, является простой, принимающей три значения: 1, -1 и 0. А именно, эта функция равна 1 на μ_1 -измеримом множестве $A_1 = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right) \cup \left(-\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right)$, равна -1 на μ_1 -измеримом множестве $A_{-1} = \left(-3; -\frac{5}{2}\right) \cup \left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2}; 3\right)$ и равна 0 на множестве $A_0 = \left\{-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right\}$. Поэтому f μ_1 -измерима и, очевидно, ограничена.

Следовательно, эта функция интегрируема и по определению

$$\begin{aligned} \int_{[-3;3]} \operatorname{sign} \cos \pi x d\mu_1 &= 1 \cdot \mu_1(A_1) + (-1) \mu_1(A_{-1}) + 0 \cdot \mu_1(A_0) = \\ &= 3 - 3 = 0. \end{aligned}$$

2) Рассматриваемая функция $f(x) = \operatorname{sign} \sin \frac{\pi}{x}$, $x \in (0; 1]$, также является простой, принимающей три значения: 1, -1 и 0. А именно, $f(x) = 1$ на множестве $A_1 = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k+1}; \frac{1}{2k}\right)$, $f(x) = -1$ на множестве $A_{-1} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k}; \frac{1}{2k-1}\right)$ и $f(x) = 0$ на множестве $A_0 = \left\{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{k}, \dots\right\}$. Множества A_1 и A_{-1} открыты, а потому μ_1 -измеримы. Кроме того, $\mu_1(A_1) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1}\right) = 1 - \ln 2$ и $\mu_1(A_{-1}) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) = \ln 2$ (при вычислении этих сумм мы воспользовались равенством $\ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$).

Счетное множество A_0 также μ_1 -измеримо и $\mu_1(A_0) = 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{(0;1]} \operatorname{sign} \sin \frac{\pi}{x} d\mu_1 &= 1 \cdot \mu_1(A_1) + (-1) \cdot \mu_1(A_{-1}) + 0 \cdot \mu_1(A_0) = \\ &= 1 - \ln 4. \end{aligned}$$

3) Функция $f(x, y) = [x + y]$, $(x, y) \in A = [0; 2] \times [0; 2]$, является простой, принимающей значения 0, 1, 2, 3 и 4. Положим $A_0 = \{(x, y) \in A : x + y < 1\}$. Тогда в каждой точке (x, y) этого μ_2 -измеримого множества $f(x, y) = 0$. В точках μ_2 -измеримого множества $A_1 = \{(x, y) \in A : 1 \leq x + y < 2\}$, очевидно, $f(x, y) = 1$, а в каждой точке (x, y) μ_2 -измеримого множества $A_2 = \{(x, y) \in A : 2 \leq x + y < 3\}$ $f(x, y) = 2$. Если рассмотреть μ_2 -измеримое множество $A_3 = \{(x, y) \in A : 3 \leq x + y < 4\}$, то $f(x, y) = 3$ в произвольной точке $(x, y) \in A_3$. Наконец, $f(2, 2) = 4$. Поэтому функция f является простой и интегрируемой, а

$$\int_A [x + y] d\mu_2 = 0 \cdot \mu_2(A_0) + 1 \cdot \mu_2(A_1) + 2 \cdot \mu_2(A_2) + 3 \cdot \mu_2(A_3) + 4 \cdot \mu_2(\{(2, 2)\}) = \frac{3}{2} + 2 \cdot \frac{3}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} = 6.$$

4) В этом случае функция $f(x, y) = \sqrt{[y - x^2]}$, $(x, y) \in A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 4\}$, также является простой. А именно, в каждой точке (x, y) μ_2 -измеримого множества $A_0 = \{(x, y) \in A : x^2 \leq y < x^2 + 1\}$ $f(x, y) = 0$. На μ_2 -измеримом множестве $A_1 = \{(x, y) \in A : x^2 + 1 \leq y < x^2 + 2\}$ функция f постоянна и равна 1, на множестве $A_2 = \{(x, y) \in A : x^2 + 2 \leq y < x^2 + 3\}$ — $f(x, y) = \sqrt{2}$, в каждой точке (x, y) множества $A_3 = \{(x, y) \in A : x^2 + 3 \leq y < x^2 + 4\}$ — $f(x, y) = \sqrt{3}$, а $f(4, 0) = 2$. Поэтому функция f μ_2 -интегрируема на A и

$$\begin{aligned} \int_A \sqrt{[y - x^2]} d\mu_2 &= 0 \cdot \mu_2(A_0) + 1 \cdot \mu_2(A_1) + \sqrt{2} \cdot \mu_2(A_2) + \\ &+ \sqrt{3} \cdot \mu_2(A_3) + 4 \cdot \mu_2(\{(4, 0)\}) = \\ &= \mu_2(A_1) + \sqrt{2} \cdot \mu_2(A_2) + \sqrt{3} \cdot \mu_2(A_3) = \frac{4}{3} (4 - 3\sqrt{2} + 4\sqrt{3}). \end{aligned}$$

22. Рассмотрим на множестве $A = (0; 1]$ функцию f , которая на полуинтервале $A_k = \left(\frac{1}{k+1}; \frac{1}{k}\right]$ принимает значение $\frac{(-1)^k}{k^\alpha}$, где $k = 1, 2, \dots$. При каких α она будет интегрируемой по Лебегу на $(0; 1]$ относительно меры μ_1 ?

Решение. Функция f является простой на множестве A , поскольку она принимает счетное число значений $\frac{(-1)^k}{k^\alpha}$, $k \in \mathbb{N}$, и $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = (0; 1]$. Так как все множества A_k μ_1 -измеримы, то f так же μ_1 -измерима. Согласно определению, функция f будет μ_1 -интегрируемой на A , если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \mu_1(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha+1}(k+1)}$. Этот ряд сходится тогда и только тогда, когда $\alpha > -1$. Таким образом, заданная функция f интегрируема по Лебегу лишь при $\alpha > -1$ и

$$\int_{(0;1]} f(x) d\mu_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^{\alpha+1}(k+1)}. \quad (8)$$

Отметим, что ряд (8) сходится (условно) и при $\alpha = -1$, но (по определению) в этом случае функция f не является интегрируемой по Лебегу.

23. Пусть функция $\mathcal{F}(x) = 0$, если $x \leq -1$, $\mathcal{F}(x) = 1$, если $-1 < x \leq 1$, $\mathcal{F}(x) = 3$, если $x > 1$ и $\mu_{\mathcal{F}}$ — соответствующая ей мера Лебега — Стильеса на $\mathbb{R}$. Доказать, что произвольная функция $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, интегрируема на $\mathbb{R}$ относительно $\mu_{\mathcal{F}}$ и что $\int_{\mathbb{R}} f(x) d\mu_{\mathcal{F}} = f(-1) + 2f(1)$.

Решение. Отметим, что все подмножества числовой оси $\mathbb{R}$ являются $\mu_{\mathcal{F}}$ -измеримыми (см. § 2) и поэтому каждая функция $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $\mu_{\mathcal{F}}$ -измерима. Для доказательства $\mu_{\mathcal{F}}$ -интегрируемости на $\mathbb{R}$ функции f представим $\mathbb{R}$ в виде объединения непересекающихся измеримых множеств

$$\mathbb{R} = (-\infty; -1) \cup \{-1\} \cup (-1; 1) \cup \{1\} \cup (1; +\infty).$$

Известно, что множества $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ и $(1; +\infty)$ имеют $\mu_{\mathcal{F}}$ -меру нуль, а тогда каждая функция f $\mu_{\mathcal{F}}$ -интегрируема на них и интеграл по каждому этому множеству равен нулю. На множествах $\{-1\}$ и $\{1\}$ функция f постоянна. Поэтому она $\mu_{\mathcal{F}}$ -интегрируема на них и

$$\int_{\{-1\}} f(x) d\mu_{\mathcal{F}} = f(-1) \mu_{\mathcal{F}}(\{-1\}) = f(-1),$$

$$\int_{\{1\}} f(x) d\mu_{\mathcal{F}} = f(1) \mu_{\mathcal{F}}(\{1\}) = 2f(1).$$

Следовательно, произвольная функция $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $\mu_{\mathcal{F}}$ -интегрируема на $\mathbb{R}$ и $\int_{\mathbb{R}} f(x) d\mu_{\mathcal{F}} = f(-1) + 2f(1)$.

24. Исходя из определения интеграла Лебега, вычислить $\int_{[0;1]} x \chi_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}(x) d\mu_1$, где $\chi_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$ — характеристическая функция множества $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Решение. Построим для μ_1 -измеримой функции $f(x) = x \chi_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}(x)$, $x \in [0; 1]$, последовательность простых интегрируемых функций, равномерно сходящуюся на $[0; 1]$ к f . А именно, для натурального номера n положим $h_n(x) = \frac{k}{n}$ на множестве $A_k = \left\{x \in [0, 1] : \frac{k}{n} \leq f(x) < \frac{k+1}{n}\right\}$, где $k = 0, 1, \dots, n-1$. Тогда последовательность $(h_n(x))_{n=1}^{\infty}$, $x \in [0; 1]$, является искомой последовательностью простых интегрируемых функций. Кроме того, поскольку $\bigcup_{k=0}^{n-1} A_k = [0; 1]$, то $|f(x) - h_n(x)| < \frac{1}{n}$ для каждого $x \in [0; 1]$. Следовательно, последовательность $(h_n(x))_{n=1}^{\infty}$, $x \in [0; 1]$, равномерно сходится к $f(x)$ на $[0; 1]$. Поэтому по определению 1 функция f μ_1 -интегрируема

на $[0; 1]$ и

$$\int_{[0;1]} f(x) d\mu_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0;1]} h_n(x) d\mu_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} \mu_1(A_k).$$

Поскольку множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел имеет μ_1 -меру нуль, то $\mu_1(A_k) = \mu_1\left\{x \in [0; 1] : \frac{k}{n} \leq x < \frac{k+1}{n}\right\} = \frac{1}{n}$.

Тогда

$$\int_{[0;1]} f(x) d\mu_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)n}{2n^2} = \frac{1}{2}.$$

Замечание 1. Укажем другой способ вычисления этого интеграла Лебега. Во-первых, поскольку функция f ограничена на $[0, 1]$ и μ_1 -измерима, то она μ_1 -интегрируема. Во-вторых, функция f почти всюду в смысле меры μ_1 совпадает на $[0, 1]$ с функцией $g(x) = x$. Тогда, согласно соответствующему свойству интеграла Лебега, имеем

$$\int_{[0;1]} x \cdot \chi_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}(x) d\mu_1 = \int_{[0;1]} x d\mu_1.$$

Но функция g непрерывна на отрезке $[0, 1]$. Поэтому ее интеграл Лебега по мере μ_1 совпадает с интегралом Римана на $[0; 1]$

$$\int_{[0;1]} x \cdot \chi_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}(x) d\mu_1 = \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Замечание 2. Заданная функция $f(x) = x \cdot \chi_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}(x)$, $x \in [0; 1]$, разрывна в каждой точке полуинтервала $(0; 1]$ и поскольку $\mu_1([0; 1]) = 1 \neq 0$, то на основании теоремы 14 заключаем, что f не является интегрируемой по Риману на $[0; 1]$.

25. Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — измеримое пространство конечной меры, т. е. $\mu(X) < +\infty$. Доказать, что μ -измеримая функция $y = f(x)$, $x \in X$, μ -интегрируема на X тогда и только тогда, когда сходится ряд
$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \mu\{x \in X : k \leq |f(x)| < k+1\}.$$

Решение. Введем в рассмотрение μ -измеримые множества $A_k = \{x \in X : k \leq |f(x)| < k+1\}$ и простую измеримую функцию h , принимающую на множестве A_k значение k , $k \in \mathbb{N}$.

Пусть функция f интегрируема относительно меры μ на X . Поскольку для каждого $x \in X$ $0 \leq h(x) \leq |f(x)|$, то на основании свойства б) интеграла Лебега функция h μ -интегрируема. Поэтому сходится ряд
$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \mu\{x \in X : k \leq |f(x)| < k+1\}.$$

Обратно, если сходится этот ряд, то функция h μ -интегрируема на X , и поэтому из неравенства $|f(x)| \leq h(x) + 1$ ($\forall x \in X$) следует μ -интегрируемость на X функции f .

26. Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — измеримое пространство конечной меры и $y = f(x)$, $x \in X$, — μ -интегрируемая функция на X . Доказать, что

$$\int_X f(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{k}{n} \mu\left\{x \in X : \frac{k}{n} \leq f(x) < \frac{k+1}{n}\right\}.$$

Решение. Пусть $A_k = \left\{ x \in X : \frac{k}{n} \leq f(x) < \frac{k+1}{n} \right\}, k \in \mathbb{Z},$ — μ -измеримые множества, а $(h_n(x))_{n=1}^{\infty}, x \in X,$ — последовательность простых μ -измеримых функций, принимающих на множестве A_k значения $\frac{k}{n}$, где $n \in \mathbb{N}$. Тогда для каждого $x \in X$ и каждого $n \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства $h_n(x) \leq f(x) \leq h_n(x) + \frac{1}{n}$, позволяющие заключить, что все h_n — μ -интегрируемые функции на X . Кроме того, из этих неравенств следует равномерная сходимость последовательности $(h_n(x))_{n=1}^{\infty}$ к функции $f(x)$ на X . Поэтому на основании определения 1

$$\int_X f(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X h_n(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{k}{n} \mu \left\{ x \in X : \frac{k}{n} \leq f(x) < \frac{k+1}{n} \right\}.$$

27. Интегрируема ли по Риману функция

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x \in \mathbb{Q}, \\ x^2, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

на отрезке $[0; 1]$? Интегрируема ли она по Лебегу на $[0; 1]$ относительно меры Лебега μ_1 ? Если f интегрируема по Лебегу, то найти ее интеграл.

Решение. Докажем, что функция f не является интегрируемой по Риману на $[0; 1]$. Для этого рассмотрим произвольное разбиение $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < x_n = 1$ отрезка $[0; 1]$ и пусть $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, $\lambda = \max_{0 \leq k \leq n-1} \Delta x_k$. В качестве отмеченных точек $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) вначале рассмотрим рациональные точки. Тогда соответствующая интегральная сумма функции f равна $\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k^3 \Delta x_k$. Эту интегральную сумму можно считать интегральной суммой для непрерывной функции $y = x^3, x \in [0; 1]$, и поэтому $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{4}$.

Если же в качестве отмеченных точек $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) взять иррациональные точки, то соответствующая интегральная сумма функции f равна $\sigma' = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k^2 \Delta x_k$. Полученную интегральную сумму также интерпретируем как интегральную сумму непрерывной функции $y = x^2, x \in [0; 1]$, и поэтому $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma' = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.

Таким образом, предел интегральных сумм функции f зависит от выбора отмеченных точек. Следовательно, f не является интегрируемой по Риману.

Замечание. То, что функция f неинтегрируема по Риману, можно доказать и с помощью теоремы 14. Для этого мы убеждаемся, что f непрерывна только в точках

$x = 0$ и $x = 1$. Поэтому множество точек разрыва этой функции имеет μ_1 -меру, равную единице. Следовательно, функция f не является интегрируемой по Риману.

Рассматриваемая функция f почти всюду (относительно меры Лебега μ_1) совпадает на $[0; 1]$ с непрерывной функцией $y = x^2$, и поэтому f μ_1 -измерима. Кроме того, функция f ограничена. Тогда f интегрируема по Лебегу на $[0; 1]$. Кстати, интегрируемость функции f можно получить также из того, что f эквивалентна интегрируемой по Риману (даже непрерывной) функции $y = x^2$.

Используя эквивалентность функций $y = f(x)$ и $y = x^2$ на отрезке $[0; 1]$ и то, что интегралы Римана и Лебега равны (для интегрируемой по Риману функции), имеем

$$\int_{[0;1]} f(x) d\mu_1 = \int_{[0;1]} x^2 d\mu_1 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

28. Пусть функция f интегрируема по Лебегу на отрезке $[a; b]$ относительно меры Лебега μ_1 . Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует такая непрерывная на $[a; b]$ функция g , что

$$\int_{[a;b]} |f(x) - g(x)| d\mu_1 < \varepsilon.$$

Доказать это утверждение.

Решение. 1) Рассмотрим вначале произвольную простую функцию h , интегрируемую по Лебегу относительно меры μ_1 на отрезке $[a; b]$. Мы хотим приблизить ее ограниченной простой функцией, т. е. для каждого $\varepsilon > 0$ построить такую ограниченную μ_1 -измеримую простую функцию $\tilde{h}$ на $[a; b]$, что $\int_{[a;b]} |h(x) - \tilde{h}(x)| d\mu_1 < \varepsilon$.

Если h принимает только конечное число значений, то в качестве $\tilde{h}$ возьмем h . Поэтому пусть h имеет счетное число значений $y_1, \dots, y_k, \dots$, принимаемых соответственно на μ_1 -измеримых множествах $A_1; \dots, A_k, \dots$, причем $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = [a; b]$. Согласно определению интегри-

руемости функции h , ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |y_k| \mu_1(A_k)$ сходится. Тогда для $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |y_k| \mu_1(A_k) < \varepsilon.$$

Поэтому рассмотрим μ_1 -измеримую простую функцию $\tilde{h}$, принимающую значения $y_1, \dots, y_N, 0$ соответственно на множествах $A_1, \dots, A_N, [a; b] \setminus \bigcup_{k=1}^N A_k$. Функция $\tilde{h}$ является ограниченной, а следовательно, и μ_1 -интегрируемой на $[a; b]$. Тогда

$$\int_{[a;b]} |h(x) - \tilde{h}(x)| d\mu_1 = \sum_{k=N+1}^{\infty} |y_k| \mu_1(A_k) < \varepsilon,$$

т. е. $\tilde{h}$ является искомой.

2) Для каждого $\varepsilon > 0$ найдем такую ограниченную μ_1 -измеримую функцию $y = \tilde{f}(x)$, $x \in [a; b]$, что

$$\int_{[a;b]} |f(x) - \tilde{f}(x)| d\mu_1 < \varepsilon.$$

Действительно, по определению 1 для заданного $\varepsilon > 0$ существует простая μ_1 -интегрируемая на $[a; b]$ функция h такая, что $\int_{[a;b]} |f(x) - h(x)| d\mu_1 < \frac{\varepsilon}{2}$. Согласно предыдущему, для функции h построим ограниченную μ_1 -интегрируемую (простую) на $[a; b]$ функцию $\tilde{f}$ такую, что $\int_{[a;b]} |h(x) - \tilde{f}(x)| d\mu_1 < \frac{\varepsilon}{2}$.

Тогда

$$\int_{[a;b]} |f(x) - \tilde{f}(x)| d\mu_1 \leq \int_{[a;b]} |f(x) - h(x)| d\mu_1 + \int_{[a;b]} |h(x) - \tilde{f}(x)| d\mu_1 < \varepsilon,$$

т. е. функция $\tilde{f}$ является искомой.

3) После этих подготовительных рассуждений можно завершить решение примера. Для заданного $\varepsilon > 0$ найдем такую ограниченную μ_1 -измеримую на $[a; b]$ функцию $\tilde{f}$, что

$$\int_{[a;b]} |f(x) - \tilde{f}(x)| d\mu_1 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть K — такое положительное число, что $|\tilde{f}(x)| \leq K$ для всех $x \in [a; b]$. По теореме Лузина существует такая непрерывная на $[a; b]$ функция g (даже ограниченная той же постоянной K , что и $\tilde{f}$), что $\mu_1(A) = \mu_1\{x \in [a; b] : \tilde{f}(x) \neq g(x)\} < \frac{\varepsilon}{4K}$. Покажем, что найденная функция g является искомой. Действительно,

$$\begin{aligned} \int_{[a;b]} |f(x) - g(x)| d\mu_1 &\leq \int_{[a;b]} |f(x) - \tilde{f}(x)| d\mu_1 + \int_{[a;b]} |\tilde{f}(x) - g(x)| d\mu_1 < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \int_A |\tilde{f}(x) - g(x)| d\mu_1 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4K} \cdot 2K = \varepsilon. \end{aligned}$$

29. 1) Пусть на конечном полуинтервале $[a; b)$ задана непрерывная функция $y = f(x)$, причем $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \infty$. Доказать, что функция f интегрируема по Лебегу на $[a; b]$ относительно меры Лебега μ_1 тогда и только тогда, когда сходится несобственный интеграл $\int_a^b |f(x)| dx$.

В случае интегрируемости f по Лебегу на $[a; b]$ справедливо равенство

$$\int_{[a;b]} f(x) d\mu_1 = \int_a^b f(x) dx.$$

2) При каких $\alpha < 0$ и β функция $y = \frac{\sin x^\alpha}{x^\beta}$ μ_1 -интегрируема на отрезке $[0; 1]$ и когда сходится $\int_0^1 \frac{\sin x^\alpha}{x^\beta} dx$?

Решение. 1) Пусть вначале функция f μ_1 -интегрируема по Лебегу на $[a; b]$. Тогда функция $|f|$ также μ_1 -интегрируема на $[a; b]$. Построим последовательность функций $(g_n(x))_{n=1}^\infty$, $x \in [a; b]$, где

$$g_n(x) = \begin{cases} |f(x)|, & x \in \left[a; b - \frac{1}{n}\right], \\ 0, & x \in \left(b - \frac{1}{n}; b\right]. \end{cases}$$

Эта последовательность сходится почти всюду на $[a; b]$ (относительно меры μ_1) к функции $|f|$. Каждая функция $g_n(x)$ почти всюду непрерывна и поэтому интегрируема на $[a; b]$ по Риману и Лебегу. Кроме того, справедливо равенство

$$\int_{[a; b]} g_n(x) d\mu_1 = \int_a^{b - \frac{1}{n}} g_n(x) dx = \int_a^{b - \frac{1}{n}} |f(x)| dx.$$

Поскольку $|g_n(x)| \leq |f(x)|$ для всех $x \in [a; b]$, т. е. $|f(x)|$ является интегрируемой мажорантой для последовательности $(g_n(x))_{n=1}^\infty$, то на основании теоремы Лебега о предельном переходе имеем

$$\int_{[a; b]} |f(x)| d\mu_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a; b]} g_n(x) d\mu_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{b - \frac{1}{n}} |f(x)| dx = \int_a^b |f(x)| dx.$$

Таким образом, функция f абсолютно интегрируема на $[a; b]$ в смысле несобственного интеграла второго рода.

Пусть f абсолютно интегрируема на $[a; b]$, т. е. сходится интеграл $\int_a^b |f(x)| dx$. Рассмотрим ту же последовательность функций $(g_n(x))_{n=1}^\infty$, $x \in [a; b]$, каждая из которых интегрируема (и в смысле Лебега и в смысле Римана) на $[a; b]$. Эта последовательность является монотонно неубывающей в каждой точке отрезка $[a; b]$, $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = |f(x)|$, $x \in [a; b]$, и

$$\int_{[a; b]} g_n(x) d\mu_1 = \int_a^{b - \frac{1}{n}} |f(x)| dx \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Поэтому на основании теоремы Леви функция $|f|$ μ_1 -интегрируема на $[a; b]$. Тогда и функция f является μ_1 -интегрируемой.

Пусть функция f интегрируема по Лебегу на $[a; b]$. Для каждого

$n \in \mathbb{N}$ рассмотрим функцию

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \left[a; b - \frac{1}{n}\right], \\ 0, & x \in \left(b - \frac{1}{n}, b\right]. \end{cases}$$

Из неравенства $|f_n(x)| \leq |f(x)|$, справедливого для каждого $x \in [a; b]$, следует интегрируемость произвольной функции последовательности $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$. Наконец, поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, $x \in [a; b]$, то из теоремы 10 имеем

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{b - \frac{1}{n}} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a; b]} f_n(x) d\mu_1 = \int_{[a; b]} f(x) d\mu_1.$$

Замечание 1. Таким образом, из доказанного утверждения следует, что интегрируемость по Лебегу на $[a; b]$ функции f равносильна абсолютной сходимости несобственного интеграла $\int_a^b f(x) dx$. Но несобственный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ может сходиться и условно. Поэтому класс несобственно интегрируемых на $[a; b]$ функций содержит класс $L([a; b], \mu_1)$.

Замечание 2. Аналогичное утверждение справедливо и для несобственного интеграла первого рода вида $\int_a^{+\infty} f(x) dx$.

2) Для решения этого примера используем доказанное утверждение. Исследуем на абсолютную и условную сходимость интеграл $\int_0^1 \frac{\sin x^\alpha}{x^\beta} dx$. Сделаем в этом интеграле замену $x^\alpha = t$, которая при-

ведет к интегралу $\frac{1}{\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\frac{\beta-1}{\alpha} + 1}} dt$. Легко показать, что этот ин-

теграл сходится абсолютно при условии $\frac{\beta-1}{\alpha} + 1 > 1$, т. е. $\beta < 1$. Если же речь идет об условной сходимости, то, используя признак Дирихле, получаем, что данный интеграл сходится условно только при $\frac{\beta-1}{\alpha} + 1 > 0$, т. е. $\beta + \alpha - 1 < 0$.

Таким образом, функция $y = \frac{\sin x^\alpha}{x^\beta}$ μ_1 -интегрируема на $[0; 1]$ лишь для $\beta < 1$. Вместе с тем она интегрируема в несобственном смысле, если $\beta + \alpha - 1 < 0$.

30. Пусть $y = f(x)$, $x \geq 0$, — неотрицательная μ_1 -измеримая функция и существует такое положительное число K , что для произвольного $\alpha > 0$

$$\int_{[0; +\infty)} \frac{\sin^2 \alpha x}{\alpha^2 x} f(x) d\mu_1 \leq K.$$

Доказать, что функция $y = xf(x)$, $x \geq 0$, μ_1 -интегрируема на $[0; +\infty)$.

Решение. Рассмотрим последовательность μ_1 -интегрируемых (по условию) на $[0; +\infty)$ функций
$$\left(f_n(x) = \frac{\sin^2 \frac{x}{n}}{\frac{x}{n^2}} f(x) \right)_{n=1}^{\infty}.$$

Тогда для каждой точки $x \in [0; +\infty)$ $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = xf(x)$. Кроме того, $\int_{[0; +\infty)} f_n(x) d\mu_1 \leq K$. Следовательно, на основании теоремы Фату функция $y = xf(x)$, $x \geq 0$, μ_1 -интегрируема и $\int_{[0; +\infty)} xf(x) d\mu_1 \leq K$.

31. Пусть μ_1 и μ_2 — меры Лебега соответственно на числовой оси $\mathbb{R}$ и плоскости $\mathbb{R}^2$. Найти пределы:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} n \sin \frac{|x|}{n} \cdot (1+x^4)^{-1} d\mu_1;$$

$$2) \lim_{t \rightarrow 0} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \cos(xyt) \cdot \chi_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}(x) d\mu_2.$$

Решение. 1) Рассмотрим функциональную последовательность $f_n(x) = n \sin \frac{|x|}{n} \cdot (1+x^4)^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$, на множестве $x \in \mathbb{R}$. Для каждого $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sin \frac{|x|}{n}}{1+x^4} = \frac{|x|}{1+x^4} = f(x).$$

Кроме того, эта функциональная последовательность имеет мажоранту $|f_n(x)| \leq \frac{|x|}{1+x^4} = g(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R})$.

Неотрицательная функция g интегрируема на $\mathbb{R}$ в несобственном смысле. Поэтому (см. пример 29) она μ_1 -интегрируема на $\mathbb{R}$. Следовательно, по теореме Лебега f также μ_1 -интегрируема по Лебегу на $\mathbb{R}$ и справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} n \sin \frac{|x|}{n} \cdot (1+x^4)^{-1} d\mu_1 = \int_{\mathbb{R}} \frac{|x|}{1+x^4} d\mu_1 = \arctg x^2 \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

2) Вначале отметим, что $\chi_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}(x) = 1$ почти всюду в смысле меры Лебега μ_1 на $\mathbb{R}^1$. Поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \cos(xyt) \cdot \chi_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}(x) d\mu_2 &= \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \cos(xyt) d\mu_2. \end{aligned}$$

Рассмотрим произвольную последовательность $(t_n)_{n=1}^{\infty}$, сходящуюся к нулю. Пусть для каждого натурального n

$$f_n(x, y) = e^{-(x^2+y^2)} \cos(xyt_n), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x, y) = e^{-(x^2+y^2)} \equiv f(x, y)$ для каждой точки $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Для этой последовательности также имеется μ_2 -интегрируемая мажоранта: $|f_n(x, y)| \leq f(x, y)$ ($\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$). Поэтому по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \cos(xyt_n) d\mu_2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} d\mu_2 = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

В последнем интеграле перейдем к полярным координатам $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, где $r \geq 0$ и $\varphi \in [0; 2\pi]$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \cos(xyt_n) d\mu_2 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr = \pi.$$

Поскольку $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность, сходящаяся к нулю, то

$$\lim_{t \rightarrow 0} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \cos(xyt) \cdot \chi_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}(x) d\mu_2 = \pi.$$

32. Пусть функция $f(x, y)$ задана на прямоугольнике $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$ формулой $f(x, y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}$, если $x^2 + y^2 > 0$, и $f(0, 0) = 0$. Доказать, что существуют оба повторных интеграла

$$\int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 f(x, y) dx \right) dy, \quad \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 f(x, y) dy \right) dx$$

и величины их совпадают, но двойной интеграл $\iint_P f(x, y) dx dy$ не существует.

Решение. При каждом фиксированном $y \in [-1; 1]$ функция $f(x, y)$ является непрерывной функцией относительно переменной x на отрезке $[-1; 1]$. Поэтому существует интеграл

$$\mathcal{J}(y) = \int_{-1}^1 \frac{xy dx}{(x^2 + y^2)^2} \quad (y \in [-1; 1]).$$

Кроме того, этот интеграл равен нулю, поскольку подынтегральная функция нечетна. Таким образом, $\mathcal{J}(y) = 0$ для каждого y , принадлежащего отрезку $[-1; 1]$, функция $\mathcal{J}$ интегрируема на $[-1; 1]$ и

$$\int_{-1}^1 \mathcal{J}(y) dy = \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 \frac{xy dx}{(x^2 + y^2)^2} \right) dy = 0.$$

Аналогично убеждаемся в том, что

$$\int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 \frac{xy dy}{(x^2 + y^2)^2} \right) dx = 0,$$

и, следовательно, повторные интегралы от функции f существуют и их величины совпадают.

Покажем, что f не является интегрируемой по Лебегу на прямоугольнике P , как функция двух переменных. Действительно, если допустить, что f интегрируема на P , то согласно свойствам интеграла Лебега она интегрируема также на квадрате $[0; 1] \times [0; 1]$, т. е. имеет

смысл двойной интеграл
$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{xy dx dy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Тогда на основании теоремы Фубини существует повторный интеграл
$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{xy dx}{(x^2 + y^2)^2} \right) dy.$$

Однако

$$\varphi(y) = \int_0^1 \frac{xy dx}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{1}{2y} - \frac{y}{2(y^2 + 1)}, \quad 0 < y \leq 1,$$

а функция $\varphi(y) = \frac{1}{2y(y^2 + 1)}$, $0 < y \leq 1$, не является интегрируемой на отрезке $[0; 1]$. Полученное противоречие доказывает, что f неинтегрируема на P .

Замечание. Можно доказать, что функция f неинтегрируема на P и другим путем. Допустим, что f интегрируема на P . Тогда на основании свойств интеграла Лебега существует также двойной интеграл

$$\mathcal{I} = \iint_{\mathcal{D}} \frac{xy dx dy}{(x^2 + y^2)^2},$$

где $\mathcal{D}$ — четверть некоторого круга $x^2 + y^2 \leq \varepsilon^2$, содержащегося в P . Как отмечалось выше, этот интеграл от неотрицательной функции f совпадает с несобственным интегралом

$$\iint_{\substack{x^2 + y^2 \leq \varepsilon^2 \\ x, y \geq 0}} \frac{xy dx dy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

В последнем интеграле перейдем к полярным координатам $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $0 \leq r \leq \varepsilon$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Тогда

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2} \int_0^{\varepsilon} \frac{dr}{r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\varepsilon} \frac{dr}{r}.$$

Поскольку интеграл $\int_0^{\varepsilon} \frac{dr}{r}$ расходящийся, то это противоречит допущению о конечности величины $\mathcal{I}$. Следовательно, функция f неинтегрируема на P .

33. Пусть $f(x, y)$ — измеримая неотрицательная функция, заданная на прямоугольнике $P = [a; b] \times [c; d]$ плоскости $\mathbb{R}^2$. Доказать, что если конечен один из повторных интегралов

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx, \quad \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy,$$

то f интегрируема на P и поэтому существует другой повторный интеграл, причем

$$\iint_P f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Решение. Допустим, что существует первый из указанных выше повторных интегралов. Рассмотрим последовательность $(f_N(x, y))_{N=1}^{\infty}$ срезов функции f

$$f_N(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{если } f(x, y) \leq N, \\ N, & \text{если } f(x, y) > N. \end{cases}$$

Функции $f_N(x, y)$ являются, очевидно, ограниченными и измеримыми на прямоугольнике P . Поэтому они интегрируемы на P .

Доказательство сформулированного утверждения проведем от противного, т. е. будем считать, что функция f неинтегрируема на P .

Тогда $\lim_{N \rightarrow \infty} \iint_P f_N(x, y) dx dy = +\infty$ (иначе по теореме Беппо — Леви f была бы интегрируемой на P). Поэтому для достаточно больших N

$$\iint_P f_N(x, y) dx dy > \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

Но, согласно теореме Фубини, для функции $f_N(x, y)$

$$\iint_P f_N(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f_N(x, y) dy \right) dx.$$

Следовательно,

$$\int_a^b \left(\int_c^d f_N(x, y) dy \right) dx > \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

Последнее неравенство не является истинным, поскольку $f_N(x, y) \leq f(x, y)$ в каждой точке $(x, y) \in P$, а полученное противоречие позволяет заключить, что функция f интегрируема на P .

34. Пусть s — множество всех вещественных последовательностей $x = (\xi_1, \dots, \xi_k, \dots)$ и ω — каноническая гауссова мера на s . Вычислить интеграл $\int_s f(x) d\omega$, если:

$$1) f(x) = \exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k^2}{k}\right), \quad x \in s; \quad 2) f(x) = \exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k^2}{k^2}\right), \quad x \in s.$$

Решение. 1) Отметим, что функция f определена на всем множестве s (если точка $x \in s$ такая, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k^2}{k}$ расходится, то полагаем $f(x) = 0$). Рассмотрим последовательность цилиндрических функций $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$, где $f_n(x) = \exp\left(-\sum_{k=1}^n \frac{\xi_k^2}{k}\right)$, $x \in s$. Каждая из функций $f_n(x)$ является непрерывной функцией n переменных $\xi_1, \dots, \xi_n$ и поэтому ω -измерима. Кроме того, поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ в каждой точке $x \in s$, то f также ω -измерима. Для последовательности $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ ω -интегрируемой мажорантой может служить, например, функция $\varphi(x) = 1$, $x \in s$. Поэтому по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла имеем

$$\int_s f(x) d\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_s f_n(x) d\omega.$$

Вычислим интеграл

$$\int_s f_n(x) d\omega = \frac{1}{V \pi^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\sum_{k=1}^n \frac{\xi_k^2}{k}\right) \exp\left(-\sum_{k=1}^n \xi_k^2\right) d\xi_1 \dots d\xi_n.$$

По теореме Фубини

$$\int_s f_n(x) d\omega = \prod_{k=1}^n \frac{1}{V \pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{k+1}{k} \xi_k^2\right) d\xi_k = \frac{1}{V \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)},$$

и поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_s f_n(x) d\omega = \frac{1}{V \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)}.$$

Поскольку ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ расходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right) = +\infty$, и, следовательно, $\int_s f(x) d\omega = 0$.

Замечание. Поскольку функция f положительна на множестве $A = \left\{x = (\xi_1, \dots, \xi_k, \dots) \in s : \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k^2}{k} < +\infty\right\}$ и $f(x) = 0$, если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k^2}{k}$ расходится, то $\omega(A) = 0$, т. е. для почти всех $x \in s$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k^2}{k}$ расходится.

2) Как и в случае 1), если положить для $n \in \mathbb{N}$ $f_n(x) = \exp\left(-\sum_{k=1}^n \frac{\xi_k^2}{k^2}\right)$, $x \in s$, то, согласно теореме Лебега,

$$\int_s f(x) d\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_s f_n(x) d\omega.$$

Далее,

$$\int_s f_n(x) d\omega = \prod_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\left(1 + \frac{1}{k^2}\right) \xi_k^2\right) d\xi_k = \frac{1}{\sqrt{\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)}},$$

и поэтому

$$\int_s f(x) d\omega = \left(\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)\right)^{-\frac{1}{2}},$$

поскольку бесконечное произведение $\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$ сходится.

35. Пусть $C_0[0; \pi]$ — совокупность всех непрерывных функций $x = x(t)$, $0 \leq t \leq \pi$, удовлетворяющих условию $x(0) = 0$, а μ_w — σ -аддитивная мера Винера на $C_0[0; \pi]$. Доказать, что

$$\int_{C_0[0; \pi]} x(\tau) x(s) d\mu_w = \frac{1}{2} \min(\tau, s),$$

где τ и s — фиксированные точки отрезка $[0; \pi]$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = x(\tau) x(s)$, заданную на множестве $C_0[0; \pi]$. Она является цилиндрической и поэтому μ_w -измеримой. Согласно определению, считая, например, $\tau < s$, имеем

$$\int_{C_0[0; \pi]} x(\tau) x(s) d\mu_w = \frac{1}{\sqrt{\pi^2 \tau (s - \tau)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_1 \xi_2 \exp\left(-\frac{\xi_1^2}{\tau} - \frac{(\xi_2 - \xi_1)^2}{s - \tau}\right) d\xi_1 d\xi_2.$$

Приведем двойной интеграл к повторному:

$$\int_{C_0[0; \pi]} x(\tau) x(s) d\mu_w = \frac{1}{\pi \sqrt{\tau (s - \tau)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_1 e^{-\frac{\xi_1^2}{\tau}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \xi_2 e^{-\frac{(\xi_2 - \xi_1)^2}{s - \tau}} d\xi_2 \right) d\xi_1.$$

Во внутреннем интеграле сделаем замену переменной, полагая $\frac{\xi_2 - \xi_1}{\sqrt{s - \tau}} = v$. Тогда

$$\int_{C_0[0; \pi]} x(\tau) x(s) d\mu_w = \frac{1}{\pi \sqrt{\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_1 e^{-\frac{\xi_1^2}{\tau}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (v \sqrt{s - \tau} + \xi_1) e^{-v^2} dv \right) d\xi_1.$$

Поскольку функция ve^{-v^2} является нечетной на $\mathbb{R}$, то $\int_{-\infty}^{+\infty} ve^{-v^2} dv = 0$.

Поэтому

$$\int_{C_0[0; \pi]} x(\tau) x(s) d\mu_w = \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_1^2 e^{-\frac{\xi_1^2}{\tau}} d\xi_1.$$

Для вычисления последнего интеграла применим метод интегрирования по частям, полагая $u = \xi_1$ и $\xi_1 \exp\left(-\frac{\xi_1^2}{\tau}\right) d\xi_1 = dv$. То

гда $du = d\xi_1$, $v = -\frac{\tau}{2} \exp\left(-\frac{\xi_1^2}{\tau}\right)$, и, следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{C_0[0; \pi]} x(\tau) x(s) d\mu_w &= -\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} \xi_1 \cdot \frac{\tau}{2} \exp\left(-\frac{\xi_1^2}{\tau}\right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau}{2} \exp\left(-\frac{\xi_1^2}{\tau}\right) d\xi_1 = \frac{\sqrt{\tau}}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\xi_1^2}{\tau}\right) d\xi_1. \end{aligned}$$

Замена переменной $z = \frac{\xi_1}{\sqrt{\tau}}$ приводит к окончательному результату

$$\int_{C_0[0; \pi]} x(\tau) x(s) d\mu_w = \frac{1}{2} \tau.$$

Если $\tau = s$, то непосредственно из определения получаем

$$\int_{C_0[0; \pi]} x^2(\tau) d\mu_w = \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_1^2 \exp\left(-\frac{\xi_1^2}{\tau}\right) d\xi_1,$$

и поэтому

$$\int_{C_0[0; \pi]} x^2(\tau) d\mu_w = \frac{1}{2} \tau.$$

Таким образом, для произвольных фиксированных точек τ и s из отрезка $[0; \pi]$ получаем

$$\int_{C_0[0; \pi]} x(\tau) x(s) d\mu_w = \frac{1}{2} \min(\tau, s).$$

36. Пусть $C_0[0; \pi]$ — совокупность всех непрерывных функций $x = x(t)$, $0 \leq t \leq \pi$, удовлетворяющих условию $x(0) = 0$, а μ_w — счетно-аддитивная мера Винера на $C_0[0; \pi]$. Вычислить интегралы:

$$1) \int_{C_0[0; \pi]} \left[\int_0^\pi x(t) dt \right] d\mu_w; \quad 2) \int_{C_0[0; \pi]} \left[\int_0^\pi x^2(t) dt \right] d\mu_w.$$

Решение. Первый способ. Прежде чем вычислять заданные интегралы, напомним некоторые свойства интеграла от непрерывных функций. Рассмотрим для произвольного натурального числа n раз-

биение Π_n отрезка $[0; \pi]$ на 2^n равных частей

$$0 = t_0 < t_1 = \frac{\pi}{2^n} < t_2 = \frac{2\pi}{2^n} < \dots < t_k = \frac{k\pi}{2^n} < \dots < t_{2^n} = \pi.$$

Положим для непрерывной функции $x = x(t)$, $0 \leq t \leq \pi$, $m_{k,n} = \min_{t \in [t_k; t_{k+1}]} x(t)$. Тогда, согласно теореме Вейерштрасса, на отрезке $[t_k; t_{k+1}]$ имеется такая точка $\tau_{k,n}$, что $m_{k,n} = x(\tau_{k,n})$ ($k = 0, 1, \dots, 2^n - 1$). Поэтому из свойств интеграла Римана вытекает, что

$$\int_0^\pi x(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} x(\tau_{k,n}).$$

Аналогично для непрерывной функции $x = x(t)$, $0 \leq t \leq \pi$, и рассмотренного выше разбиения Π_n существуют такие точки $\theta_{k,n} \in [t_k; t_{k+1}]$, что $\min_{t \in [t_k; t_{k+1}]} x^2(t) = x^2(\theta_{k,n})$, где $k = 0, 1, \dots, 2^n - 1$. Поэтому

$$\int_0^\pi x^2(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} x^2(\theta_{k,n}).$$

1) Введем функцию f и последовательность функций $(f_n)_{n=1}^\infty$, заданные на множестве $C_0[0; \pi]$ со значениями в $\mathbb{R}$, полагая

$$f(x) = \int_0^\pi x(t) dt, \quad f_n(x) = \frac{\pi}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} x(\tau_{k,n}) \quad (x = x(t) \in C_0[0; \pi]).$$

(Функции, определенные на абстрактных множествах со значениями в $\mathbb{R}$, называются функционалами, т. е. f и f_n — функционалы, заданные на $C_0[0; \pi]$.) Тогда, как мы только что отметили, для произвольной функции $x \in C_0[0; \pi]$ $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$. Кроме того, по свойствам сумм

Дарбу последовательность $(f_n)_{n=1}^\infty$, не убывая, стремится к f в каждой точке множества $C_0[0; \pi]$. Из определения меры Винера следует, что каждая функция f_n является μ_w -измеримой на $C_0[0; \pi]$, и поэтому таковой является и функция f .

Покажем, что каждая из функций f_n μ_w -интегрируема, и найдем ее интеграл Винера. Для этого докажем, что цилиндрическая функция $\varphi(x) = x(\tau)$, $x = x(t) \in C_0[0; \pi]$, где τ — некоторое фиксированное число из отрезка $[0; \pi]$, μ_w -интегрируема и $\int_{C_0[0; \pi]} \varphi(x) d\mu_w = 0$. Действительно, согласно определению интеграла Винера для $\tau > 0$,

$$\int_{C_0[0; \pi]} \varphi(x) d\mu_w = \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi \exp\left(-\frac{\xi^2}{\tau}\right) d\xi = 0,$$

поскольку функция $\xi \exp\left(-\frac{\xi^2}{\tau}\right)$, $\xi \in \mathbb{R}$, — нечетная. Если $\tau = 0$,

то $\varphi(x) = x(0) = 0$ для произвольной функции $x = x(t) \in C_0[0; \pi]$, и поэтому $\int_{C_0[0; \pi]} \varphi(x) d\mu_w = 0$. Но каждая функция f_n является цилиндрической, μ_w -интегрируемой и

$$\int_{C_0[0; \pi]} f_n(x) d\mu_w = \frac{\pi}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \int_{C_0[0; \pi]} x(\tau_{k,n}) d\mu_w = 0.$$

Поэтому по теореме Беппо Леви функция f также μ_w -интегрируема и

$$\int_{C_0[0; \pi]} f(x) d\mu_w = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_0[0; \pi]} f_n(x) d\mu_w = 0.$$

Отметим, что функция f не является цилиндрической.

2) Вычисление этого интеграла проведем аналогично предыдущему. А именно, рассмотрим функционалы

$$g(x) = \int_0^\pi x^2(t) dt, \quad g_n(x) = \frac{\pi}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} x^2(\theta_{k,n})$$

$$(x = x(t) \in C_0[0; \pi]; n \in \mathbb{N}),$$

заданные на множестве $C_0[0; \pi]$.

Как следует из примера 35, каждая из цилиндрических функций является μ_w -интегрируемой на $C_0[0; \pi]$ и

$$\int_{C_0[0; \pi]} g_n(x) d\mu_w = \frac{\pi}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{2} \theta_{k,n} \leq \frac{\pi^2}{2} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Последовательность $(g_n)_{n=1}^\infty$, очевидно, монотонно не убывая, сходится к функции g , и поэтому на основании теоремы Беппо Леви получаем, что g μ_w -интегрируема и

$$\begin{aligned} \int_{C_0[0; \pi]} g(x) d\mu_w &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_0[0; \pi]} g_n(x) d\mu_w = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{2^n-1} \theta_{k,n} = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \tau d\tau = \frac{\pi^2}{4}. \end{aligned}$$

Второй способ. Рассмотрим произведение $\mu_1 \otimes \mu_w$ счетно-аддитивных мер Лебега μ_1 на отрезке $[0; \pi]$ и меры Винера μ_w на множестве $C_0[0; \pi]$. Далее, вычисление заданных интегралов проводим на основании теоремы Тоннелли (проверку выполнимости ее условий предоставляем читателю).

В случае 1) получаем, что

$$\int_{C_0[0; \pi]} \left(\int_0^\pi x(t) dt \right) d\mu_w = \int_0^\pi \left(\int_{C_0[0; \pi]} x(t) d\mu_w \right) dt = 0,$$

поскольку при фиксированном $t \in [0; \pi]$ $\int_{C_0[0; \pi]} x(t) d\mu_w = 0$.

В случае 2), согласно примеру 35, имеем

$$\int_{C_0[0;\pi]} \left(\int_0^\pi x^2(t) dt \right) d\mu_w = \int_0^\pi \left(\int_{C_0[0;\pi]} x^2(t) d\mu_w \right) dt = \frac{1}{2} \int_0^\pi t dt = \frac{\pi^3}{4}.$$

Задачи для самостоятельной работы

1. Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — измеримое пространство. Доказать, что характеристическая функция $y = \chi_A(x)$ множества $A \subset X$ μ -измерима тогда и только тогда, когда $A \in \mathfrak{A}$.

2. Доказать, что каждая монотонная функция $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, является μ_1 -измеримой (даже борелевой).

3. Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — измеримое пространство, а $y = f(x)$ — функция, определенная на X . Обозначим $f_+(x) = \max(f(x), 0)$ и $f_-(x) = \max(-f(x), 0)$. Доказать, что функция f является μ -измеримой на X тогда и только тогда, когда функции f_+ и f_- μ -измеримы на X .

4. Пусть функция $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, дифференцируема на отрезке $[a; b] \subset \mathbb{R}$. Доказать, что функция f является μ_1 -измеримой (даже борелевой).

5. Пусть $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ — σ -алгебры подмножеств множества X и $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}_2$. Каково соотношение между классами $\mathfrak{A}_1$ -измеримых и $\mathfrak{A}_2$ -измеримых функций? (Функция называется $\mathfrak{A}$ -измеримой, если все ее лебеговы множества принадлежат алгебре $\mathfrak{A}$.)

6. Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — измеримое пространство, а $\mathcal{K}$ — некоторое подмножество μ -измеримых на X функций. Показать, что функции $f^*(x) = \sup_{f \in \mathcal{K}} f(x)$, $f_*(x) = \inf_{f \in \mathcal{K}} f(x)$, $x \in X$, не являются, вообще говоря, μ -измеримыми. Пусть $X = \mathbb{R}$, $\mu = \mu_1$ — мера Лебега, а $\mathcal{K} \subset C(\mathbb{R})$. Показать, что в этом случае функции f^* , f_* являются μ_1 -измеримыми (даже борелевыми).

7. Доказать, что функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ является μ_1 -измеримой на $\mathbb{R}$, если:

$$1) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{|x| + n}, \quad x \in \mathbb{R}; \quad 2) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n|x|^4)}{n\sqrt{n}}, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$3) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt[3]{n^4 + [x]^4}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

8. Доказать, что функция $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ является μ_2 -измеримой на $\mathbb{R}^2$, если:

$$1) f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n(x^2 + y^2))}{\sqrt{n^4[x^2 + y^2]}}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2;$$

$$2) f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} \operatorname{arctg}(n([x] + y)), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2;$$

$$3) f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos([x]^2 + [y])^n}{n^2}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

9. Доказать, что функция $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ является μ_2 -измеримой на $\mathbb{R}^2$, если:

$$1) f(x, y) = \operatorname{sign} \cos \pi(x^2 + y^2); \quad 2) f(x, y) = (x^2 + y^2)[x].$$

$$3) f(x, y) = (|x| + |y|)e^{[y]}; \quad 4) f(x, y) = \operatorname{arctg} \sin[x^2 + y^2];$$

$$5) f(x, y) = \operatorname{arctg}([x] \cos(x^2 + y^2));$$

$$6) f(x, y) = \frac{1}{2} \ln(1 + [x^2 + y^2]); \quad 7) f(x, y) = [x]^2 + [y]^3;$$

$$8) f(x, y) = \operatorname{ch} \sin([x] + [y]); \quad 9) f(x, y) = \cos \operatorname{sh}([x^2 + y^2]).$$

10. Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — измеримое пространство и $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ — последовательность функций, заданных на множестве X , причем все функции $f_n(x) = 0$ почти всюду на X относительно меры μ . Положим для каждого $x \in X$ $g_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, если ряд сходится, и $g_1(x) = +\infty$, если ряд расходится; $g_2(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$. Доказать, что $g_1(x) = 0$ и $g_2(x) = 0$ почти всюду относительно меры μ .

11. Пусть функции f и g заданы и непрерывны на μ_1 -измеримом множестве $A \subset \mathbb{R}$. Доказать, что если $f(x) = g(x)$ почти всюду относительно меры μ_1 на A , то для каждого $x \in A$ имеем $f(x) = g(x)$.

12. Определить такую непрерывную на $\mathbb{R}$ функцию g , что $g(x) = f(x)$ почти всюду относительно меры Лебега μ_1 , если:

- 1) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \end{cases}$ 2) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, & x \in \mathbb{Z}, \\ \pi, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}; \end{cases}$
- 3) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x^2 \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x^2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \end{cases}$ 4) $f(x) = \begin{cases} \ln(1 + |x|), & e^x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ \sin x^2, & e^x \in \mathbb{Q}; \end{cases}$
- 5) $f(x) = \begin{cases} \arcsin 2^{-|x|}, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}, \\ 2^{|x|}, & x \in \mathbb{N}; \end{cases}$ 6) $f(x) = \begin{cases} (\operatorname{ch} x)^{\operatorname{sh} x}, & e^x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \\ 0, & e^x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

13. Определить непрерывную на $\mathbb{R}^2$ функцию g такую, что $g(x, y) = f(x, y)$ почти всюду относительно меры Лебега μ_2 , если:

- 1) $f(x, y) = \begin{cases} x + y, & (x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, \\ x^2, & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}); \end{cases}$
- 2) $f(x, y) = \begin{cases} \sin x + \sin y, & (x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{R}, \\ \cos x, & (x, y) \notin \mathbb{Q} \times \mathbb{R}; \end{cases}$
- 3) $f(x, y) = \begin{cases} xy, & (x, y) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \times \mathbb{R}, \\ x + y, & (x, y) \notin (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \times \mathbb{R}; \end{cases}$
- 4) $f(x, y) = \begin{cases} [x] + [y], & (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Q}, \\ \operatorname{ch} x, & (x, y) \notin \mathbb{R} \times \mathbb{Q}. \end{cases}$

14. Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — измеримое пространство, $f_k: X \rightarrow \mathbb{R}$ — μ -измеримые функции, $k = 1, 2, \dots, n$. Доказать μ -измеримость на X следующих функций:

- 1) $\frac{f_1(x)}{\ln(2 + |f_2(x)|)}$; 2) $\max(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$;
- 3) $\min(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$; 4) $\frac{f_1(x)}{\operatorname{ch} f_2(x)}$;
- 5) $\sin(|f_1(x)| + |f_2(x)| + \dots + |f_n(x)|)$; 6) $(1 + |f_1(x)|)^{f_2(x)}$;
- 7) $\frac{f_1(x) \cdot f_2(x)}{1 + |\max(f_3(x), f_4(x))|}$; 8) $\frac{f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)}{10 + \operatorname{arctg} f_1(x)}$;
- 9) $\frac{\operatorname{sh} f_1(x)}{1 + |f_2(x)|}$; 10) $\frac{\operatorname{arctg} f_1(x)}{1 + |\max(f_3(x), f_4(x))|}$.

15. Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — измеримое пространство, $f_n, g_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ — μ -измеримые функции, $n \in \mathbb{N}$, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ — μ -измеримая функция. Доказать, что следующие множества μ -измеримы:

- 1) $\{x \in X : f_n(x) \geq 0, n \geq 1\}$; 2) $\{x \in X : f_n(x) \geq f(x), n \geq 1\}$;

- 3) $\{x \in X : \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) \neq f(x)\}$; 4) $\{x \in X : \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) < f(x)\}$;
 5) $\{x \in X : \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(x) > f(x)\}$; 6) $\{x \in X : \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(x) < f(x)\}$;
 7) $\{x \in X : f_n(x) < g_n(x), n \geq 1\}$; 8) $\{x \in X : \inf_{n \geq 1} f_n(x) \neq \sup_{n \geq 1} g_n(x)\}$;
 9) $\{x \in X : \inf_{n \geq 1} f_n(x) < \inf_{n \geq 1} g_n(x)\}$; 10) $\{x \in X : \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(x) < \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} g_n(x)\}$;
 11) $\{x \in X : \text{существует } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \in \mathbb{R}\}$.

16. Пусть $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ — последовательность функций, заданных на $\mathbb{R}$. Определить такую непрерывную на $\mathbb{R}$ функцию g , что $f_n(x) \rightarrow g(x)$ почти всюду относительно меры Лебега μ_1 на $\mathbb{R}$, если:

- 1) $f_n(x) = \cos^n x$, $x \in \mathbb{R}$; 2) $f_n(x) = x^2 \sin^n x^2$, $x \in \mathbb{R}$;
 3) $f_n(x) = \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x\right)^n + \sin^n 2x$, $x \in \mathbb{R}$;
 4) $f_n(x) = \frac{n^2 \sin^2 x}{1 + n^2 \sin^2 x}$, $x \in \mathbb{R}$; 5) $f_n(x) = \frac{\sin^n x}{2 + \sin^n x}$, $x \in \mathbb{R}$;
 6) $f_n(x) = \cos^n \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $f_n(0) = 0$; 7) $f_n(x) = e^{-n|x^2-1|}$, $x \in \mathbb{R}$;
 8) $f_n(x) = e^{-n \sin^2 x} \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $f_n(0) = 0$.

17. Пусть $(f_n(x, y))_{n=1}^{\infty}$ — последовательность функций, заданных на $\mathbb{R}^2$. Определить одну из функций $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, для которой $f_n(x, y) \rightarrow g(x, y)$ почти всюду относительно меры Лебега μ_2 на $\mathbb{R}^2$, если:

- 1) $f_n(x, y) = \cos^n(x^2 + y^2)$; 2) $f_n(x, y) = e^{-n(x^2 + y^2)}$;
 3) $f_n(x, y) = e^{-n|x^2 + y^2 - 1|}$; 4) $f_n(x, y) = 2^{\sin^n(x^2 + y^2)}$;
 5) $f_n(x, y) = \sqrt[n]{|x|^n + |y|^n}$; 6) $f_n(x, y) = n \ln \left(1 + \frac{|x| + |y|}{n}\right)$;
 7) $f_n(x, y) = 2^{\left(x + \frac{y^2}{n}\right)}$; 8) $f_n(x, y) = e^{\sin^n x + \sin^n y}$.

18. Пусть $\mathcal{F}(x) = 0$, если $x \leq 0$, и $\mathcal{F}(x) = x$, если $x > 0$, а $\mu_{\mathcal{F}}$ — соответствующая ей мера Лебега — Стильеса на σ -алгебре $\mu_{\mathcal{F}}$ -измеримых подмножеств числовой оси $\mathbb{R}$. Доказать, что две непрерывные на $\mathbb{R}$ функции f и g почти всюду относительно меры $\mu_{\mathcal{F}}$ равны на $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда для произвольного $x \geq 0$ $f(x) = g(x)$.

19. Для последовательности функций $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, доказать сходимость почти всюду относительно меры μ_1 на $\mathbb{R}$ и для произвольного $\varepsilon > 0$ указать μ_1 -измеримое множество A_ε , $\mu_1(\mathbb{R} \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon$, на котором последовательность $(f_n)_{n=1}^\infty$ сходится равномерно, если:

- 1) $f_n(x) = \cos^n \pi x$, $x \in \mathbb{R}$;
- 2) $f_n(x) = \frac{n^2 |\sin \pi x|}{1 + n^2 |\sin \pi x|}$, $x \in \mathbb{R}$;
- 3) $f_n(x) = \begin{cases} \frac{x^n}{1+x^n}, & x \in (0; 1], \\ 0, & x \notin (0; 1]; \end{cases}$
- 4) $f_n(x) = \begin{cases} x^n - x^{2n}, & x \in [0; 1], \\ 0, & x \notin [0; 1]; \end{cases}$
- 5) $f_n(x) = \begin{cases} \frac{2\pi x}{1+n^2 x^2}, & x \in [0; 1], \\ 0, & x \notin [0; 1]; \end{cases}$
- 6) $f_n(x) = \begin{cases} e^{n(x-2)}, & x \in [0; 2], \\ 0, & x \notin [0; 2]; \end{cases}$
- 7) $f_n(x) = \begin{cases} x^n - x^{n^2}, & x \in [0; 1], \\ 0, & x \notin [0; 1]. \end{cases}$

20. Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — измеримое пространство, а последовательности $(f_n(x))_{n=1}^\infty$ и $(g_n(x))_{n=1}^\infty$ μ -измеримых функций сходятся по мере μ на μ -измеримом множестве A соответственно к μ -измеримым функциям $f(x)$ и $g(x)$. Доказать, что:

- 1) если $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \stackrel{\mu}{=} 0$ на A , то $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^2(x) \stackrel{\mu}{=} 0$ на A ;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(x) + g_n(x)) \stackrel{\mu}{=} f(x) + g(x)$ на A ;
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos f_n(x) \stackrel{\mu}{=} \cos f(x)$ на A .

21. Пусть μ_1 — мера Лебега на $\mathbb{R}$, $f_n(x) = \chi_{[n^2, (n+1)^2]}(x)$ — характеристические функции отрезков $[n^2, (n+1)^2]$, $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что для каждого $x \in \mathbb{R}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$. Верно ли, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \stackrel{\mu}{=} 0$ на $\mathbb{R}$?

22. Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — измеримое пространство и последовательность $(f_n(x))_{n=1}^\infty$, $x \in A$, сходится по мере μ на μ -измеримом множестве A к функции $f(x)$. Доказать, что если для каждого $n \in \mathbb{N}$ $|f_n(x)| \leq g(x)$ μ -почти всюду на A , то $|f(x)| \leq g(x)$ μ -почти всюду на A .

23. Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — измеримое пространство конечной меры, $(f_n(x))_{n=1}^\infty$, $x \in X$, — последовательность μ -измеримых функций. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \stackrel{\mu}{=} f(x)$ на X тогда и только тогда, когда из произвольной подпоследовательности $(f_{n_k}(x))_{k=1}^\infty$, $x \in X$, можно выделить подпоследовательность $(f_{n_{k_j}}(x))_{j=1}^\infty$, $x \in X$, сходящуюся к $f(x)$ μ -почти всюду на X .

24. Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — измеримое пространство конечной меры, $(f_n(x))_{n=1}^\infty$, $x \in X$, и $(g_n(x))_{n=1}^\infty$, $x \in X$, — последовательности μ -измеримых функций, сходящиеся по мере μ на X соответственно к функциям $f(x)$ и $g(x)$. Доказать, что если $\varphi(x, y)$ — непрерывная функция на плоскости $\mathbb{R}^2$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(f_n(x), g_n(x)) \stackrel{\mu}{=} \varphi(f(x), g(x))$$

25. Пусть X совпадает с множеством $\mathbb{N}$ натуральных чисел, σ -алгебра $\mathfrak{U} = 2^{\mathbb{N}}$ и для $A \subset X$ $\mu(A) = \sum_{k \in A} \frac{1}{2^k}$. Описать сходимость по мере μ на измеримом пространстве $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu)$.

26. Доказать, что последовательность μ_1 -измеримых функций $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$, $x \in \mathbb{R}$, сходится на $\mathbb{R}$ по мере Лебега μ_1 , и найти предел, если для $x \in \mathbb{R}$:

- 1) $f_n(x) = \chi_{(\sqrt{n}; \sqrt{n+1})}(x)$; 2) $f_n(x) = 2 - \chi_{[\ln n; \ln(n+1)]}(x)$;
- 3) $f_n(x) = \sin^n x \cdot \chi_{[2\pi n; 2\pi(n+1)]}(x)$; 4) $f_n(x) = \cos x + |x| \chi_{[\sqrt{n}; \sqrt{n+5}]}(x)$;
- 5) $f_n(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \chi_{[k, k + \frac{1}{k^2}]}(x)$.

27. Пусть $y = \mathcal{F}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, — монотонно неубывающая, непрерывная слева функция, $\mu_{\mathcal{F}}$ — соответствующая ей мера Лебега — Стильеса на $\mathbb{R}$, $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$, $x \in \mathbb{R}$, — последовательность $\mu_{\mathcal{F}}$ -измеримых функций, f — $\mu_{\mathcal{F}}$ -измеримая функция.

Описать сходимость $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \stackrel{\mu_{\mathcal{F}}}{=} f(x)$ на $\mathbb{R}$, если:

- 1) $\mathcal{F}(x) = \begin{cases} 1, & -\infty < x \leq 0, \\ 2, & 0 < x < +\infty; \end{cases}$ 2) $\mathcal{F}(x) = -[-x^2]$;
- 3) $\mathcal{F}(x) = -[\arctg x]$.

28. Пусть $(X, \mathfrak{U}, \mu)$ — измеримое пространство конечной меры μ на X

$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \stackrel{\mu}{=} f(x)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) \stackrel{\mu}{=} g(x)$. Доказать, что:

- 1) если для каждого $n \in \mathbb{N}$ $2f_n(x) = g_n(x)$ почти всюду на X относительно меры μ , то $2f(x) = g(x)$ почти всюду на X ;
- 2) для каждого μ -измеримого множества A и произвольного $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu \{x \in A : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\} = \mu(A);$$

3) если для каждого $n \in \mathbb{N}$ почти всюду на X $f_n(x) < 0$, то $f(x) \leq 0$ почти всюду на X ;

4) если для каждого $n \in \mathbb{N}$ почти всюду на X $f_n(x) < g_n(x)$, то $f(x) \leq g(x)$ почти всюду на X .

29. Пусть μ_1 — мера Лебега на $\mathbb{R}$, μ_2 — мера Лебега на $\mathbb{R}^2$. Вычислить:

- 1) $\int_{\mathbb{R}} \chi_{\mathbb{Q}}(x) d\mu_1$; 2) $\int_{[0; 20]} \chi_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}(x) d\mu_1$; 3) $\int_A (-1)^{[x^2+y^2]} d\mu_2$, где $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 5\}$.

30. Пусть $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(n; n + \frac{1}{n^{\alpha}} \right)$ — множество числовой оси $\mathbb{R}$. При каких $\alpha \in \mathbb{R}$ характеристическая функция $y = \chi_A(x)$, $x \in A$, множества A является интегрируемой по Лебегу на $\mathbb{R}$ относительно меры Лебега μ_1 ?

31. Доказать, что если $f(x) = 0$ в точках канторова множества $F \subset [0; 1]$ и $f(x) = n$ на его смежных интервалах, длина которых равна $\frac{1}{3^n}$, то $\int_{[0; 1]} f(x) d\mu_1 = 3$, где μ_1 — мера Лебега на $\mathbb{R}$.

32. Пусть $(X, \mathfrak{U}, \mu)$ — измеримое пространство конечной меры и $f \in L(X, \mu)$. Доказать, что

$$\int_X f(x) d\mu = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \xi_k \mu \{x \in X : y_k \leq f(x) < y_{k+1}\},$$

где $\{y_k \in \mathbb{R} : k \in \mathbb{Z}\}$ — разбиение числовой оси $\mathbb{R}$, $\lambda = \sup_{k \in \mathbb{Z}} (y_{k+1} - y_k)$, $\varepsilon_k \in [y_k, y_{k+1})$, $k \in \mathbb{Z}$.

33. Пусть $y = \mathcal{F}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, — неубывающая непрерывная слева на $\mathbb{R}$ функция, $\mu_{\mathcal{F}}$ — соответствующая мера Лебега — Стильеса на $\mathbb{R}$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Вычислить $\int_{\mathbb{R}} f(x) d\mu_{\mathcal{F}}$ если $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, а

$$\mathcal{F}(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x \leq 0, \\ -[-x], & 0 < x \leq 100, \\ 100, & 100 < x < +\infty. \end{cases}$$

34. Функция $f(x)$ равна $\cos x$ в точках канторова множества $F \subset [0; 1]$ и равна $\frac{1}{2^n}$ на тех смежных интервалах, длина которых равна $\frac{1}{3^n}$. Вычислить $\int_{[0;1]} f(x) d\mu_1$, где μ_1 — мера Лебега на $\mathbb{R}$.

35. Интегрируема ли по Риману функция

$$f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ \sin x, & x \in \mathbb{Q}, \end{cases}$$

на отрезке $[0; 1]$? Интегрируема ли она по Лебегу относительно меры Лебега μ_1 на $\mathbb{R}$? Если функция интегрируема по Лебегу, то найти $\int_{[0;1]} f(x) d\mu_1$.

36. Вычислить интеграл Лебега $\int_{[0;1]} f(x) d\mu_1$ относительно меры μ_1 , если

$$f(x) = \begin{cases} \ln x, & x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap \left(\frac{1}{3}; +\infty\right), \\ x^2, & x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap \left[0; \frac{1}{3}\right), \\ 0, & x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

37. Вычислить интеграл Лебега $\int_{(1;2)} \frac{d\mu_1}{\sqrt[3]{x-1}}$, где μ_1 — мера Лебега на $\mathbb{R}$.

38. Интегрируемы ли по Лебегу относительно меры Лебега μ_1 на интервале $(0; 1)$ функции $y = \frac{1}{x}$ и $y = \frac{1}{x^2}$?

39. Вычислить интеграл Лебега $\int_{[0;1]} f(x) d\mu_1$, где μ_1 — мера Лебега на $\mathbb{R}$ и

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{x-1}, & x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

40. Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — измеримое пространство, $y = f(x)$, $x \in A$, — ограниченная и μ -интегрируемая на A функция. Будут ли μ -интегрируемыми на A функции:

1) $y = f^0(x)$; 2) $y = |f(x)|$; 3) $y = \frac{1}{f(x)}$?

41. Пусть $f(x) = (\sin x) \chi_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Вычислить $\int_{[0;\pi]} f(x) d\mu_1$, где μ_1 — мера Лебега на $\mathbb{R}$. Будет ли f интегрируемой по Риману на отрезке $[0; \pi]$?

42. Доказать неравенства:

$$1) \frac{2}{\sqrt[4]{e}} \leq \int_{[-1;1]} e^{x^2+xy} \chi_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}(x) d\mu_1 \leq 2e^2;$$

$$2) 2\pi e \leq \int_A e^{x^2+y^2} \frac{\chi_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}(x)}{x^2+y^2} d\mu_2 \leq \pi e^4,$$

где μ_1 — мера Лебега на $\mathbb{R}$, μ_2 — мера Лебега на $\mathbb{R}^2$, а $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.

43. Пусть $\mathcal{F}(x) = -[x]$, $x \in \mathbb{R}$, $\mu_{\mathcal{F}}$ — соответствующая мера Лебега — Стильеса на $\mathbb{R}$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Доказать, что $f \in L(\mathbb{R}, \mu_{\mathcal{F}})$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |f(k)| < +\infty. \text{ При этом для каждого } A \subset \mathbb{R}$$

$$\int_A f(x) d\mu_{\mathcal{F}} = \sum_{k \in \mathbb{Z} \cap A} f(k).$$

44. Пусть $(X, \mathcal{U}, \mu)$ — измеримое пространство конечной меры, $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$, $x \in X$, — последовательность μ -измеримых функций. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \stackrel{\mu}{=} f(x)$ на X тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \frac{|f_n(x) - f(x)|}{1 + |f_n(x) - f(x)|} d\mu = 0.$$

45. Сходится ли несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x) dx$? Принадлежит ли функция f классу $L([1; +\infty), \mu_1)$, где μ_1 — мера Лебега на $\mathbb{R}$, если:

$$1) f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \chi_{[k, k+1)}(x), \quad x \in \mathbb{R};$$

$$2) f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k} \chi_{(k, k+1)}(x), \quad x \in \mathbb{R};$$

$$3) f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \chi_{[k^2, (k+1)^2)}(x), \quad x \in \mathbb{R};$$

$$4) f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (\cos k) \chi_{[\sqrt{k}, \sqrt{k+1})}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

46. Найти пределы:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0;1]} e^{-nx^2} d\mu_1;$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0;1]} e^{-\frac{x^n}{n}} d\mu_1;$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^n x}{1+x^2} d\mu_1;$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0;\pi]} e^{-\cos^n x} d\mu_1;$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0;+\infty)} n(e^{-\frac{x}{n}} - 1) \frac{d\mu_1}{1+x^2}.$$

47. Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — измеримое пространство, $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ — μ -измеримая функция. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ определим

$$g_n(x) = \begin{cases} g(x), & \text{если } |g(x)| \leq n, \\ n, & \text{если } g(x) > n, \\ -n, & \text{если } g(x) < -n. \end{cases}$$

Доказать, что $g \in L(X, \mu)$ тогда и только тогда, когда

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_X |g_n(x)| d\mu < +\infty.$$

При этом

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n(x) d\mu = \int_X g(x) d\mu.$$

48. Пусть $\mathcal{F}(x) = -[-x]$, $x \in \mathbb{R}$, $\mu_{\mathcal{F}}$ — соответствующая мера Лебега — Стильеса и последовательность функций $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$, $x \in \mathbb{R}$, такая, что для каждого $k \in \mathbb{Z}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(k) = f(k)$. Доказать, что если существует такая числовая последовательность $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, что $|f_n(k)| \leq a_k$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) и $\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k < +\infty$,

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) d\mu_{\mathcal{F}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k).$$

49. Пусть функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μ_1 -измерима по Лебегу и ограничена на $\mathbb{R}$. Доказать, что функция

$$g(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos tx^2}{1+x^2} f(x) d\mu_1, \quad t \in \mathbb{R},$$

непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}$, и найти g' .

50. Доказать, что для двойного интеграла

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-xy} \sin x \sin y dx dy$$

существуют оба повторных интеграла и величины этих интегралов совпадают. Существует ли двойной интеграл?

51. Доказать, что для двойного интеграла

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$$

существуют оба повторных интеграла, но их величины не совпадают.

52. Положим для $n \in \mathbb{N}$

$$f(x, y) = \begin{cases} 2^{2n}, & \frac{1}{2^n} \leq x \leq \frac{1}{2^{n-1}}, \quad \frac{1}{2^n} \leq y < \frac{1}{2^{n-1}}, \\ -2^{2n+1}, & \frac{1}{2^{n+1}} \leq x \leq \frac{1}{2^n}, \quad \frac{1}{2^n} \leq y < \frac{1}{2^{n-1}}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Доказать, что

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx \neq \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dx \right) dy.$$

53. Пусть s — множество всех вещественных последовательностей $x = (\xi_1, \dots, \xi_k, \dots)$ и ω — каноническая гауссова мера на s . Для $\lambda > 0$ и положительной последовательности чисел $(a_k)_{k=1}^\infty$ вычислить интеграл $\int_s f(x) d\omega$, где

$$f(x) = e^{-\lambda \sum_{k=1}^\infty a_k \xi_k^2}, \quad x \in s.$$

Доказать, что $\omega \left\{ x \in s : \sum_{k=1}^\infty a_k \xi_k^2 < +\infty \right\} = 1$, если ряд $\sum_{k=1}^\infty a_k$ сходится, и

$\omega \left\{ x \in s : \sum_{k=1}^\infty a_k \xi_k^2 < +\infty \right\} = 0$, если ряд $\sum_{k=1}^\infty a_k$ расходится (признак Колмогорова — Хинчина).

54. Пусть $C_0[0; \pi]$ — совокупность всех непрерывных функций $x = x(t)$, $0 \leq t \leq \pi$, удовлетворяющих условию $x(0) = 0$, а μ_ω — мера Винера на $C_0[0; \pi]$. Для фиксированной непрерывной функции $x = \varphi(t)$, $0 \leq t \leq \pi$, вычислить интегралы:

$$1) \int_{C_0[0; \pi]} \left(\int_0^\pi \varphi(t) x(t) dt \right) d\mu_\omega;$$

$$2) \int_{C_0[0; \pi]} \left(\int_0^\pi \varphi(t) x^2(t) dt \right) d\mu_\omega.$$

Ответы. 5. Класс $\mathcal{M}_1$ -измеримых функций содержится в классе $\mathcal{M}_2$ -измеримых функций. 12. 1) $g(x) = 0$; 2) $g(x) = \pi$; 3) $g(x) = 0$; 4) $g(x) = \ln(1 + |x|)$; 5) $g(x) = \arcsin 2^{-|x|}$; 6) $g(x) = (\operatorname{ch} x)^{\operatorname{sh} x}$. 13. 1) $g(x, y) = x^2$; 2) $g(x, y) = \cos x$; 3) $g(x, y) = xy$; 4) $g(x, y) = \operatorname{ch} x$. 16. 1) — 3), 5) — 7) $g(x, y) = 0$; 4) $g(x) = 1$; 8) $g(x) = 1$. 17. 1) — 3) $g(x, y) = 0$, 4) $g(x, y) = 1$; 5) $g(x, y) = |y|$, если $|y| \geq |x|$, и $g(x, y) = |x|$, если $|x| \geq |y|$; 6) $g(x, y) = |x| + |y|$; 7) $g(x, y) = 2^x$; 8) $g(x, y) = 1$. 21. Не верно. 25. $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(k) \stackrel{\mu}{=} 0$ на $\mathbb{N}$ тогда и только тогда, когда $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(k) = 0$ равномерно на $\mathbb{N}$. 26. 1) $f(x) = 0$ п. в. на $\mathbb{R}$; 2) $f(x) = 2$ п. в. на $\mathbb{R}$; 3) $f(x) = 0$ п. в. на $\mathbb{R}$; 4) $f(x) = \cos x$ п. в. на $\mathbb{R}$; 5) $f(x) = 0$ п. в. на $\mathbb{R}$. 27. 1) $f_n(x) \xrightarrow{\mu_{\mathcal{F}}} f(x)$ на $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда $f_n(0) \rightarrow f(0)$; 2) $f_n(x) \xrightarrow{\mu_{\mathcal{F}}} f(x)$ на $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на множестве $\{\pm \sqrt{k} : k \in \mathbb{N}\}$; 3) $f_n(x) \xrightarrow{\mu_{\mathcal{F}}} f(x)$ на $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда $f_n(x) \rightarrow f(x)$ для $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ и $x = -\frac{\pi}{4}$. 29. 1) 0; 2) 20; 3) — π . 30. $\alpha > 1$. 33. $\frac{e^{100} - 1}{e - 1}$. 34. $\frac{6}{25}$. 35. Нет. Да. $\frac{1}{\ln 2}$. 36. $\frac{1}{3^4} - \frac{2 - \ln 3}{3}$. 37. $\frac{3}{2}$. 38. Не интегрируемы. 39. 2. 40. 1), 2) Да; 3) Не всегда. 41. 2. Нет. 45. 1) — 4) Да, нет. 46. 1) 0; 2) 1; 3) 0; 4) π ; 5) $-\frac{\pi}{4}$. 49. $g'(t) = - \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin tx^2}{1+x^2} x^2 f(x) d\mu_1$, $t \in \mathbb{R}$. 50. Нет. 53. $\left(\prod_{k=1}^\infty (1 + \lambda a_k) \right)^{-\frac{1}{2}}$. 54. 1) 0; 2) $\frac{1}{2} \int_0^\pi t \varphi(t) dt$.

§ 4. ПРОСТРАНСТВА ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

1. Пространства L_p интегрируемых функций. Пусть X — некоторое непустое множество, $\mathfrak{A}$ — σ -алгебра подмножеств множества X , μ — счетно-аддитивная мера, определенная на $\mathfrak{A}$. Считаем, что мера μ является σ -конечной и полной. Рассмотрим фиксированное μ -измеримое множество $A \subset X$ и некоторое действительное число p , $p \geq 1$. Тогда через L_p (точнее, $L_p(A)$ или даже $L_p(A, \mu)$) обозначим совокупность всех функций f , измеримых и почти всюду конечных (относительно меры μ) на множестве A , для которых конечен интеграл

$$\int_A |f(x)|^p d\mu.$$

В множестве L_p μ -почти всюду равные на A функции отождествляются, т. е. L_p состоит из классов μ -эквивалентных на A функций. Поэтому в дальнейшем можно считать, что представители этих классов являются функциями с конечными значениями на A . Отметим также, что множество $L_1(A, \mu)$ совпадает с множеством $L(A, \mu)$ μ -интегрируемых на A функций (см. § 3).

Можно показать (см. пример 1), что множество L_p — линейное. При этом операции сложения и умножения на действительные числа элементов из L_p (т. е. классов μ -эквивалентных на A функций) проводятся над их представителями.

Изучение пространства L_p для $p > 1$ тесно связано с рассмотрением другого пространства того же типа — $L_q(A, \mu)$, у которого индекс q выражается через p из соотношения $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Числа p и q называются *сопряженными*. Отметим, что если $p = 2$, то и $q = 2$.

Напомним некоторые классические неравенства, часто употребляемые при изучении пространств L_p .

Теорема 1. Пусть $p > 1$ и q — ему сопряженное число. Тогда для любых двух функций $f \in L_p$ и $g \in L_q$ произведение fg является интегрируемой на A функцией и справедливо неравенство

$$\left| \int_A f(x) g(x) d\mu \right| \leq \left(\int_A |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_A |g(x)|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}},$$

называемое *неравенством Гельдера*.

Отметим, что при $p = 2$ неравенство Гельдера превращается в *неравенство Коши* — *Буняковского*

$$\left| \int_A f(x) g(x) d\mu \right| \leq \sqrt{\int_A |f(x)|^2 d\mu} \cdot \sqrt{\int_A |g(x)|^2 d\mu}.$$

Теорема 2. Для двух произвольных функций $f, g \in L_p$, $p \geq 1$, справедливо неравенство

$$\left(\int_A |f(x) + g(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_A |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_A |g(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}},$$

называемое *неравенством Минковского*.

В пространстве L_p , $p \geq 1$, можно ввести понятие расстояния между его элементами. Если функции f и g принадлежат пространству L_p , то *расстоянием* между ними называется число

$$\rho(f, g) = \left(\int_A |f(x) - g(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Оно обладает всеми характерными свойствами расстояния:

1) $\rho(f, g) \geq 0$; $\rho(f, g) = 0$ тогда и только тогда, когда классы f и g совпадают (именно поэтому пространство L_p состоит не из отдельных функций, а из классов эквивалентных функций);

2) $\rho(f, g) = \rho(g, f)$;

3) если f, g и h — элементы пространства L_p , то $\rho(f, g) \leq \rho(f, h) + \rho(h, g)$.

Последнее неравенство называется *неравенством треугольника* (оно следует из неравенства Минковского). Первые два свойства расстояния $\rho(f, g)$ в L_p вытекают из соответствующих свойств интеграла Лебега.

Отметим, что если на непустом множестве можно ввести расстояние между произвольными его элементами, обладающее указанными тремя свойствами, то такое множество называют метрическим пространством (такие пространства более детально изучаются в гл. 2, § 1). Следовательно, пространство L_p является метрическим. Оно называется пространством функций, интегрируемых с p -й степенью.

В пространстве L_p , $p \geq 1$, вводится также понятие *нормы элемента* $f \in L_p$:

$$\|f\| = \left(\int_A |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \rho(f, 0).$$

Норма $\|f\|$ в пространстве L_p обозначается еще символами $\|f\|_{L_p}$ и $\|f\|_p$. Она обладает рядом свойств, аналогичных свойствам модуля числа и длины вектора в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$:

1) $\|f\| \geq 0$; $\|f\| = 0$ тогда и только тогда, когда f является нулевым классом (т. е. f μ -эквивалентна тождественно нулевой функции);

2) для произвольного числа $\alpha \in \mathbb{R}$ имеем $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$;

3) если f и g — элементы пространства L_p , то $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ (неравенство треугольника для нормы). Отметим, что неравенство треугольника совпадает с неравенством Минковского.

Если на линейном пространстве можно ввести норму, обладающую свойствами 1) — 3), то оно называется *нормированным пространством*. Такой класс пространств будет изучен также в гл. 2. Следовательно, пространство L_p нормировано.

Наличие в L_p расстояния (или нормы) позволяет ввести в нем понятие сходимости. Именно, пусть $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$, $x \in A$, — последовательность функций пространства L_p и функция $y = f(x)$, $x \in A$, также принадлежит L_p . Эту последовательность называют сходящейся к f в пространстве L_p , если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(f_n, f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_A |f_n(x) - f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = 0.$$

Обозначается эта сходимость так: $f_n \rightarrow f$ в пространстве L_p или $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ в L_p .

Такая сходимость называется *сходимостью в среднем p -го порядка*. В частности, для $p = 1$ эта сходимость называется *сходимостью в среднем*, а для $p = 2$ — *сходимостью в среднем квадратичном*.

Множество M пространства L_p называется *всюду плотным*, если для каждого элемента $f \in L_p$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такой элемент $h \in M$, что $\|f - h\| < \varepsilon$. Можно проверить, что множество $M \subset L_p$ является всюду плотным тогда и только тогда, когда для каждого элемента $f \in L_p$ существует последовательность $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ элементов из M , что $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = f$ в L_p . Например, в пространстве $L_p(A, \mu_m)$, где $\mu = \mu_m$ —

мера Лебега на $\mathbb{R}^m$, а A — μ_m -измеримое множество из $\mathbb{R}^m$, всюду плотным является множество M всех непрерывных на A функций.

Те пространства, в которых имеется счетное всюду плотное множество, называются *сепарабельными*.

Теорема 3. Пусть $X = \mathbb{R}^m$, $\mu = \mu_m$ — мера Лебега на пространстве $\mathbb{R}^m$ и A — измеримое в смысле Лебега множество из $\mathbb{R}^m$. Тогда пространство $L_p = L_p(A, \mu_m)$, $p \geq 1$, сепарабельно.

Как и в классическом математическом анализе, в пространстве L_p важным является понятие фундаментальной последовательности. Именно, последовательность $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ функций пространства L_p называется *фундаментальной* (или последователь-

ностью Коши), если

$$\lim_{n, k \rightarrow \infty} \|f_n - f_k\| = \lim_{n, k \rightarrow \infty} \left(\int_A |f_n(x) - f_k(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = 0.$$

Нетрудно проверить, что любая сходящаяся в L_p последовательность функций является фундаментальной. Если каждая фундаментальная последовательность функций из пространства L_p является сходящейся в нем, то такое пространство L_p называется *полным*.

Теорема 4. Для каждого $p \geq 1$ пространство L_p является полным.

Замечание. Решающим преимуществом лебеговой конструкции интеграла по сравнению с римановой является именно то обстоятельство, что пространство L_p — полное. Если, например, рассмотреть в качестве множества A отрезок $[a; b]$ числовой оси $\mathbb{R}$, то пространство $\mathcal{A}([a; b])$ всех интегрируемых по Риману функций на $[a; b]$ с расстоянием

$$\rho(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \quad (\forall f, g \in \mathcal{A}([a; b]))$$

не является полным. Обратим внимание и на то обстоятельство, что интеграл Лебега строится на произвольных абстрактных множествах, на которых определена счетно-аддитивная мера. В то же время интеграл Римана определяется только на измеримых по Жордану множествах пространства $\mathbb{R}^m$.

2. Условия сходимости ряда Фурье функции из пространства $L_1[-\pi; \pi]$. Рассмотрим пространство $L_1[-\pi; \pi]$ функций, интегрируемых по Лебегу на отрезке $[-\pi; \pi]$ (относительно меры Лебега $\mu = \mu_1$). Для каждой функции $f \in L_1[-\pi; \pi]$ введем последовательность ее коэффициентов Фурье, полагая:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = 0, 1, \dots;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx; \quad n = 1, 2, \dots$$

Тогда рядом Фурье функции f называют такой ряд:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \quad (1)$$

Изучим вопрос о сходимости ряда Фурье в данной точке x к значению функции f в этой точке, т. е. вопрос о поточечной сходимости ряда (1) к функции f , порождающей этот ряд. С этой целью для последовательности частичных сумм $(S_n(x))_{n=1}^{\infty}$ ряда (1), т. е.

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx,$$

рассмотрим представление

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(t-x)}{2 \sin \frac{t-x}{2}} dt,$$

называемое *интегралом Дирихле*. Функция

$$D_n(z) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sin \frac{2n+1}{2} z}{\sin \frac{z}{2}}$$

называется *ядром Дирихле*.

Теорема 5 (Римана — Лебега). Если функция φ интегрируема по Лебегу на отрезке $[a; b]$, то справедливы равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi(x) \cos nx dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi(x) \sin nx dx = 0.$$

Из этой теоремы следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, т. е. последовательность коэффициентов Фурье интегрируемой по Лебегу на отрезке $[-\pi; \pi]$ функции f является бесконечно малой.

Рассмотрим достаточный признак сходимости ряда Фурье.

Теорема 6 (Дини). Пусть функция f принадлежит пространству $L_1[-\pi; \pi]$ и при фиксированном $x \in [-\pi; \pi]$ интеграл

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{|f(x+t) - f(x)|}{|t|} dt \quad (2)$$

сходится для некоторого $\delta > 0$. Тогда ряд Фурье (1) функции f сходится в точке x к значению $f(x)$, т. е.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Отметим, что сходимость интеграла (2) называется условием Дини функции f в точке x . Оно, в частности, выполнено, если в данной точке x функция f имеет конечную производную. Более того, пусть функция f ограничена на $[-\pi; \pi]$, имеет разрывы только первого рода и в каждой точке $x \in (-\pi; \pi)$ существуют конечные пределы

$$f'_-(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(x - \Delta x) - f(x - 0)}{\Delta x}, \quad f'_+(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x + 0)}{\Delta x},$$

называемые соответственно *левой и правой производными функции* в точке x . Тогда ряд Фурье такой функции f сходится всюду на $(-\pi; \pi)$, а его сумма равна $f(x)$ в точках x непрерывности f и равна $\frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)]$, если x является точкой разрыва для f . Условие Дини выполняется также, например, если функция f удовлетворяет в точке x условию Липшица порядка α : $|f(x+t) - f(x)| \leq C |t|^\alpha$ ($0 < \alpha \leq 1$).

Описанные результаты справедливы и для произвольных 2π -периодических функций (рассмотренные которых являются естественным, поскольку сумма ряда (1) — 2π -периодическая функция), интегрируемых по Лебегу на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Выше мы сформулировали некоторые достаточные условия сходимости ряда Фурье функции f в точке x . Класс функций, удовлетворяющих этим условиям, достаточно широк. Однако приведенные условия далеки от необходимых. Например, даже непрерывность функции не является необходимой для представления ее в виде суммы ряда Фурье. Правда, ситуация несколько изменится, если интересоваться условиями равномерной сходимости ряда Фурье. Ведь, согласно общим свойствам равномерно сходящихся рядов непрерывных функций, если функция f имеет хотя бы один разрыв, то ее ряд Фурье не может сходиться к ней равномерно. Поэтому непрерывность функции является необходимым условием равномерной сходимости ее ряда Фурье (но, не достаточным).

Теорема 7. Если 2π -периодическая функция f дифференцируема на числовой оси $\mathbb{R}$ и ее производная f' принадлежит $L_2[-\pi; \pi]$, то ряд Фурье функции f сходится к ней равномерно на $\mathbb{R}$.

В частности, ряд Фурье непрерывно-дифференцируемой функции f равномерно сходится на $\mathbb{R}$ к этой функции.

Приведем еще одно условие равномерной сходимости ряда Фурье, аналогичное условию Дини.

Теорема 8. Пусть на некотором множестве $A \subset [-\pi; \pi]$ функция $f \in L_1[-\pi; \pi]$ ограничена, а условие Дини выполняется на A равномерно, т. е. для каждого $\varepsilon >$

> 0 существует такое $\delta > 0$, что

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{|f(x+t) - f(x)|}{|t|} dt < \varepsilon$$

одновременно для всех $x \in A$. Тогда ряд Фурье (1) функции f сходится к f равномерно на A .

Можно показать, что существуют непрерывные функции, ряды Фурье которых сходятся не во всех точках. Вместе с тем, если сумму ряда Фурье (1) понимать не как предел частных сумм $S_n(x)$, а как предел их средних арифметических, то каждая непрерывная функция однозначно восстанавливается своим рядом Фурье. Для этого рассмотрим ряд Фурье (1) 2π -периодической интегрируемой по Лебегу на $[-\pi; \pi]$ функции f и положим

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + \dots + S_{n-1}(x)}{n} \quad (x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}), \quad (3)$$

где $S_0(x) = \frac{a_0}{2}$. Выражения $\sigma_n(x)$ — средние арифметические сумм $S_k(x)$ — называются суммами Фейера функции f .

Теорема 9 (Фейера). Если 2π -периодическая функция f непрерывна на $\mathbb{R}$, то последовательность $(\sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ ее сумм Фейера сходится к f равномерно на всей числовой оси $\mathbb{R}$.

Из теоремы Фейера следует теорема Вейерштрасса об аппроксимации непрерывной функции f тригонометрическими многочленами. Напомним, что *тригонометрическим полиномом* называется выражение

$$\alpha_0 + \sum_{k=1}^n \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx,$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ и $\beta_1, \dots, \beta_n$ — действительные числа. Таким многочленом является, очевидно, каждая сумма Фейера σ_n функции f .

Теорема 10 (Вейерштрасса). Если непрерывная на отрезке $[-\pi; \pi]$ функция f такая, что $f(-\pi) = f(\pi)$, то существует последовательность тригонометрических многочленов, равномерно сходящаяся на $[-\pi; \pi]$ к f .

Теорему Фейера можно рассматривать как усиление теоремы Вейерштрасса. Ведь в теореме Вейерштрасса говорится о существовании какой-то последовательности тригонометрических многочленов, а теорема Фейера указывает конкретную последовательность тригонометрических многочленов, равномерно сходящуюся к f , — последовательность ее сумм Фейера (3).

Теорема Фейера справедлива и для функций из пространства $L_1[-\pi; \pi]$.

Теорема 11. Если функция f интегрируема по Лебегу на отрезке $[-\pi; \pi]$, то последовательность $(\sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ ее сумм Фейера (3) сходится к f в среднем, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\sigma_n - f\|_{L_1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |\sigma_n(x) - f(x)| dx = 0.$$

Из этой теоремы следует такой важный факт: каждая интегрируемая по Лебегу на $[-\pi; \pi]$ функция однозначно (с точностью до эквивалентности) определяется своими коэффициентами Фурье, т. е. если две интегрируемые функции имеют одинаковые коэффициенты Фурье, то они почти всюду равны на отрезке $[-\pi; \pi]$.

Из теоремы 11 получаем также, что тригонометрические многочлены всюду плотны в пространстве $L_1[-\pi; \pi]$.

3. Преобразование Фурье функций пространства $L_1(\mathbb{R})$ и его свойства. Пусть функция $y = \varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, интегрируема по Лебегу на $\mathbb{R}$, т. е. $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$. Тогда ее преобразованием Фурье называется функция $F[\varphi](\sigma)$ (иногда обозначаемая $\hat{\varphi}(\sigma)$),

определения на $\mathbb{R}$ с помощью равенства

$$F[\varphi](\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{i\sigma x} dx \quad (\sigma \in \mathbb{R}). \quad (4)$$

Отметим, что интеграл в правой части формулы (4) от комплекснозначной функции существует, поскольку, согласно формуле Ейлера $e^{i\sigma x} = \cos \sigma x + i \sin \sigma x$, он выражается через два интеграла от действительнозначных функций пространства $L_1(\mathbb{R})$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{i\sigma x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \cos \sigma x dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \sin \sigma x dx.$$

Из формулы (4) следует, что преобразование Фурье $F[\varphi]$ функции $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$ является непрерывной и ограниченной на $\mathbb{R}$ функцией, причем $\lim_{|\sigma| \rightarrow +\infty} F[\varphi](\sigma) = 0$.

Исследуем теперь вопрос (как это делалось для рядов Фурье) о представлении функции $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$ с помощью ее преобразования Фурье $\hat{\varphi}(\sigma) = F[\varphi](\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{R}$.

Теорема 12. Пусть функция φ принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R})$, $\hat{\varphi}(\sigma) = F[\varphi](\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{R}$, — ее преобразование Фурье и в точке $x \in \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Дини

$$\exists \delta > 0: \int_{-\delta}^{\delta} \frac{|\varphi(x+t) - \varphi(x)|}{|t|} dt < +\infty.$$

Тогда справедлива формула обращения

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \hat{\varphi}(\sigma) e^{-i\sigma x} d\sigma, \quad (5)$$

которая называется формулой обратного преобразования Фурье.

Поскольку преобразование Фурье $\hat{\varphi}$, вообще говоря, не принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R})$, то интеграл в формуле (5) понимается в смысле главного значения, т. е.

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N \hat{\varphi}(\sigma) e^{-i\sigma x} d\sigma.$$

Отметим, что каждая функция пространства $L_1(\mathbb{R})$ однозначно (с точностью до эквивалентности) определяется своим преобразованием Фурье, т. е. если $F[\varphi_1](\sigma) = F[\varphi_2](\sigma)$ для всех $\sigma \in \mathbb{R}$, то $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ почти всюду на $\mathbb{R}$.

Перейдем к основным свойствам преобразования Фурье.

1) **Преобразование Фурье и операция дифференцирования.** Предположим, что функция $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$ дифференцируема на $\mathbb{R}$ и ее производная φ' также принадлежит $L_1(\mathbb{R})$. Тогда $F[\varphi'](\sigma) = (-i\sigma) F[\varphi](\sigma)$ для каждого $\sigma \in \mathbb{R}$. Если у функции φ существуют интегрируемые на $\mathbb{R}$ производные до порядка m , то, повторяя процесс, для любого $\sigma \in \mathbb{R}$ получаем

$$F[\varphi^{(k)}](\sigma) = (-i\sigma)^k F[\varphi](\sigma) \quad (k = 1, 2, \dots, m).$$

Допустим теперь, что не только $\varphi(x)$, но и $x\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, — интегрируемая на $\mathbb{R}$ функция. Тогда функция $\hat{\varphi}(\sigma) = F[\varphi](\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{R}$, является дифференцируемой на $\mathbb{R}$ и

$$(F[\varphi])'(\sigma) = F[ix\varphi](\sigma).$$

Если вместе с $\varphi(x)$ интегрируемыми на $\mathbb{R}$ являются также функции $x\varphi(x)$, $x^2\varphi(x)$, ..., $x^m\varphi(x)$, то функция $\hat{\varphi}(\sigma) = F[\varphi](\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{R}$, имеет производные до по-

ряда m . Эти производные непрерывны, ограничены на $\mathbb{R}$ и стремятся к нулю при $|\sigma| \rightarrow +\infty$. Кроме того, справедливы равенства

$$(F[\varphi])^k(\sigma) = F[(ix)^k \varphi](\sigma), \quad \forall \sigma \in \mathbb{R} \quad (k = 1, 2, \dots, m).$$

Если все произведения $x^k \varphi(x)$, $k = 0, 1, \dots$, интегрируемы на $\mathbb{R}$, то функция $\hat{\varphi}(\sigma) = F[\varphi](\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{R}$, бесконечно дифференцируема, каждая ее производная непрерывна и стремится к нулю при $|\sigma| \rightarrow +\infty$.

Таким образом, чем более сильные условия убывания на бесконечности мы накладываем на функцию φ , тем более гладкой является функция $\hat{\varphi}$ — ее преобразование Фурье.

В связи с изложенным укажем класс функций, который при преобразовании Фурье переходит в себя самого. Этим свойством обладает совокупность $S(\mathbb{R})$ бесконечно дифференцируемых функций $\varphi = \varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, которые для всех $k, n = 0, 1, \dots$ удовлетворяют неравенствам $|x^k \varphi^{(n)}(x)| \leq c_{k,n}$ ($\forall x \in \mathbb{R}$), где $c_{k,n}$ — постоянные, зависящие от функции φ . Очевидно, что функция $y \equiv 1$ не принадлежит $S(\mathbb{R})$. Однако можно показать, что $\exp(-x^2) \in S(\mathbb{R})$. Так что класс $S(\mathbb{R})$ не является пустым.

2) *Преобразование Фурье класса $S(\mathbb{R})$* . Если функция φ принадлежит множеству $S(\mathbb{R})$, ее преобразование Фурье $\hat{\varphi} = F[\varphi]$ также принадлежит $S(\mathbb{R})$. Кроме того, каждая функция $\hat{\varphi}$ множества $S(\mathbb{R})$ является преобразованием Фурье некоторой функции $\varphi \in S(\mathbb{R})$. Таким образом, при преобразовании Фурье класс $S(\mathbb{R})$ отображается на весь класс $S(\mathbb{R})$. Символически это можно записать с помощью равенства $F[S(\mathbb{R})] = S(\mathbb{R})$.

3) *Преобразование Фурье и свертка*. Пусть φ_1 и φ_2 — функции, интегрируемые по Лебегу на числовой оси $\mathbb{R}$. Тогда справедливо равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(\xi) \varphi_2(x - \xi) dx d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(\xi) d\xi \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2(\eta) d\eta.$$

Поэтому, согласно теореме Фубини (см. § 3), функция

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(\xi) \varphi_2(x - \xi) d\xi \quad (6)$$

существует для почти всех $x \in \mathbb{R}$ и интегрируема на $\mathbb{R}$. Функцию φ , определенную равенством (6), называют сверткой функций φ_1 и φ_2 и обозначают символом $\varphi_1 * \varphi_2$. Операция свертки двух функций из пространства $L_1(\mathbb{R})$ коммутативна и ассоциативна.

Часто при решении дифференциальных уравнений с помощью преобразования Фурье используют такое свойство: если функции φ_1 и φ_2 принадлежат пространству $L_1(\mathbb{R})$, то преобразование Фурье их свертки равно произведению преобразований Фурье функций φ_2 и φ_1 , т. е. $F[\varphi_1 * \varphi_2](\sigma) = F[\varphi_1](\sigma) \cdot F[\varphi_2](\sigma)$ ($\forall \sigma \in \mathbb{R}$).

Замечание. Чтобы придать формулам прямого и обратного преобразования Фурье большую симметричность, часто определяют преобразование Фурье формулой

$$\hat{\varphi}(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{i\sigma x} dx.$$

Тогда формула обращения принимает вид

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(\sigma) e^{-i\sigma x} d\sigma.$$

Мы будем придерживаться определения (4) с формулой обращения (5).

Преобразование Фурье, рассмотренное для функций одной переменной, легко переносится на функции многих переменных.

Пусть функция $y = \varphi(x)$, где $x = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m$, принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R}^m) = L_1(\mathbb{R}^m, \mu_m)$. Ее преобразованием Фурье называется функция

$$\hat{\varphi}(\sigma) \equiv \hat{\varphi}(\sigma_1, \dots, \sigma_m) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi_1, \dots, \xi_m) e^{i(\xi_1 \sigma_1 + \dots + \xi_m \sigma_m)} d\xi_1 \dots d\xi_m$$

или в символической записи —

$$\hat{\varphi}(\sigma) = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) e^{i(x, \sigma)} dx.$$

Этот m -кратный интеграл заведомо существует, поскольку функция $\varphi \in L_1(\mathbb{R}^m)$. Согласно теореме Фубини, его можно представить, например, в виде повторного интеграла

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(\sigma_1, \dots, \sigma_m) = & \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi_1, \dots, \xi_m) e^{i\xi_1 \sigma_1} d\xi_1 \right\} e^{i\xi_2 \sigma_2} d\xi_2 \dots \right\} \times \\ & \times e^{i\xi_m \sigma_m} d\xi_m. \end{aligned} \quad (7)$$

Другими словами, для вычисления преобразования Фурье интегрируемой функции φ от m переменных надо последовательно выполнить преобразование Фурье функции φ по каждой из переменных в отдельности (в любом порядке). Обращая каждую из этих m операций в правой части равенства (7), формально получаем

$$\begin{aligned} \varphi(\xi_1, \dots, \xi_m) = \\ = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(\sigma_1, \dots, \sigma_m) e^{-i\sigma_1 \xi_1} d\sigma_1 \right) e^{-i\sigma_2 \xi_2} d\sigma_2 \dots \right\} e^{-i\sigma_m \xi_m} d\sigma_m \end{aligned}$$

или же (в форме m -кратного интеграла)

$$\begin{aligned} \varphi(\xi_1, \dots, \xi_m) = \\ = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(\sigma_1, \dots, \sigma_m) e^{-i(\sigma_1 \xi_1 + \dots + \sigma_m \xi_m)} d\sigma_1 \dots d\sigma_m. \end{aligned} \quad (8)$$

Но поскольку функция $\hat{\varphi}(\sigma)$, вообще говоря, может не принадлежать пространству $L_1(\mathbb{R}^m)$, то нужно указать, в каком смысле следует понимать кратный интеграл в формуле (8) и те условия на φ , при которых она представляется интегралом (8).

Один из возможных ответов на эти вопросы дает следующая теорема.

Теорема 13. Пусть функция $\varphi(\xi_1, \dots, \xi_m)$ принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R}^m, \mu_m)$ и удовлетворяет условиям:

$$|\varphi(\xi_1 + t_1, \xi_2, \dots, \xi_m) - \varphi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)| \leq C |t_1|^\alpha,$$

$$|\varphi(\xi_1, \xi_2 + t_2, \dots, \xi_m) - \varphi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)| \leq C |\xi_1| |t_2|^\alpha,$$

$$|\varphi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m + t_m) - \varphi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)| \leq C |\xi_1, \dots, \xi_{m-1}| |t_m|^\alpha,$$

где $0 < \alpha \leq 1$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} C(\xi_1) d\xi_1 < +\infty,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} C(\xi_1, \dots, \xi_{m-1}) d\xi_1 \dots d\xi_{m-1} < +\infty.$$

Тогда формула обращения (8) справедлива, если интеграл в ней понимать как выражение

$$\frac{1}{(2\pi)^m} \lim_{N_1 \rightarrow +\infty} \int_{-N_1}^{N_1} \left\{ \dots \lim_{N_{m-1} \rightarrow +\infty} \int_{-N_{m-1}}^{N_{m-1}} \left\{ \lim_{N_m \rightarrow +\infty} \int_{-N_m}^{N_m} \hat{\varphi}(\sigma_1, \dots, \sigma_m) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times e^{-i\sigma_m \xi_m} d\sigma_m \right\} e^{-i\sigma_{m-1} \xi_{m-1}} d\sigma_{m-1} \dots \right\} e^{-i\sigma_1 \xi_1} d\sigma_1.$$

Условия этой теоремы выполняются, например, если у интегрируемой функции φ существуют частные производные $\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_m}$, первая из которых ограничена постоянной, вторая — интегрируемой функцией от ξ_1 и т. д. Свойства 1) — 3) преобразований Фурье для функций многих переменных сохраняются. Например, как и в случае одной переменной, рассмотрим совокупность $S(\mathbb{R}^m)$ бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}^m$ функций $y = \varphi(x)$, где $x = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m$, которые для всех $k_1, \dots, k_m, n_1, \dots, n_m = 0, 1, \dots$ удовлетворяют неравенствам

$$\left| \xi_1^{k_1} \dots \xi_m^{k_m} \frac{\partial^{n_1 + \dots + n_m} \varphi}{\partial \xi_1^{n_1} \dots \partial \xi_m^{n_m}} \right| \leq C_{k_1, \dots, k_m; n_1, \dots, n_m} \quad (\forall x \in \mathbb{R}^m),$$

где $C_{k_1, \dots, k_m; n_1, \dots, n_m}$ — постоянные, зависящие от функции φ . Тогда преобразование Фурье отображает класс $S(\mathbb{R}^m)$ на себя, т. е. $F[S(\mathbb{R}^m)] = S(\mathbb{R}^m)$.

Свертка двух функций $f, g \in L_1(\mathbb{R}^m, \mu_m)$ определяется равенством

$$(f * g)(\xi_1, \dots, \xi_m) = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau_1, \dots, \tau_m) g(\xi_1 - \tau_1, \dots, \xi_m - \tau_m) d\tau_1 \dots d\tau_m.$$

Как и для функций одной переменной в случае многих переменных $F[f * g] = F[f] \cdot F[g]$, если f и g принадлежат пространству $L_1(\mathbb{R}, \mu_m)$.

4. Преобразование Фурье функций пространства $L_2(\mathbb{R})$. Функция φ , принадлежащая пространству $L_2(\mathbb{R}, \mu_1)$, вообще говоря, не принадлежит $L_1(\mathbb{R}, \mu_1)$. Например, $\varphi(x) = \frac{1}{1+|x|} \in L_2(\mathbb{R}, \mu_1)$, но $\varphi(x) \notin L_1(\mathbb{R}, \mu_1)$. Поэтому для нее не определено преобразование Фурье, о котором шла речь в п. 3. Однако для всякой функции $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ можно определить преобразование Фурье в несколько ином смысле. При этом получаем следующую теорему.

Теорема 14 (П л а н ш е р е л я). Для каждой функции $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ интеграл

$$\psi_N(\sigma) = \int_{-N}^N \varphi(x) e^{i\sigma x} dx \quad (\sigma \in \mathbb{R})$$

при любом натуральном N представляет собой функцию от σ , принадлежащую $L_2(\mathbb{R})$. При $N \rightarrow +\infty$ последовательность функций $(\psi_N(\sigma))_{N=1}^{\infty}$ сходится по норме пространства $L_2(\mathbb{R})$ к некоторому пределу $\psi(\sigma)$ (т. е. $\|\psi_N - \psi\|_{L_2(\mathbb{R})} \rightarrow 0$ при $N \rightarrow +\infty$), причем

$$\int_{\mathbb{R}} |\psi(\sigma)|^2 d\sigma = 2\pi \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|^2 dx. \quad (9)$$

Функцию ψ называют преобразованием Фурье функции $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ и обозначают, как и раньше, через $F[\varphi]$ или $\hat{\varphi}$.

Если φ принадлежит также пространству $L_1(\mathbb{R})$, то соответствующая функция ψ совпадает с преобразованием Фурье функции φ в обычном смысле. Равенство (9) называют равенством Парсеваля.

Отметим, что если φ_1 и φ_2 — любые функции из $L_2(\mathbb{R})$ и ψ_1, ψ_2 — их преобразования Фурье, то

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_1(\sigma) \overline{\psi_2(\sigma)} d\sigma = 2\pi \int_{\mathbb{R}} \varphi_1(x) \overline{\varphi_2(x)} dx$$

(черта над функцией означает переход к комплексно-сопряженной функции).

Рассмотренные здесь вопросы более детально освещены в [20; 23; 27; 33].

Примеры решения задач

1. Доказать, что множество $L_p = L_p(A, \mu)$, $p \geq 1$, — линейное.

Решение Напомним, что элементами множества L_p являются классы μ -эквивалентных на A функций, причем если f — представитель этого класса, то f μ -измерима, почти всюду конечна на A и $\int_A |f(x)|^p d\mu < +\infty$.

Действие сложения в L_p вводится следующим образом. Для любых двух классов из L_p , представителей которых обозначим через f и g их суммой называется класс всех μ -эквивалентных $f + g$ функций на A . Отметим, что данное определение корректно. А именно, если $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$ — другие представители рассматриваемых классов, то $f \sim \tilde{f}$ и $g \sim \tilde{g}$ на A относительно меры μ . Поэтому по свойствам μ -эквивалентных функций классы μ -почти всюду равных на A функций с $f + g$ и μ -почти всюду равных на A функций с $\tilde{f} + \tilde{g}$ совпадают. Покажем, что сумма двух классов из L_p также принадлежит L_p . Пусть f и g — представители этих классов. Тогда функция $f + g$ является представителем суммы этих классов. Функция $f + g$ μ -измерима и почти всюду конечна на A , как сумма μ -измеримых и почти всюду конечных на A функций f и g . Нужно еще доказать, что интеграл $\int_A |f(x) + g(x)|^p d\mu$ конечен,

зная, что функций $|f|^p$ и $|g|^p$ μ -интегрируемы на A . Для этого оценим $|f(x) + g(x)|^p$.

Если в некоторой точке $x \in A$ $|f(x)| \leq |g(x)|$, то

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x)|^p &\leq (|f(x)| + |g(x)|)^p \leq \\ &\leq 2^p |g(x)|^p \leq 2^p (|f(x)|^p + |g(x)|^p). \end{aligned}$$

Если же $|g(x)| \leq |f(x)|$, то аналогично получаем

$$|f(x) + g(x)|^p \leq 2^p |f(x)|^p \leq 2^p (|f(x)|^p + |g(x)|^p).$$

Таким образом, почти всюду на A справедливо неравенство

$$|f(x) + g(x)|^p \leq 2^p (|f(x)|^p + |g(x)|^p).$$

Поскольку функции $|f|^p$ и $|g|^p$ μ -интегрируемы на A , то их сумма $|f|^p + |g|^p$ также μ -интегрируема на A . Поэтому функция

$2^p (|f|^p + |g|^p)$ μ -интегрируема на A и, следовательно, согласно свойству 6 интеграла Лебега (см. § 3), функция $|f + g|^p$ также μ -интегрируема, т. е. конечен интеграл $\int_A |f(x) + g(x)|^p d\mu$.

Отметим, что если $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$ — другие представители рассматриваемых классов, то $\tilde{f}(x) + \tilde{g}(x)$ μ -почти всюду на A равна $f(x) + g(x)$. Тогда интеграл $\int_A |\tilde{f}(x) + \tilde{g}(x)|^p d\mu$ также конечен, поскольку

$$\int_A |\tilde{f}(x) + \tilde{g}(x)|^p d\mu = \int_A |f(x) + g(x)|^p d\mu.$$

Таким образом, действие сложения элементов множества L_p определено корректно и сумма двух классов из L_p также принадлежит L_p .

Свойства действия сложения в L_p (коммутативность, ассоциативность, существование нулевого класса и класса, противоположного заданному) легко проверяются (путем сведения к рассмотрению представителей классов). В частности, нулевой класс в L_p определяется как класс, для которого тождественно нулевая на A функция является его представителем. Если в L_p рассматривается класс с представителем f , то ему противоположный класс имеет представителя $-f$.

Теперь определим действие умножения элемента множества L_p на действительное число. Рассмотрим в L_p класс с представителем f . Пусть α — действительное число. Тогда произведением рассматриваемого класса на число α называется класс всех μ -эквивалентных с αf функций на A . Отметим, что если $\tilde{f}$ — другой представитель этого класса, то $\alpha \tilde{f} \sim \alpha f$ на A и поэтому

$$\int_A |\alpha \tilde{f}(x)|^p d\mu = \int_A |\alpha f(x)|^p d\mu = |\alpha|^p \int_A |f(x)|^p d\mu < +\infty.$$

Следовательно, действие умножения элементов из L_p на число определено корректно и произведение элемента из L_p на число снова принадлежит L_p .

Нетрудно проверяются и все свойства действия умножения элементов L_p на числа, которые присутствуют в определении линейного пространства.

Таким образом, множество L_p , $p \geq 1$, действительно является линейным пространством.

Отметим также, что расстояние между элементами пространства L_p и норма элементов из L_p определены корректно, т. е. эти величины не зависят от функций, представляющих эти элементы.

2. Показать, что функция $y = \left(x \ln^2 \frac{1}{x}\right)^{-1}$ принадлежит пространству $L_1 \left(\left[0; \frac{1}{2}\right], \mu_1\right)$, но не принадлежит ни одному из пространств $L_p \left(\left[0; \frac{1}{2}\right], \mu_1\right)$, если $p > 1$. Здесь μ_1 — мера Лебега на $\mathbb{R}$.

Решение. Рассматриваемая функция на полуинтервале $\left(0; \frac{1}{2}\right]$ непрерывна и конечна. Поэтому она μ_1 -измерима и почти всюду на $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ конечна. Докажем, что функция $y = \left(x \ln^2 \frac{1}{x}\right)^{-1}$ интегрируема по Лебегу на отрезке $\left[0; \frac{1}{2}\right]$. Для этого, согласно примеру 29 из § 3, докажем, что несобственный интеграл

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln^2 \frac{1}{x}} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln^2 x}$$

от заданной положительной функции сходится. Этот интеграл легко вычисляется с помощью формулы Ньютона — Лейбница

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{d \ln x}{\ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x} \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\ln 2}.$$

Таким образом, заданная функция принадлежит пространству $L_1\left(\left[0; \frac{1}{2}\right], \mu_1\right)$.

Докажем, что функция $y = \left(x \ln^2 \frac{1}{x}\right)^{-1}$ не принадлежит ни одному из пространств $L_p\left(\left[0; \frac{1}{2}\right], \mu_1\right)$, если $p > 1$. Для этого покажем, что несобственный интеграл

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^p \ln^{2p} x}$$

является расходящимся для $p > 1$. С этой целью подберем такое $\varepsilon > 0$, что $p - \varepsilon > 1$. Кроме того, применяя правило Лопиталья, убеждаемся, что $\lim_{x \rightarrow +0} x^\varepsilon \ln^{2p} x = 0$. Поэтому для достаточно малых x ($x \in (0; \delta)$) справедлива оценка

$$\frac{1}{x^p \ln^{2p} x} = \frac{x^{-\varepsilon} \ln^{-2p} x}{x^{p-\varepsilon}} \geq \frac{1}{x^{p-\varepsilon}}.$$

Поскольку интеграл $\int_0^\delta \frac{dx}{x^{p-\varepsilon}}$ является расходящимся, то расходит-

ся и интеграл $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^p \ln^{2p} x}.$

Таким образом, функция $y = \left(x \ln^2 \frac{1}{x}\right)^{-1} \notin L_p\left(\left[0; \frac{1}{2}\right], \mu_1\right)$, если $p > 1$.

3. 1) Определить, для каких значений $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ функция $f(x) = \frac{|\arctg x|^\beta}{(1+x^2)^\alpha}$, $x \in \mathbb{R}$, принадлежит пространству $L_p(\mathbb{R}, \mu_1)$, $p \geq 1$, где

μ_1 — мера Лебега на числовой оси $\mathbb{R}$.

2) Определить, для каких значений $\alpha \in \mathbb{R}$ функция $f(x, y) = \frac{1}{(1+x^2+y^2)^\alpha}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, принадлежит пространству $L_p(\mathbb{R}^2, \mu_2)$, $p \geq 1$, где μ_2 — мера Лебега на плоскости $\mathbb{R}^2$.

Решение. 1) Рассматриваемая функция f , очевидно, μ_1 -измерима и конечна на $\mathbb{R}$. Выясним, для каких α и β функция f^p является μ_1 -интегрируемой на $\mathbb{R}$. Для этого (см. пример 2) исследуем на сходимость несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\arctg x|^{\beta p}}{(1+x^2)^{\alpha p}} dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{(\arctg x)^{\beta p}}{(1+x^2)^{\alpha p}} dx. \quad (10)$$

Особыми точками для этого интеграла являются точки $x = 0$, $x = +\infty$. Поскольку при $x \rightarrow 0$ для $\beta < 0$ имеем $\frac{(\arctg x)^{\beta p}}{(1+x^2)^{\alpha p}} \sim x^{\beta p} = \frac{1}{x^{-\beta p}}$, то рассматриваемый несобственный интеграл сходится в окрестности точки $x = 0$ только тогда, когда $\beta > -\frac{1}{p}$. При $\beta \geq 0$ в окрестности $x = 0$ он также сходится, поскольку подынтегральная функция в этом случае непрерывна. Следовательно, для всех $\beta > -\frac{1}{p}$ и произвольных α в окрестности точки $x = 0$ интеграл (10) сходится.

Поскольку, далее, при $x \rightarrow +\infty$

$$\frac{(\arctg x)^{\beta p}}{(1+x^2)^{\alpha p}} \sim \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\beta p} \frac{1}{x^{2\alpha p}},$$

то интеграл (10) сходится в окрестности точки $x = +\infty$ только при $\alpha > \frac{1}{2p}$. Следовательно, $f \in L_p(\mathbb{R}, \mu_1)$ лишь тогда, когда $\alpha > \frac{1}{2p}$ и $\beta > -\frac{1}{p}$.

2) Измеримость в смысле меры Лебега μ_2 и конечность на $\mathbb{R}^2$ функции f очевидна. Тогда $f \in L_p(\mathbb{R}^2, \mu_2)$, если сходится несобственный двойной интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^{\alpha p}}. \quad (11)$$

В данном интеграле перейдем к полярным координатам: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, где $r \geq 0$ и $\varphi \in [0; 2\pi]$. Тогда интеграл (11) приводится

к однократному интегралу

$$2\pi \int_0^{+\infty} \frac{r dr}{(1+r^2)^{\alpha p}}. \quad (12)$$

Поскольку при $r \rightarrow +\infty$

$$\frac{r}{(1+r^2)^{\alpha p}} \sim \frac{1}{r^{2\alpha p-1}},$$

то интеграл (12) (а следовательно, и (11)) сходится при $\alpha > \frac{1}{p}$. Таким образом, $f \in L_2(\mathbb{R}^2, \mu_2)$ только тогда, когда $\alpha > \frac{1}{p}$.

4. Пусть $f \in L_p((0; +\infty), \mu_1)$, $1 < p < 2$. Доказать, что интеграл

$$\int_0^{+\infty} f(x) \frac{\sin xy}{\sqrt{x}} dx, \quad y \in \mathbb{R},$$

является абсолютно сходящимся

Решение. Для заданного числа p рассмотрим его сопряженное q .

Поскольку $q = \frac{p}{p-1}$, а $1 < p < 2$, то $q > 2$.

При каждом фиксированном $y \in \mathbb{R}$ функция $\varphi(x) = \frac{\sin xy}{\sqrt{x}}$, $x \geq 0$, принадлежит пространству $L_q((0; +\infty), \mu_1)$, ибо $|\varphi(x)|^q \leq \frac{1}{x^{\frac{q}{2}}}$ ($x > 0$; $q > 2$). Тогда из неравенства Гельдера для функций

f и φ следует, что произведение $f(x) \cdot \frac{\sin xy}{\sqrt{x}}$, $x \geq 0$, является интегрируемой по Лебегу функцией на $[0; +\infty)$, т. е. заданный интеграл абсолютно сходится.

5. Рассмотрим для $p \geq 1$ множество l_p всех таких числовых последовательностей $x = (\xi_n)_{n=1}^{\infty}$, что сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p$. Снабдим это множество структурой линейного пространства: если $x = (\xi_n)_{n=1}^{\infty} \in l_p$, $y = (\eta_n)_{n=1}^{\infty} \in l_p$ и $\alpha \in \mathbb{R}$, то положим $x + y = (\xi_n + \eta_n)_{n=1}^{\infty}$, а $\alpha x = (\alpha \xi_n)_{n=1}^{\infty}$. Доказать, что множество l_p является линейным пространством.

Для элементов $x = (\xi_n)_{n=1}^{\infty}$, $y = (\eta_n)_{n=1}^{\infty}$ пространства l_p введем расстояние между ними по формуле

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n - \eta_n|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

а для элемента $x \in l_p$ — норму $\|x\|$, полагая

$$\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Доказать, что тогда пространство l_p является метрическим и нормированным.

Решение. Внешнее сходство пространств l_p и $L_p(A, \mu)$ наводит на мысль о возможности реализации l_p как одного из пространств $L_p(A, \mu)$. Осуществим эту идею.

Пусть множество X совпадает с множеством $\mathbb{N}$ натуральных чисел. На полукольце $\mathfrak{A}$ всех конечных подмножеств множества $\mathbb{N}$ определим счетно-аддитивную меру μ , полагая, что мера каждого одноточечного множества $\{n\}$ равна единице. Таким образом, мера любого конечного подмножества из $\mathbb{N}$ равна количеству его элементов. Эта мера имеет лебегово продолжение на σ -алгебру $\mathfrak{A} = 2^{\mathbb{N}}$ всех подмножеств множества $\mathbb{N}$, причем она является полной и σ -конечной. Поэтому рассмотрим измеримое пространство $(\mathbb{N}, \mathfrak{A}, \mu)$.

Наличие σ -аддитивной меры μ на $\mathbb{N}$ позволяет ввести понятие интеграла Лебега по этой мере μ . Произвольная функция, определенная на множестве $\mathbb{N}$, т. е. последовательность $x = (\xi_n)_{n=1}^{\infty}$, является простой и μ -измеримой. Она μ -интегрируема на $\mathbb{N}$ тогда и

только тогда, когда абсолютно сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$. В этом случае

$\int_{\mathbb{N}} x d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$. Поэтому пространство $L_p(\mathbb{N}, \mu)$, $p \geq 1$, состоит толь-

ко из тех последовательностей $x = (\xi_n)_{n=1}^{\infty}$, для которых $\int_{\mathbb{N}} |x|^p d\mu =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p < +\infty$. Таким образом, $L_p(\mathbb{N}, \mu) = l_p$, $p \geq 1$. Отметим,

что расстояние между элементами (а также норма элемента) в l_p совпадает с расстоянием (нормой) в $L_p(\mathbb{N}, \mu)$. Поэтому пространство l_p является линейным, метрическим и нормированным.

Замечание. Из предложенной выше реализации l_p как $L_p(\mathbb{N}, \mu)$ получаем неравенства Гельдера и Минковского для сумм. Пусть $p > 1$, q — сопряженное ему число, последовательность $x = (\xi_n)_{n=1}^{\infty} \in l_p$, а $y = (\eta_n)_{n=1}^{\infty} \in l_q$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \eta_n$ абсолютно сходится и справедливо неравенство Гельдера для сумм

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \eta_n \right| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Это неравенство, соответствующее $p = 2$ и $q = 2$, называется неравенством Коши — Буняковского для сумм. Если $p \geq 1$ и последовательности $x = (\xi_n)_{n=1}^{\infty}$ и $y = (\eta_n)_{n=1}^{\infty}$ принадлежат пространству l_p , то справедливо неравенство Минковского для суммы

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n + \eta_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

6. Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — измеримое пространство, $A \in \mathfrak{A}$ и мера $\mu(A)$ конечна. Доказать, что если $r > p \geq 1$, то $L_r(A, \mu) \subset L_p(A, \mu)$. Доказать также, что если $f_n \rightarrow f$ в L_r , то $f_n \rightarrow f$ в L_p .

Решение. Пусть $\tilde{f} \in L_r(A, \mu)$. Тогда $|\tilde{f}|^p$ принадлежит пространству $L_{\frac{r}{p}}(A, \mu)$, поскольку, согласно условию, сходится интеграл

$$\int_A (|\tilde{f}(x)|^p)^{\frac{r}{p}} d\mu = \int_A |\tilde{f}(x)|^r d\mu.$$

Кроме того, функция $g(x) = 1, x \in A$, принадлежит пространству $L_q(A, \mu)$ для произвольного $q \geq 1$, так как $\mu(A) < +\infty$. В качестве q выберем число, сопряженное с $\frac{r}{p}$, т. е. положим $q = \frac{r}{r-p}$. Теперь к паре функций $|\tilde{f}|^p$ и g применим неравенство Гельдера

$$\int_A |\tilde{f}(x)|^p d\mu \leq \left(\int_A |\tilde{f}(x)|^r d\mu \right)^{\frac{p}{r}} (\mu(A))^{\frac{r-p}{r}}.$$

Отсюда следует, что $\tilde{f} \in L_p(A, \mu)$. Кроме того, для нормы $\|\tilde{f}\|_{L_p}$ справедливо неравенство

$$\|\tilde{f}\|_{L_p} \leq \|\tilde{f}\|_{L_r} (\mu(A))^{\frac{r-p}{pr}}. \quad (12)'$$

Пусть задана функциональная последовательность $(f_n(x))_{n=1}^\infty$, $x \in A$, элементов пространства $L_r(A, \mu)$, сходящаяся в этом пространстве к функции $f(x) \in L_r(A, \mu)$, т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(x) - f(x)\|_{L_r} = 0$.

Тогда из неравенства (12) имеем

$$\|f_n(x) - f(x)\|_{L_p} \leq \|f_n(x) - f(x)\|_{L_r} (\mu(A))^{\frac{r-p}{pr}} \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(x) - f(x)\|_{L_p} = 0$ и, следовательно, последовательность $(f_n(x))_{n=1}^\infty, x \in A$, сходится к функции f и в пространстве $L_p(A, \mu)$

Замечание. Если $\mu(A) = +\infty$, то вложение $L_r(A, \mu) \subset L_p(A, \mu)$ не всегда справедливо. Например, пространство $L_2(\mathbb{R}, \mu_1)$ интегрируемых с квадратом функций на $\mathbb{R}$ не является подмножеством пространства $L_1(\mathbb{R}, \mu_1)$ (см. п. 4)

7. Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — измеримое пространство и множество $A \subset X$ является μ -измеримым. Доказать, что если $f \in (L_p(A, \mu) \cap L_r(A, \mu))$, где $1 \leq p < r$, то функция f принадлежит пространствам $L_s(A, \mu)$ при всех $s \in (p; r)$.

Решение. Поскольку функция f μ -измерима, то множества $B = \{x \in A : |f(x)| \leq 1\}$ и $C = \{x \in A : |f(x)| > 1\}$ также μ -измеримы и $B \cap C = \emptyset$. Покажем, что функция f принадлежит пространствам $L_s(B, \mu)$ и $L_s(C, \mu)$, если $p < s < r$. Действительно, на множествах B и C справедливы неравенства:

$$|f(x)|^s \leq |f(x)|^p \quad (\forall x \in B); \quad (13)$$

$$|f(x)|^s \leq |f(x)|^r \quad (\forall x \in C). \quad (14)$$

Из (13) и того очевидного факта, что если $f \in L_p(A, \mu)$, то $f \in L_p(B, \mu)$, следует, что $f \in L_s(B, \mu)$. Аналогично из неравенства (14) следует, что $f \in L_s(C, \mu)$. Тогда $f \in L_s(A, \mu)$, поскольку

$$\int_A |f(x)|^s d\mu = \int_B |f(x)|^s d\mu + \int_C |f(x)|^s d\mu.$$

8. Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — измеримое пространство, а множество A принадлежит σ -алгебре $\mathfrak{A}$. Рассмотрим последовательность функций $(f_n(x))_{n=1}^\infty$, $x \in A$, принадлежащих пространству $L_p(A, \mu)$, $p \geq 1$, и функцию $\varphi \in L_p(A, \mu)$, для которых выполнены условия:

- 1) $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$ для почти всех $x \in A$ и всех $n \in \mathbb{N}$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ почти всюду на A .

Доказать, что функция f принадлежит $L_p(A, \mu)$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) d\mu = \int_A f(x) d\mu$.

Решение. Из неравенства $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$, справедливого для почти всех $x \in A$ и всех $n \in \mathbb{N}$, при $n \rightarrow \infty$ получаем, что $|f(x)| \leq \varphi(x)$ для почти всех $x \in A$. Отсюда, поскольку $\varphi \in L_p(A, \mu)$, f также принадлежит пространству $L_p(A, \mu)$.

Рассмотрим теперь последовательность μ -интегрируемых на A функций $g_n(x) = |f_n(x) - f(x)|^p$, $x \in A$. Тогда, согласно условию 2), $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = 0$ почти всюду на A . Чтобы воспользоваться теоремой Лебега о предельном переходе под знаком интеграла (см. § 3), найдем для последовательности $(g_n(x))_{n=1}^\infty$, $x \in A$, μ -интегрируемую мажоранту. Так как (см. пример 1), для функций $f, g \in L_p(A, \mu)$ справедливо неравенство

$$|f(x) + g(x)|^p \leq 2^p (|f(x)|^p + |g(x)|^p),$$

то отсюда и из условия 1) вытекает

$$g_n(x) \leq 2^p (|f(x)|^p + |\varphi(x)|^p).$$

Следовательно, с учетом μ -интегрируемости функций $|f|^p$ и $|\varphi|^p$ функция $2^p (|f|^p + |\varphi|^p)$ может быть принята в качестве интегрируемой мажоранты для последовательности $(g_n(x))_{n=1}^\infty$, $x \in A$. Поэтому, на основании упомянутой выше теоремы Лебега, возможен предельный переход под знаком интеграла, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A g_n(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A |f_n(x) - f(x)|^p d\mu = 0.$$

Таким образом, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) d\mu = \int_A f(x) d\mu$ и в пространстве $L_p(A, \mu)$.

9. Определим для каждого натурального числа n на полусегменте $[0; 1) = A \subset \mathbb{R}$ функции $f_1^{(n)}, f_2^{(n)}, \dots, f_n^{(n)}$ следующим образом:

$$f_k^{(n)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } \frac{k-1}{n} \leq x < \frac{k}{n}, \\ 0 & \text{при } x \notin \left[\frac{k-1}{n}; \frac{k}{n} \right). \end{cases}$$

Занумеруем все эти функции в виде функциональной последовательности $(g_n(x))_{n=1}^{\infty}$, $x \in A$, т. е. положим $g_1(x) = f_1^{(1)}(x)$, $g_2(x) = f_1^{(2)}(x)$, $g_3(x) = f_2^{(2)}(x)$, $g_4(x) = f_1^{(3)}(x)$, ... Доказать, что функциональная последовательность $(g_n(x))_{n=1}^{\infty}$ сходится к функции $g(x) = 0$, $x \in A$, в каждом пространстве $L_p([0; 1], \mu_1)$, где $p \geq 1$ и μ_1 — мера Лебега на $\mathbb{R}$. Показать также, что последовательность $(g_n(x))_{n=1}^{\infty}$ не является сходящейся (поточечно) в каждой точке $x \in A$.

Решение. Все функции g_n , принимающие только два значения, являются μ_1 -интегрируемыми на A с любой степенью $p \geq 1$, т. е. $g_n \in L_p(A, \mu_1)$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Кроме того,

$$\int_A |g_n(x)|^p d\mu_1 = \mu_1\{x \in A : g_n(x) = 1\} \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Найдем теперь меру множества, на котором функция $g_n(x)$ равна единице. Если $g_n(x) = f_m^{(k)}(x)$, то $\mu_1\{x \in A : g_n(x) = 1\} = \mu_1\{x \in A : f_m^{(k)}(x) = 1\} = \mu_1\left(\left[\frac{m-1}{k}, \frac{m}{k}\right)\right) = \frac{1}{k}$. Поскольку при $n \rightarrow \infty$ и $k \rightarrow \infty$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A |g_n(x)|^p d\mu_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0.$$

Таким образом, $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = 0$ в $L_p(A, \mu)$.

Вместе с тем соотношение $g_n(x) \rightarrow 0$ не выполняется ни в одной точке промежутка $[0; 1]$. Действительно, если $x_0 \in [0; 1]$, то для каждого номера k имеется такой номер m , что $f_m^{(k)}(x_0) = 1$, и такой номер s , что $f_s^{(k)}(x_0) = 0$. Построим для точки x_0 две подпоследовательности $(g_{n_l}(x))_{l=1}^{\infty}$ и $(g_{n'_l}(x))_{l=1}^{\infty}$ такие, что $\lim_{l \rightarrow \infty} g_{n_l}(x_0) = \lim_{l \rightarrow \infty} 1 = 1$, а $\lim_{l \rightarrow \infty} g_{n'_l}(x_0) = \lim_{l \rightarrow \infty} 0 = 0$. Значит, последовательность $(g_n(x_0))_{n=1}^{\infty}$ не является сходящейся. Поскольку x_0 — произвольная точка промежутка $[0; 1]$, то действительно последовательность $(g_n(x))_{n=1}^{\infty}$ не является сходящейся в каждой точке $x \in [0; 1]$.

10. 1) Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — измеримое пространство, $A \subset X$ — измеримое множество и число $p \geq 1$. Доказать, что если последовательность $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ функций из пространства $L_p(A, \mu)$ сходится в этом пространстве к функции $f \in L_p(A, \mu)$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \stackrel{\mu}{=} f(x)$ на A .

2) Определить, при каких значениях $p \geq 1$ последовательность $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ функций из пространства $L_p(\mathbb{R}, \mu_1)$ сходится в $L_p(\mathbb{R}, \mu_1)$, если:

- а) $f_n(x) = \sqrt[n]{n} \chi_{\left[0; \frac{1}{n}\right)}(x)$, где $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, $\chi_{\left[0; \frac{1}{n}\right)}(x)$ — характеристическая функция промежутка $\left[0; \frac{1}{n}\right)$;
- б) $f_n(x) = n^2 e^{-nx^2}$, где $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$.

Решение. 1) Напомним (см. § 3), что последовательность μ -измеримых функций $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$, $x \in A$, сходится по мере μ на множестве A , если для каждого $\sigma > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu \{x \in A : |f_n(x) - f(x)| \geq \sigma\} = 0.$$

Поэтому рассмотрим произвольное $\sigma > 0$ и пусть $A_n(\sigma) = \{x \in A : |f_n(x) - f(x)| \geq \sigma\}$. Тогда, согласно свойству аддитивности интеграла Лебега, имеем

$$\begin{aligned} \int_A |f_n(x) - f(x)|^p d\mu &= \int_{A_n(\sigma)} |f_n(x) - f(x)|^p d\mu + \\ &+ \int_{A \setminus A_n(\sigma)} |f_n(x) - f(x)|^p d\mu \geq \int_{A_n(\sigma)} |f_n(x) - f(x)|^p d\mu \geq \\ &\geq \sigma^p \mu(A_n(\sigma)) \quad (\forall n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

Отсюда получаем неравенство

$$\mu \{x \in A : |f_n(x) - f(x)| \geq \sigma\} \leq \frac{1}{\sigma^p} \int_A |f_n(x) - f(x)|^p d\mu. \quad (15)$$

(При $p = 1$ оно называется *неравенством Чебышева*).

Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ в $L_p(A, \mu)$, то, устремляя в неравенстве (15) n к $+\infty$, получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu \{x \in A : |f_n(x) - f(x)| \geq \sigma\} = 0,$$

т. е. последовательность $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$, $x \in A$, сходится к функции $f(x)$ по мере μ на множестве A .

Замечание. При решении конкретных примеров следует помнить следующее. Если последовательность функций $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится к функции f в $L_p(A, \mu)$, то, как мы только что показали, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \stackrel{\mu}{=} f(x)$ на A . Тогда по теореме Рисса (см. § 3, теорема 6) существует подпоследовательность $(f_{n_k}(x))_{k=1}^{\infty}$, сходящаяся почти всюду (относительно меры μ) на A к функции $f(x)$. Таким образом, если последовательность функций $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$, $x \in A$, пространства $L_p(A, \mu)$ сходится в этом же пространстве к функции $f(x) \in L_p(A, \mu)$, то существует подпоследовательность $(f_{n_k}(x))_{k=1}^{\infty}$, $x \in A$, сходящаяся почти всюду на A к $f(x)$.

2'). Заданная последовательность $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$, $x \in \mathbb{R}$, сходится почти всюду (относительно меры Лебега μ_1) на $\mathbb{R}$ к функции $f(x) = 0$. В самом деле, если $x < 0$, то все $f_n(x) = 0$, и поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$. Если $x > 0$, то существует такой номер n_0 , что $\frac{1}{n_0} < x$. Тогда для $n \geq n_0$ $\chi_{[0; \frac{1}{n})}(x) = 0$ и поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$. Только в точке $x = 0$ имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = +\infty$. Таким образом, почти всюду на $\mathbb{R}$ последовательность $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ сходится к функции $f(x) = 0$.

Согласно замечанию к первой части примера 10, если последовательность $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ сходится в $L_p(\mathbb{R}, \mu)$ к какой-то функции, то эта предельная функция может быть только почти всюду равной нулю на $\mathbb{R}$. Поэтому надо проверить, для каких $p \geq 1$ $f_n(x) \rightarrow 0$ в $L_p(\mathbb{R}, \mu_1)$. Но

$$\int_{\mathbb{R}} [Vn \chi_{[0; \frac{1}{n}]}(x)]^p d\mu_1 = n^{\frac{p}{2}-1} \quad (\forall n \in \mathbb{N}),$$

и поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} [Vn \chi_{[0; \frac{1}{n}]}(x)]^p d\mu_1 = 0$ только при условии $p < 2$.

Следовательно, заданная последовательность $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ сходится только в тех пространствах $L_p(\mathbb{R}, \mu_1)$, для которых $1 \leq p < 2$.

2°) С помощью правила Лопиталья получаем, что последовательность $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$, $x \in \mathbb{R}$, сходится почти всюду на $\mathbb{R}$ к функции $f(x) = 0$. Поэтому (согласно замечанию, приведенному в этом примере) эта последовательность может сходиться в среднем только к функции, почти всюду равной нулю.

Исследуем, при каких $p \geq 1$ $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ в пространстве $L_p(\mathbb{R}, \mu_1)$.

Для этого вычислим соответствующие интегралы Лебега

$$\int_{\mathbb{R}} n^{2p} e^{-n^2 x^2} d\mu_1 = \frac{n^{2p}}{Vnp} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{n^{2p} V\pi}{Vnp} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

(здесь использован интеграл Ейлера — Пуассона $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = V\pi$).

Таким образом, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} n^{2p} e^{-n^2 x^2} d\mu_1 = 0$, если только $p < \frac{1}{4}$, что противоречит условию $p \geq 1$. Следовательно, заданная последовательность не является сходящейся хотя бы в одном из пространств $L_p(\mathbb{R}, \mu_1)$ с $p \geq 1$.

11. Проверить выполнимость в точке $x = 0$ условия Дини для следующих функций:

$$1) f(x) = \frac{1}{\ln \frac{1}{x}}, \text{ если } 0 < x \leq \pi, \text{ и } f(x) = 0 \text{ для } -\pi \leq x \leq 0;$$

$$2) f(x) = x^\alpha \sin \frac{1}{x}, \text{ если } 0 < x \leq \pi, \text{ и } f(x) = 0 \text{ для } -\pi \leq x \leq 0,$$

где $\alpha > 0$.

Решение. 1) Очевидно, что функция $f \in L_1[-\pi; \pi]$. Докажем, что для произвольного δ ($0 < \delta < 1$) интеграл (2) функции f для $x = 0$ является расходящимся. Действительно, для заданной функции f и точки $x = 0$ интеграл (2) имеет вид

$$\int_0^\delta \frac{dt}{t \left| \ln \frac{1}{t} \right|} = - \int_0^\delta \frac{dt}{t \ln t}.$$

Последний интеграл легко вычисляется с помощью формулы Ньютона — Лейбница

$$-\int_0^{\delta} \frac{dt}{t \ln t} = -\ln |\ln t| \Big|_0^{\delta} = +\infty.$$

Таким образом, условие Дини для заданной функции f в точке $x = 0$ не выполняется.

Отметим, что можно доказать (используя иные достаточные условия), что функция f тем не менее разлагается в ряд Фурье в точке $x = 0$.

2) Поскольку заданная функция f непрерывна на отрезке $[-\pi; \pi]$, то она на нем интегрируема по Лебегу, т. е. $f \in L_1[-\pi; \pi]$.

Интеграл (2) для функции f в точке $x = 0$ имеет вид $\int_0^{\delta} \frac{t^{\alpha} \left| \sin \frac{1}{t} \right|}{t} dt$.

Сходимость этого интеграла для $\alpha > 0$ следует из такого очевид-

ного неравенства: $\frac{\left| \sin \frac{1}{t} \right|}{t^{1-\alpha}} \leq \frac{1}{t^{1-\alpha}} \quad (t \in (0; \delta)).$

Таким образом, функция f в точке $x = 0$ удовлетворяет условию Дини. Тогда, согласно теореме 6, ее можно разложить в этой точке в ряд Фурье. Отметим, что если $0 < \alpha \leq 1$, то функция f в точке $x = 0$ не имеет конечной правой производной.

Выполнимость условия Дини для функции f в точке $x = 0$ можно получить и из того, что она удовлетворяет в этой точке условию Липшица порядка α , если $0 < \alpha \leq 1$. Для $\alpha > 1$ функция f дифференцируема в точке $x = 0$ и поэтому для нее также выполняется условие Дини.

12. Найти преобразование Фурье функций:

1) $\varphi(x) = 1$, если $|x| \leq 1$, и $\varphi(x) = 0$, если $|x| > 1$;

2) $\varphi(x) = e^{-a^2 x^2}$, $x \in \mathbb{R}$ (a — фиксированное число);

3) $\varphi(x) = \frac{\sin^2 ax}{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$ (a — фиксированное число).

Решение. 1) Очевидно, что функция φ интегрируема по Лебегу на $\mathbb{R}$. Поэтому она имеет преобразование Фурье. Согласно формуле (4), для $\sigma \neq 0$ получаем

$$\begin{aligned} F[\varphi](\sigma) &= \int_{-1}^1 e^{ix\sigma} dx = \int_{-1}^1 \cos x \sigma dx + i \int_{-1}^1 \sin x \sigma dx = \\ &= \frac{\sin x \sigma}{\sigma} \Big|_{x=-1}^{x=1} = \frac{2 \sin \sigma}{\sigma}. \end{aligned}$$

Если $\sigma = 0$, то из формулы (4) имеем

$$F[\varphi](0) = \int_{-1}^1 dx = 2.$$

Таким образом, если доопределить в точке $\sigma = 0$ функцию $\frac{\sin \sigma}{\sigma}$ по непрерывности, то $F[\varphi](\sigma) = \frac{2 \sin \sigma}{\sigma}$, $\sigma \in \mathbb{R}$.

Замечание. Полученная функция $F[\varphi]$ не является интегрируемой по Лебегу на числовой оси $\mathbb{R}$. Следовательно, преобразование Фурье интегрируемой по Лебегу на $\mathbb{R}$ функции не обязательно является интегрируемой по Лебегу функцией на $\mathbb{R}$.

Функция φ непрерывна в каждой точке $x \in \mathbb{R}$, кроме $x = 1$ и $x = -1$. Поскольку она имеет конечные односторонние производные в каждой точке числовой оси $\mathbb{R}$, то она удовлетворяет условию Дини на $\mathbb{R}$. Поэтому справедлива формула обращения (5)

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \sigma}{\sigma} e^{-i\sigma x} d\sigma.$$

Верно в этом случае и равенство Парсеваля (9), поскольку $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$. Оно приводит к формуле

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \sigma}{\sigma^2} d\sigma = \pi.$$

2) Функция $\varphi(x) = e^{-a^2 x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R})$, а также $L_2(\mathbb{R})$. Поэтому она имеет преобразование Фурье $\hat{\varphi}(\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{R}$, и

$$\hat{\varphi}(\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 x^2} e^{i\sigma x} dx, \quad \sigma \in \mathbb{R}.$$

Этот интеграл можно дифференцировать по параметру σ , поскольку интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} i x e^{-a^2 x^2} e^{i\sigma x} dx$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$ относительно переменной σ (функция $|x| e^{-a^2 x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, является интегрируемой мажорантой для подынтегральной функции этого интеграла). Поэтому функция $\hat{\varphi}$ дифференцируема на $\mathbb{R}$ и

$$\hat{\varphi}'(\sigma) = i \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-a^2 x^2} e^{i\sigma x} dx, \quad \sigma \in \mathbb{R}. \quad (16)$$

Заметим, что дифференцируемость преобразования Фурье функции φ и последнее равенство можно получить также из того, что $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$ и $x\varphi \in L_1(\mathbb{R})$.

Интеграл (16) вычислим с помощью интегрирования по частям

$$\hat{\varphi}'(\sigma) = -\frac{i}{2a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\sigma x} d(e^{-a^2 x^2}) = -\frac{\sigma}{2a^2} \hat{\varphi}(\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, искомое преобразование Фурье $\hat{\varphi}(\sigma)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\hat{\varphi}'(\sigma) + \frac{\sigma}{2a^2} \hat{\varphi}(\sigma) = 0, \quad \sigma \in \mathbb{R}.$$

Интегрируя это уравнение, получаем $\hat{\varphi}(\sigma) = Ce^{-\frac{\sigma^2}{4a^2}}$, $\sigma \in \mathbb{R}$. Для определения постоянной C отметим, что

$$\hat{\varphi}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{|a|}.$$

Следовательно, преобразование Фурье $\hat{\varphi}$ заданной функции φ найдено и $\hat{\varphi}(\sigma) = \frac{\sqrt{\pi}}{|a|} e^{-\frac{\sigma^2}{4a^2}}$, $\sigma \in \mathbb{R}$.

Отметим, что если $a^2 = \frac{1}{2}$, то функции $\varphi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$, и $\hat{\varphi}(\sigma) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\sigma^2}{2}}$, $\sigma \in \mathbb{R}$, отличаются лишь постоянным множителем.

