В. П. Маслов

КВАНТОВАНИЕ ТЕРМОДИНАМИКИ И УЛЬТРАВТОРИЧНОЕ КВАНТОВАНИЕ

Институт Компьютерных Исследований

Москва
2001

УДК 530.145

Маслов В. П.
Квантование термодинамики и ультраврторичное квантование. — Москва: Институт компьютерных исследований, 2001, 384 стр.

С 1938 года, когда была открыта сверхтекучесть, должна была быть поставлена проблема: найти такое температурное распределение, которое при нулевой температуре давало бы отличную от нуля энергию. Старая термодинамика приводила к остановке всякого движения. По-видимому, только квантование термодинамики, которое провел автор, позволяет предъявить таковое в самом общем случае и решить целый ряд других старых проблем.

Для научных работников, студентов и аспирантов.

ISBN 5-93972-082-X

http://rcd.ru

Оглавление

ЧАСТЬ II. КВАНТОВЫЙ ХАОС

ЧАСТЬ III. ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ СРЕДНЕГО ПОЛЯ. СУЩЕСТВОВАНИЕ, АСИМПТОТИКИ И КВАНТОВАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эту книгу следовало бы назвать введением в квантование терминодинамики и ультравторичное квантование, хотя как квантование термодинамики, так и ультравторичное квантование придумано антором. Дело в том, что основные приложения изложенной здесь теории содержат весьма громоздкие вычисления и асимптотические разложения, которые приводятся в оригинальных статьях автора.

В этой книге автор попытался познакомить читателя с основной концепцией и теми соображениями и асимнтотическими решениями, которые к ней нривели.

Другая цель — показать, с какими новыми математическими нроблемами связана эта теория и в каких направлениях она может развиватьси в математической физике.

Неоценимую помощь в работе над книгой автору оказали его ученики, прежде всего Г. Коваль, а также А. Рууге и И. Князева, которым я выражаю самую теплую признательность.

Мне были весьма нолезны горячие дискуссии и споры с И. А. Фоминым и А. Ф. Андреевым. Приношу им свою глубокую благодарность.

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Два разных языка

Эту книгу я хотел бы написать так, чтобы ее поняли как математики, так и физики. Это очень трудная задача. Один раз я пытался ее решить, когда писал свою первую книгу «Теория возмущений и асимптотические методы», но получилось так, что ни те, ни другие не поняли.

Почему это трудно? Потому что язык у физиков и у математиков совершенно разный и логика разная. Когда люди говорят пусть даже на одном и том же русском языке, но используют разные его стили, разные жаргоны, то может получиться полная ерунда.

Об этом хорошо написано в рассказе Чехова «Новая дача». Когда инженер, приехавший строить мост, говорит крестьянам: «Мы же к вам хорошо относимся, платите и вы нам той же монетой», то крестьянин реагирует так: «Монетой не монетой, а по гривенничку со двора надо будет собрать.»

Так что разница в языке играет существенную роль. В качестве примера я постараюсь рассказать несколько эпизодов из моей жизни, которые эту роль прояснят.

Первый эпизод такой. Я обнаружил в книге Б. Б. Кадомцева [3] «Коллективные явления в плазме» на странице 76 утверждение об асимптотике одного интеграла «при больших T». Далее уже на 77-й странице автор пишет: «А при очень больших T этот самый интеграл будет выглядеть по-другому». Эта книга замечательная, более того, является моей настольной книгой, и Б. Б. Кадомцев — замечательный физик, но такие пассажи математику понимать трудно. И мне пришлось очень долго разбираться, что это на самом деле означает. Оказалось, что просто есть еще один большой параметр, о котором как бы умалчивается. По отношению к этому параметру первоначальные T будут того же самого порядка, а «очень большие T» — гораздо большего порядка, чем этот большой параметр.

Вообще, с малыми и большими параметрами, которые используют физики, довольно трудно разобраться. Тот же Кадомцев на странице 150 и 151 постоянно пишет: «малой, но конечной амплитуды». Четко сформулировать, что это значит и как используются эти малые параметры, это уже задача математиков.

Однако чаще всего навести математический порядок в физическом тексте чрезвычайно трудно. Физик может отбрасывать какие-то члены, зная из эксперимента, что они малы, а иногда и просто подгоняет под эксперимент. Эти манипуляции напоминают мне известную притчу об отце Онуфрии: «Отец Онуфрий оторвал огурец, оторвав, откусил, откусив, отплюнул, отплюнув, отбросил». Математику же иногда трудно догадаться, почему физик отбросил те или иные слагаемые. Боголюбов говорил, что он всю жизнь занимался тем, что искал малые параметры.

Даже если физики и математики что-то доказывают примерно одинаково, то располагают это в разном порядке. Так, математик сначала формулирует результат в виде теоремы, а потом ее доказывает.

Физик же делает вывод, а результат этого вывода (или теорему) формулирует потом.

В каком-то смысле математический подход лучше, потому что сначала формулируется результат. Но при этом математический текст труднее понимать, чем физический, потому что последний не содержит разных дополнительных условий, которые обычно содержит теорема. Например, условие принадлежности функции к такому-то классу. Это все, так сказать, пропускается мимо, поэтому текст читается гораздо проще. Я бы сказал так, что если физический и математический тексты посвящены одному и тому же, то иногда по физическому тексту можно четко восстановить математическое доказательство. Для понимания лучше, чтобы сначала следовал физический текст, как бы предварительный, эвристический, а затем уже — математическое и подробное доказательство.

Или еще пример. У математиков Фурье-образ функции от x уже является функцией от сопряженной переменной, скажем, функцией от k, а от x уже не зависит. Но у Кадомцева в книге, о которой шла речь, на 200-й странице определен Фурье-образ функции E, как E от k, а дальше это E_k все равно зависит от x. На странице 205 это E_k дифференцируется по x.

Другое «недоразумение» встречается в «Термодинамике, статистической физике и кинетике» Ю. Б. Румера и М. Ш. Рывкина [68]. Равновесное состояние ферми- и бозе-газа в этой книге ищется с помощью дифференцирования энтропии по переменному числу частиц N_i, обладающих энергией ε_i, при постоянном фиксированном числе g_i (g_i число «ячеек»). Далее на странице 142 авторы пишут, что g_i пропорционально числу частиц N_i.

С другой стороны, физики не могут понять, что же математики хотят доказать, и не принимают косвенных доказательств.

Я приведу пример моей беседы с теперь уже знаменитым физиком Анатолием Александровичем Власовым.

Я тогда был студентом па кафедре, которой он заведовал. У меня на втором или третьем курсе появились математические интересы. Я захотел переходить на мехмат и обратился к заведующему кафедрой Власову, с которым у меня были очень хорошие отношения:

— Анатолий Александрович, я решил переходить на мех-мат, подпишите, пожалуйста, мне заявление.

— Нет, — говорит он, — я просто так Вас не отпущу. Я сначала нроверю ваши математические способности. Решите мне математическую задачу, и только носле этого н вашу бумагу подпишу.

Я говорю:

— Хорошо, дайте, пожалуйста, задачу.

И Власов дает мне задачу:

— Решение волнового уравнения можно представить в виде формулы для запаздывающего потенциала, а можно — для опережающего. Докажите, что эти две формулы совнадают.

Я отвечаю:

— Хорошо, я это могу сделать.

Потом доказываю ему: решение волиового уравнения единственно нри одних и тех же начальных данных. Проверяем начальные данные, нровернем то, что эти выражения удовлетворяют волновому уравнению, те и другие начальные данные совпадают, следовательно, эти решения совпадают.

Власов говорит:

— Нет, я этого не понимаю. Вы докажите, что они равны, а не философствуйте.

— Анатолий Александрович, позвольте, — отвечаю я, – давайте я прямо по нунктам буду доказывать. А в каждом нункте, с котором Вы не согласны, Вы так мне и скажете: Я не согласен. Давайте так рассуждать.

Дальше я начинаю доказывать по нунктам: сначала докажем, что это единственно, затем, что удовлетворяет тому-то и тому-то, а раз так, то нишем разность и так далее. Иначе говоря, стал объяснять более подробно, как студенту. Он соглашается со мной:

— Да, с этим пунктом я согласен, н с этнм пунктом согласен и так далее.

Я говорю:

— Анатолий Александрович, вот Вы со всеми нунктами согласны, так что получается, что они равны.

Он:

— Нет, н не понимаю.

И тем самым он отказывается подписать мне бумагу. И уходит. Я за ним вприпрыжку:

— Анатолий Александрович, вот Вы же сказали, что и с этим согласны, и с этим.

Он опять:

— Но я не понимаю.

И так, быстро спускаясь по лестнице, он начал бить себя по лбу и говорить:

— Я не понимаю. Я - дурак. Да, я — дурак и не понимаю.

Так что А. А. Власов не мог воспринять косвеное доказательство. Он хотел только, чтобы я непосредственно вывел из одной формулы другую.

Еще был такой эпизод. Мой ученик Б. Дубнов защищал свою дипломную работу и должен был получить отметку. Тогда я уже работал на кафедре математической физики, а от кафедры теоретической физики присутствовал Анатолий Александрович Власов. И вот он задал моему ученику вопрос: «Можно ли через две точки провести прямую?» Дубнов посмотрел в пол, подумал минуту и сказал: «М-м-м, можно». Тогда Власов вскочил и закричал: «Два! Вот она, ваша топология! Никогда, сколько бы вы ни целились, из одной точки в другую вы не попадете!» И, между прочим, как раз эта идеология и послужила основой для того, чтобы он написал свои знаменитые уравнения Власова.

Физики не очень хорошо понимают параметры и асимптотики. Я, по крайней мере, могу назвать одного замечательного физика Якова Борисовича Зельдовича, испытывавшего большие трудности при выступлении на математическом семинаре. Он, кстати, очень стесняясь, хотя был совсем не робким человеком, рассказывал на семинаре Гельфанда свою работу. При этом никак не мог объяснить то, что у него приведены асимптотические формулы. Я был тогда студентом и с места пытался крикнуть: «Это — асимптотика по высокому барьеру». Но Гельфанд замахал на меня рукой, чтобы я не вмешивался.

Позднее, когда Зельдович уже занимался космологией, я иногда звонил ему и спрашивал, например, о какой-нибудь моей формуле, годится она или нет. Тогда он в уме начинал очень быстро считать: «Так-так, десять в минус десятой, то-то и то-то в минус пятнадцатой. . . », и отвечал: «Нет, эта формула не подходит». Я-то только мог сказать, что имеются такие-то асимптотики по таким-то параметрам, а он умел сразу усмотреть в них числа. Вместе с тем, на докладе у Гельфанда, как я говорил, он побаивался и не мог исчерпывающе объяснить свою работу.

Я также помню доклад Фрадкипа на семинаре Гельфанда. Ему тоже приходилось трудновато. Так что у физиков и математиков есть момент взаимного непонимания и даже некоторого презрения.

С другой стороны, как-то один из крупнейших математиков делал доклад па семинаре Ландау. Кажется, доклад был о методе наименьших квадратов. Мне об этом рассказывал один человек, возможно, он преувеличивал. Ландау спросил у этого человека о докладчике:

— Что, Л. — совсем дурак?

— Ну что Вы.

— Ну а что у него есть?

— У него есть оценки в теории вероятности.

— Оценки, — сказал Ландау, — я не считаю результатом.

— У него есть серьезные работы по теории чисел.

— Теорию чисел я не считаю наукой.

При этом физики часто хотят, чтобы им были предъявлены на их языке некоторые мпемопические правила (типа правила «буравчика»), и между физиком и математиком происходит разговор, похожий на описанный в «Свадьбе» Чехова: Ять: «Не хватает электрического освещения». Жигалов: «Нет, брат, ты давай огня, который натуральный, а не умственный».

Когда на докладе я предъявляю новую формулу, математики просят: «Наметьте доказательство», а физики спрашивают: «Как Вы до этого додумались?».

У физиков в их мышлепии всегда очень большую роль играет эксперимевт. Например, знаменитая формула Планка, полученная в начале века и давшая константу Планка (только позже, в 1915 году Бозе усмотрел в пей статистику Бозе – Эйнштейна), сразу совпала с экспериментом. Именно этого и добивался Планк, когда угадывал эту формулу.

Так же и другие физики учитывают и держат в голове одновременно большое количество экспериментов и объясняют, почему откинули тот или иной член в каких-то соотношениях. Можно из логических соображений привести этому контрпример из другой области. Но в конечном счете оказывается, что формула правильная.

Расскажу еще один эпизод. Я когда-то еще в шестьдесят четвертом году написал асимптотику для фейнмаповского коптинуального интеграла и метод стационарной фазы, куда вошел индекс Морса.

Я написал формулу и доказал ее косвенным образом, потому что коптинуальный интеграл еще не был математически строго введен. Потом выясняется, что физики стали сами эту формулу выводить, и я тут оказывался как бы ни при чем. Тогда Л. Д. Фаддеев одному из физиков сказал:

— Что же Вы делаете? Это же Маслов доказал.

— Нет, — отвечает физик, — Маслов не доказал, он просто догадался, но он же не показал, что так получается, он не вывел эту формулу. А вот мы ее сейчас выведем.

Этим они как бы вывели меня из терпения, и я решил написать доказательство на «физическом» языке. Я написал как бы пародию па доказательство: «Вот здесь фейнмановский интеграл, вот там вставим фейнмановскую диафрагму, вот тут проходят такие-то траектории, а вот — трубка» и т. п. Одним словом, я бы это пазвал пародией на доказательство и опубликовал все это в журнале «Теоретическая и математическая физика». Эту статью физики поняли, стали на нее ссылаться, и эта формула осталась за мной. Но когда Гюллимен и Стенберг выпустили книгу «Геометрические асимптотики», посвященную, в частности, моим работам, то они написали там так: «Вот это — формула Маслова, а вот — «доказательство» Маслоаа». Приаели это «доказательство» и поставили кавычки. Эта книга и еще одна фиэическан статья повредили мне тем, что математики стали говорить: «А он не настоящий математик, его работы падо еще строго доказывать». Вот так я метался между этими двумя языками.

Есть еще такой момент. У Фока была приведена формула, которан легко доказывалась методом стациопарной фазы. Потом эту формулу привел Ю. Егоров. В. И. Арнольд, которому Ю. Егороа дал эту формулу в качестве заметки в «Успехи математических наук», спросил меня, стоит ли, по моему мнению, публиковать эту работу. Я сказал, что, по-моему, стоит, т. к. они разговаривают на разных языках. Хотя, с одной сторопы, это, конечно, то же самое, но, с другой стороны, это — разные яэыки. Арнольд опубликовал эту работу. В результате эта теорема стала знаменитой теоремой Ю. Егорова, которая вошла во все учебники.

Вместе с тем, если носмотреть па нослесловие Фока к кииге Дирака, можно заметить, что если брать асимптотику по большим частотам, то формула при этом получается такая же, как если бы мы брали асимптотику по гладкости. Что касается доказательства, то в моей книжке [11] я на эту формулу ссылался и писал, что из метода стационарной фазы доказательство очевидно. Тем не менее, это разные подходы, разные языки и разные понимапия.

Хочу привести еще такой эпизод, хотя он больше похож на анекдот. Это произошло с человеком, которого я хорошо знал —

он учился на курс старше меня. Про него рассказывали, что когда его хотели призвать в армию, он принес справку о том, что он сумасшедший, но теоретической физикой заниматься может. Один преподаватель рассказывал про этого студента следующее. Во время ответа на экзамене он сказал, что такой-то факт основывается на лемме о том, что сумма модулей равна модулю суммы. Преподаватель — это был Борис Михайлович Будак (он мне и рассказал этот эпизод) — очень остроумный человек, говорит: «Хорошо, лемма очень интересная, пожалуйста, докажите ее». Через какое-то время он, походив между рядами, снова подошел к этому студенту и спросил: «Ну как, доказали?».

«Да, конечно, я доказал», — отвечает тот. «И как же?», — допытывается преподаватель. «А я рассмотрел огромное число примеров и в подавляющем большинстве случаев это так». Этот «анекдот» про моего знакомого, кстати, очень милого человека, который впоследствии действительно успешно занимался теоретической физикой, на самом деле имел место.

Всем известно доказательство физиков того, что все нечетные числа простые: один — простое число, три — простое число, пять — тоже простое число, семь — тоже, девять — это редкое исключение, одиннадцать — простое, тринадцать — простое, достаточно, доказательство закончено. В этой шутке есть доля истины.

Известно, какому разгрому подверг Ландау доклад Боголюбова, когда он рассказывал свою знаменитую работу 1947-го года о сверхтекучести. Я знаю, хотя не был тогда с ним знаком, насколько он переживал этот «разгром». Ему в тот же день позвонил академик И. М. Виноградов, поставивший его доклад на отделении математики и физики, и сказал: «Николай Николаевич! Что же Вы так меня подвели». Николай Николаевич всю ночь пересчитывал, а утром позвонил И. М. Виноградову и сказал: «Иван Матвеевич, я пересчитал, все правильно».

Потом, как говорят, Мигдал две недели проверял работу Боголюбова, и, наконец, ее как-то признали. Так что вторгаться в область других наук очень не просто. Тем не менее, хотелось бы, чтобы физики эту мою работу восприняли и поняли.

Непонимание в языке, или вернее в жаргоне, между физиками и математиками столь велико, что напоминает известный анекдот: Учитель говорит ученику, написав на доске уравнение: «Найдите x», а тот отвечает, указав на доску: «Да вот же он».

В. И. Арнольд рассказывал мне недавно, что когда-то он решил одну задачу, поставленную физиками. Его научный руководитель А. Н. Колмогоров рекомендовал ему послать эту работу в физический журнал, поскольку она представляет интерес для физиков и задача-то была поставлена физиками. Арнольд послал ее в ЖЭТФ. Через некоторое время ему позвонил академик Леонтович, с семьей которого семья Арнольда была дружна, и сказал: «Дима, приходите ко мне, я сварю гречневую кашу и мы поговорим о Вашей статье». Арнольд пришел, и Леонтович ему сказал: «Вы употребляете там слова «поверхность тора» и «мера», а физики не знают, что это такое; слово «доказательство» физики тоже не признают. Поэтому ешьте кашу, а статью Вашу мы отклоняем». Позже Арнольд узнал, что отзыв давал сам Ландау, а Леонтович только передавал его слова. Арнольд напечатал статью в ДАН и в дальнейшем на нее было огромное количество ссылок в физической литературе (и только в физической), а те слова, которые вызвали протест, давно утвердились и в физических учебниках.

Этот рассказ напомнил мне слова известного композитора Николая Метнера, когда он прослушал «Стальной скок» Сергея Прокофьева: «Если это — музыка, то я — не музыкант».

Когда я делал доклад у физиков на самом престижном семинаре по данному вопросу, на котором присутствовали не только теоретики из Института физических проблем, но и физики из Института Ландау, то, объясняя переходы с одного уровня энергии на другой, я изобразил уровни параллельными отрезками. Уровни энергии — это, фактически, точки, а я просто для наглядности нарисовал их черточками. Мне задали вопрос: «Почему они у Вас эквидистантны?» Я ответить не успел, т. к. за меня ответил кто-то из членов семинара. После чего началось довольно бурное обсуждение вопроса, почему они эквидистантны. После некоторых прений и переговоров обсуждение закончилось тем, что встал руководитель семинара и громким голосом объяснил, что на самом деле я имел в виду. Я совершенно ничего не понял, но промолчал, чтобы не затягивать доклад до бесконечности.

История с этими черточками напомнила мне историю со стихотворением Валерия Брюсова. Он декламировал его в компании поэтов и, возможно, своих поклонников. В стихотворении была фраза: «Упаду на седой подоконник». Тут же все стали обсуждать, что Брюсов имел в виду и почему он так написал. И так эту фразу интерпретировали, и этак, а потом спросили: «Что же Вы имели в виду в таком определении подоконника?» Брюсов ответил: «Просто он у меня такого цвета».

