УДК 519

Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту №00–01–14004.

Мур Дж. Д.

Лекции об инвариантах Зайберга–Виттена. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001, 160 стр.

Основной целью данной книги было сделать подход Зайберга–Виттена к теории Дональдсона понятным для тех, кто уже получил знания по основному курсу дифференциальной геометрии и алгебраической топологии. Рассматривается применение к различным уравнениям математической физики.

Книга рассчитана на специалистов по топологии, алгебре, математической физике и доступна студентам старших курсов математических специальностей.

ISBN 5-93972-039-0

http://rcd.ru

Содержание

Предисловие

Риманова, симплектическая и комплексная геометрии часто изучаются с помощью решений систем нелинейных дифференциальных уравнений, таких как уравнения геодезических, минимальных поверхностей, псевдоголоморфных кривых и связностей Янга–Миллса. Для изучения таких уравнений была развита объединенная технология, включающая анализ на бесконечномерных многообразиях.

Поразительным приложением новой технологии является теория Дональдсона «антиавтодуальных» связностей в $SU(2)$-расслоениях над четырехмерными многообразиями, которая использует уравнения Янга–Миллса из математической физики для прояснения взаимоотношений между классификацией топологических и гладких четырехмерных многообразий. Тем самым, ожидаемое направление приложений — от топологии к математической физике, оказывается обращенным. Хотя уравнения Янга–Миллса являются только слабо нелинейными, необходимо использовать нелинейный анализ в полном объеме для понимания свойств пространства решений.

На нашем современном уровне знаний понимание гладких структур на топологических четырехмерных многообразиях, как кажется, требует нелинейных уравнений в частных производных в противоположность линейным. Поэтому удивительно, что имеется система уравнений в частных производных, которая даже менее нелинейна, чем уравнение Янга–Миллса, но может привести ко многим из наиболее важных результатов теории Дональдсона. Таковой является система уравнений Зайберга–Виттена (Seiberg–Witten).

Этот конспект лекций возник из курса для аспирантов, прочитанного в Калифорнийском университете (Санта Барбара) в течении весенней четверти 1995 года. Его цель состояла в том, чтобы сделать подход Зайберга–Виттена к теории Дональдсона доступным для аспирантов второго года обучения, которые уже прослушали основные курсы по дифференциальной геометрии и алгебраической топологии.

С тех пор появились более продвинутые изложения теории Зайберга–Виттена (отметим [13] и [32]). Надеемся, что данный конспект подготовит читателя к пониманию этих изложений и другой исследовательской литературы недавнего времени.

Мы хотим поблагодарить слушателей курса наряду с Винсентом Борелли (V. Borelli), Ксиянже Даем (X. Dai), Гуфангом Веем (G. Wei) и Риком Е (R. Ye) за многочисленные полезные обсуждения представленного здесь материала.

Дж. Д. Мур (J. D. Moore)
Санта Барбара
Апрель, 1996

Во втором издании мы исправили несколько незначительных ошибок и детализировали некоторые рассуждения для облегчения их понимания. В частности, мы включили новый раздел о форме Тома и привели более детальное описание второго класса Штифеля–Уитни и его связи с формой пересечения на четырехмерных многообразиях. Даже с учетом этих изменений темп изложения временами высок и увеличивается по ходу текста, особенно в последней главе. Мы рекомендуем читателю иметь под рукой карандаш и бумагу для проверки вычислений.

Мы работали с уравнениями Зайберга–Виттена с точки зрения чистой математики. Мы рекомендуем читателю, интересующемуся физическими истоками нашего предмета, книгу [9] и, в особенности, статью Виттена «Динамика квантовой теории поля».

Мы благодарны Давиду Бликеру (David Bleecker) за указание на то, что наше предыдущее доказательство предложения на странице 115[1] было неполным, а также Льву Вертгейму и анонимному рецензенту за обнаружение нескольких опечаток и незначительных ошибок в тексте.

Дж. Д. Мур
Санта Барбара
Январь 2001

---

[1]Указана страница первого издания: Lectures on Seiberg–Witten Invariants, Springer, 1996.

Глава 1

Предварительные сведения

1.1. Введение

В течении 1980-х годов Симон Дональдсон (S. Donaldson) использовал уравнения Янга–Миллса, возникшие в математической физике, для изучения дифференциальной топологии четырехмерных многообразий. Используя работы Майкла Фридмана (M. Friedman), ему удалось доказать теоремы следующего типа:

Теорема А. *Существует много компактных топологических четырехмерных многообразий, не имеющих гладкой структуры.*

Теорема В. *Существует много пар компактных гладких четырехмерных многообразий, которые гомеоморфны, но не диффеоморфны.*

Нелинейность уравнений Янга–Миллса доставляла трудности, поэтому необходимо было развить множество новых методов в рамках теории нелинейных уравнений в частных производных. Теория Дональдсона была элегантной и прекрасной, но ее детальные доказательства были трудны для овладения начинающим студентам.

Осенью 1994 года Эдвард Виттен (E. Witten) предложил систему уравнений, дающую главные результаты теории Дональдсона гораздо более простым путем, чем это представлялось возможным. Целью данного конспекта является элементарное введение к уравнениям, предложенным Виттеном. Эти уравнения известны сейчас как *уравнения Зайберга–Виттена* (*Seiberg–Witten*).

Нашей целью будет использование уравнений Зайберга–Виттена в дифференциально-геометрических частях доказательств теорем А и В. Основная идея проста: конструируются новые инварианты гладких четырехмерных многообразий, инварианты, зависящие от дифференцируемой структуры, а не только топологии.

Читатель несомненно знаком с многими топологическими инвариантами четырехмерных многообразий: фундаментальной группой $\pi_1(M)$, группами когомологий $H^k(M)$, $\cup$ — умножением и так далее. Эти топологические инварианты были в научном обороте длительное время и интенсивно изучались. Уравнения Зайберга–Виттена приводят к новым инвариантам четырехмерных многообразий, называемым *инвариантами Зайберга–Виттена.* Ключевым моментом является то, что гомеоморфные гладкие четырехмерные многообразия могут иметь различные инварианты Зайберга–Виттена. Подобно тому, как группы гомологий имеют много приложений, можно было ожидать, что инварианты Зайберга–Виттена будут иметь много применений в геометрии и топологии четырехмерных многообразий.

Действительно, очень скоро после открытия инвариантов Зайберга–Виттена было найдено несколько впечатляющих приложений.

Одно из приложений связано с геометрией вложенных алгебраических кривых в комплексной проективной плоскости CP^2. Любая такая кривая имеет степень, которая есть просто количество пересечений кривой и проективной прямой общего положения.

Алгебраические топологи имеют другой способ вычисления степени. Невырожденная алгебраическая кривая может быть рассмотрена как голоморфное вложение

$$i\colon \Sigma \to CP^2,$$

где Σ является компактной римановой поверхностью. Степень алгебраической кривой есть такое целое число d, что

$$\begin{aligned} i_*(\text{фундаментального класса в } H_2(\Sigma;\, Z)) = \\ = d\cdot(\text{генератор } H_2(CP^2;\, Z)). \end{aligned} \tag{1.1}$$

В большинстве учебников по алгебраической геометрии (например, страница 220 в [19]) можно найти формулу для рода вложенной алгебраической кривой:

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

Том (Thom) выдвинул гипотезу, что если Σ — компактная риманова поверхность рода g и

$$i\colon \Sigma \to CP^2$$

является любым гладким вложением, не обязательно голоморфным, то

$$g \geqslant \frac{(d-1)(d-2)}{2},$$

где степень определяется с помощью (1.1). (Нельзя было бы ожидать равенства для вложений общего вида, поскольку всегда можно увеличить род в фиксированном классе гомологий добавлением маленьких ручек.)

Гипотеза Тома была доказана Кронхаймером (Kronheimer) и Мровкой (Mrowka); Морганом (Morgan), Жабо (Szabo) и Таубсом (Taubes); Финтушелем (Fintushel) и Штерном (Stern), используя уравнения Зайберга–Виттена. Данный конспект должен дать читателю адекватный подготовительный материал для чтения доказательства (некоторые версии которого имеются в [23] и [33]). Доказательство также дает много новой информации о вложениях поверхностей в другие четырехмерные многообразия, кроме CP^2.

Другое применение инварианты Зайберга–Виттена имеют в дифференциальной геометрии. Одной из наиболее изучаемых проблем в римановой геометрии является взаимоотношение между кривизной и топологией римановых многообразий. Простейшим типом кривизны является, быть может, скалярная кривизна

$$s\colon M \to R$$

риманова многообразия M. Значение скалярной кривизны в точке p есть умноженное на постоянное число среднее всех секционных кривизн в p. Интересен вопрос: какие компактные односвязные римановы многообразия допускают метрику положительной скалярной кривизны?

Лихнерович (Lichnerovich) нашел простейшее препятствие к существованию метрики положительной скалярной кривизны на компактных односвязных многообразиях. Мы опишем позднее ту часть теоремы Лихнеровича, которая применима к четырехмерным многообразиям. Опираясь на работу Лихнеровича, Громов и Лаусон (Lawson) сумели получить сранительно полное описание компактных односвязных многообразий размерности $\geqslant 5$, допускающих метрики положительной скалярной кривизны. (См. [25], следствие 4.5, стр. 301.)

Как заметил Виттен, компактные четырехмерные многообразия положительной скалярной кривизны должны иметь нулевые инварианты Зайберга–Виттена. Поэтому имеется препятствие к существованию метрик положительной скалярной кривизны, зависящее от дифференцируемой структуры на четырехмерном многообразии, а не только от топологического типа. Инварианты Зайберга–Виттена показывают, что множество компактных четырехмерных многообразий (включающее в себя все компактные алгебраические поверхности «общего типа») не допускают метрики положительной скалярной кривизны.

Третье приложение уравнений Зайберга–Виттена — к симплектической геометрии. Действительно, Таубс [38] сумел отождествить инварианты Зайберга–Виттена на компактных симплектических четырехмерных многообразиях с инвариантами Громова, в качестве следствия он получил теорему существования для «псевдоголоморфных кривых» на таких многообразиях.

Быстрота, с которой эти новые результаты были получены, наводит на мысль, что уравнения Зайберга–Виттена могут иметь дальнейшие применения к геометрии четырехмерных многообразий. Это является сейчас областью интенсивных исследований.

Дифференциальной геометрией, необходимой для изучения уравнений Зайберга–Виттена является геометрия spin и spin^c структур. До недавнего времени эта геометрия представлялась незнакомой и странной для многих геометров, хотя спиноры уже продолжительное время рассматривались как важные в физике. Средства, необходимые для изучения spin и spin^c структур — точно такие же, как стандартные средства, необходимые всем геометрам и топологам: векторные расслоения, связности, характеристические классы и так далее. Мы начнем с обзора части этого необходимого подготовительного материала.

1.2. Что такое векторное расслоение?

Говоря приблизительно, векторное расслоение — это семейство векторных пространств, параметризованное гладким многообразием M.

Каким образом построить такое семейство векторных пространств? Предположим вначале, что основное поле — вещественные числа и векторные пространства должны быть размерности m, все изоморфные R^m. В этом случае начинают с открытого покрытия $\{U_\alpha\colon \alpha \in A\}$ многообразия M, и для любых $\alpha, \beta \in A$ гладкие функции перехода

$$g_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to GL(m, R) = \{m \times m \text{ невырожденные матрицы}\},$$

будут удовлетворять «условию коцикла»

$$g_{\alpha\beta} \cdot g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma} \ \text{ на } \ U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma.$$

Заметим, что

$$g_{\alpha\alpha} \cdot g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} \quad \Rightarrow \quad g_{\alpha\alpha} = I \ \text{ на } \ U_\alpha,$$

и, следовательно, условие коцикла влечет

$$g_{\alpha\beta} \cdot g_{\beta\alpha} = g_{\alpha\alpha} = I \ \text{ на } \ U_\alpha \cap U_\beta.$$

Пусть $\widetilde{E}$ обозначает множество всех троек $(\alpha, p, v) \in A \times M \times R^m$ таких, что $p \in U_\alpha$. Определим отношение эквивалентности $\sim$ на $\widetilde{E}$ следующим образом

$$(\alpha, p, v) \sim (\beta, q, w) \quad \Leftrightarrow \quad p = q \in U_\alpha \cap U_\beta, \quad v = g_{\alpha\beta}(p)w.$$

Обозначим класс эквивалентности для (α, p, v) через $[\alpha, p, v]$ и множество классов эквивалентности через E. Определим отображение проекции

$$\pi\colon E \to M \ \text{ равенством } \ \pi([\alpha, p, v]) = p.$$

Положим $\widetilde{U}_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha)$ и определим биекцию

$$\psi_\alpha : \widetilde{U}_\alpha \to U_\alpha \times R^m \quad \text{равенством} \quad \psi_\alpha([\alpha, p, v]) = (p, v).$$

Имеется единственная структура многообразия на E, которая превращает каждое ψ_α в диффеоморфизм. По отношению к этой структуре многообразия проекция π является гладкой субмерсией.

Вещественное векторное расслоение ранга m над M — это пара (E, π), построенная как выше для некоторого выбора открытого покрытия $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ многообразия M и некоторого набора $g_{\alpha\beta}$ функций перехода, удовлетворяющих условию коцикла. *Слоем* этого векторного расслоения над $p \in M$ является $E_p = \pi^{-1}(p)$, прообраз p относительно проекции. Он обладает структурой m-мерного вещественного векторного пространства.

Когда два таких векторных расслоения рассматриваются как изоморфные? Чтобы ответить на этот вопрос, нам необходимо понятие морфизма в категории векторных расслоений над M. *Морфизмом векторных расслоений* из (E_1, π_1) в (E_2, π_2) над M является гладкое отображение $f : E_1 \to E_2$, переводящее слой $(E_1)_p$ расслоения E_1 над p в слой $(E_2)_p$ расслоения E_2 над p и ограничение которого $f_p : (E_1)_p \to (E_2)_p$ на слой есть линейное отображение. Обратимый морфизм векторных расслоений называется *изоморфизмом векторных расслоений* над M. Пусть $\mathrm{Vect}^R_m(M)$ обозначает пространство классов изоморфизма вещественных векторных расслоений ранга m над M.

Читатель, без сомнения, уже встречал много примеров векторных расслоений в курсах дифференциальной геометрии: касательное расслоение TM, кокасательное расслоение T^*M, k-ю внешнюю степень $\Lambda^k T^*M$ кокасательного расслоения и другие тензорные расслоения. Если даны два векторных расслоения E_1 и E_2 над M, то можно построить их прямую сумму $E_1 \oplus E_2$, их тензорное произведение $E_1 \otimes E_2$, расслоение $\mathrm{Hom}(E_1, E_2)$ и так далее.

Можно построить также двойственное расслоение E_1^*, слоями которого являются двойственные пространства слоев E_1. Конструкция подобных векторных расслоений описана в деталях в § 3, [30] Комплексные векторные расслоения определяются подобным же способом. Единственное различие заключается в том, что в комплексном случае функции перехода принимают значения в группе $GL(m, C)$ $m \times m$ комплексных матриц вместо $GL(m, R)$ и $\widetilde{E}$ заменяется множеством троек $(\alpha, p, v) \in A \times M \times C^m$ таких, что $p \in U_\alpha$. Описанная выше конструкция дает пару (E, π), в которой слой $\pi^{-1}(p)$ имеет структуру *комплексного* векторного пространства размерности m. Пусть $\mathrm{Vect}_m^C(M)$ обозначает пространство классов эквивалентности комплексных векторных расслоений ранга m над M.

Комплексное линейное расслоение ранга 1 называют также *комплексным линейным расслоением.* Пространство комплексных линейных расслоений образует абелеву группу относительно операции тензорного произведения $\otimes$. Мы будем иногда писать

$$L^m = L \otimes L \otimes \ldots \otimes L \qquad (m \text{ раз}).$$

Отметим, что если

$$g_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to GL(1, C)$$

являются функциями перехода для L, то функции перехода для L^m — это просто $g_{\alpha\beta}^m$. В дополнении к вещественным и комплексным векторным расслоениям можно определить кватернионные векторные расслоения, векторные расслоения над кватернионами. Кватернионы были впервые описаны Уильямом Р. Гамильтоном в 1853 году. В современных обозначениях кватернион — это просто 2×2 матрица вида

$$Q = a\,\mathbf{1} + b\,\mathbf{i} + c\,\mathbf{j} + d\,\mathbf{k},$$

где a, b, c и d являются вещественными числами и

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что сумма двух кватернионов и произведение двух кватернионов есть снова кватернион. Умножение кватернионов билинейно над вещественными числами;

поэтому оно определяется таблицей умножения для их базиса $\{\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$:

$$\begin{array}{c|cccc} & \mathbf{1} & \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \hline \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \mathbf{i} & \mathbf{i} & -\mathbf{1} & -\mathbf{k} & \mathbf{j} \\ \mathbf{j} & \mathbf{j} & \mathbf{k} & -\mathbf{1} & -\mathbf{i} \\ \mathbf{k} & \mathbf{k} & -\mathbf{j} & \mathbf{i} & -\mathbf{1} \end{array}$$

Таким образом, из двух возможных соглашений мы выбираем то, которое индуцирует *противоположное* выражение к векторному произведению в трехмерном пространстве «мнимых кватернионов», натянутом на $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$.

Можно мыслить кватернионы по-другому — как 2×2 комплексные матрицы вида

$$\begin{pmatrix} w & -\overline{z} \\ z & \overline{w} \end{pmatrix}$$

где z и w — комплексные числа. Заметим, что, поскольку

$$\det Q = |z|^2 + |w|^2,$$

ненулевой кватернион Q имеет мультипликативный обратный.

Пусть H обозначает пространство кватернионов. Оно является телом, удовлетворяющим всем аксиомам поля, кроме коммутативности умножения. Пусть $GL(m, H)$ обозначает группу невырожденных $m \times m$ матриц с кватернионными элементами.

Для того, чтобы определить кватернионное векторное расслоение ранга m необходимо просто потребовать, чтобы функции перехода $g_{\alpha\beta}$ принимали свои значения в $GL(m, H)$. Пусть $\mathrm{Vect}_m^H(M)$ обозначает пространство классов эквивалентности кватернионных векторных расслоений ранга m над M.

Заметим, что $GL(m, H)$ является подгруппой $GL(2m, C)$, которая в свою очередь является подгруппой в $GL(4m, R)$. Можно мыслить кватернионное векторное расслоение ранга m как вещественное векторное расслоение ранга $4m$, функции перехода $g_{\alpha\beta}$ которого принимают значения в $GL(m, H) \subset GL(4m, R)$. Более общо, если G есть подгруппа Ли группы $GL(m, R)$, то *G-векторное расслоение* — это векторное расслоение ранга m, функции перехода которого принимают значения в G.

Предположим, для примера, что G является ортогональной группой $O(m) \subset GL(m, R)$. В этом случае функции перехода G-векторного расслоения сохраняют обычное скалярное произведение на R^m. Поэтому расслоение E наследует *послойную метрику*, гладкую функцию, сопоставляющую каждой точке $p \in M$ скалярное произведение

$$\langle\ ,\ \rangle_p \colon E_p \times E_p \to R.$$

Если G — специальная ортогональная группа $SO(n)$, G-векторное расслоение обладает не только послойной метрикой, но также и ориентацией. Подобно этому, если G — унитарная группа $U(m) \subset GL(m, C) \subset GL(2m, R)$, то G-векторное расслоение является комплексным векторным расслоением ранга m вместе с *эрмитовой метрикой*, гладкой функцией, сопоставляюшей каждой точке $p \in M$ отображение

$$\langle\ ,\ \rangle_p \colon E_p \times E_p \to C,$$

удовлетворяющее следующим аксиомам:

1. $\langle v, w\rangle_p$ — комплексно линейно по v и комплексно антилинейно по w.

2. $\langle v, w\rangle_p = \overline{\langle w, v\rangle_p}$.

3. $\langle v, v\rangle_p \geqslant 0$, причем равенство имеет место только, если $v = 0$.

Сечение векторного расслоения (E, π) — это гладкое отображение

$$\sigma \colon M \to E \quad \text{такое, что} \quad \pi \circ \sigma = id_M,$$

тождественное отображение M на себя.

Если $\sigma \in \Gamma(E)$,[1] то ограничение σ на U_α можно записать в виде

$$\sigma(p) = [\alpha, p, \sigma_\alpha(p)], \quad \text{где} \quad \sigma_\alpha \colon U_\alpha \to \begin{cases} R^m \\ C^m \\ H^m \end{cases}.$$

[1]Множество $\Gamma(E)$ еще не определено — подразумевается, что это есть множество сечений расслоения. (Прим. перев.)

является гладким отображением. Векторнозначные функции σ_α называются *локальными представителями* σ и они связаны один с другим с помощью формулы

$$\sigma_\alpha = g_{\alpha\beta}\sigma_\beta \quad \text{на} \quad U_\alpha \cap U_\beta. \tag{1.2}$$

В вещественном или комплексном случаях множество $\Gamma(E)$ сечений E являются соответственно вещественным и комплексным пространствами, а также модулями над пространством гладких функций на M. В кватернионном случае нам необходимо быть внимательными, поскольку кватернионное умножение некоммутативно. В этом случае равенство (1.2) показывает, что сечения E можно умножать справа на кватернионы.

Пример. Рассмотрим комплексные линейные расслоения над сферой Римана S^2, трактуемой, как одноточечная компактификация комплексной плоскости, $S^2 = C \cup \{\infty\}$. Зададим на C стандартную комплексную координату z и положим $U_0 = S^2 - \{\infty\}$, $U_\infty = S^2 - \{0\}$. Для каждого целого n определим

$$g_{\infty 0}\colon U_\infty \cap U_0 \to GL(1, C) \quad \text{посредством} \quad g_{\infty 0}(z) = \frac{1}{z^n}.$$

Этот выбор функции перехода определяет комплексное линейное расслоение над S^2, которое мы обозначим H^n. Сечение H^n представлено отображениями

$$\sigma_0\colon U_0 \to C, \quad \sigma_\infty\colon U_\infty \to C$$

такими, что

$$\sigma_\infty = \frac{1}{z^n}\sigma_0, \quad \text{на} \quad U_\infty \cap U_0.$$

Можно доказать, что любое комплексное линейное расслоение над S^2 изоморфно H^n для некоторого $n \in Z$.

В частности, кокасательное расслоение S^2 должно быть изоморфно H^n для некоторого выбора n. Ограничение сечения σ кокасательного расслоения на U_0 имеет вид $\sigma_0 dz$ для некоторого выбора комплекснозначной функции σ_0. Над U_∞ мы можем использовать координату $w = 1/z$ и написать $\sigma = -\sigma_\infty dw$. Поскольку $dw = -(1/z)^2 dz$,

$$\sigma_0\, dz = -\sigma_\infty dw \quad \Rightarrow \quad \sigma_\infty = z^2\sigma_0,$$

и, следовательно, $n = -2$. Иными словами, $T^*S^2 = H^{-2}$. Аналогично, $TS^2 = H^2$.

Подобным же способом мы можем построить все кватернионные линейные расслоения над S^4. В этом случае мы трактуем S^4 как одноточечную компактификацию пространства кватернионов, $S^4 = H \cup \{\infty\}$. Положим $U_0 = H$, $U_\infty = S^4 - \{0\}$ и определим

$$g_{\infty 0}\colon U_\infty \cap U_0 \to GL(1, H) \quad \text{посредством} \quad g_{\infty 0}(Q) = \frac{1}{Q^n}.$$

Если n принимает всевозможные целые значения, мы получим все кватернионные линейные расслоения над S^4.

Каким образом мы можем доказать утверждения, высказанные в предыдущих параграфах? Доказательства могут быть основаны на теоремах из дифференциальной топологии, которые классифицируют векторные расслоения над многообразиями. Вот два ключевых результата:

Классификационная теорема для комплексных линейных расслоений. *Если M — гладкое многообразие, то существует биекция*

$$\mathrm{Vect}_1^C(M) \cong H^2(M;\, Z).$$

Эта теорема будет доказана в параграфе 1.6. Из теоремы следует что

$$\mathrm{Vect}_1^C(S^2) \cong H^2(S^2;\, Z) \cong Z,$$

и мы увидим, что H^m соответствует $m \in Z$ при этом изоморфизме. Аргументация, подобная примененной для комплексных линейных расслоений, может быть использована для доказательства следующей теоремы.

Классификационная теорема для кватернионных линейных расслоений. *Если M — гладкое многообразие размерности $\leqslant 4$, то существует биекция*

$$\mathrm{Vect}_1^H(M) \cong H^4(M;\, Z).$$

1.3. Что такое связность?

В отличии от дифференциальной топологии, дифференциальная геометрия имеет дело с «геометрическими структурами» на многообразиях и векторных расслоениях. Одной из таких структур является связность. Одним из свидетельств важности связностей являются многочисленные определения связности, которые были предложены.

Определение, часто используемое дифференциальными геометрами, имеет следующий вид. Пусть

$$\chi(M) = \{\text{векторные поля на}\, M\},$$
$$\Gamma(E) = \{\text{гладкие сечения } E\}.$$

Определение 1. *Связность* на векторном расслоении E — это отображение

$$\nabla^A \colon \chi(M) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E),$$

которое удовлетворяет следующим аксиомам (где $\nabla^A_X \sigma = \nabla^A(X, \sigma)$):

$$\nabla^A_X(f\,\sigma + \tau) = (X\,f)\sigma + f\nabla^A_X\sigma + \nabla^A_X\tau, \tag{1.3}$$
$$\nabla^A_{f\,X+Y}\sigma = f\nabla^A_X\sigma + \nabla^A_Y\sigma. \tag{1.4}$$

Здесь f — вещественнозначная функция, если E — вещественное векторное расслоение; комплекснозначная функция, если E — комплексное векторное расслоение.

По традиции $\nabla^A_X\sigma$ трактуют как *ковариантную производную* σ в направлении X.

Если задана связность ∇^A в смысле определения 1, мы можем задать отображение

$$d_A \colon \Gamma(E) \to \Gamma(T^*M \otimes E) = \Gamma(\mathrm{Hom}(TM,\, E))$$

с помощью

$$d_A(\sigma)(X) = \nabla^A_X\sigma.$$

Тогда d_A удовлетворяет следующему определению:

Определение 2. *Связность* на векторном расслоении E — это отображение

$$d_A \colon \Gamma(E) \to \Gamma(T^*M \otimes E),$$

которое удовлетворяет следующей аксиоме:

$$d_A(f\sigma + \tau) = (df) \otimes \sigma + f d_A\sigma + d_A\tau. \tag{1.5}$$

Определение 2 чаще используется в калибровочной теории, но в нашем рассмотрении оба определения будут важны. Заметим, что определение 2 является чуть более экономным в том плане, что необходимо запомнить только одну аксиому вместо двух. Более того, определение 2 делает ясной аналогию между связностью и внешним дифференцированием.

Простейший пример связности имеет место для расслоения $E = M \times R^m$, тривиального вещественного векторного расслоения ранга m над M. Сечение этого расслоения можно отождествить с векторнозначным отображением

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma^1 \\ \sigma^2 \\ . \\ \sigma^m \end{pmatrix} : M \to R^m.$$

Мы можем использовать внешнюю производную для того, чтобы определить «тривиальную» плоскую связность d_A на E:

$$d_A \begin{pmatrix} \sigma^1 \\ . \\ \sigma^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d\sigma^1 \\ . \\ d\sigma^m \end{pmatrix}.$$

Более общо, при заданной $m \times m$ матрице

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_1^1 & . & \omega_m^1 \\ . & \dots & . \\ \omega_1^m & . & \omega_m^m \end{pmatrix}$$

мы можем определить связность d_A с помощью

$$d_A \begin{pmatrix} \sigma^1 \\ . \\ \sigma^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d\sigma^1 \\ . \\ d\sigma^m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_1^1 & . & \omega_m^1 \\ . & \dots & . \\ \omega_1^m & . & \omega_m^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^1 \\ . \\ \sigma^m \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

Мы можем написать последнее уравнение в более сокращенном виде:

$$d_A\sigma = d\sigma + \omega\sigma,$$

где в последнем члене подразумевается матричное умножение. Действительно, аксиома (1.5) может быть проверена непосредственно, используя знакомые свойства внешнего дифференцирования:

$$\begin{aligned}&d_A(f\sigma+\tau)=d(f\sigma+\tau)+\omega(f\sigma+\tau)=\\&=df\otimes\sigma+f\,d\sigma+f\omega\sigma+d\tau+\omega\tau=(df)\otimes\sigma+f\,d_A\sigma+d_A\tau.\end{aligned}$$

Мы можем построить связность на тривиальном комплексном векторном расслоении $E=M\times C^m$ или тривиальном кватернионном расслоении $M\times H^m$ точно таким же способом, выбирая ω $m\times m$ матрицей комплексно- или кватернионнозначных 1-форм.

Любая связность d_A на тривиальном расслоении имеет вид (1.6). Для того, чтобы показать это, мы применяем d_A к постоянным сечениям

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\ \cdot\\0\end{pmatrix},\quad e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\ \cdot\\0\end{pmatrix},\quad\dots\quad e_m=\begin{pmatrix}0\\0\\ \cdot\\1\end{pmatrix},$$

получая

$$d_Ae_j=\begin{pmatrix}\omega_j^1\\\omega_j^2\\ \cdot\\\omega_j^m\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^m e_i\omega_j^i.$$

Непосредственно из аксиомы связности следует, что

$$d_A\Bigl(\sum_{i=1}^m e_i\sigma^i\Bigr)=\sum_{i=1}^m e_i\sigma^i+\sum_{i,j=1}^m e_i\omega_j^i\sigma^j,$$

что является просто другой формой записи (1.6).

Любое векторное расслоение «локально тривиально». Предположим, например, что E — вещественное векторное расслоение ранга над M, определенное открытым покрытием $\{U_\alpha\colon\alpha\in A\}$ и функциями перехода $g_{\alpha\beta}$. В обозначениях предыдущего раздела

$$\psi_\alpha\colon\pi^{-1}(U_\alpha)\to U_\alpha\times R^m$$

является изоморфизмом векторных расслоений, отображающим ограничение E на U_α на тривиальное расслоение над U_α.

Сечение $\sigma \in \Gamma(E)$ обладает локальным представителем σ_α, который представляет собой набор m обычных функций на U_α. Если d_A является связностью на E, то $d_A\sigma$ обладает локальным представителем $(d_A\sigma)_\alpha$, который имеет вид набора из m обычных 1-форм на U_α. Точно так же, как в предыдущем параграфе, мы можем написать

$$(d_A\sigma)_\alpha = d\sigma_\alpha + \omega_\alpha\sigma_\alpha, \tag{1.7}$$

где ω_α является $m\times m$ матрицей 1-форм на U_α. Эта матрица ω_α называется *локальным представителем* связности d_A.

Для того, чтобы увидеть, как взаимосвязаны локальные представители, соответствующие двум элементам нашего выделенного покрытия, мы заметим, что, поскольку связность корректно определена на пересечениях, мы должны иметь

$$d\sigma_\alpha + \omega_\alpha\sigma_\alpha = g_{\alpha\beta}(d\sigma_\beta + \omega_\beta\sigma_\beta) \quad \text{на} \quad U_\alpha \cap U_\beta.$$

Поскольку $\sigma_\beta = g_{\alpha\beta}^{-1}\sigma_\alpha$,

$$\begin{aligned} d\sigma_\alpha + \omega_\alpha\sigma_\alpha &= g_{\alpha\beta}[d(g_{\alpha\beta}^{-1}\sigma_\alpha) + \omega_\beta g_{\alpha\beta}^{-1}\sigma_\alpha] = \\ &= d\sigma_\alpha + g_{\alpha\beta}[dg_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta}\omega_\beta g_{\alpha\beta}^{-1}]\sigma_\alpha. \end{aligned}$$

Поэтому мы делаем вывод, что

$$\omega_\alpha = g_{\alpha\beta}\, dg_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta}\omega_\beta g_{\alpha\beta}^{-1} \quad \text{на} \quad U_\alpha \cap U_\beta. \tag{1.8}$$

Это приводит к следующему определению

Определение 3. *Связностью* на вещественном векторном расслоении E, определенном покрытием $\{U_\alpha\colon \alpha \in A\}$ и функциями перехода $\{g_{\alpha\beta}\colon \alpha, \beta \in A\}$ называется совокупность дифференциальных операторов

$$\{d + \omega_\alpha : \alpha \in A\},$$

где d — внешняя производная на R^m-значных функциях и ω_α — $m \times m$ матрица 1-форм на U_α, преобразующихся согласно (1.8).

Имеются, конечно, аналогичные определения связностей в комплексном и кватернионном векторном расслоениях.

Если E является $O(m)$-расслоением, *ортогональной связностью* в E называется связность, чьи локальные представители $d+\omega_\alpha$ обладают тем свойством, что ω_α принимает значения в $\mathscr{O}(m)$, где $\mathscr{O}(m)$ — пространство $m \times m$ кососимметрических матриц, алгебра Ли ортогональной группы $O(m)$. Заметим, что это условие сохраняется при преобразованиях (1.8), поскольку

$$g_{\alpha\beta} \in O(m),\ \omega_\beta \in \mathscr{O}(m) \ \Rightarrow\ g_{\alpha\beta}\, dg_{\alpha\beta}^{-1},\ g_{\alpha\beta}\omega_\beta g_{\alpha\beta}^{-1} \in \mathscr{O}(m).$$

Аналогично, если E является $U(m)$-расслоением, *унитарной связностью* в E называется связность такая, что ω_α принимает свои значения в $\mathscr{U}(m)$, где $\mathscr{U}(m)$ — пространство $m \times m$ косоэрмитовых матриц, алгебра Ли унитарной группы $U(m)$. Общее правило таково, что если E является G-расслоением, G-связность — это связность, чьи локальные представители ω_α принимают значения в алгебре Ли группы G.

Вот некоторые примеры связностей.

Пример 1. Предположим, что $E = TM$, касательное пространство к гладкому многообразию M, вложенному в R^N. Тривиальное расслоение $M \times R^N$ является тогда прямой суммой

$$M \times R^N = TM \oplus NM,$$

где NM является нормальным расслоением M в R^N, слой которого над точкой $p \in M$ есть множество всех векторов в R^N, перпендикулярных к M в точке p. На тривиальном расслоении $M \times R^N$ мы можем взять тривиальную плоскую связность, определенную векторнозначным внешним дифференцированием d. Если $\sigma \in \Gamma(E) \subset \Gamma(M \times R^N)$, то $d\sigma \in \Gamma(T^*M \otimes (M \times R^N))$. Мы определяем связность

$$d_A\colon \Gamma(TM) \to \Gamma(T^*M \otimes TM),$$

полагая

$$d_A(\sigma) = (d\sigma)^{\top},$$

где $(\cdot)^{\top}$ обозначает проекцию на касательное пространство. Поучительным упражнением является проверка того, что это есть в точности связность Леви–Чивита, изучаемая в римановой геометрии.

Пример 2. Над многообразием Грассмана

$$G_m(C^N) = \{m\text{-мерные подпространства } C^N\}$$

тривиальное расслоение распадается в прямую сумму

$$G_m(C^N) \times C^N = E \oplus E^\perp,$$

где

$$E = \{(V,\, v) \in G_m(C^N) \times C^N : v \in V\},$$

$$E^\perp = \{(V,\, v) \in G_m(C^N) \times C^N : v \perp V\}.$$

Так же, как в предыдущем примере, мы можем использовать тривиальную плоскую связность d на тривиальном расслоении $G_m(C^N) \times C^N$ для определения связности d_A на E, полагая

$$d_A(\sigma) = (d\sigma)^\top,$$

где $(\cdot)^\top$ обозначает ортогональную проекцию на E. Эта связность называется ***универсальной связностью*** в ***универсальном расслоении*** E.

Пример 3: прообраз связности. Если $(E,\, \pi)$ является векторным расслоением над M, определенным открытым покрытием $\{U_\alpha\colon \alpha \in A\}$ и функциями перехода $\{g_{\alpha\beta}\colon \alpha,\, \beta \in A\}$, а $F\colon N \to M$ — гладкое отображение, то ***прообразом расслоения***, $(F^*E,\, \pi^*)$, называют векторное расслоение над N, определенное открытым покрытием $\{F^{-1}(U_\alpha)\colon \alpha \in A\}$ и функциями перехода $\{g_{\alpha\beta} \circ F\colon \alpha,\, \beta \in A\}$. Часто бывает полезным немного измененное описание:

$$F^*E = \{(p,\, v) \in N \times E\colon F(p) = \pi(v)\}, \quad \pi^*\big((p,\, v)\big) = p.$$

Если $\sigma \in \Gamma(E)$ имеет локальные представители σ_α, мы можем определить $F^*\sigma \in \Gamma(F^*E)$ как сечение с локальными представителями $\sigma_\alpha \circ F$. Эквивалентно, в терминах этого измененного описания,

$$F^*\sigma\colon N \to F^*E \quad \text{посредством} \quad F^*\sigma(p) = (p,\, \sigma \circ F(p)).$$

Более общо, если $\omega \otimes \sigma$ является дифференциальной формой со значениями в E, мы можем определить ее прообраз следующим образом

$$F^*(\omega \otimes \sigma) = F^*\omega \otimes F^*\sigma.$$

Предложение 1. *Если d_A является связностью на векторном расслоении (E, π) над M и $F\colon N \to M$ — гладкое отображение, то существует единственная связность d_{F^*A} на расслоении-прообразе (F^*E, π^*), которая делает следующую диаграмму коммутативной:*

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(E) & \longrightarrow & \Gamma(T^*M \otimes E) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \Gamma(F^*E) & \longrightarrow & \Gamma(T^*N \otimes F^*E) \end{array}$$

В этой диаграмме горизонтальные стрелки даются связностями, а вертикальные стрелки — отображениями F^*.

Доказательство. Из коммутативной диаграммы следует, что если ω_α — локальный представитель d_A, соответствующий U_α, то локальным представителем d_{F^*A}, соответствующим $F^{-1}(U_\alpha)$ является $F^*\omega_\alpha$. Этим установлена единственность. Для проверки существования определим локальные представители d_{F^*A} в виде $F^*\omega_\alpha$ и проверим, что они удовлетворяют правильным формулам перехода.