3) Заданная функция φ принадлежит, очевидно, пространству $L_1(\mathbb{R})$. Поэтому для нее существует преобразование Фурье

$$\hat{\varphi}(\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 ax}{x^2} e^{i\sigma x} dx, \quad \sigma \in \mathbb{R}.$$

Поскольку функция φ четная, то, учитывая формулу Эйлера $e^{i\sigma x} = \cos \sigma x + i \sin \sigma x$, получаем

$$\hat{\varphi}(\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 ax}{x^2} \cos \sigma x dx, \quad \sigma \in \mathbb{R}.$$

Для вычисления этого интеграла воспользуемся теоремой о дифференцировании по параметру σ несобственного интеграла. С этой целью исследуем вопрос о равномерной сходимости (хотя бы в локальном смысле) интеграла от производной:

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 ax}{x} \sin \sigma x dx, \quad \sigma \in \mathbb{R}.$$

Представим его в виде суммы интегралов Дирихле:

$$\begin{aligned} & -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos 2ax}{2x} \sin \sigma x dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \sigma x}{2x} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2ax \cdot \sin \sigma x}{2x} dx = \\ & = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \sigma x}{2x} dx + \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin (2a + \sigma)x}{x} dx + \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin (\sigma - 2a)x}{x} dx. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить (например, на основании определения), что интеграл Дирихле $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \pi \operatorname{sign} \alpha$ равномерно сходится в

окрестности каждой точки $\alpha \in \mathbb{R}$, кроме $\alpha = 0$. Поэтому интеграл

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 ax}{x} \sin \sigma x dx, \quad \sigma \in \mathbb{R},$$

равномерно сходится в окрестности каждой точки $\sigma \in \mathbb{R}$, кроме $\sigma = 0$, $\sigma = 2a$ и $\sigma = -2a$.

Таким образом, для каждого $\sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2a, -2a\}$ функция $\hat{\varphi}$ дифференцируема и справедливо равенство

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}'(\sigma) = & -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \sigma x}{2x} dx + \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin (2a + \sigma)x}{x} dx + \\ & + \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin (\sigma - 2a)x}{x} dx. \end{aligned}$$

Для определенности считаем, что $a \geq 0$, поскольку $\hat{\varphi}$ зависит от a четным образом. Тогда, учитывая значения интегралов Дирихле, имеем

$$\hat{\varphi}'(\sigma) = \begin{cases} 0, & \sigma < -2a, \\ \frac{\pi}{2}, & -2a < \sigma < 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & 0 < \sigma < 2a, \\ 0, & \sigma > 2a. \end{cases}$$

Отсюда, интегрируя по σ , получаем

$$\hat{\varphi}(\sigma) = \begin{cases} C_1, & \sigma < -2a, \\ \frac{\pi}{2} \sigma + C_2, & -2a < \sigma < 0, \\ -\frac{\pi}{2} \sigma + C_3, & 0 < \sigma < 2a, \\ C_4, & \sigma > 2a. \end{cases}$$

Определим постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 . Постоянные C_1 и C_4 найдем, используя соотношения $\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \hat{\varphi}(\sigma) = \lim_{\sigma \rightarrow -\infty} \hat{\varphi}(\sigma) = 0$. Следовательно,

$C_1 = C_4 = 0$. Преобразование Фурье $\hat{\varphi}$ непрерывно в точках $\sigma = -2a$ и $\sigma = 2a$. Поэтому $\lim_{\sigma \rightarrow -2a+0} \hat{\varphi}(\sigma) = \lim_{\sigma \rightarrow -2a-0} \hat{\varphi}(\sigma)$, т. е. $\frac{\pi}{2}(-2a) + C_2 = 0$. Тогда $C_2 = \pi a$. Аналогично $C_3 = \pi a$. Тогда окончательно преобразование Фурье $\hat{\varphi}$ заданной функции φ запишем в виде

$$\hat{\varphi}(\sigma) = \begin{cases} 0, & |\sigma| \geq 2a, \\ \pi \left(a - \frac{|\sigma|}{2} \right), & |\sigma| \leq 2a. \end{cases}$$

Поскольку функция φ дифференцируема, то она удовлетворяет условию Дини и, следовательно, справедлива формула обращения

$$\frac{\sin^2 ax}{x^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(\sigma) e^{-i\sigma x} d\sigma.$$

Равенство Парсеваля (9) позволяет вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^4 ax}{x^4} dx$,

который оказывается равным $\frac{2\pi |a|^3}{3}$.

13. Пусть функция $y = \varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, такова, что для некоторого положительного числа b функция $y = \varphi(x) e^{b|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R})$. Показать, что тогда ее преобразование Фурье $\hat{\varphi}(\sigma)$ является ограниченной аналитической функцией $\hat{\varphi}(\sigma + i\tau)$ комплексного переменного в полосе $|\tau| < b$.

Решение. Очевидно, функция φ интегрируема по Лебегу на числовой оси $\mathbb{R}$. Поэтому для нее существует преобразование Фурье

$$\hat{\varphi}(\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{i\sigma x} dx, \quad \sigma \in \mathbb{R}.$$

Покажем, что это преобразование Фурье можно рассматривать и для некоторых значений комплексного переменного. Пусть $z \in \mathbb{C}$, т. е. $z = \sigma + i\tau$, где σ и τ вещественны. Положим

$$\hat{\varphi}(\sigma + i\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{i(\sigma + i\tau)x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-\tau x} e^{i\sigma x} dx.$$

Согласно условию, функция $\varphi(x) e^{-\tau x}$, $x \in \mathbb{R}$, интегрируема по Лебегу для $|\tau| \leq b$, и поэтому для нее существует интеграл Фурье. Следовательно, в указанной горизонтальной полосе для комплексного z имеет смысл функция

$$\hat{\varphi}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{izx} dx, \quad |\tau| \leq b.$$

Покажем, что функция $\hat{\varphi}$ дифференцируема по z в открытой полосе $|\tau| < b$. Для доказательства этого отметим, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ix\varphi(x) e^{izx} dx \tag{17}$$

сходится равномерно по z во всякой внутренней полосе $|\tau| \leq c$, $c < b$. Действительно, для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такая постоянная C_ε , что $|x| \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon|x|}$ для всех $x \in \mathbb{R}$ (ибо $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |x| e^{-\varepsilon|x|} = 0$). Тогда возьмем такое ε , что $0 < \varepsilon < b - c$, и проведем оценку подынтеграль-

ной функции интеграла (17)

$$\begin{aligned} |ix\varphi(x)e^{izx}| &= |x| \cdot |\varphi(x)e^{-\tau x}| \leq \\ &\leq C_e |\varphi(x)| e^{b|x|} e^{c|x|} \leq C_e |\varphi(x)| e^{b|x|}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Следовательно, функция $C_e |\varphi(x)| e^{b|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, является интегрируемой мажорантой для подынтегральной функции интеграла (17), и поэтому этот интеграл сходится равномерно в окрестности каждой точки z полосы $|\tau| < b$. Тогда, согласно свойствам несобственных интегралов, зависящих от параметра, функция $\hat{\varphi}$ дифференцируема в полосе $|\tau| < b$, т. е. является аналитической в этой полосе.

Докажем ограниченность функции $\hat{\varphi}$ в полосе $|\tau| \leq b$. Действительно, для точек z этой полосы имеем

$$|\hat{\varphi}(z)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)| e^{-\tau x} dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)| e^{b|x|} dx = \text{const.}$$

Замечание. Из этого примера следует, что для функции $y = \varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, у которой $\varphi(x)e^{b|x|} \in L_1(\mathbb{R})$ для произвольного $b > 0$, преобразование Фурье $\hat{\varphi}$ является целой функцией комплексного переменного $z = \sigma + i\tau$, ограниченной в каждой горизонтальной полосе $|\tau| \leq b$.

14. 1) Пусть функции f и g интегрируемы по Лебегу на числовой оси $\mathbb{R}$. Доказать, что их свертка $f * g$ также является интегрируемой по Лебегу функцией на $\mathbb{R}$.

2) Пусть функции f и g интегрируемы с квадратом на $\mathbb{R}$, т. е. $f, g \in L_2(\mathbb{R})$. Доказать, что их свертка $f * g$ является ограниченной функцией на числовой оси $\mathbb{R}$.

Решение. 1) Рассмотрим двойной интеграл Лебега

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\xi)| |g(x - \xi)| d\xi dx,$$

который существует, поскольку он приводится заменой переменных $x - \xi = \eta$ к виду

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\xi)| d\xi \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |g(\eta)| d\eta.$$

Таким образом, функция $z = f(\xi)g(x - \xi)$, $(x, \xi) \in \mathbb{R}^2$, интегрируема по Лебегу на плоскости $\mathbb{R}^2$. Следовательно, по теореме Фубини (см. § 3), для почти всех $z \in \mathbb{R}$ функция $z = f(\xi)g(x - \xi)$ интегрируема по переменной ξ на $\mathbb{R}$, т. е. существует интеграл

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)g(x - \xi) d\xi \quad (\text{п. в. на } \mathbb{R}).$$

Этот интеграл (на основании теоремы Фубини) является интегрируемой по Лебегу функцией на $\mathbb{R}$ и, кроме того,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) g(x - \xi) d\xi \right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) d\xi \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} g(\eta) d\eta.$$

2) Пусть функции f, g принадлежат пространству $L_2(\mathbb{R})$. Для каждого $x \in \mathbb{R}$ функция $y = g(x - \xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$, интегрируема с квадратом на $\mathbb{R}$. Поэтому, согласно теореме 1 (при $p = 2$ и $q = 2$), для всех $x \in \mathbb{R}$ функция $y = f(\xi) g(x - \xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$, интегрируема по Лебегу на $\mathbb{R}$, т. е. существует свертка

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) g(x - \xi) d\xi \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Кроме того, справедливо неравенство Коши — Буняковского

$$\begin{aligned} |(f * g)(x)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) g(x - \xi) d\xi \right| \leq \\ &\leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(\eta)|^2 d\eta \right)^{\frac{1}{2}} \quad (x \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Таким образом, для всех $x \in \mathbb{R}$

$$|(f * g)(x)| \leq \|f\|_{L_2(\mathbb{R})} \cdot \|g\|_{L_2(\mathbb{R})},$$

что и доказывает ограниченность свертки функций $f, g \in L_2(\mathbb{R})$.

15. Используя преобразование Фурье функций двух переменных, найти решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad t \geq 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

описывающее процесс распространения тепла в плоскости $\mathbb{R}^2$. В момент $t = 0$ температура задана: $u(0, x, y) = u_0(x, y)$.

Решение. Допустим, что функция $u_0(x, y)$ принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R}^2)$. Решение поставленной задачи будем искать в классе функций $u(t, x, y)$, удовлетворяющих условиям:

1) функции $u(t, x, y)$, $\frac{\partial u}{\partial x}(t, x, y)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x, y)$, $\frac{\partial u}{\partial y}(t, x, y)$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t, x, y)$ интегрируемы по Лебегу на плоскости $\mathbb{R}^2$ при любом фиксированном $t \geq 0$,

2) функция $\frac{\partial u}{\partial t}(t, x, y)$ имеет в каждом конечном промежутке $0 \leq t \leq T$ интегрируемую мажоранту $f(x, y)$

$$\left| \frac{\partial u}{\partial t}(t, x, y) \right| \leq f(x, y), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy < +\infty.$$

Тогда, согласно 1), рассмотрим преобразование Фурье функции $u(t, x, y)$ по переменным x, y , т. е. положим

$$\hat{u}(t, \sigma, \lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t, x, y) e^{i(x\sigma + y\lambda)} dx dy \quad ((\sigma, \lambda) \in \mathbb{R}).$$

На основании 1) и свойств преобразования Фурье имеем

$$F \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] (t, \sigma, \lambda) = -\sigma^2 \hat{u}(t, \sigma, \lambda), \quad F \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] (t, \sigma, \lambda) = -\lambda^2 \hat{u}(t, \sigma, \lambda).$$

Кроме того, в силу условия 2),

$$\begin{aligned} F \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right] (t, \sigma, \lambda) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial t} e^{i(x\sigma + y\lambda)} dx dy = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u e^{i(x\sigma + y\lambda)} dx dy = \frac{\partial \hat{u}(t, \sigma, \lambda)}{\partial t}. \end{aligned}$$

Таким образом, преобразование Фурье переводит уравнение теплопроводности в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\hat{u}_t'(t, \sigma, \lambda) = -(\sigma^2 + \lambda^2) \hat{u}(t, \sigma, \lambda).$$

Его решение с учетом начального условия $\hat{u}(0, \sigma, \lambda) = F[u_0](\sigma, \lambda) = \hat{u}_0(\sigma, \lambda)$ имеет вид

$$\hat{u}(t, \sigma, \lambda) = e^{-(\sigma^2 + \lambda^2)t} \hat{u}_0(\sigma, \lambda).$$

Для того чтобы получить решение $u(t, x, y)$ уравнения теплопроводности, надо найти такую функцию $u(t, x, y)$, преобразованием Фурье которой служит функция $e^{-(\sigma^2 + \lambda^2)t} \hat{u}_0(\sigma, \lambda)$.

Используя пример 12. 2), находим

$$e^{-\sigma^2 t} = F_x \left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \right], \quad e^{-\lambda^2 t} = F_y \left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{y^2}{4t}} \right].$$

Здесь в первом равенстве F_x означает операцию преобразования Фурье по переменной x , а во втором F_y — операцию преобразования Фурье по y . Найдем преобразование Фурье F по обеим переменным x и y от функции $\frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{x^2 + y^2}{4t}}$, $t > 0$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

На основании теоремы Фубини имеем

$$\begin{aligned} F \left[\frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{x^2 + y^2}{4t}} \right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{x^2 + y^2}{4t}} \cdot e^{i(x\sigma + y\lambda)} dx dy = \\ &= F_x \left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \right] F_y \left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{y^2}{4t}} \right] = e^{-(\sigma^2 + \lambda^2)t} \quad (t > 0; (\sigma, \lambda) \in \mathbb{R}^2). \end{aligned}$$

Следовательно, функция $e^{-(\sigma^2 + \lambda^2)t}$ представима в виде преобразования Фурье функции $\frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{x^2 + y^2}{4t}}$ и поэтому

$$\hat{u}(t, \sigma, \lambda) = F \left[\frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{x^2 + y^2}{4t}} \right] \cdot F[u_0] = F \left[\frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{x^2 + y^2}{4t}} * u_0 \right],$$

т. е.

$$u(t, x, y) = \frac{1}{4\pi t} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x - \xi, y - \eta) e^{-\frac{\xi^2 + \eta^2}{4t}} d\xi d\eta.$$

Интеграл, с помощью которого выражается решение уравнения теплопроводности, называется *интегралом Пуассона*.

Задачи для самостоятельной работы

1. Определить, для каких $p \geq 1$ функция f принадлежит пространству $L_p([0; 1], \mu_1)$, если:

$$1) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in [0; 1] \setminus \mathbb{Q}, \\ \sin x, & x \in [0; 1] \cap \mathbb{Q}; \end{cases} \quad 2) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-x}}, & x \in [0; 1] \setminus \mathbb{Q}, \\ \cos x, & x \in [0; 1] \cap \mathbb{Q}; \end{cases}$$

$$3) f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad x \in [0; 1]; \quad 4) f(x) = \frac{e^x \ln x}{x^2(1-x)^4}, \quad x \in [0; 1];$$

5) $f(x) = \frac{\chi_{A \setminus \mathbb{Q}}(x)}{\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[5]{1-x}}, \quad x \in [0; 1]$, где $\chi_A(x)$ — характеристическая функция множества A ;

$$6) f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt[4]{x} \sqrt[5]{1-x}}, \quad x \in [0; 1].$$

2. Пусть $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Определить, для каких $p \geq 1$ $f \in L_p(A, \mu_2)$, если:

$$1) f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{3}}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 1, & x^2 + y^2 = 0; \end{cases}$$

$$2) f(x, y) = \begin{cases} (|x| + |y|)^{-\frac{1}{2}}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

3. Определить, для каких значений $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $f \in L_p(\mathbb{R}, \mu_1)$, $p \geq 1$, если для $x \in \mathbb{R}$:

$$1) f(x) = \frac{|x|^\alpha}{(1+x^2)^\beta}; \quad 2) f(x) = \frac{\ln(1+|x|^2)}{(1+x^2)^\beta}.$$

$$3) f(x) = |1-x|^\alpha |1+x|^\beta; \quad 4) f(x) = \frac{|1-x|^\beta \ln(1+|x|)}{|x|^\alpha (1+x^4)}.$$

4. Определить, для каких значений $\alpha \in \mathbb{R}$ функция f принадлежит пространству $L_p(\mathbb{R}^2, \mu_2)$, $p \geq 1$, если для $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x, y) = \begin{cases} |1-x^2-y^2|^{-\alpha}, & x^2 + y^2 \neq 1, \\ 0, & x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

5. Определить, для каких значений $p \geq 1$ последовательность $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$, $x \in \mathbb{R}$, функций пространства $L_p(\mathbb{R}, \mu)$ сходится в этом пространстве, если:

- 1) $f_n(x) = \sqrt{n} \chi_{\left[0, \frac{1}{n^2}\right]}(x)$; 2) $f_n(x) = n^{-2} e^{-\frac{x^2}{n^2}}$;
- 3) $f_n(x) = n^{-2} e^{-\frac{x}{n^2}} \chi_{[0, +\infty)}(x)$; 4) $f_n(x) = \sqrt{|n - n^2 x|} \chi_{\left[0, \frac{1}{n}\right]}(x)$;
- 5) $f_n(x) = \frac{1}{1+x^2} \chi_{[n; +\infty)}(x)$; 6) $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|+1}} \chi_{[n; 2n]}(x)$;
- 7) $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|+1}} \chi_{[-n^2; n^2]}(x)$.

Здесь $\chi_A(x)$ — характеристическая функция множества A .

6. Пусть $f_n(x) = \sqrt{n} \chi_{\left[0, \frac{1}{n}\right]}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, а $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ в $L_1(\mathbb{R}, \mu_1)$, но эта же последовательность не сходится в $L_2(\mathbb{R}, \mu_1)$.

7. Пусть $(X, \mathcal{U}, \mu)$ — измеримое пространство и $A \subset X$ — μ -измеримое множество. Доказать, что если функции f и g принадлежат пространству $L_p(A, \mu)$, $p \geq 2$, то fg принадлежит $L_{\frac{p}{2}}(A, \mu)$.

8. Пусть $(X, \mathcal{U}, \mu)$ — измеримое пространство и множество A принадлежит σ -алгебре $\mathcal{U}$. Доказать, что если последовательность $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$, $x \in A$, сходится в $L_p(A, \mu)$, $p \geq 1$, к функции $f(x) \in L_p(A, \mu)$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{L_p} = \|f\|_{L_p}$.

9. Пусть $(X, \mathcal{U}, \mu)$ — измеримое пространство и множество $A \subset X$ — μ -измеримое. Доказать, что если последовательность $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$, $x \in A$, сходится в пространстве $L_p(A, \mu)$, $p \geq 1$, к функции $f(x) \in L_p(A, \mu)$ и $g \in L_{\frac{p}{p-1}}(A, \mu)$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) g(x) d\mu = \int_A f(x) g(x) d\mu.$$

10. Пусть последовательность $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$, $x \in [a; b]$, сходится в пространстве $L_p([a; b], \mu_1)$, $p > 1$, к функции $f(x) \in L_p([a; b], \mu_1)$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x f_n(t) dt = \int_a^x f(t) dt \quad (x \in [a, b]).$$

Доказать это соотношение.

11. Пусть $(X, \mathcal{U}, \mu)$ — измеримое пространство и множество $A \subset X$ — μ -измеримое. Если последовательность $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$, $x \in A$, сходится в пространстве $L_p(A, \mu)$, $p > 1$ к функции $f(x) \in L_p(A, \mu)$, а последовательность $(g_n(x))_{n=1}^{\infty}$, $x \in A$, сходится в пространстве $L_{\frac{p}{p-1}}(A, \mu)$ к функции $g(x) \in L_{\frac{p}{p-1}}(A, \mu)$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) g_n(x) d\mu = \int_A f(x) g(x) d\mu.$$

Доказать это соотношение.

12. Доказать, что если $f \in L_p [0; +\infty), \mu_1), p > 1$, то интеграл $\int_0^{+\infty} f(x) \frac{\sin xy}{x} dx$ равномерно сходится относительно y на произвольном конечном интервале $a < y < b$.

13. Доказать, что если $f \in L_p ((\alpha; \beta), \mu_1)$ и $[a; b] \subset (\alpha; \beta)$, то

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b |f(x+h) - f(x)|^p dx = 0.$$

Указание. Вначале доказать это утверждение для непрерывной на $(\alpha; \beta)$ функции f .

14. Доказать, что если $f \in L_p (\mathbb{R}, \mu_1)$, то

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h) - f(x)|^p dx = 0.$$

15. Доказать, что если $f \in L_p (\mathbb{R}, \mu_1), p > 1$, а $g \in L_{\frac{p}{p-1}} (\mathbb{R}, \mu_1)$, то функция

$$\mathcal{F}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t) g(x) dx, \quad t \in \mathbb{R},$$

непрерывна на $\mathbb{R}$.

16. Доказать, что если $f \in L_p (\mathbb{R}, \mu_1), p > 1$, то функция $\mathcal{F}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x) dx}{1 + (t-x)^2}$

непрерывна на $\mathbb{R}$ и также принадлежит пространству $L_p (\mathbb{R}, \mu_1)$.

17. Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — измеримое пространство и A — μ -измеримое подмножество множества X . Доказать, что если последовательность $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}, x \in A$, сходится в пространстве $L_p (A, \mu)$ к функциям f, g из $L_p (A, \mu)$, то f и g μ -эквивалентны на A .

18. Доказать, что если интеграл $\int_a^b f(x) g(x) d\mu_1$ существует для произвольной функции $f \in L_2 ([a; b], \mu_1)$, то $g \in L_2 ([a; b], \mu_1)$.

19. Пусть $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ — числовая последовательность

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \dots$$

Показать, что последовательность функций

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{4} |x - t_n|, & \text{если } |x - t_n| < \frac{4}{n}, \\ 0, & \text{если } |x - t_n| \geq \frac{4}{n}, \end{cases}$$

сходится к функции $f(x) = 0$ в пространстве $L_2 ((0; 1), \mu_1)$, но не сходится в каждой точке $x \in (0; 1)$.

20. Показать, что функции $f_1(x) = e^{-x^2 \sin^2 x}$ и $f_2(x) = x^2 e^{-x^2 \sin^2 x}$ принадлежат пространству $L_2 (\mathbb{R}, \mu_1)$, но $\lim_{k \rightarrow \pm \infty} f_k(x) \neq 0, k = 1, 2$.

21*. Пусть дифференцируемая на $\mathbb{R}$ функция f и ее производная f' принадлежат пространству $L_2 (\mathbb{R}, \mu_1)$. Доказать, что $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = 0$.

22. Пусть функции $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ принадлежат пространству $L_p (A, \mu)$. Доказать, что если существует такая функция g из $L_p (A, \mu)$, что для всех k $|f_k(x)| \leq$

$\leq g(x)$ почти всюду на A , то последовательность $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$, $x \in A$, сходится к функции f в пространстве $L_p(A, \mu)$ тогда и только тогда, когда она сходится к f на A по мере μ .

23. Доказать, что в неравенстве Гельдера знак равенства достигается тогда и только тогда, когда почти всюду на A :

1) $f(x)g(x) \geq 0$ или $f(x)g(x) \leq 0$;

2) для некоторых чисел α и β , не равных нулю одновременно, $\alpha |f(x)|^p = \beta |g(x)|^q$.

24. Доказать, что в неравенстве Минковского знак равенства достигается в том и только том случае, когда для некоторых неотрицательных чисел α и β , не равных нулю одновременно, $\alpha f(x) = \beta g(x)$ почти всюду на A .

25. Точка x_0 называется обобщенной точкой Дини для интегрируемой по Лебегу на отрезке $[-\pi; \pi]$ функции f , если при некотором $c \in \mathbb{R}$ сходится интеграл

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{|f(x_0 + t) - c|}{|t|} dt.$$

Показать, что ряд Фурье функции f сходится в обобщенной точке Дини к значению c .

26. Найти преобразование Фурье функций:

1) $\varphi(x) = \frac{1}{(x - \lambda)^m}$, где $m \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ и $\text{Im } \lambda \neq 0$;

2) $\varphi(x) = e^{-\alpha|x|}$ ($\alpha > 0$); 3) $\varphi(x) = xe^{-\alpha|x|}$ ($\alpha > 0$);

4) $\varphi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \cos \alpha x$; 5) $\varphi(x) = \frac{i}{4}$ при $0 < x < 2a$,

$\varphi(x) = -\frac{i}{4}$ при $-2a < x \leq 0$, $\varphi(x) = 0$ при $|x| \geq 2a$.

27. Пусть $\chi_a(x)$ — характеристическая функция интервала $(0; a)$. Найти свертку $\chi_b(x) * \left[\frac{\chi_{a+h}(x) - \chi_a(x)}{h} \right]$.

28. Доказать, что для любой функции $\varphi \in L_1(\mathbb{R}, \mu_1)$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\varphi(x) * \frac{\chi_{a+h}(x) - \chi_a(x)}{h} \right] = \varphi(x - a)$$

(предел в пространстве $L_1(\mathbb{R}, \mu_1)$). Здесь $\chi_a(x)$ — характеристическая функция интервала $(0; a)$.

Указание. Проверить это равенство для функции $\varphi(x) = \chi_b(x)$.

29. Пусть $f \in L_1([-\pi; \pi]; \mu_1)$ и $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ — ее коэффициенты Фурье. Доказать, что если $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = 0$ на множестве положительной меры, то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

30. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[-\pi; \pi]$, а $(\sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность ее сумм Фейера. Доказать, что $m \leq \sigma_n(x) \leq M$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и всех $x \in \mathbb{R}$, если $m = \min_{[-\pi; \pi]} f(x)$, а $M = \max_{[-\pi; \pi]} f(x)$.

31. Доказать свойства ассоциативности и коммутативности свертки двух интегрируемых на $\mathbb{R}$ функций.

32. Доказать, что преобразование Фурье функции из пространства $L_1(\mathbb{R}, \mu_1)$ является равномерно непрерывной на $\mathbb{R}$ функцией.

33. Пусть $f, g \in L_2(\mathbb{R}, \mu_1)$. Доказать, что тогда $f * g = F^{-1}[F[f]F[g]]$ и $f * g = 2\pi F[F^{-1}[f]F^{-1}[g]]$.

34. Найти преобразование Фурье следующих функций из $L_2(\mathbb{R})$:

1) $\varphi(x) = \frac{1}{x+\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$; 2) $\varphi(x) = \frac{\sin x}{x}$;

3) $\varphi(x) = \frac{\sin ax \cdot \sin bx}{x}$, $a, b \in \mathbb{R}$;

4) $\varphi(x) = \frac{x}{x^2+a^2}$, $a \in \mathbb{R}$;

5) $\varphi(x) = \frac{\operatorname{th} ax}{x}$, $a \in \mathbb{R}$.

Ответы. 1. 1), 3), 4) Ни для каких p ; 2) для $1 \leq p < 2$; 5) для $1 \leq p < 3$; 6) для $1 \leq p < 5$. 2. 1) Для $1 \leq p < 3$; 2) для $1 \leq p < 4$. 3. 1) Для $\alpha > -\frac{1}{p}$ и $2\beta > \alpha + \frac{1}{p}$; 2) для $\alpha > -\frac{1}{p}$ и $\beta > \frac{1}{4p}$; 3) для $\alpha > -\frac{1}{p}$, $\beta > -\frac{1}{p}$ и $\alpha + \beta < -\frac{1}{p}$; 4) для $\alpha < \frac{1}{p} + 1$, $\beta > -\frac{1}{p}$ и $4 + \alpha - \beta > \frac{1}{p}$. 4. Ни для каких p . 5. 1) $1 \leq p < 4$; 2), 5) для $p \geq 1$; 3) для $p > 1$; 4) $1 \leq p < 2$; 6), 7) для $p > 2$. 26. 1) При $\operatorname{Im} \lambda > 0$ функция $\hat{\varphi}(\sigma) = 0$ для $\sigma < 0$ и $\hat{\varphi}(\sigma) = 2\pi i e^{i\sigma\lambda} \frac{(i\sigma)^{m-1}}{(m-1)!}$ при $\sigma > 0$; при $\operatorname{Im} \lambda < 0$ функция $\hat{\varphi}(\sigma) = 0$ для $\sigma > 0$ и $\hat{\varphi}(\sigma) = -2\pi i e^{i\sigma\lambda} \frac{(i\sigma)^{m-1}}{(m-1)!}$ при $\sigma < 0$; 2) $\hat{\varphi}(\sigma) = \frac{2\alpha}{\sigma^2 + \alpha^2}$; 3) $\hat{\varphi}(\sigma) = \frac{4i\alpha\sigma}{(\sigma^2 + \alpha^2)^2}$; 4) $\hat{\varphi}(\sigma) = -\sqrt{2\pi} e^{-\frac{\sigma^2 + \alpha^2}{2}} \operatorname{ch} \alpha\sigma$; 5) $\hat{\varphi}(\sigma) = -\frac{2\pi \sin^2 a\sigma}{\sigma}$. 27. 0, если $x < a$ и $x > a+b+h$; 1, если $a+h < x < a+b$; на остальных участках — линейная. 34. 1) $\hat{\varphi}(\sigma) = -\begin{cases} \frac{e^{2\pi i \alpha \sigma}}{2\pi i} \operatorname{sign}(\operatorname{Im} \alpha), & \text{если } \operatorname{sign} \sigma = \operatorname{sign}(\operatorname{Im} \alpha), \\ 0, & \text{если } \operatorname{sign} \sigma = -\operatorname{sign}(\operatorname{Im} \alpha); \end{cases}$

2) $\hat{\varphi}(\sigma) = \begin{cases} \pi |a|, & |\sigma| < \frac{a}{2\pi}, \\ 0, & |\sigma| > \frac{a}{2\pi}; \end{cases}$

3) $\hat{\varphi}(\sigma) = \begin{cases} \frac{\pi}{2i}, & \frac{b-a}{2\pi} < \sigma < \frac{b+a}{2\pi}, \\ -\frac{\pi}{2i}, & -\frac{a+b}{2\pi} < \sigma < -\frac{a-b}{2\pi}, \\ 0, & \text{в остальных точках при } 0 \leq a \leq b; \end{cases}$

4) $\hat{\varphi}(\sigma) = \frac{1}{4\pi i} e^{-2\pi |\sigma a|} a \operatorname{sign} \sigma$;

5) $\hat{\varphi}(\sigma) = 2 \ln \operatorname{ctg} \frac{\pi^2 \sigma}{2a}$.

§ 5. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ

1. Введение. Постановка задачи. Как известно, основная формула интегрального исчисления функций одной переменной состоит в том, что операции дифференцирования и интегрирования являются в некотором смысле взаимно обратными. Точный смысл этого принципа характеризуется с помощью таких двух утверждений.

А. Для данной непрерывной функции $y = \varphi(x)$, $x \in [a; b]$, ее неопределенный интеграл

$$\mathcal{F}(x) = \int_a^x \varphi(t) dt + C \quad (\forall x \in [a; b]) \quad (1)$$

с любой постоянной C есть дифференцируемая на отрезке $[a; b]$ функция и при каждом $x \in [a; b]$

$$\mathcal{F}'(x) = \varphi(x). \quad (2)$$

Б. Если заданная функция $y = \mathcal{F}(x)$, $x \in [a; b]$, имеет на $[a; b]$ непрерывную производную $\mathcal{F}'(x) = \varphi(x)$, то справедливо равенство

$$\int_a^x \varphi(t) dt = \mathcal{F}(x) - \mathcal{F}(a) \quad (\forall x \in [a; b]). \quad (3)$$

Теперь, располагая значительно более общим понятием интеграла, чем интеграл Римана (который фигурирует в (1) и (3)), поставим такие проблемы.

Проблема 1. Пусть функция $y = \varphi(x)$, $x \in [a; b]$, интегрируема по Лебегу на отрезке $[a; b]$, а функция $\mathcal{F}$ определяется равенством (1) (при этом интеграл в правой части понимается в смысле Лебега). Верно ли равенство (2)?

Поскольку интегрируемая функция φ может быть произвольно изменена на множестве меры нуль без изменения функции $\mathcal{F}$, то требовать выполнения равенства (2) естественно не всюду на $[a; b]$, а лишь почти всюду.

Обсуждая проблему 1, сделаем такое замечание. Пусть интегрируемая на $[a; b]$ функция $y = \varphi(x)$ представлена в виде разности двух неотрицательных интегрируемых функций, т. е. $\varphi(x) = \varphi_+(x) - \varphi_-(x)$, где $\varphi_+(x) = \max\{\varphi(x), 0\}$, $\varphi_-(x) = \max\{-\varphi(x), 0\}$. Поскольку ее неопределенный интеграл $\mathcal{F}$ является разностью двух монотонно неубывающих функций

$$\mathcal{F}(x) = \left(\int_a^x \varphi_+(t) dt + C \right) - \int_a^x \varphi_-(t) dt, \quad x \in [a; b],$$

то для решения проблемы 1 вначале надо исследовать класс таких функций (см. п. 2).

Проблема 2. При каких условиях данная функция $y = \mathcal{F}(x)$, $a \leq x \leq b$, имеет интегрируемую по Лебегу производную $y = \varphi(x)$, $x \in [a; b]$ (определенную хотя бы почти всюду) и справедливо равенство (3)?

Отметим, что если у функции $\mathcal{F}$ отсутствует интегрируемая производная φ , то левая часть равенства (3) смысла не имеет. Но и наличие у функции $\mathcal{F}$ интегрируемой производной не гарантирует справедливость равенства (3). В самом деле, пусть $\mathcal{F}(x) = \operatorname{sign} x$, $-1 \leq x \leq 1$. Тогда почти всюду на $[-1; 1]$ $\mathcal{F}'(x) = 0$, т. е. $\varphi(x) = 0$ почти всюду на $[-1; 1]$. Поэтому левая часть равенства (3) для всех $x \in [-1; 1]$ равна нулю, а правая часть для $x \in (0; 1]$ равна 2. Проблема 2 рассмотрена в п. 3.

В п. 4 приведена конструкция интеграла Римана — Стильтеса.

Согласно поставленным проблемам интегрирование на отрезке $[a; b]$ числовой оси $\mathbb{R}$ будем рассматривать по Лебегу, а соответствующая мера является классической мерой Лебега на $[a; b]$.

2. Монотонные функции. Функции с ограниченным изменением. Дифференцирование неопределенного интеграла. Напомним, что функция $y = \mathcal{F}(x)$, заданная на отрезке $[a; b] \subset \mathbb{R}$, называется *монотонно неубывающей (невозрастающей)*, если для произвольных точек x_1 и x_2 из $[a; b]$, $x_1 < x_2$, следует, что $\mathcal{F}(x_1) \leq \mathcal{F}(x_2)$ ($\mathcal{F}(x_1) \geq \mathcal{F}(x_2)$). Очевидно, что всякая монотонно неубывающая (или невозрастающая) функция $y = \mathcal{F}(x)$, $x \in [a; b]$, является ограниченной и измеримой на $[a; b]$. Поэтому она интегрируема на $[a; b]$.

Рассмотрим произвольную функцию $y = f(x)$, заданную на отрезке $[a; b]$ (либо на конечном или бесконечном промежутке числовой оси $\mathbb{R}$). Если существует конечный предел $\lim_{\alpha \rightarrow +0} f(x_0 + \alpha)$, то он называется *пределом справа* функции f в точке $x_0 \in [a; b]$ и обозначается $f(x_0 + 0)$. Аналогично определяется величина $f(x_0 - 0)$ — *предел слева* функции f в точке x_0 . Если $f(x_0) = f(x_0 - 0)$, то функция f называется непрерывной в точке x_0 слева, а если $f(x_0) = f(x_0 + 0)$, то f называется непрерывной справа в точке x_0 . Функция f , которая одновременно непрерывна справа и слева в точке x_0 , называется непрерывной в точке x_0 . Таким образом, f непрерывна в точке x_0 , если $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$. Точка $x_0 \in [a; b]$, в которой существуют конечные пределы $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$, не равные между собой, называется *точкой разрыва первого рода*, а разность $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ называется *скачком* функции f в точке x_0 .

Всякая монотонно неубывающая (невозрастающая) функция $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, может иметь разрывы только первого рода. Поэтому можно считать, что монотонная функция f непрерывна, например, слева в каждой точке $x_0 \in [a; b]$. Действительно, если f не является непрерывной слева в некоторой точке $x^* \in [a; b]$, то изменим прежнее значение функции f в этой точке, положив его равным $f(x^* - 0)$. Для определенности будем говорить о монотонно неубывающих и непрерывных слева функциях на отрезке $[a; b]$.

Монотонная функция не обязательно непрерывна. Но тем не менее, множество ее точек разрыва не более чем счетно (т. е. оно конечно или счетно). Приведем пример монотонной функции h на отрезке $[a; b]$, имеющей счетное число точек разрыва лишь в наперед заданной последовательности $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ точек из $[a; b]$, скачки которой в этих точках соответственно равны положительным числам $h_1, h_2, \dots, h_n, \dots$, при-

чем $\sum_{n=1}^{\infty} h_n < +\infty$. Искомая функция h определяется с помощью равенства

$$h(x) = \sum_{x_n < x} h_n \quad (\forall x \in [a; b]),$$

где суммирование осуществляется по всем тем номерам n , для которых $x_n < x$ (если $a \leq x \leq x_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$, то $h(x) = 0$). Она удовлетворяет сформулированным условиям и является непрерывной слева на $[a; b]$. В дальнейшем под функцией скачков будем понимать любую функцию, представимую с помощью только что описанной конструкции. Например, неубывающие ступенчатые функции (см. § 3) являются функциями скачков. Для таких функций точки разрыва можно расположить в виде монотонной последовательности: $x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots$.

В общем случае аналогичные «функции скачков» могут иметь более сложную структуру. Например, если последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ совпадает с множеством рациональных чисел отрезка $[a; b]$, где $a < b$, а последовательность положительных чисел $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ такова, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} h_n$ сходится, то соответствующая функция скачков h разрывна в каждой рациональной точке из $[a; b]$ и непрерывна в иррациональных точках.

Теорема 1. Всякая монотонно неубывающая непрерывная слева на отрезке $[a; b]$ функция $\mathcal{F}$ представляется единственным образом в виде суммы непрерывной и монотонно неубывающей на $[a; b]$ функции G и функции скачков H (непрерывной слева).

По заданной монотонной функции $\mathcal{F}$ ее непрерывная составляющая часть G и функция скачков H строятся так. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ — точки разрыва функции $\mathcal{F}$, а $h_1, h_2, \dots, h_n, \dots$ — ее скачки в этих точках. Для каждой точки x отрезка $[a; b]$ положим $H(x) = \sum_{x_n < x} h_n$. Тогда функция $G(x) = \mathcal{F}(x) - H(x)$ является монотонной и непрерывной на $[a; b]$.

Перейдем к названию класса функций, являющихся разностями монотонно неубывающих функций.

Определение 1. Функция $\mathcal{F}$, заданная на отрезке $[a; b]$, называется функцией с ограниченным изменением, если существует такая постоянная C , что для любого разбиения Π отрезка $[a; b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < x_n = b$

выполняется неравенство

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\mathcal{F}(x_{k+1}) - \mathcal{F}(x_k)| \leq C. \quad (4)$$

Всякая монотонная функция $\mathcal{F}$ является функцией с ограниченным изменением, поскольку для нее сумма, стоящая в (4) слева, не зависит от выбора разбиения и всегда равна $|\mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(a)|$.

Если функция $y = \mathcal{F}(x)$, $a \leq x \leq b$, является функцией с ограниченным изменением, то ее *полным изменением* (или *полной вариацией*) называется число

$$\bigvee_a^b [\mathcal{F}] = \sup_{\Pi} \sum_{k=0}^{n-1} |\mathcal{F}(x_{k+1}) - \mathcal{F}(x_k)|,$$

где точная верхняя грань берется по всевозможным конечным разбиениям Π отрезка $[a; b]$.

Замечание. Функция $\mathcal{F}$, заданная на прямой $\mathbb{R}$, называется функцией с ограниченным изменением, если она является функцией с ограниченным изменением на каждом отрезке $[a; b]$ числовой оси $\mathbb{R}$ и величины $\bigvee_a^b [\mathcal{F}]$ ограничены в совокупности,

т. е. если существует число L такое, что $\bigvee_a^b (\mathcal{F}) \leq L$ ($\forall a, b \in \mathbb{R}$).

Величина $\lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \bigvee_a^b [\mathcal{F}]$ называется при этом полным изменением функции $\mathcal{F}$ на

прямой $\mathbb{R}$ и обозначается через $\bigvee_{-\infty}^{+\infty} [\mathcal{F}]$. Аналогично определяются полные изменения

$$\bigvee_a^{+\infty} [\mathcal{F}] \text{ и } \bigvee_{-\infty}^b [\mathcal{F}].$$

Напомним основные свойства функций с ограниченным изменением.

1) Если функция $y = \mathcal{F}(x)$, $x \in [a; b]$, является функцией с ограниченным изменением и $\alpha \in \mathbb{R}$, то функция $\alpha \mathcal{F}$ также имеет ограниченное изменение и справедливо равенство

$$\bigvee_a^b [\alpha \mathcal{F}] = |\alpha| \bigvee_a^b [\mathcal{F}].$$

2) Если $\mathcal{F}$ и G — функции с ограниченным изменением на отрезке $[a; b]$, то их сумма $\mathcal{F} + G$ также является функцией с ограниченным изменением на $[a; b]$ и

$$\bigvee_a^b [\mathcal{F} + G] \leq \bigvee_a^b [\mathcal{F}] + \bigvee_a^b [G].$$

Свойства 1) и 2) позволяют заключить, что функции с ограниченным изменением на отрезке $[a; b]$ образуют линейное пространство (в отличие от множества монотонных функций, которые линейного пространства не образуют). Кроме того, из этих свойств следует, что разность двух монотонных функций является функцией с ограниченным изменением.

3) Пусть функция $\mathcal{F}$ имеет ограниченное изменение на отрезке $[a; b]$, а точка $c \in (a; b)$. Тогда $\mathcal{F}$ является функцией с ограниченным изменением на каждом из отрезков $[a; c]$, $[c; b]$ и справедливо равенство

$$\bigvee_a^b [\mathcal{F}] = \bigvee_a^c [\mathcal{F}] + \bigvee_c^b [\mathcal{F}].$$

4) Если функция $\mathcal{F}$ имеет ограниченное изменение на отрезке $[a; b]$, то функция

$$v(x) = \bigvee_a^x [\mathcal{F}], \quad x \in [a; b], \quad (5)$$

является монотонно неубывающей. Причем если функция $\mathcal{F}$ непрерывна слева (справа) в точке $x^* \in [a; b]$, то и v непрерывна в этой же точке слева (справа). В частности, если $\mathcal{F}$ непрерывна в некоторой точке (или на всем отрезке $[a; b]$), то непрерывна в этой точке (или на всем отрезке) и функция v .

Пусть $\mathcal{F}$ — произвольная функция с ограниченным изменением на отрезке $[a; b]$. Тогда функция $u(x) = v(x) - \mathcal{F}(x)$, где $v(x)$ — полное изменение $\mathcal{F}$ на $[a; x]$, является монотонно неубывающей на $[a; b]$. Таким образом, $\mathcal{F}$ представляется как разность двух монотонно неубывающих функций:

$$\mathcal{F}(x) = v(x) - u(x), \quad x \in [a; b].$$

Теорема 2. Для того чтобы функция $y = \mathcal{F}(x)$, $x \in [a; b]$, была функцией с ограниченным изменением, необходимо и достаточно, чтобы она представлялась в виде разности двух монотонно неубывающих функций.

Например, если функция f интегрируема на отрезке $[a; b]$, то ее неопределенный интеграл $\mathcal{F}(x) = \int_a^x f(t) dt$, $x \in [a; b]$, является функцией с ограниченным изменением.

Перейдем к вопросу о дифференцируемости функции с ограниченным изменением.

Теорема 3 (Лебега). Монотонная функция, определенная на отрезке $[a; b]$, имеет почти всюду на этом отрезке конечную производную.

Из теоремы Лебега следует, что каждая функция с ограниченным изменением на $[a; b]$ также имеет почти всюду на этом отрезке конечную производную.

Напомним некоторые важные понятия, с помощью которых доказывается теорема 3. Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$ (или на любом другом конечном или бесконечном промежутке числовой оси $\mathbb{R}$) и точка x_0 принадлежит интервалу $(a; b)$. Тогда производной функции f в точке x_0 называется предел отношения $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ при $x \rightarrow x_0$. Конечно, этот предел может не существовать. Но всегда

имеют смысл следующие четыре величины (которые возможно принимают и бесконечные значения), называемые производными числами функции f в точке x_0 :

$$\begin{aligned} \Lambda_{\text{пр}} &= \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}; \quad \lambda_{\text{пр}} = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}; \\ \Lambda_{\text{лев}} &= \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}; \quad \lambda_{\text{лев}} = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \end{aligned}$$

Величина $\Lambda_{\text{пр}}$ ($\lambda_{\text{пр}}$) называется верхним (нижним) правым производным числом функции f в точке x_0 . Аналогично величина $\Lambda_{\text{лев}}$ ($\lambda_{\text{лев}}$) называется верхним (нижним) левым производным числом функции f в точке x_0 . Отметим, что если $x_0 = b$, то для функции f имеем смысл рассматривать лишь $\Lambda_{\text{лев}}$ и $\lambda_{\text{лев}}$, а если $x_0 = a$, то лишь $\Lambda_{\text{пр}}$ и $\lambda_{\text{пр}}$. Ясно, что всегда $\lambda_{\text{пр}} \leq \Lambda_{\text{пр}}$ и $\lambda_{\text{лев}} \leq \Lambda_{\text{лев}}$. Если $\Lambda_{\text{пр}} = \lambda_{\text{пр}}$ и они конечны, то это общее число есть производная функция f в точке x_0 справа. Аналогично если $\lambda_{\text{лев}} = \Lambda_{\text{лев}}$, то их общее значение есть производная слева. Существование для функции f конечной производной в точке x_0 равносильно тому, что в этой точке все производные числа функции f конечны и равны между собой.

Доказательство теоремы Лебега основывается еще на одном важном факте. Прежде чем его сформулировать, введем следующее определение. Пусть функция g непрерывна на отрезке $[a; b]$. Точку x_0 этого отрезка назовем точкой, *невидимой справа* для функции g , если существует точка ξ ($x_0 < \xi \leq b$), что $g(x_0) < g(\xi)$.

Лемма (Р и с с а). Для любой непрерывной на $[a; b]$ функции g множество ее точек, невидимых справа, открыто на отрезке $[a; b]$ и, следовательно, представляется в виде объединения конечного или счетного числа попарно непересекающихся интервалов $(a_k; b_k)$ (и, возможно, полуинтервалов, включающих концы отрезка). В концевых точках этих интервалов выполняются неравенства $g(a_k) \leq g(b_k)$.

Иногда бывает полезной следующая теорема о почленном дифференцировании ряда из монотонных функций.

Теорема 4 (малая теорема Фубини). *Всюду сходящийся ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n(x) = \mathcal{F}(x); \quad x \in [a; b], \text{ где } \mathcal{F}_n \text{ — монотонно неубывающие функции на } [a; b]$$

почти всюду допускает почленное дифференцирование

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}'_n(x) \stackrel{\text{п.в.}}{=} \mathcal{F}'(x) \quad (x \in [a; b]).$$

Как следствие из этой теоремы получаем, что функция скачков имеет почти всюду производную, равную нулю.

Таким образом, согласно теореме 3 Лебега, неопределенный интеграл $\mathcal{F}(x) = \int_a^x \varphi(t) dt$, $x \in [a; b]$, интегрируемой на $[a; b]$ функции φ имеет почти всюду на $[a; b]$ конечную производную. Но будет ли эта производная почти всюду равна функции φ ?

Теорема 5. *Для всякой интегрируемой на отрезке $[a; b] \subset \mathbb{R}$ функции φ почти всюду справедливо равенство*

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^x \varphi(t) dt \right) = \varphi(x) \quad (x \in [a; b]).$$

Теоремы 3 и 5 дают положительное решение проблемы 1.

3. Восстановление функции по ее производной. Абсолютно непрерывные функции. Рассмотрим обобщение на случай интеграла Лебега известной формулы Ньютона — Лейбница:

$$\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(a) + \int_a^x \mathcal{F}'(t) dt. \quad (6)$$

Правая часть этого равенства является функцией с ограниченным изменением (при условии интегрируемости производной $\mathcal{F}'$). Поэтому равенство (6) не может быть правильным для более широкого класса функций, чем функции с ограниченным изменением. Кроме того, формула Ньютона — Лейбница заведомо не верна для всех функций с ограниченным изменением (см. пример функции $\mathcal{F}(x) = \operatorname{sign} x$, $-1 \leq x \leq 1$).

Справедлива такая теорема.

Теорема 6. *Производная $\mathcal{F}'$ каждой монотонно неубывающей на отрезке $[a; b]$ функции $\mathcal{F}$ интегрируема на $[a; b]$ и*

$$\int_a^b \mathcal{F}'(x) dx \leq \mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(a).$$

Следовательно, производная каждой функции с ограниченным изменением интегрируема. Поэтому для таких функций правая часть формулы (6) всегда определена.

Отметим, что существуют непрерывные монотонные функции, для которых выполняется строгое неравенство

$$\int_a^x \mathcal{F}'(t) dt < \mathcal{F}(x) - \mathcal{F}(a)$$

для всех $x > a$ (см. пример 10).

Таким образом, формула Ньютона — Лейбница (6) выполняется лишь на некотором подклассе множества функций с ограниченным изменением. Перейдем к описанию этого подкласса.

Определение 2. *Функция $\mathcal{F}$, определенная на некотором отрезке $[a; b]$, называется абсолютно непрерывной, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для*

произвольной конечной системы попарно непересекающихся интервалов $(a_k; b_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$, сумма длин которых меньше δ , т. е. $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$, выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^n |\mathcal{F}(b_k) - \mathcal{F}(a_k)| < \epsilon.$$

Из этого определения следует, что каждая абсолютно непрерывная функция на $[a; b]$ равномерно непрерывна. Однако существуют равномерно непрерывные функции, не являющиеся абсолютно непрерывными.

Совокупность абсолютно непрерывных функций на отрезке $[a; b]$ образует линейное пространство, т. е. сумма двух абсолютно непрерывных функций и произведение абсолютно непрерывной функции на число являются абсолютно непрерывными функциями.

Можно доказать, что каждая абсолютно непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция $\mathcal{F}$ имеет ограниченное изменение. Поэтому $\mathcal{F}$ представляется в виде разности двух монотонно неубывающих на $[a, b]$ функций $\mathcal{F}(x) = v(x) - u(x)$, $x \in [a; b]$, где v определяется формулой (5), а $u = v - \mathcal{F}$. Более того, из абсолютной непрерывности функции $\mathcal{F}$ следует, что ее составляющие v и u также абсолютно непрерывны. Таким образом, каждая абсолютно непрерывная функция представляется в виде разности двух абсолютно непрерывных монотонно неубывающих функций.

Из свойства абсолютной непрерывности интеграла Лебега (см. § 3) вытекает, что неопределенный интеграл

$$\mathcal{F}(x) = \int_a^x \varphi(t) dt, \quad x \in [a; b],$$

интегрируемой на отрезке $[a, b]$ функции φ является абсолютно непрерывной на $[a; b]$ функцией. Справедливо и обратное утверждение.

Теорема 7 (Лебег а). Производная $\mathcal{F}'$ абсолютно непрерывной функции $y = \mathcal{F}(x)$, $a \leq x \leq b$, интегрируема на этом отрезке и для каждого $x \in [a; b]$ справедлива формула Ньютона — Лейбница

$$\int_a^x \varphi(t) dt = \int_a^x \mathcal{F}'(t) dt = \mathcal{F}(x) - \mathcal{F}(a).$$

Таким образом, формула Ньютона — Лейбница верна лишь для абсолютно непрерывных функций.

Из теоремы 1 следует, что каждая непрерывная слева функция $\mathcal{F}$, имеющая на отрезке $[a; b]$ ограниченное изменение, представляется в виде суммы непрерывной на $[a; b]$ функции G с ограниченным изменением и функции скачков H . Введем функцию

$$\psi(x) = \int_a^x G'(t) dt, \quad a \leq x \leq b,$$

являющуюся по теореме 7 абсолютно непрерывной на отрезке $[a; b]$, а также непрерывную с ограниченным изменением функцию $\chi(x) = G(x) - \psi(x)$, $a \leq x \leq b$. Тогда $\chi'(x) = 0$ почти всюду на отрезке $[a; b]$.

Назовем непрерывную на отрезке $[a; b]$ функцию с ограниченным изменением *сингулярной*, если ее производная почти всюду равна нулю на $[a; b]$. Поэтому имеем такой результат.

Теорема 8. Всякую функцию $y = \mathcal{F}(x)$, $a \leq x \leq b$, имеющую на $[a; b]$ ограниченное изменение, можно представить в виде суммы

$$\mathcal{F}(x) = H(x) + \psi(x) + \chi(x), \quad x \in [a; b], \quad (7)$$

где H — функция скачков, ψ — абсолютно непрерывная функция и χ — сингулярная функция. Каждое слагаемое этого разложения определяется функцией $\mathcal{F}$ однозначно с точностью до постоянной.

Если потребовать, например, чтобы все функции, входящие в равенство (7), обращались в нуль при $x = a$, то разложение (7) единственно.

Продифференцировав равенство (7), получаем, что почти всюду на $[a; b]$ $\mathcal{F}'(x) = \psi'(x)$. Следовательно, при интегрировании производной от функции $\mathcal{F}$ с ограниченным изменением восстанавливается не сама функция $\mathcal{F}$, а только ее абсолютно непрерывная составляющая.

Разложение (7) полезно сравнить с результатами § 3, п. 5.

4. Интеграл Стильеса. Пусть $y = \mathcal{F}(x)$, $a \leq x \leq b$, — монотонно неубывающая функция. Для определенности считаем ее непрерывной слева. Тогда, как было отмечено в § 2, п. 6, с помощью этой функции $\mathcal{F}$ на полукольце $\mathfrak{A}$ всех полуинтервалов вида $[\alpha; \beta)$, принадлежащих основному сегменту $[a; b]$, можно построить счетно-аддитивную меру $\mu_{\mathcal{F}}$, полагая $\mu_{\mathcal{F}}[\alpha; \beta) = \mathcal{F}(\beta) - \mathcal{F}(\alpha)$. Эта мера допускает лебегово продолжение на некоторую σ -алгебру $\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}$ всех $\mu_{\mathcal{F}}$ -измеримых множеств отрезка $[a; b]$. Отметим, что совокупность $\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}$ содержит все борелевы множества отрезка $[a; b]$. Мера $\mu_{\mathcal{F}}$, рассматриваемая на σ -алгебре $\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}$, называется мерой Лебега — Стильеса, отвечающей функции $\mathcal{F}$.

Для меры Лебега — Стильеса $\mu_{\mathcal{F}}$ обычным образом (см. § 3) определяется класс интегрируемых функций и вводится понятие интеграла Лебега

$$\int_{[a; b]} f(x) d\mu_{\mathcal{F}} = \int_a^b f(x) d\mu_{\mathcal{F}}.$$

Этот интеграл, построенный по мере $\mu_{\mathcal{F}}$, отвечающей функции $\mathcal{F}$, называется *ин-*

тегралом Лебега — Стильеса и обозначается символом $\int_a^b f(x) d\mathcal{F}(x)$.

Рассмотрим некоторые важные частные случаи.

1) Пусть $\mathcal{F}(x) = H(x)$ — функция скачков на отрезке $[a; b]$. А именно, пусть функция H имеет конечное или бесконечное число точек разрыва $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ на сегменте $[a; b]$, скачки в которых соответственно равны положительным числам $h_1, h_2, \dots, h_n, \dots$, причем если их бесконечное число, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} h_n$ сходится. Тогда соответствующая мера μ_H является дискретной (более того, сосредоточенной в точках $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$). Нетрудно проверить, что в этом случае функция f μ_H -интегрируема тогда и только тогда, когда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n) h_n$ абсолютно сходится. При этом

$$\int_a^b f(x) d\mu_H = \sum_n f(x_n) h_n.$$

В частности, если H имеет только конечное число точек разрыва, то каждая функция, заданная на $[a; b]$, μ_H -интегрируема.

2) Пусть функция $\mathcal{F}$ абсолютно непрерывна на $[a; b]$. Тогда можно проверить, что интеграл Лебега — Стильеса выражается через интеграл Лебега по обычной лебеговой мере с помощью формулы

$$\int_a^b f(x) d\mathcal{F}(x) = \int_a^b f(x) \mathcal{F}'(x) dx.$$

Кроме того, функция f является $\mu_{\mathcal{F}}$ -интегрируемой тогда и только тогда, когда произведение $f\mathcal{F}'$ интегрируемо по обычной лебеговой мере.

Таким образом, если монотонно неубывающая непрерывная слева функция $\mathcal{F}$ представляется в виде суммы функции скачков и абсолютно непрерывной функции,

то интеграл Лебега — Стильеса $\int_a^b f(x) d\mathcal{F}(x)$ сводится к ряду (или конечной сумме)

и интегралу по обычной мере Лебега на $[a; b]$. Если $\mathcal{F}$ содержит и сингулярную составляющую, то такое сведение уже невозможно (см. пример 15).

Ясно, что интеграл Лебега — Стильеса обладает всеми свойствами интеграла Лебега (см. § 3).

Перейдем к определению интеграла Лебега — Стильеса по функции $\mathcal{F}$ с ограниченным изменением. Итак, пусть функция $\mathcal{F}$ имеет ограниченное изменение на отрезке $[a; b]$. Тогда на основании теоремы 2 представим $\mathcal{F}$ в виде разности двух монотонно неубывающих функций $\mathcal{F}(x) = v(x) - u(x)$, $a \leq x \leq b$, где $v(x)$ — полная вариация функции $\mathcal{F}$ на $[a; x]$, а $u(x) = v(x) - \mathcal{F}(x)$. Введем интеграл Лебега — Стильеса по функции $\mathcal{F}$, положив

$$\int_a^b f(x) d\mathcal{F}(x) = \int_a^b f(x) dv(x) - \int_a^b f(x) du(x).$$

Отметим, что если функцию $\mathcal{F}$ представить в виде разности других монотонно неубывающих функций, то величина интеграла $\int_a^b f(x) d\mathcal{F}(x)$ от этого не изменится.

Наряду с интегралом Лебега — Стильеса рассмотрим и так называемый интеграл Римана — Стильеса. Пусть функция $\mathcal{F}$ непрерывна слева и имеет ограниченное изменение на полуинтервале $[a; b)$, а f — произвольная функция на этом же полуинтервале. Имея разбиение $\Pi: a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < \dots < x_n = b$ полуинтервала $[a; b)$ на полуинтервалы $[x_k, x_{k+1})$, выберем в каждой промежуток $[x_k, x_{k+1})$ от-

меченную точку ξ_k и составим соответствующую интегральную сумму $\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \times \times [\mathcal{F}(x_{k+1}) - \mathcal{F}(x_k)]$ (здесь $\mathcal{F}(b) = \mathcal{F}(b-0)$).

Если при $\lambda = \max_{0 \leq k \leq n-1} (x_{k+1} - x_k) \rightarrow 0$ эти суммы имеют конечный предел, не зависящий от разбиения Π и выбора отмеченных точек ξ_k , то функция f называется интегрируемой по функции $\mathcal{F}$ на $[a; b)$. При этом указанный предел называется ин-

тегралом Римана — Стильеса функции f по $\mathcal{F}$ и обозначается $\int_a^b f(x) d\mathcal{F}(x)$.

Таким образом, для интеграла Римана — Стильеса интегрируемой функции f справедливо равенство

$$\int_a^b f(x) d\mathcal{F}(x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) [\mathcal{F}(x_{k+1}) - \mathcal{F}(x_k)].$$

Теорема 9. Если функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она интегрируема относительно каждой непрерывной слева функции $\mathcal{F}$, имеющей на $[a; b)$ ограниченное изменение. Кроме того, интеграл Римана — Стильеса функции f по $\mathcal{F}$ на $[a; b)$ совпадает с соответствующим интегралом Лебега — Стильеса.

Укажем основные свойства интеграла Римана — Стильеса.

1) Если функция f непрерывна на $[a; b]$, а $\mathcal{F}$ имеет ограниченное изменение, то справедлива оценка

$$\left| \int_a^b f(x) d\mathcal{F}(x) \right| \leq \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \cdot \bigvee_a^b [\mathcal{F}].$$

2) Если функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$, а функции $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ имеют ограниченное изменение на $[a; b]$, то

$$\int_a^b f(x) d\mathcal{F}(x) = \int_a^b f(x) d\mathcal{F}_1(x) + \int_a^b f(x) d\mathcal{F}_2(x),$$

где $\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}_1(x) + \mathcal{F}_2(x)$, $x \in [a; b]$.

3) Если $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ — функции с ограниченным изменением на $[a; b]$, совпадающие всюду, кроме конечного или счетного числа внутренних точек этого промежутка, то для каждой непрерывной на $[a; b]$ функции f справедливо равенство

$$\int_a^b f(x) d\mathcal{F}_1(x) = \int_a^b f(x) d\mathcal{F}_2(x)$$

4) Если функция f непрерывна на $[a; b]$, то интеграл Римана — Стильеса

$\int_a^b f(x) d\mathcal{F}(x)$ не зависит от значений, принимаемых функцией $\mathcal{F}$ в ее точках разрыва, лежащих в интервале $(a; b)$.

Теорема 10 (первая теорема Хелли). Пусть функции $\mathcal{F}_n$ с ограниченным изменением на отрезке $[a; b]$ сходятся в каждой точке этого отрезка к некоторой функции $\mathcal{F}$, причем полные изменения функции $\mathcal{F}_n$ ограничены в совокупности: $\bigvee_a^b \mathcal{F}_n \leq C$ ($n = 1, 2, \dots$). Тогда предельная функция $\mathcal{F}$ также имеет ограниченное изменение и для любой непрерывной на $[a; b]$ функции f справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) d\mathcal{F}_n(x) = \int_a^b f(x) d\mathcal{F}(x).$$

Теорема 11 (вторая теорема Хелли). Из всякого бесконечного множества M функций $\mathcal{F}$, имеющих ограниченное изменение на отрезке $[a; b]$ и удовлетворяющих условиям $\max_{a \leq x \leq b} |\mathcal{F}(x)| \leq C$, $\bigvee_a^b \mathcal{F} \leq K$, где C и K — постоянные (одни и те же для всех $\mathcal{F} \in M$), можно выбрать последовательность, сходящуюся в каждой точке сегмента $[a; b]$.

Теорема 12 (формула интегрирования по частям). Пусть функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ интегрируемы по Лебегу на отрезке $[a; b]$, а $\mathcal{F}(x)$ и $G(x)$ — их неопределенные интегралы на $[a; b]$. Тогда справедлива формула

$$\int_a^b \mathcal{F}(x) g(x) dx = \mathcal{F}(x) G(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x) G(x) dx.$$

Замечание. Мы определили интеграл Римана — Стильеса на полуинтервале $[a; b)$. Аналогично можно определить этот интеграл на $(a; b]$, а также интегралы на отрезке $[a; b]$ и на интервале $(a; b)$. Однако, в отличие от интеграла Римана, интегралы по всем этим промежуткам могут быть различными. Например,

$$\int_{[a; b]} f(x) d\mathcal{F}(x) = \int_{(a; b]} f(x) d\mathcal{F}(x) + f(a) [\mathcal{F}(a+0) - \mathcal{F}(a)].$$

О дифференцировании и интегрировании функций см. в [20; 23; 27; 33; 38].

Примеры решения задач

1. Пусть функции $\mathcal{F}$ и G имеют ограниченное изменение на отрезке $[a; b]$.

1) Доказать, что произведение $\mathcal{F}G$ также имеет на $[a; b]$ ограниченное изменение и

$$\bigvee_a^b |\mathcal{F}G| \leqslant \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |G(x)| \cdot \bigvee_a^b [\mathcal{F}] + \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |\mathcal{F}(x)| \cdot \bigvee_a^b |G|.$$

2) Доказать, что если существует такое положительное число α , что $|\mathcal{G}(x)| \geqslant \alpha$ для всех $x \in [a; b]$, то частное $\frac{\mathcal{F}}{G}$ является функцией с ограниченным изменением на отрезке $[a; b]$ и

$$\bigvee_a^b \left[\frac{\mathcal{F}}{G} \right] \leqslant \frac{1}{\alpha^2} \left(\sup_{a \leqslant x \leqslant b} |G(x)| \cdot \bigvee_a^b [\mathcal{F}] + \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |\mathcal{F}(x)| \cdot \bigvee_a^b |G| \right).$$

Решение. Рассмотрим произвольное разбиение Π отрезка $[a; b]$

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < \dots < x_n = b.$$

1) Поскольку каждая функция с ограниченным изменением на $[a; b]$ является ограниченной, то для разбиения Π получаем следующие оценки:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} |\mathcal{F}(x_{k+1})G(x_{k+1}) - \mathcal{F}(x_k)G(x_k)| &= \sum_{k=0}^{n-1} |\mathcal{F}(x_{k+1}) - \\ &\quad - \mathcal{F}(x_k)|G(x_{k+1}) + \mathcal{F}(x_k)[G(x_{k+1}) - G(x_k)]| \leqslant \\ &\leqslant \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |G(x)| \cdot \sum_{k=0}^{n-1} |\mathcal{F}(x_{k+1}) - \mathcal{F}(x_k)| + \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |\mathcal{F}(x)| \times \\ &\quad \times \sum_{k=0}^{n-1} |G(x_{k+1}) - G(x_k)| \leqslant \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |G(x)| \cdot \bigvee_a^b [\mathcal{F}] + \\ &\quad + \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |\mathcal{F}(x)| \cdot \bigvee_a^b |G|. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что функция $\mathcal{F}G$ имеет ограниченное изменение на $[a; b]$ и

$$\bigvee_a^b |\mathcal{F}G| \leqslant \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |G(x)| \cdot \bigvee_a^b [\mathcal{F}] + \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |\mathcal{F}(x)| \cdot \bigvee_a^b |G|.$$

2) Аналогично предыдущему, для рассматриваемого разбиения имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{\mathcal{F}(x_{k+1})}{G(x_{k+1})} - \frac{\mathcal{F}(x_k)}{G(x_k)} \right| &= \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{\mathcal{F}(x_{k+1})G(x_k) - G(x_{k+1})\mathcal{F}(x_k)}{G(x_{k+1})G(x_k)} \right| \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{\alpha^2} \left(\sup_{a \leqslant x \leqslant b} |G(x)| \cdot \sum_{k=0}^{n-1} |\mathcal{F}(x_{k+1}) - \mathcal{F}(x_k)| + \right. \\ &\quad \left. + \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |\mathcal{F}(x)| \cdot \sum_{k=0}^{n-1} |G(x_{k+1}) - G(x_k)| \right) \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{\alpha^2} \left(\sup_{a \leqslant x \leqslant b} |G(x)| \cdot \bigvee_a^b [\mathcal{F}] + \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |\mathcal{F}(x)| \cdot \bigvee_a^b |G| \right). \end{aligned}$$

Следовательно, функция $\frac{\mathcal{F}}{G}$ является функцией с ограниченным изменением на $[a; b]$ и

$$\bigvee_a^b \left[\frac{\mathcal{F}}{G} \right] \leq \frac{1}{\alpha^2} \left(\sup_{a \leq x \leq b} |G(x)| \cdot \bigvee_a^b [\mathcal{F}] + \sup_{a \leq x \leq b} |\mathcal{F}(x)| \cdot \bigvee_a^b [G] \right).$$

2. Пусть для функции $y = \mathcal{F}(x)$, $a \leq x \leq b$, существует такое разбиение $\Pi^*: a = x_0^* < x_1^* < \dots < x_k^* < \dots < x_n^* = b$ отрезка $[a; b]$, что на каждом отрезке $[x_k^*; x_{k+1}^*]$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, она является монотонной. Доказать, что функция $\mathcal{F}$ имеет ограниченное изменение на $[a; b]$ и

$$\bigvee_a^b [\mathcal{F}] = \sum_{j=0}^{k-1} |\mathcal{F}(x_{j+1}^*) - \mathcal{F}(x_j^*)| + |\mathcal{F}(x) - \mathcal{F}(x_k^*)|,$$

если $x \in [x_k^*; x_{k+1}^*]$.

Решение. Очевидно, что любая монотонная функция G на отрезке $[a; b]$ имеет ограниченное изменение и ее полная вариация $\bigvee_a^b [G]$ равна числу $|G(b) - G(a)|$. Поэтому заданная функция $\mathcal{F}$ имеет ограниченное изменение на каждом отрезке $[x_j^*; x_{j+1}^*]$ разбиения Π^* и

$$\bigvee_{x_j^*}^{x_{j+1}^*} [\mathcal{F}] = |\mathcal{F}(x_{j+1}^*) - \mathcal{F}(x_j^*)|.$$

Отметим также, что если к точкам x_l , $l = 0, 1, \dots, m$, разбиения Π отрезка $[a; b]$ присоединить некоторые новые точки x_k^* , $k = 0, 1, \dots, n$, то сумма

$$\sum_{l=0}^{m-1} |\mathcal{F}(x_{l+1}) - \mathcal{F}(x_l)|$$

при этом не уменьшится. Значит,

$$\sum_{l=0}^{m-1} |\mathcal{F}(x_{l+1}) - \mathcal{F}(x_l)| \leq \sum_{j=0}^{n-1} \bigvee_{x_j^*}^{x_{j+1}^*} [\mathcal{F}] = \sum_{j=0}^{n-1} |\mathcal{F}(x_{j+1}^*) - \mathcal{F}(x_j^*)|.$$

Следовательно, функция $\mathcal{F}$ имеет ограниченное изменение на $[a; b]$ и

$$\bigvee_a^b [\mathcal{F}] \leq \sum_{j=0}^{n-1} |\mathcal{F}(x_{j+1}^*) - \mathcal{F}(x_j^*)|.$$

Кроме того, если в качестве Π взять Π^* , то

$$\bigvee_a^b [\mathcal{F}] \geq \sum_{j=0}^{n-1} |\mathcal{F}(x_{j+1}^*) - \mathcal{F}(x_j^*)|.$$

Таким образом,

$$\bigvee_a^b [\mathcal{F}] = \sum_{j=0}^{n-1} |\mathcal{F}(x_{j+1}^*) - \mathcal{F}(x_j^*)|.$$

Пусть теперь x — некоторая точка отрезка $[a; b]$, а $[x_k^*; x_{k+1}^*]$ — отрезок, ее содержащий. Применяя предыдущие рассуждения к отрезку $[a; x]$, имеем

$$\sum_a^x [\mathcal{F}] = \sum_{j=0}^{n-1} |\mathcal{F}(x_{j+1}^*) - \mathcal{F}(x_j^*)| + |\mathcal{F}(x) - \mathcal{F}(x_n^*)|.$$

8. Определить полную вариацию функции $\mathcal{F}$ на указанном отрезке, если:

1) $\mathcal{F}(x) = \sin x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi;$

2) $\mathcal{F}(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1 - x, & x \in (0; 1), \\ 4, & x = 1. \end{cases}$

Решение. 1) Функция $\mathcal{F}$ является монотонной на отрезках $[0; \frac{\pi}{2}]$, $[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$ и $[\frac{3\pi}{2}; 2\pi]$. Поэтому, согласно предыдущему примеру, функция $\mathcal{F}(x) = \sin x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$, имеет ограниченное изменение на $[0; 2\pi]$ и

$$\begin{aligned} \sum_a^b [\mathcal{F}] &= \left| \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right| + \left| \sin \frac{3\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2} \right| + \\ &+ \left| \sin 2\pi - \sin \frac{3\pi}{2} \right| = 4. \end{aligned}$$

2) Рассмотрим произвольное разбиение Π отрезка $[0; 1]$:

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_k < \dots < x_n = 1.$$

Для этого разбиения

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} |\mathcal{F}(x_{k+1}) - \mathcal{F}(x_k)| &= |1 - x_1| + |1 - x_1 - 1 + x_2| + \dots + \\ &+ |1 - x_{n-2} - 1 + x_{n-1}| + |4 - 1 + x_{n-1}| = 4 + (x_2 - x_1) + \dots + \\ &+ (x_{n-1} - x_{n-2}) + (x_{n-1} - x_1). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\mathcal{F}(x_{k+1}) - \mathcal{F}(x_k)| \leq 4 + 1 + 1 = 6.$$

Кроме того, для каждого $\varepsilon > 0$ рассмотрим такое разбиение $\Pi: a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < \dots < x_n = b$ отрезка $[a; b]$, что $x_1 < a + \frac{\varepsilon}{4}$ и $1 - x_{n-1} < \frac{\varepsilon}{4}$. В этом случае, очевидно,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} |\mathcal{F}(x_{k+1}) - \mathcal{F}(x_k)| &= 4 + (x_2 - x_1) + \dots + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \\ &+ (x_{n-1} - x_1) > 6 - \varepsilon. \end{aligned}$$

Поэтому $\sup_{\Pi} \sum_{k=0}^{n-1} |\mathcal{F}(x_{k+1}) - \mathcal{F}(x_k)| = 6$. Следовательно, заданная функция $\mathcal{F}$ имеет ограниченное изменение на отрезке $[0; 1]$ и ее полное изменение $\bigvee_0^1 [\mathcal{F}]$ равно 6.

4. Представить в виде разности монотонно неубывающих функций

1) $\mathcal{F}(x) = x^4, x \in [-1; 1]$;

2) $\mathcal{F}(x) = |\cos x|, x \in [0; 2\pi]$.

Решение. 1) Заданная функция $\mathcal{F}$ является монотонной на отрезках $[-1; 0]$ и $[0; 1]$. Поэтому (см. пример 2) она имеет на $[-1; 1]$ ограниченное изменение и

$$v(x) = \bigvee_{-1}^x [\mathcal{F}] = \begin{cases} 1 - x^4, & -1 \leq x \leq 0, \\ 1 + x^4, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Положим $u(x) = v(x) - \mathcal{F}(x), -1 \leq x \leq 1$, т. е.

$$u(x) = \begin{cases} 1 - 2x^4, & -1 \leq x \leq 0, \\ 1, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Как отмечалось в п. 2, функции v и u являются монотонно неубывающими на $[-1; 1]$. Кроме того, $\mathcal{F}(x) = v(x) - u(x), -1 \leq x \leq 1$.

2) Функция $\mathcal{F}(x) = |\cos x|, 0 \leq x \leq 2\pi$, является монотонной на отрезках $[0; \frac{\pi}{2}]$, $[\frac{\pi}{2}; \pi]$, $[\pi; \frac{3\pi}{2}]$ и $[\frac{3\pi}{2}; 2\pi]$. Поэтому она имеет ограниченное изменение на сегменте $[0; 2\pi]$ и ее полная вариация $v(x) = \bigvee_0^x [\mathcal{F}]$ на отрезке $[0; x] \subset [0; 2\pi]$ определяется, как показано в примере 2, соотношением

$$v(x) = \begin{cases} 1 - \cos x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 1 + |\cos x|, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, \\ 3 - |\cos x|, & \pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}, \\ 3 + \cos x, & \frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi. \end{cases}$$

Рассмотрим монотонно неубывающую функцию $u(x) = v(x) - |\cos x|, 0 \leq x \leq 2\pi$, которую можно представить в виде

$$u(x) = \begin{cases} 1 - 2 \cos x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 1, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, \\ 3 - 2 |\cos x|, & \pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}, \\ 3, & \frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi. \end{cases}$$

Поэтому разложение $\mathcal{F}(x) = v(x) - u(x)$, $0 \leq x \leq 2\pi$, является искомым.

5. 1) Доказать, что каждая функция, имеющая на отрезке $[a; b]$ ограниченную производную, является функцией с ограниченным изменением.

2) Доказать, что функция

$$\mathcal{F}(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \end{cases}$$

имеет ограниченное изменение на отрезке $[0; 1]$.

Решение. 1) Пусть $\Pi: a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < \dots < x_n = b$ — произвольное разбиение отрезка $[a; b]$, а $y = \mathcal{F}(x)$, $a \leq x \leq b$, — заданная функция. Тогда, согласно условию, существует такое число K , что $|\mathcal{F}'(x)| \leq K$ для всех $x \in [a; b]$. Далее с помощью теоремы Лагранжа о конечных приращениях получаем такую оценку:

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\mathcal{F}(x_{k+1}) - \mathcal{F}(x_k)| = \sum_{k=0}^{n-1} |\mathcal{F}'(\tau_k)| |x_{k+1} - x_k| \leq K(b-a),$$

где τ_k — некоторая точка из сегмента $[x_k; x_{k+1}]$. Таким образом, для произвольного разбиения Π отрезка $[a; b]$ сумма $\sum_{k=0}^{n-1} |\mathcal{F}(x_{k+1}) - \mathcal{F}(x_k)|$ является ограниченной (например, числом $K(b-a)$). Следовательно, функция $\mathcal{F}$ имеет ограниченное изменение на $[a; b]$.

2) Покажем, что заданная функция $\mathcal{F}$ имеет ограниченную производную на $[0; 1]$. Действительно, если $x \neq 0$, то производная $\mathcal{F}'(x)$ существует и $\mathcal{F}'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$.

Если же $x = 0$, то по определению

$$\mathcal{F}'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2 \sin \frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x \sin \frac{1}{\Delta x} = 0.$$

Таким образом,

$$\mathcal{F}'(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \end{cases}$$

и

$$|\mathcal{F}'(x)| \leq \left| 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right| \leq 3 \quad (\forall x \in (0; 1]).$$

Поэтому, согласно утверждению 1) этого примера, заданная функция имеет ограниченное изменение на отрезке $[0; 1]$.

6. Доказать, что функция

$$\mathcal{F}(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \end{cases}$$

не имеет ограниченного изменения на отрезке $\left[0; \frac{2}{\pi}\right]$.

Решение. Отметим вначале (в чем можно убедиться непосредственно), что заданная функция не удовлетворяет условиям предыдущего примера.

Рассмотрим для произвольного натурального числа n разбиение Π_n отрезка $\left[0; \frac{2}{\pi}\right]$ точками, в которых функция $\sin \frac{1}{x}$ равна поочередно -1 и 1 , т. е.

$$0 = x_0 < x_1 = \frac{2}{(2n+1)\pi} < x_2 = \frac{2}{(2n-1)\pi} < \dots < x_n = \frac{2}{3\pi} < x_{n+1} = \frac{2}{\pi},$$

и вычислим сумму S_n модулей приращений функции $\mathcal{F}$ на отрезках разбиения

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n-1} |\mathcal{F}(x_{k+1}) - \mathcal{F}(x_k)| = \left(\frac{2}{(2n+1)\pi} - 0 \right) + \\ &+ \left(\frac{2}{(2n+1)\pi} + \frac{2}{(2n-1)\pi} \right) + \dots + \left(\frac{2}{3\pi} + \frac{2}{\pi} \right) = \\ &= \frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \dots + \frac{2}{2n+1} \right). \end{aligned}$$

Поскольку ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{2k+1}$ расходящийся, то последовательность его частичных сумм не ограничена сверху, т. е. $\sup_n S_n = +\infty$. Отсюда следует, что функция $\mathcal{F}$ не является функцией с ограниченным изменением на отрезке $\left[0; \frac{2}{\pi}\right]$.

7. Пусть непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция $\mathcal{F}$ имеет производную $\mathcal{F}'$ на $[a; b]$, исключая конечное число точек, и $\mathcal{F}'$ интегрируема по Риману на $[a; b]$. Доказать, что $\mathcal{F}$ имеет ограниченное изменение на отрезке $[a; b]$ и

$$\bigvee_a^b [\mathcal{F}] = \int_a^b |\mathcal{F}'(x)| dx.$$

Решение. Отметим, что если $\Pi: a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < \dots < x_n = b$ — произвольное разбиение отрезка $[a; b]$, то сумма

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\mathcal{F}(x_{k+1}) - \mathcal{F}(x_k)|$$

может только увеличиться, если к имеющимся точкам разбиения прибавить точки, в которых производная $\mathcal{F}'$ не существует. Поэтому, не умаляя общности, можно считать, что все указанные точки в состав точек разбиения Π уже входят. Запишем для каждого отрезка $[x_k;$

x_{k+1}] и функции $\mathcal{F}$ формулу Ньютона — Лейбница

$$\mathcal{F}(x_{k+1}) - \mathcal{F}(x_k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \mathcal{F}'(x) dx.$$

Тогда

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\mathcal{F}(x_{k+1}) - \mathcal{F}(x_k)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |\mathcal{F}'(x)| dx = \int_a^b |\mathcal{F}'(x)| dx,$$

откуда следует, что $\mathcal{F}$ является функцией с ограниченным изменением на $[a; b]$ и

$$\bigvee_a^b [\mathcal{F}] \leq \int_a^b |\mathcal{F}'(x)| dx.$$

Осталось доказать, что на самом деле в последнем неравенстве стоит знак равенства. Поэтому пусть Π — рассмотренное выше разбиение. Тогда, согласно теореме Лагранжа о конечных приращениях, получаем

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\mathcal{F}(x_{k+1}) - \mathcal{F}(x_k)| = \sum_{k=0}^{n-1} |\mathcal{F}'(\tau_k)| (x_{k+1} - x_k),$$

где τ_k — некоторая точка интервала $(x_k; x_{k+1})$. Отсюда следует, что если $\lambda = \max_{0 \leq k \leq n-1} (x_{k+1} - x_k)$, то

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} |\mathcal{F}'(\tau_k)| (x_{k+1} - x_k) = \int_a^b |\mathcal{F}'(x)| dx.$$

Таким образом,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} |\mathcal{F}(x_{k+1}) - \mathcal{F}(x_k)| = \int_a^b |\mathcal{F}'(x)| dx$$

и для каждого $\varepsilon > 0$ имеется такое разбиение Π_ε , что для него

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\mathcal{F}(x_{k+1}) - \mathcal{F}(x_k)| > \int_a^b |\mathcal{F}'(x)| dx - \varepsilon.$$

Поэтому

$$\bigvee_a^b [\mathcal{F}] = \sup_{\Pi} \sum_{k=0}^{n-1} |\mathcal{F}(x_{k+1}) - \mathcal{F}(x_k)| > \int_a^b |\mathcal{F}'(x)| dx - \varepsilon$$

или (поскольку ε — произвольное положительное число)

$$\bigvee_a^b [\mathcal{F}] \geq \int_a^b |\mathcal{F}'(x)| dx.$$

Следовательно, с учетом ранее доказанного неравенства, имеем

$$\bigvee_a^b [\mathcal{F}] = \int_a^b |\mathcal{F}'(x)| dx.$$

8. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x \sin^2 \frac{1}{x} + \beta x \cos^2 \frac{1}{x}, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ \alpha x \sin^2 \frac{1}{x} + b x \cos^2 \frac{1}{x}, & x > 0, \end{cases}$$

где $\alpha < \beta$, $a < b$. Найти производные числа $\Lambda_{\text{пр}}$, $\lambda_{\text{пр}}$, $\Lambda_{\text{лев}}$, $\lambda_{\text{лев}}$ функции f в точке $x = 0$.

Решение. По определению

$$\Lambda_{\text{пр}} = \overline{\lim}_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{a \Delta x \sin^2 \frac{1}{\Delta x} + b \Delta x \cos^2 \frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = \overline{\lim}_{\Delta x \rightarrow +0} \left(a \sin^2 \frac{1}{\Delta x} + b \cos^2 \frac{1}{\Delta x} \right).$$

Поскольку $a \sin^2 \frac{1}{\Delta x} + b \cos^2 \frac{1}{\Delta x} = a + (b - a) \cos^2 \frac{1}{\Delta x}$ и

$\overline{\lim}_{\Delta x \rightarrow +0} \cos^2 \frac{1}{\Delta x} = 1$, то

$$\Lambda_{\text{пр}} = a + (b - a) \overline{\lim}_{\Delta x \rightarrow +0} \cos^2 \frac{1}{\Delta x} = a + (b - a) = b.$$

Таким образом, $\Lambda_{\text{пр}} = b$.

Найдем $\lambda_{\text{пр}}$. Так как $\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \cos^2 \frac{1}{\Delta x} = 0$, то

$$\lambda_{\text{пр}} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \left(a \sin^2 \frac{1}{\Delta x} + b \cos^2 \frac{1}{\Delta x} \right) = a + (b - a) \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \cos^2 \frac{1}{\Delta x} = a.$$

Аналогично получаем, что $\Lambda_{\text{лев}} = \beta$, а $\lambda_{\text{лев}} = \alpha$.

Значит, производные числа функции могут быть любыми.

9. Рассмотрим функцию

$$y = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Доказать, что эта функция дифференцируема на $[0; 1]$, но ее производная не является интегрируемой по Лебегу на этом отрезке.

Решение. Если $x \neq 0$, то $y' = 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}$. Если $x = 0$, то, согласно определению производной, имеем

$$y'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2 \sin \frac{1}{(\Delta x)^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x \cdot \sin \frac{1}{(\Delta x)^2} = 0.$$

Таким образом, заданная функция дифференцируема на отрезке $[0; 1]$.

Докажем, что производная y' не является интегрируемой по Лебегу на $[0; 1]$, для чего, согласно примеру 29.1 из § 3, исследуем на абсолют-

ную сходимость интеграл

$$\int_0^1 \left(2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2} \right) dx.$$

Рассмотрим вначале интеграл $\int_0^1 2x \sin \frac{1}{x^2} dx$. Здесь подынтегральная функция, очевидно, непрерывна на $[0; 1]$, и поэтому этот интеграл является римановым, т. е. функция $2x \sin \frac{1}{x^2}$ интегрируема по Лебегу. Покажем, однако, что несобственный интеграл

$\int_0^1 \frac{2}{x} \left| \cos \frac{1}{x^2} \right| dx$ расходится. Для этого сделаем замену переменных:

$$\frac{1}{x^2} = t. \text{ Тогда } \int_0^1 \frac{2}{x} \left| \cos \frac{1}{x^2} \right| dx = \int_1^{+\infty} \frac{|\cos t|}{t} dt.$$

Но последний интеграл, как известно, расходится. Значит, производная y' заданной функции действительно не интегрируема по Лебегу на $[0; 1]$.

Как следствие из полученного результата отметим, что рассматриваемая функция не имеет (см. теорему 6) ограниченного изменения на $[0; 1]$ и она не является абсолютно непрерывной на этом отрезке. Однако она равномерно непрерывна на $[0; 1]$.

10. Построим на отрезке $[0; 1]$ канторово совершенное множество F (см. § 1) и назовем интервалами k -го ранга те его смежные интервалы, длина которых равна $\frac{1}{3^k}$. Зададим функцию $\chi(x)$ следующим образом:

на смежном интервале первого ранга положим $\chi(x) = \frac{1}{2}$; на смежных интервалах второго ранга — $\chi(x) = \frac{1}{2^2}$ на левом (т. е. $\left(\frac{1}{9}; \frac{2}{9}\right)$) из них и $\chi(x) = \frac{3}{2^2}$ на правом (т. е. $\left(\frac{7}{9}; \frac{8}{9}\right)$); вообще, на смежных интервалах k -го ранга полагаем $\chi(x) = \frac{1}{2^k}$ на первом из них (если двигаться слева направо), $\chi(x) = \frac{3}{2^k}$ на втором и т. д., т. е. считаем, что на

последнем интервале k -го ранга $\chi(x) = \frac{2^k - 1}{2^k}$. Таким образом, функция $\chi(x)$ определена на множестве $CF = [0; 1] \setminus F$. Теперь доопределим ее и на F , положив для $x \in F$ $\chi(x) = \sup_{\xi < x, \xi \in CF} \chi(\xi)$, а $\chi(0) = 0$. Построенная на отрезке $[0; 1]$ функция χ называется функцией Кантора. Доказать, что она является сингулярной.

Решение. Согласно построению функция Кантора является монотонно неубывающей на множестве $CF = [0; 1] \setminus F$ и на этом множестве принимает в качестве своих значений все двоично рациональные

числа, расположенные между 0 и 1, т. е. числа вида $\frac{p}{2^k}$, где k и p — неотрицательные целые числа, причем $1 \leq p \leq 2^k - 1$. Очевидно, что множество всех двоично рациональных чисел является всюду плотным на отрезке $[0; 1]$.

Докажем, что функция Кантора является монотонно неубывающей и на сегменте $[0; 1]$. Для этого пусть x_1 и x_2 — произвольные точки отрезка $[0; 1]$, причем $x_1 < x_2$. Если $x_1 \in CF$, $x_2 \in CF$, то, как мы только что отметили, $\chi(x_1) \leq \chi(x_2)$. Если же $x_1 \in CF$, а $x_2 \in F$, то, согласно определению, $\chi(x_2) = \sup_{\xi < x_2, \xi \in CF} \chi(\xi)$, т. е. также $\chi(x_2) \geq \chi(x_1)$. Если

$x_1 \in F$, а $x_2 \in CF$, для каждого $\xi < x_1$ и $\xi \in CF$ имеем неравенство $\chi(\xi) \leq \chi(x_2)$, и поэтому $\chi(x_1) \leq \chi(x_2)$. Наконец, пусть $x_1 \in F$ и $x_2 \in F$. Поскольку множество CF всюду плотно, то существует такая точка $\xi \in CF$, что $x_1 < \xi < x_2$. Тогда, исходя из предыдущего, имеем $\chi(x_1) \leq \chi(\xi)$ и $\chi(\xi) \leq \chi(x_2)$, т. е. $\chi(x_1) \leq \chi(x_2)$. Таким образом, функция χ действительно является монотонно неубывающей на сегменте $[0; 1]$, и поэтому она имеет ограниченное изменение на $[0; 1]$.

Далее, на основании теоремы Лебега функция χ почти всюду на $[0; 1]$ имеет конечную производную. Найдём вначале производную χ' на множестве CF . Поскольку на каждом смежном интервале функция χ постоянна, то $\chi'(x) = 0$ для произвольного $x \in CF$. Но мера Лебега множества CF равна единице и, таким образом, $\chi'(x) = 0$ почти всюду на $[0; 1]$.

Осталось доказать, что функция χ непрерывна на $[0; 1]$. Пусть это не так, т. е., например, существует такая точка $x_0 \in (0; 1)$, что $\chi(x_0 - 0) < \chi(x_0 + 0)$. Тогда (на основании монотонности χ) значения из интервала $(\chi(x_0 - 0); \chi(x_0 + 0)) \subset (0; 1)$ функция χ не принимает. Но, как отмечалось выше, функция χ имеет в качестве своих значений всюду плотное на $(0; 1)$ множество двоично рациональных чисел. Полученное противоречие доказывает непрерывность χ на интервале $(0; 1)$. Аналогично доказывается непрерывность функции χ в точках $x = 0$ и $x = 1$.

Следовательно, функция Кантора χ является непрерывной функцией с ограниченным изменением, производная которой почти всюду на отрезке $[0; 1]$ равна нулю. Поэтому функция χ сингулярна.

11. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$, а функция $\mathcal{F}$ имеет на $[a; b]$ всюду, кроме конечного числа точек $c_1, \dots, c_k$, интегрируемую по Риману производную $\mathcal{F}'$. Доказать, что существует интеграл Римана — Стильеса $\int_a^b f(x) d\mathcal{F}(x)$ и выражается формулой

$$\int_a^b f(x) d\mathcal{F}(x) = \int_a^b f(x) \mathcal{F}'(x) dx + f(a) [\mathcal{F}(a+0) - \mathcal{F}(a)] + \\ + \sum_{i=1}^k f(c_i) [\mathcal{F}(c_i+0) - \mathcal{F}(c_i-0)] + f(b) [\mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(b-0)]. \quad (8)$$

Решение. Как следует из примера 7, функция $\mathcal{F}$ имеет ограниченное изменение на $[a; b]$. Далее, изменим (если понадобится) значения функции $\mathcal{F}$ в точках разрыва так, чтобы полученная функция $\mathcal{F}_1$ была непрерывной слева. Тогда на основании теоремы 9 существует интеграл

Римана — Стильеса $\int_a^b f(x) d\mathcal{F}_1(x)$ и, следовательно, согласно свойству 3) интеграла Римана — Стильеса (см. п. 4), существует также интеграл $\int_a^b f(x) d\mathcal{F}(x)$ (равный предыдущему).

Построим теперь на $[a; b]$ функцию скачков H , для которой $a, c_1, \dots, c_k, b$ являются точками разрыва, причем ее скачки в этих точках соответственно равны $\mathcal{F}(a+0) - \mathcal{F}(a)$, $\mathcal{F}(c_1+0) - \mathcal{F}(c_1-0)$, $\dots$, $\mathcal{F}(c_k+0) - \mathcal{F}(c_k-0)$, $\mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(b-0)$. Тогда функция $G(x) = \mathcal{F}(x) - H(x)$, $a \leq x \leq b$, является непрерывной на $[a; b]$, производная которой интегрируема по Риману на $[a; b]$. Поэтому для интеграла Римана — Стильеса справедливо соотношение

$$\int_a^b f(x) d\mathcal{F}(x) = \int_a^b f(x) dH(x) + \int_a^b f(x) dG(x).$$

Но, как отмечалось выше,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dH(x) &= f(a) [\mathcal{F}(a+0) - \mathcal{F}(a)] + \\ &+ \sum_{j=1}^k f(c_j) [\mathcal{F}(c_j+0) - \mathcal{F}(c_j-0)] + f(b) [\mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(b-0)] \end{aligned}$$

(впрочем, это равенство можно получить и непосредственно, исходя лишь из определения интеграла Римана — Стильеса).

Докажем, что $\int_a^b f(x) dG(x) = \int_a^b f(x) \mathcal{F}'(x) dx$. Для этого отметим, что правая часть этого равенства существует как интеграл Римана, а левая часть имеет смысл как интеграл Римана — Стильеса. Поэтому надо доказать только их совпадение. С этой целью рассмотрим такое разбиение $\Pi: a = x_0 < x_1 < \dots < x_m < \dots < x_n = b$ отрезка $[a; b]$, в состав которого входят точки $c_1, \dots, c_k$, и для нахождения разности $G(x_{m+1}) - G(x_m)$ воспользуемся теоремой Лагранжа о конечных приращениях

$$G(x_{m+1}) - G(x_m) = \mathcal{F}'(\bar{x}_m)(x_{m+1} - x_m) \quad (\bar{x}_m \in (x_m; x_{m+1})).$$

Следовательно, если для данного разбиения Π отрезка $[a; b]$ в качестве отмеченных точек взять $\bar{x}_m$ ($m = 0, 1, \dots, n-1$), то интегральная сумма σ интеграла $\int_a^b f(x) dG(x)$ имеет вид

$$\sigma = \sum_{m=0}^{n-1} f(\bar{x}_m) \mathcal{F}'(\bar{x}_m)(x_{m+1} - x_m).$$

Но она является интегральной суммой интеграла $\int_a^b f(x) \mathcal{F}'(x) dx$.

Поэтому если $\lambda = \max_{0 \leq m \leq n-1} (x_{m+1} - x_m) \rightarrow 0$, то $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = \int_a^b f(x) \mathcal{F}'(x) dx$

и $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = \int_a^b f(x) dG(x)$, т. е.

$$\int_a^b f(x) dG(x) = \int_a^b f(x) \mathcal{F}'(x) dx.$$

Таким образом, формула (8) доказана.

12. Вычислить $\int_a^b f(x) d\mathcal{F}(x)$, если:

1) $f(x) = x$, $\mathcal{F}(x) = \cos x$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$;

2) $f(x) = \sin x$, $\mathcal{F}(x) = |x|$, $x \in [-1; 1]$;

3) $f(x) = (x^3 + 1)$, $\mathcal{F}(x) = \begin{cases} x + 2, & x \in [-2; -1], \\ 2, & x \in (-1; 0); \\ x^2 + 3, & x \in [0; 2]; \end{cases}$

4) $f(x) = x$, $\mathcal{F}(x) = \begin{cases} 1, & x = 1, \\ n, & x \in (n-1; n]; \end{cases} \quad a = 1, b = N \in \mathbb{N}.$

Решение. Вычисления этих интегралов проведем по формуле (8), полученной в предыдущем примере (все они существуют на основании того же примера 11).

1) В этом случае интеграл Римана — Стильеса приводится к интегралу Римана

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x d \cos x = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = -1.$$

2) Функция $\mathcal{F}$ непрерывна, а $\mathcal{F}'(x) = -1$, если $x < 0$, и $\mathcal{F}'(x) = 1$ для $x > 0$. В точке $x = 0$ функция $\mathcal{F}$ производной не имеет. Поэтому

$$\int_{-1}^1 \sin x d(|x|) = - \int_{-1}^0 \sin x dx + \int_0^1 \sin x dx = 2 - 2 \cos 1.$$

3) Вычислим данный интеграл, используя формулу (8)

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 (x^3 + 1) d\mathcal{F}(x) &= \int_{-2}^{-1} (x^3 + 1) dx + (x^3 + 1)|_{x=-1} \cdot (2 - 1) + \\ &+ (x^3 + 1)|_{x=0} \cdot (3 - 2) + \int_0^2 (x^3 + 1) 2x dx = \frac{301}{20}. \end{aligned}$$

4) Функция $\mathcal{F}$ в этом случае является функцией скачков. Поэтому

$$\int_1^N x d\mathcal{F}(x) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + \dots + (N-1) \cdot 1 = \frac{N(N-1)}{2}.$$

13. Пусть $\mathcal{F}$ — монотонно неубывающая на $[0; 1]$ функция. Вычислить пределы:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 e^{-nx^2} d\mathcal{F}(x);$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^n x + \sin^n x) d\mathcal{F}(x).$$

Решение. 1) Интеграл Римана — Стильеса $\int_0^1 e^{-nx^2} d\mathcal{F}(x)$ интерпретируем как интеграл Лебега — Стильеса по мере $\mu_{\mathcal{F}}$. Тогда к нему можно применить теорему Лебега (см. теорему 9 из § 3) о предельном переходе под знаком интеграла. Для этого найдем предел $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-nx^2} = f(x)$, $0 \leq x \leq 1$. Очевидно, $f(0) = 1$ и $f(x) = 0$, если $0 < x \leq 1$. Кроме того, для последовательности $(e^{-nx^2})_{n=1}^{\infty}$ имеется интегрируемая мажоранта (например, функция $\varphi(x) = 1$, $x \in [0; 1]$). Следовательно, по теореме Лебега

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 e^{-nx^2} d\mathcal{F}(x) = \int_0^1 f(x) d\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(0+0) - \mathcal{F}(0).$$

2) Этот предел вычисляется аналогично. Только теперь

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos^n x + \sin^n x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \text{ и } x = \frac{\pi}{2}, \\ 0, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

а интегрируемой мажорантой является, например, функция $\varphi(x) = 2$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^n x + \sin^n x) d\mathcal{F}(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) d\mathcal{F}(x) = \\ &= \mathcal{F}(0+0) - \mathcal{F}(0) + \mathcal{F}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \mathcal{F}\left(\frac{\pi}{2}-0\right). \end{aligned}$$

14. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$, а функция $\mathcal{F}$ — монотонно неубывающая на $[a; b]$. Доказать, что если функция $x = \varphi(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, является непрерывной и строго монотонно воз-

растающей, причем $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, то справедливо равенство

$$\int_a^b f(x) d\mathcal{F}(x) = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) d\mathcal{F}(\varphi(t)). \quad (9)$$

Решение. Поскольку сложная функция $f(\varphi)$ является непрерывной, а композиция $\mathcal{F}(\varphi)$ — монотонно возрастающей функцией на $[\alpha; \beta]$, то интеграл Римана — Стильеса $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) d\mathcal{F}(\varphi(t))$ существует по теореме 9. Левая часть формулы (9) также существует на основании этой же теоремы. Поэтому надо доказать лишь равенство интегралов. Для этого рассмотрим произвольное разбиение $\Pi: a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < \dots < x_n = b$ отрезка $[a; b]$ и пусть ξ_k — отмеченные точки, взятые на полуинтервалах $[x_k; x_{k+1})$. Тогда

$$\int_a^b f(x) d\mathcal{F}(x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) [\mathcal{F}(x_{k+1}) - \mathcal{F}(x_k)], \quad (10)$$

где $\lambda = \max_{0 \leq k \leq n-1} (x_{k+1} - x_k)$.

Теперь по разбиению Π отрезка $[a; b]$ построим соответствующее разбиение Π' отрезка $[\alpha; \beta]$. Учтем при этом, что функция φ имеет непрерывную и также строго монотонно возрастающую обратную функцию φ^{-1} , определенную на $[a; b]$ со значениями на $[\alpha; \beta]$. Положим $t_k = \varphi^{-1}(x_k)$, $k = 0, 1, \dots, n$. Тогда разбиение Π' определяется точками $t_0, t_1, \dots, t_n$:

$$\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots < t_n = \beta.$$

Точки $\eta_k = \varphi^{-1}(\xi_k)$ из $[t_k; t_{k+1})$, где $k = 0, 1, \dots, n-1$, можно принять в качестве отмеченных точек для разбиения Π' . Наконец, пусть $\lambda' = \max_{0 \leq k \leq n-1} (t_{k+1} - t_k)$. Тогда в силу непрерывности функций φ и φ^{-1} соотношение $\lambda \rightarrow 0$ равносильно утверждению $\lambda' \rightarrow 0$.

В результате этих рассуждений получаем

$$\begin{aligned} & \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) [\mathcal{F}(x_{k+1}) - \mathcal{F}(x_k)] = \\ &= \lim_{\lambda' \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\varphi(\eta_k)) [\mathcal{F}(\varphi(t_{k+1})) - \mathcal{F}(\varphi(t_k))] = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) d\mathcal{F}(\varphi(t)). \end{aligned}$$

Искомое равенство (9) вытекает из этого соотношения и формулы (10).

15. Пусть $y = \chi(x)$, $0 \leq x \leq 1$, — функция Кантора (см. пример 10). Вычислить интегралы:

$$1) \int_0^1 x d\chi(x); \quad 2) \int_0^1 e^x d\chi(x).$$

Решение. К заданным интегралам формулу (8), очевидно, применить нельзя. Поэтому будем искать другие пути вычисления указанных интегралов. С этой целью вначале отметим, что если $CF = [0; 1] \setminus F$,

то $\chi\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{2} \chi(x)$, $x \in CF$. Тогда $\chi\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{2} \chi(x)$ и для всех $x \in [0; 1]$. Аналогично, согласно построению функции Кантора, $\chi\left(\frac{2}{3} + \frac{x}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \chi(x)$, если $0 \leq x \leq 1$.

1) Поскольку функция χ постоянна на интервале $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$ и непрерывна на $[0; 1]$, то

$$\int_0^1 x d\chi(x) = \int_0^{\frac{1}{3}} x d\chi(x) + \int_{\frac{2}{3}}^1 x d\chi(x).$$

В первом интеграле Римана — Стильеса из правой части последнего равенства сделаем замену $3x = t$, а во втором — $x = \frac{2}{3} + \frac{t}{3}$. Тогда (см. пример 14)

$$\begin{aligned} \int_0^1 x d\chi(x) &= \frac{1}{3} \int_0^1 t d\chi\left(\frac{t}{3}\right) + \frac{1}{3} \int_0^1 (2+t) d\chi\left(\frac{2}{3} + \frac{t}{3}\right) = \\ &= \frac{1}{6} \int_0^1 t d\chi(t) + \frac{1}{6} \int_0^1 (2+t) d\chi(t) = \frac{1}{3} \int_0^1 t d\chi(t) + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\int_0^1 t d\chi(t) = \frac{1}{2}.$$

Замечание. Этот пример показывает, что если неубывающая функция $\mathcal{F}$ является сингулярной на отрезке $[a; b]$, то интеграл Стильеса $\int_a^b f(x) d\mathcal{F}(x)$ не сводится к интегралу Лебега по обычной лебеговой мере μ_1 на $[a; b]$ и соответствующей сумме ряда.

2) Рассмотрим для произвольного числа a функцию

$$\mathcal{J}(a) = \int_0^1 e^{ax} d\chi(x)$$

(по теореме 9 этот интеграл существует для каждого a). Для его вычисления $\mathcal{J}(a)$ представим в виде

$$\mathcal{J}(a) = \int_0^{\frac{1}{3}} e^{ax} d\chi(x) + \int_{\frac{2}{3}}^1 e^{ax} d\chi(x).$$

Теперь, как и в случае 1), получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(a) &= \int_0^1 e^{\frac{at}{3}} d\chi\left(\frac{t}{3}\right) + \int_0^1 e^{\frac{2a}{3}} e^{\frac{at}{3}} d\chi\left(\frac{2}{3} + \frac{t}{3}\right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + e^{\frac{2a}{3}}\right) \mathcal{F}\left(\frac{a}{3}\right) = e^{\frac{a}{3}} \operatorname{ch} \frac{a}{3} \cdot \mathcal{F}\left(\frac{a}{3}\right),\end{aligned}$$

т. е. $\mathcal{F}(a) = e^{\frac{a}{3}} \operatorname{ch} \frac{a}{3} \cdot \mathcal{F}\left(\frac{a}{3}\right)$. Отсюда в силу произвольности a имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(a) &= e^{\frac{a}{3}} e^{\frac{a}{9}} \operatorname{ch} \frac{a}{3} \cdot \operatorname{ch} \frac{a}{9} \cdot \mathcal{F}\left(\frac{a}{9}\right) = \dots = \\ &= e^{\frac{a}{3}} e^{\frac{a}{9}} \dots e^{\frac{a}{3^n}} \operatorname{ch} \frac{a}{3} \operatorname{ch} \frac{a}{9} \dots \operatorname{ch} \frac{a}{3^n} \cdot \mathcal{F}\left(\frac{a}{3^n}\right) \quad (\forall n \in \mathbb{N})\end{aligned}$$

и (при $n \rightarrow \infty$) $\mathcal{F}(a) = e^{\frac{a}{2}} \prod_{n=1}^{\infty} \operatorname{ch} \frac{a}{3^n} \cdot \lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathcal{F}(\alpha)$.

Далее, из теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла следует, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathcal{F}(\alpha) = \int_0^1 \lim_{\alpha \rightarrow 0} e^{\alpha x} d\chi(x) = \int_0^1 d\chi(x) = 1.$$

Отсюда, в частности, имеем

$$\int_0^1 e^x d\chi(x) = \sqrt[e]{e} \prod_{n=1}^{\infty} \operatorname{ch} \frac{1}{3^n}.$$

Задачи для самостоятельной работы

1. Доказать, что полное изменение $\bigvee_a^b [\mathcal{F}]$ функции $\mathcal{F}$ равно нулю тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(a)$ для всех $x \in [a, b]$

2. Доказать, что $\bigvee_a^b [\mathcal{F}] = \mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(a)$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}$ монотонно не убывает на отрезке $[a, b]$.

3. Показать, что функция $\mathcal{F}(x) = \cos x$ имеет на отрезке $[0, 2\pi]$ ограниченное изменение, и найти ее разложение в виде разности двух монотонно неубывающих функций

4. Доказать, что функция

$$\mathcal{F}(x) = \begin{cases} x-1, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1, \\ -x^2, & 1 < x \leq 2, \end{cases}$$

является функцией с ограниченным изменением на отрезке $[0; 2]$, и найти ее разложение в виде разности двух монотонно неубывающих функций.

5. Доказать, что функция $\mathcal{F}(x) = \cos^2 x$ имеет ограниченное изменение на отрезке $[0; \pi]$, и представить ее в виде разности двух монотонно неубывающих функций.

6. Доказать, что функция $\mathcal{F}(x) = \sin x$ имеет ограниченное изменение на отрезке $[0, 2\pi]$, и представить ее в виде разности двух монотонно неубывающих функций.

7. Доказать, что функция

$$\mathcal{F}(x) = \begin{cases} -x^2, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & x = 1, \\ 1, & 1 < x \leq 2, \end{cases}$$

имеет ограниченное изменение на отрезке $[0; 2]$, и представить ее в виде разности двух монотонно неубывающих функций.

8. Найти полное изменение функции

$$\mathcal{F}(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < 1, \\ 5, & x = 1, \\ x + 3, & 1 < x \leq 2, \end{cases}$$

на отрезке $[0; 2]$. Проверить, что $\bigvee_0^2 [\mathcal{F}] = \bigvee_0^1 [\mathcal{F}] + \bigvee_1^2 [\mathcal{F}]$. Представить $\mathcal{F}$ в виде разности двух монотонно неубывающих функций.

9. Чему равно полное изменение функции

$$\mathcal{F}(x) = \begin{cases} -1, & x = 0, \\ 1 - x, & 0 < x < 1, \\ 6, & x = 1, \end{cases}$$

на отрезке $[0; 1]$?

10. Чему равно полное изменение функции

$$\mathcal{F}(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 1, \\ 10, & x = 1, \\ x^2, & x > 1, \end{cases}$$

на отрезке $[0; 2]$? Как изменить значения этой функции в точке $x = 1$, чтобы ее полное изменение было наименьшим?

11. Доказать, что функция $y = \mathcal{F}(x)$, $0 \leq x \leq 1$, не имеет ограниченного изменения на отрезке $[0; 1]$:

$$1) \mathcal{F}(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \frac{1}{x}, & 0 < x \leq 1; \end{cases}$$

$$2) \mathcal{F}(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x \operatorname{sgn} \left(\sin \frac{\pi}{x} \right), & 0 < x \leq 1; \end{cases}$$

$$3) \mathcal{F}(0) = 0, \mathcal{F}\left(\frac{1}{2k-1}\right) = 0, \mathcal{F}\left(\frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{2k} \text{ и } \mathcal{F} \text{ линейна на каждом из отрезков } \left[\frac{1}{2k+1}; \frac{1}{2k}\right] \text{ и } \left[\frac{1}{2k}; \frac{1}{2k-1}\right], k \in \mathbb{N}.$$

12. Доказать, что функция, удовлетворяющая на отрезке $[a; b]$ условию Липшица первого порядка, имеет ограниченное изменение на $[a; b]$.

13. Пусть $0 < \alpha < 1$. Построить функцию, удовлетворяющую на отрезке $[a; b]$ условию Липшица порядка α , которая не имеет ограниченного изменения на $[a; b]$. Построить пример функции, имеющей ограниченное изменение на $[a; b]$, но не удовлетворяющей условию Липшица ни при каком α .

14. Пусть функция $\mathcal{F}$ имеет ограниченное изменение на отрезке $[a; b]$ и ее полное изменение равно $\bigvee_a^b [\mathcal{F}]$. Найти полное изменение на $[a; b]$ функции $\alpha\mathcal{F} + \beta$, где α и β — некоторые вещественные числа.

15. Доказать, что если функция $\mathcal{F}$ имеет ограниченное изменение на $[a; b]$, а φ — строго монотонно возрастающая непрерывная функция на отрезке $[\alpha; \beta]$ такая, что $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, то функция $G(x) = \mathcal{F}(\varphi(x))$ имеет ограниченное изменение на $[\alpha; \beta]$ и $\bigvee_a^\beta [\mathcal{F}] = \bigvee_\alpha^\beta [G]$.

16. Доказать, что характеристическая функция $\chi_A(x)$ некоторого множества $A \subset [a; b]$ имеет ограниченное изменение на $[a; b]$ тогда и только тогда, когда граница ∂A множества A состоит лишь из конечного числа точек.

17. Доказать, что если функция $\mathcal{F}$ имеет ограниченное изменение на отрезке $[a; b]$, то ее абсолютная величина $|\mathcal{F}|$ также имеет ограниченное изменение на $[a; b]$.

18. Пусть функция $\mathcal{F}$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, а $|\mathcal{F}|$ имеет ограниченное изменение на $[a; b]$. Доказать, что тогда и функция $\mathcal{F}$ имеет ограниченное изменение на $[a; b]$. Привести пример, показывающий, что условие непрерывности $\mathcal{F}$ нельзя опустить.

19. Пусть α и β — положительные числа. Доказать, что непрерывная функция $\mathcal{F}(x) = x^\alpha \sin \frac{1}{x^\beta}$ на отрезке $[0; 1]$ имеет ограниченное изменение при $\alpha > \beta$ и не имеет ограниченного изменения при $\alpha \leq \beta$.

20. Существует ли непрерывная функция, не имеющая ограниченного изменения ни в каком промежутке?

21. Кривая $y = \mathcal{F}(x)$, $a \leq x \leq b$, называется *спрямляемой*, если длины ломаных с последовательными вершинами в точках $(x_0, \mathcal{F}(x_0))$, $(x_1, \mathcal{F}(x_1))$, ..., $(x_n, \mathcal{F}(x_n))$, где $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, ограничены фиксированной постоянной, не зависящей от числа n и выбора точек $x_1, \dots, x_{n-1}$. Доказать, что кривая $y = \mathcal{F}(x)$, $a \leq x \leq b$, спрямляема тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}$ имеет ограниченное изменение на $[a; b]$.

22. Пусть функция $y = \varphi(x)$, $a \leq x \leq b$, интегрируема по Лебегу на отрезке $[a; b]$ и

$$\mathcal{F}(x) = \int_a^x \varphi(t) dt, \quad x \in [a; b].$$

Доказать, что $\mathcal{F}$ имеет ограниченное изменение на $[a; b]$ и

$$\bigvee_a^b [\mathcal{F}] = \int_a^b |\varphi(t)| dt.$$

23. Пусть функции $\mathcal{F}$ и G имеют ограниченное изменение на отрезке $[a; b]$ и

$$\Phi(x) = \max \{ \mathcal{F}(x), G(x) \}, \quad x \in [a; b].$$

Доказать, что функция Φ также имеет ограниченное изменение на $[a; b]$.

24. Показать, что сложная функция $\mathcal{F}(G)$, где $\mathcal{F}$ и G — функции с ограниченным изменением, не обязательно есть функция с ограниченным изменением.

25. Доказать, что если функция $\mathcal{F}$ имеет ограниченное изменение на отрезке $[0; 1]$, то

$$\left| \int_0^1 \mathcal{F}(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{F}\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{1}{n} \bigvee_0^1 [\mathcal{F}], \quad n \in \mathbb{N}.$$

26. По функции $y = \mathcal{F}(x)$, имеющей ограниченное изменение на отрезке $[a; b]$, построим функцию G , полагая $G(a) = 0$ и

$$G(x) = \frac{1}{x-a} \int_a^x \mathcal{F}(t) dt, \quad x \in (a; b].$$

Доказать, что G является функцией с ограниченным изменением на $[a; b]$.

27. Доказать, что функция $\mathcal{F}$ имеет ограниченное изменение на отрезке $[a; b]$ тогда и только тогда, когда существует неубывающая на $[a; b]$ функция Φ такая, что

если $a \leq x < y \leq b$, то

$$|\mathcal{F}(y) - \mathcal{F}(x)| \leq \Phi(y) - \Phi(x).$$

28. Пусть функция $\mathcal{F}$ имеет на отрезке $[a; b]$ ограниченное изменение, а функция Φ удовлетворяет на всей числовой оси условию Липшица первого порядка. Доказать, что функция $\Phi(\mathcal{F}(x))$ имеет на $[a, b]$ ограниченное изменение.

29*. Пусть функция $\mathcal{F}$ непрерывна и имеет ограниченное изменение на отрезке $[a; b]$. Для каждого разбиения $\Pi: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ отрезка определим суммы

$$V_{\Pi} = \sum_{k=0}^{n-1} |\mathcal{F}(x_{k+1}) - \mathcal{F}(x_k)| \text{ и } \Omega_{\Pi} = \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k),$$

где $M_k = \sup_{x_k \leq x \leq x_{k+1}} \mathcal{F}(x)$, $m_k = \inf_{x_k \leq x \leq x_{k+1}} \mathcal{F}(x)$. Доказать, что если $\lambda = \max_{0 \leq k \leq n-1} (x_{k+1} - x_k)$, то

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} V_{\Pi} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \Omega_{\Pi} = \int_a^b |\mathcal{F}'|.$$

30*. Положим $v(x) = \int_a^x |\mathcal{F}'|$, где $y = \mathcal{F}(x)$ — функция с ограниченным изменением на отрезке $[a; b]$. Доказать, что почти всюду на $[a; b]$ $v'(x) = |\mathcal{F}'(x)|$.

31. Доказать, что функция

$$\mathcal{F}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x - r_n|}{3^n}, \quad x \in [0; 1],$$

где $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность всех рациональных чисел отрезка $[0; 1]$, непрерывна на $[0; 1]$, но не является дифференцируемой ни в какой рациональной точке из $[0; 1]$.

32*. Рассмотрим для $0 < b < 1$ и нечетного натурального числа a функцию $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$. Доказать, что функция f непрерывна на всей числовой оси $\mathbb{R}$, но если $ab > 1 + \frac{3}{2} \pi$, то f не имеет конечной производной ни при каком значении x .

33. Доказать, что если у непрерывной функции $y = \mathcal{F}(x)$, $a \leq x \leq b$, одно из правых производных чисел неотрицательно на $[a; b]$, то $\mathcal{F}(a) \leq \mathcal{F}(b)$.

34. Доказать, что если одно из правых производных чисел на отрезке $[a; b]$ функции $\mathcal{F}$ принадлежит отрезку $[\alpha; \beta]$, то для любых x_1 и x_2 из $[a; b]$ имеем

$$\alpha \leq \frac{\mathcal{F}(x_2) - \mathcal{F}(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \beta.$$

Указание. Применить результат задачи 33 к функции $\mathcal{F}(x) - \alpha x$.

35. Доказать, что если одно из производных чисел функции $y = \mathcal{F}(x)$, $a \leq x \leq b$, непрерывно в точке $x_0 \in [a; b]$, то существует $\mathcal{F}'(x_0)$.

36. Доказать, что если производная $f'(x)$ некоторой функции $f(x)$ всюду конечна на отрезке $[a; b]$ и почти всюду равна некоторой непрерывной функции, то она равна ей всюду на $[a; b]$.

37. Привести пример функции $\mathcal{F}$ с ограниченным изменением на отрезке $[0; 1]$, для которой из существования $\mathcal{F}'(x)$ в некоторой точке не следует существование

$$v'(x), \text{ где } v(x) = \int_a^x |\mathcal{F}'|.$$

38. Пусть функция $y = f(x)$ не убывает на интервале $(\alpha; \beta)$ и $\Lambda_{\text{пр}}(x)$ — ее верхние правые производные числа. Доказать, что множество $\{x \in (\alpha; \beta) : \Lambda_{\text{пр}}(x) > c\}$, где c — положительное число, можно покрыть открытым множеством A_c таким, что

$$\mu_1(A_c) \leq \frac{f(\beta - 0) - f(\alpha + 0)}{c}.$$

39. Пусть функция $y = f(x)$ не убывает на отрезке $[a; b]$ и $\Lambda_{\text{пр}}(x)$ — ее верхние правые производные числа. Доказать, что $\Lambda_{\text{пр}}(x) < +\infty$ почти всюду на $[a; b]$.

40. Пусть функция $y = f(x)$ не убывает на отрезке $[a; b]$, $\Lambda_{\text{пр}}$ и $\lambda_{\text{лев}}$ — ее верхние правые и нижние левые производные числа соответственно. Доказать, что если $0 < c < C$, то множество тех точек $x \in [a; b]$, в которых $\Lambda_{\text{пр}}(x) > C$ и $\lambda_{\text{лев}}(x) < c$, имеет меру нуль.

41. Доказать, что если функция удовлетворяет условию Липшица первого порядка на отрезке $[a; b]$, то она абсолютно непрерывна на $[a; b]$.

42. Пусть функция $\mathcal{F}$ задана на отрезке $[a; b]$ и для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для произвольного набора попарно непересекающихся отрезков $[a_k; b_k] \subset [a; b]$, $k = 1, 2, \dots, n$, для которых $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$, справедлива оценка

$$\left| \sum_{k=1}^n [\mathcal{F}(b_k) - \mathcal{F}(a_k)] \right| < \varepsilon.$$

Доказать, что функция $\mathcal{F}$ абсолютно непрерывна.

43. Доказать, что если на отрезке $[a; b]$ функции $\mathcal{F}$ и G абсолютно непрерывны, то абсолютно непрерывны функции $\mathcal{F} \pm G$, $\mathcal{F} \cdot G$ и $\frac{\mathcal{F}}{G}$, если G не обращается в нуль на $[a; b]$.

44. Доказать, что если на отрезке $[a; b]$ функция $\mathcal{F}$ абсолютно непрерывна, то функция $|\mathcal{F}|$ также абсолютно непрерывна на $[a; b]$.

45. Доказать, что если на отрезке $[a; b]$ функция $\mathcal{F}$ непрерывна, а $|\mathcal{F}|$ абсолютно непрерывна, то $\mathcal{F}$ абсолютно непрерывна на $[a; b]$.

46. Пусть на отрезке $[a; b]$ заданы неубывающие абсолютно непрерывные функции $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$. Доказать, что если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_k(x)$ сходится для всех $x \in [a; b]$ и $\mathcal{F}(x)$ — его сумма, то функция $\mathcal{F}$ абсолютно непрерывна на $[a; b]$.

47. Пусть функция $\mathcal{F}$ задана на отрезке $[a; b]$ и для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для произвольного набора отрезков $[a_k; b_k] \subset [a; b]$, $k = 1, 2, \dots, n$ (а не только для попарно непересекающихся отрезков, как в определении абсолютной непрерывности), для которых $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$, справедлива оценка

$\sum_{k=1}^n |\mathcal{F}(b_k) - \mathcal{F}(a_k)| < \varepsilon$. Доказать, что функция $\mathcal{F}$ удовлетворяет на $[a; b]$ условию Липшица первого порядка.

48. Пусть функция $\mathcal{F}$ задана на отрезке $[a; b]$ и для произвольного набора отрезков $[a_k; b_k] \subset [a; b]$, $k \in \mathbb{N}$, такого, что $\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) < +\infty$, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (\mathcal{F}(b_k) - \mathcal{F}(a_k))$ сходится. Доказать, что $\mathcal{F}$ удовлетворяет на $[a; b]$ условию Липшица первого порядка.

49. Пусть функция $\mathcal{F}$ абсолютно непрерывна на $[a; b]$ и множество $A \subset [a; b]$ имеет меру нуль. Доказать, что $\mathcal{F}(A)$ — образ этого множества — имеет меру нуль.

50. Пусть функция $\mathcal{F}$ абсолютно непрерывна на $[a; b]$. Доказать, что если множество $A \subset [a; b]$ измеримо, то и множество $\mathcal{F}(A)$ измеримо.

51. Пусть функция $\mathcal{F}$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, имеет на $[a; b]$ ограниченное изменение и для каждого множества $A \subset [a; b]$ меры нуль мера множества $\mathcal{F}(A)$ равна нулю. Доказать, что $\mathcal{F}$ абсолютно непрерывна на $[a; b]$.

52. Доказать, что если функция $\mathcal{F}$ абсолютно непрерывна на отрезке $[a; b]$, то $|\mathcal{F}|^p$ при $p \geq 1$ также абсолютно непрерывна на $[a; b]$.

53. Пусть функции f и g интегрируемы в смысле Римана — Стильтеса на отрезке $[a; b]$ относительно функции $\mathcal{F}$ с ограниченным изменением. Доказать, что каждая из функций cf ($c \in \mathbb{R}$), $f + g$, fg , $|f|$ также интегрируема в смысле Римана — Стильтеса на $[a; b]$ относительно $\mathcal{F}$.

54. Пусть функция $\mathcal{F}$ монотонно не убывает на отрезке $[a; b]$. Доказать, что $\int_a^b f(x) d\mathcal{F}(x) = 0$ для произвольной непрерывной на $[a; b]$ функции f тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}(a) = \mathcal{F}(b)$.

55. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$, а $\mathcal{F}$ — монотонно не убывает на $[a; b]$. Доказать существование такой точки $\theta \in [a; b]$, что

$$\int_a^b f(x) d\mathcal{F}(x) = f(\theta) [\mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(a)].$$

56. Пусть функция $\mathcal{F}$ монотонно не убывает на отрезке $[0; \pi]$ и $\int_0^\pi \sin x d\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(\pi) - \mathcal{F}(0)$. Доказать, что

$$\mathcal{F}(x) = \begin{cases} \mathcal{F}(0), & 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ \mathcal{F}(\pi), & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi. \end{cases}$$

57. Пусть функция $\mathcal{F}$ монотонно не убывает на отрезке $[0; 2]$ и такова, что для каждой непрерывной на $[0; 2]$ функции

$$\int_0^2 f(x) d\mathcal{F}(x) = f(1).$$

Доказать, что

$$\mathcal{F}(x) = \begin{cases} \mathcal{F}(0), & 0 \leq x < 1, \\ \mathcal{F}(2), & 1 < x \leq 2, \end{cases}$$

причем $\mathcal{F}(2) - \mathcal{F}(0) = 1$.

58. Пусть функция $\mathcal{F}$ монотонно не убывает на отрезке $[0; 1]$ и такова, что для каждой непрерывной на $[0; 1]$ функции f

$$\int_0^1 f(x) d\mathcal{F}(x) = f(0) + 2f(1).$$

Доказать, что

$$\mathcal{F}(x) = \begin{cases} \mathcal{F}(0), & x = 0, \\ \mathcal{F}(0) + 1, & 0 < x < 1, \\ \mathcal{F}(0) + 2, & x = 1. \end{cases}$$

59. Пусть функция $\mathcal{F}$ монотонно не убывает на отрезке $[0; 1]$ и такова, что для некоторого $n \in \mathbb{N}$ и любой непрерывной на $[0; 1]$ функции f

$$\int_0^1 f(x) d\mathcal{F}(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Определить вид функции $\mathcal{F}$.

60. Непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция f такова, что для любой монотонно неубывающей на $[a; b]$ функции $\mathcal{F}$ справедливо равенство

$$\int_a^b f(x) d\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(a).$$

Найти функцию f .

61. Найти значения интегралов Римана — Стильтьеса:

$$a) \mathcal{I}_1 = \int_{-1}^3 x d\mathcal{F}(x), \text{ где } \mathcal{F}(x) = \begin{cases} 0, & x = -1, \\ 1, & -1 < x < 2, \\ -1, & 2 \leq x \leq 3; \end{cases}$$

$$б) \mathcal{I}_2 = \int_0^2 x^2 d\mathcal{F}(x), \text{ где}$$

$$\mathcal{F}(x) = \begin{cases} -1, & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 0, & \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{2}, \\ 2, & x = \frac{3}{2}, \\ -2, & \frac{3}{2} < x \leq 2. \end{cases}$$

62. Вычислить интеграл $\int_a^b f(x) d\mathcal{F}(x)$, если:

$$1) f(x) = x, \mathcal{F}(x) = |\sin x|, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right];$$

2) $f(x) = x^2$, $\mathcal{F}(x) = (-1)^n$, если $x \in [n; n+1]$ $n = 0, 1, \dots, N-1$, где N — некоторое натуральное число;

$$3) f(x) = x,$$

$$\mathcal{F}(x) = \begin{cases} x+2, & -2 \leq x \leq -1, \\ 2, & -1 < x < 0, \\ x^2+3, & 0 \leq x \leq 2; \quad x \in [-2; 2]; \\ x+2, & -2 \leq x \leq -1, \end{cases}$$

$$4) f(x) = x^2, \mathcal{F}(x) = \begin{cases} 2, & -1 < x < 0, \\ x^2+3, & 0 \leq x \leq 2; \quad x \in [-2; 2]. \end{cases}$$

63. Пусть $\mathcal{F}$ — монотонно неубывающая на $[0; 1]$ функция. Вычислить пределы:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 |x|^n d\mathcal{F}(x); \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 (x^n + 2^{-nx}) d\mathcal{F}(x).$$

64. Доказать, что если последовательность $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ непрерывных на $[a; b]$ функций сходится на $[a; b]$ равномерно к функции f , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) d\mathcal{F}(x) = \int_a^b f(x) d\mathcal{F}(x),$$

где $\mathcal{F}$ — функция с ограниченным изменением на $[a; b]$.

65. Пусть на отрезке $[a; b]$ задана последовательность $(\mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ функций с ограниченным изменением, сходящаяся в каждой точке отрезка $[a; b]$ к некоторой функции $\mathcal{F}$, причем полные изменения всех функций $\mathcal{F}_n$ ограничены в совокупности: $\bigvee_a^b [\mathcal{F}_n] \leq C$ ($\forall n \in \mathbb{N}$). Доказать, что если последовательность $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ непрерывных на $[a; b]$ функций равномерно сходится на $[a; b]$ к функции f , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) d\mathcal{F}_n(x) = \int_a^b f(x) d\mathcal{F}(x).$$

66. Пусть функция $\mathcal{F}$ имеет ограниченное изменение на отрезке $[0; 2\pi]$. Доказать, для что произвольного $n \in \mathbb{N}$ справедлива оценка $\left| \int_0^{2\pi} \mathcal{F}(x) \cos nx dx \right| \leq \frac{1}{n} \bigvee_0^{2\pi} [\mathcal{F}]$ и что эта оценка неулучшаема.

67. Пусть функция $\mathcal{F}$ имеет ограниченное изменение на отрезке $[0; 2\pi]$. Доказать, что для всех $n \in \mathbb{N}$ справедливы оценки

$$\left| \int_0^{2\pi} \mathcal{F}(x) \sin nx dx \right| \leq \frac{2}{n} \bigvee_0^{2\pi} [\mathcal{F}]$$

и что эти оценки неулучшаемы. Доказать, что если функция $\mathcal{F}$ удовлетворяет условию $\mathcal{F}(0) = \mathcal{F}(2\pi)$, то справедлива неулучшаемая оценка

$$\left| \int_0^{2\pi} \mathcal{F}(x) \sin nx dx \right| \leq \frac{1}{n} \bigvee_0^{2\pi} [\mathcal{F}].$$

68. Пусть на отрезке $[a; b]$ функция f непрерывна, а $\mathcal{F}$ имеет ограниченное изменение. Доказать, что функция

$$G(x) = \int_a^x f(t) d\mathcal{F}(t), \quad a \leq x \leq b,$$

имеет ограниченное изменение на $[a; b]$ и непрерывна в точках непрерывности функции $\mathcal{F}$.

69. Пусть $\mu_{\mathcal{F}}$ — мера Лебега — Стильеса на $[a; b]$, порожденная монотонной непрерывной на $[a; b]$ функцией $\mathcal{F}$. Доказать, что интеграл Лебега — Стильеса $\int_a^b x d\mu_{\mathcal{F}}$ равен интегралу Римана — Стильеса $\int_a^b x d\mathcal{F}(x)$. Вычислить его.

70. Вычислить интегралы:

$$1) \int_{-\pi}^{\pi} (x+2) d(e^x \operatorname{sign} \sin x); \quad 2) \int_0^{\pi} (x-1) d(\cos x \cdot \operatorname{sign} x).$$

71*. Пусть $y = \chi(x)$, $0 \leq x \leq 1$, — монотонно неубывающая сингулярная функция Кантора. Вычислять интегралы:

$$1) \int_0^1 x^k d\chi(x), \text{ где } k \in \mathbb{N};$$

$$2) \int_0^1 \cos \pi x d\chi(x); \quad 3) \int_0^1 \sin \pi x d\chi(x).$$

Ответы. 3. $\mathcal{F}(x) = v(x) - u(x)$, где $v(x) = \begin{cases} 1 - \cos x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 3 + \cos x, & \pi \leq x \leq 2\pi. \end{cases}$

4. $\mathcal{F}(x) = v(x) - u(x)$, где $v(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1, \\ 2, & x = 1, \\ 4 + x^2, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$ 5. $\mathcal{F}(x) = v(x) - u(x)$,

где $v(x) = \begin{cases} 1 - \cos^2 x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 1 + \cos^2 x, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$

6. $\mathcal{F}(x) = v(x) - u(x)$, где $v(x) =$

$$\begin{cases} \sin x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 2 - \sin x, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}, \\ 4 + \sin x, & \frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi. \end{cases}$$

7. $\mathcal{F}(x) = v(x) - u(x)$, где $v(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < 1, \\ 5, & x = 1, \\ x + 5, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$ 9. 9. 10. $\bigvee_0^2 [\mathcal{F}] = 23$.

Положить $\mathcal{F}(1) = a$, где a — любое число из отрезка $[0; 1]$; тогда полное изменение функции равно 5. 13. $\mathcal{F}_1(x) = x^\alpha \sin \frac{1}{x}$, $0 < x \leq 1$, а $\mathcal{F}_1(0) = 0$; $\mathcal{F}_2(x) =$

$$\frac{1}{\ln x}, \quad 0 < x \leq 1, \text{ а } \mathcal{F}_2(0) = 0. \quad 14. |\alpha| \bigvee_0^b [\mathcal{F}]. \quad 18. \text{ Пример: } \mathcal{F}(x) = 1,$$

если x — рациональное число, и $\mathcal{F}(x) = -1$, если x — иррациональное, а $[a; b] = [0; 1]$. 20. Да, например, непрерывная функция, нигде не имеющая производной (см. пример 32). 24. Например: $\mathcal{F}(x) = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 1$, а $G(x) =$

$$\begin{cases} 0, & x = 0, \\ x^2 \sin^2 \frac{1}{x}, & 0 < x \leq 1. \end{cases} \quad 37. \text{ Для } 1 < \alpha < 2 \quad f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x^\alpha}, \quad 0 < x \leq 1,$$

а $f(0) = 0$. 59. $\mathcal{F}(x) = \begin{cases} \mathcal{F}(0), & 0 \leq x < \frac{1}{n}, \\ \mathcal{F}(0) + \frac{k}{n}, & \frac{k}{n} < x < \frac{k+1}{n}; \quad 1 \leq k \leq n-1, \\ \mathcal{F}(0) + 1, & x = 1. \end{cases}$

60. $f(x) = 1$, $x \in [a; b]$. 61. $\mathcal{F}_1 = -5$; $\mathcal{F}_2 = -\frac{17}{4}$. 62. 1) $\pi - 2$; 2) $\sum_{k=1}^N (-1)^k k^2$;

$$3) \frac{17}{6}; \quad 4) \frac{34}{3}. \quad 63. \quad 1) \mathcal{F}(-1+0) - \mathcal{F}(-1); \quad 2) \mathcal{F}(0+0) - \mathcal{F}(0) + \mathcal{F}(1) -$$

$$- \mathcal{F}(1-0). \quad 69. \quad b\mathcal{F}(b) - a\mathcal{F}(a) - \int_a^b \mathcal{F}(x) dx. \quad 70. \quad 1) 2 - e^{\pi} - e^{-\pi}; \quad 2) 1 - \pi.$$

$$71. \quad 1) \text{ Если } \mathcal{I}_k = \int_0^1 x^k d\chi(x), \text{ то } \mathcal{I}_k = \frac{1}{2(3^k - 1)} \sum_{s=1}^k C_k^{s0s} \mathcal{I}_{k-s}, \text{ причем } \mathcal{I}_0 = 1;$$

$$2) 3; \quad 3) \prod_{k=1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{3^k}.$$

§ 1. МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА.

ПРИНЦИП СЖИМАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Как известно, одним из важнейших понятий в математическом анализе является понятие предельного перехода, лежащее в основе таких фундаментальных операций, как дифференцирование и интегрирование. Более того, в зависимости от рассматриваемых задач в анализе часто вводятся разные (но эквивалентные между собой) понятия предела для последовательности одних и тех же математических объектов (вещественные числа, комплексные числа, n -мерные векторы, функции и т. п.). Однако все они связаны в основном лишь тем, что между исследуемыми объектами можно измерять «расстояние». Это позволяет ввести и изучить свойства предельного перехода независимо от природы элементов, участвующих в этом построении.

Обобщая известное понятие расстояния между двумя вещественными числами, мы естественно приходим к одному из основных понятий современной математики — понятию метрического пространства (оно было введено впервые французским математиком М. Фреше в 1906 г.). Отметим также фундаментальную важность метрических идей в прикладном отношении: всякий вычислительный процесс должен сходиться к искомому результату.

1. Понятие метрического пространства. Пусть X — произвольное множество, а $\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ — отображение декартова произведения $X \times X$ в множество $\mathbb{R}$ вещественных чисел. Отображение ρ называется метрикой на X , если оно удовлетворяет следующим условиям (аксиомы метрики):

- 1) $\rho(x, y) \geq 0$; $\rho(x, y) \Leftrightarrow x = y$ (аксиома тождества);
- 2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, $\forall x, y \in X$ (аксиома симметрии);
- 3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$, $\forall x, y, z \in X$ (аксиома треугольника).

При этом множество X , рассматриваемое вместе с заданной на нем метрикой ρ , называется метрическим пространством, элементы $x, y, z, \dots$ множества X — точками этого пространства, а число $\rho(x, y)$ — расстоянием между точками x и y .

Поскольку в одном и том же множестве X часто можно задавать разные метрики ρ , то, чтобы различать получающиеся при этом пространства, иногда вводят обозначение (X, ρ) .

Отметим, что всякое множество Y из метрического пространства X , рассматриваемое с тем же расстоянием между элементами, что и в X , также является метрическим пространством. Оно называется подпространством пространства X .

Расстоянием между двумя множествами M и N метрического пространства X называется число

$$\rho(M, N) = \inf_{\substack{x \in M \\ y \in N}} \rho(x, y).$$

Если одно из этих множеств, например N , состоит из одной точки a , то получаем расстояние $\rho(a, M)$ от точки a до множества M , определяемое формулой

$$\rho(a, M) = \inf_{x \in M} \rho(a, x).$$

Пусть на множестве X определены метрики $\rho_1(x, y)$ и $\rho_2(x, y)$. Они называются эквивалентными, если для произвольной последовательности $(x_n) \subset X$ из того, что $\rho_1(x_n, x) \rightarrow 0$ ($x \in X$), следует $\rho_2(x_n, x) \rightarrow 0$ и наоборот. Для эквивалентности метрик ρ_1 и ρ_2 достаточно существование таких положительных постоянных C_1, C_2 , что

$$C_1 \rho_1(x, y) \leq \rho_2(x, y) \leq C_2 \rho_1(x, y), \quad \forall x, y \in X$$

(такие метрики называются топологически эквивалентными).

2. **Предельные точки. Замыкание.** Пусть x_0 — фиксированная точка метрического пространства X , а $r > 0$. Совокупность $B(x_0, r)$ тех точек x пространства X , которые удовлетворяют условию $\rho(x, x_0) < r$, называется **открытым шаром**. Точка x_0 называется при этом **центром**, а число r — **радиусом** шара. Открытый шар радиуса r с центром x_0 будем называть также **ε -окрестностью точки x_0** .

Замкнутым шаром $B[x_0, r]$ в метрическом пространстве X называется совокупность точек $x \in X$, для которых $\rho(x, x_0) \leq r$.

Точка $x \in X$ называется точкой **прикосновения** множества $M \subset X$, если любая ее окрестность содержит хотя бы одну точку из M , а совокупность $\bar{M}$ всех точек прикосновения множества M называется **замыканием** этого множества. Переход от множества M к его замыканию $\bar{M}$ будем называть иногда операцией замыкания.

Теорема 1. Операция замыкания обладает следующими свойствами:

- 1) $M \subset \bar{M}$; 2) $\bar{\bar{M}} = \bar{M}$; 3) $M_1 \subset M_2 \Rightarrow \bar{M}_1 \subset \bar{M}_2$; 4) $\overline{M_1 \cup M_2} = \bar{M}_1 \cup \bar{M}_2$;
- 5) $\bar{\emptyset} = \emptyset$ ($\emptyset$ — пустое множество) и $\bar{X} = X$.

Точка $x \in X$ называется **предельной точкой** множества $M \subset X$, если в любой ее окрестности содержится бесконечно много точек из M . Каждая предельная точка множества M является его точкой прикосновения. Она может либо принадлежать множеству M , либо нет. Если точка x принадлежит множеству M , и в некоторой ее окрестности нет точек из M , отличных от x , то ее называют **изолированной точкой** этого множества.

Теорема 2. Всякая точка прикосновения множества M является либо предельной для M , либо изолированной точкой этого множества.

Отсюда следует, что замыкание $\bar{M}$ множества M состоит из точек трех типов:

- 1) изолированные точки M ;
- 2) предельные точки множества M , принадлежащие M ;
- 3) предельные точки множества M , не принадлежащие M .

А это, в свою очередь, означает, что замыкание $\bar{M}$ множества M получается при соединении M всех его предельных точек.

3. **Открытые и замкнутые множества.** Множество M , лежащее в метрическом пространстве X , называется **замкнутым**, если $\bar{M} = M$ (т. е. оно содержит все свои предельные точки).

Из теоремы 1 вытекает, что замыкание любого множества есть замкнутое множество и что $\bar{M}$ — наименьшее замкнутое множество, содержащее M .

Теорема 3. Пересечение любого числа и объединение любого конечного числа замкнутых множеств являются замкнутыми множествами.

Точка $x \in M$ называется **внутренней точкой** этого множества, если она принадлежит M вместе с некоторой своей окрестностью. Их совокупность обозначается через M° .

Множество M , все точки которого внутренние (т. е. $M = M^\circ$), называется **открытым**.

Теорема 4. Для того чтобы множество M было открытым в X , необходимо и достаточно, чтобы его дополнение $X \setminus M$ было замкнутым.

Следствие 1. Множества $\emptyset$ и X — открыты.

Теорема 3'. Объединение любого числа и пересечение любого конечного числа открытых множеств являются открытыми множествами.

Приведем утверждение, характеризующее все открытые множества на числовой прямой.

Теорема 5. Всякое открытое множество на числовой прямой является объединением конечного или счетного числа попарно непересекающихся интервалов.

Точка $x_0 \in X$ называется **границей** точки множества $M \subset X$, если в произвольной ее окрестности содержатся как точки из M , так и точки, множеству M не принадлежащие. Совокупность граничных точек множества M обозначается через ∂M и называется **границей** этого множества. Справедливо соотношение: $\bar{M} = M^\circ \cup \partial M$.

Множество M называется **ограниченным** в метрическом пространстве X , если оно содержится в некотором шаре.

4. **Сходимость в метрическом пространстве.** Пусть $x_1, x_2, \dots$ — последовательность точек метрического пространства X . Будем говорить, что она сходится к точке x , если $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x) = 0$, и обозначим это так: $x_n \rightarrow x$ при $n \rightarrow \infty$ или $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

Это равносильно, очевидно, тому, что

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : x_n \in B(x, \epsilon) \quad \text{при } n \geq n_0.$$

Никакая последовательность не может иметь двух различных пределов, и если $x_n \rightarrow x$, то и $x_{n_k} \rightarrow x$, где (x_{n_k}) — произвольная подпоследовательность последовательности (x_n) . Кроме того, если $x_n \rightarrow x$, а x_0 — произвольный фиксированный элемент из X , то числа $\rho(x_n, x_0)$ образуют ограниченное множество.

Теорема 6. Для того чтобы точка x_0 была предельной для M , необходимо и достаточно, чтобы в M существовала последовательность попарно различных точек, сходящаяся к x_0 .

5. Плотные множества. Сепарабельные пространства. Пусть M и N — два множества в метрическом пространстве X . Множество M называется плотным в N , если $N \subset \bar{M}$. Множество M называется *всюду плотным* (в пространстве X), если $\bar{M} = X$. Если множество M не плотно ни в одном шаре, оно называется *нигде не плотным*.

Пространства, в которых имеются счетные всюду плотные множества, называются *сепарабельными*.

6. Примеры метрических пространств. В этом пункте приводятся примеры наиболее часто встречающихся (в приложениях) метрических пространств. На проверке соответствующих аксиом метрики для некоторых из них мы остановимся при рассмотрении конкретных примеров.

1) *Пространство изолированных точек* (или *дискретное метрическое пространство*) — это произвольное множество, для которого

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y, \\ 1, & \text{если } x \neq y. \end{cases}$$

Заметим, что в этом пространстве сходящимися являются только стационарные последовательности. Оно сепарабельно тогда и только тогда, когда само состоит лишь из счетного числа точек, ибо замыкание $\bar{M}$ любого множества M в этом пространстве совпадает с M .

2) *Евклидово пространство* $\mathbb{R}^n$ — это множество упорядоченных наборов из n действительных чисел $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ с расстоянием

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (\eta_k - \xi_k)^2} \quad (y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)).$$

Замечание 1. Аксиома треугольника является здесь следствием известного из курса математического анализа *неравенства Коши — Буняковского*

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n b_k^2 \quad (\forall a_k, b_k \in \mathbb{R}).$$

Замечание 2. Иногда вместо $(\mathbb{R}^n, \rho)$ рассматривают пространство $(\mathbb{R}^n, \rho_1)$, где

$$\rho_1(x, y) = \sum_{k=1}^n |\eta_k - \xi_k|,$$

или $(\mathbb{R}^n, \rho_0)$, где

$$\rho_0(x, y) = \max_{1 \leq k \leq n} |\eta_k - \xi_k|.$$

В этих пространствах счетным всюду плотным множеством является, например, совокупность «векторов» с рациональными компонентами. Сходимость в пространстве $\mathbb{R}^n$ является сходимостью по координатам.

3) *Пространство m всех ограниченных последовательностей* состоит из тех точек $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots)$, что

$$\forall x \quad \exists K_x = \text{const} : |\xi_i| \leq K_x \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Здесь $\rho(x, y) = \sup_i |\xi_i - \eta_i|$, если $x = (\xi_i)$, $y = (\eta_i)$, а сходимость в m — это сходимость по координатам, равномерная относительно номеров координат. Можно показать, что пространство m не является сепарабельным.

4) Пространство с сходящихся числовых последовательностей состоит из элементов $x = (\xi_i)$, для которых существует $\lim_{i \rightarrow \infty} \xi_i = \xi$. Если положить $\rho(x, y) = \sup_i |\xi_i - \eta_i|$, то c — подпространство пространства m с той же сходимостью (т. е. сходимостью по координатам, равномерной относительно номеров координат). Отметим, что подпространство c несепарабельного пространства m уже является сепарабельным.

Совокупность тех $x = (\xi_i) \in c$, для которых $\lim_{i \rightarrow \infty} \xi_i = 0$, образует метрическое подпространство c_0 этого пространства.

5) Пространство l_p ($p \geq 1$) состоит из всех последовательностей $x = (\xi_i)$ вещественных чисел, для которых $\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p < +\infty$, а расстояние в нем определяется по формуле

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \eta_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

При рассмотрении различных вопросов в этом пространстве часто используются классические неравенства Гельдера и Минковского (см. гл. 1, § 4, пример 5).

Можно показать, что последовательность $(x_n) = ((\xi_i^{(n)})) \subset l_p$ сходится к элементу $x = (\xi_i)$ тогда и только тогда, когда:

а) $\xi_i^{(n)} \rightarrow \xi_i$ при $n \rightarrow \infty$ для всех i ;

б) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число i_0 , что $\sum_{k=i+1}^{\infty} |\xi_k^{(n)}|^p < \varepsilon^p$ при $i \geq i_0$ и всех n .