§ 2. Старые проблемы

Я сам кончал физический факультет, но потом мне пришлось заниматься задачами, которые были связаны с закрытой тематикой. Я работал совместно с инженерами и от теоретической физики несколько отвлекся. Затем, когда я был назначен заведующим кафедрой квантовой статистики и теории поля, где преподается термодинамика, то мне волей-неволей пришлось заново изучать эти науки. Но это на самом деле не всегда плохо. Эйнштейн как раз шутил на тему, как удалось ему открыть свои законы. Он говорил, что был несколько туповат и поэтому, когда все всё уже поняли, он еще не понял и ему пришлось в этом разбираться более основательно.

Когда я снова стал знакомиться с многими вопросами теоретической физики, то обнаружил очень серьезную дыру. В математике такие факты обычно формулируются как проблемы. А дыра заключалась вот в чем. Все функции распределения, которые были описаны когда-либо физиками и основывались в основном на распределении Гиббса, при температуре, равной нулю, давали энергию, равную нулю. (Энергия системы при температуре, стремящейся к нулю, стремится к нулю.) Вместе с тем, где-то в конце тридцатых годов было показано экспериментально, что при температуре, равной нулю, есть сверхтекучесть, т. е. есть энергия, отличная от нуля. Причем сверхтекучесть проявляется как при движении жидкости вдоль тора, так и по изогнутому капилляру. Этот момент заставил меня просматривать все работы по квантовой статистике под этим углом.

Саму сверхтекучесть Ландау объяснил, с моей точки зрения, совершенно неожиданным образом. Без привлечения обычной термодинамики, а через спектр уравнения Шредингера. Он показал, что если система находится не на нижнем уровне энергии уравнения Шредингера, не в основном состоянии, то, несмотря на это, она устроена так, что на нижний уровень переход почти запрещен при большом числе частиц. Поэтому эта система, при некотором возмущении, о котором Ландау говорил как о трении, не может скатиться на более низкий уровень, находясь в таком метастабильном состоянии, и поэтому продолжает течь. Иначе говоря, как бы есть еще такая специальная метастабильная серия, на нижнем уровне которой мы находимся, а на самую основную серию переход затруднителен.

Есть еще критическая скорость Ландау. Это означает, что имеется критический уровень энергии, такой, что если энергия жидкости больше него, то жидкость перестанет быть сверхтекучей. Иначе говоря, спектром определяется и фазовый переход из сверхтекучей фазы в нормальную.

Боголюбов в своей знаменитой работе блестяще подтвердил это объяснение сверхтекучести Ландау и дал математическую теорию, описывающую эту точку зрения[1]. Он рассмотрел систему не в капилляре, а на торе. Иначе говоря, рассмотрел задачу с периодическими условиями. Как бы вся эта система находится на некотором торе. Далее был предельный переход от тора ко всему пространству (радиус тора увеличивался до бесконечности). Фазовый переход через критическую скорость Ландау у Боголюбова, если перевести его на строгий математический язык, доказан для скорости угловой, т.е. скорости на торе (дискретной!). У Ландау и Лифшица в «Статистической физике» (стр. 94) [67] как раз и говорится о том, что угловая скорость есть термодинамическая величина, и, следовательно, по ней может совершаться фазовый переход. А по скорости, уточняет Ландау, которая прямолинейная, у нас получается просто сдвиг Галилея, и ничего не должно от этого меняться.

Отсюда я сделал заключение о том, что если вводится температура, то тоже должен быть спектр, т. е., например, очень маленькая температура должна не сильно изменить приведенную концепцию. Температура же добавляется таким образом, что она умножается на энтропию. Значит, энтропия тоже должна быть оператором и свободная энергия тоже должна иметь спектр. Это, конечно, доказательство в стиле Паниковского, который доказывал, что гири золотые таким образом: «А из чего же они, по-вашему?» Соображение: «А что же еще тут может быть?», приводило меня к мысли о том, что свободная энергия тоже должна быть оператором.

В физике не ставятся проблемы так, как в математике. Например, проблемы Гильберта и другие подобные. Тем не менее можно сказать, что открытие сверхтекучести и работа Боголюбова поставили следующие проблемы: найти и предъявить такие температурные распределения, чтобы при температуре, равной нулю, энергия была бы отлична от нуля. Боголюбов в 1947-м году, в результате наводящих соображений Ландау, посчитал для слабо неидеального бозе-газа при температуре, равной нулю, критическую скорость Ландау. Тогда естественно было бы поставить вопрос: как же меняется эта критическая скорость, когда температура больше нуля? Какова зависимость критической скорости от температуры, при пусть даже очень малой, но отличной от нуля температуре? Эта проблема должна была быть поставлена уже в 1947-м году, после знаменитой работы Боголюбова. Поэтому ответ на эти вопросы является ответом на вопросы более чем полувековой давности.

[1] Именно её он докладывал (см. выше).

Интересно, что Ландау в статье 1948-го года [76] так оценил работу Боголюбова: «...Н. Н. Боголюбову недавно удалось с помощью остроумного метода вторичного квантования определить в общем виде энергетический спектр бозе-эйнштейновского газа со слабым взаимодействием между частицами».

К вторично квантованному уравнению Шредингера Боголюбов применил «следующий прием для приближенного решения уравнения:

В виду того, что $N_0 = a_0^* a_0$ (N — число частиц, a_0^*, a_0 — операторы рождения и уничтожения) весьма велико по сравнению с единицей, выражение $(a_0^* a_0 - a_0 a_0^*)$ должно быть мало по сравнению с самими a_0, a_0^*, поэтому будем считать a_0 и a_0^* обычными числами и пренебрежем их некоммутативностью». [77], стр. 212.

При этом Боголюбов сослался на аналогичное замечание, использованное Дираком в его монографии «Основы квантовой механики» [78], § 63.

Затем этот прием постоянно применялся в физике. Математически он не совсем корректен. Но здесь уже действует доктрина Геббельса: «Истина — это часто повторяемая ложь».

В качестве одной из задач у меня возникла такая: существует ли такое обобщение вторичного квантования, которое при применении этого принципа давало бы сверхпроводимость, а на N-частичном подпространстве, подобно вторично квантованным уравнениям, совпадало бы с обычным уравнением Шредингера. Действительно, я нашел такое квантование и назвал его ультравторичным.

Сам этот принцип как отвечающий асимптотике, приводящей к термодинамике, мы не будем здесь доказывать и даже приводить условие, при котором это имеет смысл. Уравнения, к которым он приводит, мы называем унитарно-нелинейными и подробно изучаем их в третьей части данной книги.

В книге [64] приводятся некоторые частные условия, которые отвечают этому принципу, и строится точная асимптотика исходного многочастичного уравнения.

Мы приведем лишь один точно решаемый важный пример перехода от гиббсовского ансамбля в хаотическом состоянии (с энтропией, отличной от нуля) и увидим на этом примере, что с соответствующим унитарно-нелинейным уравнением этот ансамбль связывает еще и другой физический принцип, который хотя мы нигде в теоремах и не будем использовать, но будем иметь в виду.

Этот принцип Боголюбов называет «энергетически выгодным состоянием». Это означает, что рассматриваются только возмущения типа «трения», т. е. такие, которые приводят к падению частиц на более низкие уровни энергии. Если же вероятности таких переходов очень малы, то состояние (уровень энергии) является метастабильным.

Вероятности перехода, как известно, определяются матричными элементами данного возмущения с данного состояния на другие состояния.

Следовательно, принцип «энергетической выгодности» заключается в том, что мы должны рассматривать только возмущения – трения, т. е. считать, что матричные элементы перехода на более высокие уровни равны нулю (или пренебрежимо малы). Это означает, в частности, что возмущения – трения не эрмитовы и процесс возмущения – трения необратим.

Мы не будем здесь изучать этот класс возмущений, но о самом принципе будем помнить при определении метастабильных состояний. Именно в силу этого принципа, основным состоянием системы, отвечающей положительно определенному оператору Гамильтона, называется его минимальное собственное значение.

Заметим, однако, что класс рассматриваемых возмущений играет существенную роль. Например, если мы рассматриваем фермионы, т. е. антисимметрические (относительно перестановки частиц) собственные функции многочастичного (симметричного относительно этой же перестановки) оператора Гамильтона, то возмущения должны быть тоже симметричными, иначе фермион может превратиться, в результате возмущения, в бозон!

Как уже следует из предыдущего, я введу (самосопряженный) оператор свободной энергии, зависящий от температуры. Его нижнее собственное значение (основное состояние) будет совпадать, разумеется, с распределением Гиббса и переходить при температуре, стремящейся к нулю, в основное состояние оператора Гамильтона (оператора внутренней энергии).

При применении же ультравторичного квантования (что является лишь представлением оператора свободной энергии, т. е. «тождеством») и применении вышеизложенного приема — принципа Дирака – Боголюбова — получаются метастабильные состояния, отвечающие уравнениям типа БКШ – Боголюбова общего вида, зависящие от температуры.

Для решения поставленных задач пришлось ввести еще ряд понятий: серии, ямы, сериалы, статистический спин, квазичастицы статистического ансамбля. Эти понятия — новые и, следовательно, повторялись недостаточно часто, чтобы физики их восприняли как истину.

Например, простой факт: у двумерного квантового осциллятора с несоизмеримыми частотами в квазиклассике (при $h \to 0$) расстояние между точками спектра имеет порядок $O(h^2)$, а испускает он кванты $O(h)$, следовательно, переход между ближайшими точками спектра запрещен при $h \to 0$, и, значит, они относятся как бы к разным сериям. Пример вызывал недоумение у физиков, хотя понятие «серии» экспериментаторам известно и они знают на практике, что отнюдь не все уравнения энергии (собственные значения) определяют серию. Тем более на совсем не привычные понятия зрелый физик смотрит очень настороженно.

§ 3. Различные картины N тел и различные их представления

Мне удалось ответить на эти и другие вопросы с помощью установления некоторых новых представлений уравнения Шредингера, обобщающих метод вторичного квантования. Как известно, не сразу было установлено, что матричная механика Гайзенберга (гайзенберговская картина) и уравнение Шредингера (шредингеровская картина) эквивалентны и матричная механика является некоторым «представлением» уравнения Шредингера. Иначе говоря, имеются тождества, которые переводят одну «картину» в другую. Точно так же запись уравнения Шредингера (для симметрических решений — бозонов) во вторично квантованном виде эквивалентна исходному уравнению. Здесь тоже есть тождества, переводящие одну «картину» в другую. Я нашел существенно более общее, чем обычное вторичное квантование, представление уравнения Шредингера и назвал его ультравторичным. Эта новая «картина» позволила проквантовать термодинамику, энтропию, а с ней и свободную энергию. Попытаюсь здесь наглядно объяснить эту «картину» и эквивалентность различных «картин».

При рассмотрении задачи многих тел имеют место два аспекта. Эти многие тела могут находиться в нашем трехмерном пространстве и как-то двигаться, может быть, сталкиваться, воздействовать друг на друга. Все это в нашем трехмерном пространстве. Но мы можем рассматривать их и по-другому. А именно: можем рассматривать эти N тел как одну точку (под N телами я понимаю N материальных точек) в $3N$-мерном пространстве. И в этом $3N$-мерном пространстве эта одна точка совершает некоторое движение, перемещается, а мы можем следить за этим перемещением. В некоторых случаях оказывается полезен один из этих двух подходов, двух аспектов, а в других случаях — другой. Так, с точки зренин математики, проще рассматривать одну точку. А с точки зренин физики, так как мы живем все-таки в трехмерном пространстве, хотелось бы нонимать, как материальные точки ведут себя в нашем трехмерном пространстве. Это более естественная «картина». Можно, например, следить в трехмерном нространстве за одной частицей, которая находится в ноле всех других частиц. В частности, теория самосогласованного поля Власова на этом основана. Там мы считаем, что все частицы нримерно одинаковы и имеют одинаковое раснределение. Мы можем считать, что одна частица как бы взаимодействует с другой. А та другая — это та же самая частица, т. е. раснределена она точно так же как и нервая.

Недаром Власов, как я говорил ранее, утверждал, что из одной точки в другую никак нонасть нельзя. Нужно эту точку как-то «размазать» в пространстве, т. е. рассматривать плотность вероятности ее пребывания в данном месте простраяства.

С математической точки зрения, важно было бы не нриближенное, а точное уравнение в трехмерном пространстве, которое бы соответствовало уравнению движения частицы в $3N$-мерном пространстве.

Оказывается, это можно сделать не приближенно, как Власов, а точно с помощью вторичного квантования, т. е., иначе говоря, рассматривать поведение в трехмерном пространстве не функций, а операторов — операторов рождения и уничтожения. Впервые это было сделано Дираком для квантовой механики. Однако рассматривать именно квантовую механику совершенно не обязательно. Так, Шенберг рассматривал классическую механику (это был приблизительно 1953–1956 год) и применил этот метод вторичного квантоваяия к классическим объектам и к классической статистической физике.

На самом деле, это совершенно общая вещь. Мы, например, с моим учеником нрименили этот метод к случаю N нолей и провели как бы третичное квантование, которое на самом деле являлось вариантом вторичного.

Здесь возникает естественное обобщение. Если мы рассматриваем N частиц как одну частицу в $3N$-мерном пространстве, то ночему бы нам не рассматривать среди этих N частиц, например, две частицы. Их я могу считать одной частицей в шестимерном нространстве и рассматривать дальше эти пары шестимерных частиц. Каждая из них аналогична одной частице в $3N/2$-мерном пространстве. Так что я могу одновременно следить за парой частиц и за одной частицей. Иначе говоря, имеются некоторые шестимерные частицы (пары) и некоторые трехмерные частицы и все это вкладывается в соответствующее пространство. Если пар у меня k штук, а «одиночных» частиц — m, то $2k + m = N$, где N — общее число частиц.

Помимо координат точки (местоположения точки), могут быть еще другие степени свободы. Например, в классической механике это могут быть еще и импульсы, а в квантовой теории — еще и спины или еще какие-нибудь другие степени свободы.

§ 4. Статистический спин

В той теории, которую я здесь буду излагать, я добавляю еще одну степень свободы — минимальную — просто номер. Кроме того, что частица находится в каком-то месте пространства, ей присваивается еще и номер. Мне не известно, чтобы эта точка зрения имела в квантовой механике хорошую интерпретацию. Хотя в теории Бора у нас есть электроны, и мы можем их менять местами и при этом ничего не меняется. Это — принцип тождественности. Но, кроме этих электронов, есть еще номера орбит, их тоже можно рассматривать как присвоенные электронам номера.

Переход из квантовой механики в классическую, как мы знаем, связан с представлениями уже о классических объектах. В работах [49]–[51] приведен предельный переход в классику для статистики Ферми–Дирака[1]. Классическим объектом, отвечающим принципу запрета Паули, является очередь. Предположим, что нам надо купить большое количество сахара, а в одни руки дают лишь по полкило[2]. У стоящих в очереди представителей нашей компании могут быть номера или, говоря более грубо, номерки, которые кем-то выдаются. При этом очередь может быть и очень длинной. Люди могут отмечаться ночью, могут меняться своими номерками, но при этом у каждого остается какой-то номерок. От перемены их мест конечный результат не меняется.

Эта новая степень свободы — эти номера — будет присутствовать во всей теории, которая здесь излагается.

Принцип тождественности частиц в квантовой и классической механике совершенно разный. В классической механике он заключается в том, что нам не надо различать эти предметы. Для некоторых задач это различие не играет роли. Например, в пачке де-

[1]Физики неправильно представляют себе, что переход из квантовой статистики при $h \to 0$ есть классическая статистика Больцмана

[2]Пример взят из книги Ильфа и Петрова «Двенадцать стульев».

нежных кунюр одного достоинства нам не нужно их различать и мы можем их менять местами (предел при $h \to 0$ статистики Бозе). Сами пачки одного достоинства мы можем разложить по пронумерованным полкам, т. е. присвоить им номера.

В квантовой же механике считается, что мы не можем их в принципе различить, т. к. они являются принципиально неразличимыми. Такая разница в подходах оказывается существенной.

Если придерживаться точки зрения неразличимости частиц, то оказывается, что из этого принципа непознаваемости может быть выведено уравнение Шредингера. Я специально приведу в книге модель, которую я когда-то придумал для вывода уравнения Шредингера, чтобы объяснить роль нумерации. Вывод, который я предложил, основан на следующем. Во-первых, время считается дискретным. Иначе говоря, мы видим мир как в кино. Ведь в кино, на самом деле, мы видим лишь отдельные сменяющие друг друга кадры. Но нам кажется, что это — непрерывный процесс. Предположим, что и наша жизнь устроена так же. Она состоит из отдельных «кадров», но они так быстро мелькают, что создается впечатление, что мы живем в непрерывном времени.

Если принять такую точку зрения, то мы будем рассматривать отдельно каждый «кадр» и на каждом из них видеть, допустим, N частиц. И вот эти N частиц, которые мы видим на каждом «кадре», движутся в трехмерном пространстве или, может быть, одна частица как-то движется в $3N$-мерном пространстве. Эта частица от одного «кадра» к следующему продвинулась на очень маленькое расстояние и, с точки зрения разума, это та же самая частица.

Но если мы принимаем данную модель, то, прослеживая дискретную траекторию частицы, мы не можем знать, она ли появилась на следующем «кадре» или быть может эта частица уже другая. Такая концепция, как мы увидим в главе 1, приводит к объяснению картины Шредингера для волновой функции.

Таким образом, эти скачки от одного к другому моменту времени в пределе могут дать, как я выяснил, само уравнение Шредингера. Возможно, таким образом можно описать наш квантовый мир.

Этот подход также может развить интуицию, с помощью которой человек сможет объяснить какие-то эффекты с позиции модели кино. Он также может дать дополнительный импульс к новым конструкциям и новым идеям. Ведь на самом деле принципы, которые физики извлекли у Маха, очень сильно расширили их кругозор. Они также расширили возможность фантазировать, творить, придумывать что-то такое, что объясняло бы всевозможные эффекты не с обычной, стандартной точки зрения, а с точки зренин совершенно новой концепции.

Действительно, модель, которую н нридумал, очень номогла мне создать ультравторичное квантование. Поэтому мне кажется, что читателю полезно с этой моделью ознакомиться и, может быть, она расширит его возможности, его интуицию, приведет к объяснению каких-то эффектов.

Итак, в моей модели имеется дискретное время (как в кино). Расстояние между соседними моментами времени настолько мало, что мы видим все как непрерывный процесс. В результате получается уравнение Шредингера.

В данной модели в каждый следующий момент я могу перенумеровать частицы по-своему и все эти номера переставлять в силу тождественности частиц. При этом в приведенной выше модели мира, где через каждый момент времени, через каждое Δt, мы видим свой кадр, мы не знаем — это те же самые частицы или это другие частицы. Поэтому мы можем их нумеровать произвольным образом и в каждый момент времени нумерацию менять. Таким образом, номера у нас — тоже совершенно свободны.

Например, у меня N частиц, и я рассматриваю какие-то пары частиц и одиночные частицы, которые я пронумеровал. Возможно мне удобно пронумеровать и пары. Пронумеровал ли я их или нет, от этого ничего не меняется, поскольку эта нумерация не связана с тем,что я фиксирую частицы, с тем, что они не могут поменнться местами.

Таким образом все это — одно и то же. Это просто разные представления одного и того же. И я мысленно нумерую частицы или набор частиц. От этого ничего не меняется, но в мыслях у меня возникают различные картины того же явления. Вторичное квантование позволяет записать уравнения в трехмерном пространстве, но правда с операторами — операторное уравнение. Оно эквивалентно одному уравнению в $3N$-мерном пространстве — уже просто уравнению — не для операторов, а для функций. Та же самая задача получается в тех представлениях, которые я предлагаю и пазываю ультравторично квантованными.