Одним важным применением конструкции прообраза является существование параллельного переноса вдоль кривых. Если (E, π) — гладкое вещественное векторное расслоение ранга m над M и $\gamma\colon [a, b] \to M$ — гладкая кривая, мы можем образовать расслоение-прообраз (γ^*E, π^*) над отрезком $[a, b]$. Легким упражнением является демонстрация того, что любое векторное расслоение над отрезком $[a, b]$ является тривиальным, поэтому мы можем считать γ^*E тривиальным расслоением $[a, b] \times R^m$. Прообраз связности может быть записан, как

$$d_{\gamma^*A} = d + \omega,$$

где ω — матрица из 1-форм на $[a,\, b]$. Если t — стандартная координата на $[a,\, b]$,

$$\omega = \begin{pmatrix} f_1^1 dt & . & f_m^1 dt \\ . & & . \\ f_1^m dt & . & f_m^m dt \end{pmatrix},$$

где $f_j^i \colon [a,\, b] \to \mathbb{R}$. Мы рассмотрим теперь уравнение

$$d_{\gamma^* A}\sigma = d\sigma + \omega\sigma = 0,$$

которое может быть записано в терминах компонент как

$$\frac{d\sigma^i}{dt} + \sum_{j=1}^{m} f_j^i \sigma^j = 0, \qquad (1.9)$$

линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений. Из теории дифференциальных уравнений следует, что для данного элемента $\sigma_0 \in (\gamma^* E)_a$, существует единственное решение (1.9), удовлетворяющее начальному условию $\sigma(a) = \sigma_0$. Поэтому мы можем определить изоморфизм

$$\tau\colon (\gamma^* E)_a \to (\gamma^* E)_b,$$

полагая $\tau(\sigma_0) = \sigma(b)$, где σ — единственное решение (1.9), удовлетворяющее $\sigma(a) = \sigma_0$. Но

$$(\gamma^* E)_a \cong E_{\gamma(a)} \quad \text{и} \quad (\gamma^* E)_b \cong E_{\gamma(b)}.$$

Поэтому τ определяет изоморфизм

$$\tau\colon E_{\gamma(a)} \to E_{\gamma(b)},$$

который мы назовем ***параллельным переносом вдоль*** γ.

Нетрудно показать, что в случае $O(m)$-расслоения с ортогональной связностью, или $U(m)$-расслоения с унитарной связностью, параллельный перенос является изометрией. Паралельный перенос имеет следующее простое применение.

Предложение 2. *Если $F_0, F_1\colon N \to M$ — гладко гомотопные отображения и E — векторное расслоение над N, то*

F_0^*E и F_1^*E являются изоморфными векторными расслоениями над N.

Набросок доказательства. Пусть J_0, $J_1\colon N \to N \times [0,1]$ — гладкие отображения, определенные

$$J_0(p) = (p,\, 0), \quad J_1(p) = (p,\, 1).$$

Если F_0 гладко гомотопно F_1, то существует гладкое отображение $H\colon N \times [0,1] \to M$, такое, что

$$H \circ J_0 = F_0, \quad H \circ J_1 = F_1.$$

Этого достаточно для того, чтобы показать, что если E — векторное расслоение над $N \times [0,1]$, то J_0^*E изоморфно J_1^*E.

Наделим E связностью и пусть $\tau_p\colon E_{(p,0)} \to E_{(p,1)}$ обозначает параллельный перенос вдоль кривой $t \to (p,\, t)$. Мы можем определить изоморфизм векторных расслоений $\tau\colon J_0^*E \to J_1^*E$ с помощью

$$\tau(p,\, v) = (p,\, \tau_p(v)), \quad \text{для} \quad v \in E_{(p,0)} = J_0^*E_p.$$

Следствие. *Всякое векторное расслоение над стягиваемым многообразием тривиально.*

Доказательство.

Если M — стягиваемое многообразие, то тождественное отображение на M гомотопно постоянному отображению и, следовательно, любое векторное расслоение над M изоморфно прообразу расслоения над точкой посредством постоянного отображения. ■

1.4. Кривизна связности

Давайте сделаем обзор некоторых знакомых утверждений, касающихся внешнего дифференцирования. Пусть

$$\Omega^p(M) = \Gamma(\Lambda^p(T^*M)) =$$
$$= \{\text{дифференциальные } p\text{-формы на } \quad M\},$$

так что $\Omega^0(M)$ является просто пространством гладких вещественнозначных функций на M. Внешнее дифференцирование $d\colon \Omega^0(M) \to \Omega^1(M)$ — это просто обычный дифференциал функции

$$df = \text{дифференциал } f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$$

Мы продолжаем этот оператор на $\Omega^p(M)$ для всех p, потребовав, чтобы $d(dx^i) = 0$ и выполнялось правило Лейбница:

$$d(\omega \wedge \theta) = d\omega \wedge \theta + (-1)^p \omega \wedge d\theta, \quad \text{для} \quad \omega \in \Omega^p(M).$$

Равенство смешанных частных производных влечет $d \circ d = 0$. Поэтому мы получаем коцепной комплекс

$$\ldots \to \Omega^{p-1}(M) \to \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M) \to \ldots,$$

и можем определить p-ю *группу когомологий де Рама*

$$H^p(M;\, R) = \frac{\text{ядро}\, d\colon \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)}{\text{образ}\, d\colon \Omega^{p-1}(M) \to \Omega^p(M)}.$$

Хорошо известно, что эти группы изоморфны обычным сингулярным группам когомологий с вещественными коэффициентами и являются в силу этого топологическими инвариантами. (Дальнейшее обсуждение теории де Рама можно найти в [8].)

Пусть теперь E является векторным расслоением над M и пусть

$$\begin{aligned} \Omega^p(E) &= \Gamma(\Lambda^p(T^*M) \otimes E) = \\ &= \{p\text{-формы на } M \text{ со значениями в } E\}. \end{aligned}$$

Связность на E может быть рассмотрена как линейное отображение, переводящее 0-формы со значениями в E в 1-формы со значениями в E,

$$d_A\colon \Omega^0(E) \to \Omega^1(E).$$

Как и в случае обычного внешнего дифференцирования мы можем продолжить d_A на все $\Omega^p(E)$, потребовав выполнения правила Лейбница

$$\begin{gathered} d_A(\omega\sigma) = d\omega\, \sigma + (-1)^p \omega \wedge d_A \sigma, \\ \text{для} \quad \omega \in \Omega^p(M),\ \sigma \in \Gamma(E). \end{gathered}$$

Как правило, равенство $d_A \circ d_A = 0$ неверно. Тем не менее,

$$d_A \circ d_A(f\sigma + \tau) = d_A[df \otimes \sigma + f d_A\sigma + d_A\tau] =$$
$$= d(df)\sigma - df \wedge d_A\sigma + df \wedge d_A\sigma + f(d_A \circ d_A)\sigma + d_A \circ d_A\tau =$$
$$= f(d_A \circ d_A\sigma) + d_A \circ d_A\tau,^2$$

таким образом, $d_A \circ d_A$ линейно над функциями. Отсюда следует, что $d_A \circ d_A$ является в действительности тензорным полем, называемым кривизной связности.

В случае тривиального векторного расслоения $E = M \times R^m$, мы можем применить $d_A \circ d_A$ к стандартным постоянным сечениям

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ . \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$d_A \circ d_A(e_i) = \begin{pmatrix} \Omega_i^1 \\ \Omega_i^2 \\ . \\ \Omega_i^m \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^m e_j \Omega_i^j,$$

где каждая Ω_i^j является 2-формой. Линейность над функциями влечет

$$d_A \circ d_A\Big(\sum_{i=1}^m e_i \sigma^i\Big) = \sum_{i,j=1}^m e_i \Omega_j^i \sigma^j,$$

или, в матричных обозначениях,

$$d_A \circ d_A(\sigma) = \Omega\sigma, \tag{1.10}$$

где Ω — матрица 2-форм.

Предположим теперь, что E есть вещественное векторное расслоение ранга m над M, определенное открытым покрытием $\{U_\alpha \colon \alpha \in A\}$ и функциями перехода $g_{\alpha\beta}$. Любой элемент

---

[2] В этом равенстве следовало бы писать именно $df \wedge d_A\sigma$, а не $df \otimes d_A\sigma$ как в оригинале, т. к. применяется правило Лейбница. (Прим. перев.)

$\sigma \in \Gamma(E)$ обладает локальными представителями σ_α и, в соответствии с (1.10),

$$d_A \circ d_A(\sigma_\alpha) = \Omega_\alpha \sigma_\alpha,$$

где Ω_α — матрица 2-форм. Применение дифференциального оператора $d_A = d + \omega_\alpha$ к (1.7) дает[3]

$$\begin{aligned} &d_A \circ d_A(\sigma_\alpha) = (d + \omega_\alpha)(d\sigma_\alpha + \omega_\alpha \sigma_\alpha) = \\ &= d(d\sigma_\alpha) + (d\omega_\alpha)\sigma_\alpha - \omega_\alpha \wedge d\sigma_\alpha + \omega_\alpha \wedge d\sigma_\alpha + (\omega_\alpha \wedge \omega_\alpha)\sigma_\alpha = \\ &\qquad = (d\omega_\alpha + \omega_\alpha \wedge \omega_\alpha)\sigma_\alpha, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\Omega_\alpha = d\omega_\alpha + \omega_\alpha \wedge \omega_\alpha. \tag{1.11}$$

В силу того, что $d_A \circ d_A$ не зависит от тривиализации, матрицы 2-форм должны удовлетворять

$$\Omega_\alpha \sigma_\alpha = g_{\alpha\beta} \Omega_\beta \sigma_\beta = g_{\alpha\beta} \Omega_\beta g_{\alpha\beta}^{-1} \sigma_\alpha \quad \text{на} \quad U_\alpha \cap U_\beta.$$

Поэтому Ω_α преобразуются по правилу

$$\Omega_\alpha = g_{\alpha\beta} \Omega_\beta g_{\alpha\beta}^{-1}, \tag{1.12}$$

таким же образом, как должны преобразовываться локальные представители 2-форм со значениями в векторном расслоении $\mathrm{End}(E)$. Иными словами, Ω_α определяют $\mathrm{End}(E)$-значную 2-форму, называемую ***кривизной*** связности d_A и обозначаемую иногда просто Ω или Ω_A.

Дифференцирование уравнения (1.11) приводит к *тождеству Бьянки*:

$$d\Omega_\alpha = \Omega_\alpha \wedge \omega_\alpha - \omega_\alpha \wedge \Omega_\alpha = [\Omega_\alpha, \omega_\alpha]. \tag{1.13}$$

Разумеется, все предыдущее обсуждение применимо к связностям в комплексных векторных расслоениях или кватернионных векторных расслоениях наравне с вещественными векторными расслоениями. В комплексном случае, к примеру, матрицы Ω_α имеют комплекснозначные 2-формы в качестве элементов.

---

[3] Из правила Лейбница следует, что локальными представлениями оператора d_A на любом $\Omega^p(E)$ будут $d_A = d + \omega_\alpha$, действие которых на p-формах Ψ со значениями в $\mathbb{R}^m$ следует понимать так: $(d+\omega_\alpha)\Psi = d\Psi + \omega_\alpha \wedge \Psi$, где во втором слагаемом матрица 1-форм умножается на вектор p-форм.

В случае ортогональной связности в $O(m)$-расслоении непосредственно из (1.11) следует, что матрицы Ω_α кососимметричны. В случае унитарной связности в $U(m)$-расслоении, эти матрицы косоэрмитовы.

Случай комплексных линейных расслоений особенно важен. В этом случае все матрицы Ω_α — размера 1×1, и из формулы преобразования (1.12) следует, что $\Omega_\alpha = \Omega_\beta$ на пересечениях. Поэтому матрицы Ω_α подходят друг к другу таким образом, что образуют глобально определенную 2-форму Ω_A на M, чисто мнимую в случае унитарной связности.

В силу того, что группа Ли $U(1)$ изоморфна $SO(2)$, комплексное линейное расслоение с эрмитовой метрикой может также рассматриваться как вещественное векторное расслоение ранга два вместе с послойной метрикой и ориентацией. Действительно, при заданном ориентированном ранга два вещественном векторном расслоении E с послойной метрикой мы можем определить умножение на i как вращение на 90 градусов в направлении, определяемом ориентацией. Если e_1 — это локально определенное сечение E единичной длины, мы можем положить $e_2 = ie_1$, получая тем самым локально определенный подвижный базис (e_1, e_2). Заметим, что если ω_{12} — соответствующая вещественнозначная форма связности,

$$de_1 = -e_2\omega_{12} = (-i\omega_{12})e_1,$$

и $-i\omega_{12}$ является чисто мнимой формой связности для унитарного расслоения.

Мы полагаем

$$F_A = \Omega_{12} = d\omega_{12},$$

глобально определенная 2-форма кривизны на M. Тогда $\Omega_A = -iF_A$ есть соответствующая чисто мнимая 2-форма, когда E рассматривается как унитарное расслоение. Тождество Бьянки в этом случае есть просто

$$dF_A = 0. \tag{1.14}$$

Все это применимо к случаю, когда $E = T\Sigma$, касательное расслоение ориентированного двумерного риманова многообразия Σ. В этом случае связность Леви–Чивита на $T\Sigma$ является унитарной связностью, и ее форма кривизны есть

$$F_A = KdA,$$

где K — Гауссова кривизна Σ и dA — 2-форма площади на Σ.

1.5. Характеристические классы

Как правило, матрица кривизны Ω определена лишь локально. Тем не менее, оказывается возможным построить определенные полиномы от Ω_α, являющиеся инвариантными относительно преобразования (1.12) и это приводит к построению геометрических и топологических инвариантов.

Сосредоточимся вначале на случае $U(m)$-расслоения E, комплексного векторного расслоения ранга m с эрмитовой метрикой. Мы задаем на E унитарную связность, имеющую локальные представители $d+\omega_\alpha$ и матрицы кривизны Ω_α. Как мы видели в предыдущем разделе, Ω_α является косоэрмитовой, поэтому

$$\frac{i}{2\pi}\Omega_\alpha, \qquad \left(\frac{i}{2\pi}\Omega_\alpha\right)^k$$

— эрмитовы. Следовательно, для каждого выбора положительного целого k дифференциальная форма

$$\mathrm{Trace}\left[\left(\frac{i}{2\pi}\Omega_\alpha\right)^k\right]$$

— вещественнозначна. Поскольку след инвариантен относительно подобия, из (1.12) вытекает, что

$$\mathrm{Trace}\left[\left(\frac{i}{2\pi}\Omega_\alpha\right)^k\right] = \mathrm{Trace}\left[\left(\frac{i}{2\pi}g_{\alpha\beta}\Omega_\beta g_{\alpha\beta}^{-1}\right)^k\right] = \\ = \mathrm{Trace}\left[\left(\frac{i}{2\pi}\Omega_\beta\right)^k\right]$$

на $U_\alpha \cap U_\beta$. Поэтому эти локально определенные формы склеиваются в глобально определенную вещественнозначную $2k$-форму $\tau_k(A)$. Мы говорим, что $\tau_k(A)$ есть *характеристическая форма.*

Лемма. *Дифференциальная форма $\tau_k(A)$ замкнута, $d\tau_k(A) = 0$.*

Доказательство. Из тождества Бьянки следует, что

$$d\tau_k(A) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^k d[\operatorname{Trace}(\Omega_\alpha^k)] = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^k \operatorname{Trace}[d(\Omega_\alpha^k)] =$$

$$= \left(\frac{i}{2\pi}\right)^k \operatorname{Trace}[(d\Omega_\alpha)\Omega_\alpha^{k-1} + \ldots + \Omega_\alpha^{k-1}(d\Omega_\alpha)] =$$

$$= \left(\frac{i}{2\pi}\right)^k \operatorname{Trace}\{[\Omega_\alpha,\, \omega_\alpha]\Omega_\alpha^{k-1} + \ldots + \Omega_\alpha^{k-1}[\Omega_\alpha,\, \omega_\alpha]\} = 0,$$

последнее равенство вытекает из того факта, что $\operatorname{Trace}(A_1 \ldots A_k)$ инвариантен относительно циклических перестановок $A_1, \ldots , A_k$.

Из леммы следует, что $\tau_k(A)$ является представителем класса когомологий де Рама

$$[\tau_k(A)] \in H^{2k}(M;\, R).$$

Предложение 1. *Если E является $U(m)$-расслоением над M с унитарной связностью d_A и $F\colon N \to M$ — гладкое отображение, то характеристические формы связности-прообраза d_{F^*A} на расслоении-прообразе F^*E являются характеристическими формами d_A:*

$$\tau_k(F^*A) = F^*\tau_k(A).$$

Доказательство.

Локальным представителем d_{F^*A} на $F^{-1}(U_\alpha)$ является $\omega_\alpha^* = F^*\omega_\alpha$ и кривизна d_{F^*A} имеет вид

$$\Omega_\alpha^* = d\omega_\alpha^* + \omega_\alpha^* \wedge \omega_\alpha^* = F^*d\omega_\alpha + F^*\omega_\alpha \wedge F^*\omega_\alpha = F^*\Omega_\alpha.$$

Поэтому

$$\operatorname{Trace}\bigl((\Omega_\alpha^*)^k\bigr) = \operatorname{Trace}\bigl(F^*(\Omega_\alpha^k)\bigr) = F^* \operatorname{Trace}(\Omega_\alpha^k),$$

или, эквивалентно,

$$\tau_k(F^*A) = F^*\tau_k(A).$$

Предложение 2. *Класс когомологий де Рама* $[\tau_k(A)]$ *не зависит от выбора унитарной связности* d_A*, также, как и от выбора эрмитовой метрики на* E.

Доказательство.

Мы воспользуемся конструкцией цилиндра из топологии. Исходя из расслоения (E, π) над M мы строим расслоение-цилиндр $(E \times [0, 1], \pi \times \mathrm{id})$ над $M \times [0, 1]$. Заметим, что, если E имеет тривиализующее покрытие $\{U_\alpha \colon \alpha \in A\}$, то $E \times [0, 1]$ обладает тривиализующим покрытием $\{U_\alpha \times [0, 1] \colon \alpha \in A\}$.

Мы можем перенести две связности d_A и d_B в расслоении E на $M \times [0, 1]$ с помощью проекции на первую компоненту $\pi_1 \colon M \times [0, 1] \to M$. Если d_A и d_B заданы на U_α с помощью

$$d + \omega_\alpha, \quad d + \phi_\alpha,$$

то связности-прообразы даются над $U_\alpha \times [0, 1]$ посредством

$$d + \pi_1^* \omega_\alpha, \quad d + \pi_1^* \phi_\alpha.$$[4]

Определим новую связность d_C, задаваемую на $E \times [0, 1]$ следующим образом

$$d + (1 - t)\pi_1^* \omega_\alpha + t \pi_1^* \phi_\alpha.$$

Если $J_0, J_1 \colon M \to M \times [0, 1]$ представляют собой отображения, определенные посредством $J_0(p) = (p, 0)$, $J_1(p) = (p, 1)$, то

$$d_A = d_{J_0^* C}, \quad d_B = d_{J_1^* C}.$$

Следовательно, в силу предложения 1,

$$[\tau_k(A)] = J_0^*[\tau_k(C)] = J_1^*[\tau_k(C)] = [\tau_k(B)] \in H^{2k}(M; R).$$

Этим показано, что класс $[\tau_k(A)]$ не зависит от выбора унитарной связности.

Доказательство того, что он не зависит от выбора эрмитовой метрики аналогично и предоставляется читателю. Используйте тот факт, что любые две эрмитовы метрики $\langle\, ,\rangle_0$ и $\langle\, ,\rangle_1$ можно соединить однопараметрическим семейством

$$(1 - t)\langle\, ,\, \rangle_0 + t\langle\, ,\, \rangle_1.$$

В соответствии с предложением 2, с каждым комплексным векторным расслоением E над M мы можем связать набор классов когомологий

$$\tau_k(E) = [\tau_k(A)].$$

Они называются *характеристическими классами.* Ясно, что, если два комплексных векторных расслоения изоморфны над M, то они должны иметь одинаковые характеристические классы. Характеристические классы *естественны* относительно отображений, как показывает следующее предложение.

Предложение 3. *Если $F\colon N \to M$ является гладким отображением и E — комплексное векторное расслоение над M, тогда*

$$\tau_k(F^*E) = F^*\tau_k(E).$$

Доказательство.

Теперь это есть непосредственное следствие предложения 1.

Мы можем собрать характеристические классы вместе в степенной ряд, называемый *характером Черна*:

$$\operatorname{ch}(E) = \left[\operatorname{Trace}(\exp((i/2\pi)\Omega_\alpha))\right] =$$
$$= \operatorname{rank}(E) + \tau_1(E) + \frac{1}{2!}\tau_2(E) + \ldots + \frac{1}{k!}\tau_k(E) + \cdots$$

Это элемент кольца когомологий

$$H^*(M; R) = H^0(M; R) \oplus H^1(M; R) \oplus \ldots \oplus H^k(M; R) \oplus \cdots$$

Заметим, что характер Черна является в действительности полиномом, поскольку все члены степени $> \dim(M)$ должны занулиться.

Предложение 4. *Характер Черна удовлетворяет тождествам:*

$$\operatorname{ch}(E_1 \oplus E_2) = \operatorname{ch}(E_1) + \operatorname{ch}(E_2), \quad \operatorname{ch}(E_1 \otimes E_2) = \operatorname{ch}(E_1)\operatorname{ch}(E_2).$$

Доказательство.

Предположим, что E_1 и E_2 имеют эрмитовы метрики и унитарные связности d_{A_1} и d_{A_2} соответственно. Тогда

$E_1 \oplus E_2$ наследует эрмитову метрику и унитарную связность $d_{A_1 \oplus A_2}$, определенную так:

$$d_{A_1 \oplus A_2}(\sigma_1 \oplus \sigma_2) = (d_{A_1}\sigma_1) \oplus (d_{A_2}\sigma_2).$$

Отсюда следует, что

$$(d_{A_1 \otimes A_2})^2(\sigma_1 \otimes \sigma_2) = (d^2_{A_1}\sigma_1) \oplus (d^2_{A_2}\sigma_2),$$

и, значит,

$$((i/2\pi)\Omega^{A_1 \oplus A_2})^k = \begin{pmatrix} ((i/2\pi)\Omega^{A_1})^k & 0 \\ 0 & ((i/2\pi)\Omega^{A_2})^k \end{pmatrix}.$$

Тем самым,

$$\tau_k(E_1 \oplus E_2) = \tau_k(E_1) + \tau_k(E_2),$$

откуда вытекает первое из двух тождеств.

Аналогично, $E_1 \otimes E_2$ наследует эрмитову метрику и унитарную связность $d_{A_1 \otimes A_2}$, определенную правилом Лейбница

$$d_{A_1 \otimes A_2}(\sigma_1 \otimes \sigma_2) = (d_{A_1}\sigma_1) \otimes \sigma_2 + \sigma_1 \otimes (d_{A_2}\sigma_2).$$

Это правило показывает, что

$$(d_{A_1 \otimes A_2})^2(\sigma_1 \otimes \sigma_2) = (d^2_{A_1}\sigma_1) \otimes \sigma_2 + \sigma_1 \otimes (d^2_{A_2}\sigma_2),$$

откуда следует, что

$$(d_{A_1 \otimes A_2})^{2k}(\sigma_1 \otimes \sigma_2) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (d^{2j}_{A_1}\sigma_1) \otimes (d^{2k-2j}_{A_2}\sigma_2),$$

или

$$\frac{1}{k!}(d_{A_1 \otimes A_2})^{2k}(\sigma_1 \otimes \sigma_2) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!}(d^{2j}_{A_1}\sigma_1) \otimes \frac{1}{(k-j)!}(d^{2k-2j}_{A_2}\sigma_2).$$

Мы заключаем, что

$$\exp((d_{A_1 \otimes A_2})^2) = \exp((d_{A_1})^2)\exp((d_{A_2})^2),$$

что дает второе из двух тождеств.

В топологии четырехмерных многообразий определенные многочлены от $\tau_k(E)$ играют ключевую роль. Если E есть $U(M)$-векторное расслоение над M, то ***первый и второй классы Черна*** E определяются формулами

$$c_1(E) = \tau_1(E), \quad c_2(E) = \frac{1}{2}[\tau_1(E)^2 - \tau_2(E)]. \tag{1.15}$$

Для обоснования второго из них мы можем проверить, что если E имеет ранг два, так что $(i/2\pi)\Omega_\alpha$ есть (2×2) эрмитова матрица, то

$$\frac{1}{2}\left[\operatorname{tr}\left(\frac{i}{2\pi}\Omega_\alpha\right)^2 - \left(\operatorname{tr}\frac{i}{2\pi}\Omega_\alpha\right)^2\right] = \det\left(\frac{i}{2\pi}\Omega_\alpha\right),$$

так что второй класс Черна дается также формулой

$$c_2(E) = \text{ класс когомологий де Рама } \det\left(\frac{i}{2\pi}\Omega_\alpha\right).$$

Высшие классы Черна могут быть также определены подобными формулами, но они автоматически зануляются на многообразиях размерности $\leqslant 4$.

Использование эрмитовой метрики показывает, что двойственное расслоение $E^\star$ к $U(M)$-векторному расслоению E над M получается из E сопряжением функций перехода,

$$g_{\alpha\beta} \to \overline{g}_{\alpha\beta}.$$

Тем самым, мы можем рассматривать $E^\star$ как сопряженное к E расслоение. Связность на E определяет связность на $E^\star$ посредством сопряжения локальных представителей,

$$\omega_\alpha \mapsto \overline{\omega}_\alpha, \quad \Omega_\alpha \mapsto \overline{\Omega}_\alpha.$$

В силу того, что сопряжение меняет знак следа косоэрмитовой матрицы, мы видим, что $c_1(E^\star) = -c_1(E)$; подобный же аргумент показывает, что $c_2(E^\star) = c_2(E)$.

Мы можем также определить характеристические классы кватернионных и вещественных векторных расслоений. Кватернионное линейное расслоение E может быть рассмотрено, как комплексное векторное расслоение ранга два. Правое умножение на j является антилинейным изоморфизмом E на себя, поэтому первый класс Черна E должен занулиться, однако второй класс Черна является важным инвариантом E.

С другой стороны, вещественное векторное расслоение ранга k может быть комплексифицировано, что дает комплексное векторное расслоение $E \otimes C$ ранга k. Эта комплексификация вновь является изоморфной своему сопряженному расслоению, так что ее первый класс Черна должен занулиться, но мы можем определить *первый класс Понтрягина* E следующим образом

$$p_1(E) = -c_2(E \otimes C).$$

1.6. Форма Тома

Первый класс Черна комплексного линейного расслоения над компактной ориентированной поверхностью имеет важную геометрическую интерпретацию как алгебраическое число нулей сечения общего положения. Сейчас мы представим эту интерпретацию, основываясь на конструкции формы Тома.

Предположим, что L есть комплексное линейное расслоение, рассмотренное как ориентированное вещественное векторное расслоение ранга два, как описано в конце параграфа 1.4. Если U — открытое подмножество M, над которым мы построили подвижный базис (e_1, e_2) с $e_2 = ie_1$, мы можем определить гладкие функции

$$t_1, t_2 \colon \pi^{-1}(u) \to R \quad \text{посредством}\, t_i(a_1 e_1(p) + a_2 e_2(p)) = a_i.$$

Более того, мы можем перенести связность и формы кривизны ω_{12} и Ω_{12} на $\pi^{-1}(U)$.

Определение 4. *Форма Тома* на L — это гладкая 2-форма, определенная локально посредством

$$\Phi = \frac{1}{2\pi} e^{-(t_1^2 + t_2^2)} [\Omega_{12} + 2(dt_1 + \omega_{12} t_2) \wedge (dt_2 - \omega_{12} t_1)]. \quad (1.16)$$

(Нетрудно проверить, что это выражение не зависит от выбора подвижного базиса (e_1, e_2), и, следовательно, Φ в действительности является глобально определенной 2-формой на L.)

Мы можем написать также

$$\Phi = \frac{1}{2\pi} e^{-(t_1^2 + t_2^2)} [\Omega_{12} + 2dt_1 \wedge dt_2 + \omega_{12} \wedge d(t_1^2 + t_2^2)],$$

откуда легко проверить, что Φ замкнута. Более того, она, очевидно, быстро убывает в направлении слоев, и знакомая интегральная формула

$$\int_{R^2} e^{-(t_1^2+t_2^2)} dt_1 dt_2 = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-r^2} r\, dr\, d\theta = \pi, \tag{1.17}$$

показывает, что интеграл от Φ по любому слою равен единице.

Повторим три ключевых свойства: (i) Форма Тома замкнута. (ii) Она быстро убывает в направлении слоев. (iii) Интеграл от нее по любому слою равен единице. Любая другая 2-форма с теми же ключевыми свойствами была бы столь же эффективна для нахождения геометрической интерпретации первого класса Черна. В самом деле, мы могли бы заменить (1.16) на

$$\Phi = \eta(t_1^2 + t_2^2)\Omega_{12} - 2\eta'(t_1^2 + t_2^2)(dt_1 + \omega_{12}t_2) \wedge (dt_2 - \omega_{12}t_1),$$

где η: $[0, \infty) \to R$ есть любая гладкая функция такая, что

$$\eta(0) = \frac{1}{2\pi}, \quad \eta(u) \to 0 \text{ достаточно быстро при } u \to \infty,$$

тем самым по-прежнему получая гладкую 2-форму с теми же самыми ключевыми свойствами. Выбор $\eta(u) = e^{-u}$, который мы сделали в (1.16), может немного упростить вычисления, но выбор η зануляющимся для $r \geqslant \varepsilon$, где ε — малое положительное число, приводит к форме Тома, которая зануляется вне ε-окрестности нулевого сечения.

Выбор сечения σ: $M \to L$ не влияет на класс когомологий де Рама формы $\sigma^*(\Phi)$, поскольку любые два сечения гомотопны. Поэтому класс когомологий $[\sigma^*(\Phi)]$ равен прообразу Φ относительно нулевого сечения:

$$[\sigma^*(\Phi)] = \frac{1}{2\pi}[\Omega_{12}] = \frac{1}{2\pi}[F_A] = c_1(L).$$

Теперь мы сосредоточимся на специальном случае комплексного линейного расслоения L с эрмитовой метрикой над гладкой ориентированной поверхностью Σ. Мы говорим, что гладкое сечение $\sigma : \Sigma \to L$ имеет ***невырожденный нуль*** в точке $p \in \Sigma$, если

$\sigma(p) = 0$ и $\sigma(\Sigma)$ имеет трансверсальное пересечение с нулевым сечением в точке p.

Такое пересечение имеет знак, который положителен тогда и только тогда, когда ориентации нулевого сечения и $\sigma(\Sigma)$ дают в сумме ориентацию тотального пространства L. Если p — невырожденный нуль сечения σ, то *индекс* σ в точке p есть, по определению,

$$\omega(\sigma, p) = \begin{cases} 1, & \text{если пересечение в } p \text{ положительно,} \\ -1, & \text{если пересечение отрицательно.} \end{cases}$$

Теорема. *Если L — комплексное унитарное линейное расслоение с унитарной связностью над гладкой компактной ориентированной поверхностью Σ, и $\sigma\colon \Sigma \to L$ есть сечение с одними лишь невырожденными нулями, скажем, в точках $p_1, \ldots, p_k$, тогда*

$$\sum_{i=1}^{k} \omega(\sigma, p_i) = \frac{1}{2\pi} \int_M F_A = \langle c_1(L), [\Sigma] \rangle.$$

Набросок доказательства. Рассмотрим сечения $\sigma_s = s\sigma$, где вещественное число s стремится к ∞. Если $\sigma_i = t_i \circ \sigma$,

$$\sigma_s^* \Phi = \frac{1}{2\pi} e^{-s^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)} [\Omega_{12} + 2s^2(d\sigma_1 + \omega_{12}\sigma_2) \wedge (d\sigma_2 - \omega_{12}\sigma_1)],$$

выражение, стремящееся к нулю при $s \to \infty$ всюду, кроме очень малых окрестностей $V_1, \ldots, V_k$ с центрами в $p_1, \ldots, p_k$. Мы можем выбрать подвижный базис так, что ω_{12} зануляется в каждой точке p_i. Тогда

$$\lim_{s\to\infty} \int_M \sigma_s^* \Phi = \sum_{i=1}^{k} \lim_{s\to\infty} \int_{V_i} \frac{1}{\pi} e^{-(s\sigma_1)^2 - (s\sigma_2^2)} d(s\sigma_1) \wedge d(s\sigma_2).$$

В соответствии с (1.17), интеграл по V_i в этой сумме должен стремиться к ± 1, в зависимости от того, положительно ли пересечение $\sigma(\Sigma)$ с нулевым сечением в точке p_i или отрицательно. Стало быть,

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Sigma} F_A = \lim_{s\to\infty}\int\limits_{\Sigma}\sigma_s^*(\Phi) = \sum_{i=1}^{k}\omega(\sigma, p_i),$$

и наш набросок доказательства завершен.

Предположим, к примеру, что $L = T\Sigma$, касательное расслоение поверхности Σ, обладающее римановой метрикой. Говорят, что функция $f\colon M \to R$ является *функцией Морса*, если градиент ∇f функции f (по отношению к римановой метрике) имеет невырожденные нули. Легко проверяется, что индекс этого градиентного поля равен единице в каждом локальном максимуме и локальном минимуме, и минус единице в каждой седловой точке, и, таким образом, сумма индексов по критическим точкам $p_1, \ldots, p_k$ функции f равна

$$\sum_{i=1}^{k}\omega(\nabla f, p_i) = (\text{количество максимумов}) -$$
$$-(\text{количество седловых точек}) + (\text{количество минимумов}).$$

В соответствии с основной теоремой теории Морса [28], последняя сумма справа равна эйлеровой характеристике $\chi(\Sigma)$ поверхности Σ. Поэтому предыдущая теорема дает в этом частном случае формулу Гаусса–Боннэ для поверхности:

$$\langle c_1(T\Sigma), [\Sigma]\rangle = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Sigma} F_A = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Sigma} K\,dA = \chi(\Sigma),$$

где $K\colon \Sigma \to R$ — гауссова кривизна поверхности.

Тем не менее, данная теорема гораздо более общая; соединенная с понятием индекса пересечения, она дает также геометрическую интерпретацию первого класса Черна комплексного линейного расслоения над гладким многообразием M более высоких размерностей. Если Σ и Z — два компактных подмногообразия дополнительной размерности в M, пересекающиеся трансверсально в конечном числе точек $p_1, \ldots, p_k$, мы определяем *индекс пересечения* Σ и Z в точке p_i следующим образом

$$I(\Sigma, Z, p_i) = \begin{cases} 1, & \text{если ориентации } T_{p_i}\Sigma \oplus T_{p_i} Z \text{ и } T_{p_i} M \text{ совпадают,} \\ -1, & \text{если ориентации разные,} \end{cases}$$

и индекс пересечения Σ и Z определен как $\sum_{i=1}^{k} I(\Sigma, Z, p_i)$. (Понятие индекса пересечения изучается более детально в книгах по дифференциальной топологии, таких как [21].)

Следствие. *Предположим, что L есть комплексное линейное расслоение с эрмитовой метрикой над гладким многообразием M и $\sigma\colon M \to L$ — сечение, имеющее трансверсальное пересечение с нулевым сечением. Пусть*

$$Z_\sigma = \sigma^{-1} \quad (\textit{нулевого сечения}).$$

Если $i\colon \Sigma \to M$ является вложением ориентированной поверхности в M, которое имеет трансверсальное пересечение с Z_σ, тогда

$$\langle c_1(L), [\Sigma] \rangle = \textit{индексу пересечения } \Sigma \textit{ с } Z_\sigma.$$

Набросок доказательства. Сечение σ имеет своим обратным образом сечение $i^\star\sigma$ линейного расслоения $i^\star L$ над Σ. Нули этого обратного образа в точности соответствуют точкам пересечения Σ с Z_σ. Более того, если p — точка в пересечении $\Sigma \cap Z_\sigma$, тогда $\omega(i^\star\sigma, p)$ есть просто индекс пересечения Σ с Z_σ в точке p.

Аналогичная интерпретация возможна для второго класса Черна кватернионного линейного расслоения над компактным ориентированным четырехмерным многообразием M. Форма Тома, необходимая в этом случае, построена в [26].

1.7. Универсальное расслоение

Альтернативный подход к построению характеристических классов основывается на конструкции универсального расслоения.

Предположим, что

$$\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_i, \dots), \quad \mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_i, \dots)$$

— ненулевые элементы бесконечномерного комплексного гильбертова пространства C^∞. Мы говорим, что $\mathbf{z}$ и $\mathbf{w}$ эквивалентны, записывая $\mathbf{z} \sim \mathbf{w}$, если

$$z_i = \lambda w_i, \quad \text{для некоторого} \quad \lambda \in C \setminus \{0\}.$$

Пусть $[\mathbf{z}] = [z_1, z_2, \dots, z_i, \dots]$ обозначает класс эквивалентности $\mathbf{z}$, $P^\infty C$ — множество классов эквивалентности. Мы называем $P^\infty C$ *бесконечномерным комплексным проективным пространством.*

Нетрудно показать, что $P^\infty C$ удовлетворяет определению бесконечномерного гладкого гильбертова многообразия, в соответствии, например, с описанием из [24]. Действительно, можно построить счетный атлас гладких карт

$$\{(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2), \dots\}$$

полагая

$$U_i = \{[z_1, z_2, \dots] \in P^\infty C\colon z_i \neq 0\},$$

и определяя $\phi_i\colon U_i \to C^\infty$ посредством

$$\phi_i\bigl([z_1, z_2, \dots]\bigr) = \left(\frac{z_1}{z_i}, \frac{z_2}{z_i}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \dots\right).$$

Легко проверяется, что

$$\phi_j \circ (\phi_i)^{-1}\colon \phi_i(U_i \cap U_j) \to \phi_j(U_i \cap U_j)$$

— гладкое, также, как и в случае конечномерного проективного пространства.

Мы можем рассматривать $P^\infty C$ как пространство одномерных подпространств $V \subset C^\infty$. Имеется *универсальное расслоение* над $P^\infty C$, чье тотальное пространство —

$$E_\infty = \bigl\{\bigl(V, (z_1, z_2, \dots)\bigr) \in P^\infty C \times C^\infty\colon (z_1, z_2, \dots) \in V\bigr\}.$$

(Заметим, что E_∞ минус нулевое сечение есть просто $C^\infty \setminus \{0\}$.) Тривиализация $\psi_i\colon \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times C$ над U_i определена посредством

$$\psi_i(V, (z_1, z_2 \dots)) = (V, z_i)$$

и функции перехода, соответствующие покрытию $\{U_1, U_2, \dots\}$, имеют вид
$$g_{ij}\colon U_i \cap U_j \to GL(1, C), \quad g_{ij} = \frac{z_i}{z_j}.$$

Мы только что описали специальный случай более общей конструкции. Точно также, как бесконечномерное проективное пространство, бесконечномерный грассманиан
$$G_m(C^\infty) = \{m\text{-мерные комплексные подпространства } C^\infty\}$$
представляет собой бесконечномерное гладкое многообразие, и
$$E_\infty = \{(V, v) \in G_m(C^\infty) \times C^\infty \colon v \in V\}$$
является тотальным пространством гладкого векторного расслоения над $G_m(C^\infty)$, называемого *универсальным расслоением*. Тривиализации и функции перехода для этого расслоения описаны в стандартных источниках, таких как [30].

Если M — гладкое многообразие, мы обозначаем $[M, G_m(C^\infty)]$ — пространство гладких гомотопических классов гладких отображений из M в $G_m(C^\infty)$.