Счетное множество элементов вида $(r_1, r_2, \dots, r_n, 0, 0, \dots)$, где r_i — произвольные рациональные числа, а n — произвольное натуральное число, образует в l_p всюду плотное множество. Следовательно, l_p — сепарабельное пространство.

6) Пространство с всех числовых последовательностей. Метрику в нем определяет функция

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\xi_i - \eta_i|}{2^i (1 + |\xi_i - \eta_i|)},$$

а сходимость в s — по координатная (но, вообще говоря, неравномерная относительно номеров координат).

Это пространство сепарабельно, в качестве счетного всюду плотного в нем множества можно также взять множество элементов вида $(r_1, r_2, \dots, r_n, 0, 0, \dots)$, где r_i — произвольные рациональные числа, а n — любые натуральные числа.

7) Пространство $C[a; b]$ всех непрерывных действительных функций, определенных на сегменте $[a; b]$, с расстоянием

$$\rho(x, y) = \max_{t \in [a; b]} |x(t) - y(t)|.$$

Пространство $C[a; b]$ сепарабельно, так как всюду плотное множество в нем образует счетная совокупность всех многочленов с рациональными коэффициентами.

Сходимость в этом пространстве есть равномерная сходимость на отрезке $[a; b]$.

Иногда рассматривают и пространство $C(-\infty; +\infty)$, элементами которого являются непрерывные и ограниченные на всей числовой прямой функции. Расстояние в нем определяется аналогичной формулой

$$\rho(x, y) = \sup_{t \in \mathbb{R}} |x(t) - y(t)|.$$

8) *Пространство* $L_p[a; b]$. Рассмотрим множество всех измеримых по Лебегу на $[a; b]$ функций $x(t)$, для которых

$$\int_a^b |x(t)|^p dt < +\infty,$$

и положим

$$\rho(x, y) = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

(здесь $p \geq 1$ — некоторое положительное число).

В этом пространстве функции, совпадающие друг с другом почти всюду, отождествляются.

Аксиома треугольника следует здесь из известного *неравенства Минковского для интегралов*

$$\left(\int_a^b |x(t) + y(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |y(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

а последовательность $(x_n) \subset L_p[a; b]$ сходится к $x \in L_p[a; b]$ тогда и только тогда, когда

$$\int_a^b |x_n(t) - x(t)|^p dt \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$. Эта сходимость называется *сходимостью в среднем* с показателем p .

Как и в пространстве $C[a; b]$, множество многочленов с рациональными коэффициентами всюду плотно в $L_p[a; b]$, т. е. это пространство сепарабельно.

Замечание. Мы ограничились рассмотрением только пространства $L_p[a; b]$. Более общие пространства $L_p(A, \mu)$ детально изучены в гл. 1, § 4.

9) *Пространство* $M[a; b]$ всех *ограниченных измеримых* на $[a; b]$ функций. Пусть $\alpha(t)$ — измеримая по Лебегу на $[a; b]$ функция. Через $\mathcal{E}$ обозначим класс всех множеств E меры нуль, лежащих в $[a; b]$, и рассмотрим на $\mathcal{E}$ следующую функцию: $\beta(E) = \sup_{[a; b] \setminus E} \alpha(t)$.

Пусть $\beta_0 = \inf_{E \in \mathcal{E}} \alpha(E)$. Число β_0 называется *существенным максимумом функции* $\alpha(t)$ на $[a; b]$ и обозначается

$$\operatorname{vrai} \max_{[a; b]} \alpha(t) = \min_{E \in \mathcal{E}} \left\{ \sup_{[a; b] \setminus E} \alpha(t) \right\}.$$

Пусть $M[a; b]$ — множество всех измеримых на $[a; b]$ функций, существенные максимумы которых конечны, причем две функции из этого множества считаются тождественными, если они почти всюду равны. Положим $\rho(x, y) = \operatorname{vrai} \max_{[a; b]} |x(t) - y(t)|$. Сходимость в $M[a; b]$ есть равномерная сходимость почти всюду.

10) *Пространство* $S[a; b]$ *сходимости по мере*. Это — совокупность всех измеримых по Лебегу на $[a; b]$ функций. Две функции, совпадающие почти всюду, так же считаются тождественными. Метрика вводится равенством

$$\rho(x, y) = \int_a^b \frac{|x(t) - y(t)|}{1 + |x(t) - y(t)|} dt,$$

а сходимость в нем есть *сходимость по мере*.

11) Пространство A_R состоит из всех однозначных и аналитических в круге $|z| < R$ ($0 < R \leq +\infty$) функций, а метрика определяется функцией

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{\max_{|z| < r_k} |x(z) - y(z)|}{1 + \max_{|z| < r_k} |x(z) - y(z)|},$$

где r_k — некоторая монотонно возрастающая к R последовательность неотрицательных чисел. Последовательность (x_n) сходится в этом пространстве к x , если $x_n(z)$ сходится к $x(z)$ равномерно на каждом компактном (т. е. ограниченном и замкнутом) множестве точек круга $|z| < R$.

7. Полные пространства. Последовательность (x_n) элементов метрического пространства X называется фундаментальной (или сходящейся в себе), если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется номер n_0 такой, что $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ при всех $n, m \geq n_0$.

Ясно, что каждая сходящаяся последовательность является в то же время фундаментальной.

Если в метрическом пространстве X любая фундаментальная последовательность сходится к некоторому пределу, являющемуся элементом того же пространства, то пространство X называется полным. Полные метрические пространства называют иногда еще пространствами Фреше.

Если метрики ρ_1 и ρ_2 топологически эквивалентны, то пространства (X, ρ_1) и (X, ρ_2) одновременно либо полны, либо нет.

Возвращаясь к приведенным в п. 6 примерам метрических пространств, отметим, что пространства $\mathbb{R}^n$, $C[a; b]$, m , c , $M[a; b]$, $L_p[a; b]$ ($p \geq 1$), l_p ($p \geq 1$), A_R являются полными.

Пусть X_0 — некоторое метрическое пространство, не являющееся полным, т. е. в этом пространстве имеется фундаментальная последовательность, не имеющая в X_0 предела. Рассмотрим всевозможные последовательности (x_n) , (y_n) , (z_n) , ..., составленные из элементов пространства X_0 и сходящиеся в себе. Отнесем к одному классу любые две такие последовательности (x_n) и (x'_n) , что $\rho_0(x_n, x'_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Эти классы $\tilde{x}$ примем за элементы нового пространства X и положим $\rho(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_0(x_n, y_n)$. Нетрудно проверить, что указанный предел всегда существует и не зависит от выбора последовательностей (x_n) и (y_n) в соответствующих классах.

Поскольку введенное в X расстояние удовлетворяет аксиомам метрики, то X — метрическое пространство. Кроме того, оно полно и всюду в дальнейшем будет называться пополнением пространства X_0 .

Нетрудно видеть, что X_0 — всюду плотное подмножество X . Иными словами, пополнение метрического пространства X_0 — это полное метрическое пространство, содержащее X_0 в качестве всюду плотного подмножества.

Всякое метрическое пространство имеет пополнение. Все пополнения одного и того же метрического пространства изометричны (см. п. 9) между собой.

Отметим, что процесс пополнения метрических пространств напоминает известный из курса математического анализа процесс пополнения множества рациональных чисел к множеству всех вещественных чисел. Кроме того, справедлив и аналог леммы о вложенных промежутках.

Теорема 7. Пусть в полном метрическом пространстве X дана последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю. Тогда существует и притом только одна точка, принадлежащая этим шарам.

Эта теорема допускает известное обобщение и на тот случай, когда замкнутые шары заменить произвольными замкнутыми множествами, диаметры которых стремятся к нулю. При этом под диаметром ограниченного множества F метрического пространства X понимаем число $\text{diam } F = \sup_{x, y \in F} \rho(x, y)$.

Оказывается, что теорема о вложенных шарах является естественной характеристикой полных метрических пространств.

Теорема 8. Если в метрическом пространстве X любая последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров, диаметры которых стремятся к нулю, имеет непустое пересечение, то пространство X полно.

Приведем еще одну характеристику полных метрических пространств. Напомним, что множество M называется множеством первой категории, если оно может быть представлено в виде объединения не более чем счетного числа нигде не плотных множеств. Множество, не являющееся множеством первой категории, называется множеством второй категории.

Теорема 9 (Бэра). *Полное метрическое пространство есть множество второй категории.*

8. Компактные множества. К сожалению, в современной математической литературе имеется некоторый «разнобой» в определениях компактных множеств и соответствующей терминологии. Имея в виду (для наглядности) примеры интервала $(a; b)$ и отрезка $[a; b]$ числовой оси, мы будем всюду в дальнейшем придерживаться следующих интуитивно понятных определений.

Множество K метрического пространства X называется *компактным*, если всякая последовательность элементов этого множества содержит сходящуюся подпоследовательность. Если пределы указанных последовательностей принадлежат K , то множество K называется *компактным в себе* (как отрезок $[a; b]$); если же эти пределы принадлежат X , не принадлежа, возможно, множеству K , то K называется компактным в пространстве X или относительно пространства X (как интервал $(a; b)$ на прямой $\mathbb{R}$). Таким образом, здесь происходит перенесение в общие условия существования леммы Больцано — Вейерштрасса — одного из самых известных предложений теории действительных чисел.

Ясно, что множество K компактно в себе тогда и только тогда, когда оно компактно в X и замкнуто.

Если, в частности, каждое бесконечное подмножество пространства X содержит сходящуюся к некоторому элементу из X последовательность, то пространство X называется *компактным*. Компактное метрическое пространство называют также *компактом*. Компакт есть полное метрическое пространство.

Приведем критерии компактности множеств в общем случае и в случае некоторых специальных метрических пространств, важных в приложениях. Однако сперва договоримся называть некоторое множество N метрического пространства X ε -сетью для множества M того же пространства (возможно, что $M = X$), если для любой точки $x \in M$ найдется такая точка $x_\varepsilon \in N$, что $\rho(x, x_\varepsilon) < \varepsilon$. Те множества, для которых существует конечная ε -сеть, называются *вполне ограниченными*.

Теорема 10 (критерий компактности Хаусдорфа). *Для компактности множества M метрического пространства X необходимо, а в случае полноты X и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовала конечная ε -сеть для множества M .*

Следствие 2. *Компактное пространство сепарабельно.*

Следствие 3. *Компактное множество метрического пространства ограничено.*

Систему (G_α) открытых множеств пространства X назовем *покрытием множества* $M \subset X$, если каждая точка $x \in M$ принадлежит хотя бы одному из множеств G_α этой системы.

Теорема 11. *Для того чтобы замкнутое множество F метрического пространства X было компактным в себе, необходимо и достаточно, чтобы из любого покрытия этого множества можно было выделить конечное покрытие.*

Теорема 12 (Арцеля). *Для компактности множества $K \subset C[a; b]$ необходимо и достаточно, чтобы функции $x(t) \in K$ были равномерно ограничены и равномерно непрерывны.*

Равномерная ограниченность означает существование такой константы $\mu > 0$, что $|x(t)| \leq \mu$ ($t \in [a; b]$) для всех $x(t) \in K$ (т. е. ограниченность множества K в пространстве $C[a; b]$), а *равностепенная непрерывность* означает, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$ для любых $t_1, t_2 \in [a; b]$ при $|t_1 - t_2| < \delta$ и для любой функции $x(t) \in K$.

Теорема 13. *Для компактности множества K в $C(-\infty; +\infty)$ необходимо и достаточно, чтобы функции $x(t) \in K$ были равномерно ограничены и для каждого $\varepsilon > 0$ существовало покрытие оси $(-\infty; +\infty)$ конечным числом открытых множеств, в каждом из которых колебание любой функции $x(t) \in K$ меньше ε .*

Теорема 14 (критерий А. Н. Колмогорова). *Для компактности множества $K \subset L_p[a; b]$ ($p \geq 1$) необходимо и достаточно, чтобы это множество было ограничено в $L_p[a; b]$ и для любого $\varepsilon > 0$ существовало $\delta > 0$ такое, что при $h < \delta$*

для любой функции $x(t) \in K$ расстояние $\rho(x, x_h)$, где

$$x_h(t) = \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} x(\tau) d\tau,$$

было меньше ε (вне отрезка $[a; b]$ функция $x(t)$ считается равной нулю).

Теорема 15 (критерий Рисса). Множество $K \subset L_p[a; b]$ ($p \geq 1$) компактно тогда и только тогда, когда оно ограничено в $L_p[a; b]$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$\int_a^b |x(t+h) - x(t)|^p dt < \varepsilon$$

при $|h| < \delta$.

Теорема 16. Для компактности множества $K \subset l_p$ необходимо и достаточно, чтобы K было ограниченным и для произвольного $\varepsilon > 0$ существовал номер n_0 такой, что для всех $x = (\xi_n) \in K$ выполнялось неравенство $\sum_{i=n_0}^{\infty} |\xi_i|^p < \varepsilon$.

Теорема 17 (Монтеля). Для того чтобы множество $K \subset A_R$ было компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было равномерно ограниченным внутри круга $|z| < R$, т. е. для любого замкнутого множества F точек этого круга существовала такая положительная постоянная μ , что каждая функция $f \in K$ удовлетворяет во всех точках множества F неравенству $|f(z)| \leq \mu$.

9. Непрерывные отображения метрических пространств. Пусть (X, ρ_1) и (Y, ρ_2) — два метрических пространства и f — некоторое отображение X в Y , т. е. каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие некоторый элемент $y = f(x)$ из Y (в дальнейшем такие отображения называются операторами). Это отображение называется **непрерывным** в точке $x_0 \in X$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X: \rho_1(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Если отображение f непрерывно во всех точках пространства X , то его называют непрерывным на X .

Понятие непрерывности отображения f метрического пространства X в метрическое пространство Y равносильно следующему: отображение f непрерывно в точке $x_0 \in X$ тогда и только тогда, когда для любой последовательности $(x_n) \subset X$, сходящейся к x_0 , последовательность $(f(x_n))$ сходится к $f(x_0)$.

Нетрудно видеть также, что непрерывный образ компакта есть компакт.

Заметим, что если X и Y — числовые множества, то приведенное определение совпадает с известным из курса математического анализа определением непрерывности функции.

В том случае, когда отображение f пространства X на пространство Y взаимно однозначно, существует обратное отображение $x = f^{-1}(y)$ пространства Y на X . Если f — взаимно непрерывно (т. е. непрерывны f и f^{-1}), то оно называется **гомеоморфным отображением** или **гомеоморфизмом**, а соответствующие пространства X и Y — гомеоморфными.

Взаимно однозначное отображение f метрического пространства (X, ρ_1) на пространство (Y, ρ_2) является изометрическим, если $\rho_2(f(x_1), f(x_2)) = \rho_1(x_1, x_2)$ для любых $x_1, x_2 \in X$. Пространства X и Y , между которыми можно установить изометрическое отображение, называются **изометрическими** между собой.

Многие из известных теорем о непрерывных функциях, заданных на $\mathbb{R}$, можно распространить и на функции $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, где X — метрическое пространство (такие отображения f будут называться в дальнейшем функционалами). Например, справедливо следующее утверждение, которое является обобщением теоремы Вейерштрасса.

Теорема 18. Пусть K — компактное в себе множество метрического пространства X и f — непрерывное отображение X в $\mathbb{R}$. Тогда:

- 1) функция f ограничена на K ;
- 2) функция f достигает на K своих точных верхней и нижней границ.

Теорема 19 (Кантора). Всякая непрерывная функция f , определенная на компакте K , равномерно непрерывна на нем, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что из $\rho(x, y) < \delta$ ($x, y \in K$) следует $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

10. Принцип сжимающих отображений. Пусть X — метрическое пространство, а A — некоторое отображение пространства X в себя. Оно называется *сжимающим*, если существует такое число $\alpha < 1$, что для любых двух точек $x, y \in X$ выполняется неравенство $\rho(Ax, Ay) \leq \alpha \rho(x, y)$.

Теорема 20 (принцип сжимающих отображений). Всякое сжимающее отображение, определенное в полном метрическом пространстве X , имеет одну и только одну неподвижную точку x^* (т. е. уравнение $Ax = x$ имеет одно и только одно решение x^*).

Неподвижная точка x^* может быть найдена как предел последовательности (x_n) , определяемой рекуррентным соотношением $x_n = A^n x_0$, где x_0 — произвольная фиксированная точка из X , причем для n -го приближения x_n справедлива оценка

$$\rho(x_n, x^*) \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \rho(x_0, Ax_0) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Принцип сжимающих отображений, доказанный впервые С. Банахом, имеет многочисленные приложения. Рассмотрим некоторые из них.

Теорема 21. Если матрица $(a_{ij})_{i,j=1}^n$ такова, что $\sum_{j=1}^n |a_{ij}| < 1$ для всех i , то система уравнений

$$\xi_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} \xi_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

имеет единственное решение.

Это утверждение является простым следствием теоремы 20, примененной к отображению A пространства $\mathbb{R}^n$ в себя ($\rho_0(x, y) = \max_i |\xi_i - \eta_i|$; см. п. 6), определяемому с помощью равенств $A(\xi_i) = (\eta_i)$, где $\eta_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \xi_j + b_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Теорема 22. Пусть $k(t, s)$ — действительная функция, определенная и измеримая в квадрате $a \leq t, s \leq b$ и такая, что

$$\int_a^b \int_a^b k^2(t, s) \, dt \, ds < +\infty,$$

и пусть $f(t) \in L_2[a, b]$. Тогда интегральное уравнение

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_a^b k(t, s) x(s) \, ds$$

имеет при каждом достаточно малом значении параметра λ единственное решение $x(t) \in L_2[a, b]$. Это решение можно найти с помощью метода последовательных приближений.

Теорема 23 (Пикара). Пусть дано дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$, причем функция f определена и непрерывна в некоторой плоской области G , содержащей точку (x_0, y_0) , и удовлетворяет условию Липшица по y

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq C |y_1 - y_2| \quad (C = \text{const}).$$

Тогда на некотором сегменте $|x - x_0| \leq d$ существует, и притом только одно, решение $y = \varphi(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию.

Эта теорема обобщается и на случай системы дифференциальных уравнений.

Общая теория метрических пространств изложена в [16; 20; 26].

Примеры решения задач

1. Пусть X — произвольное множество, а отображение $\rho_1: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям:

- 1) $\rho_1(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (аксиома тождества);
- 2) $\rho_1(x, y) \leq \rho_1(x, z) + \rho_1(y, z), \forall x, y, z \in X$ (неравенство треугольника).

Доказать, что функция ρ_1 определяет метрику в X .

Решение. Пусть в условии 2) $y = x$. Тогда

$$2\rho_1(x, z) \geq \rho_1(x, x) = 0 \quad (\forall x, z \in X),$$

т. е. функция ρ_1 неотрицательна.

Из неравенства треугольника при $z = x$ следует (с учетом аксиомы тождества), что

$$\rho_1(x, y) \geq \rho_1(y, x).$$

Поскольку последнее неравенство верно для любой пары элементов $x, y \in X$, то справедливо и неравенство

$$\rho_1(y, x) \geq \rho_1(x, y),$$

т. е. $\rho_1(x, y) = \rho_1(y, x)$. Утверждение доказано.

2. Проверить, что пространство A_R всех однозначных и аналитических в круге $|z| < R$ ($0 < R \leq \infty$) функций с расстоянием

$$\rho(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{\max_{|z| \leq r_k} |x(z) - y(z)|}{1 + \max_{|z| \leq r_k} |x(z) - y(z)|},$$

где r_k — монотонно возрастающая к R последовательность положительных чисел, является метрическим.

Решение. Аксиома тождества в этом случае равносильна тому, что $\max_{|z| \leq r_k} |x(z) - y(z)| = 0$ ($\forall k \geq 0$). Следовательно, из совпадения функций $x(z)$ и $y(z)$ на каждом замкнутом круге $|z| \leq r_k$ по теореме единственности для аналитических функций следует, что $x(z) \equiv y(z)$ ($\forall z: |z| < R$).

Поскольку, далее, аксиома симметрии очевидна, то остановимся на проверке аксиомы треугольника. Пусть x, y, u — произвольные элементы пространства A_R . Так как в произвольной точке $z: |z| < R$

$$|x(z) - y(z)| \leq |x(z) - u(z)| + |u(z) - y(z)|,$$

то, очевидно, и

$$\max_{|z| \leq r_k} |x(z) - y(z)| \leq \max_{|z| \leq r_k} |x(z) - u(z)| + \max_{|z| \leq r_k} |u(z) - y(z)|$$

при любом $k \geq 0$.

Поскольку функция $\varphi(t) = \frac{t}{1+t}$ монотонно возрастает для $t > 0$ (ибо $\varphi'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} > 0$), то при любом $k \geq 0$

$$\begin{aligned} \frac{\max_{|z| \leq r_k} |x(z) - y(z)|}{1 + \max_{|z| \leq r_k} |x(z) - y(z)|} &\leq \frac{\max_{|z| \leq r_k} |x(z) - u(z)| + \max_{|z| \leq r_k} |u(z) - y(z)|}{1 + \max_{|z| \leq r_k} |x(z) - u(z)| + \max_{|z| \leq r_k} |u(z) - y(z)|} \leq \\ &\leq \frac{\max_{|z| \leq r_k} |x(z) - u(z)|}{1 + \max_{|z| \leq r_k} |x(z) - u(z)|} + \frac{\max_{|z| \leq r_k} |u(z) - y(z)|}{1 + \max_{|z| \leq r_k} |u(z) - y(z)|}. \end{aligned}$$

Поэтому $\rho(x, y) \leq \rho(x, u) + \rho(u, y)$.

3. Пусть f — непрерывно дифференцируемая на $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ функция, удовлетворяющая условиям: а) $f(0) = 0$ и $f(x) > 0$ для $x > 0$; б) $f(x)$ не убывает при $x \geq 0$; в) $\frac{f(x)}{x}$ не возрастает при $x > 0$. Доказать, что функция $\rho(x, y) = f(|x - y|)$ определяет метрику в $\mathbb{R}$.

Решение. Выполнение двух первых аксиом метрики очевидно. Для проверки аксиомы треугольника в силу условия б) достаточно показать, что для произвольных $a \geq b > 0$ (случай $b = 0$ тривиален) выполняется неравенство $f(a + b) \leq f(a) + f(b)$. С этой целью положим

$$\varphi(a, b) = f(a) + f(b) - f(a + b) = f(b) - [f(a + b) - f(a)]$$

и покажем, что $\varphi(a, b) \geq 0$. Воспользуемся для этого теоремой Лагранжа о конечных приращениях для функции $f(x)$ на отрезке $[a; a + b]$:

$$f(a + b) - f(a) = bf'(\xi), \quad a < \xi < a + b.$$

Поэтому

$$\varphi(a, b) = f(b) - bf'(\xi).$$

Поскольку по условию в) дифференцируемая при $x > 0$ функция $\frac{f(x)}{x}$ не возрастает, то $\left(\frac{f(x)}{x}\right) \leq 0$, т. е.

$$\frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} \leq 0.$$

Отсюда следует неравенство $f'(x) \leq \frac{f(x)}{x}$ ($x > 0$), и поэтому

$$\varphi(a, b) \geq f(b) - b \frac{f(\xi)}{\xi}.$$

Поскольку $a < \xi$, то, в силу условия в), $\frac{f(\xi)}{\xi} \leq \frac{f(a)}{a}$. Значит,

$$\varphi(a, b) \geq f(b) - \frac{b}{a} f(a) = \frac{af(b) - bf(a)}{a}.$$

Используя еще раз условие в), приходим к неравенству

$$af(b) - bf(a) \geq 0$$

(так как $a \geq b$) и тем самым к тому, что $\varphi(a, b) \geq 0$.

Замечание. Условия а) — в) выполняются, например, для функции $f(x) = \arctg x$ и поэтому формулой

$$\rho(x, y) = \arctg |x - y|$$

определяется метрика в $\mathbb{R}$.

4. Пусть X — множество всех алгебраических многочленов степени n на отрезке $[0; 1]$, и если

$$P(t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k t^k, \quad Q(t) = \sum_{k=0}^n \beta_k t^k,$$

то

$$\rho_1(P, Q) = \max_{t \in [0; 1]} |P(t) - Q(t)|,$$

а

$$\rho_2(P, Q) = \sum_{k=0}^n |\alpha_k - \beta_k|.$$

Доказать, что эти две метрики топологически эквивалентны.

Решение. Пусть

$$g(t) = P(t) - Q(t) = \sum_{k=0}^n (\alpha_k - \beta_k) t^k = \sum_{k=0}^n \gamma_k t^k.$$

Тогда

$$\rho_1(P, Q) = \max_{t \in [0; 1]} |g(t)| \leq \sum_{k=0}^n |\gamma_k| = \rho_2(P, Q).$$

Возьмем теперь на отрезке $[0; 1]$ точки $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ и рассмотрим систему $n + 1$ уравнений с $n + 1$ неизвестными

$$\sum_{k=0}^n \gamma_k t_i^k = g(t_i) \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Определитель этой системы (определитель Вандермонда) отличен от нуля и поэтому $\gamma_k = \sum_{i=0}^n c_{ki} g(t_i)$ ($k = 0, 1, \dots, n$), где числа c_{ki} зависят от выбранных точек t_i , но не зависят от полинома $g(t)$. Поэтому

$$\rho_2(P, Q) = \sum_{k=0}^n |\gamma_k| \leq \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^n |c_{ki}| \cdot \rho_1(P, Q)$$

и утверждение доказано.

5. Доказать, что в произвольном метрическом пространстве $\overline{B(x_0, r)} \subset B[x_0, r]$. Привести примеры метрических пространств, в которых $\overline{B(x_0, r)} \neq B[x_0, r]$.

Решение. Пусть $x \in \overline{B(x_0, r)}$. Тогда $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, где $x_n \in B(x_0, r)$, и $\rho(x, x_0) \leq \rho(x, x_n) + \rho(x_n, x_0) < \rho(x, x_n) + r$. Переходя здесь к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем, что $\rho(x, x_0) \leq r$, т. е. что $x \in B[x_0, r]$.

Приведем пример метрического пространства, в котором $\overline{B(x_0, r)} \neq B[x_0, r]$. Пусть X — произвольное множество, содержащее более одной точки, и (X, ρ) — метрическое пространство (см. п. 6) с метрикой

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$$

Тогда для произвольной точки $x_0 \in X$ имеем $\overline{B(x_0, 1)} = B(x_0, 1) = \{x_0\}$, а $B[x_0, 1] = X$. Следовательно, $\overline{B(x_0, 1)} \neq B[x_0, 1]$.

Для многих классических пространств, рассмотренных в п. 6, равенство $\overline{B(x_0, r)} = B[x_0, r]$ справедливо. Проверим его для пространства $C[a; b]$.

Пусть $x \in B[x_0, r]$ и $x_n(t) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)x(t) + \frac{1}{n}x_0(t)$. Так как

$$\rho(x_0, x_n) = \max_{t \in [a; b]} |x_0(t) - x_n(t)| \leq r \left(1 - \frac{1}{n}\right) < r$$

при каждом фиксированном $n \in \mathbb{N}$, то последовательность $(x_n(t))$ принадлежит $B(x_0, r)$. Кроме того, она, очевидно, равномерно на $[a; b]$ стремится к $x(t)$. Значит, $x \in \overline{B(x_0, r)}$ и $B[x_0, r] \subset \overline{B(x_0, r)}$. Учитывая доказанное ранее включение $\overline{B(x_0, r)} \subset B[x_0, r]$, приходим к выводу, что в пространстве $C[a; b]$ искомое соотношение действительно справедливо.

6. Построить метрическое пространство (X, ρ) и в нем замкнутые шары $B_1[x_1, r_1]$ и $B_2[x_2, r_2]$ так, что $B_1 \subset B_2$, а $r_1 > r_2$.

Решение. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, состоящее из всех точек (x, y) круга $x^2 + y^2 < 9$, с обычной евклидовой метрикой. Положим $B_2 \equiv X$, а

$$B_1 \equiv B_2 \cap \{(x, y) : (x-2)^2 + y^2 \leq 16\}.$$

Тогда $B_1 \subset B_2$, $r_1 = 4$, $r_2 = 3$ и $r_1 > r_2$.

7. Доказать, что множество E всех непрерывных на отрезке $[0; 1]$ функций, удовлетворяющих неравенствам $A < x(t) < B$ (A, B — фиксированные числа), является открытым множеством.

Решение. Пусть $x(t) \in E$. Положим $\alpha = \inf_{t \in [0; 1]} x(t)$, $\beta = \sup_{t \in [0; 1]} x(t)$.

Ясно, что $\alpha > A$, ибо в противном случае (т. е. при $\alpha = A$) нашлась бы по теореме Вейерштрасса такая точка $t_0 \in [0; 1]$, для которой $x(t_0) = \alpha = A$, что невозможно (по определению множества E). Аналогично доказывается неравенство $\beta < B$.

Пусть $\varepsilon = \min(\alpha - A, B - \beta)$. Тогда каждая функция $\gamma(t)$, удовлетворяющая неравенствам $x(t) - \varepsilon < \gamma(t) < x(t) + \varepsilon$ ($\forall t \in [0; 1]$), принадлежит множеству E . Совокупность таких функций $\gamma(t)$ образует ε -окрестность функции $x(t) : \rho(x, \gamma) < \varepsilon$. Значит, каж-

дая функция $x(t)$ принадлежит множеству E вместе с некоторой своей окрестностью и, тем самым, E — открытое множество.

8. 1) Доказать, что для произвольных множеств M и N в метрическом пространстве X

$$\rho(M, N) = \inf_{x \in M} \rho(x, N) = \inf_{y \in N} \rho(M, y).$$

2) Построить пример непустых и непересекающихся замкнутых множеств, расстояние между которыми равно нулю.

Решение. 1) Покажем сперва, что для произвольной ограниченной снизу функции f , определенной на произведении $M \times N = \{(x, y) : x \in M, y \in N\}$ произвольных множеств M и N , справедливо соотношение

$$\inf_{\substack{x \in M \\ y \in N}} f(x, y) = \inf_{x \in M} (\inf_{y \in N} f(x, y)) = \inf_{y \in N} (\inf_{x \in M} f(x, y)).$$

Действительно, поскольку $\inf_{\substack{x \in M \\ y \in N}} f(x, y) \leq \inf_{y \in N} f(x, y)$ для произвольного $x \in M$, то $\inf_{\substack{x \in M \\ y \in N}} f(x, y) \leq \inf_{x \in M} (\inf_{y \in N} f(x, y))$.

Далее, для каждого $\varepsilon > 0$ существует пара $(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$ такая, что $f(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \leq \inf_{\substack{x \in M \\ y \in N}} f(x, y) + \varepsilon$. Так как

$$\inf_{x \in M} (\inf_{y \in N} f(x, y)) \leq \inf_{y \in N} f(x_\varepsilon, y) \leq f(x_\varepsilon, y_\varepsilon),$$

то $\inf_{x \in M} (\inf_{y \in N} f(x, y)) \leq \inf_{\substack{x \in M \\ y \in N}} f(x, y) + \varepsilon$. Отсюда, ввиду произвольности ε , получаем, что

$$\inf_{x \in M} (\inf_{y \in N} f(x, y)) \leq \inf_{\substack{x \in M \\ y \in N}} f(x, y)$$

и (с учетом предыдущего)

$$\inf_{x \in M} (\inf_{y \in N} f(x, y)) = \inf_{\substack{x \in M \\ y \in N}} f(x, y).$$

Аналогично доказывается и соотношение

$$\inf_{y \in N} (\inf_{x \in M} f(x, y)) = \inf_{\substack{x \in M \\ y \in N}} f(x, y).$$

Для получения утверждения рассматриваемого примера достаточно положить $f(x, y) = \rho(x, y)$.

2) На плоскости $\mathbb{R}^2$ рассмотрим замкнутые множества $M = \{(x, y) : y = 0\}$ и $N = \{(x, y) : xy = 1\}$. Для них $M \cap N = \emptyset$, но в то же время $\rho(M, N) = 0$.

9. Через $C_1 [0; 2]$ обозначим пространство всех непрерывных на $[0; 2]$ функций с метрикой, определяемой функцией

$$\rho(x, y) = \int_0^2 |x(t) - y(t)| dt.$$

Доказать, что $C_1 [0; 2]$ не является полным пространством.

Решение. Пусть

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1 - \frac{1}{n}, \\ n(1-t), & 1 - \frac{1}{n} \leq t \leq 1, \\ 0, & 1 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

Покажем, что последовательность $(\varphi_n(t))$ фундаментальна в $C_1 [0; 2]$ (очевидно, что $\varphi_n(t) \in C_1 [0; 2]$ при каждом $n \in \mathbb{N}$), но она не сходится в этом пространстве.

Действительно, если, например, $n > m$, то

$$\begin{aligned} \rho(\varphi_n, \varphi_m) &= \int_{1-\frac{1}{m}}^{1-\frac{1}{n}} [1 - m(1-t)] dt + (n-m) \int_{1-\frac{1}{n}}^1 (1-t) dt = \\ &= \frac{n-m}{2nm} \leq \frac{1}{2m}. \end{aligned}$$

Поэтому вообще $\rho(\varphi_n, \varphi_m) \leq \frac{1}{2 \min(n, m)}$, откуда следует фундаментальность рассматриваемой последовательности.

Пусть теперь f — произвольная функция из $C_1 [0; 2]$, а

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & 1 < t \leq 2. \end{cases}$$

Воспользуемся очевидными неравенствами

$$0 \leq \int_0^2 |f(t) - \psi(t)| dt \leq \int_0^2 |f(t) - \varphi_n(t)| dt + \int_0^2 |\varphi_n(t) - \psi(t)| dt$$

(левое неравенство — следствие непрерывности функции f на $[0; 2]$).

Так как $\int_0^2 |\varphi_n(t) - \psi(t)| dt = \frac{1}{2n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то величина

$\int_0^2 |f(t) - \varphi_n(t)| dt$, совпадающая с $\rho(\varphi_n, f)$, стремиться к нулю при $n \rightarrow \infty$ не может ни для одной функции $f \in C_1 [0; 2]$. Утверждение доказано.

10. Является ли сходящейся в метрическом пространстве X последовательность точек $x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots, \xi_k^{(n)}, \dots)$, если:

а) $X = l_1$, $x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}}_n, 0, 0, \dots \right)$;

б) $X = l_2$, $x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}}_{n^2}, 0, 0, \dots \right)$;

в) $X = l_3$, $x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots \right)$?

Решение. а) То, что $x_n \in l_1$ при каждом $n \in \mathbb{N}$, очевидно. Однако последовательность (x_n) не является сходящейся в пространстве l_1 , ибо она не является фундаментальной.

Действительно, при всех $n \in \mathbb{N}$

$$\rho(x_n, x_{2n}) = \sum_{k=1}^n \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} \right| + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = 1.$$

б) Последовательность (x_n) также не фундаментальна (в l_2), так как нетрудно проверить, что $\rho^2(x_n, x_{2n}) = 1$ ($\forall n \in \mathbb{N}$).

в) В этом случае

$$\rho^3(x_n, x_{n+p}) = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^3} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$ и для всех $p \in \mathbb{N}$. Значит, последовательность (x_n) фундаментальна и, в силу полноты пространства l_3 , она сходится в этом пространстве.

11. Пусть n_α — множество всех таких числовых последовательностей $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$, что $\sup_n (\alpha_n | \xi_n |) < +\infty$ (здесь $\alpha = (\alpha_n)$ — фиксированная последовательность положительных чисел), а $\beta = (\beta_n)$ — такая последовательность положительных чисел, что величина $L = \sup_n \left(\frac{\beta_n}{\alpha_n} \right)$ конечна.

Определим метрику в n_α соотношением

$$\rho(x, y) = \sup_n (\beta_n | \xi_n - \eta_n |).$$

Доказать, что пространство n_α является полным.

Решение. Пусть $x_k = (\xi_n^{(k)})$ — некоторая фундаментальная в n_α последовательность, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует номер n_0 такой, что

$$\rho(x_k, x_m) = \sup_n (\beta_n | \xi_n^{(k)} - \xi_n^{(m)} |) = L \sup_n (\alpha_n | \xi_n^{(k)} - \xi_n^{(m)} |) < \varepsilon$$

при всех $k, m \geq n_0$. Отсюда следует, что $\alpha_n | \xi_n^{(k)} - \xi_n^{(m)} | < \frac{\varepsilon}{L}$ ($k, m \geq n_0$) при каждом фиксированном $n \in \mathbb{N}$, т. е. последователь-

ность $(\xi_n^{(m)})_{m=1}^{\infty}$ фундаментальна в $\mathbb{R}$. Значит (на основании критерия Коши), существует $\gamma_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \xi_n^{(m)}$.

Покажем, что последовательность $\gamma = (\gamma_n)$ принадлежит n_α . С этой целью в неравенствах $\alpha_n |\xi_n^{(n)} - \xi_n^{(m)}| < \frac{\varepsilon}{L}$ перейдем к пределу при $m \rightarrow \infty$ (при фиксированных $n \in \mathbb{N}$ и $k \geq n_0$):

$$\alpha_n |\xi_n^{(k)} - \gamma_n| \leq \frac{\varepsilon}{L}.$$

Тогда

$$\alpha_n |\gamma_n| \leq \alpha_n |\xi_n^{(n_0)} - \gamma_n| + \alpha_n |\xi_n^{(n_0)}| \leq \frac{\varepsilon}{L} + \sup_n \alpha_n |\xi_n^{(n_0)}| = c_{n_0} < +\infty,$$

т. е. $\gamma \in n_\alpha$. Кроме того, при $k \geq n_0$

$$\rho(x_k, \gamma) = \sup_n \beta_n |\xi_n^{(k)} - \gamma_n| = \sup_n \left(\frac{\beta_n}{\alpha_n} \cdot \alpha_n |\xi_n^{(k)} - \gamma_n| \right) \leq L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon,$$

т. е. $\rho(x_k, \gamma) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

12. Показать, что пространство $C_0^{(1)}[0; 1]$ всех непрерывно дифференцируемых на $[0; 1]$ функций с метрикой

$$\rho(x, y) = \max_{t \in [0; 1]} |x(t) - y(t)|$$

не является полным.

Решение. Первый способ. Рассмотрим функцию Вейерштрасса

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a^k \cos(b^k \pi t),$$

где $0 < a < 1$, а b — целое нечетное число, причем $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$.

Из курса математического анализа известно, что f непрерывна на $[0; 1]$ (как сумма равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций), но ни в одной точке отрезка $[0; 1]$ она не имеет производной. Это означает, что последовательность частных сумм этого ряда (непрерывных функций с непрерывными производными) сходится равномерно и поэтому является фундаментальной в пространстве $C_0^{(1)}[0; 1]$, но не имеет в нем предела.

Второй способ. Пространство $C_0^{(1)}[0; 1]$ не полно, ибо в противном случае оно было бы замкнутым в $C[0; 1]$. Но поскольку $C_0^{(1)}[0; 1] = C[0; 1]$ (см. п. 6, пример 7), а $C_0^{(1)}[0; 1] \neq C[0; 1]$, то сделанное предположение неправильно.

13. Доказать полноту пространства A_R .

Решение. Пусть $(x_n(z))$ — некоторая фундаментальная в A_R последовательность функций, т. е. для всякого $\varepsilon > 0$ существует n_0 такое, что при всех $n, m \geq n_0$

$$\rho(x_n, x_m) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{\max_{|z| \leq r_k} |x_n(z) - x_m(z)|}{1 + \max_{|z| \leq r_k} |x_n(z) - x_m(z)|} < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что последовательность $(x_n(z))$ равномерно сходится на каждом круге $|z| \leq r_k$ (так как она удовлетворяет условиям критерия Коши). То, что предельная функция $x(z)$ аналитична в каждом круге $|z| \leq r_k$ и не зависит от k , следует соответственно из теоремы Вейерштрасса и теоремы единственности для аналитических функций, а соотношение $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x) = 0$ получается путем почленного перехода к пределу под знаком суммы ряда

$$\rho(x_n, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{\max_{|z| \leq r_k} |x_n(z) - x(z)|}{1 + \max_{|z| \leq r_k} |x_n(z) - x(z)|}$$

(ввиду его равномерной сходимости по n). Утверждение доказано.

14. Показать, что пространство $C[-1; 1]$ является пополнением пространства P заданных на $[-1; 1]$ алгебраических многочленов

$p(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$ с метрикой

$$\rho(p, q) = \max_{t \in [-1; 1]} |p(t) - q(t)|.$$

Решение. Рассмотрим последовательность полиномов

$$p_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Ее предел, функция e^t , не принадлежит P , т. е. P не является полным пространством. Однако из аппроксимационной теоремы Вейерштрасса следует, что пространство P всюду плотно в полном пространстве $C[-1; 1]$. Значит, $C[-1; 1]$ можно рассматривать как пополнение пространства P .

15. Рассмотрим пространство l_p^0 , состоящее из всех финитных последовательностей, т. е. из последовательностей

$$x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k_1}, 0, 0, \dots),$$

где k_1 — некоторое натуральное число, и положим

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{k_1} |\xi_i - \eta_i|^p + \sum_{i=k_1+1}^{k_2} |\eta_i|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

если $y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{k_2}, 0, 0, \dots)$ и $k_2 \geq k_1$. Найти пополнение l_p^0 .

Решение. То, что $l_p^0 \subset l_p$, очевидно. Однако это подпространство не является полным, так как, например, последовательность $x_1 = (1, 0, 0, \dots)$, $x_2 = \left(1, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots\right)$, ..., $x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2^n}, 0, 0, 0, \dots\right)$, ... фундаментальна

$$\rho(x_n, x_m) = \left(\sum_{i=m+1}^n \frac{1}{2^{ip}} \right)^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0$$

при $m, n \rightarrow \infty$ ($m < n$), но предела в пространстве l_p^0 не имеет.

Действительно, если $x_0 = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k_0}, 0, 0, \dots) \in l_p^0$ и $\rho(x_n, x_0) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то из соотношения

$$\rho(x_n, x_0) = \left(\sum_{k=1}^{k_0} \left| \xi_k - \frac{1}{2^k} \right|^p + \sum_{k=k_0+1}^n \frac{1}{2^{kp}} \right)^{\frac{1}{p}}$$

(записанного для больших n) мы пришли бы к абсурдному заключению $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=k_0+1}^n \frac{1}{2^{kp}} = 0$.

Обозначим пополнение пространства l_p^0 через X . Поскольку, очевидно, l_p^0 лежит плотно в полном пространстве l_p , то X изометрично l_p .

16. а) Введем в пространстве $\mathbb{R}$ ограниченную метрику $\rho(x, y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$ и положим $F_n = [n; +\infty)$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда каждое множество F_n ограничено и замкнуто, а $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$.

Подобный пример невозможен в конечномерном евклидовом пространстве с обычной евклидовой метрикой, поскольку там всякая убывающая последовательность непустых компактных множеств имеет непустое пересечение.

б) Рассмотрим пространство $(\mathbb{N}, \rho)$ натуральных чисел с метрикой

$$\rho(m, n) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{m+n}, & m \neq n, \\ 0, & m = n, \end{cases}$$

и пусть $B_n = \{m : \rho(m, n) \leq 1 + \frac{1}{2n}\} = \{n, n+1, \dots\}$ для $n = 1, 2, \dots$. Тогда (B_n) — последовательность непустых замкнутых шаров с пустым пересечением в полном метрическом пространстве $(\mathbb{N}, \rho)$. Полнота пространства $(\mathbb{N}, \rho)$ следует из того, что в нем каждая фундаментальная последовательность (x_n) является «почти постоянной», т. е. $x_n = x_m$ для всех достаточно больших n и m .

Этот пример представляет интерес в связи с теоремой Бэра, эквивалентной тому, что пересечение счетного множества открытых всюду плотных множеств в полном метрическом пространстве всюду плотно. При доказательстве этой теоремы строится убывающая последовательность замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, а потому она имеет непустое пересечение. Таким образом, если шары уменьшаются, то они должны иметь общую точку. В противном случае такая точка может и не существовать.

17. 1) Пусть M — множество непрерывных на $[0; 1]$ функций таких, что $|x(t)| \leq 1$ ($t \in [0; 1]$). Доказать, что M не является относительно компактным множеством в $C[0; 1]$. 2) Доказать, что множество M' непрерывно дифференцируемых на $[0; 1]$ функций, для которых $|x'(t)| \leq 1$ ($t \in [0; 1]$) и $x(0) = a$, относительно компактно в $C[0; 1]$.

11. 3) Пусть M_0 — множество всех непрерывных на $[0; 1]$ функций, удовлетворяющих условиям: $|x(t)| \leq 1$ ($t \in [0; 1]$), $x(0) = 0$ и $x(1) = 1$. Является ли оно компактным?

Решение. 1) Очевидно, функции $x_n(t) = \sin 2^n \pi t$ ($n = 1, 2, \dots$) принадлежат множеству M , а последовательность $(x_n(t))$ не сходится в $C[0; 1]$, ибо при $k > n$

$$\rho(x_n, x_k) = \sup_{t \in [0; 1]} |x_n(t) - x_k(t)| \geq \left| x_n\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) - x_k\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) \right| = 1.$$

2) Представим произвольную функцию $x(t) \in M'$ в виде

$$x(t) = a + \int_0^t x'(\tau) d\tau.$$

Отсюда следует, что $|x(t)| \leq |a| + 1$. Кроме того,

$$|x(t_1) - x(t_2)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} x'(\tau) d\tau \right| \leq |t_2 - t_1|.$$

Полученные неравенства убеждают нас в том, что функции множества M' равномерно ограничены и равностепенно непрерывны. Далее остается воспользоваться теоремой Арцеля.

3) Рассмотрим функцию $f: C[0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, полагаая

$$f(x) = \int_0^1 x^2(t) dt \quad (\forall x \in C[0; 1]).$$

Заметим, что $f(x) \geq 0$ при всех $x \in C[0; 1]$. Предположим, далее, что M_0 — компактное множество. Тогда по теореме Вейерштрасса существует такой элемент x_0 , $x_0 \in M_0$, что $f(x_0)$ — минимальное значение f на M_0 . Положим $x_n(t) = t^n$ ($t \in [0; 1]$, $n \in \mathbb{N}$). Поскольку $x_n \in M_0$ ($n \in \mathbb{N}$), $f(x_n) = \frac{1}{2n+1} \rightarrow 0$ (при $n \rightarrow \infty$), то, очевидно, $f(x_0) = 0$, т. е.

$\int_0^1 x_0^2(t) dt = 0$, а, значит, $x_0(t) \equiv 0$. Но эта функция множеству M_0 не принадлежит. Следовательно, данное множество M_0 не является компактным.

18. Доказать, что параллелепипед $\Pi = \{x = (\xi_n) \in l_2 : |\xi_n| \leq \frac{1}{2^n}\}$ является относительно компактным множеством в l_2 .

Решение. Покажем, что Π — вполне ограниченное множество, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ для Π существует конечная ε -сеть.

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Выбрав и зафиксировав n так, чтобы выполнялось неравенство $\frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$, каждой точке $x = (\xi_n) \in \Pi$ сопоставим точку $x^0 = (\xi_1, \dots, \xi_n, 0, 0, \dots) \in \Pi$. Тогда

$$\rho(x, x^0) = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \xi_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{4^k} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3} \cdot 2^n} < \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поскольку множество Π_0 всех точек x^0 из Π вполне ограничено (как ограниченное множество в n -мерном пространстве), то для Π_0 существует конечная $\frac{\varepsilon}{2}$ -сеть. Она будет и конечной ε -сетью для Π .

19. Доказать, что множество R всех многочленов всюду плотно в пространстве $C^{(k)}[a; b]$ всех k раз непрерывно дифференцируемых функций с метрикой

$$\rho(x, y) = \sum_{i=0}^k \max_{t \in [a; b]} |x^{(i)}(t) - y^{(i)}(t)|.$$

Решение. Доказательство проведем индукцией по k . Пусть $k = 0$. Покажем всюду плотность R в $C^{(0)}[a; b] = C[a; b]$. Для этого достаточно проверить, что произвольный открытый шар $B(x_0, \varepsilon)$ содержит элемент из R . Но это утверждение является следствием из аппроксимационной теоремы Вейерштрасса.

Пусть R всюду плотно в $C^{(k-1)}[a; b]$. Возьмем произвольную функцию x_0 из $C^{(k)}[a; b]$. Тогда $x'_0 \in C^{(k-1)}[a; b]$ и, согласно допущению, существует многочлен $p(t)$ такой, что

$$\rho_{C^{(k-1)}[a; b]}(x'_0, p) = \max_{t \in [a; b]} |x'_0(t) - p(t)| +$$

$$+ \max_{t \in [a; b]} |x''_0(t) - p'(t)| + \dots + \max_{t \in [a; b]} |x_0^{(k)}(t) - p^{(k-1)}(t)| < \frac{\varepsilon}{b-a+1}.$$

Пусть $p_1(t) = x_0(a) + \int_a^t p(\tau) d\tau$. Тогда

$$\rho_{C^{(k)}[a; b]}(x_0, p_1) = \max_{t \in [a; b]} \left| x_0(t) - x_0(a) - \int_a^t p(\tau) d\tau \right| +$$

$$+ \max_{t \in [a; b]} |x'_0(t) - p(t)| + \dots + \max_{t \in [a; b]} |x_0^{(k)}(t) - p^{(k-1)}(t)| \leq$$

$$\leq \max_{t \in [a; b]} \left| \int_a^t (x'_0(\tau) - p(\tau)) d\tau \right| + \frac{\varepsilon}{b-a+1} \leq$$

$$\leq (b-a) \max_{\tau \in [a; b]} |x'_0(\tau) - p(\tau)| + \frac{\varepsilon}{b-a+1} < \frac{(b-a)\varepsilon}{b-a+1} + \frac{\varepsilon}{b-a+1} = \varepsilon.$$

Следовательно, $\bar{R} = C^{(k)}[a; b]$.

20. Пусть n_0 — фиксированное натуральное число и $L_{n_0} = \{x = (\xi_n) \in l_2 : \xi_n = 0 \text{ при } n > n_0\}$. Доказать, что множество L_{n_0} нигде не плотно в l_2 .

Решение. Покажем, что произвольный шар $B(x^{(0)}, r)$ в l_2 содержит в себе другой шар, в котором нет точек множества L_{n_0} .

Действительно, если в шаре $B(x^{(0)}, r)$ нет точек из L_{n_0} , то доказательство на этом завершается. Если $x^{(1)} = (\xi_1^{(1)}, \dots, \xi_{n_0}^{(1)}, 0, \dots) \in L_{n_0}$ и $x^{(1)} \in B(x^{(0)}, r)$, то число $r_1 = \rho(x^{(0)}, x^{(1)})$ такое, что $r_1 < r$. Возьмем $0 < \varepsilon < r - r_1$ и рассмотрим шар $B(x^{(1)}, \varepsilon)$. Ясно, что $B(x^{(1)}, \varepsilon) \subset$

$\subset B(x^0, r)$, так как для всех $x \in B(x^{(1)}, \varepsilon)$ $\rho(x, x^{(0)}) \leq \rho(x, x^{(1)}) + \rho(x^{(1)}, x^{(0)}) < \varepsilon + r_1 = r$.

Рассмотрим теперь точку $x^{(2)} = (\xi_1^{(1)}, \dots, \xi_{n_0}^{(1)}, \frac{\varepsilon}{2}, 0, 0, \dots)$. Очевидно, что $x^{(2)} \notin L_{n_0}$ и $B(x^{(2)}, \frac{\varepsilon}{4}) \subset B(x^{(1)}, \varepsilon) \subset B(x^{(0)}, r)$, так как для произвольного $x \in B(x^{(2)}, \frac{\varepsilon}{4})$ имеем $\rho(x, x^{(1)}) \leq \rho(x, x^{(2)}) + \rho(x^{(2)}, x^{(1)}) < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{3}{4}\varepsilon < \varepsilon$ (следует учесть, что $\rho(x^{(2)}, x^{(1)}) = \frac{\varepsilon}{2}$). Кроме того, в шаре $B(x^{(2)}, \frac{\varepsilon}{4})$ нет точек из множества L_{n_0} , поскольку для произвольного $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n_0}, 0, \dots) \in L_{n_0}$

$$\rho(x, x^{(2)}) = \left(\sum_{k=1}^{n_0} |\xi_k - \xi_k^{(1)}|^2 + \frac{\varepsilon^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{\varepsilon}{2} > \frac{\varepsilon}{4}.$$

Значит, множество L_{n_0} действительно нигде не плотно в l_2 .

21. Доказать, что: 1) пространство s всех числовых последовательностей с метрикой $\rho(x, y) = \sup_n \frac{|\xi_n - \eta_n|}{1 + |\xi_n - \eta_n|}$ не является сепарабельным метрическим пространством; 2) пространство s с метрикой

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|\xi_n - \eta_n|}{1 + |\xi_n - \eta_n|} \text{ сепарабельно.}$$

Решение. 1) Рассмотрим множество $E_{0,1}$ последовательностей $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$, элементы которых равны 0 или 1. Это множество мощности континуум, так как между точками множества $E_{0,1}$ и точками отрезка $[0; 1]$ существует, как известно, взаимно однозначное соответствие. Поскольку при $x \neq y$ $\rho(x, y) = \frac{1}{2}$ ($x, y \in E_{0,1}$), то отсюда следует, что приблизить каждый элемент из $E_{0,1}$ элементами счетного множества нельзя: множество шаров с центрами в точках множества $E_{0,1}$ и радиусов $\frac{1}{3}$ является множеством мощности континуума, причем эти шары не пересекаются. Если же некоторое множество B плотно в s , то каждый из построенных шаров должен содержать хотя бы одну точку из этого множества. Значит, B не может быть счетным. Из включения $E_{0,1} \subset s$ следует, что s — несепарабельное пространство.

2) Пусть M — множество элементов $(r_1, r_2, \dots, r_n, 0, 0, \dots)$, где r_i — произвольные рациональные числа, а n — произвольное натуральное число. M — счетное множество. Покажем, что оно всюду плотно в s . Для этого возьмем произвольный элемент $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots) \in s$ и произвольное $\varepsilon > 0$. Пусть n такое,

$$\text{что } \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|\xi_k|}{1 + |\xi_k|} < \frac{\varepsilon}{2}. \text{ Возьмем элемент } x^0 = (r_1, r_2, \dots, r_n, 0, \dots) \text{ таким, что } \sum_{k=1}^n |\xi_k - r_k| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ (в силу плотности мно-}$$

жества рациональных точек в $\mathbb{R}$). Тогда

$$\begin{aligned} \rho(x, x^0) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k - r_k|}{1 + |\xi_k - r_k|} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k|}{1 + |\xi_k|} \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n |\xi_k - r_k| + \frac{e}{2} < \frac{e}{2} + \frac{e}{2} = e. \end{aligned}$$

Значит, $\bar{M} = s$.

22. Доказать, что если отображение $A : X \rightarrow X$ полного метрического пространства X в себя такое, что при некотором $n \in \mathbb{N}$ его степень (n -я итерация) A^n является сжимающим отображением, то A имеет и притом единственную неподвижную точку.

Решение. Пусть существует $\alpha : 0 < \alpha < 1$ такое, что $\rho(A^n x, A^n y) \leq \alpha \rho(x, y)$. Тогда отображение A^n имеет единственную неподвижную точку x^* : $A^n x^* = x^*$. Покажем, что x^* является также единственным решением уравнения $Ax = x$.

Действительно,

$$\rho(x^*, Ax^*) = \rho(A^n x^*, A^n(Ax^*)) \leq \alpha \rho(x^*, Ax^*),$$

откуда следует, что $\rho(x^*, Ax^*) = 0$, т. е. $Ax^* = x^*$.

Если x_1 — другая неподвижная точка для A , то эта же точка неподвижна и для A^n . Поэтому

$$\rho(x^*, x_1) = \rho(A^n x^*, A^n x_1) \leq \alpha \rho(x^*, x_1).$$

Значит, $x_1 = x^*$.

Пользуясь доказанным утверждением, проверяем, что уравнения

$$\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \varphi(t) dt = \varphi(x)$$

при каждом $n \in \mathbb{N}$ имеют в пространствах $C[0; \alpha]$ лишь тривиальные решения. Действительно, определим отображение (оператор) $A : C[0; \alpha] \rightarrow C[0; \alpha]$ по формуле $(A\varphi)(x) = \int_0^x \varphi(t) dt$. Для него

$$(A^m \varphi)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} \varphi(t) dt \quad (m \in \mathbb{N}),$$

и поэтому при $\frac{\alpha^{pn}}{(pn)!} < 1$ ($p \in \mathbb{N}$) оператор A^{pn} является сжимающим отображением.

Пусть $\varphi_0(x)$ — неподвижная точка отображения A^n , т. е. решение данного уравнения. Из доказанного следует, что $\varphi_0(x)$ является решением и уравнения $\int_0^x \varphi(t) dt = \varphi(x)$. Отсюда $\varphi \in C^{(1)}[0; \alpha]$, $\varphi(0) = 0$ и $\varphi'(x) = \varphi(x)$. Значит, $\varphi(x) \equiv 0$.

23. Пусть в полном метрическом пространстве X заданы два сжимающих отображения A и B , причем

$$\rho(Ax, Ay) \leq \alpha_A \rho(x, y), \quad \rho(Bx, By) \leq \alpha_B \rho(x, y).$$

Доказать, что если при всех $x \in X$ $\rho(Ax, Bx) < \varepsilon$ (такие отображения A и B называются ε -близкими), то их неподвижные точки находятся на расстоянии, не превосходящем $\frac{\varepsilon}{1-\alpha}$, где $\alpha = \max(\alpha_A, \alpha_B) < 1$.

Решение. Пусть x^* — неподвижная точка отображения A . Неподвижную точку y^* сжимающего отображения B построим как предел последовательности $y_k = B^k x^*$ ($k = 0, 1, \dots$). Тогда

$$\begin{aligned} \rho(x^*, y_k) &\leq \rho(x^*, y_1) + \rho(y_1, y_2) + \dots + \rho(y_{k-1}, y_k) \leq \\ &\leq \rho(x^*, Bx^*) (1 + \alpha_B + \dots + \alpha_B^{k-1}) \leq \frac{\rho(x^*, Bx^*)}{1 - \alpha_B}, \end{aligned}$$

откуда при $k \rightarrow \infty$ следует, что

$$\rho(x^*, y^*) \leq \frac{\rho(x^*, Bx^*)}{1 - \alpha_B} = \frac{\rho(Ax^*, Bx^*)}{1 - \alpha_B} < \frac{\varepsilon}{1 - \alpha}.$$

Замечание. Из доказанного утверждения вытекает известная теорема о непрерывной зависимости решения дифференциального уравнения от начальных условий: если уравнение $y' = f(x, y)$ рассматривать на отрезке длиной меньше $\frac{1}{K}$, где K — постоянная из условия Липшица для функции $f(x, y)$ (т. е. $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K |y_1 - y_2|$), то для всякого $\varepsilon > 0$ из неравенства $|y_0 - y_1| < \varepsilon$ следует

$$\max_{x \in [a; b]} |y_0(x) - y_1(x)| \leq \frac{\varepsilon}{1 - K(b-a)}$$

(здесь через $y_j(x)$ обозначено решение, удовлетворяющее начальному условию $y_j(x_0) = y_j$, $j = 0, 1$).

24. Доказать, что последовательность (x_n) цепных дробей

$$2, 2 + \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}, \dots$$

является сходящейся, и найти ее предел.

Решение. Поскольку последовательность (x_n) определяется рекуррентно: $x_1 = 2$, $x_n = 2 + \frac{1}{x_{n-1}}$ ($n \geq 2$), то из соотношения

$$x_n = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{x_{n-2}}} \quad (n \geq 3)$$

и оценок $x_1 \leq \frac{5}{2}$, $x_2 \leq \frac{5}{2}$ следует, что $x_n \leq \frac{5}{2}$ ($\forall n \geq 1$). Кроме того, $x_n \geq 2$ ($n \geq 1$). Рассмотрим отображение $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$ отрез-

ка $\left[2; \frac{5}{2}\right]$ в себя. Оно является сжимающим, так как

$$\rho(f(x), f(y)) = |f(y) - f(x)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| \leq \frac{1}{4} |x - y| = \frac{1}{4} \rho(x, y),$$

и поэтому имеет единственную неподвижную точку x^* , причём $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, где $x_n = f(x_{n-1}) = 2 + \frac{1}{x_{n-1}}$ ($n \geq 2$), $x_1 = 2$. Решая уравнение $x^* = 2 + \frac{1}{x^*}$, находим, что $x^* = 1 + \sqrt{2}$. Это число и является пределом данной последовательности цепных дробей.

25. Пусть функция $\varphi(s, u)$ двух вещественных переменных определена в полосе $\Pi = \{(s, u) \in \mathbb{R}^2 : a \leq s \leq b, -\infty < u < +\infty\}$, непрерывна в Π и имеет непрерывную производную по u , удовлетворяющую условию: $0 < m \leq \varphi'_u(s, u) \leq M < +\infty$ ($(s, u) \in \Pi$). Доказать, что существует единственная непрерывная на $[a; b]$ функция $u = x^*(s)$, для которой $\varphi(s, x^*(s)) \equiv 0$ ($s \in [a; b]$).

Решение. В пространстве $C[a; b]$ рассмотрим оператор $A: Ax = y$, $y(s) = x(s) - \frac{2}{M+m} \varphi(s, x(s))$ ($s \in [a; b]$). Это оператор сжатия, ибо если $y = Ax$, $\tilde{y} = A\tilde{x}$, то, на основании теоремы Лагранжа о конечных приращениях, для любого $s \in [a; b]$

$$|y(s) - \tilde{y}(s)| = \left| x(s) - \tilde{x}(s) - \frac{2}{M+m} [\varphi(s, x(s)) - \varphi(s, \tilde{x}(s))] \right| =$$

$$= |x(s) - \tilde{x}(s)| \cdot \left| 1 - \frac{2}{M+m} \varphi'_u(s, \theta(s)) \right| \leq \frac{M-m}{M+m} \max_{s \in [a; b]} |x(s) - \tilde{x}(s)|,$$

где $\frac{M-m}{M+m} < 1$.

Следовательно, оператор A имеет в пространстве $C[a; b]$ единственную неподвижную точку x^* . Остается отметить, что соотношение $x^* = Ax^*$ равносильно соотношению $\varphi(s, x^*(s)) \equiv 0$ ($s \in [a; b]$).

26. Рассмотрим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$x_i = \sum_{m=1}^{\infty} a_{im} x_m + a_i \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Проверить, что:

а) при выполнении условий $\alpha = \sup_i \sum_{m=1}^{\infty} |a_{im}| < 1$ и $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < +\infty$ она имеет единственное решение $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots)$ такое, что $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^*| < +\infty$;

б) если $\beta = \sup_i \sum_{m=1}^{\infty} |a_{im}| < 1$ и $\sup_i |a_i| < +\infty$, то указанная система имеет единственное решение $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots)$ такое, что $\sup_i |x_i^*| < +\infty$.

Решение. а) В пространстве l_1 с метрикой $\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|$ (здесь $x = (x_i)$, $y = (y_i)$) рассмотрим оператор $Ax = y = (y_i)$, где $y_i = \sum_{m=1}^{\infty} a_{im}x_m + a_i$ ($i = 1, 2, \dots$).

Тогда для любого $z = (z_i) \in l_1$

$$\begin{aligned} \rho(Ax, Az) &= \sum_{i=1}^{\infty} \left| \sum_{m=1}^{\infty} a_{im}x_m + a_i - \sum_{m=1}^{\infty} a_{im}z_m - a_i \right| = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \left| \sum_{m=1}^{\infty} a_{im}(x_m - z_m) \right| \leq \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |a_{im}| |x_m - z_m| \leq \alpha \rho(x, z), \end{aligned}$$

т. е. A — сжимающее отображение пространства l_1 в себя. Далее используем принцип сжимающих отображений в этом пространстве.

б) В этом случае аналогичное указанному выше отображение следует рассмотреть в пространстве m всех ограниченных последовательностей с метрикой $\rho(x, y) = \sup_i |x_i - y_i|$. Тогда

$$\rho(Ax, Az) = \sup_i \left| \sum_{m=1}^{\infty} a_{im}x_m - \sum_{m=1}^{\infty} a_{im}z_m \right| \leq \beta \rho(x, y).$$

27. Показать, что отображение

$$A: f(x) \rightarrow \frac{1}{2} \int_0^1 xtf(t) dt + \frac{5}{6} x$$

является сжимающим в пространстве $C[0; 1]$, и найти его неподвижную точку $f^*(x)$.

Решение. То, что данное отображение является сжимающим, вытекает из оценок

$$\begin{aligned} |Af_1 - Af_2| &= \frac{1}{2} \left| \int_0^1 xt[f_1(t) - f_2(t)] dt \right| \leq \frac{1}{2} \max_{t \in [0; 1]} |f_1(t) - f_2(t)| = \\ &= \frac{1}{2} \rho(f_1, f_2). \end{aligned}$$

Положим $f_0(x) = 0$. Тогда

$$f_1(x) = Af_0(x) = \frac{5}{6} x;$$

$$f_2(x) = Af_1(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 xt \cdot \frac{5}{6} t dt + \frac{5}{6} x = \left(\frac{5}{6^2} + \frac{5}{6} \right) x;$$

$$f_3(x) = Af_2(x) = \left(\frac{5}{6^3} + \frac{5}{6^2} + \frac{5}{6} \right) x; \dots;$$

$$f_n(x) = Af_{n-1}(x) = \left(\frac{5}{6^n} + \frac{5}{6^{n-1}} + \dots + \frac{5}{6^2} + \frac{5}{6} \right) x; \dots$$

Поэтому $f^*(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = x$, т. е. эта функция является единственным в $C[0; 1]$ решением интегрального уравнения

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 x t f(t) dt + \frac{5}{6} x.$$

Замечание. Этот пример можно решить другим способом, учитывая что каждое решение данного уравнения necessarily имеет вид $f(x) = cx$ ($x \in \mathbb{R}$). Но поскольку такие методы решения интегральных уравнений детально изучаются в гл. 3, § 4, то мы на этом здесь не останавливаемся.

Задачи для самостоятельной работы

- Доказать, что в произвольном метрическом пространстве (X, ρ) :
 - $|\rho(x, z) - \rho(y, z)| \leq \rho(x, y)$, $\forall x, y, z \in X$ (второе неравенство треугольника);
 - $|\rho(x, z) - \rho(y, u)| \leq \rho(x, y) + \rho(z, u)$, $\forall x, y, z, u \in X$ (неравенство четырехугольника).
- Проверить выполнение аксиом метрики для пространств, приведенных в п. 6.
- Пусть на прямой $\mathbb{R}$ расстояние определяется формулой

$$\rho(x, y) = \frac{|x - y|}{\sqrt{1 + x^2} \sqrt{1 + y^2}} \quad (\forall x, y \in \mathbb{R}).$$

Проверить, что ρ действительно является метрикой.

- Является ли метрическим пространством множество двумерных векторов, если положить

$$\rho((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (\sqrt{1 + x_1^2} + \sqrt{1 + x_2^2} + \sqrt{1 + y_1^2} + \sqrt{1 + y_2^2})^2?$$

- Показать, что на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел функции:

$$\text{а) } \rho(m, n) = \frac{|m - n|}{mn}; \quad \text{б) } \rho(m, n) = \begin{cases} 0, & m = n, \\ 1 + \frac{1}{m + n}, & m \neq n, \end{cases}$$

определяют метрику.

- Пусть X — множество всех точек окружности радиуса R с центром в начале координат. Примем за расстояние между двумя его точками длину кратчайшей дуги окружности, их соединяющей. Является ли X метрическим пространством?

- Является ли метрическим пространством множество X : а) всех прямых на плоскости, если расстояние между двумя прямыми $L_1: x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1 = 0$ и $L_2: x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - p_2 = 0$ определить формулой

$$\rho(L_1, L_2) = |p_1 - p_2| + |\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2|;$$

- тех прямых $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$, для которых $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ (с тем же расстоянием)?

- Пусть $f(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая на $\mathbb{R}^+$ функция, удовлетворяющая условиям: а) $f(0) = 0$ и $f(x) > 0$ при $x > 0$; б) $f(x)$ не убывает; в) $f''(x) \leq 0$ при $x > 0$. Доказать, что формулой $\rho(x, y) = f(|x - y|)$ определяется метрика в $\mathbb{R}$.

- Пусть на множестве X определено расстояние $\rho(x, y)$, причем (X, ρ) не является метрическим пространством, а $X_0 \subset X$. Может ли быть метрическим пространством множество (X_0, ρ) ?

$$10. \text{ Пусть } X = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), \rho_1(x, y) = |x - y| \text{ и } \rho_2(x, y) = |\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y|.$$

Доказать, что метрики ρ_1 и ρ_2 эквивалентны.

11. Пусть $C^{(n)}[0; 1]$ — пространство всех функций, определенных на отрезке $[0; 1]$ и имеющих непрерывную n -ю производную ($n \in \mathbb{N}$). Доказать, что формулы

$$\begin{aligned}\rho_1(x, y) &= \sum_{k=0}^n \max_{t \in [0; 1]} |x^{(k)}(t) - y^{(k)}(t)|, \\ \rho_2(x, y) &= \sum_{k=0}^n \max_{t \in [0; 1]} \frac{|x^{(k)}(t) - y^{(k)}(t)|}{k!}, \\ \rho_3(x, y) &= \max_{0 \leq k \leq n} \max_{t \in [0; 1]} |x^{(k)}(t) - y^{(k)}(t)|\end{aligned}$$

определяют в $C^{(n)}[0; 1]$ топологически эквивалентные метрики.

12. Пусть $C_1[0; 1]$ — метрическое пространство, состоящее из всех непрерывных на $[0; 1]$ функций, а

$$\hat{\rho}(x, y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)| dt.$$

Доказать, что метрики пространств $C[0; 1]$ и $C_1[0; 1]$ не являются эквивалентными.

Указание. Рассмотреть в этих пространствах последовательность функций

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} nt, & 0 \leq t \leq \frac{1}{n}, \\ 1, & \frac{1}{n} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

13. Доказать, что: а) $\text{diam } B[x_0, r] \leq 2r$; б) $\text{diam } \bar{M} = \text{diam } M$.

14. Доказать, что точка x_0 является точкой прикосновения (соответственно предельной точкой) множества M в метрическом пространстве X тогда и только тогда, когда $\rho(x_0, M) = 0$ (соответственно $\rho(x_0, M \setminus \{x_0\}) = 0$).

15. Доказать, что замыкание всякого нигде не плотного множества также нигде не плотно.

16. Конечное множество M открыто в метрическом пространстве X тогда и только тогда, когда каждая его точка является изолированной в X . Доказать это утверждение.

17. Доказать, что: а) $(M \cap N)^0 = M^0 \cap N^0$; б) если $M \subset N$, то $M^0 \subset N^0$.

18. Пусть M — произвольное, а N — замкнутое множество метрического пространства X . Проверить, что $(M \cup N)^0 = M^0 \cup N^0$.

19. Доказать, что для произвольного множества M метрического пространства справедливы включения: а) $(\bar{M})^0 \subset \bar{M}$; б) $M^0 \subset (M^0)^0$, но равенства справедливы не всегда.

20. Доказать, что замыкание $\bar{M}$ множества M совпадает с пересечением всех замкнутых множеств, содержащих M .

21. Проверить, что для произвольных множеств M и N в метрическом пространстве

$$\rho(M, N) = \rho(M, \bar{N}) = \rho(\bar{M}, N) = \rho(\bar{M}, \bar{N}).$$

22. Показать, что если $\emptyset \neq M \subset X$, то для любых $x, y \in (X, \rho)$

$$|\rho(x, M) - \rho(y, M)| \leq \rho(x, y).$$

23. Пусть $x_0(t)$ — фиксированная функция из $C[a; b]$. Доказать, что множество $\{x(t) \in C[a; b] : x(t) < x_0(t)\}$ открыто в $C[a; b]$.

24. Пусть k — фиксированная постоянная. Найти замыкание множества $\{x(t) \in C[a; b] : |x(t)| \leq k\}$.

25. Через M_k обозначим множество всех функций $x(t)$ из $C[a; b]$, удовлетворяющих условию Липшица с постоянной k :

$$|x(t) - x(t_1)| \leq k|t - t_1| \quad (\forall t, t_1 \in [a; b]).$$

Доказать, что M_k совпадает с замыканием множества всех таких дифференцируемых на $[a; b]$ функций, что $|x'(t)| \leq k$ ($t \in [a; b]$).

26. Доказать, что множество $M = \bigcup_k M_k$ всех функций, каждая из которых удовлетворяет условию Липшица при каком-либо k (см. задачу 25), не является замкнутым, и найти его замыкание.

27. Найти замыкание множества всех многочленов в пространстве $C[a; b]$.

28. Доказать, что множество $M \subset I_1$, состоящее из тех элементов $x = (\xi_n) \in I_1$, для которых $0 \leq \xi_n \leq \frac{1}{n}$, замкнуто.

29. Доказать, что любое открытое метрическое пространство может быть представлено в виде счетного объединения замкнутых множеств и что любое замкнутое множество может быть представлено в виде счетного пересечения открытых множеств.

30. Доказать полноту пространства c_α , элементами которого являются все те последовательности $x = (\xi_n)$, для которых существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \xi_n$ (здесь $\alpha = (\alpha_n)$ — фиксированная последовательность положительных чисел), с метрикой

$$\rho(x, y) = \sup_n (\alpha_n |\xi_n - \eta_n|).$$

31. Доказать полноту пространства m_α , элементами которого являются всевозможные последовательности $x = (\xi_n)$, для которых $\sup_n \alpha_n |\xi_n| < \infty$ ($\alpha = (\alpha_n)$ — фиксированная последовательность положительных чисел), с метрикой

$$\rho(x, y) = \sup_n (\alpha_n |\xi_n - \eta_n|).$$

32. Доказать, что последовательность функций $x_n(t) = t^n - t^{2n}$ не является сходящейся в $C[0; 1]$.

33. Проверить, что пространство $C_2[a; b]$ всех непрерывных на $[a; b]$ функций с метрикой $\rho(x, y) = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$ не является полным.

Указание. В случае $C_2[-1; 1]$ рассмотреть последовательность функций

$$x_n(t) = \begin{cases} -1, & -1 \leq t \leq -\frac{1}{n}, \\ nt, & -\frac{1}{n} \leq t \leq \frac{1}{n}, \\ 1, & \frac{1}{n} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

34. Доказать, что пространство $C_0(-\infty, +\infty)$ определенных и непрерывных на $\mathbb{R}$ функций, для которых $\lim_{|t| \rightarrow +\infty} x(t) = 0$, с метрикой $\rho(x, y) = \sup_{t \in \mathbb{R}} |x(t) - y(t)|$, является полным.

35. Введем на прямой $\mathbb{R}$ метрику по формуле $\rho(x, y) = \operatorname{arctg} |x - y|$. Является ли это пространство полным?

36. Пусть на $\mathbb{R}$ задана метрика $\rho(x, y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$. Докажите, что полученное метрическое пространство не является полным, и найдите его пополнение.

37. Доказать, что пространство всех многочленов, определенных на $[0; 1]$, с чебышевской метрикой

$$\rho(P, Q) = \max_{t \in [0; 1]} |P(t) - Q(t)|$$

не полно, и найти его пополнение.

38. Найти пополнение пространства $C_p[0; 1]$, состоящего из непрерывных на $[0; 1]$ функций, с метрикой

$$\rho(x, y) = \left(\int_0^1 |x(t) - y(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

39. Пусть f — изометрическое отображение метрического пространства X в полное метрическое пространство Y (т. е. $\rho_Y(f(x_1), f(x_2)) = \rho_X(x_1, x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in X$). Покажите, что множество $\overline{f(X)}$ с метрикой ρ_Y является пополнением пространства X .

40. Пусть $\mathbb{Q}$ — метрическое пространство всех рациональных чисел с метрикой $\rho(p, q) = |p - q|$. Доказать, что множество $M = \{p \in \mathbb{Q} : 2 < p^2 < 3\}$ замкнуто и ограничено, но не компактно в $\mathbb{Q}$.

41. Доказать, что параллелепипед $\left\{x = (\xi_n) \in l_2 : |\xi_n| \leq \frac{1}{n}\right\}$ относительно компактен в l_2 .

42. Пусть M — компактное множество в метрическом пространстве X и $x \in X$. Тогда существует такая точка $a \in M$, что $\rho(x, M) = \rho(x, a)$. Доказать это утверждение.

43. Доказать, что совокупность функций вида:

$$a) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^3} e^{-nx}; \quad б) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{x + n^2}, \text{ где } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ — произвольная}$$

последовательность такая, что $|a_n| < 1$ ($n = 1, 2, \dots$), образует компактное множество в пространстве $C[0; 1]$.

44. Доказать компактность в $C[a; b]$ множества всех тех функций, для которых $[f'(x)]^2 + f^2(x) < 1$ ($\forall x \in [a; b]$).

45. Пусть $y(t, s)$ — непрерывная функция, определенная на квадрате $[a; b] \times [a; b]$. Для каждого $s \in [a; b]$ положим $x_s(t) = y(t, s)$. Доказать, что множество функций $(x_s)_{s \in [a; b]}$ компактно в $C[a; b]$.

46. Пусть (x_α) — некоторое компактное семейство функций из $C[a; b]$, а $x_*(t) = \max_{\alpha} x_\alpha(t)$. Доказать, что $x_*(t)$ — непрерывная на $[a; b]$ функция.

47. Доказать, что каждое ограниченное множество функций, удовлетворяющих условию Липшица, компактно в $C[a; b]$.

48. Доказать, что множество функций, имеющих на $[a; b]$ n -ю производную, ограниченную числом k , компактно в $C[a; b]$.

Указание. Воспользоваться формулой Тейлора.

49. Проверить, что шар $\{x \in C[0; 2\pi] : |x(t)| \leq 1\}$ не является вполне ограниченным множеством в $C[0; 2\pi]$.

Указание. Рассмотреть последовательность функций $x_n(t) = \sin nt$ и показать, что $\rho(x_n, x_m) \geq 1$ при $n \neq m$.

50. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна и ограничена в полосе $\Pi = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, -\infty < y < +\infty\}$. Доказать, что множество M решений уравнения $y' = f(x, y)$ относительно компактно в $C[0; 1]$ тогда и только тогда, когда множество значений $y(0)$ (когда $y(x)$ пробегает M) ограничено.

51. Пусть компактная последовательность $(f_n(z))_{n \in \mathbb{N}}$ функций из пространства A_R сходится на некотором множестве E точек круга $|z| < R$, имеющем в этом круге, по крайней мере, одну предельную точку. Доказать, что эта же последовательность равномерно сходится внутри круга (теорема Витали).

52. Пусть $K_R = \{z : |z| < R\}$ — круг в плоскости z , а Γ — некоторая спрямляемая кривая в плоскости w . Предположим, что функция $F(z, w)$ аналитична по z в K_R для каждого $w \in \Gamma$, непрерывна по w на Γ при любом $z \in K_R$ и ограничена по модулю внутри области K_R равномерно относительно $w \in \Gamma$. Доказать, что при сделанных

предположениях функция $f(z) = \int_{\Gamma} F(z, w) dw$ является аналитической в K_R .

причем любая последовательность интегральных сумм

$$f(z) = \sum_{k=0}^n F(z, w_k^{(n)}) (w_{k+1}^{(n)} - w_k^{(n)}),$$

сходящаяся к интегралу для каждого $z \in K_R$, сходится к $f(z)$ равномерно внутри K_R .

53. Пусть M — некоторое компактное в себе множество в пространстве A_R , а отображение $L: M \rightarrow \mathbb{C}$ непрерывно. Доказать существование такой функции $f_0 \in M$, что для всех $f \in M$ $|L(f_0)| \geq |L(f)|$ (т. е. функционал L достигает на M своей верхней грани).

54. Доказать, что множество E тех последовательностей, в которых лишь конечное число отличных от нуля элементов, плотно в l_2 .

55. Доказать, что пространство $C_0(-\infty; +\infty)$ тех непрерывных на $\mathbb{R}$ функций, для которых $\lim_{|t| \rightarrow +\infty} x(t) = 0$, с метрикой $\rho(x, y) = \sup_{t \in \mathbb{R}} |x(t) - y(t)|$ сепарабельно.

56. Доказать сепарабельность пространства c_0 всех сходящихся к нулю последовательностей $x = (\xi_n)$ с метрикой $\rho(x, y) = \max_{k \geq 1} |\xi_k - \eta_k|$.

57. Покажите, что в принципе сжимающих отображений условие $\rho(Ax, Ay) \leq \alpha \rho(x, y)$ ($\alpha < 1$) нельзя заменить более слабым условием $\rho(Ax, Ay) < \rho(x, y)$.

58. Покажите, что непрерывная функция f , определенная на отрезке $[0; 1]$ и удовлетворяющая неравенствам $0 < f(x) < 1$ и $|f(x) - f(y)| < |x - y|$, имеет единственную неподвижную точку.

59. Проверить, что отображение $f(x) = \frac{x^2 + 2}{2x}$ является сжимающим на отрезке $[1; 2]$.

60. Отображение f переводит каждую точку x полупрямой $(1; +\infty)$ в $x + \frac{1}{x}$. Является ли оно сжимающим? Имеет ли оно неподвижную точку?

61. Пусть f — дифференцируемая на отрезке $[0; 1]$ функция, причем $0 \leq f(x) \leq 1$, $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$. Будет ли уравнение $f(x) - x = 0$ иметь решение?

62. Пусть $F(x, y)$ — функция, непрерывная вместе со своими частными производными первого порядка в окрестности точки $(0, 0)$ и такая, что $F(0, 0) = 0$, $F'_y(0, 0) \neq 0$. С помощью принципа неподвижной точки доказать, что при всех достаточно малых $|x|$ уравнение $F(x, y) = 0$ имеет единственное решение $y = y(x)$, тождественно удовлетворяющее этому уравнению и обращающееся в нуль при $x = 0$.

63. Доказать, что если $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируемая функция и $0 < c < f'(x) < d < +\infty$, то уравнение $f(x) = 0$ имеет единственное решение.

Указание. Рассмотреть отображение $A: x \rightarrow x - \frac{1}{d} f(x)$.

64. Пусть $f \in C[a; b]$. Показать, что уравнение $x + \frac{1}{2} \sin x + f(t) = 0$ имеет в пространстве $C[a; b]$ единственное решение $x = x(t)$.

65. а) Рассмотрим систему уравнений

$$\xi_i = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \xi_k + b_i \quad (i = 1, 2, \dots),$$

где $(b_1, b_2, \dots) \in m$. Если $\sup_i \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}| = c < +\infty$, то при $|\lambda|c < 1$ система имеет единственное решение в пространстве m ;

б) если $(b_1, b_2, \dots) \in l_2$ и $d = \sum_{i,k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 < +\infty$, то при $|\lambda|d < 1$ указанная система имеет единственное решение в l_2 . Доказать эти утверждения.

66. Пусть $k(x, t, z)$ — непрерывная функция своих аргументов при $a \leq x \leq b$, $a \leq t \leq b$ и $|z| \leq c$, причем в этой области $|k(x, t, z_1) - k(x, t, z_2)| \leq \mu |z_1 - z_2|$ ($\mu = \text{const}$) и $|k(x, t, z)| \leq d$ ($d = \text{const}$). Доказать, что при выполнении условий $|\lambda| d (b - a) < c$ и $|\lambda| \mu (b - a) < 1$ нелинейное интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b k(x, t, \varphi(t)) dt$$

имеет единственное решение $\varphi(t) \in C[a; b]$ такое, что $|\varphi(t)| \leq c$.

67. Начиная с какого приближения x_n точность приближения решения уравнения $3x - \cos x + \sin x + \arctg x = 0$ не превосходит 0,01?

Указание. Оценить величину $\frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \rho(x_0, Ax_0)$ для соответственно выбранного отображения A и найденного α , взяв $x_0 = 0$.

68. Пусть $A: x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \rightarrow y = (1, \alpha_1 \xi_1, \alpha_2 \xi_2, \dots)$ — отображение пространства m , где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ — фиксированная последовательность, для которой $\omega = \sup_k |\alpha_k| < +\infty$. Доказать, что A является сжимающим отображением тогда и только тогда, когда $\omega < 1$.

69. Используя принцип сжимающих отображений, найти в пространстве $C[0; 1]$ решения интегральных уравнений:

$$a) x(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 t s^2 x(s) ds + 1;$$

$$б) x(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{t-s} x(s) ds + 1.$$

Ответы. 6. Да. 7. а) Нет, ибо не выполняется аксиома тождества; б) Да. 8. Да, см. пример 7. 24. $\{x(t) \in C[a; b] : |x(t)| \leq k\}$. 26. $\bar{M} = C[a; b]$.

27. $C[a; b]$. 35. Нет. 36. Дополнение изометрично пространству $X = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ с обычной евклидовой метрикой и получается прибавлением к $\mathbb{R}$ точек $-\infty$

и $+\infty$. При этом нужно положить $\rho(+\infty, x) = \frac{\pi}{2} - \arctg x$, $\rho(-\infty, x) = \arctg x + \frac{\pi}{2}$ и $\rho(-\infty, +\infty) = \pi$. 37. $C[0; 1]$. 38. $L_p[0; 1]$. 60. Нет; нет.

61. Да. 67. Начиная с x_{n_0} , где $n_0 = \left\lceil \frac{2}{\lg 6 - \lg 5} \right\rceil + 1$. 69. а) $x(t) = \frac{4}{21} t + 1$;

б) $x(t) = e^t - e^{t-1} + 1$.

§ 2. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Анализируя многие фундаментальные понятия теории метрических пространств (например, понятия точки прикосновения и предельной точки, сходимости, непрерывности и др.), можно заметить, что хотя они и исходят из понятия метрики, но могут быть описаны лишь в терминах открытых множеств (так, не всякая сходимость функциональных последовательностей (например, поточечная) может быть охарактеризована с помощью метрики (см. пример 10)). Это обстоятельство послужило основой идеи считать исходным не метрику, а само семейство открытых множеств, что привело в конечном итоге к общему понятию топологического пространства (введенному впервые в 1914 г. немецким математиком Ф. Хаусдорфом).

1. **Определение** топологии и топологического пространства. Пусть X — некоторое множество, а $\tau = \{U_i, i \in I\}$ — семейство его подмножеств (множество I индексов может иметь произвольную мощность). Говорят, что семейство τ определяет

в множестве X топологию или топологическую структуру, если оно обладает следующими свойствами:

- 1) все множество X и пустое множество $\emptyset$ принадлежат семейству τ ;
- 2) объединение любого семейства множеств из τ также принадлежит τ ;
- 3) пересечение конечного числа множеств из τ принадлежит этому же множеству.

Эти три условия принято называть *аксиомами топологии*.

Множество X , рассматриваемое вместе с заданной в нем топологией τ , называется *топологическим пространством* и обозначается иногда в виде пары (X, τ) (с той целью, чтобы указать, что в X задана именно топология τ). При этом элементы множества X называются точками, а подмножества U_i из семейства τ — *открытыми множествами* топологического пространства X (или (X, τ)). Само множество X называется *носителем топологии* τ .

Множества, дополняющие в X к открытым, называются *замкнутыми*. Ясно, что X и $\emptyset$ замкнуты. Кроме того, пересечение любого числа и объединение конечного числа замкнутых множеств также являются замкнутыми.

Окрестностью точки x топологического пространства X называется всякое открытое множество G , ее содержащее. Точка $x \in X$ называется *точкой прикосновения* (соответственно *предельной точкой*) множества $M \subset X$, если каждая окрестность точки x содержит хотя бы одну (соответственно бесконечно много) точку из M . Совокупность $\bar{M}$ всех точек прикосновения множества M называется его *замыканием*. Оно является наименьшим замкнутым множеством, содержащим M . Кроме того, подмножество топологического пространства открыто тогда и только тогда, когда оно служит окрестностью каждой своей точки.

Точка $x \in M$ называется *изолированной точкой* этого множества, если существует такая ее окрестность G , что $G \cap M = \{x\}$.

2. Простейшие примеры топологических пространств.

А. Каждое метрическое пространство является и топологическим пространством, ибо его открытые множества (см. гл. 2, § 1) удовлетворяют аксиомам топологии.

Б. Пусть X — произвольное множество. Будем считать открытыми в нем все его подмножества. Поскольку аксиомы 1) — 3) очевидно выполняются, то X — топологическое пространство, в котором все множества одновременно открыты и замкнуты. Такой тривиальной топологией обладает, например, метрическое пространство

$$X \text{ с метрикой } \rho(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$$

В. Пусть в произвольном множестве топологию задает семейство τ , состоящее только из X и $\emptyset$. Это — *пространство слипшихся точек*, так как замыкание каждого непустого множества совпадает со всем X .

Заметим, что та топология, в которой открыты все множества (см. пример Б), называется иногда *максимальной*, а та, в которой открыты только $\emptyset$ и X (см. пример В), — *минимальной*.

Г. Пусть $X = \{a, b\}$ — некоторое двухэлементное множество, а τ состоит из $\emptyset, X$ и $\{a\}$. Получающееся топологическое пространство называется *связным двоеточием*.

3. Сравнение топологий. Пусть X — некоторое множество, а τ_1 и τ_2 — две различные топологии, заданные в X (тем самым определены два топологических пространства: (X, τ_1) и (X, τ_2)). Говорят, что топология τ_2 сильнее топологии τ_1 (или топология τ_2 мажорирует τ_1), если $\tau_1 \subset \tau_2$, т. е. если всякое подмножество множества X , открытое в топологии τ_1 , является открытым и в топологии τ_2 . При этом пишут $\tau_1 \leq \tau_2$, а про топологию τ_1 говорят, что она слабее топологии τ_2 .

Топология, о которой шла речь в примере Б, является наиболее сильной из всех возможных (ее называют *дискретной*), а топология, о которой говорится в примере В, слабее любой другой задаваемой в X топологии (ее называют *тривиальной*).

Пересечение произвольного множества топологий $\tau = \bigcap \tau_\alpha$ в X есть топология в X . Она слабее любой из топологий τ_α . Отсюда следует, что для произвольной системы подмножеств множества X существует минимальная топология в X , ее содержащая.

4. Определение системы окрестностей. База. Итак, задать в пространстве X топологию означает задать систему открытых множеств. Однако оказывается, что достаточно указать лишь некоторую совокупность открытых множеств.

Семейство β открытых множеств пространства (X, τ) называется *базой топологии* τ (или базой топологического пространства X), если каждое открытое множество в X является объединением множеств из β .

Теорема 1. Для того чтобы совокупность β открытых множеств топологии τ была базой этой топологии, необходимо и достаточно, чтобы для каждой точки $x \in X$ и любого содержащего x открытого множества U существовало такое множество $V \in \beta$, что $x \in V \subset U$.

Пусть x_0 — фиксированная точка топологического пространства X . Система β_{x_0} открытых окрестностей точки x_0 называется *определяющей (фундаментальной) системой окрестностей* в точке x_0 (*локальной базой*), если каждая окрестность этой точки содержит некоторую ее окрестность из системы β_{x_0} .

5. Аксиомы счетности. Одним из важнейших классов топологических пространств является класс пространств со счетной базой, т. е. пространства, в которых существует хотя бы одна база, состоящая не более чем из счетного числа множеств. Пространства со счетной базой называют также *пространствами со второй аксиомой счетности*. В таких пространствах X всегда имеется счетное всюду плотное множество M (т. е. $\bar{M} = X$). Однако существуют топологические пространства со счетным всюду плотным множеством, но без счетной базы.

Если точка x топологического пространства имеет счетную определяющую систему окрестностей, то говорят, что в этой точке выполнена первая аксиома счетности. Пространство X называется *пространством с первой аксиомой счетности*, если каждая его точка имеет счетную определяющую систему окрестностей. Например, все метрические пространства удовлетворяют первой аксиоме счетности.

Если X удовлетворяет второй аксиоме счетности, то оно удовлетворяет и первой. Обратное утверждение справедливо не всегда.

Система $S = \{M_i, i \in I\}$ множеств $M_i \subset X$ называется *покрытием пространства* X , если $\bigcup_{i \in I} M_i = X$. Покрытие S называется *открытым (замкнутым)*, если оно состоит только из открытых (замкнутых) множеств.

Теорема 2. Если пространство X обладает счетной базой (т. е. X — пространство со второй аксиомой счетности), то из любого его открытого покрытия можно выделить не более чем счетное подпокрытие.

Напомним, что те топологические пространства, для которых из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие, называются *бикомпактными*.

6. Сходимость последовательности точек в топологическом пространстве. Понятие сходящейся последовательности точек метрического пространства переносится и на топологические пространства; последовательность $(x_n) \subset X$ называется *сходящейся к точке* $x_0 \in X$, если каждая окрестность U точки x_0 содержит все точки этой последовательности, начиная с некоторой.

Однако здесь по сравнению с метрическими пространствами имеются и некоторые существенные различия: так, из того, что x есть точка прикосновения для множества M в топологическом пространстве, не вытекает существование в M последовательности точек, сходящейся к x . В общих топологических пространствах одна и та же последовательность может иметь сколько угодно различных пределов. Заметим, однако, что в пространствах с первой аксиомой счетности каждая точка прикосновения произвольного множества может быть представлена как предел некоторой последовательности точек этого множества (см. пример 4).

Точка x_0 топологического пространства X называется *внутренней точкой* множества $M \subset X$, если x_0 обладает окрестностью, целиком содержащейся в M . Совокупность всех внутренних точек множества M называется его *внутренностью* и обозначается через $\text{Int } M$ или M^0 .

Множество M открыто тогда и только тогда, когда $\text{Int } M = M$.

Точка x_0 пространства X называется *границей* множества $M \subset X$, если любая ее окрестность содержит точки как из M , так и из его дополнения. Совокупность всех граничных точек множества M образует его границу ∂M .

Теорема 3. Множество M из X открыто тогда и только тогда, когда оно не пересекается со своей границей, и замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит всю свою границу.

7. Аксиомы отделимости. Хотя, как уже указывалось, метрические пространства являются топологическими (и поэтому многие основные понятия теории метри-

ческих пространств переносятся на любые топологические пространства), все же в топологических пространствах иногда наблюдаются ситуации, существенно отличающие их от метрических пространств.

Однако если к аксиомам 1) — 3) добавить еще некоторые, то эти два типа пространства можно сделать более близкими по своим свойствам. К таким требованиям относятся упомянутые аксиомы счетности, а также аксиомы отделимости.

Первая аксиома отделимости: для любых двух различных точек x и y пространства X существует окрестность U_x точки x , не содержащая y , и окрестность U_y точки y , не содержащая x .

Пространства, удовлетворяющие этой аксиоме, называются T_1 -пространствами.

Вторая (хаусдорфова) аксиома отделимости: любые две различные точки x и y топологического пространства имеют непересекающиеся окрестности U_x и U_y .

Пространства, удовлетворяющие этой аксиоме, называются T_2 -пространствами или хаусдорфовыми пространствами.

Ясно, что если выполнена аксиома T_2 , то аксиома T_1 выполнена, т. е. класс топологических пространств, удовлетворяющих аксиоме T_2 , более узкий, чем класс топологических пространств, удовлетворяющих аксиоме T_1 . Примером пространства, удовлетворяющего аксиоме T_1 и не удовлетворяющего аксиоме T_2 , является следующее топологическое пространство: множество X состоит из точек отрезка $[0; 1]$, а открытыми считаются следующие множества: $X, \emptyset, U_{\alpha_n} = [0; 1] \setminus \{\alpha_n\}$, где $\{\alpha_n\}$ — произвольное, но не более чем счетное множество точек отрезка $[0; 1]$.

T_1 -пространство называется *нормальным*, если в нем всякие два непересекающихся замкнутых множества имеют непересекающиеся окрестности. Под *окрестностью* множества M в топологическом пространстве понимают всякое открытое множество, содержащее M . Все метрические пространства нормальны.

8. Различные способы задания топологии в пространстве. Метризуемость. Имеется несколько способов задания топологии в том или ином пространстве.

1) Самый естественный способ задания топологии состоит в указании тех множеств, которые считаются открытыми. Равносильный ему способ — указание набора замкнутых множеств.

2) Наиболее часто встречающийся способ задания топологии в пространстве состоит в указании в нем некоторой базы (например, в метрических пространствах указывается база из открытых шаров).

Теорема 4 (о задании топологии с помощью базы). Пусть в произвольном множестве X задана некоторая система β подмножеств из X , обладающая следующими свойствами:

- а) объединение всех множеств, входящих в β , дает все множество X ;
- б) для любых двух множеств U, V из β и для каждой точки $x \in U \cap V$ существует W из β такое, что $x \in W \subset U \cap V$. Тогда в множестве X существует единственная топология τ , одной из баз которой служит система β .

3) Еще один из способов задания топологии — введение понятия сходимости (в случае пространств с первой аксиомой счетности).

Теорема 5 (о задании топологии с помощью окрестностей). Пусть X — произвольное множество и каждому элементу $x \in X$ каким-нибудь образом сопоставлена система подмножеств S_x из X так, что выполняются следующие свойства:

- а) точка x принадлежит любому подмножеству из S_x ;
- б) если $U \in S_x$ и $U \subset V$, то $V \in S_x$;
- в) пересечение конечного числа подмножеств из S_x принадлежит S_x ;
- г) для каждого $U \in S_x$ существует V из S_x такое, что $V \subset U$ и $V \in S_y$ для всех $y \in V$.

Тогда в множестве X существует единственная топология τ такая, что система S_x всех окрестностей в этой топологии совпадает с системой подмножеств S_x при всех $x \in X$.

4) Один из важнейших способов задания топологии — задание метрики.

Топологическое пространство X называется *метризуемым*, если его топология может быть задана с помощью какой-нибудь метрики. Необходимым условием метризуемости являются первая аксиома счетности и нормальность пространства.

Теорема 6 (П. С. Урысона). Для того чтобы топологическое пространство со счетной базой было метризуемым, необходимо и достаточно, чтобы оно было нормальным.

Отметим, что топологию можно задавать также и другими способами (см. пример 2).

9. Линейные топологические пространства. Пусть X — вещественное (или комплексное) линейное пространство и τ — топология в нем. Говорим, что топология τ согласуется с линейной структурой в X , если в этой топологии операции сложения элементов и произведения элементов на скаляры являются непрерывными по совокупности аргументов, т. е. выполняются условия:

а) для произвольной окрестности V_{x+y} элемента $x + y$ существуют такие окрестности U_x и U_y (соответственно векторов x и y), что

$$U_x + U_y = \{z \in X : z = u_1 + u_2, u_1 \in U_x, u_2 \in U_y\} \subset V_{x+y};$$

б) для любой окрестности $V_{\alpha x}$ элемента αx существуют число $\varepsilon > 0$ и окрестность U_x вектора x такие, что для всех $\lambda: |\alpha - \lambda| < \varepsilon$

$$\lambda U_x = \{z \in X : z = \lambda u, u \in U_x\} \subset V_{\alpha x}.$$

Линейное пространство с топологией, согласованной с его линейной структурой, называется *линейным топологическим пространством* (или *топологическим векторным пространством*).

Однако (см. п. 8) топология в X может быть задана разными способами. Очень часто встречаются пространства, топология в которых определяется с помощью полунорм (преднорм).

Вещественная функция $p(x)$, заданная на X , называется *полунормой* (или *преднормой*), если для всех векторов $x, y \in X$ и всех скаляров $\alpha \in K$ выполняются условия:

1) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ (полуаддитивность);

2) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$.

Если вместе с условием 1) для функции $p(x)$ выполняется условие 2'): $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ ($\forall \alpha \geq 0$), то такая функция называется *калибровочной*.

Полунорма, для которой $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, называется *нормой* пространства X .

Множество M точек линейного пространства X называется *симметричным*, если $-M = M$; *уравновешенным*, если $\lambda x \in M$ для всех $x \in M$ и тех λ , для которых $|\lambda| \leq 1$; *поглощающим*, если для произвольной точки $x \in X$ существует такое $\alpha > 0$, что $x \in \lambda M$ при $|\lambda| \geq \alpha$; *выпуклым*, если $\lambda x + (1 - \lambda)y \in M$ для любых $x, y \in M$ и произвольного $\lambda \in [0; 1]$; *абсолютно выпуклым*, если для любой пары $x, y \in M$ и любых λ, μ таких, что $|\lambda| + |\mu| \leq 1$, имеем $\lambda x + \mu y \in M$.

Всякое уравновешенное множество содержит нуль и является симметричным. Кроме того, если $p(x)$ — некоторая полунорма в X , а c — положительное число, то множество $M = \{x \in X : p(x) \leq c\}$ — выпуклое, уравновешенное и поглощающее.

Пусть I — некоторое множество индексов и $\{p_\nu(x)\}_{\nu \in I}$ — семейство полунорм.

Если $p_{\nu_1}(x), p_{\nu_2}(x), \dots, p_{\nu_n}(x)$ — произвольный конечный набор полунорм из этого семейства, а $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ — произвольные положительные числа, то множество $U = \{x \in X : p_{\nu_i}(x) \leq \varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ также является выпуклым, уравновешенным

и поглощающим. Эти множества образуют базис окрестностей нуля однозначно определяемой в X топологии τ , согласованной с его линейной структурой. Тем самым, X становится линейным топологическим пространством. В этой топологии τ множество G открыто тогда и только тогда, когда для каждой точки $x_0 \in G$ существует такое множество U указанного вида, что $x_0 + U \subset G$.

Линейное топологическое пространство X называется *локально выпуклым*, если каждая окрестность нуля в нем содержит в себе некоторую выпуклую окрестность нуля. Известно, что всякое линейное топологическое пространство X , в котором топология вводится с помощью семейства полунорм $p_\nu(x)$, локально выпукло, причем каждая из полунорм $p_\nu(x)$ непрерывна в нем. И наоборот, топология произвольного локально выпуклого пространства может быть определена некоторым семейством полунорм. Это семейство можно образовать с помощью *функционалов Минковского* $p_M(x)$ для выпуклых уравновешенных открытых множеств M пространства X , опре-

деляемых соотношениями:

$$\rho_M(x) = \inf \{ \alpha : \alpha > 0, \alpha^{-1}x \in M \} \quad (x \in X).$$

То, что функционал $\rho_M(x)$ является полунормой, проверяется непосредственно.

Локально выпуклое пространство X , топология которого задается с помощью счетной совокупности согласованных между собой полунорм $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x), \dots$ (т. е. таких, что если последовательность $(x_n) \subset X$ фундаментальная по полунормам $p_s(x)$ и $p_q(x)$, по одной из них сходится к нулю, то по второй она также сходится к нулю), называется *счетно-нормированным*. Заметим, что систему $(p_n(x))$ всегда можно заменить неубывающей системой $(q_n(x))$ полунорм, порождающей ту же топологию с базой окрестностей нуля $U_{n,\varepsilon} = \{x \in X : q_n(x) < \varepsilon\}$. Каждое счетно-нормированное пространство метризуемо, а метрика в нем может быть задана соотношением

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{p_n(x-y)}{1 + p_n(x-y)}.$$

Классическим примером таких пространств является пространство A_R всех однозначных и аналитических в круге $|z| < R$ ($0 < R \leq +\infty$) функций с топологией равномерной сходимости на любом замкнутом ограниченном подмножестве точек этого круга и совокупностью полунорм $p_n(x) = \max_{|z| \leq r_n} |x(z)|$, где $x(z) \in A_R$, а (r_n) —

некоторая монотонно возрастающая к R последовательность положительных чисел (см. пример 25 гл. 2, § 3).

Топологическое векторное пространство X называется *нормируемым*, если его топология может быть задана одной нормой.

Теорема 7 (А. Н. Колмогорова). Для того чтобы линейное топологическое пространство над полем $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) было нормируемым, необходимо и достаточно, чтобы оно было хаусдорфовым и обладало выпуклой ограниченной окрестностью нуля.

Напомним, что множество M называется ограниченным в линейном топологическом пространстве X , если для любой окрестности нуля V в X существует такое λ , что $M \subset \lambda V$.

Из теоремы 7 следует, что если линейное топологическое пространство X метризуемо, но не нормируемо, то шары $B[0, \varepsilon] = \{x \in X : \rho(0, x) \leq \varepsilon\}$ не ограничены в X .

Более полно теория топологических пространств изложена в [1; 2; 4; 16; 20; 21; 29; 37].

Примеры решения задач

1. Доказать, что множество M топологического пространства X замкнуто тогда и только тогда, когда $M = \bar{M}$.

Решение. Пусть M замкнуто, т. е. $G = X \setminus M$ открыто. Докажем, что $\bar{M} \subset M$. Действительно, поскольку множество G открыто, то оно служит окрестностью каждой своей точки. Кроме того, $G \cap M = \emptyset$. Отсюда следует, что никакая точка $x \in G$ не может быть точкой прикосновения для M и, стало быть, $\bar{M} \subset M$. Ясно также, что $M \subset \bar{M}$ и поэтому $M = \bar{M}$. Необходимость условий утверждения доказана.

Чтобы убедиться в их достаточности, предположим, что $\bar{M} = M$, и докажем открытость $G = X \setminus M$ (т. е. замкнутость M). Пусть $x_0 \in G$ и, следовательно, $x_0 \notin \bar{M}$. Тогда, по определению точки прикосновения, найдется открытая окрестность U точки x_0 такая, что $U \cap M = \emptyset$. Значит, $U \subset X \setminus M = G$, т. е. G служит окрестностью каждой своей точки. Достаточность условий утверждения установлена.

2. Пусть $\mathcal{A}$ — семейство всех подмножеств множества X и $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ — отображение $\mathcal{A}$ в $\mathcal{A}$, которое имеет свойства:

- 1) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$; 2) $f(A) \supset A$;
3) $f(f(A)) = f(A)$; 4) $f(\emptyset) = \emptyset$.

Доказать, что множество, состоящее из дополнений элементов множества $\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{A} : f(A) = A\}$, образует в X топологию τ , причем в этой топологии множество $f(A)$ является замыканием A .

Решение. Отметим вначале, что множества $\emptyset$ и X принадлежат $\mathcal{F}$ в силу свойств 4) и 2). Покажем, что $\mathcal{F}$ содержит и объединение конечного числа своих элементов. Действительно, если $A, B \in \mathcal{F}$, то (см. условие 1))

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) = A \cup B.$$

Из условия 1) вытекает также, что если $A \subset B$, то $f(A) \subseteq f(B)$, ибо

$$f(B) = f(B \cup A) = f(B) \cup f(A) \supseteq f(A).$$

Поэтому для любого набора $\{A_\alpha\}$ множеств из $\mathcal{F}$

$$f\left(\bigcap_{\alpha} A_{\alpha}\right) \subset f(A_{\alpha}) = A_{\alpha}$$

и, согласно свойству 2,

$$\bigcap_{\alpha} A_{\alpha} \subset f\left(\bigcap_{\alpha} A_{\alpha}\right) \subset A_{\alpha} \subset \bigcap_{\alpha} A_{\alpha},$$

т. е. $\bigcap_{\alpha} A_{\alpha} = f\left(\bigcap_{\alpha} A_{\alpha}\right)$. Следовательно, семейство $\mathcal{F}$ обладает теми свойствами, что и семейство всех замкнутых множеств в произвольном топологическом пространстве, а совокупность дополнений элементов семейства $\mathcal{F}$ порождает в X некоторую топологию τ .

Остается доказать, что в этой топологии $\bar{A} = f(A) (\forall A \subset X)$. Если $A \in \mathcal{F}$, то искомое равенство следует из определения семейства $\mathcal{F}$ и топологии τ . Если же $A \notin \mathcal{F}$, то рассмотрим произвольное замкнутое множество B (т. е. $B = \bar{B} = f(B)$), содержащее A . Тогда $A \subset f(A) \subset \subset f(B) = B$ (ибо $A \subset B$), где $f(A) \in \mathcal{F}$ (ибо согласно свойству 3) $f(f(A)) = f(A)$). Значит, $f(A)$ является наименьшим замкнутым множеством в (X, τ) , содержащим A , т. е. $\bar{A} = f(A)$.

3. Доказать, что метрическое пространство X имеет счетную базу тогда и только тогда, когда в нем существует счетное всюду плотное множество.

Решение. Действительно, пусть $\{G_n\}$ — счетная база в X . Выберем в каждом из G_n по одной точке x_n и рассмотрим счетное множество $M = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Оно всюду плотно в X , ибо в противном случае непустое открытое множество $G = X \setminus \bar{M}$ не содержало бы ни одной точки из M , что невозможно, так как G есть сумма некоторых множеств из системы $\{G_n\}$, а $x_n \in G_n$.

Однако, если $M = \{x_n\}$ — счетное всюду плотное множество в X , то открытые шары $B\left(x_n, \frac{1}{m}\right) (n, m \in \mathbb{N})$ образуют в X счетную базу.

Теорема доказана.

4. Доказать, что в топологическом пространстве X с первой аксиомой счетности x является точкой прикосновения множества $M \subset X$ тогда и только тогда, когда имеется последовательность точек (x_n) множества M , сходящаяся к x .

Решение. В множестве M нужно найти такую последовательность (x_n) , которая сходится к точке прикосновения x . Рассмотрим с этой целью некоторую определяющую систему (U_k) окрестностей точки x . Заменяя, если нужно, U_k на $U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_k$, считаем (без ограничения общности), что $U_1 \supset U_2 \supset \dots \supset U_n \supset \dots$. Поскольку x — точка прикосновения множества M , то для каждого k можно найти точку $x_k \in M \cap U_k$. Докажем, что так построенная последовательность (x_n) сходится к x .

Пусть U — произвольная окрестность точки x . Тогда существует k_0 такое, что $U_{k_0} \subset U$, и поэтому $U_k \subset U$ ($k \geq k_0$). Следовательно, точки x_k при $k \geq k_0$ принадлежат окрестности U .

5. Множество M топологического пространства X называется G_δ -множеством, если оно является пересечением счетного числа открытых множеств пространства X , а множество, дополнительное к нему, — F_σ -множеством. Доказать, что в метрическом пространстве каждое замкнутое множество является G_δ -множеством, а каждое открытое — F_σ -множеством.

Решение. Покажем, что всякое замкнутое множество F является пересечением множеств $U_n = U\left(F, \frac{1}{n}\right)$, $n = 1, 2, \dots$, где $U\left(F, \frac{1}{n}\right) = \left\{x \in X : \rho(x, F) < \frac{1}{n}\right\}$ (такие множества называются сферическими окрестностями множества F).

Поскольку $F \subset U_n$ ($\forall n$), то $F \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, поэтому остается получить обратное включение. Итак, пусть $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$. Тогда при любом n $\rho(x, F) < \frac{1}{n}$ и, следовательно, $\rho(x, F) = 0$. Значит, x является точкой прикосновения F и, в силу замкнутости F , $x \in F$. Утверждение доказано.

6. Пусть $X = \mathbb{R}^2$, а топология τ в нем задается множествами $X, \emptyset$, открытыми (в евклидовой метрике) кругами $B(0, r)$ с центром в точке $0 = (0, 0)$, а также всеми множествами, которые могут быть получены из них путем конечного пересечения и любого объединения. Будет ли (X, τ) T_1 -пространством?

Решение. Сперва заметим, что конечное пересечение и любое объединение открытых кругов $B(0, r)$ — это снова некоторый круг $B(0, R)$ или же все множество X . Поэтому топология полностью определяется лишь множествами $X, \emptyset$ и $B(0, r)$ ($r \in \mathbb{R}^+$).

Поскольку каждая окрестность точки (x, y) в (X, τ) содержит и точки $(-x, y)$, $(x, -y)$ и $(-x, -y)$, то это пространство не является T_1 -пространством.

7. Доказать, что всякое метрическое пространство R нормально.

Решение. Пусть X и Y — два непересекающихся замкнутых мно-

жества в R . Тогда каждая точка $x \in X$ имеет окрестность U_x , непересекающуюся с Y , и, следовательно, она находится на положительном расстоянии ρ_x от Y . Аналогично расстояние каждой точки $y \in Y$ от X есть некоторая положительная величина ρ_y .

Рассмотрим открытые множества $U = \bigcup_{x \in X} B\left(x, \frac{\rho_x}{2}\right)$ и $V = \bigcup_{y \in Y} B\left(y, \frac{\rho_y}{2}\right)$, содержащие X и Y соответственно, и покажем, что $U \cap V = \emptyset$.

Пусть это не так и $z \in U \cap V$. Тогда в X существует такая точка x_0 , что $\rho(x_0, z) < \frac{\rho_{x_0}}{2}$, а в Y — такая точка y_0 , что $\rho(y_0, z) < \frac{\rho_{y_0}}{2}$. Считая для определенности, что $\rho_{x_0} \leq \rho_{y_0}$, получаем

$$\rho(x_0, y_0) \leq \rho(x_0, z) + \rho(z, y_0) < \frac{\rho_{x_0}}{2} + \frac{\rho_{y_0}}{2} \leq \rho_{y_0}.$$

Отсюда $x_0 \in B(y_0, \rho_{y_0})$, что противоречит определению величины ρ_{y_0} .

8. Пусть X — произвольное бесконечное множество, а τ состоит из $\emptyset$ и всевозможных подмножеств U таких, что $X \setminus U$ — конечно. Доказать, что в пространстве (X, τ) каждая последовательность, содержащая бесконечное число различных точек, сходится к любой точке пространства X .

Решение. Пусть (x_n) — одна из указанных последовательностей, а x — произвольная точка из X . Возьмем произвольную ее окрестность U . Так как множество U получается из X выбрасыванием не более конечного множества его точек, то ясно, что все элементы x_n , начиная с некоторого номера, обязательно попадают в U и, тем самым, последовательность (x_n) сходится к x . Рассмотренная топология носит название *топологии Зарисского*.

9. Пусть $X = (0; 1]$, а топология τ в нем определяется множествами X , $\emptyset$, всевозможными интервалами $(\alpha; \beta)$, где $\alpha, \beta \in (0; 1)$, и любыми их объединениями. Найти предел последовательности $x_n = \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$).

Решение. Нетрудно видеть, что ни одна точка $x_0, x_0 \in (0; 1)$, не может быть пределом указанной последовательности, ибо любая ее окрестность вида $(\alpha; \beta)$, $\alpha, \beta \in (0; 1)$ содержит конечное число элементов x_n . Рассмотрим точку $x_0 = 1$. Поскольку любое объединение интервалов $(\alpha; \beta)$ эту точку не содержит, то в пространстве (X, τ) единственной ее окрестностью является само множество X (содержащее все точки последовательности). Следовательно, единственным пределом последовательности $x_n = \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$) в пространстве (X, τ) является точка $x_0 = 1$.

10. Пусть $F[0; 1]$ — множество всех функций, определенных на отрезке $[0; 1]$ с топологией поточечной сходимости. Показать, что оно не метризуемо.

Решение. Предположим противное, т. е. что в $F[0; 1]$ можно ввести метрику так, что сходимость последовательности функций, определяемая этой метрикой, есть поточечная. Пусть M — множество всех непрерывных функций полученного метрического пространства. Тогда, с одной стороны, по свойствам замыкания множеств в метрическом

пространстве, $\bar{M} = \bar{M}$. С другой стороны, $\bar{M} \neq \bar{M}$, так как $\bar{M}$ есть множество всех непрерывных на $[0; 1]$ функций и их пределов в смысле поточечной сходимости, а $\bar{M}$ — множество функций из $\bar{M}$ и их пределов (в том же смысле). Иными словами, если исходить из известной классификации Бэра (см., например, гл. 15 из [23]), то $\bar{M}$ есть множество функций первого класса Бэра, а $\bar{M}$ — множество функций второго класса Бэра. Искомое утверждение получаем из того, что упомянутые классы Бэра не совпадают (например, функция Дирихле

$$x(t) = \begin{cases} 1, & t \text{ — рациональное,} \\ 0, & t \text{ — иррациональное} \end{cases}$$

принадлежит второму классу и не принадлежит первому).

11. Доказать, что множество M является абсолютно выпуклым тогда и только тогда, когда оно одновременно выпукло и уравновешенно.

Решение. Поскольку необходимость условий сформулированного утверждения очевидна, то остановимся на доказательстве их достаточности. Пусть M выпукло и уравновешенно, $x, y \in M$ и $|\lambda| + |\mu| \leq 1$. Если $\lambda = 0$ (аналогично рассматривается случай $\mu = 0$), то $|\mu| \leq 1$ и $\mu y \in M$, так как M уравновешенно. Если же $\lambda \neq 0$ и $\mu \neq 0$, то из уравновешенности M следует, что $\frac{\lambda}{|\lambda|} x \in M$ и $\frac{\mu}{|\mu|} y \in M$. Далее, из соотношения $\frac{|\lambda|}{|\lambda| + |\mu|} + \frac{|\mu|}{|\lambda| + |\mu|} = 1$ и выпуклости M имеем

$$\frac{|\lambda|}{|\lambda| + |\mu|} \left(\frac{\lambda}{|\lambda|} x \right) + \frac{|\mu|}{|\lambda| + |\mu|} \left(\frac{\mu}{|\mu|} y \right) = \frac{\lambda x + \mu y}{|\lambda| + |\mu|} \in M.$$

Поскольку $|\lambda| + |\mu| \leq 1$ и M уравновешенно, то $\lambda x + \mu y \in M$, что и требовалось доказать.

12. Пусть X — линейное топологическое пространство, β_0 — базис окрестностей точки $x = 0$ и $U \in \beta_0$. Доказать, что:

1) U — поглощающее множество;

2) $\exists V \in \beta_0 : V + V \subset U$;

3) существует такая уравновешенная окрестность W , что $W \subset U$.

Решение. 1) Пусть x_0 — произвольный фиксированный элемент пространства X . Так как функция $g(\lambda, x_0) = \lambda x_0$ непрерывна по λ при $\lambda = 0$, то для окрестности нуля $U \in \beta_0$ существует такое $\varepsilon > 0$, что $\lambda x_0 \in U$ при всех $\lambda : |\lambda| < \varepsilon$.

Следовательно, при $\lambda = \frac{1}{\mu}$, где $|\mu| > \frac{1}{\varepsilon}$, $\lambda x_0 = \frac{1}{\mu} x_0 \in U$ или $x_0 \in \mu U$ и U — поглощающее множество.

2) Поскольку $\varphi(x, y) = x + y$ — непрерывная функция в точке $(0, 0)$, то и для $U \in \beta_0$ существуют такие $V_1, V_2 \in \beta_0$, что $x + y \in U$ ($\forall x \in V_1, \forall y \in V_2$), т. е. $V_1 + V_2 \subset U$. Но $V_1 \cap V_2$ — также окрестность и поэтому $\exists V \in \beta_0 : V \subset V_1 \cap V_2$. Следовательно, $V + V \subset U$.

3) Воспользуемся непрерывностью в точке $(0, 0)$ функции $h(\lambda, x) = \lambda x$. Тогда для $U \in \beta_0$ существуют $V \in \beta_0$ и $\varepsilon > 0$ такие, что $\lambda x \in U$

$(\forall x \in V, \forall \lambda : |\lambda| < \varepsilon)$. Поэтому $\frac{\varepsilon}{\mu} x \in U$ ($\forall x \in V$ и $\forall \mu : |\mu| \geq 1$), ибо $\left| \frac{\varepsilon}{\mu} \right| \leq \varepsilon$, и $\varepsilon V \subset \mu U$ ($\forall \mu : |\mu| \geq 1$).

Пусть теперь $W = \bigcap_{|\mu| \geq 1} \mu U$. Поскольку V — окрестность и $\varepsilon V \subset W$, то W — также окрестность. Докажем ее уравновешенность. Если $x \in W$, то $\forall \lambda : 0 < |\lambda| \leq 1$ и $\forall \mu : |\mu| \geq 1$ имеем $\left| \frac{\lambda}{\mu} \right| \leq 1$ и в силу того что $W = \bigcap_{|\mu| \geq 1} \mu U$, $x \in \frac{\mu}{\lambda} U$ или $\frac{\lambda}{\mu} x \in U$ и $\lambda x \in \bigcap_{|\mu| \geq 1} \mu U = W$. Утверждение доказано.

Заметим, что из доказанного утверждения следует, что в каждом линейном топологическом пространстве существует базис из уравновешенных окрестностей.

13. Проверить, что в топологическом векторном пространстве замыкание абсолютно выпуклого множества также абсолютно выпукло.

Решение. Пусть M — абсолютно выпуклое множество, $a \in \bar{M}$, $b \in \bar{M}$, $|\lambda| + |\mu| \leq 1$ и U — некоторая окрестность нуля. Найдем сперва (см. пример 12) уравновешенную окрестность W такую, что $W + W \subset U$. Поскольку $a \in \bar{M}$, то $(a + W) \cap M \neq \emptyset$. Пусть $x \in (a + W) \cap M$. Аналогично найдем такой элемент y , что $y \in (b + W) \cap M$. Тогда

$$\begin{aligned} \lambda x + \mu y &\in \lambda((a + W) \cap M) + \mu((b + W) \cap M) = \\ &= (\lambda a + \lambda W) \cap (\lambda M) + (\mu b + \mu W) \cap (\mu M) \subset (\lambda M + \mu M) \cap \\ &\cap (\lambda a + \mu b + \lambda W + \mu W) \subset M \cap (\lambda a + \mu b + W + W) \subset \\ &\subset M \cap (\lambda a + \mu b + U). \end{aligned}$$

Следовательно, множество $M \cap (\lambda a + \mu b + U)$ не пусто и $\lambda a + \mu b \in \bar{M}$, что и требовалось доказать.

14. Доказать, что всякая полунорма в линейном пространстве удовлетворяет условиям: 1) $p(0) = 0$; 2) $p(x_1 - x_2) \geq |p(x_1) - p(x_2)|$ ($\forall x_1, x_2 \in X$).

Решение. 1) Так как $p(0) = p(0 \cdot x) = 0 \cdot p(x) = 0$, то первое утверждение очевидно.

2) В силу свойства полуаддитивности полунормы имеем $p(x_1 - x_2) + p(x_2) \geq p(x_1)$ и, тем самым, $p(x_1 - x_2) \geq p(x_1) - p(x_2)$.

Кроме того,

$$\begin{aligned} p(x_1 - x_2) &= p((-1)(x_2 - x_1)) = |-1| \cdot p(x_2 - x_1) \geq \\ &\geq p(x_2) - p(x_1). \end{aligned}$$

Значит, $p(x_1 - x_2) \geq |p(x_1) - p(x_2)|$.

Из этих свойств полунормы, в частности, следует (при $x_1 = x_2$, $x_2 = 0$), что $p(x) \geq |p(x)| \geq 0$ ($\forall x \in X$).

15. Пусть β_0 — базис окрестностей нуля в линейном топологическом пространстве X . Доказать, что X хаусдорфово тогда и только тогда, когда $\bigcap_{U \in \beta_0} U = \{0\}$.

Решение. Если X хаусдорфово, то для любого $x \in X$, $x \neq 0$, существует такая окрестность $U_0 \in \beta_0$, что $x \notin U_0$. Следовательно, $x \notin \bigcap_{U \in \beta_0} U$ и поэтому $\bigcap_{U \in \beta_0} U = \{0\}$.

Обратно, пусть $\bigcap_{U \in \beta_0} U = \{0\}$ и $x \neq y$. Тогда $x - y \neq 0$ и $\exists U_1 \in \beta_0 : x - y \notin U_1$. Пользуясь утверждениями 2), 3) примера 12, найдем такую уравновешенную окрестность V , что $V + V \subset U_1$. Тогда, очевидно, $x + V$ и $y + V$ — окрестности точек x и y соответственно и $(x + V) \cap (y + V) = \emptyset$, ибо в противном случае существовало бы такое z_0 , что $z_0 \in x + V$ и $z_0 \in y + V$, т. е. $z_0 - x \in V$, $z_0 - y \in V$ и $x - y = (z_0 - y) - (z_0 - x) \in V - V = V + V \subset U_1$. Последнее включение приводит к противоречию.

16. Пусть топология в некотором линейном топологическом пространстве X задается системой полунорм $Q = \{p(x)\}$. Доказать, что X хаусдорфово тогда и только тогда, когда

$$\forall x \in X, x \neq 0, \exists p \in Q : p(x) \neq 0.$$

Решение. Как показано в примере 12, X отделимо тогда и только тогда, когда $\bigcap_{U \in \beta_0} U = \{0\}$, где β_0 — базис окрестностей нуля вида $\{x \in X : \sup_{1 \leq i \leq n} p_i(x) \leq \varepsilon\}$ (см. п. 9). Если теперь $x \neq 0$ и $p(x) = 0 (\forall p \in Q)$, то $x \in \bigcap_{U \in \beta_0} U \neq \{0\}$.

Обратно, если $\forall x \in X, x \neq 0, \exists p \in Q : p(x) = \alpha > 0$, то окрестность $\{y \in X : p(y) \leq \frac{\alpha}{2}\}$ не содержит точку x , т. е. $\bigcap_{U \in \beta_0} U = \{0\}$, что и требовалось доказать.

17. Доказать, что пространство $L_p[0; 1]$ ($0 < p < 1$) с топологией, определяемой метрикой $\rho(x, y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)|^p dt$, не является локально выпуклым.

Решение. Отметим, что если X — локально выпуклое пространство, а M — некоторое ограниченное множество в нем, то выпуклая оболочка N этого множества (т. е. наименьшее выпуклое множество, содержащее M) также ограничена в X . Действительно, для произвольной выпуклой окрестности U существует такое α_0 , что при всех $\alpha \geq \alpha_0$ $M \subset \alpha U$. Значит, при всех $\alpha \geq \alpha_0$ имеем также включение $N \subset \alpha U$ (в силу выпуклости U), т. е. N — ограниченное множество.

Учитывая это замечание, для доказательства сформулированного утверждения достаточно построить такое ограниченное множество M в $L_p[0; 1]$ ($0 < p < 1$), выпуклая оболочка N которого не является ограниченной. С этой целью для произвольного $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим функции

$$x_n^{(k)}(t) = \begin{cases} n^{2/p}, & t \in \left[\frac{k-1}{n}; \frac{k}{n} \right], \\ 0, & t \notin \left[\frac{k-1}{n}; \frac{k}{n} \right], \quad k = 1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

Множество M таких функций ограничено в $L_p [0; 1]$, так как $\rho(x_n^{(k)}, 0) = 1$. Построим теперь функции

$$y_n(t) = \frac{1}{n} (x_n^{(1)}(t) + x_n^{(2)}(t) + \dots + x_n^{(n)}(t)) \equiv n^{1/p-1}.$$

При каждом $n \in \mathbb{N}$ функции $y_n(t)$ принадлежат выпуклой оболочке M множества M , но $\rho(y_n, 0) = n^{1-p} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Значит, множество M не является ограниченным в $L_p [0; 1]$, а само пространство $L_p [0; 1]$ при $0 < p < 1$ не может быть локально выпуклым.

Задачи для самостоятельной работы

1. Пусть (X, τ) — произвольное топологическое пространство, а A — некоторое его непустое подмножество. Рассмотрим семейство $\tau_A = \{U_A : U_A = A \cap U, U \in \tau\}$. Доказать, что оно определяет в A топологию (называемую индуцированной из пространства (X, τ)).

2. Пусть $C[a; b]$ — множество всех функций, непрерывных на отрезке $[a; b]$,

$$\rho_1(x, y) = \max_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)|$$

■

$$\rho_2(x, y) = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^p dt \right)^{1/p} \quad (p \geq 1).$$

Сравните топологии τ_1 и τ_2 в $C[a; b]$, определяемые соответственно этими двумя метриками.

3. Пусть ρ_1 и ρ_2 — две метрики на одном и том же множестве X и существует постоянная $c > 0$ такая, что для любых x_1, x_2 из X выполняется соотношение $\rho_1(x_1, x_2) \leq c \rho_2(x_1, x_2)$. Докажите, что топология τ_1 , порожденная метрикой ρ_1 , слабее топологии τ_2 , порожденной метрикой ρ_2 .

4. Пусть X — некоторое множество, а τ_1 и τ_2 — две топологии в нем. Доказать, что $\tau_1 \leq \tau_2$ тогда и только тогда, когда для всякого $G_1 \in \tau_1$ и любого $x \in G_1$ существует такое $G_2 \in \tau_2$, что $x \in G_2 \subset G_1$.

5. Пусть X — произвольное непустое множество. Назовем отображение $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ псевдометрикой, если оно удовлетворяет аксиомам метрики с заменой аксиомы тождества на условии $\rho(x, x) = 0$ ($\forall x \in X$). Доказать, что дискретная топология может быть порождена некоторой метрикой, а тривиальная топология — некоторой псевдометрикой.

Указание. Рассмотреть отображения

$$\rho_1 : \rho_1(x_1, x_2) = 0 \quad (\forall x_1, x_2 \in X)$$

■

$$\rho_2 : \rho_2(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & x_1 \neq x_2, \\ 0, & x_1 = x_2. \end{cases}$$

6*. Если X — топологическое пространство со счетной базой S_0 , то и в всякой другой его базе S содержится счетная база S_1 . Доказать это утверждение.

7. Доказать, что в любом топологическом пространстве со счетной базой множество изолированных точек не более чем счетно.

8. Доказать, что система S открытых множеств пространства является базой в X тогда и только тогда, когда для каждого $x_0 \in X$ система S_{x_0} , состоящая из всех множеств системы S , содержащих x_0 , образует определяющую систему окрестностей точки x_0 .

9. Доказать, что любое дискретное топологическое пространство, состоящее из бесконечного множества точек, удовлетворяет первой аксиоме счетности, но не удовлетворяет второй.

10. Доказать, что в любом метрическом пространстве совокупность открытых шаров с центром в точке x_0 и радиусами $r_n = \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$) образует определяющую систему окрестностей в точке x_0 .

11. Проверить, что в дискретном топологическом пространстве определяющую систему окрестностей в каждой его точке образует сама эта точка.

12. Доказать, что замыкание любого множества M топологического пространства X совпадает с пересечением всех замкнутых множеств, его содержащих.

13. Пусть A и B — некоторые подмножества топологического пространства X причем $\bar{A} \subset \bar{B}$. Можно ли утверждать, что всегда $A \subset B$?

14. Пусть $X = [0; 1] \subset \mathbb{R}$, а открытыми в нем являются те его подмножества (наряду с X и $\emptyset$), которые получаются выбрасыванием из него любого конечного или счетного числа точек. Доказать, что:

а) X — топологическое пространство;

б) сходящимися в X являются только те последовательности, элементы которых, начиная с некоторого номера, совпадают;

в) точка 0 является точкой прикосновения для множества $M = (0; 1]$, но никакая последовательность точек из M не сходится к 0 в X .

15. Доказать, что в топологическом пространстве с тривиальной топологией каждая последовательность сходится к любой точке этого пространства.

16. Пусть X — произвольное несчетное множество, τ_1 — дискретная топология, а топология τ_2 определяется множествами X , $\emptyset$ и множествами, состоящими из дополнений к не более чем счетным множествам. Доказать, что пространства (X, τ_1) и (X, τ_2) имеют одни и те же сходящиеся последовательности.

17. Пусть $X = (0; 1]$, а топология τ определяется множествами X , $\emptyset$, интервалами $(0; \alpha)$, где $\alpha \in (0; 1)$, и множествами вида $(0; \alpha) \cup \{1\}$. Доказать, что в пространстве (X, τ) последовательность $x_n = \frac{n-1}{n}$ не имеет предела.

18. Пусть $X = \mathbb{N}$, а $\tau = \{X; \emptyset; F_n, n = 1, 2, \dots\}$, где $F_n = \{n, n+1, \dots\}$.

а) Будет ли пространство (X, τ) компактным? б) Найти предел последовательности $x_n = 2n - 1$. в) Что можно сказать о сходимости этой же последовательности в пространстве (X, τ_1) , если $\tau_1 = \{X; \emptyset; E_n, n = 1, 2, \dots\}$, где $E_n = \{1, 2, \dots, n\}$?

19. Назовем топологическое пространство T_0 -пространством, если для любых неравных точек x, y существует либо окрестность x , не содержащая y , либо окрестность точки y , не содержащая x . Пусть $X = \mathbb{R}^2$, а топология τ в нем задается множествами X , $\emptyset$, всеми открытыми кругами с центрами на вещественной оси, а также их любыми объединениями и конечными пересечениями. Доказать, что (X, τ) не является T_0 -пространством.

Указание. Рассмотреть точки вида (x, y) и $(x, -y)$.

20. Пусть $X = \mathbb{R}^2$, а τ задается открытыми (в евклидовой метрике) кругами радиуса $\frac{1}{2}$ с центрами в точках с целочисленными координатами, а также их конечными пересечениями и любыми объединениями. Является ли (X, τ) : а) T_0 -пространством; б) T_1 -пространством?

21. Пусть $X = \mathbb{R}^2$. Под окрестностью точки $x \in X$ будем понимать любой открытый круг с центром в точке x , из которого удалены все отличные от x точки, лежащие на вертикальном диаметре этого круга. Доказать, что полученное топологическое пространство является хаусдорфовым.

22. Пусть G_1 и G_2 — открытые подмножества нормального пространства и F — замкнутое множество, причем $F \subset G_1 \cup G_2$. Показать, что F есть объединение замкнутых множеств $F_1 \subset G_1$ и $F_2 \subset G_2$.

23. Пусть $X = [0; 1]$, в котором окрестности всех точек, кроме 0, определены обычным способом, а окрестностями нуля считаются всевозможные полуинтервалы $[0; a)$ с выброшенными из них точками вида $\frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$). Доказать, что X является хаусдорфовым, но не нормальным пространством.

Указание. Рассмотреть множества $M_1 = \{0\}$ и $M_2 = \left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

24. Пусть X — множество всех непрерывных на $[0; 1]$ функций и топология τ порождается системой окрестностей

$$U_x = \{y : t \in F \Rightarrow |x(t) - y(t)| < \varepsilon\},$$

где $x \in X$, $\varepsilon > 0$, а F — конечное непустое подмножество точек отрезка $[0; 1]$. Доказать, что X не является метризуемым пространством.

Указание. Рассмотреть множество M функций x из X , удовлетворяющих условиям: а) $t \in [0; 1] \Rightarrow 0 \leq x(t) \leq 1$; б) $\mu_1\{t : x(t) = 1\} \geq \frac{1}{2}$ (здесь μ_1 — мера Лебега на $\mathbb{R}$). Доказать, что 0 — точка прикосновения для M , и использовать теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла.

25. Пусть X — линейное пространство, $M \subset X$ — выпуклое поглощающее множество и $\rho_M(x)$ — функционал Минковского. Доказать, что:

- 1) $\rho_M(x) \geq 0$; 2) $\rho_M(x) < +\infty$;
- 3) $\rho_M(\lambda x) = \lambda \rho_M(x)$ ($\forall \lambda > 0$);
- 4) $\rho_M(x + y) \leq \rho_M(x) + \rho_M(y)$;
- 5) $\{x \in X : \rho_M(x) < 1\} \subset M \subset \{x \in X : \rho_M(x) \leq 1\}$.

26. Пусть M и N — абсолютно выпуклые поглощающие множества в линейном топологическом пространстве X , а ρ_M и ρ_N — их функционалы Минковского соответственно. Тогда:

а) функционал Минковского множества αM ($\alpha \neq 0$) совпадает с $\frac{1}{|\alpha|} \rho_M$;

б) функционал Минковского для пересечения $M \cap N$ совпадает с $\max\{\rho_M(x), \rho_N(x)\}$;

в) если $M \subset N$, то $\rho_M(x) \geq \rho_N(x)$ ($\forall x \in X$).

Доказать эти утверждения.

27. Доказать, что если G_1 и G_2 — открытые множества в линейном топологическом пространстве X , то множества $G_1 + G_2$ и αG_1 ($\alpha \neq 0$) также открыты.

28. Доказать, что пересечение конечного числа поглощающих множеств является поглощающим.

29. Проверить, что любое нормированное пространство является линейным топологическим пространством.

30. Пусть $C^{(\infty)}[a; b]$ — пространство бесконечно дифференцируемых на $[a; b]$ функций с топологией, определяемой следующей системой окрестностей нуля:

$$U_{m, \varepsilon} = \{\varphi \in C^{(\infty)}[a; b] : \sup_{t \in [a; b]} |\varphi^{(k)}(t)| < \varepsilon, k = 0, 1, \dots, m\}.$$

Доказать, что $C^{(\infty)}[a; b]$ — линейное топологическое пространство.

31. Пусть $C(-\infty; +\infty)$ — пространство всех непрерывных на $\mathbb{R}$ функций (вещественных или комплексных), а топология в нем определяется полунормами $\rho_n(x) = \sup_{-n \leq t \leq n} |x(t)|$, $n = 1, 2, \dots$. Доказать, что оно хаусдорфово и метризуемо, но не нормируемо.

32*. Пусть s — пространство всех последовательностей $x = (\xi_k)_{k=0}^\infty$, где $\xi_k \in \mathbb{C}$, а N — некоторое векторное подпространство в s . Векторное подпространство $N^\alpha = \{y = (\eta_k) \in s : \sum_{k=0}^\infty |\xi_k \eta_k| < +\infty, \forall x \in N\}$ называется *дуальным* по Кетте к N . Введем в N топологию (она называется нормальной) с помощью преднорм

$$\rho_y(x) = \sum_{k=0}^\infty |\xi_k \eta_k|, \quad y = (\eta_k) \in N^\alpha.$$

Доказать, что в пространстве l_1 нормальная топология совпадает с топологией, определяемой нормой $\|x\| = \sum_{k=0}^\infty |\xi_k|$.

33*. Если $0 < p < 1$, то пространство l_p с топологией, определяемой метрикой $\rho(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} |\xi_k - \eta_k|^p$ ($x = (\xi_k)$, $y = (\eta_k)$), является топологическим векторным пространством, но не локально выпуклым. Доказать это.

34. Пусть (X_1, τ_1) и (X_2, τ_2) — топологические пространства, а g — некоторое отображение X_1 в X_2 . Тогда g называется открытым (соответственно замкнутым), если оно переводит открытые (замкнутые) множества в открытые (замкнутые). Существуют ли непрерывные отображения из (X_1, τ_1) в (X_2, τ_2) , не являющиеся ни открытыми, ни замкнутыми?

Указание. Рассмотреть отображение $g(x) = e^x \cos x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и найти образы множеств $A_1 = (-\infty; 0)$ и $A_2 = \{-\pi, \pi\}$. (Здесь множество $\mathbb{R}$ снабжено обычной топологией евклидова пространства.)

35. Пусть $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^2$ — обычные евклидовы пространства, а M — множество тех точек из $\mathbb{R}^2$, у которых, по крайней мере, одна из координат рациональна. Доказать, что непрерывными образами множества M на прямой могут быть только множества вида $(\alpha; \beta)$, $(\alpha; \beta]$, $[\alpha; \beta)$ или $[\alpha; \beta]$, где $-\infty \leq \alpha \leq \beta \leq +\infty$.

Ответы. 2. $\tau_2 \leq \tau_1$. 13. Нет. 18. а) Да; б) пределом последовательности является любое натуральное число; в) последовательность предела не имеет. 20. а) Нет; б) нет.

§ 3. ЛИНЕЙНЫЕ НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

1. Некоторые сведения из теории линейных пространств. Многие конкретные пространства, рассматриваемые в функциональном анализе, характеризуются общими свойствами линейности: элементы этих пространств (функции, числовые последовательности и др.) можно складывать друг с другом и умножать на числа, получая элементы того же пространства. Следуя принятому в математике аксиоматическому подходу, основные из этих свойств выделяют в систему аксиом, определяющих общее понятие линейного пространства, которое является одним из важнейших понятий современной математики.

Мы здесь считаем, что все соответствующие определения, свойства и аксиомы читателю известны (например, из курса линейной алгебры). Напомним только, что если в качестве скаляров в линейном пространстве E берутся вещественные (соответственно комплексные) числа, то оно называется вещественным или действительным (соответственно комплексным) линейным пространством.

Примеры линейных пространств. 1. Множество всевозможных векторов (в трехмерном пространстве, на плоскости или прямой) с обычными операциями сложения векторов и умножения их на числа представляет собой линейное пространство.

2. Совокупность упорядоченных наборов из n действительных (комплексных) чисел $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, где сложение и умножение на число определяются формулами

$$(\xi_1, \dots, \xi_n) + (\eta_1, \dots, \eta_n) = (\xi_1 + \eta_1, \dots, \xi_n + \eta_n),$$

$$\alpha(\xi_1, \dots, \xi_n) = (\alpha\xi_1, \dots, \alpha\xi_n),$$

образует линейное n -мерное арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$ (соответственно $\mathbb{C}^n$).

3. Непрерывные (действительные или комплекснозначные) функции на некотором отрезке $[a; b]$ с обычными операциями сложения функций и умножения их на числа образуют линейное пространство $C[a; b]$.

4. $C^{(k)}[a; b]$ ($k \in \mathbb{N}$) — пространство k раз непрерывно дифференцируемых функций также представляет собой линейное пространство, ибо $[x(t) + y(t)] \in C^{(k)}[a; b]$, если $x(t), y(t) \in C^{(k)}[a; b]$, и $\lambda x(t) \in C^{(k)}[a; b]$, если $x(t) \in C^{(k)}[a; b]$, а λ — произвольный скаляр.

5. Множество всех измеримых по Лебегу на $[a; b]$ функций $x(t)$, для которых

$$\int_a^b |x(t)|^p dt < +\infty, \quad p \geq 1,$$

с обычными операциями сложения измеримых функций и умножения их на числа образует линейное пространство $L_p[a; b]$. Линейным пространством является также множество $L_p(X, \mu)$, где $p \geq 1$, а $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — измеримое пространство (см. гл. 1, § 4, пример 1).

6. Пространство l_p ($p \geq 1$), элементами которого являются последовательности $x = (\xi_i)$ чисел (действительных или комплексных), удовлетворяющие условию

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p < +\infty, \text{ с операциями}$$

$$(\xi_1, \xi_2, \dots) + (\eta_1, \eta_2, \dots) = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \dots),$$

$$\alpha(\xi_1, \xi_2, \dots) = (\alpha\xi_1, \alpha\xi_2, \dots),$$

является линейным пространством.

7. Сходящиеся последовательности $x = (\xi_i)$ с покомпонентными операциями сложения и умножения на числа образуют линейное пространство c .

8. Множество последовательностей, сходящихся к нулю, множество ограниченных числовых последовательностей, а также множество всех числовых последовательностей с теми же операциями, что в примере 6, образуют линейные пространства, обозначаемые соответственно c_0 , m , s .

Линейная зависимость. Элементы $x, y, \dots, z$ линейного пространства E называются *линейно зависимыми*, если существуют такие числа $\alpha, \beta, \dots, \gamma$, не все равные нулю, что

$$\alpha x + \beta y + \dots + \gamma z = 0. \quad (1)$$

В противном случае эти элементы называются *линейно независимыми*. Иначе говоря, элементы $x, y, \dots, z$ линейно независимы, если из равенства (1) вытекает, что $\alpha = \beta = \dots = \gamma = 0$.

Бесконечная система элементов $x, y, \dots$ пространства E называется *линейно независимой*, если любая ее конечная подсистема линейно независима.

Линейное пространство называется *n -мерным*, если в нем существует n линейно независимых элементов, а любые $n+1$ элементов этого пространства линейно зависимы.

Набор любых n линейно независимых элементов в n -мерном линейном пространстве E называется *базисом* в E .

Зафиксируем в n -мерном линейном пространстве E базис $e_1, \dots, e_n$, который обозначим сокращенно $(e_k)_{k=1}^n$.

Пусть $x \in E$; вследствие n -мерности E векторы $e_1, \dots, e_n, x$ линейно зависимы. Но тогда найдутся скаляры $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ такие, что $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n + \alpha_{n+1} x = 0$; при этом $\alpha_{n+1} \neq 0$, иначе векторы $e_1, \dots, e_n$ были бы линейно зависимы. Следовательно, $x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n$, где $\xi_k = -\frac{\alpha_k}{\alpha_{n+1}}$, $k = 1, 2, \dots, n$. Такое представление произвольного вектора n -мерного пространства называется *разложением вектора x по базису $(e_k)_{k=1}^n$* . Числа $\xi_1, \dots, \xi_n$ называются *координатами вектора x в базисе $(e_k)_{k=1}^n$* .

Линейное пространство E называется *бесконечномерным*, если для каждого натурального n в E существует n линейно независимых элементов. Например, пространство $C[a; b]$ — бесконечномерно, ибо система функций $1, t, t^2, \dots, t^n, \dots$ в этом пространстве линейно независима.

Линейной оболочкой конечной или бесконечной системы элементов (x_n) линейного пространства E называется множество всевозможных линейных комбинаций

вида $\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k$ при разных n , где α_k ($1 \leq k \leq n$) — некоторые числа. Например, линейной оболочкой элементов $1, t, t^2, \dots, t^n$ из пространства $C[a; b]$ есть множество

$\{p_n(t)\}$ всех алгебраических многочленов степени не выше n .

Линейные многообразия. Множество L в линейном пространстве E называется *линейным многообразием* (линейным множеством, линейным), если для любых элементов $x, y \in L$ и любых скаляров α, β линейная комбинация $\alpha x + \beta y \in L$.

Заметим, что поскольку L является частью линейного пространства E , то из определения линейного многообразия следует, что L также является линейным пространством.

Приведем некоторые примеры линейных многообразий.

А. Множество всех многочленов степени не выше n является $(n+1)$ -мерным линейным многообразием в $C[a; b]$.

Б. Пространство $C^{(k)}[a; b]$ ($k \geq 1$) является линейным многообразием в пространстве $C[a; b]$.

В. Пространство c_0 всех сходящихся к нулю последовательностей образует линейное многообразие в пространстве c всех сходящихся последовательностей.

Изоморфизм линейных пространств. Линейные пространства E и E' называются *изоморфными*, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие ($x \leftrightarrow x', x \in E, x' \in E'$), сохраняющее алгебраические операции. Это означает, что из $x \leftrightarrow x', y \leftrightarrow y' (x, y \in E; x', y' \in E')$ следует $x + y \leftrightarrow x' + y', \alpha x \leftrightarrow \alpha x' (\alpha — произвольное число)$.

Изоморфные пространства можно рассматривать как различные реализации одного и того же пространства. Примерами изоморфных линейных пространств могут служить арифметическое $(n+1)$ -мерное пространство (действительное или комплексное) и пространство всех многочленов степени не выше n (соответственно с действительными или комплексными коэффициентами) с обычными операциями сложения многочленов и умножения их на числа. При этом в вещественном случае

$$p(t) = \sum_{k=0}^n c_k t^k \leftrightarrow x = (c_0, c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Вообще, можно показать, что всякое n -мерное вещественное пространство E изоморфно $\mathbb{R}^n$.