Поскольку номера, которые присваиваются частицам, очень похожи на спиновые переменные, то я назвал их переменными статистического спина. В отличие от обычного спина, переменые статистического спина принимают все целые значения $s = 1, 2, \ldots$

Операторы рождения и уничтожепия определяются точно так же, как в случае с обычным спином, и точно так же, как и в последнем случае, зависят от статистического спина и обозпачаются b_q^+, b_s^-, s — статспин, а если они зависят и от обычного спина σ, то $b_{\sigma,s}^+$, $b_{\sigma,s}^-$.

Операторы рождения и уничтожения пары вводятся точно так же, как операторы рождения и уничтожения «шестимерной частицы», и обозначаются через B^+, B^-. Мы для простоты будем здесь рассматривать случаи, когда они не зависят от статспина.

§ 5. Асимптотическое размывание картинки

В тот момент, когда мы следим за одной частицей, а все остальные как-то размываются (концепция, которая позволила Власову написать его уравнения), мы уже используем на самом деле некоторую асимптотику, некоторый малый параметр. Как раз такой параметр и вводил Боголюбов, чтобы получить строго уравнения Власова. В тот момент, когда мы начинаем эту картину размывать, в зависимости от того, за какими мы следим частицами — за одиночными или за парными, получаются разные асимптотики, разные «размывания». При этом оказывается справедливым такой замечательный факт: каждому такому «размыванию» отвечает асимптотически своя серия собственных значений спектра N-частичного оператора Шредингера. Когда или $N \to \infty$ или еще какой-нибудь параметр стремится, соответственно, к бесконечности или к нулю, то вероятность перехода из одной серии в другую чрезвычайно мала. Т. е., иначе говоря, каждой картине, уже размытой, отвечает своя серия.

Существуют такие картинки, что, глядя на них, сначала мы видим изображение одного предмета, а потом, посмотрев по-другому, — совершенно другого. Так же и на какой-нибудь абстрактной картине можно увидеть одно, а можно — совершенно иное. Но когда увидел определенное изображение, то переключиться на другое довольно-таки трудно.

Когда-то я пришел в частную коллекцию известного коллекционера Якова Евсеевича Рубинштейна и издалека увидел картину Павла Кузнецова, вероятно, недавно им приобретенную. Я закричал: «Какой у Вас замечательный новый Павел Кузнецов! Какие потрясающие деревья!» А он мне отвечает: «Да, это — Павел Кузнецов, но это не деревья, это — слоны». И я помню, как мне пришлось напрячься, чтобы увидеть на картине слонов. Когда же я уже их увидел, то посмотреть на нее так, чтобы снова увидеть деревья, мне уже было почти невозможно.

Вот также и здесь. Как только мы картину «размыли», как только применили метод, связанный с параметром, то переход из одной асимптотики к другой оказывается почти запрещенным. Иначе говоря, вероятности перехода с тех собственных значений, которые отвечают одной асимптотике на собственные значения, отвечающие другой, очень малы. Когда параметр стремится к бесконечности, как правило, они экспоненциально малы по тем параметрам, которые размывают эту картину.

Примеры видения с одной и той же точки зрения разных картин, таким образом, в известной мере связаны с психологией одного человека, но когда уже имеется большой параметр, например, очень большое число людей одно и то же явление представляет себе как одну картину, а другие — как другую, то переход от одного видения к другому может быть почти запрещен.

Я уже приводил пример с очередью для объяснения значения номеров. Приведу еще один, экономический пример.

Цены одних и тех же предметов одни люди прикидывают на доллары, а другие — на рубли. Это два разных, но эквивалентных взгляда, т. к. рубли можно поменять на доллары. Однако если ввести параметры — число людей, которые считают в долларах, и параметр времени, то, когда эти параметры станут очень большими, обе картины не только не будут в асимптотике эквивалентны, а даже, так сказать, ортогональны, и переход от одной к другой будет почти невозможен. Как известно, экономика существенно регулируется процессом печатания денег. У нас этот процесс осуществляет Госбанк. Стоимость печати несоизмеримо ниже покупательной способности купюры.

Доллары же — вторую валюту — печатают в США. А так как в большинстве фирм, как известно, ведется двойная бухгалтерия: одна официальная в рублях, другая — неофициальная — в долларах, а печатаются доллары в другом государстве, то эффект больших чисел (больших указанных параметров) даст в асимптотике существенное различие двух указанных эквивалентных картин.

§ 6. Серии и сериалы

Вероятности перехода с одного уровня на другой играют существенную роль. В частности, как известно, испускаемые атомом кванты энергии связаны с переходом электронов с одного уровня на другой. Если вероятность перехода равна нулю или очень мала, то есть переход практически запрещен, то соответствующие уровни как бы принадлежат разным сериям. По существу, разбиение на серии означает разбиение на изолированные друг от друга системы.

Если данная серия уровней энергии имеет минимальный уровень, который является как бы основным состоянием серии, то это — метастабильное состояние. Если система находится в этом состоянии, а переходы на нижние уровни других серий почти запрещены, то система будет находиться в нем достаточно долго.

Наличие сверхтекучей жидкости или сверхпроводящего тока отвечают таким метастабильным сериям. Ток может течь без торможения в течение 100 000 лет, что означает, что серия почти стабильна.

В конечном большом объеме, в котором рассматривается система с большим числом частиц, значение скоростей и токов дискретно, и каждое значение определяет свою метастабильную серию. Набор серий, отличающихся скоростями, мы будем называть сериалом.

Каждой картине, о которой шла речь выше, в асимптотическом приближении отвечает свой сериал. Хотя физики прямо этого не говорят, но реально они стремятся найти такой сериал, нижний уровень нижней серии которого (т. е. при скорости равной нулю) совпадал бы с основным состоянием всей исходной системы.

В упомянутой выше работе Н. Н. Боголюбова 1947-го года найден сериал, отвечающий такой картине: N частиц находятся в трехмерном пространстве и все номера у них одинаковые.

Оказывается, однако, и это будет доказано в настоящей работе, что сериал, отвечающий картине: пары частиц не пронумерованы, а отдельные частицы пронумерованы — имеет более низкий нижний уровень, чем боголюбовский сериал. В этом смысле он, по-видимому, более отвечает истинному явлению сверхтекучести и в большей степени соответствует эксперименту. Хотя если природа посадила систему на другой сериал, то она в таком состоянии будет находиться долго. Однако между различными сериями возможны резонансы. В этом случае серия разрушается. Примером может служить одномерное уравнение Шредингера с потенциалом, имеющим два минимума. Если максимум между минимумами очень большой величины или если мы имеем квазиклассическое приближение, то каждой впадине соответствует своя серия, переходы из одной впадины в другую почти запрещены («туннельные» эффекты), если нет резонансов. Если какие-то собственные значения двух серий совпадают, то возможен резонанс, при котором нахождение частицы в одной впадине на этом собственном значении разрушается. Например, в симметричном относительно максимума потенциале все собственные значения «почти» совпадают, все резонируют, и система не распадается на серии.

Заметим, что можно рассматривать не только нижний уровень данного сериала, а также и серии, отвечающие скоростям (токам). Тогда мы получим ответы на вопросы о том, как будут меняться метастабильные состояния нри изменении температуры. Мы покажем, что существуют сериалы, содержащие сверхтекучие и сверхпроводящие серии при любой температуре. Однако эти сериалы заведомо не содержат основного состояния, т.е. существуют сериалы, у которых нижний уровень ниже. Природа, по идее, должна выбрать эти последние. С другой стороны, по аргументации великого Дирака, «было бы удивительно, если бы природа не использовала эту возможность». Добавлю «где-нибудь» — в ядрах, в звездах и т.д., одним словом, где-нибудь.

Можно ли «руками» создать такие сериалы? Все-таки вручную мы можем создать метастабильные серии, более высокие, чем основное состояние, пустив ток, заставив течь. Нельзя ли, используя резонансы, «накачать» и высокотемпературные сериалы?

§ 7. Необходимые условия метастабильного состояния

Когда большой параметр задан как конкретное число, то не всегда понятно, «большой» это параметр или «не очень большой». Например, когда число частиц равно ста, то это, вроде бы, большой параметр, но а логарифм этого большого параметра уже не большой. Возникает вопрос: как же быть, когда, скажем, число частиц не очень велико. В этом случае прежде всего хотелось бы узнать, как определить метастабильное состояние.

Я определю, по крайней мере, необходимые условия метастабильного состояния. Для этого вначале я рассмотрю совсем простой пример — одномерное стационарное уравнение Шредингера с потенциальной ямой, у которой две впадины: одна впадина ниже, а другая — выше. Т.е. у нее имеются два минимума: один из них — минимум глобальный, он отвечает основному состоянию, а другой — локальный. В случае квазиклассической асимптотики он определяет метастабильное состояние. Что это значит? Если система находится на этом самом низком уровне, отвечающем локальному минимуму или более мелкой впадине, иначе говоря, собственная функция сосредоточена вблизи локального минимума, то возникает вопрос: что будет, если возмутить задачу. Или насколько вероятен переход с этого состояния в основное. Т.е. в состояние, собственная функция которого сосредоточена вблизи глобального минимума, а вне его окрестности достаточно быстро убывает.

Если у нас есть квазиклассическое приближение, то «хвосты» этих собственных функций очень быстро убывают. Поэтому матричный элемент, получающийся в результате возмущения каким-либо оператором умножения на внешний потенциал, будет очень мал, поскольку произведение функций очень мало. Иначе говоря, если взять матричный элемент, равный $(\psi_0 V_1 \psi_1^*)$, где ψ_0 — собственная функция, отвечающая основному состоянию, ψ_1 — первая собственная функция, отвечающая другой впадине, а V_1 — потенциал, которым мы возмущаем систему, то он будет мал. Это значит, что вероятность перехода в основное состояние очень мала («свалиться» на нижний уровень очень трудно), и, следовательно, это состояние будет метастабильным.

В то же время, переходы на более высокие уровни, носитель которых тоже находится вблизи минимума этой мелкой впадины, вполне возможны.

Поскольку мы говорим о том, что метастабильное состояние в какой-то степени является моделью сверхтекучести и сверхпроводимости, важно, чтобы энергия не стала меньше. Если же она увеличилась (скорость стала больше от возмущения), то тем лучше. В результате возмущения задачи, как считал Ландау, как бы трением, энергия, тем не менее, не уменьшилась, потому что переход на более низкие уровни для такой асимптотической задачи как бы запрещен.

Но если возмущать задачу с помощью оператора из более широкого класса, например, содержащего оператор сдвига, то матричный элемент вовсе не будет мал. Поэтому важно определять, какими именно операторами возмущается задача.

Операторы, которыми мы возмущаем задачу, сохраняют носитель функции. Иначе говоря, если на функцию $\varphi(x)$, достаточно гладкую и равную нулю вне некоторого интервала (носителя), мы подействовали оператором умножения или оператором дифференцирования в любой степени, то эти операторы не выводят функцию за ее носитель. Такими операторами мы обычно и возмущаем задачу.

Так что прежде чем говорить, что у нас есть метастабильное состояние, необходимо определить класс операторов, относительно которых оно метастабильно. Естественными операторами, обладающими этим свойством, как раз и являются потенциальные силы.

Возникает вопрос: если это не квазиклассическое приближение и параметр h не мал, и, может быть, барьер не очень высокий, что тогда? Может ли тогда существовать метастабильное состояние и сколь долго? Эти вопросы мы попытаемся решить в данном параграфе. Первый вопрос: возможно или невозможно вообще такое состояние. Второй вопрос: насколько малы будут матричные элементы перехода. Первый вопрос сводится к существованию минимума, но минимума чего? Мы говорили о минимуме потенциальной ямы, но о каком минимуме идет речь в самой квантовой задаче, без малого параметра? В такой задаче в качестве возмущающих потенциалов возьмем операторы умножения на гладкие финитные функции с носителем на отрезке $[a, b]$. Подействовав ими на все пространство L_2, получим множество значений результата этого действия. Возьмем функции этого множества значений и посмотрим, достигается ли на них локальный минимум исходного гамильтониана. Здесь под минимумом понимается настоящий локальный минимум, когда вторые производные положительные и минимум достигается где-то в середине, а не на конце отрезка. Если отрезок $[a, b]$ включает точку минимума нашего потенциала — более мелкую впадину, то тогда локальный минимум при достаточно малом h, конечно, есть. Он есть и при не очень малом h, но именно наличие такого минимума даст нам ответ: может или не может существовать метастабильное состояние. Если такого минимума нет, то и о метастабильном состоянии говорить нельзя. Но если второй впадины нет, то, по-видимому, минимума не будет и у гамильтониана, по-крайней мере, при достаточно малых h.

Во всяком случае, прежде всего встает вопрос: существует ли локальный минимум у квантовой задачи, не связанной с классикой, с классическим гамильтонианом. Если такой локальный минимум существует, то существует собственное значение, ближайшее к нему, и отвечающая ему собственная функция определяет некоторое метастабильное состояние исходного оператора. При этом малое шевеление длины отрезка не даст перескока на другое собственное значение.

Значение безразмерной величины V_0a^2m/h^2, при которой исчезает (не основной) локальный минимум, будем называть критическим (здесь m — масса, h — константа Планка, а потенциал имеет вид $V_0V(x/a)$, где V_0 — константа, a — характерная длина, $aV(y)$ — указанная выше потенциальная яма с двумя впадинами).

Вопрос о том, насколько долго живет это метастабильное состояние, еще не решается, поэтому я говорю лишь о том, что это условие является необходимым условием существования метастабильного состояния.

Разумеется, метастабильное состояние не зависит от представления. Мы, однако, привязали вопрос о существовании минимума к определеппой асимптотической задаче, где представление, в котором мы ищем минимум, а именно k-представление, выбирается достаточно естественно. Точно также мы поступаем в задаче многих тел, в ситуации, когда число частиц не очень велико. Сначала мы находим представлепие, в котором эти метастабильные состояния являются естественными в асимптотической задаче. Поэтому для задачи многих тел мы выберем то представление, в котором при $N \to \infty$ уже имеются серии с метастабильными нижними уровнями.

§ 8. Замечание

После всего изложенного во введении становится понятно, почему мне бы не хотелось, чтобы физики восприняли эту книгу как математическую, а математики — как физическую. Особенно, если от физиков можно будет услышать слова, подобные окончанию рассказа Чехова «Новая дача». Цитатой из этого рассказа я начинал введение, цитатой оттуда же и закончу: «Жили мы без моста, — сказал Володька, ни на кого не глядя, — и не просили, и не надо нам. Надо будет — так и на лодке переплывем». И не хотелось бы, чтобы ненависть, подобная той, что испытали жители к этому инженеру, не перешла со стороны физиков на математика, который пытается несколько на другом языке построить новую физическую теорию.

Часть I

УЛЬТРАВТОРИЧНОЕ КВАНТОВАНИЕ, ОПЕРАТОР ЭНТРОПИИ И СВЕРХПРОВОДИМОСТЬ

Глава 1

ВЕРОЯТНОСТНО-СТАТИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

Попытки детерминистического и стохастического классического объяснения квантово-механических процессов предпринимались со времен зарождения квантовой механики, причем проблема такого объяснения в свое время стояла весьма остро. Предполагалось, что для описанин системы заряженых частиц могут быть использованы скрытые параметры, и квантовая механика является как бы осреднением по этим скрытым параметрам. Фон Нейманом была в определенных предположениях доказана теорема об отсутствии скрытых параметров [5]. Одпако она не убедила физиков отказаться от попыток стохастического классического описания, поскольку при доказательстве этой теоремы были использованы довольно жесткие предположения.

Дискуссия на эту тему примерно в начале 50-х годов закончилась. Это произошло, по-видимому, потому, что к этому времени квантово-механический подход стал настолько привычным, что, наоборот, некоторые классические явления стали объяснять, апеллируя к квантово-механической интуиции и аналогии. Тем не менее в 1982 г. в работе [6] была предпринята попытка построить классическую стохастическую модель распределения заряда, эквивалентную квантово-механическому описанию. Формализм, связывающий уравнеяие Колмогорова–Феллера и уравнеяие для функции Вигнера, который содержался в работе [6], был заново открыт в работах [7]–[9].

Настоящая глава представляет собой раэвитие идей работы [6], и, хотя предлагаемая здесь модель носит несколько ваивный характер, она, возможно, стимулирует постановку ряда интересных вопросов в теории описаяия заряженяых частиц.

1. Для того чтобы создать стохастическую модель квантовой механики, мы постараемся использовать исходные концептуальные моменты квантовой физики, однако, с одной стороны, рассматривая их с более абстрактной позиции, а с другой — с более детерминистической.

Прежде всего мы будем исходить из того, что имеется постоянная Планка h, причем при $h \to 0$ мы должны прийти к классической физике (принцип соответствия). Далее мы сформулируем принцип тождественности частиц с вполне материалистических позиций. Именно, предположим, что мы видим мир, как кинокартину, т. е. наблюдаемыми являются фотографии-слайды, фиксирующие положения и импульсы N частиц и чередующиеся через случайные моменты времени t_j, $0 \leqslant t_j \leqslant t$ $(j = 1, \ldots, n)$, $n \sim 1/h$. Предположим, что мы не можем узнать, какая именно частица на следующем слайде отвечает данной частице на предыдущем слайде. Иначе говоря, если мы фиксировали частицу на j-м слайде, то мы не знаем, в какую именно частицу на $(j+1)$-м слайде она перешла за время $t_{j+1} - t_j$. Таким образом, что происходит с частицами в период между снимками, нам неизвестно. Тем не менее, при $h \to 0$ картина должна быть непрерывной. Поэтому будем предполагать, что если мы пронумеруем произвольным образом частицы на j-м и $(j+1)$-м снимке, то для k-й частицы с большой вероятностью имеет место соотношение

$$q_k^{(j)} - q_k^{(j+1)} \sim h, \quad p_k^{(j)} - p_k^{(j+1)} \sim h, \tag{1.1}$$

где $q_k^{(j)}$, $p_k^{(j)}$ — векторы координат и импульсов k-й частицы, относящиеся к t_j-му моменту времени. Вероятность того, что $q_k^{(j)} - q_k^{(j+1)} \sim 1$ и $p_k^{(j)} - p_k^{(j+1)} \sim 1$, стремится к нулю при $h \to 0$. Это означает, что мы пронумеровали частицы произвольно, но разумно: если частица на $(j+1)$-м слайде отстоит от данной очень далеко (~ 1), то мы станем присваивать ей номер данной частицы с малой вероятностью. Итак, у нас есть наблюдаемые кинокадры и ненаблюдаемый мир, который существует сам по себе. Моменты съемки и положение частиц мы будем считать в дальнейшем случайными и истинные измерения производить лишь со средними значениями, которые будем называть вполне наблюдаемыми величинами.

Наши слайды имеют две стороны, и поэтому должна быть учтена ориентация слайда. Ориентация — понятие геометрическое, но оно связано с физическим понятием поляризации. Будем считать, что поляризация — ориентация $\varkappa$ принимает два значения $\pm h/2$, таким образом ее скачок при переходе от одного слайда к другому равен либо нулю, либо $\pm h$. С точки зрения вполне наблюдаемых величин, безразлично, сколько раз мы перевернем слайд, важно лишь знать, как направлена его ориентация. Правда, на вращение слайда мы тратим не вполне наблюдаемую энергию, которая, вообще говоря, может зависеть от количества поворотов слайда. Чтобы учесть эти обстоятельства, будем рассматривать не вполне наблюдаемую энергию на накрывающей сетке $\varkappa = \frac{h}{2}(2n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}$ — множество целых чисел. Вполне наблюдаемые величины будем описывать $2h$-периодическими по $\varkappa$ функциями, что эквивалентно рассмотрению $\varkappa$ как двузначной переменной. В соответствии с этим для величины скачка ориентации $\varkappa$ при переходе от слайда к слайду можно записать

$$\Delta\varkappa = \gamma, \quad \gamma \in \{0, h\}. \tag{1.2}$$

Естественно предположить, что γ принимает значения 0 и h равновероятно.