Теорема об универсальном расслоении. *Если M — гладкое многообразие, то существует биекция*
$$\Gamma\colon \big[M, G_m(C^\infty)\big] \to \mathrm{Vect}_m^C(M),$$
определенная посредством $\Gamma(F) = F^* E_\infty$.

Набросок доказательства. Заметим вначале, что предложение 2 из параграфа 1.3 показывает, что Γ является корректно определенным.

Чтобы показать, что Γ является сюръективным, предположим, что (E, π) — гладкое комплексное векторное расслоение ранга m над M. Мы утверждаем, что, если M имеет размерность n, оно может быть покрыто $(n+1)$-м открытым множеством $\{U_0, U_1, \dots, U_n\}$ со стягиваемыми компонентами. Действительно, пусть $\{s_i^k \colon i \in I_k\}$ обозначают k-симплексы в симплициальном разбиении M. Каждый k-симплекс s_i^k имеет барицентр b_i^k, который является 0-симплексом в первом барицентрическом подразделении. Пусть U_k — объединение открытых звезд всех барицентров b_i^k в первом барицентрическом подразделении. Тогда $\{U_0, U_1, \dots U_n\}$ является покрытием M и каждая компонента U_k стягиваема.

Согласно следствию в конце параграфа 1.3 мы можем использовать это покрытие как тривиализующее покрытие для расслоения E. Пусть

$$\psi_k\colon \pi^{-1}(U_k) \to U_k \times C^m$$

— тривиализация над U_k, и рассмотрим ее композицию с проекцией на вторую компоненту, чтобы получить следующее отображение

$$\eta_k = \pi_2 \circ \psi_k\colon \pi^{-1}(U_k) \to C^m.$$

Наконец, пусть $\{\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n\}$ — разбиение единицы, подчиненное данному открытому покрытию, и определим $\widetilde{F}\colon E \to C^{(n+1)m} \subset C^\infty$ следующим образом

$$\widetilde{F}(e) = \big(\zeta_0(\pi(e))\eta_0(e),\, \zeta_1(\pi(e))\eta_1(e),\, \ldots,\, \eta_n(\pi(e))\eta_n(e)\big).$$

Поскольку $\widetilde{F}$ инъективно на каждом слое, оно индуцирует непрерывное отображение $F\colon M \to G_m(C^\infty)$, такое, что $F(p) = \widetilde{F}(E_p)$. Легко доказать, что $F^*E_\infty = E$, и сюръективность установлена.

Перед тем, как доказывать инъективность, нам будут необходимы некоторые предварительные сведения. Пусть

$$C_e^\infty = \{(z_1, z_2, z_3, z_4, \ldots) \in C^\infty\colon z_1 = 0, z_3 = 0, \ldots\}$$

— множество элементов C^∞, в которых лишь четные компоненты могут быть ненулевыми,

$$C_o^\infty = \{(z_1, z_2, z_3, z_4, \ldots) \in C^\infty\colon z_2 = 0, z_4 = 0, \ldots\},$$

— множество элементов, в которых только нечетные компоненты могут быть ненулевыми. Определим линейные отображения

$$\widetilde{T}_e\colon C^\infty \to C_e^\infty, \quad \widetilde{T}_o\colon C^\infty \to C_o^\infty$$

посредством

$$\widetilde{T}_e(z_1, z_2, z_3, z_4, \ldots) = (0, z_1, 0, z_2, \ldots),$$
$$\widetilde{T}_o(z_1, z_2, z_3, z_4, \ldots) = (z_1, 0, z_2, 0, \ldots).$$

Они индуцируют отображения

$$T_e\colon G_m(C^\infty) \to G_m(C_e^\infty) \subset G_m(C^\infty),$$
$$T_o\colon G_m(C^\infty) \to G_m(C_o^\infty) \subset G_m(C^\infty),$$

которые, как мы утверждаем, гомотопны тождественному отображению. В самом деле, мы можем определить

$\widetilde{H}_e\colon C^\infty \times [0,\, 1] \to C^\infty$ посредством $\widetilde{H}_e(z,\, t) = tz + (1-t)\widetilde{T}_e(z)$.

Если $z_1, \dots, z_k$ — линейно независимые элемены C^∞, то таковыми же являются

$$\widetilde{H}_e(z_1,\, t), \dots, \widetilde{H}_e(z_k,\, t)$$

для любого выбора $t \in [0,\, 1]$. Следовательно, $\widetilde{H}_e$ индуцирует гомотопию

$$H_e\colon G_m(C^\infty) \times [0,\, 1] \to G_m(C^\infty)$$

отображения T_e к тождественному. Аналогичная конструкция дает гомотопию T_0 к тождественному отображению.

Чтобы показать инъективность Γ, нам необходимо доказать, что, если $F, G\colon M \to G_m(C^\infty)$ — это два гладких отображения таких, что $F^\star E_\infty = G^\star E_\infty$, то F и G гомотопны. Для этого достаточно показать, что $T_e \circ F$ и $T_0 \circ G$ гомотопны. Но ведь отображения $T_e \circ F$ и $T_0 \circ G$ накрываются следующими

$$\widetilde{T}_e \circ \widetilde{F}\colon E \to C_e^\infty, \qquad \widetilde{T}_o \circ \widetilde{G}\colon E \to C_o^\infty.$$

Мы можем определить

$\widetilde{H}\colon E \times [0,\, 1] \to C^\infty$ посредством

$$\widetilde{H}(e,\, t) = t\widetilde{T}_e \circ \widetilde{F}(e,\, t) + (1-t)\widetilde{T}_0 \circ \widetilde{G}(e,\, t).$$

Тогда $\widetilde{H}|(E_p \times \{t\})$ является мономорфизмом векторных пространств для каждого $(p,\, t) \in M \times [0,\, 1]$, и, следовательно, $\widetilde{H}$ индуцирует непрерывное отображение

$$H\colon M \times [0,\, 1] \to G_m(C^\infty), \qquad H(p,\, t) = \widetilde{H}(E_p \times \{t\}).$$

Это отображение представляет собой желаемую гомотопию из F в G, и инъективность Γ установлена.

Мы используем предыдущую теорему в случае $m = 1$ для классификации комплексных линейных расслоений. Нам необходимы несколько утверждений о гомотопических и гомологических группах $G_1(C^\infty) = P^\infty C$, утверждений, доказанных в книгах по алгебраической топологии. Мы отсылаем читателя к стандартной литературе, такой, как [37] или [40], за несколькими необходимыми нам топологическими результатами.

Прежде всего, универсальное расслоение сводится к расслоенному пространству со слоем $C - \{0\}$,

$$C - \{0\} \to (C^\infty - \{0\}) \to P^\infty C,$$

что приводит к точной гомотопической последовательности (как описано в [37], параграфе 17)

$$\to \pi_k(C^\infty - \{0\}) \to \pi_k(P^\infty C) \to \pi_{k-1}(C - \{0\}) \to \pi_{k-1}(C^\infty - \{0\}) \to \tag{1.18}$$

Далее, $C^\infty - \{0\}$ гомотопически эквивалентно бесконечномерной сфере и точно также, как $\pi_k(S^n) = 0$ для $k < n$, k-я гомотопическая группа бесконечномерной сферы должна зануляться при всех k. Поэтому $\pi_k(C^\infty - \{0\}) = 0$ для всех $k > 0$ и, следовательно,

$$\pi_k(P^\infty(C)) = \pi_{k-1}(C - \{0\}) = \begin{cases} Z, & \text{если } k = 2, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Иными словами, $P^\infty(C)$ есть $K(Z, 2)$, пространство Эйленберга–Мак-Лейна (как описано на страницах 244–250 книги [40]).

С другой стороны, пространство Эйленберга–Мак-Лейна обладает замечательным свойством ([40], страница 250): если M — любое гладкое многообразие, то

$$[M, K(Z, 2)] = \{\text{гомотопические классы отображений } M \to \\ \to K(Z, 2)\} \cong H^2(M; Z).$$

Комбинирование этого изоморфизма с изоморфизмом из теоремы об универсальном расслоении дает биекцию

$$\mathrm{Vect}_1^C(M) \cong H^2(M; Z). \tag{1.19}$$

Это доказывает теорему классификации для комплексных линейных расслоений, сформулированную в параграфе 1.2.

Отображение, реализующее изоморфизм (1.19), представляет собой (с точностью до знака) просто интегральный вариант первого класса Черна. Для того, чтобы убедиться в этом, мы можем использовать теорию дифференциальных форм на бесконечномерных гладких многообразиях вместе с соответствующей версией когомологий де Рама. Используя эту теорию, мы можем определить связность на линейном расслоении E_∞ и первый класс Черна $c_1(E_\infty) \in H^2(P^\infty(C);\, R)$. Тогда из естественности следует, что

$$c_1(E) = F^*\big(c_1(E_\infty)\big), \quad \text{где} \quad \Gamma(F) = E.$$

В качестве альтернативы мы можем избежать работы с бесконечномерными многообразиями, используя N-мерное проективное пространство $P^N(C)$ как конечномерную аппроксимацию $P^\infty(C)$. Рассуждение из теоремы об универсальном расслоении показывает, что для линейных расслоений над M достаточно взять $N = \dim M + 1$.

Давайте примем второй способ и скомбинируем две точные гомотопические последовательности, подобные (1.18), для того, чтобы получить

$$\begin{array}{ccccccccc}
\ldots \to & \pi_2\big(C^2 - \{0\}\big) & \to & \pi_2\big(P^1(C)\big) & \to & \pi_1\big(C - \{0\}\big) & \to \ldots \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\ldots \to & \pi_2\big(C^{N+1} - \{0\}\big) & \to & \pi_2\big(P^N(C)\big) & \to & \pi_1\big(C - \{0\}\big) & \to \ldots
\end{array}$$

В силу того, что $\pi_i(C^2 - \{0\}) \cong \pi_i(C^{N+1} - \{0\}) \cong 0$, для $i = 1$ или 2, применение 5-леммы показывает, что верхняя горизонтальная стрелка в диаграмме

$$\begin{array}{ccc}
\pi_2\big(P^1(C)\big) & \longrightarrow & \pi_2\big(P^N(C)\big) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H_2\big(P^1(C);\, Z\big) & \longrightarrow & H_2\big(P^N(C);\, Z\big)
\end{array}$$

является изоморфизмом. Вертикальные стрелки — изоморфизмы по теореме изоморфизма Гуревича ([37], страница 79), поэтому нижняя горизонтальная стрелка также представляет собой изоморфизм. Тогда теорема универсальных коэффициентов показывает, что

$$H^2\big(P^1(C);\, Z\big) \to H^2\big(P^N(C);\, Z\big) \quad \text{и}$$
$$H^2\big(P^1(C);\, R\big) \to H^2\big(P^N(C);\, R\big) \tag{1.20}$$

оба являются изоморфизмами.

Пусть E_∞ обозначает универсальное расслоение над $P^N(C)$, линейное расслоение с тотальным пространством

$$E_\infty = \{(V,\, (z_1, \ldots, z_{N+1})) \in P^N C \times C^N : (z_1, \ldots, z_{N+1}) \in V\}. \tag{1.21}$$

Мы утверждаем, что $c_1(E_\infty)$ является образом генератора $H^2(P^N(C);\, Z)$ при коэффициентном гомоморфизме

$$H^2\big(P^N(C);\, Z\big) \to H^2\big(P^N(C);\, R\big).$$

В силу изоморфизмов (1.20) это достаточно проверить для универсального расслоения H^{-1} над $P^1(C) = S^2$. Но из теоремы Гаусса–Бонне следует, что

$$c_1(H^2)[S^2] = c_1(TS^2)[S^2] = \int_{S^2} \Big(\frac{1}{2\pi}\Big) K\, dA = 2.$$

Более того, из предложения 4 параграфа 1.5 следует, что если L_1 и L_2 — линейные расслоения, то

$$c_1(L_1 \otimes L_2) = c_1(L_1) + c_1(L_2).$$

Следовательно, $c_1(H)[S^2] = 1$ и $c_1(H^{-1})[S^2] = -1$.

Используя естественность, мы можем показать, что под действием изоморфизма (1.19)

$$F^* E_\infty \mapsto F \in [M,\, P^\infty(C)] \mapsto F^*\big(\text{генератор}\, H^2\big(P^\infty(C);\, Z\big)\big).$$

Этот элемент $H^2(M;\, Z)$ отображается в $-c_1(E)$ при коэффициентном гомоморфизме.

В частности, первый класс Черна линейного расслоения E над любым гладким многообразием M «квантуется» — $c_1(E)$ дает целочисленный интеграл вдоль любого двумерного цикла в M.

Этим завершается наше доказательство классификационной теоремы для комплексных линейных расслоений из параграфа 1.2.

Имеется вещественная версия теоремы об универсальном расслоении, которая доказывается точно таким же методом: если M — гладкое многообразие, то имеется биекция

$$\Gamma\colon \big[M,\, G_m(R^\infty)\big] \to \mathrm{Vect}_m^R(M),$$

определенная равенством $\Gamma(F) = F^* E_\infty$, где E_∞ есть универсальное расслоение, определенное над вещественным грассманианом $G_m(R^\infty)$.

Точно так же, как и в случае первого класса Черна, классы Черна более высокой степени и классы Понтрягина могут быть определены с помощью взятия прообраза классов Черна и Понтрягина универсальных расслоений над $G_m(C^\infty)$ или $G_m(R^\infty)$. Используя когомологии с Z_2-коэффициентами, можно также определить классы Штифеля–Уитни. Детали этих конструкций могут быть найдены в [30].

Имеется также версия теоремы об универсальном расслоении для кватернионных расслоений, которая может быть использована для доказательства классификационной теоремы кватернионных линейных расслоений из параграфа 1.2. Если $P^\infty(H)$ обозначает бесконечномерное кватернионное проективное пространство, то точно также, как и в комплексном случае, имеется биекция

$$\Gamma\colon \big[M,\, P^\infty(H)\big] \to \mathrm{Vect}_1^H(M).$$

К сожалению, в отличии от комплексного случая, кватернионное проективное пространство не является пространством Эйленберга–Мак-Лейна. Тем не менее, применение гомотопической последовательности показывает, что оно в действительности удовлетворяет более слабому условию

$$\pi_k(P^\infty(H)) = \pi_{k-1}(H - \{0\}) = \begin{cases} Z, & \text{если } k = 4, \\ 0, & \text{если } 0 \leqslant k \leqslant 3. \end{cases}$$

Этого оказывается достаточно, чтобы показать, что

$$\{\text{гомотопические классы отображений} M \to P^\infty(H)\} \cong H^4(M; Z),$$

где M есть многообразие размерности $\leqslant 4$, тем самым устанавливая теорему классификации.

1.8. Классификация связностей

Теперь, когда мы расклассифицировали комплексные линейные расслоения над гладким многообразием M, мы обратимся к проблеме классификации унитарных связностей в данном комплексном линейном расслоении L над M.

На первый взгляд, классификация может показаться тривиальной. Действительно, мы утверждаем, что, если d_{A_0} — унитарная связность на L, выбранная в качестве базисной, то любая унитарная связность на L может быть единственным образом записана в виде

$$d_{A_0} - i\,a, \quad \text{где} \quad a \in \Omega^1(M). \tag{1.22}$$

Для того, чтобы установить это свойство, мы сперва будем работать в локальной тривиализации, в терминах которой связность d_{A_0} имеет вид

$$(d_{A_0}\sigma)_\alpha = d\sigma_\alpha + \omega_\alpha\sigma_\alpha,$$

где ω_α — чисто-мнимая 1-форма на U_α.

Локальное представление любой другой унитарной связности L имеет вид

$$(d_A\sigma)_\alpha = d\sigma_\alpha + \omega_\alpha\sigma_\alpha - ia_\alpha\sigma_\alpha,$$

где a_α является вещественнозначной 1-формой на U_α. Используя формулу (1.8), можно немедленно проверить, что

$$a_\alpha = a_\beta \quad \text{на пересечениях} \quad U_\alpha \cap U_\beta.$$

Поэтому формы a_α склеиваются в вещественнозначную 1-форму a на M и (1.22) имеет место.

Иными словами, пространство $\mathscr{A}$ унитарных связностей на L является «аффинным пространством», изоморфным пространству 1-форм на M. Тем не менее, мы в действительности хотим классифицировать связности с точностью до *изоморфизма*, также известного, как *калибровочная эквивалентность*.

В случае $U(1)$-расслоения *калибровочное преобразование* L есть просто гладкое отображение $g\colon M \to S^1$, где S^1 рассматривается как множество комплексных чисел длины 1.

Калибровочное преобразование индуцирует изоморфизм векторных расслоений $g\colon L \to L$, действующий посредством скалярного умножения. Обратно, любой изоморфизм векторного расслоения L над M, сохраняющий эрмитову метрику, индуцируется калибровочным преобразованием.

Пусть $\mathscr{G}$ обозначает пространство калибровочных преобразований, которое является группой относительно умножения в S^1. Если p_0 — некоторый выбор базисной точки в M, положим

$$\mathscr{G}_0 = \{g \in \mathscr{G} \colon g(p_0) = 1\}.$$

Элементы $\mathscr{G}_0$ называются ***базисными калибровочными преобразованиями.*** Мы имеем прямое произведение групп

$$\mathscr{G} = \mathscr{G}_0 \times S^1,$$

где S^1 — группа постоянных калибровочных преобразований.

Калибровочные преобразования действуют на связности сопряжением

$$(g, d_A) \mapsto g \circ d_A \circ g^{-1} = d_A + g\, d(g^{-1}).$$

Постоянные калибровочные преобразования действуют тривиально на пространстве $\mathscr{A}$, тогда как группа $\mathscr{G}_0$ действует свободно. Поэтому пространство классов эквивалентности связностей на L имеет вид

$$\mathscr{B} = \mathscr{A}/\mathscr{G} = \mathscr{A}/\mathscr{G}_0.$$

Легко описать топологию этих пространств. (Для большей точности нам следует пополнить пространства $\mathscr{A}$ и $\mathscr{G}$ относительно подходящих норм таких, как C^k-нормы или Соболевские нормы, что будет описано более детально в параграфе 3.2.) В случае, когда M односвязно, любое базисное калибровочное преобразование

$$g\colon M \to S^1, \quad g(p_0) = 1,$$

имеет глобальный логарифм; он может быть записан в виде

$$g = e^{iu}, \quad \text{где} \quad u\colon M \to R, \quad u(p_0) = 0.$$

В силу того, что пространство отображений из M в R стягиваемо, таковым же является и $\mathscr{G}_0$, и, следовательно, $\mathscr{G}$ гомотопически эквивалентно S^1. В этом случае, поскольку $\mathscr{A}$ и $\mathscr{G}_0$ оба стягиваемы, таковым же является и пространство $\mathscr{B}$ связностей.

Если M не является односвязным, из теоремы универсальных коэффициентов следует, что $H^1(M, Z)$ является свободной абелевой группой с b_1 генераторами, где b_1 — первое число Бетти многообразия M. В силу того, что S^1 есть $K(Z, 1)$, теорема о пространствах Эйленберга–Мак-Лейна, цитированная выше, дает

$$[M, S^1] = \{\text{гомотопические классы отображений } M \to S^1\} \cong \\ \cong H^1(M; Z) \cong Z^{b_1}.$$

Поэтому компоненты $\mathscr{G}_0$ находятся во взаимнооднозначном соответствии с Z^{b_1}, и каждая компонента является стягиваемой в силу рассуждения, аналогичного данному для односвязного случая. Тогда точная гомотопическая последовательность расслоения

$$\mathscr{G}_0 \to \mathscr{A} \to \mathscr{B}$$

показывает, что $\mathscr{B}$ является пространством $K(G, 1)$, где $G = Z^{b_1}$, поэтому $\mathscr{B}$ гомотопически эквивалентно тору ранга b_1.

В действительности, имеется также гораздо более конкретное описание $\mathscr{B}$, которое возникает из следующего вопроса: если F — обычная вещественнозначная 2-форма на M, то в каком случае $\Omega = -iF$ является кривизной унитарной связности в некотором линейном расслоении над M?

Одним из необходимых условий является то, что F удовлетворяет тождеству Бьянки

$$dF = 0.$$

Из предыдущего раздела мы знаем также, что класс когомологий де Рама формы $(1/2\pi)F$ должен лежать в образе коэффициентного гомоморфизма

$$H^2(M; Z) \to H^2(M; R).$$

Мы утверждаем, что эти два условия являются достаточными.

Предположим вначале, что M односвязно. Пусть L — комплексное линейное расслоение над M и пусть $\mathscr{C}$ обозначает пространство замкнутых 2-форм на M, представляющих первый класс Черна L. Определим

$$\Gamma\colon \mathscr{B} \to \mathscr{C} \quad \text{посредством} \quad \Gamma([A]) = \frac{1}{2\pi} F_A,$$

где $-iF_A$ — кривизна A. Мы утверждаем, что Γ — изоморфизм.

Для того, чтобы показать, что Γ сюръективен, выберем унитарную связность A_0 на L в качестве базисной. Если F — любой элемент $\mathscr{C}$, мы можем написать

$$F - F_{A_0} = da,$$

где a — вещественнозначная 1-форма на M. Тогда $d_A = d_{A_0} - ia$ является унитарной связностью на L с кривизной $-iF$.

Для доказательства инъективности Γ заметим, что, если

$$d_{A_0} - ia_1 \quad \text{и} \quad d_{A_0} - ia_2$$

— две унитарных связности на L, имеющих одинаковую кривизну, тогда $da_1 = da_2$. Поскольку $H^1(M; R) = 0$ по предположению,

$$a_1 - a_2 = d\phi, \text{ для некоторого } \phi\colon M \to R, \text{ такого, что } \phi(p_0) = 0.$$

Тогда $e^{i\phi}\colon M \to S^1$ является таким калибровочным преобразованием, что

$$d_{A_0} - ia_1 = e^{i\phi} \circ (d_{A_0} - ia_2) \circ (e^{i\phi})^{-1},$$

и, следовательно, две связности калибровочно эквивалентны.

Возможно установить подобный результат, когда M не является односвязным. Предположим для простоты, что $H_1(M, Z)$ есть свободная абелева группа ранга b_1 и что $\gamma_1, \ldots, \gamma_{b_1}$ — ориентированные гладкие простые замкнутые кривые, представляющие генераторы для первой группы гомологий $H_1(M; R)$, все проходящие через данную точку $p_0 \in M$.

При заданной унитарной связности $d_A \in \mathscr{A}$ параллельный перенос вдоль γ_i определяет изоморфизм

$$\tau_i\colon L_{p_0} \to L_{p_0}.$$

Поскольку связность предполагается унитарной, изоморфизм τ_i есть просто вращение на некоторый угол

$$\tau_i = e^{i\theta_i(A)},$$

инвариантное относительно калибровочных преобразований. Этот изоморфизм τ_i иногда называют *голономией* вдоль γ_i.

Теорема классификации связностей. *Если $H_1(M, Z)$ является свободной абелевой группой ранга b_1, то отображение*

$$\Gamma\colon \mathscr{B} \to \mathscr{C} \times S^1 \times \ldots S^1,$$

определенное посредством

$$\Gamma([A]) = \left(\frac{1}{2\pi}F_A,\, e^{i\theta_1(A)}, \, \ldots \,, e^{i\theta_{b_1}(A)}\right),$$

есть биекция.

Чтобы показать инъективность Γ, предположим, что

$$d_{A_0} - ia_1 \ \text{ и } \ d_{A_0} - ia_2$$

— это две унитарных связности на L, которые имеют одинаковую кривизну и голономию. Пусть $\widetilde{M}$ — универсальное накрывающее пространство для M, $\widetilde{a_1}$ и $\widetilde{a_2}$ — обратные образы a_1 и a_2 на универсальном накрывающем пространстве. Тогда $d\widetilde{a_1} = d\widetilde{a_2}$ и, следовательно,

$$\widetilde{a_1} - \widetilde{a_2} = d\widetilde{\varphi}, \text{ для некоторого } \widetilde{\varphi}\colon M \to R.$$

Используя тот факт, что эти две связности имеют одинаковые голономии, можно проверить, что отображение $e^{i\widetilde{\varphi}} : \widetilde{M} \to S^1$ опускается до отображения $e^{i\varphi} : M \to S^1$ такого, что

$$d_{A_0} - ia_1 = e^{i\phi} \cdot (d_{A_0} - ia_2) \cdot (e^{i\phi})^{-1}$$

и, следовательно, эти две связности калибровочно эквивалентны. Мы оставляем читателю проверку сюръективности Γ.

Эта теорема имеет весьма интересное приложение к теории электричества и магнетизма.

Напомним, что в общей теории относительности (как объяснено, к примеру, в [31]), пространство-время есть четырехмерное многообразие с «псевдоримановой» метрикой лоренцевой сигнатуры. Можно доказать, что любая точка p на таком многообразии лежит в области определения нормальной системы координат

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z),$$

в терминах которой метрика выражается, как

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + \sum_{i,j=0}^{3} h_{ij}\, dx^i\, dx^j,$$

где

$$h_{ij}(p) = 0, \quad \frac{\partial h_{ij}}{\partial x_k}(p) = 0.$$

Какова правильная форма для уравнений Максвелла (уравнений теории электричества и магнетизма) на таких многообразиях? Классический подход, использующий векторный анализ, привязан к плоскому пространству-времени. Оказывается, что уравнения Максвелла могут быть весьма хорошо выражены в терминах дифференциальных форм таким способом, который переносится на искривленное пространство-время.

В случае плоского пространства-времени с координатами (t, x, y, z), мы полагаем

$$\begin{aligned} F = &- E_x\, dt \wedge dx - E_y\, dt \wedge dy - E_z\, dt \wedge dz + \\ &+ B_x\, dy \wedge dz + B_y\, dz \wedge dx + B_z\, dx \wedge dy, \end{aligned}$$

где

$$E = (E_x, E_y, E_z) \quad \text{и} \quad B = (B_x, B_y, B_z)$$

— электрическое и магнитное поля. Условимся называть 2-форму F *тензором Фарадея.* Тогда два уравнения Максвелла

$$\operatorname{div}(B) = 0, \quad \operatorname{curl}(E) + \frac{\partial B}{\partial t} = 0,$$

могут быть выражены в виде простого уравнения

$$dF = 0.$$

Другие два уравнения Максвелла используют «звездочку Ходжа», линейный оператор $\star\colon \Lambda^2 T^* M \to \Lambda^2 T^* M$, который меняет E и B ролями:

$$\begin{aligned}\star F = & B_x\, dt \wedge dx + B_y\, dt \wedge dy + B_z\, dt \wedge dz + \\ & + E_x\, dy \wedge dz + E_y\, dz \wedge dx + E_z\, dx \wedge dy.\end{aligned}$$

Оставшиеся уравнения Максвелла имеют вид (при подходящем выборе единиц измерения)

$$\operatorname{div}(E) = \rho, \quad \operatorname{curl}(B) - \frac{\partial E}{\partial t} = J,$$

где ρ — плотность зарядов и

$$J = (J_x, J_y, J_z)$$

— плотность тока. Эта пара уравнений может быть переписана в виде

$$d \star F = \phi,$$

где

$$\phi = \rho\, dx \wedge dy \wedge dz - J_x\, dt \wedge dy \wedge dz - J_y\, dt \wedge dz \wedge dx - J_z\, dt \wedge dx \wedge dy.$$

Далее, оператор внешнего дифференцирования и звездочка Ходжа могут быть определены на любом псевдоримановом многообразии лоренцевой сигнатуры. Поэтому, как это описано более детально в [31], главе 4, уравнения Максвелла

$$dF = 0, \quad d \star F = \phi,$$

могут быть сформулированы в терминах тензора Фарадея на искривленном пространстве-времени общей теории относительности.

Мы теперь может задать вопрос: когда имеет место $F{=}F_A$, где $-iF_A$ — кривизна унитарной связности d_A некоторого линейного расслоения L с эрмитовой метрикой над M?

Заметим, что, поскольку F замкнута, она представляет класс когомологий $[F] \in H^2(M;\, R)$. Предыдущая теорема утверждает, что $-iF$ представляет собой кривизну унитарной связности в точности, когда этот класс когомологий лежит в образе коэффициентного гомоморфизма

$$H^2(M;\, Z) \to H^2(M;\, R).$$

Этот факт можно проинтерпретировать, как требование квантования магнитного заряда. Для поддержания полной двойственности между электрическим и магнитным полями потребуется тогда квантование также и электрического заряда.

Какие преимущества дает рассмотрение электромагнитного поля как унитарной связности на линейном расслоении вместо 2-формы? Во-первых, связность дает семейство 1-форм, «электромагнитных калибровок», которые полезны при решении уравнений Максвелла. Во-вторых, связность принимает в расчет голономию вдоль замкнутых кривых, которая может быть обнаружена экспериментально (эффект Ааронова–Бома). В-третьих, рассмотрение электромагнитного поля, как связности, приводит к плодотворным обобщениям для других структурных групп, которые могут помочь объяснить другие фундаментальные силы (такие, как слабые и сильные взаимодействия). Действительно, это является базисом стандартной модели взаимодействий между элементарными частицами, которая описана, например, в [35].

1.9. Теория Ходжа

Звездочка Ходжа, используемая для написания уравнений Максвелла в случае метрик лоренцевой сигнатуры, играет также важную роль в теории четырехмерных многообразий с положительно определенной римановой метрикой.

Пусть p — точка на ориентированном четырехмерном римановом многообразии M и пусть $V = T_pM$. Мы можем использовать риманову метрику для отождествления V с кокасательным пространством T_p^*M. Если $(e_1,\, e_2,\, e_3,\, e_4)$ — положительно ориентированный ортонормированный базис V, тогда

$$e_1 \wedge e_2, \quad e_1 \wedge e_3, \quad e_1 \wedge e_4, \quad e_2 \wedge e_3, \quad e_2 \wedge e_4, \quad e_3 \wedge e_4$$

образуют ортонормированный базис $\Lambda^2 V$. Мы определяем *звездочку Ходжа*

$$\star \Lambda^2 V \to \Lambda^2 V$$

посредством

$$\star(e_i \wedge e_j) = e_r \wedge e_s,$$

для всевозможных (i, j, r, s) — четных перестановок $(1, 2, 3, 4)$.

Более общо, мы определяем звездочку Ходжа

$$\star \Lambda^p V \to \Lambda^{4-p} V$$

следующим образом

$$\star 1 = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4, \quad \star e_i = e_r \wedge e_s \wedge e_t,$$

где (i, r, s, t) — четная перестановка $(1, 2, 3, 4)$ и так далее. Звездочка Ходжа инвариантна относительно действия ортогональной группы и удовлетворяет тождеству $\star^2 = (-1)^p$ на p-формах.

Если M компактно, мы можем использовать звездочку Ходжа для определения билинейной формы

$$(\ ,\ )\colon \Omega^p(M) \times \Omega^p(M) \to R \text{ посредством } (\omega,\, \theta) = \int_M \omega \wedge \star\theta.$$

Легко проверить, что эта билинейная форма симметричная и положительно определенная и, следовательно, является скалярным произведением на $\Omega^p(M)$. Мы можем также использовать звездочку Ходжа для определения *кодифференциала*

$$\delta = -\star d\star\colon \Omega^p(M) \to \Omega^{p-1}(M),$$

который является *формально сопряженным* для внешнего дифференцирования, как можно проверить с помощью следующего вычисления

$$(d\omega,\, \theta) = \int_M d\omega \wedge \star\theta = \int_M d(\omega \wedge \star\theta) - (-1)^p \int_M \omega \wedge d(\star\theta) =$$
$$= -\int_M \omega \wedge (\star\star d \star \theta) = \int_M \omega \wedge \star\delta\theta = (\omega,\, \delta\theta),$$

где $p = \deg \omega$. Наконец, мы можем определить *лапласиан Ходжа*

$$\Delta = d\delta + \delta d\colon \Omega^p(M) \to \Omega^p(M).$$

В случае $\Omega^0(M)$ лапласиан Ходжа сводится к стандартному оператору Лапласа на функциях.

Используя тот факт, что d и δ формально сопряжены друг другу, мы находим, что на компактном многообразии M без границы

$$(\Delta\omega,\, \omega) = \big((d\delta + \delta d)\omega,\, \omega\big) = (\delta\omega,\, \delta\omega) + (d\omega,\, d\omega) \geqslant 0.$$

На таких многообразиях

$$\Delta\omega = 0\colon \ \Leftrightarrow\ (\Delta\omega,\, \omega) = 0\ \Leftrightarrow d\omega = 0\ \text{ и } \delta\omega = 0.$$

Эти последние два уравнения можно мыслить, как аналоги уравнений Максвелла в случае, когда плотность заряда и плотность тока зануляются.

Определение. Дифференциальная p-форма ω на гладком ориентированном римановом многообразии M ***гармоническая***, если $\Delta\omega = 0$. Пусть $\mathscr{H}^p(M)$ обозначает пространство гармонических p-форм на M.

Теорема Ходжа. *Каждый класс когомологий де Рама компактного ориентированного риманова многообразия M обладает единственным гармоническим представителем. Поэтому*

$$H^p(M;\, R) \cong \mathscr{H}^p(M).$$

Более того, $\mathscr{H}^p(M)$ конечномерно и $\Omega^p(M)$ обладает разложениями в прямую сумму

$$\begin{aligned} \Omega^p(M) &= \mathscr{H}^p(M) \oplus \Delta\big(\Omega^p(M)\big) = \\ &= \mathscr{H}^p(M) \oplus d\big(\Omega^{p-1}(M)\big) \oplus \delta\big(\Omega^{p+1}(M)\big), \end{aligned}$$

компоненты которых ортогональны по отношению к скалярному произведению $(\ ,\ )$.

По поводу доказательства мы рекомендуем читателю главу 6 книги [39].

Одно хорошее применение теоремы Ходжа — к существованию решений уравнения Пуассона

$$\Delta f = g.$$

Если M связно, то пространство $\mathscr{H}^0(M)$ гармонических 0-форм есть просто пространство постоянных функций. Поэтому теорема Ходжа дает, что, если гладкая функция $g\colon M \to R$ ортогональна постоянным функциям относительно $(,)$, то $g = \Delta f$ для некоторой гладкой функции f. Разумеется, g ортогональна постоянным функциям тогда и только тогда, когда

$$\int_M g \star 1 = 0.$$

Второе применение теоремы Ходжа — к топологии. Поскольку $\star$ переводит гармонические формы в гармонические формы, мы видим, что, если M является компактным ориентированным римановым многообразием без границы,

$$\mathscr{H}^p(M) \cong \mathscr{H}^{n-p}(M),$$

и, следовательно, имеется изоморфизм когомологий де Рама

$$H^p(M;\, R) \cong H^{n-p}(M;\, R).$$

Этот изоморфизм известен, как *двойственность Пуанкаре* (для когомологий с вещественными коэффицентами). Если b_p обозначает p-е число Бетти M, так что $b_p = \dim H^p(M;\, R)$, тогда двойственность Пуанкаре влечет $b_p = b_{n-p}$.

В частности, числа Бетти компактного ориентированного четырехмерного многообразия определяются b_0 (которое равно 1, если M связно), b_1 (которое равно 0, если M односвязно) и b_2. Второе число Бетти b_2 обладает дальнейшим разложением, которое мы сейчас опишем.

Поскольку $\star^2 = 1$ на 2-формах, мы можем представить $\Lambda^2 V$ в виде прямой суммы

$$\Lambda^2 V = \Lambda^2_+ V \oplus \Lambda^2_- V,$$

где

$$\Lambda^2_+ = \{\omega \in \Lambda^2 V \colon \star\omega = \omega\}, \quad \Lambda^2_- = \{\omega \in \Lambda^2 V \colon \star\omega = -\omega\}.$$

Поэтому Λ^2_+ порождается

$$e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4, \quad e_1 \wedge e_3 + e_4 \wedge e_2, \quad e_1 \wedge e_4 + e_2 \wedge e_3,$$

в то время как Λ^2_- порождается

$$e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4, \quad e_1 \wedge e_3 - e_4 \wedge e_2, \quad e_1 \wedge e_4 - e_2 \wedge e_3.$$

Сечения расслоений, слоями которых являются Λ^2_+ и Λ^2_- называются *автодуальными* и *антиавтодуальными* 2-формами соответственно. Если ω — любая гладкая 2-форма на M, она может быть представлена в виде суммы двух ортогональных компонент

$$\begin{aligned}
\omega^+ &= P_+(\omega) = \frac{1}{2}(\omega + \star\omega) \in \Omega^2_+(M) = \\
&= \{\text{автодуальные 2-формы на } M\}, \\
\omega^- &= P_-(\omega) = \frac{1}{2}(\omega - \star\omega) \in \Omega^2_-(M) = \\
&= \{\text{антиавтодуальные 2-формы на } M\}.
\end{aligned}$$

Поскольку $\star$ переставляет ядра операторов d и δ, автодуальные и антиавтодуальные компоненты гармонических 2-форм снова гармонические. Поэтому подпространство гармонических 2-форм на M распадается в прямую сумму

$$\mathscr{H}^2(M) \cong \mathscr{H}^2_+(M) \oplus \mathscr{H}^2_-(M)$$

двух слагаемых, состоящих соответственно из автодуальных и антиавтодуальных гармонических 2-форм. Пусть

$$b_+ = \dim \mathscr{H}^2_+(M), \quad b_- = \dim \mathscr{H}^2_-(M).$$

Тогда $b_+ + b_- = b_2$, второму числу Бетти M, тогда как

$$\tau(M) = b_+ - b_-$$

называется *сигнатурой* M.

На компактном ориентированном четырехмерном многообразии оператор $d^+ = P_+ \circ d\colon \Omega^1(M) \to \Omega^2_+(M)$ включается в *фундаментальный эллиптический комплекс*

$$0 \to \Omega^0(M) \to \Omega^1(M) \to \Omega^2_+(M) \to 0. \tag{1.23}$$

Теорема Ходжа позволяет нам вычислить группы когомологий этого комплекса. Действительно, если $\omega \in \Omega^2_+(M)$ является $(\, ,\,)$-ортогональной к образу d^+, тогда $\delta\omega = 0$. Автодуальность влечет тогда, что $d\omega = 0$, таким образом, ω — гармоническая и $\omega \in \mathscr{H}^2_+(M)$. С другой стороны, предположим, что $\omega \in \Omega^1(M)$ лежит в ядре d_+ и перпендикулярно образу d. Тогда $\delta\omega = 0$ и $d \star \omega = 0$ и, следовательно,

$$(d+\delta)(\omega + \star\omega) = d\omega + \delta \star \omega = d\omega + \star d\omega = 2d^+\omega = 0.$$

Поэтому $\omega \in \mathscr{H}^1(M)$ и группы когомологий комплекса (1.23) есть просто

$$\mathscr{H}^0(M) \cong R, \quad \mathscr{H}^1(M), \quad \mathscr{H}^2_+(M).$$

Это ведет к немедленному доказательству следующего утверждения.

Предложение. *Пусть L — комплексное линейное расслоение над компактным ориентированным римановым многообразием M. Любой элемент $\phi \in \Omega^2_+(M)$ является автодуальной частью кривизны некоторой унитарной связности на L тогда и только тогда, когда ϕ лежит в аффинном подпространстве* Π *пространства* $\Omega^2_+(M)$ *коразмерности* b_+.