Фактор-пространства. Пусть E — линейное пространство, $L \subset E$ — некоторое линейное многообразие. Скажем, что два элемента x и y из E *эквивалентны*, если их разность $x - y$ принадлежит L . Это отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно, т. е. определяет разбиение всех $x \in E$ на классы. Класс эквивалентных элементов называется *классом смежности* (по многообразию L). Совокупность всех таких классов называется *фактор-пространством* E по L и обозначается E/L . Если x — произвольный элемент из класса смежности ξ , то всякий другой элемент y из ξ представим в виде $y = x + x_0$, где $x_0 \in L$.

В любом фактор-пространстве вводятся операции сложения и умножения на числа. Именно, пусть ξ и η — два класса, представляющих собой элементы из E/L . Выберем в каждом из этих классов по представителю, например x и y соответственно, и назовем суммой классов ξ и η тот класс ζ , который содержит элемент $x + y$, а произведением класса ξ на число α тот класс, который содержит элемент αx . Нетрудно проверить, что результат не изменится от замены представителей x и y какими-нибудь другими представителями x' и y' тех же классов ξ и η . Введенные операции удовлетворяют всем требованиям, содержащимся в определении линейного пространства, т. е. каждое фактор-пространство представляет собой линейное пространство. При этом роль нуля в пространстве E/L играет L . Заметим, что если класс смежности $\xi \in E/L$ содержит 0 — нулевой элемент пространства E , — то ξ совпадает с L , ибо в этом случае любой элемент $x \in \xi$ имеет вид $x = 0 + x_0 = x_0 \in L$. Верно и обратное утверждение.

Прямые суммы. Пусть E — линейное пространство, $L_1, L_2, \dots, L_n$ — принадлежащие ему линейные многообразия. Если каждый элемент $x \in E$ однозначно представляем в виде

$$x = x_1 + x_2 + \dots + x_n, \quad x_i \in L_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

то говорят, что пространство E есть *прямая сумма* линейных многообразий $L_1, L_2, \dots, L_n$, а выражение (2) называется разложением элемента x по элементам из $L_1, L_2, \dots, L_n$. При этом пишут

$$E = L_1 + L_2 + \dots + L_n \quad (3)$$

(т. е. соотношения (2) при всех $x \in E$ и (3) равносильны).

Если $E = L_1 + L_2$, то L_1 и L_2 имеют общим лишь нулевой элемент пространства E . Обратное, если любой элемент $x \in E$ может быть представлен в виде $x = x_1 + x_2, x_1 \in L_1, x_2 \in L_2$, и $L_1 \cap L_2 = 0$, то $E = L_1 + L_2$.

Выпуклые множества и выпуклые тела. Пусть E — некоторое линейное действительное пространство, x и y — две его точки. *Отрезком*, соединяющим точки x и y ,

называется совокупность всех точек вида $tx + (1 - t)y$, $t \in [0; 1]$. Отрезок без конечных точек x и y называется *открытым отрезком*.

Множество $M \subseteq E$ называется *выпуклым*, если оно вместе с любыми двумя точками x и y содержит и соединяющий их отрезок. *Ядром* $J(M)$ произвольного множества $M \subseteq E$ называется совокупность таких его точек x , что для каждого $y \in E$ существует такое число $\alpha = \alpha(y) > 0$, что $x + \mu y \in M$ при $|\mu| < \alpha$.

Выпуклое множество, ядро которого не пусто, называется *выпуклым телом*.

Примеры. а) В трехмерном евклидовом пространстве куб, шар, тетраэдр, полупространство представляют собой выпуклые тела. Отрезок, плоскость, треугольник в том же пространстве — выпуклые множества, но не выпуклые тела.

б) В пространстве $C[a; b]$ множество функций, удовлетворяющих условию $|x(t)| \leq 1$, выпукло.

в) Единичный шар в l_2 , т. е. совокупность таких точек $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$, что $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 \leq 1$, есть выпуклое тело. Его ядро состоит из точек x , удовлетворяющих условию $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 < 1$.

Для произвольного множества M в линейном пространстве E существует наименьшее выпуклое множество, которое его содержит; им будет пересечение всех выпуклых множеств, содержащих M (по крайней мере, одно выпуклое множество, содержащее M , существует — это все пространство E). Минимальное выпуклое множество, содержащее M , называется *выпуклой оболочкой* множества M .

2. **Нормированные пространства.** В анализе часто приходится иметь дело с пространствами, в которых введены как операции сложения элементов и умножения их на числа, так и некоторая топология, т. е. рассматривать так называемые топологические линейные пространства. Среди последних важнейший класс образуют нормированные пространства. Теория этих пространств была развита в работах С. Бахаха.

Определение (нормированного пространства). *Линейное пространство E над полем действительных или комплексных чисел называется нормированным, если каждому элементу $x \in E$ поставлено в соответствие неотрицательное число $\|x\|$, называемое нормой x , так, что выполнены следующие три аксиомы:*

$$1) \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$

$$2) \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \text{ для любого } x \in E \text{ и любого вещественного или комплексного числа } \lambda;$$

$$3) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ для любых } x, y \in E.$$

Всякое нормированное пространство становится метрическим пространством, если ввести в нем расстояние по формуле $\rho(x, y) = \|x - y\|$. Справедливость аксиом метрического пространства вытекает из свойств 1) — 3) нормы. На нормированные пространства переносятся, таким образом, все те понятия и факты, которые были изложены в гл. 2, § 1 для метрических пространств. В частности, нормированные пространства являются топологическими пространствами.

Нормированное пространство, полное относительно сходности по метрике $\rho(x, y) = \|x - y\|$, определяемой его нормой, называется *баначовым* пространством.

Очевидно, что $\mathbb{R}^1$ — банахово пространство ($\|x\| = |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}^1$); при этом справедливо неравенство: $||x| - |y|| \leq \|x - y\|$. Аналогичное неравенство справедливо и для нормы в произвольном нормированном пространстве E , а именно:

$$||x| - |y|| \leq \|x - y\|, \quad \forall x, y \in E.$$

Примерами других банаховых пространств могут служить метрические пространства R_n , $C[a; b]$, $M[a; b]$, $L_p[a; b]$ ($p \geq 1$), l_p ($p \geq 1$), c_0 , c , m , в которых норма элемента x определяется как его расстояние до нуля, т. е. $\|x\| = \rho(x, 0)$ (см. гл. 2, § 1).

Линейными нормированными, но не банаховыми, пространствами являются пространства $C_1[a; b]$, $C_2[a; b]$ всех непрерывных на отрезке $[a; b]$ функций, нормы в которых определяются соответственно формулами:

$$\|x\|_1 = \rho(x, 0) = \int_a^b |x(t)| dt, \quad \|x\|_2 = \rho(x, 0) = \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Важно подчеркнуть, что не каждое метрическое пространство может быть нормированным с нормой, согласованной с метрикой. Например, можно показать, что в метрических пространствах s, A_R (опр. этих пространств см. в гл. 2, § 1) нельзя ввести норму так, чтобы $\|x\| = \rho(x, 0)$.

Простейшие свойства сходимости в нормированных пространствах выражаются такими утверждениями:

1. Если $x_n \rightarrow x$ (в смысле сходимости по норме $\|x - y\| = \rho(x, y)$), то $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ ($x_n, x \in E$).

2. Если $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$, то $x_n + y_n \rightarrow x + y$ ($x, y, x_n, y_n \in E$).

3. Если $x_n \rightarrow x, \alpha_n \rightarrow \alpha$, то $\alpha_n x_n \rightarrow \alpha x$ ($\alpha_n, \alpha \in \mathbb{C}; x_n, x \in E$).

4. Если $x_n \rightarrow 0$ ($x_n \in E$), а последовательность $(\alpha_n) \subset \mathbb{C}$ ограничена, то $\alpha_n x_n \rightarrow 0$.

5. Если $\alpha_n \rightarrow 0$ ($\alpha_n \in \mathbb{C}$), а последовательность $(x_n) \subset E$ ограничена, то $\alpha_n x_n \rightarrow 0$.

Всякое нормированное пространство E можно рассматривать как линейное многообразие, плотное в некотором банаховом пространстве E_1 , которое называется *полным* пространством E . Иными словами, каждое нормированное пространство имеет пополнение.

Если в нормированном пространстве E с нормой $\|x\|_1$ задана еще одна норма $\|x\|_2$, то для сходимости по норме $\|\cdot\|_2$ любой последовательности, сходящейся по норме $\|\cdot\|_1$, необходимо и достаточно, чтобы существовала положительная постоянная c_1 такая, что $\|x\|_2 \leq c_1 \|x\|_1$ ($\forall x \in E$). При этом говорят, что норма $\|\cdot\|_2$ подчинена норме $\|\cdot\|_1$.

Две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ называются *эквивалентными*, если существуют положительные постоянные c_1, c_2 такие, что $c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1$ ($\forall x \in E$).

Справедлива следующая теорема об эквивалентных нормах.

Теорема 1. Пусть на некотором линейном пространстве E заданы две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$, по отношению к каждой из которых E — банахово пространство. Если хотя бы одна из норм подчинена другой, то эти нормы эквивалентны.

Если нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ эквивалентны, то сходимость по одной из норм влечет сходимость по другой и наоборот.

Отметим, что в каждом конечномерном линейном пространстве все нормы эквивалентны.

Ряды в нормированных пространствах. Пусть E — нормированное пространство и $x_k \in E, k = 1, 2, \dots$. Формальная сумма $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ называется рядом в E .

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ называется *сходящимся* в E , если в E сходится последовательность его частичных сумм $s_n = \sum_{k=1}^n x_k$. Элемент $x \in E$ называется *суммой ряда* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$, если $x = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$.

Теорема 2 (критерий Коши). Пусть E — нормированное пространство. Для того чтобы ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ сходилсся, необходимо, а если E банахово, то и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашелся номер n_0 такой, что при всех $n > n_0$ и при всех натуральных p выполнялось неравенство $\left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k \right\| < \varepsilon$.

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$.

Теорема 3. Пусть E — банахово пространство. Тогда всякий абсолютно сходящийся в E ряд сходится.

Подпространства нормированного пространства. Так как линейное нормированное пространство E есть частный случай линейного пространства, то для E имеют

смысл все понятия, введенные для линейных пространств (например, линейная зависимость и независимость элементов, линейное многообразие, разложение E в прямую сумму и т. д.). Однако в нормированных пространствах вводится новое понятие — понятие подпространства, которое не могло быть определено в линейном пространстве, ибо линейное пространство не снабжено топологией (сходимостью).

Замкнутое линейное многообразие L в нормированном пространстве E называется *подпространством*. Так, например, $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2$ являются подпространствами пространства $\mathbb{R}^n$ при $n \geq 3$, а линейное многообразие $P[a; b]$ всех многочленов на отрезке $[a; b]$ не является подпространством нормированного пространства $C[a; b]$, ибо оно не замкнуто (например, в пространстве $C[0; 1]$ последовательность

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \rightarrow e^x \notin P[0; 1]).$$

Напомним, что расстояние $\rho(x, L)$ от точки x до подпространства L определяется равенством $\rho(x, L) = \inf_{y \in L} \|x - y\|$. Число $\rho(x, L)$ характеризует *наилучшее прибли-*

жение элемента x с помощью элементов подпространства L . Если существует элемент $y^* \in L$ такой, что $\rho(x, L) = \|x - y^*\|$, то y^* называется *элементом наилучшего приближения x элементами подпространства L* . Элемент наилучшего приближения может оказаться не единственным или может не существовать вообще. Однако справедлива следующая теорема.

Теорема 4. Пусть L — конечномерное подпространство нормированного пространства E . Тогда для любого $x \in E$ существует (возможно, не единственный) элемент $y^* \in L$ такой, что $\rho(x, L) = \|x - y^*\|$.

Конечномерность и компактность. Как известно (см. гл. 2, § 1), каждое компактное множество в метрическом (нормированном) пространстве ограничено. Обратное утверждение в произвольном нормированном пространстве неверно. Например, из ограниченного в пространстве l_2 множества векторов $M = \{e_k : e_k = \underbrace{(0, \dots, 0}_{k-1}, 1, 0, \dots)\}$,

$k \in \mathbb{N}$) нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность, ибо $\rho(e_k, e_m) = \|e_k - e_m\| = \sqrt{2}$, если только $k \neq m$. Однако если E — конечномерное нормированное пространство, то каждое ограниченное в E множество уже будет компактным. Иными словами, справедлива следующая теорема.

Теорема 5. Для того чтобы каждое ограниченное множество в нормированном пространстве E было компактным, необходимо и достаточно, чтобы E было конечномерным.

Неограниченное множество L элементов нормированного пространства E называется *локально компактным*, если пересечение L с любым замкнутым шаром в E компактно. В приложениях наиболее интересным случаем является тот, когда L — линейное многообразие или подпространство в E .

Теорема 6 (Ф. Р и с с а). Для того чтобы линейное многообразие L нормированного пространства E было локально компактным, необходимо и достаточно, чтобы L было конечномерным.

Следствие. В бесконечномерном нормированном пространстве любое компактное множество нигде не плотно.

Теорема 7. В бесконечномерном линейном нормированном пространстве единственный шар не является компактным множеством.

3. Пространство линейных ограниченных операторов. **Определение** (линейного оператора). Пусть E_1 и E_2 — линейные нормированные пространства и множество $\Omega \subset E_1$. Если каждому $x \in \Omega$ ставится в соответствие определенный элемент $y = Ax \in E_2$, то говорят, что на Ω определен оператор A , отображающий Ω в E_2 . Множество Ω называется *областью определения оператора A* и обозначается $\mathcal{D}(A)$. Вообще говоря, не предполагается, что $\mathcal{D}(A) = E_1$, однако мы всегда будем считать, что $\mathcal{D}(A)$ есть линейное многообразие, т. е. если $x, y \in \mathcal{D}(A)$, то $\alpha x + \beta y \in \mathcal{D}(A)$ для любых числовых множителей α, β . Множество $R(A) \subset E_2$ всех элементов вида $y = Ax$, где $x \in \mathcal{D}(A)$, называется *областью значений оператора A* .

Оператор $A : E_1 \rightarrow E_2$ с областью определения $\mathcal{D}(A) \subset E_1$ называется *линейным*, если

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay \quad (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}; \forall x, y \in \mathcal{D}(A)).$$

Оператор A называется *непрерывным в точке* $x_0 \in \mathcal{D}(A)$, если $Ax_n \rightarrow Ax_0$ при $x_n \rightarrow x_0$ ($x_n \in \mathcal{D}(A)$, $n \in \mathbb{N}$) или (что равносильно) если для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что неравенство $\|x - x_0\| < \delta$ влечет неравенство $\|Ax - Ax_0\| < \varepsilon$. Если оператор A непрерывен в каждой точке области определения $\mathcal{D}(A) \subset E_1$, то говорят, что A *непрерывен на* $\mathcal{D}(A)$.

Множество тех $x \in \mathcal{D}(A)$, для которых $Ax = 0$, называется *ядром линейного оператора* A и обозначается $\ker A$. Как ядро $\ker A$, так и область значений $R(A)$ оператора A являются линейными многообразиями. Если оператор A непрерывен и $\mathcal{D}(A) = E_1$, то $\ker A$ является подпространством, т. е. замкнуто. Что же касается области значений оператора A , то $R(A)$ не обязательно будет подпространством в E_2 , даже если $\mathcal{D}(A) = E_1$.

Если линейный оператор $A: E_1 \rightarrow E_2$ задан на всем пространстве E_1 , то о непрерывности оператора A в различных точках пространства E_1 можно судить по непрерывности его в нуле.

Теорема 8. *Линейный оператор $A: E_1 \rightarrow E_2$, заданный на всем E_1 и непрерывный в точке $0 \in E_1$, непрерывен в любой точке $x_0 \in E_1$.*

Линейный оператор $A: E_1 \rightarrow E_2$ с $\mathcal{D}(A) = E_1$ называется *ограниченным*, если существует постоянная $c > 0$ такая, что для всех $x \in E_1$ $\|Ax\|_{E_2} \leq c \|x\|_{E_1}$.

Наименьшее из чисел c , удовлетворяющих этому неравенству, называется *нормой оператора* A и обозначается $\|A\|$. При этом

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in E_1 \\ \|x\|_{E_1} = 1}} \|Ax\|_{E_2} = \sup_{\|x\|_{E_1} \leq 1} \|Ax\|_{E_2} = \sup_{\|x\|_{E_1} = 1} \|Ax\|_{E_2}. \quad (4)$$

Понятия линейного непрерывного оператора и линейного ограниченного оператора эквивалентны.

Теорема 9. *Для того чтобы линейный оператор $A: E_1 \rightarrow E_2$ с $\mathcal{D}(A) = E_1$ был непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы он был ограниченным.*

Если область определения $\mathcal{D}(A)$ линейного оператора $A: E_1 \rightarrow E_2$ не совпадает с E_1 , то на такой оператор переносится понятие ограниченности (на $\mathcal{D}(A)$) и нормы, если только требовать, чтобы соответствующие соотношения выполнялись для всех элементов x из $\mathcal{D}(A)$ (а не E_1). Отметим, что если область определения линейного ограниченного оператора A всюду плотна в линейном нормированном пространстве E_1 , а E_2 — полное линейное нормированное пространство, то A может быть продолжен на все пространство E_1 без увеличения его нормы.

Пространство $\mathcal{L}(E_1, E_2)$. Пусть $A, B, C, \dots$ — линейные ограниченные операторы, определенные всюду в нормированном пространстве E_1 и со значениями в нормированном пространстве E_2 . Множество всех таких линейных ограниченных операторов обозначается через $\mathcal{L}(E_1, E_2)$. Это множество само является линейным нормированным пространством с нормой (4) и естественным определением сложения операторов и умножения их на число: если $A, B \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$, то

$$(A + B)x = Ax + Bx, (\alpha A)x = A(\alpha x) = \alpha Ax \quad (\forall \alpha \in \mathbb{C});$$

при этом $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$, $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$ (т. е. норма (4) удовлетворяет всем аксиомам нормы).

Если $E_2 = \mathbb{R}$ (или $E_2 = \mathbb{C}$), то произвольный оператор $f \in \mathcal{L}(E_1, \mathbb{R})$ ($f \in \mathcal{L}(E_1, \mathbb{C})$) называется *линейным непрерывным функционалом* над пространством E_1 . Пространства $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, которые обозначаются далее через E^* и называются *сопряженными пространствами*, будут изучены в гл. 3, § 1.

Теорема 10. *Если E_1 — нормированное пространство, а E_2 — банахово пространство, то $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ — банахово пространство.*

Если в пространстве $\mathcal{L}(E_1, E_1) \cong \mathcal{L}(E_1)$ положить, по определению, $(AB)x = A(Bx)$, то $\mathcal{L}(E_1)$ становится алгеброй с единицей, где единицей является тождественный оператор $I: E_1 \rightarrow E_1$, $Ix = x$.

В общем случае произведение операторов определяется следующим образом: пусть $B: E_1 \rightarrow E_2$, $A: E_2 \rightarrow E_3$, причем $R(B) \subset \mathcal{D}(A)$; тогда $(AB)x = A(Bx)$, причем $\mathcal{D}(AB) = \mathcal{D}(B)$. Операция умножения операторов свойством коммутативности не обладает: $AB \neq BA$.

В пространстве $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ можно определить различные виды сходимости.

Последовательность $(A_n) \subset \mathcal{L}(E_1, E_2)$ называется *равномерно сходящейся* к оператору $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ (обозначается: $A_n \rightrightarrows A$ при $n \rightarrow \infty$), если $\|A_n - A\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Такую сходимость называют еще *сходимостью по норме* пространства $\mathcal{L}(E_1, E_2)$. В этом же пространстве можно ввести и другую сходимость, называемую *поточечной*.

Последовательность $(A_n) \subset \mathcal{L}(E_1, E_2)$ называется *поточечно сходящейся* к оператору $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ ($A_n \rightarrow A$ при $n \rightarrow \infty$), если для любого $x \in E_1$ $\|A_n x - Ax\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Из равномерной сходимости последовательности (A_n) следует поточечная сходимость этой последовательности, однако обратное утверждение неверно.

О нормированных пространствах см. [16; 20; 33; 40].

Примеры решения задач

1. Показать, что эллипсоид

$$M = \left\{ x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l_2 : \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \xi_n^2 \leq 1 \right\}$$

есть выпуклое в l_2 множество, но не выпуклое тело.

Решение. Пусть $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in M$, $y = (\eta_1, \eta_2, \dots) \in M$. Рассмотрим совокупность элементов

$$z = tx + (1-t)y = (t\xi_1 + (1-t)\eta_1, t\xi_2 + (1-t)\eta_2, \dots) \quad (t \in [0; 1])$$

и покажем, что $z \in M$. Действительно, при любом $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m n^2 (t\xi_n + (1-t)\eta_n)^2 &= t^2 \sum_{n=1}^m n^2 \xi_n^2 + \\ &+ 2t(1-t) \sum_{n=1}^m n^2 \xi_n \eta_n + (1-t)^2 \sum_{n=1}^m n^2 \eta_n^2. \end{aligned}$$

Далее воспользуемся неравенством Коши — Буняковского

$$\sum_{n=1}^m |a_n b_n| \leq \left(\sum_{n=1}^m |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^m |b_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^m n^2 | \xi_n \eta_n | = \sum_{n=1}^m | n \xi_n | | \eta_n | \leq \left(\sum_{n=1}^m n^2 \xi_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{n=1}^m n^2 \eta_n^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m n^2 (t\xi_n + (1-t)\eta_n)^2 &\leq t^2 \sum_{n=1}^m n^2 \xi_n^2 + (1-t)^2 \sum_{n=1}^m n^2 \eta_n^2 + \\ &+ 2t(1-t) \left(\sum_{n=1}^m n^2 \xi_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^m n^2 \eta_n^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Поскольку, по предположению, $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \xi_n^2 \leq 1$ и $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \eta_n^2 \leq 1$, то, переходя в (5) к пределу при $m \rightarrow \infty$, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (t \xi_n + (1-t) \eta_n)^2 \leq t^2 + (1-t)^2 + 2t(1-t) = 1,$$

т. е. $z \in M$.

Покажем, что ядро эллипсоида $J(M)$ пусто. Действительно, пусть в противном случае $x \in J(M) \subset M$, $y_0 = \left(1, \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}, \frac{1}{3^{\frac{2}{3}}}, \dots, \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}, \dots\right) \in I_2$ и для некоторого $\mu > 0$ вектор $x + \mu y_0 \in M$,

$$\text{т. е. } \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left| \xi_n + \frac{\mu}{n^{\frac{2}{3}}} \right|^2 \leq 1. \text{ Тогда } \left| \xi_n + \frac{\mu}{n^{\frac{2}{3}}} \right| \leq \frac{1}{n} \text{ и}$$

$$\left| \frac{\mu}{n^{\frac{2}{3}}} \right| \leq \left| \xi_n + \frac{\mu}{n^{\frac{2}{3}}} \right| + |\xi_n| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} \quad (\forall n \in \mathbb{N}),$$

ибо если $x \in M$, то $|\xi_n| \leq \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем $\mu \leq \frac{2}{\sqrt[n]{n}}$, откуда $\mu = 0$. Полученное равенство противоречит допущению, что $\mu > 0$. Значит, ядро множества M пусто.

2. а) Является ли нормой функция $\mathbb{R}^1 \ni x \rightarrow |\arctg x|$?

б) Определяет ли в $\mathbb{R}^2$ норму функция

$$\mathbb{R}^2 \ni x = (\xi_1, \xi_2) \rightarrow \|x\| = |\xi_1| + |\xi_2|?$$

Если да, то что представляет собой единичный шар в $\mathbb{R}^2$ относительно введенной нормы?

в) Показать, что функция

$$\mathbb{R}^n \ni x = (\xi_1, \dots, \xi_n) \rightarrow \|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

не является нормой на $\mathbb{R}^n$ при $0 < p < 1$ и $n \geq 2$.

Решение. а) Нет, не является, ибо не выполняется вторая аксиома нормы. Действительно, если взять $x = \sqrt{3}$, $\lambda = \frac{1}{3}$, то $\|\lambda x\| = \arctg \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$, а $|\lambda| \|x\| = \frac{1}{3} \arctg \sqrt{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{9}$; поэтому $\|\lambda x\| \neq |\lambda| \|x\|$.

б) Да, определяет. Выполнение первых двух аксиом нормы очевидно. Нетрудно видеть, что выполняется также и третья аксиома: если $x = (\xi_1, \xi_2)$, $y = (\eta_1, \eta_2)$, то

$$\begin{aligned} \|x + y\| &= |\xi_1 + \eta_1| + |\xi_2 + \eta_2| \leq |\xi_1| + |\xi_2| + |\eta_1| + |\eta_2| = \|x\| + \|y\|. \end{aligned}$$

Единичный шар

$$B[0, 1] = \{x = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 : |\xi_1| + |\xi_2| \leq 1\}$$

в $\mathbb{R}^2$ относительно введенной нормы представляет собой единичный квадрат с вершинами в точках $(1, 0)$, $(0, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, лежащих на осях координат OX и OY .

в) В данном случае не выполняется третья аксиома нормы (т. е. неравенство треугольника). Действительно, возьмем вектор $x = \left(\frac{1}{2}, 0, \dots, 0\right) \in \mathbb{R}^n$ и вектор $y = \left(0, \frac{1}{2}, 0, \dots, 0\right) \in \mathbb{R}^n$. Ясно, что $x \neq y$, но $\|x\|_p = \|y\|_p = \frac{1}{2}$ для любого $0 < p < 1$ и $\|x\|_p + \|y\|_p = 1$. Однако,

$$\|x + y\|_p = \left\| \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, 0 \right) \right\|_p = \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} \right)^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{1}{p}-1}.$$

Поскольку $p \in (0, 1)$, то $\frac{1}{p} - 1 > 0$ и $2^{\frac{1}{p}-1} > 1$. Следовательно, $\|x + y\|_p > \|x\|_p + \|y\|_p$.

3. Являются ли нормами на множествах определения следующие функции:

$$a) C[a; b] \ni x \rightarrow \max_{a \leq t \leq \frac{a+b}{2}} |x(t)|;$$

$$б) C^{(1)}[a; b] \ni x \rightarrow |x(a)| + \max_{a \leq t \leq b} |x'(t)|;$$

$$в) C^{(1)}[a; b] \rightarrow |x(b) - x(a)| + \max_{a \leq t \leq b} |x'(t)|?$$

Решение. а) Нет, ибо не выполняется первая аксиома нормы: если $\|x\| = 0$, то $\max_{a \leq t \leq \frac{a+b}{2}} |x(t)| = 0$, т. е. $x(t) = 0$ на $\left[a; \frac{a+b}{2}\right]$,

но, вообще говоря, $x(t) \neq 0$ на отрезке $[a; b]$.

б) Да, является. Проверим выполнение первой аксиомы. Если $x(t) \equiv 0$ на $[a; b]$, то $|x(a)| + \max_{a \leq t \leq b} |x'(t)| = 0$. Обратно, если $|x(a)| + \max_{a \leq t \leq b} |x'(t)| = 0$, то $x(a) = 0$ и $x'(t) = 0$ на $[a; b]$. Следовательно, $x(t) \equiv c$ ($c = \text{const}$). Так как $x(a) = 0$, то $c = 0$, т. е. $x(t) \equiv 0$ на $[a; b]$.

Выполнение остальных аксиом нормы очевидно.

в) В данном случае указанная функция нормой не является, ибо не выполняется первая аксиома нормы. Действительно, если $|x(b) - x(a)| + \max_{a \leq t \leq b} |x'(t)| = 0$, то $x(b) = x(a)$ и $x'(t) \equiv 0$ на $[a; b]$.

Следовательно, $x(t) \equiv c$ ($c = \text{const}$). Взяв $t = a$, найдем, что $c = x(a)$, т. е. $x(t) \equiv x(a) = x(b)$ на $[a; b]$. Если $x(a) \neq 0$, то $x(t) \neq 0$ на $[a; b]$.

4. а) Проверить, что нормы

$$\|x\|_1 = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t)|, \quad \|x\|_2 = \left(\int_0^1 x^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

не эквивалентны в $C[0; 1]$.

б) Будут ли эквивалентными в пространстве $C^{(1)}[a; b]$ нормы

$$\|x\|_1 = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t)| + \max_{0 \leq t \leq 1} |x'(t)|$$

и

$$\|x\|_2 = \int_0^1 |x(t)| dt + \max_{0 \leq t \leq 1} |x'(t)|?$$

Решение. а) Напомним, что две нормы, введенные на одном линейном пространстве, эквивалентны тогда и только тогда, когда из сходимости последовательности по одной из этих норм вытекает ее сходимость по другой норме и наоборот. В данном случае, например, последовательность $x_n(t) = t^n$ сходится к нулю по норме $\|\cdot\|_2$, ибо

$$\|x_n\|_2 = \left(\int_0^1 t^{2n} dt \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$, но не сходится по норме $\|\cdot\|_1$, так как сходимость по норме $\|\cdot\|_1$ эквивалентна равномерной сходимости, а последовательность $x_n(t)$ поточечно сходится к функции

$$x(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1, \\ 1, & t = 1, \end{cases}$$

которая разрывна и не принадлежит пространству $C[0; 1]$. Следовательно, нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ не эквивалентны.

б) Нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ эквивалентны. Норма $\|\cdot\|_2$ подчинена норме $\|\cdot\|_1$. Действительно,

$$\|x\|_2 \leq \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t)| + \max_{0 \leq t \leq 1} |x'(t)| = \|x\|_1.$$

Следовательно, для того чтобы установить эквивалентность указанных норм, достаточно (в силу теоремы 1 об эквивалентных нормах) установить полноту пространства $C^{(1)}[0; 1]$ относительно каждой из норм $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$.

Покажем, что пространство $C^{(1)}[0; 1]$ полно относительно нормы $\|\cdot\|_1$. Пусть (x_k) — фундаментальная по норме $\|\cdot\|_1$ последовательность в $C^{(1)}[0; 1]$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $k_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $k > k_0$, $m > k_0$

$$\|x_k - x_m\|_1 = \max_{0 \leq t \leq 1} |x_k(t) - x_m(t)| + \max_{0 \leq t \leq 1} |x'_k(t) - x'_m(t)| < \varepsilon.$$

Используя критерий равномерной сходимости функциональной последовательности, из данного неравенства получаем, что существует

Функция $x_0(t) \in C^{(1)}[0; 1]$ такая, что $x_k(t) \rightrightarrows x_0(t)$, $x'_k(t) \rightrightarrows x'_0(t)$ при $k \rightarrow \infty$ на $[0; 1]$. Это и означает, что последовательность $(x_k) \subset C^{(1)}[0; 1]$ сходится по норме $\|\cdot\|_1$ к $x_0(t) \in C^{(1)}[0; 1]$.

Если последовательность (x_k) фундаментальна по норме $\|\cdot\|_2$, то для любого $\varepsilon > 0$ и всех $k > k_0$, $m > k_0$

$$\max_{0 \leq t \leq 1} |x'_k(t) - x'_m(t)| < \varepsilon \text{ и } \int_0^1 |x_k(t) - x_m(t)| dt < \varepsilon.$$

Тогда последовательность $(x'_k(t))$ равномерно на $[0; 1]$ сходится к некоторой функции $\varphi_0(t)$ из $C[0; 1]$, а последовательность $(x_k(t))$ сходится в $L_1[0; 1]$ (в силу полноты этого пространства) к функции $x_0(t)$. Следовательно (см. гл. 1, § 4), существует подпоследовательность $(x_{k_n}(t))$, сходящаяся к $x_0(t)$ почти всюду на $[0; 1]$.

Пусть t_0 — такая точка из $[0; 1]$, что $x_{k_n}(t_0) \rightarrow x_0(t_0)$ (при $n \rightarrow \infty$). Интегрируя подпоследовательность $(x'_{k_n}(t))$ почленно, получим

$$x_{k_n}(t) - x_{k_n}(t_0) \rightarrow \int_{t_0}^t \varphi_0(\tau) d\tau \quad (\forall t \in [0; 1]).$$

Отсюда

$$x_{k_n}(t) \rightarrow x_0(t_0) + \int_{t_0}^t \varphi_0(\tau) d\tau \quad (\forall t \in [0; 1]),$$

т. е. $x_0(t) = c + \int_{t_0}^t \varphi_0(\tau) d\tau$ (почти всюду на $[0; 1]$).

Поскольку элементы пространства $L_1[0; 1]$ определяются с точностью до эквивалентности, а функция $c + \int_{t_0}^t \varphi_0(\tau) d\tau$ абсолютно непрерывна на $[0; 1]$, то $x_0(t) \in C^{(1)}[0; 1]$ и $x'_0(t) = \varphi_0(t)$ ($\forall t \in [0; 1]$). Кроме того, очевидно, $\|x_n - x_0\|_2 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Этим установлено, что пространство $C^{(1)}[0; 1]$ полно и относительно нормы $\|\cdot\|_2$. Таким образом, нормы $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ эквивалентны.

Отметим, что эквивалентность норм $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ можно установить и непосредственно, проверив, что из сходимости последовательности $(x_n) \subset C^{(1)}[0; 1]$ по норме $\|\cdot\|_1$ вытекает ее сходимость по норме $\|\cdot\|_2$ и наоборот.

5. Будет ли полным пространство l_1 относительно нормы $\|x\|_1 = \sup_k |\xi_k|$ ($x = (\xi_k) \in l_1$)?

Решение. Как известно, пространство l_1 полно относительно нормы $\|x\|_2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|$. Кроме того, очевидно, норма $\|\cdot\|_1$ подчинена норме $\|\cdot\|_2$, т. е. $\|x\|_1 \leq \|x\|_2$. Если бы пространство l_1 было полным и относительно нормы $\|\cdot\|_1$, то, согласно теореме 1 об эквивалентных

нормах, рассматриваемые нормы $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ должны быть эквивалентными. Однако это не так. Действительно, последовательность $x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}}_n, 0, \dots, 0, \dots\right)$ сходится по норме $\|\cdot\|_1$ к нулевому

элементу $\left(\|x_n\|_1 = \frac{1}{n} \rightarrow 0\right)$, но эта же последовательность не является сходящейся в l_1 по норме $\|\cdot\|_2$, ибо она не фундаментальна

$$\|x_n - x_{2n}\|_2 = \sum_{k=1}^n \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} \right| + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = 1.$$

Следовательно, пространство l_1 не полно по норме $\|\cdot\|_1$.

6. Выяснить, сходится ли в нормированном пространстве последовательность (x_n) , если:

а) $E = l_1, x_n = \left(0, \dots, 0, \underbrace{\frac{1}{n^\sigma}, \frac{1}{(n+1)^\sigma}, \dots}_{n-1}\right), \sigma > 1;$

б) $E = l_2, x_n = \left(\frac{1}{n}, 0, \dots, 0, \underbrace{1, 0, 0, \dots}_n\right);$

в) $E = C^{(1)}[0; 1], x_n(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t^{n+2}}{n+2};$

г) $E = L_1[0; 1], x_n(t) = \begin{cases} e^{-\frac{t}{n}}, & \text{если } t - \text{иррационально,} \\ 0, & \text{если } t - \text{рационально;} \end{cases}$

д) $E = L_2[0; 1], x_n(t) = \begin{cases} \sqrt{n} - n\sqrt{nt}, & t \in \left[0; \frac{1}{n}\right], \\ 0, & t \in \left(\frac{1}{n}; 1\right]. \end{cases}$

Решение. а) Последовательность (x_n) сходится в l_1 , ибо она фундаментальна в l_1 :

$$\rho(x_n, x_{n+p}) = \|x_n - x_{n+p}\| = \sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{1}{k^\sigma} \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^\sigma} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$ равномерно относительно $p \in \mathbb{N}$.

б) В данном случае

$$\rho^2(x_n, x_{n+1}) = \|x_n - x_{n+1}\|^2 = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)^2 + 2 > 2,$$

т. е. последовательность (x_n) не является сходящейся в l_2 .

в) Последовательность $(x_n(t))$ сходится к функции $x(t) \equiv 0$, ибо $x_n(t) \neq 0$ при $n \rightarrow \infty$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0; 1]} |x'_n(t)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0; 1]} |t^n(1-t)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = 0,$$

в. е. и $x'_n(t) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Этим установлено, что

$$\begin{aligned}\|x_n\| &= \max_{t \in [0,1]} |x_n(t)| + \max_{t \in [0,1]} |x'_n(t)| = \\ &= \max_{t \in [0,1]} \left| \frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t^{n+2}}{n+2} \right| + \max_{t \in [0,1]} |t^n(1-t)| \rightarrow 0\end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$.

г) Отметим, что каждая функция $x_n(t)$ интегрируема по Лебегу (ибо она измерима и ограничена), но не интегрируема по Риману (она разрывна на множестве положительной меры). Последовательность $(x_n(t))$ сходится в $L_1[0; 1]$ к функции $x(t) \equiv 1$. Действительно,

$$\begin{aligned}\|x_n - 1\| &= \int_0^1 |x_n(t) - 1| dt = \int_0^1 (x_n(t) - 1) dt = -1 + \int_0^1 x_n(t) dt = \\ &= -1 + \int_0^1 e^{-\frac{t}{n}} dt = -1 + \frac{e^{-\frac{1}{n}} - 1}{-\frac{1}{n}} \rightarrow 0\end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$ (здесь мы воспользовались тем, что интегралы Лебега от эквивалентных функций совпадают, а функция $x_n(t)$ эквивалентна функции $e^{-\frac{t}{n}}$).

д) Последовательность (x_n) не сходится в $L_2[0; 1]$, так как она не фундаментальна. Действительно, для произвольных $n, p \in \mathbb{N}$ имеем

$$\begin{aligned}\rho^2(x_n, x_{n+p}) &= \|x_n - x_{n+p}\|^2 = \\ &= \int_0^1 (\sqrt{n+p} - (n+p)\sqrt{n+pt} - \sqrt{n} + n\sqrt{nt})^2 dt + \\ &+ \int_0^1 (\sqrt{n} - n\sqrt{nt})^2 dt = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+p}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{n\sqrt{n}}{(n+p)\sqrt{n+p}}.\end{aligned}$$

Если взять $p = n$, то, как нетрудно подсчитать,

$$\rho^2(x_n, x_{2n}) = \frac{4\sqrt{2}-5}{6\sqrt{2}} > 0.$$

7. Пусть $L = \left\{ x = (\xi_k) \in E : \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k = 0, \xi_k \in \mathbb{R} \right\}$. Образует ли L подпространство в пространстве E , если:

а) $E = l_1$; б) $E = l_p$ ($p > 1$)?

Решение. а) Очевидно, L — линейное многообразие в l_1 . Пусть последовательность $x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots, \xi_k^{(n)}, \dots) \in L$ и $x_n \rightarrow x_0 = (\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \dots, \xi_k^{(0)}, \dots)$ при $n \rightarrow \infty$ в l_1 , т. е. для любого $\varepsilon > 0$

существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $n > n_0$ справедливо неравенство $\|x_n - x_0\| = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(0)}| < \varepsilon$. Тогда

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^{(0)} \right| \leq \left| \sum_{k=1}^{\infty} (\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(0)}) \right| + \left| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^{(n)} \right| < \varepsilon.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, то $\left| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^{(0)} \right| = 0$, т. е. $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^{(0)} = 0$. Следовательно, L — подпространство в l_1 .

б) L — линейное многообразие в l_p ($p > 1$), но не подпространство. Действительно, последовательность

$$x_n = \left(1, \underbrace{-\frac{1}{n}, \dots, -\frac{1}{n}}_n, 0, 0, \dots \right) \in L$$

и $x_n \rightarrow x_0 = (1, 0, 0, \dots)$, так как

$$\|x_n - x_0\| = \left(\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{n^p} \right)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{p}}} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$, но $x_0 \notin L$.

8. Обозначим через $C^\alpha[a; b]$ множество всех функций, удовлетворяющих на $[a; b]$ условию Гельдера с показателем $\alpha \in (0; 1]$:

$$H_\alpha(x) = \sup_{\substack{a \leq t, \tau \leq b \\ t \neq \tau}} \frac{|x(t) - x(\tau)|}{|t - \tau|^\alpha} < +\infty.$$

Доказать, что $C^\alpha[a; b]$ является банаховым пространством относительно нормы

$$\|x\|_\alpha = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)| + H_\alpha(x), \quad x \in C^\alpha[a; b]. \quad (6)$$

Решение. То, что формула (6) определяет норму в $C^\alpha[a; b]$, проверяется непосредственно. Докажем полноту этого пространства.

Пусть $(x_n(t))$ — фундаментальная последовательность в $C^\alpha[a; b]$, т. е. $\|x_n - x_m\|_\alpha \rightarrow 0$, если $n, m \rightarrow \infty$. Поскольку каждая функция из $C^\alpha[a; b]$ является непрерывной, т. е. $C^\alpha[a; b] \subset C[a; b]$, то из (6) следует, что последовательность $(x_n(t))$ будет фундаментальной и в $C[a; b]$. Но так как $C[a; b]$ — банахово пространство, то $(x_n(t))$ сходится в $C[a; b]$, т. е. существует функция $x(t) \in C[a; b]$ такая, что $\|x_n - x\|_{C[a; b]} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Покажем, что $x(t) \in C^\alpha[a; b]$. Действительно, из фундаментальности последовательности $(x_n(t))$ вытекает ее ограниченность (по норме), т. е. $\|x_n\|_\alpha \leq K$ для всех $n \in \mathbb{N}$. В частности, $H_\alpha(x_n) \leq K$ для всех n , т. е. для любых точек t и τ из $[a; b]$ ($t \neq \tau$) имеем $\frac{|x_n(t) - x_n(\tau)|}{|t - \tau|^\alpha} \leq K$.

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $n \rightarrow \infty$ (учитывая при этом, что $x_n(t) \rightarrow x(t)$, $x_n(\tau) \rightarrow x(\tau)$ при $n \rightarrow \infty$), находим $\frac{|x(t) - x(\tau)|}{|t - \tau|^\alpha} \leq K$, т. е. $H_\alpha(x) \leq K$, откуда и вытекает, что $x(t) \in C^\alpha[a; b]$.

Покажем, что последовательность $(x_n(t))$ сходится к $x(t)$ и в пространстве $C^\alpha[a; b]$, т. е. $\|x_n - x\|_\alpha \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Для этого достаточно установить, что $H_\alpha(x_n - x) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Из фундаментальности $(x_n(t))$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такое, что $H_\alpha(x_n - x_m) < \varepsilon$, если $n, m > n_0$. Тогда для любых двух точек t и τ из $[a; b]$ ($t \neq \tau$) имеем

$$\frac{|x_n(t) - x_m(t) - (x_n(\tau) - x_m(\tau))|}{|t - \tau|^\alpha} < \varepsilon \quad (n, m > n_0).$$

Отсюда при $m \rightarrow \infty$ с помощью соотношений $x_m(t) \rightarrow x(t)$, $x_m(\tau) \rightarrow x(\tau)$ получаем

$$\frac{|x_n(t) - x(t) - x_n(\tau) + x(\tau)|}{|t - \tau|^\alpha} \leq \varepsilon \quad (n > n_0).$$

Поскольку последнее неравенство справедливо для всех t и τ из $[a; b]$ ($t \neq \tau$), то и $H_\alpha(x_n - x) \leq \varepsilon$. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такое, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство $H_\alpha(x_n - x) \leq \varepsilon$. Это и означает, что $H_\alpha(x_n - x) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда и $\|x_n - x\|_\alpha \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Утверждение доказано.

9. Пусть T — произвольное множество, K — числовое поле. Обозначим через K^T множество, элементами которого являются функции $x: T \rightarrow K$, а через $l_p(T)$ ($p \geq 1$) — линейное многообразие в K^T , образованное теми функциями $x(t)$, которые отличны от нуля не более чем на счетном множестве $t \in T$ и для которых $\sum_{t \in T} |x(t)|^p < +\infty$. Доказать, что формула

$$\|x\|_p = \left(\sum_{t \in T} |x(t)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

определяет норму в $l_p(T)$, относительно которой $l_p(T)$ является банаховым пространством.

Решение. Аксиомы нормы (1), (2) выполняются очевидно. Проверим выполнение третьей аксиомы.

Пусть $x(t), y(t) \in l_p(T)$ и $M = \{t \in T : x(t) \neq 0\}$, $M_2 = \{t \in T : y(t) \neq 0\}$. Функция $z(t) = x(t) + y(t)$ может принимать отличные от нуля значения на множестве $M = M_1 \cup M_2$, которое также является не более чем счетным множеством. На основании неравенства Минковского заключаем, что

$$\|z\|_p = \left(\sum_{t \in M} |x(t) + y(t)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{t \in M} |x(t)|^p \right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$\begin{aligned} + \left(\sum_{t \in M} |y(t)|^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{t \in M_1} |x(t)|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{t \in M_2} |y(t)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= \|x\|_p + \|y\|_p, \end{aligned}$$

т. е. аксиома (3) нормы также выполняется.

Покажем, что пространство $l_p(T)$ полно относительно введенной нормы. Пусть (x_k) — фундаментальная последовательность в $l_p(T)$, $M_k = \{t \in T : x_k(t) \neq 0\}$ ($k \in \mathbb{N}$). Рассмотрим множество $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$, которое (как объединение счетного числа не более чем счетных множеств) также счетно. Из определения фундаментальности вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $k, m \geq n_0$

$$\|x_k - x_m\|_p = \left(\sum_{t \in M} |x_k(t) - x_m(t)|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon. \quad (7)$$

Пусть $t_1, t_2, \dots$ — точки множества M , т. е. $M = \{t_1, t_2, \dots\}$. Возьмем $t_1 \in M$. Тогда, в силу (7), для $k, m \geq n_0$ имеем $|x_k(t_1) - x_m(t_1)| < \varepsilon$, т. е. числовая последовательность $(x_k(t_1))$ фундаментальна, а значит, и сходящаяся: $x_k(t_1) \rightarrow x_1$ при $k \rightarrow \infty$, где x_1 — некоторое число. Аналогично $x_k(t_2) \rightarrow x_2, \dots, x_k(t_m) \rightarrow x_m, \dots$.

Определим теперь на T функцию $x(t)$ соотношением

$$x(t) = \begin{cases} x_m, & t = t_m \in M, \quad m = 1, 2, \dots, \\ 0, & t \in T \setminus M. \end{cases}$$

Ясно, что числа x_m также могут равняться нулю.

Поскольку неравенство (7) справедливо для всех $t \in M$, то оно будет выполняться и для $t \in \tilde{M}_s = \{t_1, t_2, \dots, t_s\} \subset M$ ($s \in \mathbb{N}$ — произвольное фиксированное число), т. е.

$$\left(\sum_{t \in \tilde{M}_s} |x_k(t) - x_m(t)|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \quad (k, m \geq n_0).$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $m \rightarrow \infty$, находим, что

$$\left(\sum_{t \in \tilde{M}_s} |x_k(t) - x(t)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon \quad (k \geq n_0).$$

Поскольку это неравенство выполняется на любом множестве $\tilde{M}_s$, то и

$$\left(\sum_{t \in M} |x_k(t) - x(t)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon, \quad k \geq n_0.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ следует, что $x_k(t) \rightarrow x(t)$ при $k \rightarrow \infty$ в $l_p(T)$, а также $x(t) \in l_p(T)$. Действительно, поскольку последовательность (x_k) сходится, то существует постоянная $c > 0$ такая, что

$\|x_k\| \leq c$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Взяв $k \geq n_0$ (например, $k = n_0 + 1$), найдем $\|x\|_p \leq \|x - x_k\|_p + \|x_k\|_p \leq c + \varepsilon$, т. е. $x \in L_p(T)$.

10. Пусть $L_p[0; 1]$, $0 < p < 1$, — множество всех измеримых по Лебегу на $[0; 1]$ функций, для которых $\int_0^1 |x(t)|^p dt < +\infty$.

а) Показать, что соотношение $\rho(x, y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)|^p dt$ определяет метрику в $L_p[0; 1]$.

б) Доказать, что в пространстве $L_p[0; 1]$ нет выпуклых открытых множеств, отличных от $L_p[0; 1]$.

Решение. а) Аксиомы 1), 2) метрики легко проверяются.

Так как $0 < p < 1$, то при $a \geq 0$, $b \geq 0$ справедливо неравенство $(a + b)^p \leq a^p + b^p$. Отсюда следует, что

$$\int_0^1 |x(t) + y(t)|^p dt \leq \int_0^1 |x(t)|^p dt + \int_0^1 |y(t)|^p dt,$$

т. е. выполняется и неравенство треугольника. Заметим при этом, что величина $\int_0^1 |x(t)|^p dt$ нормой в $L_p[0; 1]$ не является.

б) Предположим, что M — некоторое непустое выпуклое открытое множество в $L_p[0; 1]$. Поскольку $L_p[0; 1]$ — линейное пространство, то, не ограничивая общности, можно считать, что $0 \in M$. Тогда существует открытый шар $B(0, r) = \{x \in L_p[0; 1] : \rho(x, 0) < r\}$, $r > 0$, полностью содержащийся в M . Зафиксируем произвольную функцию $x_0(t) \in L_p[0; 1]$. Так как $0 < p < 1$, то существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\frac{\rho(x_0, 0)}{(n+1)^{1-p}} = \frac{1}{(n+1)^{1-p}} \int_0^1 |x_0(t)|^p dt < r.$$

Известно (см. гл. 1, § 5), что функция $f(t) = \int_0^t |x_0(\tau)|^p d\tau$, которая представляет собой неопределенный интеграл от интегрируемой функции $|x_0(t)|^p$, абсолютно непрерывна. Следовательно, по заданному $\varepsilon = \frac{\rho(x_0, 0)}{n+1}$ найдется такое $\delta > 0$, что если отрезок $[0; 1]$ произвольно разбить на частичные промежутки с длинами, меньшими δ , то в каждом из них колебание функции $f(t)$ будет меньше ε . Таким образом, существуют точки $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ такие, что

$$|f(t_i) - f(t_{i-1})| = \int_{t_{i-1}}^{t_i} |x_0(t)|^p dt < \frac{\rho(x_0, 0)}{n+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Образует теперь функции

$$y_0(t) = \begin{cases} (n+1)x_0(t), & t = t_0, \\ 0, & t \neq t_0. \end{cases}$$

$$y_i(t) = \begin{cases} (n+1)x_0(t), & t_{i-1} < t \leq t_i, \\ 0, & t \in [0; 1] \setminus (t_{i-1}; t_i], \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{cases}$$

которые принадлежат шару $B(0, r)$, ибо $\rho(y_0, 0) = 0 < r$ и

$$\rho(y_i, 0) = (n+1)^p \int_{t_{i-1}}^{t_i} |x_0(t)|^p dt \leq \frac{\rho(x_0, 0)}{(n+1)^{1-p}} < r, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Но так как $B(0, r) \subset M$, то $y_i(t) \in M$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Поскольку M — выпуклое множество и

$$x_0(t) = \frac{1}{n+1} (y_0(t) + y_1(t) + \dots + y_n(t)),$$

то $x_0(t) \in M$, т. е. $L_p[0; 1] \subset M$. Следовательно, $M = L_p[0; 1]$.

Замечание. В пространстве $L_p[0; 1]$, где $p \geq 1$ (с нормой $\|x\| = \left(\int_0^1 |x'(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$),

этого свойства нет: любой открытый шар

$$B(x_0, r) = \left\{ x \in L_p[0; 1] : \left(\int_0^1 |x(t) - x_0(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < r \right\}$$

представляет собой выпуклое множество, не совпадающее с $L_p[0; 1]$. В этом состоит одно из отличий случая $0 < p < 1$ от случая $p \geq 1$.

11. Доказать, что $C^{(1)}[a; b]$ является множеством первой категории в $C[a; b]$.

Решение. Пусть $B[0; n]$ — шар радиуса n с центром в точке $x(t) \equiv 0$ в пространстве $C^{(1)}[a; b]$, т. е.

$$B[0; n] = \{x \in C^{(1)}[a; b] : \|x\|_1 = \max_{t \in [a; b]} |x(t)| + \max_{t \in [a; b]} |x'(t)| \leq n, n \in \mathbb{N}\}.$$

Тогда, как легко видеть, $C^{(1)}[a; b] = \bigcup_n B[0; n]$. Рассмотрим $B[0; n]$ как множество в $C[a; b]$. Если мы покажем, что при каждом $n \in \mathbb{N}$ $B[0; n]$ нигде не плотно в $C[a; b]$, то это и будет означать, что $C^{(1)}[a; b]$ — множество первой категории в $C[a; b]$. Поскольку в бесконечномерном нормированном пространстве любое компактное множество нигде не плотно (см. следствие теоремы 6), то достаточно установить компактность каждого шара $B[0; n]$ в $C[a; b]$.

С этой целью заметим, что норма $\|x\| = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|$ подчинена норме $\|x\|_1$, т. е. $\|x\| \leq \|x\|_1$. Поэтому множество $B[0; n]$ равномерно ограничено в $C[a; b]$ (для любого $x \in B[0; n]$ имеем $\|x\| \leq \|x\|_1 \leq n$), а из соотношения

$$|x(t_1) - x(t_2)| = |x'(\theta)| \cdot |t_1 - t_2| \leq n |t_1 - t_2|, \quad t_1, t_2 \in [a; b],$$

вытекает, что $B[0; n]$ — равностепенно непрерывное в $C[a; b]$ множество. Значит, на основании теоремы Арцела, множество $B[0; n]$ компактно в $C[a; b]$. Утверждение доказано.

12. Пусть E — линейное нормированное пространство, L — подпространство. Доказать, что:

а) в фактор-пространстве E/L можно ввести норму соотношением $\|\xi\|_1 = \inf_{x \in \xi} \|x\|$, где $\xi \in E/L$ (ξ — класс смежности);

б) если E — сепарабельное банахово пространство, то во введенной норме E/L — сепарабельное банахово пространство;

в) E/L изоморфно $\mathbb{R}$, если $E = C[0; 1]$, $L = \{x(t) \in C[0, 1] : x(0) = 0\}$.

Решение. а) Очевидно, что $\|\xi\|_1 \geq 0$. Покажем, что $\|\xi\|_1 = 0$ тогда и только тогда, когда $\xi = L$ (напомним, что L — нулевой элемент в E/L). Сначала заметим, что каждый класс смежности ξ есть замкнутое множество. Действительно, пусть (x_n) — последовательность элементов из ξ , сходящаяся к некоторому элементу $x \in E$. Согласно определению фактор-пространства, для любых n и m $(x_n - x_m) \in L$. При $m \rightarrow \infty$ имеем $x_n - x_m \rightarrow x_n - x$. Так как L замкнуто, то $x_n - x \in L$. Но тогда x принадлежит классу смежности ξ вместе с x_n .

Пусть $\|\xi\|_1 = \inf_{x \in \xi} \|x\| = 0$. Из определения $\inf$ следует, что для любого $n \in \mathbb{N}$ в ξ существует последовательность (x_n) такая, что $0 \leq \|x_n\| < \frac{1}{n}$, т. е. $x_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Вследствие замкнутости класс смежности ξ должен содержать и 0, но тогда $\xi = L$ и $\|L\|_1 = 0$. Таким образом, первая аксиома нормы выполняется. Остальные аксиомы нормы легко проверяются.

б) Прежде всего покажем, что сходимость по введенной в фактор-пространстве E/L норме последовательности классов (ξ_n) к классу ξ эквивалентна тому, что существует последовательность элементов $x_n \in \xi_n$ такая, что $x_n \rightarrow x$ при $n \rightarrow \infty$, где x — некоторый элемент из ξ .

Действительно, пусть $\|\xi_n - \xi\|_1 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, т. е. $\|\xi_n - \xi\|_1 = e_n$, $e_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Поскольку $\|\xi_n - \xi\|_1 = \inf_{z \in (\xi_n - \xi)} \|z\|$,

то в классе $\xi_n - \xi$ содержится элемент $z_n = y_n - x$ такой, что $y_n \in \xi_n$, $x \in \xi$ и $e_n \leq \|y_n - x\| < 2e_n$ (здесь элемент x , вообще говоря, зависит от n). Пусть x_0 — любой фиксированный (не зависящий от n) элемент из класса ξ .

Тогда $\|(y_n - x + x_0) - x_0\| < 2e_n$. Но так как $x_0 \in \xi$, $x \in \xi$, то $(x_0 - x) \in L$ и $\tilde{x}_n = y_n - x + x_0 \in \xi_n$; при этом $\tilde{x}_n \rightarrow x_0$ при $n \rightarrow \infty$. Итак, для элемента $x_0 \in \xi$ построена последовательность $(\tilde{x}_n) \subset \xi_n$ такая, что $\tilde{x}_n \rightarrow x_0$.

Обратно, пусть существует последовательность $x_n \in \xi_n$ такая, что $x_n \rightarrow x$, где $x \in \xi$. Так как

$$\|\xi_n - \xi\|_1 = \inf_{y_n \in \xi_n, y \in \xi} \|y_n - y\| \leq \|x_n - x\|,$$

то $\|\xi_n - \xi\|_1 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и тем самым утверждение доказано.

Пусть $M = \{x_1, x_2, \dots\}$ — счетное всюду плотное в E множество. Сопоставим каждому элементу $x_n \in M$ класс смежности $\xi_n = x_n + L$, содержащий этот элемент. Множество $\mathcal{L} = \{\xi_1, \xi_2, \dots\}$ всех таких классов смежности будет счетным всюду плотным множеством в фактор-пространстве E/L . Действительно, пусть $\xi \in E/L$ — произвольный класс смежности. Возьмем в ξ произвольный элемент x . Тогда существует последовательность элементов $(x_{n_k})_{k=1}^\infty \subset M$ такая, что $\|x_{n_k} - x\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Так как $x_{n_k} \in \xi_{n_k} \in \mathcal{L}$, то из доказанного выше следует, что $\|\xi_{n_k} - \xi\|_1 \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Таким образом, для любого элемента $\xi \in E/L$ существует последовательность $(\xi_{n_k})_{k=1}^\infty \subset \mathcal{L}$ такая, что $\xi = \lim_{k \rightarrow \infty} \xi_{n_k}$, откуда и вытекает, что $\overline{\mathcal{L}} = E/L$, т. е. E/L — сепарабельное нормированное пространство.

Покажем, что E/L — банахово пространство, если E банахово.

Пусть $(\xi_n)_{n=1}^\infty \subset E/L$ — фундаментальная последовательность, т. е. $\|\xi_n - \xi_m\|_1 = \varepsilon_{n,m} \rightarrow 0$, если $n, m \rightarrow \infty$. Поскольку $\|\xi_n - \xi_m\|_1 = \inf_{z \in (\xi_n - \xi_m)} \|z\|$, то существуют элементы $x_n \in \xi_n$, $x_m \in \xi_m$ такие, что $\varepsilon_{n,m} \leq \|x_n - x_m\| < 2\varepsilon_{n,m}$. Таким образом, последовательность элементов (x_n) фундаментальна в E . Так как E — полное пространство, то существует $x \in E$ такое, что $x_n \rightarrow x$ при $n \rightarrow \infty$. Но тогда, в силу доказанного, $\xi_n \rightarrow \xi$, где ξ — класс смежности, содержащий x . Следовательно, E/L — банахово пространство.

в) Пусть функции $x(t)$ и $y(t)$ принадлежат одному классу смежности $\xi \in E/L$, т. е. $x(0) - y(0) = 0$ или $x(0) = y(0)$. Таким образом, в класс смежности ξ объединяются функции, имеющие в точке $t = 0$ одинаковое значение. Взяв в каждом классе смежности по представителю $x(t) = \text{const}$, получим взаимно однозначное соответствие между $\mathbb{R}$ и множеством всех классов смежности, т. е. фактор-пространством E/L . Нетрудно видеть, что данное соответствие — изоморфизм.

13. Какие из следующих функционалов f являются линейными. непрерывными:

$$а) C[0; 1] \ni x \xrightarrow{f} \int_0^1 x^2(t) dt;$$

$$б) L_2[0; 1] \ni x \xrightarrow{f} \int_0^1 x(t) \sin^2 t dt;$$

$$в) L \ni x = (\xi_k) \xrightarrow{f} \sum_{k=1}^\infty \xi_k \sin k$$

(где L — линейное пространство элементов $x \in l_2$, для которых сходится ряд $\sum_{k=1}^\infty \xi_k \sin k$, с нормой $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^\infty |\xi_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$).

Решение. а) Функционал f в данном случае непрерывен, но не линейен. Действительно, если последовательность $x_n \rightarrow x_0$ в $C[0; 1]$ (x_n ,

$x \in C[0; 1]$, $n \in \mathbb{N}$), то и $x_n^2 \rightarrow x_0^2$ в $C[0; 1]$, ибо

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq 1} |x_n^2(t) - x_0^2(t)| &\leq \max_{0 \leq t \leq 1} |x_n(t)| \cdot \max_{0 \leq t \leq 1} |x_n(t) - x_0(t)| + \\ &+ \max_{0 \leq t \leq 1} |x_0(t)| \cdot \max_{0 \leq t \leq 1} |x_n(t) - x_0(t)| \leq \\ &\leq (c + \max_{0 \leq t \leq 1} |x_0(t)|) \cdot \max_{0 \leq t \leq 1} |x_n(t) - x_0(t)| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$ (здесь мы воспользовались тем, что последовательность норм $\|x_n\|$ ограничена: существует константа $c > 0$ такая, что $\|x_n\| \leq c$ для всех $n \in \mathbb{N}$). Таким образом, последовательность $(x_n^2(t))$ сходится равномерно к функции $x_0^2(t)$. Следовательно, на основании соответствующей теоремы об интегрировании равномерно сходящейся

функциональной последовательности заключаем, что $\int_0^1 x_n^2(t) dt \rightarrow \int_0^1 x_0^2(t) dt$, т. е. $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ при $n \rightarrow \infty$. Значит, f — непрерывный

функционал. Однако если $x_1, x_2 \in C[0; 1]$ и $\int_0^1 x_1(t) x_2(t) dt \neq 0$, то

$$\begin{aligned} f(x_1 + x_2) &= \int_0^1 [x_1^2(t) + 2x_1(t)x_2(t) + x_2^2(t)] dt = \\ &= 2 \int_0^1 x_1(t)x_2(t) dt + f(x_1) + f(x_2), \end{aligned}$$

т. е. $f(x_1 + x_2) \neq f(x_1) + f(x_2)$.

б) Функционал f линеен и непрерывен: для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $x_1, x_2 \in L_2[0; 1]$ имеем

$$\begin{aligned} f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) &= \int_0^1 (\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)) \sin^2 t dt = \\ &= \alpha_1 \int_0^1 x_1(t) \sin^2 t dt + \alpha_2 \int_0^1 x_2(t) \sin^2 t dt = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) \end{aligned}$$

в

$$|f(x)| \leq \int_0^1 |x(t)| \sin^2 t dt \leq \left(\int_0^1 \sin^4 t dt \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^1 |x(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|x\|,$$

т. е. $\|f\| \leq 1$.

в) Функционал f в этом случае линеен, так как для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $x_1, x_2 \in L$

$$\begin{aligned} f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) &= \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_1 \xi_k^{(1)} + \alpha_2 \xi_k^{(2)}) \sin k = \\ &= \alpha_1 \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^{(1)} \sin k + \alpha_2 \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^{(2)} \sin k = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2). \end{aligned}$$

Однако функционал f не ограничен. В самом деле, рассмотрим при каждом $n \in \mathbb{N}$ элемент

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{c}} \left(\frac{\sin 1}{1}, \frac{\sin 2}{2^\alpha}, \dots, \frac{\sin n}{n^\alpha}, 0, 0, \dots \right),$$

где $\alpha = \frac{1}{2} + \sigma$, $0 < \sigma < \frac{1}{2}$, $c = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2\alpha}}$. Ясно, что $x_n \in L$ при каждом $n \in \mathbb{N}$ и

$$\|x_n\|^2 = \frac{1}{c} \sum_{k=1}^n \frac{\sin^2 k}{k^{2\alpha}} \leq \frac{1}{c} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2\alpha}} = 1.$$

Однако

$$|f(x_n)| = \frac{1}{\sqrt{c}} \sum_{k=1}^n \frac{\sin^2 k}{k^\alpha} \rightarrow +\infty$$

при $n \rightarrow \infty$, так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k^\alpha}$, как известно из курса математического анализа, является расходящимся.

Следовательно, $\|f\| = \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ x \in L}} |f(x)| = +\infty$, т. е. функционал f не является ограниченным (непрерывным).

14. Пусть $\mathbb{R}_p^n$ — линейное пространство n -мерных вещественных векторов $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ с нормой

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^n |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} & \text{при } 1 \leq p < +\infty, \\ \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k| & \text{при } p = +\infty. \end{cases}$$

Найти общий вид линейного непрерывного функционала в $\mathbb{R}_p^n$ и вычислить его норму.

Решение. а) Пусть $1 < p < +\infty$. Покажем, что всякий линейный непрерывный функционал $f \in (\mathbb{R}_p^n)^*$ имеет вид

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \xi_k \eta_k, \quad x = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}_p^n, \quad (8)$$

где элемент $y = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in \mathbb{R}_q^n$ однозначно определяется функционалом f , $\|f\| = \|y\|_q$, а число q удовлетворяет соотношению $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Действительно, пусть $(e_k)_{k=1}^n$ — базис в $\mathbb{R}_p^n$. Тогда любой

вектор $x \in \mathbb{R}_p^n$ однозначно представим в виде $x = \sum_{k=1}^n \xi_k e_k$, где $\xi_1, \dots, \xi_n$ — координаты вектора x : $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$. Следовательно, для любого линейного функционала $f \in (\mathbb{R}_p^n)^*$

$$f(x) = f\left(\sum_{k=1}^n \xi_k e_k\right) = \sum_{k=1}^n \xi_k f(e_k) = \sum_{k=1}^n \xi_k \eta_k,$$

где $\eta_k = f(e_k)$, $k = 1, \dots, n$. Вектор $y = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ определяется функционалом f однозначно: если $x = e_k$, то $f(x) = f(e_k) = \eta_k$, т. е. η_k совпадает с $f(e_k)$. Найдем теперь норму f . Положим $\xi_k = \operatorname{sgn} \eta_k \times \times |\eta_k|^{q-1}$ (число q выбрано из соотношения $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) и рассмотрим вектор

$$\tilde{x} = (\operatorname{sgn} \eta_1 \cdot |\eta_1|^{q-1}, \dots, \operatorname{sgn} \eta_n \cdot |\eta_n|^{q-1}).$$

Тогда

$$f(\tilde{x}) = \sum_{k=1}^n \operatorname{sgn} \eta_k \cdot \eta_k \cdot |\eta_k|^{q-1} = \sum_{k=1}^n |\eta_k|^q.$$

Поскольку f — непрерывный функционал, то

$$\begin{aligned} |f(\tilde{x})| &= \sum_{k=1}^n |\eta_k|^q \leq \|f\| \cdot \|\tilde{x}\|_p = \\ &= \|f\| \left(\sum_{k=1}^n |\eta_k|^{p(q-1)} \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\| \left(\sum_{k=1}^n |\eta_k|^q \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\left(\sum_{k=1}^n |\eta_k|^q \right)^{1 - \frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^n |\eta_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \|f\|,$$

т. е. $\|y\|_q \leq \|f\|$.

Кроме того, для любого $y = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in \mathbb{R}_q^n$ соотношение

$$f_y(x) = \sum_{k=1}^n \xi_k \eta_k, \quad x = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}_p^n,$$

определяет линейный непрерывный функционал в пространстве $\mathbb{R}_p^n$. Действительно, линейность функционала f_y очевидна, а его ограниченность следует из соотношения, устанавливаемого с помощью неравенства Гельдера

$$\begin{aligned} |f_y(x)| &= \left| \sum_{k=1}^n \xi_k \eta_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |\xi_k| \cdot |\eta_k| \leq \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^n |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^n |\eta_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} = \|y\|_q \cdot \|x\|_p, \end{aligned}$$

т. е. $\|f_y\| \leq \|y\|_q$. Таким образом, формула (8), где $\eta_k = f(e_k)$ ($k = 1, \dots, n$), дает общий вид линейного непрерывного функционала в пространстве $\mathbb{R}_p^n$ ($1 < p < +\infty$). При этом, принимая во внимание

неравенства $\|f\| \leq \|y\|_q$, $\|f\| \geq \|y\|_q$, находим $\|f\| = \left(\sum_{k=1}^n |\eta_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$.

б) Если $p = 1$, то аналогично предыдущему устанавливаем, что любой функционал $f \in (\mathbb{R}_1^n)^*$ имеет вид

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \xi_k \eta_k, \quad x = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}_1^n,$$

где $y = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in \mathbb{R}_\infty^n$, $\eta_k = f(e_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$.

При этом

$$|f(x)| \leq \sum_{k=1}^n |\xi_k \eta_k| \leq \max_{1 \leq k \leq n} |\eta_k| \cdot \sum_{k=1}^n |\xi_k| = \max_{1 \leq k \leq n} |\eta_k| \cdot \|x\|_1,$$

т. е. $\|f\| \leq \max_{1 \leq k \leq n} |\eta_k| = \|y\|_\infty$. Установим неравенство противоположного знака. Пусть $\max_{1 \leq k \leq n} |\eta_k| = |\eta_{k_0}|$. Возьмем элемент $\tilde{x} = (0, \dots, 0, \text{sgn } \eta_{k_0}, 0, \dots, 0)$. Ясно, что $\|\tilde{x}\|_1 \leq 1$ и $f(\tilde{x}) = |\eta_{k_0}|$. Тогда

$$\|f\| = \sup_{\|x\|_1 \leq 1} |f(x)| \geq f(\tilde{x}) = |\eta_{k_0}| = \max_{1 \leq k \leq n} |\eta_k|.$$

Следовательно, $\|f\| = \max_{1 \leq k \leq n} |\eta_k|$.

в) Если $p = \infty$, то всякий линейный функционал $f \in (\mathbb{R}_\infty^n)^*$ имеет вид (проверьте это)

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \xi_k \eta_k, \quad x = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}_\infty^n,$$

где $y = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in \mathbb{R}_1^n$. Из неравенства

$$|f(x)| \leq \sum_{k=1}^n |\xi_k \eta_k| \leq \sum_{k=1}^n |\eta_k| \cdot \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k| = \sum_{k=1}^n |\eta_k| \cdot \|x\|_\infty$$

следует, что $\|f\| \leq \sum_{k=1}^n |\eta_k| = \|y\|_1$. Взяв теперь элемент $\tilde{x} = (\text{sgn } \eta_1, \dots,$

$\dots, \text{sgn } \eta_n)$, $\|\tilde{x}\|_\infty = 1$, найдем, что $f(\tilde{x}) = \sum_{k=1}^n |\eta_k|$.

Тогда

$$\|f\| = \sup_{\|x\|_\infty \leq 1} |f(x)| \geq f(\tilde{x}) = \sum_{k=1}^n |\eta_k|,$$

т. е. $\|f\| = \sum_{k=1}^n |\eta_k|$.

Другие примеры на вычисление норм функционалов рассматриваются в гл. 3, § 1.

15. 1) Отображение A n -мерного пространства в себя, которое определяется системой линейных уравнений

$$\eta_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \xi_j, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

рассматривается как оператор, действующий в пространстве $\mathbb{R}_\infty^n$ (определение $\mathbb{R}_\infty^n$ см. в примере 14). Показать, что

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

2) Пусть A рассматривается как оператор, действующий в пространстве $\mathbb{R}_1^n$ (определение $\mathbb{R}_1^n$ см. в примере 14). Показать, что

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|.$$

Решение. 1) Если $A: \mathbb{R}_\infty^n \rightarrow \mathbb{R}_\infty^n$, то

$$\|y\| = \|Ax\| = \max_{1 \leq i \leq n} |\eta_i| \leq$$

$$\leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot |\xi_j| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot \|x\|,$$

т. е. $\|A\|_\infty \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = \alpha.$

Возьмем номер i_0 таким, что $\sum_{j=1}^n |a_{i_0 j}| = \alpha$, и построим вектор $x_0 = (\operatorname{sgn} a_{i_0 1}, \operatorname{sgn} a_{i_0 2}, \dots, \operatorname{sgn} a_{i_0 n})$. Ясно, что $\|x_0\| \leq 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \|A\|_\infty &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \geq \|Ax_0\| = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} \operatorname{sgn} a_{i_0 j} \right| \geq \\ &\geq \sum_{j=1}^n a_{i_0 j} \operatorname{sgn} a_{i_0 j} = \sum_{j=1}^n |a_{i_0 j}| = \alpha. \end{aligned}$$

2) Пусть A рассматривается как оператор, действующий из $\mathbb{R}_1^n$ в $\mathbb{R}_1^n$. Неравенство $\|A\|_1 \leq \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| = \alpha_1$ очевидно. Найдем теперь такое j_0 , что $\sum_{i=1}^n |a_{i j_0}| = \alpha_1$, и возьмем вектор $x_0 = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (единица стоит на j_0 -м месте). Тогда

$$\|A\|_1 = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \geq \|Ax_0\| = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} \xi_j^{(0)} \right| = \sum_{i=1}^n |a_{i j_0}| = \alpha_1,$$

так что $\|A\|_1 = \alpha_1$.

16. Пусть $k \in C([a; b] \times [a; b])$, $0 < \alpha < 1$. Доказать, что оператор $A: C[a; b] \rightarrow C[a; b]$, действие которого задается формулой

$$(Ax)(t) = \int_a^b \frac{k(t, \tau)}{|t - \tau|^\alpha} x(\tau) d\tau, \quad t \in [a; b],$$

ограничен.

Решение. Прежде всего установим, что функция $\mathcal{J}(t) = \int_a^b \frac{d\tau}{|t-\tau|^\alpha}$ непрерывна на $[a; b]$, и найдем ее максимум. Для этого представим $\mathcal{J}(t)$ в виде

$$\mathcal{J}(t) = \int_a^t \frac{d\tau}{|t-\tau|^\alpha} + \int_t^b \frac{d\tau}{|t-\tau|^\alpha}.$$

Очевидно,

$$\mathcal{J}(t) = \frac{1}{1-\alpha} [(t-a)^{1-\alpha} + (b-t)^{1-\alpha}],$$

откуда следует непрерывность $\mathcal{J}(t)$. Нетрудно подсчитать, что $\max_{a \leq t \leq b} |\mathcal{J}(t)|$, который достигается в точке $t = \frac{a+b}{2}$, равен $\frac{2^\alpha (b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$. Тогда из неравенства

$$\|Ax\| \leq M \max_{a \leq t \leq b} |\mathcal{J}(t)| \cdot \|x\|,$$

где $M = \max_{a \leq t, \tau \leq b} |k(t, \tau)|$, следует ограниченность оператора A , причем $\|A\| \leq \frac{2^\alpha (b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} M$.

17. Найти норму оператора $A: \mathbb{R}^n \rightarrow l_2$, если

$$A(\xi_1, \dots, \xi_n) = \left(\frac{\xi_1}{1}, \dots, \frac{\xi_n}{1}, \dots, \frac{\xi_1}{k}, \dots, \frac{\xi_n}{k}, \dots \right),$$

$$x = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Решение. Из соотношения

$$\begin{aligned} \|Ax\|_{l_2} &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{k=1}^n \xi_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \|x\|_{\mathbb{R}^n} \end{aligned}$$

находим

$$\|A\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

18. Пусть $\alpha \geq 0$ фиксировано, C_α — банахово (проверьте это) пространство непрерывных на $[0; +\infty)$ функций $x(t)$, удовлетворяющих условию $\sup_{t \in [0; +\infty)} e^{\alpha t} |x(t)| < +\infty$, с нормой

$$\|x\|_\alpha = \sup_{t \in [0; +\infty)} e^{\alpha t} |x(t)|.$$

Доказать, что интегральный оператор

$$(Ax)(t) = \int_0^t e^{-\beta(t-s)} x(s) ds$$

является при $\beta > \alpha > \gamma \geq 0$ линейным ограниченным оператором, действующим из пространства C_α в пространство C_γ . Найти норму оператора A .

Решение. Очевидно, оператор A является линейным.

Для произвольной функции $x(t) \in C_\alpha$ имеем

$$\begin{aligned} \|Ax\|_\gamma &= \sup_{t \in [0; +\infty)} \left(e^{\gamma t} \left| \int_0^t e^{-\beta(t-s)} x(s) ds \right| \right) = \\ &= \sup_{t \in [0; +\infty)} \left(e^{(\gamma-\beta)t} \left| \int_0^t e^{(\beta-\alpha)s} e^{\alpha s} x(s) ds \right| \right) \leq \\ &\leq \sup_{t \in [0; +\infty)} \left(e^{(\gamma-\beta)t} \int_0^t e^{(\beta-\alpha)s} ds \right) \|x\|_\alpha = \\ &= \sup_{t \in [0; +\infty)} \left(\frac{e^{(\gamma-\alpha)t} - e^{(\gamma-\beta)t}}{\beta - \alpha} \right) \|x\|_\alpha. \end{aligned}$$

Исследуем на экстремум функцию $\varphi(t) = \frac{1}{\beta - \alpha} (e^{(\gamma-\alpha)t} - e^{(\gamma-\beta)t})$. Имеем $\varphi(0) = 0$, а из неравенств $\beta > \alpha > \gamma$ следует, что $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = 0$. С помощью известных методов дифференциального исчисления находим, что максимум функции φ достигается в точке $t_0 = \frac{1}{\beta - \alpha} \times \ln \frac{\beta - \gamma}{\alpha - \gamma}$ ($\frac{\beta - \gamma}{\alpha - \gamma} > 1$), причем

$$\begin{aligned} \varphi(t_0) &= \frac{1}{\beta - \alpha} \left[\left(\frac{\beta - \gamma}{\alpha - \gamma} \right)^{\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}} - \left(\frac{\beta - \gamma}{\alpha - \gamma} \right)^{\frac{\gamma - \beta}{\beta - \alpha}} \right] = \\ &= \frac{1}{\beta - \alpha} \left(\frac{\beta - \gamma}{\alpha - \gamma} \right)^{\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}} \left[1 - \left(\frac{\beta - \gamma}{\alpha - \gamma} \right)^{-1} \right] = \frac{(\alpha - \gamma)^{\frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma}}}{(\beta - \gamma)^{\frac{\beta - \gamma}{\beta - \alpha}}} = \\ &= \left(\frac{(\alpha - \gamma)^{\alpha - \gamma}}{(\beta - \gamma)^{\beta - \gamma}} \right)^{\frac{1}{\beta - \alpha}} = L_{\alpha, \beta, \gamma}, \end{aligned}$$

т. е. $\sup_{t \in [0; +\infty)} \varphi(t) = L_{\alpha, \beta, \gamma}$. Следовательно, $\|A\| \leq L_{\alpha, \beta, \gamma}$. Возьмем теперь функцию $x_0(t) = e^{-\alpha t}$. Ясно, что $\|x_0\|_\alpha = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup_{\|x\|_\alpha \leq 1} \|Ax\|_\gamma \geq \|Ax_0\|_\gamma = \\ &= \sup_{t \in [0; +\infty)} \left(e^{\gamma t} \left| \int_0^t e^{-\beta(t-s)} e^{-\alpha s} ds \right| \right) = \sup_{t \in [0; +\infty)} \varphi(t) = L_{\alpha, \beta, \gamma}. \end{aligned}$$

Это и означает, что $\|A\| = L_{\alpha, \beta, \gamma}$ и оператор $A \in \mathcal{L}(C_\alpha, C_\gamma)$.

Заметим, что если $\gamma = \alpha$, то $A \in \mathcal{L}(C_\alpha, C_\alpha)$, и, как можно подсчитать, $\|A\| = \frac{1}{\beta - \alpha}$.

19. Пусть $E = C[0; +\infty)$ — пространство всех тех функций $x(t)$, непрерывных на полуоси $[0; +\infty)$, для которых

$$\|x\| = \sup_{t \in [0; +\infty)} |x(t)| < +\infty.$$

Будет ли ограниченным оператор $A : E \rightarrow E$, действующий по формуле $(Ax)(t) = tx(t)$ ($t \in [0; +\infty)$)?

Решение. Оператор A линеен, его область определения состоит из функций $x(t)$, для которых $\sup_{t \in [0; +\infty)} |tx(t)| < +\infty$. Однако для функций $x(t)$ из E имеем $\sup_{t \in [0; +\infty)} |tx(t)| < +\infty$ (в чем нетрудно убедиться) тогда и только тогда, когда $\sup_{t \in [0; +\infty)} |(t+1)x(t)| < +\infty$. Значит, $\mathcal{D}(A)$ совпадает с множеством функций, удовлетворяющих неравенству $|x(t)| \leq \frac{c}{1+t}$, где постоянная c — своя для каждой функции из $\mathcal{D}(A)$. Ясно, что $\mathcal{D}(A) \neq E$ (например, функция $x(t) = \frac{1}{1+\sqrt{t}} \in E$, но в то же время $x(t) \notin \mathcal{D}(A)$).

Оператор A неограничен. Действительно, рассмотрим последовательность функций $x_n(t) = \frac{n}{n+t}$, $n \in \mathbb{N}$. Заметим, что $x_n(t) \in \mathcal{D}(A)$, так как $|x_n(t)| = \frac{n}{n+t} \leq \frac{n}{1+t}$. Кроме того, $\|x_n\| = 1$ и $\|Ax_n\| = \sup_{t \in [0; +\infty)} \frac{nt}{n+t} = n$.

Следовательно,

$$\|A\| = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in \mathcal{D}(A)}} \|Ax\| \geq \|Ax_n\| = n \quad (\forall n \in \mathbb{N}),$$

откуда вытекает, что $\|A\| = +\infty$.

20. Рассмотрим оператор $A : l_2 \rightarrow l_2$, переводящий элемент $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l_2$ в элемент $Ax = (\lambda_1 \xi_1, \lambda_2 \xi_2, \dots)$, где $\lambda_n \in \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$). При каком условии на последовательность (λ_n) область определения $\mathcal{D}(A)$ оператора A совпадает со всем пространством l_2 ? При каком условии на последовательность (λ_n) оператор A ограничен и какова при этом его норма?

Решение. Так как $A : l_2 \rightarrow l_2$, то необходимо

$$\|Ax\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k \xi_k|^2 < +\infty \quad (\forall x = (\xi_k) \in l_2). \quad (9)$$

Возможны два случая: а) последовательность (λ_n) ограничена, т. е. $\sup_n |\lambda_n| = c < +\infty$. Тогда для любого $x \in l_2$

$$\|Ax\|^2 \leq c^2 \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 = c^2 \|x\|^2.$$

Значит, $\|A\| \leq c$, откуда следует, что оператор A ограничен и $\mathcal{D}(A) = l_2$, ибо $Ax \in l_2$ для любого $x \in l_2$.

б) Последовательность (λ_n) неограничена: $\sup_n |\lambda_n| = +\infty$. Тогда область определения $\mathcal{D}(A)$ оператора A состоит из элементов $x \in l_2$, удовлетворяющих неравенству (9), т. е. $\mathcal{D}(A) \neq l_2$ (например, если $\lambda_n = n$, то счетное множество

$$M_\alpha = \left\{ x : x = \left(1, \frac{1}{2^{1+\alpha}}, \dots, \frac{1}{n^{1+\alpha}}, \dots \right), 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2} \right\} \subset l_2,$$

не принадлежит $\mathcal{D}(A)$). Оператор A в данном случае неограничен. Действительно,

$$e_n = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, 1, 0, \dots) \in \mathcal{D}(A) \quad (\forall n \in \mathbb{N}),$$

ибо $\|Ae_n\| = |\lambda_n| < +\infty$ при каждом $n \in \mathbb{N}$, и $\|e_n\| = 1$ ($\forall n \in \mathbb{N}$). Однако $\sup_n \|Ae_n\| = \sup_n |\lambda_n| = +\infty$. Следовательно,

$$\|A\| = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in \mathcal{D}(A)}} \|Ax\| = +\infty.$$

Покажем теперь, что если оператор A ограничен (т. е. $\|A\| \leq c = \sup_n |\lambda_n| < +\infty$, $\mathcal{D}(A) = l_2$), то его норма равна c . Для этого установим неравенство противоположного знака (т. е. $\|A\| \geq c$). Итак,

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \geq \frac{\|Ae_n\|}{\|e_n\|} = \|Ae_n\| = |\lambda_n|.$$

Таким образом, $\|A\| \geq |\lambda_n|$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Но тогда

$$\|A\| \geq \sup_n |\lambda_n| = c, \text{ т. е. } \|A\| = c = \sup_n |\lambda_n|.$$

21. Привести пример линейного нормированного пространства E и таких операторов $A, B \in \mathcal{L}(E, E)$, что $\|AB\| < \|A\| \cdot \|B\|$.

Решение. Пусть $E = C[0; 1]$, а операторы A, B , действующие в $C[0; 1]$, определим соотношениями:

$$(Ax)(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau, \quad (Bx)(t) = tx(t).$$

Очевидно, что операторы A, B линейны. Непрерывность оператора A следует из неравенства

$$\|Ax\| = \max_{0 \leq t \leq 1} \left| \int_0^t x(\tau) d\tau \right| \leq \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t)| \cdot \max_{0 \leq t \leq 1} \int_0^t d\tau = \|x\|,$$

т. е. $\|A\| \leq 1$. Возьмем функцию $x_0(t) \equiv 1$. Тогда $(Ax_0)(t) = \int_0^t d\tau = t$ и, очевидно, $\|Ax_0\| = 1$. Отсюда следует, что

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \geq \|Ax_0\| = 1,$$

т. е. $\|A\| = 1$. Аналогично устанавливаем, что $\|B\| = 1$. Таким образом, $A, B \in \mathcal{L}(C[0; 1], C[0; 1])$.

Рассмотрим теперь оператор AB , действие которого задается формулой

$$(AB)x(t) = A(Bx)(t) = \int_0^t \tau x(\tau) d\tau.$$

Из оценки

$$\begin{aligned} \|(AB)x\| &= \max_{0 \leq t \leq 1} \left| \int_0^t \tau x(\tau) d\tau \right| \leq \\ &\leq \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t)| \cdot \max_{0 \leq t \leq 1} \left| \int_0^t \tau d\tau \right| = \frac{1}{2} \|x\| \end{aligned}$$

получаем, что $\|AB\| \leq \frac{1}{2}$, причем $\|(AB)x_0\| = \frac{1}{2}$, если $x_0(t) \equiv 1$,

т. е. $\|AB\| = \frac{1}{2}$. Следовательно, $\|AB\| = \frac{1}{2} < 1 = \|A\| \cdot \|B\|$.

22. 1) Пусть E — банахово пространство, L и M — подпространства E , $E = L \dot{+} M$. Доказать, что операторы $P_1: E \rightarrow L$, $P_2: E \rightarrow M$, определяемые равенствами

$$P_1x = x_1, P_2x = x_2 \quad (x = x_1 + x_2, x \in E, x_1 \in L, x_2 \in M),$$

являются линейными ограниченными операторами со свойствами: $P_i^2 = P_i$ ($i = 1, 2$), $P_1 + P_2 = I$, $P_1 P_2 = P_2 P_1 = 0$ (такие операторы называются операторами проектирования)

2) Банахово пространство $E = C[-1; 1]$ разложить в прямую сумму двух подпространств L и M так, чтобы $\|P_i\| = 1$, $i = 1, 2$ (P_1, P_2 — операторы проектирования на подпространства L и M соответственно).

Решение. 1) Введем в E новую норму $\|x\|_1 = \|x_1\| + \|x_2\|$. Поскольку $x = x_1 + x_2$, то $\|x\| \leq \|x_1\| + \|x_2\| = \|x\|_1$, т. е. норма $\|\cdot\|$ подчинена норме $\|\cdot\|_1$. Покажем, что пространство E полно и по норме $\|\cdot\|_1$. Если последовательность элементов $x_n = x_n^{(1)} + x_n^{(2)}$ ($n \in \mathbb{N}$) фундаментальна по норме $\|\cdot\|$, то последовательности $(x_n^{(1)})$ и $(x_n^{(2)})$ фундаментальны по норме $\|\cdot\|$. Но поскольку пространство E — банахово относительно нормы $\|\cdot\|$, то $x_n^{(1)} \rightarrow x_1$, $x_n^{(2)} \rightarrow x_2$, причем $x_1 \in L$, $x_2 \in M$ (в силу замкнутости L и M). Тогда $x_n \rightarrow x = x_1 + x_2 \in E$ как по норме $\|\cdot\|$, так и по норме $\|\cdot\|_1$. Поэтому E полно и по норме $\|\cdot\|_1$. Следовательно, на основании теоремы 1 об эквивалентных нормах заключаем, что существует постоянная $c > 0$ такая, что $\|x\|_1 \leq c\|x\|$. Отсюда

$$\|P_i x\| = \|x_i\| \leq \|x\|_1 \leq c\|x\|, \quad i = 1, 2,$$

т. е. операторы P_i ограничены. Выполнение остальных свойств очевидно.

2) Пусть L (соответственно M) — множество всех четных (нечетных) непрерывных на отрезке $[-1; 1]$ функций. Очевидно, L и M —

линейные многообразия в $C[-1; 1]$. Пусть, далее, последовательность $(x_n(t)) \subset L$ и $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, т. е. $x_n(t)$ сходится к $x(t)$ равномерно на отрезке $[-1; 1]$. Тогда

$$x(-t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(-t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = x(t),$$

откуда следует, что $x(t) \in L$, т. е. L — замкнутое линейное многообразие (подпространство) в $C[-1; 1]$. Аналогично устанавливаем, что и M — подпространство в $C[-1; 1]$. Так как каждая функция $x(t) \in C[-1; 1]$ однозначно представима в виде

$$x(t) = \frac{1}{2} [x(t) + x(-t)] + \frac{1}{2} [x(t) - x(-t)],$$

где

$$\frac{1}{2} [x(t) + x(-t)] \in L, \quad \frac{1}{2} [x(t) - x(-t)] \in M,$$

то $C[-1; 1] = L + M$.

Рассмотрим теперь операторы

$$(P_1 x)(t) = \frac{1}{2} [x(t) + x(-t)], \quad (P_2 x)(t) = \frac{1}{2} [x(t) - x(-t)].$$

Ясно, что $\|P_1 x\| \leq \|x\|$, $\|P_2 x\| \leq \|x\|$, т. е. $\|P_1\| \leq 1$, $\|P_2\| \leq 1$. Если взять функцию $x_0(t) \equiv 1$, то $\|P_1 x_0\| = 1$. Тогда

$$\|P_1\| = \sup_{\|x\|=1} \|P_1 x\| \geq \|P_1 x_0\| = 1,$$

т. е. $\|P_1\| = 1$. Аналогично для функции $x(t) = t$ имеем $\|P_2 x\| = 1$, откуда получаем, что $\|P_2\| = 1$. Нетрудно видеть также, что $P_i^2 = P_i$ ($i = 1, 2$), $P_1 + P_2 = I$, $P_1 P_2 = P_2 P_1 = 0$.

23. Доказать, что пространство $\mathcal{L}(E, E)$, где $E = L_2[0; 1]$, не сепарабельно.

Решение. Рассмотрим оператор $A_\lambda : L_2[0; 1] \rightarrow L_2[0; 1]$, определяемый соотношением

$$(A_\lambda x)(t) = \begin{cases} x(t), & 0 \leq t \leq \lambda, \\ 0, & \lambda < t \leq 1, \end{cases}$$

где $\lambda \in (0; 1)$. При каждом $\lambda \in (0; 1)$ $A_\lambda \in \mathcal{L}(E, E)$. Действительно, линейность оператора A_λ очевидна, а ограниченность следует из оценки

$$\|A_\lambda x\| = \left(\int_0^\lambda x^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 x^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} = \|x\|.$$

Множество $M = \{A_\lambda, \lambda \in (0; 1)\} \subset \mathcal{L}(E, E)$ несчетно, ибо оно находится во взаимно однозначном соответствии с несчетным множеством точек интервала $(0; 1)$. Возьмем теперь произвольные две точки $\lambda_1, \lambda_2 \in (0; 1)$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогда

$$(A_{\lambda_1} x)(t) - (A_{\lambda_2} x)(t) = (A_{\lambda_1} - A_{\lambda_2}) x(t) = \begin{cases} x(t), & \alpha \leq t \leq \beta, \\ 0, & t \in [0; 1] \setminus [\alpha; \beta], \end{cases}$$

где $\alpha = \min(\lambda_1, \lambda_2)$, $\beta = \max(\lambda_1, \lambda_2)$; при этом

$$\|(A_{\lambda_1} - A_{\lambda_2})x\| = \left(\int_{\alpha}^{\beta} x^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 x^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} = \|x\|.$$

т. е. $\|A_{\lambda_1} - A_{\lambda_2}\| \leq 1$. Покажем, что $\|A_{\lambda_1} - A_{\lambda_2}\| = 1$.
Для этого возьмем функцию

$$x_0(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\beta - \alpha}}, & \alpha \leq t \leq \beta, \\ 0, & t \in [0; 1] \setminus [\alpha; \beta]. \end{cases}$$

Ясно, что $x_0(t) \in L_2[0; 1]$, $\|x_0\| = \left(\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dt}{\beta - \alpha} \right)^{\frac{1}{2}} = 1$ и

$$(A_{\lambda_1} - A_{\lambda_2})x_0(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\beta - \alpha}}, & \alpha \leq t \leq \beta, \\ 0, & t \in [0; 1] \setminus [\alpha; \beta]. \end{cases}$$

т. е. $(A_{\lambda_1} - A_{\lambda_2})x_0(t) = x_0(t)$. Следовательно, $\|(A_{\lambda_1} - A_{\lambda_2})x_0\| = 1$.
Тогда

$$\|A_{\lambda_1} - A_{\lambda_2}\| = \sup_{\|x\|=1} \|(A_{\lambda_1} - A_{\lambda_2})x\| \geq \|(A_{\lambda_1} - A_{\lambda_2})x_0\| = 1.$$

Учитывая противоположное неравенство $\|A_{\lambda_1} - A_{\lambda_2}\| \leq 1$, получим, что $\|A_{\lambda_1} - A_{\lambda_2}\| = 1$, если $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Таким образом, расстояние между элементами несчетного множества $M \subset \mathcal{L}(E, E)$ равно единице. Отсюда следует, что пространство $\mathcal{L}(E, E)$ не separabelно. Действительно, опишем около каждого элемента A_{λ} из множества M открытый шар радиуса $\frac{1}{3}$

$$B\left(A_{\lambda}, \frac{1}{3}\right) = \left\{ A \in \mathcal{L}(E, E) : \|A - A_{\lambda}\| < \frac{1}{3} \right\}.$$

Эти шары не пересекаются, ибо расстояние между центрами таких шаров, по доказанному, равно единице. Если некоторое множество всюду плотно в $\mathcal{L}(E, E)$, то каждый из построенных шаров должен содержать хотя бы один элемент из этого множества, и, следовательно, это множество не может быть счетно.

24. Пусть E — банахово пространство, $A \in \mathcal{L}(E)$, $\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k t^k$ ($\lambda_k \in \mathbb{R}$) — сходящийся на всем $\mathbb{R}$ степенной ряд. Доказать,

что последовательность $S_n(A) = \sum_{k=0}^n \lambda_k A^k$ имеет при $n \rightarrow \infty$ предел $\varphi(A) \in \mathcal{L}(E)$. При каком условии на числовую последовательность (λ_k) выполняется оценка $\|\varphi(A)\| \leq \varphi\|A\|$?

Решение. Прежде всего отметим, что наличие в пространстве $\mathcal{L}(E)$ операции умножения элементов позволяет определить A^n для любого

$n \in \mathbb{N}$; при этом $\|A^n\| \leq \|A\|^n$. Оператор $\varphi(A)$ зададим (пока что формально) соотношением

$$\varphi(A)x = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k A^k x, \quad x \in E, \quad (10)$$

и напомним, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k A^k x$ называется сходящимся в E , если сходится последовательность его частичных сумм. В банаховом пространстве E всякий абсолютно сходящийся ряд сходится. Корректность формулы (10) вытекает из оценки $\sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k| \|A\|^k = c < \infty$,

которая справедлива в силу условия задачи, т. е. ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k A^k x$ является абсолютно сходящимся, а значит, и сходящимся в E , ибо E — банахово пространство. С помощью этого же неравенства получаем ограниченность оператора

$$\|\varphi(A)x\| = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k A^k x \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k| \|A\|^k \|x\| = c \|x\|, \quad \forall x \in E,$$

т. е. $\|\varphi(A)\| \leq c$. Линейность оператора $\varphi(A)$ легко проверяется. Следовательно, $\varphi(A) \in \mathcal{L}(E)$. Покажем, что $S_n(A) \xrightarrow{\|\cdot\|} \varphi(A)$ при $n \rightarrow \infty$ в $\mathcal{L}(E)$.

Действительно, для любого $x \in E$

$$\|(\varphi(A) - S_n(A))x\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k A^k x \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |\lambda_k| \|A\|^k \|x\|,$$

т. е.

$$\|\varphi(A) - S_n(A)\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |\lambda_k| \|A\|^k \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$ как остаток сходящегося ряда.

Если $\lambda_k \geq 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$, то из приведенных оценок получаем

$$\|\varphi(A)\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k| \|A\|^k = \varphi(\|A\|).$$

25. Пусть A_R ($0 < R \leq \infty$) — пространство всех однозначных и аналитических в круге $|z| < R$ функций с топологией компактной сходимости. Найти общий вид линейных непрерывных отображений $T: A_R \rightarrow A_R$, где $0 < R_1 \leq \infty$ и $0 < R_2 \leq \infty$ — произвольные фиксированные числа.

Решение. Рассматриваемое пространство A_R впервые изучалось в гл. 2, § 1 (пример 2). В гл. 3, § 1 (пример 8) будет отмечен факт его ненормируемости (оно принадлежит к классу счетно-нормируемых пространств, а топология в нем определяется системой норм $\|f\|_r = \max_{|z| \leq r} |f(z)|$, где $f \in A_R$ и $0 < r < R$). Однако, как мы сейчас покажем, все линейные непрерывные отображения $T: A_{R_1} \rightarrow A_{R_2}$

описываются довольно несложно. Отметим, что понятие непрерывности оператора T полностью аналогично определению непрерывности оператора, отображающего одно нормированное пространство в другое, а именно: T непрерывен в точке $f \in A_{R_1}$, если для любой последовательности функций $f_n(z)$ из A_{R_1} , сходящейся (по топологии этого пространства) к $f(z)$, соответствующая последовательность функций $(Tf_n)(z)$ сходится по топологии пространства A_{R_2} к функции $(Tf)(z)$.

Это определение непрерывности оператора T равносильно следующему:

$$\forall r_2 < R_2 \exists r_1 < R_1 \exists C \geq 0: \forall f \in A_{R_1} \|Tf\|_{r_2} \leq C \|f\|_{r_1}. \quad (11)$$

Условие (11) является аналогом условия ограниченности линейного оператора, отображающего одно нормированное пространство в другое.

Пусть $T \in \mathcal{L}(A_{R_1}, A_{R_2})$. Тогда из (11) следует, что

$$\forall r_2 < R_2 \exists r_1 < R_1 \exists C \geq 0: \forall n = 0, 1, \dots \| \varphi_n \|_{r_1} \leq C r_1^n, \quad (12)$$

где $\varphi_n(z) = Tz^n$. При этом для произвольной функции $f(z) \in A_{R_1}$

$$(Tf)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \varphi_n(z), \quad (13)$$

а ряд в правой части (13) сходится к $(Tf)(z)$ по топологии пространства A_{R_2} .

Справедливо и обратное утверждение: если последовательность $(\varphi_n(z))$ функций из A_{R_2} удовлетворяет условию (12), то формула (13) определяет линейный непрерывный оператор $T: A_{R_1} \rightarrow A_{R_2}$. Действительно, его линейность очевидна, а непрерывность вытекает из известных оценок Коши для тейлоровских коэффициентов функции $f(z)$ (т. е. $\frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \leq \frac{\|f\|_r}{r^n} \forall r < R_1$ и $\forall n = 0, 1, \dots$) и оценок $(\forall r_2 < R_2)$

$$\|Tf\|_{r_2} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|f\|_r}{r^n} \|\varphi_n\|_{r_2} \leq C \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_1}{r}\right)^n \|f\|_r = C_1 \|f\|_r,$$

где r_1 взято из условия (12), а $r: r_1 < r < R_1$.

Следовательно, каждый оператор $T \in \mathcal{L}(A_{R_1}, A_{R_2})$ полностью характеризуется (с помощью формулы (13)) некоторой последовательностью $(\varphi_n(z))$ функций из A_{R_2} , удовлетворяющих условию (12). При этом $\varphi_n(z) = Tz^n$, $n = 0, 1, \dots$.

Нетрудно проверить также, что каждый оператор $T \in \mathcal{L}(A_{R_1}, A_{R_2})$ представим и в интегральной форме

$$(Tf)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\rho} t(z, \zeta) f(\zeta) d\zeta,$$

где $f \in A_{R_1}$, $|z| \leq r_2 < R_2$, $t(z, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(z)}{\zeta^{n+1}}$, а ρ удовлетворяет

условию $r_1 < \rho < R_1$. Функцию $t(z, \zeta)$ называют при этом характеристической для оператора T .

На практике, однако, полезно описание операторов T из $\mathcal{L}(A_{R_1}, A_{R_2})$ в матричной форме. Оно получается следующим образом. Пусть $\varphi_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} t_{k,n} z^k$ ($n = 0, 1, \dots$). Тогда, используя оценки Коши для тейлоровских коэффициентов этих функций, нетрудно проверить, что условие (12) равносильно условию

$$\forall r_2 < R_2 \exists r_1 < R_1 \exists C \geq 0: |t_{k,n}| \leq C \frac{r_1^n}{r_2^k} \quad (k, n = 0, 1, \dots). \quad (14)$$

Таким образом, каждому линейному непрерывному оператору $T: A_{R_1} \rightarrow A_{R_2}$, можно сопоставить некоторую бесконечную матрицу $[t_{k,n}]_{k,n=0}^{\infty}$, элементы которой удовлетворяют условию (14), и наоборот. Приведенное матричное описание класса $\mathcal{L}(A_{R_1}, A_{R_2})$ получено (в несколько иной форме) в 60-х годах М. Г. Хаплановым.

26. Исследовать последовательность операторов $(A_n) \subset \mathcal{L}(E, E)$ на равномерную и поточечную сходимость в следующих случаях:

а) $E = l_2$, $A_n x = \left(\frac{\xi_1}{n}, \dots, \frac{\xi_k}{n}, \dots \right)$ ($x = (\xi_k) \in l_2$);

б) $E = l_2$, $A_n x = (\xi_1, \dots, \xi_n, 0, 0, \dots)$ ($x = (\xi_k) \in l_2$);

в) $E = C[0; 1]$, $(A_n x)(t) = t^n (1 - t) x(t)$ ($t \in [0; 1]$);

г) $E = C[0; 1]$, $(A_n x)(t) = n \int_t^{t + \frac{1}{n}} x(\tau) d\tau$ ($t \in [0; 1]$);

д) $E = C[0; 1]$, $(A_n x)(t) = t^n x(t)$ ($t \in [0; 1]$).

Решение. а) Последовательность (A_n) сходится к нулевому оператору равномерно. для любого $x \in l_2$

$$\|A_n x\|^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 = \frac{1}{n^2} \|x\|^2.$$

Следовательно, $\|A_n\| = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

б) Последовательность (A_n) сходится к единичному оператору I поточечно, но не равномерно. Действительно, для любого $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l_2$

$$\|A_n x - x\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |\xi_k|^2 \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$ как остаток сходящегося ряда. Это и означает, что $A_n \rightarrow I$ поточечно. Возьмем теперь при каждом $n \in \mathbb{N}$ элемент $x = e_{n+1} = \underbrace{(0, \dots, 0)}_n, 1, 0, \dots \in l_2$, $\|e_{n+1}\| = 1$. Тогда

$$\|A_n e_{n+1} - e_{n+1}\| = \|e_{n+1}\| = 1.$$

Значит,

$$\|A_n - I\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|A_n x - x\| \geq \|A_n e_{n+1} - e_{n+1}\| = 1 \not\rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$, т. е. равномерной сходимости последовательности операторов A_n к I нет.

в) Последовательность (A_n) сходится равномерно к нулевому оператору. Действительно, для любой функции $x(t) \in C[0; 1]$,

$$\|A_n x\| = \max_{t \in [0; 1]} |t^n (1-t) x(t)| \leq \max_{t \in [0; 1]} |t^n - t^{n+1}| \cdot \|x\| = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \cdot \|x\|,$$

$$\text{и поэтому } \|A_n\| \leq \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

г) Последовательность (A_n) сходится к единичному оператору поточечно, но не равномерно. Действительно, пусть $F(t)$ — первообразная функция для $x(t)$. Тогда

$$n \int_t^{t+\frac{1}{n}} x(\tau) d\tau = \frac{F\left(t + \frac{1}{n}\right) - F(t)}{\frac{1}{n}} \rightarrow F'(t) = x(t).$$

Отсюда и следует поточечная сходимость (A_n) к единичному оператору

Возьмем теперь функцию $x_n(t) = t^{n-1}$ ($n \geq 2$), $\|x_n\| = \max_{t \in [0; 1]} |t^{n-1}| = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \|A_n x_n - x_n\| &= \max_{t \in [0; 1]} \left| n \int_t^{t+\frac{1}{n}} \tau^{n-1} d\tau - t^{n-1} \right| = \max_{t \in [0; 1]} \left| \tau^n \Big|_{\tau=t}^{\tau=t+\frac{1}{n}} - t^{n-1} \right| = \\ &= \max_{t \in [0; 1]} \left| \left(t + \frac{1}{n}\right)^n - t^n - t^{n-1} \right| = \max_{t \in [0; 1]} \left| t^n + t^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2n^2} t^{n-2} + \right. \\ &\quad \left. + \dots + \frac{1}{n^n} - t^n - t^{n-1} \right| \geq \frac{n(n-1)}{2n^2} \max_{t \in [0; 1]} t^{n-2} = \\ &= \frac{n(n-1)}{2n^2} \geq \frac{1}{4} \quad (n \geq 2). \end{aligned}$$

Итак,

$$\|A_n - I\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|A_n x - x\| \geq \|A_n x_n - x_n\| \geq \frac{1}{4} \not\rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$.

д) Последовательность (A_n) не сходится, ибо для произвольно фиксированной функции $x(t) \in C[0; 1]$ такой, что $x(1) \neq 0$, последовательность $(t^n x(t))$ сходится поточечно (в смысле поточечной сходимости последовательности функций) к функции

$$\psi(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1, \\ x(1), & t = 1, \end{cases}$$

которая разрывна и не принадлежит пространству $C[0; 1]$. Следовательно, поточечной (а значит, и равномерной) сходимости последовательности операторов (A_n) нет.

Задачи для самостоятельной работы

1. Найти α , при котором векторы $(1, 2, 3)$, $(1, 1, 0)$ и $(\alpha, 1, 1)$ линейно зависимы.
2. Показать, что в пространстве $C[0; \pi]$ функции $1, \cos t, \cos^2 t$ линейно независимы, а функции $1, \cos 2t, \cos^2 t$ линейно зависимы.
3. Доказать, что два конечномерных линейных пространства (оба вещественные или оба комплексные) изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности совпадают.
4. Пусть E и E_1 — изоморфные конечномерные линейные пространства и отображение $E \ni x \rightarrow \varphi(x) \in E_1$ осуществляет их изоморфизм. Доказать, что $(\varphi(e_k))_{k=1}^n$ — базис в E_1 , если $(e_k)_{k=1}^n$ — базис в E .
5. Доказать, что если M — выпуклое множество, то его ядро $J(M)$ также выпукло.
6. Доказать, что параллелепипед

$$P = \left\{ x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l_2 : |\xi_n| < \frac{1}{2^n}, \forall n \right\}$$

в l_2 есть выпуклое в l_2 множество, но не выпуклое тело.

7. Будет ли выпуклым в пространстве $C[0; 1]$ множество:
 - а) многочленов степени k ;
 - б) непрерывных функций, удовлетворяющих условию $\int_0^1 |x(t)| dt \leq 1$;
 - в) непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих условию $\max_{t \in [0; 1]} |x(t)| + \max_{t \in [0; 1]} |x'(t)| \leq 1$?
8. Доказать, что пересечение любого числа выпуклых множеств есть выпуклое множество.
9. Доказать утверждения:
 - а) если множества M и N линейного пространства E выпуклы, то множества $\lambda M = \{\lambda x : x \in M\}$ и $M \pm N = \{z \in E : z = x \pm y, x \in M, y \in N\}$ также выпуклы;
 - б) множество M выпукло тогда и только тогда, когда $(\lambda + \mu)M = \lambda M + \mu M$ для всех положительных скаляров λ и μ .

10. Выпуклой оболочкой множества M в линейном пространстве E называется множество N всех выпуклых комбинаций элементов из M , т. е. множество всех сумм

$$t_1 x_1 + \dots + t_n x_n, \text{ где } x_i \in M, t_i \geq 0, \sum_{i=1}^n t_i = 1, \text{ а } n - \text{ произвольно. Доказать, что}$$

выпуклая оболочка N является выпуклым множеством.

11. Можно ли в $\mathbb{R}^2$ определить норму формулой

$$\|x\| = \max \{ |\xi_1 + 2\xi_2|, |\xi_1 - \xi_2| \} \quad (x = (\xi_1, \xi_2)) \in \mathbb{R}^2?$$

12. Являются ли нормами на множествах определения функции:

$$а) C[0; 1] \ni x \rightarrow \left(\int_0^1 p(t) |x(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}, \quad p \in C[0; 1], \quad p > 0 \text{ на } [0; 1];$$

$$б) C^{(1)}[0; 1] \ni x \rightarrow \int_a^b |x(t)| dt + \max_{t \in [a; b]} |x'(t)|;$$

$$в) C^{(1)}[0; 1] \ni x \rightarrow \max_{t \in [a; b]} |x'(t)|?$$

13. Можно ли в линейном пространстве $C^{(2)}[a; b]$ дважды непрерывно дифференцируемых на $[a; b]$ функций принять за норму элемента $x(t)$:

а) $|x(a)| + |x'(a)| + \max_{t \in [a; b]} |x''(t)|$;

б) $|x(a)| + |x(b)| + \max_{t \in [a; b]} |x''(t)|$;

в) $\max_{t \in [a; b]} |x''(t)| + \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$?

14. В множестве всех многочленов, степени которых не превышают n ($n \in \mathbb{N}$), определим норму соотношением $\|x\| = \max_{t \in [0; 1]} |x'(t) - x(t)|$. Проверить аксиомы нормы.

15. В пространстве $C^{(k)}[a; b]$ k раз непрерывно дифференцируемых на $[a; b]$ функций определим норму элемента $x(t)$ формулой:

а) $\|x\| = \max_{0 \leq j \leq k} \left\{ \sup_{t \in [a; b]} p_j(t) |x^{(j)}(t)| \right\}$;

б) $\|x\| = \left(\int_a^b \sum_{j=0}^k p_j(t) |x^{(j)}(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}, \quad q \geq 1$;

в) $\|x\| = \sup_{t \in [a; b]} \sum_{j=0}^k p_j(t) |x^{(j)}(t)|$,

где $p_j \in C[a; b]$ ($j = 0, 1, \dots, k$) — положительные функции. Показать, что все аксиомы нормы выполняются и что $C^{(k)}[a, b]$ в случаях а) и в) является банаховым.

16. Пусть T — произвольное множество. Обозначим через $l_\infty(T)$ линейное многообразие в K^T (определение K^T см. в примере 9), состоящее из всех ограниченных на T функций x с нормой $\|x\|_\infty = \sup \{ |x(t)| : t \in T \}$.

а) Доказать, что $l_\infty(T)$ есть банахово пространство.

б) Обозначим через $C(T)$ линейное многообразие в $l_\infty(T)$, состоящее из функций $x(t)$, имеющих конечный предел на бесконечности, т. е. для которых существует такое число $s \in K$, что для любого $\varepsilon > 0$ множество $\{t \in T : |x(t) - s| > \varepsilon\}$ конечно. Доказать, что $C(T)$ — банахово пространство.

в) Обозначим через $C_0(T)$ линейное многообразие в $C(T)$, состоящее из тех функций, для которых $s = 0$. Доказать, что $C_0(T)$ — банахово пространство.

17. Пусть E — пространство всех непрерывных 2π -периодических комплекснозначных функций, определенных на $\mathbb{R}$, с нормой $\|x\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} |x(t)|$. Показать, что E — банахово пространство.

18. Рассмотрим множество последовательностей $x = (\xi_k)$, для которых $\sup_n \left| \sum_{k=1}^n \xi_k \right| < +\infty$. Определим норму в этом пространстве формулой $\|x\| = \sup_n \left| \sum_{k=1}^n \xi_k \right|$. Доказать полноту пространства.

19. Проверить, что множество l_p ($1 \leq p \leq +\infty$) всех последовательностей $x = (\xi_k)$, удовлетворяющих условию $\sum_{k=1}^\infty |\xi_k|^p < +\infty$ при $1 \leq p < +\infty$ и ограниченных при $p = +\infty$, есть банахово пространство относительно нормы

$$\|x\| = \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^\infty |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < +\infty, \\ \sup_{k \geq 1} |\xi_k|, & p = +\infty \quad (x = (\xi_k) \in l_p). \end{cases}$$

Найти условия, при которых функция

$$l_2 \ni x \rightarrow \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k |\xi_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \alpha_k \geq 0, \quad k \in \mathbb{N},$$

является нормой на l_2 .

20. Доказать, что нормированное пространство E является банаховым тогда и только тогда, когда всякий ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$, для которого $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < +\infty$, сходится в E .

21. Выяснить, сходится ли в нормированном пространстве последовательность (x_n) , если:

а) $E = C[0; 1]$, $x_n(t) = t^n - t^{n-1}$;

б) $E = C[0; 1]$, $x_n(t) = \sin t - \sin \frac{t}{n}$;

в) $E = l_1$, $x_n = \left(\underbrace{0, \dots, 0}_n, \frac{1}{n}, 0, \dots \right)$;

г) $E = l_2$, $x_n = \left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}, 0, \dots \right)$;

д) $E = L_1[0; 1]$, $x_n(t) = ne^{-nt}$;

е) $E = L_2[0; 1]$, $x_n(t) = \begin{cases} 1 - nt, & t \in \left[0; \frac{1}{n}\right], \\ 0, & t \in \left(\frac{1}{n}; 1\right]. \end{cases}$

22. Проверить, что нормы $\|x\|_1 = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|$ и $\|x\|_2 = \int_a^b |x(t)| dt$ не эквивалентны в $C[a; b]$.

23. Доказать что в линейном пространстве непрерывных на $[a; b]$ функций

норма $\|x\|_1 = \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$ эквивалентна норме $\|x\|_2 = \left(\int_a^b v(t) |x(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$.

где $v(t)$ непрерывна на $[a; b]$ и $v(t) \geq \alpha > 0$ на $[a; b]$.

24. Эквивалентны ли в пространстве $C^{(1)}[a; b]$ нормы

$$\|x\|_1 = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)| + \max_{a \leq t \leq b} |x'(t)|$$

и

$$\|x\|_2 = |x(a)| + \max_{a \leq t \leq b} |x'(t)|?$$

25. Доказать, что если в нормированном пространстве даны два шара $B[a; r]$ и $B[b; R]$, причем $B[a; r] \subset B[b; R]$, то $r \leq R$ и $\|a - b\| \leq R - r$. Верно ли такое заключение в случае метрического пространства?

26. Доказать, что в банаховом пространстве любая последовательность непустых замкнутых вложенных шаров имеет общую точку.

27. Привести пример последовательности непустых ограниченных замкнутых выпуклых подмножеств M_i некоторого банахова пространства таких, что

$$M_1 \supset M_2 \supset \dots \supset M_n \supset \dots, \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} M_i = \emptyset.$$

28. Доказать, что всякое линейное многообразие в конечномерном линейном нормированном пространстве есть подпространство.

29. Пусть E — линейное нормированное пространство. Доказать, что если L — подпространство, а N — конечномерное подпространство в E , то их сумма

$$L + N = \{z \in E : z = x + y, \quad x \in L, \quad y \in N\}$$

— также подпространство в E . Привести пример двух подпространств в l_2 , сумма которых не является подпространством в l_2 .

30. Образуют ли в пространстве $C[-1; 1]$ подпространство следующие множества функций:

а) монотонные функции;

б) непрерывно дифференцируемые функции;

в) функции $x(t)$, удовлетворяющие условию $\int_{-1}^1 x(t) dt = 0$;

г) функции, удовлетворяющие условию Липшица с какой-нибудь постоянной, зависящей от функции?

31. Доказать, что если рассматривать пространство l_1 как множество в пространстве m , то его замыкание есть c_0 .

32. Доказать, что пространства c_0 и c являются подпространствами нормированного пространства m .

33. В пространстве $C[0; 1]$ рассмотрим множество L таких функций $x(t)$, что $x(1) = 0$. Доказать, что:

а) L — подпространство в $C[0; 1]$;

б) существует такое одномерное подпространство M , что $C[0; 1] = L + M$.

34. Вещественное линейное нормированное пространство E называется строго нормированным, если при $x \neq 0, y \neq 0$ равенство $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ возможно лишь при $y = \alpha x$, где $\alpha > 0$. Доказать, что в строго нормированном пространстве E для каждого $x \in E$ и каждого подпространства $L \subset E$ может существовать не более одного элемента наилучшего приближения x элементами L .

35. Банахово пространство E называется равномерно выпуклым, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $\frac{1}{2} \|x + y\| > 1 - \delta, \|x\| = \|y\| = 1$,

то $\|x - y\| < \varepsilon$. Доказать, что в равномерно выпуклом банаховом пространстве E для каждого $x \in E$ и каждого подпространства L может существовать не более одного элемента наилучшего приближения x элементами L .

36. В пространстве $C[0; 1]$ рассмотрим подпространство $L = \{x(t) \in C[0; 1] : x(0) = 0\}$. Пусть $x_0(t) = 1$. Описать множество элементов наилучшего приближения x_0 элементами L .

37. В пространстве $C[0; 1]$ найти расстояние:

а) от элемента $x_0(t) = t$ до подпространства многочленов нулевой степени;

б) от элемента $x_1(t) = t^2$ до подпространства многочленов степени ≤ 1 .

38. При каком условии на последовательность $(\lambda_k) \subset \mathbb{R}, \lambda_k > 0 (k \in \mathbb{N})$ компактным множеством в пространстве l_2 является:

а) параллелепипед $\{x = (\xi_k) \in l_2 : |\xi_k| \leq \lambda_k, \forall k\}$;

б) эллипсоид $\left\{x = (\xi_k) \in l_2 : \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k^2}{\lambda_k^2} \leq 1\right\}$?

39. Компактны ли следующие множества функций в пространстве $C[0; 1]$:

а) $x_\alpha(t) = \sin \alpha t, \alpha \in [1; 2]$; б) $x_\alpha(t) = \sin \alpha t, \alpha \in \mathbb{R}$; в) $x_\alpha(t) = \operatorname{arctg} \alpha t, \alpha \in \mathbb{R}$?

40. Доказать, что $L_2[0; 1]$ является множеством первой категории в $L_1[0; 1]$.

Указание. Доказать, что множества

$$M_n = \left\{x \in L_2[0; 1] : \int_0^1 x^2(t) dt \leq n, \quad n \in \mathbb{N}\right\}$$

компактны в $L_1[0; 1]$.

41. Являются ли линейными, непрерывными функционалы:

а) $C[0; 1] \ni x \rightarrow \int_0^1 t |x(t)| dt$; б) $C[0; 1] \ni x \rightarrow \|x\|$;

$$в) L_2[0; 1] \ni x \rightarrow \int_0^1 x^2(t) dt; \quad г) l_1 \ni x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{k};$$

д) $L \ni x \rightarrow x'(0)$, где L — линейное пространство $C^{(1)}[0; 1]$ с нормой $\|x\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t)|$, $x \in C^{(1)}[0; 1]$;

$$е) l_2 \ni x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\xi_{2k}}{k}?$$

42. Найти нормы следующих функционалов:

$$а) C[-1; 1] \ni x \rightarrow \frac{x(e) + x(-e) - 2x(0)}{e^2}, \quad e \in (0; 1);$$

$$б) C[-1; 1] \ni x \rightarrow \int_{-1}^1 x(t) dt - \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^n x\left(\frac{k}{n}\right),$$

$n \in \mathbb{N}$ фиксировано;

$$в) L_2[0; 1] \ni x \rightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{t} x(t^2) dt;$$

$$г) L_2[0; 1] \ni x \rightarrow \int_0^1 x(t) \operatorname{sgn}\left(t - \frac{1}{2}\right) dt;$$

$$д) l_1 \ni x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} [1 - (-1)^k] \frac{k-1}{k} \xi_k;$$

$$е) l_2 \ni x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{\sqrt{k(k+1)}}.$$

43. Пусть E_1, E_2 — линейные пространства, $A: E_1 \rightarrow E_2$ — линейный оператор и система элементов $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{D}(A)$ линейно независима. Верно ли, что система элементов $Ax_1, Ax_2, \dots, Ax_n$ линейно независима?

44. Пусть E_1, E_2 — линейные пространства, $A: E_1 \rightarrow E_2$ — линейный оператор, $B \subset R(A)$ — выпуклое множество, $M = \{x \in \mathcal{D}(A): Ax \in B\}$. Будет ли множество M выпуклым?

45. Доказать, что оператор π , отображающий линейное нормированное пространство E в фактор-пространство E/L и ставящий в соответствие элементу $x \in E$ содержащий его класс смежности ξ , является линейным ограниченным.

$$46. \text{ Пусть } (\alpha_{jk})_{j,k=1}^{\infty} \text{ — числовая матрица, для которой } \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{jk}|^2 < +\infty.$$

Доказать, что оператор $A: l_2 \ni x \rightarrow y \in l_2$, где $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$, $y = (\eta_1, \eta_2, \dots)$,

$$\eta_j = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{jk} \xi_k, \quad j \in \mathbb{N}, \text{ является линейным и непрерывным.}$$

47. Доказать линейность и непрерывность оператора $A: C[a; b] \rightarrow C[a; b]$, заданного формулой

$$(Ax)(t) = \int_a^b k(t, \tau) x(\tau) d\tau, \quad t \in [a; b],$$

где $k \in C([a; b] \times [a; b])$.

48. Доказать линейность и непрерывность оператора $A: L_2[a; b] \rightarrow L_2[a; b]$, если $(Ax)(t)$ определяется формулой из задачи 47, в которой $k \in L_2([a; b] \times [a; b])$.

Доказать, что

$$\|A\| \leq \left(\int_a^b \int_a^b |k(t, \tau)|^2 dt d\tau \right)^{\frac{1}{2}}.$$

49. Пусть a — фиксированная функция из $C[0; 1]$ и $(Ax)(t) = a(t)x(t)$, $t \in [0; 1]$. Доказать, что A — линейный непрерывный оператор в $L_p[0; 1]$, $p \geq 1$, и найти его норму.

50. Найти норму тождественного оператора, действующего:

а) из $C^{(1)}[a; b]$ в $C[a; b]$;

б) из $L_p[a; b]$ в $L_q[a; b]$, $p \geq q$.

51. Для каких $\alpha > 0$ оператор $(Ax)(t) = x(t^\alpha)$ линеен и непрерывен в $C[0; 1]$? Найти его норму.

52. Для каких $\alpha > 0$ оператор $(Ax)(t) = x(t^\alpha)$ линеен и непрерывен в $L_2[0; 1]$? Найти его норму.

53. Для каких α, β оператор $(Ax)(t) = t^\beta x(t^\alpha)$ линеен и непрерывен в $L_2[0; 1]$? Найти его норму.

54. Пусть $p, q \in L_2[a; b]$. Доказать, что оператор $A: L_2[a; b] \rightarrow L_2[a; b]$, действие которого задается формулой

$$(Ax)(t) = \int_a^b p(t)q(\tau)x(\tau)d\tau, \quad t \in [a; b],$$

является линейным и непрерывным. Найти норму оператора A .

55. а) Доказать, что оператор $A: L \rightarrow C[a; b]$, где $(Ax)(t) = x'(t)$, а L — пространство непрерывно дифференцируемых на $[a; b]$ функций с нормой $\|x\| = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|$, не является ограниченным.

б) Доказать, что оператор $A: C^{(1)}[a; b] \rightarrow C[a; b]$, где $(Ax)(t) = x'(t)$, является линейным и ограниченным. Найти его норму.

56. Найти общий вид и вычислить норму линейного оператора $A: E_1 \rightarrow E_2$ в следующих случаях:

а) $E_1 = \mathbb{R}_1^m$, $E_2 = \mathbb{R}_1^n$; б) $E_1 = \mathbb{R}_\infty^m$, $E_2 = \mathbb{R}_\infty^n$;

в) $E_1 = \mathbb{R}_1^m$, $E_2 = \mathbb{R}_\infty^n$; г) $E_1 = \mathbb{R}_\infty^m$, $E_2 = \mathbb{R}_1^n$

(определение $\mathbb{R}_1^m$ и $\mathbb{R}_\infty^m$ см. в примере 14).

57. Пусть E — нормированное пространство. Показать, что оператор $A: E \rightarrow E$ является линейным непрерывным в E , и найти его норму, если:

а) $E = l_2$, $Ax = (0, \xi_1, \xi_2, \dots)$, $x = (\xi_k) \in l_2$;

б) $E = l_2$, $Ax = (\xi_2, \xi_3, \dots)$, $x = (\xi_k) \in l_2$;

в) $E = C[0; 1]$, $(Ax)(t) = \int_0^1 t^\alpha \tau^\beta x(\tau) d\tau$, $\alpha \geq 0$, $\beta > -1$

г) $E = C[0; 1]$, $(Ax)(t) = \int_0^1 e^{3t-2\tau} x(\tau) d\tau$;

д) $E = L_2[0; 2\pi]$, $(Ax)(t) = \int_0^{2\pi} \sin(t+\tau)x(\tau) d\tau$;

е) $E = L_2[0; 2\pi]$, $(Ax)(t) = \int_0^{2\pi} \cos(2t+3\tau)x(\tau) d\tau$.

58. Для каких функций $a(t)$ оператор $(Ax)(t) = a(t)x(t)$ непрерывен в $C[0; 1]$? Найти норму оператора A .

59. Проверить, что операторы A и B , где

$$(Ax)(t) = tx(t), \quad (Bx)(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau, \quad t \in [0; 1],$$

линейны и непрерывны в $L_2[0; 1]$, но не являются перестановочными, т. е. $AB \neq BA$.

60. Доказать, что линейный оператор с конечномерной областью определения всегда непрерывен.

61. Пусть A — линейный оператор в нормированном пространстве E . Доказать, что A ограничен тогда и только тогда, когда множество $M = \{x \in E : \|Ax\| < 1\}$ имеет внутренние точки.

62. Доказать, что ядро $\ker A$ линейного непрерывного оператора A замкнуто. Всегда ли замкнута область его значений?

63. Доказать, что ядро $\ker A$ ограниченного оператора $A : E_1 \rightarrow E_2$ является подпространством пространства E_1 .

64. Пусть E_1, E_2 — линейные нормированные пространства, $A : E_1 \rightarrow E_2$ — такой линейный оператор, что $\ker A$ является подпространством в E_1 . Следует ли отсюда, что A — ограниченный оператор?

65. Пусть $A : E_1 \rightarrow E_2$ — линейный оператор с $\mathcal{D}(A) = E_1$, причем $R(A)$ конечномерно, а $\ker A$ замкнуто. Доказать, что A — ограниченный оператор.

66. Пусть E — линейное нормированное пространство, $A : E \rightarrow E$ — ограниченный линейный оператор с $\mathcal{D}(A) = E$. Верно ли, что $E = R(A) \perp \ker A$?

67. Пусть (α_n) — фиксированная последовательность комплексных чисел. Оператор T , для которого $Tz^n = \alpha_n z^n$ ($n = 0, 1, \dots$), назовем диагональным. Доказать, что диагональный оператор T принадлежит множеству $\mathcal{L}(A_{R_1}, A_{R_2})$ тогда и только тогда, когда

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\alpha_n|} \leq \frac{R_1}{R_2}, \text{ если } R_1 < +\infty \text{ и } R_2 < +\infty;$$

$$б) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\alpha_n|} < +\infty, \text{ если } R_1 = +\infty, R_2 \leq +\infty;$$

$$в) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\alpha_n|} = 0, \text{ если } R_2 = +\infty, \text{ а } R_1 < +\infty.$$

68. Найти n -ую степень оператора A , задаваемого формулой

$$(Ax)(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau, \quad t \in [0; 1],$$

и действующего в пространстве $C[0; 1]$.

69. Доказать, что в банаховом пространстве E для любого $A \in \mathcal{L}(E)$ определены операторы

$$\sin A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k A^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \cos A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k A^{2k}}{(2k)!}.$$

70. Пусть E — банахово пространство, $A \in \mathcal{L}(E)$. Доказать, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ сходится в $\mathcal{L}(E)$ тогда и только тогда, когда для некоторого натурального k выполняется неравенство $\|A^k\| < 1$.

71. Пусть E — банахово пространство, $(A_n) \subset \mathcal{L}(E)$, $(B_n) \subset \mathcal{L}(E)$ ($n \in \mathbb{N}$), $A_n \rightarrow A$, $B_n \rightarrow B$, $A, B \in \mathcal{L}(E)$. Доказать, что $A_n B_n \rightarrow AB$.

72. Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства, $(A_n) \subset \mathcal{L}(E_1, E_2)$, $A_n \rightarrow A$ ($A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$). Доказать, что если $x_n \rightarrow x$ ($x_n, x \in E_1$, $n \in \mathbb{N}$), то $A_n x_n \rightarrow Ax$.

73. Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства, $(A_n) \subset \mathcal{L}(E_1, E_2)$, $A_n \rightarrow A$ ($A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$) и K — компакт в E_1 . Доказать, что последовательность (A_n) сходится к A равномерно на K .

74. Доказать, что для последовательности линейных операторов в банаховом пространстве $\mathbb{R}^n$ равномерная и поточечная сходимости совпадают.

75. В пространстве $C[0; 1]$ рассмотрим последовательность операторов $(A_n x)(t) = x(t + \frac{1}{n})$ ($n \in \mathbb{N}$). Доказать, что: а) $A_n \in \mathcal{L}(C[0; 1])$; б) $A_n \rightarrow I$ при $n \rightarrow \infty$. Будет ли сходимость A_n к I равномерной?

76. Пусть $(p_n)_{n=1}^\infty$ — фиксированная последовательность функций из пространства $C[a; b]$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ определим оператор A_n соотношением

$$(A_n x)(t) = p_n(t) x(t), \quad t \in [a; b], \quad x \in C[a; b].$$

При каких условиях на функции p_n последовательность операторов (A_n) сходится: а) равномерно; б) поточечно?

77. Исследовать последовательность операторов $(A_n) \subset \mathcal{L}(E)$ на равномерную и поточечную сходимости в следующих случаях:

а) $E = l_2$, $A_n x = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, \xi_n, \xi_{n+1}, \dots)$, $x = (\xi_k) \in l_2$;

б) $E = l_2$, $A_n x = (\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \dots)$, $x = (\xi_k) \in l_2$;

в) $E = C[0; 1]$, $(A_n x)(t) = \int_0^1 \sqrt{(t-\tau)^2 + \frac{1}{n}} x(\tau) d\tau$;

г) $E = L_2[0; 1]$, $(A_n x)(t) = \int_0^1 t^n \tau^n x(\tau) d\tau$.

Ответы. 1. $\alpha = \frac{2}{3}$. 7. а) Нет; б), в) да. 11. Да. 12. а), б) Да; в) нет.

13. а) — в) Да. 19. При всех $\alpha_k > 0$ ($k = 0, 1, \dots$). 21. а) — в), е) Да; г), д) нет. 24. Да. 25. Нет. 27. В $C[0; 1]$ рассмотреть $M_n = B[0; 2] \cap \{x \in C[0; 1] : x(0) = 0, x(t) \geq 1\}$ при $t \in [\frac{1}{n}; 1]$. 29. $L = \{x \in l_2 : x = (\xi_1, 0, \xi_2,$

$0, \xi_3, 0, \dots)\}$, $M = \{x \in l_2 : x = (\xi_1, \xi_1, \xi_3, \frac{\xi_3}{3}, \xi_5, \frac{\xi_5}{5}, \dots)\}$. 30. а), б) г) Нет;

в) да. 36. Множество элементов вида $\{y(t) \in C[0; 1] : y(0) = 0, 0 \leq y(t) \leq 2,$

$\forall t \in [0; 1]\}$. 37. а) $y^* = \frac{1}{2}$, $\rho(x_0, L) = \frac{1}{2}$; б) $y^* = t - \frac{1}{8}$, $\rho(x_1, L) =$

$\frac{1}{8}$. 38. а) Тогда и только тогда, когда $\sum_{k=1}^\infty \lambda_k^2 < +\infty$; б) тогда и только тогда,

когда $\lambda_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. 39. а) Да; б), в) нет. 41. а)—в) Не линейен, непрерывен; г), е) линейен и непрерывен; д) линейен, но не непрерывен. 42. а) $4e^{-2}$;

б) 3; в) $\frac{1}{2}$; г), е) 1; д) 2. 43. Вообще говоря, нет. 44. Да. 49. $\|A\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |a(t)|$.

50. а), б) 1. 51. $\alpha > 0$, $\|A\| = 1$. 52. $0 < \alpha \leq 1$, $\|A\| = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$. 53. $\alpha > 0$, $\beta > 0$,

$\alpha - 2\beta \leq 1$, $\|A\| = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$. 54. $\|A\| = \|p\| \cdot \|q\|$. 55. б) $\|A\| = 1$. 56. $A : \mathbb{R}^m \ni$

$\ni (\xi_k)_{k=1}^m \rightarrow \left(\sum_{k=1}^m \alpha_{ik} \xi_k \right)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$, $\|A\| = \max_{1 \leq k \leq m} |\alpha_{jk}|$; б) $\|A\| = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{k=1}^m |\alpha_{jk}|$;

в) $\|A\| = \max_{1 \leq j \leq n} |\alpha_{jk}|$; г) $\|A\| = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m |\alpha_{jk}|$. 57. а), б) $\|A\| = 1$; в) $\|A\| = (1 +$

$+\beta)^{-1}$; г) $\|A\| = \frac{1}{2} e^3 (1 - e^{-2})$; д), е) $\|A\| = \pi$. 58. а) $f(t)$ — непрерывна, $\|A\| =$

$\|a\|_{C[0;1]}$. 62. Нет. 64. Нет. 66. Нет. Рассмотреть оператор $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$A(x_1, x_2) = (x_2, 0). \quad 68. (A^n x)(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} x(\tau) d\tau. \quad 75. \text{ Нет.}$$

76. а), б) Последовательность (p_n) сходится в $C[a; b]$. 77. а), б) Поточечно; в), г) равномерно.

§ 4. ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА

В аналитической геометрии и линейной алгебре вводятся важные понятия скалярного произведения векторов и соответственно элементов линейного пространства; при этом центральное место занимают понятия ортогональности и ортонормированного базиса, отсутствующие в нормированных пространствах. Гильбертово пространство (введенное впервые в виде l_2 немецким математиком Д. Гильбертом) является непосредственным обобщением n -мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, поэтому его «геометрия» ближе, чем в случае любого другого банахова пространства, подходит к евклидовой геометрии. Кроме того, оно обладает многими такими свойствами евклидова пространства, которыми банаховы пространства общего вида не обладают. Это обстоятельство позволило развить функциональный анализ на основе гильбертова пространства гораздо шире и полнее, чем на основе общих нормированных пространств, благодаря чему теория гильбертова пространства выделилась в большую самостоятельную ветвь функционального анализа со своими результатами и методами.

1. Понятие гильбертова пространства. Скалярным произведением в действительном линейном пространстве H называется вещественная функция (x, y) , определенная для каждой пары элементов $x, y \in H$ и удовлетворяющая следующим условиям:

$$1) (x, x) \geq 0 \text{ и } (x, x) = 0 \text{ равносильно } x = 0;$$

$$2) (x, y) = (y, x);$$

$$3) (\lambda x, y) = \lambda (x, y) \text{ для любого } \lambda \in \mathbb{R};$$

$$4) (x + y, z) = (x, z) + (y, z).$$

Таким образом, понятие скалярного произведения является естественным обобщением понятия скалярного произведения векторов.

Линейное действительное пространство H с фиксированным в нем скалярным произведением называется *евклидовым* пространством.

Комплексное линейное пространство H называется *унитарным*, если каждой паре его элементов x и y поставлено в соответствие комплексное число (x, y) — скалярное произведение x на y — и если при этом выполняются следующие условия:

$$1) (x, x) \geq 0 \text{ и } (x, x) = 0 \text{ равносильно } x = 0;$$

$$2) (x, y) = \overline{(y, x)} \text{ (черта означает комплексное сопряжение);}$$

$$3) (\lambda x, y) = \lambda (x, y), \lambda \in \mathbb{C};$$

$$4) (x + y, z) = (x, z) + (y, z).$$

Из аксиом 1) — 4) следует, что в каждом унитарном пространстве справедливы также соотношения:

$$а) (x, \lambda y) = \overline{\lambda} (x, y), \text{ б) } (x, y + z) = (x, y) + (x, z).$$

В каждом евклидовом или унитарном пространстве можно ввести норму, полагая $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$. Аксиомы 1) и 2) нормы очевидно выполняются, а аксиома 3) следует из неравенства Коши — Буняковского $|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$, справедливого для любых элементов $x, y \in H$.

Заметим, что $|(x, y)| = \|x\| \|y\|$ (соответственно $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$) тогда и только тогда, когда либо $\|x\| \|y\| = 0$, либо $y = \lambda x, \lambda \in \mathbb{C}$ (соответственно $\lambda \geq 0$).

Пространства со скалярным произведением в классе всех нормированных пространств характеризуются следующим свойством: для того чтобы в нормированном пространстве можно было ввести скалярное произведение (порождающее имеющуюся норму), необходимо и достаточно, чтобы для любых его элементов x и y выполнялось равенство параллелограмма:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2);$$

при этом

$$(x, y) = \frac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4}$$

в вещественном случае и

$$(x, y) = \frac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4} + i \frac{\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2}{4}$$

в комплексном случае.

Отметим, что в евклидовом (унитарном) пространстве сумма, произведение на число и скалярное произведение непрерывны, т. е. если при $n \rightarrow \infty$ имеем $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$ (в смысле сходимости по норме), $\lambda_n \rightarrow \lambda$ (как числовая последовательность), то и $x_n + y_n \rightarrow x + y$, $\lambda_n x_n \rightarrow \lambda x$, $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$.

Пространство H со скалярным произведением называется *гильбертовым*, если оно является полным относительно нормы, порождаемой этим скалярным произведением (т. е. полным относительно расстояния $\rho(x, y) = \|x - y\|$).

Если в гильбертовом пространстве H существует счетное всюду плотное множество, то H называется *сепарабельным гильбертовым* пространством.

Примеры гильбертовых пространств. 1) n -мерное арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$, элементами которого являются наборы действительных чисел $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, с обычными операциями сложения, умножения и скалярным произведением

$$(x, y) = \sum_{k=1}^n \xi_k \eta_k, \quad y = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n,$$

есть гильбертово пространство.

2) Пространство $\mathbb{C}^n$ гильбертово, если скалярное произведение двух наборов комплексных чисел $z = (z_1, \dots, z_n)$ и $w = (w_1, \dots, w_n)$ ввести по формуле

$$(z, w) = \sum_{k=1}^n z_k \overline{w_k}.$$

3) Пространство l_2 , элементами которого являются такие последовательности комплексных чисел (ξ_k) , что $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 < \infty$, есть гильбертово пространство, если скалярное произведение в нем ввести соотношением

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \overline{\eta_k}, \quad x = (\xi_k) \in l_2, \quad y = (\eta_k) \in l_2.$$

Пространство l_2 сепарабельно. В качестве плотного в l_2 счетного множества можно взять совокупность всех векторов с конечным (своим для каждого вектора) числом отличных от нуля компонент при условии, что этими компонентами являются числа вида $\xi + i\eta$, где ξ и η — рациональные числа.

4) Пространство $C_2[a; b]$ всех непрерывных на $[a; b]$ действительных функций является евклидовым относительно скалярного произведения

$$(x, y) = \int_a^b x(t) y(t) dt.$$

Поскольку (см. гл. 2, § 1) пространство $C_2[a; b]$ с нормой $\|x\| = \left(\int_a^b x^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}$ не

полно, то $C_2[a; b]$ представляет пример евклидова, но не гильбертова пространства.

5) Пространство $L_2[a; b]$, состоящее из классов эквивалентных между собой комплекснозначных функций, интегрируемых с квадратом модуля, со скалярным произведением

$$(x, y) = \int_a^b x(t) \overline{y(t)} dt, \quad x, y \in L_2[a; b],$$

есть сепарабельное гильбертово пространство. Счетным всюду плотным множеством в нем является, например, множество многочленов с коэффициентами вида $\xi + i\eta$, где ξ и η — рациональные числа.

б) Примером несепарабельного евклидова пространства есть совокупность $H_{\mathbb{R}}$ вещественных функций, определенных на всей числовой прямой и имеющих не более чем счетное множество значений, отличных от нуля. При этом предполагаем, что $\sum_t x^2(t) < \infty$ (поскольку лишь для не более чем счетного множества значений t функция $x(t)$ отлична от нуля, то указанную сумму можно рассматривать как обычный ряд). Скалярное произведение в $H_{\mathbb{R}}$ определяется по формуле $(x, y) = \sum_t x(t)y(t)$. Данное пространство полно, однако не сепарабельно. Действительно, если

$$x_{\tau}(t) = \begin{cases} 1, & t = \tau, \\ 0, & t \neq \tau, \end{cases}$$

то нетрудно проверить, что $\|x_{\tau} - x_{\tau'}\| = \sqrt{2}$ (если $\tau \neq \tau'$), т. е. при $\tau \neq \tau'$ элементы x_{τ} и $x_{\tau'}$ различны. Множество таких элементов естественным образом находится во взаимно однозначном соответствии с множеством $\mathbb{R}$ и поэтому имеет мощность континуума, откуда и вытекает несепарабельность пространства $H_{\mathbb{R}}$.

3. **Ортогональность. Ортонормированные системы.** Наличие в H скалярного произведения позволяет ввести в этом пространстве не только норму (т. е. длину) вектора, но и угол между векторами. Углом между ненулевыми элементами x и y евклидова пространства называется угол φ , заключенный между 0 и π , такой, что

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}.$$

Если $(x, y) = 0$, то $\varphi = \frac{\pi}{2}$; при этом векторы x и y называются *ортгоналными* ($x \perp y$).

В унитарном пространстве понятие угла между векторами не вводят (поскольку величина $\frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}$, вообще говоря, комплексна и не может быть косинусом какого-нибудь действительного угла), однако понятие ортогональности сохраняется.

Если элемент $x \in H$ ортогонален каждому элементу некоторого множества $L \subset H$ (т. е. $(x, y) = 0, \forall y \in L$), то говорят, что x ортогонален L , и пишут $x \perp L$. Множество всех элементов $x \in H$, ортогональных данному множеству L , обозначается $L^{\perp}$. Отметим, что $L^{\perp}$ является подпространством в H (т. е. замкнутым линейным многообразием), хотя L подпространством может и не быть. Если же в качестве множества $L \subset H$ взять подпространство, то справедлива следующая основополагающая в теории гильбертова пространства теорема.

Теорема 1. Пусть H — гильбертово пространство, $L \subset H$ — подпространство. Тогда $H = L \oplus L^{\perp}$, т. е. любой элемент $x \in H$ допускает единственное представление в виде $x = u + v$, где $u \in L, v \in L^{\perp}$. При этом $\rho(x, L) = \|x - u\| = \|v\|$.

Элемент и называется *проекцией элемента x на подпространство L* . В гильбертовом пространстве, вследствие его полноты и наличия понятия ортогональности элементов, удается полностью решить задачу о наилучшем приближении (наилучшей аппроксимации) элемента $x \in H$ с помощью элементов подпространства L (если существует элемент $u^* \in L$ такой, что $\rho(x, L) = \|x - u^*\|$, то u^* называется *элементом наилучшего приближения x элементами подпространства L*).

Теорема 2. Пусть M — замкнутое множество в гильбертовом пространстве H и $x \notin M$. Тогда существует такой единственный элемент $y \in M$, что $\rho(x, M) = \|x - y\|$.

Поскольку всякое подпространство гильбертова пространства является замкнутым выпуклым множеством, то и в этом случае справедливо утверждение, аналогичное теореме 2.

Напомним, что система элементов $x_1, x_2, \dots$ в H называется *линейно независимой*, если при любом натуральном n система $x_1, x_2, \dots, x_n$ линейно независима.

Определителем Грама элементов $x_1, x_2, \dots, x_n$ называется определитель

$$\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & (x_1, x_2) & \dots & (x_1, x_n) \\ (x_2, x_1) & (x_2, x_2) & \dots & (x_2, x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (x_n, x_1) & (x_n, x_2) & \dots & (x_n, x_n) \end{vmatrix}.$$

Для линейной независимости векторов $x_1, x_2, \dots, x_n$ необходимо и достаточно, чтобы их определитель Грама был отличен от нуля. Определитель Грама линейно независимых векторов всегда положителен. Этот факт можно рассматривать как обобщение неравенства Коши — Буняковского, которое утверждает, что для линейно независимых векторов x_1, x_2 справедливо неравенство

$$\Gamma(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & (x_1, x_2) \\ (x_2, x_1) & (x_2, x_2) \end{vmatrix} = \|x_1\|^2 \cdot \|x_2\|^2 - |(x_1, x_2)|^2 > 0.$$

Система элементов $e_1, e_2, \dots$ в евклидовом (унитарном) пространстве H называется ортогональной, если $(e_i, e_j) = 0$ при $i \neq j$, и ортонормированной, если

$$(e_i, e_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Всякую систему $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ линейно независимых элементов можно превратить в ортонормированную систему с помощью следующего процесса ортогонализации Шмидта, известного из курса линейной алгебры. Полагаем $e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$. Пусть $y_2 = x_2 - c_{21}e_1$. Подберем число c_{21} так, чтобы y_2 было ортогональным e_1 . Очевидно, что для этого следует взять $c_{21} = (x_2, e_1)$. Полагаем $e_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|}$; при этом $\|y_2\| \neq 0$, так как в противном случае $y_2 = 0$ и элементы x_1 и x_2 линейно зависимы, что противоречит условию.

Пусть $e_1, e_2, \dots, e_{k-1}$ уже построены. Возьмем $y_k = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} c_{ki}e_i$ и подберем числа c_{ki} так, чтобы y_k было ортогонально $e_1, e_2, \dots, e_{k-1}$; для этого следует взять $c_{ki} = (x_k, e_i)$.