Исходя из концепций (1.1) и (1.2) как основополагающих, мы получаем для приращений координат и импульсов при переходе от слайда к слайду

$$\Delta q = \alpha\varkappa, \quad \Delta p = \alpha'\varkappa, \tag{1.3}$$

т.е. приращения координат и импульсов пропорциональны $\varkappa$, а α, α' — случайные константы.

Теперь мы сконструируем такую функцию от q, p, $\varkappa$, зависящую от α, α' и γ, которая сохраняется при переходе от одного слайда к другому и которую мы назовем энергией. Рассмотрим вначале случай $\gamma = 0$. Очевидно, что величина, квадратичная по q, p, $\varkappa$,

$$\mathscr{H}_0 = \beta\big[\alpha p\varkappa - \alpha' q\varkappa + g(\alpha, \alpha')\varkappa + \psi(\alpha, \alpha')\varkappa^2\big],$$

где β — константа, сохраняется для приращений (1.3):

$$\begin{aligned}\Delta\mathscr{H}_0 = \mathscr{H}_0(q+\Delta q,\, p+\Delta p,\, \varkappa) - \mathscr{H}_0(q, p, \varkappa) &= \\ = \beta(\alpha\varkappa\Delta p - \alpha'\varkappa\Delta q) &= \beta(\alpha\varkappa^2\alpha' - \alpha'\varkappa^2\alpha) = 0.\end{aligned}$$

Заметим, что для приращений Δq и Δp можно записать

$$\Delta q = \frac{1}{\beta}\frac{\partial\mathscr{H}_0}{\partial p}, \quad \Delta p = -\frac{1}{\beta}\frac{\partial\mathscr{H}_0}{\partial q}. \tag{1.4}$$

Рассмотрим случай $\gamma \neq 0$. В этом случае

$$\Delta\mathscr{H}_0 = \beta\big[\alpha p\Delta\varkappa - \alpha' q\Delta\varkappa + g\Delta\varkappa + \psi(\Delta\varkappa^2) + 2\psi\varkappa\Delta\varkappa\big].$$

Чтобы скомпенсировать $\Delta\mathcal{H}_0$, введем дополнительную переменную φ, сопряженную ориентации $\varkappa$. Переменная $\varkappa$ имеет смысл момента, и, следовательно, сопряженная переменная φ играет роль дополнительной координаты. Для того чтобы получить по аналогии с соотношениями (1.4) $\Delta\varkappa = 1/\beta)\partial\mathcal{H}/\partial\varphi$ и скомпенсировать в $\Delta\mathcal{H}_0$ слагаемое $\psi(\Delta\varkappa^2)$, положим

$$\mathcal{H} = \beta\big[\alpha p\varkappa - \alpha' q\varkappa + g\varkappa + \psi\varkappa^2 - \psi\gamma\varkappa - \gamma\varphi\big];$$

тогда, поскольку $\Delta\varkappa = \gamma$, получаем

$$\Delta\mathcal{H} = \beta\big[(\alpha p - \alpha' q)\gamma + g\gamma + \psi\gamma^2 + 2\psi\gamma\varkappa - \psi\gamma^2 - \gamma\Delta\varphi\big].$$

Следовательно, чтобы $\Delta\mathcal{H} = 0$, необходимо положить

$$\Delta\varphi = \alpha p - \alpha' q + g(\alpha,\, \alpha') + 2\psi(\alpha,\, \alpha')\varkappa.$$

Дополнительная координата φ является переменной сопряженной к ориентации $\varkappa$, принимающей дискретные значения и имеющей смысл момента. Следовательно, φ имеет смысл угла ориентации и вполне наблюдаемые величины должны быть 2π-периодичными по φ. Естественно требовать, чтобы при смене ориентации на противоположную приращение угла ориентации $\Delta\varphi$ изменялось на π. Это требование выполннетсн, если $\psi = \pi/2h$, поэтому окончательно имеем

$$\Delta\varphi = \alpha p - \alpha' q + g(\alpha,\, \alpha') + \frac{\pi\varkappa}{h}, \tag{1.5}$$

а длн энергии $\mathcal{H}$ получаем

$$\mathcal{H} = \beta\Big[\alpha p\varkappa - \alpha' q\varkappa + \varkappa g(\alpha,\, \alpha') + \frac{\pi\varkappa^2}{2h} - \frac{\pi\gamma\varkappa}{2h} - \gamma\varphi\Big].$$

Нетрудно видеть, что если приращения переменных q, p, φ, $\varkappa$ определнютсн формулами (1.2), (1.3), (1.5), энергия $\mathcal{H}$ при переходе от одного слайда к другому сохраняется.

Итак, к моменту времени t у нас имеетсн набор слайдов, сделанных в случайные моменты времени t_j, $t_j \in [0,\, t]$, на которых зафиксировано положение частиц в расширенном фазовом пространстве, образованном переменными q, p, φ, $\varkappa$. Подчеркнем еще раз, что нам неизвестно, что происходит между моментами фотографирования. Известны лишь моменты времени t_j и приращения переменных q, p, φ, $\varkappa$ за интервалы между этими моментами времени. Точнее говорн, известны вероятностные распределения моментов фотографированин и приращений. Перейдем к описанию этих распределений.

Пусть моменты времени t_j $\big(j = 1, \ldots, \nu(t)\big)$ равномерно распределены на интервале $[0,\, t]$ так, что их число $\nu(t)$ распределено по закону Пуассона, т. е. веронтность того, что $\nu(t)$ равно целому числу n, определяется соотношением

$$P\{\nu(t) = n\} = \frac{(at)^n}{n!} e^{-at},$$

где a — параметр пуассоновского распределения.

Потребуем, чтобы среднестатистическое число точек измерения t_j было равно t/h. Приравнивая это число к математическому ожиданию $\mathsf{M}\nu(t)$, получаем $\mathsf{M}\nu(t) = at = t/h$. Отсюда находим параметр пуассоновского распределения $a = h^{-1}$.

В выражениях (1.2), (1.3), (1.5) для приращений переменных q, p, φ, $\varkappa$ входят параметры α, α', γ, определяющие величину приращений. Пусть распределение параметров α, α' задается вероятностной мерой $\mu(d\alpha, d\alpha')$, а γ принимает значения 0 или h равновероятно, т. е. распределение параметра γ описывается мерой $1/2[\delta_0(d\gamma) + \delta_h(d\gamma)]$, где $\delta_\theta(d\gamma)$ — мера Дирака, сосредоточенная в точке θ. Отметим, что из принципа тождественности частиц следует требование симметричности меры $\mu(d\alpha, d\alpha')$ и функции $g(\alpha, \alpha')$ относительно перестановок компонентов векторов α, α', соответствующих номерам различных частиц.

Рассмотрим функцию плотности нескомпенсированных зарядов $\rho(q, p, \varphi, \varkappa, t)$. Мы рассматриваем плотность именно нескомпенсированных зарядов, поскольку, в отличие от плотности отрицательных или положительных зарядов, она может быть измерена, и, следовательно, для ρ могут быть сформулированы начальные условия. Исходя из рассмотренной вероятностной модели, для функции плотности ρ может быть записано эволюционное уравнение

$$\begin{aligned}\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{1}{2h}\int\big[\rho(q + \Delta q,\, p + \Delta p,\, \varphi + \Delta\varphi,\, \varkappa + \Delta\varkappa,\, t) - \\ - \rho(q, p, \varphi, \varkappa, t)\big]\mu(d\alpha, d\alpha')\big[\delta_0(d\gamma) + \delta_h(d\gamma)\big], \quad (1.6)\end{aligned}$$

которое является уравнением Колмогорова – Феллера.

Плотность ρ — вполне наблюдаемая функция, следовательно, в соответствии с вышесказанным, мы должны рассматривать лишь два значения $\varkappa = \pm h/2$, при этом величина $\varkappa + \Delta\varkappa$ берется по модулю $2h$. Переменная φ является переменной, сопряженной к дискретной переменной, и, следовательно, по аналогии с принципом двойственности, известным как в радиофизике, так и в теории групп, φ принадлежит окружности радиуса 1, т. е. вполне наблюдаемая функция ρ должна быть 2π-периодична по φ. Нетрудно видеть, что уравнение (1.6) этому не противоречит. Более того, поскольку переменная $\varkappa$ принимает только два значения, мы попытаемся ограничиться рассмотрением двух первых гармоник по сопряженной переменной φ, т. е. 1 и $e^{\pm i\varphi}$, из которых могут быть составлены только две действительно-значные комбинации 1 и $\cos\varphi$. Ниже мы покажем, что уравнение (1.6) инвариантно на подпространстве, образованном этими функциями. Вначале преобразуем уравнение (1.6). Прежде всего, чтобы скомпенсировать второе слагаемое в правой части уравнения, рассмотрим функцию $r = \mathrm{e}^{-\beta t}\rho$, где

$$\beta = h^{-1}\int \mu(d\alpha,\, d\alpha').$$

Уравнение относительно функции r имеет вид

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{1}{2h}\int r(q+\Delta q,\, p+\Delta p,\, \varphi+\Delta\varphi,\, \varkappa+\Delta\varkappa,\, t)\cdot \\ \cdot\,\mu(d\alpha,\, d\alpha')\big[\delta_0(d\gamma)+\delta_h(d\gamma)\big].$$

В подынтегральном выражении от γ зависит только $\Delta\varkappa$. Учитывая, что $(\varkappa+\Delta\varkappa)$ (mod $2h$) равно $\varkappa$, если $\gamma = 0$, и $-\varkappa$, если $\gamma = h$, вычислим интеграл по мерам Дирака:

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{1}{2h}\int\big[r(q+\Delta q,\, p+\Delta p,\, \varphi+\Delta\varphi,\, \varkappa,\, t)+ \\ + r(q+\Delta q,\, p+\Delta p,\, \varphi+\Delta\varphi,\, -\varkappa,\, t)\big]\mu(d\alpha,\, d\alpha'). \quad (1.7)$$

Проведем осреднение по ориентации $\varkappa = \pm h/2$. Для этого рассмотрим уравнение (1.7) при $\varkappa = h/2$ и $\varkappa = -h/2$. Учитывая формулы для величин приращений переменных q, p, φ, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\big[r(q,\, p,\, \varphi,\, \varkappa,\, t) + r(q,\, p,\, \varphi,\, -\varkappa,\, t)\big] = \\
= \frac{1}{2h}\int\Big[r\Big(q+\frac{h\alpha}{2},\, p+\frac{h\alpha'}{2},\, \varphi+\Delta\varphi\Big(\frac{h}{2}\Big),\, \frac{h}{2},\, t\Big)+ \\
+ r\Big(q+\frac{h\alpha}{2},\, p+\frac{h\alpha'}{2},\, \varphi+\Delta\varphi\Big(\frac{h}{2}\Big),\, -\frac{h}{2},\, t\Big)+ \\
+ r\Big(q-\frac{h\alpha}{2},\, p-\frac{h\alpha'}{2},\, \varphi+\Delta\varphi\Big(-\frac{h}{2}\Big),\, \frac{h}{2},\, t\Big)+ \\
+ r\Big(q-\frac{h\alpha}{2},\, p-\frac{h\alpha'}{2},\, \varphi+\Delta\varphi\Big(-\frac{h}{2}\Big),\, -\frac{h}{2},\, t\Big)\Big]\mu(d\alpha,\, d\alpha'), \quad (1.8)$$

где запись $\Delta\varphi(\varkappa)$ использована для сокращения формул. Группируя слагаемые в уравнении (1.8), получаем уравнение относительно осредненной по ориентации функции

$$R(q,\,p,\,\varphi,\,t)=\frac{1}{2}\Big[r\Big(q,\,p,\,\varphi,\,\frac{h}{2},\,t\Big)+r\Big(q,\,p,\,\varphi,\,-\frac{h}{2},\,t\Big)\Big],$$

$$\frac{\partial R}{\partial t}=\frac{1}{2h}\int\Big[R\Big(q+\frac{h\alpha}{2},\,p+\frac{h\alpha'}{2},\,\varphi+\Delta\varphi\Big(\frac{h}{2}\Big),\,t\Big)+ \\ +R\Big(q-\frac{h\alpha}{2},\,p-\frac{h\alpha'}{2},\,\varphi+\Delta\varphi\Big(-\frac{h}{2}\Big),\,t\Big)\Big]\mu(d\alpha,\,d\alpha'). \qquad (1.9)$$

Теперь, чтобы выделить зависимость от дополнительной переменной φ, попытаемся представить решение уравнения (1.9) в виде

$$R(q,\,p,\,\varphi,\,t)=W(q,\,p,\,t)\,v\,(\varphi,\,t) \qquad (1.10)$$

и найти инвариантное подпространство, принадлежность которому функции v гарантирует сохранение мультипликативной структуры (1.10) решения уравнения (1.9). Оказывается, что выделенное выше на основании принципа двойственности подпространство, натянутое на функции 1 и $\cos\varphi$, обладает таким свойством. Более того, уравнение (1.9) инвариантно на каждом из элементов 1 и $\cos\varphi$. Действительно, инвариантность уравнения (1.9) относительно представления (1.10) при $v=1$ очевидна. В случае $v=\cos\varphi$ докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть $g(\alpha,\,\alpha')$ — нечетная по совокупности аргументов функция, $g(\alpha,\,\alpha')=-g(-\alpha,\,-\alpha')$, μ — симметричная мера такая, что*

$$\int u(\alpha,\,\alpha')\mu(d\alpha,\,d\alpha')=\int u(-\alpha,\,-\alpha')\mu(d\alpha,\,d\alpha'),$$

где u — произвольная измеримая функция. Тогда решение уравнения (1.9) может быть представлено в виде $R=W(q,\,p,\,t)\cos\varphi$.

Доказательство. Подставим $R=W\cos\varphi$ в уравнение (1.9), предварительно записав $\cos\varphi$ в виде $1/2(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi})$. Поскольку величина приращения $\Delta\varphi$ определяется формулой (1.5), получаем

$$\cos\varphi\frac{\partial W(q,\,p,\,t)}{\partial t}=\frac{1}{4h}\int\Big\{W\Big(q+\frac{h\alpha}{2},\,p+\frac{h\alpha'}{2},\,t\Big)\cdot \\ \cdot\Big[\exp\Big(i\Big(\varphi+p\alpha-q\alpha'+g(\alpha,\,\alpha')+\frac{\pi}{2}\Big)\Big)+ \\ +\exp\Big(-i\Big(\varphi+p\alpha-q\alpha'+g(\alpha,\,\alpha')+\frac{\pi}{2}\Big)\Big)\Big]+ \\ +W\Big(q-\frac{h\alpha}{2},\,p-\frac{h\alpha}{2},\,t\Big)\Big[\exp\Big(i\Big(\varphi+p\alpha-q\alpha'+g(\alpha,\,\alpha')-\frac{\pi}{2}\Big)\Big)+ \\ +\exp\Big(-i\Big(\varphi+p\alpha-q\alpha'+g(\alpha,\,\alpha')-\frac{\pi}{2}\Big)\Big)\Big]\Big\}\mu(d\alpha,\,d\alpha'). \qquad (1.11)$$

Во второй группе слагаемых под знаком интеграла в правой части уравнения (1.11) сделаем замену $\alpha,\ \alpha' \to -\alpha,\ -\alpha'$. Воспользовавшись симметричностью меры μ и нечетностью функции g, получаем уравнение

$$\cos\varphi\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{4h}(\mathrm{e}^{i\varphi} + \mathrm{e}^{-i\varphi})\int W\Big(q + \frac{h\alpha}{2},\ p + \frac{h\alpha'}{2},\ t\Big)\cdot$$
$$\cdot\Big[\exp\Big(i\Big(p\alpha - q\alpha' + g(\alpha,\ \alpha') + \frac{\pi}{2}\Big)\Big) +$$
$$+\exp\Big(-i\Big(p\alpha - q\alpha' + g(\alpha,\ \alpha') + \frac{\pi}{2}\Big)\Big)\Big]\mu(d\alpha,\ d\alpha'), \quad (1.12)$$

позволяющее исключить $\cos\varphi$. Таким образом, теорема доказана.

Потребуем, чтобы осредненная по углу ориентации плотность нескомпенсированных зарядов равнялась нулю, т.е. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} R\,d\varphi = 0$. Это требование выделяет случай $R(q,\ p,\ \varphi,\ t) = W(q,\ p,\ t)\cos\varphi$, который мы в дальнейшем и будем рассматривать. Уравнение относительно функции W следует из уравнения (1.12). Произведем во втором слагаемом правой части уравнения (1.12) замену $-\alpha,\ -\alpha' \to \alpha,\ \alpha'$, тогда

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{i}{2h}\int\Big[W\Big(q + \frac{h\alpha}{2},\ p + \frac{h\alpha'}{2},\ t\Big) -$$
$$- W\Big(q - \frac{h\alpha}{2},\ p - \frac{h\alpha'}{2},\ t\Big)\mathrm{e}^{i(p\alpha - q\alpha' + g(\alpha,\ \alpha'))}\Big]\mu(d\alpha,\ d\alpha'). \quad (1.13)$$

Отметим, что, поскольку $\int\limits_{-\pi}^{\pi} R\,d\varphi = 0$, среднее по углу ориентации значение не может быть использовано для нормировки. Но так как $\cos\varphi$ в формулу (1.10) входит мультипликативно, то, тем не менее, можно говорить о распределении $W(q,\ p,\ t)$ при фиксированном времени с точностью до нормировки. И поскольку, как легко видеть, интеграл $\int W\,dq\,dp$ сохраняется по времени, то можно его условно принять за новую нормировку. Для сравнения измерений она, разумеется, весьма полезна.

Заметим, что уравнение (1.13) совпадает с уравнением для функции Вигнера, отвечающим уравнению Шредингера со следующим вейлевским символом гамильтониана:

$$H(q,\ p) = \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{i(p\alpha - q\alpha' + g(\alpha,\ \alpha'))}\mu(d\alpha,\ d\alpha'). \quad (1.14)$$

Из того, что функция $W(q, p, t)$ удовлетворяет уравнению Вигнера (1.13), отвечающему функции гамильтона (1.14), следует ряд ее свойств, позволяющих рассматривать W как вероятностное распределение. Так, распределение по q (т.е. плотность $\int W\,dp$) является величиной, положительность которой сохраняется. Сохраняется положительность величия $\int F^2 W\,dq\,dp$, если $F = F(q)$ зависит только от переменной q. То же самое можно сказать о распределении по p. С распределением W сохраняется также положительность корреляционной матрицы величин q и p. Таким образом, в простейших случаях функция W пригодна для определения ошибок (дисперсии). Определение дисперсии в более сложной ситуации также может быть корректно составлено.

Мера μ и функция g, вообще говоря, могут регулярно зависеть от параметра h, поэтому более точно символ гамильтониана следует записывать в виде

$$H(q, p, h) = \frac{1}{2}\int e^{i(p\alpha - q\alpha' + g(\alpha, \alpha', h))}\mu(d\alpha, d\alpha', h). \tag{1.15}$$

При $h \to 0$ уравнение Вигнера переходит в уравнение Лиувилля, отвечающее гамильтониану $H(q, p, 0)$. Следовательно, зная классическую предельную картину, мы можем определить лишь предел $H(q, p, h)$ при $h \to 0$. Этому предельному гамильтониану отвечает целый класс допредельных гамильтонианов, поэтому из принципа соответствия невозможно определить $H(q, p, h)$. В квантовой механике принято, что символ гамильтониана не зависит от h, т.е. $H(q, p)$ ровно тот же, что и в классической механике, — именно так трактуется принцип соответствия. Однако невозможно сказать, не существует ли очень слабой зависимости от h, настолько незначительной, что она не поддается современному экспериментальному определению. В нашем случае отнюдь не любой гамильтониан может быть представлен в виде (1.14), то есть как преобразование Фурье от меры конечной вариации, но любой гамильтониан можно очень слабо видоизменить (регуляризировать) так, что для него будет верна формула (1.15). Уравнение для функции Вигнера в этом случае записывается в виде

$$\begin{gathered}\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{i}{2h}\int\Big[W\Big(q + \frac{h\alpha}{2}, p + \frac{h\alpha'}{2}, t\Big) - \\ - W\Big(q - \frac{h\alpha}{2}, p - \frac{h\alpha'}{2}, t\Big)\Big]e^{i(p\alpha - q\alpha' + g(\alpha, \alpha', h))}\mu(d\alpha, d\alpha', h),\end{gathered} \tag{1.16}$$

и, хотя мера μ при $h \to 0$ становится сингулярной, уравнение при $h \to 0$ не портится. Таким образом, исходная модель пригодна и в этом случае.