Действительно, мы можем выбрать базовую связность d_{A_0} на L и взять в качестве Π образ отображения

$$a \mapsto F^+_{A_0} + (da)^+.$$

Тогда Π есть искомое аффинное пространство коразмерности b_+.

Из теоремы Ходжа и классификационной теоремы для связностей, представленной в предыдущем разделе, мы видим, что любое комплексное линейное расслоение с эрмитовым скалярным произведением над компактным ориентированным односвязным римановым четырехмерным многообразием M имеет каноническую связность — с гармонической кривизной.

Эта связность имеет важную вариационную характеризацию. Мы определяем *функционал Янга–Миллса*

$$\mathscr{Y} \colon \mathscr{A} \to R \quad \text{посредством} \quad \mathscr{Y}(d_A) = \int_M F_A \wedge \star F_A.$$

Критическая точка этого функционала — ***связность Янга–Миллса*** или ***абелев инстантон*** (называемый абелевым, поскольку группа Ли $U(1)$ абелева). Поскольку

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}(d_A - ita) = \int_M (F_A + t\,da) \wedge \star(F_A + t\,da) = \\ = \mathcal{Y}(d_A) + 2t \int_M da \wedge \star F_A + t^2(\cdots) = \\ = \mathcal{Y}(d_A) - 2t \int_M a \wedge (d \star F_A) + t^2(\cdots),\end{aligned}$$

мы видим, что

$$\frac{d}{dt}\mathcal{Y}(d_a - ita)\Big|_{t=0} = -2 \int_M a \wedge (d \star F_A),$$

поэтому критические точки функционала Янга–Миллса являются решениями уравнения Янга–Миллса

$$d(\star F_A) = 0.$$

Поскольку $dF_A = 0$ в силу тождества Бьянки, мы видим, что связность Янга–Миллса есть просто связность, чья форма кривизны является гармонической.

Уравнение Янга–Миллса может быть обобщено на кватернионные линейные расслоения, что ведет к неабелевой калибровочной теории, являющейся основой для оригинального подхода Дональдсона к геометрии и топологии четырехмерных многообразий, обсуждаемого в [14].

Глава 2
Спинорная геометрия на четырехмерных многообразиях

2.1. Евклидова геометрия и спинорные группы

Тот факт, что R^2 обладает комплексным умножением, превращающим его в поле, имеет важные приложения, ведущие, например, к теории римановых поверхностей. Аналогично, кватернионное умножение на R^4 имеет важные приложения к геометрии четырехмерных многообразий. В размерности 4 кватернионы приводят к упрощению теории спиноров (которая представлена в полной общности в весьма рекомендуемых источниках [25] и [4]).

Мы будем рассматривать евклидово четырехмерное пространство как пространство кватернионов V, комплексных 2×2 матриц вида

$$Q = \begin{pmatrix} t + iz & -x + iy \\ x + iy & t - iz \end{pmatrix},$$

где $i = \sqrt{-1}$. Напомним, что как векторное пространство V порождается четырьмя матрицами

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

где матричное произведение согласуется с векторным произведением со знаком минус на подпространстве, натянутом на $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$. Определитель кватерниона Q задается формулой

$$\det Q = t^2 + z^2 + x^2 + y^2 = \langle Q, Q \rangle,$$

где $\langle\, ,\, \rangle$ обозначает евклидово скалярное произведение. Более того,

$${}^t\overline{Q}Q = (t^2 + x^2 + y^2 + z^2)I,$$

так что единичная сфера в евклидовом четырехмерном пространстве может быть отождествлена со специальной унитарной группой

$$SU(2) = \{Q \in V\colon \langle Q, Q\rangle = 1\},$$

в то время, как само евклидово четырехмерное пространство можно рассматривать, как множество вещественных кратных от $SU(2)$ матриц. Сфера единичных кватернионов $SU(2)$ образует группу Ли относительно кватернионного умножения, алгебра Ли которой — касательное пространство к единичной сфере в тождественном преобразовании — есть линейное пространство «чисто мнимых кватернионов», натянутое на $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$, или, эквивалентно, линейное пространство бесследовых 2×2 косоэрмитовых матриц.

Четырехмерная спинорная группа — это просто прямое произведение двух экземпляров специальной унитарной группы

$$\mathrm{Spin}(4) = SU_+(2) \times SU_-(2);$$

типичным элементом здесь является (A_+, A_-), где $A_\pm \in SU_\pm(2)$. Мы имеем представление

$$\rho\colon \mathrm{Spin}(4) \to GL(V) = \{\text{изоморфизмы } V \text{ на себя}\},$$

определенное посредством

$$\rho(A_+, A_-)(Q) = A_- Q (A_+)^{-1}.$$

В силу того, что A_+ и A_- имеют определитель 1,

$$\langle A_- Q(A_+)^{-1}, A_- Q(A_+)^{-1}\rangle = \det\big(A_- Q(A_+)^{-1}\big) = \det Q = \langle Q, Q\rangle,$$

и, следовательно, представление сохраняет евклидово скалярное произведение. Иными словами,

$$\rho\colon \mathrm{Spin}(4) \to SO(4) \subset GL(V).$$

Чтобы получить представление об этом действии, рассмотрим элемент

$$A = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \in SU(2).$$

Тогда

$$\rho(A,\, I)\begin{pmatrix} t+iz & \sharp \\ x+iy & \sharp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+iz & \sharp \\ x+iy & \sharp \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} e^{-i\theta}(t+iz) & \sharp \\ e^{-i\theta}(x+iy) & \sharp \end{pmatrix},$$

вращение на угол θ в одинаковом направлении в $(t,\, z)$- и $(x,\, y)$-плоскостях. С другой стороны, можно проверить, что $\rho(I,\, A)$ вращает $(t,\, z)$- и $(x,\, y)$-плоскости в противоположных направлениях.

Более общо, любой элемент $A \in SU(2)$ сопряжен элементу вида

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix},$$

и, следовательно, существует такой положительно ориентированный базис $(e_1,\, e_2,\, e_3,\, e_4)$ пространства V, что $\rho(A,\, I)$ вращает плоскости $e_1 \wedge e_2$ и $e_3 \wedge e_4$ на угол θ в одинаковом направлении, в то время как $\rho(I,\, A)$ вращает $e_1 \wedge e_2$ и $e_3 \wedge e_4$ в противоположных направлениях.

Поскольку $SO(4)$ порождена вращениями, построенными выше, любой элемент $SO(4)$ лежит в образе ρ и $\rho\colon \mathrm{Spin}(4) \to SO(4)$ — сюръективно. Его образ и область определения являются компактными группами Ли одной размерности и ρ индуцирует изоморфизм на уровне алгебр Ли, поэтому ядро K представления ρ есть конечная подгруппа и ρ — гладкое накрытие. Топологически $\mathrm{Spin}(4)$ является произведением $S^3 \times S^3$, следовательно, односвязно, в то время, как $\pi_1(SO(4), I) = Z_2$. Гомотопическая точная последовательность

$$\pi_1\big(\mathrm{Spin}(4),\, I\big) \to \pi_1\big(SO(4),\, I\big) \to K \to 0$$

показывает, что K изоморфно Z_2, и можно легко проверить, что

$$K = \big\{(I,\, I),\, (-I,\, -I)\big\}.$$

Мы можем рассматривать $\mathrm{Spin}(4)$ как пространство $(4{\times}4)$-матриц

$$\begin{pmatrix} A_+ & 0 \\ 0 & A_- \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad A_\pm \in SU_\pm(2).$$

Эта группа Ли размерности шесть содержится в важной группе Ли размерности семь

$$\mathrm{Spin}(4)^c = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda A_+ & 0 \\ 0 & \lambda A_- \end{pmatrix} : A_+ \in \right.$$
$$\left. \in SU_+(2),\ A_- \in SU_-(2),\ \lambda \in U(1) \right\}.$$

Более того, представление ρ, описанное выше, продолжается до представления

$$\rho^c \colon \mathrm{Spin}(4)^c \to GL(V),$$

задаваемого формулой

$$\rho^c \begin{pmatrix} \lambda A_+ & 0 \\ 0 & \lambda A_- \end{pmatrix} (Q) = (\lambda A_-) Q (\lambda A_+)^{-1}.$$

Мы имеем также гомоморфизм групп $\pi\colon \mathrm{Spin}(4)^c \to U(1)$, определенный посредством

$$\pi \begin{pmatrix} \lambda A_+ & 0 \\ 0 & \lambda A_- \end{pmatrix} = \det(\lambda A_+) = \det(\lambda A_-) = \lambda^2.$$

Спинорные группы $\mathrm{Spin}(4)$ и $\mathrm{Spin}(4)^c$ вкладываются в точные последовательности

$$0 \to Z_2 \to \mathrm{Spin}(4) \to SO(4) \to 0,$$
$$0 \to Z_2 \to \mathrm{Spin}(4)^c \to SO(4) \times U(1) \to 0. \tag{2.1}$$

Ключевое преимущество использования спинорных групп заключается в том, что эти группы имеют представления более базисные, чем представления, которые мы описали на самом евклидовом пространстве V. Действительно, каждый сомножитель имеет свое собственное базисное унитарное представление. Пусть W_+ и W_- — два экземпляра C^2 со стандартной эрмитовой метрикой $\langle\ ,\ \rangle$, по одному для $SU_+(2)$ и $SU_-(2)$. Тогда $\mathrm{Spin}(4)$ действует на W_+ и W_- посредством

$$\rho_+ \begin{pmatrix} A_+ & 0 \\ 0 & A_- \end{pmatrix} (w_+) = A_+ w_+,$$
$$\rho_- \begin{pmatrix} A_+ & 0 \\ 0 & A_- \end{pmatrix} (w_-) = A_- w_-.$$

Аналогично, $\mathrm{Spin}(4)^c$ действует на W_+ и W_- следующим образом:

$$\rho_+ \begin{pmatrix} \lambda A_+ & 0 \\ 0 & \lambda A_- \end{pmatrix} (w_+) = \lambda A_+ w_+,$$
$$\rho_- \begin{pmatrix} \lambda A_+ & 0 \\ 0 & \lambda A_- \end{pmatrix} (w_-) = \lambda A_- w_-.$$

Эти действия сохраняют стандартные эрмитовы метрики на W_+ и W_-, и мы имеем изоморфизм пространств представлений

$$V \otimes C \cong \mathrm{Hom}(W_+, W_-).$$

В силу того, что элементы V единичной длины представлены унитарными матрицами, они действуют как изометрии из W_+ в W_-.

Замечание. В физике обычно имеют дело с четырехмерным пространством-временем лоренцевой сигнатуры, и уместной группой является $SL(2, C)$ вместо $\mathrm{Spin}(4)$. В этом случае точка плоского пространства-времени может быть проинтерпретирована как 2×2 эрмитова матрица

$$X = \begin{pmatrix} t+z & x-iy \\ x+iy & t-z \end{pmatrix} = tI + x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z,$$

где σ_x, σ_y и σ_z — так называемые *матрицы Паули*. Заметим, что

$$\det X = t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = -\langle X, X\rangle,$$

где $\langle\, ,\, \rangle$ — обычная лоренцева метрика специальной теории относительности. Элемент $A \in SL(2, C)$ действует на эрмитовы матрицы посредством $X \mapsto AX^t\overline{A}$, и, поскольку $\det(AX^t\overline{A}) = \det X$, то $SL(2, C)$ накрывает компоненту единицы в лоренцевой группе.

2.2. Что такое спинорная структура?

Предположим, что $(M, \langle\, ,\, \rangle)$ — ориентированное риманово многообразие размерности четыре. Риманова метрика позволяет нам редуцировать структурную группу TM от $GL(4, R)$ к $SO(4)$. Поэтому мы можем выбрать тривиализующее покрытие $\{U_\alpha \colon \alpha \in A\}$ для M так, что соответствующие функции перехода принимают свои значения в $SO(4)$:

$$g_{\alpha\beta} \colon U_\alpha \cap U_\beta \to SO(4) \subset GL(4, R).$$

Определение 1. *Спинорная структура* на $(M, \langle\, ,\, \rangle)$ задается открытым покрытием $\{U_\alpha\colon \alpha{\in}A\}$ и набором функций перехода

$$\widetilde{g}_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{Spin}(4),$$

таких, что $\rho \circ \widetilde{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$, и выполнено условие коцикла

$$\widetilde{g}_{\alpha\beta}\widetilde{g}_{\beta\gamma} = \widetilde{g}_{\alpha\gamma} \quad \text{на} \quad U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma.$$

Многообразия, которые допускают спинорные структуры, называют *спинорными многообразиями.* Топологи обнаружили красивое необходимое и достаточное условие существования спинорной структуры: M допускает спинорную структуру тогда и только тогда, когда $w_2(TM) = 0$, где $w_2(TM)$ обозначает второй класс Штифеля–Уитни касательного расслоения, элемент $H^2(M;\, Z_2)$.

В самом деле, второй класс Штифеля–Уитни может быть определен в терминах когомологий Чеха следующим образом. Мы говорим, что открытое покрытие $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ многообразия M есть *хорошее покрытие* (следуя [8], стр. 42), если оно удовлетворяет условию

$$U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2} \cap \ldots \cap U_{\alpha_k} \ \text{ или пусто, или диффеоморфно } R^4,$$

для каждого выбора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$. Предположим, что мы выбрали хорошее покрытие в качестве тривиализующего покрытия для TM. Поскольку $U_\alpha \cap U_\beta$ стягиваемо, каждое

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to SO(4) \ \text{ может быть поднято до}$$

$$\widetilde{g}_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{Spin}(4).$$

Проблема состоит в том, что условие коцикла может быть не выполнено. Тем не менее, в силу точности (2.1),

$$\eta_{\alpha\beta\gamma} = \widetilde{g}_{\alpha\beta}\widetilde{g}_{\beta\gamma}\widetilde{g}_{\gamma\alpha}\colon U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \to \{\pm 1\} = Z_2.$$

Легко проверяется, что

$$\eta_{\alpha\beta\gamma} = \eta_{\beta\gamma\alpha} = \eta_{\beta\alpha\gamma} = \eta^{-1}_{\beta\alpha\gamma},$$

где последнее равенство имеет место в силу того, что элементы Z_2 являются своими собственными обратными, и

$$\eta_{\beta\gamma\delta}\eta_{\alpha\beta\delta}^{-1}\eta_{\alpha\beta\delta}\eta_{\alpha\beta\gamma}^{-1} = 1.$$

Поэтому на языке когомологий Чеха

$$\{\eta_{\alpha\beta\gamma}\colon (\alpha\beta\gamma) \in A \times A \times A\}$$

является коциклом Чеха, который, поскольку покрытие хорошее, представляет класс когомологий в $H^2(M;\, Z_2)$. Этот класс когомологий называется *вторым классом Штифеля–Уитни* касательного расслоения и обозначается $w_2(TM)$.

Если M имеет спинорную структуру, мы можем выбрать $\widetilde{g}_{\alpha\beta}$ удовлетворяющими условию коцикла, поэтому второй класс Штифеля–Уитни должен быть нулевым. Обратно, если второй класс Штифеля–Уитни есть нуль, то из теории Чеха следует, что $\{\eta_{\alpha\beta\gamma}\}$ является кограницей, что означает существование постоянных отображений

$$\eta_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to Z_2 \ \text{ таких, что } \eta_{\alpha\beta}\eta_{\beta\gamma}\eta_{\gamma\alpha} = \eta_{\alpha\beta\gamma}.$$

Тогда $\{\eta_{\alpha\beta}\widetilde{g}_{\alpha\beta}\}$ будут функциями перехода, определяющими спинорную структуру на M.

Напомним, что, как только мы имеем функции перехода, удовлетворяющие условию коцикла, мы получаем соответствующее векторное расслоение. Поэтому, если мы имеем спинорную структуру на $(M, \langle\, ,\, \rangle)$, определенную посредством

$$\widetilde{g}_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{Spin}(4),$$

функции перехода

$$\rho_+ \circ \widetilde{g}_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to SU_+(2), \quad \rho_- \circ \widetilde{g}_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to SU_-(2)$$

определяют комплексные векторные расслоения ранга два над M, которые мы обозначим через W_+ и W_-. Более того,

$$TM \otimes C \cong \mathrm{Hom}(W_+, W_-),$$

поэтому спинорная структура позволяет нам представить комплексифицированное касательное расслоение M в терминах двоих более базисных комплексных векторных расслоений. Эти расслоения W_+ и W_- можно рассматривать как кватернионные линейные расслоения над M. Более общо, если

L — комплексное линейное расслоение над M, мы можем написать также

$$TM \otimes C \cong \mathrm{Hom}(W_+ \otimes L, W_- \otimes L),$$

поскольку функции перехода L сокращаются.

Определение 2. *spin^c структура* на $(M, \langle\,,\,\rangle)$ задается открытым покрытием $\{U_\alpha \colon \alpha \in A\}$ и набором функций перехода

$$\widetilde{g}_{\alpha\beta} \colon U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{Spin}(4)^c$$

таких, что $\rho \circ \widetilde{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$ и выполнено условие коцикла.

Если $(M, \langle\,,\,\rangle)$ имеет спинорную структуру, определенную функциями перехода

$$\widetilde{g}_{\alpha\beta} \colon U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{Spin}(4)$$

и L — комплексное линейное расслоение над M с эрмитовой метрикой и функциями перехода

$$h_{\alpha\beta} \colon U_\alpha \cap U_\beta \to U(1),$$

мы можем определить spin^c структуру на M, взяв в качестве функций перехода

$$h_{\alpha\beta}\widetilde{g}_{\alpha\beta} \colon U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{Spin}(4)^c.$$

В действительности, на односвязном спинорном многообразии классы изоморфизма spin^c структур на данном римановом многообразии находятся во взаимнооднозначном соответствии с комплексными линейными расслоениями L над M. Тем не менее, spin^c структуры существуют также на многообразиях, которые не имеют настоящих спинорных структур:

Теорема. *Каждое компактное ориентированное четырехмерное многообразие обладает spin^c структурой.*

Набросок доказательства. Ключевой необходимый нам факт — это то, что второй класс Штифеля–Уитни является Z_2 редукцией целочисленного класса когомологий. Для односвязных четырехмерных многообразий (случай, необходимый нам для последующих приложений), этот факт следует из длинной точной последовательности, соответствующей последовательности групп коэффициентов

$$1 \to Z \to Z \to Z_2 \to 1$$

и того факта, что $H^3(M, Z) = 0$ в силу двойственности Пуанкаре. (По поводу общего случая читатель может обратиться к дополнению D из [25].)

Если $\{U_\alpha\colon \alpha \in A\}$ является хорошим тривиализующим покрытием для TM, мы знаем теперь, что существует коцикл Чеха $\eta_{\alpha\beta\gamma}\colon U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \to \{\pm 1\}$, представляющий $w_2(TM)$, который поднимается до целочисленного коцикла

$$\widetilde{\eta}_{\alpha\beta\gamma}\colon U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \to Z \text{ такого, что } \exp(\pi i \widetilde{\eta}_{\alpha\beta\gamma}) = \eta_{\alpha\beta\gamma}.$$

Здесь $\widetilde{\eta}_{\alpha\beta\gamma}$ меняет знак при нечетной перестановке индексов, и условие коцикла имеет вид

$$\widetilde{\eta}_{\beta\gamma\delta} - \widetilde{\eta}_{\alpha\gamma\delta} + \widetilde{\eta}_{\alpha\beta\delta} - \widetilde{\eta}_{\alpha\beta\gamma} = 0.$$

Пусть $\{\psi_\alpha\colon \alpha{\in}A\}$ — разбиение единицы, подчиненное $\{U_\alpha\colon \alpha{\in}A\}$ и определим

$$f_{\beta\gamma}\colon U_\beta \cap U_\gamma \to R \text{ посредством } f_{\beta\gamma} = \sum_\alpha \psi_\alpha \widetilde{\eta}_{\alpha\beta\gamma}.$$

Тогда непосредственное вычисление с использованием (2.2) показывает, что

$$f_{\alpha\beta} + f_{\beta\gamma} + f_{\gamma\alpha} = \sum_\delta \psi_\delta \widetilde{\eta}_{\delta\alpha\beta} + \sum_\delta \psi_\delta \widetilde{\eta}_{\delta\beta\gamma} + \\ + \sum_\delta \psi_\delta \widetilde{\eta}_{\delta\gamma\alpha} = \sum_\delta \psi_\delta \widetilde{\eta}_{\alpha\beta\gamma} = \widetilde{\eta}_{\alpha\beta\gamma}.$$

Поэтому, если мы положим

$$h_{\alpha\beta} = \exp(\pi i f_{\alpha\beta})\colon U_\alpha \cap U_\beta \to U(1),$$

то найдем, что функции $h_{\alpha\beta}$ не удовлетворяют условию коцикла для линейного расслоения с точно такой же невязкой, как и функции $\widetilde{g}_{\alpha\beta}$:

$$h_{\alpha\beta} h_{\beta\gamma} h_{\gamma\alpha} = \eta_{\alpha\beta\gamma}.$$

Отсюда следует, что отображения

$$h_{\alpha\beta}^{-1} \widetilde{g}_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{Spin}(4)^c$$

удовлетворяют условию коцикла и поэтому определяют spin^c структуру на M, завершая наш набросок доказательства.

При заданной spin^c структуре, определенной функциями перехода

$$\widetilde{g}_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{Spin}(4)^c,$$

функции перехода

$$\pi \circ \widetilde{g}_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to U(1)$$

определяют комплексное линейное расслоение. Мы обозначаем это расслоение через L^2 для того, чтобы напомнить о том факте, что оно является квадратом линейного расслоения L, использованного в конструкции spin^c структуры на спинорном многообразии. Как следует из только что приведенного доказательства теоремы, класс $w_2(TM)$ является редукцией по модулю 2 класса $c_1(L^2)$. Аналогично, представления ρ_+^c и ρ_-^c приводят к $U(2)$-расслоениям $W_+ \otimes L$ и $W_- \otimes L$. Заметим, что расслоения $W_+ \otimes L$ и $W_- \otimes L$ существуют, как настоящие векторные расслоения, хотя сомножители W_+, W_- и L — нет, если только M не является спинорным. В данном конспекте мы будем называть W_+, W_- и L *виртуальными векторными расслоениями.*

Точно также, как и в случае спинорных структур, мы видим, что spin^c структура позволяет нам представить комплексифицированое касательное расслоение в терминах двоих более базисных расслоений

$$TM \otimes C \cong \mathrm{Hom}(W_+ \otimes L, W_- \otimes L).$$

Сечения $W_+ \otimes L$ и $W_- \otimes L$ называются *спинорными полями* соответственно положительной и отрицательной киральности.

2.3. Почти комплексные и spin^c структуры

Предположим теперь, что M — комплексное многообразие комплексной размерности 2. Таким образом, M имеет комплексные системы координат

$$(z_1, z_2) = (x_1 + iy_1, x_2 + iy_2),$$

которые голоморфно взаимосвязаны на пересечениях. Мы можем определить комплексное умножение

$$J\colon TM \to TM \text{ посредством } J\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big) = \frac{\partial}{\partial y_i},\ J\Big(\frac{\partial}{\partial y_i}\Big) = -\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Имеем эндоморфизм векторных расслоений, удовлетворяющий тождеству $J^2 = -I$.

Более общо, *почти комплексная структура* на многообразии M есть просто эндоморфизм векторных расслоений

$$J\colon TM \to TM \quad \text{такой, что} \quad J^2 = -I.$$

Почти комплексная структура на четырехмерном многообразии позволяет нам построить тривиализации касательного расслоения TM, такие, что соответствующие функции перехода принимают свои значения в $GL(2, C) \subset GL(4, R)$. Это позволяет нам интерпретировать TM как комплексное векторное расслоение.

Говорят, что риманова метрика $\langle\, ,\, \rangle$ на почти комплексном многообразии M является *эрмитовой*, если она удовлетворяет условию

$$\langle Jv, Jw\rangle = \langle v, w\rangle,$$

для всех $v, w \in T_pM$. Такая метрика может быть построена с использованием разложения единицы. Эрмитова метрика редуцирует структурную группу еще дальше от $GL(2, C)$ к $U(2) \subset O(4)$. Мы утверждаем, что это позволяет нам построить каноническую spin^c структуру на M.

В самом деле, мы имеем каноническое вложение $j\colon U(2) \to \mathrm{Spin}(4)^c$, определенное посредством

$$j(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{A}} \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix}$$

такое, что

$$\rho^c\left(j(A), \begin{pmatrix} t+iz & -x+iy \\ x+iy & t-iz \end{pmatrix}\right) = A\begin{pmatrix} t+iz & \natural \\ x+iy & \natural \end{pmatrix}.$$

Это есть обычное унитарное действие на C^2 с координатами $(t+iz,\ x+iy)$ и, следовательно,

$$\rho^c \circ j\colon U(2) \to SO(4)$$

является обычным включением.

Поэтому $U(2)$-структура

$$\{g_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to U(2)\colon \alpha,\ \beta \in A\}$$

на M определяет соответствующую spin^c структуру

$$\{\widetilde{g}_{\alpha\beta} = j \circ g_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{Spin}(4)^c\colon \alpha,\ \beta \in A\}.$$

Как описано в предыдущем разделе, это позволяет нам определить комплексные векторные расслоения $W_+ \otimes L$ и $W_- \otimes L$.

Разумеется, когда M имеет настоящую спинорную структуру, эти векторные расслоения являются в точности тензорными произведениями спинорных расслоений W_+, W_+ и комплексного линейного расслоения L.

В общем случае, L не является корректно определенным, однако L^2 является. Оно имеет функции перехода

$$\pi \circ \widetilde{g}_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to U(1),$$

где $\pi\colon \mathrm{Spin}(4)^c \to U(1)$ — «детерминантное отображение»

$$\pi \begin{pmatrix} \lambda A_+ & 0 \\ 0 & \lambda A_- \end{pmatrix} = \det(\lambda A_+) = \lambda^2.$$

Линейное расслоение L^2 будет называться *антиканоническим расслоением* $U(2)$-структуры. Заметим, что $W_- \otimes L$ может быть отождествлено с голоморфным касательным расслоением комплексного многообразия M, и антиканоническое расслоение L^2 изоморфно второй внешней степени голоморфного касательного расслоения.

2.4. Алгебры Клиффорда

Вместо использования касательного расслоения TM в качестве основы для тензорной алгебры мы можем использовать более базисные расслоения W_+ и W_- или $W_+ \otimes L$ и $W_- \otimes L$, где L — линейное расслоение с эрмитовой метрикой.

Давайте начнем с уровня векторных пространств. Элемент евклидова пространства V можно быть рассмотрен как комплексно-линейный гомоморфизм из W_+ в W_- и представлен кватернионом Q. Его можно продолжить до косоэрмитова эндоморфизма $W = W_+ \oplus W_-$, который представляется кватернионной матрицей размера 2×2

$$\theta(Q) = \begin{pmatrix} 0 & -{}^t\overline{Q} \\ Q & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы можем продолжить θ до комплексно-линейного отображения

$$\theta\colon V \otimes C \to \mathrm{End}(W).$$

Заметим, что $\mathrm{End}(W)$ представляет собой шестнадцатимерную алгебру над полем комплексных чисел с суперпозицией (матричным умножением) в качестве умножения в алгебре. Если $Q \in V$, то

$$\big(\theta(Q)\big)^2 = \begin{pmatrix} -{}^t\overline{Q}Q & 0 \\ 0 & -Q{}^t\overline{Q} \end{pmatrix} = (-\det Q)I = -\langle Q, Q\rangle. \quad (2.3)$$

В силу этой формулы мы можем рассматривать, $\mathrm{End}(V)$ как *алгебру Клиффорда* пространства $(V \otimes C, \langle\ ,\ \rangle)$; матричное умножение в этой алгебре называется *Клиффордовым умножением*.

Имеется другой способ построения алгебры Клиффорда пространства $(V \otimes C, \langle\ ,\ \rangle)$. Мы строим комплексные 4×4 матрицы e_1, e_2, e_3, e_4, которые удовлетворяют равенствам

$$e_i \cdot e_j + e_j \cdot e_i = -2\delta_{ij} = \begin{cases} -2, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Эти матрицы соответствуют образу при отображении θ ортогонального базиса V. Несмотря на то, что любой такой выбор годится, удобно иметь в виду один конкретный. Мы полагаем

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Как комплексное векторное пространство $\mathrm{End}(W)$ имеет базис, состоящий из матриц

$$I,\ e_i,\ e_ie_j \quad \text{для} \quad i<j,\ e_i\,e_j\,e_k \quad \text{для} \quad i<j<k,\ e_1\,e_2\,e_3\,e_4. \tag{2.4}$$

Непосредственно из (2.3) следует, что

$$e_i\,e_j = -e_j\,e_i, \quad \text{когда} \quad i \neq j.$$

Поэтому мы можем отождествить комплексифицированную вторую внешнюю степень $\Lambda^2 V \otimes C$ с комплексным подпространством $\mathrm{End}(V)$, порожденным произведениями $e_i \cdot e_j$. Аналогично третья внешняя степень V находится внутри $\mathrm{End}(W)$. Действительно, базис (2.4) соответствует разложению в прямую сумму:

$$\mathrm{End}(W) = \Lambda^0 V \otimes C \oplus \Lambda^1 V \otimes C \oplus \Lambda^2 V \otimes C \oplus \Lambda^3 V \otimes C \oplus \Lambda^4 V \otimes C. \tag{2.5}$$

Мы можем, таким образом, интерпретировать алгебру Клиффорда просто как комплексифицированную внешнюю алгебру с новым умножением, клиффордовым произведением вместо внешнего умножения. В самом деле, клиффордово произведение e_i с элементом $w \in \sum\limits_{k=0}^{4} \Lambda^k V$ может быть определено в терминах внешнего произведения и внутреннего произведения

$$\iota(e_i)\colon \Lambda^k V \to \Lambda^{k-1} V, \quad \langle \iota(e_i)\omega,\, \theta\rangle = \langle \omega,\, e_i \wedge \theta\rangle$$

посредством формулы

$$e_i \cdot \omega = e_i \wedge \omega - \iota(e_i)\omega. \tag{2.6}$$

Как и в параграфе 1.8, $\Lambda^2 V$ обладает разложением в прямую сумму на автодуальную и антиавтодуальную части

$$\Lambda^2 V = \Lambda^2_+ V \oplus \Lambda^2_- V,$$

автодуальная часть при этом порождается элементами

$$e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4, \quad e_1 \wedge e_3 + e_4 \wedge e_2, \quad e_1 \wedge e_4 + e_2 \wedge e_3.$$

Соответствующими элементами алгебры Клиффорда являются

$$e_1 \cdot e_2 + e_3 \cdot e_4 = \begin{pmatrix} -2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$e_1 \cdot e_3 + e_4 \cdot e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$e_1 \cdot e_4 + e_2 \cdot e_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2i & 0 & 0 \\ -2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому мы видим, что $\Lambda^2_+ V$ есть просто пространство бесследовых косоэрмитовых эндоморфизмов W_+, которое представляет собой алгебру Ли $SU_+(2)$. Аналогично, $\Lambda^2_- V$ — пространство бесследовых косоэрмитовых эндоморфизмов W_-.

Если мы представим элемент $\psi \in W_+$ в терминах его компонент как

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix},$$

то тогда, если обозначить через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ стандартное эрмитово умножение на W, то непосредственные вычисления дают

$$\langle \psi, e_1 e_2 \psi \rangle = \langle \psi, e_3 e_4 \psi \rangle = \\ = (\psi_1\ \psi_2) \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\psi}_1 \\ \overline{\psi}_2 \end{pmatrix} = -i(|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2),$$

$$\langle \psi, e_1 e_3 \psi \rangle = \langle \psi, e_4 e_2 \psi \rangle = \\ = (\psi_1\ \psi_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\psi}_1 \\ \overline{\psi}_2 \end{pmatrix} = -(\overline{\psi}_1 \psi_2 - \psi_1 \overline{\psi}_2) = -2i\, \mathrm{Im}(\overline{\psi_1} \psi_2),$$

$$\langle \psi, e_1 e_4 \psi \rangle = \langle \psi, e_2 e_3 \psi \rangle = \\ = (\psi_1\ \psi_2) \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\psi}_1 \\ \overline{\psi}_2 \end{pmatrix} = -i(\overline{\psi}_1 \psi_2 + \psi_1 \overline{\psi}_2) = -2i\, \mathrm{Re}(\overline{\psi}_1\, \psi_2),$$

Мы можем определить квадратичное отображение $\sigma : W_+ \to \Lambda_+^2 V$ одним из двух способов: Во-первых, мы можем отождествить $\Lambda_+^2 V$ с бесследовыми косоэрмитовыми матрицами размера 2×2 и положить

$$\sigma(\psi) = 2i \text{ бесследовая часть } \begin{pmatrix} \overline{\psi}_1 \\ \overline{\psi}_2 \end{pmatrix} (\psi_1 \; \psi_2) =$$
$$= i \begin{pmatrix} |\psi_1|^2 - |\psi_2|^2 & 2\overline{\psi}_1 \psi_2 \\ 2\overline{\psi}_2 \psi_1 & |\psi_2|^2 - |\psi_1|^2 \end{pmatrix},$$

Эквивалентно, мы можем отождествить $\Lambda_+^2 V$ с бесследовыми косоэрмитовыми матрицами, лежащими в верхнем левом блоке размера 2×2, и положить

$$\sigma(\Psi) = -\frac{i}{2} \sum_{i<j} \langle \psi, e_i \cdot e_j \cdot \psi \rangle e_i \cdot e_j \tag{2.7}$$

в силу того, что по нашему соглашению $e_i \cdot e_j$ должны иметь длину один, мы можем легко проверить, что

$$|\sigma(\psi)|^2 = \frac{1}{2}(|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2)^2 + 2|\psi_1 \psi_2|^2 = \frac{1}{2}|\psi|^4, \text{ или } |\sigma(\psi)| = \frac{1}{\sqrt{2}}|\psi|^2.$$

Заметим, что σ «забывает» фазу ψ:

$$\sigma(e^{i\theta}\psi) = \sigma(\psi).$$

Группы $\mathrm{Spin}(4)$ и $\mathrm{Spin}^c(4)$ действуют на линейном пространстве $\mathrm{End}(W)$ сопряжениями; эти действия обозначают Ad и Ad^c и часто называют присоединенными представлениями. Если $T \in \mathrm{End}(W)$, то

$$\mathrm{Ad} \begin{pmatrix} A_+ & 0 \\ 0 & A_- \end{pmatrix} (T) = \begin{pmatrix} A_+ & 0 \\ 0 & A_- \end{pmatrix} T \begin{pmatrix} A_+^{-1} & 0 \\ 0 & A_-^{-1} \end{pmatrix},$$

в то время как

$$\mathrm{Ad}^c \begin{pmatrix} \lambda A_+ & 0 \\ 0 & \lambda A_- \end{pmatrix} (T) = \begin{pmatrix} \lambda A_+ & 0 \\ 0 & \lambda A_- \end{pmatrix} T \begin{pmatrix} (\lambda A_+)^{-1} & 0 \\ 0 & (\lambda A_-)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Если $(M, \langle\, ,\, \rangle)$ имеет spin или spin^c структуру, мы можем использовать эти представления для построения шестнадцатимерного комплексного векторного расслоения над M, расслоения алгебр Клиффорда. Мы обозначим это расслоение для простоты также через $\mathrm{End}(W)$. Заметим, что это расслоение алгебр Клиффорда определено даже, когда W_+ и W_- не определены, поскольку присоединенное представление пропускается через $SO(4)$.

Поскольку действия $\mathrm{Spin}(4)$ и $\mathrm{Spin}^c(4)$ сохраняют разложение в прямую сумму (2.5), расслоение $\mathrm{End}(W)$ распадается в прямую сумму

$$\mathrm{End}(W) = \sum_{k=1}^{4} \Lambda^k TM \otimes C, \quad \Lambda^2 TM \otimes C = \Lambda^2_+ M \otimes C \oplus \Lambda^2_- TM \otimes C.$$

Более того, поскольку квадратичное отображение векторных пространств $\sigma\colon W_+ \to \Lambda^2_+ V$ эквивариантно по отношению к групповому действию, оно продолжается до квадратичного отображения на уровне векторных расслоений

$$\sigma\colon W_+ \otimes L \to \Lambda^2_+ TM.$$

След эрмитовой матрицы

$$\begin{pmatrix} \overline{\psi}_1 \\ \overline{\psi}_2 \end{pmatrix} (\psi_1 \ \psi_2)$$

является квадратом длины спинорного поля ψ. Бесследовая часть этой матрицы есть $\sigma(\psi)$, что может быть истолковано, как поле инфинитиземальных вращений, поворачивающих две плоскости $e_1 \wedge e_2$ и $\star(e_1 \wedge e_2)$ на один и тот же угол в одинаковом направлении. Квадратичное отображение σ предлагает геометрическую интерпретацию для спинорных полей: спинорное поле положительной киральности может быть рассмотрено, как квадратный корень автодуальной 2-формы $\sigma(\psi)$ вместе с выбором фазы.

2.5. Спинорная связность

Из римановой геометрии мы знаем, что если $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ является римановым многообразием, то его касательное расслоение имеет каноническую связность, связность Леви–Чивита. Мы утверждаем, что когда W_+ и W_- определены, они наследуют канонические связности, исходя из связности Леви–Чивита.

Имеется два шага в построении этих связностей. Во-первых, мы строим связность на расслоении $\mathrm{End}(W)$. Это легко, поскольку связность Леви–Чивита на TM индуцирует связность на $\Lambda^k TM$ для каждого k и, следовательно, связность на

$$\mathrm{End}(W) = \sum_{k=1}^{4} \Lambda^k TM \otimes C.$$

Тем не менее, мы хотим построить связность на W. Связность d_A на W называется $\mathrm{Spin}(4)$*-связностью*, если она может быть выражена в терминах каждой локальной тривиализации как

$$(d_A\,\sigma)_\alpha = d\sigma_\alpha + \phi_\alpha \sigma_\alpha,$$

где ϕ_α — 1-форма со значениями в алгебре Ли группы $\mathrm{Spin}(4) = SU_+(2) \times SU_-(2)$. Далее, алгебра Ли группы $\mathrm{Spin}(4)$ есть $\Lambda^2 TM$, которая порождается $e_i \cdot e_j$ для $i < j$. Поэтому условие того, что d_A является $\mathrm{Spin}(4)$-связностью есть просто

$$\phi_\alpha = \sum_{i<j} \phi_{\alpha ij} e_i \cdot e_j, \quad \phi_{\alpha ij} = -\phi_{\alpha ij},$$

где $\varphi_{\alpha ij}$ — обычные вещественнозначные 1-формы. При заданной $\mathrm{Spin}(4)$-связности d_A на W существует единственная связность (также обозначаемая d_A) на $\mathrm{End}(W)$, которая удовлетворяет правилу Лейбница:

$$d_A(\omega\sigma) = (d_A\omega)\sigma + \omega\, d_A\sigma, \quad \text{для} \quad \omega \in \Gamma(\mathrm{End}(W)),\ \sigma \in \Gamma(W). \tag{2.8}$$

Следующая теорема позволяет нам пойти в другом направлении:

Теорема 1. *Предположим, что M — четырехмерное ориентированное риманово многообразие со спинорной структурой. Тогда имеется единственная* $\mathrm{Spin}(4)$*-связность на W, которая индуцирует связность Леви–Чивита на* $\mathrm{End}(W)$.