Полагаем $e_k = \frac{y_k}{\|y_k\|}$, причем снова $\|y_k\| \neq 0$ и т. д. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Пусть $x_1, x_2, \dots$ — линейно независимая система элементов в евклидовом (унитарном) пространстве H . Тогда в H существует такая ортонормированная система элементов $e_1, e_2, \dots$, что

$$e_k = a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kk}x_k, \quad a_{ki} \in \mathbb{R} \text{ (} a_{ki} \in \mathbb{C} \text{)}, \quad a_{kk} \neq 0;$$

$$x_j = b_{j1}e_1 + b_{j2}e_2 + \dots + b_{jj}e_j, \quad b_{kj} \in \mathbb{R} \text{ (} b_{kj} \in \mathbb{C} \text{)}, \quad b_{jj} \neq 0, \quad j, k = 1, 2, \dots$$

Между векторами ортонормированной системы не может быть линейных зависимостей. Поэтому в евклидовом пространстве n измерений всякая ортонормированная система векторов содержит не более n векторов. В бесконечномерном евклидовом (унитарном) пространстве ортонормированные системы содержат бесконечное число элементов, и поэтому возникает вопрос о мощности этих систем. Это решается просто для сепарабельных пространств.

Теорема 4. Если евклидово (унитарное) пространство H сепарабельно, то всякая ортонормированная система векторов в нем является конечным, или счетным, множеством.

4. Замкнутые ортогональные системы. Выбрав в n -мерном евклидовом (унитарном) пространстве ортонормированный базис $e_1, e_2, \dots, e_n$, каждый вектор $x \in \mathbb{R}^n$ ($x \in \mathbb{C}^n$) можно представить в виде $x = \sum_{k=1}^n c_k e_k$, где $c_k = (x, e_k)$; при

этом справедливо равенство $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n |c_k|^2$. Выясним, как можно обобщить эти факты на случай бесконечномерного евклидова (унитарного) пространства H .

Пусть $e_1, e_2, \dots$ — ортонормированная система в H и x — произвольный элемент в H . Сопоставим элементу x последовательность чисел $c_k = (x, e_k)$, $k = 1, 2, \dots$, которые называются *коэффициентами Фурье* элемента x по системе (e_k) , а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$

называется *рядом Фурье* элемента x по системе (e_k) . Многочлен $\sum_{k=1}^n c_k e_k$ — частичная сумма ряда Фурье — называется *многочленом Фурье* элемента x .

Естественно возникает вопрос: сходится ли ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ в H к какому-либо пределу и если он сходится, то совпадает ли его сумма с исходным элементом x ?

Чтобы ответить на эти вопросы, рассмотрим предварительно следующую задачу: при заданном n подобрать коэффициенты α_k ($k = 1, 2, \dots, n$) так, чтобы расстояние между x и суммой $S_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k$ было наименьшим. Справедлива следующая теорема.

Теорема 5. Пусть (e_k) — ортонормированная система в H , L_n — подпространство, натянутое на векторы $e_1, \dots, e_n$. Тогда величина $d_n = \rho(x, L_n)$, $x \in H$, определяется следующими формулами:

$$d_n = \left\| x - \sum_{k=1}^n c_k e_k \right\|, \quad d_n^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2, \quad c_k = (x, e_k). \quad (1)$$

Итак, среди всех сумм $S_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k$ при данном n наименее уклоняется от x частичная сумма ряда Фурье элемента x , т. е. многочлен Фурье элемента x .

Так как $d_n^2 \geq 0$ для произвольного $n \in \mathbb{N}$, то из (1) следует, что $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|x\|^2$.

Это неравенство называется *неравенством Бесселя*.

Ортонормированная система (e_k) называется *замкнутой*, если для любого $x \in H$ справедливо равенство $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|x\|^2$, называемое *равенством Парсеваля*.

Если система (e_k) ортонормирована и замкнута, то для произвольных $x, y \in H$ выполняется также *обобщенное уравнение замкнутости* $(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \bar{\beta}_k$, где α_k и β_k — коэффициенты Фурье элементов x и y соответственно.

Из соотношений (1) следует, что замкнутость системы (e_k) равносильна тому, что для каждого $x \in H$ частичные суммы ряда Фурье $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ сходятся к x . Таким образом, решение задачи о разложении элемента x в ряд Фурье по системе (e_k) сводится к исследованию системы (e_k) на замкнутость.

Из неравенства Бесселя следует, что для того чтобы числа $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ служили коэффициентами Фурье какого-нибудь элемента $x \in H$, необходимо, чтобы ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ сходился. Оказывается, что в полном пространстве это условие не только необходимо, но и достаточно. Справедлива следующая теорема.

Теорема 6 (Рисса — Финшера). Пусть (e_k) — произвольная ортонормированная система в полном евклидовом (унитарном) пространстве H и числа $c_1, c_2, \dots$

..., e_n , ... такие, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ сходится. Тогда существует единственный элемент

$x \in H$ такой, что $c_k = (x, e_k)$ и $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|x\|^2$.

Понятие замкнутости ортонормированной системы тесно связано с понятием полноты, которое означает следующее: ортонормированная система (e_k) называется *полной*, если замыкание ее линейной оболочки L (т. е. замыкание множества всевозможных конечных линейных комбинаций $\sum_{k=1}^n \alpha_k e_k$ при различных n) совпадает с H .

Теорема 7. В сепарабельном евклидовом (унитарном) пространстве H всякая полная ортонормированная система является замкнутой и наоборот.

Приведем еще одну важную теорему.

Теорема 8. Для того чтобы ортонормированная система (e_k) в полном сепарабельном евклидовом (унитарном) пространстве H была полной, необходимо и достаточно, чтобы в H не существовало ненулевого элемента, ортогонального ко всем элементам системы (e_k) .

Теорема 9. Евклидово (унитарное) пространство H имеет полную ортонормированную систему тогда и только тогда, когда оно сепарабельно.

Б. Базисы гильбертова пространства. Важным вопросом при изучении полных систем (e_k) является вопрос о том, образует ли данная система базис сепарабельного пространства, т. е. можно ли любой элемент x из пространства H представить в виде

$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ и притом однозначно (здесь α_k — числа, а ряд сходится по норме пространства).

Заметим, что данное выше определение базиса пространства сохраняется в точности и для сепарабельных банаховых пространств. Интересно отметить, что, хотя для всех основных сепарабельных банаховых пространств базисы построены, вопрос о том, существует ли базис в произвольном сепарабельном банаховом пространстве, оказался сложным и был отрицательно решен совсем недавно (в 1972 г. М. Энфлю построил пример рефлексивного сепарабельного банахова пространства, в котором базис не существует).

Отметим, что если система $(e_k) \subset E$, где E — банахово пространство, полная и не содержит линейно зависимых элементов, то откуда еще не следует, что она является базисом: Действительно, возьмем, например, банахово пространство $C[0; 1]$. Последовательность (t^k) , $k = 0, 1, \dots$, по теореме Вейерштрасса полная в этом пространстве, но базисом не является.

В самом деле, если функция $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$ представляема равномерно сходящимся на $[0; 1]$ рядом, то его радиус сходимости не меньше единицы. Поэтому на $[0; 1]$ $x(t)$ является бесконечно раз дифференцируемой функцией. Ясно, что такими функциями все пространство $C[0; 1]$ не исчерпывается, и потому система (t^k) не является базисом в $C[0; 1]$.

Если же пространство гильбертово и сепарабельно, то оказывается, что полная ортонормированная система является базисом. Справедлива следующая теорема.

Теорема 10. В сепарабельном гильбертовом пространстве H всякая полная ортонормированная система (e_k) является базисом, т. е. для любого $x \in H$ справедливо разложение $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$, $c_k = (x, e_k)$, причем $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$.

В дальнейшем полную ортонормированную систему элементов в сепарабельном гильбертовом пространстве H будем называть ортонормированным базисом.

Подытожив приведенные результаты, приходим к следующему утверждению.

Утверждение. Для того чтобы последовательность элементов (e_k) в сепарабельном гильбертовом пространстве H образовывала ортонормированный базис, необходимо и достаточно, чтобы любой элемент $x \in H$ допускал представление в виде ряда Фурье

$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$, $c_k = (x, e_k)$ (т. е. ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ сходится по норме H и его сумма равна x),

6. Примеры ортонормированных базисов. 1) В пространстве L_2 ортонормированный базис образует система векторов

$$e_k = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{k-1}, 0, \dots), \quad k = 1, 2, \dots$$

2) В пространстве $L_2 [a; b]$ ($-\infty < a < b < +\infty$) ортонормированный базис образует множество

$$\left(\frac{1}{\sqrt{b-a}} e^{2\pi i k \frac{t-a}{b-a}} \right)_{k=-\infty}^{+\infty},$$

а разложение по этому базису совпадает с тригонометрическим рядом Фурье.

Другим примером ортонормированной системы в $L_2 [a; b]$ является система Радемахаера, состоящая из функций

$$x_n(t) = (-1)^k, \quad t \in \left(a + \frac{k}{2^n} (b-a), a + \frac{k+1}{2^n} (b-a) \right), \quad k = 0, 1, \dots, 2^n - 1; \\ n = 0, 1, \dots$$

(на концах этих интервалов $x_n(t) = 0$). Однако эта система неполная (т. е. неортонормированный базис), поскольку функция $x(t) = (t-a)(t-b) + \frac{(b-a)^2}{6}$ ортогональна ко всем функциям системы.

3) В пространстве $L_2 (-\infty; +\infty)$ функций, интегрируемых с квадратом на всей числовой прямой по мере $d\mu = e^{-t^2} dt$, имеющей плотность e^{-t^2} относительно меры Лебега на $\mathbb{R}$, скалярное произведение определяется соотношением

$$(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y(t) e^{-t^2} dt.$$

Это пространство гильбертово, а ортонормированный базис в нем образуют полиномы Чебышева — Эрмита

$$h_n(t) = (-1)^n (2^n n!)^{-\frac{1}{2}} \pi^{-\frac{1}{4}} e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

которые получаются в результате ортогонализации последовательности функций t^n ($n = 0, 1, \dots$).

4) Рассмотрим гильбертово пространство $L_2 (0; +\infty)$ функций, интегрируемых на полупрямой $(0; +\infty)$ по мере $d\mu = e^{-t} dt$ (ее плотность относительно меры Лебега на $\mathbb{R}$ равна e^{-t}), со скалярным произведением

$$(x, y) = \int_0^{+\infty} x(t) y(t) e^{-t} dt.$$

Взяв в нем систему функций t^n ($n = 0, 1, \dots$) и применив к ним процесс ортогонализации, получим систему многочленов Чебышева — Лагерра

$$L_n(t) = \frac{(-1)^n}{n!} e^t \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t}),$$

которые образуют ортонормированный базис в $L_2 (0; +\infty)$.

5) В пространстве $H_{\mathbb{R}}$ ортонормированной системой (но не ортонормированным базисом) является совокупность x_τ , где x_τ — элементы, определенные в п. 2.

7. Изоморфизм сепарабельных гильбертовых пространств. Если $\xi_1, \xi_2, \dots$ — любая последовательность чисел такая, что $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 < +\infty$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k$ схо-

дится в H . Если обозначить его сумму через x , то, умножая x на e_k , будем иметь $\xi_k = (x, e_k)$. Итак, между всевозможными последовательностями чисел со сходящимся рядом из квадратов их модулей, т. е. элементами пространства l_2 , и векторами гильбертова пространства H существует взаимно однозначное соответствие: вектору $x \in H$ ставится в соответствие вектор $\xi = (\xi_k) \in l_2$, координаты которого суть коэффициенты

Фурье вектора x по ортонормированной системе (e_k) : $x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k$. Такое взаимно-

однозначное соответствие между векторами произвольного сепарабельного гильбертова пространства H и векторами гильбертова пространства l_2 сохраняет линейные операции, а также скалярное произведение, т. е.

$$(x, y)_H = (\xi, \eta)_{l_2} = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \overline{\eta_k}, \quad \xi_k = (x, e_k), \quad \eta_k = (y, e_k).$$

Таким образом, любые два сепарабельных гильбертовых пространства изоморфны (т. е. между ними можно установить взаимно однозначное соответствие с сохранением линейных операций и скалярного произведения) между собой, ибо каждое из них изоморфно пространству l_2 . В частности, пространство $L_2[a, b]$ изоморфно l_2 .

В заключение приведем еще одну важную теорему, устанавливающую общий вид линейных непрерывных функционалов в гильбертовом пространстве.

Теорема 11 (Ф. Р и с с а). *Всякий линейный непрерывный функционал f в гильбертовом пространстве H имеет вид*

$$f(x) = (x, a),$$

где a — некоторый элемент из H , однозначно определяемый функционалом f ; при этом $\|f\| = \|a\|$.

Теорема Рисса означает, что сопряженное пространство H^* с точностью до изоморфизма можно отождествить с самим H .

Более детально о гильбертовых пространствах см. в [20; 26; 29; 33].

Примеры решения задач

1. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ — фиксированная последовательность, $\alpha_n > 0, n \in \mathbb{N}$; $l_{2,\alpha}$ — множество всех последовательностей $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$, удовлетворяющих условию $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n |\xi_n|^2 < +\infty$. Проверить, что $l_{2,\alpha}$ со скалярным произведением

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \xi_n \eta_n \quad (y = (\eta_n) \in l_{2,\alpha})$$

является сепарабельным гильбертовым пространством.

Решение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \xi_n \eta_n$ сходится абсолютно, поскольку $\alpha_n |\xi_n \eta_n| \leq \frac{\alpha_n}{2} (|\xi_n|^2 + |\eta_n|^2)$. Аксиомы скалярного произведения проверяются непосредственно. Покажем, что $l_{2,\alpha}$ — полное пространство. Пусть $(x^{(k)}) = ((\xi_n^{(k)}))_{k=1}^{\infty}$ — фундаментальная последовательность в $l_{2,\alpha}$. Это означает, что для произвольного $\varepsilon > 0$ существует номер k_0 такой, что при $r > k_0, s > k_0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n |\xi_n^{(r)} - \xi_n^{(s)}|^2 < \varepsilon^2.$$

Следовательно, при любом $m \in \mathbb{N}$ и подавно

$$\sum_{n=1}^m \alpha_n |\xi_n^{(r)} - \xi_n^{(s)}|^2 < \varepsilon^2. \quad (2)$$

Отсюда следует, что последовательность $(\xi_n^{(k)})_{k=1}^\infty$ при каждом $n \in \mathbb{N}$ сходится к некоторому пределу $\xi_n: \xi_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \xi_n^{(k)}$. Устремляя в неравенстве (2) s к бесконечности, получаем

$$\sum_{n=1}^m \alpha_n |\xi_n^{(r)} - \xi_n|^2 \leq \varepsilon^2 \quad (r > k_0).$$

Поскольку это неравенство справедливо для любого m , то

$$\sum_{n=1}^\infty \alpha_n |\xi_n^{(r)} - \xi_n|^2 \leq \varepsilon^2 \quad (r > k_0). \quad (3)$$

Из сходимости рядов $\sum_{n=1}^\infty \alpha_n |\xi_n^{(r)}|^2$ и $\sum_{n=1}^\infty \alpha_n |\xi_n^{(r)} - \xi_n|^2$ вытекает сходимость ряда $\sum_{n=1}^\infty \alpha_n |\xi_n|^2$ (в силу неравенства $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$). Таким образом, установлено, что последовательность $x = (\xi_n) \in l_{2,\alpha}$. Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, то неравенство (3) означает, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{(k)} - x\|_{l_{2,\alpha}}^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^\infty \alpha_n |\xi_n^{(k)} - \xi_n|^2 = 0.$$

Этим доказано, что $l_{2,\alpha}$ — полное пространство, т. е. гильбертово.

Пространство $l_{2,\alpha}$ сепарабельно. В качестве плотного в $l_{2,\alpha}$ счетного множества можно взять совокупность всех векторов с конечным (своим для каждого вектора) числом отличных от нуля компонент при условии, что этими компонентами являются рациональные числа.

2. Показать, что замкнутый единичный шар в гильбертовом пространстве — строго выпуклое множество.

Решение. Напомним, что отрезком, соединяющим точки x и y гильбертова пространства H , называется совокупность векторов вида $tx + (1-t)y$, где $0 \leq t \leq 1$. Если $z \in H$, $z = tx + (1-t)y$ и $0 < t < 1$, то точка z называется внутренней для рассматриваемого отрезка. Если точка выпуклого множества не служит внутренней для какого-нибудь отрезка, принадлежащего этому множеству, то она называется *крайней точкой* этого множества. Замкнутое выпуклое множество в H называется *строго выпуклым*, если все его граничные точки крайние.

Граничные точки замкнутого единичного шара есть векторы x , для которых $\|x\| = 1$. Поэтому следует показать, что если $x = ty + (1-t)z$, где $0 < t < 1$, $\|x\| = 1$, $\|y\| \leq 1$, $\|z\| \leq 1$, то $x = y = z$. Заметим, что

$$1 = (x, x) = (x, ty + (1-t)z) = t(x, y) + (1-t)(x, z).$$

Поскольку $|(x, y)| \leq \|x\| \|y\| \leq 1$, $|(x, z)| \leq \|x\| \|z\| \leq 1$, то, в силу строгой выпуклости единичного замкнутого круга на плоскости (проверьте это), $(x, y) = (x, z) = 1$. Но тогда неравенство Коши — Буняковского превращается в точное равенство как для пары векторов x, y , так и для пары x, z . Следовательно, векторы y и x и векторы z и x коллинеарны, т. е. $y = \alpha x$, $z = \beta x$, где α, β — числовые коэффициенты. Тогда $1 = (x, y) = (x, \alpha x) = \alpha (x, x) = \alpha$ и аналогично $1 = (x, z) = (x, \beta x) = \beta (x, x) = \beta$, т. е. $\alpha = \beta = 1$. Отсюда $x = y = z$.

3. Доказать, что единичный шар в бесконечномерном гильбертовом пространстве H содержит бесконечно много непересекающихся шаров радиуса $\frac{1}{4}$.

Решение. Пусть $B = \{x \in H : \|x\| \leq 1\}$ единичный шар в H , $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированная система в H , $B_k = \left\{x \in H : \left\|x - \frac{1}{2} e_k\right\| \leq \frac{1}{4}\right\}$, т. е.

B_k — шары с центрами в точках $\frac{1}{2} e_k$ и радиусами $\frac{1}{4}$. Если $x \in B_k$, то $\|x\| = \left\|x - \frac{1}{2} e_k + \frac{1}{2} e_k\right\| \leq \left\|x - \frac{1}{2} e_k\right\| + \frac{1}{2} \|e_k\| \leq \frac{3}{4} < 1$, т. е. $x \in B$, так что $B_k \subset B$ для произвольного $k \in \mathbb{N}$. Покажем, что шары B_k и B_m не пересекаются, если $k \neq m$. Пусть $x \in B_k$, $y \in B_m$. Тогда

$$\begin{aligned} \left\|\frac{1}{2} e_k - \frac{1}{2} e_m\right\| &\leq \left\|\frac{1}{2} e_k - x\right\| + \|x - y\| + \left\|y - \frac{1}{2} e_m\right\| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} + \|x - y\|. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\|x - y\| \geq \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} > 0$ (здесь мы учли, что $\|e_k - e_m\| = \sqrt{2}$, если $k \neq m$). Это и означает, что $B_k \cap B_m = \emptyset$, если $k \neq m$. Следовательно, в шаре B содержится бесконечно много непересекающихся шаров радиуса $\frac{1}{4}$.

4. Доказать, что в нормированных пространствах l_p ($p \geq 1$; $p \neq 2$) и $C[0; 1]$ норма не порождается скалярным произведением.

Решение. Рассмотрим в l_p ($p \geq 1$, $p \neq 2$) два вектора: $x = (1, 1, 0, 0, \dots)$, $y = (1, -1, 0, 0, \dots)$. Тогда $x + y = (2, 0, 0, \dots)$, $x - y = (0, 2, 0, 0, \dots)$. При этом $\|x\| = \|y\| = 2^{\frac{1}{p}}$, $\|x + y\| = \|x - y\| = 2$ и тождество параллелограмма $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ при $p \neq 2$ не выполняется. Следовательно, нормированные пространства l_p при $p \neq 2$ не являются евклидовыми.

Рассмотрим пространство $C[0; 1]$ непрерывных на отрезке $[0; 1]$ функций. Положим $x(t) = \frac{1}{2}$, $y(t) = \frac{1}{2}t$. Тогда $\|x\| = \|y\| = \frac{1}{2}$, $\|x - y\| = \frac{1}{2}$, $\|x + y\| = 1$. Отсюда видно, что тождество параллелограмма для указанных элементов x, y не выполняется, т. е. нормы

в пространстве $C[0; 1]$ нельзя задать с помощью какого бы то ни было скалярного произведения.

Аналогично устанавливается, что пространство $C[a; b]$ непрерывных на любом отрезке $[a; b]$ функций не есть евклидово пространство.

5. Пусть L — линейное многообразие в H . Доказать, что $\bar{L} = H$ тогда и только тогда, когда $L^\perp = \{0\}$.

Решение. Пусть $L^\perp = \{0\}$, т. е. если $(x, y) = 0$ для произвольного $y \in L$, то $x = 0$. Допустим, что L не является всюду плотным в H множеством, т. е. $\bar{L} \neq H$. Это означает, что существует $x_0 \notin \bar{L}$. Так как $\bar{L}$ — подпространство и $x_0 \notin \bar{L}$, то имеет место ортогональное разложение: $x_0 = y_0 + z_0$, где $y_0 \in \bar{L}$, $z_0 \in \bar{L}^\perp$; при этом $z_0 \neq 0$, поскольку $x_0 \notin \bar{L}$. Однако, $(z_0, y) = 0$ для произвольного элемента $y \in \bar{L}$ и, в частности, для $y \in L$. Тогда, согласно условию, $z_0 = 0$. Полученное противоречие и доказывает, что $\bar{L} = H$.

Обратно, пусть $\bar{L} = H$. Допустим, что существует $z_0 \in H$, $z_0 \perp L$. Поскольку $\bar{L} = H$, то существует последовательность элементов $(y_n) \subset L$ такая, что $y_n \rightarrow z_0$. Тогда $0 = (y_n, z_0) \rightarrow (z_0, z_0)$ вследствие непрерывности скалярного произведения. Следовательно, $(z_0, z_0) = 0$, т. е. $z_0 = 0$.

6. Доказать, что замкнутая линейная оболочка L множества всех векторов вида $x_n = \left(1, \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{2n}}, \frac{1}{2^{3n}}, \dots\right)$ всюду плотна в l_2 .

Решение. Согласно предыдущей задаче достаточно показать, что $L^\perp = \{0\}$. Пусть вектор $x = (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots) \in l_2$ ортогонален L , т. е.

$0 = (x, x_n) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k (z_n)^k$, где $z_n = \frac{1}{2^n}$, $n = 1, 2, \dots$. Рассмотрим в

круге $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функцию $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k z^k$. Из неравенств $|\xi_k z^k| \leq \frac{1}{2} (|\xi_k|^2 + |z|^{2k})$ следует равномерная сходимость рассматриваемого ряда внутри K (т. е. на произвольном компакте из K).

Следовательно, $f(z)$ аналитична в K . При этом $f(z_n) = 0$ ($n = 1, 2, \dots$), т. е. $f(z)$ совпадает с нулевой функцией на множестве $M = \left\{z_n : z_n = \frac{1}{2^n}, n = 1, 2, \dots\right\}$, которое имеет предельную точку $z^* = 0$, причем $z^* \in K$. Тогда на основании теоремы единственности для аналитических функций заключаем, что $f(z) \equiv 0$ на K , т. е. все коэффициенты $\xi_k = 0$. Значит, $x = 0$, что и требовалось установить.

7. Пусть L — подпространство гильбертова пространства H , а x — точка, отстоящая от L на расстоянии d , т. е. $d = \rho(x, L) = \inf_{u \in L} \|x - u\|$. Доказать, что для любых двух векторов $y_1, y_2 \in L$ справедливо неравенство Беппо Леви:

$$\|y_1 - y_2\| \leq \sqrt{\|x - y_1\|^2 - d^2} + \sqrt{\|x - y_2\|^2 - d^2}.$$

Исходя из этого неравенства, доказать теорему о существовании

элемента $y \in L$, реализующего расстояние от точки x до подпространства L : $\rho(x, L) = \|x - y\|$.

Решение. Рассмотрим векторы $\frac{x-y_1}{\sqrt{2}}$, $\frac{x-y_2}{\sqrt{2}}$ и запишем для них равенство параллелограмма

$$\|x - y_1\|^2 + \|x - y_2\|^2 = \frac{1}{2} \|2x - (y_1 + y_2)\|^2 + \|y_1 - y_2\|^2.$$

Поскольку L — подпространство в H , то $y_1 + y_2 \in L$ и поэтому

$$\|2x - (y_1 + y_2)\|^2 = 4 \left\| x - \frac{y_1 + y_2}{2} \right\|^2 \geq 4d^2.$$

Тогда

$$\|y_1 - y_2\|^2 \leq \|x - y_1\|^2 + \|x - y_2\|^2 - 2d^2 \leq (\sqrt{\|x - y_1\|^2 - d^2} + \sqrt{\|x - y_2\|^2 - d^2})^2,$$

т. е.

$$\|y_1 - y_2\| \leq \sqrt{\|x - y_1\|^2 - d^2} + \sqrt{\|x - y_2\|^2 - d^2}.$$

Докажем вторую часть утверждения. Для этого используем определение $\inf$: для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $y_n \in L$ такое, что

$$d \leq \|x - y_n\| < d + \frac{1}{n}. \quad (4)$$

Тогда на основании неравенства Беппо Леви

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\| &\leq \sqrt{\|x - y_n\|^2 - d^2} + \sqrt{\|x - y_m\|^2 - d^2} \leq \\ &\leq \sqrt{\left(d + \frac{1}{n}\right)^2 - d^2} + \sqrt{\left(d + \frac{1}{m}\right)^2 - d^2} = \\ &= \sqrt{\frac{2d}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{\frac{2d}{m} + \frac{1}{m^2}}, \end{aligned}$$

откуда получаем фундаментальность последовательности (y_n) .

Вследствие полноты H последовательность (y_n) сходится к некоторому элементу $y \in L$, ибо L замкнуто. Переходя теперь к пределу в неравенстве (4) при $n \rightarrow \infty$, получаем $\|x - y\| = d$. Утверждение доказано.

8. Пусть L — n -мерное подпространство с базисом $h_1, h_2, \dots, h_n$ в вещественном гильбертовом пространстве H , $x \in H$ — произвольный элемент. Доказать, что

$$\rho^2(x, L) = \frac{\Gamma(x, h_1, h_2, \dots, h_n)}{\Gamma(h_1, h_2, \dots, h_n)}.$$

Решение. Обозначим через y проекцию элемента x на подпространство L . Поскольку элементы $h_1, h_2, \dots, h_n$ образуют базис в L , то $y = \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 + \dots + \lambda_n h_n$, где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — некоторые числа. Согласно свойствам ортогональной проекции, разность $x - y = z$ ортогональна подпространству L , т. е. каждому из векторов $h_1, h_2, \dots, h_n$:

$$0 = (z, h_k) = (x, h_k) - \lambda_1 (h_1, h_k) - \dots - \lambda_n (h_n, h_k), \quad k = 1, \dots, n. \quad (5)$$

Но $\rho(x, L) = \|z\| = \|x - y\|$. Отсюда следует, что

$$\rho^2(x, L) = (z, z) = (z, x - y) = (z, x) = (x - y, x).$$

Тогда

$$\rho^2(x, L) = (x, x) - \lambda_1(h_1, x) - \dots - \lambda_n(h_n, x). \quad (6)$$

Исключая λ_k из уравнений (5) и (6), находим, что

$$\begin{vmatrix} (x, x) - \rho^2(x, L) & (h_1, x) & (h_2, x) & \dots & (h_n, x) \\ (x, h_1) & (h_1, h_1) & (h_2, h_1) & \dots & (h_n, h_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (x, h_n) & (h_1, h_n) & (h_2, h_n) & \dots & (h_n, h_n) \end{vmatrix} = 0.$$

$$\text{Отсюда } \rho^2(x, L) = \frac{\Gamma(x, h_1, h_2, \dots, h_n)}{\Gamma_1(h_1, h_2, \dots, h_n)}.$$

9. Пусть L — одномерное подпространство в гильбертовом пространстве H , $a \in L$, $a \neq 0$. Доказать, что для любого $x \in H$

$$\rho(x, L^\perp) = \frac{|(x, a)|}{\|a\|}.$$

Решение. Пусть $y \in L^\perp$. В силу неравенства Коши — Буняковского $|(a, x - y)| \leq \|a\| \|x - y\|$. Поскольку $(a, x - y) = (a, x)$, то $|(a, x)| \leq \|a\| \|x - y\|$, т. е. $\|x - y\| \geq \frac{|(a, x)|}{\|a\|}$. Следовательно,

$$\rho(x, L^\perp) = \inf_{y \in L^\perp} \|x - y\| \geq \frac{|(a, x)|}{\|a\|}.$$

Покажем теперь, что существует элемент $y^* \in L^\perp$ такой, что $\|x - y^*\| = \frac{|(a, x)|}{\|a\|}$; это и будет означать, что $\rho(x, L^\perp) = \frac{|(a, x)|}{\|a\|}$.

Возьмем элемент $y^* = x - \frac{(a, x)}{(a, x^*)} x^*$, где $x^* = \frac{a}{\|a\|}$, $\|x^*\| = 1$. Очевидно, что $y^* \in L^\perp$ и

$$\|x - y^*\| = \frac{|(a, x)|}{|(a, x^*)|} \|x^*\| = \frac{|(a, x)|}{\left| \left(a, \frac{a}{\|a\|} \right) \right|} = \frac{|(a, x)|}{\|a\|}.$$

Утверждение доказано.

10. Пусть K — замкнутое выпуклое множество в гильбертовом пространстве H . Доказать, что в K существует и единствен элемент с наименьшей нормой.

Решение. Покажем вначале, что такой элемент существует. Пусть $\delta = \inf_{x \in K} \|x\|$. Возьмем последовательность положительных чисел (ε_n) , убывающую к нулю. Тогда, по определению нижней грани, в K существует последовательность векторов (x_n) такая, что $\delta \leq \|x_n\| < \delta + \varepsilon_n$, т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \delta$.

Поскольку K — выпуклое множество, то $\frac{x_n + x_m}{2} \in K$ при любых $n, m \in \mathbb{N}$. Но $\left\| \frac{x_n + x_m}{2} \right\| \leq \frac{\|x_n\|}{2} + \frac{\|x_m\|}{2}$ и поэтому $\delta \leq \left\| \frac{x_n + x_m}{2} \right\| < \delta + \frac{\varepsilon_n + \varepsilon_m}{2}$. Следовательно, $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \left\| \frac{x_n + x_m}{2} \right\| = \delta$.

Используя далее тождество параллелограмма

$$2(\|x'\|^2 + \|x''\|^2) = \|x' + x''\|^2 + \|x' - x''\|^2$$

и полагая в нем $x' = x_n, x'' = x_m$, находим, что

$$\|x_n - x_m\|^2 = 2\|x_n\|^2 + 2\|x_m\|^2 - 4\left\| \frac{x_n + x_m}{2} \right\|^2.$$

Таким образом, $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\| = 0$. Это означает, что последовательность (x_n) является фундаментальной, а значит, и сходящейся, т. е. существует элемент $x^* \in K$ (в силу замкнутости K) такой, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x^*\| = 0$. Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \delta$ и $\delta \leq \|x^*\| \leq \|x^* - x_n\| + \|x_n\|$, то, переходя в последнем неравенстве к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем $\delta \leq \|x^*\| \leq \delta$, т. е. $\|x^*\| = \inf_{x \in K} \|x\| = \delta$.

Для завершения доказательства покажем, что такой элемент единствен. Допустим, что в K существует две точки x^*, x^{**} такие, что $\delta = \|x^*\| = \|x^{**}\|$. Так как $\frac{x^* + x^{**}}{2} \in K$, то $\left\| \frac{x^* + x^{**}}{2} \right\| \geq \delta$. Однако,

$$\left\| \frac{x^* + x^{**}}{2} \right\| \leq \frac{1}{2} \|x^*\| + \frac{1}{2} \|x^{**}\| = \delta.$$

Следовательно, $\left\| \frac{x^* + x^{**}}{2} \right\| = \delta$ и поэтому

$$\left\| \frac{x^* + x^{**}}{2} \right\| = \frac{1}{2} \|x^*\| + \frac{1}{2} \|x^{**}\|,$$

т. е. имеем случай, когда неравенство треугольника обращается в равенство. Если $\delta = 0$, то, очевидно, $x^* = x^{**} = 0$. Если же $x^* \neq 0$ (т. е. $\delta > 0$), то $x^{**} = \alpha x^*$, где $\alpha \geq 0$. Тогда

$$\delta = \left\| \frac{x^* + x^{**}}{2} \right\| = \frac{1 + \alpha}{2} \|x^*\| = \frac{1 + \alpha}{2} \delta,$$

откуда $\alpha = 1$, т. е. $x^* = x^{**}$, что и требовалось доказать.

11. Доказать, что в гильбертовом пространстве H любая последовательность непустых вложенных выпуклых замкнутых ограниченных множеств имеет непустое пересечение.

Решение. Пусть $M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset \dots$ — указанная последовательность множеств. Согласно предыдущей задаче в каждом множестве M_n существует единственный элемент a_n с наименьшей нормой, т. е. $\delta_n = \inf_{x \in M_n} \|x\| = \|a_n\|$. Из условия задачи следует, что числовая последовательность (δ_n) монотонно убывает и ограничена снизу нулем.

Таким образом, существует конечный предел этой последовательности: $\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n\|$.

Пусть, например, $n < m$ (случай $n > m$ рассматривается аналогично). В силу выпуклости множеств M_n элемент $\frac{a_n + a_m}{2}$ принадлежит M_n , ибо при $n < m$ $M_m \subset M_n$. Тогда

$$\delta_n \leq \left\| \frac{a_n + a_m}{2} \right\| \leq \frac{1}{2} \|a_n\| + \frac{1}{2} \|a_m\| = \frac{1}{2} \delta_n + \frac{1}{2} \delta_m < \delta_n$$

(здесь мы учли, что $\delta_m < \delta_n$ при $n < m$). Следовательно, $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \left\| \frac{a_n + a_m}{2} \right\| = \delta$. Используя далее тождество параллелограмма, находим, что

$$\|a_n - a_m\|^2 = 2\|a_n\|^2 + 2\|a_m\|^2 - 4\left\| \frac{a_n + a_m}{2} \right\|^2.$$

Отсюда $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|a_n - a_m\| = 0$, т. е. последовательность (a_n) является фундаментальной, а значит, и сходящейся (в силу полноты пространства H). Следовательно, существует элемент $a \in H$ такой, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n - a\| = 0$. Очевидно, что $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$, т. е. $\bigcap_{n=1}^{\infty} M_n \neq \emptyset$.

12. Для функции e^t найти многочлен второй степени $p(t)$ такой, что норма $\|e^t - p(t)\|$ минимальна в $L_2[-1; 1]$.

Решение. Поскольку при заданном n в пространстве со скалярным произведением от элемента x наименее уклоняется его n -я частичная сумма ряда Фурье, то искомый многочлен совпадает с многочленом Фурье второй степени функции e^t , т. е.

$$p(t) = c_0 e_0(t) + c_1 e_1(t) + c_2 e_2(t),$$

где $e_0(t)$, $e_1(t)$, $e_2(t)$ — элементы ортонормированной системы в $L_2[-1; 1]$, $c_k = (e^t, e_k)$ ($k = 0, 1, 2$) — коэффициенты Фурье функции e^t .

Для того чтобы найти $e_0(t)$, $e_1(t)$, $e_2(t)$, применим процесс ортогонализации к линейно независимым функциям 1 , t , t^2 .

Учитывая, что $\|1\| = \left(\int_{-1}^1 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$, найдем $e_0(t)$: $e_0(t) = \frac{1}{\|1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Далее, $e_1(t) = \frac{h_1(t)}{\|h_1\|}$, где $h_1(t) = t - (t, e_0) e_0$. Так как

$(t, e_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 t dt = 0$, то $h_1(t) = t$. Кроме того, $\|h_1\|^2 = (h_1, h_1) = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3}$. Следовательно, $e_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}} t$. Перейдем теперь к

построению функции $e_2(t)$: $e_2(t) = \frac{h_2(t)}{\|h_2\|}$, где

$$h_2(t) = t^2 - (t^2, e_0) e_0 - (t^2, e_1) e_1.$$

$$\text{Нетрудно видеть, что } (t^2, e_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{\sqrt{2}}{3}, \quad (t^2, e_1) = \\ = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^1 t^3 dt = 0.$$

Поэтому $h_2(t) = t^2 - \frac{1}{3}$. Поскольку

$$\|h_2\|^2 = (h_2, h_2) = \int_{-1}^1 \left(t^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dt = \frac{8}{45},$$

то

$$e_2(t) = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \left(t^2 - \frac{1}{3}\right).$$

Итак, чтобы построить искомым многочлен, осталось подсчитать коэффициенты Фурье c_0, c_1, c_2 функции e^t :

$$c_0 = (e^t, e_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 e^t dt = \frac{e^2 - 1}{e\sqrt{2}};$$

$$c_1 = (e^t, e_1) = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^1 t e^t dt = \frac{\sqrt{6}}{e};$$

$$c_2 = (e^t, e_2) = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \int_{-1}^1 \left(t^2 - \frac{1}{3}\right) e^t dt = \frac{\sqrt{5}(e^2 - 7)}{e\sqrt{2}}.$$

Тогда

$$p(t) = c_0 e_0(t) + c_1 e_1(t) + c_2 e_2(t) = \frac{e^2 - 1}{e\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{6}}{e} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} t + \\ + \frac{\sqrt{5}(e^2 - 7)}{e\sqrt{2}} \left(t^2 - \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{4} \frac{11 - e^2}{e} + \frac{3}{e} t + \frac{15}{4} \frac{e^2 - 7}{e} t^2.$$

13. Показать, что последовательность функций $(t^k)_{k=0}^\infty$ полна в $L_2[0; 1]$, но не является базисом в $L_2[0; 1]$.

Решение. Покажем, что система (t^k) полна в $L_2[0; 1]$.

Первый способ. Очевидно, что линейная оболочка L системы (t^k) совпадает с множеством P заданных на $[0; 1]$ алгебраических полиномов $p(t) = \sum_{k=0}^\infty a_k t^k$. Из аппроксимационной теоремы Вейерштрасса следует, что $\bar{L} = \bar{P} = C[0; 1]$, т. е. система (t^k) полна в пространстве $C[0; 1]$, а значит, и в пространстве $L_2[0; 1]$, поскольку непрерывные функции плотны в $L_2[0; 1]$.

Второй способ. Желая доказать полноту системы (t^k) , докажем, что существует функция $x(t) \in L_2[0; 1]$, для которой

$$(x, t^k) = \int_0^1 x(t) t^k dt = 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

Отсюда, интегрируя по частям, получаем равенства

$$\int_0^1 t^k f(t) dt = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (7)$$

где $f(t) = \int_t^1 x(\tau) d\tau$. Поскольку f — непрерывная функция, то в силу теоремы Вейерштрасса для любого $\varepsilon > 0$ существует многочлен $p_n(t) = \sum_{k=0}^n c_k t^k$ такой, что $|f(t) - p_n(t)| < \varepsilon$ ($\forall t \in [0; 1]$). Поэтому, используя соотношения (7), будем иметь

$$\int_0^1 |f(t)|^2 dt = \int_0^1 \bar{f}(t) [f(t) - p_n(t)] dt \leq \varepsilon \int_0^1 |f(t)| dt \leq \varepsilon \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

откуда $\int_0^1 |f(t)|^2 dt \leq \varepsilon^2$. Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, то $f(t) \equiv 0$ и, следовательно, $x(t) = 0$ почти всюду, ибо $f'(t) = -x(t)$ почти всюду.

Перейдем к доказательству того, что система (t^k) не является базисом в пространстве $L_2[0; 1]$. Допустим противное, т. е. что любая функция $x(t) \in L_2[0; 1]$ допускает разложение в ряд по системе (t^k) : $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$, где ряд сходится к $x(t)$ в метрике $L_2[0; 1]$. Умножим скалярно обе части этого равенства на функцию

$$y(t) = \begin{cases} 1, & t \leq s, \\ 0, & t > s, \end{cases} \quad s \in [0; 1].$$

Тогда для любого $s \in [0; 1]$ получим (учтите при этом непрерывность скалярного произведения) равенство

$$\int_0^s x(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \int_0^s t^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} s^{k+1}.$$

В силу произвольности s , $s \in [0; 1]$, ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} s^{k+1}$ сходится на $[0; 1]$. Значит, сумма $f(s)$ этого степенного ряда является на $[0; 1]$ бесконечно раз дифференцируемой функцией. Тогда и $x(t) = f'(t) \in C^{\infty}[0; 1]$. Поскольку такими функциями пространство $L_2[0; 1]$ не исчерпывается, то система (t^k) базисом в $L_2[0; 1]$ не является.

Замечание 1. Можно показать, что система (t^k) полна, но не является базисом в произвольном пространстве $L_2[a; b]$, где $-\infty < a < b < +\infty$.

Замечание 2. Из полноты последовательности функций (t^k) в пространстве $L_2[a; b]$ следует полнота в $L_2[a; b]$ любой последовательности $(p_k(t))$, где $p_k(t)$ — многочлен k -й степени. В частности, полной будет последовательность многочленов,

которая получается из последовательности (t^k) с помощью ортогонализации. Эти ортогональные многочлены называются многочленами Лежандра. Обычно их рассматривают при $a = -1$, $b = 1$ и записывают в виде

$$p_k(t) = \frac{1}{k! 2^k} \sqrt{\frac{2k+1}{2}} \frac{d^k}{dt^k} (t^2 - 1)^k, \quad k = 0, 1, \dots$$

Таким образом, последовательность многочленов Лежандра $(p_k(t))$ является полной ортонормированной системой и в силу теоремы 10 образует ортонормированный базис в $L_2[-1; 1]$.

14. В пространстве $l_{2,\alpha}$ (определение $l_{2,\alpha}$ см. в примере 1) построить ортонормированный базис, если:

а) $\alpha_n = n$; б) $\alpha_n = n^2$; в) $\alpha_n = e^{-n}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$).

Решение. Пусть $\alpha_n = n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$). Покажем, что система (e_n) , где $e_n = \left(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, \frac{1}{\sqrt{n}}, 0, \dots \right)$, образует ортонормированный базис

в $l_{2,\alpha}$. Очевидно, что система (e_n) является ортонормированной относительно введенного в $l_{2,\alpha}$ скалярного произведения. Осталось установить полноту системы (e_n) , т. е. показать, что каждый элемент

$x \in l_{2,\alpha}$ можно представить в виде ряда Фурье: $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$, где

$c_n = (x, e_n) = \sqrt{n} \xi_n$, если $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$. Действительно, $\sum_{n=1}^k c_n e_n = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, 0, \dots)$ и поэтому

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum_{n=1}^k c_n e_n \right\| &= \left\| \underbrace{(0, \dots, 0)}_k, \xi_{k+1}, \xi_{k+2}, \dots \right\| = \\ &= \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} n |\xi_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0, \quad (k \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

как остаток сходящегося ряда. Таким образом,

$$x = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k c_n e_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n,$$

где $c_n = \sqrt{n} \xi_n$ — коэффициенты Фурье элемента x . Этим доказано, что (e_n) — полная ортонормированная система (ортонормированный базис) в $l_{2,\alpha}$.

Аналогично доказывается, что в случае $\alpha_n = n^2$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) ортонормированный базис в $l_{2,\alpha}$ образуют векторы $e_n = \left(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, \frac{1}{n}, 0, \dots \right)$,

а в случае $\alpha_n = e^{-n}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) — векторы $e_n = \left(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, e^{\frac{n}{2}}, 0, \dots \right)$.

15. Пусть $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ — замкнутый единичный круг комплексной плоскости, $A^2(\mathcal{D})$ — совокупность всех аналитических внутри $\mathcal{D}$ и интегрируемых в $\mathcal{D}$ с квадратом модуля функций. Дока-

звать, что множество $A^2(\mathcal{D})$ превращается в гильбертово пространство, если скалярное произведение в нем ввести по формуле

$$(x, y) = \iint_{\mathcal{D}} x(z) \overline{y(z)} dt ds, \quad z = t + is. \quad (8)$$

Проверить, что функции $\varphi_n(z) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} z^n$ ($n = 0, 1, \dots$) образуют ортонормированный базис в $A^2(\mathcal{D})$.

Решение. То, что соотношение (8) определяет скалярное произведение в $A^2(\mathcal{D})$, проверяется непосредственно. Покажем, что множество $A^2(\mathcal{D})$ с введенным скалярным произведением образует гильбертово пространство. С этой целью докажем вначале вспомогательное равенство

$$f(z_0) = \frac{1}{\pi r_0^2} \iint_{\mathcal{D}_{r_0}} f(z) dt ds, \quad z = t + is, \quad r_0 = r_0(z_0), \quad 0 < r_0 < 1,$$

где $z_0 \in \mathcal{D}$, $|z_0| \neq 1$, $f(z) \in A^2(\mathcal{D})$, r_0 — расстояние от точки z_0 до границы единичного круга, $\mathcal{D}_{r_0} = \{z \in \mathcal{D} : |z - z_0| < r_0\}$.

Поскольку функция $f(z)$ аналитична внутри $\mathcal{D}$, то она аналитична и в $\mathcal{D}_{r_0}$ ($\mathcal{D}_{r_0} \subset \mathcal{D}$). Разложим функцию $f(z)$ в круге $\mathcal{D}_{r_0}$ в ряд Тейлора:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad |z - z_0| < r_0.$$

В каждом круге $\mathcal{D}_{\tilde{r}_0} = \{z : |z - z_0| \leq \tilde{r}_0\}$ ($0 < \tilde{r}_0 < r_0$) этот ряд сходится равномерно, и его можно интегрировать почленно:

$$\iint_{\mathcal{D}_{\tilde{r}_0}} f(z) dt ds = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \iint_{\mathcal{D}_{\tilde{r}_0}} (z - z_0)^n dt ds.$$

Нетрудно видеть, что

$$\iint_{\mathcal{D}_{\tilde{r}_0}} (z - z_0)^n dt ds = \int_0^{2\pi} \int_0^{\tilde{r}_0} e^{in\varphi} \rho^{n+1} d\rho d\varphi = \begin{cases} 0, & n = 1, 2, \dots, \\ \pi \tilde{r}_0^2, & n = 0. \end{cases}$$

Тогда

$$\iint_{\mathcal{D}_{\tilde{r}_0}} f(z) dt ds = a_0 \cdot \pi \tilde{r}_0^2 = f(z_0) \cdot \pi \tilde{r}_0^2.$$

Устремив здесь $\tilde{r}_0$ к r_0 , получим

$$\iint_{\mathcal{D}_{r_0}} f(z) dt ds = f(z_0) \cdot \pi r_0^2,$$

что и требовалось доказать. Далее имеем

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \iint_{\mathcal{D}} |f(z)|^2 dt ds \geq \iint_{\mathcal{D}_{r_0}} |f(z)|^2 dt ds \geq \frac{1}{\pi r_0^2} \left| \iint_{\mathcal{D}_{r_0}} f(z) dt ds \right|^2 = \\ &= \pi r_0^2 |f(z_0)|^2. \end{aligned}$$

Вдeсь мы воспользовались неравенством Коши — Буняковского

$$|(f, 1)|^2 = \left| \iint_{\mathcal{D}_{r_0}} f(z) dt ds \right|^2 \leq \iint_{\mathcal{D}_{r_0}} |f(z)|^2 dt ds \cdot \pi r_0^2.$$

Итак,

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi} r_0} \|f\|, \quad z_0 \in \mathcal{D}, \quad r_0 = r_0(z_0), \quad |z_0| \neq 1.$$

Перейдем к доказательству основного утверждения (т. е. к доказательству полноты пространства $A^2(\mathcal{D})$). Пусть $(f_n(z))$ — фундаментальная последовательность в $A^2(\mathcal{D})$. Из последнего неравенства следует, что

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi} r(z)} \|f_n - f_m\|; \quad n, m \in \mathbb{N},$$

для любого $z \in \mathcal{D}$, $|z| \neq 1$ ($r(z)$ — радиус наибольшего открытого круга с центром в точке z , содержащегося в $\mathcal{D}$). Следовательно, если $\mathbb{K}$ — компактное множество в $\mathcal{D}$, то $r(z) \geq \alpha > 0$ для всех $z \in \mathbb{K}$, где α — расстояние от границы компакта $\mathbb{K}$ до границы круга $\mathcal{D}$. Тогда

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi} \alpha} \|f_n - f_m\|, \quad z \in \mathbb{K}.$$

Используя фундаментальность последовательности (f_n) в $A^2(\mathcal{D})$ и эту оценку, заключаем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $z \in \mathbb{K}$ выполняется неравенство

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi} \alpha},$$

если только $n, m \geq n_0$. Тогда согласно критерию Коши на компакте $\mathbb{K}$ последовательность функций $(f_n(z))$ сходится равномерно к некоторой функции, аналитической (в силу теоремы Вейерштрасса) на этом компакте. Используя далее теорему единственности для аналитических функций, получаем, что существует аналитическая внутри $\mathcal{D}$ функция $f(z)$, к которой сходится последовательность $(f_n(z))$. В то же время из полноты пространства $L_2(\mathcal{D})$ вытекает существование комплекснозначной суммируемой с квадратом модуля (не обязательно аналитической) функции $g(z)$ на $\mathcal{D}$ такой, что $f_n \rightarrow g$ по норме пространства $L_2(\mathcal{D})$. Отсюда следует, что некоторая подпоследовательность последовательности функций $(f_n(z))$ сходится к $g(z)$ почти всюду. Значит, $f(z) = g(z)$ почти всюду. Таким образом, функция $f(z)$ также интегрируема с квадратом модуля, т. е. $f \in A^2(\mathcal{D})$.

Покажем теперь, что функции $\varphi_n(z) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} z^n$ образуют ортонормированную систему в $A^2(\mathcal{D})$. Для каждого $r \leq 1$ имеем

$$\begin{aligned} \iint_{|\varphi| \leq r} \varphi_n(z) \overline{\varphi_m(z)} dt ds &= \frac{V(n+1)(m+1)}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^r e^{i(n-m)\varphi} \rho^{n+m+1} d\rho d\varphi = \\ &= \frac{2V(n+1)(m+1)}{n+m+2} r^{n+m+2} \delta_{n,m}, \end{aligned}$$

где

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 1, & \text{если } n = m, \\ 0, & \text{если } n \neq m. \end{cases}$$

Положив $r = 1$, получим $(\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{n,m}$ ($n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$), т. е. система $(\varphi_n(z))$ является ортонормированной.

Покажем ее полноту в $A^2(\mathcal{D})$. Пусть функция $x(z)$ из $A^2(\mathcal{D})$ ортогональна к функциям $\varphi_n(z)$, $n = 0, 1, \dots$. Поскольку $x(z)$ аналитична внутри $\mathcal{D}$, то

$$x(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{n+1} \right)^{\frac{1}{2}} c_n \varphi_n(z), \quad |z| < 1.$$

Отсюда для каждого $r < 1$ (ввиду равномерной сходимости соответствующего ряда в круге $|z| \leq r$) имеем

$$\begin{aligned} \iint_{|z| \leq r} x(z) \overline{\varphi_m(z)} dt ds &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sqrt{\frac{\pi}{n+1}} \frac{\sqrt{(n+1)(m+1)}}{n+m+2} e^{n+m+2} \delta_{n,m} = \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{m+1}} r^{2(m+1)} c_m \quad (m = 0, 1, \dots). \end{aligned}$$

Устремив здесь r к единице, получим

$$\sqrt{\frac{\pi}{m+1}} c_m = (x, \varphi_m) = 0 \quad (m = 0, 1, \dots),$$

т. е. $x(z) \equiv 0$. Следовательно, система $(\varphi_n(z))$ полна в $A^2(\mathcal{D})$, и поэтому по теореме 7 она образует ортонормированный базис этого пространства.

Замечание. Если $x(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ($|z| < 1$), то из тождества

$$\iint_{|z| \leq r} |x(z)|^2 dt ds = \pi \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \frac{r^{2n+2}}{n+1} \quad (\forall r: 0 < r < 1)$$

следует, что $x(z)$ принадлежит $A^2(\mathcal{D})$ тогда и только тогда, когда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n+1} < +\infty$.

Иными словами, соответствие

$$x(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (|z| < 1) \leftrightarrow a = (a_n)_{n=0}^{\infty}$$

является изоморфизмом между $A^2(\mathcal{D})$ и l_2 , где $\alpha = \left(\sqrt{\frac{\pi}{n+1}} \right)_{n=0}^{\infty}$ (см. пример 1). Поэтому все сформулированные утверждения можно получить из соответствующих утверждений примера 1. Рекомендуем читателю убедиться в справедливости этого замечания самостоятельно.

16. Пусть H — гильбертово пространство, $L \subset H$ — подпространство, f — ограниченный линейный функционал, заданный на L .

Доказать, что существует единственное продолжение f на все пространство H с сохранением нормы.

Решение. Так как L является подпространством в H , то в силу теоремы Рисса существует однозначно определяемый функционалом f элемент $a \in L$ такой, что $f(x) = (x, a) \ (\forall x \in L)$ и $\|f\| = \|a\|$.

Определим функционал g на H равенством $g(x) = (x, a)$, $x \in H$. Функционал g является продолжением f на все пространство H , причем $\|g\| = \|f\|$. Действительно, $g(x) = (x, a) = f(x)$, если $x \in L$ (т. е. $f = g$ на L). Кроме того, $|g(x)| \leq \|x\| \cdot \|a\|$, т. е. $\|g\| \leq \|a\|$. Однако, взяв $x = a$, получим $g(a) = (a, a) = \|a\|^2$, откуда следует, что $\|g\| = \|a\| = \|f\|$. Покажем, что всякое другое расширение φ линейного функционала f на все пространство H имеет норму, большую $\|f\|$. Действительно, если φ есть расширение f на все пространство, то в силу теоремы Рисса существует элемент $a_1 \in H$ такой, что $\varphi(x) = (x, a_1) \ (\forall x \in H)$ и $\|\varphi\| = \|a_1\|$. Если $x \in L$, то справедливо равенство

$$(x, a_1) = \varphi(x) = f(x) = (x, a),$$

т. е. $(x, a_1 - a) = 0$, откуда видно, что $a_1 - a \in L^\perp$. Так как $a \in L$, то

$$\|a_1\|^2 = \|a + a_1 - a\|^2 = (a + a_1 - a, a + a_1 - a) = \|a\|^2 + \|a_1 - a\|^2.$$

Отсюда $\|\varphi\| \geq \|f\|$, причем знак равенства не имеет места, если $a_1 \neq a$. Этим доказано, что функционал g является единственным продолжением функционала f на все пространство H с сохранением нормы.

Задачи для самостоятельной работы

1. Доказать, что в пространстве со скалярным произведением справедлива

теорема Пифагора: если $(x_k, x_l) = 0$, $k \neq l$, и $x = \sum_{k=1}^n x_k$, то $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2$.

2. Доказать, что в пространстве со скалярным произведением:

а) для любых элементов x, y, z справедливо **тождество Аполлония**

$$\|z - x\|^2 + \|z - y\|^2 = \frac{1}{2} \|x - y\|^2 + 2 \left\| z - \frac{x + y}{2} \right\|^2;$$

б) для любых элементов x, y, z, t справедливо **неравенство Птолемея**

$$\|x - z\| \|y - t\| \leq \|x - y\| \|z - t\| + \|y - z\| \|x - t\|.$$

3. Определяет ли в $\mathbb{R}^n$ скалярное произведение функция $\varphi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, если:

а) $\varphi(x, y) = \sum_{k=1}^n (\xi_k + \eta_k)$;

б) $\varphi(x, y) = \sum_{k=1}^n k \xi_k \eta_k$,

где $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $y = (\eta_1, \dots, \eta_n)$?

4. Доказать, что функция

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi_k \eta_k, \quad 0 < \alpha_k \leq 1 \quad (\forall k \in \mathbb{N}),$$

где $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$, $y = (\eta_1, \eta_2, \dots)$, определяет скалярное произведение в l_2 . Будет ли полученное евклидово пространство гильбертовым?

5. Доказать, что функция

$$(x, y) = \int_a^b x(t) y(t) dt + \int_a^b x'(t) y'(t) dt$$

определяет скалярное произведение в пространстве $C^1[a; b]$ непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a; b]$ функций. Является ли пространство $C^1[a; b]$ гильбертовым?

6. В линейном пространстве определенных на $(-\infty; +\infty)$ функций $x(t)$ таких, что интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 e^{-t^2} dt$ сходится, введем скалярное произведение

$$(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y(t) e^{-t^2} dt.$$

Доказать полноту этого пространства.

7. В линейном пространстве определенных на $[0; +\infty)$ функций $x(t)$ таких, что интеграл $\int_0^{+\infty} |x(t)|^2 e^{-t} dt$ сходится, введем скалярное произведение

$$(x, y) = \int_0^{+\infty} x(t) y(t) e^{-t} dt.$$

Доказать полноту этого пространства.

8. Доказать, что в гильбертовом пространстве над числовым полем K элементы x и y ортогональны тогда и только тогда, когда:

а) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ при $K = \mathbb{R}$,

б) $\|\lambda x + \mu y\|^2 = \|\lambda x\|^2 + \|\mu y\|^2$ для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ при $K = \mathbb{C}$.

9. Доказать, что в пространстве H со скалярным произведением соотношение $\|x\| + \|y\| = \|x + y\|$ ($x, y \in H$) выполняется тогда и только тогда, когда или $x = 0$, или $y = \lambda x$ при некотором $\lambda \geq 0$.

10. Пусть в нормированном пространстве E справедливо равенство ромба: при любых $x, y \in E$ таких, что $\|x\| = \|y\| = 1$, выполняется равенство $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 4$. Доказать, что в E можно ввести скалярное произведение, порождающее имеющуюся норму.

11. Доказать справедливость в гильбертовом пространстве поляризационного тождества

$$4(x, y) = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2.$$

12. Доказать, что в нормированных пространствах C_0 и m норма не порождается скалярным произведением.

13. Пусть H — гильбертово пространство, $(x_n) \subset H$, $(y_n) \subset H$, $\|x_n\| = 1$, $\|y_n\| = 1$, $n \in \mathbb{N}$. Доказать справедливость утверждений:

а) $(x_n, y_n) \rightarrow 1 \Rightarrow \|x_n - y_n\| \rightarrow 0$;

б) $\|x_n + y_n\| \rightarrow 2 \Rightarrow \|x_n - y_n\| \rightarrow 0$.

14. Пусть (e_n) — ортонормированная система в гильбертовом пространстве H , (λ_n) — последовательность вещественных или комплексных чисел. Доказать, что

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$ сходится в H тогда и только тогда, когда $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 < +\infty$.

15. Пусть $M \subset H$. Доказать утверждения: а) $M \subset M^{\perp\perp}$; б) $M = M^{\perp\perp}$ тогда и только тогда, когда M — подпространство; в) $M^{\perp} = M^{\perp\perp\perp}$.

16. В $L_2[0; 1]$ найти ортогональное дополнение к множеству:

а) $P[0; 1]$ всех многочленов, рассматриваемых на $[0; 1]$;

б) $\{x(t) = y(t^2), t \in [0; 1] : y \in P[0; 1]\}$;

в) $\{x \in P[0; 1] : x(0) = 0\}$.

17. В пространстве $L_2 [-\pi; \pi]$ найти $M^\perp$, если:

- а) $M = L (\{e^{-int}, n \in \mathbb{Z}\})$; б) $M = L (\{e^{-int}, n \geq 0\})$; в) $M = L (\{\sin nt, n \geq 1\})$; г) $M = L (\{\cos nt, n \geq 0\})$, где $L(N)$ обозначает линейную оболочку множества N .

18. В евклидовом пространстве H введем угол между векторами x и y по формуле

$$\varphi(x, y) = \arccos \frac{|(x, y)|}{\|x\| \|y\|}.$$

Показать, что если x принадлежит подпространству $L \subset H$, y' — проекция y на L , то $\varphi(x, y') \leq \varphi(x, y)$. Исследовать случай равенства.

19. Доказать, что при фиксированном натуральном n множество

$$M = \left\{ x \in l_2, x = (\xi_1, \xi_2, \dots) : \sum_{k=1}^n \xi_k = 0 \right\}$$

является подпространством пространства l_2 . Описать такое подпространство N , что $l_2 = M \oplus N$.

20. Пусть M — замкнутое выпуклое множество в вещественном гильбертовом пространстве H . Доказать, что элемент $y \in M$ удовлетворяет условию $\rho(x, M) = \|x - y\|$ ($x \in H$) тогда и только тогда, когда для любого $z \in M$ выполняется неравенство $(x - y, y - z) \geq 0$.

21. В пространстве l_2 построить замкнутое множество, в котором нет элемента с наименьшей нормой.

22. В пространстве $L_2 [0; 1]$ найти расстояние от элемента $x_0(t) = t^2$ до подпространства

$$L = \left\{ x(t) \in L_2 [0; 1] : \int_0^1 x(t) dt = 0 \right\}.$$

23. В пространстве l_2 найти расстояние $\rho_n(x_0, L)$ от элемента $x_0 = (1, 0, 0, \dots)$ до подпространства

$$L = \left\{ x \in l_2, x = (\xi_1, \xi_2, \dots) : \sum_{k=1}^n \xi_k = 0 \right\}.$$

Чему равен $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n(x_0, L)$?

24. Пусть $\mathcal{D}$ — замкнутый единичный круг комплексной плоскости, $A^2(\mathcal{D})$ — множество тех функций из $L_2(\mathcal{D})$, которые аналитичны внутри $\mathcal{D}$. Доказать, что $A^2(\mathcal{D})$ есть пополнение по норме $L_2(\mathcal{D})$ множества $P(\mathbb{C})$ всех многочленов в $\mathbb{C}$.

25. К последовательности $1, z, z^2, \dots, z = t + iz$, применить процесс ортогонализации относительно следующего скалярного произведения на множестве всех многочленов $P(\mathbb{C})$:

$$(x, y) = \int_{\mathbb{C}} x(z) \overline{y(z)} e^{-|z|^2} dtds, \quad x, y \in P(\mathbb{C}).$$

Описать пополнение множества $P(\mathbb{C})$. Входит ли в это пополнение функция $e^{-|z|^2}$, $z \in \mathbb{C}$?

26. Пусть L — линейная оболочка множества $\{e^{i\lambda t}, \lambda \in \mathbb{R}\}$, в которой введено скалярное произведение

$$(x, y) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) \overline{y(t)} dt, \quad x, y \in L.$$

Доказать, что:

$$a) (e^{i\lambda t}, e^{i\mu t}) = \delta_{\lambda, \mu} = \begin{cases} 1, & \lambda = \mu, \\ 0, & \lambda \neq \mu; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \end{cases}$$

б) пополнение множества L не сепарабельно.

27. Проверить ортогональность в H следующих систем:

а) $H = l_2$, $x_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$, $n \in \mathbb{N}$;

б) $H = l_2$, $x_n = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{2n}, 0, 0, \dots)$.
 $\xi_1 = \dots = \xi_{2n-1} = 1$, $\xi_{2n-1+1} = \dots = \xi_{2n} = -1$, $n \in \mathbb{N}$;

в) $H = L_2[0; 2\pi]$, $\{1, \cos nt, \sin nt, n \in \mathbb{N}\}$;

г) $H = L_2[a; b]$, $x_n(t) = \frac{1}{\sqrt{b-a}} e^{\frac{2\pi i n (t-a)}{b-a}}$, $n \in \mathbb{Z}$;

д) $H = L_2[a; b]$, $x_n(t) = \frac{d^n}{dt^n} [(t-a)(t-b)]^n$, $n = 0, 1, \dots$;

е) $H = L_2[0; +\infty)$, $x_n(t) = e^{-\frac{t}{2}} \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t})$, $n = 0, 1, \dots$;

ж) $H = L_2[0; 1]$, $x_n(t) = \frac{\sqrt{2}}{\sin \mu_n} \sin \mu_n t$, где (μ_n) — положительные корни

уравнения $\operatorname{tg} \mu = \mu$.

28. Проверить, что функции $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nt$ ($n \in \mathbb{N}$) образуют ортонормированный базис в $L_2[0; \pi]$, но в то же время это только ортогональная система в $L_2[-\pi; \pi]$, не являющаяся базисом.

29. Доказать, что система функций Хаара $\{x_{kn}, 1 \leq k \leq 2^n, n \in \mathbb{N}\}$,

$$x_{kn}(t) = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}}, & \text{если } t \in \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k-\frac{1}{2}}{2^n} \right), \\ -2^{\frac{n}{2}}, & \text{если } t \in \left[\frac{k-\frac{1}{2}}{2^n}, \frac{k}{2^n} \right), \\ 0, & \text{если } t \in [0; 1] \setminus \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n} \right), \end{cases}$$

является ортонормированным базисом в $L_2[0; 1]$.

30. Многочлены, получающиеся при ортогонализации функций $1, t, t^2, \dots$ в пространстве $L_2[-1; 1]$, называются многочленами Лежандра. Показать, что n -й многочлен Лежандра имеет вид

$$p_n(t) = c_n [(t^2 - 1)^n]^{(n)},$$

где $c_n = \frac{1}{n! 2^n} \sqrt{\frac{2n+1}{2}}$.

31. Во множестве функций, удовлетворяющих условию

$$\int_{-1}^1 \frac{x^2(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt < +\infty,$$

определим скалярное произведение по формуле

$$(x, y) = \int_{-1}^1 \frac{x(t) y(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

Показать, что ортогонализация системы функций $x_n(t) = t^n$ ($n = 0, 1, \dots$) относительно этого скалярного произведения приводят к многочленам Чебышева

$$T_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(n \arccos t), \quad n \geq 1, \quad T_0(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

32. В $L_2[-1; 1]$ построить проекции любой функции на подпространства четных и нечетных функций.

33. Пусть $x \in H$. Построить его проекцию на n -мерное подпространство $L \subset H$.

34. Для функции t^3 найти многочлены $p_n(t)$ степени $n = 0, 1, 2$ такие, что норма $\|t^3 - p_n(t)\|$ минимальна в $L_2[-1; 1]$.

35. Доказать, что $L + M$ является подпространством гильбертова пространства H , если L и M — подпространства, удовлетворяющие соотношению

$$\sup \{ |(x, y)|, \|x\| = \|y\| = 1, x \in L, y \in M \} < 1 - \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

36. Пусть (e_k) — ортонормированный базис в гильбертовом пространстве H . Положим

$$x_k = \cos \frac{1}{k} \cdot e_{2k} + \sin \frac{1}{k} \cdot e_{2k+1}.$$

Обозначим через L подпространство с ортонормированным базисом (e_{2k}) , а через M — подпространство с ортонормированным базисом (x_k) . Тогда векторное подпространство $L + M$ не замкнуто. Доказать это утверждение.

37. Показать, что многочлены Лежандра $P_{2n}(t)$, $n \geq 0$ (соответственно $P_{2n+1}(t)$, $n \geq 0$) образуют ортонормированный базис в пространстве четных (нечетных) суммируемых с квадратом функций на отрезке $[-1; 1]$ (определение этих многочленов см. в задаче 30).

38. Пусть $(x_n(t))$ — ортонормированная система в пространстве $L_2[a; b]$, $(y_n(t))$ — ортонормированная система в пространстве $L_2[b; c]$. Положим

$$z_n(t) = \begin{cases} \lambda x_n(t), & a \leq t \leq b, \\ \mu y_n(t), & b < t \leq c, \end{cases}$$

где $\lambda^2 + \mu^2 = 1$, λ, μ — положительные числа. Показать, что $(z_n(t))$ — ортонормированная система в $L_2[a; c]$.

39. Пусть $(x_n(t))$ — любая счетная система функций из $L_2[a; b]$. Показать, что функции $x_n(t)$ можно так продолжить на отрезок $[b; c]$ ($c > b$), чтобы получилась ортогональная система в $L_2[a; c]$.

40. Показать, что функции

$$x_n^{(p)}(t) = \begin{cases} \sqrt{2} \sin \pi n t, & p-1 \leq t \leq p, \\ 0 & \text{при остальных } t, \end{cases}$$

где $n = 1, 2, \dots$; $p = 1, 2, \dots$, образуют полную систему в пространстве $L_2[0; +\infty)$. Показать, что те же функции при $n = 1, 2, \dots$; $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, образуют ортонормированный базис в $L_2(-\infty; +\infty)$.

41. Найти коэффициенты разложения по базису $e_n(t) = e^{2\pi i n t}$ пространства $L_2[0; 1]$ для следующих функций:

а) $x(t) = \operatorname{sign}(2t - 1)$; б) $x(t) = e^{\lambda t}$.

42. Доказать, что:

а) единичное пространство H_0 можно пополнить до гильбертова пространства H и притом единственным (с точностью до изометрии) способом. При этом пространство H_0 плотно в H (точнее, изометрично пространству, плотному в H);

б) в неполном евклидовом пространстве теорема Рисса о представлении линейных непрерывных функционалов не верна.

Указание. а) Воспользоваться методом пополнения метрических пространств; б) рассмотреть элемент $a \in H \setminus H_0$, функционал $f_a(x) = (x, a)$ и его сужение на H_0 .

43. Пусть H — гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$, а f — некоторый непрерывный функционал в H , причем $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ ($\forall x_1, x_2 \in H$) и $f(\alpha x) = \overline{\alpha} f(x)$ ($\forall x \in H, \forall \alpha \in \mathbb{C}$). Тогда существует такой элемент h в H , что $f(x) = (h, x)$. Доказать это утверждение.

44. Пусть H — гильбертово пространство и (x_n) — последовательность точек из H , слабо сходящаяся к точке a . Для каждого $y \in H$ положим $d(y) = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y\|}$ и $D(y) = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y\|}$. Показать, что $[d(y)]^2 = [d(a)]^2 + \|y - a\|^2$ и $[D(y)]^2 = [D(a)]^2 + \|y - a\|^2$.

Ответы. 3. а) Нет; б) да. 4. Вообще говоря, нет; рассмотреть последовательность $x_n = (1, \dots, 1, 0, \dots, 0, \dots)$. 5. Нет, не является. 16. а) — в) $M^\perp = \{0\}$.

17. а) $M^\perp = \{0\}$; б) $M^\perp = L(\{e^{-int}, n < 0\})$; в) $M^\perp = L(\{\cos nt, n \geq 0\})$; г) $M^\perp = L(\{\sin nt, n \geq 1\})$. 19. $N = M^\perp$ — одномерное подпространство с базисом $e_n = (1, \dots, 1, 0, 0, \dots)$. 21. Рассмотреть последовательность элементов $x_n =$

$= \left(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, 1 + \frac{1}{n}, 0, \dots \right) \in l_2$. 22. $\rho(x_0, L) = \frac{1}{3}$. 23. Использовать задачу

19; $\rho_n(x_0, L) = \frac{1}{\sqrt{n}}$. 25. $x_k(z) = \frac{z^k}{\sqrt{\pi k!}}$; пополнение состоит из всех аналитических функций, суммируемых по мере $e^{-|z|^2} dz$ на плоскости $\mathbb{C}$; функция $e^{-|z|}$ в это пополнение не входит.

26. Пополнение B множества L не сепарабельно, так как в B имеется континуум попарно ортогональных и нормированных векторов $e^{i\lambda t}$ ($-\infty < \lambda < +\infty$). 29. Полнота вытекает из того, что линейными комбинациями функций x_{kn} равномерно приближается любая непрерывная функция

на $[0; 1]$. 32. $\frac{x(t) + x(-t)}{2}, \frac{x(t) - x(-t)}{2}$. 33. Если $e_1, \dots, e_n$ — ортонормированный базис в L , то $p_L x = \sum_{k=1}^n (x, e_k) e_k$. 33. $p_0(t) = 0, p_1(t) = \frac{3}{5}t, p_2(t) =$

$= \frac{3}{5}t$. 41. а) $c_n = 0$ при нечетном n , $c_n = \frac{2}{\pi i n}$ при четном n ; б) $c_n = \frac{e^{\lambda} - 1}{\lambda - 2\pi i n}$

($\lambda \neq 2\pi i n$).

§ 1. СОПРЯЖЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Пусть E — линейное нормированное пространство. Если каждому элементу $x \in E$ поставлено в соответствие некоторое (вещественное или комплексное) число $f(x)$, то говорят, что на E определен функционал f .

Функционал f называется *линейным*, если

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) \quad (x, y \in E; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ или } \alpha, \beta \in \mathbb{C}).$$

Функционал f называется *непрерывным* в точке $x_0 \in E$, если $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ при $x_n \rightarrow x_0$ или (что равносильно) если для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что неравенство $\|x - x_0\| < \delta$ влечет за собой неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

В силу линейности из непрерывности функционала f в одной точке следует его непрерывность всюду (т. е. в произвольной точке пространства E).

Линейный функционал f ограничен на E , если существует такое неотрицательное число c , что для всех $x \in E$

$$|f(x)| \leq c \|x\|.$$

Наименьшее из чисел c , удовлетворяющих этому неравенству, называется *нормой* ограниченного функционала f и обозначается $\|f\|$. Справедлива формула

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|.$$

Понятия линейного непрерывного и ограниченного линейного функционала оказываются эквивалентными: для того чтобы линейный функционал f был непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы он был ограниченным.

1. Сопряженное пространство. Пусть E^* — множество всех линейных непрерывных функционалов, определенных на E . Введем в E^* операции сложения элементов f_1 и f_2 и умножения элемента f_1 на число λ следующим образом:

1) $f = f_1 + f_2$ есть функционал на E такой, что

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) \quad (\forall x \in E);$$

2) $f = \lambda f_1$ означает, что

$$f(x) = \lambda f_1(x) \quad (\forall x \in E).$$

Эти операции над элементами из E^* не выводят за пределы E^* и удовлетворяют всем аксиомам линейного пространства. Примем за норму элемента $f \in E^*$ норму $\|f\|$ соответствующего функционала. Поскольку она также удовлетворяет всем требованиям, содержащимся в определении нормированного пространства, то E^* становится линейным нормированным пространством. Оно называется *сопряженным пространством* к E .

2. Сильная и слабая сходимости в E^* . Пространство E^* , сопряженное к нормированному, может быть наделено естественной структурой нормированного пространства. Топология в E^* , соответствующая введенной норме, называется *сильной топологией* в E^* . Значит, последовательность $\{f_n\} \subset E^*$ сходится к элементу $f \in E^*$ *сильно*, если $\|f_n - f\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Теорема 1. Сопряженное пространство E^* полно (в сильной топологии).

Заметим, что это утверждение не зависит от того, является ли само пространство E полным или нет.

Последовательность $(f_n) \subset E^*$ называется *слабо сходящейся* к элементу $f \in E^*$, если для каждого фиксированного $x \in E$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

Таким образом, для линейных функционалов понятие *слабой сходимости* совпадает с понятием поточечной сходимости операторов.

Сильная сходимость элементов из E^* всегда влечет за собой слабую, однако обратное утверждение для бесконечномерных пространств верно не всегда.

Аналогично предыдущему, последовательность элементов (x_n) нормированного пространства E называется *слабо сходящейся* к $x \in E$, если для любого $f \in E^*$ числовая последовательность $(f(x_n))$ сходится к $f(x)$. Сходимость в E по норме называется *сильной*.

Всякая слабо сходящаяся в E последовательность (x_n) является ограниченной, т. е. для некоторой постоянной $C \geq 0$

$$\|x_n\| \leq C \quad (\forall n).$$

Теорема 2. Последовательность (x_n) элементов нормированного пространства E слабо сходится к $x \in E$ тогда и только тогда, когда:

1) она ограничена;

2) $f(x_n) \rightarrow f(x)$ для всякого $f \in \Delta$, где Δ — некоторое множество, линейная оболочка которого всюду плотна в E^* .

Аналогичное утверждение справедливо и относительно слабой сходимости последовательности элементов $(f_n) \subset E^*$.

3. Слабая компактность сферы сопряженного пространства. Множество $M \subset E^*$ называется *слабо компактным*, если из каждой последовательности элементов этого множества можно выделить слабо сходящуюся в E^* подпоследовательность.

Теорема 3. Всякое ограниченное множество линейных непрерывных функционалов, определенных в сепарабельном нормированном пространстве, является слабо компактным.

4. **Рефлексивные пространства.** Пусть E — линейное нормированное пространство и E^* — ему сопряженное. Поскольку E^* — также линейное нормированное пространство, то можно построить $E^{**} = (E^*)^*$ и т. д. Нетрудно проверить, что всегда $E \subset E^{**}$.

Те пространства E , для которых $E^{**} = E$, называются *рефлексивными*. В этом случае для любых $x \in E = E^{**}$ и $f \in E^*$ $f(x) = x(f)$.

Теорема 4. Для того чтобы полное нормированное пространство E было рефлексивным, необходимо и достаточно, чтобы для всякого $f \in E^*$ существовал такой элемент $x_f \in E$, что $\|x_f\| = 1$ и $f(x_f) = \|f\|$.

5. **Общий вид линейных функционалов в некоторых конкретных пространствах.**

1) Пусть $E = \mathbb{R}^n$ с евклидовой нормой

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n |\xi_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)).$$

Тогда каждый функционал $f \in E^*$ представим в виде

$$f(x) = \sum_{i=1}^n f_i \xi_i.$$

$$\text{причем } \|f\| = \left(\sum_{i=1}^n |f_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Значит, $(\mathbb{R}^n)^* = \mathbb{R}^n$ и, следовательно, $\mathbb{R}^n$ — рефлексивное пространство.

2) Если E совпадает с пространством c_0 сходящихся к нулю последовательностей $x = (\xi_n)$ с нормой $\|x\| = \sup_n |\xi_n|$, а $f \in E^*$, то $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \xi_n$ и $\|f\| =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} |f_n|$. Следовательно, сопряженное к c_0 пространство c_0^* изоморфно пространству l_1 всех абсолютно суммируемых последовательностей $f = (f_n)$ с нормой $\|f\| = \sum_{n=0}^{\infty} |f_n|$.

3) Пространство l_1^* изоморфно пространству m всех ограниченных последовательностей $x = (\xi_n)$ с нормой $\|x\| = \sup_n |\xi_n|$, причем если $f \in l_1^*$, то $f(x) =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} f_n \xi_n \text{ и } \|f\| = \sup_n |f_n|.$$

4) Пусть $p > 1$ и l_p — пространство всех последовательностей $x = (\xi_n)$, для которых

$$\|x\| = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |\xi_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Тогда l_p^* изоморфно пространству l_q , где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, причем $f(x) =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} f_n \xi_n \text{ и } \|f\|^q = \sum_{n=0}^{\infty} |f_n|^q.$$

5) В пространстве $L_p[a; b]$, $p > 1$, каждый линейный непрерывный функционал f представим в виде

$$f(x) = \int_a^b x(t) \alpha(t) dt,$$

где $\alpha(t) \in L_q[a; b]$, $q = \frac{p}{p-1}$. При этом

$$\|f\| = \left(\int_a^b |\alpha(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}.$$

т. е. пространство $L_p^*[a; b]$ изоморфно $L_q[a; b]$.

Если же $p = 1$, то $f \in L_1^*$ тогда и только тогда, когда

$$f(x) = \int_a^b x(t) \alpha(t) dt,$$

где $\alpha(t)$ — почти всюду на отрезке $[a; b]$ ограниченная функция и $\|f\| = \int_a^b |\alpha(t)| dt$.

Иными словами, сопряженное к пространству $L_1[a; b]$ пространство изоморфно пространству $M[a; b]$.

6) Всякий линейный непрерывный функционал $f \in C[a; b]$ может быть представлен в виде интеграла Стильтьеса

$$f(x) = \int_a^b x(t) dg(t),$$

где $g(t)$ — некоторая функция ограниченной вариации (иногда нормированная условиями: $g(a) = 0$ и $g(t)$ — непрерывна справа в каждой точке интервала $(a; b)$). При этом $\|f\| = \bigvee_a^b(g)$.

Напомним для дальнейшего, что если $g(t)$ — абсолютно непрерывная на $[a; b]$ функция, то ее полная вариация равна интегралу от модуля производной.

Рассмотренные здесь вопросы более детально освещены в [16; 20; 29; 33; 40].

Примеры решения задач

1. Проверить, что формула

$$f(x) = \sum_{k=1}^n c_k x(t_k),$$

где $t_1, \dots, t_n$ — некоторая система точек промежутка $[a; b]$, а $c_k \in \mathbb{R}$, определяет линейный непрерывный в пространстве $C[a; b]$ функционал, и найти его норму.

Решение. Поскольку

$$\begin{aligned} f(\lambda x_1 + \mu x_2) &= \sum_{k=1}^n c_k [\lambda x_1(t_k) + \mu x_2(t_k)] = \\ &= \lambda \sum_{k=1}^n c_k x_1(t_k) + \mu \sum_{k=1}^n c_k x_2(t_k) = \lambda f(x_1) + \mu f(x_2), \end{aligned}$$

то f — линейный функционал. Его непрерывность следует из оценки

$$|f(x)| \leq \sum_{k=1}^n |c_k| |x(t_k)| \leq \max_{t \in [a; b]} |x(t)| \cdot \sum_{k=1}^n |c_k| = \sum_{k=1}^n |c_k| \cdot \|x\|.$$

Отсюда $\|f\| \leq \sum_{k=1}^n |c_k|$.

Рассмотрим теперь в промежутке $[a; b]$ кусочно-линейную функцию $\tilde{x}(t)$, принимающую в точках $t_1, \dots, t_n$ значения $\tilde{x}(t_k) = \text{sign } c_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$), линейную в промежутках $[t_k; t_{k+1}]$ и постоянную в промежутках $[a; t_1]$ и $[t_n; b]$. Тогда $\|\tilde{x}\| \leq 1$, и поэтому

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)| \geq |f(\tilde{x})| = \left| \sum_{k=1}^n c_k \tilde{x}(t_k) \right| = \sum_{k=1}^n |c_k \text{sign } c_k| = \sum_{k=1}^n |c_k|.$$

Значит, $\|f\| = \sum_{k=1}^n |c_k|$.

Отметим, что норму данного функционала можно также вычислить с помощью формулы $\|f\| = \bigvee_a^b(g)$. Однако для этого вначале нужно найти такую функцию $g(t)$ ограниченной вариации, что $f(x) = \int_a^b x(t) dg(t)$, $\forall x \in C[a; b]$ (см. п. 5 и пример 5).

2. Проверить линейность, непрерывность и найти норму функционала

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k + \xi_{k+1}}{2^k} \quad (x = (\xi_1, \xi_2, \dots))$$

в пространстве l_2 .

Решение. Найдем норму функционала f , предварительно записав его в виде

$$f(x) = \frac{\xi_1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^k} \right) \xi_{k+1} = \frac{\xi_1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{2^{k+1}} \xi_{k+1}$$

(в силу того что последовательность (ξ_k) принадлежит l_2 и, значит, является ограниченной, рассматриваемые здесь ряды сходятся абсолютно и обладают сочетательным свойством). Тогда

$$\|f\|^2 = \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2^k} \right)^2 = 1$$

и $\|f\| = 1$.

Заметим, что $f = f_1 + f_2$, где

$$f_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{2^k}, \text{ а } f_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_{k+1}}{2^k}.$$

Кроме того, функционалы f_1 и f_2 линейны и непрерывны, причем (поскольку $l_2^2 = l_2$)

$$\|f_1\| = \|f_2\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2^k)^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Отметим при этом, что $\|f\| \neq \|f_1\| + \|f_2\|$.

3. Пусть $0 \neq f \in E^*$ и $M = \{x \in E : f(x) = 1\}$. Доказать, что $\frac{1}{\|f\|} = \inf_{x \in M} \|x\|$.

Решение. Поскольку для всех $x \in E$ $|f(x)| \leq \|f\| \|x\|$, то отсюда, в частности, для элементов $x \in M$ следует, что $\frac{1}{\|f\|} \leq \|x\|$ и, тем самым, $\frac{1}{\|f\|} \leq \inf_{x \in M} \|x\|$.

Далее, в силу определения нормы f для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой элемент $y_\varepsilon \in E$, что

$$|f(y_\varepsilon)| > (\|f\| - \varepsilon) \|y_\varepsilon\| \quad (\|f\| > \varepsilon).$$

Положим $x_\varepsilon = \frac{y_\varepsilon}{f(y_\varepsilon)}$. Тогда $x_\varepsilon \in M$ и $\|x_\varepsilon\| < \frac{1}{\|f\| - \varepsilon}$.

Значит, выполняется также неравенство $\inf_{x \in M} \|x\| < \frac{1}{\|f\| - \varepsilon}$. Отсюда, в силу произвольности ε , получаем неравенство $\inf_{x \in M} \|x\| \leq \frac{1}{\|f\|}$.

что вместе с ранее доказанным неравенством $\inf_{x \in M} \|x\| \geq \frac{1}{\|f\|}$ приводит к искомому утверждению.

4. Пусть $p > 1$ фиксировано. При каких $\alpha \in \mathbb{R}$ функционал

$$f_\alpha(x) = \int_0^1 \frac{x(t)}{t^\alpha} dt$$

принадлежит $L_p^*[0; 1]$?

Решение. Поскольку $L_p^*[0; 1] = L_q[0; 1]$, причем $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то $f_\alpha \in L_p^*[0; 1]$ тогда и только тогда, когда $\frac{1}{t^\alpha} \in L_q[0; 1]$, т. е.

когда сходится интеграл $\int_0^1 \frac{dt}{t^{q\alpha}}$. Это будет, как известно, лишь в том случае, если $q\alpha < 1$, т. е. $\alpha < \frac{1}{q}$. При этом

$$\|f\| = \left(\int_0^1 \frac{dt}{t^{q\alpha}} \right)^{\frac{1}{q}} = \frac{1}{(1 - q\alpha)^{\frac{1}{q}}}.$$

5. Записать в виде интеграла Стильеса линейный непрерывный на $C[-1; 1]$ функционал f , определяемый формулой

$$f(x) = \int_{-1}^1 tx(t) dt - 2x(0).$$

Решение. Рассмотрим на $[-1; 1]$ функцию $g_0(t) = \frac{t^2}{2}$. Тогда $\int_{-1}^1 x(t) dg_0(t) = \int_{-1}^1 tx(t) dt$. Поскольку в представлении функционала f фигурирует еще слагаемое $-2x(0)$, то функцию $g_0(t)$ нужно изменить так, чтобы интеграл Стильеса $\int_{-1}^1 x(t) dg(t)$ претерпевал в точке $t = 0$ скачок $-2x(0)$, совпадающий, как известно (см. нижеследующее замечание) из теории таких интегралов, с $x(0)[g(+0) - g(-0)]$. Поэтому ясно, что если

$$g(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2}, & -1 \leq t \leq 0, \\ \frac{t^2}{2} - 2, & 0 < t \leq 1, \end{cases}$$

$$\text{то } f(x) = \int_{-1}^1 x(t) dg(t).$$

Замечание. При решении такого типа задач следует помнить, что если функция $x(t)$ непрерывна на $[a; b]$, а $g(t)$ имеет на $[a; b]$ всюду, кроме конечного числа точек $c_1, \dots, c_m$, интегрируемую по Риману производную $g'(t)$, то

$$\int_a^b x(t) dg(t) = \int_a^b x(t) g'(t) dt + x(a) [g(a+0) - g(a)] + \\ + \sum_{k=1}^m x(c_k) [g(c_k+0) - g(c_k-0)] + x(b) [g(b) - g(b-0)].$$

6. Доказать, что $c^* = l_1$.

Решение. Напомним, что пространство c состоит из всех сходящихся последовательностей, и если $x = (\xi_n) \in c$, то $\|x\| = \sup_n |\xi_n|$. Согласно введенной так норме, сходимость в c — это сходимость по координатам, равномерная относительно номеров координат.

Определим в пространстве c векторы

$$e_0 = (1, 1, \dots, 1, \dots), \\ e_k = \underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_{k-1}, 1, 0, \dots, \quad k = 1, 2, \dots,$$

и заметим, что всякий элемент $x = (\xi_n) \in c$ представим (проверьте это) в виде

$$x = \xi_0 e_0 + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k (\xi_n - \xi_0) e_n,$$

где $\xi_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n$.

Пусть $f \in c^*$. Тогда

$$f(x) = \xi_0 f(e_0) + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k (\xi_n - \xi_0) f(e_n) = \\ = \xi_0 \eta_0' + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k (\xi_n - \xi_0) \eta_n,$$

где $\eta_0' = f(e_0)$ и $\eta_n = f(e_n)$ ($n = 1, 2, \dots$).

Покажем, что величины $f(x)$ ($\forall x \in c$) можно представить и в несколько другом виде. Для этого определим числа ε_n , полагая $\varepsilon_n = \text{sign } \eta_n$. Зафиксировав произвольное $n_0 \in \mathbb{N}$, выберем точку $x^{(n_0)} = (\tilde{\xi}_n) \in c$, так, что $\tilde{\xi}_n = \varepsilon_n$ при $n \leq n_0$ и $\tilde{\xi}_n = 0$ при $n > n_0$. Тогда $\|x^{(n_0)}\| \leq 1$, $\tilde{\xi}_0 = 0$, и поэтому

$$|f(x^{(n_0)})| = \left| \sum_{n=1}^{n_0} \tilde{\xi}_n \eta_n \right| = \sum_{n=1}^{n_0} |\eta_n| \leq \|f\|.$$

Отсюда, ввиду произвольности $n_0 \in \mathbb{N}$, следует, что $\sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n| < +\infty$, т. е. $(\eta_n) \in l_1$. Значит, для произвольного элемента $x =$

$= (\xi_n) \in c$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \eta_n$ сходится абсолютно и

$$f(x) = \xi_0 \left(\eta_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \eta_n = \xi_0 \eta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \eta_n. \quad (1)$$

Итак, если $f \in c^*$, то для всякого $x = (\xi_n) \in c$ справедливо представление (1), где $\xi_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n$, $\eta_0 = \text{const}$ и $(\eta_n) \in l_1$. Как и раньше, для произвольного фиксированного $m \in \mathbb{N}$ возьмем $x_m = (\xi_n) \in c$, где $\xi_n = e_n$ при $n \leq m$ и $\xi_n = e_0 = \text{sign } \eta_0$ при $n > m$ (определение чисел e_n приведено выше). Тогда $\|x_m\| \leq 1$, $\xi_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = e_0$ и

$$f(x_m) = |\eta_0| + \sum_{n=1}^m |\eta_n| + e_0 \sum_{n=m+1}^{\infty} \eta_n.$$

Отсюда $\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)| \geq |f(x_m)|$ и при $m \rightarrow \infty$ $|\eta_0| + \sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n| \leq \|f\|$.

Однако, каждый элемент $y = (\eta_n)_0^{\infty} \in l_1$ определяет с помощью соотношения (1) некоторый линейный непрерывный в c функционал f , причем $\|f\| \leq |\eta_0| + \sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n|$.

Итак, $c^* = l_1$.

Отметим, что аналогично проверяется также, что $c_0^* = l_1$ (в этом случае во всех предыдущих рассуждениях нужно иметь в виду, что $\xi_0 = 0$ для всех $x \in c_0$).

7. Пусть $L_p \{0; 1\}$, $0 < p < 1$, — множество всех таких измеримых на $[0; 1]$ функций $x(t)$, что $|x(t)|^p$ интегрируема по Лебегу на этом же отрезке. Положим

$$\rho(x, y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)|^p dt.$$

Доказать, что в наделенном соответствующей этой метрике топологии пространстве не существует ни одного ненулевого непрерывного функционала.

Решение. Доказательство проведем от противного. Пусть f — некоторый ненулевой линейный непрерывный на $L_p \{0; 1\}$ функционал. Рассмотрим такую функцию $x_0(t) \in L_p \{0; 1\}$, что $|f(x_0)| = 1$, и положим для каждого $s \in [0; 1]$:

$$\chi_s(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0; s], \\ 0, & t \in (s; 1]. \end{cases}$$

Пусть, далее, $g_1(s) = \int_0^1 |x_0(t) \chi_s(t)|^p dt = \int_0^s |x_0(t)|^p dt$, а $g_2(s) = \int_0^1 |x_0(t) (1 - \chi_s(t))|^p dt = \int_s^1 |x_0(t)|^p dt$. Поскольку эти функции непре-

рывны на $[0; 1]$, первая из них монотонно возрастает, а вторая монотонно убывает и $g_1(s) + g_2(s) = \int_0^1 |x_0(t)|^p dt$ ($\forall s \in [0; 1]$), то существует такое $s_0 \in [0; 1]$, что $g_1(s_0) = g_2(s_0) = \frac{1}{2} \int_0^1 |x_0(t)|^p dt$.

Иными словами, при некотором $s_0 \in [0; 1]$

$$\int_0^1 |x_0(t) \chi_{s_0}(t)|^p dt = \int_0^1 |x_0(t) (1 - \chi_{s_0}(t))|^p dt = \frac{1}{2} \int_0^1 |x_0(t)|^p dt,$$

т. е. расстояние каждой из функций $2x_0(t) \chi_{s_0}(t)$ и $2x_0(t) (1 - \chi_{s_0}(t))$ от нуля равно $2^{p-1} \rho(x_0, 0)$. Кроме того, $2x_0(t) \chi_{s_0}(t) + 2x_0(t) \times (1 - \chi_{s_0}(t)) = 2x_0(t)$, и поэтому модуль значения функционала f хотя бы на одном из этих слагаемых не меньше единицы. Обозначим это слагаемое через $x_1(t)$.

Итак, исходя из такой функции $x_0(t) \in L_p[0; 1]$, что $|f(x_0)| = 1$, приходим к функции $x_1(t) \in L_p[0; 1]$, для которой $|f(x_1)| \geq 1$ и $\rho(x_1, 0) = 2^{p-1} \rho(x_0, 0)$. Продолжая этот процесс, находим такую последовательность функций $x_n(t) \in L_p[0; 1]$, что $|f(x_n)| \geq 1$ и $\rho(x_n, 0) = 2^{n(p-1)} \rho(x_0, 0)$. Следовательно, $x_n \rightarrow 0$ (при $n \rightarrow \infty$) и в то же время $|f(x_n)| \geq 1$, что противоречит непрерывности функционала f .

8. а) Доказать, что пространство A_R всех однозначных и аналитических в круге $|z| < R$ ($0 < R < +\infty$) функций с топологией компактной сходимости не является нормированным.

б) Найти общий вид линейных непрерывных в A_R функционалов.

Решение. а) Предположим противное, т. е. что A_R — нормированное пространство, причем последовательность $(x_n(z)) \subset A_R$ сходится к $x(z)$ по норме тогда и только тогда, когда она сходится к $x(z)$ равномерно на каждом замкнутом ограниченном множестве (компакте) точек круга $|z| < R$. Рассмотрим линейный оператор D дифференцирования и проверим его непрерывность в A_R . Для этого воспользуемся известной интегральной теоремой Коши для производной функции $x(z)$ из A_R :

$$(Dx)(z) = x'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{x(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^2} \quad (\forall z: |z| \leq \rho, \rho < r < R).$$

Отсюда $\max_{|z| \leq \rho} |x'(z)| \leq \frac{r}{(r - \rho)^2} \max_{|z| \leq r} |x(z)|$, и если последовательность $(x_n(z))$ сходится к $x(z)$ равномерно на каждом круге $|z| \leq r$, то последовательность $(x'_n(z))$ сходится к $x'(z)$ равномерно на каждом круге $|z| \leq \rho$.

Поскольку, по предположению, A_R — нормированное пространство, то D — ограниченный оператор: $\|Dx\| \leq \|D\| \|x\|$. Взяв число $\alpha \in \mathbb{R}^+$ так, что $\alpha > \|D\|$, и положив $x(z) = \exp(\alpha z)$, из последнего неравенства приходим к противоречию.

Отметим, что факт ненормируемости пространства A_R был доказан П. С. Урысоном в 1924 г.

б) Пусть f — линейный непрерывный в A_R функционал, т. е. $f \in A_R^*$. Тогда для произвольной функции

$$x(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{(k)}(0)}{k!} z^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^{(k)}(0)}{k!} z^k$$

(в смысле сходимости в пространстве A_R) получим

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{(k)}(0)}{k!} f_k,$$

где $f_k = f(z^k)$ ($k = 0, 1, \dots$).

Покажем, что последовательность $(f_k)_{k=0}^{\infty}$ удовлетворяет условию $\tilde{f} = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|f_k|} < R$. Действительно, если $\tilde{f} = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|f_k|} \geq R$, то

$$\exists (k_n) : \tilde{f} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k_n]{|f_{k_n}|} \geq R.$$

Поэтому начиная с некоторого n_0 $f_{k_n} \neq 0$, а функция $x_0(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{z^{k_n}}{f_{k_n}}$ принадлежит A_R . Но тогда (в силу линейности и непрерывности f) $f(x_0) = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{f(z^{k_n})}{f_{k_n}}$, причем получаемый ряд должен сходиться, что невозможно.

Итак, если f — линейный непрерывный в A_R функционал, то

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{(k)}(0)}{k!} f_k \quad (\forall x \in A_R), \quad (2)$$

где последовательность $(f_k)_0^{\infty}$ удовлетворяет условию

$$\tilde{f} = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|f_k|} < R. \quad (3)$$

Обратно, если некоторая последовательность $(f_k)_0^{\infty}$ удовлетворяет условию (3), то формула (2) определяет линейный непрерывный в A_R функционал. Его линейность очевидна, а непрерывность получается из известных оценок Коши для тейлоровских коэффициентов функций из A_R и оценок

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} |f_k| \cdot \frac{|x^{(k)}(0)|}{k!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|f_k|}{\rho^k} \max_{|z| \leq \rho} |x(z)| = \\ &= C(\rho) \max_{|z| \leq \rho} |x(z)|, \end{aligned}$$

где число $\rho < R$ выбрано так, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|f_k|}{\rho^k}$ сходится (например, $\tilde{r} < \rho < R$).

Замечание. Положим $\omega(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k}{z^{k+1}}$. Эта функция аналитична при $|z| > \tilde{r}$ и

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\tilde{r}} \omega(\zeta) x(\zeta) d\zeta.$$

где $\tilde{r} < r < R$.

Приведенные здесь описания сопряженного к A_R пространства получены А. И. Маркушевичем в 1945 г.

9. Доказать, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ сильная и слабая сходимости совпадают.

Решение. Пусть $x_m = (\xi_i^{(m)})_{i=1}^n$ и последовательность (x_m) слабо сходится к некоторому элементу $x_0 = (\xi_i^{(0)}) \in \mathbb{R}^n$.

Рассмотрим линейные непрерывные (почему?) функционалы

$$f_l: f_l(x) = \xi_l \quad (l = 1, 2, \dots, n; x = (\xi_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n).$$

Тогда при каждом l ($1 \leq l \leq n$) $f_l(x_m) = \xi_l^{(m)} \rightarrow \xi_l^{(0)}$ ($m \rightarrow \infty$) и, следовательно, $\|x_m - x_0\|^2 = \sum_{i=1}^n (\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(0)})^2 \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, т. е. (x_m) сильно сходится к x_0 .

Поскольку из сильной сходимости всегда вытекает слабая, равносильность этих сходимостей в $\mathbb{R}^n$ доказана.

10. Проверить, что в пространстве l_2 сильная и слабая сходимости не совпадают.

Решение. Рассмотрим в l_2 последовательность элементов $a_i = \underbrace{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots)}_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots$, и пусть $f \in l_2^*$. Тогда $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \xi_n$, где $(f_n) \in l_2$, и поэтому $f(e_i) = f_i \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$. Значит, эта последовательность слабо сходится в l_2 .

В то же время последовательность (e_i) не сходится в полном пространстве l_2 сильно, так как она в нем даже не является фундаментальной. Действительно, при $n \neq m$

$$\|e_n - e_m\| = \sqrt{2} \neq 0 \quad (n, m \rightarrow \infty).$$

11. Равносильны ли сильная и слабая сходимости в пространстве $C^*[0; 2\pi]$?

Решение. Рассмотрим в пространстве $C[0; 2\pi]$ последовательность линейных и, очевидно, непрерывных функционалов, определяемую

$$a_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \cos ntdt \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Как известно из курса математического анализа, для каждой непрерывной на $[0; 2\pi]$ функции $x(t)$ последовательность $(a_n(x))$ ее коэффициентов Фурье сходится к нулю ($\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(x) = 0$), т. е. последовательность функционалов (a_n) слабо сходится к нулевому функционалу. В то же время функционалы a_n представимы в виде

$$a_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) d\left(\int_0^t \cos nudu\right),$$

причем $\text{Var}_{t \in [0; 2\pi]} \left(\int_0^t \cos nudu\right) = \int_0^{2\pi} |\cos nu| du$ (см. замечание, приведенное в конце п. 5), и поэтому

$$\begin{aligned} \|a_n\| &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |\cos nt| dt = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} |\cos nt| dt = \\ &= \frac{1}{n\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{2\pi} |\cos z| dz = \frac{4}{\pi} \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Значит, рассматриваемая последовательность линейных непрерывных в пространстве $C[0; 2\pi]$ функционалов (a_n) сходится слабо, но не сильно.

12. Пусть $0 \in (a; b)$ и δ — функционал на пространстве $C[a; b]$, определяемый соотношением $\delta(x) = x(0)$, а последовательность $(\varphi_n(t))_{n \in \mathbb{N}} \subset C[a; b]$ удовлетворяет условиям

а) $\varphi_n(t) = 0$ при $|t| > \frac{1}{n}$; $\varphi_n(t) \geq 0$;

б) $\int_a^b \varphi_n(t) dt = 1$.

Тогда последовательность функционалов

$$f_n(x) = \int_a^b \varphi_n(t) x(t) dt \quad (\forall x \in C[a; b])$$

слабо сходится к функционалу δ . Доказать это утверждение.

Решение. Действительно, с помощью известной из курса математического анализа теоремы о среднем (для интегралов) для любой непрерывной на $[a; b]$ функции $x(t)$ имеем

$$\int_a^b \varphi_n(t) x(t) dt = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varphi_n(t) x(t) dt = x\left(\frac{1}{n}\right) \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varphi_n(t) dt = x\left(\frac{1}{n}\right),$$

где $\xi \in \left(-\frac{1}{\pi}; \frac{1}{\pi}\right)$. Поэтому при $n \rightarrow \infty$

$$\int_a^b \varphi_n(t) x(t) dt \rightarrow x(0).$$

Значит, δ -функционал представим в виде предела (в смысле слабой сходимости) последовательности функционалов f_n .

Заметим при этом, что $\|\delta\| = \|f_n\| = 1 \ (\forall n \in \mathbb{N})$.

3. Для того чтобы последовательность $(x_n(t))$ функций из $L_p[0; 1]$ ($p > 1$) слабо сходилась к элементу $x_0(t) \in L_p[0; 1]$, необходимо и достаточно, чтобы:

а) последовательность $(\|x_n\|)$ была ограниченной;

$$\text{б) } \int_0^\tau x_n(t) dt \rightarrow \int_0^\tau x_0(t) dt \text{ для любого } \tau \in [0; 1].$$

Доказать это утверждение.

Решение. Первое условие совпадает с первым условием общего критерия слабой сходимости (см. теорему 2).

Рассмотрим второе условие. Положим

$$\chi_\tau(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \tau, \\ 0, & \tau < t \leq 1. \end{cases}$$

Известно (см. [23], с. 187), что линейные комбинации функций $\chi_\tau(t)$, а именно суммы $\sum_{i=1}^n c_i [\chi_{\tau_i}(t) - \chi_{\tau_{i-1}}(t)]$, где $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{n-1} < \tau_n = 1$, лежат всюду плотно в $L_q[0; 1] = L_p^*[0; 1]$. Следовательно, последовательность $(x_n(t))$ сходится слабо к $x_0(t)$ тогда и только тогда, когда выполняется первое условие, и при $n \rightarrow \infty$

$$\int_0^1 x_n(t) \chi_\tau(t) dt \rightarrow \int_0^1 x_0(t) \chi_\tau(t) dt,$$

т. е.

$$\int_0^\tau x_n(t) dt \rightarrow \int_0^\tau x_0(t) dt$$

для любого $\tau \in [0; 1]$.

14. Пусть E — такое полное нормированное пространство, что $E^* = E$ и $f(f) = \|f\|^2 \ (\forall f \in E)$. Если последовательность (f_n) слабо сходится к f , то из нее можно выбрать подпоследовательность (f_{n_k}) такую, что средние арифметические

$$\frac{1}{k} (f_{n_1} + f_{n_2} + \dots + f_{n_k})$$

сходятся к f сильно (вариация теоремы Банаха — Сакса).

Решение. Предположим, что $f = 0$ (в противном случае можно взять $f_n - f$ вместо f_n). Положим, далее (для определенности), $n_1 = 1$.

Поскольку $f_n(f_{n_1}) \rightarrow 0$, то существует такой номер n_2 ($n_2 > n_1$), что $|f_{n_2}(f_{n_1})| \leq 1$. Затем выбираем n_3 ($n_3 > n_2$) так, что $|f_{n_3}(f_{n_2})| \leq \frac{1}{2}$ и $|f_{n_3}(f_{n_1})| \leq \frac{1}{2}$ и т. д. Иными словами, если $f_{n_1}, f_{n_2}, \dots, f_{n_k}$ зафиксированы, то номер $n_{k+1} > n_k$ выберем так, чтобы выполнялись неравенства

$$|f_{n_{k+1}}(f_{n_1})| \leq \frac{1}{k}, \dots, |f_{n_{k+1}}(f_{n_k})| \leq \frac{1}{k}.$$

Учитывая теперь (см. теорему 2), что нормы $\|f_n\|$ слабо сходящейся последовательности (f_n) ограничены, т. е. $\|f_n\| \leq C$ ($C = \text{const}$; $n = 1, 2, \dots$), получаем

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{k} (f_{n_1} + f_{n_2} + \dots + f_{n_k}) \right\|^2 &= \frac{1}{k^2} \left[\sum_{i=1}^k \|f_{n_i}\|^2 + 2 \sum_{i=1}^k \sum_{s=i+1}^k f_{n_s}(f_{n_i}) \right] \leq \\ &\leq \frac{1}{k^2} \left[kC^2 + 2 \sum_{i=1}^k \sum_{s=i+1}^k \frac{1}{s-1} \right] = \frac{1}{k^2} \left[kC^2 + 2 \sum_{s=2}^k \sum_{i=1}^{s-1} \frac{1}{s-1} \right] = \\ &= \frac{1}{k^2} \left[kC^2 + 2 \sum_{s=2}^k \frac{s-1}{s-1} \right] \leq \frac{C^2 + 2}{k}. \end{aligned}$$

Значит, $\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{k} (f_{n_1} + f_{n_2} + \dots + f_{n_k}) \right\| = 0$, что и требовалось доказать.

15. Доказать, что пространство $C[a; b]$ не является рефлексивным.

Решение. Предположим противное. Тогда каждый линейный непрерывный функционал $F(f)$, определенный на пространстве V функций ограниченной вариации (именно оно, как известно, совпадает с $C^*[a; b]$), должен определяться некоторой функцией $x(t)$ из $C[a, b]$, т. е. $F(f) = F_x(f) = \int_a^b x(t) df(t)$. Значит,

$$F_x(f) = \int_a^b x(t) df(t),$$

где $f(t)$ — функция ограниченной вариации, соответствующая функционалу $f(x)$ из $C^*[a; b]$.

Рассмотрим функционал

$$F_{x_0}(f) = f(t_0 + 0) - f(t_0 - 0) \quad (t_0 \in [a; b]).$$

Его линейность очевидна, а непрерывность следует из оценки

$$|F_{x_0}(f)| \leq |f(t_0 + 0) - f(t_0 - 0)| \leq \bigvee_a^b(f) = \|f\|.$$

Кроме того, $F_{x_0}(f) \neq 0$, и поэтому существует такая непрерывная на $[a; b]$ функция $x_0(t) \neq 0$, что $F_{x_0}(f) = \int_a^b x_0(t) df(t)$.

Рассмотрим теперь функцию $f_0(t) = \int_a^t x_0(\tau) d\tau$. Поскольку она не-

прерывна на $[a; b]$, то, с одной стороны, $F_{x_0}(f_0) = 0$. Однако, с другой стороны,

$$F_{x_0}(f_0) = \int_a^b x_0(t) df_0(t) = \int_a^b x_0^2(t) dt > 0.$$

Полученное противоречие и убеждает нас в нереклексивности пространства $C[a; b]$.

16. Пусть E — линейное нормированное пространство, а последовательность функционалов $(f_n) \subset E^*$ такова, что для некоторой фиксированной последовательности точек $(x_n) \subset E$, причем $\|x_n\| \leq 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x_n)| = +\infty$. Доказать, что множество

$$M_1 = \{x \in E : \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f_n(x)| < +\infty\}$$

является множеством первой категории.

Решение. Пусть $m \in \mathbb{N}$, а $E_{m,n} = \{x \in E : |f_n(x)| \leq m\}$. Покажем, что множества $E_{m,n}$ замкнуты. Действительно, пусть $(y_k) \subset E_{m,n}$ и $y_k \rightarrow y$ при $k \rightarrow \infty$. Тогда

$$|f_n(y)| \leq |f_n(y_k)| + |f_n(y_k - y)| \leq m + \|f_n\| \cdot \|y_k - y\|,$$

откуда при $k \rightarrow \infty$ получаем $|f_n(y)| \leq m$.

Положим $E_m = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_{m,n}$. Тогда множества E_m также замкнуты и представляют собой совокупность всех тех $x \in E$, для которых $|f_n(x)| \leq m$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, $M_1 = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$. Поэтому достаточно показать, что каждое из множеств E_m нигде не плотно.

Доказательство этого утверждения проведем от противного. Пусть при некотором $s \in \mathbb{N}$ множество E_s не является нигде не плотным. Значит, E_s плотно в некотором шаре $B(x_0, \rho)$ радиуса ρ с центром в точке x_0 , т. е., поскольку E_s замкнуто, $B(x_0, \rho) \subset E_s$. Поэтому для всех элементов $x \in B(x_0, \rho)$ выполняются неравенства $|f_n(x)| \leq s$ ($n = 1, 2, \dots$).

Однако, каждую точку $y \in E$, для которой $\|y\| < \rho$ (т. е. $y \in B(0, \rho)$), можно представить в виде $y = \tilde{y} - x_0$ ($\tilde{y} = y + x_0$), где $\tilde{y} \in B(x_0, \rho)$, и поэтому при всех $n \in \mathbb{N}$

$$|f_n(y)| \leq |f_n(\tilde{y})| + |f_n(x_0)| \leq 2s.$$

В частности, поскольку $\|x_n\| \leq 1$, $\rho x_n \in B(0, \rho)$ и $|f_n(x_n)| \leq \frac{2s}{\rho}$ ($n = 1, 2, \dots$). Полученные неравенства противоречат тому, что $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x_n)| = +\infty$.

Итак, исследуемое множество M_1 действительно является множеством первой категории.

Замечание. Если E — полное нормированное пространство, а

$$M_2 = \{x \in E : \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x)| = +\infty\},$$

то $M_2 = E \setminus M_1$ и, так как (по теореме Бэра) E — множество второй категории, M_1 — также множество второй категории.

Задачи для самостоятельной работы

1. Пусть E — линейное пространство, f — линейный функционал на нем и $\ker f = \{x \in E : f(x) = 0\}$. Доказать, что если для линейных функционалов f_1 и f_2 справедливо равенство $\ker f_1 = \ker f_2$, то $f_1 = \lambda f_2$ при некотором λ .

Указание. Выбрать такой элемент x_0 , что $f_1(x_0) = 1$ (если, конечно, $f_1 \neq 0$), и рассмотреть множество элементов y вида $y = x - f_1(x)x_0$, где $x \in E$.

2. Являются ли линейными, непрерывными в $C[0; 1]$ следующие функционалы:

а) $f(x) = \int_0^1 t^2 x(t) dt$; б) $f(x) = \int_0^1 t^2 |x(t)| dt$;

в) $f(x) = \max_{t \in [0; 1]} |x^2(t)|$;

г) $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \alpha^k x(\alpha^k) \quad (0 < \alpha < 1)$?

3. Проверить линейность, непрерывность и найти нормы следующих функционалов:

а) $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots) \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \xi_k$ в l_1 ;

б) $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \xi_k$ в l_2 ;

в) $x = x(t) \rightarrow \int_0^1 x(t) \operatorname{sign}\left(t - \frac{1}{2}\right) dt$ в $C[0; 1]$;

г) $x = x(t) \rightarrow \int_0^1 x(t) \operatorname{sign}\left(t - \frac{1}{2}\right) dt$ в $L_2[0; 1]$.

4. Найти нормы следующих функционалов:

а) $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} [1 - (-1)^k] \frac{k-1}{k} \xi_k$ в l_1 ;

б) $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \rightarrow \xi_k$ (k — фиксировано) в l_2 ;

в) $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \rightarrow \xi_k - \xi_{k-1}$ (k — фиксировано) в l_2 ;

г) $x = x(t) \rightarrow \int_0^1 x(t) \cos \pi t dt$ в $C[0; 1]$;

д) $x = x(t) \rightarrow x(0) - x(-1) - x(1)$ в $C[-1; 1]$;

е) $x = x(t) \rightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} x(t) dt$ в $L_2[0; 1]$.

5. Найти норму функционала $f(x) = \int_{-1}^1 tx(t) dt$ в пространствах:

а) $C[-1; 1]$; б) $L_2[-1; 1]$; в) $L_2[-1; 1]$.

6. Вычислить норму функционала f в пространстве $C[a; b]$, если

$$f(x) = \int_a^b x(t) y(t) dt,$$

где y — фиксированный элемент из $C[a; b]$.

7. Пусть $p > 1$ фиксировано. При каких $\alpha \in \mathbb{R}$ функционал $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \mapsto$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{k^\alpha}$ в l_p принадлежит соответствующему сопряженному пространству?

8. Пусть в множестве $\mathbb{R}^n$:

а) $\|x\| = \sup_{1 \leq i \leq n} |\xi_i|$ ($x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$);

б) $\|x\| = \sum_{k=1}^n |\xi_k|$.

Доказать, что в сопряженном пространстве норма определяется соответствующими формулами:

а) $\|f\| = \sum_{i=1}^n |f_i|$ ($f = (f_1, f_2, \dots, f_n) \in \mathbb{R}^n$);

б) $\|f\| = \sup_{1 \leq k \leq n} |f_k|$.

9. Определим в пространстве $C[-1; 1]$ линейный непрерывный функционал δ формулой $\delta(x) = x(0)$.

а) Существует ли такая функция $g \in C[-1; 1]$, что

$$\delta(x) = \int_{-1}^1 x(t) g(t) dt?$$

б) Найти такую функцию g ограниченной вариации, что

$$\delta(x) = \int_{-1}^1 x(t) dg(t).$$

10. Для всех $x \in C[-1; 1]$ положим

$$f(x) = \frac{x(-1) + x(1)}{2} + \int_{-1}^1 t^2 x(t) dt.$$

Найти такую функцию g ограниченной вариации, что

$$f(x) = \int_{-1}^1 x(t) dg(t).$$

11. Пусть E — линейное нормированное пространство, $f \in E^*$, $\alpha_k \in \mathbb{R}$ ($k = 1, 2, \dots$) и $f_k(x) = f(\alpha_k x)$ ($\forall x \in E$). Показать, что последовательность (f_k) :

а) сходится по норме пространства E^* , если последовательность (α_k) имеет конечный предел;

б) сходится к нулю, если $\alpha_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$;

в) не сходится, если $\alpha_k \rightarrow \infty$.

12. Доказать, что если E — линейное нормированное пространство, то для любого $0 \neq x_0 \in E$ существует $f_0 \in E^*$ такой, что $f_0(x_0) = \|f_0\| \|x_0\| = 1$.

Указание. На множестве $E = \{\lambda x_0\}$ положить $f_0(\lambda x_0) = \lambda$ и воспользоваться теоремой Хана — Банаха (см. § 2).

13. Убедиться, что не для всякого $f \in C^*[-1; 1]$ найдется такое $x \in C[-1; 1]$, $x(t) \neq 0$, что $|f(x)| = \|f\| \|x\|$.

Указание. Рассмотреть функционал

$$f(x) = \int_{-1}^0 x(t) dt - \int_0^1 x(t) dt \quad (\|f\| = 2),$$

14. Определим линейный функционал f на пространстве $C[0; 1]$ формулой

$$f(x) = \int_0^1 x(t) dt - x(0). \text{ Доказать, что } \|f\| = 2 \text{ и не существует такого элемента}$$

$x \in C[0; 1]$, что $\|x\| = 1$ и $|f(x)| = 2$.

15. Доказать, что последовательность $(x_n(t)) \subset C[a; b]$ слабо сходится тогда и только тогда, когда:

1) она равномерно ограничена, т. е. $|x_n(t)| \leq C$ при всех $n = 1, 2, \dots$ и $a \leq t \leq b$;

2) $(x_n(t))$ сходится в каждой точке $t \in [a; b]$.

Совпадают ли в $C[a; b]$ слабая и сильная сходимости?

16. Для того чтобы последовательность (x_n) элементов $x_n = (\xi_i^{(n)})$ из l_p слабо сходилась к $x_0 = (\xi_i^{(0)}) \in l_p$, необходимо и достаточно, чтобы:

а) последовательность $(\|x_n\|)$ была ограниченной;

б) $\xi_i^{(n)} \rightarrow \xi_i^{(0)}$ при $n \rightarrow \infty$ для всех i (вообще говоря, неравномерно). Доказать это утверждение.

17. Доказать, что в пространстве l_1 сильная и слабая сходимости совпадают.

18. Какие из последовательностей $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

а) $x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots\right)$;

б) $x_n = \left(0, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right)$;

в) $x_n = \left(1, \dots, 1, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots\right)$

сходятся в пространстве l_2 сильно, слабо?

19. Какие из последовательностей $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

а) $x_n(t) = t^n - t^{n+1}$; б) $x_n(t) = e^{t\sqrt{n}t}$;

в) $x_n(t) = \begin{cases} 2n(1-nt), & t \in \left[0; \frac{1}{n}\right], \\ 0, & t \in \left[\frac{1}{n}; 1\right]. \end{cases}$

сходятся в пространстве $L_2[0; 1]$ сильно, слабо?

20. Доказать, что замкнутое подпространство рефлексивного пространства рефлексивно.

21. Доказать нерексивность пространства c_0 всех сходящихся к нулю числовых последовательностей $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots)$ с нормой $\|x\| = \max_n |\xi_n|$.

22. Доказать, что полное линейное нормированное пространство E рефлексивно тогда и только тогда, когда рефлексивно сопряженное к нему пространство E^* .

23. Пусть E — рефлексивное нормированное пространство, M — подпространство в E , а $M^\perp = \{f \in E^* : f(x) = 0 \text{ для любого } x \in M\}$. Доказать, что $(M^\perp)^\perp = M$.

24. Пусть E — рефлексивное нормированное пространство и $f \in E^*$. Доказать существование такого элемента $x \in E$, $x \neq 0$, что $f(x) = \|f\| \|x\|$.

Ответы. 2. а) Линеен, непрерывен, $\|f\| = \frac{1}{3}$; б) не линеен, непрерывен,

$\|f\| = \frac{1}{3}$; в) не линеен, не непрерывен; г) линеен, непрерывен, $\|f\| = \frac{\alpha}{1-\alpha}$.

3. а), в), г) 1; б) $\frac{\pi}{\sqrt{6}}$. 4. а) 2; б) 1, в) $\sqrt{2}$; г) $\frac{2}{\pi}$; д) 3; е) $\frac{1}{\sqrt{2}}$. 5. а), б) 1; в) $\sqrt{\frac{2}{3}}$. 6. $\|f\| = \int_a^b |y(t)| dt$. 7. $\alpha > \frac{1}{q} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right)$. 9. а) Нет; в про-

тивном случае положить $x(t) = f^2 g(t)$; б) $g(t) = \begin{cases} 0, & -1 \leq t \leq 0, \\ 1, & 0 < t \leq 1. \end{cases}$

10. $g(t) = \begin{cases} -\frac{1}{4}, & x = -1, \\ \frac{t^4}{4}, & -1 < x < 1, \\ \frac{3}{4}, & x = 1. \end{cases}$ 15. Нет. 18. а) Сильно; б) слабо; в) не сходится.

ея. 19. а) Сильно, б) слабо; в) не сходится.

§ 2. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

1. Принцип равномерной ограниченности. Многие конкретные задачи (например, исследование сходимости рядов Фурье и интерполяционных полиномов, исследование формул механических квадратур, получение приближенных решений различных интегральных и дифференциальных уравнений и т. п.) могут быть включены в абстрактную схему, описываемую с помощью последовательности линейных операторов (функционалов). При этом в абстрактной форме изучение вопроса обычно сводится либо к установлению сходимости последовательности линейных операторов, либо к доказательству ограниченности норм операторов этой последовательности. Решение задач такого рода в значительной степени основывается на использовании одного из основных принципов функционального анализа — принципа равномерной ограниченности, имеющего основополагающее значение в теории операторов.

Теорема 1 (принцип равномерной ограниченности). Если последовательность линейных ограниченных операторов (A_n) , отображающих банахово пространство E в нормированное пространство E_1 , поточечно сходится к линейному оператору A , то последовательность норм $(\|A_n\|)$ этих операторов ограничена.

Заметим, что теорема остается справедливой, если вместо поточечной сходимости последовательности (A_n) потребовать, чтобы последовательность $(A_n x)$ либо являлась фундаментальной в каждой точке $x \in E$, либо была ограниченной в каждой точке.

Теорему 1 можно сформулировать еще и так (принцип фиксации особенности): если $\sup_n \|A_n\| = +\infty$, то существует такой элемент $x_0 \in E$, что $\sup_n \|A_n x_0\| = +\infty$ (т. е. последовательность $(\|A_n x_0\|)$ не имеет конечного предела).

Ограниченность последовательности норм является в известном смысле и достаточным условием сходимости последовательности линейных ограниченных операторов. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2 (Банаха — Штейнгауза). Для того чтобы последовательность линейных ограниченных операторов (A_n) , отображающих банахово пространство E в нормированное пространство E_1 , поточечно сходилась к линейному ограниченному оператору A , необходимо и достаточно, чтобы:

1) последовательность норм $(\|A_n\|)$ была ограничена;

2) $A_n x \rightarrow Ax$ для любого x из некоторого множества в E , линейные комбинации

элементов которого лежат всюду плотно в E (т. е. замыкание множества этих линейных комбинаций совпадает с E).

2. Принцип продолжения Хана — Банаха. Если в линейном пространстве E задан оператор или функционал, определенный не на всем пространстве, а лишь на некотором многообразии $L \subset E$, то естественно возникает вопрос о его продолжении на все пространство с сохранением тех или иных свойств. Иными словами, требуется

зостронть новый оператор или функционал, определенный уже на всем пространстве, обладающий определенными свойствами и совпадающий на L с ранее заданным.

Для линейных ограниченных операторов данный вопрос решается легко, если исходный оператор задан на линейном многообразии, всюду плотном во всем пространстве. А именно, если область определения $\mathcal{D}(A_0) = L$ линейного ограниченного оператора A_0 всюду плотна в линейном нормированном пространстве E , то оператор A_0 может быть продолжен на все пространство без увеличения нормы, т. е. существует оператор A , заданный на всем пространстве E и такой, что $Ax = A_0x$ для всех $x \in \mathcal{D}(A_0)$ и $\|A\|_E = \|A_0\|_L$. Действительно, так как $\mathcal{D}(A_0) = L$, то для любого элемента $x \in E$ существует последовательность элементов $x_n \in \mathcal{D}(A_0)$ такая, что $x_n \rightarrow x$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда полагаем $Ax = \lim_{n \rightarrow \infty} A_0x_n$ (если $x \in \mathcal{D}(A_0)$, то $x_n = x$ для всех n).

Построенный оператор является линейным и непрерывным. Указанный процесс продолжения называется *продолжением по непрерывности*. Если оператор не является ограниченным, то его продолжение обычно называется расширением. Теория расширений операторов составляет самостоятельную и важную область функционального анализа.

Если задан линейный непрерывный функционал, то его можно продолжать с сохранением нормы, даже если первоначально он задан на линейном многообразии, не обязательно всюду плотном в пространстве E . Соответствующая теорема играет важную роль в анализе и носит название принципа продолжения Хана — Банаха.

Напомним, однако, сперва некоторые определения. Пусть E — действительное линейное пространство. Определенный на E функционал p называется *однородно-выпуклым*, если:

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y), \quad \forall x, y \in E, \quad (1)$$

$$p(\alpha x) = \alpha p(x), \quad \forall x \in E, \quad \alpha \geq 0. \quad (2)$$

Для таких функционалов $p(0) = 0$ и $p(x) + p(-x) \geq 0$ ($\forall x \in E$). Последнее неравенство означает, в частности, что если $p(x) < 0$, то обязательно $p(-x) > 0$. Таким образом, ненулевой однородно-выпуклый функционал может быть всюду неотрицательным (т. е. $p(x) \geq 0$ для всех $x \in E$), но если всюду $p(x) \leq 0$, то $p(x) \equiv 0$. Кроме того, при любом $\alpha \in \mathbb{R}$ $p(\alpha x) \geq \alpha p(x)$.

Примеры. а) Всякий линейный функционал является однородно-выпуклым. Однородно-выпуклым будет и функционал $p(x) = |f(x)|$, если f линейен.

б) Длина вектора в n -мерном евклидовом пространстве есть однородно-выпуклый функционал. Здесь условие (1) означает, что длина суммы двух векторов не превосходит суммы их длин (неравенство треугольника), а (2) непосредственно следует из определения длины вектора в $\mathbb{R}^n$.

в) Пусть m — пространство всех ограниченных последовательностей $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$. Функционал $p(x) = \sup_n |\xi_n|$ — однородно-выпуклый.

Теорема 3 (Хана — Банаха). Пусть p — однородно-выпуклый функционал, определенный на действительном линейном пространстве E , L — линейное многообразие в E . Если f — вещественный линейный функционал, определенный на L и удовлетворяющий условию $f(x) \leq p(x)$ ($\forall x \in L$), то существует вещественный линейный функционал F , определенный на всем пространстве E и такой, что:

$$1) F(x) = f(x), \quad \forall x \in L;$$

$$2) F(x) \leq p(x), \quad \forall x \in E.$$

Следствие 1. Если $p(x)$ — однородно-выпуклый на действительном линейном пространстве E функционал, то существует линейный функционал f , заданный на E и такой, что

$$-p(-x) \leq f(x) \leq p(x), \quad \forall x \in E.$$

Приведем еще комплексный вариант теоремы Хана — Банаха.

Неотрицательный функционал p на комплексном линейном пространстве E называется *однородно-выпуклым*, если для всех $x, y \in E$ и всех комплексных чисел λ

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y), \quad p(\lambda x) = |\lambda| p(x).$$

Теорема 4. Пусть p — однородно-выпуклый функционал на комплексном линейном пространстве E , а f — линейный функционал, определенный на некотором линейном многообразии $L \subset E$ и удовлетворяющий на нем условию $|f(x)| \leq p(x)$,

$x \in L$. Тогда существует линейный функционал F , определенный на всем E и удовлетворяющий условиям:

- 1) $F(x) = f(x)$, $\forall x \in L$;
- 2) $|F(x)| \leq p(x)$, $\forall x \in E$.

В случае нормированного пространства E в качестве однородно-выпуклого функционала $p(x)$ можно взять $p(x) = \|f\|_L \cdot \|x\|$ (L — линейное многообразие в E), и поэтому применительно к нормированным пространствам общая теорема Хана — Банаха (теорема 3) может быть сформулирована следующим образом.

Теорема 5. Пусть E — действительное нормированное пространство, L — линейное многообразие в E , f — ограниченный линейный функционал на L . Тогда этот функционал может быть продолжен до некоторого линейного ограниченного функционала F на всем пространстве E без увеличения нормы, т. е.

$$\|F\|_E = \sup_{\substack{x \neq 0 \\ x \in E}} \frac{|F(x)|}{\|x\|_E} = \sup_{\substack{x \neq 0 \\ x \in L}} \frac{|f(x)|}{\|x\|_L} = \|f\|_L.$$

Укажем еще на некоторые важные факты, вытекающие из теоремы Хана — Банаха для нормированных пространств.

Следствие 2. Пусть E — действительное нормированное пространство, $x_0 \in E$, $x_0 \neq 0$. Тогда существует линейный функционал f , определенный на E и такой, что $\|f\| = 1$, $f(x_0) = \|x_0\|$.

Следствие 3. Пусть E — действительное нормированное пространство, L — линейное многообразие в E , $x_0 \in E$, $x_0 \notin L$, $p(x_0, L) = d > 0$. Тогда существует такой линейный функционал f , определенный на E , что $f(x) = 0$ для всех $x \in L$, $f(x_0) = 1$, $\|f\| = \frac{1}{d}$.

Комплексный вариант теоремы Хана — Банаха (теорема 4) дает нам комплексный аналог предыдущей теоремы.

Теорема 5'. Пусть E — комплексное линейное нормированное пространство, f — линейный ограниченный функционал, определенный на линейном многообразии $L \subset E$. Тогда существует линейный ограниченный функционал F , определенный на всем E и удовлетворяющий условиям

$$F(x) = f(x) \quad (\forall x \in L), \quad \|F\|_E = \|f\|_L.$$

3. Обратные операторы. Теорема Банаха об обратном операторе. Как известно, решение систем линейных алгебраических уравнений, линейных интегральных уравнений, а также некоторых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными сводится к вопросу о существовании и единственности решения линейных операторных уравнений вида $Ax = y$. Если существует обратный оператор A^{-1} , то решение записывается в явном виде: $x = A^{-1}y$. Следовательно, важное значение приобретает выявление условий, при выполнении которых обратный оператор существует и обладает теми или иными свойствами.

Пусть задан линейный оператор $A: E_1 \rightarrow E_2$, где E_1, E_2 — линейные пространства, причем его область определения $\mathcal{D}(A) \subset E_1$, а область значений $R(A) \subset E_2$. Обратное отображение, обозначаемое A^{-1} , называется *обратным оператором*. Предположим, что оператор A отображает $\mathcal{D}(A)$ на $R(A)$ взаимно однозначно. Тогда существует обратный оператор A^{-1} , отображающий $R(A)$ взаимно однозначно на $\mathcal{D}(A)$. В этом случае оператор A^{-1} также является линейным оператором.

Вопрос о том, когда оператор A осуществляет взаимно однозначное соответствие между $\mathcal{D}(A)$ и $R(A)$, решается следующей теоремой.

Теорема 6. Оператор A переводит $\mathcal{D}(A)$ в $R(A)$ взаимно однозначно тогда и только тогда, когда $\ker A = \{0\}$ (т. е. множество нулей (ядро) оператора A состоит только из нулевого элемента).

Пусть теперь E_1, E_2 — нормированные пространства. Исследуем вопрос об ограниченности оператора A^{-1} , если он существует. Из ограниченности оператора A , вообще говоря, не следует ограниченность обратного оператора, т. е. оператор, обратный к линейному ограниченному, может (являясь линейным) не быть ограничен-

ным. Сформулированная ниже теорема дает необходимое и достаточное условие существования обратного линейного ограниченного оператора.

Теорема 7. Оператор A^{-1} существует и одновременно ограничен на $R(A)$ тогда и только тогда, когда для некоторой постоянной $m > 0$ и любого $x \in \mathcal{D}(A)$ выполняется неравенство

$$\|Ax\| \geq m\|x\|. \quad (3)$$

Введем теперь следующее важное понятие. Будем говорить, что линейный оператор $A: E_1 \rightarrow E_2$ непрерывно обратим, если $R(A) = E_2$, оператор A обратим и $A^{-1} \in \mathcal{L}(E_2, E_1)$ (т. е. A^{-1} линейен и ограничен). Обращаясь к теореме 7, можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема 8. Оператор A непрерывно обратим тогда и только тогда, когда $R(A) = E_2$ и для некоторой постоянной $m > 0$ и для всех $x \in \mathcal{D}(A)$ выполняется неравенство (3).

В случае всюду определенного и ограниченного оператора $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ имеется теорема Банаха об обратном операторе.

Теорема 9 (Банаха). Если A — ограниченный линейный оператор, отображающий взаимно однозначно банахово пространство E_1 на банахово пространство E_2 , то обратный оператор A^{-1} ограничен.

Рассмотрим понятие обратного оператора с точки зрения разрешимости уравнения $Ax = y$. Пусть $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$. Оператор $U \in \mathcal{L}(E_2, E_1)$ называется *правым обратным* к A , если $AU = I_2$. Оператор $V \in \mathcal{L}(E_2, E_1)$ называется *левым обратным* к A , если $VA = I_1$. Здесь через I_2 обозначим тождественный оператор в пространстве E_2 , а через I_1 — тождественный оператор в пространстве E_1 . В дальнейшем правый обратный оператор к A будем обозначать символом A_r^{-1} , левый обратный — A_l^{-1} . В общем случае нельзя говорить об единственности правого и левого обратных операторов. Тем не менее, справедлива следующая теорема.

Теорема 10. Пусть для оператора $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ существуют A_r^{-1} и A_l^{-1} .

Тогда существует оператор A^{-1} , обратный к A , и:

- 1) $A^{-1} = A_r^{-1} = A_l^{-1}$;
- 2) $\mathcal{D}(A^{-1}) = E_2$, $R(A^{-1}) = E_1$;
- 3) правый обратный к A и левый обратный к A единственны.

Отсюда получаем следующее утверждение.

Теорема 11. Пусть $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ и пусть существует оператор $U \in \mathcal{L}(E_2, E_1)$ такой, что $UA = I_1$, $AU = I_2$. Тогда оператор A непрерывно обратим и $A^{-1} = U$.

Наличие левого или правого обратного оператора позволяет сделать некоторые заключения о разрешимости уравнения

$$Ax = y. \quad (4)$$

Теорема 12. Если существует правый обратный оператор к A , то уравнение (4) имеет решение $x = A_r^{-1}y$.

Если существует левый обратный оператор к A , то уравнение (4) может иметь не более одного решения.

Замечание. В первом случае говорят, что для уравнения (4) справедлива теорема существования, а во втором — теорема единственности.

Подытожив сформулированные результаты, придем к следующему утверждению: оператор $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ непрерывно обратим, если уравнение $Ax = y$ однозначно разрешимо при любом $y \in E_2$.

Замечание. Если E_1, E_2 — банаховы пространства, то непрерывная обратимость оператора $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ в данном случае следует также из теоремы Банаха об обратном операторе. Действительно, если каждому $y \in E_2$ соответствует единственный элемент $x \in E_1$, то, по определению обратного отображения, на всем пространстве E_2 определен оператор A^{-1} , осуществляющий взаимно однозначное соответствие между E_2 и E_1 . По теореме Банаха оператор A^{-1} ограничен, что и требовалось установить.

Пусть $E = E_1 = E_2$. Этот случай интересен тем, что если существует непрерывный обратный оператор по отношению к данному оператору $A \in \mathcal{L}(E, E)$, то он является элементом этого же пространства $\mathcal{L}(E, E)$.

Теорема 13. Пусть E — банахово пространство, $A \in \mathcal{L}(E, E)$, $\|A\| < 1$. Тогда оператор $I - A$ непрерывно обратим:

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

Об основополагающих принципах функционального анализа см. в [16; 19; 30; 33; 40].

Примеры решения задач

1. Доказать, что если последовательность $\beta = (\beta_n)$ такая, что $(\alpha_n \beta_n) \in l_1$ для всех $\alpha = (\alpha_n) \in l_p$ ($p > 1$), то $\beta \in l_q$, где число q удовлетворяет соотношению $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Решение. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ — произвольный вектор из l_p . При каждом фиксированном $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим линейный в пространстве l_p функционал $f_n: f_n(\alpha) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_k$. Для него

$$\begin{aligned} |f_n(\alpha)| &= \left| \sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_k \right| \leq \left(\sum_{k=1}^n |\alpha_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^n |\beta_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^n |\beta_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} = c_n \|\alpha\|_p, \end{aligned}$$

где $c_n = \left(\sum_{k=1}^n |\beta_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$. Следовательно, $\|f_n\| \leq c_n$. Покажем, что $\|f_n\| = c_n$. Для этого, предполагая, что $c_n \neq 0$, возьмем элемент

$$\gamma_n = (|\beta_1|^{q-1} \operatorname{sgn} \beta_1, \dots, |\beta_n|^{q-1} \operatorname{sgn} \beta_n, 0, 0, \dots).$$

Очевидно, $\gamma_n \in l_p$ при каждом $n \in \mathbb{N}$; при этом

$$\|\gamma_n\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |\beta_k|^{(q-1)p} \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^n |\beta_k|^q \right)^{\frac{1}{p}}$$

(здесь мы воспользовались тем, что $q = \frac{p}{p-1}$). Кроме того,

$$f_n(\gamma_n) = \sum_{k=1}^n \operatorname{sgn} \beta_k \cdot \beta_k \cdot |\beta_k|^{q-1} = \sum_{k=1}^n |\beta_k|^q.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\|f_n\| &= \sup_{\alpha \neq 0} \frac{|f_n(\alpha)|}{\|\alpha\|_{l_p}} \geq \frac{|f_n(\gamma_n)|}{\|\gamma_n\|_{l_p}} = \frac{\sum_{k=1}^n |\beta_k|^k}{\left(\sum_{k=1}^n |\beta_k|^q\right)^{\frac{1}{p}}} = \\ &= \left(\sum_{k=1}^n |\beta_k|^q\right)^{1-\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^n |\beta_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} = c_n.\end{aligned}$$

Следовательно, $\|f_n\| = c_n$. Далее,

$$\sup_n |f_n(\alpha)| = \sup_n \left| \sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_k \right| \leq \sup_n \sum_{k=1}^n |\alpha_k \beta_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k \beta_k| < +\infty,$$

т. е. последовательность $(f_n(\alpha))$ ограничена в каждой точке $\alpha = (\alpha_k) \in l_p$ ($p > 1$). Тогда на основании принципа равномерной ограниченности заключаем, что последовательность норм $\|f_n\|$ ограничена, т. е. существует постоянная $c > 0$ такая, что для всех $n \in \mathbb{N}$

$\|f_n\| \leq c$. Но поскольку $\|f_n\| = \left(\sum_{k=1}^n |\beta_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$, это и означает, что $(\beta_k) \in l_q$.

2. Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства, $B(\cdot, \cdot)$ — билинейное отображение из $E_1 \times E_2$ в $\mathbb{R}$, непрерывное по каждой переменной в отдельности, т. е. $B(x, \cdot)$ для любого фиксированного $x \in E_1$ и $B(\cdot, y)$ для любого фиксированного $y \in E_2$ есть линейные ограниченные преобразования. Доказать непрерывность B по совокупности переменных, т. е. если $x_n \rightarrow 0$ и $y_n \rightarrow 0$, то $B(x_n, y_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Решение. Пусть $(x_n) \subset E_1$, $x_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, т. е. $\|x_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$ и рассмотрим функционал $f_n(y) = B(x_n, y)$, определенный на E_2 . Ясно, что f_n — линейный функционал. Кроме того, согласно условию задачи, для любого фиксированного $x_n \in E_1$ функционал f_n является непрерывным, ибо

$$|f_n(y)| = |B(x_n, y)| \leq \|f_n\| \|y\|_{E_2}. \quad (5)$$

Однако, при каждом фиксированном $y \in E_2$ $B(\cdot, y)$ — также линейный непрерывный функционал, т. е. $|B(x_n, y)| \leq c_y \|x_n\|_{E_1}$.

Поскольку $x_n \rightarrow 0$ в E_1 , то существует константа $M > 0$ такая, что $\|x_n\|_{E_1} \leq M$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Таким образом,

$$|f_n(y)| = |B(x_n, y)| \leq c_y \|x_n\|_{E_1} \leq c_y \cdot M = c_y^1,$$

т. е. $\sup_n |f_n(y)| \leq c_y^1 < +\infty$. Тогда, согласно принципу равномерной ограниченности, $\sup_n \|f_n\| = K < +\infty$. Отсюда и из неравенства (5) следует, что

$$|f_n(y)| \leq \|f_n\| \|y\|_{E_2} \leq K \|y\|_{E_2}, \quad (\forall n \in \mathbb{N}). \quad (6)$$

На основании (6) заключаем, что

$$|B(x_n, y_n)| = |f_n(y_n)| \leq \|f_n\| \|y_n\|_{E_2} \leq K \|y_n\|_{E_2} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$, если $\|y_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Утверждение доказано.

Замечание. Если отказаться от условия линейности, то сформулированное утверждение перестает быть верным даже в пространстве $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$. Например, функция

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

непрерывна по каждой переменной, но не является непрерывной (по совокупности переменных) в точке $(0, 0)$.

3. Пусть задан числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ — его n -я частичная сумма, $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ — некоторая неубывающая последовательность положительных чисел и $P_n = \sum_{k=1}^n p_k$. Показать, что формулой $\omega_n = \frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^n p_{n-k+1} S_k$ определится регулярный метод суммирования тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{P_n} = 0. \quad (7)$$

Решение. Напомним, что регулярность метода суммирования означает, что ряд, сходящийся в обычном смысле к сумме a , должен иметь «обобщенную сумму», также равную a .

Рассмотрим в пространстве c всех сходящихся последовательностей функционалы

$$f_n(x) = \frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^n p_{n-k+1} \xi_k, \quad x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in c, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n.$$

Функционалы f_n линейны и непрерывны. Линейность f_n очевидна, а непрерывность вытекает из оценки

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^n p_{n-k+1} \cdot \sup_{1 \leq k \leq n} |\xi_k| = \|x\|_c,$$

т. е. $\|f_n\| \leq 1$ (здесь мы воспользовались тем, что $\sum_{k=1}^n p_{n-k+1} = P_n$).

Следовательно, последовательность норм $\|f_n\|$ ограничена. Если взять вектор $x_0 = (1, 1, \dots, 1, \dots) \in c$, $\|x_0\|_c = 1$, то $f_n(x_0) = 1$, т. е. $\|f_n\| = 1$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим векторы $x_k = (\underbrace{0, \dots, 0}_{k-1}, 1, 0, \dots) \in c$. Так как $f_n(x_k) =$

$= \frac{p_{n-k+1}}{p_n}$ при $k \leq n$, то условие (7) (которое эквивалентно тому, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n-k+1}}{p_n} = 0$ для любого $k \in \mathbb{N}$) может быть записано в виде $f_n(x_k) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Однако, с другой стороны, $f(x_k) = 0$, т. е. $f_n(x_k) \rightarrow f(x_k)$ при $n \rightarrow \infty$ ($k = 1, 2, \dots$) и

$$f_n(x_0) = \frac{1}{p_n} \sum_{k=1}^n p_{n-k+1} = 1 \rightarrow 1 = f(x_0).$$

Поскольку линейные комбинации элементов $x_0, x_1, x_2, \dots$ образуют плотное в c множество, то выполнены условия 1), 2) теоремы Банаха — Штейнгауза. Таким образом, условие (7) является необходимым и достаточным для того, чтобы

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x), \quad \forall x = (x_k) \in c. \quad (8)$$

А соотношение (8) и означает регулярность рассматриваемого метода суммирования. Действительно, пусть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = a < +\infty,$$

т. е. ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится в обычном смысле к сумме a . Рассмотрим вектор $\tilde{x} = (S_1, S_2, \dots, S_n, \dots) \in c$. В силу (8) имеем

$$\omega_n = f_n(\tilde{x}) = \frac{1}{p_n} \sum_{k=1}^n p_{n-k+1} S_k \rightarrow f(\tilde{x}) \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = a,$$

что и требовалось доказать.

Замечание 1. Рассмотренный метод суммирования принадлежит к методам Г. Ф. Вороного обобщенного суммирования рядов. Отметим, что частным случаем метода Вороного является метод суммирования Чезаро (метод средних арифметических), ибо для него

$$\omega_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k,$$

т. е. $p_n = 1$ ($\forall n \in \mathbb{N}$).

Замечание 2. Вместо того чтобы говорить об обобщенном суммировании рядов, можно рассматривать вопрос об определении обобщенного предела последовательности, соотнося последовательности частичных сумм S_n последовательность

$$\omega_n = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk} S_k \quad (n = 1, 2, \dots)$$

и исследуя ее поведение при $n \rightarrow \infty$ (здесь α_{nk} — бесконечная матрица, характеризующая метод суммирования). Например, метод суммирования Чезаро характери-

зуется матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

4. Доказать теорему Теплица — Сильвермена: для того чтобы матрица $(\alpha_{nk})_{n,k=1}^{\infty}$ определяла регулярный метод суммирования, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие условия:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{nk} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots);$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk} = 1;$$

$$3) \sup_{1 \leq n < \infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{nk}| = M < +\infty.$$

Решение. Как и в предыдущем примере, в пространстве c сходящихся последовательностей рассмотрим функционалы

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk} \xi_k, \quad x = (\xi_k) \in c, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k.$$

Функционалы f_n линейны и непрерывны, причем (проверьте это) $\|f_n\| = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{nk}|$. Следовательно, условие 3) означает, что последовательность норм $\|f_n\|$ ограничена: $\|f_n\| \leq M \quad (\forall n \in \mathbb{N})$. Далее, рассмотрим последовательности

$$x_0 = (1, 1, \dots, \dots) \in c, \quad x_k = (\underbrace{0, \dots, 0}_{k-1}, 1, 0, \dots) \in c \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Поскольку

$$f_n(x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk}, \quad f_n(x_k) = \alpha_{nk} \quad (n, k = 1, 2, \dots),$$

то условия 1) и 2) могут быть записаны в виде

$$f_n(x_k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 = f(x_k), \quad f_n(x_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 = f(x_0).$$

Поскольку линейные комбинации элементов $x_0, x_1, x_2, \dots$ образуют плотное в c множество, то, в силу теоремы 2, условия 1) — 3) необходимы и достаточны для того, чтобы $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x) \quad (\forall x \in c)$, что и означает регулярность метода суммирования.

5. а) Пусть $a_n \geq 0$ ($n = 1, 2, \dots$) и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$. Показать, что существует последовательность $(e_n)_{n=1}^{\infty}$, для которой выполнены условия:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = 0$; 2) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ расходится;

б) Показать, что если $a_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, то существует такая последовательность $(e_n)_{n=1}^{\infty}$, что $\sum_{n=1}^{\infty} |e_n| < +\infty$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} e_n a_n$ расходится.