Отметим два факта, подчеркивающих соответствие построенной статистической модели и квантово-механического описания. Первый состоит в том, что условия нечетности функции g и симметричности меры μ, сформулированные в теореме 1, как нетрудно видеть, эквивалентны условиям вещественности вейлевского символа гамильтониана (1.14). Второй факт заключается в том, что если при статистическом описании импульс сохраняется, то он сохраняется и при квантово-механическом описании. Действительно, пусть при переходе от одного слайда к другому импульс сохраняется, т. е. приращения импульса равны нулю, тогда $\alpha' = 0$ и $\mu(d\alpha,\, d\alpha') = \mu_0(d\alpha)\delta_0(d\alpha')$. Такой мере отвечает символ гамильтониана (1.14), не зависящий от координат q, что при квантово-механическом описании является условием сохранения импульса.

Операторная форма уравнения Вигнера совпадает с уравнением Гайзенберга и выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial \widehat{W}}{\partial t} = \frac{i}{h}[\widehat{H},\, \widehat{W}], \tag{1.17}$$

где $\widehat{W}$ — оператор Вигнера, $\widehat{H}$ — оператор Гамильтона, а скобки $[,]$ обозначают коммутатор операторов. Чтобы из операторного уравнения (1.17) получить уравнение (1.13), воспользуемся формулой композиции операторов в исчислении Вейля, согласно которой символ A композиции $\widehat{A} = \widehat{A}_1\widehat{A}_2$ операторов $\widehat{A}_1$, $\widehat{A}_2$ определяется выражением

$$A(q,\, p) = A_1\Big(\overset{2}{q} + \frac{ih}{2}\overset{1}{\frac{\partial}{\partial p}},\, \overset{2}{p} - \frac{ih}{2}\overset{1}{\frac{\partial}{\partial q}}\Big)A_2(q,\, p) =$$
$$= A_2\Big(\overset{2}{q} - \frac{ih}{2}\overset{1}{\frac{\partial}{\partial p}},\, \overset{2}{p} + \frac{ih}{2}\overset{1}{\frac{\partial}{\partial q}}\Big)A_1(q,\, p), \tag{1.18}$$

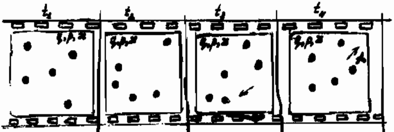
где $A_1(q,\, p)$, $A_2(q,\, p)$ — символы операторов $\widehat{A}_1$, $\widehat{A}_2$, а цифры над операторами указывают на порядок их действия. Так как вейлевский символ гамильтониана имеет вид (1.14), из первого равенства (1.18) следует, что символ оператора $(i/h)\widehat{H}\widehat{W}$ равен

$$\frac{i}{2h}\int e^{i(p\alpha - q\alpha' + g)} e^{\frac{h\alpha}{2}\frac{\partial}{\partial q} + \frac{h\alpha'}{2}\frac{\partial}{\partial p}} \mu(d\alpha,\, d\alpha')W(q,\, p,\, t) =$$
$$= \frac{i}{2h}\int W\Big(q + \frac{h\alpha}{2},\, p + \frac{h\alpha'}{2},\, t\Big)e^{i(p\alpha - q\alpha' + g)}\mu(d\alpha,\, d\alpha')$$

и совпадает с первым слагаемым в правой части уравнения (13). Второе слагаемое является символом оператора $(-i/h)\widehat{W}\widehat{H}$, что непосредственно вытекает из второго равенства формулы (1.18).

Отметим, что переход от операторной формы уравнения Вигнера к уравнению для символов может быть осуществлен частично, лишь по некоторым из компонентов переменных q, p, выделенных по какой-либо причине.

Кинонленка эволюции частицы



q - координаты, p - импульс, $z = \pm \frac{h}{2}$ - ориентация (поляризация спина)

h - постоянная Планка

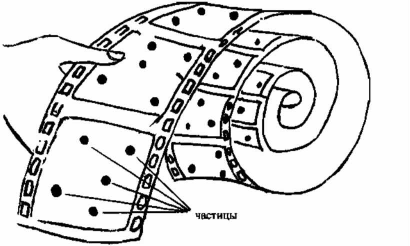
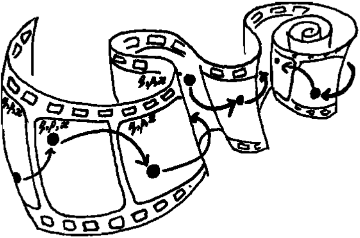


Рис. 1

Движение одной частицы



Один скачок

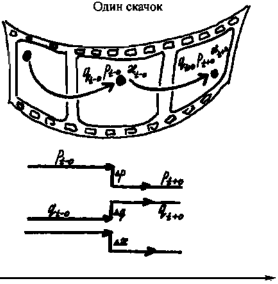


Рис. 2

Глава 2

УЛЬТРАВТОРИЧНОЕ КВАНТОВАНИЕ. СИМВОЛЫ И ЧИСЛА ЗАПОЛНЕНИЯ

§ 1. Основные определения

Введем нространства для рассмотрения M нарных частиц и K частиц со статистическим спином (номером). Вудем считать, что N частиц находятся на трехмерном торе $\mathbf{T}$, радиусы тора равны L, и частицы обладают спином J. Спиновую переменную будем обозначать греческой буквой σ. Введем дискретную переменную s, которую будем называть статистическим спином (номером), для краткости будем употреблять сокращение статспин. Переменная s принимает значенин $1, 2, \ldots$ Пусть $N = K + 2M$, где K, $M \geqslant 0$ целые числа.

Определение 1. Гильбертово пространство $\mathcal{F}_{K,M}$ состоит из функций

$$\begin{gathered}\Psi(x_1, \sigma_1, s_1; x_1, \sigma_2, s_2; \ldots; x_K, \sigma_K, s_K; y_1, \sigma_1', y_2, \sigma_2';\\ y_3, \sigma_3', y_4, \sigma_4'; \ldots; y_{2M-1}, \sigma_{2M-1}', y_{2M}, \sigma_{2M}'),\\ x_i, y_i \in \mathbf{T},\ \sigma_i, \sigma_i' = 1, 2, \ldots, 2J+1,\\ i = 1, 2, \ldots, K,\ j = 1, 2, \ldots, M,\end{gathered} \tag{2.1}$$

симметричных относительно переставовок троек переменных

$$(x_i, \sigma_i, s_i) \text{ и } (x_{i'}, \sigma_{i'}, s_{i'}), \quad i, i' = 1, 2, \ldots, K,$$

и симметричиых относительио перестановок четверок перемениых

$$(y_{2j-1}, \sigma_{2j-1}', y_{2j}, \sigma_{2j}') \text{ и } (y_{2j'-1}, \sigma_{2j'-1}', y_{2j'}, \sigma_{2j'}'), \quad j, j' = 1, 2, \ldots, M.$$

Кроме того, при фиксированных спиновых переменных σ_i, σ_i' и фиксированных статспиновых переменных s_i, $i = 1, 2, \ldots, K$,

$j = 1, 2, \ldots, M$, эти функции являются элементами пространства $L_2(\mathbf{T}^N)$, а также выполняется условие:

$$\sum_{\sigma_1=1}^{2J+1} \cdots \sum_{\sigma_K=1}^{2J+1} \sum_{\sigma'_K=1}^{2J+1} \cdots \sum_{\sigma_{2M}=1}^{2J+1} \sum_{s_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{s_K=1}^{\infty} \int \cdots \int dx_1 \ldots dx_K \cdot$$

$$\cdot\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_{2M-1}\, dy_{2M} \Big| \Psi(x_1, \sigma_1, s_1; x_2, \sigma_2, s_2; \ldots; x_K, \sigma_k, s_K;$$

$$y_1, \sigma'_1, y_2, \sigma'_2; y_3, \sigma'_3, y_4, \sigma'_4; \ldots; y_{2M-1}, \sigma'_{2M-1}, y_{2M}, \sigma'_{2M}) \Big|^2 < \infty. \quad (2.2)$$

Левая часть неравенства (2.2) равна квадрату нормы элемента (2.1) пространства $\mathscr{F}_{K,M}$.

Определение 2. Гильбертово пространство $\mathscr{F} = \bigoplus_{K,M=0}^{\infty} \mathscr{F}$ состоит из двух параметрических последовательностей $\{\Psi_{K,M}\}$, $K, M = 0, 1, \ldots$, где член последовательности $\Psi_{K,M}$ является элементом пространства $\mathscr{F}_{K,M}$.

В силу симметрии функций (2.1), пространство $\mathscr{F}$ является бозонным пространством Фока [62]. Вакуумный вектор [62] пространства $\mathscr{F}$ имеет вид $\Psi_0 = \{\Psi^0_{K,M}\}$, где $\Psi^0_{K,M} = 0$ при $K > 0$ или $M > 0$, $\Psi^0_{0,0} = 1$.

Стандартным образом [62] в пространстве $\mathscr{F}$ вводятся операторы рождения и уничтожения двух типов:

$\widehat{B}^+(y_1, \sigma'_1, y_2, \sigma'_2)$, $\widehat{B}^-(y_1, \sigma'_1, y_2, \sigma'_2)$ — соответственно операторы рождения и уничтожения пар, и

$\widehat{b}^+(x, \sigma, s)$, $\widehat{b}^-(x, \sigma, s)$ — соответственно операторы рождения и уничтожения частиц со статспином. В дальнейшем без уменьшения общности спин σ мы будем опускать.

§ 2. Бозонный случай

Введем понятие ультравторичного квантования в бозонном случае.

Пусть $\mathscr{H}_B$ — бозонное пространство Фока, элементами которого являются последовательности $\{Y_n\}$, $n = 0, 1, \ldots$, где член последовательности Y_n является функцией $Y_n(x_1, s_1, \ldots, x_n, s_n)$ из пространства $L_2\big((\mathbf{T}^1 \times [1, \ldots, 2J+1))^n\big)$, симметричной относительно перестановок пар переменных (x_i, s_i) и (x_j, s_j), $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Операторы рождения и уничтожения в пространстве $\mathscr{H}_B$ будем обозначать соответственно $\psi^+(x, s)$ и $\psi^-(x, s)$.

Введем ультравторичное квантование операторов в общем случае большого числа кластеров и разных типов бозонов. Пусть $1 \leqslant k$ — целое число.

Пусть $N_1, \ldots, N_k \geqslant 0$ — целые числа. Рассмотрим гильбертово пространство функций вида

$$\begin{aligned}\Psi\big(&x_1^1, s_1^1; \ldots; x_{N_1}^1, s_{N_1}^1; x_1^2, x_2^2, s_1^2; \ldots; x_{2N_2-1}^2, x_{2N_2}^2, s_{N_2}^2; \ldots;\\ &x_1^k, \ldots, x_k^k, s_1^k; \ldots; x_{kN_k-k+1}^k, \ldots, x_{kN_k}^k, s_{N_k}^k\big),\end{aligned} \tag{2.3}$$

где $x_{p_l}^l \in \mathbf{T}$, $\mathbf{T}$ — трехмерный тор, длина сторон которого равна L, $s_{q_l}^l = 1, \ldots, \infty$ для всех $l = 1, \ldots, k$ и $p_l = 1, \ldots, lN_l$, $q_l = 1, \ldots, N_l$. Причем функции симметричны относительно перестановок любых пар переменных $\left(x_{pl-l+1}^l, \ldots, x_{pl}^l, s_p^l\right)$ и $\left(x_{ql-l+1}^l, \ldots, x_{ql}^l, s_q^l\right)$ при $l = 1, \ldots, k$ и $p, q = 1, \ldots, N_l$.

Скалнрное произведение имеет вид

$$\begin{aligned}(\Psi, \Phi) \overset{\text{def}}{=} &\sum_{s_1^1=1}^{\infty} \cdots \sum_{s_{N_1}^1=1}^{\infty} \cdots \sum_{s_1^k=1}^{\infty} \cdots \sum_{s_{N_k}^k=1}^{\infty} \int \cdots \int dx_1^1 \ldots dx_{N_1}^1 \ldots dx_1^k \ldots dx_{kN_k}^k \times\\ &\times \Psi^*\big(x_1^1, s_1^1; \ldots; x_{N_1}^1, s_{N_1}^1; \ldots; x_1^k, \ldots, x_k^k, s_1^k; \ldots x_{kN_k-k+1}^k, \ldots, x_{kN_k}^k, s_{N_k}^k\big) \times\\ &\times \Phi\big(x_1^1, s_1^1; \ldots; x_{N_1}^1, s_{N_1}^1; \ldots; x_1^k, \ldots, x_k^k, s_1^k; \ldots x_{kN_k-k+1}^k, \ldots, x_{kN_k}^k, s_{N_k}^k\big).\end{aligned}$$

Будем обозначать это пространство $\mathcal{F}_{N_1, \ldots, N_k}$. Определим бозонное пространство $\mathcal{F}_{N_1, \ldots, N_k}^B$.

Определение. Пространство $\mathcal{F}_{N_1, \ldots, N_k}^B$ является подпространством пространства $\mathcal{F}_{N_1, \ldots, N_k}$ и состоит из таких элементов $\mathcal{F}_{N_1, \ldots, N_k}$, которые симметричны относительно перестановок любых x_p^l и x_q^m при $l, m = 1, \ldots, k$ и $p = 1, \ldots, lN_l$, $q = 1, \ldots, mN_m$. Проектор на это подпространство будет обозначаться как $\widehat{P}_{N_1, \ldots, N_k}^B$:

$$\widehat{P}_{N_1, \ldots, N_k}^B : \mathcal{F}_{N_1, \ldots, N_k} \to \mathcal{F}_{N_1, \ldots, N_k}^B.$$

Рассмотрим теперь гильбертово пространство $\mathcal{F}$, элементами которого являются бесконечные наборы

$$\Psi = \{\Psi_{N_1, \ldots, N_k}\}, \quad \Psi_{N_1, \ldots, N_k} \in \mathcal{F}_{N_1, \ldots, N_k}, \quad N_1, \ldots, N_k = 0, 1, \ldots,$$

$$\|\Psi\|^2 = \sum_{N_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{N_k=0}^{\infty} \|\Psi_{N_1, \ldots, N_k}\|^2 < \infty.$$

Это пространство является бесконечной прямой суммой пространств

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{N_1, \ldots, N_k} \mathcal{F}_{N_1, \ldots, N_k}$$

и является специальным частным случаем пространств Фока [62]. В этом пространстве аналогично [62] вводятся операторы $\widehat{b}_l^+(x_1, \ldots, x_l, s)$, $\widehat{b}_l^-(x_1, \ldots, x_l, s)$ при $l = 1, \ldots, k$ — операторы рождения и уничтожения соответственно.

Обозначим оператор проектирования на соответствующее слагаемое прямой суммы как $\widehat{P}_{N_1, \ldots, N_k}$:

$$\widehat{P}_{N_1, \ldots, N_k} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}_{N_1, \ldots, N_k}, \quad \widehat{P}_{N_1, \ldots, N_k} \Psi = \Psi_{N_1, \ldots, N_k},$$

а оператор вложения $\mathcal{F}_{N_1, \ldots, N_k}$ в $\mathcal{F}$ как $\widehat{i}_{N_1, \ldots, N_k}$:

$$\widehat{i}_{N_1, \ldots, N_k} : \mathcal{F}_{N_1, \ldots, N_k} \to \mathcal{F}, \quad \widehat{i}_{N_1, \ldots, N_k} \varphi = \{\delta_{N_1 M_1} \cdot \ldots \cdot \delta_{N_k M_k} \varphi\},$$

где δ_{NM} — символ Кронекера.

Введем понятие ультраторично квантованного оператора. Пусть задан набор операторов $\{\widehat{A}_N\}$ в подпространствах $L^2(\underbrace{\mathbf{T} \times \ldots \times \mathbf{T}}_{N \text{ раз}})$, элементы $\varphi(x_1, \ldots, x_N)$ которых симметричны относительно перестановок переменных $x_{\underset{\sim}{j}}$ и x_k, $x_j \in \mathbf{T}$. Поставим в соответствие операторам $\widehat{A}_N$ операторы $\widehat{\widehat{A}}_{N_1, \ldots, N_k}$, $N_1 + 2N_2 + \ldots + kN_k = N$ на подпространствах $\mathcal{F}^B_{N_1, \ldots, N_k}$, действующие как единичные по дискретным переменным Sp^l.

Определение. Ультранторично квантованным оператором $\overline{\overline{\widehat{A}}}$ будем называть оператор

$$\widehat{i}_{N_1, \ldots, N_k} \widetilde{\widehat{A}}_{N_1 + \ldots kN_k} \widehat{P}^B_{N_1, \ldots, N_k} \widehat{P}_{N_1, \ldots, N_k} \tag{2.4}$$

в пространстве Фока $\mathcal{F}$.

Замечание. Оператор $\widehat{i}_{N_1, \ldots, N_k} \widetilde{\widehat{A}}_{N_1 + \ldots kN_k} \widehat{P}^B_{N_1, \ldots, N_k} \widehat{P}_{N_1, \ldots, N_k}$ может быть выражен следующим образом:

$$\frac{1}{N_1! \ldots N_k!} \sum_{s_1^1=1}^{\infty} \ldots \sum_{s_{N_1}^1=1}^{\infty} \ldots \sum_{s_1^k=1}^{\infty} \ldots \sum_{s_{N_k}^k=1}^{\infty} \int \cdots \int dx_1^1 \ldots dx_{N_1}^1 \ldots dx_1^k \ldots dx_{kN_k}^k \times$$

$$
\begin{gathered}
\times \overset{2}{\widehat{b}_1^+}(x_1^1, s_1^1) \ldots \overset{2}{\widehat{b}_1^+}(x_{N_1}^1, s_{N_1}^1) \ldots \overset{2}{\widehat{b}_k^+}(x_1^k, \ldots, x_k^k, s_k^k) \ldots\ldots \times \\
\times \overset{2}{\widehat{b}_k^+}(x_{kN_k-k+1}^k, \ldots, x_{kN_k}^k, s_{N_k}^k) \widehat{A}_{N_1+\ldots+kN_k} \times \\
\operatorname*{Symm}_{x_1^1 \ldots x_{N_1}^1 \ldots x_1^k \ldots x_{kN_k}^k} \Big\{ \overset{1}{\widehat{b}_1^-}(x_1^1, s_1^1) \ldots \overset{1}{\widehat{b}_1^-}(x_{N_1}^1, s_{N_1}^1) \ldots \times \\
\times \overset{1}{\widehat{b}_k^-}(x_1^k, \ldots, x_k^k, s_k^k) \ldots \overset{1}{\widehat{b}_k^-}(x_{kN_k-k+1}^k, \ldots, x_{kN_k}^k, s_{N_k}^k) \Big\} \times \\
\times \exp\Big(-\sum_{s=1}^{\infty} \int dz\, \overset{2}{\widehat{b}_1^+}(z, s) \overset{1}{\widehat{b}_1^-}(z, s) - \ldots \\
\ldots - \sum_{s=1}^{\infty} \int \cdots \int dz_1 \ldots dz_k\, \overset{2}{\widehat{b}_k^+}(z_1, \ldots, z_k, s) \overset{1}{\widehat{b}_k^-}(z_1, \ldots, z_k, s) \Big),
\end{gathered}
\tag{2.5}
$$

где $\operatorname*{Symm}_{x_1 \ldots x_N}$ — оператор симметризации по переменным $x_1, \ldots, x_N$, а числа над операторами обозначают порядок их действия [14]. Выражение (2.5) в частном случае $k = 2$ было получено в [58] и для произвольного k доказывается аналогично.