Доказательство.

В самом деле, мы утверждаем, что имеется взаимно-однозначное соответствие между $\mathrm{Spin}(4)$-связностями на W и $SO(4)$-связностями на TM. Для того, чтобы увидеть это, положим $\widetilde{\psi}$ — тривиализация W над открытым множеством $U \subset M$. Тривиализация W определяет тривиализацию

$\mathrm{End}(W)$ точно так же, как тривиализации подрасслоений $\mathrm{End}(W)$, соответствующих линейным подпространствам алгебры Клиффорда, которые фиксированы относительно действия $\mathrm{Spin}(4)$. В частности, $\widetilde{\psi}$ индуцирует тривиализацию ψ расслоения TM над U.

Пусть $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4)$ — ортонормальные сечения $W|U$, определенные так:

$$\widetilde{\psi} \circ \epsilon_1(p) = \left(p, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \quad \ldots, \quad \widetilde{\psi} \circ \epsilon_4(p) = \left(p, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Пусть (e_1, e_2, e_3, e_4) — ортонормальные сечения $TM|U$, определенные посредством

$$\psi \circ e_1(p) = \left(p, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right), \quad \ldots,$$

$$\psi \circ e_4(p) = \left(p, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

Тогда

$$e_i \cdot \epsilon_\lambda = \sum_{\mu=1}^{4} c_{i\lambda}^{\mu} \epsilon_\mu,$$

где $c_{i\lambda}^{\mu}$ — постоянные.

Предположим теперь, что d_A — $\mathrm{Spin}(4)$-связность на W, заданная над U посредством

$$d + \sum_{i,j=1}^{4} \phi_{ij} e_i \cdot e_j, \quad \phi_{ij} = -\phi_{ji}.$$

В силу того, что компоненты ϵ_λ и $e_k \cdot \epsilon_\lambda$ постоянные,

$$d_A \epsilon_\lambda = \sum_{i,j=1}^{4} \phi_{ij}\, e_i\, e_j\, \epsilon_\lambda, \quad d_A(e_k\, \epsilon_\lambda) = \sum_{i,j=1}^{4} \phi_{ij}\, e_i\, e_j\, e_k\, \epsilon_\lambda.$$

Следовательно, из условия (2.8) вытекает, что

$$\sum_{i,j=1}^{4} \phi_{ij}\, e_i\, e_j\, e_k\, \epsilon_\lambda = (d_A\, e_k)\epsilon_\lambda + e_k \sum_{i,j=1}^{4} \phi_{ij}\, e_i\, e_j\, e_k\, \epsilon_\lambda,$$

или, эквивалентно,

$$(d_A\, e_k)\epsilon_\lambda = \sum_{i,j=1}^{4} \phi_{ij}(e_i\, e_j\, e_k - e_k\, e_i\, e_j)\epsilon_\lambda.$$

Единственными остающимися членами в сумме справа являются те, в которых $i \neq j$ и $k = i$ или $k = j$. Короткое вычисление показывает, что

$$d_A\, e_k = -4 \sum_{i=1}^{4} \phi_{ij}\, e_i.$$

Непосредственно из этой формулы следует, что связность d_A на $\mathrm{End}(W)$ сохраняет TM и является ортогональной связностью.

Наоборот, при заданной ортогональной связности

$$d_A\, e_k = \sum_{i=1}^{4} \omega_{ik}\, e_i$$

на TM мы можем определить соответствующую $\mathrm{Spin}(4)$-связность на W, полагая

$$\phi_{ij} = -\frac{1}{4}\omega_{ij}.$$

Это есть единственная $\mathrm{Spin}(4)$-связность на W, которая индуцирует $SO(4)$-связность. В терминах локальной тривиализации связность есть просто

$$d - \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^{4} \omega_{ij}\, e_i \cdot e_j. \tag{2.9}$$

Какова кривизна

$$\Omega = \left(d - \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^{4} \omega_{ij}\, e_i \cdot e_j\right)^2$$

спинорной связности? Нетрудно ответить на этот вопрос, если мы вспомним, что в локальных выражениях e_i — постоянные элементы $\mathrm{End}(W)$. Короткое вычисление показывает, что

$$\Omega = d\left(-\frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^{4} \omega_{ij}\, e_i \cdot e_j\right) + \left(\frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^{4} \omega_{ij}\, e_i \cdot e_j\right)^2 = -\frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^{4} \Omega_{ij}\, e_i \cdot e_j,$$

где

$$\Omega_{ij} = d\omega_{ij} + \sum_{i,j=1}^{4} \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}.$$

Мы можем положить

$$R_{ijkl} = \Omega_{ij}(e_k,\, e_l), \quad \text{так что} \quad \Omega_{ij} = \sum_{k,l=1}^{4} R_{ijkl}\theta_k \wedge \theta_l,$$

где $(\theta_1,\, \theta_2,\, \theta_3,\, \theta_4)$ — кобазис, двойственный $(e_1,\, e_2,\, e_3,\, e_4)$. R_{ijkl} являются компонентами *тензора кривизны Римана–Кристоффеля.*

Этот тензор широко изучается в учебниках по римановой геометрии, где показано, что его компоненты удовлетворяют следующим симметриям кривизны:

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} = R_{ijlk} = R_{klij}, \quad R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0.$$

Важным инвариантом риманова многообразия M является *скалярная кривизна* s, заданная посредством формулы

$$s = \sum_{i,j=1}^{4} R_{ijij}.$$

Мы утверждаем, что

$$\sum_{i,j=1}^{4} e_i\, e_j\, \Omega(e_i,\, e_j) = \frac{s}{2}. \tag{2.10}$$

Действительно, поскольку $R_{klij} = R_{ijkl}$,

$$\sum_{i,j=1}^{4} e_i\, e_j\, \Omega(e_i,\, e_j) = -\frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l=1}^{4} e_i\, e_j\, e_k\, e_l\, \Omega_{kl}(e_i,\, e_j) = \\ = -\frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l=1}^{4} e_i\, e_j\, e_k\, e_l\, R_{ijkl}.$$

Теперь заметим, что, если i, j, k и l различны,

$$e_i\, e_j\, e_k\, e_l\, R_{ijkl} + e_i\, e_k\, e_l\, e_j\, R_{iklj} + e_i\, e_l\, e_j\, e_k\, R_{iljk} = \\ e_i\, e_j\, e_k\, e_l(R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk}) = 0,$$

в силу последней из симметрии кривизны. Аналогично, если i, j и l различны,

$$e_i\, e_j\, e_i\, e_l\, R_{ijil} + e_i\, e_l\, e_i\, e_j\, R_{ilij} = e_i\, e_j\, e_i\, e_l(R_{ijil} - R_{ilij}) = 0.$$

Следовательно, единственные члены, остающиеся в сумме, — это те, которые содержат R_{ijij} или R_{ijji}, и

$$\sum_{i,j=1}^{4} e_i\, e_j\, \Omega(e_i,\, e_j) = -\frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{4} e_i\, e_j\, e_i\, e_j\, R_{ijij} - \\ -\frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{4} e_i\, e_j\, e_i\, e_i\, R_{ijji} = \frac{s}{2}.$$

При заданной унитарной связности d_A на комплексном линейном расслоении L над спинорным многообразием M, мы можем определить связность на расслоении $W \otimes L$, беря тензорное произведение этой связности со связностью, данной теоремой 1. Эта связность также будет обозначаться d_A. Она является $\mathrm{Spin}(4)^c$-связностью, что означает, что она может быть выражена в терминах каждой локальной тривиализации как

$$(d_A\sigma)_\alpha = d\sigma_\alpha + \phi_\alpha\sigma_\alpha,$$

где φ_α — 1-форма со значениями в алгебре Ли группы $\mathrm{Spin}(4)^c$. Действительно,

$$\phi_\alpha = -iaI - \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{4} \omega_{ij}\, e_i \cdot e_j,$$

a является обычной вещественнозначной 1-формой. Более того, $da = F_A$, где $-iF_A$ — кривизна исходной связности на L. Кривизна новой связности на $W \otimes L$ есть

$$\Omega_A = -iF_A I + \Omega = -iF_A I - \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{4} \Omega_{ij} e_i \cdot e_j, \qquad (2.11)$$

2-форма со значениями в $\mathrm{End}(W)$. В этой формуле Ω_{ij} — формы кривизны связности Леви-Чивита на M.

Если M не является спинорным многообразием, мы по-прежнему можем построить расслоения $W \otimes L$ для различных выборов линейных расслоений L^2. $\mathrm{Spin}(4)^c$-связность на $W \otimes L$ определяет связность на расслоении алгебр Клиффорда $\mathrm{End}(W)$ и также на детерминантном линейном расслоении $\Lambda^2(W_+ \otimes L) = L^2$. Обозначая связность на $W \otimes L$ через d_A, мы будем обозначать индуцированную связность на L^2 через d_{2A}.

Теорема 2. *Предположим, что M — четырехмерное ориентированное риманово многообразие со* spin^c *структурой, имеющее детерминантное линейное расслоение L^2. При заданной связности d_{2A} на L^2 имеется единственная* $\mathrm{Spin}(4)^c$*-связность на $W \otimes L$, которая индуцирует связность Леви – Чивита на* $\mathrm{End}(W)$ *и связность d_{2A} на L^2.*

Доказательство.

Доказательство аналогично приведенному для теоремы 1. Кривизна этой связности по-прежнему дается (2.11), в согласии со случаем спинорных многообразий.

2.6. Оператор Дирака

Пусть M — четырехмерное риманово многообразие со spin^c структурой и $\mathrm{Spin}(4)^c$-связностью d_A на спинорном расслоении $W \otimes L$.

Определение. *Оператор Дирака* $D_A : \Gamma(W \otimes L) \to \Gamma(W \otimes L)$ определяется так:

$$D_A(\psi) = \sum_{i=1}^{4} e_i \cdot d_A \psi(e_i) = \sum_{i=1}^{4} e_i \cdot \nabla^A_{e_i} \psi. \qquad (2.12)$$

В случае, когда M есть четырехмерное евклидово пространство с глобальными евклидовыми координатами (x_1, x_2, x_3, x_4), расслоение W тривиально — $W = M \times C^4$. Если вдобавок L есть тривиальное линейное расслоение, то оператор Дирака есть простой имеет вид:

$$D_A(\psi) = \sum_{i=1}^{4} e_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i},$$

где e_i — такие постоянные матрицы, что

$$e_i \cdot e_j + e_j \cdot e_i = -2\delta_{ij} = \begin{cases} -2 & \text{для } i = j, \\ 0 & \text{для } i \neq j. \end{cases}$$

Поэтому мы находим, что

$$D_A \circ D_A(\psi) = -\sum_{i=1}^{4} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2}.$$

В этом случае оператор Дирака является с точностью до знака квадратным корнем из обычного евклидова лапласиана.

Понятие оператора Дирака с коэффициентами в линейном расслоении может быть распространено далее на случай коэффициентов из произвольного векторного расслоения. Это очень мощное обобщение, которое включает много знакомых эллиптических операторов первого порядка дифференциальной геометрии.

В самом деле, если M имеет спинорную структуру, и E — комплексное векторное расслоение над M с эрмитовой метрикой и унитарной связностью, мы имеем индуцированную эрмитову метрику и унитарную связность на $W \otimes E$. Если M обладает лишь spin^c структурой со спинорным расслоением $W \otimes L$, эрмитова метрика и унитарная связность в комплексном векторном расслоении $E \otimes L^{-1}$ индуцирует эрмитову метрику и унитарную структуру в $W \otimes E$. В любом случае мы можем построить *оператор Дирака* $D_A\colon \Gamma(W \otimes E) \to \Gamma(W \otimes E)$ с коэффициентами в E с помощью непосредственного обобщения (2.12):

$$D_A(\psi \otimes \sigma) = \sum_{i=1}^{4} e_i \cdot d_A \psi(e_i \otimes \sigma),$$

в котором d_A обозначает теперь связность на $W \otimes E$.

Если мы возьмем, к примеру, в качестве коэффициентного расслоения E само W, мы получим таким путем знакомый оператор из теории Ходжа.

Предложение. *Оператор Дирака с коэффициентами из W имеет вид*

$$D_W = d + \delta\colon \sum_{k=0}^{4} \Lambda^k TM \otimes C \to \sum_{k=0}^{4} \Lambda^k TM \otimes C.$$

Набросок доказательства: Сначала показывают, что, если ∇ обозначает связность Леви–Чивита внешней алгебры $\sum_{k=0}^{4}\Lambda^k TM$, тогда внешняя производная d дается формулой

$$d\omega = \sum_{i=1}^{4} e_i \wedge \nabla_{e_i}\omega,$$

в то время как кодифференциал δ задается так

$$\delta\omega = -\sum_{i=1}^{4} \iota(e_i)\nabla_{e_i}\omega,$$

где $\iota(e_i)$ обозначает внутреннее произведение. Доказываемая формула теперь может быть выведена из (2.6).

Главный результат этого раздела, формула Вейценбека (Weitzenböck), дает аналогичное соотношение между общим оператором Дирака и «лапласианом на векторном расслоении» $\Delta^A\colon \Gamma(W\otimes L)\to\Gamma(W\otimes L)$, определенном формулой

$$\Delta^A\psi = -\sum_{i=1}^{4}\left[\nabla^A_{e_i}\circ\nabla^A_{e_i} - \nabla^A_{\nabla_{e_i}e_i}\psi\right], \tag{2.13}$$

где (e_1, e_2, e_3, e_4) есть подвижный ортонормированный базис. (Член $\nabla^A_{\nabla_{e_i}e_i}\psi$ необходим для того, чтобы сделать $\Delta^A\psi$ независимым от выбора базиса.)

Теорема (формула Вейценбека). *Квадрат оператора Дирака с коэффициентами в линейном расслоении L связан с оператором Лапласа Δ^A посредством формулы*

$$D_A^2\psi = \Delta^A\psi + \frac{s}{4}\psi - \sum_{i<j} F_A(e_i, e_j)(i\, e_i\cdot e_j\cdot\psi).$$

Здесь s — скалярная кривизна M и F_A — кривизна связности в L.

Доказательство.

Выберем подвижный ортонормированный базис в окрестности p в M так, что $\nabla_{e_i}e_j(p) = 0$. (Напомним, что

$\mathrm{Spin}(4)^c$- связность ∇^A действует как связность Леви–Чивита ∇ на векторных полях.) Тогда в точке p

$$D_A^2\psi = \left(\sum_{i=1}^4 e_i\nabla_{e_i}^A\right)\left(\sum_{j=1}^4 e_j\nabla_{e_j}^A\right)\psi = \sum_{i,j=1}^4 e_i\, e_j \nabla_{e_i}^A\nabla_{e_j}^A\psi =$$

$$\sum_{i=1}^4 \nabla_{e_i}^A\nabla_{e_i}^A\psi + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^4 e_i\, e_j\big[\nabla_{e_i}^A\nabla_{e_j}^A - \nabla_{e_j}^A\nabla_{e_i}^A\big]\psi =$$

$$\Delta^A\psi+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^4 e_i\, e_j(d_A^2\psi)(e_i,\, e_j)=\Delta^A\psi+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^4 e_i\, e_j\Omega_A(e_i,\, e_j)\psi,$$

где Ω_A — кривизна $\mathrm{Spin}(4)^c$-связности. Подстановка (2.11) в это выражение и использование (2.10) дает

$$D_A^2\psi = \Delta^A\psi - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^4 F_A(e_i,\, e_j)ie_i\cdot e_j\cdot\psi -$$

$$-\frac{1}{8}\sum_{i,j,k,l=1}^4 \Omega_{kl}(e_i,\, e_j)e_i\cdot e_j\cdot e_k\cdot e_l\cdot\psi =$$

$$\Delta^A\psi - \sum_{i<j} F_A(e_i,\, e_j)ie_i\cdot e_j\cdot\psi + \frac{s}{4}\psi,$$

что и доказывает теорему.

В дополнении к тому, что оператор Дирака есть почти квадратный корень из лапласиана, он имеет другое ключевое свойство — самосопряженность:

Предложение. *Оператор Дирака «формально самосопряжен»:*

$$\int_M\langle D_A(\psi),\, \eta\rangle dV = \int_M\langle\psi,\, D_A(\eta)\rangle dV. \tag{2.14}$$

Доказательство.

(Сравните [25], страница 114.) Как и в предыдущем доказательстве, мы выбираем подвижный ортонормированный базис в окрестности p в M так, что $\nabla_{e_i} e_j(p) = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} D_A(\psi), \eta\rangle(p) &= \sum_{i=1}^{4}\langle e_i \cdot \nabla^A_{e_i}\psi, \eta\rangle(p) = -\sum_{i=1}^{4}\langle \nabla^A_{e_i}\psi, e_i \cdot \eta\rangle(p) = \\ &= -\sum_{i=1}^{4}\bigl[e_i\langle\psi, e_i\cdot\eta\rangle(p) - \langle\psi, \nabla^A_{e_i}(e_i\cdot\eta)\rangle(p)\bigr] = \\ &= -\sum_{i=1}^{4} e_i\langle\psi, e_i\cdot\eta\rangle(p) + \langle\psi, D_A(\eta)\rangle(p), \end{aligned}$$

поскольку умножение на e_i является косоэрмитовым оператором и ∇^A — унитарная связность. Если мы определим 1-форму b на M посредством $\langle b, e_i\rangle = \langle\psi, e_i\cdot\eta\rangle$, мы можем выразить по-другому результат этого вычисления:

$$\bigl\langle D_A(\psi), \eta\bigr\rangle(p) - \bigl\langle\psi, D_A(\eta)\bigr\rangle(p) = \delta\, b. \tag{2.11}$$

Интегрирование по M приводит теперь к уравнению (2.14).

Разумеется, лапласиан на векторном расслоении Δ^A также является формально самосопряженным; это следует непосредственно из легко доказываемой интегральной формулы

$$\int_M \langle\psi, \Delta^A\psi\rangle dV = \int_M |\nabla^A\psi|^2 dV. \tag{2.16}$$

2.7. Теорема Атьи–Зингера об индексе

Простейшим по многим аспектам оператором Дирака с коэффициентами является оператор $d+\delta$ из теории Ходжа, квадрат которого есть лапласиан Ходжа $\delta = d\delta + \delta d$. Поскольку

$$(d+\delta)\omega = 0 \quad \leftrightarrow \quad d\omega = 0 \text{ и } \delta\omega = 0 \quad \leftrightarrow \quad \Delta\omega = 0,$$

мы видим, что ядро $d+\delta$ — конечномерное пространство гармонических форм. Мы можем положить

$$\Omega^+ = \Omega^0(M)\oplus\Omega^2(M)\oplus\Omega^4(M), \quad \Omega^- = \Omega^1(M)\oplus\Omega^3(M)$$

и разложить оператор $d+\delta$ на две части

$$(d+\delta)^+ \colon \Omega^+ \to \Omega^-, \quad (d+\delta)^- \colon \Omega^- \to \Omega^+.$$

Мы определяем *индекс* $(d+\delta)^+$ в виде

$$\text{индекс } (d+\delta)^+ = \dim\bigl(\operatorname{Ker}(d+\delta)^+\bigr) - \dim\bigl(\operatorname{Ker}(d+\delta)^-\bigr).$$

Однако

$$\operatorname{Ker}\bigl((d+\delta)^+\bigr) = \mathscr{H}^0(M) \oplus \mathscr{H}^2(M) \oplus \mathscr{H}^4(M),$$
$$\operatorname{Ker}\bigl((d+\delta)^-\bigr) = \mathscr{H}^1(M) \oplus \mathscr{H}^3(M),$$

таким образом,

$$\text{индекс } (d+\delta)^+ = b_0 + b_2 + b_4 - (b_1 + b_3) = \chi(M),$$

эйлерова характеристика M.

В подобном же духе, теорема Атьи–Зингера об индексе дает формулу для индекса любого эллиптического линейного дифференциального оператора первого порядка в терминах топологических данных. Наиболее важен для нас оператор Дирака D_A с коэффициентами в линейном расслоении.

Заметим, во-первых, что оператор Дирака D_A разлагается на две части

$$D_A^+ : \Gamma(W_+ \otimes L) \to \Gamma(W_- \otimes L), \quad D_A^- : \Gamma(W_- \otimes L) \to \Gamma(W_+ \otimes L),$$

которые формально сопряжены друг другу в силу (2.14). В точности, как в теории Ходжа, теория эллиптических операторов дает, что ядра операторов D_A^+ и D_A^- — конечномерные комплексные векторные пространства. Мы определяем *индекс* D_A^+ в виде

$$\text{индекс } D_A^+ = \dim\bigl(\operatorname{Ker}(D_A^+)\bigr) - \dim\bigl(\operatorname{Ker}(D_A^-)\bigr).$$

Теорема Атьи–Зингера об индексе (для оператора Дирака с коэффициентами в линейном расслоении). *Если D_A — оператор Дирака с коэффициентами в линейном расслоении L на компактном ориентированном четырехмерном многообразии M, тогда*

$$\text{индекс } D_A^+ = -\frac{1}{8}\tau(M) + \frac{1}{2}\int_M c_1(L)^2, \tag{2.17}$$

где $\tau(M) = b_+ - b_-$ — сигнатура M.

Эта теорема является следствием более общей теоремы, которая будет сформулирована позже в этом параграфе. Она имеет много впечатляющих приложений. В частности, если мы возьмем в качестве L тривиальное линейное расслоение над спинорным многообразием, мы можем вывести следующую теорему:

Теорема Рохлина. *Сигнатура компактного ориентированного гладкого спинорного многообразия размерности четыре удовлетворяет условию*

$$\tau(M) \equiv 0 \mod 16.$$

Доказательство.

Если D^+ — оператор Дирака с коэффициентами в тривиальном линейном расслоении,

$$\text{индекс } D^+ = -\frac{\tau(M)}{8}.$$

Эта немедленно показывает, что сигнатура M делится на 8.

Но имеется также эндоморфизм $J\colon W_\pm \to W_\pm$, определенный клиффордовым умножением с

$$e_1 \cdot e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если ψ — гармоническое сечение W_+, таковым же является и $J\psi$, сечение, перпендикулярное ψ. В действительности, ядро D^+ — кватернионное, и мы можем построить ортонормированный базис $\mathrm{Ker}(D^+)$ в виде

$$\psi_1, J\psi_1, \dots, \psi_k, J\psi_k.$$

Точно такой же аргумент применим к $\mathrm{Ker}(D^-)$, таким образом, $\mathrm{Ker}(D^+)$ и $\mathrm{Ker}(D^-)$ оба являются четномерными. Поэтому индекс D^+ делится на 2, и сигнатура M делится на 16.

Другое поразительное применение теоремы Атьи–Зингера — к проблеме отношения кривизны к топологии римановых многообразий.

Теорема Лихнеровича. *Если M — компактное ориентированное спинорное многообразие размерности четыре с римановой метрикой положительной скалярной кривизны, тогда сигнатура M равна нулю.*

Доказательство.

Мы используем формулу Вейценбека для оператора Дирака D в случае тривиального линейного расслоения с тривиальной связностью. Если ψ — гармоническое спинорное поле ($D\psi = 0$), тогда

$$0 = \int_M \left[|\nabla_A \psi|^2 + \frac{s}{4}|\psi|^2\right] dv,$$

и поэтому из положительности скалярной кривизны вытекает, что $\psi = 0$. Из этого следует, что

$$-\frac{\tau(M)}{8} = (\text{индекс } D^+) = 0.$$

Эта теорема показывает, что многие компактные четырехмерные многообразия не допускают римановых метрик положительной скалярной кривизны.

Коэффициенты в произвольном векторном расслоении: теорема Атьи–Зингера об индексе с коэффициентами в линейном расслоении является частным случаем более общей теоремы, которая дает индекс оператора Дирака

$$D_A^+ : \Gamma(W_+ \otimes E) \to \Gamma(W_- \otimes E)$$

с коэффициентами в произвольном векторном расслоении или виртуальном векторном расслоении E. Чтобы сформулировать более общую теорему, нам необходим характер Черна, обсужденный в § 1.5, и $\hat{A}$-полином в случае классов Понтрягина.

Из нашего более раннего обсуждения характера Черна и из (1.15) следует, что

$$\operatorname{ch}(E) = \dim E + c_1(E) + \frac{1}{2}(c_1(E))^2 - c_2(E) + \cdots, \qquad (2.18)$$

где точками обозначены члены степени > 4. Мы можем применить эти формулы к кватернионным линейным расслоениям W_+ и W_-, которые имеют зануляющиеся первые классы

Черна:

$$\mathrm{ch}(W_+) = 2 - c_2(W_+), \quad \mathrm{ch}(W_-) = 2 - c_2(W_-).$$

В силу того, что W_+ изоморфно своему сопряженному или двойственному расслоению,

$$TM \otimes C = \mathrm{Hom}(W_+, W_-) \cong W_+ \otimes W_-,$$

и, следовательно,

$$\mathrm{ch}(TM \otimes C) = \mathrm{ch}(W_+)\,\mathrm{ch}(W_-) = 4 - 2c_2(W_+) - 2c_2(W_-).$$

Поэтому, в соответствии с определением класса Понтрягина,

$$p_1(TM) = -c_2(TM \otimes C) = -2c_2(W_+) - 2c_2(W_-) = -2c_2(W). \tag{2.19}$$

Из формулы произведения для характера Черна следует, что, если E есть любое $SU(2)$-расслоение, тогда

$$(2 - c_2(E) + \cdots)^2 = 4 - c_2(E \times E) + \cdots ,$$

откуда следует, что

$$c_2(E) = \frac{1}{4}c_2(E \otimes E).$$

Если M не является спинорным многообразием, мы можем использовать эту формулу для определения $c_2(W_+)$ и $c_2(W_-)$, поскольку векторные расслоения $W_+ \otimes W_+$ и $W_- \otimes W_-$ всегда существуют как настоящие векторные расслоения. Аналогично, мы полагаем $c_1(L) = (1/2)c_1(L^2)$, где L^2 существует как комплексное линейное расслоение, но L — нет. Поэтому мы можем использовать формулу произведения для характеров Черна для определения $c_1(E)$ и $c_2(E)$, когда E — виртуальное векторное расслоение.

$\hat{A}$- полином определен степенным рядом

$$\widehat{A}(TM) = 1 - \frac{1}{24}p_1(TM) + \cdots \quad H^*(M;\, R),$$

где p_1 — первый класс Понтрягина и точки обозначают члены в классах Понтрягина высших порядков, которые снова исчезают на многообразии размерности $\leqslant 4$.

Теорема Атьи–Зингера об индексе (над четырехмерными многообразиями). *Если D_A — оператор Дирака с коэффициентами в виртуальном векторном расслоении E над компактным ориентированным четырехмерным многообразием M, тогда*

$$\text{индекс } D_A^+ = \widehat{A}(TM)\,\mathrm{ch}(E)[M] =$$

$$= \int_M [-(1/24)(\dim E)p_1(TM) + (1/2)(c_1(E))^2 - c_2(E)].$$

В отношении доказательства этой теоремы, одного из монументов математики двадцатого столетия, мы отсылаем читателя к книгам [6] или [25]. Эта теорема дает формулу для индексов практически всех геометрически интересных эллиптических операторов на замкнутых четырехмерных многообразиях.

Каким образом из этой теоремы вытекает теорема Атьи–Зингера, которую мы ранее сформулировали для операторов Дирака с коэффициентами в линейных расслоениях? Для того, чтобы ответить на этот вопрос, нам необходимо рассмотреть сначала специальный случай $E = W$, так что

$$W \otimes E = \sum_{k=1}^{4} \Lambda^k TM \otimes C \quad \text{и} \quad D_A = (d + \delta).$$

В этом случае

$$\mathrm{Ker}(D_A) = \mathrm{Ker}(d+\delta) = \{\text{комплекснозначные гармонические формы}\}.$$

Это есть оператор, рассмотренный в начале данного раздела, но теперь мы разлагаем этот оператор по-другому — на этот раз мы полагаем

$$D_A^+ : \Gamma(W_+ \otimes E) \to \Gamma(W_- \otimes W).$$

Наиболее просто понять новое разложение в случае, когда M односвязно, так что $b_1 = b_3 = 0$. В этом случае, гармонические формы состоят из постоянных функций, постоянных кратных формы объема $\star 1$, и элементов

$$\mathscr{H}^2_+(M) \text{ и } \mathscr{H}^2_-(M),$$

которые являются сечениями соответственно $W_+ \otimes W_+$ и $W_- \otimes W_-$. Поскольку $1 + \star 1$ и $1 - \star 1$ — сечения $W_+ \otimes W_+$ и $W_- \otimes W_-$, соответственно, мы видим, что

$$\text{индекс } D_A^+ = b_+ - b_- = \tau(M),$$

сигнатуре M. Поработав еще немного, можно показать, что эта формула также имеет место в случае $b_1 = b_3 \neq 0$, и, следовательно, в силу теоремы Атьи–Зингера об индексе и (2.19)

$$\tau(M) = \int_M [-(1/24)(\dim W)p_1(TM) - c_2(W)] =$$

$$= \int_M [-(1/16)p_1(TM) + (1/2)p_1(TM)] = \int_M (1/3)p_1(TM).$$

Мы сделали набросок доказательства следующей теоремы.

Теорема Хирцебруха о сигнатуре (для четырехмерных многообразий). *Сигнатура компактного ориентированного гладкого четырехмерного многообразия M задается формулой*

$$\tau(M) = \frac{1}{3}\int_M p_1(TM).$$

Теорема о сигнатуре позволяет нам элиминировать член, содержащий $p_1(TM)$ в общем случае теоремы Атьи–Зингера об индексе, получая таким образом (2.17) в случае коэффициентов в линейном расслоении.

Мы завершим эту главу выводом инвариантов характеристических классов для расслоений $W_\pm \otimes L$. Из (2.19) мы заключаем, что

$$c_2(W_+)[M] + c_2(W_-)[M] = -\frac{1}{2}\int_M p_1(TM) = -\frac{3}{2}\tau(M).$$

С другой стороны, мы можем взять операторы Дирака D_{W_+} и D_{W_-} с коэффициентами в W_+ и W_- соответственно и проверить, что

$$\text{индекс } D_{W_+} - \text{ индекс } D_{W_-} = 2b_0 - 2b_1 + b_2 = \chi(M),$$

эйлеровой характеристике M. Следовательно, по теореме Атьи–Зингера,

$$-c_2(W_+)[M] + c_2(W_-)[M] = \chi(M).$$

Мы можем разрешить это уравнение относительно классов Черна расслоений W_+ и W_-, получая

$$c_2(W_+)[M]=-\frac{3}{4}\tau(M)-\frac{1}{2}\chi(M),\ c_2(W_-)[M]=-\frac{3}{4}\tau(M)+\frac{1}{2}\chi(M).$$

Согласно классификационной теореме для кватернионных линейных расслоений, эти числа полностью определяют спинорные расслоения W_+ и W_-, когда они существуют.

Применение формулы произведения для характеров Черна к $W_+ \otimes L$ дает

$$(2 - c_2(W_+) + \cdots)(1 + c_1(L) + \frac{1}{2}(c_1(L))^2 + \cdots) =$$
$$= 1 + c_1(W_+ \otimes L) + \frac{1}{2}[c_1(W_+ \otimes L)]^2 - c_2(W_+ \otimes L) + \cdots .$$

Поэтому

$$c_1(W_+ \otimes L) = 2c_1(L) = c_1(L^2)$$

и окончательно,

$$c_2(W_+ \otimes L)[M] = -\frac{3}{4}\tau(M) - \frac{1}{2}\chi(M) + \frac{1}{4}c_1(L^2)^2[M], \quad (2.20)$$

$$c_2(W_- \otimes L)[M] = -\frac{3}{4}\tau(M) - \frac{1}{2}\chi(M) + \frac{1}{4}c_1(L^2)^2[M]. \quad (2.21)$$

Глава 3
Глобальный анализ уравнений Зайберга–Виттена

3.1. Уравнения Зайберга–Виттена

Как мы видели, теория линейных дифференциальных уравнений с частными производными, в частности, теорема Атьи–Зингера об индексе, дает топологические инварианты, которые имеют поразительные геометрические приложения. Теперь мы исследуем более утонченные инварианты, построенные по нелинейным дифференциальным уравнениям с частными производными, инварианты, недоступные для линейной теории.

Вот процедура, которой мы можем попытаться следовать. Выберем нелинейное дифференциальное уравнение с частными производными. Покажем, что пространство его решений является компактным конечномерным многообразием, лежащим в некотором большем «конфигурационном пространстве». Пространство решений будет в общем случае зависеть от некоторого выбора, такого, как выбор римановой метрики, но «класс кобордизма» пространства решений может не зависеть от этого выбора. Этот класс кобордизма может превратиться в новый топологический инвариант. Поскольку он определен в терминах дифференциальных уравнений с частными производными (для которого необходима гладкая структура), то возможно, что инвариант будет различать гладкие структуры на соответствующем топологическом многообразии, ассоциированном с M.

В общих чертах, это тот способ, которым действует теория Дональдсона. Пространство модулей антиавтодуальных связностей в $SU(2)$-расслоении над компактным ориентированным четырехмерном многообразии есть в общем случае гладкое многообразие. Тем не менее, это пространство модулей обычно не является компактным, и большие усилия направляются для нахождения подходящей компактификации.

Теория псевдоголоморфных кривых Громова [27] является вторым случаем, в котором описанная выше процедура может быть проведена, и компактификация снова доставляет трудности. Был разработан целый набор методик для изучения этих и связанных геометрических теорий. Инварианты Зайберга – Виттена, к описанию которых мы приступаем, доставляют, возможно, простейший контекст для разработки этих методик.

Пусть $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ — ориентированное четырехмерное риманово многообразие со spin^c структурой и соответствующим расслоением положительных спиноров $W_+ \otimes L$. Мы ищем пары (d_{2A}, ψ), где d_{2A} — связность в линейном расслоении L^2 и ψ — такое сечение $W_+ \otimes L$, что

$$D_A^+\psi = 0, \quad F_A^+(e_i, e_j) = -\frac{i}{2}\langle\psi, e_i \cdot e_j \cdot \psi\rangle, \quad \text{для } i < j. \tag{3.1}$$

Здесь $F_A^+ = (1/2)F_{2A}^+$, где F_{2A}^+ — автодуальная часть кривизны связности d_{2A}. В выражении $e_i \cdot e_j \cdot \psi$ умножение понимается в клиффордовом смысле.

Мы будем иногда писать (d_A, ψ) вместо (d_{2A}, ψ) и интерпретировать d_A как связность в линейном расслоении L, расслоении, которое, строго говоря, не существует, если только M не является спинорным. Зачастую мы будем упрощать еще больше и писать (A, ψ) вместо (d_A, ψ).

Уравнения (3.1) известны как *уравнения Зайберга – Виттена*. Из (2.7) следует, что они также могут быть написаны в виде

$$D_A^+\psi = 0, \quad F_A^+ = \sigma(\psi). \tag{3.2}$$

Нам также необходимы «возмущенные» уравнения Зайберга – Виттена

$$D_A^+\psi = 0, \quad F_A^+ = \sigma(\psi) + \phi, \tag{3.3}$$

в которых ϕ — заданная автодуальная 2-форма. Заметим, что уравнения (3.2) и (3.3) не являются линейными только в силу присутствия члена $\sigma(\psi)$, квадратичного по ψ. Эта нелинейность гораздо умереннее, чем та, которая встречается в уравнениях Янга – Миллса из неабелевой калибровочной теории.

Точно также, как уравнения Янга–Миллса, уравнения Зайберга–Виттена связаны с вариационным принципом. Мы определяем вещественнозначный функционал на пространстве

$$\mathscr{A} = \{(A,\, \psi) \colon A \text{ — связность на } L,\ \psi \in \Gamma(W_+ \otimes L)\},$$

с помощью формулы

$$S(A,\, \psi) = \int_M \big[|D_A\psi|^2 + |F_A^+ - \sigma(\psi)|^2\big]dV, \tag{3.4}$$

где dV обозначает элемент объема на M. Ясно, что абсолютный минимум этого функционала достигается на решениях (3.2), когда эти решения существуют.

Из самосопряженности D_A и формулы Вейценбека следует, что

$$S(A,\, \psi) = \int_M \big[|D_A\psi|^2 + |F_A^+|^2 - 2\langle F_A^+, \sigma(\psi)\rangle + |\sigma(\psi)|^2\big]dV =$$

$$= \int_M \Big[|D_A\psi|^2 + |F_A^+|^2 + \sum_{i<j} F_A^+(e_i,\, e_j)\langle\psi,\, ie_i e_j\,\psi\rangle + |\sigma(\psi)|^2\Big]dV =$$

$$= \int_M \Big[|\nabla^A\psi|^2 + \frac{s}{4}|\psi|^2 + |F_A^+|^2 + |\sigma(\psi)|^2\Big]dV.$$

В частности, если скалярная кривизна s строго положительна, все члены в последнем выражении неотрицательны, и ненулевого решения уравнений Зайберга–Виттена не существует. Более того, поскольку

$$|\sigma(\psi)|^2 = \frac{1}{2}|\psi|^4,$$

мы заключаем, что если (A, ψ) — решение уравнений Зайберга–Виттена, то

$$\int_M |F_A^+|^2 dV \leqslant \int_M \Big[-\frac{s}{4}|\psi|^2 - \frac{1}{2}|\psi|^4\Big]dV \leqslant \int_M \frac{s^2}{32}dV. \tag{3.5}$$

В нескольких следующих разделах мы будем изучать свойства пространства решений уравнений Зайберга–Виттена. Мы увидим, что в общем случае пространство модулей решений возмущенных уравнений Зайберга–Виттена является компактным конечномерным многообразием.

Замечание. Возможны несколько соглашений. Например, если $(A,\, \psi)$ — решение (3.2), то $(A,\, c\psi)$ есть решение уравнений

$$D_A^+\psi = 0, \quad F_A^+ = c^2\sigma(\psi),$$

и наоборот (во всех случаях, когда c — положительная постоянная). Поэтому теория новой системы уравнений полностью эквивалентна теории для исходной, и вопрос о том, какую постоянную использовать, является просто делом вкуса.