Решение. а) В пространстве c_0 сходящихся к нулю последовательностей рассмотрим функционалы

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k \xi_k, \quad x = (\xi_k) \in c_0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

являющиеся линейными и ограниченными. Действительно, линейность каждого функционала f_n очевидна, а ограниченность вытекает из оценки:

$$|f_n(x)| = \left| \sum_{k=1}^n a_k \xi_k \right| \leq \sum_{k=1}^n a_k \cdot \sup_{1 \leq k \leq n} |\xi_k| = c_n \cdot \sup_{1 \leq k \leq n} |\xi_k| \leq c_n \|x\|_{c_0},$$

где $c_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Если при каждом фиксированном $n \in \mathbb{N}$ взять элемент $x_0 = (\underbrace{1, \dots, 1}_n, 0, 0, \dots) \in c_0$, $\|x_0\|_{c_0} = 1$, то $|f_n(x_0)| = c_n$, т. е. $\|f_n\| = c_n$. Следовательно,

$$\sup_n \|f_n\| = \sup_n \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty.$$

На основании принципа фиксации особенности заключаем, что существует элемент $\hat{x} = (e_1, e_2, \dots, e_n, \dots) \in c_0$ (т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = 0$) такой, что последовательность $\left(\sum_{k=1}^n a_k e_k \right)_{n=1}^{\infty}$ не является сходящейся, т. е. ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$ расходится.

б) Аналогично предыдущему случаю, в пространстве l_1 рассмотрим функционалы

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k \xi_k, \quad x = (\xi_k) \in l_1, \quad n = 1, 2, \dots$$

Из оценки

$$|f_n(x)| \leq \sum_{k=1}^n |\xi_k| \cdot \sup_{1 \leq k \leq n} |a_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| \cdot \sup_{1 \leq k \leq n} |a_k| = \sup_{1 \leq k \leq n} |a_k| \cdot \|x\|_{l_1},$$

следует ограниченность $f_n: \|f_n\| \leq \sup_{1 \leq k \leq n} |a_k|$. Нетрудно видеть, что в действительности $\|f_n\| = \sup_{1 \leq k \leq n} |a_k|$. Следовательно, $\sup_n \|f_n\| = \sup_n \sup_{1 \leq k \leq n} |a_k| = +\infty$. В силу принципа фиксации особенности, существует элемент $\tilde{x} = (e_1, e_2, \dots, e_n, \dots) \in l_1$ такой, что последовательность $(\|f_n(\tilde{x})\|) = \left(\sum_{k=1}^n |a_k e_k| \right)$ не имеет конечного предела, т. е. ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$ расходится. Утверждение доказано.

6. Доказать, что существует непрерывная и 2π -периодическая функция $x(t)$, ряд Фурье которой не сходится к $x(t)$ по норме пространства $C[-\pi; \pi]$.

Решение. Из теории рядов Фурье известно, что частичные суммы ряда Фурье $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$ произвольной непрерывной функции $x(t)$ записываются в виде

$$S_n(t) = \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t-\tau) x(\tau) d\tau,$$

где

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sin \frac{2n+1}{2}t}{\sin \frac{t}{2}} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \dots + \cos nt \right) -$$

ядро Дирихле

Рассмотрим в пространстве $C[-\pi; \pi]$ последовательность операторов A_n :

$$(A_n x)(t) = \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t-\tau) x(\tau) d\tau = S_n(t).$$

Операторы A_n линейны, а их непрерывность следует из неравенств

$$\|A_n x\| \leq \max_{-\pi \leq t \leq \pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t-\tau)| d\tau \cdot \|x\| \quad (n \in \mathbb{N}),$$

т. е. при каждом $n \in \mathbb{N}$

$$\|A_n\| \leq \max_{-\pi \leq t \leq \pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t-\tau)| d\tau = M_n.$$

Установим неравенство противоположного знака. Так как интеграл $\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t-\tau)| d\tau$ представляет собой непрерывную функцию от t ,

существует $t_0 \in [-\pi; \pi]$ такое, что

$$M_n = \max_{-\pi \leq t \leq \pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t - \tau)| d\tau = \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t_0 - \tau)| d\tau.$$

Положим теперь в пространстве $C[-\pi; \pi]$ при фиксированном $n \in \mathbb{N}$ функционал f соотношением

$$f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t_0 - \tau) x(\tau) d\tau, \quad x(t) \in C[-\pi; \pi].$$

Функционал f — линейный ограниченный и, как несложно проверить,

$\|f\| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t_0 - \tau)| d\tau$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и разобьем отрезок $[-\pi; \pi]$ на части точками $-\pi = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n = \pi$ так, чтобы колебание функции $\varphi(\tau) = D_n(t_0 - \tau)$ в каждом из промежутков $[\tau_k; \tau_{k+1}]$ было меньше ε . Все частичные промежутки распределим на две группы. В первую группу отнесем промежутки $\Delta'_1, \dots, \Delta'_p$ такие, что все значения функции $\varphi(\tau)$ в любом из этих промежутков одного знака (который может меняться от промежутка к промежутку). Остальные промежутки $\Delta''_1, \dots, \Delta''_m$ отнесем ко второй группе. Отметим, что в промежутке Δ'_s ($s = 1, 2, \dots, m$) функция φ necessarily обращается в нуль. Поэтому

$$|\varphi(\tau)| = |D_n(t_0 - \tau)| < \varepsilon \quad (\forall \tau \in \Delta'_s, s = 1, 2, \dots, m).$$

Определим функцию $\tilde{x}(\tau) \in C[-\pi; \pi]$, полагая для промежутков первой группы

$$\tilde{x}(\tau) = \operatorname{sgn} \varphi(\tau) = \operatorname{sgn} D_n(t_0 - \tau) \quad (\tau \in \Delta'_k, k = 1, \dots, p),$$

а в остальных точках отрезка $[-\pi; \pi]$ считаем ее линейной. При этом, если точка $-\pi$ (или π) является концом промежутка второй группы, считаем $\tilde{x}(-\pi) = 0$ (соответственно $\tilde{x}(\pi) = 0$). Тогда

$$\begin{aligned} f(\tilde{x}) &= \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t_0 - \tau) \tilde{x}(\tau) d\tau = \sum_{k=1}^p \int_{\Delta'_k} D_n(t_0 - \tau) \tilde{x}(\tau) d\tau + \\ &+ \sum_{s=1}^m \int_{\Delta''_s} D_n(t_0 - \tau) \tilde{x}(\tau) d\tau \geq \sum_{k=1}^p \int_{\Delta'_k} |D_n(t_0 - \tau)| d\tau - \\ &- \sum_{s=1}^m \int_{\Delta''_s} |D_n(t_0 - \tau)| d\tau \approx \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t_0 - \tau)| d\tau - \\ &- 2 \sum_{s=1}^m \int_{\Delta''_s} |D_n(t_0 - \tau)| d\tau > \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t_0 - \tau)| d\tau - 4\pi\varepsilon. \end{aligned}$$

Так как $\|\tilde{x}\| = 1$, то

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)| \geq |f(\tilde{x})| > \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t_0 - \tau)| d\tau - 4\pi\varepsilon.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ — произвольно, то $\|f\| = \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t_0 - \tau)| d\tau$. Возь-

мем теперь $\tilde{y}(t) = (A_n \tilde{x})(t)$. Тогда

$$\begin{aligned} \|A_n\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|A_n x\| \geq \|A_n \tilde{x}\| = \|\tilde{y}(t)\| = \\ &= \max_{-\pi \leq t \leq \pi} |\tilde{y}(t)| \geq |\tilde{y}(t_0)| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t_0 - \tau) \tilde{x}(\tau) d\tau \right| = \\ &= |f(\tilde{x})| \geq \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t_0 - \tau)| d\tau - 4\pi\varepsilon. \end{aligned}$$

Отсюда находим, что

$$\|A_n\| \geq \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t_0 - \tau)| d\tau = \max_{-\pi \leq t \leq \pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t - \tau)| d\tau = M_n.$$

Значит, $\|A_n\| = M_n$. Но в силу периодичности ядра Дирихле справедливо также равенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t - \tau)| d\tau = \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Следовательно, в силу четности функции $|D_n(t)|$,

$$\|A_n\| = \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt = 2 \int_0^{\pi} |D_n(t)| dt.$$

Покажем, что $\int_0^{\pi} |D_n(t)| dt \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow +\infty$. Действительно,

знаменатель дроби $|D_n(t)| = \frac{\left| \sin \frac{2n+1}{2} t \right|}{2\pi \left| \sin \frac{t}{2} \right|}$ равен единице в тех точках

t , где $\frac{2n+1}{2} t = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$ ($k = 0, 1, \dots, n$), т. е. при $t = \frac{2k+1}{2n+1}\pi$ ($k = 0, 1, \dots, n$). Окружим каждую из этих точек интервалом $\left| t - \frac{2k+1}{2n+1}\pi \right| < \frac{2\pi}{3(2n+1)}$, длина каждого из которых равна $\frac{4\pi}{3(2n+1)}$. В каждом из этих интервалов $\left| \sin \frac{2n+1}{2} t \right|$ не меньше чем $\frac{1}{2}$. Оценим величину $\sin \frac{t}{2}$ на k -м интервале ($k = 0, 1, \dots$

..., n). Имеем

$$\sin \frac{t}{2} < \frac{t}{2} < \frac{1}{2} \left(\frac{2k+1}{2n+1} \pi + \frac{2\pi}{3(2n+1)} \right) < \frac{k+1}{2n+1} \pi.$$

Поэтому интеграл от $|D_n(t)|$, взятый только по пересечению выделенных промежутков с $[0; \pi]$, больше, чем сумма

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{k+1}{2n+1} \pi} \cdot \frac{4\pi}{3(2n+1)} = \frac{1}{3\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1}.$$

Эта сумма стремится к бесконечности при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, $\|A_n\| \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$, т. е. нормы операторов A_n не ограничены в совокупности. Тогда, в силу принципа фиксации особенности, существует непрерывная на $[-\pi; \pi]$ и 2π -периодическая функция $x_0(t)$ такая, что предел последовательности $((A_n x_0)(t)) = (S_n(t))$ по норме пространства $C[-\pi; \pi]$ не существует. Значит, не является сходящимся по указанной норме и ряд Фурье функции $x_0(t)$.

Пример непрерывной функции, ряд Фурье которой не всюду сходится, впервые указан Дюбуа-Реймоном.

7. Пусть $x_1, \dots, x_n$ — линейно независимые элементы линейного нормированного пространства E , $c_1, \dots, c_n$ — некоторые действительные числа. Доказать существование функционала $f \in E^*$ такого, что $f(x_k) = c_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

Решение. Покажем, что существуют такие линейные ограниченные функционалы $f_1, \dots, f_n$, определенные всюду на E , что

$$f_k(x_m) = \delta_{km} = \begin{cases} 1, & k = m, \\ 0, & k \neq m. \end{cases}$$

Действительно, возьмем x_1 и обозначим через L_1 линейную оболочку векторов $x_2, x_3, \dots, x_n$. Из линейной независимости векторов $x_1, x_2, \dots, x_n$ следует, что $\rho(x_1, L_1) > 0$. В самом деле, если это не так, т. е. $\rho(x_1, L_1) = 0$, то, как известно (см. гл. 2, § 3), для x_1 существует (возможно, не единственный) элемент $y = \alpha x_2 + \beta x_3 + \dots + \gamma x_n \in L_1$ такой, что $\rho(x_1, L_1) = \|x_1 - y\| = 0$. Это означает, что $x_1 - \alpha x_2 - \beta x_3 - \dots - \gamma x_n = 0$, т. е. линейная комбинация элементов $x_1, x_2, \dots, x_n$ равна нулю, но при этом не все коэффициенты равны нулю (ибо коэффициент при x_1 равен единице). Следовательно, по определению, элементы $x_1, \dots, x_n$ линейно зависимы, что невозможно. Итак, $\rho(x_1, L_1) > 0$.

В силу следствия 3 из теоремы Хана — Банаха для нормированных пространств, существует линейный ограниченный функционал f_1 , определенный всюду на E , такой, что $f_1(x_1) = 1$, $f_1(x) = 0$ на L_1 и, в частности, $f_1(x_k) = 0$, $k = 2, 3, \dots, n$. Аналогично возьмем элемент x_2 и найдем функционал f_2 такой, что $f_2(x_2) = 1$, $f_2(x_k) = 0$, $k = 1, 3, 4, \dots, n$ и т. д.

Рассмотрим функционал $f = c_1 f_1 + \dots + c_n f_n$, определенный всюду на E . Этот функционал линеен и ограничен (как линейная комбина-

ция линейных ограниченных функционалов f_k , $k = 1, 2, \dots, n$) и

$$f(x_m) = \sum_{k=1}^n c_k f_k(x_m) = \sum_{k=1}^n c_k \delta_{km} = c_m \quad (m = 1, 2, \dots, n).$$

Значит, f — искомый функционал.

8. Пусть (x_n) — последовательность элементов линейного нормированного пространства E , (c_n) — последовательность действительных чисел, M — положительное число. Доказать, что для существования функционала $f \in E^*$, удовлетворяющего условиям $f(x_n) = c_n$ ($n \in \mathbb{N}$) и $\|f\| \leq M$, необходимо и достаточно, чтобы для всякого $n \in \mathbb{N}$ и любых действительных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ выполнялось неравенство

$$\left| \sum_{k=1}^n \lambda_k c_k \right| \leq M \left\| \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \right\|. \quad (9)$$

Решение. Достаточность. Предположим, что условие (9) выполняется. Пусть L — множество линейных комбинаций вида $\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$ (n, λ_k — произвольны). Для любого элемента $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \in L$ положим

$$f_0(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k c_k. \quad (10)$$

Формула (10) определяет на L линейный ограниченный функционал. Действительно, линейность f_0 проверяется без труда, а его ограниченность вытекает из (9), ибо

$$|f_0(x)| = \left| \sum_{k=1}^n \lambda_k c_k \right| \leq M \left\| \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \right\| = M \|x\|,$$

т. е. $\|f_0\| \leq M$.

Отметим также, что значение функционала f_0 определяется элементом x однозначно. В самом деле, если имеются два представления вида

$$x = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^m \lambda'_k x_k$$

одного и того же элемента $x \in L$, то, в силу (9),

$$\left| \sum_{k=1}^n \lambda_k c_k - \sum_{k=1}^m \lambda'_k c_k \right| \leq M \left\| \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k - \sum_{k=1}^m \lambda'_k x_k \right\| = 0,$$

$$\text{т. е. } f_0\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) = f_0\left(\sum_{k=1}^m \lambda'_k x_k\right).$$

Теперь остается лишь воспользоваться теоремой Хана — Банаха для нормированных пространств и продолжить f_0 до линейного ограниченного функционала f на E так, чтобы $\|f\| = \|f_0\| \leq M$.

Необходимость. Пусть функционал f , имеющий указанные свойства, существует. Поскольку (в силу линейности пространства E)

элементы $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$ принадлежат E при каждом $n \in \mathbb{N}$ и произвольных действительных $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, то

$$|f(x)| = \left| \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k) \right| = \left| \sum_{k=1}^n \lambda_k c_k \right| \leq M \|x\| = M \left| \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \right|,$$

т. е.

$$\left| \sum_{k=1}^n \lambda_k c_k \right| \leq M \left\| \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \right\|.$$

Утверждение доказано.

9. Доказать, что линейное многообразие L плотно в нормированном пространстве E тогда и только тогда, когда всякий линейный функционал $f \in E^*$, равный нулю на L , обращается в нуль тождественно.

Решение. Пусть всякий линейный функционал $f \in E^*$, равный нулю на L , обращается в нуль тождественно, однако L не плотно в E , т. е. $\bar{L} \neq E$. Тогда для любого элемента $x \in E$ ($x \notin \bar{L}$) имеем $\rho(x, \bar{L}) = \inf_{u \in \bar{L}} \|x - u\| = d > 0$. Действительно, предположим, что для не-

которого $x_0 \in E$ ($x_0 \notin \bar{L}$) выполняется соотношение $\rho(x_0, \bar{L}) = 0$. По определению $\inf$, для любого $n \in \mathbb{N}$ существует элемент $u_n \in \bar{L}$ такой, что $\|u_n - x_0\| < \frac{1}{n}$. Отсюда следует, что $u_n \rightarrow x_0$ при $n \rightarrow \infty$, причем $x_0 \in \bar{L}$ вследствие замкнутости $\bar{L}$. Однако, по условию, $x_0 \notin \bar{L}$. Полученное противоречие доказывает, что $\rho(x_0, \bar{L}) > 0$.

Зафиксируем $x_0 \in E$ ($x_0 \notin \bar{L}$). На основании следствия 3 из теоремы Хана — Банаха для нормированных пространств заключаем, что существует всюду определенный на E линейный ограниченный функционал f такой, что $f(x) = 0$ для любого $x \in \bar{L}$ и $f(x_0) = 1$, т. е. $f \neq 0$. Следовательно, $f(x) = 0$ для любого $x \in L$ и в то же время f не равен тождественно нулевому функционалу на E . Полученное противоречие показывает, что $\bar{L} = E$.

Обратно, пусть $\bar{L} = E$. Тогда для любого $x \in E$, вследствие плотности L в E , найдется последовательность $(x_n) \subset L$ такая, что $x_n \rightarrow x$ при $n \rightarrow \infty$. Возьмем произвольный линейный функционал $f \in E^*$, обращаясь в нуль на L . В силу непрерывности f имеем $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0$. Отсюда, учитывая произвольность x , находим, что $f = 0$ на E , что и требовалось доказать.

Замечание. Доказанное утверждение можно сформулировать и так (*принцип аппроксимации*): точка $x_0 \in E$ является пределом в E линейных комбинаций вида

$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ ($\alpha_i \in \mathbb{R}$, $x_i \in E$) элементов из L тогда и только тогда, когда всякий линейный функционал $f \in E^*$, удовлетворяющий условию $f(x) = 0$ для $x \in L$, удовлетворяет также условию $f(x_0) = 0$.

10. Пусть E — линейное нормированное пространство. Доказать, что если пространство E^* сепарабельно, то и E сепарабельно. Верно ли обратное утверждение?

Решение. Пусть $M = \{f_1, f_2, \dots\}$ — счетное всюду плотное в пространстве E^* множество. Как известно, $\|f_k\| = \sup_{\|x\|=1} |f_k(x)|$. Из

определения $\sup$ вытекает, что для $\varepsilon_k = \frac{\|f_k\|}{2}$ существует элемент $x_k \in E$ такой, что $\|x_k\| = 1$ и $\|f_k\| - \varepsilon_k < |f_k(x_k)| \leq \|f_k\|$, т. е. $|f_k(x_k)| > \frac{\|f_k\|}{2}$. Множество всех линейных комбинаций элементов x_k с рациональными коэффициентами обозначим через L . Поскольку L счетно, то достаточно показать, что L всюду плотно в E , т. е. $\bar{L} = E$. Пусть $\bar{L} \neq E$. Тогда, согласно следствию 3 из теоремы Хана — Банаха для нормированных пространств, существует функционал $f \in E^*$ такой, что $f \neq 0$ и $f(x) = 0$ для произвольного $x \in \bar{L}$. Следовательно, $f(x_k) = 0$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Поскольку M — всюду плотное в E^* множество, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $k_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $\|f - f_{k_0}\| < \varepsilon$. Тогда

$$|(f - f_{k_0})(x_{k_0})| = |f(x_{k_0}) - f_{k_0}(x_{k_0})| = |f_{k_0}(x_{k_0})| > \frac{\|f_{k_0}\|}{2}.$$

Отсюда

$$\|f - f_{k_0}\| = \sup_{\|x\|=1} |(f - f_{k_0})(x)| \geq |(f - f_{k_0})(x_{k_0})| > \frac{\|f_{k_0}\|}{2},$$

т. е. $\|f_{k_0}\| < 2\|f - f_{k_0}\| < 2\varepsilon$.

Значит,

$$\|f\| = \|f_{k_0} + f - f_{k_0}\| \leq \|f_{k_0}\| + \|f - f_{k_0}\| < 2\varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, то $\|f\| = 0$. Таким образом, $f = 0$ на E . Полученное противоречие и доказывает, что $\bar{L} = E$.

Обратное утверждение неверно. Действительно, как показано в § 1, $l_1 = m$. Пространство l_1 сепарабельно, но сопряженное к нему пространство m , как известно, не сепарабельно.

11. Пусть линейное пространство E наделено частичным порядком, записываемым « $x \leq y$ » (или, что то же, « $y \geq x$ »). Если структуры линейного пространства и частичного порядка согласованы так, что: 1) $x \leq y$ влечет за собой $x + z \leq y + z$ ($x, y, z \in E$); 2) соотношения $\lambda \geq 0$ и $x \geq 0$ влекут за собой $\lambda x \geq 0$ ($\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in E$), то пространство E называется упорядоченным линейным пространством.

Пусть E — упорядоченное линейное пространство и L — линейное многообразие в E , обладающее тем свойством, что каждому элементу $x \in E$ соответствует по крайней мере один такой элемент $y \in L$, что $x \leq y$. Доказать, что если f_0 — положительный линейный функционал на L (т. е. $f_0(y) \geq 0$ для всех $y \geq 0$, $y \in L$), то f_0 можно продолжить до положительного линейного функционала f , определенного на всем пространстве E .

Решение. Определим на E функционал $p(x)$ равенством

$$p(x) = \inf \{f_0(y) : y \in L, y \geq x\}$$

и покажем, что $p(x)$ является однородно-выпуклым функционалом. Пусть $\alpha > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\begin{aligned} p(\alpha x) &= \inf \{f_0(y) : y \in L, y \geq \alpha x\} = \alpha \inf \left\{f_0\left(\frac{y}{\alpha}\right) : \frac{y}{\alpha} \geq x\right\} = \\ &= \alpha \inf \left\{f_0(\tilde{y}) : \tilde{y} \geq x, \tilde{y} = \frac{y}{\alpha} \in L\right\} = \alpha p(x). \end{aligned}$$

Из определения $p(x)$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ и произвольных элементов $x_1, x_2 \in E$ существуют элементы $y_1, y_2 \in L$ такие, что $y_1 \geq x_1$, $y_2 \geq x_2$ и

$$p(x_1) \leq f_0(y_1) < p(x_1) + \frac{\varepsilon}{2},$$

$$p(x_2) \leq f_0(y_2) < p(x_2) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда

$$f_0(y_1) + f_0(y_2) = f_0(y_1 + y_2) = f_0(y) < p(x_1) + p(x_2) + \varepsilon,$$

причем $y = y_1 + y_2 \geq x_1 + x_2$, $y \in L$. Следовательно,

$$\begin{aligned} p(x_1 + x_2) &= \inf \{f_0(y) : y \in L, y \geq x_1 + x_2\} \leq f_0(y) = \\ &= f_0(y_1 + y_2) < p(x_1) + p(x_2) + \varepsilon. \end{aligned}$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ заключаем, что $p(x_1 + x_2) \leq p(x_1) + p(x_2)$.

Покажем, что $f_0(x) \leq p(x)$ ($\forall x \in L$). Действительно, пусть $x, y \in L$ и $y \geq x$. Тогда $y - x \geq 0$ и $f_0(y - x) = f_0(y) - f_0(x) \geq 0$, т. е. $f_0(y) \geq f_0(x)$.

Следовательно,

$$p(x) = \inf \{f_0(y) : y \in L, y \geq x\} \geq f_0(x).$$

Согласно теореме Хана — Банаха, существует линейный функционал f , определенный на E и совпадающий с f_0 на L , такой, что $f(x) \leq p(x)$ для всех $x \in E$. Таким образом, осталось установить, что $f(x) \geq 0$, если $x \geq 0$. Действительно,

$$\begin{aligned} f(-x) &\leq p(-x) = \inf \{f_0(y) : y \in L, y \geq -x\} = \\ &= \inf \{f_0(y) : y \in L, y + x \geq 0\} \leq f_0(0) = 0, \end{aligned}$$

так как $y = 0 \in L$ и $0 + x \geq 0$ (по условию). Следовательно, $f(-x) \leq 0$, что равносильно (в силу линейности f) неравенству $f(x) \geq 0$. Значит, f — положительный линейный функционал на E .

В качестве примера рассмотрим пространство $E = C[a; b]$, которое является упорядоченным. Пусть $L \subset C[a; b]$ — множество всех неотрицательных на отрезке $[a; b]$ функций. Ясно, что L — линейное многообразие в $C[a; b]$. Для каждой функции $x(t) \in C[a; b]$ справедливо неравенство $x(t) \leq |x(t)|$ ($|x(t)| \in L$). Следовательно, каждый положительный на L функционал f_0 можно продолжить до поло-

жительного линейного функционала f , заданного на всем пространстве $S[a; b]$.

12. Рассмотрим линейное пространство m всех ограниченных вещественных последовательностей $x = (\xi_n)_{n=1}^{\infty}$. Доказать, что существует линейный функционал $\text{LIM} \in m^*$ (его действие на элемент $x = (\xi_n)$ будем записывать в виде $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{LIM } \xi_n$), имеющий свойства:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{LIM } \xi_n \geq 0$, если $\xi_n \geq 0$ ($n = 1, 2, \dots$);
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{LIM } \xi_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{LIM } \xi_n$;
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \text{LIM } \xi_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n$;
- 4) если существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = a$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{LIM } \xi_n = a$.

Решение. Пусть $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in m$. Положим

$$\pi(x; n_1, n_2, \dots, n_k) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \xi_{n+j}$$

и

$$p(x) = \inf \pi(x; n_1, n_2, \dots, n_k),$$

где точная нижняя грань берется по всевозможным совокупностям натуральных чисел $n_1, n_2, \dots, n_k$. Покажем, что функционал $p(x)$ является однородно-выпуклым. Очевидно, в доказательстве нуждается только полуаддитивность p , т. е. что для любых элементов $x_1 = (\xi_n) \in m$, $x_2 = (\xi_n) \in m$ выполняется неравенство

$$p(x_1 + x_2) \leq p(x_1) + p(x_2).$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Из свойств $\inf$ следует, что существуют совокупности натуральных чисел $n'_1, n'_2, \dots, n'_k$ и $n''_1, n''_2, \dots, n''_s$ такие, что

$$p(x_1) \leq \pi(x_1; n'_1, n'_2, \dots, n'_k) < p(x_1) + \varepsilon, \quad x_1 = (\xi_n) \in m,$$

и

$$p(x_2) \leq \pi(x_2; n''_1, n''_2, \dots, n''_s) < p(x_2) + \varepsilon, \quad x_2 = (\xi_n) \in m.$$

Обозначим $n_{j,l} = n'_j + n''_l$, $j = 1, 2, \dots, k$, $l = 1, 2, \dots, s$.

Тогда, с одной стороны,

$$p(x_1 + x_2) \leq \pi(x_1 + x_2; n_{1,1}, n_{1,2}, \dots, n_{k,s}, n_{2,1}, n_{2,2}, \dots, n_{k,s}).$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \pi(x_1 + x_2; n_{1,1}, n_{1,2}, \dots, n_{k,s}, n_{2,1}, n_{2,2}, \dots, n_{k,s}) &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{ks} \sum_{j,l} (\xi'_{n+n_{j,l}} + \\ &+ \xi''_{n+n_{j,l}}) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{ks} \sum_{j,l} \xi'_{n+n_{j,l}} + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{ks} \sum_{j,l} \xi''_{n+n_{j,l}} \leq \\ &\leq \frac{1}{s} \left[\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \xi'_{n+n_{j,1}} + \dots + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \xi'_{n+n_{j,s}} \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{k} \left[\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \xi_{n+n'_1+n''_1} + \dots + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \xi_{n+n'_k+n''_k} \right] = \\
& = \frac{1}{s} \underbrace{[\pi(x_1; n'_1, \dots, n'_k) + \dots + \pi(x_1; n'_1, \dots, n'_k)]}_s + \\
& + \frac{1}{k} \underbrace{[\pi(x_2; n''_1, \dots, n''_s) + \dots + \pi(x_2; n''_1, \dots, n''_s)]}_k = \\
& = \pi(x_1; n'_1, \dots, n'_k) + \pi(x_2; n''_1, \dots, n''_s) \leq p(x_1) + p(x_2) + 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$

$$p(x_1 + x_2) \leq p(x_1) + p(x_2).$$

Тогда, на основании следствия 1 из теоремы 3, заключаем, что на m существует линейный функционал f , удовлетворяющий условию

$$-p(-x) \leq f(x) \leq p(x), \quad \forall x = (\xi_n) \in m.$$

Положим $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = f(x)$ и покажем, что так определенный функционал f обладает свойствами 1) — 4).

Установим свойство 1). Если $\xi_n \geq 0$ ($\forall n \in \mathbb{N}$), то $p(x) \geq 0$ ($x = (\xi_n) \in m$). Тогда из определения $p(x)$ и свойств однородно-выпуклых функционалов вытекает, что $p(-x) \leq 0$, $-p(-x) \geq 0$.

Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = f(x) \geq -p(-x) \geq 0.$$

Свойство 2) выполняется очевидным образом.

Покажем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n$. Действительно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = f(x) \leq p(x) = \inf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \xi_{n+n_i} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_{n+n_i} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n.$$

Аналогично устанавливаем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n$. Тем самым проверено свойство 3).

Если существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = a$, то $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n = a$.

Тогда из свойства 3) следует, что

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n = a,$$

т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = a$. Утверждение доказано.

Число $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n$ называется обобщенным пределом Банаха любой ограниченной последовательности (ξ_n) .

13. Пусть A — измеримое по Лебегу множество на $[0; 1]$, $\mu(A) > 0$, $p > 1$, $L = \{x(t) \in L_p[0; 1] : x(t) = 0 \text{ для почти всех } t \in [0; 1] \setminus A\}$, $a(t) \in L_q(A)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Описать линейные непрерывные

продолжения $\tilde{f}$ на $L_p[0; 1]$ функционала $f(x) = \int_A a(t) x(t) dt$, $x(t) \in$

L . Для каких из этих продолжений $\|\tilde{f}\| = \|f\|$?

Решение. Функционал f является линейным и ограниченным; при этом $\|f\| = \|a\|_{L_q(A)}$. Действительно (см. § 1), из интегрального неравенства Гельдера следует, что

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq \int_A |a(t) x(t)| dt \leq \left(\int_A |a(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_A |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= \|a\|_{L_q(A)} \cdot \|x\|_{L_p(A)}. \end{aligned}$$

Далее, для $x(t) \in L$ имеем

$$\begin{aligned} \|x\|_{L_p[0;1]} &= \left(\int_0^1 |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_A |x(t)|^p dt + \int_{[0;1] \setminus A} |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= \left(\int_A |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_{L_p(A)} \end{aligned}$$

(здесь мы воспользовались тем, что $\int_{[0;1] \setminus A} |x(t)|^p dt = 0$, ибо $|x(t)|^p = 0$ для почти всех $t \in [0; 1] \setminus A$, если $x(t) = 0$ для почти всех $t \in [0; 1] \setminus A$). Таким образом,

$$|f(x)| \leq \|a\|_{L_q(A)} \cdot \|x\|_{L_p[0;1]}, \quad x \in L,$$

т. е. $\|f\| \leq \|a\|_{L_q(A)}$.

Установим неравенство противоположного знака. Для этого рассмотрим функцию

$$x_0(t) = \begin{cases} \operatorname{sgn} a(t) \cdot |a(t)|^{q-1}, & t \in A, \\ 0 & \text{для почти всех } t \in [0; 1] \setminus A. \end{cases}$$

Функция $x_0(t) \in L \subset L_p[0; 1]$. Действительно, принимая во внимание соотношения $q - 1 = \frac{q}{p}$, $(q - 1)p = q$, находим, что

$$\|x_0\|_{L_p[0;1]} = \left(\int_A |a(t)|^{(q-1)p} dt \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_A |a(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{p}} = \|a\|_{L_q(A)}^{\frac{q}{p}}.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} |f(x_0)| &= \left| \int_A a(t) \operatorname{sgn} a(t) |a(t)|^{q-1} dt \right| = \int_A |a(t)| |a(t)|^{q-1} dt = \\ &= \int_A |a(t)|^q dt = \|a\|_{L_q(A)}^q. \end{aligned}$$

Однако, из ограниченности функционала f на L вытекает, что

$$\|a\|_{L_q(A)}^q = |f(x_0)| \leq \|f\| \|x_0\|_{L_p[0;1]} = \|f\| \|a\|_{L_q(A)}^{\frac{q}{p}}.$$

Следовательно,

$$\|f\| \geq \|a\|_{L_q(A)}^{q\left(1-\frac{1}{p}\right)} = \|a\|_{L_q(A)},$$

ибо $q\left(1-\frac{1}{p}\right) = q \cdot \frac{1}{q} = 1$. На основании установленных неравенств заключаем, что $\|f\| = \|a\|_{L_q(A)}$.

Для того чтобы получить некоторое продолжение функционала f на все пространство $L_p[0; 1]$, продолжим функцию $a(t)$ на $[0; 1]$ так, чтобы продолжение — функция $\tilde{a}_0(t)$ — принадлежала пространству $L_q[0; 1]$. При этом положим

$$\tilde{f}_0(x) = \int_0^1 \tilde{a}_0(t) x(t) dt, \quad x(t) \in L_p[0; 1].$$

Такое продолжение функционала f является линейным и ограниченным. Ограниченность $\tilde{f}_0$ вытекает из интегрального неравенства Гельдера

$$\begin{aligned} |\tilde{f}_0(x)| &\leq \int_0^1 |\tilde{a}_0(t) x(t)| dt \leq \left(\int_0^1 |\tilde{a}_0(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\int_0^1 |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= \|\tilde{a}_0\|_{L_q[0;1]} \cdot \|x\|_{L_p[0;1]}, \end{aligned}$$

т. е. $\|\tilde{f}_0\| \leq \|\tilde{a}_0\|_{L_q[0;1]}$. Аналогично предыдущему можно показать, что $\|\tilde{f}_0\| = \|\tilde{a}_0\|_{L_q[0;1]}$ (см. § 1). Таким образом, $\|f\| \leq \|\tilde{f}_0\|$, ибо $\|a\|_{L_q(A)} \leq \|\tilde{a}_0\|_{L_q[0;1]}$.

Далее воспользуемся тем, что каждый линейный непрерывный функционал $\tilde{f}$, заданный на $L_p[0; 1]$, представим в виде (см. § 1)

$$\tilde{f}(x) = \int_0^1 \alpha(t) x(t) dt, \quad x(t) \in L_p[0; 1],$$

где $\alpha(t) \in L_q[0; 1]$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. При этом $\|\tilde{f}\| = \|\alpha\|_{L_q[0;1]}$. Отсюда следует, что если $\tilde{f}$ — произвольное продолжение f на $L_p[0; 1]$, то $\alpha(t)$ — продолжение функции $a(t)$ (из $L_q(A)$ на $L_q[0; 1]$), ибо $(\tilde{f} - \tilde{f}_0)(x) = 0$ ($\forall x \in L_q(A)$) и $\|\alpha - \tilde{a}_0\|_{L_q(A)} = \|\alpha - a\|_{L_q(A)} = 0$. Следовательно, множество всех линейных непрерывных продолжений $\tilde{f}$ функционала f , заданного на L , на все пространство $L_p[0; 1]$ определяется множеством всех продолжений $\tilde{a}(t)$ функции $a(t)$ из пространства $L_q(A)$ на все пространство $L_q[0; 1]$. Из равенства $\|\tilde{f}\| =$

$= \|\tilde{a}\|_{L_q[0;1]}$ видно, что $\|\tilde{f}\| = \|f\|$ тогда и только тогда, когда $\tilde{a}\|_{L_q[0;1]} = \|a\|_{L_q(A)}$, т. е.

$$\left(\int_A |a(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_0^1 |\tilde{a}(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_A |\tilde{a}(t)|^q dt + \int_{[0;1] \setminus A} |\tilde{a}(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \quad (11)$$

Поскольку $\tilde{a}(t) = a(t)$ на множестве $A \subset [0; 1]$, то

$$\int_A |\tilde{a}(t)|^q dt = \int_A |a(t)|^q dt.$$

Поэтому из соотношения (11) вытекает, что равенство $\|a\|_{L_q(A)} = \|\tilde{a}\|_{L_q[0;1]}$ выполняется тогда и только тогда, когда

$$\int_{[0;1] \setminus A} |\tilde{a}(t)|^q dt = 0.$$

Это значит, что функция $\|\tilde{a}(t)\|^q$ должна быть эквивалентна функции, тождественно равной нулю на $[0; 1] \setminus A$, т. е. $\tilde{a}(t) = 0$ для почти всех $t \in [0; 1] \setminus A$.

Итак, всевозможные линейные непрерывные продолжения функционала f из L на L_p $[0; 1]$ имеют вид

$$\tilde{f}(x) = \int_0^1 \tilde{a}(t) x(t) dt, \quad x(t) \in L_p[0; 1],$$

где $\tilde{a}(t)$ — функция из $L_q[0; 1]$ такая, что $\tilde{a}(t) = a(t)$ для $t \in A$ (или же $\tilde{a}(t) = a(t)$ для почти всех $t \in A$, ибо интегралы Лебега от эквивалентных функций равны между собой); при этом $\|\tilde{f}\| = \|f\|$ тогда и только тогда, когда $\tilde{a}(t) = 0$ для почти всех $t \in [0; 1] \setminus A$.

14. Пусть оператор $A : C[0; 1] \rightarrow C[0; 1]$ определяется формулой

$$(Ax)(t) = x(t) - \lambda \int_0^1 k(t, \tau) x(\tau) d\tau, \quad t \in [0; 1], \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

где $k(t, \tau) = \psi(t) \gamma(\tau)$, функции $\psi(t)$, $\gamma(t)$ непрерывны на $[0; 1]$ и не равны тождественно нулю, $\int_0^1 \psi(t) \gamma(t) dt \neq \frac{1}{\lambda}$. Доказать, что оператор A непрерывно обратим. Найти A^{-1} .

Решение. Оператор A определен на всем пространстве, причем, как нетрудно проверить, $\|A\| \leq 1 + |\lambda| \|\psi\| \|\gamma\|$, т. е. $A \in \mathcal{L}(C[0; 1], C[0; 1])$. Кроме того, пространство $C[0; 1]$ банахово. Следовательно, для того чтобы установить непрерывную обратимость оператора A , достаточно (в силу теоремы Банаха об обратном опера-

торе) показать, что при каждом $y \in C[0; 1]$ уравнение

$$(Ax)(t) \equiv x(t) - \lambda \int_0^1 \psi(t) \gamma(\tau) x(\tau) d\tau = y(t) \quad (12)$$

имеет единственное решение. Из (12) следует, что если $x(t)$ — решение этого уравнения, то необходимо

$$x(t) = y(t) + \lambda c \psi(t), \quad (13)$$

где $c = \int_0^1 \gamma(\tau) x(\tau) d\tau$.

Умножим соотношение (13) на $\gamma(t)$ и проинтегрируем на $[0; 1]$, в результате получим

$$\int_0^1 \gamma(\tau) x(\tau) d\tau = \lambda c c_0 + \int_0^1 \gamma(\tau) y(\tau) d\tau, \quad (14)$$

где

$$c_0 = \int_0^1 \gamma(\tau) \psi(\tau) d\tau \quad \left(c_0 \neq \frac{1}{\lambda}\right).$$

Но поскольку $\int_0^1 \gamma(\tau) x(\tau) d\tau = c$, то из (14) находим

$$c = -\frac{1}{\lambda c_0} \int_0^1 \gamma(\tau) y(\tau) d\tau.$$

Следовательно,

$$x(t) = \frac{\lambda}{1 - \lambda c_0} \int_0^1 k(t, \tau) y(\tau) d\tau + y(t) \equiv (A^{-1}y)(t), \quad (15)$$

откуда вытекает единственность решения уравнения (12). Тот факт, что формула (15) определяет решение исходного уравнения (при любой правой части $y(t) \in C[0; 1]$), проверяется очевидным образом.

Значит, оператор A является непрерывно обратимым, а действие обратного оператора A^{-1} определяется формулой (15).

Например, если $\lambda = -1$, $\psi(t) = \gamma(t) = e^t$, т. е. рассматривается оператор

$$(Ax)(t) = x(t) + \int_0^1 e^{t+\tau} x(\tau) d\tau,$$

то, как несложно подсчитать, $c_0 = \frac{1}{2}(e^2 - 1)$. Следовательно,

$$(A^{-1}y)(t) = y(t) - \frac{2}{e^2 + 1} \int_0^1 e^{t+\tau} y(\tau) d\tau, \quad \forall y(t) \in C[0; 1].$$

15. Пусть оператор $A : C[0; 1] \rightarrow C[0; 1]$ определяется формулой

$$(Ax)(t) = x(t) - \lambda \int_0^t k(t, \tau) x(\tau) d\tau, \quad t \in [0; 1], \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

где $k(t, \tau) = \psi(t) \gamma(\tau)$, функции $\psi(t)$, $\gamma(t)$ непрерывны на $[0; 1]$ и не равны тождественно нулю. Доказать, что оператор A непрерывно обратим. Найти A^{-1} .

Решение. Как и в предыдущем примере, $A \in \mathcal{L}(C[0; 1], C[0; 1])$. Рассмотрим уравнение

$$(Ax)(t) = x(t) - \lambda \int_0^t \psi(t) \gamma(\tau) x(\tau) d\tau = y(t),$$

где $y(t) \in C[0; 1]$. Обозначим $\int_0^t \gamma(\tau) x(\tau) d\tau = z(t)$.

Тогда

$$x(t) = \lambda \psi(t) z(t) + y(t). \quad (16)$$

Ясно, что $z(t) \in C^{(1)}[0; 1]$, причем $z'(t) = \gamma(t) x(t)$. Поэтому, учитывая (16),

$$z'(t) = \gamma(t) [\lambda \psi(t) z(t) + y(t)] = \lambda a_0(t) z(t) + \gamma(t) y(t),$$

где $a_0(t) = \gamma(t) \psi(t)$. Таким образом, относительно функции $z(t)$ получаем следующее линейное неоднородное дифференциальное уравнение:

$$z'(t) - \lambda a_0(t) z(t) = \gamma(t) y(t).$$

Используя метод вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа), находим, что

$$z(t) = e^{\lambda \int_0^t a_0(\tau) d\tau} \left[c + \int_0^t \gamma(\tau) y(\tau) e^{-\lambda \int_0^\tau a_0(s) ds} d\tau \right].$$

Поскольку $z(0) = 0$, то $c = 0$. Следовательно,

$$x(t) = \lambda \psi(t) e^{\lambda \int_0^t a_0(\tau) d\tau} \cdot \int_0^t \gamma(\tau) y(\tau) e^{-\lambda \int_0^\tau a_0(s) ds} d\tau + y(t) \equiv (A^{-1}y)(t). \quad (17)$$

Формула (17) определяет единственное решение исходного уравнения, а это означает (в силу теоремы Банаха об обратном операторе), что оператор A непрерывно обратим. Действие оператора A^{-1} задается формулой (17).

Например, если $\lambda = -1$, $\psi(t) = \gamma(t) \equiv 1$, т. е. рассматривается оператор A

$$(Ax)(t) = x(t) + \int_0^t x(\tau) d\tau,$$

то, как следует из соотношения (17),

$$(A^{-1}x)(t) = x(t) - \int_0^t e^{\tau-t} x(\tau) d\tau.$$

16. Пусть $L \subset C[0; 1]$ — линейное многообразие трижды непрерывно дифференцируемых на $[0; 1]$ функций, удовлетворяющих условиям: $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$. Доказать, что оператор $A : C[0; 1] \rightarrow C[0; 1]$ с областью определения $\mathcal{D}(A) = L$, действие которого задается формулой $(Ax)(t) = x'''(t) + x''(t)$, является непрерывно обратимым.

Решение. Для доказательства непрерывной обратимости оператора A воспользуемся теоремой 8. Возьмем произвольную функцию $y(t) \in C[0; 1]$ и рассмотрим уравнение $Ax = y$, т. е.

$$x'''(t) + x''(t) = y(t), \quad (18)$$

с начальными условиями

$$x(0) = x'(0) = x''(0) = 0. \quad (19)$$

Иными словами, рассматривается задача Коши (18), (19). Найдем фундаментальную систему решений однородного уравнения

$$x'''(t) + x''(t) = 0, \quad (20)$$

соответствующего уравнению (18).

Понизив порядок уравнения (20) с помощью замены $x''(t) = u(t)$, где $u(t)$ — новая неизвестная функция, получим линейное однородное уравнение первого порядка $u'(t) + u(t) = 0$, общим решением которого является $u(t) = c_1 e^{-t}$, где c_1 — произвольная постоянная. Поэтому общее решение уравнения (20) имеет вид $\tilde{x}(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t + c_3$, где c_1, c_2, c_3 — произвольные постоянные, а функции $x_1(t) = e^{-t}$, $x_2(t) = t$, $x_3(t) = 1$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (20).

Общее решение неоднородного уравнения (18) ищем методом вариации произвольных постоянных в виде

$$x(t) = c_1(t) e^{-t} + c_2(t) t + c_3(t), \quad (21)$$

где функции $c_1(t)$, $c_2(t)$, $c_3(t)$ определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} c_1'(t) e^{-t} + c_2'(t) t + c_3'(t) = 0, \\ -c_1'(t) e^{-t} + c_2'(t) = 0, \\ c_1'(t) e^{-t} = y(t). \end{cases} \quad (22)$$

Из (22) находим, что $c_1'(t) = e^t y(t)$, $c_2'(t) = y(t)$, $c_3'(t) = -(t+1)y(t)$, откуда

$$\begin{aligned} c_1(t) &= \int_0^t e^{\tau} y(\tau) d\tau + \alpha_1, \quad c_2(t) = \int_0^t y(\tau) d\tau + \alpha_2, \\ c_3(t) &= -\int_0^t (\tau+1) y(\tau) d\tau + \alpha_3 \end{aligned} \quad (23)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — произвольные постоянные, $t \in [0; 1]$. Подставив (23) в (21), получим общее решение уравнения (18):

$$x(t) = \alpha_1 e^{-t} + \alpha_2 t + \alpha_3 + \int_0^t (e^{\tau-t} + t - \tau - 1) y(\tau) d\tau. \quad (24)$$

Выделим из общего решения (24) искомое частное решение, удовлетворяющее начальным условиям (19). Из (24) последовательно находим:

$$x'(t) = -\alpha_1 e^{-t} + \alpha_2 + \int_0^t (-e^{\tau-t} + 1) y(\tau) d\tau + (e^{t-t} + t -$$

$$-t - 1) y(t) = -\alpha_1 e^{-t} + \alpha_2 + \int_0^t (-e^{\tau-t} + 1) y(\tau) d\tau,$$

$$x''(t) = \alpha_1 e^{-t} + \int_0^t e^{\tau-t} y(\tau) d\tau + (1 - e^{t-t}) y(t) =$$

$$= \alpha_1 e^{-t} + \int_0^t e^{\tau-t} y(\tau) d\tau.$$

С учетом начальных условий (19), для определения $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ получаем систему

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 0, \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 = 0, \end{cases}$$

откуда $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Следовательно, искомое решение задачи Коши (18), (19) имеет вид

$$x(t) = \int_0^t (e^{\tau-t} + t - \tau - 1) y(\tau) d\tau. \quad (25)$$

Это решение единственно, что следует из общей теоремы существования и единственности решения задачи Коши.

Из формулы (25) следует непрерывная обратимость оператора A . Действительно,

$$\|x\|_{C[0;1]} \leq \frac{3+2e}{2} \|y\|_{C[0;1]},$$

т. е. для любого $x \in \mathcal{D}(A)$ выполняется неравенство

$$\|Ax\|_{C[0;1]} \geq \frac{2}{3+2e} \|x\|_{C[0;1]}.$$

Тогда, согласно теореме 8, оператор A непрерывно обратим, причем действие оператора A^{-1} задается формулой

$$(A^{-1}y)(t) = \int_0^1 (e^{\tau-t} + t - \tau - 1) y(\tau) d\tau, \quad \forall y(t) \in C[0; 1],$$

$$\text{и } \|A^{-1}\| \leq \frac{3+2e}{2}.$$

Замечание. В данном случае для доказательства непрерывной обратности оператора A теоремой Банаха воспользоваться нельзя, ибо $\mathcal{D}(A) \neq C[0; 1]$ и, как легко видеть, оператор A неограничен. Однако, как было установлено, оператор A^{-1} существует, определен на всем пространстве $C[0; 1]$ и ограничен. Таким образом, оператор, обратный к неограниченному линейному оператору, определенному на некотором многообразии, не совпадающем со всем пространством, может оказаться ограниченным линейным оператором, определенным на всем пространстве.

17. Пусть A — оператор в $C[0; 1]$, действующий по формуле

$$(Ax)(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau, \quad t \in [0; 1].$$

Показать, что оператор A не имеет ограниченного обратного.

Решение. Область определения оператора A совпадает со всем пространством $C[0; 1]$, и оператор A является, очевидно, ограниченным $\|A\| = 1$. Ядро $\ker A$ оператора A состоит из нулевой функции, ибо

из равенства $\int_0^t x(\tau) d\tau = 0 \quad (\forall t \in [0; 1])$ следует, что $x(t) \equiv 0$. Область значений $R(A)$ представляет собой линейное многообразие не-

прерывно дифференцируемых в $C[0; 1]$ функций $y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau$,

удовлетворяющих условию $y(0) = 0$. Так как $\ker A = \{0\}$, т. е. A отображает $C[0; 1]$ на $R(A)$ взаимно однозначно, то существует обратный оператор A^{-1} , определенный на $R(A)$ и отображающий $R(A)$ на $C[0; 1]$ взаимно однозначно. Нетрудно видеть, что

$$(A^{-1}x)(t) = \frac{dx(t)}{dt}, \quad t \in [0; 1], \quad x(t) \in R(A).$$

Действительно, если $x(t) \in R(A)$, то

$$\int_0^t x'(\tau) d\tau = x(t) - x(0) = x(t),$$

ибо $x(0) = 0$, и $\left(\int_0^t x(\tau) d\tau\right)' = x(t)$.

Однако оператор A^{-1} не является ограниченным. Действительно, возьмем последовательность $x_n(t) = \sin nt \quad (n \in \mathbb{N})$. Очевидно, что при каждом $n \in \mathbb{N}$ $x_n(t) \in \mathcal{D}(A^{-1}) = R(A)$ и $\|x_n\| \leq 1$.

Поскольку $\|A^{-1}x_n\| = n$, то

$$\sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(A^{-1}), \\ \|x\| \leq 1}} \|A^{-1}x\| = +\infty,$$

т. е. A^{-1} неограничен, что и требовалось установить.

Этот пример показывает, что у ограниченного оператора может существовать неограниченный обратный оператор, заданный на некотором линейном многообразии, не совпадающем со всем пространством.

18. Проверить, существует ли непрерывный обратный оператор к оператору $A: l_2 \rightarrow l_2$, если:

а) $Ax = (\xi_3, \xi_1, \xi_2, \xi_4, \xi_5, \dots)$;

б) $Ax = (\xi_1 + 2\xi_2, \xi_1 - \xi_2, \xi_3, \xi_4, \dots)$;

в) $Ax = (\xi_3 - \xi_1, \xi_2 + \xi_3, 2\xi_2 - 2\xi_1, \xi_4, \xi_5, \dots)$,

где $x = (\xi_k) \in l_2$.

Решение. а) Область определения оператора A совпадает с l_2 , $\|A\| = 1$, т. е. $A \in \mathcal{L}(l_2, l_2)$. Покажем, что оператор A непрерывно обратим. Поскольку l_2 — банахово пространство, то для этого достаточно (в силу теоремы Банаха об обратном операторе) показать, что уравнение $Ax = y$ однозначно разрешимо для любого $y = (\eta_k) \in l_2$. Уравнение $Ax = y$ в данном случае имеет вид

$$(\xi_3, \xi_1, \xi_2, \xi_4, \xi_5, \dots) = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5, \dots). \quad (26)$$

Отсюда $\xi_1 = \eta_2$, $\xi_2 = \eta_3$, $\xi_3 = \eta_1$, $\xi_k = \eta_k$ для $k \geq 4$. Следовательно,

$$x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \dots) = (\eta_2, \eta_3, \eta_1, \eta_4, \eta_5, \dots),$$

т. е. уравнение (26) имеет решение

$$x = A^{-1}y = (\eta_2, \eta_3, \eta_1, \eta_4, \eta_5, \dots).$$

Это решение, очевидно, является единственным. Таким образом, $A^{-1} \in \mathcal{L}(l_2, l_2)$. Отметим, что в данном случае ограниченность оператора A^{-1} устанавливается и непосредственно: $\|A^{-1}\| = 1$.

б) Область определения оператора A совпадает с l_2 . Для любого $x = (\xi_k) \in l_2$ имеем

$$\|Ax\|^2 \leq 3\xi_1^2 + 6\xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 + \dots \leq 6 \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^2 = 6\|x\|^2,$$

т. е. $\|A\| \leq \sqrt{6}$. Таким образом, $A \in \mathcal{L}(l_2, l_2)$. Покажем, что для любого $y = (\eta_k) \in l_2$ уравнение

$$Ax = (\xi_1 + 2\xi_2, \xi_1 - \xi_2, \xi_3, \xi_4, \dots) = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \dots) = y \quad (27)$$

однозначно разрешимо. Действительно, из (27) следует, что $\xi_1 + 2\xi_2 = \eta_1$, $\xi_1 - \xi_2 = \eta_2$, $\xi_k = \eta_k$ для $k \geq 3$. Отсюда находим, что

$$\xi_1 = \frac{\eta_1 + 2\eta_2}{3}, \quad \xi_2 = \frac{\eta_1 - \eta_2}{3}.$$

Таким образом,

$$x = \left(\frac{\eta_1 + 2\eta_2}{3}, \frac{\eta_1 - \eta_2}{3}, \eta_3, \eta_4, \dots \right) = A^{-1}y,$$

причем $x = A^{-1}y$ определяется однозначно. Следовательно, $A^{-1} \in \mathcal{L}(l_2, l_2)$.

в) Оператор A определен на всем пространстве l_2 и является ограниченным на l_2 . Однако, как несложно подсчитать, ядро $\ker A = \{x \in l_2 : Ax = 0\}$ оператора A состоит из тех элементов $x \in l_2$, у которых первые три координаты связаны между собой соотношениями $\xi_1 = \xi_3$, $\xi_3 = -\xi_2$, а остальные координаты равны нулю. Иными словами, $\ker A \neq \{0\}$, т. е. оператор A отображает l_2 на $R(A)$ не взаимно однозначно. Отсюда следует, что оператор A не имеет ограниченного

обратного. Действительно, пусть это не так, т. е. оператор A^{-1} ограничен на $R(A)$. Тогда, согласно теореме 7, для любого $x \in l_2$ и некоторой постоянной $m > 0$ справедливо неравенство $\|Ax\| \geq m \|x\|$. Из этого неравенства получаем, что A отображает l_2 на $R(A)$ взаимно однозначно: если $x \in \ker A$, т. е. $Ax = 0$, то $\|x\| = 0$, т. е. $x = 0$. Это значит, что ядро $\ker A = \{0\}$.

Полученное противоречие доказывает, что оператор A не имеет ограниченного обратного.

19. Доказать, что если линейный непрерывный оператор A , отображающий банахово пространство E_1 в нормированное пространство E_2 ($\mathcal{D}(A) \subset E_1$, $R(A) \subset E_2$, $\mathcal{D}(A)$ — подпространство в E_1) имеет ограниченный обратный оператор, то $R(A)$ — банахово пространство.

Решение. Необходимо доказать, что $R(A)$ — полное пространство. Пусть (y_n) — фундаментальная последовательность в $R(A) \subset E_2$. Тогда $y_n = Ax_n$, где $x_n = A^{-1}y_n \in \mathcal{D}(A) \subset E_1$. Согласно теореме 7, существует постоянная $c > 0$ такая, что

$$\|y_n - y_m\|_{E_2} = \|A(x_n - x_m)\|_{E_2} \geq c \|x_n - x_m\|_{E_1}.$$

Отсюда следует, что последовательность $(x_n) \subset \mathcal{D}(A)$ также является фундаментальной, а значит, и сходящейся в E_1 , ибо E_1 — банахово пространство. Следовательно, существует элемент x_0 такой, что $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. На основании замкнутости области определения $\mathcal{D}(A)$ оператора A заключаем, что $x_0 \in \mathcal{D}(A)$.

Тогда, в силу непрерывности оператора A ,

$$y_n = Ax_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Ax_0 = y_0 \in R(A).$$

Этим доказано, что $R(A)$ — банахово пространство.

20. Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства, $\delta(E_1, E_2)$ — совокупность всех непрерывно обратимых операторов в пространстве $\mathcal{L}(E_1, E_2)$. Доказать, что множество $\delta(E_1, E_2)$ открыто $\mathcal{L}(E_1, E_2)$.

Решение. Первый способ. Возьмем произвольный оператор $A_0 \in \delta(E_1, E_2)$ и покажем, что открытый шар

$$B(A_0, r) = \{A \in \mathcal{L}(E_1, E_2) : \|A - A_0\| < r, r = \|A_0^{-1}\|^{-1}\}$$

содержится в $\delta(E_1, E_2)$. Иными словами, необходимо показать, что любой оператор $A \in B(A_0, r)$ является непрерывно обратимым, т. е. $A^{-1} \in \mathcal{L}(E_2, E_1)$. Для этого представим оператор A в виде $A = A_0 + B$, где $B = A - A_0$, $\|B\| < \|A_0^{-1}\|^{-1}$, и рассмотрим оператор $C = A_0^{-1}(A_0 + B) = I_{E_1} + A_0^{-1}B$. Так как $\|A_0^{-1}B\| \leq \|A_0^{-1}\| \|B\| < 1$, то по теореме 13 оператор C имеет непрерывный обратный; при этом

$$\|C^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A_0^{-1}B\|} \leq \frac{1}{1 - \|A_0^{-1}\| \|B\|}. \quad (28)$$

Из равенства $A_0^{-1}(A_0 + B)C^{-1} = CC^{-1} = I_{E_1}$ следует, что $(A_0 + B)C^{-1} = A_0$. Следовательно, $(A_0 + B)C^{-1}A_0^{-1} = I_{E_1}$. Однако,

$C^{-1}C = C^{-1}A_0^{-1}(A_0 + B) = I_{E_1}$. Таким образом, оператор $U = C^{-1}A_0^{-1}$ удовлетворяет всем условиям теоремы 11 (т. е. $U(A_0 + B) = I_{E_1}$, $(A_0 + B)U = I_{E_2}$), поэтому

$$(A_0 + B)^{-1} = U = C^{-1}A_0^{-1}.$$

Это и означает, что оператор $A = A_0 + B$ непрерывно обратим, причем, в силу (28),

$$\|A^{-1}\| \leq \frac{\|A_0^{-1}\|}{1 - \|A_0^{-1}\| \cdot \|B\|}.$$

Второй способ. Пусть оператор A принадлежит открытому шару $B(A_0, r) \subset \mathcal{L}(E_1, E_2)$, где $A_0 \in \delta(E_1, E_2)$, $r = \|A_0^{-1}\|^{-1}$. Зафиксируем произвольный элемент $y \in E_2$ и рассмотрим оператор B , отображающий E_1 в E_1 :

$$Bx = A_0^{-1}y - A_0^{-1}Ax + x, \quad \forall x \in E_1.$$

Поскольку $\|A - A_0\| < \|A_0^{-1}\|^{-1}$, то B является отображением сжатия. Действительно,

$$\begin{aligned} \rho(Bx_1, Bx_2) &= \|A_0^{-1}A(x_2 - x_1) - (x_2 - x_1)\| = \|A_0^{-1}A(x_2 - x_1) - \\ &- A_0^{-1}A_0(x_2 - x_1)\| = \|A_0^{-1}(A - A_0)(x_2 - x_1)\| < q\|x_2 - x_1\| \\ &(\forall x_1, x_2 \in E_1), \end{aligned}$$

где $q < 1$. Так как пространство E_1 полно, то существует единственная неподвижная точка отображения B , т. е. существует $x^* \in E_1$ такое, что $x^* = Bx^* = A_0^{-1}y - A_0^{-1}Ax^* + x^*$. Отсюда следует, что $Ax^* = y$, т. е. для каждого $y \in E_2$ уравнение $Ax = y$ имеет единственное решение. Следовательно, по теореме Банаха об обратном операторе, оператор A непрерывно обратим, что и требовалось доказать.

21. Используя теорему Банаха об обратном операторе, доказать теорему об эквивалентных нормах: пусть на некотором линейном пространстве E заданы две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$, по отношению к каждой из которых E — банахово пространство; доказать, что если хотя бы одна из норм подчинена другой, то эти нормы эквивалентны.

Решение. Обозначим через E_1 пространство E с нормой $\|\cdot\|_1$, т. е. $E_1 = (E, \|\cdot\|_1)$, а через E_2 — пространство E с нормой $\|\cdot\|_2$, т. е. $E_2 = (E, \|\cdot\|_2)$. Предположим, что норма $\|\cdot\|_1$ подчинена $\|\cdot\|_2$, т. е. существует постоянная $c_1 < \infty$ такая, что для всех $x \in E$

$$\|x\|_1 \leq c_1\|x\|_2. \quad (29)$$

Рассмотрим оператор A , отображающий E_2 на E_1 по формуле $Ax = x$ (слева $x \in E$ как элемент из E_2 , справа $x \in E$ как элемент из E_1). Очевидно, $\mathcal{D}(A) = E_2$, A линеен и отображает E_2 на $E_1 = R(A)$ взаимно однозначно. Неравенство (29) означает, что $\|Ax\|_1 \leq c_1\|x\|_2$, т. е. $\|A\| \leq c_1$. Следовательно, A — ограниченный оператор. Тогда, по теореме Банаха об обратном операторе, существует линейный огра-

нический оператор $A^{-1} : A^{-1}x = x$, отображающий $E_1 = \mathcal{D}(A^{-1})$ на $E_2 = R(A^{-1})$ взаимно однозначно, т. е.

$$\|A^{-1}x\|_2 = \|x\|_2 \leq \|A^{-1}\| \cdot \|x\|_1, \quad \forall x \in E.$$

Итак, $c_2 \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq c_1 \|x\|_2$, где $c_2 = \|A^{-1}\|^{-1}$. Это и означает эквивалентность рассматриваемых норм. Утверждение доказано.

Задачи для самостоятельной работы

1. Пусть E — пространство непрерывно дифференцируемых на $[0; 1]$ функций с нормой $\|x\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t)|$. Рассмотрим операторы $A_n : E \rightarrow C[0; 1]$, $n \geq 1$, задаваемые формулой

$$(A_n x)(t) = n \left[x \left(t + \frac{1}{n} \right) - x(t) \right], \quad t \in [0; 1]$$

(если $t + \frac{1}{n} > 1$, то полагаем $x(t + \frac{1}{n}) = x(1)$). Доказать, что:

а) последовательность (A_n) сходится поточечно, и найти ее предел;

б) последовательность $(\|A_n\|)$ не ограничена.

Как согласуются эти утверждения с принципом равномерной ограниченности?

2. Доказать, что для того чтобы $\int_0^1 x(t) y(t) dt$ существовал для всех $x(t) \in L_p[0; 1]$ ($p > 1$), необходимо и достаточно, чтобы $y(t) \in L_q[0; 1]$, где числа p и q связаны соотношением $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

3. Пусть

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n A_{nk} x(t_{n,k}), \quad a \leq t_{n,1} < \dots < t_{n,n} \leq b, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказать, что утверждение

$$\forall x \in C[a; b] : f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b x(t) dt$$

справедливо тогда и только тогда, когда:

$$1) \sup_n \sum_{k=1}^n |A_{nk}| < +\infty;$$

$$2) f_n(p) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b p(t) dt \text{ для всякого многочлена } p.$$

Проверить также, что условие 1) следует из условия 2), если для всех $n \geq 1$ и $1 \leq k \leq n$ $A_{nk} \geq 0$.

4. Доказать, что отображение $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n a_n$, определяемое последовательностью (λ_n) , тогда и только тогда переводит сходящиеся ряды в сходящиеся, если

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n - \lambda_{n+1}| < +\infty.$$

5. Доказать, что если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a < \infty$, то $(1-z) \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ($z \in \mathbb{C}$) стремится

к a при стремлении z к единице вдоль любого пути, лежащего внутри круга $\{z: |z| \leq 1\}$ и не касающегося окружности $|z| = 1$.

6. Для того чтобы ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ сходиллся для любой последовательности $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющей условию: $\left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq c \ (\forall n \in \mathbb{N}, c - \text{некоторая положительная постоянная})$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} |b_{n+1} - b_n| < +\infty.$$

Доказать это утверждение.

7. Доказать, что для того чтобы последовательность

$$x_n(t) = \int_a^b k_n(t, \tau) x(\tau) d\tau \quad (n = 1, 2, \dots)$$

сходилась к $x(t)$ в пространстве $L_1[a, b]$, какова бы ни была суммируемая функция $x(t)$, необходимо и достаточно, чтобы:

$$1) \int_a^b \left| \int_a^b k_n(t, \tau) x(\tau) d\tau - x(t) \right| dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

для всякого x из плотного в пространстве $L_1[a, b]$ множества Δ ;

$$2) \int_a^b |k_n(t, \tau)| d\tau \leq M \quad (t \in [a, b], n = 1, 2, \dots).$$

8. Пусть E — линейное нормированное пространство, $x, y \in E, x \neq y$. Доказать, что существует функционал $f \in E^*$ таким, что $f(x) \neq f(y)$.

9. Доказать, что в любом линейном нормированном пространстве E для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ и любого ненулевого $f \in E^*$ гиперплоскость $x \in \{E: f(x) = \lambda\}$ есть непустое множество.

10. Пусть E — линейное нормированное пространство, $x \in E$.

Доказать, что

$$\|x\| = \sup_{f \in E^*, \|f\|=1} |f(x)|.$$

11. Пусть E — линейное нормированное пространство, $x_0 \in E$ и для любого $f \in E^*$ такого, что $\|f\| = 1$, выполняется неравенство $|f(x_0)| \leq 1$. Доказать, что $\|x_0\| \leq 1$.

12. Пусть E — линейное нормированное пространство, $f \in E^*, A \in \mathcal{L}(E, E)$. Доказать, что $\|A\| = \sup |f(Ax)|$, где верхняя грань берется по множеству $\{x \in E: \|x\| = 1; f \in E^*: \|f\| = 1\}$.

13. Пусть E — линейное нормированное пространство, $M \subset E$ — произвольное множество. Положим $M^\perp = \{f \in E^*: f(x) = 0 \text{ для любого } x \in M\}$.

а) Доказать, что $M^\perp$ — подпространство в пространстве E^* .

б) Пусть $M \subset E$ — подпространство. Доказать, что $M^\perp = \{x \in E: f(x) = 0 \text{ для любого } f \in M^\perp\}$.

14. Пусть дана линейно независимая система линейных и всюду определенных на нормированном пространстве E ограниченных функционалов $(f_n)_{n=1}^m$. Доказать, что в E существует система элементов $(x_k)_{k=1}^m$ такая, что

$$f_n(x_k) = \delta_{nk} = \begin{cases} 1, & n = k, \\ 0, & n \neq k; \quad n, k = 1, 2, \dots, m. \end{cases}$$

15. Пусть A — измеримое по Лебегу множество на $[0; 1]$ и $L = \{x \in L_2[0; 1]: x(t) = 0 \text{ почти всюду на } A\}$. Построить линейный непрерывный функционал f на $L_2[0; 1]$, равный нулю на L , и такой, что $f(x) = 1$, где $x(t) = t, t \in [0; 1]$.

16. Пусть $L = \{x(t) \in C[0; 1] : x(0) = 0\}$. Построить линейный непрерывный функционал на $C[0; 1]$, равный нулю на L и принимающий на функции $x(t) = t + 1$, $t \in [0; 1]$, значение 2.

17. Пусть $x_0(t) \in C[0; 1]$ фиксировано. Рассмотрим в пространстве $C[0; 1]$ одномерное подпространство $L = \{\lambda x_0(t)\}$, где $\lambda \in \mathbb{R}$. Определим на L линейный функционал f равенством $f(x) = \lambda$, если $x(t) = \lambda x_0(t)$. По теореме Хана — Банаха функционал f может быть продолжен на все пространство $C[0; 1]$ с сохранением нормы. Однозначно ли такое продолжение, если:

а) $x_0(t) = t$, б) $x_0(t) = 1 - 2t^2$

18. Пусть $B(\mathbb{R})$ — совокупность ограниченных вещественных функций на $\mathbb{R}$ с нормой $\|x\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} |x(t)|$. Доказать, что существует линейный функционал

$\text{LIM} \in B^*(\mathbb{R})$, обладающий свойствами:

а) $\inf_{t \in \mathbb{R}} x(t) \leq \text{LIM } x(t) \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} x(t)$;

б) если существует $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = a$, то $\text{LIM } x(t) = a$;

в) для любого $\tau \in \mathbb{R}$ $\text{LIM } x(t + \tau) = \text{LIM } x(t)$.

Указание. Показать, что функционал

$$p(x) = \inf_{t \in \mathbb{R}} \sup_{k=1}^n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x(t + \alpha_k),$$

где точная нижняя грань берется по всевозможным конечным наборам чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, является однородно-выпуклым.

19. Пусть A — линейный оператор в пространстве $\mathbb{R}^n$, задаваемый матрицей $(\alpha_{jk})_{j,k=1}^n$. Доказать эквивалентность следующих утверждений:

а) существует непрерывный обратный оператор A^{-1} ;

б) $\ker A = \{0\}$, где $\ker A$ — ядро оператора A ,

в) $\det(\alpha_{jk})_{j,k=1}^n \neq 0$,

г) уравнение $Ax = y$ имеет решение при любом $y \in \mathbb{R}^n$.

20. Пусть A, B — линейные операторы в линейном пространстве E . Доказать, что:

а) если операторы A и B имеют обратные, то оператор AB также имеет обратный, равный $B^{-1}A^{-1}$;

б) если операторы A и BA имеют обратные, то существует B^{-1} .

21. Пусть E — линейное пространство, $A, B : E \rightarrow E$ — линейные операторы с $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B) = E$ и существуют операторы $(AB)^{-1}$, $(BA)^{-1}$. Следует ли отсюда, что существуют операторы A^{-1} , B^{-1} ?

22. Пусть E — линейное пространство, $A, B : E \rightarrow E$ — линейные операторы с $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B) = E$, удовлетворяющие соотношениям $AB + A + I = 0$, $BA + A + I = 0$. Доказать, что оператор A^{-1} существует.

23. Пусть E — линейное пространство, $A, B : E \rightarrow E$ — линейные операторы с $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B) = E$ и оператор $(I - AB)^{-1}$ существует. Доказать, что оператор $(I - BA)^{-1}$ также существует.

24. Пусть E — линейное нормированное пространство, $A : E \rightarrow E$ — линейный оператор и в E существует такая последовательность $x_n \in \mathcal{D}(A)$ ($n \in \mathbb{N}$), что $\|x_n\| = 1$ и $Ax_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Доказать, что у оператора A не существует ограниченного обратного.

25. Пусть A — оператор в $C[0; 1]$, действующий по формуле $(Ax)(t) = p(t)x(t)$, $t \in [0; 1]$, где p — заданная функция из $C[0; 1]$. Доказать, что A имеет непрерывный обратный оператор тогда и только тогда, когда $p(t) \neq 0$ для всех $t \in [0; 1]$.

26. В пространстве $C^{(1)}[0; 1]$ рассмотрим подпространство $L = \{x(t) \in C^{(1)}[0; 1] : x(0) = 0\}$ и оператор $A : L \rightarrow C[0; 1]$, действующий по формуле

$$(Ax)(t) = x'(t) + a(t)x(t), \quad a(t) \in C[0; 1], \quad t \in [0; 1].$$

Доказать, что оператор A непрерывно обратим.

27. Показать, что оператор $A : C^{(1)}[0; 1] \rightarrow C[0; 1]$, действующий по формуле

$$(Ax)(t) = x'(t), \quad t \in [0; 1],$$

имеет правый обратный, но не имеет левого обратного оператора.

28. Пусть A и B — операторы в $C[-1; 1]$, определяемые формулами

$$(Ax)(t) = x(t^4), \quad (Bx)(t) = x(t^3), \quad t \in [-1; 1].$$

Доказать, что оператор A не имеет обратного, а оператор B имеет обратный. Найти B^{-1} .

29. Рассмотрим оператор

$$A : l_2 \ni (\xi_1, \xi_2, \dots) \rightarrow (\alpha_1 \xi_1, \alpha_2 \xi_2, \dots) \in l_2,$$

где $\sup_k |\alpha_k| < +\infty$. Доказать, что оператор A имеет непрерывный обратный тогда и только тогда, когда $\inf_k |\alpha_k| > 0$.

30. Рассмотрим оператор $A : C[0; 1] \rightarrow C^{(2)}[0; 1]$, действующий по формуле

$$(Ax)(t) = \int_0^t e^{-|s-t|} x(s) ds.$$

Существует ли оператор A^{-1} ?

31. Пусть E — пространство дважды непрерывно дифференцируемых на $[0; 1]$ функций $x(t)$, удовлетворяющих условиям $x(0) = 0$, $x(1) = 0$, с нормой $\|x\| =$

$= \sum_{k=0}^2 \max_{0 \leq t \leq 1} |x^{(k)}(t)|$. Найти обратный оператор к оператору $A : E \rightarrow C[0; 1]$, задаваемому формулой

$$(Ax)(t) = x''(t) - x(t), \quad t \in [0; 1].$$

32. Проверить, существует ли непрерывный обратный оператор к оператору $A : l_2 \rightarrow l_2$:

а) $Ax = (0, \xi_1, \xi_2, \dots)$; б) $Ax = (\xi_2, \xi_3, \dots)$;

в) $Ax = (\xi_1 + \xi_2, \xi_2, \xi_3, \dots)$,

где $x = (\xi_k) \in l_2$.

33. Пусть E — пространство непрерывно дифференцируемых на $[0; 1]$ функций $x(t)$ таких, что $x(0) = 0$, с нормой $\|x\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t)| + \max_{0 \leq t \leq 1} |x'(t)|$. Доказать,

что существует непрерывный обратный оператор к оператору $A : E \rightarrow C[0; 1]$:

а) $(Ax)(t) = x'(t) + 4x(t)$, б) $(Ax)(t) = x'(t) - 2tx(t)$;

в) $(Ax)(t) = x'(t) - 3t^2x(t)$;

г) $(Ax)(t) = (t+1)x'(t) - x(t)$;

д) $(Ax)(t) = (t^2+1)x'(t) - 2tx(t)$,

где $t \in [0; 1]$. Найти A^{-1} .

34. В пространстве $C[0; 1]$ рассмотрим операторы A и B , определяемые формулами

$$(Ax)(t) = (t+1)x(t), \quad (Bx)(t) = x(t^2), \quad t \in [0; 1].$$

Чему равны $(AB)^{-1}$ и $(BA)^{-1}$?

35. Пусть E — банахово пространство, $A \in \mathcal{L}(E)$ и $\|I - A\| < 1$. Доказать, что оператор A непрерывно обратим.

Ответы. 1. а) Последовательность (A_n) поточечно сходится к оператору A , действие которого задается формулой $(Ax)(t) = x'(t)$. Принцип равномерной ограниченности не применим, ибо E не является банаховым пространством. 2. Воспользоваться принципом равномерной ограниченности. 3—7. Воспользоваться теоремой Банаха—Штейнгауза. 8—12. Воспользоваться следствием 2 теоремы 5. 13.

Воспользоваться следствием 3 теоремы 5. 15. $f(x) = \left(\int_A x(t) dt \right) \left(\int_A t dt \right)^{-1} (\mu(A) >$

> 0). 16. $f(x) = 2x(0)$. 17. а) Однозначно, $f(x) = x(1)$; б) неоднозначно, продолжения $f_1(x) = x(0)$ и $f_2(x) = -x(1)$ совпадают с f на L . 21. Да. Доказать, что $\ker A = \ker B = \{0\}$. 22. Доказать, что $A^{-1} = -I - B$. 23. Пусть $(I - AB)^{-1} = C$. Доказать, что $(I - BA)^{-1} = I + BCA$. 24. Воспользоваться теоремой 7. 28. $(B^{-1}x)(t) = x(\sqrt[3]{t})$. 30. Да. Из равенства $Ax = y$ получить, что $y'' - y = -2x$. 31. $(A^{-1}x)(t) = \int_0^t \operatorname{sh}(t-\tau)x(\tau) d\tau$. 32. а), б) Не существует; в) существует. 33. а) $(A^{-1}x)(t) = \int_0^t e^{-4(t-\tau)}x(\tau) d\tau$; б) $(A^{-1}x)(t) = \int_0^t e^{t^2-\tau^2}x(\tau) d\tau$; в) $(A^{-1}x)(t) = \int_0^t e^{t^2-\tau^2}x(\tau) d\tau$; г) $(A^{-1}x)(t) = \int_0^t \frac{t+1}{(\tau+1)^2}x(\tau) d\tau$; д) $(A^{-1}x)(t) = \int_0^t \frac{t^2+1}{(\tau^2+1)^2}x(\tau) d\tau$. 34. $((AB)^{-1}x)(t) = \frac{x(\sqrt{t})}{\sqrt{t}+1}$, $((BA)^{-1}x)(t) = \frac{x(\sqrt{t})}{t+1}$. 35. Положить $B = I - A$ и воспользоваться теоремой 13.

§ 3. ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В НОРМИРОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ. СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

1. Вполне непрерывные (компактные) операторы в нормированном пространстве. Линейный оператор A , определенный на линейном нормированном пространстве E_1 , с областью значений, расположенной в линейном нормированном пространстве E_2 , называется *вполне непрерывным* (или *компактным*), если он отображает всякое ограниченное множество пространства E_1 в компактное множество пространства E_2 . В связи с этим определением полезно отметить, что линейный оператор $A: E_1 \rightarrow E_2$ является ограниченным (т. е. непрерывным) тогда и только тогда, когда он отображает любое ограниченное множество из E_1 в ограниченное множество в E_2 . Поэтому каждый вполне непрерывный оператор $A: E_1 \rightarrow E_2$ является непрерывным, т. е. $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$. В случае, когда E_2 — конечномерное пространство, справедливо и обратное утверждение о том, что каждый оператор A из $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ является вполне непрерывным. Это следует из того, что каждое ограниченное множество в E_2 является компактным.

Можно показать, что вполне непрерывный оператор $A: E_1 \rightarrow E_2$ отображает слабо сходящуюся последовательность $(x_n)_{n=1}^\infty$ пространства E_1 в сильно сходящуюся последовательность $(Ax_n)_{n=1}^\infty$ пространства E_2 .

Если операторы $A, B: E_1 \rightarrow E_2$ вполне непрерывны, то их линейная комбинация $\alpha A + \beta B$ также является вполне непрерывным оператором. Отметим, что оператор I тождественного преобразования (единичный оператор) бесконечномерного нормированного пространства E не является вполне непрерывным. Это следует из того, что нормированное пространство конечномерно тогда и только тогда, когда каждое его ограниченное множество компактно.

Пусть A — вполне непрерывный оператор, отображающий нормированное пространство E в себя, и $B \in \mathcal{L}(E)$. Тогда операторы AB и BA также вполне непрерывны. Отсюда, в частности, следует, что если пространство E бесконечномерно, то вполне непрерывный оператор $A: E \rightarrow E$ не может иметь ограниченного обратного оператора $A^{-1}: E \rightarrow E$.

Теорема 1. Если последовательность $(A_n)_{n=1}^\infty$ вполне непрерывных операторов, отображающих нормированное пространство E_1 в банахово пространство E_2 , равномерно сходится к оператору $A: E_1 \rightarrow E_2$, т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\| = 0$, то A — также вполне непрерывный оператор.

Приведем некоторые примеры вполне непрерывных операторов. Пусть $E_1 = E_2 = C[a; b]$ и оператор $A : C[a; b] \rightarrow C[a; b]$ определяется с помощью равенства

$$(Ax)(t) = \int_a^b k(t, s) x(s) ds \quad (\forall x = x(t) \in C[a; b]), \quad (1)$$

где $k(t, s)$ — непрерывная на множестве $[a; b] \times [a; b] \subset \mathbb{R}^2$ функция. Тогда, согласно критерию компактности Арцела в $C[a; b]$ (см. гл. 2, § 1), рассматриваемый оператор A является вполне непрерывным. Если $E_1 = E_2 = L_2[a; b]$ и оператор $A : L_2[a; b] \rightarrow L_2[a; b]$ определяется тем же равенством (1), где ядро $k(t, s)$ принадлежит пространству $L_2([a; b] \times [a; b], \mu_2)$ (μ_2 — мера Лебега на плоскости $\mathbb{R}^2$), то он также вполне непрерывен.

Можно показать, что область значений вполне непрерывного оператора A , отображающего нормированное пространство E_1 в нормированное пространство E_2 , сепарабельна.

В случае отображения гильбертова пространства H в себя вполне непрерывный оператор может быть аппроксимирован так называемыми конечномерными операторами. При этом линейный непрерывный оператор $B : H \rightarrow H$ называется *конечномерным* (или оператором конечного ранга), если его область значений $R(B)$ принадлежит конечномерному подпространству и, следовательно, сама является конечномерным пространством: $\dim R(B) < +\infty$. Как отмечалось выше, конечномерный оператор $B : H \rightarrow H$ является вполне непрерывным.

Теорема 2. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство. Тогда линейный оператор $A : H \rightarrow H$ является вполне непрерывным тогда и только тогда, когда существует последовательность $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ конечномерных операторов, определенных на H , равномерно сходящаяся к A .

Введем еще одно важное в функциональном анализе понятие сопряженного оператора. Пусть $A : E_1 \rightarrow E_2$ — линейный непрерывный оператор, отображающий нормированное пространство E_1 в нормированное пространство E_2 . Тогда сопряженным оператором оператору A называется такое отображение $A^* : E_2^* \rightarrow E_1^*$ сопряженных пространств, которое действует согласно правилу:

$$(A^*f)(x) = f(Ax) \quad (\forall f \in E_2^*, \forall x \in E_1). \quad (2)$$

Равенству (2) можно придать более выразительную форму, если значение $\varphi(x)$ функционала $\varphi \in E^*$ на элементе $x \in E$ записывать в виде $\langle x, \varphi \rangle$. Тогда сопряженный оператор A^* определяется равенством

$$\langle x, A^*f \rangle = \langle Ax, f \rangle \quad (\forall f \in E_2^*, \forall x \in E_1). \quad (2')$$

Известно, что если оператор $A : E_1 \rightarrow E_2$ является линейным непрерывным, то его сопряженный оператор $A^* : E_2^* \rightarrow E_1^*$ также линейный непрерывный и $\|A\| = \|A^*\|$. Более того, справедлива такая теорема.

Теорема 3 (Шаудера). Пусть $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$, где E_2 — банахово пространство. Оператор A вполне непрерывен тогда и только тогда, когда вполне непрерывным является его сопряженный A^* .

Отметим, что, согласно теореме Рисса (см. гл. 2, § 4, теорему 11) об общем виде линейного непрерывного функционала, заданного на гильбертовом пространстве H , оператор $A^* : H \rightarrow H$, сопряженный к линейному непрерывному оператору $A : H \rightarrow H$, определяется с помощью равенства

$$(x, A^*y) = (Ax, y) \quad (\forall x, y \in H),$$

совпадающего в этом случае с равенством (2'). Отсюда получаем, что оператор $A^{**} = (A^*)^*$ (второй сопряженный к A) совпадает с A . Нетрудно проверить, что для фиксированных операторов A, B из пространства $\mathcal{L}(H)$ и любых $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ справедливы соотношения: $(\alpha A + \beta B)^* = \bar{\alpha} A^* + \bar{\beta} B^*$, $(AB)^* = B^* A^*$.

В гильбертовом пространстве особенно интересными являются те операторы, которые равны своим сопряженным: $A = A^*$, т. е. так называемые самосопряженные операторы. Таким образом, оператор $A \in \mathcal{L}(H)$ называется *самосопряженным*, если

$(Ax, y) = (x, Ay)$ для произвольных элементов x и y гильбертова пространства H . Для самосопряженного оператора $A: H \rightarrow H$ справедливо равенство $\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |(Ax, x)|$.

2. **Линейные операторные уравнения с вполне непрерывными операторами.** Пусть E — банахово пространство и оператор $A: E \rightarrow E$ вполне непрерывен. Тогда уравнение $Ax = y$, в котором оператор A и элемент $y \in E$ считаются заданными, а элемент $x \in E$ — неизвестным, называется *уравнением первого рода*. Аналогично уравнение

$$x - Ax = u \quad (3)$$

с заданным оператором A и элементом $u \in E$ и неизвестным элементом $x \in E$ называется *уравнением второго рода*. Наряду с уравнением (3) полезно рассмотреть соответствующее однородное уравнение

$$z - Az = 0 \quad (4)$$

с неизвестным элементом $z \in E$, сопряженное уравнение

$$f - A^*f = g, \quad (5)$$

в котором функционал $g \in E^*$ является заданным, а функционал $f \in E^*$ — искомым, а также сопряженное однородное уравнение

$$\phi - A^*\phi = 0 \quad (6)$$

с неизвестным функционалом $\phi \in E^*$.

Теорема 4 (первая теорема Фредгольма). Пусть A — вполне непрерывный оператор в банаховом пространстве E , $A: E \rightarrow E$. Следующие утверждения эквивалентны:

- уравнение (3) имеет решение при любой правой части u ;
- уравнение (4) имеет только тривиальное решение;
- уравнение (5) имеет решение при любой правой части g ;
- уравнение (6) имеет только тривиальное решение.

Если выполнено одно из условий а) — г), то операторы $I - A$ и $I - A^*$ имеют непрерывные обратные, т. е. $(I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ и $(I - A^*)^{-1} \in \mathcal{L}(E^*)$.

Теорема 5 (вторая теорема Фредгольма). Пусть A — вполне непрерывный оператор в банаховом пространстве E , $A: E \rightarrow E$. Тогда уравнения (4) и (6) имеют одинаковое конечное число линейно независимых решений.

Теорема 6 (третья теорема Фредгольма). Пусть A — вполне непрерывный оператор в банаховом пространстве E , $A: E \rightarrow E$. Для того чтобы уравнение (3) имело хотя бы одно решение, необходимо и достаточно, чтобы для любого решения ϕ уравнения (6) выполнялось условие $\langle u, \phi \rangle = 0$.

Таким образом, либо уравнения (3) и (5) разрешимы при любых правых частях $u \in E$ и $g \in E^*$, и в этом случае однородные уравнения (4) и (6) имеют лишь нулевые решения, либо однородные уравнения имеют одинаковое число линейно независимых решений $z_1, \dots, z_n; \phi_1, \dots, \phi_n$, и в этом случае, чтобы уравнение (3) (соответственно (5)) имело решение, необходимо и достаточно, чтобы $\langle u, \phi_j \rangle = 0, j = 1, 2, \dots, n$ (соответственно $\langle z_j, g \rangle = 0, j = 1, 2, \dots, n$). Следовательно, для уравнения (3) с вполне непрерывным оператором $A: E \rightarrow E$ возможны только три следующие ситуации:

1) множество $\ker(I - A)$, состоящее из тех $x \in E$, что $(I - A)x = 0$, содержит только $x = 0$; тогда оператор $I - A$ непрерывно обратим и уравнение (3) имеет при любой правой части u единственное решение $x = (I - A)^{-1}u$;

2) множество $\ker(I - A) \neq \{0\}$; если $\langle u, \phi \rangle \neq 0$ хотя бы для одного решения ϕ сопряженного однородного уравнения (6), то (3) решений не имеет;

3) множество $\ker(I - A) \neq \{0\}$; если $\langle u, \phi \rangle = 0$ для всех решений ϕ уравнения (6), то общее решение уравнения (3) имеет вид $x = x_0 + \sum_{k=1}^n \alpha_k z_k$, где

x_0 — частное решение (3), $\{z_k\}_{k=1}^n$ — базис подпространства решений уравнения (4), а n — размерность этого подпространства.

Уравнения типа (3) — (6) в том случае, когда A — интегральный оператор (1) с непрерывным ядром, изучались в начале XX ст. И. Фредгольмом в связи с крайними задачами для уравнения Лапласа, и они называются интегральными уравнениями

Фредгольма второго рода (более детально о них см. в § 4). Теоремы 4—6 являются обобщением теорем Фредгольма (так называемых альтернатив Фредгольма) из теории интегральных уравнений. Они получены Ф. Риссом и Ю. Шаудером.

Пусть X, Y — банаховы пространства (оба вещественные или оба комплексные), $A: X \rightarrow Y$ — линейный оператор и $A^*: Y^* \rightarrow X^*$ — сопряженный к A оператор. Пусть $\ker A = \{x \in X: Ax = 0\}$ — ядро оператора A , а $R(A)$ — область значений A .

Оператор A называется *нормально разрешимым*, если для разрешимости уравнения $Ax = y$ необходимо и достаточно, чтобы $(y, \varphi) = 0$ для любого решения φ уравнения $A^*\varphi = 0$.

Нормально разрешимый оператор A называется *нетеровым*, если многообразия $\ker A$ и $\ker A^*$ конечномерны. При этом число $n = \dim \ker A$ называется числом нулей оператора A , число $m = \dim \ker A^*$ — *дефектным числом оператора A* , а число $\chi = n - m$ — *индексом оператора A* .

Нетеров оператор A нулевого индекса называется *фредгольмовым оператором*. Из теорем 4—6 следует, что оператор $T = I - A$, где A — компактный оператор, является фредгольмовым.

3. Собственные значения и собственные векторы вполне непрерывных операторов. Пусть вначале X — линейное пространство и A — линейный оператор, действующий в X , с областью определения $\mathcal{D}(A)$. Число λ называется *собственным значением оператора A* , если существует вектор $x \neq 0$, $x \in \mathcal{D}(A)$ такой, что $Ax = \lambda x$. При этом вектор x называется *собственным вектором оператора A* , отвечающим собственному значению λ . Линейная оболочка всех собственных векторов оператора A , отвечающих собственному значению λ , называется *собственным подпространством оператора A* , отвечающим λ . Отметим, что если $X = E$ является нормированным пространством и $A: E \rightarrow E$ — линейный непрерывный оператор, то собственное подпространство оператора A , отвечающее собственному значению λ , замкнуто в E .

Теорема 7. Пусть E — банахово пространство и $A: E \rightarrow E$ — вполне непрерывный оператор. Тогда собственное подпространство оператора A , отвечающее нулевому собственному значению λ , конечномерно.

Отметим, что в бесконечномерном пространстве E собственное подпространство, соответствующее нулевому собственному значению, может быть бесконечномерным.

Теорема 8. Пусть A — вполне непрерывный оператор, отображающий банахово пространство E в себя. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ вне круга $|\lambda| \leq \varepsilon$ комплексной плоскости, если E — комплексное пространство, или вне отрезка $|\lambda| \leq \varepsilon$ вещественной оси, если E — действительное пространство, может содержаться лишь конечное число собственных значений оператора A .

Собственные значения и собственные векторы вполне непрерывного самосопряженного оператора A , отображающего гильбертово пространство H в себя, обладают рядом дополнительных и важных свойств. В частности, все собственные значения вещественны, а собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны. Кроме того, если $A \neq 0$, то оператор A имеет по крайней мере одно собственное значение, отличное от нуля.

Теорема 9. Все собственные значения самосопряженного вполне непрерывного оператора A , $A: H \rightarrow H$, расположены на отрезке $[m, M]$ числовой оси, где $m = \inf_{\|x\|=1} (Ax, x)$ и $M = \sup_{\|x\|=1} (Ax, x)$. Если $M \neq 0$, то M является наибольшим собственным значением A , а если $m \neq 0$, то m — наименьшее собственное значение A .

Из теоремы 9 следует, что для данного оператора A его норма $\|A\|$ совпадает с числом $|\lambda_1|$, где λ_1 — наибольшее по модулю собственное значение A .

Теорема 10 (Гильберта — Шмидта). Пусть A — самосопряженный вполне непрерывный оператор, отображающий сепарабельное гильбертово пространство H в себя. Тогда в H существует полная ортонормированная система собственных векторов оператора A .

Рассмотрим разложение в ряд Фурье элементов $x \in H$ по собственным векторам самосопряженного вполне непрерывного оператора $A \in \mathcal{S}(H)$. Для этого пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — собственные векторы оператора A , отвечающие ненулевым собственным значениям $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, т. е. $Ae_k = \lambda_k e_k$, $k \in \mathbb{N}$. Нумерацию собственных значений проведем в порядке убывания их модулей. Условимся при этом снабжать каждое собственное значение столькими последовательными номерами, какова размерность соответствующего собственного подпространства. Можно считать, что векторы $e_1, e_2, \dots$

$\dots, e_k, \dots$ взаимно ортогональны и нормированы. Рассмотрим также собственное подпространство $\ker A$ оператора A , отвечающее нулевому собственному значению, т. е. ядро оператора A . Поскольку $\ker A$ также сепарабельно, то в нем можно построить ортонормированный базис $\{e'_k\}_{k=1}^{\infty}$. Тогда каждый вектор $x \in H$ допускает следующее разложение по базису $\{e'_k\}_{k=1}^{\infty} \cup \{e_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} (x, e'_k) e'_k + \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k,$$

где одна или обе суммы могут быть и конечными. Из этого разложения следует, что

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (x, e_k) e_k.$$

Отметим, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = 0$.

4. Резольвентное множество и спектр линейного оператора. Пусть E — комплексное банахово пространство. Рассмотрим линейный оператор $A \in \mathcal{B}(E)$ областью определения $\mathcal{D}(A)$, плотной в E , и множеством значений $R(A) \subset E$.

Определение 1. Комплексное число λ (точка комплексной плоскости) называется регулярной точкой оператора A , если оператор $A - \lambda I$ имеет обратный оператор $(A - \lambda I)^{-1}$, являющийся линейным непрерывным оператором, заданным на E . Совокупность всех регулярных точек оператора A называется резольвентным множеством оператора A и обозначается $\rho(A)$. Если $\lambda \in \rho(A)$, то оператор $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ из $\mathcal{B}(E)$ называется резольвентой оператора A .

Можно доказать, что резольвентное множество $\rho(A)$ в комплексной плоскости всегда открыто. Кроме того, если $A \in \mathcal{B}(E)$, то $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > \|A\|\} \subset \rho(A)$. Поэтому у каждого ограниченного оператора A резольвентное множество неограничено.

Определение 2. Дополнение к $\rho(A)$ (в комплексной плоскости) называется спектром линейного оператора $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow E$ и обозначается через $\sigma(A)$, т. е. $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.

Из приведенных выше свойств резольвентного множества следует, что спектр $\sigma(A)$ любого линейного оператора A является замкнутым множеством. Если $A \in \mathcal{B}(E)$, то его спектр $\sigma(A)$ лежит в круге $|\lambda| \leq \|A\|$ и, следовательно, является ограниченным множеством.

Для точек λ спектра линейного оператора A возможны следующие три случая:

- 1) оператор $A - \lambda I$ не обратим, т. е. не инъективен;
- 2) оператор $A - \lambda I$ обратим, но его область значений $R(A - \lambda I)$ не совпадает с E ;
- 3) оператор $A - \lambda I$ обратим, $R(A - \lambda I) = E$, но оператор $A - \lambda I$ неограничен.

Отметим, что если оператор A является линейным непрерывным и $\mathcal{D}(A) = E$, то, согласно теореме Банаха об обратном операторе (см. § 2), случай 3) невозможен.

Если λ — собственное значение оператора A , то справедлив первый случай: оператор $A - \lambda I$ не обратим. Следовательно, если оператор $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow E$ — линейный и непрерывный, то его точки спектра (т. е. $\lambda \in \sigma(A)$) таковы, что:

- 1) или оператор $A - \lambda I$ не обратим, т. е. λ является собственным значением оператора A ;
- 2) или оператор $A - \lambda I$ обратим, но $R(A - \lambda I) \neq E$.

Во втором случае для точки $\lambda \in \sigma(A)$ имеются две возможности:

- 2а) оператор $A - \lambda I$ обратим, замыкание $\overline{R(A - \lambda I)} = E$, но $R(A - \lambda I) \neq E$.

Тогда эта точка λ называется точкой непрерывного спектра оператора A . Множество всех точек непрерывного спектра оператора A обозначается через $\sigma_c(A)$;

2б) оператор $A - \lambda I$ обратим, но $R(A - \lambda I) \neq E$. Тогда точка λ называется точкой остаточного спектра оператора A . Множество всех точек остаточного спектра оператора A обозначается через $\sigma_r(A)$.

Точечным спектром $\sigma_p(A)$ оператора A называется совокупность всех его собственных значений.

Таким образом, спектр $\sigma(A)$ линейного непрерывного оператора $A : E \rightarrow E$ состоит из трех взаимно исключающих частей: точечного спектра $\sigma_p(A)$, непрерывного

спектра $\sigma_c(A)$ и остаточного спектра $\sigma_r(A)$, т. е. $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$.

Теорема 11. Пусть $A \in \mathcal{L}(E)$, где E — комплексное банахово пространство. Тогда существует конечный предел $r_\sigma(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$ и справедливо соотношение

$$\inf_{n \geq 1} \sqrt[n]{\|A^n\|} = r_\sigma(A) \leq \|A\|.$$

Число $r_\sigma(A)$ для $A \in \mathcal{L}(E)$ называется *спектральным радиусом оператора A* .

Если воспользоваться признаком Коши сходимости числового ряда, то из теоремы 11 следует, что если $r_\sigma(A) < 1$, то оператор $I - A$ имеет непрерывный обратный

оператор $(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$, принадлежащий $\mathcal{L}(E)$, и ряд $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ сходится по

норме пространства $\mathcal{L}(E)$. Если же $r_\sigma(A) > 1$, то ряд $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ расходится.

Теорема 12. Пусть $A \in \mathcal{L}(E)$, где E — комплексное банахово пространство. Тогда, если $|\lambda| > r_\sigma(A)$, то $\lambda \in \rho(A)$, т. е. спектр $\sigma(A)$ оператора A содержится в круге $|\lambda| \leq r_\sigma(A)$.

Рассмотрим случай самосопряженного оператора A , отображающего гильбертово пространство H в себя.

Теорема 13. Для того чтобы точка λ была регулярной точкой самосопряженного оператора $A: H \rightarrow H$, необходимо и достаточно существования такой положительной постоянной ϵ , что для любого $x \in H$ $\|Ax - \lambda x\| \geq \epsilon \|x\|$.

Отсюда следует, что $\lambda \in \sigma(A)$ тогда и только тогда, когда существует такая последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ точек из H ,

$$\|Ax_n - \lambda x_n\| \leq c_n \|x_n\|, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0. \quad (7)$$

В (7) можно считать, что $\|x_n\| = 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Поэтому $\lambda \in \sigma(A)$ тогда и только тогда, когда существует последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ точек из H , нормы которых равны единице, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Ax_n - \lambda x_n\| = 0, \quad (8)$$

т. е. элементы x_n при больших n являются «приближенными собственными векторами», соответствующими значению λ .

Теорема 14. Спектр самосопряженного оператора A лежит целиком на отрезке $[m; M]$ вещественной оси, где $m = \inf_{\|x\|=1} (Ax, x)$, $M = \sup_{\|x\|=1} (Ax, x)$. Кроме того, числа m и M всегда являются точками спектра оператора A .

Следовательно, каждый самосопряженный оператор имеет непустой спектр*. Из условия (8) следует, что каждая отличная от нуля точка спектра самосопряженного вполне непрерывного оператора есть его собственное значение.

Можно доказать, что для самосопряженного оператора $A: H \rightarrow H$ теорема 14 уточняется, а именно: спектральный радиус $r_\sigma(A)$ равен $\|A\|$, т. е. справедливо равенство

$$r_\sigma(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} = \|A\|.$$

5. Спектральное разложение самосопряженных операторов. В этом пункте рассматриваются линейные непрерывные операторы, заданные на комплексном гильбертовом пространстве H . Линейный оператор $U: H \rightarrow H$ называется *унитарным*, если он отображает H на все H с сохранением нормы, т. е. $\|Ux\| = \|x\|$ для каждого $x \in H$. Из определения следует, что U является непрерывным оператором с

* В теории нормированных колец доказывается непустота спектра любого непрерывного оператора, определенного в произвольном банаховом пространстве

нормой $\|U\| = 1$ и он взаимно однозначно отображает H на H . Поэтому существует обратный оператор U^{-1} , который также унитарен. Унитарные операторы характеризуются тем условием, что $U^* = U^{-1}$. Два линейных оператора A и B , отображающие H в H , называются унитарно эквивалентными (или подобными), если существует такой унитарный оператор $U: H \rightarrow H$, что $BU = UA$. Ясно, что нормы унитарно эквивалентных операторов равны.

Пусть L — подпространство гильбертова пространства H , т. е. L — замкнутое линейное многообразие. Тогда (см. гл. 2, § 4) каждый вектор $x \in H$ однозначно представим в виде $x = y + z$, где $y \in L$, а $z \perp L$. Полагая $Px = y$, получим некоторый оператор, определенный на H , область значений которого есть подпространство L . Этот оператор называется *проекционным оператором* или оператором ортогонального проектирования на подпространство L и обозначается также через P_L . Нетрудно доказать, что оператор P есть самосопряженный оператор с нормой, равной единице, и удовлетворяет условию $P^2 = P$. Верно и обратное утверждение, а именно: всякий самосопряженный оператор P , удовлетворяющий условию $P^2 = P$, есть оператор ортогонального проектирования на подпространство L , состоящее из тех и только тех точек $x \in H$, для которых $Px = x$.

Два проекционных оператора P_1 и P_2 называются *ортогональными*, если $P_1P_2 = 0$, или, что равносильно, если $P_2P_1 = 0$. Для того чтобы проекционные операторы были ортогональными, необходимо и достаточно, чтобы были ортогональными соответствующие подпространства L_1 и L_2 . Сумма двух проекционных операторов P_{L_1} и P_{L_2} является проекционным оператором тогда и только тогда, когда P_{L_1} и P_{L_2} ортогональны, если это условие выполнено, то $P_{L_1} + P_{L_2} = P_{L_1 + L_2}$, где $L_1 \perp L_2$ — прямая (ортогональная) сумма подпространств L_1 и L_2 .

Для того чтобы произведение двух проекционных операторов P_{L_1} и P_{L_2} было проекционным оператором, необходимо и достаточно, чтобы они были перестановочными, т. е. чтобы $P_{L_1}P_{L_2} = P_{L_2}P_{L_1}$; если это условие выполнено, то $P_{L_1}P_{L_2} = P_{L_1 \cap L_2}$.

Проекционный оператор P_2 называется *частью проекционного оператора* P_1 , если $P_1P_2 = P_2$. Иными словами, оператор P_{L_2} является частью оператора P_{L_1} тогда и только тогда, когда подпространство L_2 есть часть подпространства L_1 . Можно доказать, что проекционный оператор P_{L_2} является частью проекционного оператора P_{L_1} тогда и только тогда, когда для всех $x \in H$ выполняется неравенство $\|P_{L_2}x\| \leq \|P_{L_1}x\|$.

Разность $P_{L_1} - P_{L_2}$ двух проекционных операторов есть проекционный оператор тогда и только тогда, когда P_{L_2} есть часть P_{L_1} . Если это условие выполнено, то $P_{L_1} - P_{L_2}$ есть оператор ортогонального проектирования на подпространство, являющееся ортогональным дополнением к L_2 в L_1 .

Самосопряженный оператор $A: H \rightarrow H$ называется *положительным*, если он отличен от нулевого и $(Ax, x) \geq 0$ для любого $x \in H$. Говорят, что самосопряженный оператор $A: H \rightarrow H$ больше самосопряженного оператора B (обозначают $A > B$), если их разность $A - B$ является положительным оператором, т. е. если $A \neq B$ и $(Ax, x) \geq (Bx, x)$ для любого $x \in H$. Неравенство $A \geq B$ означает, что или $A > B$, или $A = B$. Таким образом, $A \geq B$, если A и B — самосопряженные операторы, заданные на H , и $(Ax, x) \geq (Bx, x)$ для каждого $x \in H$.

Очевидно, операторы AA^* и A^*A положительны для любого линейного непрерывного оператора $A: H \rightarrow H$, отличного от нулевого. В частности, для самосопряженного оператора A , $A \neq 0$, его квадрат A^2 всегда положителен.

Самосопряженный оператор $B: H \rightarrow H$ называется *квадратным корнем* из положительного оператора $A: H \rightarrow H$, если $B^2 = A$.

Теорема 15. Существует единственный положительный квадратный корень B из любого положительного оператора A , перестановочный со всяким оператором, коммутирующим с A .

Теорема 16. Каждый самосопряженный оператор $A: H \rightarrow H$ порождает семейство $\{E_\lambda\}$ проекционных операторов, зависящих от вещественного переменного λ (т. е. $\lambda \in \mathbb{R}$) и удовлетворяющих условиям:

- 1) $E_\lambda \leq E_\mu$, если $\lambda < \mu$;

2) семейство $\{E_\lambda\}$ сильно непрерывно слева, т. е. в каждой точке $\lambda \in \mathbb{R}$ имеем $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \|E_{\lambda-\varepsilon}x - E_\lambda x\| = 0$ для $x \in H$;

3) $E_\lambda = 0$ для каждого $\lambda \leq m$ и $E_\lambda = I$ для каждого $\lambda > M$, где $m = \inf_{\|x\|=1} (Ax, x)$, $M = \sup_{\|x\|=1} (Ax, x)$;

4) из $AB = BA$ следует $\{E_\lambda B = B E_\lambda\}$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$.

Семейство $\{E_\lambda\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, называется *разложением единицы*, порожденным самосопряженным оператором A или *спектральной функцией оператора A* .

С помощью спектральной функции $\{E_\lambda\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, самосопряженного оператора A можно построить интеграл. Пусть ε — любое положительное число, $m = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n = M + \varepsilon$ — произвольное разбиение полуинтервала $[m, M + \varepsilon]$ и $\delta = \max_{0 \leq k \leq n-1} (\lambda_{k+1} - \lambda_k)$. На каждом полуинтервале $\Delta_k = [\lambda_k; \lambda_{k+1})$ выберем отмеченную точку ν_k и положим $E(\Delta_k) = E_{\lambda_{k+1}} - E_{\lambda_k}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Рассмотрим интегральную сумму σ , построенную для функции $f(\lambda) = \lambda$, $\lambda \in [m; M + \varepsilon]$, данного разбиения и отмеченных точек:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} \nu_k E(\Delta_k).$$

Если существует предел $\lim_{\delta \rightarrow 0} \sigma$ (в смысле равномерной сходимости в пространстве операторов $\mathcal{L}(H)$), не зависящий от разбиения промежутка $[m; M + \varepsilon]$ и выбора отмеченных точек, то его называют *интегралом от функции f по семейству $\{E_\lambda\}$* .

$\lambda \in \mathbb{R}$, и обозначают $\int_m^{M+\varepsilon} \lambda dE_\lambda$. Таким образом, $\int_m^{M+\varepsilon} \lambda dE_\lambda$ есть такой самосопряженный оператор в H , что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left\| \int_m^{M+\varepsilon} \lambda dE_\lambda - \sum_{k=0}^{n-1} \nu_k E(\Delta_k) \right\| = 0.$$

Теорема 17 (спектральное разложение самосопряженного оператора). Пусть A — самосопряженный оператор, определенный на гильбертовом пространстве H , и $\{E_\lambda\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, — его спектральная функция. Тогда справедливо равенство

$$A = \int_m^{M+\varepsilon} \lambda dE_\lambda, \quad (9)$$

где ε — любое положительное число. Кроме того, перечисленные в теореме 16 свойства 1) — 4) и представление (9) оператора A однозначно определяют спектральное семейство $\{E_\lambda\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, по оператору A .

Из спектрального разложения (9) оператора A следует, что для каждого $x \in H$ справедливы равенства:

$$1) Ax = \int_m^{M+\varepsilon} \lambda dE_\lambda x = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \nu_k E(\Delta_k) x;$$

$$2) (Ax, x) = \int_m^{M+\varepsilon} \lambda d(E_\lambda x, x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \nu_k (E(\Delta_k) x, x).$$

Спектральное разложение оператора позволяет ввести функцию от оператора. Пусть $A \in \mathcal{L}(H)$ — самосопряженный оператор и $\{E_\lambda\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, — его разложение единицы. Рассмотрим вначале комплекснозначную ступенчатую на отрезке $[m; M]$ функцию $y = \mathcal{F}(\lambda)$. Напомним, что $\mathcal{F}$ называется ступенчатой, если отрезок $[m; M]$ можно разбить на конечное число промежутков, на каждом из которых функция

$\mathcal{F}$ постоянна. Если λ_0 — точка разрыва функции $\mathcal{F}$, то условимся считать, что $\mathcal{F}(\lambda_0) = \mathcal{F}(\lambda_0 + 0)$. Продолжим $\mathcal{F}$ на $[m; M + \varepsilon)$, считая $\mathcal{F}(\lambda) = \mathcal{F}(M)$ для $\lambda \in (M; M + \varepsilon)$. Рассмотрим разбиение промежутка $[m; M + \varepsilon)$ с помощью непересекающихся полуинтервалов $\Delta_k = [\lambda_k; \mu_k)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, на каждом из которых функция $\mathcal{F}$ постоянна, причем $\mathcal{F}(\lambda_k) = \nu_k$. Тогда положим

$$\int_m^{M+\varepsilon} \mathcal{F}(\lambda) dE_\lambda = \sum_{k=0}^{n-1} \nu_k E(\Delta_k),$$

где $E(\Delta_k) = E_{\mu_k} - E_{\lambda_k}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Легко видеть, что справедливо равенство

$$\int_m^{M+\varepsilon} \mathcal{F}(\lambda) dE_\lambda = \sum_{k=0}^p \tilde{\nu}_k E(\tilde{\Delta}_k),$$

где $\tilde{\Delta}_k$ — любые частичные полуинтервалы, на которых $\mathcal{F}(\lambda)$ постоянна и которые в объединении дают $[m; M + \varepsilon)$. Оператор $\int_m^{M+\varepsilon} \mathcal{F}(\lambda) dE_\lambda$ обозначим через $\mathcal{F}(A)$ и назовем функцией от оператора A , соответствующей ступенчатой функции $\mathcal{F}(\lambda)$ вещественной переменной λ .

Таким образом, построено соответствие между ступенчатыми функциями вещественной переменной и функциями оператора A . Наприм., характеристической функции $\chi_\Delta(\lambda)$ полуинтервала $\Delta \subset [m; M]$ соответствует оператор $E(\Delta)$.

Это соответствие обладает следующими свойствами:

- 1) если $\mathcal{F}(\lambda) = \alpha \mathcal{F}_1(\lambda) + \beta \mathcal{F}_2(\lambda)$, $\lambda \in [m; M]$, то $\mathcal{F}(A) = \alpha \mathcal{F}_1(A) + \beta \mathcal{F}_2(A)$ (линейность соответствия);
- 2) если $\mathcal{F}(\lambda) = \mathcal{F}_1(\lambda) \mathcal{F}_2(\lambda)$, $\lambda \in [m; M]$, то $\mathcal{F}(A) = \mathcal{F}_1(A) \mathcal{F}_2(A)$ (мультипликативность соответствия);
- 3) $\overline{\mathcal{F}(A)} = [\mathcal{F}(A)]^*$, где черта над функцией означает переход к комплексно-сопряженной функции;

- 4) $\|\mathcal{F}(A)\| \leq \max_{\lambda \in [m; M]} |\mathcal{F}(\lambda)|$;

- 5) если B — произвольный линейный непрерывный оператор и $AB = BA$, то $\mathcal{F}(A)B = B\mathcal{F}(A)$.

Распространим соответствие между ступенчатыми функциями $\mathcal{F}$ и операторам $\mathcal{F}(A)$ на более широкий класс функций. Пусть $\mathcal{F}(\lambda)$ — произвольная комплекснозначная непрерывная на $[m; M]$ функция. Продолжим ее на полуинтервал $[m; M + \varepsilon)$, полагая $\mathcal{F}(\lambda) = \mathcal{F}(M)$ для $\lambda \in (M; M + \varepsilon)$. Тогда существует последовательность $(\mathcal{F}_n(\lambda))_{n=1}^\infty$ ступенчатых функций, равномерно сходящаяся на $[m; M + \varepsilon)$ к функции $\mathcal{F}(\lambda)$. Из свойства 4) имеем

$$\|\mathcal{F}_n(A) - \mathcal{F}_k(A)\| \leq \max_{\lambda \in [m; M]} |\mathcal{F}_n(\lambda) - \mathcal{F}_k(\lambda)| \rightarrow 0$$

при $n, k \rightarrow \infty$. Следовательно, последовательность $(\mathcal{F}_n(A))_{n=1}^\infty$ операторов нормированного пространства $\mathcal{L}(H)$ фундаментальна. В силу полноты $\mathcal{L}(H)$ существует такой оператор C , что $C = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_n(A)$. Положим (по определению)

$$\int_m^{M+\varepsilon} \mathcal{F}(\lambda) dE_\lambda = C,$$

7. 6.

$$\int_m^{M+\varepsilon} \mathcal{F}(\lambda) dE_\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_m^{M+\varepsilon} \mathcal{F}_n(\lambda) dE_\lambda.$$

Интеграл $\int_m^{M+\varepsilon} \mathcal{F}(\lambda) dE_\lambda$ называется функцией от оператора A , соответствующей непрерывной функции $\mathcal{F}(\lambda)$, $\lambda \in [m; M]$, и обозначается через $\mathcal{F}(A)$. Можно проверить, что определение $\mathcal{F}(A)$ не зависит от выбора последовательности $(\mathcal{F}_n(\lambda))_{n=1}^\infty$ ступенчатых функций, равномерно сходящейся к $\mathcal{F}(\lambda)$ на $[m; M]$, и что свойства 1)–5) сохраняются и для случая непрерывных функций. В частности,

$$A^n = \int_m^{M+\varepsilon} \lambda^n dE_\lambda \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Теорема 18. Пусть $A : H \rightarrow H$ — самосопряженный оператор. Для того чтобы для данного $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ существовала резольвента $R_{\lambda_0} = (A - \lambda_0 I)^{-1}$, достаточно выполнения одного из следующих условий:

- 1) λ_0 не вещественно;
- 2) λ_0 лежит вне отрезка $[m; M]$;
- 3) если $\lambda_0 \in [m; M]$, то существует полуинтервал $[\alpha; \beta)$, $\alpha < \lambda_0 < \beta$, внутри которого E_λ постоянно.

Во всех этих случаях $R_{\lambda_0} = \int_m^{M+\varepsilon} \frac{dE_\lambda}{\lambda - \lambda_0}$.

Верно также, что если для вещественного λ_0 существует R_{λ_0} , то λ_0 лежит внутри некоторого полуинтервала $[\alpha; \beta)$, $\lambda_0 \neq \alpha$, в котором E_λ постоянно.

В терминах спектрального семейства $\{E_\lambda\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, самосопряженного оператора A можно охарактеризовать и собственные значения A .

Теорема 19. Для того чтобы число λ_0 было собственным значением самосопряженного оператора $A : H \rightarrow H$, необходимо и достаточно, чтобы λ_0 было точкой разрыва для E_λ .

6. Неограниченные линейные операторы в гильбертовом пространстве. Выше мы рассматривали ограниченные линейные операторы, определенные на всем пространстве H . Однако многие важные в приложениях задачи приводят к изучению операторов, не удовлетворяющих этим условиям. Таковым является, например, оператор дифференцирования $A = \frac{d}{dx}$, определенный лишь на всюду плотном множестве в

$L_2[-\pi; \pi]$ абсолютно непрерывных на $[-\pi; \pi]$ функций, имеющих производную, интегрируемую с квадратом на этом отрезке. Он неограничен, поскольку для последовательности функций $x_n(t) = \sin nt$, $t \in [-\pi; \pi]$, имеем $\|Ax_n\| = n\|x_n\|$ для каждого $n \in \mathbb{N}$.

Если линейный оператор A определен на всюду плотном множестве $\mathcal{D}(A) \subset H$ и непрерывен на нем, то его можно однозначно продолжить по непрерывности на все пространство H , т. е. A будет линейным и непрерывным оператором на H . Поэтому в этом пункте будем рассматривать линейные операторы, определенные на всюду плотном множестве и не являющиеся ограниченными.

Пусть A — линейный оператор, определенный на линейном многообразии $\mathcal{D}(A)$, всюду плотном в комплексном гильбертовом пространстве H , со значениями в H . Множество $\mathcal{D}(A)$ называется областью определения оператора A , а множество $R(A) = A(\mathcal{D}(A))$ — множеством значений A . Два оператора A и B считаются равными, если $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$ и $Ax = Bx$ для каждого $x \in \mathcal{D}(A)$. Если $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$ и $Ax = Bx$ для любого $x \in \mathcal{D}(A)$, то говорят, что оператор A является сужением оператора B , а B — расширением A . В этом случае будем писать $A \subset B$.

Суммой двух операторов A и B называется такой оператор $A + B$, определенный на линейном многообразии $L = \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$, что $(A + B)x = Ax + Bx$ ($\forall x \in L$). Не исключено, что многообразие L может состоять только из нулевого элемента, и тогда сумма $A + B$ будет тривиальной.

Пусть в $\mathcal{D}(A)$ существует такое подмножество $\mathcal{D}$, что $Ax \in \mathcal{D}(B)$ для каждого $x \in \mathcal{D}$. Тогда на $\mathcal{D}$ определено произведение $(BA)x = B(Ax)$. Аналогично определяется и произведение AB .

Если оператор A взаимно однозначно отображает $\mathcal{D}(A)$ на $R(A)$, то существует обратный оператор A^{-1} с областью определения $R(A)$ и областью значений $\mathcal{D}(A)$. Может случиться, что $R(A) = H$ и что обратный оператор A^{-1} будет ограниченным, даже если A — неограниченный линейный оператор. Может быть и наоборот: ограниченный линейный оператор A имеет неограниченный обратный (см. § 2).

Пусть A — линейный оператор, определенный на линейном многообразии $\mathcal{D}(A)$, всюду плотный в гильбертовом пространстве H . Рассмотрим для данного $y \in H$ функционал (Ax, y) , $x \in \mathcal{D}(A)$. Возможно, что для этого функционала существует такой элемент $y^* \in H$, что

$$(Ax, y) = (x, y^*) \quad (\forall x \in \mathcal{D}(A)). \quad (10)$$

Например, для $y = 0$ соотношение (10) выполняется при $y^* = 0$. Отметим, что если для $y \in H$ найдется $y^* \in H$, что справедливо равенство (10), то такой элемент y^* единственный. Это следует из того, что $\overline{\mathcal{D}(A)} = H$. Таким образом, имеем соответствие, которое некоторым элементам $y \in H$ сопоставляет элементы y^* так, что выполняется (10). Это соответствие называется сопряженным оператором к A и обозначается через A^* . Следовательно, область определения $\mathcal{D}(A^*)$ оператора A^* состоит из тех и только тех $y \in H$, для которых существует $y^* \in H$ такое, что выполняется равенство (10). При этом полагаем $A^*y = y^*$, $y \in \mathcal{D}(A^*)$. Очевидно, что множество $\mathcal{D}(A^*)$ является линейным многообразием и A^* — линейный оператор. Заметим, что область определения $\mathcal{D}(A^*)$ оператора A^* всегда не пуста — она заведомо содержит нулевой элемент. Таким образом, равенство (10) можно записать с помощью оператора A^* в следующем виде:

$$(Ax, y) = (x, A^*y) \quad (\forall x \in \mathcal{D}(A), \forall y \in \mathcal{D}(A^*)).$$

Линейный оператор A называется *самосопряженным*, если $A = A^*$.

Нетрудно проверить, что если $A \subset B$, то $B^* \subset A^*$. Можно доказать, что $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$, $(A + B)^* \supset A^* + B^*$, $(AB)^* \supset B^* A^*$.

Линейный оператор A , определенный на $\mathcal{D}(A)$, называется *симметрическим*, если для любых $x, y \in \mathcal{D}(A)$ выполняется равенство $(Ax, y) = (x, Ay)$. Для случая ограниченных операторов понятие симметричности оператора совпадает с понятием самосопряженности. Для неограниченных операторов это разные понятия. Из определения сопряженных и симметрических операторов следует, что $A^* \supset A$, т. е. для симметрического оператора сопряженный с ним оператор является расширением A .

Можно доказать, что если оператор A^{-1} существует и имеет, так же как и оператор A , всюду плотную область определения, то $(A^*)^{-1}$ существует и равен $(A^{-1})^*$.

Для неограниченного линейного оператора A из того, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ и все $x_n \in \mathcal{D}(A)$, соотношение $\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = Ax_0$ вытекает не всегда. Однако некоторые неограниченные линейные операторы обладают более слабым свойством, отчасти замещающим свойство непрерывности.

Пусть A — линейный оператор с областью определения $\mathcal{D}(A)$, всюду плотной в H . Если из того, что последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ точек области $\mathcal{D}(A)$ сходится к точке $x_0 \in H$, а последовательность $(Ax_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится к точке $y_0 \in H$, следует, что $x_0 \in \mathcal{D}(A)$ и $y_0 = Ax_0$, то оператор A называется *замкнутым*. Примером замкнутого оператора может служить оператор, сопряженный с произвольным линейным оператором. Очевидно, что всякий непрерывный и, в частности, всякий линейный ограниченный операторы являются замкнутыми.

Теорема 20 (о замкнутом графике). *Всякий замкнутый линейный оператор, определенный на всем пространстве H , является ограниченным.*

Говорят, что оператор A *допускает замыкание*, если существует замкнутый оператор B , являющийся расширением A (т. е. $B \supset A$). Предположим, что оператор A допускает замыкание. Тогда можно доказать, что среди всех его замкнутых расширений имеется минимальное замкнутое расширение $\bar{A}$ (т. е. такое, которое содержится во всяком другом замкнутом расширении A). Минимальное замкнутое расширение A называется *замыканием* A и обозначается $\bar{A}$. Минимальное замкнутое расширение

единственно. Отметим также, что всякий симметрический оператор A допускает замыкание, поскольку $A \subset A^*$ и поэтому существует его замыкание $\bar{A}$.

Теорема 21. *Оператор A^{**} существует (т. е. $\mathcal{D}(A^*)$ всюду плотен в H) тогда и только тогда, когда определенный на всюду плотном множестве оператор A допускает замыкание. В этом случае $A^{**} = \bar{A}$.*

Пусть A — неограниченный самосопряженный оператор, определенный на линейном многообразии $\mathcal{D}(A)$, всюду плотном в H . Тогда оператор A порождает семейство $\{E_\lambda\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, проекционных операторов, удовлетворяющих условиям:

- 1) $E_\lambda \leq E_\mu$, если $\lambda < \mu$;
- 2) семейство $\{E_\lambda\}$ сильно непрерывно слева в каждой точке $\lambda \in \mathbb{R}$,
- 3) $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} E_\lambda = 0$, $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E_\lambda = I$ (пределы здесь понимаются в смысле сильной сходимости);
- 4) для любого оператора $B \in \mathcal{L}(H)$ такого, что $B(\mathcal{D}(A)) \subset \mathcal{D}(A)$ и $BA = AB$, имеем $BE_\lambda x = E_\lambda Bx$ ($\forall x \in \mathcal{D}(A)$),
- 5) для всех $x \in \mathcal{D}(A)$ и всех $y \in H$

$$(Ax, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d(E_\lambda x, y),$$

где справа стоит несобственный интеграл Стильбеса.

Свойствами 1)–5) семейство $\{E_\lambda\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, определяется однозначно.

Семейство $\{E_\lambda\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, называется разложением единицы, порожденным оператором A , или спектральной функцией оператора A . Вектор x принадлежит $\mathcal{D}(A)$

тогда и только тогда, когда сходится интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 d(E_\lambda x, x)$. В этом случае

$Ax = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_\lambda x$, причем интеграл понимается как предел в H интеграла $\int_a^b \lambda dE_\lambda x$ при $a \rightarrow -\infty$ и $b \rightarrow +\infty$. Если $x \in \mathcal{D}(A)$, то

$$\|Ax\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 d(E_\lambda x, x).$$

В приложениях встречаются также *полуограниченные снизу* самосопряженные операторы. Так называется самосопряженный оператор A , для которого существует постоянная m такая, что для всех $x \in \mathcal{D}(A)$ выполняется неравенство $(Ax, x) \geq m(x, x)$. Спектр такого оператора расположен на полуоси $[m; +\infty)$, а формула спектрального разложения имеет вид

$$Ax = \int_m^{+\infty} \lambda dE_\lambda x \quad (\forall x \in \mathcal{D}(A)).$$

Аналогичные определения и формула справедливы также для *полуограниченного сверху* самосопряженного оператора. А именно, самосопряженный оператор A , для которого существует постоянная M такая, что для всех $x \in \mathcal{D}(A)$ выполняется неравенство $(Ax, x) \leq M(x, x)$, называется *полуограниченным сверху*. Формула спектрального разложения имеет вид

$$Ax = \int_{-\infty}^{M+\varepsilon} \lambda dE_\lambda x \quad (\forall x \in \mathcal{D}(A)),$$

где ε — положительное число.

Более детально рассмотренный здесь материал изложен в [16; 20; 26; 27; 30; 40].

Примеры решения задач

1. Пусть $k(t, s)$ — непрерывная функция на квадрате $P = [a; b] \times [a; b]$, функции $\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$, а точки $t_1, \dots, t_m$ принадлежат отрезку $[a; b]$. Доказать, что «нагруженный» интегральный оператор

$$(Ax)(t) = \int_a^b k(t, s) x(s) ds + \sum_{k=1}^m \varphi_k(t) x(t_k)$$

является вполне непрерывным, отображающим пространство $C[a; b]$ в $C[a; b]$.

Решение. Очевидно, что оператор A линеен, и согласно условиям непрерывности собственного интеграла, зависящего от параметра, он отображает $C[a; b]$ в $C[a; b]$ непрерывно. Поскольку сумма вполне непрерывных операторов является вполне непрерывным оператором, то достаточно доказать компактность следующих операторов, отображающих $C[a; b]$ в $C[a; b]$:

$$(Bx)(t) = \int_a^b k(t, s) x(s) ds, \quad (Cx)(t) = \varphi(t) x(t_0),$$

где φ — некоторая непрерывная функция на отрезке $[a; b]$, а t_0 — фиксированная точка промежутка $[a; b]$.

Компактность интегрального оператора докажем так. Пусть множество $M \subset C[a; b]$ является ограниченным, т. е. существует такое положительное число R , что $\|x\| = \max_{t \in [a; b]} |x(t)| \leq R$ для всех функций $x = x(t)$ из M . Тогда множество $B(M)$ — образ множества M при отображении B — также ограничено. Действительно, непрерывная на P функция $k(t, s)$ ограничена, т. е. существует такое число $L \geq 0$, что $\max_{(t, s) \in P} |k(t, s)| \leq L$. Поэтому для произвольной функции $x = x(t) \in M$ справедлива оценка

$$\|Bx\| \leq \max_{a \leq t \leq b} \int_a^b |k(t, s)| |x(s)| ds \leq RL(b-a),$$

из которой следует ограниченность множества $B(M)$. Покажем, что множество $B(M)$ равностепенно непрерывно. Для этого рассмотрим произвольное положительное число ε . Непрерывная на P функция $k(t, s)$ по теореме Кантора является равномерно непрерывной. Поэтому для рассматриваемого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если $(t', s') \in P$, $(t'', s'') \in P$ и $|t' - t''| < \delta$, $|s' - s''| < \delta$, то $|k(t', s') - k(t'', s'')| < \frac{\varepsilon}{R(b-a)}$. Отсюда следует, что как только $|t' - t''| <$

$< \delta$, то $|k(t', s) - k(t'', s)| < \frac{\varepsilon}{R(b-a)}$ для всех $s \in [a; b]$. Тогда для произвольной функции $x = x(t) \in M$

$$\begin{aligned} |(Bx)(t') - (Bx)(t'')| &\leq \int_a^b |k(t', s) - k(t'', s)| |x(s)| ds < \\ &< \frac{\varepsilon}{R(b-a)} \cdot R(b-a) = \varepsilon \quad (\forall t', t'' \in [a; b] : |t' - t''| < \delta). \end{aligned}$$

Таким образом, для каждого $\varepsilon > 0$ мы нашли такое $\delta > 0$, что если $t', t'' \in [a; b]$ и $|t' - t''| < \delta$, то

$$|(Bx)(t') - (Bx)(t'')| < \varepsilon \quad (\forall x \in M),$$

т. е. множество $B(M)$ равномерно непрерывно, и, следовательно, по теореме Арцела оно компактно. Поэтому оператор B вполне непрерывен.

Докажем компактность оператора C . Поскольку для введенного выше ограниченного множества $M \subset C[a; b]$ очевидно, что

$$\|Cx\| = \max_{a \leq t \leq b} |\varphi(t)x(t_0)| \leq R \max_{a \leq t \leq b} |\varphi(t)| \quad (\forall x \in M),$$

то множество $C(M)$ ограничено. Семейство функций $C(M)$ также равномерно непрерывно. Действительно, для произвольного $\varepsilon > 0$, поскольку функция φ непрерывна на $[a; b]$, найдется такое $\delta > 0$, что лишь только $|t' - t''| < \delta$ ($t', t'' \in [a; b]$), то $|\varphi(t') - \varphi(t'')| < \frac{\varepsilon}{R}$. Тогда для этих t' и t'' имеем

$$|(Cx)(t') - (Cx)(t'')| = |\varphi(t') - \varphi(t'')| \cdot |x(t_0)| < \frac{\varepsilon}{R} \cdot R = \varepsilon \quad (\forall x \in M),$$

что и требовалось доказать. Поэтому $C(M)$ компактно и, следовательно, оператор C также вполне непрерывен.

Отметим, что поскольку множество значений оператора C одномерно, то C является конечномерным оператором, а поэтому и вполне непрерывным.

2. Является ли вполне непрерывным оператор $A : C[0; 1] \rightarrow C[0; 1]$, если:

$$\text{а) } (Ax)(t) = \int_0^1 \frac{x(s)}{\sqrt{(t-s)^2}} ds;$$

$$\text{б) } (Ax)(t) = x(\sqrt{t});$$

$$\text{в) } (Ax)(t) = \int_0^1 x(s^2) ds?$$

Будет ли этот оператор вполне непрерывным, если его рассматривать как отображение пространства $L_2[0; 1]$ в себя?

Решение. а) Оператор $A : C[0; 1] \rightarrow C[0; 1]$, определенный с помощью равенства

$$(Ax)(t) = \int_0^1 \frac{x(s)}{\sqrt{(t-s)^2}} ds,$$

не является заданным на всем пространстве $C[0; 1]$. Действительно,

если рассмотреть функцию $x(t) = 1$, $t \in [0; 1]$, то $\int_0^1 \frac{ds}{|t-s|}$ расходится. Поэтому оператор A не является ограниченным и, следовательно, он не компактен. По той же причине A не является компактным оператором и как отображение из $L_2[0; 1]$ в $L_2[0; 1]$.

б) Заданный оператор $A : C[0; 1] \rightarrow C[0; 1]$ линеен и непрерывен, а $\|A\| = 1$. Покажем, однако, что он не является вполне непрерывным оператором. Для этого рассмотрим ограниченное множество $M = (\sin n\sqrt{t})_{n=1}^{\infty}$ непрерывных на $[0; 1]$ функций. Покажем, что множество $A(M) = (\sin n\sqrt{t'})_{n=1}^{\infty}$, $0 \leq t \leq 1$, не компактно. Пусть, наоборот, совокупность $A(M)$ является компактным множеством. Тогда по теореме Арцела она равномерно непрерывна, т. е. для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если только $|t' - t''| < \delta$, $t', t'' \in [0; 1]$, то

$$|\sin n\sqrt{t'} - \sin n\sqrt{t''}| < \varepsilon \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

В частности, это утверждение верно для $\varepsilon = \sin 1 < 0$. Тогда, если положить $t' = 0$, а $t'' = \frac{1}{n^2}$ для таких номеров n , что $\frac{1}{n^2} < \delta$, получаем противоречие

$$\sin 1 = |\sin n\sqrt{t'} - \sin n\sqrt{t''}| < \sin 1.$$

Следовательно, множество $A(M)$ не является компактным и поэтому оператор A не вполне непрерывен.

Рассмотрим оператор A как отображение пространства $L_2[0; 1]$ в себя. Тогда для произвольной функции $x = x(t)$ из $L_2[0; 1]$ имеем

$$\|Ax\|^2 = \int_0^1 |x(\sqrt{t})|^2 dt = \int_0^1 |x(\tau)|^2 2\tau d\tau \leq 2\|x\|^2.$$

Из этого неравенства следует, что A действительно отображает $L_2[0; 1]$ в себя, причем он непрерывен и линеен. Докажем, что оператор $A : L_2[0; 1] \rightarrow L_2[0; 1]$ не является вполне непрерывным. Для этого рассмотрим ограниченное в $L_2[0; 1]$ множество M функций $x_n(t) = \sin n\pi t^2$, $t \in [0; 1]^2$, $n \in \mathbb{N}$.

Покажем, что множество $\{(Ax_n)(t) = \sin n\pi t, 0 \leq t \leq 1; n \in \mathbb{N}\}$ не компактно, т. е. для него не выполняется критерий Рисса компактности множества в $L_2[0; 1]$ (см. гл. 2, § 1). Доказательство проведем от противного. Допустим, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$\int_0^1 |(Ax_n)(t+h) - (Ax_n)(t)|^2 dt < \varepsilon$$

при $|h| < \delta$ (вне отрезка $[0; 1]$ функции $(Ax_n)(t)$ считаются равными нулю). Но при $h = \frac{1}{n}$

$$\int_0^1 \left| (Ax_n)\left(t + \frac{1}{n}\right) - (Ax_n)(t) \right|^2 dt = 2 - \frac{3}{2n}.$$

Отсюда следует, что если взять $\varepsilon = \frac{1}{2}$ и найти соответствующее ему $\delta > 0$, то имеем противоречие

$$\int_0^1 |(Ax_n)(t+h) - (Ax_n)(t)|^2 dt = 2 - \frac{3}{2n} < \frac{1}{2}.$$

в) Рассматриваемый оператор $A: C[0; 1] \rightarrow C[0; 1]$ является линейным ограниченным оператором, норма которого равна единице. Поскольку он конечномерен (его множество значений состоит из постоянных функций), то A — компактный оператор.

Исследуем оператор A как отображение пространства $L_2[0; 1]$ в $L_2[0; 1]$. Для этого в интеграле $\int_0^1 x(s^2) ds$ проведем замену $s^2 = \tau$. Тогда получим $(Ax)(t) = \int_0^1 \frac{x(\tau)}{2\sqrt{\tau}} d\tau$.

Покажем, что рассматриваемый оператор A не является ограничением в пространстве $L_2[0; 1]$ и, следовательно, он не может быть компактным. Действительно, для последовательности функций

$x_n(t) = n^{-\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2n} - \frac{1}{2}}$, $0 \leq t \leq 1$, из пространства $L_2[0; 1]$ имеем $\|x_n\| = 1$ для каждого номера $n \in \mathbb{N}$. Однако

$$(Ax_n)(t) = \int_0^1 n^{-\frac{1}{2}} \tau^{\frac{1}{n} - 1} d\tau = \sqrt{n} \quad (\forall t \in [0; 1]),$$

и поэтому $\|Ax_n\| = \sqrt{n}$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, оператор A действительно не ограничен. Поэтому оператор $A: L_2[0; 1] \rightarrow L_2[0; 1]$ не является компактным.

3. Какой должна быть функция $\varphi \in C[a; b]$, чтобы оператор $A: C[a; b] \rightarrow C[a; b]$, определенный с помощью равенства $(Ax)(t) = \varphi(t)x(t)$, был вполне непрерывным? (Этот оператор называется оператором умножения на функцию φ .)

Решение. Покажем, что если функция φ хотя бы в одной точке $t_0 \in [a; b]$ отлична от нуля, то соответствующий оператор A не является вполне непрерывным. Действительно, для достаточно больших номеров n ($n \geq n_0$) рассмотрим ограниченную последовательность непрерывных функций $(x_n(t))_{n=n_0}^\infty$, $t \in [a; b]$, построенную следующим образом: считаем, что $x_n(t) = 0$ для $a \leq t \leq t_0 - \frac{1}{n}$ и $t_0 + \frac{1}{n} \leq t \leq b$, $x_n(t_0) = \frac{1}{\varphi(t_0)}$, а на отрезках $\left[t_0 - \frac{1}{n}; t_0\right]$ и $\left[t_0; t_0 + \frac{1}{n}\right]$ функция $x_n(t)$ линейна. Докажем, что последовательность функций $((Ax_n)(t))_{n=n_0}^\infty$ не является компактным множеством. Доказательство приведем от противного. Допустим, что множество $((Ax_n)(t))_{n=n_0}^\infty$ равномерно непрерывно, т. е. для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что лишь только $|t' - t''| < \delta$ ($t', t'' \in [a; b]$), то $|(Ax_n)(t') - (Ax_n)(t'')| < \varepsilon$ для произвольного номера $n \geq n_0$. Отсюда для $\varepsilon = 1$ и соответствующего ему $\delta > 0$ при $t' = t_0$, $t'' = t_0 + \frac{1}{n}$, где $\frac{1}{n} < \delta$, получаем

$$\left| (Ax_n)(t_0) - (Ax_n)\left(t_0 + \frac{1}{n}\right) \right| = |1 - 0| = 1.$$

Следовательно, оператор A не является вполне непрерывным.

Таким образом, оператор $(Ax)(t) = \varphi(t)x(t)$, $x(t) \in C[a; b]$, является вполне непрерывным лишь тогда, когда $\varphi(t) = 0$ для всех $t \in [a; b]$.

Замечание. Детально рассмотрен случай, когда $t_0 \in (a; b)$. Если $t_0 = a$ или $t_0 = b$, то соответствующие рассуждения претерпевают лишь незначительные изменения. Впрочем, можно поступить и по-другому. Если A — вполне непрерывное отображение $C[a; b]$ в себя, то, по доказанному, $\varphi(t_0) = 0$ ($\forall t_0 \in (a; b)$). То, что $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, следует из непрерывности функции φ на $[a, b]$.

4. Будет ли вполне непрерывным оператор $(Ax)(t) = \frac{dx}{dt}$, если он рассматривается как действующий:

- а) из $C^{(1)}[0; 1]$ в $C[0; 1]$;
- б) из $C^{(2)}[0; 1]$ в $C^{(1)}[0; 1]$;
- в) из $C^{(2)}[0; 1]$ в $C[0; 1]$?

Решение. Прежде всего сделаем следующее замечание. Рассмотрим ограниченную последовательность $(t^n)_{n=1}^{\infty}$, $t \in [0; 1]$, функций пространства $C[0; 1]$. Покажем, что множество этих функций не является компактным, т. е. оно не равномерно непрерывно. Пусть это не так. Тогда по теореме Арцела для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что лишь только $|t_1 - t_2| < \delta$ ($t_1, t_2 \in [0; 1]$), то $|t_1^n - t_2^n| < \varepsilon$ для произвольного номера n . Отсюда если взять $\varepsilon < 1 - \frac{1}{e}$, $t_1 = 1$ и $t_2 = 1 - \frac{1}{n}$, то начиная с некоторого номера должно выполняться неравенство $1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n < \varepsilon$ ($\forall n \geq n_0$).

Теперь, устремив в последнем неравенстве n к $+\infty$, получаем противоречие с выбором ε . Поэтому, действительно, последовательность функций $(t^n)_{n=1}^{\infty}$, $t \in [0; 1]$, не образует компактное множество в пространстве $C[0; 1]$.

а) Рассмотрим в $C^{(1)}[0; 1]$ множество $M = \{x_n(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1} : 0 \leq t \leq 1, n \in \mathbb{N}\}$. Оно ограничено в $C^{(1)}[0; 1]$, поскольку для каждого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\|x_n\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |x_n(t)| + \max_{0 \leq t \leq 1} |x_n'(t)| = 1 + \frac{1}{n+1} < 2.$$

Множество $A(M)$ (образ M при отображении A) совпадает с множеством функций $\{t^n : 0 \leq t \leq 1, n \in \mathbb{N}\}$. Поэтому, как отмечалось выше, оно не компактно в $C[0; 1]$. Следовательно, оператор $A: C^{(1)}[0; 1] \rightarrow C[0; 1]$ не является вполне непрерывным.

б) Рассмотрим в $C^{(2)}[0; 1]$ множество функций $M = \{x_n(t) = \frac{t^{n+2}}{(n+2)(n+1)} : 0 \leq t \leq 1, n \in \mathbb{N}\}$. Оно ограничено в $C^{(2)}[0; 1]$, поскольку для каждого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\|x_n\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |x_n(t)| + \max_{0 \leq t \leq 1} |x_n'(t)| + \max_{0 \leq t \leq 1} |x_n''(t)| \leq 3.$$

Множество $A(M)$ совпадает с множеством функций $\left\{ \frac{t^{n+1}}{n+1} : \right.$

$0 \leq t \leq 1, n \in \mathbb{N} \}$. Докажем, что $A(M)$ не является компактным в $C^{(1)}[0; 1]$. Действительно, для нормы элемента $x \in C^{(1)}[0; 1]$ справедливо неравенство $\|x\|_{C^{(1)}[0; 1]} \geq \|x'\|_{C[0; 1]}$. Поэтому если множество $A(M)$ было бы компактным в $C^{(1)}[0; 1]$, то множество $\{t^n : 0 \leq t \leq 1, n \in \mathbb{N}\}$, состоящее из производных функций из $A(M)$, было бы компактным в $C[0; 1]$. Последнее, как отмечалось выше, невозможно. Следовательно, оператор $A : C^{(2)}[0; 1] \rightarrow C^{(1)}[0; 1]$ не является компактным.

в) Покажем, что в этом случае оператор A вполне непрерывен. Пусть $M \subset C^{(2)}[0; 1]$ — произвольное ограниченное множество этого пространства, т. е. существует такое положительное число R , что

$$\max_{0 \leq t \leq 1} |x(t)| + \max_{0 \leq t \leq 1} |x'(t)| + \max_{0 \leq t \leq 1} |x''(t)| \leq R$$

для каждой функции $x = x(t) \in M$. Отсюда следует, что

$$\max_{0 \leq t \leq 1} |x'(t)| \leq R, \max_{0 \leq t \leq 1} |x''(t)| \leq R \quad (\forall x = x(t) \in M). \quad (11)$$

Рассмотрим множество $A(M) = \{x'(t) : x(t) \in M\}$. Тогда каждая функция из $A(M)$ непрерывно дифференцируема и, как следует из (11), множество $A(M)$ равномерно ограничено. Докажем, что множество $A(M)$ равномерно непрерывно. Действительно, пусть число $\varepsilon > 0$ задано. Выберем такое положительное число δ , что $\delta \leq \frac{\varepsilon}{R}$.

Тогда для каждой функции $x = x(t) \in M$ и произвольных точек t_1, t_2 отрезка $[0; 1]$, удовлетворяющих неравенству $|t_1 - t_2| < \delta$, имеем

$$|x'(t_1) - x'(t_2)| = |x''(\tau)| |t_1 - t_2| < R\delta \leq \varepsilon$$

(здесь τ — некоторая точка интервала $(t_1; t_2)$). Следовательно, по теореме Арцеля, множество $A(M)$ компактно. Поэтому оператор $A : C^{(2)}[0; 1] \rightarrow C[0; 1]$ вполне непрерывен.

5. Пусть ядро $k(t, s)$, определенное на множестве $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$, где $\mathcal{D}$ — замкнутая ограниченная область пространства $\mathbb{R}^m$, представляется в виде $k(t, s) = \frac{k_1(t, s)}{\rho^\alpha(t, s)}$, где $k_1(t, s)$ — непрерывная на множестве $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ функция, а $\rho(t, s)$ — расстояние между точками t и s пространства $\mathbb{R}^m$.

Доказать, что если $\alpha < m$, то интегральный оператор

$$(Ax)(t) = \int_{\mathcal{D}} k(t, s) x(s) ds,$$

отображающий пространство $C(\mathcal{D})$ непрерывных функций в себя, является компактным.

Решение. Поскольку функция $k_1(t, s)$ непрерывна на замкнутом ограниченном множестве $\mathcal{D} \times \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{2m}$, то существует такое положи-

тельное число v , что $|k_1(t, s)| \leq v$ для всех точек $(t, s) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}$. Очевидно, на основании того, что $\alpha < m$, оператор A определен на всех непрерывных в области $\mathcal{D}$ функциях.

Рассмотрим ограниченное множество $M \subset C(\mathcal{D})$. Тогда найдется такое положительное число L , что $\|x\| = \max_{t \in \mathcal{D}} |x(t)| \leq L$ для

всех функций $x = x(t)$ из M . Докажем прежде всего, что образ $A(M)$ множества M при отображении A является ограниченным (по норме пространства $C(\mathcal{D})$) множеством. Действительно, для произвольной функции $x = x(t) \in M$ имеем

$$|(Ax)(t)| = \left| \int_{\mathcal{D}} \frac{k_1(t, s)}{\rho^\alpha(t, s)} x(s) ds \right| \leq vL \int_{\mathcal{D}} \frac{ds}{\rho^\alpha(t, s)} \leq vL \int_{S_R} \frac{ds}{\rho^\alpha(t, s)}, \quad t \in \mathcal{D},$$

где S_R — шар радиуса R с центром в начале координат, содержащий $\mathcal{D}$. Вычислим интеграл $\int_{S_R} \frac{ds}{\rho^\alpha(t, s)}$, переходя к сферическим

координатам: $ds = ds_1 \dots ds_m = r^{m-1} dr d\sigma_m$, где $r = \rho(t, s)$,

$$d\sigma_m = \sin^{m-2}\theta_1 \sin^{m-3}\theta_2 \dots \sin \theta_{m-2} d\theta_1 \dots d\theta_{m-2} d\varphi,$$

$|\sigma_m|$ — площадь поверхности единичной сферы σ_m пространства $\mathbb{R}_m$. Тогда

$$\int_{S_R} \frac{ds}{\rho^\alpha(t, s)} \leq \int_0^{2R} r^{m-1-\alpha} dr \int_{\sigma_m} d\sigma_m = \frac{(2R)^{m-\alpha}}{m-\alpha} |\sigma_m|. \quad (12)$$

Следовательно,

$$\|Ax\| = \max_{t \in \mathcal{D}} |(Ax)(t)| \leq vL \frac{(2R)^{m-\alpha}}{m-\alpha} |\sigma_m|,$$

т. е. множество $A(M)$ ограничено в смысле нормы пространства $C(\mathcal{D})$.