Исходя из сделанного замечания, символом ультранторично квантованного оператора $\widehat{\widehat{A}}$ будем называть следующий функционал

$$
\begin{gathered}
A(b_1^*(x_1^1, s^1), b_1(x_1^1, s^1), \ldots, b_k^*(x_1^k, \ldots, x_k^k, s^k), b_k(x_1^k, \ldots, x_k^k, s^k)) = \\
= \sum_{N_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{N_k=0}^{\infty} \frac{1}{N_1!\, N_2! \ldots N_k!} \times \\
\times \sum_{s_1^1=1}^{\infty} \cdots \sum_{s_{N_1}^1=1}^{\infty} \cdots \sum_{s_1^k=1}^{\infty} \cdots \sum_{s_{N_k}^k=1}^{\infty} \int \cdots \int dx_1^1 \ldots dx_{N_1}^1 \ldots dx_1^k \ldots dx_{kN_k}^k \times \\
\times b_1^*(x_1^1, s_1^1) \ldots b_1^*(x_{N_1}^1, s_{N_1}^1) \ldots b_k^*(x_1^k, \ldots, x_k^k, s_k^k) \ldots \times \\
\times \ldots \times b_k^*(x_{kN_k-k+1}^k, \ldots, x_{kN_k}^k, s_{kN_k}^k) \widehat{A}_{N_1+\ldots kN_k} \times \\
\times \operatorname*{Symm}_{x_1^1 \ldots x_{N_1}^1 \ldots x_1^k \ldots x_{kN_k}^k} \{ b_1(x_1^1, s_1^1) \ldots b_1(x_{N_1}^1, s_{N_1}^1) \ldots b_k(x_1^k, \ldots, x_k^k, s_k^k) \ldots \times \\
\times b_k(x_{kN_k}^k, \ldots, x_{kN_k}^k, s_{N_k}^k) \} \exp\Big(-\sum_{s=1}^{\infty} \int dz\, b_1^*(z, s)\, b_1(z, s) - \\
- \ldots - \sum_{s=1}^{\infty} \int \cdots \int dz_1 \ldots dz_k\, b_k^*(z_1, \ldots, z_k, s)\, b_k(z_1, \ldots, z_k, s) \Big),
\end{gathered}
\tag{2.6}
$$

где при $l = 1, \ldots, k$, $b_l(\cdot, \ldots, \cdot, s^l) \in L^2(\mathbf{T}^3)$ для всех $s^l = 0, 1, \ldots$ и выполнено неравенство

$$\sum_{s=0}^{\infty} \int \cdots \int dx_1 \ldots dx_l \, b_l^*(x_1, \ldots, x_l, s) \, b_l(x_1, \ldots, x_l, s) < \infty.$$

Рассмотренному выше набору операторов $\{\widehat{A}_N\}$ отвечает вторично квантованный оператор $\widehat{A}$ в пространстве Фока $\mathscr{H}_B$.

Имеет место следующая

Лемма. *Символ ультраврорично квантованного оператора $\overline{\widehat{A}}$ выражается следующим образом:*

$$A\big(b_1^*(x_1^1, s_1^1), b_1(x_1^1, s_1^1), \ldots, b_k^*(x_1^k, \ldots, x_k^k, s^k), b_k(x_1^k, \ldots, x_k^k, s^k)\big) =$$
$$= \mathrm{Sp}(\widehat{A}\widehat{\rho}) \exp\biggl(-\sum_{s=1}^{\infty} \int dz \, b_1^*(z, s) \, b_1(z, s) -$$
$$- \ldots - \sum_{s=1}^{\infty} \int \cdots \int dz_1 \ldots dz_k \, b_k^*(z_1, \ldots, z_k, s) \, b_k(z_1, \ldots, z_k, s)\biggr),$$

где $\widehat{\rho}$ является оператором в пространстве $\mathscr{H}_B$ и имеет вид

$$\widehat{\rho} = \sum_{N_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{N_k=0}^{\infty} \frac{1}{(N_1 + 2N_2 + \ldots + kN_k)! \, N_1! \ldots N_k!} \times$$
$$\times \prod_{l=1}^{k} \biggl(\sum_{s^l=0}^{\infty} \int \cdots \int dx_1^l \, dy_1^l \ldots dx_l^l \, dy_l^l \times$$
$$\times b_l(x_1^l, \ldots, x_l^l, s^l) \overset{2}{\widehat{\psi}}{}^{+}(x_1^l) \ldots \overset{2}{\widehat{\psi}}{}^{+}(x_l^l) \times$$
$$\times b_l^*(y_1^l, \ldots, y_l^l, s^l) \overset{1}{\widehat{\psi}}{}^{-}(y_1^l) \ldots \overset{1}{\widehat{\psi}}{}^{-}(x_l^l) \biggr)^{N_1} \exp\biggl(-\int dz \, \overset{2}{\widehat{\psi}}{}^{+}(z) \, \overset{1}{\widehat{\psi}}{}^{-}(z)\biggr).$$

Пусть далее $\overline{\widehat{H}}$ и $\overline{\widehat{E}}$ — ультравторично квантованные таким способом гамильтониая и единичный оператор соответственно. Гамильтониан H задается формулой

$$\sum_{j=1^N} \mathbf{T}\Big(x_j, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j}\Big) + \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant N} \mathbf{V}(x_i, x_j),$$

$\mathbf{T}\Big(x,\, -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x}\Big)$ — гамильтониан отдельной частицы, а $\mathbf{V}(x, y)$ — потенциал взаимодействия между частицами.

Формальный переход к числам заполнения

Выберем полпую ортонормированную в пространстве $L_2(\mathbf{T})$ систему фупкций $\{\varphi_\alpha(x)\}$, $\alpha = 1, 2, \ldots$

Рассмотрим следующую систему векторов в пространстве $\mathcal{F}$:

$$\Psi_{\{n\},\{m\}} = \Big(\prod_{\alpha=1}^{\infty}\Big(\prod_{\sigma=1}^{2J+1}\Big(\prod_{s=1}^{\infty}\Big(\int dx\,\widehat{b}^+(x, \sigma, s)\,\varphi_\alpha(x)\Big)^{n_{\alpha\sigma s}}\frac{1}{\sqrt{n_{\alpha\sigma s}!}}\Big)\Big)\Big)\cdot$$
$$\cdot\Big(\prod_{\beta,\gamma=1}^{\infty}\Big(\prod_{\sigma_1',\sigma_2'=1}^{2J+1}\Big(\iint dy_1\,dy_2\,\varphi_\beta(y_1)\,\varphi_\beta(y_2)\widehat{B}^+(y_1, \sigma_1', y_2, \sigma_2')\Big)^{m_{\beta\gamma\sigma_1'\sigma_2'}}\cdot$$
$$\cdot\frac{1}{\sqrt{m_{\beta\gamma\sigma_1'\sigma_2'}!}}\Big)\Big)\cdot\Psi_0, \tag{2.7}$$

где $\{n\}$ — набор целый чисел $n_{\alpha\sigma s} \geqslant 0$, зависящих от трех параметров $\alpha = 1, 2\ldots$, $\sigma = 1, \ldots, 2J+1$, $s = 1, 2, \ldots$, $\{m\}$ — набор целых чисел $m_{\beta\gamma\sigma_1'\sigma_2'\geqslant 0}$, зависящих от четырех параметров $\beta, \gamma = 1, 2, \ldots$, $\sigma_1', \sigma_2' = 1, \ldots, 2J+1$.

Система векторов (2.7) — полная в пространстве .

Представлением ультравторичного квантованного оператора $\overline{\widehat{A}}$ в числах заполнения является следующая матрица:

$$A(\{n\}, \{m\}; \{n'\}, \{m'\}) = \big(\Psi_{\{n\},\{m\}}\overline{\widehat{A}}\Psi_{\{n'\},\{m'\}}\big). \tag{2.8}$$

Символ ультравторичного квантования оператора

Символом оператора $\overline{\widehat{A}}$ вида (2.4) будем называть функционал (2.6).

Имеет место следующая связь между представлением чисел заполнения и символом ультравторичного квантованного оператора.

Пусть наборы чисел $\{n\}$, $\{m\}$, $\{n'\}$, $\{m'\}$ такие, что

$$n_{\alpha\sigma s} = K\delta_{\alpha\alpha_0}\delta_{\sigma\sigma_0}\delta_{ss_0}, \qquad m_{\beta\gamma\sigma\sigma'} = M\delta_{\beta\beta_0}\delta_{\gamma\gamma_0}\delta_{\sigma\sigma_1}\delta_{\sigma'\sigma_2},$$
$$n'_{\alpha\sigma s} = K\delta_{\alpha\alpha_0'}\delta_{\sigma\sigma_0'}\delta_{ss_0'}, \qquad m'_{\beta\gamma\sigma\sigma'} = M\delta_{\beta\beta_0'}\delta_{\gamma\gamma_0'}\delta_{\sigma\sigma_1'}\delta_{\sigma'\sigma_2'}.$$

Рассмотрим функции

$$b_1(x,\sigma,s)=\sum_{\alpha=1}^{\infty}\sqrt{n_{\alpha\sigma s}}\varphi_\alpha(x),$$

$$b_2(x,\sigma,s)=\sum_{\alpha=1}^{\infty}\sqrt{n'_{\alpha\sigma s}}\varphi_\alpha(x),$$

$$B_1(y_1,\sigma_1,y_2,\sigma_2)=\sum_{\beta,\gamma=1}^{\infty}\sqrt{m_{\beta\gamma\sigma\sigma'}}\varphi_\beta(y_1)\,\varphi_\gamma(y_2),$$

$$B_2(y_1,\sigma_1,y_2,\sigma_2)=\sum_{\beta,\gamma=1}^{\infty}\sqrt{m'_{\beta\gamma\sigma\sigma'}}\varphi_\beta(y_1)\,\varphi_\gamma(y_2).$$

При K, $M\to\infty$ справедливо асимптотическое равенство

$$A\big(\{n\},\{m\};\{n'\},\{m'\}\big)\sim A\big[b_2^*(\,\cdot\,),\,b_1(\,\cdot\,),\,B_2^*(\,\cdot\,),\,B_1(\,\cdot\,)\big]. \tag{2.9}$$

Проекция ультравторично квантованного оператора на N частичное подпространство

Пусть K_0, $M_0\geqslant 0$ такие, что $N=K_0+2M_0$. Рассмотрим в пространстве $\mathscr{F}$ подпространство, элементами которого являются двухпараметрические последовательности $\{\Psi_{K,M}\}$, такие, что

$$\Psi_{K,M}=0,\quad K\neq K_0 \text{ или } M\neq M_0,$$

$$\Psi_{K-0,M_0}\Psi_{k_0,M_0}(x_1,\sigma_1,s_1;\ldots;x_{K_0},\sigma_{K_0},s_{K_0};$$
$$y_1,\sigma'_1,y_2,\sigma'_2;\ldots;y_{2M_0-1},\sigma'_{2M_0-1},y_{2M_0-1},\sigma'_{2M_0-1}),$$

— функция симметричная относительно перестановок пар переменных (x_i,σ_i) и $(x_{i'},\sigma_{i'})$, симметричная относительно перестановок пар переменных (y_j,σ'_j) и $(y_{j'},\sigma'_{j'})$ и симметричная относительно перестановок пар переменных (x_i,σ_i) и (y_j,σ'_j), $i,i'=1,\ldots,K$, $j,j'=1,\ldots,2M_0$. Обозначим это подпространство $\mathscr{F}^{\mathrm{Symm}}_{K_0,M_0}$. Пусть оператор $\widehat{A}$ в пространстве $\mathscr{H}$ такой, что вектор $\{Y_n\}$ он переводит в вектор $\{\widetilde{Y}_n\}$, где

$$\widetilde{Y}_n(x_1,\ldots,x_n)=A_n\Big(\overset{2}{x}_1,\ldots,\overset{2}{x}_n,-i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x_1}},\ldots,-i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x_n}}\Big)\widetilde{Y}_n(x_1,\ldots,x_n),$$
$$n=0,1,2,\ldots$$

Имеет место следующая

Теорема 1. *Если* Ψ — *элемент подпространства* $\mathscr{F}^{\mathrm{Symm}}_{K_0,M_0}v$, *и пусть* $C_N = \frac{1}{N!}$, *тогда*

$$(\overline{\widehat{A}}\,\Psi)_{K_0,M_0} = A_N\Big(\overset{2}{x}_1,\,\ldots,\,\overset{2}{x}_{K_0},\,\overset{1}{y}_1,\,\ldots,\,\overset{1}{y}_{2M_0},$$
$$= -i\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial x_1},\,\ldots,\,-i\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial x_{K_0}},\,-i\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial y_1},\,\ldots,\,-i\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial y_{2M_0}}\Big)\cdot$$
$$\cdot\,\Psi_{K_0,M_0}\big(x_1,\,\sigma_1,\,s_1;\ldots;x_{K_0},\,\sigma_{K_0},\,s_{K_0};\,y_1,\,\sigma_1',\,y_2,\,\sigma_2';\ldots$$
$$\ldots;y_{2M_0-1},\,\sigma'_{2M_0-1},\,y_{2M_0},\,\sigma'_{2M_0}\big).$$

Доказательство. Любой элемент $\Psi = \{\Psi_{K,M}\}$ пространства $\mathscr{F}$ представляется в виде

$$\Psi = \sum_{K=0}^{\infty}\sum_{M=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{K!\,M!}}\sum_{\sigma_1=0}^{2J+1}\cdots\sum_{\sigma_K=0}^{2J+1}\sum_{\sigma_1'=0}^{2J+1}\sum_{\sigma_2'=0}^{2J+1}\cdots\sum_{\sigma'_{2M-1}=0}^{2J+1}\sum_{\sigma'_{2M}=0}^{2J+1}\cdots$$
$$\ldots\sum_{s=1}^{\infty}\cdots\sum_{s_K=0}^{\infty}\int\cdots\int dx_1\ldots dx_K\,dy_1\ldots dy_{2M}\cdot$$
$$\cdot\,\Psi_{K,M}\big(x_1,\,\sigma_1,\,s_1;\ldots;x_K,\,\sigma_K,\,s_K;\,y_1,\,\sigma_1',\,y_2,\,\sigma_2';\ldots \tag{2.10}$$
$$\ldots;y_{2M-1},\,\sigma'_{2M-1},\,y_{2M},\,\sigma'_{2M}\big)\cdot$$
$$\cdot\,\widehat{b}^+(x_1,\,\sigma_1,\,s_1)\cdot\ldots\cdot\widehat{b}^+(x_K,\,\sigma_K,\,s_K)\cdot$$
$$\cdot\,\widehat{B}^+(y_1,\,\sigma_1',\,y_2,\,\sigma_2')\cdot\ldots\cdot\widehat{B}^+(y_{2M-1},\,\sigma'_{2M-1},\,y_{2M},\,\sigma'_{2M})\Psi_0.$$

Кроме того, операторы

$$\exp\Big(-\sum_{\sigma=1}^{2J+1}\sum_{s=1}^{\infty}\int dx\overset{2}{\widehat{b}}{}^+(x,\,\sigma,\,s)\overset{1}{\widehat{b}}{}^-(x,\,\sigma,\,s)-$$
$$-\sum_{\sigma_1',\sigma_2'=1}^{2J+1}\iint dy_1\,dy_2\widehat{B}^+(y_1,\,\sigma_1',\,y_2,\,\sigma_2')\,\widehat{B}^-(y_1,\,\sigma_1',\,y_2,\,\sigma_2')\Big)\ \text{и} \tag{2.11}$$
$$\exp\Big(-\int dz\overset{2}{\widehat{\psi}}{}^+(z)\overset{1}{\widehat{\psi}}{}^-(z)\Big)$$

являются ортогональными проекторами на вакуумный вектор соответственно в пространстве $\mathscr{F}$ и $\mathscr{H}$.

Действуя на вектор (2.10) оператором (2.4) и учитывая свойства операторов (2.11) и свойства операторов рождения и уничтожения, $\widehat{\psi}^{\pm}(x)$, $\widehat{b}^{\pm}(x,\, \sigma,\, s)$, $\widehat{B}^{\pm}(y_1,\, \sigma_1',\, y_2,\, \sigma_2')$:

$$\begin{gathered}
\big[\widehat{\psi}^{-}(x),\, \widehat{\psi}^{+}(y)\big] = \delta(x-y), \\
\big[\widehat{b}^{-}(x_1,\, \sigma_2,\, s_1),\, \widehat{b}^{+}(x_1,\, \sigma_2,\, s_1)\big] = \delta_{\sigma_1\sigma_2}\delta_{s_1 s_2}\delta(x_1 - x_2), \\
\big[\widehat{B}^{-}(y_1,\, \sigma_1',\, y_2,\, \sigma_2'),\, \widehat{B}^{+}(y_3,\, \sigma_3',\, y_4,\, \sigma_4')\big] = \delta_{\sigma_1'\sigma_3',\sigma_2'\sigma_4'}\delta(y_1 - y_3)\,\delta(y_2 - y_4),
\end{gathered}$$

где остальные коммутаторы равны нулю,

$$\widehat{\psi}^{-}(x)\, Y_0 = 0, \quad \widehat{b}^{-}(x,\, \sigma,\, s)\, \Psi_0 = 0, \quad \widehat{B}^{-}(y_1,\, \sigma_1',\, y_2,\, \sigma_2')\, \Psi_0 = 0,$$

получим утверждение теоремы.

Из теоремы следует, что оператор $\overline{\widehat{A}}$ на подпространстве $\mathscr{F}_{K,M}$ зависит от $N = K + 2M$ и не зависит от K и M в отдельности.

Из этой теоремы следует соответствие алгебры операторов A, $\widehat{A}$ и $\overline{\widehat{A}}$.

Пусть φ_N элемент N-частичного подпространства. Ему отвечает в $\mathscr{F}\{\,\cdot\,\}$ последовательность элементов, равных нулю во всех членах, кроме N-го, который равен φ_N. В силу теоремы, $\overline{\widehat{A}}\{\,\cdot\,\}_{\varphi_N} = \{\,\cdot\,\}_{A_N\varphi_N}$ и равен нулю на нсех остальных элементах.

Значит,

$$\overline{\widehat{A}}^{\,2}\{\,\cdot\,\}_{\varphi_N} = \overline{\widehat{A}}\{\,\cdot\,\}_{A_N\varphi_N} = \{\,\cdot\,\}_{A_N^2 P_N}.$$

Очевидно, что

$$f(\widehat{A})\{\,\cdot\,\}_{\varphi_N} = \{\,\cdot\,\}_{f(A_N)\varphi_N}.$$

Аналогично для $f(\widehat{A})$.