3.2. Пространство модулей

Мы выбираем «базовую связность» d_{A_0} в L так, что наше конфигурационное пространство превращается в

$$\mathscr{A} = \{(d_{A_0} - ia,\, \psi)\colon a \in \Omega^1(M),\, \psi \in \Gamma(W_+ \otimes L)\}.$$

Как и в параграфе 1.7 группа калибровочных преобразований

$$\mathscr{G} = \mathrm{Map}(M,\, S^1) = \{\text{отображения } g\colon M \to S^1\}$$

действует на $\mathscr{A}$ посредством

$$\big(g, (d_{A_0} - ia, \psi)\big) \mapsto (d_{A_0} - ia + gd(g^{-1}), g\psi).$$

В случае, когда M односвязно, каждый элемент $g \in \mathscr{G}$ имеет глобальный логарифм u, поэтому мы можем написать

$$g = e^{iu}, \quad u\colon M \to R,$$

и действие $\mathscr{G}$ на $\mathscr{A}$ упрощается до

$$\big(g, (d_{A_0} - ia, \psi)\big) \mapsto (d_{A_0} - i(a + gu), e^{iu}\psi).$$

Как мы видели в параграфе 1.7, $\mathscr{G}$ обладает подгруппой «базисных калибровочных преобразований»

$$\mathscr{G}_0 = \{g \in \mathscr{G}\colon g(p_0) = 1\},$$

где p_0 есть выбранная базисная точка в M. Важность группы $\mathscr{G}_0$ обусловлена тем, что она действует свободно на $\mathscr{A}$. Пусть $\widetilde{\mathscr{B}} = \mathscr{A}/\mathscr{G}_0$.

Предложение. *Если M односвязно, то каждый элемент $\widetilde{\mathscr{B}}$ имеет единственный представитель вида*

$$(d_{A_0} - ia, \psi), \qquad \text{где } \delta a = 0.$$

Доказательство существования: достаточно найти функцию $u\colon M \to R$ такую, что $\delta(a + du) = 0$. Иными словами, достаточно найти элемент $u \in \Omega^0(M)$ такой, что

$$\Delta u = \delta(du) = -\delta a, \tag{3.6}$$

что представляет собой просто уравнение Пуассона. Чтобы решить его, мы используем теорию Ходжа: теорема Стокса дает

$$\int\limits_M 1 \wedge \star(\delta a) = \int\limits_M d(\star a) = 0,$$

поэтому δa лежит в ортогональном дополнении относительно L^2 скалярного произведения $(\,,\,)$ к пространству $\mathscr{H}^0(M)$ постоянных функций на M. В силу того, что это также ортогональное дополнение к образу Δ по теореме Ходжа, решение u уравнения (3.6) действительно существует.

Доказательство единственности: если

$$(d_{A_0} - ia_1, \psi_1), \quad (d_{A_0} - ia_2, \psi_2)$$

— два элемента $\mathscr{A}$, эквивалентные относительно действия $\mathscr{G}_0$, такие, что δa_1 и δa_2 оба нулевые, то существует отображение $u\colon M \to R$ такое, что $a_1 - a_2 = du$ и, следовательно,

$$\begin{aligned}(a_1 - a_2,\, a_1 - a_2) &= (du,\, a_1 - a_2) = \\ &= (u,\, \delta(a_1 - a_2)) = 0 \;\Rightarrow\; a_1 - a_2 = 0.\end{aligned}$$

Поэтому в односвязном случае $\widetilde{\mathscr{B}}$ находится во взаимнооднозначном соответствии с линейным пространством $\mathscr{A}$:

$$\widetilde{\mathscr{B}} \cong \{(d_{A_0} - ia,\, \psi)\colon a \in \Omega^1(M),\, \psi \in \Gamma(M_+ \otimes L), \delta a = 0\}. \tag{3.7}$$

Тем не менее, в действительности мы хотим профакторизовать по полной калибровочной группе, и теперь мы встретили существенное различие между теорией Зайберга–Виттена и абелевой калибровочной теорией: вместо тривиального действия группа $U(1)$ постоянных калибровочных преобразований действует свободно на $\widetilde{\mathscr{B}}$ за исключением точек $(d_{A_0} - ia, 0)$. Фактор-пространство $\mathscr{B} = \mathscr{A}/\mathscr{G}$ относительно полной калибровочной группы будет иметь особенности в «приводимых» элементах $(d_{A_0} - ia, 0)$. Иногда мы можем избежать приводимых элементов с помощью вырезания этих особых точек и положив

$$\mathscr{A}^* = \{(d_{A_0} - ia,\, \psi) \in \mathscr{A} \colon \psi \neq 0\}, \quad \widetilde{\mathscr{B}}^* = \mathscr{A}^*/\mathscr{G}_0, \quad \mathscr{B}^* = \mathscr{A}^*/\mathscr{G}.$$

Мы хотели бы представлять $\mathscr{B}^*$ как бесконечномерное многообразие, смоделированное над гильбертовым или банаховым пространством, как описано в [24]. Чтобы осуществить это строго, нам необходимо пополнить наши пространства сечений — также как в известной теории Янга–Миллса — по отношению к подходящим соболевской нормам. Мы даем здесь только основные определения и отсылаем читателя к книгам [16] или [14] за более детальным изложением «соболевских пополнений».

Если E есть гладкое $O(m)$- или $U(m)$-расслоение над компактным римановым многообразием M со связностью d_A, мы можем использовать связность Леви-Чивита на TM для определения связностей (также обозначаемых через d_A) на расслоениях $\otimes^k T^*M \otimes E = \mathrm{Hom}(\otimes^k TM, E)$. Если $\sigma \in \Gamma(E)$, мы можем определить

$$d_A^k \sigma = (d_A \circ \ldots \circ d_A)\sigma \in \Gamma(\mathrm{Hom}(\otimes^k TM,\, E)).$$

Для $p > 1$ положим

$$||\sigma||_{p,k} = \left[\int_M \left[|\sigma|^p + |d_A\sigma|^p + \ldots + |d_A^k\sigma|^p\right] dV\right]^{(1/p)}.$$

Можно проверить, что это есть норма на $\Gamma(E)$, и мы обозначаем $L_k^p(E)$ пополнение $\Gamma(E)$ по этой норме. Изменение римановой метрики, послойной метрики на E или связности d_A заменяет нормы на $\Gamma(E)$ на эквивалентные нормы, и, следовательно, не влияет на получающееся пополнение.

Для всех значений p $L^p_k(E)$ есть банахово пространство и оно является гильбертовым пространством, если $p = 2$. Пространства $L^p_k(E)$ называются *пространствами Соболева.*

Вот несколько ключевых результатов из функционального анализа (описанные более детально в дополнении к книге Дональдсона и Кронхаймера [14]): в случае, когда базовое многообразие имеет размерность четыре, теорема вложения Соболева утверждает, что если $k - (4/p) > l$, то имеется непрерывное вложение

$$L^p_k(E) \to C^l(E),$$

в пространство C^l-гладких сечений E. Теорема Реллиха утверждает, что вложение

$$L^p_{k+1}(E) \to L^p_k(E)$$

компактно для всех p и k; имеется в виду, что последовательность σ_i, ограниченная в L^p_{k+1} обладает подпоследовательностью, сходящейся в L^p_k. При $k - (4/p) > 0$ теоремы умножения говорят, что имеются непрерывные операции умножения

$$L^p_k(E) \times L^p_k(E) \to L^p_k(E \otimes F).$$

Поэтому для p и k в этом диапазоне и для тривиального линейного расслоения E $L^p_k(E)$ является банаховой алгеброй.

После того, как мы сделали эти приготовления, мы можем положить

$$\widetilde{\mathscr{B}}^p_k = \{(d_{A_0} - ia, \psi)\colon a \in L^p_k(T^*M), \psi \in L^p_k(W_+ \otimes L), \delta a = 0\}.$$

Аналогично, мы можем определить $\mathscr{A}^p_k$

$$\mathscr{G}^p_{k+1} = L^p_k(\mathrm{End}(E)) \cap C^0(M,\, S^1),$$

где $k + 1 - (4/p) > 0$, и так далее. Можно показать, что $\mathscr{G}^p_{k+1}$ является бесконечномерной группой Ли, которая действует гладко на $\mathscr{A}^p_k$.

С этих пор, когда мы будем использовать такие пространства, как $\mathscr{A}, \mathscr{B}^*$ или $\mathscr{G}$, подходящее соболевское пополнение будет подразумеваться. Мы будем включать индексы p и k

только, когда их точные значения важны для ясности изложения.

После соболевского пополнения $\widetilde{\mathscr{B}}^*$ может быть проинтерпретировано, как S^1 расслоение над бесконечномерным многообразием $\mathscr{B}^*$. Точно также, как $\pi_k(S^n) = 0$ для $k < n$, k-я гомотопическая группа бесконечномерной сферы должна зануляться при всех k. Поэтому $\mathscr{A}^*$, которое гомотопически эквивалентно бесконечномерному векторному пространству без одной точки, должно иметь гомотопические группы точки. Если M односвязно, $\mathscr{G}_0$ является также стягиваемым, и, следовательно, $\widetilde{\mathscr{B}}^*$ имеет гомотопические группы точки. Из точной гомотопической последовательности расслоения

$$S^1 \to \widetilde{\mathscr{B}}^* \to \mathscr{B}^* \tag{3.8}$$

следует, что $\mathscr{B}^*$ является пространством $K(Z, 2)$, точно также, как $P^\infty C$.

Мы можем определить комплексное линейное расслоение E над $\mathscr{B}^*$, которое при гомотопической эквивалентности $P^\infty C \to \mathscr{B}^*$ имеет своим прообразом универсальное расслоение. Тогда $\widetilde{\mathscr{B}}^*$ может быть отождествлено с расслоением векторов единичной длины в E.

Определение. *Пространство модулей монополей* — это

$$\mathscr{M} = \{[A, \psi] \in \mathscr{B} \colon (A, \psi) \text{ удовлетворяет } (3.2)\},$$

или, более общо, если ϕ — данная автодуальная 2-форма,

$$\mathscr{M}_\phi = \{[A, \psi] \in \mathscr{B} \colon (A, \psi) \text{ удовлетворяет } (3.3)\}.$$

Используя (3.7), мы видим, что последнее пространство является фактор-пространством

$$\begin{gathered}\widetilde{\mathscr{M}}_\phi = \{(d_{A_0} - ia, \psi) \in \Omega^1(M) \times \Gamma(W_+ \otimes L) \colon \delta a = 0 \\ \text{и } (d_{A_0} - ia, \psi) \text{ удовлетворяет } (3.3)\}\end{gathered}$$

по действию S^1. Мы покажем, что $\widetilde{\mathscr{M}}_\phi$ является конечномерным подмногообразием линейного пространства $\mathscr{B}$, кроме возможных сингулярностей в точках, где $\psi = 0$.

3.3. Компактность пространства модулей

Первым замечательным свойством пространства модулей $\mathcal{M}$ или $\mathcal{M}_\varphi$ является их компактность, как мы сейчас покажем, следуя подходу Кронхаймера и Мровки [23].

Лемма [23]. *Если $(A,\ \psi)$ есть решение уравнений Зайберга–Виттена с не равным нулю тождественно ψ, и максимальное значение $|\psi|$ достигается в точке $p \in M$, тогда*

$$|\psi|^2(p) \leqslant -\frac{1}{4}s(p),$$

где s — скалярная кривизна.

Доказательство.

Ограничение лапласиана Ходжа на нуль-формы или функции может быть выражено как

$$\Delta = -\frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{i,j=1}^{4}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(g^{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\Big),$$

где g_{ij} — компоненты метрики по отношению к координатам $(x_1,\ \ldots,\ x_4)$ и $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$. Заметим, что $\Delta(f) \geqslant 0$ в точке локального максимума f и, следовательно, поскольку p является точкой максимума для $|\psi|^2$,

$$\frac{1}{2}\Delta(|\psi|^2)(p) \geqslant 0.$$

Поскольку d_A — метрическая связность,

$$-\langle d_A\psi,\ d_A\psi\rangle(p) + \mathrm{Re}\langle\psi,\Delta^A\psi\rangle(p) \geqslant 0 \Rightarrow \mathrm{Re}\langle\psi,\Delta^A\psi\rangle(p) \geqslant 0.$$

где Δ^A — лапласиан на векторном расслоении, определенный посредством (2.13).

Из формулы Вейценбека следует, что

$$0 = D_A^2\psi = \Delta^A\psi + \frac{s}{4}\psi - \sum_{i<j}F_A(e_i,\ e_j)(ie_i\cdot e_j\cdot\psi).$$

Возьмем скалярное произведение с ψ и применим второе из уравнений Зайберга–Виттена для того, чтобы получить

$$-\frac{s}{4}|\psi|^2 - \frac{1}{2}\sum_{i<j}|F_A^+(e_i,\ e_j)|^2 = \langle\psi,\Delta^A\psi\rangle(p) \geqslant 0.$$

Поэтому
$$-\frac{s(p)}{2}|\psi(p)|^2 \geqslant |F_A^+(p)|^2 = 2|\psi(p)|^4.$$

Чтобы получить желаемый результат, разделим на $|\psi(p)|^2$.

Лемма показывает, что область значений ψ содержится в компактном подмножестве $W_+ \otimes L$. Для того, чтобы показать, что само пространство модулей является компактным, нам, тем не менее, необходимо использовать соболевское пополнение, описанное в предыдущем разделе наряду со следующим ключевым неравенством из теории дифференциальных уравнений в частных производных: если D — оператор Дирака или оператор Дирака с коэффициентами (такой, как $d+\delta$), то
$$||\sigma||_{p,k+1} \geqslant c\big[||D\,\sigma||_{p,k} + ||\sigma||_{p,k}\big], \tag{3.9}$$

где c — постоянная. Член $||\sigma||_{p,k}$ может быть опущен в случае, когда D имеет тривиальное ядро. В случае $p = 2$ неравенство (3.9) часто используется для доказательства теоремы Ходжа. Общий случай обсуждается в дополнении к книге [14] или в дополнении В книги [27].

Теорема компактности. *Если M односвязно, то для любого выбора автодуальной 2-формы ϕ, пространство модулей решений $\widetilde{\mathcal{M}}_\varphi$ возмущенных уравнений Зайберга–Виттена является компактным.*

Замечание. Односвязность M в действительности не является необходимой, но делает доказательство особенно простым.

Доказательство.

Мы выбираем базовую связность A_0 так, что любая унитарная связность на L имеет вид $d_{A_0} - ia$ для некоторой $a \in \Omega^1(M)$. Нам необходимо показать, что любая последовательность $[d_{A_0} - ia_i, \psi_i]$ решений возмущенных уравнений Зайберга–Виттена обладает сходящейся подпоследовательностью.

Накладывание калибровочного условия $\delta a = 0$ приводит к следующему виду возмущенных уравнений Зайберга–Виттена
$$\begin{cases} D_{A_0}\psi - ia\cdot\psi = 0, \\ (da)^+ + F_{A_0}^+ = \sigma(\psi) + \phi, \\ \delta a = 0, \end{cases}$$

или, эквивалентно,

$$\begin{cases} D_{A_0}\psi = ia\cdot\psi, \\ (da)^+ = \sigma(\psi) + \phi - F^+_{A_0}, \\ \delta a = 0, \end{cases}$$

В левой части этой системы появляются два оператора Дирака D_{A_0} и $(\delta \otimes d^+)$, второй из которых есть оператор Дирака с коэффициентами из W_+, описанный в параграфе 2.7. Из леммы вытекает, что ψ_i ограничены в C^0 и, следовательно, в каждом L^p. Поскольку M односвязно, оператор

$$\delta\otimes d^+ : \Omega^1(M) \to \Omega^0(M) \otimes \Omega^2_+(M)$$

имеет тривиальное ядро. Поэтому из (3.9), примененного к последним двум уравнениям, следует, что a_i ограничено в L^p_1 для всех p. В частности, беря $p > 4$, мы видим, что они ограничены в C^0 по теореме вложения Соболева, и, следовательно, $a_i\psi_i$ ограничены в L^p для всех p. Далее, из (3.9), примененного к первому уравнению, следует, что ψ_i ограничено в L^p_1 для всех p. Если $p > 4$, то L^p_1 находится в диапазоне банаховых алгебр, и, таким образом,

$$a_i,\ \psi_i \text{ ограничены в } L^p_1 \Rightarrow a_i\,\psi_i,\ \sigma(\psi_i) \text{ ограничены в } L^p_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow a_i,\ \psi_i \text{ ограничены в } L^p_2.$$

Аналогично,

$$a_i,\ \psi_i \text{ ограничены в } L^p_k \Rightarrow a_i\,\psi_i,\ \sigma(\psi_i) \text{ ограничены в } L^p_k \Rightarrow \\ \Rightarrow a_i,\ \psi_i \text{ ограничены в } L^p_{k+1}.$$

Поэтому мы можем применить принцип математической индукции и получить, что a_i, ψ_i ограничены в L^p_k для всех k. Далее, теорема Реллиха доставляет нам подпоследовательность, сходящуюся в L^p_k для всех k, и последовательность должна сходиться в C^l для всех l по теореме вложения Соболева. Это доказывает компактность.

3.4. Трансверсальность

Второе замечательное свойство пространства модулей $\widetilde{\mathcal{M}}_\phi$ состоит в том, что для общего выбора ϕ оно является гладким многообразием, кроме, возможно, в приводимых элементах. Для того, чтобы это доказать, нам необходимо использовать бесконечномерную версию Смейла (Smale) теоремы Сарда (Sard) [36].

Известный метод построения гладких подмногообразий конечномерного гладкого многообразия M^m состоит в следующем: пусть $F\colon M^m \to N^n$ — гладкое отображение, имеющее q регулярным значением. Тогда по теореме о неявной функции $F^{-1}(q)$ является гладким вложенным подмногообразием M^m, и его размерность равна $m-n$. Это утверждение дополняет теорема Сарда, утверждающая, что почти все $q \in N^n$ являются регулярными значениями.

Для того, чтобы применить эти идеи к нелинейным дифференциальным уравнениям в частных производных, нам необходимо обобщить их на отображения между многообразиями, смоделированными над бесконечномерными банаховыми пространствами. Чтобы сделать это, нам необходимо понятие фредгольмова отображения, введенное Смейлом. Предположим, что E_1 и E_2 — рефлексивные банаховы пространства. Непрерывное линейное отображение $T\colon E_1 \to E_2$ — *фредгольмово*, если

1. ядро T конечномерно,

2. образ T замкнут, и

3. образ T имеет конечную коразмерность в E_2.

Индекс фредгольмова отображения T определяется как

$$\dim\bigl(\mathrm{Ker}(T)\bigr) - \mathrm{codim}\bigl(T(E_1)\bigr) = \dim\bigl(\mathrm{Ker}(T)\bigr) - \dim\bigl(\mathrm{Ker}(T^*)\bigr),$$

где $T^*\colon E_2^* \to E_1^*$ — сопряженный к T.

Например, если M является компактным четырехмерным многообразием и

$$D_A^+\colon \Gamma(W_+ \otimes L) \to \Gamma(W_- \otimes L)$$

— оператор Дирака с коэффициентами в линейном расслоении L, D_A^+ продолжается до непрерывного линейного отображения

$$D_A^+\colon L^p_{k+1}(W_+ \otimes L) \to L^p_k(W_- \otimes L),$$

для любого выбора p и k. Это продолжение является фредгольмовым отображением ([25], теорема 5.2, страница 193), и его фредгольмов индекс равен удвоенному комплексному индексу, определенному выше, который вычисляется по теореме Атьи–Зингера об индексе.

Предположим теперь, что $F\colon M_1 \to M_2$ — гладкое *нелинейное* отображение из банахова многообразия M_1 в банахово многообразие M_2. Мы говорим, что F является *фредгольмовым* индекса k, если

$$dF(p)\colon T_pM_1 \to T_{F(p)}M_2$$

— фредгольмово отображение индекса k для любого $p \in M_1$. Заметим, что гладкое отображение $F\colon M_1 \to M_2$ между *конечномерными* многообразиями автоматически является фредгольмовым индекса $\dim M_1 - \dim M_2$.

Говорят, что точка $q \in M_2$ является *регулярным значением* F, если $dF(p)$ сюръективно для каждого $p \in F^{-1}(q)$; иначе она называется *критическим значением.* Из теоремы о неявных функциях на банаховых пространствах (см. [24]) следует, что, если $q \in M_2$ — регулярное значение, то $F^{-1}(q)$ представляет собой гладкое подмногообразие M_1 также, как и в конечномерном случае. Более того, $F^{-1}(q)$ конечномерно, его размерность равна фредгольмову индексу F.

В завершении, подмножество Банахова многообразия M_2 называется *остаточным*, если оно есть счетное пересечение открытых плотных множеств. Напомним, что теорема Бэра о категориях утверждает, что остаточное множество в полном метрическом пространстве плотно. По традиции элемент остаточного подмножества M_2 называют *общим элементом.*

После всех этих приготовлений мы можем теперь сформулировать обобщение Смейла теоремы Сарда [36]:

Теорема Сарда–Смейла. *Если $F\colon M_1 \to M_2$ является C^k фредгольмовым отображением между сепарабельными банаховыми многообразиями и $k > \max(0,$ индекс $F)$, то множество регулярных значений F — остаточное в M_2.*

Другими словами, общий элемент M_2 является регулярным значением. В наших приложениях, предположение сепарабельности будет автоматически иметь место, поскольку все многообразия, смоделированные над L^p_k пространствах, которые мы построили, являются сепарабельными. Идея доказательства теоремы Сарда–Смейла состоит в редуцировании к конечномерной версии теоремы Сарда; мы рекомендуем читателю [36] в отношении дальнейших деталей.

Нам будет необходима еще одна теорема из теории эллиптических дифференциальных уравнений с частными производными, теорема об однозначном продолжении, которую можно найти в [2] и параграфе 8 из книги [7]. Эта теорема утверждает, что если ψ — решение уравнения $D_A^+\psi = 0$ на связном многообразии, тогда ψ не может зануляться на открытом множестве, если только она не есть тождественный нуль. Это аналогично знакомому свойству голоморфных функций. (В самом деле, оператор Дирака можно трактовать как обобщение оператора Коши–Римана.)

В качестве первого шага в направлении главных теорем этого раздела мы представляем следующее простое применение теоремы Сарда–Смейла:

Лемма. *Предположим, что индекс оператора Дирака D_A^+ неотрицателен, где A принимает значения в пространстве унитарных связностей на L. Тогда для общего выбора A*

$$D_A^+ : \Gamma(W_+ \otimes L) \to \Gamma(W_- \otimes L)$$

является сюръективным.

Доказательство.

Определим

$$F : \mathscr{A} \to \Gamma(W_- \otimes L) \quad \text{посредством} \quad F(A, \psi) = D_A^+\psi.$$

Дифференциал F в элементе (A, ψ) имеет вид

$$dF(A, \psi)(a, \psi') = D_A^+\psi' - ia \cdot \psi,$$

где точка обозначает клиффордово умножение между 1-формой a и спинорным полем ψ. Мы утверждаем, что если (A, ψ) есть решение уравнений Зайберга–Виттена с $\psi \neq 0$, тогда $dF(A, \psi)$ сюръективно.

Заметим вначале, что в точках, где $\psi \neq 0$, линейное отображение $a \to a \cdot \psi$ инъективно (поскольку $a \cdot a \cdot \psi = -|a|^2\psi$) и, следовательно, оно является изоморфизмом (поскольку

T^*M и $W_+ \otimes L$ имеет одинаковую размерность). Если ψ не есть тождественный нуль, оно должно быть ненулевым на открытом множестве U, и отображение $a \to a \cdot \psi$ должно быть изоморфизмом для сечений с носителем в этом множестве.

Мы выберем $p \geqslant 2$ и $k \geqslant 0$ так, чтобы $L^p_k(W_- \otimes L)$ было плотным линейным подпространством $L^2(W_- \otimes L)$. Поэтому для того, чтобы показать сюръективность $dF(A, \psi)$, достаточно проверить, что, если $\sigma \in L^2(W_- \otimes L)$ перпендикулярно к образу $dF(A, \psi)$, оно должно быть нулем. Но в свете предыдущего параграфа из этого условия следует, что $(\tau, \sigma) = 0$ для всех элементов $\tau \in L^2(W_- \otimes L)$ с носителем в U, где $(\cdot, \cdot)$ обозначает L^2 скалярное произведение. Поскольку $D^-_A \sigma = 0$ в силу самосопряженности оператора Дирака, из теоремы об однозначном продолжении следует, что σ есть тождественный нуль. Поэтому $dF(A, \psi)$ действительно сюръективно и наше утверждение установлено.

Из теоремы о неявной функции вытекает теперь, что

$$\mathscr{N} = \{(A,\, \psi) \in \widetilde{\mathscr{B}}^p_k \colon D^+_A \psi = 0,\; \psi \neq 0\}$$

является подмногообразием $\widetilde{\mathscr{B}}^p_k$, чье касательное пространство в точке $(A,\, \psi)$ есть

$$T_{(A,\psi)}\mathscr{N} = \{(a,\, \psi') \colon D^+_A \psi' - ia \cdot \psi = 0\}.$$

Мы утверждаем, что отображение

$$\pi \colon \mathscr{N} \to \{\text{унитарные связности на } L\}, \quad \pi(A,\, \psi) = A,$$

является фредгольмовым. Действительно, ядро $d\pi$ есть множество (a, ψ') в касательном пространстве, удовлетворяющих условию $a = 0$, которое есть просто ядро D^+_A. С другой стороны, образ $d\pi$ включает все 1-формы a такие, что $a{\cdot}\psi$ находится в образе D^+_A, замкнутом подпространстве конечной коразмерности, которая $\leqslant \operatorname{Ker}(D^-_A))$. Поэтому π — фредгольмово и его фредгольмов индекс не меньше индекса D^+_A.

Выберем A регулярным значением π. Тогда $\pi^{-1}(A)$ представляет собой подмногообразие, чья размерность не меньше индекса D^+_A, в то время как $\pi^{-1}(A) \cup \{(A,\, 0)\}$ есть множество пар $(A,\, \psi)$ таких, что ψ лежит в линейном пространстве решений $D^+_A \psi = 0$. Определение π показывает, что для общего выбора связанности A, D^+_A — сюрьективно, и лемма доказана.

Теорема трансверсальности 1. *Пусть M — компактное односвязное гладкое четырехмерное многообразие со* spin^c*-структурой. В частном случае $b_+(M) = 0$ мы делаем дополнительное предположение о том, что индекс оператора Дирака D_A^+, ассоциированного со* spin^c*-структурой, неотрицателен. Тогда для общего выбора автодуальной 2-формы ϕ $\widetilde{\mathscr{M}}_\phi$ является ориентированным гладким многообразием, размерность которого дается формулой*

$$\dim(\widetilde{\mathscr{M}}_\phi) = 2(\textit{индекс } D_A^+) - b_+. \tag{3.10}$$

Доказательство.

За исключением ориентации доказательство аналогично доказательству предыдущей леммы. Определим

$$F\colon \widetilde{\mathscr{B}} \times \Omega^2_+(M) \to \Gamma(W_- \otimes L) \times \Omega^2_+(M)$$

посредством

$$F(A, \psi, \phi) = (D_A^+\psi, F_A^+ - \sigma(\psi) - \phi).$$

Дифференциал F в (A, ψ, ϕ) имеет вид

$$dF(A, \psi, \phi)(a, \psi', \phi') = (D_A^+\psi' - ie\cdot\psi, (da)^+ - 2\sigma(\psi, \psi') - \phi'),$$

где

$$\sigma(\psi, \psi') = 2i \text{ бесследовая эрмитова часть } \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} (\overline{\psi}_1' \ \overline{\psi}_2').$$

Мы утверждаем, что если (A, ψ, ϕ) есть решение уравнения $F = 0$ с $\psi \neq 0$, то $dF(A, \psi, \phi)$ сюръективно. Действительно, меняя ϕ', мы видим, что образ дифференциала $dF(A, \psi, \phi)$ расслаивается на сдвиги при параллельных переносах линейного пространства $\{0\} \oplus \Omega^2_+(M)$. Поэтому достаточно показать, что первая компонента сюръективна, когда мы полагаем $\phi' = 0$. Предположим, что $(\sigma, 0)$ — L^2 сечение $(W_- \otimes L) \oplus \Lambda^2_+$, перпендикулярное

$$dF(A, \psi, \phi)(T_{[A,\psi]}\widetilde{\mathscr{B}} \times \{0\}).$$

Меняя a, мы можем рассуждать как в доказательстве леммы: σ ортогонально всем сечениям $W_- \otimes L$ с носителем в непустом открытом множестве $U = \{p\colon \psi(p) \neq 0\}$, поэтому σ должно зануляться на U. Меняя ψ', мы видим, что $D_A^- \sigma = 0$, поэтому из теоремы единственности продолжения следует вновь, что σ тождественно нулевое. Поэтому $dF(A, \psi, \phi)$ сюръективно, кроме, возможно, в точке $\psi = 0$.

Положим теперь

$$\mathscr{U} = \{\phi \in \Omega_+^2 : \phi = F_A^+ \text{ для связности } A \Rightarrow D_A^+ \text{ сюръективно}\}.$$

так что $\phi \in \mathscr{U}$ влечет сюръективность $dF(A, \psi, \phi)$, даже если $\psi = 0$. Заметим, что если $b_+ > 0$, $\mathscr{U}$ содержит дополнение аффиного подпространства Π коразмерности b_+, описанного в предложении из параграфа 1.9 и, следовательно, открыто и плотно. С другой стороны, если $b_+ = 0$ предположение неотрицательности индекса D_A^+ гарантирует $\mathscr{U} = \Omega_+^2$ по предыдущей лемме. В любом случае, $\mathscr{U}$ является открытым и плотным в Ω_+^2. Более того, по теореме о неявной функции,

$$\mathscr{N} = \{(A, \psi, \phi) \in \widetilde{\mathscr{B}} \times \mathscr{U} : F(A, \psi, \phi) = 0\}$$

является подмногообразием $\widetilde{\mathscr{B}} \times \mathscr{U}$, касательное пространство которого в точке (A, ψ, ϕ) есть

$$T_{(A,\psi,\phi)}\mathscr{N} = \{(a, \psi', \phi')\colon L(a, \psi') = (0, 0, \phi')\},$$

где

$$L(a, \psi') = (D_A^+ \psi' - ia \cdot \psi, \sigma a, (da)^+ - 2\sigma(\psi, \psi')).$$

В этой последней формуле L является эллиптическим оператором

$$L\colon \Gamma(W_+ \otimes L) \oplus \Omega^1(M) \to \Gamma(W_- \otimes L) \oplus \widetilde{\Omega}^0(M) \oplus \Omega_+^2(M),$$

где символ $\widetilde{\Omega}^0(M)$ обозначает пространство гладких функций на M с нулевым интегралом.

Мы утверждаем, что

$$\pi\colon \mathscr{N} \to \Omega_+^2(M), \text{ определенное посредством } \pi(A, \psi, \phi) = \phi,$$

— фредгольмово отображение. Действительно, можно немедленно усмотреть, что ядро $d\pi$ является ядром L, тогда как

$$(\text{образ } d\pi) = \{\phi' \in \Omega^2_+ : (0, 0, \phi') = L(a, \psi') \text{ для некоторых } a, \psi'\} = \\ = (\text{образ } L) \cap (0 \oplus 0 \oplus \Omega^2_+),$$

поэтому образ $d\pi$ замкнут и конечной коразмерности.

Чтобы показать, что коядро $d\pi$ имеет такую же коразмерность, что и коядро L, достаточно показать, что

$$(\Gamma(W_- \otimes L) \oplus \widetilde{\Omega}^0(M) \oplus \{0\}) \cap (\text{образ } L)^\perp = \{0\}. \qquad (3.11)$$

Однако, если

$$(\sigma, u, 0) \in \Gamma(W_- \otimes L) \oplus \widetilde{\Omega}^0(M) \oplus \Omega^2_+(M)$$

перпендикулярно к образу L, тогда $D^-_A\sigma = 0$ и $(ia \cdot \psi, \sigma) = (\delta a, u)$ для всех $a \in \Omega^1(M)$. В частности, $(ib \cdot \psi, \sigma) = 0$ для всех b таких, что $\delta b = 0$. С другой стороны, мы можем определить 1-форму b на M посредством

$$\langle b, a \rangle = \langle ia \cdot \psi, \sigma \rangle$$

и, поскольку $D^+_A\psi = 0$ и $D^-_A\sigma = 0$, из (2.15) следует, что $\delta b = 0$. Поэтому

$$(b, b) = (ib \cdot \psi, \sigma) = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0.$$

Если $b_+ > 0$, мы можем выбрать φ лежащим в дополнении аффинного пространства Π так, что

$$(A, \psi) \in \widetilde{\mathscr{M}_\varphi} \Rightarrow \psi \neq 0.$$

Далее, из того факта, что $\langle ia \cdot \psi, \sigma \rangle = 0$ для всех $a \in \Omega^1(M)$, следует, что $\sigma = 0$ на непустом открытом подмножестве M. Еще раз в силу теоремы об однозначном продолжении $\sigma \equiv 0$ и, следовательно, $(\delta a, u) = 0$ для всех $a \in \Omega^1$. Поэтому $u = 0$ и (3.11) имеет место. Если $b_+ = 0$ и $\psi = 0$, оператор L упрощается до $D^+_A \oplus (\delta \oplus d^+)$; в этом случае первая компонента сюръективна по лемме, тогда как вторая компонента сюръективна в силу теории Ходжа. Поэтому L само является сюръективным, и (3.11) вновь выполняется.

Выберем ϕ регулярным значением π. Тогда $\pi^{-1}(\phi)$ является подмногообразием $\mathcal{N}$, размерность которого равна индексу L, совпадающему с индексом

$$L_0 = D_A^+ \oplus \delta \oplus d^+.$$

Нам необходим вещественный индекс, поэтому индекс D_A^+, определенный как индекс Атьи – Зингера, должен быть удвоен в данных вычислениях. Мы находим, что

$$\text{вещественный индекс } L = 2(\text{комплексный индекс } D_A^+) - b_+ = \\ = -\frac{\tau(M)}{4} + c_1^2(L)[M] - b_+.$$

Поэтому пространство модулей $\widetilde{\mathcal{M}}_\phi = \pi^{-1}(\phi)$ действительно является гладким подмногообразием требуемой размерности.

Ориентация пространства модулей. Чтобы завершить доказательство теоремы трансверсальности, нам необходимо лишь показать, что пространство модулей $\widetilde{\mathcal{M}}_\phi$ ориентировано. Это требует результатов из теории фредгольмовых операторов (представленных, например, в дополнении к книге [3] или в главе III, § 7 книги [25]).

Зти результаты включены в понятие детерминантного линейного расслоения для семейства фредгольмовых операторов, зависящих от параметра со значениями на гладком многообразии.

Для того, чтобы сформулировать это точно, предположим, что $p \to L(p)$ предположим, что $p \to L(p)$ является семейством фредгольмовых операторов на вещественном гильбертовом пространстве H, скажем, $L(p)\colon H \to H$, зависящее непрерывно от p, где p пробегает компактное конечномерное многообразие M. Тогда по предложению А.5 на странице 156 из [3], существует замкнутое линейное подпространство $V \subset H$ конечной коразмерности, что

1. V не пересекает ядро $L(p)$ для любого $p \in M$.

2. $L(p)(V)$ имеет постоянную коразмерность и $p \to \to H/(L(p)(V))$ является конечномерным векторным расслоением E над M.

3. Линейные отображения $L(p)$ индуцируют отображение векторных расслоений $\widetilde{L}\colon (H/V) \times M \to E$.

Мы можем определить далее *детерминантное линейное расслоение* L посредством

$$\det(L) = \Lambda^{\max}\big((H/V) \times M\big) \otimes \big[\Lambda^{\max}(E)\big]^*,$$

где max обозначает ранг рассматриваемого векторного расслоения.

Мы утверждаем, что детерминантное линейное расслоение не зависит от выбора V. Действительно, если V_1 — другой выбор линейного подпространства, удовлетворяющего указанным выше условиям, мы можем предположить, не теряя общности, что $V_1 \subset V$, и тогда

$$\frac{H}{V_1} \cong \frac{H}{V} \oplus \frac{V}{V_1}, \quad E_1 \cong E \oplus \frac{V}{V_1},$$

где E_1 — линейное расслоение, слой которого над точкой p есть $H/(L(p)(V))$. Поскольку

$$\Lambda^{\max}(W_1 \oplus W_2) \cong \Lambda^{\max}(W_1) \oplus \Lambda^{\max}(W_2),$$
$$\Lambda^{\max}(W) \oplus \Lambda^{\max}(W^*) \cong \Theta,$$

где Θ — тривиальное линейное расслоение, мы видим, что

$$\Lambda^{\max}\big((H/V_1)\times M\big) \otimes \big[\Lambda^{\max}(E_1)\big]^* \cong$$
$$\cong \Lambda^{\max}\big((H/V)\times M\big)\otimes\big[\Lambda^{\max}(E)\big]^*.$$

Теперь мы можем воспользоваться точной последовательностью

$$0 \to \operatorname{Ker}\big(L(p)\big) \to \frac{H}{V} \to \frac{H}{L(p)(V)} \to \operatorname{Coker}\big(L(p)\big) \to 0,$$

чтобы показать, что имеется естественный изоморфизм

$$\det(L)(p) \cong \Lambda^{\max}\big(\operatorname{Ker}(L(p))\big) \otimes \Big[\Lambda^{\max}\big(\operatorname{Coker}(L(p))\big)\Big]^*.$$

Ключевой момент этого построения заключается в том, что детерминантное линейное расслоение семейства эллиптических операторов L корректно определено, даже если размерности ядер и коядер меняются от точки к точке.

Нетрудно распространить приведенное выше обсуждение на семейства фредгольмовых отображений, $L(p)\colon H_1 \to H_2$, между двумя различными гильбертовыми пространствами. В нашем случае мы имеем семейство *сюръективных* линейных операторов $(A, \psi) \in \widetilde{\mathscr{M}}_\phi \mapsto L_{A,\psi}$, фредгольмовых на L^2_k пополнениях с

$$\operatorname{Ker}(L_{A,\psi}) = T_{A,\psi}(\widetilde{\mathscr{M}}_\phi).$$

Следовательно, если d — размерность пространства модулей, детерминантное линейное расслоение L является наивысшей внешней степенью касательного расслоения $\widetilde{\mathscr{M}}_\phi$

$$\det(L) = \Lambda^d \operatorname{Ker}(L) = \Lambda^d(\widetilde{\mathscr{M}}_\phi).$$

Поэтому не обращающееся нигде в нуль сечение $\det(L)$ определит ориентацию $\widetilde{\mathscr{M}}_\phi$.