Докажем, что это множество равномерно непрерывно. Отсюда, в частности, будет следовать, что если $x = x(t) \in C(\mathcal{D})$, то и $Ax \in C(\mathcal{D})$. Пусть $\eta > 0$ — достаточно малое число и $S_\eta(t) = \{s \in \mathcal{D} : \rho(s, t) < \eta\}$. Для точек t и $t + \Delta t$, принадлежащих $\mathcal{D}$, имеем

$$\begin{aligned} |(Ax)(t + \Delta t) - (Ax)(t)| &\leq \int_{\mathcal{D} \setminus S_\eta(t)} \left| \left[\frac{k_1(t + \Delta t, s)}{\rho^\alpha(t + \Delta t, s)} - \frac{k_1(t, s)}{\rho^\alpha(t, s)} \right] \right| |x(s)| ds + \\ &+ \int_{\bar{S}_\eta(t)} \frac{|k_1(t + \Delta t, s)| |x(s)|}{\rho^\alpha(t + \Delta t, s)} ds + \int_{\bar{S}_\eta(t)} \frac{|k_1(t, s)| |x(s)|}{\rho^\alpha(t, s)} ds \leq \\ &\leq L \int_{\mathcal{D} \setminus S_\eta(t)} \left| \frac{k_1(t + \Delta t, s)}{\rho^\alpha(t + \Delta t, s)} - \frac{k_1(t, s)}{\rho^\alpha(t, s)} \right| ds + \\ &+ Lv \int_{\bar{S}_\eta(t)} \frac{ds}{\rho^\alpha(t + \Delta t, s)} + Lv \int_{\bar{S}_\eta(t)} \frac{ds}{\rho^\alpha(t, s)}, \end{aligned} \quad (13)$$

где $\rho(t + \Delta t, t) \leq \frac{\eta}{2}$. Вычисляя и оценивая два последних интеграла так же, как и при оценке (12), получаем

$$Lv \left(\int_{\bar{S}_{\eta}(t)} \frac{ds}{\rho^{\alpha}(t + \Delta t, s)} + \int_{\bar{S}_{\eta}(t)} \frac{ds}{\rho^{\alpha}(t, s)} \right) \leq \frac{Lv |\sigma_m|}{m - \alpha} [(3\eta)^{m-\alpha} + (2\eta)^{m-\alpha}].$$

Поэтому для произвольного $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое $\eta_0 > 0$, что

$$\begin{aligned} Lv \left(\int_{\bar{S}_{\eta_0}(t)} \frac{ds}{\rho^{\alpha}(t + \Delta t, s)} + \int_{\bar{S}_{\eta_0}(t)} \frac{ds}{\rho^{\alpha}(t, s)} \right) &\leq \\ &\leq \frac{Lv |\sigma_m|}{m - \alpha} [(3\eta_0)^{m-\alpha} + (2\eta_0)^{m-\alpha}] < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Поскольку непрерывная функция $\frac{k_1(t, s)}{\rho^{\alpha}(t, s)}$ равномерно непрерывна на замкнутом множестве $\bar{S}_{\eta_0}(t) \times (\mathcal{D} \setminus S_{\eta_0}(t))$, то имеется такое $\delta' > 0$, что из неравенства $\rho(t + \Delta t, t) < \delta'$ следует

$$\left| \frac{k_1(t + \Delta t, s)}{\rho^{\alpha}(t + \Delta t, s)} - \frac{k_1(t, s)}{\rho^{\alpha}(t, s)} \right| < \frac{\varepsilon}{2L\mu_m(\mathcal{D})} \quad (\forall s \in \mathcal{D} \setminus S_{\eta_0}(t)), \quad (15)$$

где $\mu_m(\mathcal{D})$ — мера Лебега области $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$. Тогда если в качестве положительного δ взять $\delta \leq \min(\eta_0, \delta')$, то из неравенств (13), (14) и (15) при $\rho(t + \Delta t, t) < \delta$ следует, что

$$|(Ax)(t + \Delta t) - (Ax)(t)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad (\forall x \in M, \forall t \in \mathcal{D}).$$

Таким образом, множество $A(M)$ равномерно непрерывно и поэтому оно компактно.

Следовательно, заданный оператор $A : C(\mathcal{D}) \rightarrow C(\mathcal{D})$ является вполне непрерывным. Например, оператор $A : C[0; 1] \rightarrow C[0; 1]$, определенный с помощью равенства

$$(Ax)(t) = \int_0^1 \frac{x(s) ds}{\sqrt[3]{|\cos t - \cos s|}},$$

компактен. В этом случае $m = 1$, $\rho(t, s) = |t - s|$, $k_1(t, s) = \frac{\sqrt[3]{|t - s|}}{\sqrt[3]{|\cos t - \cos s|}}$, $\alpha = \frac{1}{3}$.

Замечание. Компактность заданного оператора A можно получить, используя теорему 1. Для этого рассмотрим последовательность операторов

$$(A_n x)(t) = \int_{\mathcal{D}} \frac{k_1(t, s) x(s)}{\rho^{\alpha}(t, s) + \frac{1}{n}} ds, \quad x = x(t) \in C(\mathcal{D}).$$

Поскольку ядра операторов A_n являются непрерывными функциями на множестве $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$, то, как и в примере 1, каждый из них вполне непрерывен. Далее,

проводя рассуждения, аналогичные тем, которыми мы пользовались для получения неравенств (13) — (15), приходим к выводу, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A - A_n\| = 0$.

Рекомендуем читателю доказать компактность оператора A этим путем самостоятельно.

6. Пусть число $p > 1$ и q — ему сопряженное, т. е. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Рассмотрим оператор $A: l_p \rightarrow l_q$, который определяется формулой

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \xi_j, \quad x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l_p,$$

где числовая матрица $(a_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$ такая, что двойной ряд $\sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q$ сходится. Доказать, что оператор A вполне непрерывен.

Решение. Докажем, что оператор A , действительно, отображает пространство l_p в l_q . Согласно неравенству Гельдера, для произвольной точки $x \in l_p$ имеем

$$\|Ax\|_q^q = \sum_{i=1}^{\infty} |(Ax)_i|^q = \sum_{i=1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \xi_j \right|^q \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q \right) \|x\|_p^q,$$

т. е.

$$\|Ax\|_q \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q \right)^{\frac{1}{q}} \|x\|_p \quad (\forall x \in l_p). \quad (16)$$

Неравенство (16) позволяет заключить также, что линейный оператор A ограничен.

Пусть теперь M — произвольное ограниченное множество в пространстве l_p . Тогда существует такое положительное число R , что $\|x\|_p \leq R$ для всех $x \in M$, а из (16) получаем неравенство

$$\|Ax\|_q \leq R \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad (\forall x \in M),$$

из которого следует, что множество $A(M)$ ограничено в l_q . Согласно теореме 16 из гл. 2, § 1, чтобы проверить компактность множества $A(M)$, надо для произвольного $\varepsilon > 0$ найти такой номер n_0 , что $\sum_{i=n_0}^{\infty} |(Ax)_i|^q < \varepsilon$ ($\forall x \in M$). Поэтому рассмотрим любое $\varepsilon > 0$. Тогда

из сходимости двойного ряда $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q$ следует существование такого номера n_0 , что $\sum_{i=n_0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q < \frac{\varepsilon}{R^q}$.

Докажем, что найденный номер n_0 является искомым. Действительно,

$$\sum_{i=n_0}^{\infty} |(Ax)_i|^q = \sum_{i=n_0}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \xi_j \right|^q \leq \left(\sum_{i=n_0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q \right) \|x\|_p^q < \frac{\varepsilon}{R^q} R^q = \varepsilon.$$

Поэтому множество $A(M)$ компактно и, следовательно, оператор A вполне непрерывен.

7. Рассмотрим оператор $A: l_p \rightarrow l_p$ ($p > 1$), определенный с помощью формулы

$$Ax = (\alpha_1 \xi_1, \alpha_2 \xi_2, \dots), \quad x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l_p,$$

где $(\alpha_j)_{j=1}^\infty$ — заданная последовательность чисел. Какой должна быть последовательность $(\alpha_j)_{j=1}^\infty$, чтобы оператор A был:

а) ограниченным; б) вполне непрерывным?

Решение. а) Покажем, что оператор A является ограниченным тогда и только тогда, когда последовательность $(\alpha_j)_{j=1}^\infty$ ограничена. Действительно, пусть вначале $(\alpha_j)_{j=1}^\infty$ ограничена, т. е. существует такое положительное число L , что $|\alpha_j| \leq L$, для всех номеров j . Тогда

$$\|Ax\|^p = \sum_{j=1}^\infty |\alpha_j \xi_j|^p \leq L^p \|x\|^p \quad (\forall x \in l_p), \quad (17)$$

т. е. оператор A является ограниченным и $\|A\| \leq L$.

Пусть теперь оператор A ограничен, а последовательность $(\alpha_j)_{j=1}^\infty$ неограничена. Тогда для произвольного натурального числа n найдется номер j_n такой, что $|\alpha_{j_n}| > n$. Рассмотрим вектор e_{j_n} из единичного шара пространства l_p , все координаты которого равны нулю, кроме j_n -й, которая равна единице. Тогда $\|Ae_{j_n}\| = \sqrt[p]{|\alpha_{j_n}|} > \sqrt[p]{n}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$). Следовательно, $\sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = +\infty$, что противоречит ограниченности оператора A .

б) Докажем, что оператор A является вполне непрерывным тогда и только тогда, когда $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$. Покажем, что оператор A компактен. Пусть множество $M \subset l_p$ ограничено, т. е. существует такое положительное число R , что $\|x\| \leq R$ для всех $x \in M$. Поскольку в этом случае оператор A ограничен (см. п. а)), то он отображает ограниченное множество M в ограниченное множество $A(M)$. Рассмотрим произвольное число $\varepsilon > 0$. Тогда из условия $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ следует существование такого номера n_0 , начиная с которого $|\alpha_n| < \frac{\sqrt[p]{\varepsilon}}{R}$. Поэтому для каждой точки $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in M$ имеем

$$\sum_{j=n_0}^\infty |(Ax)_j|^p = \sum_{j=n_0}^\infty |\alpha_j|^p |\xi_j|^p < \frac{\varepsilon}{R^p} \sum_{j=n_0}^\infty |\xi_j|^p \leq \frac{\varepsilon}{R^p} \sum_{j=1}^\infty |\xi_j|^p \leq \varepsilon,$$

т. е., согласно теореме 16 из гл. 2 § 1, множество $A(M)$ компактно. Следовательно, оператор A вполне непрерывен.

Пусть теперь A — компактный оператор. Тогда он ограничен и, согласно пункту а), последовательность $(\alpha_j)_{j=1}^\infty$ также ограничена. Рассмотрим для каждого натурального номера n вектор $e_n \in l_p$, у которого все координаты, кроме n -й, равны нулю, а n -я координата

равна единице. Тогда $e_n \neq 0$ и $Ae_n = \alpha_n e_n$. Следовательно, все числа α_n являются собственными значениями компактного оператора A . Поэтому, согласно теореме 8, их предел равен нулю, т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$.

8. Пусть H — гильбертово пространство, $A \in \mathcal{L}(H)$ и A^*A — вполне непрерывный оператор. Доказать, что оператор A также вполне непрерывен.

Решение. Пусть M — произвольное ограниченное множество гильбертова пространства H . Тогда существует такое положительное число R , что $\|x\| \leq R$ для каждого $x \in M$. Рассмотрим множество $(A^*A)(M)$ — образ множества M при отображении $A^*A : H \rightarrow H$. Согласно условию, оно является компактным. Поэтому для каждой последовательности $(x_n)_{n=1}^\infty$ точек из M существует сходящаяся подпоследовательность $(A^*(Ax_{n_k}))_{k=1}^\infty$. Значит, эта подпоследовательность фундаментальна, т. е. $\lim_{k, l \rightarrow \infty} \|A^*A(x_{n_k} - x_{n_l})\| = 0$. Покажем, что подпоследовательность $(Ax_{n_k})_{k=1}^\infty$ последовательности $(Ax_n)_{n=1}^\infty$ также фундаментальна, а поэтому вследствие полноты пространства H она является сходящейся в H . Действительно, для произвольных номеров k и l имеем

$$\begin{aligned} \|A(x_{n_k} - x_{n_l})\|^2 &= (A(x_{n_k} - x_{n_l}), A(x_{n_k} - x_{n_l})) = \\ &= (A^*A(x_{n_k} - x_{n_l}), x_{n_k} - x_{n_l}). \end{aligned}$$

Отсюда, применяя к последнему скалярному произведению неравенство Коши — Буняковского, получаем

$$\|A(x_{n_k} - x_{n_l})\|^2 \leq 2R \|A^*A(x_{n_k} - x_{n_l})\| \quad (\forall k, l \in \mathbb{N}),$$

т. е. $\lim_{k, l \rightarrow \infty} \|A(x_{n_k} - x_{n_l})\| = 0$. Таким образом, оператор A отображает каждое ограниченное множество в компактное и, следовательно, является вполне непрерывным.

Как указывалось ранее, если оператор A компактный, то оператор A^*A также компактный. Следовательно, учитывая рассмотренный пример, можно утверждать, что компактность оператора $A : H \rightarrow H$ равносильна компактности оператора A^*A .

9. Пусть $(e_k)_{k=1}^\infty$ — ортонормированный базис гильбертова пространства H , а Y — банахово пространство. Доказать, что если $A : H \rightarrow Y$ — такой линейный непрерывный оператор, что ряд $\sum_{k=1}^\infty \|Ae_k\|^2$ сходится, а A — компактный оператор.

Решение. По заданному оператору A построим последовательность операторов $A_n : H \rightarrow Y$, $n \in \mathbb{N}$, следующим образом. Вначале зададим A_n на элементах базиса $(e_k)_{k=1}^\infty$ с помощью равенства: $A_n e_k = Ae_k$, если $k \leq n$, и $A_n e_k = 0$, если $k > n$.

Тогда распространим по линейности оператор A_n на все пространство H , полагая для произвольного вектора $x = \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k$ из H

$$A_n x = \sum_{k=1}^n (x, e_k) A e_k.$$

Отсюда следует, что каждый оператор A_n является оператором конечного ранга. Поэтому все эти операторы A_n , $n \in \mathbb{N}$, компактны.

Докажем, что последовательность операторов $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится к оператору A равномерно, т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A - A_n\| = 0$. Действительно, в

силу непрерывности A для каждого $x \in H$ $Ax = \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) A e_k$, и поэтому

$$\|Ax - A_n x\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} (x, e_k) A e_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |(x, e_k)| \|A e_k\| \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Тогда, применяя к последней сумме неравенство Коши — Буняковского (ведь $\sum_{k=n+1}^{\infty} |(x, e_k)|^2 \leq \|x\|^2$ и $\sum_{k=n+1}^{\infty} \|A e_k\|^2 < +\infty$), получаем

$$\|(A - A_n)x\| \leq \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |(x, e_k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \|A e_k\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \|A e_k\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|x\|$$

$$(\forall x \in H).$$

Отсюда следует, что $\|A - A_n\| \leq \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \|A e_k\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$

Поскольку по условию ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \|A e_k\|^2$ сходится, то имеем

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} \|A e_k\|^2 = 0$, и поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A - A_n\| = 0$. Тогда, согласно теореме 1, оператор A компактен, как и все A_n , $n \in \mathbb{N}$.

Отметим, что $A_n = A P_n$, где P_n — проекционный оператор на подпространство L_n , натянутое на векторы $e_1, \dots, e_n$ (при каждом $n \in \mathbb{N}$).

10. Пусть E — бесконечномерное банахово пространство и $A: E \rightarrow E$ — вполне непрерывный оператор. Доказать, что существует такое $y \in E$, что уравнение первого рода $Ax = y$ не имеет решения.

Решение. Если множество значений $R(A)$ оператора A конечномерно, т. е. оператор A имеет конечный ранг, то $R(A) \neq E$, и поэтому для каждого $y \in E \setminus R(A)$ уравнение $Ax = y$ не имеет решения.

Более интересен случай, когда $R(A)$ бесконечномерно. Докажем, что тогда $R(A)$ не является замкнутым множеством. Предположим противное, т. е. что $R(A) = \overline{R(A)}$. Поскольку E — полное нормированное пространство, то замкнутое линейное многообразие $R(A) \subset E$ само является банаховым пространством. Далее, представим пространство E в виде объединения шаров $S_n(0)$, $n \in \mathbb{N}$, радиуса n с

центром в точке $x = 0 \cdot E = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n(0)$. Тогда $R(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} AS_n(0)$.

Но каждое множество $AS_n(0)$ компактно, поскольку оператор A вполне непрерывный, а шар $S_n(0)$ — ограниченное множество. Кроме того, известно (см. следствие из теоремы 6, гл. 2, § 3), что в бесконечномерном пространстве каждое компактное множество нигде не плотно. Таким образом, полное нормированное пространство $R(A)$ представлено в виде объединения счетного числа нигде не плотных множеств. Это приводит к противоречию с теоремой Бэра о категориях (см. теорему 9, гл. 2, § 1). Поэтому, действительно, множество $R(A)$ не является замкнутым.

Но поскольку множество E замкнуто, то $E \neq R(A)$ и, следовательно, существует такое $y \in E \setminus R(A)$, что уравнение $Ax = y$ не имеет решения.

11. Пусть A — линейный непрерывный оператор, отображающий нормированное пространство E_1 в линейное нормированное пространство E_2 , и существует непрерывный обратный оператор $A^{-1} : E_2 \rightarrow E_1$. Доказать, что оператор $A^* : E_2^* \rightarrow E_1^*$ имеет непрерывный обратный $(A^*)^{-1} : E_1^* \rightarrow E_2^*$ и $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Решение. Известно, что каждый линейный непрерывный оператор имеет сопряженный оператор, который также линейный и непрерывный. Поэтому существуют операторы A^* и $(A^{-1})^*$, являющиеся линейными и непрерывными в соответствующих пространствах. Надо только доказать, что существует непрерывный обратный $(A^*)^{-1}$ и что справедливо равенство $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Согласно определению сопряженного оператора, для произвольных $x \in E_1$ и $f \in E_2^*$ имеем $\langle Ax, f \rangle = \langle x, A^*f \rangle$. Отсюда, положив $x = A^{-1}y$, где $y \in E_2$, получим следующее тождество:

$$\langle y, f \rangle = \langle A^{-1}y, A^*f \rangle = \langle y, (A^{-1})^*A^*f \rangle \quad (\forall y \in E_2, \forall f \in E_2^*).$$

Тогда, как следует из теоремы Хана — Банаха, $(A^{-1})^*A^*f = f$ для произвольного функционала f из E_2^* . Следовательно, оператор A^* имеет левый обратный, совпадающий с $(A^{-1})^*$.

Аналогично, исходя из равенства $\langle A^{-1}y, g \rangle = \langle y, (A^{-1})^*g \rangle$, верного для произвольных $y \in E_2$ и $g \in E_1^*$, приходим к тождеству $(A^*)(A^{-1})^*g = g$. Следовательно, оператор A^* имеет правый обратный, также совпадающий с $(A^{-1})^*$. Поэтому оператор $A^* : E_2^* \rightarrow E_1^*$ обратим и его обратный $(A^*)^{-1}$ равен оператору $(A^{-1})^*$. Кроме того, оператор $(A^*)^{-1}$ является линейным и непрерывным.

12. Пусть H — гильбертово пространство и $A : H \rightarrow H$ — линейный непрерывный оператор. Доказать справедливость равенств:

$$\begin{aligned} \text{а) } (R(A))^{\perp} &= \ker A^*; & \text{б) } (R(A^*))^{\perp} &= \ker A; \\ \text{в) } (\ker A)^{\perp} &= \overline{R(A^*)}; & \text{г) } (\ker A^*)^{\perp} &= \overline{R(A)}, \end{aligned}$$

где $R(A)$ — множество значений оператора A , $\ker A$ — ядро опера-

тора A , т. е. $\ker A = \{x \in H : Ax = 0\}$, $L^\perp$ — ортогональное дополнение к многообразию L .

Решение. Отметим, что многообразия $\ker A$ и $\ker A^*$ нулей операторов A и A^* являются замкнутыми множествами, поскольку A (а поэтому и A^*) — непрерывный оператор. Вместе с тем, как следует из примера 10, многообразия $R(A)$ и $R(A^*)$ не всегда замкнуты.

а) Докажем вначале, что $(R(A))^\perp \subset \ker A^*$. Пусть элемент $z \in (R(A))^\perp$, т. е. $(z, Ax) = 0$ для каждого $x \in H$. Тогда, используя определение сопряженного оператора, имеем

$$(A^*z, x) = 0 \quad (\forall x \in H). \quad (18)$$

Поскольку лишь нулевой элемент ортогонален всем векторам пространства H , то $A^*z = 0$ и $z \in \ker A^*$.

Если, наоборот, $z \in \ker A^*$, то справедливо также равенство (18), из которого следует, что $z \in (R(A))^\perp$. Таким образом, действительно, $(R(A))^\perp = \ker A^*$.

б) Доказательство приведенного соотношения следует из а), если в роли A взять A^* и воспользоваться тем, что $A^{**} = A$.

в) Отметим, что ортогональность вектора z многообразию L равносильна его ортогональности многообразию $\bar{L}$, т. е. замыканию L . Это свойство следует из непрерывности скалярного произведения. Поэтому, согласно теореме о разложении гильбертова пространства H в прямую сумму его подпространств, имеем равенства

$$H = \ker A \oplus (\ker A)^\perp, \quad H = \overline{R(A^*)} \oplus (R(A^*))^\perp.$$

Отсюда, учитывая доказанное в б) свойство $(R(A^*))^\perp = \ker A$, получаем $\overline{R(A^*)} = (\ker A)^\perp$.

г) Доказывается аналогично равенству в).

Замечание. Пусть E — линейное нормированное пространство, L — произвольное его подмножество, а $L^\perp = \{f \in E^* : \langle x, f \rangle = 0, \forall x \in L\}$. Как и при доказательстве пункта а), можно проверить, что если $A \in \mathcal{L}(E)$, где E — банахово пространство, то $(R(A))^\perp = \ker A^*$.

13. Найти сопряженный оператор A^* к оператору A , если:

а) $A : L_2[0; 1] \rightarrow L_2[0; 1]$ и $(Ax)(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau$;

б) $A : l_p \rightarrow l_p$, $p \geq 1$, и $Ax = (\alpha_1 \xi_1, \alpha_2 \xi_2, \dots)$,

где $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l_p$, а $(\alpha_j)_{j=1}^\infty$ — ограниченная последовательность;

в) $A : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ и $(Ax)(t) = a(t)x(t+h)$, где $a(t)$ — ограниченная на $\mathbb{R}$ и измеримая по Лебегу функция, а $h \in \mathbb{R}$.

Решение. а) Оператор A является линейным и непрерывным, отображающим комплексное гильбертово пространство $L_2[0; 1]$ в себя. Поэтому для определения сопряженного оператора $A^* : L_2[0; 1] \rightarrow L_2[0; 1]$ рассмотрим произвольную функцию $y = y(t) \in$

$\in L_2[0; 1]$. Тогда

$$\begin{aligned}(Ax, y) &= \int_0^1 (Ax)(t) \cdot \overline{y(t)} dt = \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^t x(\tau) d\tau \right) \overline{y(t)} dt = \int_0^1 \left(\int_0^t x(\tau) \overline{y(t)} d\tau \right) dt\end{aligned}$$

или, если поменять порядок интегрирования,

$$\begin{aligned}(Ax, y) &= \int_0^1 x(t) \left(\int_t^1 \overline{y(\tau)} d\tau \right) dt = \int_0^1 x(t) \cdot \overline{(A^*y)(t)} dt = (x, A^*y) \\ &(\forall x, y \in L_2[0; 1]).\end{aligned}$$

Следовательно, сопряженный оператор A^* определяется соотношением

$$(A^*y)(t) = \int_t^1 y(\tau) d\tau, \quad y \in L_2[0; 1].$$

Из сравнения операторов A и A^* видно, что, A не является самосопряженным оператором.

б) Пусть $p > 1$. Тогда, как было показано в примере 7, оператор A является линейным и непрерывным. Напомним, что $l_p^* = l_q$, где q — число, сопряженное с p . Иными словами, результат $\langle x, f \rangle$ действия функционала $f \in l_p^*$ на элемент $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l_p$ записывается с помощью формулы $\langle x, f \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \bar{f}_i$, где $f = (f_1, f_2, \dots) \in l_q$ (считаем, что пространство l_p комплексное).

Теперь, согласно определению сопряженного оператора, имеем

$$\langle Ax, f \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i \bar{f}_i = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \overline{\alpha_i f_i} = \langle x, A^*f \rangle \quad (\forall x \in l_p, \forall f \in l_q).$$

Отсюда $A^*f = (\bar{\alpha}_1 f_1, \bar{\alpha}_2 f_2, \dots)$, если $f = (f_1, f_2, \dots) \in l_q$.

При $p = 1$ оператор A непрерывен также лишь тогда, когда последовательность $(\alpha_i)_{i=1}^{\infty}$ ограничена.

Напомним, что $l_1^* = m$, т. е. сопряженным к l_1 является пространство всех ограниченных последовательностей. Рассуждая аналогично, получаем $A^*f = (\bar{\alpha}_1 f_1, \bar{\alpha}_2 f_2, \dots)$, если $f = (f_1, f_2, \dots) \in m$. Таким образом, оператор A является самосопряженным только тогда, когда все α_i — действительные числа.

в) При сделанных предположениях относительно функции $a(t)$ оператор A является линейным и непрерывным и $\|A\| \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} |a(t)|$.

Тогда, проведя в интеграле

$$(Ax, y) = \int_0^1 a(t) x(t+h) \overline{y(t)} dt \quad (x, y \in L_2(\mathbb{R}))$$

замену $t + h = \tau$, получаем

$$(Ax, y) = \int_R x(\tau) \overline{a(\tau - h)} y(\tau - h) d\tau = (x, A^*y) \quad (\forall x, y \in L_2(\mathbb{R})).$$

Отсюда следует, что $(A^*y)(t) = \overline{a(t - h)} y(t - h) \quad (\forall y \in L_2(\mathbb{R}))$.

14. Пусть H — комплексное гильбертово пространство и $A: H \rightarrow H$ — самосопряженный оператор. Доказать, что существует обратный оператор к оператору $I + iA$, определенный на многообразии $R(I + iA)$.

Решение. Линейный непрерывный оператор $I + iA$ отображает гильбертово пространство H на многообразие $R(I + iA)$ — множество значений оператора $I + iA$. Чтобы доказать существование обратного оператора к $I + iA$, надо проверить, что ядро $\ker(I + iA)$ оператора $I + iA$ состоит только из нуля. Поэтому пусть $x \in H$ и $(I + iA)x = 0$. Тогда $Ax = ix$ и $i(x, x) = (Ax, x) = (x, ix) = -i(x, x)$.

Отсюда следует, что $\|x\| = \sqrt{(x, x)} = 0$, т. е. $x = 0$. Таким образом, $\ker(I + iA) = \{0\}$ и оператор $I + iA$ имеет обратный $(I + iA)^{-1}: R(I + iA) \rightarrow H$.

15. Пусть H — гильбертово пространство и $A: H \rightarrow H$ — вполне непрерывный оператор. Доказать, что тогда существуют (не обязательно полные) ортонормированные системы $\{f_n\}_{n=1}^N$ и $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$, а также положительные вещественные числа $(\lambda_n)_{n=1}^N$ такие, что

$$Ax = \sum_{n=1}^N \lambda_n (x, f_n) \varphi_n.$$

Отметим, что N может быть как конечным числом, так и символом $+\infty$. Числа λ_n называются *сингулярными числами оператора A* .

Решение. Поскольку A — компактный оператор, то оператор A^*A также является компактным. Кроме того, он самосопряженный, поскольку $(A^*A)^* = A^*(A^*)^* = A^*A$. Поэтому по теореме Гильберта — Шмидта существует полная ортонормированная система (базис собственных векторов оператора A^*A) $\{f_n\}_{n=1}^N \cup \{f'_n\}_{n=1}^M$ такая, что для $n = 1, 2, \dots, N$ имеем $A^*A f_n = \mu_n f_n$, где $\mu_n \neq 0$, и $A^*A f'_n = 0$ для каждого $n = 1, 2, \dots, M$.

Отметим, что N и M могут быть как конечными, так и бесконечными. Неравенство $(Ax, Ax) = (A^*Ax, x) \geq 0$ для всех x позволяет утверждать, что оператор A^*A положителен. Тогда $\mu_n > 0$ для всех $n = 1, 2, \dots, N$.

Пусть $\lambda_n = \sqrt{\mu_n}$, а $\varphi_n = \frac{A f_n}{\lambda_n}$, где $n = 1, 2, \dots, N$. Проверим, что система $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ является ортонормированной. Действительно, $(\varphi_n, \varphi_m) = \frac{1}{\lambda_n \lambda_m} (A^*A f_n, f_m) = \frac{\mu_n}{\lambda_n \lambda_m} (f_n, f_m) = \delta_{n,m}$ для произвольных $n, m = 1, 2, \dots, N$. Тогда для каждого $x \in H$ имеем

$$Ax = A \left(\sum_{n=1}^N (x, f_n) f_n \right) + A \left(\sum_{n=1}^M (x, f'_n) f'_n \right) = \sum_{n=1}^N (x, f_n) A f_n = \sum_{n=1}^N \lambda_n (x, f_n) \varphi_n$$

(ибо $\|Af'_n\|^2 = (A^*Af'_n, f'_n) = 0$; см. также пример 49 б)), что и требовалось доказать.

16. В пространстве l_2 рассмотрим последовательность операторов $A_n : l_2 \rightarrow l_2$, $n \in \mathbb{N}$, где

$$A_n x = (\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \dots), \quad x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l_2.$$

Доказать, что $A_n \in \mathcal{L}(l_2)$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) и $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n x = 0$ ($\forall x \in l_2$). Найти последовательность $(A_n^*)_{n=1}^\infty$. Верно ли, что $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^* x = 0$ ($\forall x \in l_2$)?

Решение. Все операторы A_n отображают l_2 в l_2 и являются линейными. Их непрерывность (т. е. ограниченность) получается из оценки:

$$\|A_n x\| = \sqrt{\sum_{j=n+1}^{\infty} |\xi_j|^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^2} = \|x\| \quad (n \in \mathbb{N}; x \in l_2),$$

т. е. $\|A_n\| \leq 1$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Докажем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 0$ в смысле сильной сходимости операторов. Поскольку для каждого $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l_2$ ряд $\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^2$ сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=n+1}^{\infty} |\xi_j|^2 = 0$.

Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n x\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} |\xi_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 0 \quad (\forall x \in l_2),$$

т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n x = 0$.

Пусть $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ и $y = (\eta_1, \eta_2, \dots)$ — произвольные элементы пространства l_2 . Тогда из равенства $(A_n x, y) = (x, A_n^* y)$ следует, что $A_n^* y = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_n, \eta_1, \eta_2, \dots)$. Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n^* y\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\eta_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|y\| \quad (\forall y \in l_2).$$

Следовательно, последовательность $(A_n)_{n=1}^\infty$ не является сильно сходящейся к нулевому оператору.

17. Рассмотрим оператор $A : C[0; 1] \rightarrow C[0; 1]$, определенный с помощью равенства

$$(Ax)(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau \quad (x = x(t) \in C[0; 1]).$$

а) Доказать, что уравнение $x - Ax = y$ имеет решение при любом $y \in C[0; 1]$.

б) Найти оператор $(I - A)^{-1}$.

Решение. Проверим, что A — компактный оператор. Пусть $M \subset C[0; 1]$ — ограниченное множество, т. е. существует такое положительное число R , что $\|x\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t)| \leq R$ для каждой функции

$x = x(t) \in M$. Тогда $\|Ax\| = \max_{0 \leq t \leq 1} \left| \int_0^t x(\tau) d\tau \right| \leq \max_{0 \leq t \leq 1} \int_0^t |x(\tau)| d\tau \leq R$

для произвольной функции $x = x(t) \in M$. Поэтому множество $A(M)$ (образ M при отображении с помощью A) является ограниченным. Покажем еще, что $A(M)$ — равномерно непрерывное множество. Пусть $x = x(t) \in M$, а $u(t) = (Ax)(t)$. Тогда функция $u = u(t)$ дифференцируема на отрезке $[0; 1]$ и $u'(t) = x(t)$ в каждой точке $t \in [0; 1]$. Поэтому, если $t_1, t_2 \in [0; 1]$ и $|t_1 - t_2| < \frac{\varepsilon}{R}$, то для произвольной функции $x = x(t) \in M$ имеем

$$\begin{aligned} |(Ax)(t_1) - (Ax)(t_2)| &= |u(t_1) - u(t_2)| = \\ &= |u'(\tau)(t_1 - t_2)| = |x(\tau)(t_1 - t_2)| < \frac{\varepsilon}{R} \cdot R = \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, множество $A(M)$ компактно и, следовательно, оператор A вполне непрерывный.

а) Согласно первой теореме Фредгольма покажем, что однородное уравнение $z - Az = 0$ имеет только нулевое решение. Действительно, из тождества

$$z(t) = \int_0^t z(\tau) d\tau \quad (0 \leq t \leq 1)$$

получаем (после дифференцирования) дифференциальное уравнение $z'(t) = z(t)$ и условие $z(0) = 0$. Следовательно, $z(t) \equiv 0$. Поэтому существует обратный оператор $(I - A)^{-1}: C[0; 1] \rightarrow C[0; 1]$, являющийся линейным и непрерывным.

б) Найдем оператор $(I - A)^{-1}$. Пусть $y = y(t)$ — произвольная функция пространства $C[0; 1]$. Найдем такую функцию $x = x(t)$ из $C[0; 1]$, что

$$x(t) - \int_0^t x(\tau) d\tau = y(t) \quad (0 \leq t \leq 1). \quad (19)$$

Для решения этого уравнения хотелось бы его продифференцировать, но $y(t)$ — произвольная непрерывная функция, и поэтому она не обязана быть дифференцируемой. Тогда ищем решение $x = x(t)$ уравнения (19) в виде $x(t) = y(t) + z(t)$, $0 \leq t \leq 1$, где $z = z(t)$ — новая неизвестная функция. Отметим, что необходимо $x(0) = y(0)$ (см. (19)) и поэтому $z(0) = 0$, а уравнение (19) приводится к виду

$$z(t) = \int_0^t y(\tau) d\tau + \int_0^t z(\tau) d\tau \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Из последнего равенства получаем, что функция $z(t)$ дифференцируема и удовлетворяет уравнению $z'(t) = y(t) + z(t)$, $0 \leq t \leq 1$. Решая это линейное уравнение методом вариации постоянной, имеем

$$z(t) = \left(C + \int_0^t y(\tau) e^{-\tau} d\tau \right) e^t, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Если учесть еще начальное условие $z(0) = 0$, то окончательно получаем $z(t) = e^t \int_0^t y(\tau) e^{-\tau} d\tau$, $0 \leq t \leq 1$. Значит,

$$x(t) = y(t) + e^t \int_0^t y(\tau) e^{-\tau} d\tau, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Следовательно, обратный оператор $(I - A)^{-1}$ найден и

$$((I - A)^{-1} y)(t) = y(t) + e^t \int_0^t y(\tau) e^{-\tau} d\tau, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Отметим, что при решении п. а) этого примера можно было не ссылаться на теорему Фредгольма, а воспользоваться существованием оператора $(I - A)^{-1}$ (см. п. б)).

18. Является ли оператор $A : L_2[0; 1] \rightarrow L_2[0; 1]$, определяемый формулой $(Ax)(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau$, нормально разрешимым?

Решение. Оператор A является линейным и непрерывным, а в примере 13 а) найден его сопряженный: $(A^*x)(t) = \int_t^1 x(\tau) d\tau$, $x = x(t) \in L_2[0; 1]$. Значит, ядро $\ker A^*$ оператора A^* состоит из тех функций $\varphi(t) \in L_2[0; 1]$, для которых

$$\int_t^1 \varphi(\tau) d\tau = 0 \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Отсюда, дифференцируя по t , находим, что $\varphi(t) = 0$ почти всюду на $[0; 1]$. Поэтому ядро $\ker A^*$ состоит только из нулевого элемента пространства $L_2[0; 1]$. Следовательно, если бы оператор A был нормально разрешимым, то для каждой функции $y(t) \in L_2[0; 1]$ уравнение

$\int_0^t x(\tau) d\tau = y(t) \quad (0 \leq t \leq 1)$ имело бы решение $x = x(t) \in$

$L_2[0; 1]$. Но интеграл $\int_0^t x(\tau) d\tau$, как известно, является абсолютно непрерывной функцией, и поэтому он не может определять все функции пространства $L_2[0; 1]$. Таким образом, оператор A не является нормально разрешимым.

19. Рассмотрим оператор $A : l_2 \rightarrow l_2$, определяемый равенством $Ax = (\xi_2, \xi_3, \dots)$ ($\forall x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l_2$).

а) Доказать, что операторы A и A^* нетеровы, и найти их индексы.

б) Доказать, что при любом $k \in \mathbb{N}$ операторы A^k и $(A^*)^k$ также нетеровы, и найти их индексы.

Решение. Оператор A является линейным и непрерывным, и поэтому он имеет сопряженный $A^* : l_2 \rightarrow l_2$. На основании тождества

$(Ax, y) = (x, A^*y)$, верного для всех $x, y \in l_2$, получаем $A^*y = (0, \eta_1, \eta_2, \dots)$ для $y = (\eta_1, \eta_2, \dots) \in l_2$.

а) Вначале покажем, что операторы A и A^* нормально разрешимы. Для этого найдем $\ker A$ и $\ker A^*$. Ядро $\ker A$ состоит из всех векторов вида $(c, 0, 0, \dots)$, где c — произвольное число, а $\ker A^* = \{0\}$. Далее, уравнение $Ax = z$ разрешимо для каждого элемента $z \in l_2$. А именно, если $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l_2$ и $z = (\zeta_1, \zeta_2, \dots) \in l_2$, то решение x уравнения $Ax = z$ имеет вид $x = (\alpha, \xi_1, \xi_2, \dots)$, где α — произвольное число. Таким образом, оператор A нормально разрешим. Что касается уравнения $A^*y = u$, где $y, u \in l_2$, то оно разрешимо лишь для тех элементов u , у которых первая координата равна нулю. Но такие элементы ортогональны ядру $\ker A$. Поэтому A^* также нормально разрешим.

Из описания ядер $\ker A$ и $\ker A^*$ следует, что $\dim \ker A = 1$, а $\dim \ker A^* = 0$. Поэтому число n нулей оператора A равно единице, а дефектное число m — нулю. Следовательно, индекс $\chi(A)$ оператора A равен единице. Для оператора A^* имеем $\chi(A^*) = 0 - 1 = -1$.

б) Оператор A^k действует на элемент $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l_2$ по формуле $A^k x = (\xi_{k+1}, \xi_{k+2}, \dots)$, а сопряженный оператор $(A^*)^k$ определяется с помощью равенства

$$(A^*)^k y = (\underbrace{0, \dots, 0}_k, \eta_1, \eta_2, \dots) \quad (\forall y = (\eta_1, \eta_2, \dots) \in l_2).$$

Поэтому ядро $\ker A^k$ состоит из множества всех элементов вида $x = (\alpha_1, \dots, \alpha_k, 0, 0, \dots)$, где числа $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ произвольные. Тогда $\dim \ker A^k = k$. Ядро $\ker (A^*)^k$ состоит только из нулевого элемента, т. е. $\dim \ker (A^*)^k = 0$. Для доказательства нормальной разрешимости оператора A^k рассмотрим уравнение $A^k x = z$, где $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ — неизвестный элемент пространства l_2 , а $z = (\zeta_1, \zeta_2, \dots)$ — заданный элемент из l_2 . Это уравнение имеет решение x для каждого $z \in l_2$, причем $x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \xi_1, \xi_2, \dots) \in l_2$. Поэтому A^k — нормально разрешимый оператор. Кроме того, он является нетеровым, и его индекс $\chi(A^k)$ равен k .

Аналогично уравнение $(A^*)^k y = u$, где y — неизвестный элемент пространства l_2 , а u — известный вектор из l_2 , разрешимо тогда и только тогда, когда первые k координаты вектора равны нулю, т. е. когда $u \perp \ker A^k$. Следовательно, оператор $(A^*)^k$ также является нетеровым, и его индекс $\chi((A^*)^k)$ равен $-k$.

20. Пусть E — комплексное нормированное пространство и $A \in \mathcal{L}(E)$. Доказать, что если оператор A^2 имеет собственный вектор, то A также имеет собственный вектор.

Решение. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ — собственное значение оператора A^2 , а $x \in E$ — соответствующий собственный вектор. Тогда справедливо равенство $A^2 x = \lambda x$, которое можно представить в виде $(A - \sqrt{\lambda} I) \times (A + \sqrt{\lambda} I) x = 0$. Если $(A + \sqrt{\lambda} I) x = 0$, т. е. $Ax = -\sqrt{\lambda} x$, то x — собственный вектор оператора A , отвечающий собственному

значению $-\sqrt{\lambda}$. Если же $y = (A + \sqrt{\lambda}I)x \neq 0$, то $(A - \sqrt{\lambda}I)y = 0$, т. е. вектор y является собственным вектором оператора A , отвечающим собственному значению $\sqrt{\lambda}$.

21. В вещественном пространстве $C[-\pi; \pi]$ найти собственные векторы и собственные значения оператора:

а) $(Ax)(t) = x(-t)$;

б) $(Ax)(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t+s)x(s)ds$.

Решение. а) Надо описать все те вещественные числа λ , для которых уравнение $Ax = \lambda x$, т. е. $x(-t) = \lambda x(t)$, имеет нетривиальное решение в пространстве $C[-\pi; \pi]$. Очевидно, если $\lambda = 1$, то каждая четная функция, а если $\lambda = -1$, то каждая нечетная функция удовлетворяют рассматриваемому уравнению. Докажем, что оператор A других собственных значений не имеет. Пусть $\lambda_0 \neq \pm 1$ — собственное значение оператора A и $x_0 = x_0(t)$ — соответствующая ему собственная функция. Тогда $x_0(-t) = \lambda_0 x_0(t)$ для всех $t \in [-\pi; \pi]$ и $x_0 \neq 0$. Отсюда, заменяя t на $-t$, имеем: $x_0(t) = \lambda_0 x_0(-t)$, где $t \in [-\pi; \pi]$. Поэтому $x_0(t) = \lambda_0^2 x_0(t)$ для каждого $t \in [-\pi; \pi]$. Но последнее невозможно, поскольку $\lambda_0^2 \neq 1$ а $x_0 \neq 0$. Следовательно, оператор A имеет только два собственных значения: $\lambda = +1$ и $\lambda = -1$. Соответствующие им собственные векторы описаны выше.

б) Надо охарактеризовать все те вещественные числа λ , для которых уравнение

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(t+s)x(s)ds = \lambda x(t), \quad -\pi \leq t \leq \pi,$$

имеет нетривиальные решения в пространстве $C[-\pi; \pi]$. Для этого ядро $\sin(t+s)$ представим в виде $\sin t \cos s + \cos t \sin s$. Поэтому надо исследовать уравнение

$$\lambda x(t) = \sin t \int_{-\pi}^{\pi} \cos s \cdot x(s)ds + \cos t \int_{-\pi}^{\pi} \sin s \cdot x(s)ds, \quad -\pi \leq t \leq \pi. \quad (20)$$

Из (20) следует, что функцию $x(t)$ (решение этого уравнения при данном λ) нужно искать в виде $x(t) = \alpha \sin t + \beta \cos t$. Подставляя это выражение для $x(t)$ в равенство (20) получаем

$$\alpha \lambda \sin t + \beta \lambda \cos t = \beta \pi \sin t + \alpha \pi \cos t, \quad -\pi \leq t \leq \pi.$$

Поскольку функции $\sin t$ и $\cos t$ линейно независимы на $[-\pi; \pi]$, то необходимо

$$\begin{cases} \alpha \lambda - \beta \pi = 0, \\ \alpha \pi - \beta \lambda = 0. \end{cases} \quad (21)$$

Поскольку собственная функция $x(t)$ должна быть отличной от нуля, то (согласно линейной независимости функций $\sin t$ и $\cos t$) это возможно лишь тогда, когда хотя бы одно из чисел α и β отлично от нуля.

Поэтому определитель системы (21) равен нулю, т. е. $\lambda_1 = \pi$ и $\lambda_2 = -\pi$. Для $\lambda_1 = \pi$ из (21) находим, что $\alpha = \beta$. Таким образом, число $\lambda_1 = \pi$ является собственным значением оператора A , а $x(t) = \alpha(\sin t + \cos t)$, $\alpha \neq 0$, — соответствующие ему собственные функции. Аналогично $\lambda_2 = -\pi$ также является собственным значением оператора A и соответствующие функции имеют вид: $x(t) = \alpha(\sin t - \cos t)$, $\alpha \neq 0$.

Докажем, что оператор A имеет также собственное значение $\lambda_3 = 0$, т. е. покажем, что уравнение $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(t+s)x(s)ds = 0$ имеет нетривиальное решение в пространстве $C[-\pi; \pi]$. Иными словами, найдем такую функцию $x = x(t) \neq 0$, что

$$\sin t \int_{-\pi}^{\pi} \cos s \cdot x(s) ds + \cos t \int_{-\pi}^{\pi} \sin s \cdot x(s) ds = 0 \quad (-\pi \leq t \leq \pi). \quad (22)$$

В силу линейной независимости функций $\sin t$ и $\cos t$ на отрезке $[-\pi; \pi]$ соотношение (22) равносильно тому, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos s \cdot x(s) ds = 0 \quad \text{и} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin s \cdot x(s) ds = 0,$$

т. е. собственными функциями будут все те непрерывные функции $x = x(t)$, $-\pi \leq t \leq \pi$, которые ортогональны (в смысле пространства $L_2[-\pi; \pi]$) к функциям $\cos t$ и $\sin t$, например: $x(t) = \cos nt$, $n = 0, 2, 3, \dots$, $x(t) = \sin nt$, $n = 2, 3, \dots$. Следовательно, $\lambda_3 = 0$ является собственным значением оператора A , а соответствующее ему собственное подпространство бесконечномерно и состоит из всех непрерывных на $[-\pi; \pi]$ функций, ортогональных в смысле $L_2[-\pi; \pi]$ к функциям $\cos t$ и $\sin t$.

22. Пусть оператор $A: C[0; 1] \rightarrow C[0; 1]$ определяется формулой $(Ax)(t) = x(0) + tx(1)$. Найти его спектр $\sigma(A)$, спектральный радиус $r_\sigma(A)$ и резольвенту $R_\lambda(A)$.

Решение. Очевидно, что A — линейный оператор. Кроме того, из неравенства

$$\|Ax\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(0) + tx(1)| \leq 2\|x\| \quad (\forall x = x(t) \in C[0; 1])$$

следует, что A ограничен, т. е. непрерывен. Нетрудно проверить, что $\|A\| = 2$.

Для определения спектра $\sigma(A)$ и резольвентного множества $\rho(A)$ найдем вначале собственные значения оператора A , т. е. найдем такие λ , что уравнение

$$x(0) + tx(1) = \lambda x(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (23)$$

имеет нетривиальное решение в пространстве $C[0; 1]$. Из (23) следует, что (при $\lambda \neq 0$) функция $x(t)$ имеет вид: $x(t) = \alpha + \beta t$. Подставляя это выражение для $x(t)$ в (23), получаем $\alpha + t(\alpha + \beta) = \lambda\alpha + \lambda\beta t$, $0 \leq t \leq 1$. Поскольку функции 1 и t линейно независимы на отрезке

[0; 1], то последнее равенство приводит к линейной системе

$$\begin{cases} (1 - \lambda) \alpha = 0, \\ \alpha + (1 - \lambda) \beta = 0. \end{cases}$$

Отсюда, так как α и β одновременно не равны нулю, следует, что $\lambda = 1$. Тогда $\alpha = 0$. Таким образом, число $\lambda = 1$ является собственным значением оператора A , а соответствующие собственные функции $x(t)$ имеют вид: $x(t) = \beta t$, где $\beta \neq 0$.

Покажем, что $\lambda = 0$ также является собственным значением оператора A . Действительно, в этом случае имеем уравнение $x(0) + tx(1) = 0$, $0 \leq t \leq 1$. Отсюда следует, что $x(1) = 0$ и $x(0) = 0$. Поэтому нетривиальным его решением будут все непрерывные функции, обращающиеся в нуль при $t = 0$ и $t = 1$.

Таким образом, оператор A имеет только два собственных значения: $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$. Покажем, что все другие точки являются регулярными точками оператора A . Пусть $\lambda \neq 0$ и $\lambda \neq 1$, а $y = y(t)$ — произвольная функция пространства $C[0, 1]$. Решим уравнение $(Ax)(t) - \lambda x(t) = y(t)$, $0 \leq t \leq 1$, т. е.

$$x(0) + tx(1) - \lambda x(t) = y(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (24)$$

в пространстве $C[0, 1]$. Подставляя в уравнение (24) вначале $t = 0$, а потом $t = 1$, получаем

$$x(0) = \frac{y(0)}{1 - \lambda}, \quad x(1) = \frac{y(1)}{1 - \lambda} - \frac{y(0)}{(1 - \lambda)^2}.$$

Из (24) для $\lambda \neq 0$ и $\lambda \neq 1$ имеем

$$x(t) = -\frac{y(t)}{\lambda} + \frac{y(0)}{\lambda(1 - \lambda)} + \frac{ty(1)}{\lambda(1 - \lambda)} - \frac{ty(0)}{\lambda(1 - \lambda)^2} \quad (0 \leq t \leq 1). \quad (25)$$

Следовательно, множеством значений оператора $A - \lambda I$ для $\lambda \neq 0$ и $\lambda \neq 1$ является все пространство и этот оператор имеет обратный, определенный формулой (25), т. е.

$$\begin{aligned} ((A - \lambda I)^{-1} y)(t) = & -\frac{y(t)}{\lambda} + \frac{y(0)}{\lambda(1 - \lambda)} + \\ & + \frac{ty(1)}{\lambda(1 - \lambda)} - \frac{ty(0)}{\lambda(1 - \lambda)^2} \quad (\forall y = y(t) \in C[0, 1]). \end{aligned}$$

Непосредственно видно, что этот оператор непрерывен (это следует из теоремы Банаха об обратном операторе), и поэтому он является резольвентой оператора A . Таким образом, для каждого $\lambda \neq 0$ и $\lambda \neq 1$ существует резольвента, причем

$$\begin{aligned} (R_\lambda(A)y)(t) = & -\frac{y(t)}{\lambda} + \frac{y(0)}{\lambda(1 - \lambda)} + \\ & + \frac{ty(1)}{\lambda(1 - \lambda)} - \frac{ty(0)}{\lambda(1 - \lambda)^2} \quad (\forall y = y(t) \in C[0, 1]). \end{aligned}$$

Поэтому спектр $\sigma(A)$ состоит только из чисел $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$, которые являются собственными значениями оператора A , а, следовательно, непрерывный спектр $\sigma_c(A)$ и остаточный спектр $\sigma_r(A)$ отсутствуют.

Согласно теореме 12, спектральный радиус оператора A не может быть меньше 1 (расстояние от начала координат до ближайшей особой точки $\lambda = 1$ резольвенты) и, кроме того, $r_\sigma(A)$ является радиусом наименьшего круга, с центром в точке $\lambda = 0$, содержащего спектр оператора. Поэтому $r_\sigma(A) = 1$.

23. Пусть E — комплексное банахово пространство и $A : E \rightarrow E$ — линейный непрерывный оператор. Доказать, что если для комплексного числа λ существует такая нормированная последовательность $(x_n)_{n=1}^\infty$ точек из E ($\|x_n\| = 1, \forall n \in \mathbb{N}$), что $\lim_{n \rightarrow \infty} (Ax_n - \lambda x_n) = 0$, то $\lambda \in \sigma(A)$.

Решение. Действительно, если $\lambda \notin \sigma(A)$, то $\lambda \in \rho(A)$ и оператор $A - \lambda I$ имеет непрерывный обратный $(A - \lambda I)^{-1} : E \rightarrow E$. Поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (A - \lambda I)^{-1} (Ax_n - \lambda x_n) = 0$, что противоречит равенству $\|x_n\| = 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

24. Найти точечный $\sigma_p(A)$, непрерывный $\sigma_o(A)$ и остаточный $\sigma_r(A)$ спектры оператора $A : C[0; 1] \rightarrow C[0; 1]$, если A определяется равенством

$$(Ax)(t) = \int_0^t x(s) ds, \quad x = x(t) \in C[0; 1].$$

Найти эти части спектра для оператора A , действующего из $L_1[0; 1]$ в $L_1[0; 1]$ или из $C_0[0; 1]$ в $C_0[0; 1]$, где $C_0[0; 1]$ — пространство всех непрерывных функций на $[0; 1]$, обращающихся в нуль в точке $t = 0$ с нормой $\|x\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t)|$.

Решение. Рассмотрим вначале оператор $A : C[0; 1] \rightarrow C[0; 1]$. Его точечный спектр $\sigma_p(A)$ состоит из собственных значений этого оператора. Поэтому надо найти такие λ , что уравнение

$$\int_0^t x(s) ds = \lambda x(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (26)$$

имеет ненулевые решения в пространстве $C[0; 1]$. Если $\lambda \neq 0$, то поскольку левая часть этого уравнения является дифференцируемой функцией, то таковой будет и $x(t)$. Следовательно, дифференцируя (26) по t , находим, что (26) равносильно такой задаче Коши для $t \in [0; 1] : x(t) = \lambda x'(t), x(0) = 0$. Отсюда следует, что $x(t) = 0$ для каждого $t \in [0; 1]$. Поэтому оператор A не имеет собственных значений, отличных от нулевого.

Исследуем точку $\lambda = 0$. Для этого надо найти ненулевую функцию $x = x(t)$ из $C[0; 1]$, удовлетворяющую уравнению

$$\int_0^t x(s) ds = 0, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Дифференцируя последнее равенство, получаем $x(t) = 0$ для всех t из отрезка $[0; 1]$. Таким образом, оператор A не имеет ни одного собственного значения. Но поскольку он вполне непрерывен (см. пример 17),

Следовательно, все точки λ , для которых $|\lambda| = 1$, составляют непрерывную часть спектра $\sigma_c(A)$. Остаточная часть спектра $\sigma_r(A)$ по-прежнему отсутствует.

27. Пусть $A: H \rightarrow H$ — самосопряженный оператор в комплексном гильбертовом пространстве H . Доказать, что для такого оператора точечная часть спектра отсутствует.

Решение. Пусть λ — точка спектра оператора A , не являющаяся собственным значением A . Тогда, по теореме 14, число λ — действительное, и поэтому оператор $A - \lambda I$ — также самосопряженный. Поскольку λ не является собственным значением оператора A , то ядро $\mathcal{R}(A - \lambda I)$ состоит только из точки нуль. Но тогда из примера 12 следует, что множество значений $\mathcal{R}(A - \lambda I)$ оператора $A - \lambda I$ всюдуотно. Поэтому $\overline{\mathcal{R}(A - \lambda I)} = H$ и, следовательно, точка λ принадлежит непрерывной части спектра $\sigma_c(A)$ оператора A .

28. Пусть A — самосопряженный оператор, отображающий комплексное гильбертово пространство H в себя, и множество значений $(A - \lambda I)$ оператора $A - \lambda I$ совпадает с H , т. е. $\mathcal{R}(A - \lambda I) = H$. Показать, что $\lambda \in \rho(A)$.

Решение. Если число λ не является действительным, то, как известно, $\lambda \notin \rho(A)$. Поэтому можно считать, что λ — действительное. Покажем вначале, что рассматриваемое число не может быть собственным значением оператора A . Пусть, наоборот, существует вектор $\neq 0$ в пространстве H , являющийся собственным вектором оператора A , отвечающим собственному значению λ , т. е. $Ax_0 = \lambda x_0$. Тогда для произвольного вектора $y \in H$ найдем (согласно условию) $x \in H$, $y = Ax - \lambda x$. Поэтому

$$(x_0, y) = (x_0, Ax - \lambda x) = (Ax_0 - \lambda x_0, x) = 0 \quad (\forall y \in H)$$

$0 = 0$. Полученное противоречие доказывает, что данное λ не является собственным значением оператора A . Значит, непрерывный оператор $A - \lambda I$ отображает гильбертово пространство H на себя инъективно однозначно. По теореме Банаха об обратном операторе существует обратный оператор $(A - \lambda I)^{-1}: H \rightarrow H$, также являющийся линейным и непрерывным. Следовательно, $\lambda \in \rho(A)$.

29. Пусть H — гильбертово пространство, линейный оператор $H \rightarrow H$ определен на всем пространстве H и является симметричным, т. е. $(Ax, y) = (x, Ay)$ для произвольных элементов $x, y \in H$. Показать, что оператор A ограничен. (Это утверждение называется леммой Хеллингера — Теплица.)

Решение. Первый способ. Доказательство проведем от противного. Пусть существует такая последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ топологического пространства H , нормы которых равны единице ($\|x_n\| = 1$, $n \in \mathbb{N}$), что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Ax_n\| = +\infty$. Рассмотрим на пространстве H

последовательность линейных функционалов $\mathcal{F}_n(x) = (Ax, x_n)$, $x \in H$. Поскольку оператор A симметричный, то $\mathcal{F}_n(x) = (x, Ax_n)$, $x \in H$. Поэтому по теореме Рисса об общем виде функционала на H каждый функционал $\mathcal{F}_n$ является линейным и непрерывным, причем $\|\mathcal{F}_n\| =$

$= \|Ax_n\|$. Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Ax_n\| = +\infty$, то последовательность $(\mathcal{F}_n)_{n=1}^\infty$ неограничена.

Однако, для каждого фиксированного $x \in H$ имеем неравенства $|\mathcal{F}_n(x)| \leq \|Ax\| \cdot \|x_n\| = \|Ax\| \ (\forall n \in \mathbb{N})$, означающие, что для любого $x \in H$ последовательность $(\mathcal{F}_n(x))_{n=1}^\infty$ ограничена. Тогда по теореме Банаха — Штейнгауза нормы $\|\mathcal{F}_n\|$ функционалов $\mathcal{F}_n$ ограничены. Полученное противоречие завершает доказательство утверждения.

Второй способ. Утверждение этой задачи может быть получено и с помощью теоремы 20 (гл. 3, § 3) о замкнутом графике. В самом деле, из симметричности A следует, что если $x_n \rightarrow x$ и $Ax_n \rightarrow x'$, то для каждого $y \in H$ $(x', y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (Ax_n, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, Ay) = (x, Ay) = (Ax, y)$. Поэтому $x' = Ax$ и A — замкнутый оператор. Значит, A ограничен в H .

30. Рассмотрим оператор $A : C[0; 1] \rightarrow C[0; 1]$, полагая $(Ax)(t) = \frac{dx}{dt}$, с областью определения $\mathcal{D}(A)$ — линейным многообразием непрерывно дифференцируемых на $[0; 1]$ функций $x(t)$, удовлетворяющих условиям $x(0) = x(1) = 0$. Доказать, что A — замкнутый оператор.

Решение. Определение замкнутого оператора A для отображений банаховых пространств аналогично соответствующему определению для гильбертовых пространств. А именно, пусть E_1 и E_2 — банаховы пространства и A — линейный оператор с областью определения $\mathcal{D}(A) \subset E_1$ и множеством значений $R(A) \subset E_2$. Тогда оператор A называется замкнутым, если из $x_n \in \mathcal{D}(A)$ ($n \in \mathbb{N}$), $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, и

$\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = y$ следует, что $x \in \mathcal{D}(A)$ и $y = Ax$.

Заданный оператор A является линейным. Для доказательства его замкнутости допустим, что последовательность $(x_n = x_n(t))_{n=1}^\infty$, $0 \leq t \leq 1$, из области определения $\mathcal{D}(A)$ сходится в $C[0; 1]$ к функции $x = x(t) \in C[0; 1]$, а последовательность функций $y_n = (Ax_n)(t) = x'_n(t)$, $0 \leq t \leq 1$, сходится в $C[0; 1]$ к некоторой функции $y = y(t) \in C[0; 1]$. Поскольку сходимость в пространстве $C[0; 1]$ равномерная, то $x_n(t) \rightarrow x(t)$ на $[0; 1]$ и $y_n(t) = x'_n(t) \rightarrow y(t)$ на $[0; 1]$. Тогда, согласно известной из математического анализа теореме о почленном дифференцировании функциональной последовательности, функция $x = x(t)$, $0 \leq t \leq 1$, непрерывно дифференцируема и $x'(t) = y(t)$ для произвольного $t \in [0; 1]$. Кроме того, поскольку все $x_n(t)$ удовлетворяют условию $x_n(0) = x_n(1) = 0$, то таковой является и функция $x(t)$. Следовательно, функция $x = x(t)$ принадлежит множеству $\mathcal{D}(A)$ и $y(t) = (Ax)(t)$, $0 \leq t \leq 1$. Поэтому оператор A замкнутый.

31. Рассмотрим оператор $A : L_2[0; 1] \rightarrow L_2[0; 1]$, полагая $(Ax)(t) = tx(0)$, с областью определения $\mathcal{D}(A)$ — линейным многообразием непрерывных на $[0; 1]$ функций. Найти область определения

$\mathcal{D}(A^*)$ сопряженного оператора A^* и оператор A^* . Показать, что оператор A не замкнут и, более того, он не допускает замыкания.

Решение. Поскольку область определения $\mathcal{D}(A)$ всюду плотна в $L_2[0; 1]$, то сопряженный оператор A^* существует. Для его определения надо описать все пары функций $y = y(t)$ и $y^* = y^*(t)$ из пространства $L_2[0; 1]$, для которых выполняется равенство

$$(Ax, y) = (x, A^*y) \quad (\forall x \in \mathcal{D}(A)),$$

т. е.

$$\int_0^1 tx(0) \overline{y(t)} dt = \int_0^1 x(t) \overline{y^*(t)} dt \quad (\forall x \in \mathcal{D}(A)). \quad (27)$$

Если в (27) взять $x(t) = t^n$, $0 \leq t \leq 1$, для $n \in \mathbb{N}$, то $\int_0^1 t^n \overline{y^*(t)} dt = 0$ ($\forall n \in \mathbb{N}$), т. е. функция $y^*(t)$ ортогональна всем функциям t^n , $n \in \mathbb{N}$.

Покажем, что $y^*(t)$ ортогональна также функции $x(t) = 1$. Для этого рассмотрим последовательность функций

$$x_n(t) = \begin{cases} 1, & \frac{1}{n} \leq t \leq 1, \\ nt, & 0 \leq t \leq \frac{1}{n}, \end{cases}$$

принадлежащих области $\mathcal{D}(A)$. Тогда, положив в (27) $x(t) = x_n(t)$, получаем

$$\int_0^{\frac{1}{n}} nt \overline{y^*(t)} dt + \int_{\frac{1}{n}}^1 \overline{y^*(t)} dt = 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Устремив в последнем равенстве n к бесконечности, имеем $\int_0^1 \overline{y^*(t)} dt = 0$. Таким образом, функция $y^*(t)$ ортогональна всем функциям полной в $L_2[0; 1]$ системы $(t^n)_{n=0}^\infty$. Поэтому $y^*(t) = 0$ почти всюду на $[0; 1]$, т. е. $y^* = 0$. Но тогда из (27) следует, что $\int_0^1 ty(t) dt = 0$.

Следовательно, область определения $\mathcal{D}(A^*)$ сопряженного оператора A^* состоит из тех функций $y = y(t) \in L_2[0; 1]$, для которых $\int_0^1 ty(t) dt = 0$. Оператор A^* таким функциям $y \in \mathcal{D}(A^*)$ сопоставляет $y^* = 0$.

Докажем, что оператор A не допускает замыкания. Пусть, наоборот, A допускает замыкание и B — такой замкнутый оператор, что

$A \subset B$. Рассмотрим последовательность функций

$$x_n(t) = \begin{cases} 1 - nt, & 0 \leq t \leq \frac{1}{n}, \\ 0, & \frac{1}{n} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

принадлежащих области $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$. Тогда нетрудно проверить, что $x_n \rightarrow 0$ в пространстве $L_2[0; 1]$ и $(Bx_n)(t) = (Ax_n)(t) = t \rightarrow t$ в смысле $L_2[0; 1]$. На основании того, что B замкнут, имеем $(B0)(t) = t, 0 \leq t \leq 1$. Это противоречит линейности оператора B , поскольку для линейного оператора $B0 = 0$. Следовательно, оператор A не допускает замыкания в пространстве $L_2[0; 1]$.

32. Пусть H — комплексное гильбертово пространство, реализованное в виде $L_2[0; 1]$, а $A = i \frac{d}{dt}$ — линейный оператор, определенный на совокупности $\mathcal{D}(A) \subset L_2[0; 1]$ всех абсолютно непрерывных на $[0; 1]$ функций $x = x(t)$, у которых производная x' принадлежит $L_2[0; 1]$ и для которых $x(0) = x(1) = 0$. Доказать, что оператор A является замкнутым и симметричным. Найти сопряженный оператор A^* .

Решение. Для доказательства замкнутости оператора A допустим, что имеется такая последовательность $(x_n(t))_{n=1}^{\infty}$ функций из $\mathcal{D}(A)$, для которой в смысле сходимости в $L_2[0; 1]$ существуют пределы $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = x(t)$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} (Ax_n)(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} ix_n'(t) = iy(t)$. Рассмотрим для каждого $t \in [0; 1]$ характеристическую функцию $\chi_{[0;t]}(\tau), 0 \leq \tau \leq 1$. Тогда ввиду непрерывности скалярного произведения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ix_n'(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} i \int_0^t x_n'(\tau) d\tau = i \int_0^t y(\tau) d\tau \quad (\forall t \in [0; 1]),$$

и поскольку для произвольного $n \in \mathbb{N}$ выполняется равенство $x_n(1) = 0$, то $\int_0^1 y(\tau) d\tau = 0$. В силу единственности предела получаем (возможно изменяя значения функции $x(t)$ на множестве лебеговой меры нуль) $x(t) = \int_0^t y(\tau) d\tau (\forall t \in [0; 1])$. Отсюда следует, что функция $x = x(t), 0 \leq t \leq 1$, абсолютно непрерывна, $x(0) = 0, x(1) = 0$ и $x'(t) = y(t)$ для каждого $t \in [0; 1]$. Таким образом, функция $x = x(t) \in \mathcal{D}(A)$ и $(Ax)(t) = ix'(t)$. Поэтому оператор A замкнут.

Покажем, что оператор A является симметричным. Рассмотрим произвольные функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ из области $\mathcal{D}(A)$. Тогда, интегрируя по частям, имеем

$$(Ax, y) = \int_0^1 ix'(t) \overline{y(t)} dt = ix(t) \overline{y(t)} \Big|_0^1 - \int_0^1 ix(t) \overline{y'(t)} dt = (x, Ay).$$

Поэтому оператор A симметричен.

Поскольку область определения $\mathcal{D}(A)$ всюду плотна в H , то существует сопряженный оператор A^* . Найдем его. Для этого охарактеризуем все те пары функций $y = y(t)$ и $y^* = y^*(t)$ пространства $L_2[0; 1]$, для которых выполняется тождество $(Ax, y) = (x, y^*)$ для всех $x = x(t) \in \mathcal{D}(A)$, т. е.

$$\int_0^1 ix'(t) \overline{y(t)} dt = \int_0^1 x(t) \overline{y^*(t)} dt \quad (\forall x \in \mathcal{D}(A)). \quad (28)$$

Поскольку $L_2[0; 1] \subset L_1[0; 1]$, то рассмотрим первообразную $Y^*(t) = \int_0^t y^*(\tau) d\tau$, $0 \leq t \leq 1$. Интегрируя правую часть формулы (28) по частям, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 x(t) \overline{y^*(t)} dt &= \int_0^1 x(t) d\overline{Y^*(t)} = \\ &= x(t) \overline{Y^*(t)} \Big|_0^1 - \int_0^1 x'(t) \overline{Y^*(t)} dt = - \int_0^1 x'(t) \overline{Y^*(t)} dt. \end{aligned}$$

Поэтому тождество (28) запишем в виде

$$\int_0^1 x'(t) [\overline{Y^*(t)} - i\overline{y(t)}] dt = 0 \quad (\forall x \in \mathcal{D}(A)). \quad (29)$$

Очевидно, если $Y^*(t) - iy(t) = C = \text{const}$, то (29) выполняется. Наоборот, покажем, что если функция $\varphi = \varphi(t) \in L_2[0; 1]$ такая, что

$$\int_0^1 x'(t) \overline{\varphi(t)} dt = 0 \quad (\forall x \in \mathcal{D}(A)), \quad (30)$$

то φ постоянна на $[0; 1]$. В явном деле, рассмотрим такую функцию $x(t) = \int_0^t \varphi(\tau) d\tau - ct$, где постоянную c подберем так, чтобы

$x(1) = 0$, т. е. положим $c = \int_0^1 \varphi(\tau) d\tau$. Тогда $x(t) \in \mathcal{D}(A)$. Поэтому, подставляя вместо x это значение в равенство (30), имеем

$$0 = \int_0^1 [\varphi(t) - c] \overline{\varphi(t)} dt = \int_0^1 [\varphi(t) - c] \overline{[\varphi(t) - c]} dt.$$

Значит, $\varphi(t)$ — почти всюду постоянная функция или, изменяя ее значения на множестве меры нуль, $\varphi(t) \equiv \text{const}$ ($\forall t \in [0; 1]$).

Тогда из (29) имеем, что $Y^*(t) = iy(t)$ для всех $t \in [0; 1]$, т. е.

$$\int_0^t y^*(\tau) d\tau = iy(t) \quad (\forall t \in [0; 1]).$$

Отсюда следует, что функция $y = y(t)$, $0 \leq t \leq 1$, абсолютно непрерывна на $[0; 1]$ и $y^*(t) = iy'(t)$, $0 \leq t \leq 1$. Следовательно, пара y и y^* , удовлетворяющая тождеству (28), характеризуется тем, что функция y абсолютно непрерывна на $[0; 1]$, производная которой принадлежит $L_2[0; 1]$, а $y^*(t) \equiv (A^*y)(t) = iy'(t)$. Тогда совокупность всех таких y составляет линейное многообразие $\mathcal{D}(A^*)$, которое является областью определения оператора A^* , и $(A^*y)(t) = iy'(t)$ для каждой функции $y = y(t) \in \mathcal{D}(A^*)$.

Этот пример показывает, что для неограниченных операторов понятия симметричного и самосопряженного оператора различны.

33. Пусть A — вполне непрерывный самосопряженный оператор, отображающий комплексное гильбертово пространство H в себя. Построить спектральное семейство $\{E_\lambda\}$, $\lambda \in [m; M + \varepsilon)$, этого оператора A и проверить справедливость формулы спектрального разложения $A = \int_m^{M+\varepsilon} \lambda dE_\lambda$ оператора A .

Решение. По теореме Гильберта — Шмидта для оператора A имеются последовательность $(\lambda_n)_{n=1}^\infty$ собственных значений и полная ортонормированная в H система $(e_n)_{n=1}^\infty$ соответствующих собственных векторов, причем $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$. Таким образом, для каждого $x \in H$ справедливо равенство

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x, e_n) e_n. \quad (31)$$

Кроме того, все собственные значения этого оператора и число нуль, если оно не является собственным значением A , составляют спектр $\sigma(A)$ оператора A . Поэтому все остальные точки отрезка $[m, M + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ и $m = \inf_{\|x\| \leq 1} (Ax, x)$, $M = \sup_{\|x\| \leq 1} (Ax, x)$, принадлежат множеству $\rho(A)$. Тогда, согласно свойствам спектрального семейства $\{E_\lambda\}$, $\lambda \in [m; M + \varepsilon)$, только в точках спектра $\sigma(A)$ функция E_λ имеет точки разрыва, причем в точке $\lambda = \lambda_k$ оператор E_λ является проектором на соответствующее собственное подпространство. Исходя из этого, искомое семейство строится следующим образом:

$$E_\lambda x = \begin{cases} \sum_{\lambda_k < \lambda} (x, e_k) e_k, & \lambda \leq 0, \\ x - \sum_{\lambda_k \geq \lambda} (x, e_k) e_k, & \lambda > 0. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что для каждого $\lambda \in [m; M + \varepsilon)$ оператор E_λ — проекционный и выполняются все условия разложения единицы. Кроме того, согласно свойствам интегралов Стильеса,

$$\int_m^{M+\varepsilon} \lambda dE_\lambda x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x, e_n) e_n \quad (\forall x \in H).$$

Поэтому на основании формулы (31) этот интеграл совпадает с Ax ,

$$\text{т. е. } Ax = \int_m^{M+\varepsilon} \lambda dE_\lambda x \quad (\forall x \in H).$$

Следовательно, построенное семейство $\{E_\lambda\}$, $\lambda \in [m; M + \varepsilon)$, является спектральным семейством оператора A .

34. Пусть $H = L_2 [0; 1]$ — комплексное гильбертово пространство, $(Ax)(t) = ix'(t)$ — оператор, определенный на линейном многообразии $\mathcal{D}(A) \subset L_2 [0; 1]$ абсолютно непрерывных на $[0; 1]$ функций $x = x(t)$, производная которых $x'(t)$ принадлежит $L_2 [0; 1]$, и удовлетворяющих граничному условию $x(0) = x(1)$. Доказать, что оператор A является самосопряженным, и найти его спектральное разложение.

Решение. Многообразие $\mathcal{D}(A)$ всюду плотно в $L_2 [0; 1]$, и поэтому существует сопряженный оператор A^* . Найдем его. Для этого охарактеризуем все те пары $y = y(t)$ и $y^* = y^*(t)$ функций пространства $L_2 [0; 1]$, для которых выполняется тождество $(Ax, y) = (x, y^*)$ относительно $x = x(t) \in \mathcal{D}(A)$, т. е.

$$\int_0^1 ix'(t) \overline{y(t)} dt = \int_0^1 x(t) \overline{y^*(t)} dt \quad (\forall x \in \mathcal{D}(A)). \quad (32)$$

Для $y^* = y^*(t)$ введем функцию $Y^*(t) = \int_0^t y^*(\tau) d\tau$. Из этого определения следует, что $Y^*(0) = 0$ и если в (32) взять $x(t) = 1$, $0 \leq t \leq 1$, то $Y^*(1) = \int_0^1 y^*(\tau) d\tau = 0$. Поэтому для преобразования правой части формулы (32) используем метод интегрирования по частям. В результате

$$\int_0^1 x'(t) [\overline{Y^*(t)} - iy(t)] dt = 0 \quad (\forall x \in \mathcal{D}(A)).$$

Как и в примере 32, из последнего равенства следует, что функция $Y^*(t) - iy(t)$ является постоянной на отрезке $[0; 1]$. Поэтому функция $y = y(t)$, $0 \leq t \leq 1$, абсолютно непрерывна и $iy'(t) = y^*(t) \in L_2 [0; 1]$. Равенства $Y^*(t) - iy(t) = \text{const}$, $0 \leq t \leq 1$, и $Y^*(0) = Y^*(1) = 0$ позволяют заключить, что $y(0) = y(1)$. Таким образом, функция $y = y(t)$, $0 \leq t \leq 1$, является абсолютно непрерывной, ее производная $y'(t)$ принадлежит $L_2 [0; 1]$ и выполняется граничное условие $y(0) = y(1)$, т. е. область определения $\mathcal{D}(A^*)$ оператора A^* является подмножеством $\mathcal{D}(A)$. К тому же $y^*(t) = (A^*y)(t) = iy'(t)$. Поскольку, очевидно, верно и обратное утверждение, то оператор A является самосопряженным.

Как известно, неограниченный самосопряженный оператор A допускает спектральное разложение $Ax = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_\lambda x$. Чтобы его охарак-

теризовать, опишем спектральное семейство $\{E_\lambda\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, оператора A . Для этого исследуем спектр $\sigma(A)$ оператора A . Вначале найдем его собственные значения, т. е. найдем такие действительные числа λ , что уравнение $Ax = \lambda x$, т. е. $i x'(t) = \lambda x(t)$, $0 \leq t \leq 1$, имеет нетривиальное решение $x = x(t) \in \mathcal{D}(A)$. Решая это уравнение, получаем $x(t) = Ce^{-i\lambda t}$, $0 \leq t \leq 1$, где C — некоторая постоянная. Отсюда, учитывая граничное условие $x(0) = x(1)$, приходим к равенству $e^{-i\lambda} = 1$, т. е. $\lambda = -2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Поэтому собственными значениями оператора A являются действительные числа $\lambda_n = -2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, а соответствующими собственными функциями — $e_n(t) = e^{2\pi n t i}$, $0 \leq t \leq 1$. Найденная система собственных функций $(e_n(t))_{n=-\infty}^{+\infty}$ является ортонормированной и, как указывалось в гл. 2, § 4, она полная в $L_2[0; 1]$.

Покажем, что все действительные числа λ , отличные от найденных собственных значений λ_n , являются регулярными точками оператора A . Действительно, общее решение уравнения $Ax - \lambda x = y$ имеет вид

$$x(t) = e^{-i\lambda t} \left(C - i \int_0^t y(\tau) e^{i\lambda \tau} d\tau \right), \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (33)$$

Надо только подобрать постоянную C (если это возможно) так, чтобы $x(0) = x(1)$. Нетрудно проверить, что если $\lambda \neq \lambda_n$ ($\forall n \in \mathbb{Z}$), то такое C существует и оно единственно. Таким образом, оператор $(A - \lambda I)^{-1}$, если $\lambda \neq \lambda_n$ ($\forall n \in \mathbb{Z}$), отображает все пространство $L_2[0; 1]$ в себя. Кроме того, из вида общего решения (33) следует, что $(A - \lambda I)^{-1}$ непрерывен. Действительно, если последовательность $(y_n(t))_{n=1}^\infty$ функций из $L_2[0; 1]$ сходится в этом пространстве к функции $y(t)$, то, согласно непрерывности скалярного произведения,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-i\lambda t} \left(C - i \int_0^t y_n(\tau) e^{i\lambda \tau} d\tau \right) = e^{-i\lambda t} \left(C - i \int_0^t y(\tau) e^{i\lambda \tau} d\tau \right) = x(t)$$

в каждой точке $t \in [0; 1]$. Из оценки

$$\left| \int_0^t y_n(\tau) e^{i\lambda \tau} d\tau \right| \leq \left(\int_0^t |y_n(\tau)|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|y_n\| \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

следует, что последовательность $(x_n(t))_{n=1}^\infty$ ограничена некоторой постоянной на $[0; 1]$. Поэтому последовательность функций $x_n(t) = ((A - \lambda I)^{-1} y_n)(t)$, $n \in \mathbb{N}$, сходится в среднем квадратичном к функции $x(t) = ((A - \lambda I)^{-1} y)(t)$. Следовательно, оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ является непрерывным для каждого $\lambda \neq \lambda_n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Таким образом, спектр оператора $\sigma(A)$ состоит из одних только собственных значений $\lambda_n = -2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Поэтому спектральная функция E_λ , $\lambda \in \mathbb{R}$, является кусочно-постоянной и имеет разрывы только в точках λ_n , причем скачок $E_{\lambda_n+0} - E_{\lambda_n}$ является проекционным оператором на собственное подпространство оператора A , отвечающее

собственному значению λ_n . Но это подпространство одномерно и функция $e_n(t) = e^{2\pi n t i}$ образует его базис. Следовательно,

$$((E_{\lambda_n+0} - E_{\lambda_n})x)(t) = (x, e_n(t)) e_n(t) \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Тогда спектральное семейство $\{E_\lambda\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, имеет вид

$$(E_\lambda x)(t) = \sum_{\lambda_n < \lambda} (x, e_n(t)) e_n(t) \quad (x \in L_2[0, 1]).$$

Нетрудно проверить, что построенное семейство $\{E_\lambda\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, удовлетворяет всем условиям разложения единицы оператора A .

Кроме того, каждый элемент $x = x(t)$ из $L_2[0; 1]$ разлагается в ряд Фурье по базису $(e_n(t))_{n=-\infty}^{+\infty}$, т. е.

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (x, e_n(t)) e_n(t).$$

Исходя из этого, проверим справедливость спектрального разложения

$$Ax = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_\lambda x \quad (\forall x \in \mathcal{D}(A)).$$

Для этого функцию $(Ax)(t) = ix'(t)$, где $x(t) \in \mathcal{D}(A)$, разложим в ряд Фурье

$$ix'(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (ix'(t), e_n(t)) e_n(t).$$

Коэффициенты Фурье функции $ix'(t)$ по этой системе легко выразить через коэффициенты Фурье функции $x(t)$

$$\begin{aligned} (ix'(t), e_n(t)) &= i \int_0^1 x'(t) e^{-2\pi n t i} dt = ix(t) e^{-2\pi n t i} \Big|_0^1 - \\ &- 2\pi n \int_0^1 x(t) e^{-2\pi n t i} dt = \lambda_n (x(t), e_n(t)) \quad (\forall n \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Поэтому

$$(Ax)(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda_n (x(t), e_n(t)) e_n(t) \quad (\forall x \in \mathcal{D}(A)).$$

Однако, поскольку функция E_λ , $\lambda \in \mathbb{R}$, постоянная всюду, кроме точек $\lambda_n = -2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_\lambda x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda_n (E_{\lambda_n+0} - E_{\lambda_n}) x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda_n (x(t), e_n(t)) e_n(t).$$

Таким образом, для каждого $x \in \mathcal{D}(A)$ действительно имеется равенство

$$Ax = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_\lambda x.$$

Согласно свойству единственности спектрального семейства, построенная оператор-функция E_λ , $\lambda \in \mathbb{R}$, является искомой.

35. Пусть $H = L_2(\mathbb{R})$ — гильбертово пространство и $(Ax)(t) = tx(t)$ — оператор, определенный на множестве $\mathcal{D}(A) = \{x(t) \in L_2(\mathbb{R}) : tx(t) \in L_2(\mathbb{R})\}$. Доказать, что A является самосопряженным оператором, и найти его спектральное разложение.

Решение. Поскольку область определения $\mathcal{D}(A)$ содержит, например, финитные непрерывные на $\mathbb{R}$ функции, то $\mathcal{D}(A) = L_2(\mathbb{R})$. Поэтому существует сопряженный оператор A^* . Найдем его. Для этого охарактеризуем все те пары функций $y = y(t)$ и $y^* = y^*(t)$ пространства $L_2(\mathbb{R})$, которые удовлетворяют равенству $(Ax, y) = (x, y^*)$ для каждого $x \in \mathcal{D}(A)$, т. е.

$$\int_{\mathbb{R}} tx(t) \overline{y(t)} dt = \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{y^*(t)} dt \quad (\forall x = x(t) \in \mathcal{D}(A)).$$

Из последнего тождества имеем

$$\int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{[ty(t) - y^*(t)]} dt = 0 \quad (\forall x = x(t) \in \mathcal{D}(A)),$$

и так как множество $\mathcal{D}(A)$ всюду плотно в $L_2(\mathbb{R})$, то почти всюду $y^*(t) = ty(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Таким образом, функция y такая, что $ty(t) \in L_2(\mathbb{R})$ и справедливо равенство $y^*(t) = ty(t)$. Тогда $\mathcal{D}(A^*) \subseteq \mathcal{D}(A)$ и $(A^*y)(t) = ty(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Поскольку, очевидно, справедливо и обратное утверждение, то $A^* = A$, т. е. A — самосопряженный оператор.

Как и всякий самосопряженный оператор, рассматриваемый оператор A имеет спектральное семейство $\{E_\lambda\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, и справедливо спектральное разложение $Ax = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE_\lambda x$.

Найдем спектральное семейство $\{E_\lambda\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Для этого вначале охарактеризуем спектр $\sigma(A)$ оператора A . Известно, что если $\text{Im } \lambda \neq 0$, то λ является регулярным значением самосопряженного оператора A , т. е. $\lambda \in \rho(A)$. В нашем случае это очевидно. Кроме того, каждое действительное число λ есть точка спектра оператора A . Действительно, если $\lambda \in \mathbb{R}$, то из уравнения $tx(t) - \lambda x(t) = y(t)$ следует, что λ не является собственным значением и

$$((A - \lambda I)^{-1} y)(t) = \frac{y(t)}{t - \lambda}.$$

Покажем, что линейный оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ неограничен. Для этого рассмотрим последовательность $(x_n(t))_{n=1}^\infty$ функций из $\mathcal{D}(A)$ таких, что

$$x_n(t) = \begin{cases} \sqrt{n}, & \lambda \leq t \leq \lambda + \frac{1}{n}, \\ 0, & t \notin \left[\lambda; \lambda + \frac{1}{n} \right]. \end{cases}$$

Тогда $\|x_n\| = 1$ для каждого $n \in \mathbb{N}$, а для соответствующей последовательности функций $y_n(t) = (t - \lambda) x_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$, имеем

$$\|y_n\|^2 = n \int_{\lambda}^{\lambda + \frac{1}{n}} (t - \lambda)^2 dt = \frac{1}{3n^2}.$$

Следовательно, $y_n \rightarrow 0$, но $x_n = (A - \lambda I)^{-1} y_n \not\rightarrow 0$. Поэтому оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ не является непрерывным. Таким образом, спектр $\sigma(A)$ оператора A состоит из всех действительных чисел $\mathbb{R}$, т. е. $\sigma(A) = \mathbb{R}$. Ясно, что $\sigma_c(A) = \mathbb{R}$ и $\sigma_r(A) = \emptyset$.

Исходя из этого, заключаем, что интегрирование в спектральном разложении оператора A осуществляется по всей числовой оси, а спектральная функция E_λ , $\lambda \in \mathbb{R}$, не имеет интервалов постоянства и является непрерывной на $\mathbb{R}$.

Если точка $\lambda \in \mathbb{C}$ не является действительным числом, то

$$(R_\lambda(A)x)(t) = \frac{x(t)}{t - \lambda} \quad (\forall x = x(t) \in L_2(\mathbb{R})).$$

Отсюда

$$(R_\lambda(A)x, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x(t)|^2}{t - \lambda} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi(t)}{t - \lambda}, \quad x \in L_2(\mathbb{R}),$$

где $\varphi(t) = \int_{-\infty}^t |x(\tau)|^2 d\tau$ — непрерывная на $\mathbb{R}$ функция. Кроме того, из спектрального разложения оператора A следует, что

$$(R_\lambda(A)x, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(E_t x, x)}{t - \lambda}, \quad x \in L_2(\mathbb{R}).$$

Приравнявая оба выражения для $(R_\lambda(A)x, x)$, для невещественных λ имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi(t)}{t - \lambda} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(E_t x, x)}{t - \lambda}.$$

Отсюда в силу формулы обращения Стильтьеса и непрерывности на $\mathbb{R}$ функций $\varphi(t)$ и $(E_t x, x)$ следует, что $(E_t x, x) = \varphi(t)$ для каждого $t \in \mathbb{R}$. Таким образом, для каждого $x \in L_2(\mathbb{R})$

$$(E_t x, x) = \int_{-\infty}^t |x(\tau)|^2 d\tau, \quad t \in \mathbb{R},$$

и поэтому $(E_\lambda x)(t) = \chi_{(-\infty; \lambda]}(t) x(t)$, где $\chi_{(-\infty; \lambda]}$ — характеристическая функция полуинтервала $(-\infty; \lambda]$. Вычисляя интеграл $\int_{\mathbb{R}} \lambda dE_\lambda x$, на-

ходим

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \lambda dE_\lambda x \right)(t) = \int_{\mathbb{R}} \lambda d(\chi_{(-\infty; \lambda]}(t) x(t)) = tx(t).$$

При этом мы воспользовались тем, что при каждом фиксированном $t \in \mathbb{R}$ функция $g(\lambda) = \chi_{(-\infty; \lambda]}(t) x(t)$ постоянна на промежутках $(-\infty; \lambda]$ (она равна здесь $x(t)$) и $(\lambda; +\infty)$ (где $g(\lambda) = 0$).

Задачи для самостоятельной работы

1. Какие из следующих операторов $A : C[0; 1] \rightarrow C[0; 1]$ являются вполне непрерывными:

а) $(Ax)(t) = tx(t)$;

б) $(Ax)(t) = \int_0^t \tau x(\tau) d\tau$;

в) $(Ax)(t) = x(0) + tx\left(\frac{1}{2}\right) + t^2x(1)$;

г) $(Ax)(t) = t \int_0^1 e^{ts} x(s) ds$;

д) $(Ax)(t) = x(t^2)$?

2. Будет ли вполне непрерывным оператор $A : C[-1; 1] \rightarrow C[-1; 1]$, определенный равенством $(Ax)(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)]$?

3. Доказать, что оператор $A : L_2[0; 1] \rightarrow L_2[0; 1]$, $(Ax)(t) = \int_0^t \tau x(\tau) d\tau$ вполне непрерывен.

4. Может ли оператор A , $(Ax)(t) = a(t)x(t)$, умножения на функцию $a(t)$ быть вполне непрерывным в пространстве $L_2[0; 1]$? А в пространстве $L_2(X, \mu)$, где μ — некоторая счетно-аддитивная мера на множестве X ?

5. Пусть $\mathcal{D}$ — ограниченная замкнутая область в $\mathbb{R}^m$ и функция $k(t, s)$, определенная на $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$, удовлетворяет условиям:

1) существует постоянная C , что

$$\int_{\mathcal{D}} |k(t, s)| ds \leq C \quad (\forall t \in \mathcal{D});$$

2) для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из неравенства $|t_1 - t_2| < \delta$ ($t_1, t_2 \in \mathcal{D}$) следует

$$\int_{\mathcal{D}} |k(t_1, s) - k(t_2, s)| ds < \varepsilon.$$

Доказать, что интегральный оператор $A : C(\mathcal{D}) \rightarrow C(\mathcal{D})$,

$$(Ax)(t) = \int_{\mathcal{D}} k(t, s)x(s) ds,$$

вполне непрерывен.

6. Пусть $\mathcal{D}$ — ограниченная область в $\mathbb{R}^m$ и ядро $k(t, s)$, определенное на $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$, представимо в виде

$$k(t, s) = \frac{k_1(t, s)}{\rho^\alpha(t, s)},$$

где $k_1(t, s)$ — ограниченная измеримая по Лебегу на $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ функция, а $\rho(t, s)$ — расстояние между точками t и s пространства $\mathbb{R}^m$. Доказать, что если $\alpha < \frac{m}{2}$, то

интегральный оператор $A: L_2(\mathscr{D}) \rightarrow L_2(\mathscr{D})$,

$$(Ax)(t) = \int_{\mathscr{D}} \frac{k_1(t, s)}{\rho^\alpha(t, s)} x(s) ds,$$

вполне непрерывен.

7. Доказать, что если ядро $k(t, s)$ представимо в виде

$$k(t, s) = \frac{k_1(t, s)}{|t - s|},$$

где непрерывная функция $k_1(t, s)$ отлична от нуля хотя бы в одной точке диагонали $t = s$, то интегральный оператор $A: C[0; 1] \rightarrow C[0; 1]$, определяемый соотношением

$$(Ax)(t) = \int_0^1 \frac{k_1(t, s)}{|t - s|} x(s) ds,$$

не является вполне непрерывным.

Являются ли вполне непрерывными следующие операторы $A: C[0; 1] \rightarrow C[0; 1]$? А если рассматривать A как отображение пространства $L_2[0; 1]$ в себя? (см. задачи 8—14):

$$8. (Ax)(t) = \int_0^1 x(s) ds.$$

$$9. (Ax)(t) = \int_0^1 [s \sin t + s^2 \cos t] x(s) ds.$$

$$10. (Ax)(t) = \int_0^1 \frac{x(s) ds}{V|\sin t - \sin s|}.$$

$$11. (Ax)(t) = \int_0^1 \frac{x(s)}{s - \frac{1}{2}} ds.$$

$$12. (Ax)(t) = \int_0^1 \frac{x(s)}{\sin(t-s)} ds.$$

$$13. (Ax)(t) = \int_0^1 \frac{x(s)}{|t-s|^\alpha} ds.$$

$$14. (Ax)(t) = \int_0^1 \frac{x(Vs)}{s^{\frac{5}{4}}} ds.$$

15. Пусть оператор A определен на многообразии $\mathscr{D}(A)$ дважды непрерывно дифференцируемых на $[a; b]$ функций $x = x(t)$ формулой

$$(Ax)(t) = \int_a^b k(t, s) x''(s) ds,$$

где $k(t, s) \in C^{(2)}([a; b] \times [a; b])$. Доказать, что A продолжается до вполне непрерывного оператора $A: C[a; b] \rightarrow C[a; b]$.

16. Доказать, что оператор вложения $A: C^{(1)}[a; b] \rightarrow C[a; b]$, действующий по формуле $Ax = x$, где $x = x(t) \in C^{(1)}[a; b]$, является вполне непрерывным.

17. Пусть $A: l_1 \rightarrow l_1$ — линейный оператор, определенный с помощью формулы

$$Ax = \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{1j} \xi_j, \sum_{j=1}^{\infty} a_{2j} \xi_j, \dots \right), \quad x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l_1.$$

Доказать, что если $\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| < C = \text{const}$ ($i = 1, 2, \dots$) и эти ряды сходятся

ся равномерно по i , т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует номер n_0 такой, что

$$\sum_{j=n_0}^{\infty} |a_{ij}| < \varepsilon \text{ для всех } i \in \mathbb{N}, \text{ то оператор } A \text{ вполне непрерывен.}$$

18. При каких α, β и $\gamma > 0$ оператор $A : C[0; 1] \rightarrow C[0; 1]$, определяемый формулой

$$(Ax)(t) = \int_0^1 t^{\alpha} s^{\beta} x(s^{\gamma}) ds,$$

является вполне непрерывным?

19. При каких α, β и $\gamma > 0$ оператор $A : L_2[0; 1] \rightarrow L_2[0; 1]$, определяемый формулой

$$(Ax)(t) = \int_0^1 t^{\alpha} s^{\beta} x(s^{\gamma}) ds,$$

является вполне непрерывным?

20. Рассмотрим оператор $A : L_2[0; 1] \rightarrow L_2[0; 1]$, определенный с помощью формулы

$$(Ax)(t) = \int_0^1 k(t, s) x(s^{\alpha}) ds, \quad x = x(t) \in L_2[0; 1],$$

где $k(t, s) \in C([0; 1] \times [0; 1])$. Доказать, что при $0 < \alpha < 2$ оператор A вполне непрерывен.

21. Рассмотрим оператор $A : C[0; 1] \rightarrow C[0; 1]$, определенный формулой

$$(Ax)(t) = \int_0^1 k(t, s) x(s^{\alpha}) ds, \quad x = x(t) \in C[0; 1],$$

где $k(t, s) \in C([0; 1] \times [0; 1])$. При каких α он является вполне непрерывным?

22. Доказать, что любой ограниченный линейный оператор $A : l_2 \rightarrow l_1$ является вполне непрерывным.

23*. Доказать, что если банахово пространство E рефлексивно, то любой оператор $A \in \mathcal{L}(E, l_1)$ вполне непрерывен.

24. Доказать, что любой вполне непрерывный оператор $A : l_2 \rightarrow l_2$ представим в виде $A = A_1 + A_2$, где A_1 — оператор конечного ранга и $\|A_2\| < 1$.

25. Доказать, что вполне непрерывный оператор $A : E_1 \rightarrow E_2$, где E_1 и E_2 — банаховы пространства, переводит слабо сходящуюся последовательность пространства E_1 в последовательность пространства E_2 , сходящуюся по норме.

26. Доказать, что если E_1 — рефлексивное банахово пространство, а E_2 — банахово, то линейный оператор $A : E_1 \rightarrow E_2$, который переводит слабо сходящуюся последовательность в сильно сходящуюся, является вполне непрерывным.

27. Доказать, что область значений $R(A)$ вполне непрерывного оператора A , отображающего нормированное пространство E_1 в нормированное пространство E_2 , является сепарабельным множеством.

28. Доказать, что оператор ортогонального проектирования в гильбертовом пространстве вполне непрерывен тогда и только тогда, когда его область значений конечномерна.

29. Будет ли вполне непрерывным оператор вложения $A : l_1 \rightarrow l_2$, т. е. $Ax = x$ для $x \in l_1$?

30. Пусть E — одно из пространств l_p ($p \geq 1$), m, c, c_0 . Рассмотрим такой оператор $A : E \rightarrow E$, что для $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in E$ $Ax = (\eta_1, \eta_2, \dots)$, где $\eta_j = 0$, если j — нечетное, и $\eta_j = \xi_{j-1}$, если j — четное. Доказать, что A не является вполне непрерывным оператором, хотя A^2 — вполне непрерывен.

31. Пусть E_1 и E_2 — банаховы пространства, $A : E_1 \rightarrow E_2$ — вполне непрерывный оператор, $B \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ и множество значений $R(B)$ оператора B содержится в множестве значений $R(A)$ оператора A . Доказать, что B также вполне непрерывен.

82. Пусть E_1 и E_2 — линейные нормированные пространства, а последовательность $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ вполне непрерывных операторов, отображающих E_1 в E_2 , сильно сходится к оператору $A : E_1 \rightarrow E_2$. Следует ли отсюда, что A вполне непрерывен?

33. Доказать, что любой оператор $A \in \mathcal{L}(H)$, где H — гильбертово пространство, является сильным пределом последовательности вполне непрерывных операторов.

34. Пусть $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис гильбертова пространства H , а последовательность действительных чисел $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ ограничена. Для $x \in H$ положим

$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x, e_n) e_n$. Доказать, что оператор A является ограниченным на H . При каких λ_n он вполне непрерывен?

35. Пусть $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис гильбертова пространства H и $A : H \rightarrow H$ — вполне непрерывный оператор. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} A e_n = 0$.

36. Пусть H — гильбертово пространство, $A : H \rightarrow H$ — линейный непрерывный оператор. Доказать эквивалентность следующих утверждений:

а) если $x_n, x, y_n, y \in H$ ($n \in \mathbb{N}$) и $x_n \rightarrow x$ ($n \rightarrow \infty$) слабо, $y_n \rightarrow y$ ($n \rightarrow \infty$) слабо, то $\lim_{n \rightarrow \infty} (Ax_n, y_n) = (Ax, y)$;

б) если $x_n, x \in H$ ($n \in \mathbb{N}$), $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ слабо, то $\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = Ax$;

в) A — вполне непрерывен.

37. Пусть H — гильбертово пространство, $A : H \rightarrow H$ — вполне непрерывный оператор, $M \subset H$ — замкнутое ограниченное выпуклое множество. Доказать, что:

а) образ множества M замкнут в H ;

б) для любого $y \in H$ существует такое $x_0 \in M$, что

$$\inf_{x \in M} \|Ax - y\| = \|Ax_0 - y\|.$$

38. Пусть H — гильбертово пространство и оператор $A : H \rightarrow H$ вполне непрерывен. Доказать, что образ замкнутого единичного шара есть компактное в себе множество.

39. Верно ли утверждение предыдущей задачи для вполне непрерывного оператора $A : E \rightarrow E$, рассматриваемого:

а) в произвольном банаховом пространстве E ;

б) в рефлексивном банаховом пространстве E ?

40. Пусть H — гильбертово пространство, $A : H \rightarrow H$ — вполне непрерывный оператор. Доказать, что существует такое $x \in H$, $x \neq 0$, что $\|Ax\| = \|A\| \cdot \|x\|$.

41. Может ли оператор $A : C[0; 1] \rightarrow C[0; 1]$, определяемый формулой

$$(Ax)(t) = \int_0^1 \frac{k(t, s)}{\sqrt{s}} x(s) ds,$$

где $k(t, s)$ — непрерывная функция при $0 \leq t \leq 1$, $0 \leq s \leq 1$, иметь ограниченный обратный?

42. Пусть E — банахово пространство, $A \in \mathcal{L}(E)$ и существует такое положительное число m , что для любого $x \in E$ выполняется неравенство $\|Ax\| \geq m \|x\|$. Может ли оператор A быть вполне непрерывным?

43. Пусть $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в гильбертовом пространстве H . Оператор $A \in \mathcal{L}(H)$ называется оператором Гильберта — Шмидта, если величина

$\|A\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|A e_n\|^2$ конечна. Доказать, что:

а) величина $\|A\|_2$ не зависит от выбора ортонормированного базиса в H ;

б) $\|A\|_2 = \|A^*\|_2$; в) $\|A\| \leq \|A\|_2$;

г) величина $\|A\|_2$, определенная на классе операторов Гильберта — Шмидта, является нормой;

д) в пространстве $\mathcal{L}(H)$ операторы Гильберта — Шмидта образуют линейное многообразие;

е) равенство $(A, B) = \sum_{n=1}^{\infty} (Ae_n, Be_n)$ задает на классе операторов Гильберта —

Шмидта скалярное произведение;

ж) операторы Гильберта — Шмидта образуют банахово пространство относительно $\|A\|_2$;

з) всякий оператор Гильберта — Шмидта вполне непрерывен;

н) оператор $A : L_2[0; 1] \rightarrow L_2[0; 1]$, определяемый формулой

$$(Ax)(t) = \int_0^1 k(t, s) x(s) ds, \text{ где } k(t, s) \in L_2([0; 1] \times [0; 1]),$$

есть оператор Гильберта — Шмидта;

к) если A — оператор Гильберта — Шмидта и $B \in \mathcal{L}(H)$, то AB и BA — операторы Гильберта — Шмидта; при этом $\|AB\|_2 \leq \|A\|_2 \cdot \|B\|$, $\|BA\|_2 \leq \|A\|_2 \cdot \|B\|$;

л) при каком условии на последовательность $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ оператор $A : l_2 \rightarrow l_2$, где $Ax = (\lambda_1 \xi_1, \lambda_2 \xi_2, \dots)$ для $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l_2$, является оператором Гильберта — Шмидта?

м) в пространстве l_2 построить вполне непрерывный оператор, не являющийся оператором Гильберта — Шмидта.

44. Пусть H — гильбертово пространство. Оператор $A \in \mathcal{L}(H)$ называется ядерным, если он представим в виде $A = BC$, где B, C — операторы Гильберта — Шмидта. Доказать, что если A — ядерный оператор, то:

а) A — оператор Гильберта — Шмидта и, следовательно, вполне непрерывный оператор;

б) AA_0 и A_0A , где $A_0 \in \mathcal{L}(H)$, — ядерные операторы;

в) A^* — ядерный оператор;

г) для любого ортонормированного базиса $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ в H ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (Ae_n, e_n)$ абсолютно сходится.

45. В пространстве $H = l_2$ привести пример оператора Гильберта — Шмидта, не являющегося ядерным.

46. Пусть E_1, E_2 — линейные нормированные пространства, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, а $A, B \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$. Доказать, что $(\alpha A + \beta B)^* = \bar{\alpha} A^* + \bar{\beta} B^*$, где черта означает комплексное сопряжение.

47. Пусть E — линейное нормированное пространство, $A, B \in \mathcal{L}(E)$. Доказать, что $(AB)^* = B^* A^*$.

48. Пусть E_1, E_2 — линейные нормированные пространства и $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$. Доказать, что если существует $A^{-1} \in \mathcal{L}(E_2, E_1)$, то сопряженный оператор A^* также имеет обратный, причем $(A^*)^{-1} \in \mathcal{L}(E_1^*, E_2^*)$ и $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

49. Пусть H — гильбертово пространство, $A \in \mathcal{L}(H)$, $\ker A$ — ядро оператора A , а $R(A)$ — область значений оператора A . Доказать, что:

а) $\ker(AA^*) = \ker A^*$; б) $\ker(A^*A) = \ker A$;

в) $R(AA^*) = R(A)$; г) $\|AA^*\| = \|A\|^2$.

50. Найти сопряженный к оператору $A : L_2[0; 1] \rightarrow L_2[0; 1]$, если:

а) $(Ax)(t) = tx(t)$; б) $(Ax)(t) = \int_0^1 \cos t \cdot x(s) ds$; в) $(Ax)(t) = \int_0^1 x(s) ds$.

51. Найти оператор, сопряженный к оператору $A : l \rightarrow l_1$, если:

а) $Ax = (\xi_1, \dots, \xi_n, 0, 0, \dots)$, где $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l_1$;

б) $Ax = (\lambda_1 \xi_1, \lambda_2 \xi_2, \dots)$, где последовательность $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ ограничена, $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l_1$;

в) $Ax = (0, 0, \xi_1, \xi_2, \dots)$, $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l_1$;

г) $Ax = (\xi_2, \xi_3, \dots)$, $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l_1$.

52. Найти сопряженные к операторам задачи 51, если они рассматриваются как действующие:

а) из C_0 в C_0 ; б) из l_2 в l_2 ; в) из l_1 в C_0 .

53. Найти оператор, сопряженный к оператору вложения $A: L_2 \rightarrow C_0$, $Ax = x$.

54. Найти оператор, сопряженный к оператору $A: L_2[0; 1] \rightarrow L_2[0; 1]$ если:

а) $(Ax)(t) = x(t^\alpha)$, $\alpha > 0$;

б) $(Ax)(t) = \begin{cases} x(t), & 0 \leq t \leq \lambda, \\ 0, & \lambda < t \leq 1. \end{cases}$

55. Найти оператор, сопряженный к оператору $A: L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$, если:

а) $(Ax)(t) = x(t+h)$, где h — некоторое фиксированное число;

б) $(Ax)(t) = a(t)x(t+h)$, где $a(t)$ — некоторая ограниченная измеримая функция и h — фиксированное число;

в) $(Ax)(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)]$.

56. Пусть H — гильбертово пространство. Доказать, что оператор $A \in \mathcal{L}(H)$ является самосопряженным тогда и только тогда, когда квадратичная форма $f(x) = (Ax, x)$, $x \in H$, вещественна.

57. Пусть H — гильбертово пространство. Доказать, что любой оператор $A \in \mathcal{L}(H)$ однозначно представим в виде $A = B + iC$, где B и C — самосопряженные операторы.

58. Пусть H — гильбертово пространство и $A: H \rightarrow H$ — самосопряженный оператор. Доказать, что оператор $(I + \nu iA)^{-1}$ ($\nu \neq 0$, $\nu \in \mathbb{R}$) — обратим, т. е. существует линейный оператор $(I + \nu iA)^{-1}: R(I + \nu iA) \rightarrow H$, где $R(I + \nu iA)$ — множество значений $I + \nu iA$.

59. Пусть A — вполне непрерывный оператор, отображающий бесконечномерное банахово пространство E в себя, и для каждого элемента y из множества значений $R(A)$ решение уравнения $Ax = y$ единственно. Доказать, что непрерывной зависимости решения x от правой части y для $y \in R(A)$ нет.

60. Пусть E_1 и E_2 — банаховы пространства, A — линейный ограниченный оператор из E_1 в E_2 . Для того чтобы при данном y существовало решение уравнения $Ax = y$, необходимо, чтобы $(y, f) = 0$ для любого функционала $f \in E_2^*$, удовлетворяющего уравнению $A^*f = 0$. Доказать это утверждение.

61. На примере оператора $(Ax)(t) = \int_0^t x(s) ds$, $x = x(t) \in L_2[0; 1]$, показать, что условие задачи 60 не является достаточным для разрешимости уравнения $Ax = y$.

62. Пусть оператор $A: l_2 \rightarrow l_2$ действует по формуле

$$Ax = (\lambda_1 \xi_1, \lambda_2 \xi_2, \dots), \quad x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l_2,$$

где числовая последовательность $(\lambda_n)_{n=1}^\infty$ ограничена. При каких λ_k для уравнения $Ax = y$ справедлива первая теорема Фредгольма? вторая теорема Фредгольма?

63. Пусть A — вполне непрерывный оператор, отображающий банахово пространство E в себя, $T = I - A$. Доказать, что в цепочке вложенных подпространств $\ker T \subset \ker T^2 \subset \dots$, начиная с некоторого $n \in \mathbb{N}$, выполняются равенства $\ker T^n = \ker T^{n+1} = \dots$.

64. Пусть A — вполне непрерывный оператор, отображающий банахово пространство E в себя, $T = I - A$ и m — наименьшее из целых неотрицательных чисел n , для которых $\ker T^n = \ker T^{n+1} = \dots$. Доказать, что $E = \ker T^m + R(T^m)$ и сужение оператора T на $R(T^m)$ взаимно однозначно отображает $R(T^m)$ на $R(T^m)$.

65. Пусть A — вполне непрерывный оператор, отображающий банахово пространство E в себя. Доказать, что уравнение $x - Ax = y$ разрешимо для любого $y \in E$ тогда и только тогда, когда уравнение $x - Ax = 0$ имеет только нулевое решение.

66. Доказать вторую теорему Фредгольма, используя результат задачи 65.

68. Доказать теоремы Фредгольма для уравнений вида $Bx - Ax = y$, где A — вполне непрерывный оператор, отображающий банахово пространство E в себя, а оператор $B \in \mathcal{L}(E)$ имеет непрерывный обратный $B^{-1} \in \mathcal{L}(E)$.

69. Доказать теоремы Фредгольма для уравнений вида $x - Ax = y$, где A — линейный непрерывный оператор, отображающий банахово пространство E в себя,

в случае, когда A не вполне непрерывен, но некоторая его степень A^n есть вполне непрерывный оператор.

70. Пусть A — оператор сдвига в пространстве l_2 , действующий по формуле $Ax = (0, \xi_1, \xi_2, \dots)$, $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l_2$. Доказать, что для уравнения $Ax = y$ первая теорема Фредгольма справедлива, а вторая — нет.

71. Доказать, что если оператор $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$, где E_1 и E_2 — банаховы пространства, имеет непрерывный обратный $A^{-1} \in \mathcal{L}(E_2, E_1)$, то A фредгольмов.

72. Пусть E_1 и E_2 — банаховы пространства, $A : E_1 \rightarrow E_2$ — линейный ограниченный оператор. Доказать, что для нормальной разрешимости уравнения $Ax = y$ необходимо и достаточно, чтобы область значений $R(A)$ оператора A была замкнутым множеством.

73. Пусть оператор $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$, где E_1 и E_2 — банаховы пространства, таков, что для некоторого положительного числа m выполняется неравенство $\|Ax\| \geq m\|x\|$ ($\forall x \in E_1$). Доказать, что A нормально разрешим.

74. Доказать, что $A : L_2[0; 1] \rightarrow L_2[0; 1]$, $(Ax)(t) = tx(t)$, есть неотрицательный самосопряженный оператор.

75. Доказать, что оператор $A : L_2[0; 1] \rightarrow L_2[0; 1]$,

$$(Ax)(t) = \int_0^1 e^{t+s} x(s) ds,$$

является самосопряженным и неотрицательным.

76. Пусть $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$, фиксировано. Доказать, что разностный оператор $A : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$,

$$(Ax)(t) = \frac{i}{h} \left[x\left(t + \frac{h}{2}\right) - x\left(t - \frac{h}{2}\right) \right],$$

является самосопряженным.

77. Пусть H — гильбертово пространство и $A : H \rightarrow H$ — самосопряженный оператор. Доказать, что $\|A^2\| = \|A\|^2$.

78. Пусть H — гильбертово пространство, $(A_n)_{n=1}^\infty$ — последовательность самосопряженных операторов, отображающих H в H . Доказать, что если эта последовательность сильно сходится к оператору A , то A — также самосопряженный оператор. Доказать также, что если все A_n положительны, то и A — положительный оператор.

79. Пусть H — гильбертово пространство и $A : H \rightarrow H$ — самосопряженный оператор. Доказать, что если для некоторого $x \in H$ вектор Ax отличен от нуля, то $A^n x \neq 0$ для любого натурального n .

80. Пусть H — гильбертово пространство и $A : H \rightarrow H$ — самосопряженный оператор, причем $A \geq 0$. Доказать эквивалентность следующих утверждений:

а) множество значений $R(A)$ всюду плотно в H ;

б) $\ker A = \{0\}$;

в) $(Ax, x) > 0$ для каждого $x \in H$, $x \neq 0$.

81. Пусть H — гильбертово пространство и $A, B : H \rightarrow H$ — самосопряженные операторы, причем $A \geq 0$. Доказать, что $BAB \geq 0$.

82. Пусть H — гильбертово пространство, $A, B : H \rightarrow H$ — самосопряженные операторы, причем $A \geq B$ и $B \geq A$. Доказать, что $A = B$.

83. Пусть H — гильбертово пространство, $A : H \rightarrow H$ — самосопряженный оператор и $A \geq 0$. Доказать, что для любого $x \in H$ выполняется неравенство $\|Ax\|^2 \leq \|A\| (Ax, x)$.

84. Пусть H — гильбертово пространство, $A : H \rightarrow H$ — самосопряженный оператор, $0 \leq A \leq \lambda I$, где $\lambda \geq 0$. Доказать, что $\|A\| = \lambda$.

85. Пусть H — гильбертово пространство, $A : H \rightarrow H$ — самосопряженный оператор, $A \geq 0$. Доказать, что если существует $A^{-1} \in \mathcal{L}(H)$, то $A^{-1} \geq 0$.

86. Пусть H — гильбертово пространство, $A : H \rightarrow H$ — самосопряженный оператор, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$. Доказать, что существует $(A - \lambda I)^{-1}$.

87. Пусть H — гильбертово пространство, $A \in \mathcal{L}(H)$. Доказать, что оператор $(I + AA^*)^{-1}$ существует.

88. Пусть H — гильбертово пространство, $A : H \rightarrow H$ — самосопряженный оператор, $A \geq 0$. Доказать, что для любого $\lambda > 0$ оператор $A + \lambda I$ **непрерывно обратим**, т. е. существует оператор $(A + \lambda I)^{-1}$ и $(A + \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$.

89. Рассмотрим оператор $A : l_2 \rightarrow l_2$, где $Ax = (0, 0, \xi_3, \xi_4, \dots)$, если $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l_2$. Доказать, что A — самосопряженный оператор и $A \geq 0$. Найти $\sqrt{A}$ — квадратный корень из оператора A .

90. Пусть $(e_n)_{n=1}^\infty$ — ортонормированный базис в гильбертовом пространстве H . Определим оператор $A : H \rightarrow H$ равенствами $Ae_1 = 0$, $Ae_n = \frac{1}{n} e_{n-1}$ при $n > 1$.

Доказать, что:

а) A — вполне непрерывен;

б) не существует оператора $B \in \mathcal{L}(H)$ такого, что $B^2 = A$.

91. Пусть H — гильбертово пространство, $A : H \rightarrow H$ — самосопряженный вполне непрерывный оператор, $A \geq 0$. Доказать, что $\sqrt{A}$ вполне непрерывен.

92. Пусть H — гильбертово пространство, $A \in \mathcal{L}(H)$, существует $A^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ и $B = \sqrt{A^*A}$.

а) Доказать, что B — самосопряженный оператор, $B \geq 0$ и существует $B^{-1} \in \mathcal{L}(H)$.

б) Положим $U = AB^{-1}$, так что справедливо представление $A = UB$, которое называется **полярным разложением**. Доказать, что U — унитарный оператор.

93. Пусть E — комплексное банахово пространство, $A : E \rightarrow E$ — линейный оператор и оператор A^{-1} существует. Доказать, что A и A^{-1} имеют одни и те же **собственные векторы**.

94. В вещественном линейном пространстве $C[0; \pi]$ найти **собственные значения** и **собственные векторы** оператора $(Ax)(t) = \frac{d^2 x}{dt^2}$, если:

а) $\mathcal{D}(A) = \{x(t) \in C^{(2)}[0; \pi] : x(0) = x(\pi) = 0\}$;

б) $\mathcal{D}(A) = \{x(t) \in C^{(2)}[0; \pi] : x'(0) = x'(\pi) = 0\}$;

в) $\mathcal{D}(A) = \{x(t) \in C^{(2)}[0; \pi] : x(0) = x(\pi), x'(0) = x'(\pi)\}$.

95. Доказать, что оператор и его резольвента **перестановочны**.

96. Доказать, что если $\lambda, \mu \in \rho(A)$, то

$$R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\lambda - \mu) R_\lambda(A) R_\mu(A) = (\lambda - \mu) R_\mu(A) R_\lambda(A).$$

97. Пусть E — банахово пространство и $A \in \mathcal{L}(E)$. Может ли оператор $R_\lambda(A)$ **быть** вполне непрерывным?

98. В пространстве $C[a; b]$ рассмотрим оператор $(Ax)(t) = \varphi(t)x(t)$, где $\varphi(t)$ — некоторая строго монотонно возрастающая и непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция. Доказать, что $\sigma(A) = [\varphi(a); \varphi(b)]$, причем ни одна точка спектра не является **собственным значением**.

99. В комплексном пространстве $C[0; 2\pi]$ рассмотрим оператор $(Ax)(t) = e^{it}x(t)$. Доказать, что $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$.

100. Доказать, что любое компактное в себе множество комплексной плоскости является спектром некоторого оператора $A \in \mathcal{L}(l_2)$.

101. В пространстве $C[0; 1]$ рассмотрим оператор $(Ax)(t) = \frac{dx}{dt}$. Доказать, что:

а) $\sigma(A)$ пусто, если $\mathcal{D}(A) = \{x(t) \in C^{(1)}[0; 1] : x(0) = 0\}$;

б) $\sigma(A)$ состоит из одних собственных значений, заполняющих всю комплексную плоскость, если $\mathcal{D}(A) = C^{(1)}[0; 1]$;

в) $\sigma(A)$ состоит из собственных значений $2\pi ni$, $n \in \mathbb{Z}$, если $\mathcal{D}(A) = \{x(t) \in C^{(1)}[0; 1] : x(0) = x(1)\}$.

102. Пусть E — банахово пространство, $A \in \mathcal{L}(E)$ и $\lambda \in \sigma(A)$. Доказать, что $\lambda^n \in \sigma(A^n)$ при любом натуральном n .

103. Пусть E — банахово пространство, $A \in \mathcal{L}(E)$ и существует $A^{-1} \in \mathcal{L}(E)$. Доказать, что если $\lambda \in \sigma(A^{-1})$, то $\lambda^{-1} \in \sigma(A)$, и наоборот, если $\mu \in \sigma(A)$, то $\mu^{-1} \in \sigma(A^{-1})$.

104. Рассмотрим оператор $A : L_2[a; b] \rightarrow L_2[a; b]$, определяемый формулой $(Ax)(t) = \int_a^t k(t, s) x(s) ds$, где $k(t, s)$ — непрерывная в треугольнике $a \leq s \leq t$, $a \leq t \leq b$, функция. Доказать, что $r_\sigma(A) = 0$. Является ли $\lambda = 0$ собственным значением оператора A ?

105. Доказать, что для самосопряженного оператора $A \in \mathcal{L}(H)$, где H — гильбертово пространство, $r_\sigma(A) = \|A\|$.

106. Пусть E — банахово пространство, $A \in \mathcal{L}(E)$. Доказать, что на окружности $|\lambda| = r_\sigma(A)$ имеется хотя бы одна точка из $\sigma(A)$.

107. Пусть H — гильбертово пространство, $A \in \mathcal{L}(H)$. Доказать, что $\sigma(A^*) = \overline{\sigma(A)}$.

108*. Пусть $A, B \in \mathcal{L}(E)$, где E — банахово пространство, $AB = BA$. Доказать, что

$$r_\sigma(A + B) \leq r_\sigma(A) + r_\sigma(B), \quad r_\sigma(AB) \leq r_\sigma(A) r_\sigma(B).$$

109. Найти спектр и спектральный радиус оператора $A : m \rightarrow m$, определяемого для $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in m$ соотношением:

- а) $Ax = (\xi_1 + \xi_2, \xi_2, \xi_3, \dots)$;
- б) $Ax = (\xi_2, \xi_1, \xi_2, \xi_4, \xi_5, \dots)$;
- в) $Ax = (-\xi_1, \xi_2, -\xi_3, \dots, (-1)^n \xi_n, \dots)$.

110. По формуле $r_\sigma(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$ вычислить спектральный радиус оператора $A : C[0; 1] \rightarrow C[0; 1]$ и найти спектр $\sigma(A)$, если:

- а) $(Ax)(t) = tx(t)$; б) $(Ax)(t) = (t+1)x(t)$;
- в) $(Ax)(t) = a(t)x(t)$, где $a = a(t) \in C[0; 1]$.

111. Показать, что спектральный радиус оператора $A : C[0; 1] \rightarrow C[0; 1]$, где

$$(Ax)(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} \int_0^t x(s) ds, & 0 < t \leq 1, \\ x(0), & t = 0, \end{cases}$$

равен 1.

112. Показать, что спектральный радиус оператора $A : C\left[0; \frac{1}{2}\right] \rightarrow C\left[0; \frac{1}{2}\right]$

где $(Ax)(t) = tx(t^2)$, равен 0.

113. Показать, что спектр оператора $A : C[0; 1] \rightarrow C[0; 1]$, где $(Ax)(t) = x(t^2)$, лежит на единичном круге.

114. Пусть H — гильбертово пространство и $P : H \rightarrow H$ — проекционный оператор. Выразить резольвенту $R_\lambda(P)$ явно через P и λ . Найти спектр $\sigma_p(P)$, $\sigma_r(P)$ и $\sigma_c(P)$.

115. Пусть H — гильбертово пространство и $A : H \rightarrow H$ — самосопряженный оператор. Доказать, что $A \geq 0$ тогда и только тогда, когда для любого $\lambda \in \sigma(A)$ выполняется неравенство $\lambda \geq 0$.

116. Пусть H — гильбертово пространство, $A \in \mathcal{L}(H)$ — самосопряженный оператор и $\lambda \in \rho(A)$ — вещественное число. Доказать, что резольвента $R_\lambda(A)$ — самосопряженный оператор.

117. Пусть вполне непрерывный самосопряженный оператор A , отображающий бесконечномерное гильбертово пространство H в себя, имеет лишь конечное число собственных значений. Доказать, что $\lambda = 0$ — собственное значение оператора A .

118. Рассмотрим оператор $A : L_2[0; 1] \rightarrow L_2[0; 1]$, определяемый соотношением

$$(Ax)(t) = \int_0^1 k(t, s) x(s) ds, \quad \text{где}$$

$$k(t, s) = \begin{cases} t(1-s) & \text{при } 0 \leq t \leq s \leq 1, \\ s(1-t) & \text{при } 0 \leq s \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Доказать, что A — вполне непрерывный самосопряженный оператор, и найти его собственные значения и собственные векторы.

119. Пусть A — вполне непрерывный самосопряженный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H , $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис, составленный из собственных векторов оператора A с собственными значениями $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$. Доказать, что решение уравнения $(A - \lambda I)x = y$:

а) имеет вид

$$x = \frac{1}{\lambda} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda} (x, e_n) e_n - y \right],$$

если $\lambda \neq \lambda_n$ для каждого $n \in \mathbb{N}$;

б) при $\lambda = \lambda_j = \lambda_{j+1} = \dots = \lambda_{j+n-1}$ существует тогда и только тогда, когда $(y, e_{j+k}) = 0$ для $k = 0, 1, \dots, n-1$; в этом случае оно представимо в виде

$$x = \frac{1}{\lambda} \left[\sum_k \frac{\lambda_k}{\lambda_k - \lambda} (x, e_k) e_k - y \right] + \sum_{k=0}^{n-1} c_k e_{j+k},$$

причем в $\sum_k$ пропущены слагаемые с номерами $j, j+1, \dots, j+n-1$, а $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$ — произвольные постоянные.

120*. Рассмотрим оператор $A: m \rightarrow m$, действующий по формуле

$$Ax = (0, \xi_1, \xi_2, \dots), \quad x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in m.$$

Найти $\sigma(A)$, $\sigma_p(A)$, $\sigma_c(A)$ и $\sigma_r(A)$.

121. В пространстве l_2 рассмотрим оператор $A: l_2 \rightarrow l_2$, полагая $Ax = (\xi_1, 2\xi_2, 3\xi_3, \dots)$, с областью определения $\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in l_2 : x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |\xi_n|^2 < +\infty \right\}$. Доказать, что: а) $\overline{\mathcal{D}(A)} = l_2$;

б) A — неограниченный на $\mathcal{D}(A)$ линейный оператор;

в) Найти $\mathcal{D}(A^*)$ и A^* .

122. Рассмотрим оператор $A: l_2 \rightarrow l_1$, $Ax = x$, с областью определения $\mathcal{D}(A)$, состоящий из элементов $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l_2$, для которых $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n| < +\infty$.

Доказать, что: а) $\overline{\mathcal{D}(A)} = l_2$;

б) A — линейный оператор, но неограниченный на $\mathcal{D}(A)$;

в) найти $\mathcal{D}(A^*)$ и A^* .

123. Рассмотрим оператор $A: L_2[0; 1] \rightarrow L_2[0; 1]$, $(Ax)(t) = x(t^2)$ с областью определения

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x(t) \in L_2[0; 1] : \int_0^1 x^2(t^2) dt < +\infty \right\}.$$

Доказать, что: а) $\overline{\mathcal{D}(A)} = L_2[0; 1]$;

б) A — линейный оператор, но неограниченный на $\mathcal{D}(A)$;

в) Найти $\mathcal{D}(A^*)$ и A^* .

124. В пространстве $L_2[0; 1]$ рассмотрим оператор $(Ax)(t) = -\frac{d^2x}{dt^2}$ с областью определения $\mathcal{D}(A)$, состоящей из функций $x(t)$ таких, что $x(t) \in C^2[0; 1]$ и удовлетворяющих граничным условиям $x(0) = x(1) = 0$. Доказать, что A — симметричный оператор и $A \geq 0$.

125. Доказать, что если область определения оператора A плотна в гильбертовом пространстве H , то выполняется соотношение $(R(A))^{\perp} = \ker A^*$. Справедливо ли в этом случае соотношение $(\ker A)^{\perp} = \overline{R(A^*)}$?

126. Пусть A — симметричный оператор с областью значений $R(A) = H$. Доказать, что A — самосопряженный оператор.

127. Пусть A — симметричный оператор, для которого $\mathcal{D}(A) = H$ и $\overline{R(A)} = H$. Доказать, что оператор $A^{-1} : R(A) \rightarrow \mathcal{D}(A)$ существует и также является симметричным.

128. Доказать, что собственные значения симметричного оператора в гильбертовом пространстве вещественны, а собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.

129. Рассмотрим гильбертово пространство $H = L_2[0; +\infty)$. Пусть оператор $(Ax)(t) = t \frac{dx}{dt}$ определен на множестве $\mathcal{D}(A)$ функций $x(t) \in L_2[0; +\infty)$, имеющих на $[0; +\infty)$ интегрируемую с квадратом производную $x'(t)$ и удовлетворяющих граничному условию $x(0) = 0$. Доказать, что A является симметричным, но не самосопряженным оператором. Найти A^* . Доказать также, что оператор A замкнут.

130. Рассмотрим гильбертово пространство $H = L_2(\mathbb{R})$. Пусть оператор $(Ax)(t) = i \frac{dx}{dt}$ определен на множестве $\mathcal{D}(A)$ функций, интегрируемых с квадратом на $\mathbb{R}$ и имеющих на $\mathbb{R}$ производную $x'(t) \in L_2(\mathbb{R})$. Доказать, что A — самосопряженный оператор.

131. Рассмотрим гильбертово пространство $H = L_2[0; 1]$. Пусть оператор $(A_{\sigma}x)(t) = i \frac{dx}{dt}$ определен на множестве $\mathcal{D}_{\sigma}(A)$ функций, интегрируемых с квадратом на $[0; 1]$, имеющих на $[0; 1]$ производную $x'(t) \in L_2[0; 1]$ и удовлетворяющих граничному условию $x(0) = e^{i\sigma} x(1)$, где σ — некоторое действительное число. Доказать, что A_{σ} — самосопряженный оператор. Найти спектральное семейство оператора A_{σ} .

132. Пусть A — оператор, рассмотренный в примере 121. Найти спектральное семейство и спектральное разложение оператора A .

133. Рассмотрим оператор A из примера 130. а) Доказать, что оператор A унитарно эквивалентен оператору $(Bx)(t) = tx(t)$, где $\mathcal{D}(B) = \{x(t) \in L_2(\mathbb{R}) : tx(t) \in L_2(\mathbb{R})\}$, причем эту эквивалентность осуществляет унитарный оператор U , являющийся оператором преобразования Фурье в пространстве $L_2(\mathbb{R})$, т. е.

$$(Ux)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x(\sigma) e^{i\sigma t} d\sigma \quad (\forall x = x(t) \in L_2(\mathbb{R})).$$

б) Исходя из спектрального разложения оператора B , описать спектральное семейство $\{E_{\lambda}\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, оператора A .

Ответы: 1. а), д) Нет; б—г) да. 2. Нет. 4. В пространстве $L_2[0; 1]$ оператор A вполне непрерывен тогда и только тогда, когда функция $a(t)$ почти всюду равна нулю. Если на множестве X есть точки, имеющие ненулевую меру μ , то в $L_2(X, \mu)$ оператор умножения может быть вполне непрерывным (при этом $A \neq 0$). 8. Да. 9. Да. 10. В $C[0; 1]$; — да, в $L_2[0; 1]$ — нет. 11. Нет. 12. Нет. 13. Да в $C[0; 1]$, если $\alpha < 1$. Да в $L_2[0; 1]$, если $\alpha < \frac{1}{2}$. 14. Нет. 18. При $\gamma > 0$,

$\alpha \geq 0$ и $\beta > -1$. 19. При $\gamma > 0$, $\alpha > -\frac{1}{2}$, $\beta > \frac{\gamma}{2} - 1$. 21. При $\alpha > 0$.

29. Нет. 32. Не всегда. 34. A вполне непрерывен тогда и только тогда, когда $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$. 39. а) Нет. Рассмотреть оператор $A : C[-1; 1] \rightarrow C[-1; 1]$,

$(Ax)(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau$. Тогда $x_0(t) = |t| \notin A(B[0; 1])$, но $x_n(t) = \sqrt{t^2 + \frac{1}{n}} \in$

$A(B[0; 1])$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = x_0(t)$; б) да. 41. Нет. 42. Нет. 43. л) $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 < +\infty$;
 м) оператор предыдущей задачи, если $\lambda_n \rightarrow 0$, но $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 = +\infty$. 45. Например,
 $Ax = \left(\xi_1, \frac{1}{2} \xi_2, \dots, \frac{1}{n} \xi_n, \dots \right)$ для $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l_2$. 50. а) $(A^*y)(t) =$
 $= ty(t)$; б) $(A^*y)(t) = \int_0^1 \cos t \cdot y(s) ds$; в) $(A^*y)(t) = \int_0^1 ty(s) ds$. 51. а) $A^*: m \rightarrow m$,
 $A^*y = (\eta_1, \dots, \eta_n, 0, 0, \dots)$, если $y = (\eta_1, \eta_2, \dots)$; б) $A^*: m \rightarrow m$, $A^*y =$
 $= (\lambda_1 \eta_1, \lambda_2 \eta_2, \dots)$, где $y = (\eta_1, \eta_2, \dots)$; в) $A^*: m \rightarrow m$, $A^*y = (\eta_3, \eta_4, \dots)$,
 где $y = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots)$; г) $A^*: m \rightarrow m$, $A^*y = (0, \eta_1, \eta_2, \dots)$, если $y = (\eta_1, \eta_2,$
 $\eta_3, \dots)$. 52. Формулы те же, что и в задаче 51, но операторы действуют: в слу-
 чае а) из l_1 в l_1 ; б) из l_2 в l_2 ; в) из l_1 в m . 53. $A^*: l_1 \rightarrow l_2$, $A^*x = x$.
 54. а) $(A^*y)(t) = \frac{1}{\alpha} t^{\frac{1}{\alpha}-1} y(t^{\frac{1}{\alpha}})$; б) $A^* = A$. 55. а) $(A^*y)(t) = y(t-h)$;
 б) $(A^*y)(t) = a(t-h)y(t-h)$; в) $A^* = A$. 62. Первая теорема Фредгольма
 справедлива, если число 0 не является предельной точкой последовательности
 $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$. Вторая теорема справедлива, если средн чисел λ_k есть лишь конечное
 число равных нулю. 89. $\sqrt{A} = A$. 94. а) $\lambda_n = -n^2$, $x_n(t) = \sin nt$, $n \in \mathbb{N}$; б) $\lambda_n =$
 $= n^2$, $x_n(t) = \cos nt$, $n = 0, 1, 2, \dots$; в) $\lambda_0 = 0$, $x_0(t) \equiv 1$, $\lambda_n = -4n^2$, $x_n(t) = \cos 2nt$,
 $\tilde{x}(t) = \sin 2nt$, $n \in \mathbb{N}$. 97. Тогда и только, когда E конечномерно. 104. Точка λ
 принадлежит $\sigma(A)$, но если $k(t, s) \neq 0$, то λ не является собственным значением.
 109. а) $\sigma(A)$ состоит лишь из собственного значения $\lambda = 1$, $r_{\sigma}(A) = 1$; б) $\sigma(A)$
 состоит лишь из собственного значения $\lambda = 1$, $r_{\sigma}(A) = 1$; в) $\sigma(A)$ состоит лишь
 из собственных значений $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $r_{\sigma}(A) = 1$. 110. а) $r_{\sigma}(A) = 1$, $\sigma(A) =$
 $= [0; 1]$, $\sigma_p(A) = \emptyset$, $\sigma_c(A) = \emptyset$ и $\sigma_r(A) = [0; 1]$; б) $r_{\sigma}(A) = 2$, $\sigma(A) = [1; 2]$,
 $\sigma_p(A) = \emptyset$, $\sigma_c(A) = \emptyset$ и $\sigma_r(A) = [1; 2]$, в) $r_{\sigma}(A) = \|a\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |a(t)|$, $\sigma(A)$
 совпадает с множеством значений функции $a = a(t)$, точечная и непрерывная
 части спектра отсутствуют. 114. $R_{\lambda}(P) = \frac{1}{\lambda(1-\lambda)} P - \frac{1}{\lambda} I$, $\sigma_p(P) = \{0, 1\}$,
 $\sigma_c(P) = \emptyset$, $\sigma_r(P) = \emptyset$. 118. $\sigma(A)$ состоит из собственных значений $\lambda_n = \frac{1}{n^2 \pi^2}$
 с соответствующими собственными функциями $\sin n\pi t$ ($n \in \mathbb{N}$). 120. $\sigma(A) = \{\lambda \in$
 $\in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$, $\sigma_p(A) = \emptyset$, $\sigma_c(A) = \emptyset$, $\sigma_r(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$. 121. в) $A^* =$
 $= A$. 122. в) $A^*: m \rightarrow l_2$, $\mathcal{D}(A^*) = \left\{ x \in m, x = (\xi_1, \xi_2, \dots) : \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 < +\infty \right\}$,
 $A^*x = x$. 123. в) $\mathcal{D}(A^*) = \left\{ x(t) \in L_2[0; 1] : \int_0^1 \frac{x^2(t)}{t} dt < +\infty, (A^*x)(t) = \right.$
 $= \frac{x(\sqrt{t})}{2\sqrt{t}} \left. \right\}$. 125. Не всегда. См., например, оператор A из упражнения 31.
 129. $\mathcal{D}(A^*)$ состоит из всех функций, интегрируемых с квадратом на $[0; +\infty)$ и
 имеющих на $[0; +\infty)$ интегрируемую с квадратом производную; $(A^*y)(t) =$
 $= i \frac{dy}{dt}$, $y \in \mathcal{D}(A^*)$. 131. Спектральное семейство $\{E_{\lambda}\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, оператора A_{θ}
 определяется соотношением

$$(E_{\lambda}x)(t) = e^{i\sigma t} \sum_{\lambda_n < \lambda} (x, e_n(t)) e_n(t).$$

где $\lambda_n = \sigma - 2\pi n$, $e_n(t) = e^{-i\sigma t} e^{2\pi n i t}$, $n \in \mathbb{Z}$. 132. Спектральное семейство $\{E_\lambda\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, оператора A определяется формулой $E_\lambda x = \sum_{\lambda_n < \lambda} (x, e_n) e_n$, где $\lambda_n = n$, $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$, $n \in \mathbb{N}$, спектральное разложение — соотношением $Ax = \int_1^{+\infty} \lambda dE_\lambda$. 133. $(E_\lambda x)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\lambda} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{i\sigma\tau} d\tau \right\} e^{-i\sigma t} d\sigma$.

§ 4. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Интегральными уравнениями принято называть такие уравнения, которые содержат неизвестную функцию под знаком интеграла. Например, интегральным уравнением относительно функции $\varphi(t)$ является уравнение

$$a(t)\varphi(t) + f(t) = \lambda \int_a^b k(t, s)\varphi(s) ds, \quad (1)$$

где $a(t)$, $f(t)$, $k(t, s)$ — известные функции (переменные t и s пробегают здесь некоторый фиксированный отрезок $[a; b]$, а фигурирующие здесь функции и параметр λ могут принимать как вещественные, так и комплексные значения).

Отметим, что искомая функция φ входит в уравнение (1) линейно, хотя многие задачи приводят к необходимости рассмотрения и уравнений другого типа.

Выделим те основные классы линейных уравнений, изучением которых займемся в дальнейшем.

1. Типы интегральных уравнений. Уравнения вида

$$\varphi(t) - \lambda \int_a^b k(t, s)\varphi(s) ds = f(t) \quad (\lambda \in \mathbb{C}) \quad (2)$$

называются уравнениями Фредгольма второго рода, а уравнения

$$\int_a^b k(t, s)\varphi(s) ds = f(t) \quad (3)$$

— уравнениями Фредгольма первого рода.

При этом, как правило, предполагается, что их ядро $k(t, s)$ и свободный член $f(t)$ являются квадратично суммируемыми функциями (ядро — в квадрате $[a; b] \times [a; b]$, свободный член — на отрезке $[a; b]$).

Если $k(t, s) = 0$ при $s > t$, то уравнения (2), (3) обращаются соответственно в уравнения

$$\varphi(t) - \lambda \int_a^t k(t, s)\varphi(s) ds = f(t) \quad (4)$$

$$\int_a^t k(t, s)\varphi(s) ds = f(t), \quad (5)$$

называемые уравнениями Вольтерра: (4) — второго рода; (5) — первого рода.

Заметим, что уравнения вольтерровского типа можно рассматривать и как уравнения Фредгольма. Однако их целесообразно выделять в отдельные классы, ибо они обладают рядом таких свойств, которых уравнения Фредгольма в общем случае не имеют.

2. Интегральные уравнения как уравнения с вполне непрерывными операторами. Рассмотрим в пространстве $L_2[a; b]$ оператор K , определяемый соотношением

$$(K\varphi)(t) = \int_a^b k(t, s) \varphi(s) ds \quad (6)$$

или $K\varphi = \varphi$, где $\varphi(t) = \int_a^b k(t, s) \varphi(s) ds$.

Этот оператор называется *оператором Фредгольма* с ядром $k(t, s)$.

Теорема 1. Если $k(t, s)$ — функция с интегрируемым квадратом, то формула (6) определяет в пространстве $L_2[a; b]$ вполне непрерывный оператор, причем

$$\|K\| \leq \left(\int_a^b \int_a^b |k(t, s)|^2 dt ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Напомним, что оператор называется вполне непрерывным в банаховом пространстве, если он переводит всякое ограниченное множество в относительно компактное (см. § 3).

Исходя из этого определения, можно несложно доказать (используя теорему Арцела), что если $k(t, s)$ — непрерывная функция в квадрате $[a; b] \times [a; b]$, то оператор Фредгольма является вполне непрерывным и в пространстве $C[a; b]$, причем

$$\|K\| \leq \max_{t \in [a; b]} \int_a^b |k(t, s)| ds.$$

Если K — оператор Фредгольма, определяемый ядром $k(t, s)$, то сопряженный ему оператор K^* также является оператором Фредгольма и определяется ядром $k_1(t, s) = k(s, t)$.

В частности, оператор K самосопряжен в $L_2[a; b]$ тогда и только тогда, когда $k(t, s) = k(s, t)$. В случае действительных пространств и ядер условием самосопряженности оператора служит симметричность его ядра: $k(t, s) = k(s, t)$.

Напомним, что каждое собственное подпространство, отвечающее ненулевому собственному значению вполне непрерывного самосопряженного оператора, конечномерно. Кроме того, в полном гильбертовом сепарабельном пространстве самосопряженный вполне непрерывный оператор обладает полной ортонормированной системой собственных векторов.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2 (Гильберта — Шмидта). Для любого вполне непрерывного самосопряженного линейного оператора A в гильбертовом пространстве H существует ортонормированная система (φ_n) собственных векторов, отвечающих собственным значениям (λ_n) , такая, что каждый элемент $\xi \in H$ представим единственным образом в виде $\xi = \sum_k c_k \varphi_k + \xi'$, где $\xi' \in \ker A$. При этом $A\xi = \sum_k \lambda_k c_k \varphi_k$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$.

Поскольку $L_2[a; b]$ — банахово пространство (даже гильбертово), то на рассматриваемые интегральные уравнения переносится вся теория Ф. Рисса, известная для соответствующих уравнений с вполне непрерывными операторами в банаховом пространстве. Напомним эту теорию.

3. Уравнения с вполне непрерывными операторами в банаховых пространствах.* Рассмотрим следующие уравнения в банаховом пространстве с вполне непрерывным оператором A :

$$Ax = y \quad (7)$$

(уравнение первого рода);

$$x - Ax = y \quad (8)$$

* Основные сведения, помещенные в этом пункте, содержатся в § 3. Однако поместили мы их здесь с целью полноты изложения теорин интегральных уравнений.

(уравнение второго рода);

$$z - Az = 0 \quad (9)$$

(соответствующее ему однородное уравнение);

$$f - A^*f = g \quad (10)$$

(сопряженное к (8) уравнение) и

$$\psi - A^*\psi = 0 \quad (11)$$

(соответствующее однородное сопряженное уравнение).

Теорема 3. Следующие утверждения эквивалентны:

а) уравнение (8) имеет решение (и притом единственное) при любой правой части;

б) уравнение (9) имеет только тривиальное решение;

в) уравнение (10) имеет решение при любой правой части;

г) уравнение (11) имеет только тривиальное решение.

Если выполнено одно из условий а) — г), то операторы $I - A$ и $I - A^*$ непрерывно обратимы.

Заметим также, что утверждение об эквивалентности условий а) и б) в литературе фигурирует как альтернатива Фредгольма.

Теорема 4. Уравнения (9) и (11) имеют одинаковое конечное число линейно независимых решений.

Теорема 5. Для того чтобы уравнение (8) имело хотя бы одно решение, необходимо и достаточно, чтобы для любого решения ψ уравнения (11) выполнялось условие $\psi(y) \equiv \langle y, \psi \rangle = 0$.

Отметим, что абстрактное уравнение Фредгольма первого рода вида (7), где A — некоторый вполне непрерывный оператор в гильбертовом пространстве H , в общем случае (т. е. для произвольного $y \in H$), как показано в примере 10 из § 3, не разрешимо.

Перейдем к рассмотрению некоторых методов решения интегральных уравнений.

4. Метод резольвент. При решении уравнений Фредгольма второго рода часто используется следующее утверждение.

Теорема 6. Если ядро $k(t, s)$ и свободный член $f(t)$ уравнения (2) квадратично суммируемы и $|\lambda| < B^{-1}$, где

$$B^2 = \int_a^b \int_a^b |k(t, s)|^2 dt ds,$$

то ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m K^m f \quad (12)$$

(ряд Неймана) сходится в среднем к квадратично суммируемому решению этого уравнения. Это решение единственно.

Если $k(t, s)$ и $f(t)$ — непрерывные функции, то утверждение, аналогичное теореме 6, при условии $|\lambda| (b-a) \max_{t,s \in [a;b]} |k(t, s)| < 1$ справедливо и для пространства $C[a; b]$.

Отметим, что все операторы K^m также являются операторами Фредгольма с ядрами $k_m(t, s)$ (они называются *итерированными*), определяемыми с помощью рекуррентной формулы

$$k_m(t, s) = \int_a^b k(t, \tau) k_{m-1}(\tau, s) d\tau, \quad m = 2, 3, \dots \quad (k_1(t, s) \equiv k(t, s)).$$

Решение $\varphi(t)$ уравнения (2) можно представить в виде

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^b R(t, s, \lambda) f(s) ds,$$

где функция $R(t, s, \lambda)$, называемая *резольвентой Фредгольма* этого уравнения, определяется или по формуле

$$R(t, s, \lambda) = \sum_{v=0}^{\infty} \lambda^v k_{v+1}(t, s),$$

или равенством $R(t, s, \lambda) = \frac{D(t, s, \lambda)}{D(\lambda)}$ (при условии $D(\lambda) \neq 0$), где

$$D(t, s, \lambda) = k(t, s) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} B_n(t, s) \lambda^n,$$

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} C_n \lambda^n.$$

Коэффициенты рядов, определяющих функции $D(t, s, \lambda)$ и $D(\lambda)$, вычисляются по формулам

$$B_n(t, s) = \underbrace{\int_a^b \dots \int_a^b}_n \begin{vmatrix} k(t, s) & k(t, s_1) & \dots & k(t, s_n) \\ k(s_1, s) & k(s_1, s_1) & \dots & k(s_1, s_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k(s_n, s) & k(s_n, s_1) & \dots & k(s_n, s_n) \end{vmatrix} ds_1 \dots ds_n,$$

причем $B_0(t, s) = k(t, s)$;

$$C_n = \underbrace{\int_a^b \dots \int_a^b}_n \begin{vmatrix} k(s_1, s_1) & k(s_1, s_2) & \dots & k(s_1, s_n) \\ k(s_2, s_1) & k(s_2, s_2) & \dots & k(s_2, s_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k(s_n, s_1) & k(s_n, s_2) & \dots & k(s_n, s_n) \end{vmatrix} ds_1 \dots ds_n.$$

Функция $D(t, s, \lambda)$ называется *минором Фредгольма*, а $D(\lambda)$ — *определителем Фредгольма*. Если $\int_a^b \int_a^b |k(t, s)|^2 dt ds < +\infty$, то эти функции являются целыми

и аналитическими функциями от λ , а резольвента может иметь полюсы в тех точках, в которых $D(\lambda)$ обращается в нуль.

К сожалению, практическое использование приведенных формул возможно лишь в редких случаях.

Для уравнений Вольтерра второго типа справедливо более сильное утверждение.

Теорема 7. Если ядро и свободный член уравнения (4) квадратично суммируемы, то это уравнение при любом λ имеет единственное суммируемое решение $\varphi(t)$. Оно может быть получено как сумма ряда Неймана

$$f(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n (K^n f)(t).$$

В этом случае $k_m(t, s) = \int_s^t k(t, \tau) k_{m-1}(\tau, s) d\tau$ ($m = 2, 3, \dots$).

Если ядро и свободный член непрерывны, то уравнение Вольтерра (4) имеет единственное решение, представляющее собой непрерывную на $[a; b]$ функцию. Следует, однако, помнить, что это уравнение может иметь также разрывные решения. Иллюстрацией сказанного служит классическое уравнение

$$u(t) = \int_0^t s^{t-s} u(s) ds,$$

имеющее (помимо тривиального непрерывного решения $u(t) \equiv 0$) бесконечное количество разрывных решений вида $u(t) = Ct^{t-1}$, где C — произвольная постоянная.