Как мы видели во введении, это свойство позволяет записать энтропию в виде

$$\begin{gathered}
\overline{\widehat{S}} = \mathrm{Sp}_{\mathscr{F}}\left\{\frac{\rho\big(\overset{2}{\widehat{\Psi}}{}^{+},\, \overset{1}{\widehat{\Psi}}{}^{-},\, \overset{2}{\widehat{b}}{}^{+}(s),\, \overset{1}{\widehat{b}}{}^{-}(s),\, \overset{2}{\widehat{B}}{}^{+},\, \overset{1}{\widehat{B}}{}^{-}\big)}{\mathrm{Sp}\,\rho\big(\overset{2}{\widehat{\Psi}}{}^{+},\, \overset{1}{\widehat{\Psi}}{}^{-},\, \overset{2}{\widehat{b}}{}^{+}(s),\, \overset{1}{\widehat{b}}{}^{-}(s),\, \overset{2}{\widehat{B}}{}^{+},\, \overset{1}{\widehat{B}}{}^{-}\big)}\cdot\right. \\
\left.\cdot\ln\frac{[[\rho\big(\overset{2}{\widehat{\Psi}}{}^{+},\, \overset{1}{\widehat{\Psi}}{}^{-},\, \overset{2}{\widehat{b}}{}^{+}(s),\, \overset{1}{\widehat{b}}{}^{-}(s),\, \overset{2}{\widehat{B}}{}^{+},\, \overset{1}{\widehat{B}}{}^{-}\big)]]}{\mathrm{Sp}\,\rho\big(\overset{2}{\widehat{\Psi}}{}^{+},\, \overset{1}{\widehat{\Psi}}{}^{-},\, \overset{2}{\widehat{b}}{}^{+}(s),\, \overset{1}{\widehat{b}}{}^{-}(s),\, \overset{2}{\widehat{B}}{}^{+},\, \overset{1}{\widehat{B}}{}^{-}\big)}\right\}.
\end{gathered} \tag{2.12}$$

На самом деле, в энтропии могут быть введены «духи» следующим образом.

Введем $\widehat{\rho}'$, которое зависит от «холостых духов» и парных «духов» и среднего числа «холостых» $\overline{K}$ и пар $\overline{M}$:

$$\widehat{\rho}'\big[\widehat{b}^{+}(\,\cdot\,),\, \widehat{b}^{-}(\,\cdot\,),\, \widehat{B}^{+}(\,\cdot\,),\, \widehat{B}^{-}(\,\cdot\,),\, \widehat{\Psi}^{+},\, \widehat{\Psi}^{-}\big] =$$

$$= \sum_{K,M=0}^{\infty} \frac{(\overline{K})^{(G_1-1)K}(\overline{M})^{(G_2-1)M}}{(K\,!)^{G_1}(M\,!)^{G_2}(K+2M)!}\Big(\sum_{j=1}^{J}\iint dx\,dy\cdot$$

$$\cdot\overset{2}{\widehat{\Psi}}{}^{+}(x)\,\overset{1}{\widehat{\Psi}}{}^{-}(y)\,\widehat{b}^{-}(x,\,j)\,\widehat{b}^{+}(y,\,j)\Big)^{K}\Big(\iint dz\,dw\,\overset{2}{\widehat{\Psi}}{}^{+}(z)\,\overset{2}{\widehat{\Psi}}{}^{+}(w)\cdot$$

$$\cdot\widehat{B}^{-}(z,\,w)\Big)^{M}\Big(\iint dz'\,dw'\,\overset{1}{\widehat{\Psi}}{}^{-}(z')\,\overset{1}{\widehat{\Psi}}{}^{-}(w')\cdot\widehat{B}^{-}(z',\,w')\Big)^{M}\cdot$$

$$\exp\Big(-\int d\xi\,\overset{2}{\widehat{\Psi}}{}^{+}(\xi)\,\overset{1}{\widehat{\Psi}}{}^{-}(\xi)\Big).$$

Оператор ρ' стоит под знаком логарифма вместо оператора ρ в формуле (2.12):

$$\overline{\widehat{S}} = \Big\{\mathrm{Sp}_{\mathscr{H}}\Big(\rho\big(\overset{2}{\widehat{b}}{}^{+}(\,\cdot\,),\, \overset{1}{\widehat{b}}{}^{-}(\,\cdot\,),\, \overset{2}{\widehat{B}}{}^{+}(\,\cdot\,),\, \overset{1}{\widehat{b}}{}^{-}(\,\cdot\,),\, \widehat{\psi}^{+},\, \widehat{\psi}^{-}\big)\cdot$$

$$\cdot\ln\Bigg(\frac{\overset{3}{[}[\rho'\big[\overset{2}{\widehat{b}}{}^{+}(\,\cdot\,),\, \overset{1}{\widehat{b}}{}^{-}(\,\cdot\,),\, \overset{2}{\widehat{B}}{}^{+}(\,\cdot\,),\, \overset{1}{\widehat{b}}{}^{-}(\,\cdot\,),\, \overset{2'}{\widehat{\psi}}{}^{+},\, \overset{1'}{\widehat{\psi}}{}^{-}\big]\exp\Big(-\sum_{j=1}^{J}\int dx\overset{2}{\widehat{b}}{}^{+}(x,\,j)}{\mathrm{Sp}_{\mathscr{H}}\overset{4}{[}[\widehat{\rho}'\big[\overset{2}{\widehat{b}}{}^{+}(\,\cdot\,),\, \overset{1}{\widehat{b}}{}^{-}(\,\cdot\,),\, \overset{2}{\widehat{B}}{}^{+}(\,\cdot\,),\, \overset{1}{\widehat{b}}{}^{-}(\,\cdot\,),\, \overset{2'}{\widehat{\psi}}{}^{+},\, \overset{1'}{\widehat{\psi}}{}^{-}\big]\exp\Big(-\sum_{j=1}^{J}\int dx}$$

$$\frac{\overset{1}{\widehat{b}}{}^{-}(x,\,j)\Big) - \iiint dz\,dw\,\overset{2}{\widehat{B}}{}^{+}\,\overset{1}{\widehat{B}}{}^{-}}{\overset{2}{\widehat{b}}{}^{+}(x,\,j)\,\overset{1}{\widehat{b}}{}^{-}(x,\,j)\Big) - \iiint dz\,dw\,\overset{2}{\widehat{B}}{}^{+}\,\overset{1}{\widehat{B}}{}^{-}}\Bigg)\Bigg)\Bigg\}\cdot$$

$$\cdot\exp\Big(-\sum_{j=1}^{J}\int dx\,\overset{2}{\widehat{b}}{}^{+}(x,\,j)\,\overset{1}{\widehat{b}}{}^{-}(x,\,j) - \iiint dz\,dw\,\overset{2}{\widehat{B}}{}^{+}(z,\,w)\,\overset{1}{\widehat{B}}{}^{-}(z,\,w)\Big).$$

Таким образом, энтропия зависит от «духов».

§ 3. Фермионной случай

Введем понятие ультравторичного квантования в фермионном случае.

Пусть $\mathscr{H}$ — фермионное пространство Фока, элементами которого являются последовательности $\{Y_n\}$, $n = 0, 1, \ldots$, где член последовательности $\{Y_n\}$ является функцией $Y_n x_1, \sigma_1, \ldots, x_n, \sigma_n$ из пространства $L_2\big((\mathbf{T}^1 \times [1, \ldots, 2J+1))^n\big)$, антисимметричной относительно перестановок пар переменных (x_i, σ_i) и x_j, σ_j, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Операторы рождения и уничтожения в пространстве $\mathscr{H}$ будем обозначать соответственно $\psi^+(x, \sigma)$ и $\psi^-(x, \sigma)$.

Рассмотрим операторно-значный функционал $\widehat{\rho}\big[b^*(\,\cdot\,), b(\,\cdot\,), B^*(\cdot), B(\cdot)\big]$, который зависит от функций $b(x, \sigma, s)$, $B(y_1, \sigma, y_2, \sigma_2)$, таких, что

$$\sum_{\sigma=1}^{2J+1} \sum_{s=1}^{\infty} \int dx \big|b^*(x, \sigma, s)\big|^2 < \infty,$$

$$\sum_{\sigma_1,\sigma_2=1}^{2J+1} \iint dy_1\, dy_2 \big|B(y_1, \sigma_1, y_2, \sigma_2)\big|^2 < \infty,$$

и принимает значения в пространстве $\mathscr{H}$:

$$\begin{gathered}
\widehat{\rho}\big[b^*(\cdot), b(\cdot), B^*(\cdot), B(\cdot)\big] = \sum_{K=0}^{\infty} \sum_{M=0}^{\infty} \frac{C_{K+2M}}{K!\,M!} \cdot \\
\cdot \left(\sum_{\sigma_1,\sigma_2}^{2J+1} \iint dy_1\, dy_2\, B(y_1, \sigma_1', y_2, \sigma_2') \widehat{\psi}^+(y_1, \sigma_1')\, \widehat{\psi}^+(y_2, \sigma_2') \right)^M \cdot \\
\cdot \sum_{\sigma_1=1}^{2J+1} \cdots \sum_{\sigma_K=1}^{2J+1} \sum_{\sigma_{K+1}=1}^{2J+1} \cdots \sum_{\sigma_{2K}=1}^{2J+1} \sum_{\sigma_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{\sigma_K=1}^{\infty} \iint dx_1 \ldots dx_K\, dx_{K+1} \ldots dx_{2K} \cdot \\
\cdot \widehat{\psi}^+(x_1, \sigma_1)\, b(x_1, \sigma_1, s_1) \ldots \widehat{\psi}^+(x_K, \sigma_K)\, b(x_K, \sigma_K, s_K) \widehat{P}_0\, b^*(x_{2K}, \sigma_{2K}, s_K) \cdot \\
\cdot \widehat{\psi}^-(x_{2K}, \sigma_{2K}) \cdot \ldots \cdot b^*(x_{K+1}, \sigma_{K+1}, s_1) \widehat{\psi}^-(x_{K+1}, \sigma_{K+1}) \cdot \\
\cdot \left(\sum_{\sigma_2',\sigma_4'=1}^{2J+1} \iint dy_3\, dy_4\, B^*(y_3, \sigma_2', y_4, \sigma_4') \cdot \widehat{\psi}^-(y_4, \sigma_4)\, \widehat{\psi}^-(y_3, \sigma_3) \right),
\end{gathered} \tag{2.13}$$

где C_N, $N = 0, 1, 2, \ldots$, — последовательность действительных положительных чисел, удовлетворяющая при $N \to \infty$ оценке $C_N = O\big(1/(N!)^{\varepsilon}\big)$ для некоторого $\varepsilon > 0$, $\widehat{P}_0$ — ортогональпый проектор на вакуумный вектор в пространстве $\mathscr{H}$.

Пусть $\widehat{A}$ — оператор в пространстве $\mathscr{H}$.

Определение. Ультравторично квантованным оператором $\overline{\widehat{A}}$ будем называть оператор в пространстве Фока $\mathscr{F}$:

$$\overline{\widehat{A}} = \sum_{N_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{N_k=0}^{\infty} \widehat{i}_{N_1,\ldots,N_k} \widetilde{\widehat{A}}_{N_1+\ldots+kN_k} \widehat{P}^{F}_{N_1,\ldots,N_k} \widehat{P}_{N_1,\ldots,N_k}. \tag{2.14}$$

Замечание. Оператор $\widetilde{\widehat{A}}_{N_1+\ldots+kN_k} \widehat{P}^{F}_{N_1,\ldots,N_k} \widehat{P}_{N_1,\ldots,N_k}$ может быть выражен следующим образом:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N_1!\ldots N_k!} & \sum_{s_1^1=1}^{\infty} \cdots \sum_{s_{N_1}^1=1}^{\infty} \cdots \sum_{s_1^k=1}^{\infty} \cdots \sum_{s_{N_k}^k=1} \int \cdots \int dx_1^1 \ldots dx_{N_1}^1 \ldots dx_1^k \ldots dx_{kN_k}^k \times \\
& \times \overset{2}{\widehat{b}}{}_1^{+}(x_1^1, s_1^1) \ldots \overset{2}{\widehat{b}}{}_1^{+}(x_{N_1}^1, s_{N_1}^1) \ldots \overset{2}{\widehat{b}}{}_k^{+}(x_1^k, \ldots, x_k^k, s_k^k) \ldots \times \\
& \times \overset{2}{\widehat{b}}{}_k^{+}(x_{kN_k-k+1}^k, \ldots, x_{kN_k}^k, s_{kN_k}^k) \widehat{A}_{N_1+\ldots kN_k} \times \\
& A \underset{x_1^1\ldots x_{N_1}^1\ldots x_1^k\ldots x_{kN_k}^k}{\mathrm{Symm}} \Big\{ \overset{1}{\widehat{b}}{}_1^{-}(x_1^1, s_1^1) \ldots \overset{1}{\widehat{b}}{}_1^{-}(x_{N_1}^1, s_{N_1}^1) \ldots \times \\
& \qquad \times \overset{1}{\widehat{b}}{}_k^{-}(x_1^k, \ldots, x_k^k, s_k^k) \ldots \overset{1}{\widehat{b}}{}_1^{-}(x_{kN_k-k+1}^k, \ldots, x_{kN_k}^k, s_{N_k}^k) \Big\} \times \\
& \times \exp\Big(-\sum_{s=1}^{\infty} \int dz \overset{2}{\widehat{b}}{}_1^{+}(z, s) \overset{1}{\widehat{b}}{}_1^{-}(z, s) - \ldots \\
& \qquad \ldots - \sum_{s=1}^{\infty} \int dz_1 \ldots dz_k \overset{2}{\widehat{b}}{}_k^{+}(z_1, \ldots, z_k, s) \overset{1}{\widehat{b}}{}_k^{-}(z_1, \ldots, z_k, s) \Big),
\end{aligned} \tag{2.15}$$

где $A \underset{x_1\ldots x_N}{\mathrm{Symm}}$ — оператор антисимметризации но нереМенным $x_1, \ldots, x_N$.

Символом ультравторично квантованного оператора $\overline{\widehat{A}}$ в фермионном случае будем называть следующий функционал:

$$A(b_1(x_1^1, s^1), b_1(x_1^1, s^1), \ldots, b_k^*(x_1^k, \ldots, x_k^k, s^k), b_k(x_1^k, \ldots, x_k^k, s^k)) =$$

$$= \sum_{N_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{N_k=0}^{\infty} \frac{1}{N_1!N_2!\ldots n_k!} \times$$

$$\times \sum_{s_1^1=1}^{\infty} \cdots \sum_{s_{N_1}^1=1}^{\infty} \cdots \sum_{s_1^k=1}^{\infty} \cdots \sum_{s_{N_k}^k=1}^{\infty} \int \cdots \int dx_1^1 \ldots dx_{N_1}^1 \ldots dx_1^k \ldots dx_{N_k}^k \times$$

$$\times b_1^*(x_1^1, s_1^1) \ldots b_1^*(x_{N_1}^1, s_{N_1}^1) \ldots b_k^*(x_1^k, \ldots, x_k^k, s_k^k) \ldots \times$$

$$\times b_k^*(x_{kN_k-k+1}^k, \ldots, x_{kN_k}^k, s_{N_k}^k) \widehat{A}_{N_1+\ldots+kN_k} A \times$$

$$\times \operatorname*{Symm}_{x_1 \ldots x_{N_1}^1 \ldots x_1^k \ldots x_{kN_k}^k} \{b_1(x_1^1, s_1^1) \ldots b_1(x_{N_1}^1, s_{N_1}^1) \ldots b_k(x_1^k, \ldots, x_k^k, s_k^k) \ldots \times$$

$$\times b_k(x_{kN_k-k+1}^k, \ldots, x_{kN_k}^k, s_{kN_k}^k)\} \exp\Big(-\sum_{s=1}^{\infty} \int dz\, b_1^*(z, s)\, b_1(z, s) -$$

$$- \ldots - \sum_{s=1}^{\infty} \int \cdots \int dz_1 \ldots dz_k\, b_k^*(z_1, \ldots, z_k, s)\, b_k(z_1, \ldots, z_k, s) \Big), \quad (2.16)$$

где при $l = 1, \ldots, k$ $b_l(\cdot, \ldots, \cdot, s^l) \in L^2(\mathbf{T}^{3l})$ для всех $s^l = 0, 1, \ldots$ и выполнено неравенство

$$\sum_{s=0}^{\infty} \int \cdots \int dx_1 \ldots dx_l\, b_l^*(x_1, \ldots, x_l, s)\, b_l(x_1, \ldots, x_l, s) < \infty.$$

Рассмотренному выше набору операторов $\{\widehat{A}_N\}$ отвечает вторично квантованный оператор $\widehat{A}$ в фермионном пространстве Фока $\mathscr{H}_F$, которое состоит из последовательностей антисимметричных функций и является аналогом пространства $\mathscr{H}_B$ (подробно смотри в [62]).

В фермионном случае имеет место следующая

Лемма. *Символ ультравторично квантованного оператора* $\overline{\widehat{A}}$ *выражается следующим образом:*

$$A(b_1(x_1^1, s^1), b_1(x_1^1, s^1), \ldots, b_k^*(x_1^k, \ldots, x_k^k, s^k), b_k(x_1^k, \ldots, x_k^k, s^k)) =$$

$$= \mathrm{Sp}(\widehat{A}\widehat{\rho}) \exp\Big(-\sum_{s=1}^{\infty} \int dz\, b_1^*(z, s)\, b_1(z, s) - \ldots -$$

$$- \sum_{s=1}^{\infty} \int \cdots \int dz_1 \ldots dz_k\, b_k^*(z_1, \ldots, z_k, s)\, b_k(z_1, \ldots, z_k, s) \Big), \quad (2.17)$$

где $\widehat{\rho}$ является оператором в пространстве $\mathscr{H}_F$ и имеет вид

$$\widehat{\rho} = \sum_{N_1=0}^{\infty} \dots \sum_{N_k=0}^{\infty} \frac{1}{(N_1 + 2N_2 + \ldots + kN_k)!\, N_1! \ldots N_k!} \times$$
$$\times \sum_{s_1^1=0}^{\infty} \dots \sum_{s_{N_1}^1=0}^{\infty} \dots \sum_{s_1^k=0}^{\infty} \dots \sum_{s_{N_k}^k=0}^{\infty} \times$$
$$\times \int \dots \int dx_1^1\, dy_1^1 \ldots dx_{N_1}^1\, dy_{N_1}^1 \ldots dx_1^k\, dy_1^k \ldots dx_{kN_k}^k\, dy_{kN_k}^k \times$$
$$\times \widehat{\psi}^+(x_1^1) \ldots \widehat{\psi}^+(x_{N_1}^1) \ldots \widehat{\psi}^+(x_1^k) \ldots \widehat{\psi}^+(x_{kN_k}^k) \widehat{P}_0\, b_1(x_1^1, s_1^1) \ldots \times$$
$$\times b_1(x_{N_1}^1, s_{N_1}^1) \ldots b_k(x_1^k, \ldots, x_k^k, s_1^k) \ldots b_k(x_{kN_k-k+1}^k, \ldots, x_{kN_k}^k, s_{N_k}^k) \times$$
$$\times b_1^*(y_1^1, s_1^1) \ldots b_1^*(y_{N_1}^1, s_{N_1}^1) \ldots b_k^*(y_1^k, \ldots, y_k^k, s_1^k) \ldots \times$$
$$\times b_k^*(y_{kN_k-k+1}^k, \ldots, y_{kN_k}^k, s_{N_k}^k) \widehat{\psi}^-(y_{kN_k}^k) \ldots \widehat{\psi}^-(y_1^k) \ldots \widehat{\psi}^-(y_{N_1}^1 \ldots \widehat{\psi}^-(x_1^1)), \tag{2.18}$$

где $\widehat{P}_0$ — оператор проектирования на вакуумный вектор пространства $\mathscr{H}_F$.

В фермионном случае ультраторично квантованная энтропия определяется так же, как в бозонном.