Если мы определим семейство эллиптических операторов L_t для $t \in [0, 1]$ посредством

$$L_t(a, \psi') = (D_A^+\psi' - ita\cdot\psi,\ \delta a,\ (da)^+ - 2t\sigma(\psi, \psi')),$$

детерминантное линейное расслоение $\det(L_t)$ определено для любого t и зависит непрерывно от t. Поэтому расслоения $\det(L_t)$ все изоморфны, и достаточно построить не обращающееся нигде в нуль сечение $\det(L_0)$, где $L_0 = D_A^+ \oplus \delta \oplus d^+$. Однако

$$\det(L_0) = \det(D_A^+) \otimes \det(\delta \oplus d^+).$$

Первый сомножитель имеет всюду ненулевое сечение, возникающее из ориентаций ядра и коядра D_A^+, определенных комплексным умножением, в то время как второй сомножитель наследует не обращающееся нигде в нуль сечение из ориентации $\mathscr{H}^2_+(M)$. Поэтому $\det(L_0)$ тривиализуется, что в свою очередь тривиализует наивысшую внешнюю степень касательного пространства к пространству модулей, тем самым ориентируя его и заканчивая доказательство теоремы.

Теорема трансверсальности 2. *Пусть M — компактное односвязное гладкое четырехмерное многообразие со $spin^c$-структурой. Если $b_+(M) > 0$, то для общего выбора автодуальной 2-формы φ $\mathscr{M}_\varphi$ является ориентированным гладким многообразием, размерность которого дается формулой*

$$\dim(\mathscr{M}_\varphi) = 2(\text{индекс в } D_A^+) - b_+ - 1,$$

или, эквивалентно,

$$\dim(\mathscr{M}_\varphi) = \langle c_1(L)^2, [M]\rangle - \frac{1}{4}(2\chi(M) + 3\tau(M)). \qquad (3.12)$$

Доказательство. Заметим, что решение возмущенных уравнений Зайберга–Виттена с $\psi = 0$ появится только, если $c_1(L)$ содержит связность с $F_A^+ = \varphi$, и это произойдет для φ, лежащего в подпространстве Π пространства $\Omega_+^2(M)$ коразмерности $b_+ \geqslant 1$ по предложение из § 1.9.

Поэтому данная теорема следует из предыдущей посредством факторизации по свободному действию S^1, которое уменьшает размерность на единицу. Вторая формула для индекса следует из теоремы Атьи–Зингера об индексе, примененной к D_A^+.

Замечание 1. Заметим, что для того, чтобы пространство модулей имело неотрицательную формальную размерность, необходимо

$$\langle c_1(L)^2, [M]\rangle \geqslant \frac{\tau(M)}{4} - b_+ - 1,$$

и, следовательно, для любой унитарной связности на L,

$$\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_M \left[|F_A^+|^2 - |F_A^-|^2\right] dV \geqslant \frac{\tau(M)}{4} - b_+ - 1,$$

или

$$\int\limits_M |F_A^-|^2 dV \leqslant \int\limits_M |F_A^+|^2 dV - (4\pi^2)\left(\frac{\tau(M)}{4} - b_+ - 1\right). \qquad (3.13)$$

Эти рассуждения, вместе с распространением неравенства (3.5) на случай ненулевого φ, показывают, что $\int\limits_M |F_A|^2 dV$ ограничен, и, следовательно, для общего φ пространство модулей, данное теоремой трансверсальности 2, будет пустым множеством, кроме конечного набора линейных расслоений L.

Замечание 2. Как и в случае теоремы компактности, теорема трансверсальности 2 по-прежнему имеет место без предположения об односвязности M, и размерность пространства модулей дается (3.12).

3.5. Форма пересечения

Мы опишем теперь некоторые классические топологические инварианты односвязных четырехмерных многообразий.

Пусть M — компактное односвязное четырехмерное многообразие. *Форма пересечения*

$$Q\colon H^2(M;\, Z)\times H^2(M;\, Z)\to Z$$

может быть определена как композиция $\cup$-умножения

$$H^2(M;\, Z)\times H^2(M;\, Z)\to H^4(M;\, Z)$$

со стандартным изоморфизмом $H^4(M;\, Z)$ на Z, который спаривает элемент $H^4(M;\, Z)$ с ориентирующим классом M.

Форма пересечения также может быть определена с помощью дифференциальных форм и когомологий де Рама. Пусть

$\widetilde{Q}\colon H^2(M;R)\times H^2(M;\, R)\to R$ посредством $\widetilde{Q}([\alpha],[\beta])=\int_M \alpha\wedge\beta.$

В случае односвязного M из теоремы универсальных коэффициентов следует, что

$$H^2(M;\, Z)\cong \operatorname{Hom}(H_2(M;\, Z),\, Z),$$

свободной абелевой группе. Эта группа лежит внутри вещественных когомологий как решетка

$$H^2(M;\, Z)=\{[\alpha]\in H^2(M;\, R)\colon\ \text{интеграл } \alpha \text{ вдоль любой компактной поверхности в } M \text{ есть целое число }\}.$$

Ограничение $\widetilde{Q}$ на $H^2(M;\, Z)$ целозначное, и это ограничение есть определенная ранее форма пересечения.

Наконец, мы можем также рассматривать форму пересечения как определенную на $H_2(M;\, Z)$. Для того, чтобы убедиться в этом, нам необходимо использовать важный факт из топологии четырехмерных многообразий: любой элемент $H_2(M;\, Z)$ может быть представлен компактной ориентированной поверхностью Σ, вложенной в M.

Один из способов доказать это — заметить, что, поскольку M односвязно, из теоремы изоморфизма Гуревича следует, что $H_2(M;\, Z) \cong \pi_2(M)$ и, следовательно, любой элемент $H_2(M;\, Z)$ может быть представлен гладким отображением $f\colon S^2 \to M$. После малого шевеления (если необходимо) мы можем устроить так, чтобы это отображение было погружением с трансверсальными самопересечениями, и эти самопересечения могут быть удалены посредством хирургий, каждая из которых заменяет два пересекающихся диска кольцом. Результат этого таков, что данный элемент $H_2(M;\, Z)$ можно представить вложенной поверхностью, которая, возможно, имеет несколько компонент, каждая из которых может иметь произвольный род.

Используя этот факт, мы можем определить отображение

$$\mu\colon H_2(M;\, Z) \to H^2(M;\, Z)$$

следующим образом. Элемент $H_2(M;\, Z)$ представим компактной ориентированной поверхностью Σ. Эта поверхность Σ лежит в маленькой трубчатой окрестности V, образе при экспоненциальном отображении ε-окрестности нулевого сечения нормального расслоения Σ в M. Форма Тома на тотальном пространстве нормального расслоения, выбранная в соответствии с описанием из параграфа 1.6 имеющей компактный носитель в данной ε-окрестности, может быть преобразована с помощью экспоненциального отображения в замкнутую 2-форму Φ_Σ, имеющую компактный носитель, содержащийся в V. Продолжение Φ_Σ нулем на все M дает замкнутую 2-форму, определенную на M, которую мы по-прежнему обозначаем Φ_Σ. Если Σ' — ориентированная вложенная поверхность в M, имеющая трансверсальное пересечение с Σ, то интеграл Φ_Σ вдоль Σ' будет целым числом, поскольку интеграл формы Тома вдоль любого слоя целочисленный. Это целое число в действительности является индексом пересечения Σ и Σ' как это описано в конце параграфа 1.6. Поэтому класс когомологий де Рама $[\Phi_\Sigma]$ формы Φ_Σ лежит в образе $H_2(M;\, Z)$ относительно коэффициентного гомоморфизма. Мы полагаем

$$\mu([\Sigma]) = [\Phi_\Sigma] \in H^2(M;\, Z).$$

В силу теоремы классификации комплексных линейных расслоений, элемент $H_2(M;\,Z)$ представляет собой первый класс Черна комплексного линейного расслоения L над M. Выберем гладкое сечение $\sigma\colon M \to L$, имеющее трансверсальное пересечение с нулевым сечением и положим

$$Z_\sigma = \sigma^{-1}\,(\text{нулевого сечения}).$$

Если Φ_{Z_σ} — дифференциальная форма, построенная в предшествующем параграфе, интеграл Φ_{Z_σ} вдоль любой компактной ориентированной поверхности Σ' представляет собой индекс пересечения Z_σ с Σ', который есть просто $\langle c_1(L), \Sigma'\rangle$ по следствию из параграфа 1.6. В частности, мы видим, что $[\Phi_{Z_\sigma}] = c_1(L)$ и, следовательно,

$$NZ_\sigma = L|Z_\sigma \tag{3.14}$$

что называют иногда *формулой присоединения* (см. [19], стр. 146). Поэтому $\mu([Z_\sigma]) = c_1(L)$, и μ должно быть сюръективным отображением. В силу того, что $H_2(M;\,Z)$ и $H^2(M;\,Z)$ являются свободными абелевыми группами одинакового ранга, μ есть изоморфизм. (Тот факт, что μ — изоморфизм, представляет собой одно из проявлений двойственности Пуанкаре.)

Если β — гладкая 2-форма на M, то из теоремы Фубини легко вытекает, что

$$\int\limits_M \Phi_\Sigma \wedge \beta = \int\limits_\Sigma i^*\beta,$$

где i в правой части обозначает отображение вложения Σ в M. Поэтому

$$Q(\mu([\Sigma]),\,[\beta]) = \int\limits_\Sigma i^*\beta = \langle[\Sigma],\,[\beta]\rangle.$$

Наконец, мы можем использовать изоморфизм μ для определения формы пересечения на гомологиях

$$Q\colon H_2(M;\,Z) \times H_2(M;\,Z) \to Z \quad \text{посредством}$$
$$Q([\Sigma],\,[\Sigma']) = Q(\mu([\Sigma]),\,\mu([\Sigma'])).$$

Мы имеем тем самым несколько эквивалентных путей рассмотрения Q:

$$Q([\Sigma], [\Sigma']) = \int_M \Phi_\Sigma \wedge \Phi_{\Sigma'} = \int_\Sigma \Phi_{\Sigma'} = \int_{\Sigma'} \Phi_\Sigma =$$
$$= \text{ индекс пересечения } \Sigma \text{ с } \Sigma' ,$$

где Σ и Σ' пересекаются трансверсально. Последняя интерпретация Q служит мотивировкой того, что ее называют формой пересечения.

Поскольку M односвязно, $H_2(M;\, Z) = \mathrm{Hom}(H^2(M),\, Z)$, и, следовательно, любой гомоморфизм групп $\varphi\colon H^2(M;\, Z) \to Z$ имеет вид

$$\phi(b) = \langle [M],\, b\rangle = Q(\mu([M]),\, b),$$

для некоторого $[M] \in H_2(M;\, Z)$. Из этого следует, что Q является *унимодулярной* симметрической билинейной формой. Поэтому в терминах базиса свободной абелевой группы $H^2(M;\, Z)$ форма пересечения Q может быть представлена симметрической размера $b_2 \times b_2$ матрицей с целыми коэффициентами и определителем ± 1.

Целозначная форма пересечения Q несет в себе больше информации, чем вещественнозначная форма $\widetilde{Q}$, определенная когомологиями де Рама. В самом деле, целозначные симметрические билинейные формы, представленные матрицами

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

эквивалентны над полем вещественных чисел, но не над кольцом целых чисел, поскольку

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2xy$$

принимает лишь четные значения, в то время как

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 - y^2$$

может быть как четным, так и нечетным. В общем случае мы говорим, что унимодулярная симметрическая билинейная форма

$$Q\colon Z^r \times Z^r \to Z$$

является *четной*, если $Q(a, a)$ всегда четно; иначе говорим, что она *нечетна.*

Интересной проблемой является классификация унимодулярных симметрических билинейных форм данного ранга с точностью до изоморфизма. Неопределенные унимодулярные симметрические билинейные формы классифицированы в [29]; в нечетном случае они являются прямой суммой нескольких ± 1, тогда как в четном случае они представляют собой прямую сумму нескольких H и $E8$, где эти формы представлены матрицами

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$E8 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Эта последняя матрица отрицательно определена, имеет лишь четные элементы вдоль диагонали и имеет определитель единица. Можно показать, что это матрица наименьшего ранга с этими свойствами.

С другой стороны, зачастую имеется много определенных форм данного ранга. Например, в четном случае имеется более 10^{51} отрицательно определенных форм ранга 40.

Приведем далее формы пересечения наиболее важных односвязных четырехмерных многообразий.

Пример 1. Форма пересечения комплексной проективной плоскости P^2C с обычной ориентацией представлена матрицей

$$(1).$$

Это немедленно следует из того факта, что кольцо когомологий P^2C порождено элементом $a \in H^2(P^2C)$, который подчинен единственному соотношению $a^3 = 0$. Форма пересечения комплексной проективной плоскости с противоположной ориентацией, обозначаемой $\overline{P^2C}$, имеет вид

$$(-1).$$

Пример 2. Форма пересечения $S^2 \times S^2$ представлена матрицей H. В самом деле, если ω_1 и ω_2 — формы площади двух сомножителей, нормализованные единичной площадью, то

$$\left(\int\limits_{S^2 \times S^2} \omega_i \wedge \omega_j \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Поверхность $K3$ — это гладкая комплексная гиперповерхность в P^3C, определенная в однородных координатах уравнением

$$(z_0)^4 + (z_1)^4 + (z_2)^4 + (z_3)^4 = 0.$$

Как мы увидим в параграфе 3.8, это четырехмерное многообразие имеет четную форму пересечения и топологические инварианты

$$b_+ = 3, \quad b_- = 19.$$

Далее из классификации неопределенных форм следует, что форма пересечения этой алгебраической поверхности есть

$$E8 \oplus E8 \oplus H \oplus H \oplus H.$$

Пример 4. Пусть M_1 и M_2 — два компактных ориентированных четырехмерных многообразия. Выберем точки $p \in M_1$ и $q \in M_2$ и положительно ориентированные системы координат (U, φ) и (V, ψ) с центрами в p и q. Масштабируя координаты, если необходимо, мы может добиться того, чтобы

$$B_2(0) \subset \phi(U), \quad B_2(0) \subset \psi(U),$$

где $B_2(0)$ — шар радиуса два с центром в начале координат. Мы строим *ориентированную связную сумму* $M_1 \sharp M_2$ как фактор-пространство

$$[M_1 - \phi^{-1}(B_{1/2}(0))] \cup [M_2 - \phi^{-1}(B_{1/2}(0))]$$

путем отождествления $\varphi^{-1}(x)$ с $\psi^{-1}(x/|x|^2)$. Это соответствует вырезанию диска из каждого многообразия и отождествлению их границ посредством сохраняющего ориентацию диффеоморфизма. Если M_1 и M_2 имеют соответственно формы пересечения Q_1 и Q_2, то ориентированная связная сумма $M_1 \sharp M_2$ имеет форму пересечения $Q_1 \oplus Q_2$.

Говорят, что элемент $a \in H^2(M;\, Z)$ является *характеристическим*, если он удовлетворяет условию

$$Q(a,\, b) = Q(b,\, b) \mod 2 \text{ для всех } b \in H^2(M;\, Z).$$

Теорема. *Если L — виртуальное линейное расслоение для $spin^c$ структуры на гладком четырехмерном многообразии M, тогда $c_1(L^2)$ является характеристическим элементом. Обратно, всякий характеристический элемент имеет вид $c_1(L^2)$ для некоторой $spin^c$ структуры на M.*

Доказательство. Если E — настоящее линейное расслоение над M, тогда $L \otimes E$ соответствует второй spin^c структуре. Используя (2.17), мы подсчитываем разность между индексами операторов Дирака с коэффициентами в L и $L \otimes E$ и заключаем, что

$$\int\limits_M c_1(L) \wedge c_1(E) + \frac{1}{2} \int\limits_M (c_1(E))^2 \in Z,$$

откуда немедленно следует, что

$$\frac{1}{2} Q(c_1(L^2),\, c_1(E)) + \frac{1}{2} Q(c_1(E),\, c_1(E)) = 0 \mod Z.$$

В силу того, что любой элемент $H^2(M;\, Z)$ является первым классом Черна некоторого линейного расслоения E, мы приходим к выводу, что $c_1(L^2)$ — характеристический.

Мы докажем обратное, используя тот факт, что любое ориентированное четырехмерное многообразие имеет spin^c структуру. Поэтому существует по меньшей мере один характеристический элемент a, соответствующий spin^c структуре с некоторым виртуальным линейным расслоением, которое мы обозначим L. Если a' — это второй характеристический элемент, то

$$Q(a' - a,\, b) = 0 \mod 2 \text{ для всех } b \in H^2(M;\, Z),$$

откуда следует, что $a' - a$ делится на два. Поэтому существует линейное расслоение E над M с $c_1(E^2) = a' - a$, и мы можем построить spin^c структуру на M с виртуальным линейным расслоением $L \otimes E$. Ясно, что $c_1((L \otimes E)^2) = a'$.

Следствие. *Гладкое четырехмерное многообразие имеет четную форму пересечения в том и только в том случае, если оно имеет спинорную структуру.*

Доказательство. Заметим просто, что Q четно тогда и только тогда, когда 0 есть характеристический элемент.

Форма пересечения является основным топологическим инвариантом компактного односвязного топологического четырехмерного многообразия. Действительно, классическая теорема Уайтхеда (J. H. C. Whitehead) и Джона Милнора (John Milnor) утверждает, что два таких четырехмерных многообразия гомотопически эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую форму пересечения. Недавно Майкл Фридман (Michael Freedman) показал, что любая унимодулярная симметрическая билинейная форма реализуется как форма пересечения компактного односвязного топологического четырехмерного многообразия, и что имеется не более двух таких многообразий с одной и той же формой пересечения, см. [17].

Тем не менее, не все унимодулярные симметрические билинейные формы реализуются на гладких четырехмерных многообразиях. В частности, хотя $E8$ может быть реализована как форма пересечения компактного ориентированного топологического четырехмерного многообразия, она не может быть реализована на гладком многообразии, поскольку такое многообразие было бы спиновым по теореме выше и, следовательно, противоречило бы теореме Рохлина.

3.6. Теорема Дональдсона

Имеется очень впечатляющее ограничение на определенные формы пересечения, которые могут быть реализованы на односвязных четырехмерных многообразиях, обладающих гладкой структурой.

Теорема 2 (Дональдсон [10]). *Единственной отрицательно определенной унимодулярной формой, представимой*

компактным гладким односвязным четырехмерным многообразием, является $Q = -I$.

В доказательстве имеется два случая — Q четно и Q нечетно. Мы дадим полное доказательство только в четном случае — мы покажем, что четная отрицательно определенная форма (такая, как $E8 \oplus E8$) не может быть реализована на гладком четырехмерном многообразии.

В четном случае мы можем взять в качестве L тривиальное расслоение и использовать теорему трансверсальности 1 из параграфа 3.4. Поскольку $b_+ = 0$, из этой теоремы следует, что $\widetilde{\mathscr{M}}_\varphi$ является гладким многообразием размерности $k = b_-/4$, и фактормногообразие $\mathscr{M}_\varphi$ есть гладкое многообразие размерности $k - 1$ за исключением особенности в точке $[d_A, 0]$, где d_A — единственная связность, для которой $F_A^+ = \varphi$. Касательное пространство к $\widetilde{\mathscr{M}}_\varphi$ в точке d_A есть просто пространство гармонических спинорных полей $ker(D_A^+)$, на котором группа S^1 комплексных чисел единичной длины действует обычным образом посредством комплексного умножения. Следовательно, $\mathscr{M}_\varphi$ является гладким многообразием за исключением особенности в $[d_A, 0]$, являющейся конусом в $P^{m-1}C$ $(2m = k)$.

Теперь мы вспомним расслоение (3.8), в котором тотальное пространство $\widetilde{\mathscr{B}}^*$ есть расслоение векторов единичной длины в универсальном расслоении E. Мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
\widetilde{\mathscr{M}}_\phi - \{[d_A, 0]\} & \subset & \widetilde{\mathscr{B}}^* & = & E \\
\big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow \\
\mathscr{M}_\phi - \{[d_A, 0]\} & \subset & \mathscr{B}^* & = & P^\infty C
\end{array}$$

Расслоение E над $P^\infty C$ ограничивается до расслоения над $P^{m-1}C$, которое, как мы легко убеждаемся, является расслоением Хопфа

$$S^1 \to S^{2m-1} \to P^{m-1}C.$$

Следовательно, ограничение E на $P^{m-1}C$ имеет нетривиальный первый класс Черна, и, поскольку когомологии $P^{m-1}C$

представляют собой усеченную алгебру полиномов

$$H^*(P^{m-1}C;\, Z) \cong P[a]/(a^m),$$

где a имеет степень два, мы видим, что

$$\int\limits_{P^{m-1}C} (c_1(E))^{m-1} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad [P^{m-1}C] \neq 0$$

как элемент $H_{2m-2}(\mathscr{B}^*;\, Z)$. Но это противоречит тому, что $\mathscr{M}_\varphi$ имеет $P^{m-1}C$ границей в $\mathscr{B}^*$.

Вот теперь набросок того, как рассуждать в случае, когда Q нечетно. В этом случае рассуждение предыдущих параграфов приведет к противоречию только, если характеристический элемент может быть найден таким образом, что соответствующее пространство модулей $\mathscr{M}_\varphi$ имеет положительную формальную размерность.

Поскольку $b_+ = b_1 = 0$, это произойдет в точности, когда индекс D_A^+ положителен. По теореме Атьи–Зингера это означает, что

$$-\frac{\tau(M)}{8} + \frac{1}{2}\int_M c_1(L)^2 = \frac{1}{8}(b_- + Q(a,a)) > 0 \text{ или } -Q(a,a) < b_2,$$

поскольку $b_2 = b_-$. Рассуждение Элкиса (Elkies) [15] показывает, что либо $Q = -I$, либо имеется характеристический элемент, удовлетворяющий последнему неравенству, завершая тем самым данный подход к доказательству теоремы Дональдсона.

Теорема Дональдсона дает полный ответ на вопрос о том, какие определенные унимодулярные симметрические формы могут быть реализованы как формы пересечения на компактных односвязных гладких четырехмерных многообразиях — единственные возможности представляют собой формы пересечения

$$P^2C\sharp\ldots\sharp P^2C \quad \text{и} \quad \overline{P^2C}\sharp\ldots\sharp\overline{P^2C}.$$

Можно задать аналогичный вопрос для неопределенных форм. Все нечетные неопределенные формы могут быть реализованы на связных суммах CP^2 и $\overline{CP^2}$. Если $s \geqslant 3r$, то четная форма

$$2r(E8) \oplus sH$$

может быть реализована на связной сумме r копий поверхности $K3$ и $s-3r$ копий $S^2 \times S^2$. Одним из поразительных успехов новой теории Зайберга–Виттена является теорема, принадлежащая Фуруте (Furuta): если $2rE8 \oplus sH$ реализуется на компактном односвязном гладком четырехмерном многообразии, то $s \geqslant 2r+1$. (См. [1] по поводу дальнейшего обсуждения.)

Соединенная с результатами Фридмана, описанными в [17], теорема Дональдсона дает существование гладких четырехмерных многообразий, гомеоморфных, но не диффеоморфных R^4. Сравнительно элементарное изложение основной идеи этого имеется в [16], параграфе 1.

3.7. Инварианты Зайберга–Виттена

Для четырехмерных многообразий с неопределенной формой пересечений, уравнения Зайберга–Виттена доставляют набор инвариантов, зависящий от выбора spin^c-структуры. Эти инварианты позволяют нам иногда различить гладкие структуры на данном топологическом четырехмерном многообразии.

Пусть L — виртуальное комплексное линейное расслоение над M такое, что $W_+ \otimes L$ определено как настоящее комплексное векторное расслоение. Предполагая $b_+(M) > 0$, мы можем образовать пространство модулей $\mathscr{M}_{L,\varphi}$, которое зависит от L.

В силу теоремы трансверсальности 2 из § 3.4 это пространство модулей является компактным многообразием для общего выбора φ. Ключевым моментом в рассуждении является то, что решение возмущенных уравнений Зайберга–Виттена с $\psi = 0$ может возникнуть только, если $c_1(L)$ содержит связность с $F_A^+ = 0$. Это не имеет места для случая общего положения, но только для φ, лежащего в аффинном подпространстве Π пространства $\Omega_+^2(M)$ коразмерности $b_+ > 1$ по предложению в конце § 1.9.

Разумеется, пространство модулей $\mathscr{M}_{L,\varphi}$ зависит от выбора римановой метрики на M и выбора φ. Если φ_1 и φ_2 — два выбора и $b_+ \geqslant 2$, тогда путь общего положения γ из φ_1 в φ_2 не встретит подпространства Π. Из смейловского бесконечномерного обобщения трансверсальности (см. [36], теоремы 3.1

и 3.3) следует, что $\mathscr{W} = \pi^{-1}(\gamma)$ является ориентированным подмногообразием $\mathscr{N}$ таким, что

$$\partial \mathscr{W} = \mathscr{M}_{L,\varphi_2} - \mathscr{M}_{L,\varphi_1}.$$

Другими словами, различные выборы φ дают кобордантные пространства модулей. Отсюда следует, что если $[\alpha]$ — любой класс когомологий в $\mathscr{B}^*$, то

$$\langle [\alpha],\, \mathscr{M}_{L,\varphi_1}\rangle = \langle [\alpha,\, \mathscr{M}_{L,\varphi_2}\rangle. \tag{3.15}$$

Аналогично, изменение римановой метрики на M изменяет пространство модулей на кобордантное.

Определение. Предположим, что $b_+ \geqslant 2$ и размерность $\mathscr{M}_{L,\varphi}$ четная. Тогда ***инвариант Зайберга – Виттена** L* равен

$$SW(L) = \langle c_1^d,\, \mathscr{M}_{L,\varphi}\rangle, \quad \text{где} \quad d = \frac{1}{2}\dim \mathscr{M}_{L,\varphi},$$

c_1 — первый класс Черна комплексного линейного расслоения E, ассоциированного с S^1-расслоением $\widetilde{\mathscr{B}}^* \to \mathscr{B}^*$, и φ выбрано общего вида.

Уравнение (3.15) и соответствующее уравнение для измененной римановой метрики показывает, что инварианты Зайберга – Виттена корректно определены.

Если $b_+ = 1$, мы можем по-прежнему определить $SW(L)$, когда $\langle c_1(L)^2,\, [M]\rangle \geqslant 0$ и $L \neq 0$. Из этих условий вытекает, что L не допускает связности с $F_A^+ = 0$ и, следовательно, никакой связности с $F_A^+ = \varphi$, где φ достаточно мало, поэтому мы можем положить $SW(L) = \langle c_1^d,\, [\mathscr{M}_{L,\varphi}]\rangle$, для общего выбора малого φ.

Теорема (Виттен [41]). *Если ориентированное риманово многообразие имеет риманову метрику положительной скалярной кривизны, тогда все его инварианты Зайберга – Виттена — нулевые.*

Доказательство. Немедленное следствие леммы из § 3.3.

Многообразия, которые допускают метрики положительной скалярной кривизны, включают в себя S^4, P^2C и $\overline{P^2C}$. Из теоремы Громова и Лаусон (Lawson) [20] вытекает, что, если M и N — четырехмерные многообразия положительной скалярной кривизны, их связная сумма $M\sharp N$ также допускает метрику положительной скалярной кривизны. Поэтому из теоремы Виттена следует, что все многообразия

$$k(P^2C)\sharp l(\overline{P^2C})$$

имеют нулевые инварианты Зайберга–Виттена.

Простейшие примеры многообразий с ненулевыми инвариантами Зайберга–Виттена имеют своим источником теорию комплексных поверхностей, как мы увидим в следующих двух разделах. В этих случаях пространство модулей состоит из конечного числа точек со знаками.

Формальная размерность пространства модулей $\mathcal{M}_L$ равна нулю, когда

$$c_1(L^2)^2[M] = 3\tau(M) + 2\chi(M),$$

что в соответствии с (2.20) имеет место в точности, когда $c_2(W_+ \otimes L) = 0$. Следующая лемма объясняет взаимоотношения между последним условием и существованием почти комплексных структур.

Лемма. *Гомотопические классы почти комплексных структур на M находятся во взаимно однозначном соответствии с линейными расслоениями L^2 над M такими, что*

1. *$W_+ \otimes L$ существует как раслоение,*
2. *$c_1(L^2)^2[M] = 3\tau(M) + 2\chi(M)$.*

Доказательство. Почти комплексная структура J на M порождает spin^c структуру, как мы объяснили в параграфе 2.3. Если L — соответствующее виртуальное линейное расслоение, то $W_+ \otimes L$ существует как настоящее векторное расслоение и распадается в сумму Уитни

$$W_+ \otimes L = \Theta \oplus L^2,$$

где Θ — тривиальное линейное расслоение. Из предложения 4 параграфа 1.5 следует, что

$$\mathrm{ch}(W_+ \otimes L) = 1 + \mathrm{ch}(L^2) = 2 + c_1(L^2) + \frac{1}{2}(c_1(L^2))^2.$$

Поэтому $c_1(W_+ \otimes L) = c_1(L^2)$, и в силу (2.18) $c_2(W_+ \otimes L) = 0$. Второе условие леммы следует теперь из (2.20).

Чтобы доказать обратное, заметим, что если условия в утверждении леммы выполнены, то в соответствии с (2.20), $c_2(W_+ \otimes L) = 0$. Из классификационной теоремы для кватернионных линейных расслоений из параграфа 1.2 следует, что $W_+ \otimes L$ тривиально. Поэтому $W_+ \otimes L$ имеет нигде ненулевое сечение ψ, и

$$\omega = \frac{\sigma(\psi)}{|\sigma(\psi)|}$$

автодуальная 2-форма единичной длины на M. Мы можем поэтому определить почти комплексную структуру $J(L^2)$ на M посредством

$$\omega(Jx, \cdot) = -\langle x, \cdot\rangle.$$

Легко проверить, что две конструкции, которые мы описали, взаимно обратны.

3.8. Операторы Дирака на кэлеровых поверхностях

Одними из наиболее важных примеров гладких четырехмерных многообразий являются кэлеровы поверхности, кэлеровы многообразия комплексной размерности два. Как оказывается, вычисления на этих многообразиях являются сравнительно простыми.

Напомним, что риманова метрика $\langle\ ,\ \rangle$ на комплексном многообразии M называется *эрмитовой*, если

$$\langle Jx, Jy\rangle = \langle x, y\rangle \quad \text{для всех} \quad x, y \in T_pM.$$

В этом случае мы можем определить ковариантное тензорное поле ранга два ω на M посредством

$$\omega(x, y) = \langle Jx, y\rangle. \tag{3.14}$$

Поскольку

$$\omega(y, x)=\langle Jy, x\rangle=\langle J^2y, Jx\rangle= - \langle y, Jx\rangle= - \langle Jx, y\rangle= - \omega(x, y),$$

мы видим, что ω — кососимметрично. Поэтому ω является 2-формой, называемой *кэлеровой формой* на M.

Определение. *Кэлеровым многообразием* называется комплексное многообразие M с эрмитовой метрикой $\langle\,,\,\rangle$, чья кэлерова форма замкнута.

В терминах подвижного ортонормированного базиса (e_1, e_2, e_3, e_4) такого, что $e_2 = Je_1$ и $e_4 = Je_3$ мы можем записать кэлерову форму как

$$\omega = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4.$$

Как ясно из этой формулы, кэлерова форма ω — автодуальна. Из кэлерова условия $d\omega = 0$ вытекает поэтому, что $\delta\omega = 0$, так что $\omega \in \mathscr{H}^2_+(M)$.

Пример 1. Комплексное проективное пространство $P^N C$ может быть превращено в кэлерово многообразие. Чтобы осуществить это, мы обозначим через $\pi\colon C^{N+1} - \{0\} \to P^N C$ обычную проекцию. Если U — открытое подмножество $P^N C$ и $Z\colon U \to C^{N+1} - \{0\}$ — голоморфное отображение с $\pi \circ Z = \mathrm{id}$, мы полагаем

$$\omega = i\partial\overline{\partial}\log(|Z|^2) = i\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial z_i\,\partial \overline{z}_j}\log(|Z|^2)dz_i\,d\overline{z}_j.$$

Легко проверить, что ω не зависит от выбора голоморфного сечения Z: если $Z = fW$, где f является ненулевой голоморфной комплекснозначной функцией на U, тогда

$$\begin{aligned} i\partial\overline{\partial}\log(|Z|^2) &= i\partial\overline{\partial}[\log(|f|^2) + \log(|W|^2)] = \\ &= i\partial\overline{\partial}\log f + i\overline{\partial}\partial\log\overline{f} + i\partial\overline{\partial}\log(|W|^2) = i\partial\overline{\partial}\log(|W|^2). \end{aligned}$$

Более того, ω замкнута и вычисление в локальных координатах показывает, что она имеет максимальный ранг ($\omega^N \neq 0$). Для определения эрмитовой метрики на $P^N C$ используется (3.16) в обратном направлении, что превращает $P^N C$ в кэлерово многообразие с кэлеровой формой ω.

Пример 2. Любое комплексное подмногообразие кэлерова многообразия само является кэлеровым многообразием относительно индуцированной метрики. В соответствии со знаменитой теоремой Чоу (Chow) компактные комплексные подмногообразия $P^N C$ являются проективными алгебраическими многообразиями без особенностей, каждое из которых описывается как множество общих нулей конечного набора однородных полиномов.

К примеру, при данном положительном целом n, мы можем рассмотреть комплексную поверхность $M_n \subset P^3 C$, определенную в однородных координатах полиномиальным уравнением

$$P(z_0, z_1, z_2, z_3) \cong (z_0)^n + (z_1)^n + (z_2)^n + (z_3)^n = 0. \qquad (3.17)$$

Из теоремы Лефшеца о гиперплоских сечениях (доказанной на страницах 156–159 в [19] и в параграфе 7 в [28]) следует, что M_n односвязно. Другие топологические инварианты M_n могут быть вычислены посредством рассмотрения полинома P как сечения H^n, где H — расслоение гиперплоских сечений над $P^3 C$.

Расслоение гиперплоских сечений H над $P^3 C$ определяется с помощью открытого покрытия $\{U_0, \ldots, U_N\}$, где

$$U_i = \{[z_1, \ldots, z_N] \in P^N C\colon z_i \neq 0\},$$

с помощью функций перехода $g_{ij} = (z_j/z_i)$. Линейная форма $a_0 z_0 + \ldots + a_N z_N$ определяет сечение H с локальными представителями

$$\sigma_i = a_0 \frac{z_0}{z_i} + \ldots + a_N \frac{z_N}{z_i},$$

и, аналогично, любой полином степени n (такой, как P) определит сечение H^n. Согласно формуле присоединения (3.14), нормальное расслоение к M_n есть просто ограничение H^n на M_n.

Расслоение гиперплоских сечений является обратным к универсальному расслоению, которое имеет тотальное пространство E_∞, задаваемое (1.21), как мы описывали в параграфе 1.7. Напомним, что первый класс Черна E_∞ есть $-a$, где a — стандартный генератор $H^2(P^n C; Z)$ такой, что $\langle [P^1 C], a\rangle = 1$. (Эквивалентно, a есть класс когомологий кэлеровой формы ω.) Поэтому первый класс Черна H есть a, и характеры Черна этих расслоений:

$$\mathrm{ch}(E_\infty) = e^{-a}, \quad \mathrm{ch}(H) = e^{a}.$$

Используя предложение 4 из параграфа 1.5, мы видим, что

$$\operatorname{ch}(H^n) = e^{na}, \quad \operatorname{ch}(E_\infty^\perp) = (N+1) - e^{-a},$$

где последнее равенство следует из того факта, что $E_\infty \oplus E_\infty^\perp$ является тривиальным расслоением ранга $N+1$.

С другой стороны, мы имеем изоморфизм

$$TP^N C \cong \operatorname{Hom}(E_\infty, E_\infty^\perp) = E_\infty^* \otimes E_\infty^\perp = L \otimes E_\infty^\perp;$$

чтобы увидеть это, заметим, что комплексные прямые в C^{N+1} вблизи данной комплексной прямой $[z_0, \dots, z_N]$ соответствуют линейным отображениям из одномерного линейного пространства, натянутого на $(z_0, \dots, z_N)$, на его ортогональное дополнение. Отсюда следует, что

$$\operatorname{ch}(TP^N C) = \operatorname{ch}(L)\operatorname{ch}(E_\infty^\perp) = e^a[(N+1) - e^{-a}] = (N+1)e^a - 1.$$

Мы можем применить эти вычисления к нашей гиперповерхности $M = M_n \subset P^3 C$. Поскольку

$$TP^3 C = TM \oplus NM \cong TM \oplus (H^n)|M,$$

мы видим, что

$$4e^a - 1 = \operatorname{ch}(TM) + e^{na} \quad \text{или} \quad \operatorname{ch}(TM) = 4e^a - e^{na} - 1,$$

где a обозначает теперь прообраз на M стандартного генератора $H^2(P^N; Z)$. Следовательно,

$$3 + c_1(TM) + \frac{1}{2}[c_1(TM)]^2 - c_2(TM) = 3 + (4-n)a + \frac{1}{2}(4-n^2)a^2,$$

по модулю членов степени большей 4, из чего мы заключаем, что

$$c_1(TM) = (4-n)a, \quad c_2(TM) = (n^2 - 4n + 6)a^2.$$

Как объяснено в деталях в [19], страницы 171 и 172, кэлерова поверхность M_n пересекает прямую общего положения в n точках и имеет поэтому степень n в смысле алгебраической геометрии. По теореме Виртингера (Wirtinger) ее объем поэтому в n раз больше объема P^2C и, следовательно, $\langle a, [M_n]\rangle = n$. Поэтому

$$\langle [c_1(TM)]^2, [M]\rangle = (4-n)n, \quad \langle c_2(TM), [M]\rangle = n^3 - 4n^2 + 6n.$$

В частности, в случае $n = 4$, что дает поверхность $K3$, описанную в параграфе 3.5,

$$c_1(TM) = 0 \quad \text{и} \quad \langle c_2(TM), [M]\rangle = 24.$$

Но мы выведем скоро (3.22), утверждающее, что $c_2(TM)[M] = \chi(M)$, эйлеровой характеристике M и, следовательно,

$$b_0 = b_4 = 1 \quad \text{и} \quad b_1 = b_3 = 0 \Rightarrow b_2 = 22.$$

Поскольку M имеет комплексную структуру, из леммы в конце предыдущего раздела следует, что

$$3\tau(M) + 2\chi(M) = 0, \ \text{ что влечет } \ \tau(M) = -16,$$

откуда следует, что

$$b_+ = 3 \quad \text{и} \quad b_- = 19,$$

как мы утверждали в параграфе 3.5. Более того, комплексная структура определяет каноническую spin^c структуру на M с виртуальным расслоением L, удовлетворяющим $c_1(L^2) = 0$. Поэтому L должно быть тривиальным, M_4 должно иметь настоящую спинорную структуру и его форма пересечения должна быть четной.

Аналогичные вычисления в случае $n = 5$ дали бы

$$b_+ = 9 \quad \text{и} \quad b_- = 44;$$

в этом случае $c_1(L^2)$ нечетно и, следовательно, 0 не является характеристическим, поэтому форма пересечения нечетна.