Учитывая оценки

$$\max_{t \in [a; b]} |R_n(t)| \leq |\lambda|^n (b-a)^n \left(\max_{s, t \in [a; b]} |k(t, s)| \right)^n \max_{t \in [a; b]} |\varphi_0(t)|,$$

закключаем, что при $|\lambda| (b-a) \max_{t, s \in [a; b]} |k(t, s)| < 1$ $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(t) = 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t) = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — решение уравнения Фредгольма.

Заметим, что в процессе последовательного приближения каждая функция $\varphi_n(t)$ зависит от выбора начальной функции $\varphi_0(t)$. Однако предельная функция $\varphi(t)$ от выбора $\varphi_0(t)$ не зависит.

Этот метод любопытно сравнить с рассмотренным в гл. 2, § 1 методом решения интегральных уравнений, для которых применим принцип неподвижной точки.

Наиболее часто метод последовательных приближений используется для решения интегральных уравнений Вольтерра, так как в этом случае он применим уже при всех значениях λ . Здесь важно лишь удачно выбрать «нулевое» приближение $\varphi_0(t)$, хотя часто полагают $\varphi_0(t) = f(t)$ (и тогда метод последовательных приближений фактически совпадает с методом резольвент).

6. Интегральные уравнения с вырожденными ядрами. Ядро $k(t, s)$ интегрального уравнения Фредгольма второго рода называется *вырожденным*, если оно является суммой конечного числа произведений функций только от t на функции только от s , т. е. если оно имеет вид

$$k(t, s) = \sum_{k=1}^n a_k(t) b_k(s);$$

функции $a_k(t)$ и $b_k(s)$ считаем непрерывными на $[a; b]$ и линейно независимыми между собой.

Тогда уравнение (2) принимает вид

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \sum_{k=1}^n a_k(t) \int_a^b b_k(s) \varphi(s) ds$$

или

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \sum_{k=1}^n c_k a_k(t), \quad (14)$$

где $c_k = \int_a^b b_k(s) \varphi(s) ds$ — неизвестные постоянные (так как функция $\varphi(s)$ не известна).

Следовательно, решение уравнения (2) сводится к нахождению постоянных c_k ($k = 1, 2, \dots, n$). Подставляя (14) в (2) и учитывая линейную независимость функций $a_m(t)$, приходим к выводу, что постоянные c_k должны определяться из системы алгебраических уравнений

$$c_m - \lambda \sum_{k=1}^n a_{km} c_k = f_m \quad (m = 1, 2, \dots, n),$$

где

$$a_{km} = \int_a^b a_k(t) b_m(t) dt, \quad f_m = \int_a^b b_m(t) f(t) dt.$$

Если определитель

$$\Delta(\lambda) = \det \| \delta_{km} - \lambda a_{km} \|_{k, m=1}^n$$

этой системы отличен от нуля, то соответствующее уравнение (2) имеет единственное решение, определяемое формулой (14).

7. Использование преобразования Лапласа. Пусть комплекснозначная функция $\varphi(t)$ действительного переменного локально суммируема, равна нулю при $t < 0$ и удовлетворяет условию $|\varphi(t)| < M e^{s_0 t}$ для всех t ($M > 0$, $s_0 \geq 0$). Такие функ-

ции $\varphi(t)$ будем называть *функциями-оригиналами*. Число s_0 называется *показателем роста функции $\varphi(t)$* .

Преобразованием Лапласа функции $\varphi(t)$ называется функция $\Phi(p)$ комплексного переменного $p = s + i\tau$, определяемая равенством

$$\Phi(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \varphi(t) dt. \quad (15)$$

Для всякого оригинала $\varphi(t)$ функция $\Phi(p)$ определена в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$ и является в этой полуплоскости аналитической функцией. Тот факт, что $\Phi(p)$ есть преобразование Лапласа функции $\varphi(t)$, будем записывать так:

$$\varphi(t) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(p).$$

Теорема 8 (о б р а щ е н и я). Если функция $\varphi(t)$ является оригиналом, а функция $\Phi(p)$ служит ее изображением, то

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{pt} \Phi(p) dp, \quad \gamma > s_0, \quad (16)$$

где интеграл берется вдоль прямой $\operatorname{Re} p = \gamma$, параллельной мнимой оси, и понимается в смысле главного значения

$$\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{pt} \Phi(p) dp = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{\gamma-i\omega}^{\gamma+i\omega} e^{pt} \Phi(p) dp.$$

Формула (16) называется *формулой обращения* преобразования Лапласа.

Если $\Phi(p) = \frac{\Phi_1(p)}{\Phi_2(p)}$, где $\Phi_1(p)$ и $\Phi_2(p)$ — многочлены от p , причем степень многочлена $\Phi_1(p)$ меньше степени многочлена $\Phi_2(p)$, то оригиналом для $\Phi(p)$ является функция

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^l \frac{1}{(n_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow a_k} \frac{d^{n_k-1}}{dp^{n_k-1}} \{ (p - a_k)^{n_k} \Phi(p) e^{pt} \}, \quad (17)$$

где a_k — полюсы $\Phi(p)$, n_k — их порядки и сумма берется по всем полюсам функции $\Phi(p)$.

Если все полюсы a_k ($k = 1, 2, \dots, l$) функции $\Phi(p)$ простые, то

$$\Phi(p) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^l \frac{\Phi_1(a_k)}{\Phi_2'(a_k)} e^{a_k t} = \varphi(t).$$

Теорема 9 (у м н о ж е н и я). Пусть функции $f(t)$ и $\varphi(t)$ являются функциями-оригиналами и пусть

$$f(t) \stackrel{\text{def}}{=} F(p), \quad \varphi(t) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(p).$$

Тогда

$$F(p) \Phi(p) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t \varphi(\tau) \varphi(t - \tau) d\tau. \quad (18)$$

Интеграл в правой части (18) называется *сверткой функций $f(t)$ и $\varphi(t)$* и обозначается символом $f(t) * \varphi(t)$.

Благодаря теореме умножения, преобразование Лапласа наиболее часто используется (см. примеры 13 и 14) при решении интегральных уравнений с ядрами, зависящими от разности аргументов.

8. Уравнения с симметричными ядрами. Однородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\varphi(t) - \lambda \int_a^b k(t, s) \varphi(s) ds = 0 \quad (19)$$

всегда имеет (тривиальное) решение $\varphi(t) \equiv 0$. Те значения λ ($\lambda \neq 0$), при которых это уравнение имеет ненулевые решения, называются *характеристическими числами* уравнения (19) или ядра $k(t, s)$, а каждое ненулевое решение этого уравнения называется *собственной функцией*, соответствующей характеристическому числу λ . Число линейно независимых собственных функций, соответствующих значению λ , всегда конечно и оно называется *рангом характеристического значения* λ . Заметим, что λ является характеристическим числом ядра $k(t, s)$ тогда и только тогда, когда $\mu = \frac{1}{\lambda}$ — собственное значение оператора Фредгольма K .

Например, для уравнения с вырожденным ядром характеристические числа являются корнями определителя $\Delta(\lambda)$.

В случае произвольного ядра характеристические числа являются нулями определителя Фредгольма $D(\lambda)$, т. е. полюсами резольвенты $R(t, s, \lambda)$. Отсюда, в частности, можно получить, что уравнение Вольтерра характеристических чисел не имеет.

Если ядро $k(t, s)$ симметрично, то оно имеет, по крайней мере, одно характеристическое число.

Рассмотрим уравнение Фредгольма второго рода

$$\varphi(t) - \lambda \int_a^b k(t, s) \varphi(s) ds = f(t), \quad (20)$$

ядро которого удовлетворяет условиям

$$\int_a^b \int_a^b |k(t, s)|^2 dt ds < +\infty \quad \text{и} \quad k(t, s) = \overline{k(s, t)}.$$

Тогда соответствующий оператор K Фредгольма вполне непрерывен и самосопряжен в пространстве $L_2[a, b]$ и, следовательно, для него справедлива теорема Гильберта — Шмидта.

Сформулируем некоторые утверждения для случая непрерывных ядер и свободных членов уравнения Фредгольма второго рода.

Теорема 10. Если λ не совпадает с характеристическими числами λ_n ($n = 1, 2, \dots$) соответствующего однородного уравнения, то уравнение (20) имеет для любой правой части $f(t)$ единственное непрерывное решение, определяемое формулой

$$\varphi(t) = f(t) - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda - \lambda_n} \varphi_n(t),$$

где $\varphi_n(t)$ — ортонормированные собственные функции, соответствующие числам λ_n , а

$$a_n = \int_a^b f(t) \varphi_n(t) dt.$$

Теорема 11. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ совпадает со значением λ_k ранга q , т. е. $\lambda = \lambda_k = \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_{k+q-1}$. Тогда решение уравнения (20) существует тогда и только тогда, когда свободный член f ортогонален всем собственным функциям, соответствующим числу λ_k . При этом (20) имеет бесконечное множество решений, которые содержат q произвольных постоянных и даются формулой

$$\begin{aligned} \varphi(t) = f(t) - \lambda \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{\lambda - \lambda_n} \varphi_n(t) - \lambda \sum_{n=k+q}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda - \lambda_n} \varphi_n(t) + \\ + c_0 \varphi_k(t) + \dots + c_{q-1} \varphi_{k+q-1}(t), \end{aligned}$$

где $c_0, \dots, c_{q-1}$ — произвольные постоянные.

Если функция $f(t)$ ортогональна всем собственным функциям $\varphi_n(t)$ ядра $k(t, s)$, то решением уравнения является сама эта функция: $\varphi(t) \equiv f(t)$.

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$\int_a^b k(t, s) \varphi(s) ds = f(t) \quad (21)$$

с симметричным ядром. Пусть $(\varphi_k(t))$ — его полная ортонормированная система собственных функций в $L_2[a; b]$, λ_k — характеристические значения, а f_k — коэффициенты Фурье функции f , т. е. $f_k = \int_a^b f(s) \varphi_k(s) ds$ ($k = 1, 2, \dots$). Тогда для

разрешимости уравнения (21) необходимо и достаточно, чтобы ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |f_k|^2$

сходилсЯ. При этом функция $\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k f_k \varphi_k(t)$ является единственным решением данного уравнения.

В заключение напомним, что теория интегральных операторов с симметричными ядрами часто используется в математической физике. Например, с ее помощью решается известная задача Штурма — Лиувилля: доказать, что собственные функции оператора

$$S[u] = (p(x) u'(x))' - q(x) u(x) \\ (p(x) \in C^{(1)}[a; b], q(x) \in C[a; b], u(x) \in C^{(2)}[a; b]),$$

подчиненные граничным условиям $u(a) = u(b) = 0$, образуют полную систему в пространстве $L_2[a; b]$.

Известно также, например, что решение произвольного линейного дифференциального уравнения

$$y^{(n)}(t) + a_1(t) y^{(n-1)}(t) + \dots + a_n(t) y(t) = f(t)$$

с непрерывными коэффициентами $a_j(t)$ ($j = 1, 2, \dots, n$) при начальных условиях

$$y^{(k)}(0) = c_k \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

всегда может быть сведено к решению некоторого интегрального уравнения Вольтерра второго рода.

О различных методах решения интегральных уравнений см. в [16].

Примеры решения задач

1. Составить интегральное уравнение, соответствующее дифференциальному уравнению

$$y''' + ty'' + (t^2 - t)y = te^t + 1$$

с начальными условиями

$$y(0) = y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0.$$

Решение. Положим $\frac{d^3 y}{dt^3} = \varphi(t)$. Тогда (после интегрирования от 0 до t)

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - y''(0) = \int_0^t \varphi(s) ds$$

и (так как $y''(0) = 0$) $\frac{d^2 y}{dt^2} = \int_0^t \varphi(s) ds$. Далее,

$$\frac{dy}{dt} = y'(0) + \int_0^t d\tau \int_0^\tau \varphi(s) ds = 1 + \int_0^t (t-s) \varphi(s) ds$$

$$y(t) = 1 + t + \int_0^t \frac{(t-s)^2}{2} \varphi(s) ds.$$

Подставляя полученные выражения для y , $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ и $\frac{d^3y}{dt^3}$ в исходное дифференциальное уравнение, получаем

$$\varphi(t) + \int_0^t \frac{2t + (t-s)(t-s)^2}{2} \varphi(s) ds = te^t + t - t^3 + 1.$$

Это интегральное уравнение Вольтерра второго рода имеет, как известно, единственное решение $\varphi(t)$, а функция

$$y(t) = 1 + t + \int_0^t \frac{(t-s)^2}{2} \varphi(s) ds$$

является единственным решением исходного дифференциального уравнения с заданными начальными условиями.

Различные методы решения подобных уравнений Вольтерра будут рассмотрены нами несколько позже.

2. Воспользовавшись связью между дифференциальными и интегральными уравнениями, найти решение уравнения $y'(t) - y(t) = 0$ при условии $y(0) = 1$.

Решение. Данное уравнение равносильно такому:

$$y(t) = 1 + \int_0^t y(s) ds.$$

Для нахождения $y(t)$ используем метод последовательных приближений, полагая $y_0(t) \equiv 0$. Тогда

$$y_1(t) = 1, \quad y_2(t) = 1 + \frac{t}{1!},$$

$$y_3(t) = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$y_n(t) = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!},$$

$$\dots \dots \dots$$

Поэтому $y(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t) = e^t$.

3. Пусть

$$k(t, s) = \begin{cases} t(1-s) & \text{при } t \leq s, \\ s(1-t) & \text{при } t \geq s \end{cases}$$

($t, s \in [0; 1]$). Найти характеристические значения и собственные функции этого ядра.

Решение. Исходя из соответствующих определений, нам нужно выделить те значения λ_k , при которых уравнение

$$\varphi(t) - \lambda \int_0^1 k(t, s) \varphi(s) ds = 0 \quad (22)$$

имеет нетривиальные решения $\varphi_k(t)$, и найти функции $\varphi_k(t)$. Для этого перейдем от уравнения (22) к соответствующему ему дифференциальному уравнению (сравните с примерами 1 и 2). Поскольку (с учетом вида ядра $k(t, s)$)

$$\varphi(t) = \lambda \int_0^t s(1-t) \varphi(s) ds + \lambda \int_t^1 t(1-s) \varphi(s) ds,$$

то после двукратного дифференцирования обеих частей этого соотношения по t приходим к уравнению

$$\varphi''(t) + \lambda \varphi(t) = 0.$$

Кроме того, так как $k(0, t) = k(1, t) = 0$, то функция $\varphi(t)$ должна удовлетворять условиям $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. Значит,

$$\varphi(t) = c_1 e^{i\sqrt{\lambda}t} + c_2 e^{-i\sqrt{\lambda}t},$$

где через $\sqrt{\lambda}$ обозначено одно из значений квадратного корня из λ , а числа c_1 и c_2 определяются из системы

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ c_1 e^{i\sqrt{\lambda}} + c_2 e^{-i\sqrt{\lambda}} = 0. \end{cases}$$

Нетрудно подсчитать, что эта система имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда $\lambda = n^2 \pi^2$ ($n \in \mathbb{N}$); при этом $\varphi_n(t) = \sin n\pi t$.

Непосредственной подстановкой в уравнение (22) убеждаемся, что упомянутые числа и функции действительно являются характеристическими значениями и собственными функциями данного ядра $k(t, s)$.

4. Найти собственные значения и собственные функции оператора Фредгольма с ядром $k(t, s) = \cos(t+s)$ в промежутках: а) $[0; \pi]$; б) $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение. Заметим, что $k(t, s) = \cos t \cos s - \sin t \sin s$, и поэтому ядро оператора K вырождено. Значит, область значений этого оператора конечномерна и если λ — некоторое собственное значение, а $\varphi(t)$ — соответствующая ему собственная функция, то

$$\int_a^b [\cos t \cos s - \sin t \sin s] \varphi(s) ds = \lambda \varphi(t),$$

т. е. $\varphi(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$. Поэтому

$$\begin{aligned} & \lambda (c_1 \cos t + c_2 \sin t) = \\ &= \int_a^b [\cos t \cos s - \sin t \sin s] (c_1 \cos s + c_2 \sin s) ds. \end{aligned} \quad (23)$$

а) Пусть $[a; b] \equiv [0; \pi]$. Тогда

$$\int_0^{\pi} \cos s \cdot \cos s ds = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^{\pi} \sin s \cdot \cos s ds = 0, \quad \int_0^{\pi} \sin s \cdot \sin s ds = \frac{\pi}{2}$$

и, значит,

$$\lambda (c_1 \cos t + c_2 \sin t) = c_1 \frac{\pi}{2} \cos t - c_2 \frac{\pi}{2} \sin t$$

или (если учесть линейную независимость функции $\cos t$, $\sin t$ на произвольном отрезке) $\lambda c_1 = \frac{\pi}{2} c_1$, $\lambda c_2 = -\frac{\pi}{2} c_2$.

Из полученных соотношений следует, что или $\lambda = \frac{\pi}{2}$, c_1 — произвольное, а $c_2 = 0$, или $\lambda = -\frac{\pi}{2}$, $c_1 = 0$, а c_2 — произвольное. Значит, в рассматриваемом случае оператор K имеет собственные значения: $\lambda_1 = \frac{\pi}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{\pi}{2}$. Соответствующие им собственные функции таковы: $\varphi_1(t) = \cos t$, $\varphi_2(t) = \sin t$.

б) Теперь

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 s ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 s ds = \frac{\pi}{4}, \quad \text{а} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin s \cos s ds = \frac{1}{2}.$$

Поэтому из (23) получаем

$$\lambda_1 (c_1 \cos t + c_2 \sin t) = c_1 \frac{\pi}{4} \cos t - \frac{c_1}{2} \sin t + \frac{c_2}{2} \cos t - c_2 \frac{\pi}{4} \sin t$$

или

$$\begin{cases} \frac{\pi}{4} c_1 + \frac{1}{2} c_2 = \lambda c_1, \\ -\frac{1}{2} c_1 - \frac{\pi}{4} c_2 = \lambda c_2. \end{cases}$$

Но однородная система

$$\begin{cases} \left(\frac{\pi}{4} - \lambda \right) c_1 + \frac{1}{2} c_2 = 0, \\ \frac{1}{2} c_1 + \left(\frac{\pi}{4} + \lambda \right) c_2 = 0 \end{cases}$$

имеет нетривиальное решение лишь при условии, что λ — нуль ее определителя, т. е. $\lambda_1 = \sqrt{\frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4}}$, $\lambda_2 = -\sqrt{\frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4}}$.

В качестве соответствующих собственных функций можно взять

$$\varphi_1(t) = -\left(\frac{\pi}{2} + \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 1} \right) \cos t + \sin t,$$

$$\varphi_2(t) = -\left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 1} \right) \cos t + \sin t.$$

5. Определить функцию φ из класса $C^{(1)}(\mathbb{R})$ так, чтобы

$$\varphi(t) = \sin t + \lambda \int_0^t e^{-s} \varphi(t-s) ds.$$

Решение. Сперва заметим, что если решение φ данного уравнения существует, то (после замены в интеграле переменной $t-s=u$)

$$\varphi(t) = \sin t + \lambda e^{-t} \int_0^t e^u \varphi(u) du$$

или

$$e^t \varphi(t) = e^t \sin t + \lambda \int_0^t e^u \varphi(u) du.$$

Отсюда (после дифференцирования по t и умножения на e^{-t}) получаем, что функция φ должна удовлетворять также дифференциальному уравнению

$$\varphi'(t) + (1-\lambda)\varphi(t) = \sin t + \cos t$$

и (как видно из исходного уравнения) начальному условию $\varphi(0) = 0$.

Поскольку однородное уравнение $\varphi'(t) = (\lambda-1)\varphi(t)$ имеет решение $\varphi_0(t) = ce^{(\lambda-1)t}$, то с помощью метода вариации постоянной приходим к выводу, что

$$\varphi(t) = e^{(\lambda-1)t} \int_0^t e^{(1-\lambda)s} (\sin s + \cos s) ds.$$

Полученный интеграл просто вычисляется интегрированием по частям, но мы на этом не останавливаемся.

6. Построить резольвенту интегрального уравнения

$$\varphi(t) - \lambda \int_0^t k(t, s) \varphi(s) ds = f(t)$$

и с ее помощью найти решение при $k(t, s) = e^{-(t-s)}$, $\lambda = 1$, $f(t) = te^{\frac{t^2}{2}}$.

Решение. Найдем итерированные ядра этого уравнения. Замечая, что

$$k_2(t, s) = \int_s^t k(t, \tau) k(\tau, s) d\tau = \int_s^t e^{-(t-\tau)} e^{-(\tau-s)} d\tau = e^{-(t-s)} (t-s),$$

а

$$\begin{aligned} k_3(t, s) &= \int_s^t k(t, \tau) k_2(\tau, s) d\tau = \int_s^t e^{-(t-\tau)} e^{-(\tau-s)} (\tau-s) d\tau = \\ &= e^{-(t-s)} \frac{(t-s)^2}{2}, \end{aligned}$$

методом математической индукции доказывается следующая формула:

$$k_n(t, s) = e^{-(t-s)} \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Поэтому

$$R(t, s, \lambda) = \sum_{v=0}^{\infty} \lambda^v e^{-(t-s)} \frac{(t-s)^v}{v!} = e^{-(t-s)} e^{\lambda(t-s)} = e^{(t-s)(\lambda-1)}$$

и при $\lambda = 1$

$$\varphi(t) = te^{\frac{t^2}{2}} + \int_0^t se^{\frac{s^2}{2}} ds = te^{\frac{t^2}{2}} + e^{\frac{s^2}{2}} \Big|_0^t = (t+1)e^{\frac{t^2}{2}} - 1.$$

7. С помощью повторных ядер построить резольвенту интегрального уравнения

$$\varphi(t) - \lambda \int_0^1 ts\varphi(s) ds = f(t), \quad t \in [0; 1],$$

и найти его решение при $\lambda = 2$, $f(t) = t$.

Решение. Найдем повторные ядра данного уравнения. Так как $k(t, s) = ts$ и $k_1(t, s) = k(t, s)$, то

$$k_2(t, s) = \int_0^1 k(t, \tau) k_1(\tau, s) d\tau = \int_0^1 t\tau^2 s d\tau = \frac{ts}{3}.$$

Далее,

$$k_3(t, s) = \int_0^1 k(t, \tau) k_2(\tau, s) d\tau = \frac{1}{3} \int_0^1 t\tau^2 s d\tau = \frac{ts}{3^2},$$

а методом математической индукции нетрудно проверить, что

$k_n(t, s) = \frac{ts}{3^{n-1}}$ ($n = 1, 2, \dots$). Поэтому

$$R(t, s, \lambda) = \sum_{v=0}^{\infty} \lambda^v k_{v+1}(t, s) = \sum_{v=0}^{\infty} \lambda^v \frac{ts}{3^v} = \frac{3ts}{3-\lambda}$$

(при $|\lambda| < 3$; в этом случае $B = \frac{1}{4}$).

При $\lambda = 2$ и $f(t) = t$ решение соответствующего уравнения имеет вид

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_0^1 R(t, s, \lambda) f(s) ds = t + 6 \int_0^1 ts^2 ds = 3t.$$

8. Вычислить $D(\lambda)$ и $D(t, s, \lambda)$ для уравнения Фредгольма

$\varphi(t) - \lambda \int_a^b k(t, s) \varphi(s) ds = f(t)$, если $k(t, s) = \sin t$, $a = 0$, $b = \pi$.

Решение. Воспользуемся известными (см. п. 4) формулами для определения искомых функций и найдем вначале коэффициенты $B_n(t, s)$

и C_n

$$B_n(t, s) = \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \underbrace{\left| \begin{array}{cccc} \sin t & \sin t & \dots & \sin t \\ \sin s_1 & \sin s_1 & \dots & \sin s_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin s_n & \sin s_n & \dots & \sin s_n \end{array} \right|}_{n} ds_1 \dots ds_n = 0 \quad (n \geq 1);$$

$$C_n = \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \underbrace{\left| \begin{array}{cccc} \sin s_1 & \sin s_1 & \dots & \sin s_1 \\ \sin s_2 & \sin s_2 & \dots & \sin s_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin s_n & \sin s_n & \dots & \sin s_n \end{array} \right|}_{n} ds_1 \dots ds_n = 0 \quad (n \geq 2)$$

и

$$C_1 = \int_0^\pi \sin s_1 ds_1 = 2.$$

Поэтому $D(t, s, \lambda) = k(t, s) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} B_n(t, s) \lambda^n = k(t, s) = \sin t$,

а $D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} C_n \lambda^n = 1 - 2\lambda$. Значит, $R(t, s, \lambda) = \frac{\sin t}{1 - 2\lambda}$

и при $\lambda \neq \frac{1}{2}$ решение соответствующего уравнения

$$\varphi(t) - \lambda \int_0^\pi \sin t \varphi(s) ds = f(t)$$

имеет вид

$$\varphi(t) = f(t) + \frac{\lambda \sin t}{1 - 2\lambda} \int_0^\pi f(s) ds.$$

9. Решить интегральное уравнение Вольтерра первого рода

$$\int_0^t e^{t-s} \varphi(s) ds = \sin t.$$

Решение. Приведем это уравнение к интегральному уравнению Вольтерра второго рода. С этой целью продифференцируем его по t :

$$\varphi(t) + \int_0^t e^{t-s} \varphi(s) ds = \cos t.$$

Здесь $k(t, s) = e^{t-s}$, $\lambda = -1$, $f(t) = \cos t$. Как и в предыдущих примерах, нетрудно подсчитать, что

$$R(t, s, \lambda) = e^{(\lambda+1)(t-s)},$$

и поэтому $\varphi(t) = \cos t - \sin t$.

Это же выражение для $\varphi(t)$ можно получить и без использования резольвенты. Достаточно лишь продифференцировать соотношение

$$\int_0^t e^{-s} \varphi(s) ds = e^{-t} \sin t.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что найденная функция является решением и исходного уравнения первого рода (которое можно было бы решить просто и с использованием преобразования Лапласа).

10. Методом последовательных приближений решить следующие интегральные уравнения:

а) $\varphi(t) - \int_0^t (s-t) \varphi(s) ds = 1;$

б) $\varphi(t) = t + \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(s) ds.$

Решение. В обоих случаях возьмем за нулевое приближение функцию $\varphi_0(t) \equiv 0$.

а) Исходя из данного уравнения, последовательно получаем

$$\varphi_1(t) = 1, \quad \varphi_2(t) = 1 - \frac{t^2}{2!}, \quad \varphi_3(t) = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!}, \quad \dots,$$

$$\varphi_n(t) = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} t^{2n-2}}{(2n-2)!}.$$

Поэтому $\varphi(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t) = \cos t$.

б) Из вида данного уравнения следует, что n -е последовательное приближение $\varphi_n(t)$ представимо в виде $\varphi_n(t) = t + \alpha_n$, причем

$$t + \alpha_n = t + \int_0^{\frac{1}{2}} (s + \alpha_{n-1}) ds = t + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \alpha_{n-1},$$

т. е. $\alpha_n = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \alpha_{n-1}$ ($n \geq 1$). Поскольку, далее $\lambda = 1$, а $B = \frac{1}{2}$ и $\lambda < \frac{1}{B}$, то последовательность функций $\varphi_n(t)$, а с ней и числовая последовательность $(\alpha_n)_0^\infty$, имеют пределы. Из рекуррентного соотношения $\alpha_n = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \alpha_{n-1}$ следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \frac{1}{4}$, поэтому решением данного интегрального уравнения является функция $\varphi(t) = t + \frac{1}{4}$.

Отметим, что это уравнение очень просто решается и с использованием известного метода решения уравнений с вырожденными ядрами.

11. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(t) - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (t \cos s + s^2 \sin t + \cos t \sin s) \varphi(s) ds = t,$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$.

Решение. Поскольку ядро данного уравнения вырожденно, то ясно, что решение $\varphi(t)$ следует искать в виде

$$\varphi(t) = C_1 t + C_2 \sin t + C_3 \cos t.$$

Подставляя это выражение в исходное уравнение и учитывая линейную независимость функций t , $\sin t$ и $\cos t$, получаем

$$C_1 = 1 + \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \cos s (C_1 s + C_2 \sin s + C_3 \cos s) ds,$$

$$C_2 = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} s^2 (C_1 s + C_2 \sin s + C_3 \cos s) ds,$$

$$C_3 = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \sin s (C_1 s + C_2 \sin s + C_3 \cos s) ds.$$

Вычисляя входящие в эти уравнения интегралы, для нахождения неизвестных C_1 , C_2 , C_3 получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} C_1 - \pi\lambda C_3 = 1, \\ C_2 + 4\pi\lambda C_3 = 0, \\ 2\pi\lambda C_1 + \pi\lambda C_2 - C_3 = 0. \end{cases}$$

Определитель этой системы:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\pi\lambda \\ 0 & 1 & 4\pi\lambda \\ 2\pi\lambda & \pi\lambda & -1 \end{vmatrix} = -2\pi^2\lambda^2 - 1.$$

Поскольку $\Delta(\lambda) \neq 0$, то

$$C_1 = \frac{4\pi^2\lambda^2 + 1}{2\pi^2\lambda^2 + 1}, \quad C_2 = -\frac{8\pi^2\lambda^2}{2\pi^2\lambda^2 + 1}, \quad C_3 = \frac{2\pi\lambda}{2\pi^2\lambda^2 + 1}$$

и данное интегральное уравнение имеет единственное решение

$$\varphi(t) = \frac{4\pi^2\lambda^2 + 1}{2\pi^2\lambda^2 + 1} t - \frac{8\pi^2\lambda^2}{2\pi^2\lambda^2 + 1} \sin t + \frac{2\pi\lambda}{2\pi^2\lambda^2 + 1} \cos t.$$

12. Решить уравнение

$$\varphi(t) - \lambda \int_{-1}^1 (2ts^3 + 5t^2s^2) \varphi(s) ds = 7t^4 + 3.$$

Решение. Будем искать функцию φ в виде

$$\varphi(t) = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + C_4 t^4.$$

Тогда

$$C_0 = 3, \quad C_1 = \lambda \int_{-1}^1 2s^3 (C_0 + C_1 s + C_2 s^2 + C_4 s^4) ds,$$

$$C_2 = \lambda \int_{-1}^1 5s^3 (C_0 + C_1 s + C_2 s^2 + C_4 s^4) ds, \quad C_4 = 7,$$

откуда для нахождения C_1 и C_2 получаем систему уравнений

$$\begin{cases} C_1 \left(1 - \frac{4}{5} \lambda\right) = 0, \\ C_2 (1 - 2\lambda) = 20\lambda. \end{cases}$$

Значит, если $\lambda \neq \frac{1}{2}$ и $\lambda \neq \frac{5}{4}$, то $C_0 = 3$, $C_1 = 0$, $C_2 = \frac{20\lambda}{1-2\lambda}$, $C_4 = 7$ и исходное уравнение имеет единственное решение

$$\varphi(t) = 3 + \frac{20\lambda}{1-2\lambda} t^2 + 7t^4.$$

Если $\lambda = \frac{5}{4}$, то $C_0 = 3$, C_1 — произвольное, $C_2 = -\frac{50}{3}$, $C_4 = 7$ и $\varphi(t) = 3 + C_1 t - \frac{50}{3} t^2 + 7t^4$; при $\lambda = \frac{1}{2}$ данное уравнение решений не имеет.

13. С помощью преобразования Лапласа найти резольвенту интегрального уравнения

$$\varphi(t) - \int_0^t \sin(t-s) \varphi(s) ds = f(t). \quad (24)$$

Решение. Исходя из формул, определяющих повторные ядра и резольвенту уравнения с ядром, зависящим лишь от разности аргументов, нетрудно проверить, что они также зависят только от $t-s$. Пусть $\varphi(t) \doteq \Phi(p)$, $f(t) \doteq F(p)$ и $k(t) \doteq K(p)$.

Тогда $\Phi(p) - K(p) \Phi(p) = F(p)$ и

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{1-K(p)} \quad (K(p) \neq 1). \quad (25)$$

Записав решение уравнения (24) в виде

$$\varphi(t) = f(t) + \int_0^t R(t-s) f(s) ds,$$

аналогично получаем соотношение

$$\Phi(p) = F(p) + \tilde{R}(p) F(p), \quad (26)$$

где $R(t) \doteq \tilde{R}(p)$. Отсюда $\tilde{R}(p) = \frac{\Phi(p) - F(p)}{F(p)}$ или (с учетом (25))

$$\tilde{R}(p) = \frac{K(p)}{1-K(p)}.$$

С помощью формулы (15) получаем $\sin t \doteq \frac{1}{p^2 + 1} \equiv K(p)$, и поэтому $\tilde{R}(p) = \frac{1}{p^2}$, а (см. (17)) $R(t) = t$.

Значит, резольвентой данного интегрального уравнения является функция $R(t, s, 1) = t - s$.

14. Решить уравнение

$$\varphi(t) = e^t - \int_0^t e^{t-s} \varphi(s) ds.$$

Решение. Имеем $\Phi(p) = E(p) - E(p) \Phi(p)$, где

$$e^t \doteq E(p) = \int_0^\infty e^{(1-p)t} dt = \frac{1}{p-1}.$$

Поэтому $\Phi(p) = \frac{E(p)}{1+E(p)} = \frac{1}{p}$ и (см. (17)) $\varphi(t) = 1$.

15. Решить уравнение

$$\varphi(t) - \lambda \int_0^1 k(t, s) \varphi(s) ds = t$$

с симметричным ядром

$$k(t, s) = \begin{cases} t(s-1), & \text{если } 0 \leq t \leq s, \\ s(t-1), & \text{если } s \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Решение. Как показано в примере 3, характеристические числа и соответствующие им ортонормированные функции имеют вид

$$\lambda_n = -n^2\pi^2, \quad \varphi_n(t) = \sqrt{2} \sin n\pi t, \quad n = 1, 2, \dots$$

Поэтому при $\lambda \neq \lambda_n$ решением данного уравнения являются функции

$$\varphi(t) = t - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2} a_n}{\lambda + n^2\pi^2} \sin n\pi t,$$

где a_n — коэффициенты Фурье функции $f(t) = t$

$$a_n = \sqrt{2} \int_0^1 t \sin n\pi t dt = \frac{(-1)^{n+1} \sqrt{2}}{n\pi}.$$

Значит,

$$\varphi(t) = t - \frac{2\lambda}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin n\pi t}{n(\lambda + n^2\pi^2)}.$$

При $\lambda = -n^2\pi^2$ ($n \in \mathbb{N}$) исходное уравнение решений не имеет, так как его правая часть не ортогональна ($a_n \neq 0$) всем решениям соответствующего однородного уравнения.

16. Найти характеристические числа, соответствующие собственные функции и решения (при каждом $\lambda \in \mathbb{C}$, при котором они существуют).

вуют) интегрального уравнения

$$\varphi(t) - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(t-s) \varphi(s) ds = \sin 2t.$$

Решение. Рассмотрим однородное уравнение

$$\varphi(t) - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2(t-s)}{2} \varphi(s) ds = 0,$$

или

$$\varphi(t) - \frac{\lambda}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [1 + \cos 2t \cos 2s + \sin 2t \sin 2s] \varphi(s) ds = 0.$$

Значит, $\varphi(t) = C_1 + C_2 \cos 2t + C_3 \sin 2t$, и для определения постоянных C_1, C_2, C_3 получаем соотношение

$$C_1 + C_2 \cos 2t + C_3 \sin 2t = \\ = \frac{\lambda}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [1 + \cos 2t \cos 2s + \sin 2t \sin 2s] [C_1 + C_2 \cos 2s + C_3 \sin 2s] ds.$$

Отсюда

$$C_1 + C_2 \cos 2t + C_3 \sin 2t = \frac{\lambda}{2} [2\pi C_1 + \pi C_2 \cos 2t + \pi C_3 \sin 2t]$$

и

$$\begin{cases} C_1(1 - \lambda\pi) = 0, \\ C_2\left(1 - \frac{\lambda\pi}{2}\right) = 0, \\ C_3\left(1 - \frac{\lambda\pi}{2}\right) = 0. \end{cases}$$

Поэтому характеристическими значениями данного уравнения являются числа $\lambda_1 = \frac{1}{\pi}$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{2}{\pi}$, а соответствующими им собственными функциями — функции $\varphi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\varphi_2(t) = \frac{\cos 2t}{\sqrt{\pi}}$,

$$\varphi_3(t) = \frac{\sin 2t}{\sqrt{\pi}}.$$

Если $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\lambda_1, \lambda_2\}$, то по теореме 10

$$\varphi(t) = \sin 2t + \frac{\lambda a_1}{\lambda_1 - \lambda} \varphi_1(t) + \frac{\lambda a_2}{\lambda_2 - \lambda} \varphi_2(t) + \frac{\lambda a_3}{\lambda_2 - \lambda} \varphi_3(t),$$

$$\text{где } a_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2t dt = 0, \quad a_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2t \cos 2t dt = 0 \text{ и } a_3 = \\ = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2t \sin 2t dt = \sqrt{\pi}, \text{ т. е.}$$

$$\varphi(t) = \sin 2t + \frac{\lambda\pi}{2 - \lambda\pi} \sin 2t = \frac{2 \sin 2t}{2 - \lambda\pi}.$$

Пусть $\lambda = \lambda_1$. Поскольку правая часть $\sin 2t$ ортогональна $\varphi_1(t)$, то исходное неоднородное уравнение имеет (см. теорему 11) решение

$$\varphi(t) = \sin 2t + C + \frac{\lambda_1 a_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \varphi_2(t) + \frac{\lambda_1 a_3}{\lambda_3 - \lambda_1} \varphi_3(t),$$

где $a_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2t \cos 2t dt = 0$ и $a_3 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 2t dt = \sqrt{\pi}$, т. е. $\varphi(t) = 2 \sin 2t + C$.

При $\lambda = \lambda_2 = \lambda_3$ исходное уравнение решений не имеет, так как функция $\sin 2t$ не ортогональна к функциям $\varphi_2(t)$ и $\varphi_3(t)$.

17. Найти решения уравнения $\varphi(t) - \lambda \int_0^1 \varphi(s) ds = 1$, $\lambda \neq 0$.

Решение. Первый способ. Это — уравнение Фредгольма второго рода, причем $k(t, s) \equiv 1$, а $B = 1$. Поэтому по теореме 6 при $|\lambda| < 1$ решение $\varphi(t)$ можно искать в виде суммы ряда Неймана

$$\varphi(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m (K^m f)(t),$$

где $f(t) = 1$. Но, очевидно, при всех m ($m \geq 0$)

$$(K^m f)(t) = \int_0^1 f(s) ds = 1$$

и $\varphi(t) = \frac{1}{1-\lambda}$. Ряд Неймана при $|\lambda| \geq 1$ естественно расходится.

Второй способ. Из теории интегральных уравнений с вырожденными ядрами следует, что решение $\varphi(t)$ данного уравнения следует искать в виде $\varphi(t) = C\lambda + 1$, где C — некоторая постоянная. Подставляя это выражение в уравнение, получаем $C(1-\lambda) = 1$.

Отсюда вытекает, что при $\lambda = 1$ уравнение решения не имеет (и, значит, ряд Неймана действительно не может сходиться при $|\lambda| \geq 1$), а при $\lambda \neq 1$ $C = \frac{1}{1-\lambda}$ и $\varphi(t) = \frac{1}{1-\lambda}$.

Заметим, что хотя при $|\lambda| > 1$ ряд Неймана и не сходится, решение интегрального уравнения все же существует.

18. Рассмотрим однородное уравнение Фредгольма

$$\varphi(t) - \lambda \int_0^1 (s^2 + st) \varphi(s) ds = 0$$

и соответствующее ему однородное сопряженное уравнение

$$\psi(t) - \lambda \int_0^1 (t^2 + st) \psi(s) ds = 0.$$

Проверить, что при каждом $\lambda \neq 0$ эти уравнения имеют одинаковое количество линейно независимых решений.

Решение. Функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, удовлетворяющие этим уравнениям, следует искать соответственно в виде

$$\varphi(t) = \alpha_1 + \alpha_2 t \quad \text{и} \quad \psi(t) = \beta_1 t + \beta_2 t^2.$$

Поэтому для определения постоянных $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ и β_2 получаем такие системы уравнений:

$$\begin{cases} \left(\frac{\lambda}{3} - 1\right)\alpha_1 + \frac{\lambda}{4}\alpha_2 = 0, \\ \frac{\lambda}{2}\alpha_1 + \left(\frac{\lambda}{3} - 1\right)\alpha_2 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \left(\frac{\lambda}{3} - 1\right)\beta_1 + \frac{\lambda}{4}\beta_2 = 0, \\ \frac{\lambda}{2}\beta_1 + \left(\frac{\lambda}{3} - 1\right)\beta_2 = 0. \end{cases}$$

У этих систем один и тот же определитель $\Delta(\lambda) = -\frac{\lambda^2}{72} - \frac{2}{3}\lambda + 1$, и для тех λ_0 , что $\Delta(\lambda_0) \neq 0$, оба интегральных уравнения имеют только тривиальные решения. Если же λ совпадает с одним из корней определителя $\Delta(\lambda)$, то каждое из интегральных уравнений имеет лишь по одному нетривиальному решению (например, $\varphi(t) = 1 + \frac{4}{3} \cdot \frac{3-\lambda}{\lambda} t$ и $\psi(t) = t + \frac{4}{3} \cdot \frac{3-\lambda}{\lambda} t^2$).

Этот пример иллюстрирует теорему 4.

19. Пусть $f \in L_2[0; 1]$. Решить уравнение

$$\varphi(t) - \lambda \int_0^1 \varphi(s) ds = f(t), \quad \lambda \neq 0.$$

Решение. Поскольку искомая функция $\varphi(t)$ представима в виде $\varphi(t) = C\lambda + f(t)$, то после подстановки этого выражения в уравнение получаем

$$(1 - \lambda)C = \int_0^1 f(s) ds. \quad (27)$$

Значит, если $\lambda \neq 1$, то

$$C = \frac{1}{1-\lambda} \int_0^1 f(s) ds \quad \text{и} \quad \varphi(t) = f(t) + \frac{\lambda}{1-\lambda} \int_0^1 f(s) ds.$$

Пусть $\lambda = 1$. Тогда (27) принимает вид

$$\int_0^1 f(s) ds = 0. \quad (28)$$

Следовательно, если условие (28) не выполняется, то исходное уравнение не имеет решения; если оно выполнено, то соотношению (27) удовлетворяет произвольная постоянная C , а соответствующее интегральное уравнение имеет бесконечное множество решений вида

$$f(t) + C.$$

Отметим, что в этом случае оператор Фредгольма K является самосопряженным, а сопряженное однородное уравнение при $\lambda = 1$ имеет вид

$$\psi(t) - \int_0^1 \psi(s) ds = 0.$$

Его решениями являются только функции $\psi(t) = C_1$ (C_1 — произвольная постоянная). Поэтому условие (28) — это условие ортогональности $f(t)$ к решениям сопряженного однородного уравнения.

Таким образом, рассмотренный пример является простой иллюстрацией теоремы 5.

20. При каких функциях $y(t)$ из $L_2[0; 2\pi]$ интегральное уравнение

$$\varphi(t) - \int_0^\pi \sin(t-s) \varphi(s) ds = y(t)$$

имеет решение в пространстве $L_2[0; \pi]$?

Решение. По теореме 5 данное уравнение имеет решение только для тех функций $y \in L_2[0; \pi]$, которые ортогональны всем решениям сопряженного однородного уравнения, т. е. (если учесть, что $k(t, s) = \sin(t-s)$) решениям уравнения

$$\psi(t) + \int_0^\pi \sin(t-s) \psi(s) ds = 0.$$

Это — уравнение с вырожденным ядром $k_1(t, s) = \sin t \cos s - \cos t \sin s$ и поэтому $\psi(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t$. Значит,

$$C_1 \sin t + C_2 \cos t + \int_0^\pi (\sin t \cos s - \cos t \sin s) (C_1 \sin s + C_2 \cos s) ds = 0$$

или

$$C_1 \sin t + C_2 \cos t + \frac{\pi}{2} C_2 \sin t - \frac{\pi}{2} C_1 \cos t = 0.$$

Отсюда $C_1 + \frac{\pi}{2} C_2 = 0$ и $C_2 - \frac{\pi}{2} C_1 = 0$, т. е. $C_1 = C_2 = 0$ и $\psi(t) \equiv 0$.

Таким образом, исходное неоднородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода имеет (и притом единственное) решение при любой правой части $y(t)$ из $L_2[0; \pi]$. Оно также может быть найдено с помощью известного метода решения уравнений с вырожденными ядрами.

21. Найти все вещественные значения параметров a , b и c , при которых интегральное уравнение

$$\varphi(t) - \lambda \int_{-1}^1 (ts + t^2 s^2) \varphi(s) ds = at^2 + bt + c$$

имеет решение в пространстве $L_2[-1; 1]$ при любых $\lambda \in \mathbb{C}$.

Решение. Воспользуемся теоремой 5 и найдем сперва решения (при всех $\lambda \in \mathbb{C}$) сопряженного однородного уравнения

$$\psi(t) - \lambda \int_{-1}^1 (ts + t^2 s^2) \psi(s) ds = 0.$$

Тогда $\psi(t) = C_1 t + C_2 t^2$ и

$$C_1 t + C_2 t^2 = \lambda \int_{-1}^1 (ts + t^2 s^2) (C_1 s + C_2 s^2) ds$$

или

$$C_1 t + C_2 t^2 = \frac{\lambda}{3} C_1 t + \frac{\lambda}{8} C_2 t^2,$$

т. е.

$$\begin{cases} C_1 \left(1 - \frac{\lambda}{3}\right) = 0, \\ C_2 \left(1 - \frac{\lambda}{8}\right) = 0. \end{cases}$$

Если $\lambda \neq 3$ и $\lambda \neq 8$, то $C_1 = C_2 = 0$ и $\psi(t) = 0$. Это означает, что исходное уравнение имеет решение при любых a, b, c .

Пусть $\lambda = 3$. Тогда сопряженное однородное уравнение имеет нетривиальное решение $\psi(t) = ct$, где c — произвольная постоянная, а исходное уравнение разрешимо в $L_2[-1; 1]$ при условии

$$\int_{-1}^1 (at^2 + bt + c) t dt = 0,$$

т. е. при условии $b = 0$.

Аналогично при $\lambda = 8$ имеем $\psi(t) = ct^2$ и условие

$$\int_{-1}^1 (at^2 + bt + c) t^2 dt = 0,$$

т. е. $\frac{a}{5} + \frac{c}{3} = 0$.

Итак, данное интегральное уравнение разрешимо в $L_2[-1; 1]$ при всех $\lambda \in \mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда $b = 0$ и $3a + 5c = 0$.

Задачи для самостоятельной работы

1. Составьте интегральные уравнения, соответствующие следующим дифференциальным уравнениям с заданными начальными условиями:

а) $y''(t) + y(t) = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

б) $y'''(t) - 3y''(t) - 6y'(t) + 8y(t) = 0$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$;

в) $y''(t) + y(t) = \cos t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

2. Найти характеристические числа и соответствующие им собственные функции ядра $k(t, s) = st + s^2 t^2$ ($t, s \in [-1; 1]$).

3. Доказать, что ядра:

а) $k(t, s) = t - s$ ($t, s \in [0; 1]$).

б) $k(t, s) = \sin t \sin 2s$ ($t, s \in [0; \pi]$) не имеют вещественных характеристических значений.

4. Пусть $\omega(t)$ — непрерывная четная функция, имеющая период 2π , а

$$c_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \omega(s) \cos ks ds \neq 0 \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Доказать, что характеристическими значениями ядра $k(t, s) = \omega(t - s)$ являются числа $\lambda_k = \frac{1}{\pi c_k}$ ($k = 0, 1, \dots$).

5. Найти резольвенту интегрального уравнения

$$\varphi(t) - \lambda \int_0^t k(t, s) \varphi(s) ds = f(t)$$

и с ее помощью решить уравнение в следующих случаях:

а) $k(t, s) = e^{t^2 - s^2}$, $\lambda = 2$, $f(t) = e^{t^2 + 2t}$;

б) $k(t, s) = \frac{1 + t^2}{1 + s^2}$, $\lambda = 1$, $f(t) = 1 + t^2$;

в) $k(t, s) = \frac{2 + \cos t}{2 + \cos s}$, $\lambda = 1$, $f(t) = e^t \sin t$.

6. Найти резольвенту интегрального уравнения

$$\varphi(t) - \lambda \int_a^b k(t, s) \varphi(s) ds = f(t)$$

и найти его решение в следующих случаях:

а) $k(t, s) = \sin t \cos s$, $a = 0$, $b = \frac{\pi}{2}$, $\lambda = -1$, $f(t) = \cos t$;

б) $k(t, s) = te^s$, $a = -1$, $b = 1$, $\lambda = \frac{e}{3}$, $f(t) = (3t^2 + 1)e^{-t}$;

в) $k(t, s) = ts + t^2 s^2$, $a = -1$, $b = 1$, $\lambda = 1$, $f(t) = 3(t + 1)$.

7. Вычислить $D(\lambda)$ для уравнения Фредгольма

$$\varphi(t) - \lambda \int_a^b k(t, s) \varphi(s) ds = f(t)$$

со следующими ядрами и пределами интегрирования:

а) $k(t, s) = 1$, $a = 0$, $b = 1$;

б) $k(t, s) = s$, $a = 4$, $b = 10$;

в) $k(t, s) = g(t)$, $a = a$, $b = b$;

г) $k(t, s) = 2e^{t+s}$, $a = 0$, $b = 1$;

д) $k(t, s) = t - s$, $a = 0$, $b = 1$.

8. Пусть

$$k(t, s) = \begin{cases} 1, & s \leq t, \\ 0, & s > t. \end{cases}$$

Показать, что $D(\lambda) = \exp\{-(b-a)\lambda\}$.

9. Методом последовательных приближений решить следующие интегральные уравнения:

а) $\varphi(t) = t + \int_0^t (s-t) \varphi(s) ds \quad (\varphi_0(t) \equiv 0)$;

$$а) \varphi(t) = \frac{5}{6}t + \frac{1}{2} \int_0^t ts\varphi(s) ds \quad (\varphi_0(t) = 0);$$

$$в) \varphi(t) = 2t + 2 - \int_0^t \varphi(s) ds \quad (\varphi_0(t) = 1);$$

$$г) \varphi(t) = 1 + t + \int_0^t (t-s)\varphi(s) ds \quad (\varphi_0(t) = 1);$$

$$д) \varphi(t) = \arctg t + \int_0^t \frac{\varphi(s)}{1+s^2} ds \quad (\varphi_0(t) = 0).$$

10. Решить следующие уравнения Вольтерра первого рода:

$$а) \int_0^t \sin(t-s)\varphi(s) ds = e^{\frac{t^2}{2}} - 1; \quad б) \int_0^t (1-t^2+s^2)\varphi(s) ds = \frac{t^2}{2}.$$

11. Решить уравнения:

$$б) \varphi(t) = 3 \int_0^2 ts\varphi(s) ds + 3t - 2; \quad б) \varphi(t) = 3 \int_0^1 ts\varphi(s) ds + 3t - 2;$$

$$в) \varphi(t) = \int_0^1 (t+s)\varphi(s) ds + 18t^2 - 9t - 4; \quad г) \varphi(t) = \int_0^\pi \cos(t+s)\varphi(s) ds + 1.$$

12. Решить интегральные уравнения с вырожденными ядрами:

$$а) \varphi(t) - 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \varphi(s) ds = 2t - \pi;$$

$$б) \varphi(t) - \lambda \int_0^1 \cos(q \ln s) \varphi(s) ds = 1 \quad (q \in \mathbb{R});$$

$$в) \varphi(t) - \lambda \int_{-1}^1 (t^2 - st) \varphi(s) ds = t^2 + t;$$

$$г) \varphi(t) - \lambda \int_0^\pi (\sin s + s \cos t) \varphi(s) ds = 1 - \frac{2t}{\pi}.$$

13. С помощью преобразования Лапласа найти резольвенты следующих ядер (при $\lambda = 1$):

$$а) k(t, s) = e^{-(t-s)}; \quad б) k(t, s) = 2 \cos(t-s).$$

14. Решить уравнения:

$$а) \varphi(t) = t - \int_0^t e^{t-s} \varphi(s) ds;$$

$$б) \varphi(t) = \cos t - \int_0^t (t-s) \cos(t-s) \varphi(s) ds.$$

15. Решить уравнение

$$\varphi(t) - \lambda \int_0^1 k(t, s) \varphi(s) ds = \cos \pi t,$$

где

$$k(t, s) = \begin{cases} (t+1)s, & \text{если } 0 \leq t \leq s, \\ (s+1)t, & \text{если } s \leq t \leq 1. \end{cases}$$

16. Решить уравнение

$$\varphi(t) - \lambda \int_0^1 k(t, s) \varphi(s) ds = t^2 - t^3,$$

где

$$k(t, s) = \begin{cases} t-s, & 0 \leq t \leq s, \\ s-t, & s \leq t \leq 1. \end{cases}$$

17. Решить уравнение

$$\varphi(t) - \lambda \int_0^1 k(t, s) \varphi(s) ds = f(t),$$

где

$$k(t, s) = \begin{cases} t(s-1), & t \leq s, \\ s(t-1), & s \leq t, \end{cases}$$

а $f(t) = \sin \pi t$.

18. Доказать, что характеристические функции и собственные функции уравнения

$$\varphi(t) - \lambda \int_0^1 \min(t, s) \varphi(s) ds = \sin \pi t$$

определяются формулами

$$\lambda_n = \pi^2 \left(n + \frac{1}{2} \right)^2, \quad \varphi_n(t) = \sin \pi \left(n + \frac{1}{2} \right) t, \quad n \geq 0.$$

Найти решения этого уравнения при каждом $\lambda \in \mathbb{C}$, при котором они существуют.

19. Пусть $k(t, s) = \begin{cases} t(s-1), & t \leq s, \\ s(t-1), & s \leq t, \end{cases}$ а $f(t) = \sum_{k=1}^n c_k \sin k\pi t$ ($1 \leq n \leq \infty$).

При каждом $\lambda \in \mathbb{C}$ найти условия на c_k ($k = 1, \dots, n$), при которых уравнение

$$\varphi(t) - \lambda \int_0^1 k(t, s) \varphi(s) ds = f(t)$$

имеет решения. Найти эти решения.

Указание. Использовать пример 3.

20. Найти все вещественные значения параметра a , при которых интегральное уравнение

$$\varphi(t) - \lambda \int_0^1 (at - s) \varphi(s) ds = y(t)$$

имеет решение при всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и всех $y \in L_2[0; 1]$.

21. Для каких $y \in C[0; 1]$ интегральное уравнение

$$\varphi(t) - 4 \int_0^1 ts^2 \varphi(s) ds = y(t)$$

имеет решение?

22. Доказать, что для интегрального уравнения

$$\varphi(t) - \lambda \int_0^{+\infty} \sin(ts) \varphi(s) ds = 0$$

утверждение теоремы Фредгольма о конечности числа линейно независимых собственных функций, соответствующих каждому характеристическому числу, не верна.

Указание. Рассмотреть $\lambda = \pm \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ и $\varphi(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-at} \pm \frac{t}{a^2 + t^2}$ ($t \geq 0, a > 0$).

23. Найти все значения λ , при которых интегральное уравнение

$$\varphi(t) - \lambda \int_a^b \cos(t+s) \varphi(s) ds = y(t)$$

имеет единственное решение при любом $y \in C[a; b]$, если:

а) $a = 0, b = \pi$; б) $a = 0, b = \frac{\pi}{2}$.

Ответы. 1. а) $\varphi(t) = -t + \int_0^t (s-t) \varphi(s) ds$; б) $\varphi(t) = 1 - 2t - 4t^2 +$

$+\int_0^t [3 + 6(t-s) - 4(t-s)^2] \varphi(s) ds$; в) $\varphi(t) = \cos t - t + \int_0^t (s-t) \varphi(s) ds$.

2. $\lambda_1 = \frac{3}{2}, \lambda_2 = \frac{5}{2}$; $\varphi_1(t) = t, \varphi_2(t) = t^2$. а) $R(t, s, \lambda) = e^{t^2 - s^2 + \lambda(t-s)}$,

$\varphi(t) = e^{t^2 + 2t} (1 + 2t)$; б) $R(t, s, \lambda) = \frac{1+t^2}{1+s^2} e^{\lambda(t-s)}, \varphi(t) = e^t (1+t^2)$;

в) $R(t, s, \lambda) = \frac{2+\cos t}{2+\cos s} e^{\lambda(t-s)}, \varphi(t) = e^t \sin t + (2+\cos t) e^t \ln \frac{3}{2+\cos t}$.

6. а) $R(t, s, \lambda) = \frac{2 \sin t \cos s}{2-\lambda} (|\lambda| < 2), \varphi(t) = \cos t - \frac{\pi}{6} \sin t$; б) $R(t, s, \lambda) =$

$= \frac{te^{s+1}}{e-2\lambda} \left(|\lambda| < \frac{e}{2} \right), \varphi(t) = 4et + (3t^2 + 1)e^{-t}$; в) $R(t, s, \lambda) = \frac{3ts}{3-2\lambda} +$

$+\frac{5t^2s^2}{5-2\lambda} \left(|\lambda| < \frac{3}{2} \right), \varphi(t) = 3 + 9t + \frac{10}{3}t^2$. 7. а) $1-\lambda$; б) $1-42\lambda$;

в) $1 - \lambda \int_a^b g(s) ds$; г) $1 - (e^a - 1)\lambda$; д) $1 + \frac{\lambda^2}{12}$. 9. а) $\sin t$; б) t ; в) 2 ; г) e^t ;

ж) $e^{\arctg t} - 1$. 10. а) $e^{\frac{t^2}{2}} (t^2 + 2) - 1$; б) $te^{\frac{t^2}{2}}$. 11. а) $\frac{9}{7}t - 2$; б) $ct - 2$,

c — произвольная постоянная; в) $18t^2 + 12t + 9$; г) $1 - \frac{2 \sin t}{1 - \frac{\pi}{2}}$. 12. а) $\frac{\pi^2}{\pi-1} \times$

$\times \sin^2 t + 2t - \pi$; б) $\frac{1+q^2}{1+q^2-\lambda} (\lambda \neq q^2 + 1)$; в) при $\lambda \neq \pm \frac{3}{2}$ $\varphi(t) =$

$= \frac{3t^2}{3-2\lambda} + \frac{3t}{3+2\lambda}$; при $\lambda = \pm \frac{3}{2}$ решений нет; г) при $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \pm \frac{1}{2} \right\}$

$\varphi(t) = 1 - \frac{2t}{\lambda} - \frac{\pi^2 \lambda \cos t}{6(1+2\lambda)}$; при $\lambda = \frac{1}{2}$ $\varphi(t) = \frac{4}{3} - \frac{2t}{\pi} + c(8 + \pi^2 \cos t)$,

e — произвольная постоянная; при $\lambda = -\frac{1}{2}$ решений нет. 13. а) 1; б) $2e^{t-s}(1+t-s)$. 14. а) $t - \frac{t^2}{2}$; б) $\frac{1}{3}(2\cos\sqrt{3}t + 1)$. 15. Если $\lambda \neq 1$ и $\lambda \neq -n^2\pi^2$ ($n \in \mathbb{N}$), то $\varphi(t) = \cos \pi t + \lambda \left[\frac{1+e}{1+\pi^2} \cdot \frac{e^t}{\lambda-1} - \frac{\pi}{2(\lambda+\pi^2)} (\sin \pi t + \pi \cos \pi t) \right]$; при $\lambda = 1$ и $\lambda = -n^2\pi^2$ решений нет; при $\lambda = -n^2\pi^2$ ($n = 2, 3, \dots$) $\varphi(t) = \cos \pi t + \lambda \left[\frac{1+e}{1+\pi^2} \cdot \frac{e^t}{\lambda-1} - \frac{\pi}{2(\lambda+\pi^2)} (\sin \pi t + \pi \cos \pi t) \right] + C (\sin \pi t + \pi \cos \pi t)$, где C — произвольная постоянная.

$$16. \varphi(t) = \frac{2\mu \cos \frac{\mu}{2} \cos \mu \left(t - \frac{1}{2}\right) - \sin \mu t}{\mu (\mu \sin \mu - 1)}, \text{ где } \mu = \sqrt{2\lambda}; \mu (\mu \sin \mu - 1) \neq 0.$$

$$17. \lambda_n = -n^2\pi^2. \text{ При } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\lambda_n : n \geq 1\} \quad \varphi(t) = \frac{\pi^2}{\pi^2 + \lambda} \sin \pi t; \text{ при } \lambda = \lambda_n$$

$$(n \geq 2) \quad \varphi(t) = \frac{1}{1-n^2} \sin \pi t + C \sin n\pi t; \text{ при } \lambda = \lambda_1 \text{ решений нет. 18. При } \lambda \in$$

$$\mathbb{C} \setminus \left\{ \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 : n \geq 0 \right\} \quad \varphi(t) = \sin \pi t +$$

$$+ \frac{2\lambda}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi t}{\left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n + \frac{3}{2}\right)} \left[\lambda - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 \right]$$

$$\text{при } \lambda = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 \quad (n \geq 0) \text{ решений нет. 20. } \frac{1}{3} < a < 3. 21. \int_0^1 t^2 y(t) dt = 0.$$

$$23. \text{ а) } \mathbb{C} \setminus \left\{ \pm \frac{2}{\pi} \right\}; \text{ б) } \mathbb{C} \setminus \left\{ \pm \frac{4}{\sqrt{\pi^2 - 4}} \right\}.$$

§ 5. ЭЛЕМЕНТЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Этот параграф посвящен рассмотрению некоторых понятий, связанных с дифференцированием в линейных нормированных пространствах.

1. **Сильный дифференциал (Фреше).** Пусть E_1 и E_2 — банаховы пространства и A — отображение (не обязательно линейное), действующее из E_1 в E_2 и определенное на некотором открытом подмножестве $\mathscr{D}(A)$ пространства E_1 . Значение оператора A на элементе x из $\mathscr{D}(A)$ будем записывать иногда в виде $A(x)$.

Оператор A называется *дифференцируемым* в точке $x_0 \in \mathscr{D}(A)$, если существует такой линейный непрерывный оператор $A'(x_0)$ (т. е. $A'(x_0) \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$), что

$$A(x_0 + h) - A(x_0) = A'(x_0)(h) + \varepsilon(x_0, h), \quad (1)$$

где $\varepsilon(x_0, h) \in E_2$ и $\frac{\|\varepsilon(x_0, h)\|_2}{\|h\|_1} \rightarrow 0$ при $\|h\|_1 \rightarrow 0$.

Оператор $A'(x_0)$ называется *производной Фреше* (или *сильной производной*) оператора A в точке x_0 , а выражение $A'(x_0)(h)$ (представляющее собой при каждом $h \in E_1$ элемент пространства E_2) — *дифференциалом Фреше* (или *сильным дифференциалом*) отображения A в точке x_0 .

В случае $E_2 = \mathbb{R}$, т. е. $A = f$, сильный дифференциал функционала / будем называть (см. гл. 3, § 6) *вариацией* этого функционала.

Если оператор A дифференцируем в точке x_0 , то его производная Фреше определяется единственным образом.

2. Слабый дифференциал (Гато). Линейный непрерывный оператор $A'_c(x_0)$ называется *производной Гато* (слабой производной) оператора $A: E_1 \rightarrow E_2$ в точке $x_0 \in \mathcal{D}(A)$, если при всех $h \in \mathcal{D}(A)$

$$A'_c(x_0)(h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{A(x_0 + th) - A(x_0)}{t} = \frac{d}{dt} A(x_0 + th) \Big|_{t=0},$$

где сходимость понимается как сходимость по норме пространства E_2 . Выражение $A'_c(x_0)(h)$ называется при этом *дифференциалом Гато* (слабым дифференциалом) оператора A в точке x_0 .

Оказывается, что если оператор A имеет в точке производную Фреше, то она является и производной Гато. А если в окрестности точки x_0 существует непрерывный Гато, причем непрерывная в точке x_0 (как оператор от x), то она является производной Фреше.

3. Производные высших порядков. Напомним, что оператор $B = B(\cdot, \cdot): E_1 \times E_1 \rightarrow E_2$ называется *билинейным*, если он является линейным непрерывным по каждому переменному (при фиксированном другом). Билинейный оператор называется *симметричным*, если

$$B(x_1, x_2) = B(x_2, x_1) \quad (\forall x_1, x_2 \in E_1).$$

Каждый симметричный билинейный оператор B порождает по формуле $B_2(x) = B(x, x)$ ($\forall x \in E_1$) оператор B_2 , называемый *квадратичным*.

Оператор A , действующий из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2 , называется *дважды дифференцируемым по Фреше* в точке x_0 , если

$$A(x_0 + h) - A(x_0) = B_1(h) + \frac{1}{2} B_2(h) + \varepsilon(x_0, h),$$

где $B_1 = B_1(x_0)$ — линейный относительно h и непрерывный оператор, $B_2 = B_2(x_0)$ — квадратичный относительно h оператор, а $\varepsilon(x_0, h) \in E_2$ и $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|\varepsilon(x_0, h)\|_2}{\|h\|_1^2} = 0$.

Квадратичный оператор $B_2(x_0)$ называется при этом *второй производной Фреше* оператора A в точке x_0 : $B_2(x_0) = A''(x_0)$, а выражение $B_2(x_0)(h)$ — *вторым дифференциалом Фреше* оператора A в точке x_0 .

Очень часто (см. пп. 4 и 5) рассматривают и вторую последовательную производную Фреше оператора — производную Фреше от первой производной Фреше. Она является билинейным оператором относительно приращений h и h_1 . Аналогично можно определить также n -ю последовательную производную Фреше оператора A , как производную от $(n-1)$ -й производной. Она будет полилинейным оператором относительно приращений $h, h_1, \dots, h_{n-1}$ (т. е. линейным непрерывным оператором по каждому переменному при фиксированных остальных).

Квадратичный оператор $B_2^{(c)}(x_0)$ называется *второй производной Гато* оператора A в точке x_0 , если для любого $h \in \mathcal{D}(A)$

$$\frac{d^2}{dt^2} A(x_0 + th) \Big|_{t=0} = B_2^{(c)}(x_0)(h).$$

Выражение $B_2^{(c)}(x_0)(h)$ — это *второй дифференциал Гато* оператора A в точке x_0 .

Можно говорить и о второй последовательной производной Гато, как о производной Гато от первой производной Гато. Она является билинейным оператором. Рассмотрением последовательных производных высших порядков мы в дальнейшем (см. п. 4) и ограничимся.

4. Формула Тейлора. Обобщением формулы (1) для сильного дифференциала оператора A является соотношение, содержащееся в нижеследующем утверждении.

Теорема. Если A — отображение, действующее из E_1 в E_2 и определенное в области $\mathcal{D}(A) \subset E_1$, и для него существует n -я последовательная сильная производная

$A^{(n)}(x_0)$, представляющая собой равномерно непрерывную функцию от x в $\mathscr{D}(A)$, то

$$A(x+h) - A(x) = A'(x)(h) + \frac{1}{2!} A''(x)(h, h) + \dots + \frac{1}{n!} A^{(n)}(x)(h, \dots, h) + \omega(x, h), \quad (2)$$

где $\|\omega(x, h)\|_2 = o(\|h\|_1^n)$.

5. Дифференцирование абстрактных функций. Пусть E — линейное нормированное пространство, а $\mathbb{R}$ — числовая прямая. Оператор $x = x(t) : \mathbb{R} \rightarrow E$ (вообще говоря, нелинейный) называется *абстрактной функцией* числового аргумента t . Очевидно, что абстрактные функции можно складывать и умножать на числа, т. е. они образуют линейное пространство.

Производная $x'(t)$ функции $x(t)$ определяется как обычно:

$$x'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t},$$

где указанный предел рассматривается по норме пространства E .

Заметим, что для абстрактной функции слабая дифференцируемость совпадает с сильной (это утверждение проверяется очевидным образом), а все сказанное в пп. 1—4 в общем случае справедливо и для абстрактных функций.

Если абстрактная функция зависит от нескольких переменных, то обычным способом вводятся также понятия ее частных производных.

Отметим, что важный частный случай абстрактных функций представляют собой оператор-функции, т. е. элементы $A(\lambda)$ пространства $\mathscr{L}(E_1, E_2)$, зависящие от числовой переменной λ . Напомним, что если E_1 и E_2 — банаховы пространства, то банаховым является и $\mathscr{L}(E_1, E_2)$.

6. Интегрирование абстрактных функций. Как и обычно в анализе, можно ввести понятие риманова интеграла от абстрактной функции. Пусть $x = x(t)$ ($a \leq t \leq b$) — некоторая абстрактная функция в банаховом пространстве E . Будем рассматривать разбиения отрезка $[a, b]$ на n частей точками t_k , где

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} < \dots < t_n = b.$$

Если для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех тех разбиений отрезка на части, для которых $|t_{k+1} - t_k| < \delta$,

$$\left\| \sum_{k=0}^{n-1} x(t_k)(t_{k+1} - t_k) - y \right\| < \varepsilon,$$

где $y \in E$, то элемент y называется *интегралом Римана* от функции $x(t)$ по отрезку $[a, b]$ и обозначается $\int_a^b x(t) dt$.

Можно показать, что если функция $x(t)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то интеграл $\int_a^b x(t) dt$ существует.

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(t, x), \quad (3)$$

где $x = x(t)$ — искомый, а $\varphi(t, x)$ — заданный элемент банахова пространства, причем функция φ непрерывна по t и как функция от x удовлетворяет условию Липшица

$$\|\varphi(t, x_1) - \varphi(t, x_2)\| \leq L \|x_1 - x_2\| \quad (L = \text{const}).$$

Тогда, рассмотрев наряду с (3) уравнение

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \varphi(\tau, x(\tau)) d\tau \quad (4)$$

$$(a \leq t_0 \leq t \leq t_0 + \delta \leq b; \delta > 0; x_c = x(t_0)),$$

можно проверить, что при $L\delta < 1$ уравнение (4), а с ним и (3), имеет единственное решение $x(t)$ на отрезке $[t_0; t_0 + \delta]$ такое, что $x(t_0) = x_0$.

О теории дифференцирования в банаховых пространствах см. в [5; 20; 33; 39].

Примеры решения задач

1. Пусть функция $k(t, s, x)$ непрерывна по совокупности переменных в области $\mathcal{D} = \{(t, s, x) : 0 \leq t, s \leq 1; |x| \leq r\}$ и имеет в $\mathcal{D}$ непрерывную производную $k'_x(t, s, x)$. Доказать, что оператор Урысона

$$(Ax)(t) = \int_0^1 k(t, s, x(s)) ds$$

определен в шаре $B[0, r] \subset C[0; 1]$ и его значения принадлежат пространству $C[0; 1]$. Найти производную Фреше этого оператора в каждой точке x_0 открытого шара $B(0, r)$.

Решение. Первое утверждение сформулированной задачи является очевидным следствием известных свойств интегралов, зависящих от параметра.

Найдем производную Фреше оператора A в точке $x_0 \in B(0, r)$. Рассмотрим

$$A(x_0 + h)(t) - (Ax_0)(t) = \int_0^1 [k(t, s, x_0(s) + h(s)) - k(t, s, x_0(s))] ds.$$

Поскольку выражение $k(t, s, x_0(s) + h(s)) - k(t, s, x_0(s))$ по теореме Лагранжа о конечных приращениях равно

$$k'_x(t, s, x_0(s) + \theta h(s)) h(s),$$

где $\theta = \theta(t, s, h, x_0)$ и $0 < \theta < 1$, или (учитывая существование непрерывной производной k'_x)

$$k(t, s, x_0(s) + h(s)) - k(t, s, x_0(s)) = k_x(t, s, x_0(s)) h(s) + \varepsilon(t, s, h, x_0) h(s),$$

где $\max_{t, s \in [0; 1]} |\varepsilon(t, s, h, x_0)| \rightarrow 0$ при $\max_{s \in [0; 1]} |h(s)| \rightarrow 0$, то

$$A'(x_0)(h(t)) = \int_0^1 k'_x(t, s, x_0(s)) h(s) ds.$$

2. Пусть оператор $A : E_1 \rightarrow E_2$ имеет в точке x_0 слабую производную Гато $A'_c(x_0)$, причем равенство

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{A(x_0 + th) - A(x_0)}{t} = A'_c(x_0)h$$

выполняется равномерно по $h: \|h\|_1 = 1$. Доказать, что тогда существует производная Фреше $A'(x_0)$ и $A'(x_0) = A'_c(x_0)$.

Решение. В силу условия сформулированного утверждения для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при $|t| < \delta$ равномерно при $\|h\|_1 = 1$

$$\left\| \frac{1}{t} [A(x_0 + th) - A(x_0)] - A'_c(x_0)h \right\|_2 < \varepsilon.$$

Отсюда, полагая

$$\frac{1}{t} [A(x_0 + th) - A(x_0)] - A'_c(x_0)(h) = \frac{1}{t} \omega(x_0, th),$$

приходим к равенству

$$A(x_0 + th) - A(x_0) = A'_c(x_0)(th) + \omega(x_0, th),$$

где $\frac{\|\omega(x_0, th)\|_2}{\|th\|_1} < \varepsilon$, ибо $\|h\|_1 = 1$. Следовательно, $A'(x_0) = A'_c(x_0)$, т. е. производная Фреше существует и совпадает с производной Гато.

3. Пусть $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_2^1$ и

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } y = x^2, \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{в остальных точках } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Найти производную Гато функции φ в точке $(0, 0)$.

Решение. Исходя из определения производной Гато, рассмотрим

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(0 + th, 0 + tg) - \varphi(0, 0)}{t},$$

где (h, g) — произвольная точка из $\mathbb{R}^2$. Но $\frac{\varphi(th, tg) - \varphi(0, 0)}{t} = 0$ при всех $(h, g) \in \mathbb{R}^2$, ибо $\varphi(0, 0) = 0$ (по определению φ) и $\varphi(th, tg) = 0$, так как при фиксированном (h, g) и малых значениях t точки (th, tg) не могут лежать на параболе $y = x^2$. Значит, данная функция φ дифференцируема в точке $(0, 0)$ в смысле Гато и ее дифференциал Гато в этой точке равен нулю.

Нетрудно видеть, что эта же функция не дифференцируема в точке $(0, 0)$ в смысле Фреше, ибо она даже не непрерывна в этой точке.

4. Пусть $x(t): \mathbb{R} \rightarrow E$ — абстрактная функция, а $\varphi(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — обычная скалярная функция вещественного переменного t и в некоторой точке t_0 существуют производные $x'(t_0)$ и $\varphi'(t_0)$. Найти производную в точке t_0 абстрактной функции $y(t) = \varphi(t)x(t)$.

Решение. Имеем

$$\begin{aligned} y'(t_0) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[\varphi(t_0 + \Delta t) - \varphi(t_0)]x(t_0 + \Delta t) + [\varphi(t_0 + \Delta t) - \varphi(t_0)]x(t_0)}{\Delta t} = \\ &= \varphi(t_0)x'(t_0) + \varphi'(t_0)x(t_0), \end{aligned}$$

так как $\varphi(t_0 + \Delta t) \rightarrow \varphi(t_0)$ при $\Delta t \rightarrow 0$ в силу непрерывности дифференцируемой в точке t_0 скалярной функции $\varphi(t)$.

5. Пусть оператор-функция $A(\lambda)$ дифференцируема в точке λ_0 и непрерывно обратима в некоторой окрестности этой точки. Доказать, что $A^{-1}(\lambda)$ также дифференцируема при $\lambda = \lambda_0$ оператор-функция, и найти ее производную.

Решение. Будем исходить из соотношений $A^{-1}(\lambda) A(\lambda) = I(\lambda)$, справедливых для всех λ из указанной окрестности точки λ_0 (здесь $I(\lambda)$ — единичная оператор-функция). Тогда при достаточно малых $\Delta\lambda$

$$A^{-1}(\lambda_0 + \Delta\lambda) A(\lambda_0 + \Delta\lambda) - A^{-1}(\lambda_0) A(\lambda_0) = 0$$

■

$$A^{-1}(\lambda_0 + \Delta\lambda) [A(\lambda_0 + \Delta\lambda) - A(\lambda_0)] + \\ + [A^{-1}(\lambda_0 + \Delta\lambda) - A^{-1}(\lambda_0)] A(\lambda_0) = 0.$$

Отсюда

$$A^{-1}(\lambda_0 + \Delta\lambda) - A^{-1}(\lambda_0) = -A^{-1}(\lambda_0 + \Delta\lambda) [A(\lambda_0 + \Delta\lambda) - \\ - A(\lambda_0)] A^{-1}(\lambda_0)$$

и $(A^{-1})'(\lambda_0) = -A^{-1}(\lambda_0) A'(\lambda_0) A^{-1}(\lambda_0)$, так как, по условию, оператор-функция $A^{-1}(\lambda)$ непрерывна в точке $\lambda = \lambda_0$:

$$\lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} A^{-1}(\lambda_0 + \Delta\lambda) = A^{-1}(\lambda_0).$$

Задачи для самостоятельной работы

1. Пусть A и B — два непрерывных отображения, действующих из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2 . Доказать, что если A и B дифференцируемы (в смысле Фреше) в точке $x_0 \in E_1$, то $A + B$ и αA ($\alpha = \text{const}$) также дифференцируемы в x_0 и

$$(A + B)'(x_0) = A'(x_0) + B'(x_0), \quad (\alpha A)'(x_0) = \alpha A'(x_0).$$

2. Пусть E_1, E_2, E_3 — три банаховых пространства, $U(x_0)$ — окрестность точки x_0 в E_1 , A — непрерывное отображение этой окрестности в E_2 , $y_0 = Ax_0$, $V(y_0)$ — окрестность точки $y_0 \in E_2$ и B — непрерывное отображение этой окрестности в E_3 . Тогда, если отображение A дифференцируемо (в смысле Фреше) в точке x_0 , а B дифференцируемо в точке y_0 , то отображение $C = BA$ (определенное и непрерывное в некоторой окрестности точки x_0) дифференцируемо в точке x_0 и

$$C'(x_0) = B'(y_0) \cdot A'(x_0).$$

Доказать это утверждение (теорема о производной сложной функции).

3. Пусть функция $\varphi(x, \xi, u)$ непрерывна по совокупности своих переменных при $a \leq x, \xi \leq b, -\infty < u < +\infty$ вместе с частной производной $\varphi_u(x, \xi, u)$ и

$$F(u) = u(x) - \int_a^b \varphi(x, \xi, u(\xi)) d\xi.$$

Доказать, что оператор F дифференцируем в каждой точке $u_0 \in C[a; b]$ ■

$$F'(u_0)(h) = h(x) - \int_a^b \varphi_u(x, \xi, u_0(\xi)) h(\xi) d\xi.$$

4. На примере функции

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 + x_2 + \frac{x_1^3 x_2}{x_1^4 + x_2^2}, & x_1^2 + x_2^2 \neq 0, \\ 0, & x_1^2 + x_2^2 = 0, \end{cases}$$

проверить, что из слабой дифференцируемости оператора в точке еще не вытекает его сильная дифференцируемость.

5. На примере скалярной функции $f(t) = t^3 \cos \frac{1}{t^2}$ проверить, что из существования второй производной Фреше оператора в точке (в частном случае при $t = 0$) не вытекает существование второй производной Гато.

6. Пусть $x(t)$ — дифференцируемая абстрактная функция в банаховом пространстве E_1 и A — некоторое непрерывное отображение E_1 в банахово пространство E_2 (т. е. $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$). Доказать, что:

- $(Ax)'(t) = (Ax')(t)$;
- $\int_a^b (Ax)(t) dt = A \left(\int_a^b x(t) dt \right)$.

§ 6. ОСНОВЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Рассмотрим некоторый класс функций (или кривых) и пусть на нем определен функционал f . Во многих разделах математического анализа, геометрии, механики и т. д. часто возникают задачи, в которых требуется найти наибольшее или наименьшее значение этого функционала. Раздел «исчисления функционалов», в котором изучают методы решения подобных экстремальных задач, называется вариационным исчислением.

Поскольку, по определению, функционал — это функция, в которой роль независимой переменной играет функция (или кривая), то ясно, что вариационное исчисление имеет своей целью такое обобщение построенный классического анализа, которое позволяет решать экстремальные задачи для функционалов.

Это исчисление начало развиваться с 1696 г. и после фундаментальных работ Л. Эйлера оформилось впоследствии в самостоятельную дисциплину со своими методами исследования. Поэтому Л. Эйлера с полным основанием считают основоположником этой математической дисциплины.

Отметим, что развитие вариационного исчисления в огромной мере стимулировано следующими три классические задачи:

а) **Задача о брахистохроне:** требуется определить такую пространственную линию (называемую брахистохрой), соединяющую две точки M_1 и M_2 (не лежащие на одной вертикальной прямой), что материальная точка скатится по ней из M_1 в M_2 под действием силы тяжести в кратчайшее время. Задача поставлена в 1696 г. И. Бернулли, а решена И. Бернулли, Я. Бернулли, И. Ньютоном и Ф. Лопиталем. Оказалось, что брахистохрона — это циклоида, лежащая в вертикальной плоскости и проходящая через данные точки M_1 и M_2 .

б) **Изопериметрическая задача:** среди замкнутых плоских линий данной длины требуется найти ту, которая ограничивает максимальную площадь. Еще в древней Греции было известно, что такой линией является окружность. Однако общие методы решения подобного типа задач впервые были разработаны Л. Эйлером.

в) **Задача о геодезических линиях:** требуется определить линию наименьшей длины, соединяющую две заданные точки на некоторой поверхности. Такие линии называются геодезическими, а задача о их нахождении решена в 1697 г. И. Бернулли. Общий метод решения подобных условных задач дан в работах Л. Эйлера и Ж. Лагранжа.

Несложно проверить, что во всех трех случаях речь идет об экстремальных задачах для функционалов вида

$$f(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx, \quad (1)$$

где F — заданная функция своих аргументов, а $y = y(x)$ — искомая функция. Именно такого типа функционалы мы и будем в дальнейшем рассматривать.

Как известно, функционал $f(y)$ называется непрерывным, если малому изменению $y(x)$ соответствует малое изменение функционала $f(y)$. Однако ясно, что такое определение нуждается в уточнении понятия «малости». Как правило, будем рассматривать в качестве исходных только классы тех функций $y(x)$, которые принадлежат пространству $C[a; b]$ или $C^{(k)}[a; b]$ (см. гл. 2, § 1). Поэтому за меру близости функций $y(x)$ и $y_1(x)$ естественно брать норму их разности в указанных пространствах. В связи с этим иногда говорят, что $y(x)$ и $y_1(x)$ близки в смысле близости нулевого порядка, если мал модуль разности $y(x) - y_1(x)$ (т. е. функции близки по норме пространства $C[a, b]$), и близки в смысле близости k -го порядка, если малы модули разностей $y(x) - y_1(x)$, $y'(x) - y_1'(x)$, ..., $y^{(k)}(x) - y_1^{(k)}(x)$ (т. е. мала норма функции $y(x) - y_1(x)$ в пространстве $C^{(k)}[a; b]$).

1. Вариация функционала. Введем понятие дифференциала (вариации) функционала (см. также § 5), аналогичное известному из курса математического анализа понятию дифференциала функции.

Пусть E — некоторое линейное нормированное пространство, f — некоторый функционал (вообще говоря, нелинейный) над E и y_0 — фиксированный элемент из E . Рассмотрим приращение функционала

$$(\Delta f)(y_0) = f(y_0 + h) - f(y_0),$$

соответствующее приращению h ($h \in E$) «независимой переменной» y . При фиксированном y_0 это приращение также является некоторым функционалом над E (от h). Если $(\Delta f)(y_0)$ можно представить в виде

$$(\Delta f)(y_0) = \delta f(y_0, h) + r(y_0, h), \quad (2)$$

где $\delta f(y_0, h)$ — линейный непрерывный функционал (по отношению к h), а $r(y_0, h) = o(\|h\|)$ при $\|h\| \rightarrow 0$, то функционал $\delta f(y_0, h)$ будем называть дифференциалом или вариацией функционала f в точке y_0 . В этом случае говорят, что функционал f дифференцируем в точке y_0 .

Иными словами, $\delta f(y_0, h)$ — это главная, линейная по отношению к h , часть приращения функционала f .

Нетрудно видеть, что дифференциал функционала (если он существует) определяется однозначно. Кроме того, если исходный функционал f линейен, то $\delta f(y_0, h) = f(h)$ ($\forall y_0 \in E$).

Справедлива следующая теорема (см. § 5, п. 2).

Теорема 1. Если функционал f дифференцируем в точке y_0 , то при любом $h \in E$ функция $f(y_0 + th)$, как функция от t , дифференцируема в обычном смысле от t при $t = 0$ и ее производная в этой точке равна $\delta f(y_0, h)$, т. е.

$$\delta f(y_0, h) = \frac{d}{dt} [f(y_0 + th)]|_{t=0}.$$

Исходя из приведенного выше определения, несложно проверить, что если ядро $F(x, y, y')$ функционала (1) является непрерывной функцией, обладающей непрерывными производными до второго порядка включительно в области $a \leq x \leq b$, $-\infty < y, y' < +\infty$, то в пространстве $C^{(1)}[a; b]$ вариация функционала (1) имеет вид

$$\delta f(y, h) = \int_a^b \left[\frac{\partial F(x, y(x), y'(x))}{\partial y} h(x) + \frac{\partial F(x, y(x), y'(x))}{\partial y'} h'(x) \right] dx. \quad (3)$$

2. Экстремум функционала. Пусть f — некоторый дифференцируемый функционал над линейным нормированным пространством E . Говорят, что он достигает в точке y_0 минимума (соответственно максимума), если для всех y из некоторой окрестности точки y_0 выполняется неравенство $f(y) \geq f(y_0)$ (соответственно $f(y) \leq f(y_0)$).

Как правило, будем рассматривать функционалы, определенные на конкретных множествах дифференцируемых (в обычном смысле) функций. Это будут множества либо из пространства $C[a; b]$, либо из $C^{(1)}[a; b]$. В связи с этим различают два вида

экстремума: сильный и слабый. А именно, значение $f(y_0)$ называется *сильным* (соответственно *слабым*) *экстремумом* функционала f , если оно является экстремальным по отношению к тем y , которые удовлетворяют условию $\|y - y_0\| < \varepsilon$ (соответственно $\|y - y_0\|_1 < \varepsilon$), где $\|\cdot\|$ (соответственно $\|\cdot\|_1$) — норма в $C[a, b]$ (соответственно $C^{(1)}[a, b]$).

Иными словами, сильный экстремум достигается по отношению к кривым, близким к $y_0(x)$ в смысле близости нулевого порядка, а слабый — на кривых, близких в смысле близости первого порядка.

Ясно, что всякий сильный экстремум является в то же время и *слабым* экстремумом.

Материал, рассматриваемый в этом параграфе, относится в основном к исследованиям функционалов на слабый экстремум.

3. Необходимое условие экстремума. В классическом анализе, как известно, дифференцируемая функция может достигать экстремума только в тех точках, в которых ее производная равна нулю. Аналогичное утверждение справедливо и для функционалов.

Теорема 2. Для того чтобы функционал f достигал экстремума в точке y_0 , необходимо, чтобы его дифференциал (если он существует) обращался в этой точке в нуль.

Всякая точка y_0 , в которой первая вариация $\delta f(y_0, h)$ функционала f обращается в нуль при любом h , называется *стационарной точкой* этого функционала.

4. Функционалы вида $f(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx$. Напомним, что вариация рассматриваемого функционала (1) представима в виде (3).

Найдем необходимые условия, при выполнении которых функционал (1) имеет слабый экстремум в классе тех функций из $C^{(1)}[a, b]$, которые удовлетворяют условиям

$$y(a) = A, \quad y(b) = B. \quad (4)$$

Заметим, что для применения теоремы 2 необходимо требовать, чтобы функции $h(x)$, фигурирующие в определении вариации функционала f , удовлетворяли граничным условиям $h(a) = h(b) = 0$ (только в этом случае для функций $y(x) + h(x)$ справедливы соотношения (4)).

При сделанных предположениях необходимым условием экстремума является

$$\delta f(y_0, h) = \int_a^b (F_y h + F_{y'} h') dx = 0,$$

где через F_y и $F_{y'}$ обозначены частные производные функции F по переменным y и y' соответственно.

Воспользуемся теперь следующим утверждением.

Лемма. Если

$$\int_a^b [a(x)h(x) + b(x)h'(x)] dx = 0$$

для каждой функции $h(x)$ из $C^{(1)}[a, b]$ такой, что $h(a) = h(b) = 0$, то $b(x)$ дифференцируема и $a(x) = b'(x) = 0$.

Отсюда вытекает следующая теорема.

Теорема 3. Для того чтобы функционал f вида (1) при $y = y_0$ достигал слабого экстремума на множестве функций, удовлетворяющих условиям (4), необходимо, чтобы функция $y_0(x)$ удовлетворяла уравнению Эйлера

$$F_y(x, y_0(x), y_0'(x)) - \frac{d}{dx} F_{y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) = 0. \quad (5)$$

Уравнение Эйлера — это дифференциальное уравнение второго порядка. Его решения зависят поэтому от двух произвольных постоянных, которые определяются из краевых условий (4).

Интегральные кривые уравнения Эйлера (5) в дальнейшем будут называться *экстремалими*.

Итак, для нахождения кривой, реализующей экстремум функционала (1), нужно проинтегрировать уравнение Эйлера и определить входящие в общее решение постоянные из условий (4). Экстремум может достигаться только на таких кривых. Далее следует воспользоваться достаточными условиями, рассматриваемыми ниже.

Сделаем, однако, сперва несколько замечаний относительно интегрирования уравнения Эйлера. Более точно, укажем некоторые частные случаи, в которых это уравнение можно привести к дифференциальному уравнению первого порядка или полностью проинтегрировать в квадратурах.

а) Пусть функция F не зависит от y' . Тогда уравнение Эйлера (5) принимает вид $F_y(x, y(x)) \equiv 0$, т. е. представляет собой не дифференциальное уравнение, а обычное уравнение, определяющее одну или несколько кривых.

б) Если подынтегральная функция F не зависит от y , то соответствующее уравнение (5): $\frac{d}{dx} F_{y'}(x, y'(x)) \equiv 0$ имеет первый интеграл $F_{y'} = C$. Это уравнение первого порядка, не содержащее y . Решив его относительно y' , получим $y' = \varphi(x, C)$. Значит, y отсюда находится квадратурой.

в) Если F не зависит от x , то

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \equiv F_y - F_{y'y'} \cdot y'' - F_{yy'} \cdot y' = 0.$$

Отсюда, после умножения на y' , следует, что

$$\frac{d}{dx} (F - y' F_{y'}) = 0,$$

т. е. $F - y' F_{y'} = C$. Это соотношение определяет первый интеграл соответствующего уравнения Эйлера.

5. Вторая вариация функционала. Для нахождения достаточных условий экстремума, как и в классическом анализе, необходима дальнейшая расшифровка остатка $r(y_0, h)$ в формуле (2). Для этого напомним еще несколько определений (см. § 5).

Пусть E — некоторое линейное нормированное пространство, а $f(x, y)$ — функционал над E , зависящий от двух элементов. Этот функционал называется *билинейным*, если он представляет собой линейный непрерывный функционал от y при каждом фиксированном x , а при каждом фиксированном y — линейный непрерывный функционал от x . Полагая в билинейном функционале $y = x$, получаем функционал над E , который называется *квадратичным*.

Введем понятие второй вариации (второго дифференциала) функционала. Пусть f — дифференцируемый функционал над E , причем остаток $r(y_0, h)$ в формуле (2) можно разложить на квадратичный функционал $f_1(y_0, h)$ от h и новый остаток $r_2(y_0, h) = o(\|h\|^2)$, т. е.

$$(\Delta f)(y_0) = \delta f(y_0, h) + f_1(y_0, h) + o(\|h\|^2). \quad (6)$$

Квадратичный функционал $f_1(y_0, h)$ в представлении (6) называется *второй вариацией* (вторым дифференциалом) функционала f и обозначается $\delta^2 f(y_0, h)$. Вторая вариация (как и первая) также определяется однозначно.

Если, например, функция F , определяющая функционал f вида (1), имеет непрерывные производные до третьего порядка включительно, то

$$\delta^2 f(y_0, h) = \int_a^b [F_{yy} h^2 + 2F_{yy'} h h' + F_{y'y'} (h')^2] dx. \quad (7)$$

Теорема 4. Для того чтобы функционал f имел при $y = y_0$ минимум (соответственно максимум), необходимо, чтобы $\delta f(y_0, h) = 0$ и выполнялось условие $\delta^2 f(y_0, h) \geq 0$ (соответственно $\delta^2 f(y_0, h) \leq 0$) для всех допустимых значений h .

Нетрудно проверить, что если существует такая постоянная $k > 0$, что $\delta^2 f(y_0, h) \geq k \|h\|^2$ для всех h (при этом квадратичный функционал $\delta^2 f(y_0, h)$ называется *сильно положительным*), то функционал f имеет в стационарной точке y_0 минимум.

Если существует постоянная $k < 0$ такая, что $\delta^2 f(y_0, h) \leq k \|h\|^2$, то точка y_0 является точкой максимума функционала f .

Учитывая граничные условия $h(a) = h(b) = 0$, формулу (7) можно представить в виде

$$\delta^2 f(y_0, h) = \int_a^b (Qh^2 + P(h')^2) dx, \quad (8)$$

где $Q = F_{yy} - \frac{d}{dx} F_{y'y'}$, а $P = F_{y'y'}$ (здесь $y = y_0(x)$ — некоторая экстремаль функционала (1)).

Из этого представления и теоремы 4 получаем следующую теорему.

Теорема 5 (Лежандра). Для того чтобы функционал (1) достигал на экстремали $y = y_0(x)$ минимума (соответственно максимума), необходимо, чтобы вдоль этой кривой

$$F_{y'y'} \geq 0 \text{ (соответственно } F_{y'y'} \leq 0). \quad (9)$$

Условие (9) называется *условием Лежандра*. Если $F_{y'y'} > 0$ (или $F_{y'y'} < 0$), то это условие называют обычно *усиленным условием Лежандра*.

6. Уравнение Якоби. Сопреженные точки. Рассмотрим квадратичный функционал (8) на множестве функций h , удовлетворяющих условиям $h(a) = h(b) = 0$. Запишем для него условие Эйлера

$$Qh - \frac{d}{dx} (Ph') = 0. \quad (10)$$

Оно называется *уравнением Якоби* для исходного функционала (1).

Определение. Точка $\tilde{x}$ называется *сопряженной с точкой $x = a$* , если уравнение (10) имеет решение, не равное нулю тождественно, обращающееся в нуль при $x = a$ и при $x = \tilde{x}$.

Если $h(x)$ — некоторое ненулевое решение уравнения (10), удовлетворяющее условиям $h(a) = h(b) = 0$, то и функция $ch(x)$ ($c = \text{const} \neq 0$) является таким же решением. Поэтому для определенности на $h(x)$ налагают следующее условие нормировки: $h'(a) = 1$.

Пусть $h(x)$ — некоторое решение уравнения (10), удовлетворяющее начальным условиям $h(a) = 0$, $h'(a) = 1$. Если $h(x) \neq 0$ при $x \in (a; b)$, то говорят, что экстремаль $y_0(x)$ удовлетворяет *условию Якоби*, а если $h(x) \neq 0$ при $x \in (a; b]$, то говорят, что экстремаль $y_0(x)$ удовлетворяет *усиленному условию Якоби*.

Условие Якоби — необходимое для экстремума функционала (1).

7. Достаточные условия слабого экстремума. Сформулируем систему условий, достаточных для того, чтобы экстремаль $y = y_0(x)$ реализовала слабый экстремум функционала (1) с условиями $y(a) = A$, $y(b) = B$.

Теорема 6. Если допустимая кривая $y = y_0(x)$ (т. е. $y_0(a) = A$, $y_0(b) = B$) является экстремалью, вдоль этой кривой выполняется усиленное условие Лежандра

$$F_{y'y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) \geq 0$$

и на $(a; b]$ нет точек, сопряженных с a (усиленное условие Якоби), то эта кривая реализует слабый минимум функционала (1).

Если при сделанных предположениях выполняется условие

$$F_{y'y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) < 0,$$

то на кривой $y = y_0(x)$ функционал (1) достигает слабого максимума.

Иными словами, усиленные условия Лежандра и Якоби достаточны для того, чтобы экстремаль давала слабый экстремум функционала (1).

Отметим также один частный случай вариационной задачи для функционала вида (1), часто встречающийся в приложениях.

Теорема 7. Пусть функции $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$ и, кроме того, $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$. Если $y_0(x)$ есть экстремаль для функционала

$$f(y) = \int_a^b [p(x)(y')^2 + q(x)y^2 + 2y\varphi(x)] dx$$

и удовлетворяет граничным условиям $y(a) = A$, $y(b) = B$, то на ней реализуется минимум этого функционала.

Замечание. То обстоятельство, что легко проверяемых критериев существования экстремума в случае вариационных задач нет, подчеркивает различие между функциями и функционалами (в вопросе о достаточных условиях существования экстремумов). Однако если заранее известно, что функция или функционал имеют экстремум, и если показать, что некоторому необходимому условию существования экстремума удовлетворяет только один элемент, то этот элемент обязательно будет экстремально и необходимость в дальнейших исследованиях отпадает. Если о существовании экстремума заранее ничего не известно, то в экстремальности элемента можно убедиться лишь после проверки выполнения какого-нибудь достаточного условия.

8. Условный экстремум. По аналогии с понятием относительного экстремума для функций нескольких переменных в вариационном исчислении ставятся задачи об экстремуме некоторого функционала при условии, что искомая функция удовлетворяет некоторым дополнительным соотношениям («уравнениям связи»). На практике наиболее часто встречается следующая задача: среди кривых, проходящих через

точки (a, A) и (b, B) и на которых функционал $g(y) = \int_a^b G(x, y, y') dx$ принимает

заданное значение l , найти ту, на которой функционал $f(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx$ до-

стигает экстремума.

Рассмотрением этой простейшей задачи на условный экстремум мы и ограничимся. При ее решении предполагаем, что функции F и G имеют непрерывные частные производные до второго порядка включительно и что искомая кривая не является экстремалью функционала g .

Теорема 8. Если кривая $y = y_0(x)$ дает экстремум функционала f , удовлетворяет условиям $g(y_0) = l$, $y_0(a) = A$, $y_0(b) = B$ и не является экстремалью функционала g , то существует такая постоянная λ , что эта кривая является экстремалью функционала $f - \lambda g$.

Практически эта теорема используется следующим образом. Составляем уравнение Эйлера для функционала $f - \lambda g$ (т. е. $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} - \lambda \left(G_y - \frac{d}{dx} G_{y'} \right) = 0$) и находим его общее решение, содержащее λ и две произвольные постоянные. Указанные три величины находятся в дальнейшем из условий $g(y) = l$, $y(a) = A$ и $y(b) = B$.

Ясно, что здесь мы имеем полную аналогию с известным из анализа методом множителей Лагранжа отыскания условного экстремума функций нескольких переменных.

В качестве классического примера такого типа вариационных задач укажем на известную задачу Дидоны: найти линию $y = y(x)$, $y(a) = y(b) = 0$, которая при заданной длине l ($l > b - a$) ограничивает вместе с отрезком $[a; b]$ наибольшую площадь. Искомая кривая в этом случае — дуга окружности, проходящая через концы отрезка $[a; b]$.

Поэтому рассмотренный круг задач на условный экстремум носит название изопериметрических задач.

В заключение отметим, что мы рассмотрели лишь некоторые простейшие вариационные задачи. Интересные задачи для функционалов, либо зависящих от нескольких переменных, либо содержащих производные высших порядков или частные производные, вариационные задачи с подвижными концами, задачи на сильный экстремум и т. п. могут составить уже большой специальный курс.

О задачах вариационного исчисления и методах их решений см. в [17; 21].

Примеры решения задач

1. Найти вариацию функционала $f(y) = \sqrt{1 + [y'(a)]^2}$ в пространстве $C^{(1)}[a; b]$.

Решение. Рассмотрим такие приращения аргумента $h \in C^{(1)}[a; b]$, что $\|h\| = \max_{x \in [a; b]} |h(x)| + \max_{x \in [a; b]} |h'(x)| \rightarrow 0$. Тогда на основании известного разложения функции $\sqrt{1+x}$ при $x \rightarrow 0$ имеем

$$\begin{aligned} f(y+h) - f(y) &= \sqrt{1 + [y'(a) + h'(a)]^2} - \sqrt{1 + [y'(a)]^2} = \\ &= \sqrt{1 + [y'(a)]^2} \left[\left(1 + \frac{2y'(a)h'(a) + [h'(a)]^2}{1 + [y'(a)]^2} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] = \\ &= \sqrt{1 + [y'(a)]^2} \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2y'(a)h'(a) + [h'(a)]^2}{1 + [y'(a)]^2} + o(h'(a)) - 1 \right] = \\ &= \frac{y'(a)}{\sqrt{1 + [y'(a)]^2}} h'(a) + o(h'(a)) \end{aligned}$$

Поскольку $\frac{o(h'(a))}{\|h\|} \rightarrow 0$ при $\|h\| \rightarrow 0$, то

$$\delta f(y, h) = \frac{y'(a)}{\sqrt{1 + [y'(a)]^2}} h'(a).$$

2. Пусть f — дважды дифференцируемый функционал. Найти вторую вариацию функционала $f_1(y) = e^{f(y)}$.

Решение. Так как (см. соотношения (2) и (6)) $(\Delta f)(y) = \delta f(y, h) + r_1(y, h)$ и $(\Delta f)(y) = \delta f(y, h) + \delta^2 f(y, h) + r_2(y, h)$, то

$$\begin{aligned} (\Delta f_1)(y) &= e^{f(y+h)} - e^{f(y)} = e^{f(y)} [e^{(\Delta f)(y)} - 1] = \\ &= e^{f(y)} \left[1 + \{\delta f(y, h) + \delta^2 f(y, h) + r_2(y, h)\} + \frac{1}{2} \{\delta f(y, h) + \right. \\ &\quad \left. + r_1(y, h)\}^2 + \dots - 1 \right] = e^{f(y)} \left[\delta f(y, h) + \delta^2 f(y, h) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \{\delta f(y, h)\}^2 + r_3(y, h) \right], \end{aligned}$$

где $r_3(y, h) = o(\|h\|^2)$. Следовательно,

$$\delta^2 f_1(y, h) = e^{f(y)} \left[\delta^2 f(y, h) + \frac{1}{2} \{\delta f(y, h)\}^2 \right].$$

3. Найти экстремали функционала

$$f(y) = \int_{-1}^1 \sqrt{y[1 + (y')^2]} dx, \quad y(-1) = y(1) = b > 0.$$

Решение. Поскольку $F(x, y, y') = \sqrt{y[1 + (y')^2]}$ и F не зависит от x , то (см. п. 4) из уравнения Эйлера следует, что $F - y'F_{y'} = C$,

$$\sqrt{y[1+(y')^2]} - \frac{\sqrt{y}(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}} = C.$$

Отсюда $y' = \pm \sqrt{\frac{y}{C^2} - 1}$ и (после интегрирования)

$$2C^2 \sqrt{\frac{y}{C^2} - 1} = \pm x + C_1.$$

Следовательно, $y = \left(\frac{C_1 \pm x}{2C}\right)^2 + C^2$. Воспользуемся теперь крайними условиями $y(-1) = y(1) = b > 0$. Тогда для нахождения постоянных C и C_1 имеем систему

$$\begin{cases} \left(\frac{C_1 \pm 1}{2C}\right)^2 + C^2 = b, \\ \left(\frac{C_1 \mp 1}{2C}\right)^2 + C^2 = b, \end{cases}$$

откуда необходимо $C_1 = 0$, $y = \frac{x^2}{4C^2} + C^2$ и $\left(\frac{1}{2C} - C\right)^2 = b - 1$. Поэтому при $b < 1$ эта система решений не имеет, при $b = 1$ получаем $C^2 = \frac{1}{2}$ и $y_1(x) = \frac{x^2 + 1}{2}$, а при $b > 1 - C^2 = \frac{b + \sqrt{b^2 - 1}}{2}$ или $C^2 = \frac{b - \sqrt{b^2 - 1}}{2}$.

Итак, если $b < 1$, то данная вариационная задача экстремалей не имеет, при $b = 1$ имеется одна экстремаль, а при $b > 1$ — две (в последних случаях экстремальными являются параболы).

4. Проанализировать экстремальные задачи для следующих функционалов:

а) $\int_0^1 y' dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$;

б) $\int_0^1 yy' dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$;

в) $\int_0^1 xy y' dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$.

Решение. Поскольку

а) $F(x, y, y') = y'$; б) $F(x, y, y') = yy'$; в) $F(x, y, y') = xy y'$, то соответствующие уравнения Эйлера имеют вид:

а) $0 = 0$; б) $y' - y' = 0$; в) $xy' - (xy)' = 0$.

Поэтому в первых двух случаях значения функционалов не зависят от выбора функций y (удовлетворяющих условиям $y(0) = 0$, $y(1) = 1$). В случае в) имеем $y(x) \equiv 0$ и, значит, $y(1) \neq 1$ ($\forall y$). Следовательно, экстремума нет.

Примечание. То, что в первых двух случаях значения функционалов не зависят от выбора функций $y(x)$, ясно и непосредственно, ибо $\int_0^1 y' dx = y(x) \big|_0^1 = 1$,

$$\int_0^1 yy' dx = \frac{1}{2} y^2(x) \big|_0^1 = \frac{1}{2} \quad (\forall y \in C^{(1)}[0; 1] : y(0) = 0, y(1) = 1).$$

5. Найти семейство экстремалей функционала

$$f(y) = \int_a^b \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{x} dx \quad \left(-\frac{\pi}{2} < a < b < \frac{\pi}{2}\right).$$

Решение. Первый интеграл уравнения Эйлера $\frac{d}{dx} F_{y'} = 0$ имеет вид $\frac{y'}{x\sqrt{1+(y')^2}} = C_1$. Чтобы проинтегрировать полученное уравнение, положим $y' = \operatorname{tg} t$. Тогда $x = \frac{1}{C_1} \sin t$, а $dy = \operatorname{tg} t dx = \frac{1}{C_1} \sin t dt$ и $y = -\frac{1}{C_1} \cos t + C_2$. Исключая t , получаем

$$x^2 + (y - C_2)^2 = \frac{1}{C_1^2}.$$

Это — семейство окружностей с центрами на оси координат.

Примечание. Если считать, что некоторая точка перемещается по кривой $y = y(x)$ со скоростью $v = x$, то $\frac{ds}{dt} = x$, $dt = \frac{ds}{x}$ и $t = \int_a^b \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{x} dx$.

Следовательно, значение рассматриваемого функционала — это время, затраченное на перемещение по кривой из точки $(a, y(a))$ в точку $(b, y(b))$.

6. Найти экстремаль и исследовать на экстремум функционал

$$f(y) = \int_{-2}^{-1} [2yy' - x^2(y')^2] dx, \quad y(-2) = \frac{3}{2}, \quad y(-1) = 2,$$

определив знак его приращения.

Решение. В этом случае $F(x, y, y') = 2yy' - x^2(y')^2$, а соответствующее уравнение Эйлера имеет вид $2y''x^2 + 4y'y' = 0$, откуда (после интегрирования) получаем $y(x) = -\frac{C_1}{x} + C_2$. Так как $y(-2) = \frac{3}{2}$ и $y(-1) = 2$, то единственной экстремалью данного функционала является кривая $y_0(x) = -\frac{1}{x} + 1$.

Определим знак приращения функционала f в классе функций из $C^{(1)}[-2, -1]$, удовлетворяющих указанным краевым условиям:

$$f(y) - f(y_0) = \int_{-2}^{-1} [2yy' - 2y_0y_0' + x^2(y_0')^2 - x^2(y')^2] dx =$$

$$\begin{aligned}
&= (y^2 - y_0^2) \Big|_{-2}^{-1} + \int_{-2}^{-1} x^2 [(y')^2 - (y_0')^2] dx = - \int_{-2}^{-1} x^2 [(y')^2 - (y_0')^2] dx = \\
&= - \int_{-2}^{-1} x^2 [(y' - y_0')^2 - 2(y_0')^2 + 2y'y_0'] dx = - \int_{-2}^{-1} x^2 [(y' - y_0')^2] dx + \\
&+ 2 \int_{-2}^{-1} x^2 (y_0')^2 dx - 2 \int_{-2}^{-1} x^2 y' y_0' dx = - \int_{-2}^{-1} x^2 (y' - y_0')^2 dx - \frac{2}{x} \Big|_{-2}^{-1} - \\
&- 2y \Big|_{-2}^{-1} = - \int_{-2}^{-1} x^2 (y' - y_0')^2 dx \leq 0
\end{aligned}$$

(здесь учтено, что $y_0(x) = -\frac{1}{x} + 1$).

Значит, рассматриваемый функционал достигает на кривой $y_0(x) = -\frac{1}{x} + 1$ слабого максимума.

7. Исследовать на экстремум функционал

$$f(y) = \int_0^1 (y')^3 dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = B \quad (B > 0).$$

Решение. Поскольку $F(x, y, y') = (y')^3$, то уравнение Эйлера для этого функционала принимает вид $\frac{d}{dx} [3(y')^2] = 0$, т. е. $y'y'' = 0$, откуда $y = C_1x + C_2$. Учитывая еще начальные условия, приходим к выводу, что единственной экстремалью данной вариационной задачи является прямая $y = Bx$.

Рассмотрим теперь условия Лежандра и Якоби. Имеем $F_{y'y'} = 6y' = 6B > 0$ (усиленное условие Лежандра выполняется) и, очевидно, $Q = 0$, а $P = 6B$. Поэтому уравнение Якоби имеет вид $-6Bh''(x) = 0$. Значит, $h(x) = \alpha x + \beta$ — общее решение этого уравнения, а с учетом условий $h(0) = 0$ и $h'(0) = 1$ имеем $h(x) = x$. Так как $h(x) \neq 0$ при $x \in (0; 1]$, то выполняется также усиленное условие Якоби.

Следовательно, на кривой $y = Bx$ данный функционал достигает слабого минимума.

8. Исследовать на экстремум функционал

$$f(y) = \int_0^1 \frac{y}{(y')^3} dx, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = b \quad (0 < b < 1).$$

Решение. Так как функция $F(x, y, y') = \frac{y}{(y')^3}$ не зависит от x , то (см. п. 4, случай в)) из уравнения Эйлера следует, что $F - y'F_{y'} = C$, т. е. $\frac{y}{(y')^3} + y' \frac{2y}{(y')^3} = C$ или $(y')^2 = \frac{3y}{C}$. Отсюда следует (после извлечения корня, разделения переменных и интегрирования), что $y = (C_1x + C_2)^2$. Учитывая начальные условия для на-

хождения постоянных C_1 и C_2 , имеем систему уравнений

$$\begin{cases} C_2^2 = 1, \\ (C_1 + C_2)^2 = b. \end{cases}$$

Следовательно, если $C_2 = 1$, то $C_1 = -1 \pm \sqrt{b}$, а при $C_2 = -1$ имеем $C_1 = 1 \pm \sqrt{b}$. Подставляя найденные значения C_1 и C_2 в уравнение $y = (C_1 x + C_2)^2$, убеждаемся, что экстремальными являются только параболы $y_1(x) = [(-1 + \sqrt{b})x + 1]^2$ и $y_2(x) = [(-1 - \sqrt{b})x + 1]^2$.

Изучим теперь решения соответствующих уравнений Якоби. Так как

$$Q = F_{yy} - \frac{d}{dx} F_{yy'} = 0 - \frac{d}{dx} \left(-\frac{2}{(y')^3} \right) = -\frac{6y''}{(y')^4},$$

а $P = F_{y'y'} = \frac{6y}{(y')^4}$, то уравнения Якоби принимают вид

$$-\frac{6y''}{(y')^4} h - \frac{d}{dx} \left(\frac{6y}{(y')^4} h' \right) = 0$$

или (после упрощений)

$$yy'h'' + ((y')^2 - 4yy'')h' + y''y'h = 0.$$

Поэтому при $y = [(-1 \pm \sqrt{b})x + 1]^2$

$$[(-1 \pm \sqrt{b})x + 1]^2 h''(x) - 2(-1 \pm \sqrt{b})[(-1 \pm \sqrt{b})x + 1]h'(x) + 2(-1 \pm \sqrt{b})^2 h(x) = 0.$$

Это — уравнения типа уравнения Эйлера. Поэтому его решения ищем в виде функций $h = [(-1 \pm \sqrt{b})x + 1]^\lambda$. Тогда

$$\lambda(\lambda - 1)[(-1 \pm \sqrt{b})x + 1]^\lambda (-1 \pm \sqrt{b})^2 - 2(-1 \pm \sqrt{b})^\lambda \times \\ \times \lambda[(-1 \pm \sqrt{b})x + 1]^\lambda + 2(-1 \pm \sqrt{b})^2 [(-1 \pm \sqrt{b})x + 1]^\lambda = 0$$

и для определения λ имеем уравнение $\lambda(\lambda - 1) - 2\lambda + 2 = 0$. Значит, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ и общее решение исходного уравнения таково:

$$h(x) = C_1 [(-1 \pm \sqrt{b})x + 1]^2 + C_2 [(-1 \pm \sqrt{b})x + 1].$$

Учитывая еще начальные условия $h(0) = 0$, $h'(0) = 1$, получаем $h_1(x) = x[(-1 + \sqrt{b})x + 1]$ и $h_2(x) = x[(-1 - \sqrt{b})x + 1]$. Заметим, что функция $h_2(x)$ обращается в нуль в точке $\frac{1}{1 + \sqrt{b}} \in (0; 1)$. Следовательно, экстремаль $y = y_2(x)$ не удовлетворяет одному из необходимых условий экстремума — условию Якоби. Поэтому дальнейшим исследованиям подлежит только экстремаль $y_1(x) = [(-1 + \sqrt{b})x + 1]^2$.

Для нее имеем:

$$а) F_{y'y'}|_{y=y'} = \frac{6y_1}{(y_1')^4} = \frac{3}{8(-1 + \sqrt{b})^4 [(-1 + \sqrt{b})x + 1]^2} > 0$$

$$(\forall x \in [0; 1]);$$

$$б) h_1(x) = x[(-1 + \sqrt{b})x + 1] \neq 0, \quad \forall x \in (0; 1),$$

т. е. выполняется усиленное условие Якоби.

Значит, на экстремали $y = [(-1 + \sqrt{b})x + 1]^2$ функционал $f(y) = \int_0^1 \frac{y}{(y')^2} dx$, $y(0) = 1$, $y(1) = b$ ($0 < b < 1$) достигает слабого минимума.

9. Исследовать на экстремум функционал

$$f(y) = \int_a^b ((y')^2 + y^2 + 2ye^x) dx, \quad y(a) = A, \quad y(b) = B.$$

Решение. Рассмотрим сперва соответствующее уравнение Эйлера

$$2y + 2e^x - \frac{d}{dx}(2y') = 0$$

или $y'' - y = e^x$. Оно решается известными методами теории дифференциальных уравнений и формула

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2} x e^x$$

определяет все решения этого уравнения. Поэтому экстремалью данной вариационной задачи является кривая

$$y_0(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2} x e^x,$$

где постоянные C_1 и C_2 определены из условий $y_0(a) = A$, $y_0(b) = B$.

Далее воспользуемся теоремой 7. Так как $p(x) \equiv 1 > 0$, $q(x) \equiv 1 > 0$, а $\varphi(x) = e^x$, то на основании упомянутого утверждения рассматриваемый функционал имеет в точке y_0 минимум

10. В пространстве $C^{(1)}[-1; 1]$ исследовать на экстремум функционал

$$f(y) = \int_{-1}^1 x^2 (y')^2 dx, \quad y(-1) = A, \quad y(1) = B.$$

Решение. Найдем экстремали данной вариационной задачи. Поскольку функция F в этом случае не зависит от y , то уравнение Эйлера имеет вид $-\frac{d}{dx} F_{y'} = 0$, т. е. $x^2 y' = -C_1$, и $y = \frac{C_1}{x} + C_2$. Однако функция $y(x)$ должна принадлежать пространству $C^{(1)}[-1; 1]$ и поэтому необходимо $C_1 = 0$.

Теперь возможны два случая.

а) Если $A = B$, то искомой экстремалью является функция $y_0(x) \equiv A$. Очевидно, что в этой точке функционал f достигает минимума, так как $f(y) \geq 0$ ($\forall y \in C^{(1)}[-1; 1]$) и $f(y_0) = 0$.

б) Если $A \neq B$, то экстремалей нет. Значит, данный функционал f не имеет в $C^{(1)}[-1; 1]$ и экстремума. Однако любопытно отметить следующее.

Рассмотрим последовательность функций

$$y_n(x) = \frac{A+B}{2} + \frac{B-A}{2} \cdot \frac{\operatorname{arctg} nx}{\operatorname{arctg} n} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

удовлетворяющих краевым условиям и принадлежащих пространству $C^{(1)}[-1; 1]$, ибо $y'_n(x) = \frac{B-A}{2 \operatorname{arctg} n} \cdot \frac{n}{1+n^2 x^2}$ ($\forall n$). Тогда для произвольного $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$f(y_n) < \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{n^2} + x^2 \right) (y'_n)^2 dx = \frac{(B-A)^2}{4 (\operatorname{arctg} n)^2} \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+n^2 x^2} = \frac{(B-A)^2}{2n \operatorname{arctg} n}.$$

Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = 0$. Это означает, что хотя $f(y) > 0$ ($\forall y \in C^{(1)}[-1; 1]$, $y(-1) = A$, $y(1) = B$), но $\inf_y f(y) = 0$.

11. Исследовать вариационную задачу для функционала

$$f(y) = \int_a^b [M(x, y) + N(x, y) y'] dx, \quad y(a) = A, \quad y(b) = B,$$

при условии, что $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \equiv 0$. Предполагается, что функции M , N , $\frac{\partial M}{\partial y}$ и $\frac{\partial N}{\partial x}$ определены и непрерывны в области $[a; b] \times (-\infty; +\infty)$.

Решение. Не вдаваясь в подробности проверки различных необходимых или достаточных условий существования экстремума, отметим, что при сделанных предположениях выражение $M(x, y) dx + N(x, y) \times \times dy$ является (как известно из курса математического анализа) полным дифференциалом. Следовательно, интеграл

$$\int_a^b [M(x, y) + N(x, y) y'] dx$$

не зависит от пути интегрирования, а вариационная задача для рассматриваемого функционала не имеет смысла.

12. Проверить, что функционал $f(y) = \int_{-1}^1 y^2 (1 - y')^2 dx$, $y(-1) = 0$, $y(1) = 2$, достигает своего минимума на кривой

$$y_0(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x \leq 0, \\ x+1, & 0 < x \leq 1, \end{cases}$$

не принадлежащей пространству $C^{(1)}[-1; 1]$.

Решение. Сформулированное утверждение очевидно, так как $f(y) \geq 0$ ($\forall y$) и $f(y_0) = 0$.

Здесь, однако, любопытно следующее. Нетрудно видеть, что $F_{y'y'} = 2y_0^2 \geq 0$ (выполняется, условие Лежандра) и $F_y(x, y_0, y_0) = -\frac{d}{dx} F_{y'}(x, y_0, y_0) = 0$, т. е. разрывная экстремаль удовлетворяет уравнению Эйлера.

Если же искать экстремум данного функционала в классе функций из $C^{(1)}[-1; 1]$, которые удовлетворяют условиям $y(-1) = 0$, $y(1) = 2$, то из уравнения Эйлера следует (см. п. 4, случай в)), что $y^2(1 - (y')^2) = C_1$ или (после разделения переменных, интегрирования и учета начальных данных) $y_1(x) = x + 1$. Поскольку $f(y_1) = 0$, то на кривой $y = y_1(x)$ рассматриваемый функционал имеет слабый минимум.

13. Найти экстремали изопериметрической задачи $f(y) = \int_0^1 ((y')^2 + x^2) dx$ при условиях $\int_0^1 y^2 dx = 2$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$.

Решение. Рассмотрим уравнение Эйлера для вспомогательной функции $H = F - \lambda G = (y')^2 + x^2 - \lambda y^2$:

$$2\lambda y - \frac{d}{dx}(2y') = -2(\lambda y + y'') = 0.$$

Отсюда $y(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x$, а дополнительные условия приводят к системе уравнений

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 \sin \sqrt{\lambda} = 0, \\ C_2^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{\sin^2 2\sqrt{\lambda}}{4\sqrt{\lambda}} \right] = 2. \end{cases}$$

Следовательно, $C_1 = 0$, $\sqrt{\lambda} = n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$), $C_2 = \pm 2$ и $y(x) = \pm 2 \sin nx$ ($n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$).

14. Среди всех линий, соединяющих точки $(-1, \operatorname{ch} 1)$ и $(1, \operatorname{ch} 1)$, найти ту, которая при вращении вокруг оси x образует поверхность с наименьшей площадью.

Решение. Поскольку искомая площадь поверхности вращения выражается интегралом $S = 2\pi \int_{-1}^1 y \sqrt{1 + (y')^2} dx$, то сформулированная здесь классическая задача — это задача о минимуме функционала

$$f(y) = \int_{-1}^1 y \sqrt{1 + (y')^2} dx, \quad y(-1) = y(1) = \operatorname{ch} 1.$$

Запишем (см. п. 4) первый интеграл уравнения Эйлера

$$y \sqrt{1 + (y')^2} - \frac{y (y')^2}{\sqrt{1 + (y')^2}} = C_1.$$

Отсюда $\frac{C_1 dy}{\sqrt{y^2 - C_1^2}} = dx$ или после интегрирования

$$y + \sqrt{y^2 - C_1^2} = C_1 e^{\frac{x - C_2}{C_1}}.$$

Следовательно,

$$y = \frac{C_1}{2} \left(e^{\frac{x - C_2}{C_1}} + e^{-\frac{x - C_2}{C_1}} \right) = C_1 \operatorname{ch} \frac{x - C_2}{C_1}.$$

Если учесть еще начальные данные (т. е. условие прохождения кривых через заданные точки), то приходим к выводу, что рассматриваемая вариационная задача имеет лишь одну экстремаль — цепную линию $y_0(x) = \operatorname{ch} x$. Из геометрических соображений ясно, что на этой линии данный функционал действительно достигает минимума.

15. Найти тело вращения наименьшего объема с данной площадью осевого сечения.

Решение. Сформулированная задача — это задача о минимуме функционала $f(y) = \int_a^b y^2 dx$ при условиях

$$\int_a^b y(x) dx = 2S, \quad y(a) = A, \quad y(b) = B.$$

Записав уравнение Эйлера для функции $H = F + \lambda G = y^2 + \lambda y$, получим $2y + \lambda = 0$, т. е. $y(x) = -\frac{\lambda}{2}$. Следовательно, данная задача имеет решение лишь тогда, когда $A = B = -\frac{\lambda}{2}$ и $-\frac{\lambda}{2}(b - a) = 2S$, искомым телом является цилиндр.

Задачи для самостоятельной работы

1. Пусть $f(y) = \int_a^b F(x, y(x)) dx$, где функция $F(x, y)$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные до второго порядка в области $a \leq x \leq b$, $-\infty < y < +\infty$. Доказать, что в пространстве $C[a; b]$

$$\delta f(y, h) = \int_a^b \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} h(x) dx.$$

2. Пусть $k \in C([a; b] \times [a; b])$ и $k(t, \tau) = k(\tau, t)$. Найти дифференциал функционала

$$f(y) = \int_a^b \int_a^b k(t, \tau) y(t) y(\tau) dt d\tau$$

в пространстве $C[a; b]$.

3. Пусть $x_0 \in [a; b]$, $k \in \mathbb{N}$ и $f(y) = [y(x_0)]^k$. Найти вариацию f в пространстве $C[a; b]$.

4. Доказать, что функционал $f(y) = |y(a)|$ не является дифференцируемым в $C[a; b]$.

5. Пусть H — действительное гильбертово пространство. Найти дифференциалы следующих функционалов:

а) $f(y) = \|y\|^2$; б) $f(y) = \|y\|$.

6. Доказать, что линейный функционал, отличный от тождественного нуля, не имеет экстремумов.

7. На каких кривых может достигаться экстремум следующих функционалов:

$$а) f(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(y')^2 - y^2] dx, \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1;$$

$$б) f(y) = \int_0^1 [(y')^2 + 12xy] dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1;$$

$$в) f(y) = \int_1^2 \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{x} dx, \quad y(1) = 0, \quad y(2) = 1?$$

$$8. \text{ Найти экстремали функционала } f(y) = \int_a^b \frac{1+y^2}{(y')^2} dx, \quad y(a) = A, \quad y(b) = B.$$

9. Доказать, что единственной экстремалью функционала $f(y) = \int_0^1 e^{y'} \operatorname{tg} y' dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$, является линия $y = x$.

10. Найти экстремали следующих функционалов:

$$а) f(y) = \int_a^b y^2 dx, \quad y(a) = A, \quad y(b) = B;$$

$$б) f(y) = \int_0^1 (y^2 + x^2 y') dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = a;$$

$$в) f(y) = \int_a^b (y + xy') dx, \quad y(a) = A, \quad y(b) = B;$$

$$г) f(y) = \int_a^b [y^2 + (y')^2 - 2y \sin x] dx.$$

11. Исследовать на экстремум функционал

$$f(y) = \int_0^a [(y')^2 - y^2] dx, \quad y(0) = y(a) = 0,$$

если: а) $0 < a < \pi$; б) $\pi < a < 2\pi$.

12. Исследовать на экстремум следующие функционалы:

$$а) f(y) = \int_0^a \frac{dx}{y'}, \quad y(0) = 0, \quad y(a) = b \quad (a, b > 0);$$

$$б) f(y) = \int_0^a \frac{dx}{(y')^2}, \quad y(0) = 0, \quad y(a) = b \quad (a, b > 0);$$

$$в) f(y) = \int_1^2 \frac{x^3}{(y')^2} dx, \quad y(1) = 1, \quad y(2) = 4;$$

$$г) f(y) = \int_a^b \frac{1+y^2}{(y')^2} dx, \quad y(a) = A, \quad y(b) = B.$$

13. Исследовать на экстремум следующие функционалы

$$а) f(y) = \int_1^2 (x^2 (y')^2 + 12y^2) dx, \quad y(1) = 1, \quad y(2) = 8;$$

$$б) f(y) = \int_0^1 ((y')^2 + y^2 + 2ye^{2x}) dx, \quad y(0) = \frac{1}{3}, \quad y(1) = \frac{e^2}{3}.$$

14. Проверить, что: а) теория экстремума функционала $f(y) = F(y(x))|_{x=a}^b$ в пространстве $C[a, b]$ совпадает с обычной теорией экстремума для функции $F(\xi)$; б) теория экстремума функционала $f(y) = F(y(a), y(b))$ в пространстве $C[a, b]$ совпадает с теорией экстремума для функции двух переменных $F(\xi, \eta)$.

15. Найти экстремали изопериметрической задачи

$$f(y) = \int_a^b (y')^2 dx$$

при условиях $\int_a^b y dx = \alpha$ ($\alpha = \text{const}$), $y(a) = A$, $y(b) = B$.

16. Записать дифференциальное уравнение для экстремалей изопериметрической задачи об экстремуме функционала

$$f(y) = \int_0^a [p(x) (y')^2 + q(x) y^2] dx$$

при условиях $\int_0^a r(x) y^2 dx = 1$, $y(0) = 1$, $y(a) = 0$.

17. Найти тело вращения наибольшего объема с данной боковой поверхностью.

Ответы. 2. $2 \int_a^b \int_a^b k(t, \tau) y(t) h(\tau) dt d\tau$. 3. $k[y(x_0)]^{k-1} h(x_0)$. 5. а) $2(y, h)$;

б) $\frac{(y, h)}{\|y\|}$ при $y \neq 0$, а при $y = 0$ не существует. 7. а) $y = \sin x$; б) $y = x^3$; в) $(y-2)^2 + x^2 = 5$. 8. $y = \sinh(C_1 x + C_2)$, $y(a) = A$, $y(b) = B$. 10. а) $y = 0$ только при $A = B = 0$; б) $y = x$ при $a = 1$, при $a \neq 1$ экстремалей нет; в) интеграл не зависит от пути интегрирования и вариационная задача не имеет смысла; г) $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2} \sin x$. 11. а) Минимум при $y = 0$; б) минимума нет. 12. а) Слабый минимум и

прямой $y = \frac{b}{a} x$; б) слабый минимум при $y = \frac{b}{a} x$; в) минимум при $y = x^2$; г) минимум на экстремальных $y = \operatorname{sh}(C_1 x + C_2)$, где C_1 и C_2 определяются из уравнений $A = \operatorname{sh}(C_1 a + C_2)$, $B = \operatorname{sh}(C_1 b + C_2)$. 13. а) Минимум при $y = x^2$; б) минимум при $y = \frac{1}{3} e^{2x}$. 15. $y = \lambda x^2 + C_1 x + C_2$, где λ , C_1 и C_2 определяются из граничных и изопериметрических условий. 16. $\frac{d}{dx} (p(x) y') - [\lambda r(x) + q(x)] y = 0$, $y(0) = y(a) = 0$. Тривиальное решение $y(x) \equiv 0$ не удовлетворяет изопериметрическому условию, а нетривиальные решения существуют лишь тогда, когда λ — собственное значение оператора $L(y) = \frac{1}{r(x)} \cdot \frac{d}{dx} (p(x) y') - \frac{q(x)}{r(x)} y$. 17. Тело вращения кругового сегмента вокруг хорды.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров П. С. Введение в теорию множеств и общую топологию.— М.: Наука, 1977.— 367 с.
2. Александрия Р. А., Мирзаханян Э. А. Общая топология.— М.: Высш. шк., 1979.— 336 с.
3. Антонец А. Б., Князев П. Н., Радыно Я. В. Задачи и упражнения по функциональному анализу.— Минск: Высш. шк., 1978.— 205 с.
4. Архангельский А. В., Пономарев В. И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях.— М.: Наука, 1974.— 423 с.
5. Вайнберг М. М. Функциональный анализ.— М.: Просвещение, 1979.— 128 с.
6. Владимиров В. С. Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1976.— 527 с.
7. Горбачук В. И., Горбачук М. Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений.— К.: Наук. думка, 1984.— 283 с.
8. Грибанов Ю. И. Функциональный анализ в упражнениях и задачах. Метрические пространства.— Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1970.— 53 с.
9. Грищенко А. Е., Нагнибида Н. И., Настасиев П. П. Теория функций комплексного переменного. Решение задач.— К.: Вища шк. Головное изд-во, 1986.— 336 с.
10. Гуревич А. П., Зеленко Л. Б. Сборник задач по функциональному анализу.— Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1975.— 27 с.
11. Дороговцев А. Я. Математический анализ: Сборник задач.— К.: Вища шк. Головное изд-во, 1987.— 408 с.
12. Дороговцев А. Я. Элементы общей теории меры и интеграла.— К.: Вища шк. Головное изд-во, 1989.— 152 с.
13. Задания к лабораторным работам по курсу «Теория меры и интеграла» для студентов специальности «математика».— К.: Вища шк. Изд-во при Киев. ун-те, 1986.— 60 с.
14. Задания к лабораторным работам по курсу «Функциональный анализ и интегральные уравнения» для студентов специальности «математика».— К.: Вища шк. Изд-во при Киев. ун-те, 1986.— 104 с.
15. Зорич В. А. Математический анализ: В 2 ч.— М.: Наука, 1984.— Ч. 2.— 640 с.
16. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ.— М.: Наука, 1977.— 741 с.
17. Карташев А. П., Рождественский Б. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления.— М.: Наука, 1976.— 255 с.
18. Кеч В., Теодореску П. Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике.— М.: Мир, 1978.— 518 с.
19. Кириллов А. А., Гвишиани А. Д. Теоремы и задачи функционального анализа.— М.: Наука, 1979.— 381 с.
20. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа.— М.: Наука, 1977.— 496 с.
21. Коша А. Вариационное исчисление.— М.: Высш. шк., 1983.— 279 с.
22. Маркушевич А. И. Избранные главы теории аналитических функций.— М.: Наука, 1976.— 191 с.
23. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной.— М.: Наука, 1974.— 480 с.
24. Окстоби Дж. Мера и категория.— М.: Мир, 1974.— 158 с.
25. Очан Ю. С. Сборник задач по математическому анализу.— М.: Просвещение, 1981.— 272 с.

26. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики : В 2 т.— М. : Мир.— 1977—1978. Т. 1.: Функциональный анализ.— 1977.— 358 с.; Т. 2.: Гармонический анализ. Самосопряженность.— 1978.— 398 с.
27. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу.— М. : Изд-во нностр. лит., 1979.— 588 с.
28. Робертсон А., Робертсон В. Топологические векторные пространства.— М. : Мир, 1967.— 258 с.
29. Рудин У. Функциональный анализ.— М. : Мир, 1975.— 443 с.
30. Садовничий В. А. Теория операторов.— М. : Изд-во Моск. ун-та, 1986.— 368 с.
31. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах.— М. : Мир, 1974.— 334 с.
32. Теляковский С. А. Сборник задач по теории функций действительного переменного.— М. : Наука, 1980.— 110 с.
33. Треногин В. А. Функциональный анализ.— М. : Наука, 1980.— 495 с.
34. Треногин В. А., Писаревский Б. М., Соболева Т. С. Задачи и упражнения по функциональному анализу.— М. : Наука, 1984.— 256 с.
35. Титчмарш Е. Теория функций.— М. : Наука, 1980.— 464 с.
36. Фаге М. К. Теория линейных операторов.— Новосибирск : Изд-во Новосиб. ун-та, 1972.— 184 с.
37. Шефер Х. Топологические векторные пространства.— М. : Мир, 1971.— 360 с.
38. Шилов Г. Е., Фан Дык Тинь. Интеграл, мера и производная на линейных пространствах.— М. : Наука, 1967.— 192 с.
39. Шварц Л. Анализ.— М. : Мир, 1972.— Ч. 1.— 824 с.
40. Эдвардс Р. Функциональный анализ, Теория и приложения.— М. : Мир, 1969.— 1073 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аддитивность счетная 7
Аксиома отделимости вторая 223
— первая 223
— симметричная 189
— тождества 189
— треугольника 189
Аксиомы метрики 189
— топологии 221
Алгебра множеств 33
Альтернатива Фредгольма 423
- База локальная 222
— топологии 222
Базис гильбертова пространства 285
— линейного пространства 236
Брус 39
- Вариация заряда верхняя 78
— нижняя 78
— функции 157
— функционала 449, 456
— вторая 458
Внутренность множества 222
- Гомеоморфизм 196
Граница множества 190, 222
- Движение 10
Двухточечное связное 221
Дефектное число оператора 363
Дифференциал Гато 450
— Фреше 449
- Единичное кольцо 33
- Замыкание множества 11, 190, 221
— оператора 370
Заряд 78
— абсолютно непрерывный 78
— дискретный 78
— непрерывный 78
- Изменение функции полное 157
Измеримость по Жордану 13
Изометрические пространства 196
Изоморфные пространства 237
Индекс оператора 363
Интеграл верхний 69
— Дирихле 124
— Лебега 65, 66, 67, 68, 69, 70
— Лебега-Стилтьеса 161
— нижний 69
— элементарный 71
Интервал дополнительный 11
— составляющий 11
- Кладбище Серпинского 31
Класс смежности 237
Ковер Серпинского 19
Кольцо 9, 33
— минимальное 33
Конгруэнтные множества 10
Корень из оператора квадратный 366
Коэффициенты Фурье 124, 284
- Мажоранта интегрируемая 75
Максимум функции существенный 193
— функционала 456
Мера 34
— Винера 40
— внутренняя 60
— гауссова 40
— знакпеременная 78
— Лебега в евклидовом пространстве 7, 6
— — ограниченного множества 7
— — Стилтьеса 38, 161
— множества внешняя 7, 12, 35
— параллелепипеда 6
— полная 36
— σ -конечная 37
— счетно-аддитивная 35
— элементарного множества 6
Минимум функционала 456
Минор Фредгольма 424
Многообразие линейное 236
Множество абсолютно выпуклое 224
— борелево 12
— всюду плотное 123, 191
— выпуклое 224, 238
— замкнутое 11, 190, 221
— измеримое по Лебегу 7, 8, 72
— Кантора 12
— компактное 195
— — в себе 195
— локально компактное 240
— нигде не плотное 191

- ограниченное 7, 190, 225
- открытое 10, 190, 221
- поглощающее 224
- производное 11
- резольвентное 364
- симметричное 224
- совершенное 12
- строго выпуклое 288
- типа F_σ 12
- — G_δ 12
- уравновешенное 224
- элементарное 6
- Монотонность меры 6
- Наилучшее приближение элемента 240
- Непрерывность равностепенная 195
- Неравенство Бесселя 284
- Гельдера 122, 136
- Коши-Буняковского 122, 136, 191, 280
- Минковского 122, 136
- Птолемея 301
- треугольника 123
- Чебышева 67, 140
- Норма оператора 241
- функционала 307
- элемента 123, 224, 238
- Носитель заряда 78
- топология 221
- Область значений оператора 240
- определения оператора 240
- Оболочка линейная 236
- множества выпуклая 238, 272
- Ограниченность равномерная 195
- Окрестность множества 223
- точки 10, 190, 221
- Оператор 196, 240
- билинейный 450
- вполне непрерывный 360
- дифференцируемый 449
- замкнутый 370
- квадратичный 450
- компактный 360
- конечномерный 361
- линейный 240
- непрерывно обратимый 328
- непрерывный 241
- нетеров 363
- нормально разрешимый 363
- обратный 327
- — левый 328
- — правый 328
- ограниченный 241
- — положительный 366
- полуограниченный 371
- проекционный 366
- самосопряженный 361, 370
- симметрический 370
- сопряженный 361
- умножения 375
- унитарный 365

- Фредгольма 422
- Определитель Грама 283
- Фредгольма 424
- Ортогональные векторы 282
- Отображение непрерывное 196
- сжимающее 197
- Отрезок 237
- открытый 238
- Параллелепипед 5
- замкнутый 6
- открытый 6
- Подграфик функции 13, 77
- Подпространство 189, 240
- Показатель роста функции 427
- Покрытые множества 7, 195
- пространства 222
- — замкнутое 222
- — открытое 222
- Полном тригонометрический 126
- Полнота меры Лебега 8
- Полуаддитивность меры счетная 7, 35
- Полукольцо 33
- Полунорма 224
- Полярное разложение оператора 416
- Пополнение пространства 194, 239
- Последовательность сходящаяся 222
- фундаментальная 123, 194
- Почти всюду равные функции 63
- Предел последовательности 11
- Преднорма 224
- Преобразование Лапласа 427
- Принцип аппроксимации 340
- продолжения 325, 326
- равномерной ограниченности 325
- сжимающих отображений 197
- Продолжение меры 34
- Проекция элемента 282
- Произведение декартово 5
- мер прямое 76
- множество прямое 76
- скалярное 280
- Производная Гато 450
- заряда 79
- Фреше 449
- функции 158
- — левая 125
- — правая 125
- Производные числа 158
- Промежуток 5
- неограниченный 5
- Пространство аналитических функций 194
- банахово 238
- бесконечномерное 236
- бикompактное 222
- всех последовательностей 192
- гильбертово 281
- дискретное метрическое 191
- дуальное по Кете 234
- евклидово 5, 191, 280

- изолированных точек 191
- компактное 195
- линейное топологическое 224
- локально выпуклое 224
- метризуемое 223
- метрическое 123, 189
- непрерывных функций 192
- нормальное 223
- нормированное 123, 238
- нормируемое 225
- ограниченных измеримых функций 193
- ограниченных последовательностей 191
- полное 124, 194
- рефлексивное 308
- сепарабельное 123, 191
- слипшихся точек 221
- со второй аксиомой счетности 222
- сопряженное 241, 307
- с первой аксиомой счетности 222
- сходящихся последовательностей 192
- счетно-нормированное 225
- топологическое векторное 224
- унитарное 280
- Фреше 194
- хаусдорфово 223
- l_p 192
- L_p 122, 193
- n -мерное 236
- Процесс ортогонализации Шмидта 283
- Равенство Парсеваля 131, 284
- Радиус шара 190
- Разложение вектора 236
- единицы 367
- самосопряженного оператора спектральное 367
- Хана 78
- Разность симметрическая 6
- Ранг характеристического числа 428
- Расстояние 122
- между множествами 189
- — точками метрического пространства 189
- Регулярная точка оператора 364
- Резольвента оператора 364
- Фредгольма 424
- Ряд абсолютно сходящийся 239
- Неймана 423
- сходящийся 239
- Фурье 124, 284
- Свертка функций 128, 427
- σ -алгебра 10, 34
- σ -кольцо 10, 34
- Сингулярное число оператора 387
- Система линейно независимая 236
- окрестностей определяющая 222
- — фундаментальная 222
- полная ортонормированная 285
- элементов замкнутая ортонормированная 284
- — ортогональная 283
- — ортонормированная 283
- Собственное значение оператора 363
- подпространство оператора 363
- Собственный вектор оператора 363
- Спектральная функция оператора 367
- Спектральный радиус оператора 365
- Спектр оператора 364
- — непрерывный 364
- — остаточный 364
- — точечный 364
- Стационарная точка функционала 457
- Сумма Лебега верхняя 69
- Лебега-Дарбу верхняя 70
- — — нижняя 70
- — нижняя 69
- многообразий прямая 237
- ряда 239
- Суммы Фейера 126
- Схема Даниэля 70
- Сходимость в нормированном пространстве сильная 308
- — — — слабая 308
- в сопряженном пространстве сильная 307
- — — — слабая 308
- в среднем 123, 193
- покоординатная 192
- по мере 64
- последовательности операторов равномерная 242
- — — по норме 242
- — — поточечная 242
- почти всюду 63
- равномерная 192
- Тело выпуклое 238
- Теорема Арцела 195
- Вейерштрасса 126
- Гильберта-Шмидта 363, 422
- Дини 125
- Егорова 63
- Лебега 64, 74, 158, 160
- Леви 75
- Лузина 65
- Монтеля 196
- о замкнутом графике 370
- Пикара 197
- Пифагора 301
- Планшереля 130
- Радона-Никодима 79
- Римана-Лебега 125
- Рисса 64, 240, 287
- Теплица-Сильвермана 333
- Тонелли 77
- Фату 75
- Фейера 126
- Фреше 65
- Фубини 77

- Шаудера 361
- Теоремы Фредгольма 362
- Хелли 163
- Тождество Аполлония 301
- поляризованное 302
- Топология 221
- дискретная 221
- Зарисского 228
- максимальная 221
- минимальная 221
- тривиальная 221
- Точка внутренняя 10, 190, 222
- граничная 190, 222
- евклидова пространства 5
- изолированная 190, 221
- множества крайняя 288
- предельная 11, 190, 221
- прикосновения 190, 221
- сопряженная 459
- Уравнение второго рода 362
- интегральное 421
- замкнутости обобщенное 284
- первого рода 362
- Якоби 459
- Уравнения Вольтерра 421
- Фредгольма 421
- Условие Лежандра 459
- — усиленное 459
- Якоби 459
- — усиленное 459
- Фактор-пространство 237
- Формула Ньютона-Лейбница 159
- обращения 427
- Функционал 111, 196, 241, 307
- билинейный 458
- квадратичный 458
- линейный 307
- Минковского 224
- непрерывный 307
- ограниченный 307
- однородно выпуклый 326
- сильно положительный 458
- Функция абсолютно непрерывная 159
- абстрактная 451
- борелева 62
- измеримая 62

- интегрируемая по Лебегу 65, 66, 67, 68, 69, 70
- калибровочная 224
- меры производящая 38
- монотонная 155
- непрерывная 156
- -оригинал 427
- от оператора 368
- сингулярная 160
- скачков 156
- с ограниченным изменением 156
- ступенчатая 72, 73
- суммируемая по Лебегу 65, 66, 67, 68, 69, 70
- финитная 73
- Хаара 304
- характеристическая 58, 72
- цилиндрическая 73

Центр шара 190

Часть проекционного оператора 366

Числа сопряженные 122

Число характеристическое 428

Шар 10, 190

— замкнутый 10, 190

— открытый 10, 190

Эквивалентные метрики 189

— нормы 239

— функции 63

Экстремаль 458

Экстремум функционала 457

— — сильный 457

— — слабый 457

Элемент наилучшего приближения 240, 282

Элементы линейно зависимые 236

— — независимые 236

— эквивалентные 237

Ядра итерированные 423

Ядро вырожденное 426

— Дирихле 124

— множества 238

— оператора 241

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
Глава 1. Теория меры и интеграла Лебега	5
§ 1. Мера Лебега в евклидовом пространстве	5
§ 2. Общее понятие меры. Продолжение меры с полукольца на кольцо	32
§ 3. Интеграл Лебега	62
§ 4. Пространства интегрируемых функций. Преобразование Фурье	122
§ 5. Дифференцирование и интегрирование функций	155
Глава 2. Основные классы пространств	189
§ 1. Метрические пространства. Принцип сжимающих отображений	189
§ 2. Топологические пространства	220
§ 3. Линейные нормированные пространства	235
§ 4. Гильбертовы пространства	280
Глава 3. Элементы теории линейных операторов	307
§ 1. Сопряженные пространства	307
§ 2. Основные принципы функционального анализа	325
§ 3. Вполне непрерывные операторы в нормированном пространстве. Спектральная теория самосопряженных операторов	360
§ 4. Интегральные уравнения	421
§ 5. Элементы дифференциального исчисления в банаховых пространствах	449
§ 6. Основы вариационного исчисления	455
<i>Список рекомендуемой литературы</i>	473
<i>Предметный указатель</i>	475

Учебное пособие

Городецкий Василий Васильевич
Нагнибида Николай Иванович
Настасиев Павел Павлович

**МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
ПО ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ**

Переплет художника *В. Г. Самсонова*
Художественный редактор *С. В. Анненков*
Технический редактор *Л. И. Швец*
Корректор *О. С. Дзюба*

ИБ № 13714

Сдано в набор 07.09.89. Подписано в печать 01.08.90. Формат 60×90^{1/16}. Бум. тип. № 2. Гарнитура литературная. Высокая печать. Усл. печ. л. 30. Усл. кр.-отт. 30. Уч.-изд. л. 36,89. Тираж 4600 экз. Изд. № 8733. Заказ № 0-74. Цена 2 р. 10 к.

Издательство «Выща школа» 252064, Киев-64, ул. Гоголевская, 7.

Отпечатано с матриц Головного предприятия республиканского производственного объединения «Полиграфкинг», 252057, Киев-57, ул. Довженко, 3, в Киевской книжной типографии научной книги. 252004, Киев-4, ул. Редина, 4. Зак. 1-587.