На комплексном многообразии M (p, q)-форма — это комплекснозначная дифференциальная форма, которая может быть выражена в локальных комплексных координатах $(z_1, \ldots, z_m)$ как

$$\sum f_{i_1\ldots i_p, j_1\ldots j_q} dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\overline{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\overline{z}_{j_q}.$$

Мы можем разложить пространство комплекснозначных k-форм в сумму форм типа (p, q)

$$\Omega^k(M) \otimes C = \sum_{p+q=k} \Omega^{p,q}(M), \quad \Omega^{p,q}(M) = \{(p, q)\text{-формы}\}. \tag{3.18}$$

Внешнее дифференцирование разделяется на две компоненты

$$d = \partial + \overline{\partial}, \quad \partial \colon \Omega^{p,q}(M), \quad \Omega^{p,q}(M) = \{(p, q)\text{-формы}\},$$

и кэлерово условие дает $\partial \circ \partial = 0$ и $\overline{\partial} \circ \overline{\partial} = 0$.

Эрмитова метрика $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на TM продолжается на $TM \otimes C$ так, что продолжение является комплексно-линейным относительно первого переменного и антилинейным относительно второго.

Это, в свою очередь, определяет эрмитову метрику на каждом $\Lambda^k T^* M \otimes C$ и эрмитово скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ на пространстве гладких k-форм посредством

$$(\theta, \phi) = \int_M \langle \theta, \phi \rangle (1/n!) \omega^n,$$

где ω — кэлерова форма. Заметим, что разложение (3.18) ортогонально относительно скалярного произведения. Поэтому мы можем определить формальные сопряженные

$$\partial^* \colon \Omega^{p+1,q}(M) \to \Omega^{p,q}(M), \quad \overline{\partial}^* \colon \Omega^{p,q+1}(M) \to \Omega^{p,q}(M),$$

точно так же, как в параграфе 1.9, потребовав

$$(\partial^* \theta, \phi) = (\theta, \partial \phi), \quad (\overline{\partial}^* \theta, \phi) = (\theta, \overline{d} \phi). \tag{3.19}$$

В случае комплексных поверхностей эрмитова метрика редуцирует структурную группу к $U(2)$, и различные представления $U(2)$ соответствуют различным типам тензорных полей, сечениям различных «ассоциированных» векторных расслоений. Например, стандартное представление $U(2)$ на C^2 приводит к комплексному касательному расслоению TM, тогда как представление $A \to {}^t A^{-1} = \overline{A}$ дает комплексное кокасательное расслоение, сечения которого — $(1, 0)$-формы на M. Если функции перехода для TM имеют вид

$$g_{\alpha\beta} \colon U_\alpha \cap U_\beta \to U(2),$$

то функции перехода для кокасательного расслоения представляются в виде

$$^t g_{\alpha\beta}^{-1} = \overline{g}_{\alpha\beta} \colon U_\alpha \cap U_\beta \to U(2).$$

Сечениями сопряженного к этому расслоению являются либо (0, 1)-формы, либо комплексные векторные поля; в присутствии эрмитовой метрики мы можем идентифицировать (0, 1)-формы с комплексными векторными полями.

Комплексная внешняя степень $K = \Lambda_C^2 T^* M$ кокасательного расслоения называется *каноническим расслоением.* Его сечениями являются (2, 0)-формы на M и оно имеет функции перехода

$$(\det \circ {}^t g_{\alpha\beta}^{-1}) = \det \circ \overline{g}_{\alpha\beta} \colon U_\alpha \cap U_\beta \to U(1).$$

Каноническое расслоение играет ключевую роль в знаменитой классификации комплексных поверхностей Энрикесом (Enriques) и Кодаирой (Kodaira) (см. [22] или [5]). Сопряжение дает антиканоническое расслоение, сечения которого — (0, 2)-формы и функции перехода

$$\det \circ g_{\alpha\beta} \colon U_\alpha \cap U_\beta \to U(1).$$

Нам необходимо связать все это с канонической $\mathrm{Spin}(4)^c$-структурой, построенной в § 2.3. Напомним, что функции перехода для выделенного $\mathrm{Spin}(4)^c$-структурой линейного расслоения L^2 имеют вид

$$\det \circ g_{\alpha\beta} \colon U_\alpha \cap U_\beta \to U(1),$$

поэтому L^2 — это просто антиканоническое расслоение. Более того,

$$W_+ \otimes L \cong W_+ \otimes K^{-(1/2)} \cong \Theta \oplus K^{-1}, \tag{3.20}$$

где Θ обозначает тривиальное линейное расслоение. С другой стороны, поскольку $\rho^c \circ j$ — обычное представление $U(2)$ на C^2,

$$W_- \otimes L \cong TM,$$

где TM — касательное расслоение M с его почти комплексной структурой.

Заметим, что из (3.20) вытекает, что $c_2(W_+ \otimes L) = 0$, и далее из (2.20) и (2.21) — $c_2(W_- \otimes L)[M] = \chi(M)$, эйлеровой характеристике M. Следовательно, в силу (3.21),

$$c_2(TM)[M] = \chi(M). \tag{3.22}$$

С помощью метода, данного в § 2.5, мы можем построить $\mathrm{Spin}(4)^c$-связность на $W \otimes L$ с локальным представителем

$$d - iaI - \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{4} \omega_{ij} e_i \cdot e_j, \tag{3.23}$$

где локальный подвижный ортонормированный базис (e_1, e_2, e_3, e_4) выбран так, что кэлерова форма имет вид

$$e_1 \cdot e_2 + e_3 \cdot e_4 = \begin{pmatrix} -2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Локальный представитель (3.23) может быть переписан в матричном виде как

$$d - iaI - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i(\omega_{12}+\omega_{34}) & (\omega_{13}+\omega_{42}) - i(\omega_{14}+\omega_{23}) & 0 & 0 \\ \sharp & i(\omega_{12}+\omega_{34}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sharp & \sharp \\ 0 & 0 & \sharp & \sharp \end{pmatrix}.$$

Поскольку кэлерова форма параллельна по отношению к связности Леви – Чивита,

$$\omega_{13} + \omega_{42} = 0 \quad \text{и} \quad \omega_{14} + \omega_{23} = 0.$$

мы определяем связность d_{A_0} на $K^{-(1/2)}$, полагая

$$a = \frac{1}{2}(\omega_{12} + \omega_{34}),$$

так что индуцированная связность на тривиальном слагаемом Θ расслоения $W_+ \otimes L$ является тривиальной связностью. Связность, индуцированная на другое слагаемое K^{-1} является тогда в точности такой же, как и индуцированная связностью Леви – Чивита.

Предложение. *В кэлеровом случае оператор Дирака, соответствующий* $\mathrm{Spin}(4)^c$*-связности* d_{A_0}, *имеет вид*

$$D^+_{A_0} = \sqrt{2}(\overline{\partial} + \overline{\partial}^*), \tag{3.24}$$

если мы отождествим сечения Θ *с* $(0, 0)$*-формами, сечения* K^{-1} *с* $(0, 2)$*-формами и сечения* $W_- \otimes L = TM$ *с* $(0, 1)$*-формами.*

Набросок доказательства. Достаточно показать, что две части написанного выше уравнения совпадают в данной точке M. Ключевой отличительной особенностью кэлеровых многообразий (рассмотренных в [19], главе § 7) является то, что можно выбрать координаты $z_1 = x_1 + ix_2$, $z_2 = x_3 + ix_4$, которые нормальны в p, так, что

$$g_{ij}(p) = \delta_{ij}, \qquad \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}(p) = 0.$$

Отсюда следует, что ковариантные производные могут быть заменены обычными производными компонент в точке p. Мы полагаем $e_i(p) = \dfrac{\partial}{\partial x_i}(p)$ и выбираем $\epsilon_1(p), \epsilon_2(p) \in (W_+ \otimes L)_p$, $\epsilon_3(p), \epsilon_4(p) \in (W_- \otimes L)_p$, по отношении к которым $(e_1(p), \ldots$ $\ldots, e_4(p))$ представляется матрицами из § 2.4. С помощью изоморфизмов (3.20) и (3.21), мы можем отождествить

$$\epsilon_1(p) = 1, \quad \epsilon_2(p) = \frac{1}{2}(d\bar{z}_2 \wedge d\bar{z}_1)(p),$$

$$\epsilon_3(p) = \frac{1}{\sqrt{2}} d\bar{z}_1(p), \quad \epsilon_4(p) = \frac{1}{\sqrt{2}} d\bar{z}_2(p).$$

где $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ появляется для нормировки $d\bar{z}_1(p)$ и $d\bar{z}_2(p)$ к единичной длине. В точке p оператор Дирака дается в матричной форме как

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & -\dfrac{\partial}{\partial x_1} + i\dfrac{\partial}{\partial x_2} & -\dfrac{\partial}{\partial x_3} + i\dfrac{\partial}{\partial x_4} \\
0 & 0 & \dfrac{\partial}{\partial x_3} + i\dfrac{\partial}{\partial x_4} & -\dfrac{\partial}{\partial x_1} - i\dfrac{\partial}{\partial x_2} \\
\dfrac{\partial}{\partial x_1} + i\dfrac{\partial}{\partial x_2} & -\dfrac{\partial}{\partial x_3} + i\dfrac{\partial}{\partial x_4} & 0 & 0 \\
\dfrac{\partial}{\partial x_3} + i\dfrac{\partial}{\partial x_4} & \dfrac{\partial}{\partial x_1} - i\dfrac{\partial}{\partial x_2} & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

Применяя нами отождествления, мы находим что

$$D_{A_0}\begin{pmatrix} f\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + i\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\\ \dfrac{\partial f}{\partial x_3} + i\dfrac{\partial f}{\partial x_4}\end{pmatrix},$$

которое есть просто $\sqrt{2}\partial f$. Аналогично

$$D_{A_0}\begin{pmatrix} 0\\ g\\ 0\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ -\dfrac{\partial g}{\partial x_3} + i\dfrac{\partial g}{\partial x_4}\\ \dfrac{\partial g}{\partial x_1} - i\dfrac{\partial g}{\partial x_2}\end{pmatrix}.$$

Поэтому

K^{-1} – компонента $D_{A_0}(h_1 d\bar{z}_1 + h_2 d\bar{z}_2) = \sqrt{2}\bar{\partial}(h_1 d\bar{z}_1 + h_2 d\bar{z}_2)$.

Если $\Pi^{(0,2)}$ обозначает ортогональную проекцию на (0,2)-формы, то

$$D_{A_0} = \sqrt{2}\bar{\partial}\colon \Omega^{(0,0)}(M) \to \Omega^{(0,1)}(M),$$
$$\Pi^{(0,2)} \circ D_{A_0} = \sqrt{2}\bar{\partial}\colon \Omega^{(0,1)}(M) \to \Omega^{(0,2)}(M).$$

Обоснование предложения завершается указанием на то, что единственным самосопряженным оператором с этими двумя свойствами является $\sqrt{2}(\bar{\partial} + \bar{\partial}^*)$.

Замечание. Любая другая $\mathrm{Spin}(4)^c$ связность имеет вид

$$d_A = d_{A_0} - ia,$$

для некоторой вещественнозначной 1-формы a на M. В общем случае, вышеприведенное доказательство показывает, что

$$D_A^+\begin{pmatrix} f\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ \dfrac{\partial f}{\partial x_1} - ia\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\right) f + i\dfrac{\partial f}{\partial x_2} + a\left(\dfrac{\partial}{\partial x_2}\right) f\\ \dfrac{\partial f}{\partial x_3} - ia\left(\dfrac{\partial}{\partial x_3}\right) f + i\dfrac{\partial f}{\partial x_4} + a\left(\dfrac{\partial}{\partial x_4}\right) f\end{pmatrix} =$$
$$= \sqrt{2}[\bar{\partial} f - (ia)_{(0,1)} \cdot f], \qquad (3.25)$$

где $(ia)_{(0,1)}$ обозначает (0,1)-компоненту ia.

В случае канонической $\mathrm{Spin}(4)^c$ структуры, ассоциированной с кэлеровой поверхностью, теорема Атьи–Зингера об индексе для оператора $D^+_{A_0}$ дает краеугольный камень теории комплексных поверхностей:

Теорема Римана–Роха для кэлеровых поверхностей. *Индекс $D^+_{A_0}$ дается формулой Нетера:*

$$\text{комплексный индекс } D^+_{A_0} = \frac{1}{12}\{c_1^2(TM)[M] + c_2(TM)[M]\}.$$

Доказательство. В соответствии с теоремой об индексе,

$$\text{индекс } D^+_{A_0} = -\frac{1}{8}\tau(M) + \frac{1}{2}c_1(K^{-1})^2[M].$$

В силу леммы из предыдущего раздела

$$-3\tau(M) = 2\chi(M) - c_1(K^{-1})^2[M]$$

и, следовательно,

$$\text{индекс } D^+_{A_0} = \frac{1}{12}\chi(M) + \frac{1}{12}c_1(TM)^2[M].$$

Формула, которую мы хотим сейчас получить, следует из (3.22).

С другой стороны, индекс $\bar\partial + \bar\partial^*$ может быть также вычислен непосредственно с помощью теории Ходжа. Мы дадим только краткие указания, как это делается, и рекомендуем читателю [19] по поводу более полного обсуждения.

На кэлеровом многообразии J и $\star$ параллельны относительно связности Леви–Чивита, из которой следует, что лапласиан Ходжа коммутирует с ортогональной проекцией на пространство (p, q)-форм, и мы поэтому можем написать

$$\mathscr{H}^k(M) = \sum_{p+q=k} \mathscr{H}^{p,q}(M),$$

где $\mathscr{H}^{p,q}(M)$ — пространство гармонических (p, q)-форм. Более того, лапласиан Ходжа может быть выражен в терминах оператора $\bar\partial$ и его сопряженного:

$$\Delta = 2(\bar\partial + \bar\partial^*)^2.$$

В случае кэлеровой поверхности, отсюда следует, что

$$\text{Индекс }(\overline{\partial}+\overline{\partial}^*)=\dim\mathscr{H}^{0,0}(M)+\dim\mathscr{H}^{0,2}(M)-\dim\mathscr{H}^{0,1}(M). \tag{3.26}$$

Заметим, что при сопряжении мы имеем $\mathscr{H}^{0,2}(M)\cong\mathscr{H}^{2,0}(M)$.

В силу того, что $d=\overline{\partial}$ на $\Omega^{2,0}(M)$ и (0,2)-формы автоматически автодуальные, элементы $\mathscr{H}^{2,0}(M)$ — это просто $\overline{\partial}$-замкнутые (2, 0)-формы. Они являются голоморфными сечениями канонического расслоения K, и размерность пространства таких сечений называется ***геометрическим родом*** M. Мы обозначаем геометрический род через p_g. Если M односвязно, то $\mathscr{H}^{0,1}(M)=0$, и из (3.26) следует, что

$$\text{Индекс }(\overline{\partial}+\overline{\partial}^*)=1+p_g.$$

Формула Нетера дает теперь

$$1+p_g=\frac{1}{12}\{c_1^2(TM)[M]+c_2(TM)[M]\}.$$

Инварианты в правой части могут быть выражены в терминах эйлеровой характеристики и сигнатуры

$$1+p_g=\frac{1}{4}\{\tau(M)[M]+\chi(TM)[M]\}=\frac{1}{2}(b_++1),$$

так что $b_+=2p_g+1$. В частности, b_+ нечетно для любой кэлеровой поверхности. Голоморфные сечения K или антиголоморфные сечения K^{-1} — это автодуальные гармонические формы типа $(2,0)$ или $(0,2)$, и они заполняют векторное пространство размерности $2p_g$. Мы заключаем, тем самым, что пространство автодуальных гармонических форм типа $(1,1)$ в точности одномерное, и любая автодуальная гармоническая форма типа $(1,1)$ должна быть кратной кэлеровой форме.

3.9. Инварианты кэлеровых поверхностей

В этом разделе мы вычислим инварианты Зайберга–Виттена $SW(L)$ в случае, когда M является кэлеровым многообразием с каноническим расслоением K и $L=K^{-1/2}$. Напомним, что в этом случае $W_+=\Theta\oplus K^{-1}$, где Θ — тривиальное линейное расслоение.

Теорема (Виттен [41]). *Кэлерово многообразие с* $b_1 = 0$ *и* $b^+ \geqslant 2$ *должно удовлетворять равенству* $SW(K^{-1/2}) = \pm 1$.

Доказательство. Пусть A_0 обозначает связность на L, определенную кэлеровой структурой, как описано в предыдущем разделе. Следуя идее Таубса (Taubes) [38], мы положим $\varphi = F_{A_0}^+ + \omega$ в модифицированных уравнениях Зайберга–Виттена так, что они примут вид

$$D_A^+\psi = 0, \quad F_A^+ = \sigma(\psi) + F_{A_0}^+ + \omega. \tag{3.27}$$

Преимущество этих уравнений в том, что они имеют очевидное решение

$$A = A_0, \quad \psi\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ 0\end{pmatrix}.$$

Мы докажем, что это очевидное решение является единственным решением в пространстве модулей и что оно невырождено. Этим будет показано, что $SW(L) = \pm 1$.

Предположим, что (A, ψ) — любое решение (3.27) и напишем

$$\psi = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \alpha \in \Gamma(\Theta),\ \beta \in \Gamma(K^{-1}).$$

Мы используем преобразование, введенное Виттеном

$$A \mapsto A, \quad \alpha \mapsto, \quad \beta \mapsto -\beta. \tag{3.28}$$

Утверждаем, что это преобразование оставляет инвариантными нули функционала

$$S_\varphi(A, \psi) = \int\limits_M \left[|D_A\psi|^2 + |F_A^+ - \sigma(\psi) - \varphi|^2\right] dV$$

и, следовательно, переводит решения возмущенных уравнений Зайберга–Виттена в другие решения. Чтобы показать это, мы напишем $\nabla^A = \nabla^{A_0} - ia$, где a — вещественнозначная 1-форма, так что

$$F_A^+ - \phi = (da)^+ - \omega$$

и применим формулу Вейценбека из § 3.1 чтобы получить

$$S_\varphi(A, \psi) = \int\limits_M \left[|\nabla^A\psi|^2 + 2\langle F_A^+, \sigma(\psi)\rangle + |(da)^+ - \sigma(\psi) - \omega|^2\right] dV.$$

Заметим, что связность ∇^A сохраняет разложение в прямую сумму $W_+ = \Theta \oplus K^{-1}$. Следовательно,

$$S_\varphi(A,\,\psi) = \int\limits_M \Big[|\nabla^A\alpha|^2 + |\nabla^A\beta|^2 + \frac{s}{4}(|\alpha|^2 + |\beta|^2) +$$
$$+|(da)^+ - \omega|^2 + |\sigma(\psi)|^2 + 2\langle\sigma(\psi),\, F^+_{A_0} + \omega\rangle\Big]\,dV.$$

Используя формулу

$$\sigma(\psi) = i\begin{pmatrix} |\alpha|^2 - |\beta|^2 & 2\alpha\overline{\beta} & 0 & 0 \\ 2\overline{\alpha}\beta & |\beta|^2 - |\alpha|^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.29}$$

Вместе с тем фактом, что $F^+_{A_0}$ и ω представлены диагональными матрицами, мы можем легко проверить, что каждый член в последнем выражении для $S_\varphi(A,\,\psi)$ инвариантен относительно преобразования (3.28).

Теперь мы сосредоточимся на втором из уравнений Зайберга–Виттена

$$(da)^+ - \omega = \sigma(\psi).$$

Поскольку (3.28) не затрагивает $(da)^+$, но изменяет знаки внедиагональных элементов в $\sigma(\psi)$, мы видим, что либо $\alpha = 0$, либо $\beta = 0$. Сравнение (3.29) с выражением для кэлеровой формы через алгебру Клиффорда

$$\omega = e_1 \cdot e_2 + e_3 \cdot e_4 = \begin{pmatrix} -2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

показывает, что

$$\sigma(\psi) \wedge \omega = \frac{1}{2}(|\beta|^2 - |\alpha|^2)\omega \wedge \omega.$$

Поскольку F_A и F_{A_0} лежат в одном классе когомологий де Рама и

$$F_A \wedge \omega = F^+_A \wedge \omega, \quad F_{A_0} \wedge \omega = F^+_{A_0} \wedge \omega,$$

мы видим, что

$$0=\int\limits_M (F_A^+ - F_{A_0}^+)\wedge\omega = \int\limits_M (da)^+\wedge\omega = \int\limits_M \Big(1+\frac{1}{2}(|\beta|^2 - |\alpha|^2)\Big)\,\omega\wedge\omega.$$

Следовательно,

$$\int\limits_M (|\alpha|^2 - |\beta|^2)\omega\wedge\omega > 0,$$

именно β должно быть нулем, и

$$(da)^+ = [1-(1/2)|\alpha|^2]\omega.$$

Уравнение (3.25) из предыдущего раздела показывает, что

$$\sqrt{2}[\overline{\partial}\alpha - (ia)_{(0,1)}\cdot\alpha] = D_A^+\begin{pmatrix}\alpha\\0\end{pmatrix} = 0,$$

так что наши возмущенные уравнения принимают вид

$$\overline{\partial}(\log\alpha) = (ia)_{(0,1)},\quad (da)^+ = [1-(1/2)|\alpha|^2]\omega,\quad \delta a = 0,$$

последнее из которых есть знакомое калибровочное условие.

Наконец, короткое рассуждение показывает, что

$$\begin{aligned}\Delta(\log|\alpha|^2) &= 2\,\mathrm{Re}(\Delta\log\alpha) = -2\,\mathrm{Re}\langle\omega,\, i\partial\overline{\partial}(\log\alpha)\rangle = \\ &= 2\,\mathrm{Re}\langle\omega,\, \partial(a_{(0,1)})\rangle.\end{aligned}$$

С другой стороны, поскольку ω автодуальна и a — вещественнозначная 1-форма,

$$\langle\omega,(da)^+\rangle = \langle\omega,\, da\rangle = \langle\omega,\, \partial(a_{(0,1)}) + \overline{\partial}(a_{(0,1)})\rangle = 2\langle\omega,\, \partial(a_{(0,1)})\rangle.$$

Следовательно,

$$\Delta(\log|\alpha|^2) = \langle\omega,\,(da)^+\rangle = [1-(\tfrac{1}{2})|\alpha|^2]|\omega|^2 = 2-|\alpha|^2.$$

Напомним, что согласно нашему соглашению о знаке лапласиана, $\Delta f(p)\geqslant 0$, если p — локальный максимум для f. Следовательно, если $|\alpha|>\sqrt{2}$ или $|\alpha|<\sqrt{2}$ на открытом множестве, принцип максимума приводит к противоречию. Отсюда следует, что $|\alpha|\equiv\sqrt{2}$, $(da)^+\equiv 0$ и $F_A^+ = F_{A_0}^+$.

Поскольку $b_1 = 0$, из теории Ходжа следует, что

$$(da)^+ = 0 = \delta a \Rightarrow a = 0, \text{ и, следовательно, } \overline{\partial}(\log \alpha) = 0.$$

Поэтому α голоморфна, и из принципа максимума модуля следует, что α постоянно. Следовательно, $A = A_0$, в то время как α однозначно определяется с точностью до умножения на комплексное число единичной длины. После деления на постоянные калибровочные преобразования, мы получаем пространство модулей, состоящее из единственной точки.

Чтобы закончить это рассуждение, нам необходимо проверить, что линеаризованные уравнения

$$D_A\psi' - ia' \cdot \psi = 0, \quad (da')^+ = 2\sigma(\psi, \psi'), \quad \delta a' = 0$$

невырождены на этом решении. Чтобы сделать это, мы рассмотрим вторую производную функционала $S_\varphi \colon \mathscr{A} \to R$ в решении $(A_0, (\sqrt{2}, 0))$, которое минимизирует S_φ. Решения первых двух линеаризованных уравнений являются решениями вариационного уравнения

$$d^2 S_\varphi(A, \psi)((a', \psi'), (a', \psi')) = 0,$$

уравнения, инвариантного по отношению к линеаризации (3.28) в решении $(A_0, (\sqrt{2}, 0))$:

$$a' \mapsto a', \quad \alpha' \mapsto \alpha', \quad \beta' \mapsto -\beta'. \tag{3.30}$$

В нашем решении второе из линеаризованных уравнений примет вид

$$(dq)^+ = 2\sigma(\psi, \psi') = 4i \text{ бесследовая эрмитовая часть} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} (\overline{\alpha}' \, \overline{\beta}') =$$
$$= \sqrt{2}i \begin{pmatrix} \alpha' + \overline{\alpha}' & 2\overline{\beta}' \\ 2\beta' & -\alpha' - \overline{\alpha}' \end{pmatrix}.$$

Поскольку преобразование (3.21) переводит решения в решения, $\beta' = 0$. Аналогично, поскольку преобразование

$$a' \mapsto a', \quad \alpha' \mapsto -\alpha', \quad \beta' \mapsto \beta'$$

переводит решения в решения, a' — чисто мнимое. Из последних двух линеаризованных уравнений следует теперь, что $(da)^+ = 0$, $\delta a' = 0$, поэтому a' — гармоническое, и, поскольку $b_1 = 0$, $a' = 0$. Первое из линеаризованных дает, наконец, что α' есть мнимая постоянная, следовательно, порождена инфинитиземальным калибровочным преобразованием, и теорема доказана.

Замечание. Теорема Виттена была распространена Таубсом на симплектические многообразия, где в качестве K взято каноническое расслоение для совместимой почти комплексной структуры. Особенно хорошее изложение этого распространения представлено на страницах 59–261 в [13].

Следствие. *Кэлерово многообразие с $b_1 = 0$ и $b^+ \geqslant 2$ не может быть разложено в гладкую связную сумму нескольких P^2C и $\overline{P^2C}$.*

Доказательство. Как мы видели выше, связная сумма нескольких P^2C и $\overline{P^2C}$ может быть наделена метрикой положительной скалярной кривизны в силу построения, данного в [20] и должна, следовательно, иметь нулевые инварианты Зайберга–Виттена. Однако предыдущая теорема показывает, что кэлерово многообразие с $b_1 = 0$ и $b^+ \geqslant 2$ имеет ненулевые инварианты Зайберга–Виттена.

Это следствие позволяет нам построить множество пар гладких многообразий, которые гомеоморфны, но не диффеоморфны. Например, комплексная гиперповерхность в P^3C, определенная невырожденным однородным полиномом пятой степени является кэлеровым многообразием, которое односвязно (по теоремы Лефшеца о гиперплоских сечениях) и для него

$$b_+ = 9, \quad b_- = 44.$$

Следовательно, в силу классификации нечетных квадратичных форм, ее форма пересечения есть

$$Q = 9(1) \oplus 44(-1),$$

и согласно теории Фридмана она также гомеоморфна $9(P^2C)\sharp 44\overline{P^2C}$. Тем не менее, она имеет ненулевые инварианты Зайберга–Виттена, поэтому не может быть диффеоморфна $9(P^2C)\sharp 44\overline{P^2C}$. Более общо, каждая из гиперповерхностей M_n нечетной степени n, описанная в параграфе 3.7, гомеоморфна, но не диффеоморфна связной сумме нескольких P^2C и $\overline{P^2C}$. Тем самым мы получаем много пар компактных односвязных четырехмерных многообразий, гомеоморфных, но не диффеоморфных, подтверждая теорему B из параграфа 1.1.

В рамках предшествующей методологии, это следствие могло бы быть получено посредством полиномиальных инвариантов Дональдсона, построенных при помощи неабелевой теории Янга–Миллса [12].

На самом деле, первые примеры компактных односвязных четырехмерных многообразий, гомеоморфных, но не диффеоморфных, найденные Дональдсоном, имели $b_+ = 1$. Теория Зайберга–Виттена дает возможность для очень простого рассмотрения этих примеров, основываясь на следующем предложении.

Предложение. *Предположим, что односвязное кэлерово многообразие с $b_+ = 1$ имеет каноническое расслоение K, удовлетворяющее условиям*

$$c_1(K)^2 \geqslant 0, \quad \langle c_1(K) \cup [\omega], [M] \rangle > 0. \tag{3.31}$$

Тогда $SW(K^{-1/2})$ корректно определено и $SW(K^{-1/2}) = \pm 1$.

Доказательство. Заметим, что в соответствии с дискуссией в параграфе 3.7 первая из этих гипотез относительно канонического расслоения вместе с тем фактом, что каноническое расслоение не является тривиальным, дает, что инвариант Зайберга–Виттена $SW(K^{-\frac{1}{2}})$ корректно определен (когда возмущение φ выбрано малым) несмотря на то, что $b_+ = 1$. Доказательство предыдущей теоремы показывает, что пространство модулей решений уравнений Зайберга–Виттена (3.27) при $\varphi = F^+_{A_0} + \omega$ состоит из одной невырожденной точки. Для того, чтобы показать, что точно такой же вывод имеет место при малом φ, нам необходимо проверить, что отсутствуют вырожденные решения уравнений Зайберга–Виттена с $\psi = 0$ при $\varphi = t(F^+_{A_0} + \omega)$ для любого $t \in (0, 1)$. Но наличие такого решения повлекло бы

$$F^+_A = t(F^+_{A_0} + \omega) \Rightarrow (1-t)\int_M (F^+_A) \wedge 0 \Rightarrow \int_M (F_A) \wedge \omega > 0.$$

Это противоречит второму предположению, поскольку $c_1(K) = -c_1(K^{-1}) = -2[F_A]$.

Чтобы описать примеры Дональдсона, нам необходимо использовать некоторые результаты из теории алгебраических поверхностей, которые можно найти в [19]. Пусть f и g — два однородных кубических полинома от трех переменных, определяющие отображение

$$[f, g]\colon P^2C \to P^1C, \quad [f, g,]([z_0, z_1, z_2]) = \\ = [f(z_0, z_1, z_2), g(z_0, z_1, z_2)],$$

кроме 9 точек P^2C, в которых f и g имеют общие нули. (На языке алгебраической геометрии, $[f, g]$ — это ***рациональное отображение***; см. [19], стр. 491 по поводу определения.) Прообраз точки общего положения в P^1C относительно $[f, g]$ есть риманова поверхность рода 1, определенная кубическим полиномиальным уравнением $f + \lambda g = 0$.

Чтобы справиться с девятью особенностями $[f,g]$, мы используем понятие раздутия алгебраической поверхности ([19], стр. 182). Раздутие M в девяти общих нулях f и g дает новую алгебраическую поверхность Y, диффеоморфную $P^2C\sharp(9\overline{P^2C})$ и настоящее голоморфное отображение $Y \to P^1C$, для которого прообраз точки общего положения по-прежнему является тором. Y — это пример эллиптической поверхности, как описано в [19], стр. 564–572. В соответствии с общей формулой для канонического расслоения эллиптической поверхности ([19], стр. 572)

$$c_1(K) = \mu(-[F]),$$

где $[F]$ — класс гомологий слоя $Y \to P^1C$ и μ — изоморфизм двойственности Пуанкаре, описанный в начале параграфа 3.5. Поскольку два различных слоя имеют пустое пересечение, и интеграл кэлеровой формы по слою должен быть положительным,

$$\langle c_1(K)^2, [M]\rangle = 0, \quad \langle c_1(K) \cup [\omega], [M]\rangle < 0.$$

Последнее неравенство подтверждает, что $SW(K^{-\frac{1}{2}})$ должен зануляться, поскольку $P^2C\sharp(9\overline{P^2C})$ имеет, как мы видели, метрику положительной скалярной кривизны.

Тем не менее мы можем модифицировать знак канонического расслоения, выполняя подходящие логарифмичекие преобразования слоев F, тем самым получая многообразие, удовлетворяющее гипотезам предложения. Логарифмическое преобразование, описанное в [19], стр. 566, вырезает трубчатую окрестность гладкого слоя и склеивает ее обратно с помощью нового диффеоморфизма вдоль границы, тем самым получая новую эллиптическую поверхность. Мы можем выполнить два логарифмических преобразования на Y, получая новую алгебраическую поверхность Z вместе с голоморфным отображением $Z \to P^1C$, такую, что два слоя (которые мы обозначаем через F_2 и F_3) имеют кратности два и три, и, следовательно,

$$[F] = 2[F_2] = 3[F_3].$$

Новая поверхность Z называется *поверхностью Долгачева.* Мы можем по-прежнему применить формулу для $c_1(K)$, но на этот раз мы получаем

$$c_1(K) = \mu(-[F] + [F_2] + 2[F_3]) = \mu((1/6)[F]).$$

В силу положительности интеграла от кэлеровой формы по F, (3.31) имеет место.

Долгачев показал, что Z односвязно, и возможно проверить, что Y и Z имеют одинаковые формы пересечений (см. [11]). Поэтому согласно теории Фридмана, Y и Z гомеоморфны. Тем не менее, из предложения следует, что $SW(K^{-\frac{1}{2}}) = \pm 1$, и, следовательно, Y и Z не являются диффеоморфными.

Используя более общие логарифмические преобразования, можно построить эллиптические поверхности, гомеоморфные $P^2C\sharp 9(\overline{P^2C})$, в которых $c_1(K)$ делится на произвольно большое целое число. (См. предложение 3.7 на странице 316 из [18].) При заданном четырехмерном многообразии, неравенства (3.5) и (3.13) дают ограничения на делимость $c_1(L)$ при $SW(L)$ определенном и ненулевом. Это ограничение также применимо к любому конечному набору гладких многообразий. Этот факт приводит к простому доказательству следующей поразительной теоремы:

Теорема 3 ([18], [34]). *Компактное топологическое многообразие $P^2C\sharp 9(\overline{P^2C})$ имеет бесконечно много различных гладких структур.*

Литература

[1] S. Akbulut, *Lectures on Seiberg–Witten invariants*, Proc. 1995 Gökova Geometry-Topology Conference, Scientific and Technical Research Council of Turkey, 1996, 95–118.

[2] N. Aronszahn, *A unique continuation theorem for solutions of elliptic partial differential equations or inequalities of the second order*, J. Math. Pure Appl. **36** (1957), 235–249.

[3] M. F. Atiyah, *K-theory*, Benjamin, New York, 1967.

[4] M. F. Atiyah, R. Bott, A. Shapiro. *Clifford modules*, Topology 3, Suppl. I (1964), 3–38.

[5] W. Barth, C. Peters and A. Van de Ven, *Compact complex surfaces*, Springer, New York, 1984.

[6] N. Berline, E. Getzler and M. Vergne, *Heat kernels and Dirac operators*, Springer, New York, 1991.

[7] B. Booss-Bavnek and K. P. Wojciechowski, *Elliptic boundary problems for Dirac operators*, Birkhäuser, Boston, 1993.

[8] R. Bott and L. Tu, *Differential forms and algebraic topology*, Springer, New York, 1982.

[9] P. Deligne, P. Etinghof, D. Freed, L. Jeffrey, D. Kazhdan, J. Morgan, D. Morrison and E. Witten, *Quantum field theory and strings: a course for mathematicians*, 2 volumes, American Mathematical Society, Providence, 1999.

[10] S. Donaldson, *An application of gauge theory to four-dimensional topology*, J. Differential Geometry **18** (1983), 279–315.

[11] S. Donaldson, *Irrationality and the h-cobordism conjecture*, J. Differential Geometry **26** (1987), 141–168.

[12] S. Donaldson, *Polynomial invariants for smooth* 4*-manifolds*, Topology **29** (1990), 257–315.

[13] S. Donaldson, *The Seiberg – Witten equations and 4-manifolds topology*, Bull. Amer. Math. Soc. **33** (1996), 45–70.

[14] S. Donaldson and P. B. Kronheimer, *The geometry of four-manifolds*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1984.

[15] N. Elkies, *A characterization of the Z^n lattice*, Math. Research Letters **2** (1995), 321–326.

[16] D. Freed and K. Uhlenbeck, *Instantons and four-manifolds*, Springer, New York, 1990.

[17] M. Freedman and F. Quinn, *Topology of 4-manifolds*, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1990.

[18] R. Friedman and J. W. Morgan, *On the diffeomorphism type of certain algebraic surfaces I, II*, J. Differential Geometry **27** (1988), 297–369.

[19] P. Griffiths and J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, Wiley, New York, 1978.

[20] M. Gromov and H. B. Lawson, *The classification of simply connected manifolds of possitive scalar curvative*, Annals of Math. **111** (1980), 423–434.

[21] V. Guillemin and A. Pollack, *Differential topology.* Prentice-Hall, New York, 1974.

[22] J. Kollar, *The structure of algebraic three-folds: an introduction to Mori's program*, Bull. Amer. Math. Soc. **17** (1987), 211–273.

[23] P. B. Kronheimer and T. S. Mrowka, *The genus of embedded surfaces in the projective plane*, Math. Research Letters **1** (1994), 797–808.

[24] S. Lang, *Differential and Riemannian manifolds*, Springer Verlag, New York, 1995.

[25] H. B. Lawson and M. L. Michelsohn, *Spin geometry*, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1989.

[26] V. Mathai and D. Quillen, *Superconnections, Thom classes, and equivariant differential forms*, Topology **25** (1986), 85–110.

[27] D. McDuff and D. Salamon, *J-holomorphic curves and quantum cohomology*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1994.

[28] J. Milnor, *Morse theory*, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1963.

[29] J. Milnor and D. Husemoller, *Symmetric bilinear forms*, Springer, New York, 1973.

[30] J. Milnor and J. Stasheff, *Characteristic classes*, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1974.

[31] C. W. Misner, K. Thorne and J. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman, New York, 1973.

[32] J. Morgan, *The Seiberg – Witten equations and applications to the topology of smooth four-manifolds*, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1996.

[33] J. Morgan, Z. Szabo and C. Taubes, *A product formula for the Seiberg – Witten invariants and the generalized Thom conjecture*, J. Differential Geometry **44** (1996), 706–788.

[34] C. Okonek and A. Van de Ven, *Stable vector bundles and differentiable structures on certain elliptic surfaces*, Inventiones Math. **86** (1986), 357–370.

[35] M. Peskin and D. Schroeder, *An intoduction to quantum field theory*, Perseus Books, Reading, Mass. 1995.

[36] S. Smale, *An infinite-dimensional version of Sard's theorem*, Amer. J. Math. **87** (1966), 861–866.

[37] N. Steenrod, *The topology of fiber bundles*, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1951.

[38] C. Taubes, *The Seiberg – Witten and Gromov invariants*, Math. Research Letters **2** (1995), 221–238.

[39] F. W. Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Scott – Foresman, Glenview, Illinois, 1971.

[40] G. W. Whitehead, *Elements of homotopy theory*, Springer Verlag, New York, 1978.

[41] E. Witten, *Monopoles and four-manifolds*, Math. Research Letters **1** (1994), 769–796.

Предметный указатель

Джон Дуглас Мур

Лекции об инвариантах Зайберга – Виттена

Дизайнер М. В. Ботя
Технический редактор А. В. Широбоков
Компьютерная подготовка: О. С. Михайлова
С. В. Высоцкий
Корректор М. А. Ложкина

Подписано в печать 01.01.01. Формат $84 \times 108^1/_{32}$.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 8,01. Уч. изд. л. 8,12.
Гарнитура Computer Modern Roman. Бумага офсетная № 1.
Заказ № 5. Тираж 1000 экз.

Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика»
426057, г. Ижевск, ул. Пастухова, 13.
Лицензия на издательскую деятельность ЛУ № 084 от 03.04.00.