Формальный переход к числам заполнения

Выберем полную ортонормированную в пространстве $L_2(\mathbf{T})$ систему функций $\{\varphi_\alpha(x)\}$, $\alpha = 1, 2, \ldots$

Рассмотрим следующую систему векторов в пространстве $\mathscr{F}$:

$$\Psi_{\{n\},\{m\}} = \left(\prod_{\alpha=1}^{\infty} \left(\prod_{\sigma=1}^{2J+1} \left(\prod_{s=1}^{\infty} \left(\left(\int dx\, \widehat{b}^+(x, \sigma, s)\, \varphi_\alpha(x) \right)^{n_{\alpha\sigma s}} \frac{1}{\sqrt{n_{\alpha\sigma s}!}} \right) \right) \right) \right) \cdot$$
$$\cdot \left(\prod_{\beta,\gamma=1}^{\infty} \left(\prod_{\sigma_1',\sigma_2'=1}^{2J+1} \left(\left(\iint dy_1\, dy_2\, \varphi_\beta(y_1)\, \varphi_\gamma(y_2)\, \widehat{B}^+(y_1, \sigma_1', y_2, \sigma_2') \right)^{m_{\beta\gamma\sigma_1'\sigma_2'}} \cdot \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. \cdot \frac{1}{\sqrt{m_{\beta\gamma\sigma_1'\sigma_2'}!}} \right) \right) \right) \cdot \Psi_0, \tag{2.19}$$

где $\{n\}$ — набор целый чисел $n_{\alpha\sigma s} \geqslant 0$, зависящих от трех параметров, $\alpha = 1, 2, \ldots$, $\sigma = 1, \ldots, 2J+1$, $s = 1, 2, \ldots$, $\{m\}$ — набор целых чисел $m_{\beta\gamma\sigma_1'\sigma_2'} \geqslant 0$, зависящих от четырех параметров β, $\gamma = 1, 2, \ldots$, σ_1', $\sigma_2' = 1, \ldots, 2J+1$.

Система векторов (2.19) полная в пространстве $\mathcal{F}$. Представлением ультравторичного квантованного оператора $\overline{\overline{\widehat{A}}}$ в числах заполнения является следующая матрица:

$$A(\{n\}, \{m\}; \{n'\}, \{m'\}) = \big(\Psi_{\{n\},\{m\}}, \overline{\overline{\widehat{A}}}\Psi_{\{n'\},\{m'\}}\big).$$

Имеет место следующая связь между представлением чисел заполпепия и символом ультравторичного квантовапного оператора. Пусть наборы чисел $\{n\}$, $\{m\}$, $\{n'\}$, $\{m'\}$ такие, что

$$n_{\alpha\sigma s} = K\delta_{\alpha\alpha_0}\delta_{\sigma\sigma_0}\delta_{ss_0}, \qquad m_{\beta\gamma\sigma\sigma'} = M\delta_{\beta\beta_0}\delta_{\gamma\gamma_0}\delta_{\sigma\sigma_1}\delta_{\sigma'\sigma_2},$$
$$n'_{\alpha\sigma s} = K\delta_{\alpha\alpha'_0}\delta_{\sigma\sigma'_0}\delta_{ss'_0}, \qquad m'_{\beta\gamma\sigma\sigma'} = M\delta_{\beta\beta'_0}\delta_{\gamma\gamma'_0}\delta_{\sigma\sigma'_1}\delta_{\sigma'\sigma'_2}.$$

Рассмотрим функции

$$b_1(x, \sigma, s) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \sqrt{n_{\alpha\sigma s}}\,\varphi_\alpha(x),$$

$$b_2(x, \sigma, s) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \sqrt{n'_{\alpha\sigma s}}\,\varphi_\alpha(x),$$

$$B_1(y_1, \sigma_1, y_2, \sigma_2) = \sum_{\beta,\gamma=1}^{\infty} \sqrt{m_{\beta\gamma\sigma\sigma'}}\,\varphi_\beta(y_1)\,\varphi_\gamma(y_2),$$

$$B_2(y_1, \sigma_1, y_2, \sigma_2) = \sum_{\beta,\gamma=1}^{\infty} \sqrt{m'_{\beta\gamma\sigma\sigma'}}\,\varphi_\beta(y_1)\,\varphi_\gamma(y_2).$$

При K, $M \to \infty$ справедливо асимптотическое равенство

$$A(\{n\}, \{m\}; \{n'\}, \{m'\}) \sim A\big[b_2^*(\,\cdot\,), b_1(\,\cdot\,), B_2^*(\,\cdot\,), B_1(\,\cdot\,)\big].$$

Проекция ультравторично квантованного оператора на N частичное подпространство

Пусть $K_0, M_0 \geqslant 0$ такие, что $N = K_0 + 2M_0$. Рассмотрим в пространстве $\mathcal{F}$ подпространство, элементами которого являются двухпараметрические последовательности $\{\Psi_{K,M}\}$ такие, что

$$\Psi_{K,M} = 0, \quad K \neq K_0 \text{ или } M \neq M_0,$$
$$\Psi_{K_0,M_0} = \Psi_{K_0,M_0}(x_1, \sigma_1, s_1; \ldots; x_{K_0}, \sigma_{K_0}, s_{K_0};$$
$$y_1, \sigma'_1, y_2, \sigma'_2; \ldots; y_{2M_0-1}, \sigma'_{2M_0-1}, y_{2M_0-1}, \sigma'_{2M_0-1}),$$

— функция антисимметричная относительно перестановок пар переменных (x_i, σ_i) и $x_{i'}, \sigma_{i'}$, антисимметричная относительно перестановок пар переменных (y_j, σ'_j) и $y_{j'}, \sigma'_{j'}$ и антисимметричная относительно перестановок пар переменных (x_i, σ_i) и y_j, σ'_j, $i, i' = 1, \ldots, K$, $j, j' = 1, \ldots, 2M_0$. Обозначим это подпространство $\mathscr{F}^{A\,\mathrm{Symm}}_{K_0,M_0}$. Пусть оператор $\widehat{A}$ в пространстве $\mathscr{H}$ такой, что вектор $\{Y_n\}$ он переводит в вектор $\{\widetilde{Y}_n\}$, где

$$\widetilde{Y}_n(x_1, \ldots, x_n) = A_n\Big(\overset{2}{x}_1, \ldots, \overset{2}{x}_n, -i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x_1}}, \ldots, -i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x_n}}\Big)\widetilde{Y}_n(x_1, \ldots, x_n).$$

Имеет место следующая

Теорема 2. *Если* Ψ — *элемент подпространства* $\mathscr{F}^{A\,\mathrm{Symm}}_{K-0,M_0}v$, *положим* $C_n = \frac{1}{N!}$, *тогда*

$$(\overline{\widehat{A}}\Psi) = A_N\Big(\overset{2}{x}_1, \ldots, \overset{2}{x}_{K_0}, \overset{1}{y}_1, \ldots, \overset{1}{y}_{2M_0},$$

$$-i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x_1}}, \ldots, -i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x_{K_0}}}, -i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial y_1}}, \ldots, -i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial y_{2M_0}}}\Big)\cdot$$

$$\cdot \Psi_{K-0,M_0}(x_1, \sigma_1, s_1; \ldots; x_{K_0}, \sigma_{K_0}, s_{K_0}; y_1, \sigma'_1, y_2, \sigma'_2; \ldots$$

$$\ldots; y_{2M_0-1}, \sigma'_{2M_0-1}, y_{2M_0}, \sigma'_{2M_0}).$$

Доказательство. Любой элемент $\Psi = \{\Psi_{K,M}\}$ пространства $\mathscr{F}$ представляется в виде

$$\Psi = \sum_{K=0}^{\infty}\sum_{M=0}^{J} y\frac{1}{\sqrt{K!\,M!}}\sum_{\sigma_K=0}^{2J+1}\cdots\sum_{\sigma_K=0}^{2J+1}\sum_{\sigma'_1=0}^{2J+1}\sum_{\sigma'_2=0}^{2J+1}\cdots\sum_{\sigma'_{2M-1}=0}^{2J+1}\sum_{\sigma'_{2M}=0}^{2J+1}\cdots$$

$$\ldots\sum_{s_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{s_K=0}^{\infty}\int\cdots\int dx_1\ldots dx_K\,dy_1\ldots dy_{2M}\cdot$$

$$\cdot\Psi_{K,M}(x_1, \sigma_1, s_1; \ldots; x_K, \sigma_K, s_K; y_1, \sigma'_1, y_2, \sigma'_2; \ldots$$

$$\ldots; y_{2M-1}, \sigma'_{2M-1}, y_{2M}, \sigma'_{2M})\cdot$$

$$\cdot\widehat{b}^+(x_1, \sigma_1, s_1)\cdot\ldots\cdot\widehat{b}^+(x_K, \sigma_K, s_K)\cdot$$

$$\cdot\widehat{B}^+(y_1, \sigma'_1, y_2, sg'_2)\cdot\ldots\cdot\widehat{B}^+(y_{2M-1}, \sigma'_{2M-1}, y_{2M}, sg'_{2M})\Psi_0. \tag{2.20}$$

Кроме того, операторы

$$\exp\left(-\sum_{\sigma=1}^{2J+1}\sum_{s=1}^{\infty}\int dx \overset{2}{\widehat{b}}{}^{+}(x,\sigma,s)\overset{1}{\widehat{b}}{}^{-}(x,\sigma,s) - \\ - \sum_{\sigma_1',\sigma_2'=1}^{2J+1}\iint dy_1\,dy_2\,\widehat{B}^{+}(y_1,\sigma_1',y_2,\sigma_2')\,\widehat{B}^{-}(y_1,\sigma_1',y_2,\sigma_2')\right) \tag{2.21}$$

и $\widehat{P}_0$ являются ортогональными проекторами на вакуумный вектор соответственно в пространстве $\mathscr{F}$ и $\mathscr{H}$.

Действуя на вектор (2.20) оператором (2.14) и учитывая свойства операторов (2.21) и свойства операторов рождения и уничтожения, $\widehat{\psi}^{\pm}(x)$, $\widehat{b}^{\pm}(x,\sigma,s)$, $\widehat{B}^{\pm}(y_1,\sigma_1',y_2,\sigma_2')$:

$$\left[\widehat{\psi}^{-}(x),\widehat{\psi}^{+}(y)\right] = \delta(x-y),$$

$$\left[\widehat{b}^{-}(y_1,\sigma_1,s_1),\widehat{b}^{+}(x_1,\sigma_2,s_2)\right] = \delta_{\sigma_1\sigma_2}\delta_{s_1s_2}\delta(x_1-x_2),$$

$$\left[\widehat{B}^{-}(y_1,\sigma_1',y_2,\sigma_2'),\widehat{B}^{+}(y_3,\sigma_3',y_4,\sigma_4')\right] = \delta_{\sigma_1'\sigma_3',\sigma_2'\sigma_4'}\delta(y_1-y_3)\,\delta(y_2-y_4),$$

где остальные коммутаторы равны нулю,

$$\widehat{\psi}^{-}(x)\,Y_0 = 0,\quad \widehat{b}^{-}(x,\sigma,s)\,\Psi_0 = 0,\quad \widehat{B}^{-}(y_1,\sigma_1',y_2,\sigma_2')\,\Psi_0 = 0,$$

получим утверждение теоремы.

Из теоремы следует, что оператор $\overline{\overline{\widehat{A}}}$ на подпространстве $\mathscr{F}_{K,M}$ зависит от $N = K + 2M$ и не зависит от K и M в отдельности.

Соответствие алгебр доказывается аналогично бозонному случаю.

Замечание. Переход к числам заполнения, связанным с новыми операторами, b_s^{+}, b_s^{-}, B^{+}, B^{-} могут дать существенно более тонкие вычисления и асимптотики, чем грубый переход от операторов к их символам («c-числам»). Этот способ немедленно приводит к температурным уравнениям БКШ-Боголюбова. Переход к числам заполнения — отдельная наука, причем достаточно сложная, связанная с переходом к континуальному интегралу в термодинамическом пределе. Она требует на порядок более сложных и громоздких вычислений, и ей должна быть посвящена отдельная работа, может быть, не очень богатая идеями, но требующая тончайших оценок, особенно в фермионном случае.

Глава 3

УЛЬТРАВТОРИЧНОЕ КВАНТОВАНИЕ ДЛЯ МАТРИЦЫ ПЛОТНОСТИ (ДЛЯ ФЕРМИОНОВ)

§ 1. Случай отсутствия операторов рождения-уничтожения пар B^+, B^-

Рассмотрим уравнение для матрицы плотности системы N фермионов

$$i\frac{\partial\rho}{\partial t}(x_1, y_1;\dots x_N, y_N, t) = \big(H_N(x) - H_N(y)\big)\rho(x_1, y_1;\dots;x_N, y_N, t), \tag{3.1}$$

где $H_N(x)$ – оператор в пространстве $L_2(\mathbf{T}^N)$ вида:

$$\begin{aligned} H_N(x)\Phi(x_1, \dots, x_N) = \int dy\big(T(x_1, y)\,\Phi(y_1, x_2, \dots, y_N)+ \\ + T(x_2, y)\,\Phi(x_1, y, \dots, x_N) + \dots + T(x_N, y)\,\Phi(x_1, x_2, \dots, y)\big)+ \\ + \iint dz\,dw\,\big(V(x_1, x_2; z, w)\,\Phi(z, w, x_3, \dots, x_{N-1}, x_N)+ \\ + V(x_{N-1}, x_N; x, w)\,\Phi(x_1, x_2, x_3, \dots, z, w)\big), \end{aligned} \tag{3.2}$$

а функция $\rho(x_1, y_1;\dots;x_N, y_N, t)$ является антисимметричной относительно перестановок переменных x_j и x_k и антисимметричной относительно перестановок переменных y_j и y_k, $k = 1, 2, \dots, N$ и удовлетворяет условиям

$$\rho(x_1, y_1;\dots x_N, y_N) = \rho^*(y_1, x_1;\dots;y_N, x_N),$$
$$\int\cdots\int dx_1\dots dx_N\,\rho(x_1, x_1;\dots;x_N, x_N, t) < \infty.$$

В силу антисимметрии функции $\rho(x_1, y_1; \ldots; x_N, y_N)$ относительно переменных x и переменных y, эта функция симметрична относительно перестановок пар переменных (x_j, y_j) и (x_k, y_k), $j, k = 1, \ldots, N$. Поэтому к уравнению (3.1) можно применить процедуру ультранторичного квантования, которая немного отличается от обычной.

Введем пространство $\mathscr{L}_N$, элементами которого являются функции

$$\Phi(x_1, y_1; x_2, y_2; \ldots; x_N, y_N) \in L_2(\mathrm{T}^{2N}), \tag{3.3}$$

симметричные относительно перестановок пар переменных (x_j, y_j) и (x_k, y_k), $j, k = 1, 2, \ldots, N$.

Рассмотрим пространство $\mathscr{L} = \bigoplus_{N=0}^{\infty} \mathscr{L}_N$, которое состоит из последовательностей $\{\Phi_N\}$, $N = 0, 1, \ldots$ функций $\Phi_N \in \mathscr{L}_N$. Пространство $\mathscr{L}$ является бозонным фоковским, и в нем можно ввести операторы рождения $\widehat{b}^+(x, y)$ и уничтожения $\widehat{b}^-(x, y)$, а также вакуумный вектор Φ_0, такие, что

$$\begin{aligned} &\big[\widehat{b}^-(x, y),\ [\widehat{b}^+(x', y')\big] = \delta(x - x')\,\delta(y - y'), \\ &\big[[\widehat{b}^\pm(x, y),\ [\widehat{b}^\pm(x', y')\big] = 0, \\ &\widehat{b}^-(x, y)\,\Phi_0 = 0, \quad (\Phi_0, \Phi_0) = 1. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Рассмотрим в пространстве $\mathscr{L}$ следующие операторы:

$$\begin{aligned} \overline{\overline{H}} = \sum_{N=0}^{\infty} \int \cdots \int dx_1\, dy_1 \ldots dx_N\, dy_N \overset{2}{\widehat{b}^+}(x_1, y_1) \cdot \ldots \cdot \overset{2}{\widehat{b}^+}(x_N, y_N) \cdot \\ \cdot \big(H_N(x) - H_N(y)\big) A \operatorname*{Symm}_{x_1 \ldots x_N}\big(\overset{1}{\widehat{b}^-}(x_1, y_1) \cdot \ldots \cdot \overset{1}{\widehat{b}^-}(x_N, y_N)\big) \cdot \\ \cdot \exp\Big(-\iint dz\, dw \overset{2}{\widehat{b}^+}(z, w) \overset{1}{\widehat{b}^-}(z, w)\Big), \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} \overline{\overline{E}} = \sum_{N=0}^{\infty} \int \cdots \int dx_1\, dy_1 \ldots dx_N\, dy_N \overset{2}{\widehat{b}^+}(x_1, y_1) \cdot \ldots \cdot \overset{2}{\widehat{b}^+}(x_N, y_N) \cdot \\ \cdot \big(H_N(x) - H_N(y)\big) A \operatorname*{Symm}_{x_1 \ldots x_N}\big(\overset{1}{\widehat{b}^-}(x_1, y_1) \cdot \ldots \cdot \overset{1}{\widehat{b}^-}(x_N, y_N)\big) \cdot \\ \cdot \exp\Big(-\iint dz\, dw \overset{2}{\widehat{b}^+}(z, w) \overset{1}{\widehat{b}^-}(z, w)\Big), \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\overline{\widehat{N}} = \sum_{N=0}^{\infty} \int \cdots \int dx_1\, dy_1 \ldots dx_N\, dy_N\, \overset{2}{\widehat{b}}{}^{+}(x_1, y_1) \cdot \ldots \cdot \overset{2}{\widehat{b}}{}^{+}(x_N, y_N) \cdot$$
$$\cdot \big(H_N(x) - H_N(y)\big) A \operatorname*{Symm}_{x_1 \ldots x_N} \big(\overset{1}{\widehat{b}}{}^{-}(x_1, y_1) \cdot \ldots \cdot \overset{1}{\widehat{b}}{}^{-}(x_N, y_N)\big) \cdot$$
$$\cdot \exp\Big(- \iint dz\, dw \overset{2}{\widehat{b}}{}^{+}(z, w) \overset{1}{\widehat{b}}{}^{-}(z, w)\Big). \quad (3.7)$$

Оператор $\overline{\overline{H}}$ является ультравторично квантованным гамильтонианом уравнения для матрицы плотности (3.1), $\overline{\widehat{N}}$ — ультравторично квантованный оператор числа частиц и $\overline{\widehat{E}}$ — ультравторично квантованный единичный оператор. Имеет место

Предложение. *Пусть $\Phi(t)$ — функция аргумента $t \in R$ со значением в $\mathscr{L}$, которая удовлетворяет уравнениям*

$$i\overline{\overline{E}} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t) = \overline{\overline{H}} \Phi(t), \quad \overline{\widehat{N}} \Phi(t) = N \overline{\overline{E}} \Phi(t), \quad \overline{\overline{E}} \Phi(t) \neq 0. \quad (3.8)$$

Тогда функция

$$\Phi_N(x_1, y_1; \ldots; x_N, y_N; t) = \big(\Phi_0, \widehat{b}^{-}(x_1, y_1) \cdot \ldots \cdot \widehat{b}^{-}(x_N, y_N) \cdot \overline{\overline{E}} \Phi(t)\big)$$

является решением уравнения (3.1).

Рассмотрим случай, когда коммутаторы (3.4) можно считать малыми. Тогда асимнтотика решений задачи (3.8) выражается через периодические решения гамильтоновой системы, отвечающей гамильтониану

$$\mathscr{H}(b^*(\cdot), b(\cdot)) = \Big(\sum_{N=0}^{\infty} \int \cdots \int dx_1\, dy_1 \ldots dx_N\, dy_N\, b^*(x_1, y_1) \ldots b^*(x_N, y_N)$$
$$\big(H_N(x) - H_N(y)\big) A \operatorname*{Symm}_{x_1 \ldots x_N} \big(b(x_1 m, y_1) \cdot \ldots \cdot b(x_N, y_N)\big) \Big) \cdot$$
$$\cdot \Big(\sum_{N=0}^{\infty} \int \cdots \int dx_1\, dy_1 \ldots dx_N\, dy_N\, b^*(x_1, y_1) \cdot \ldots \cdot b^*(x_N, y_N) \cdot$$
$$\operatorname*{Asmm}_{x_1 \ldots x_N} \big(b(x_1, y_1) \cdot \ldots \cdot b(x_N, y_N)\big) \Big)^{-1}. \quad (3.9)$$

Асимнтотика решений уравнений (3.8), таких, что

$$\Phi_N^*(x_1, y_1; \ldots; x_N, y_N; t) = \Phi_N(x_1, y_1; \ldots; x_N, y_N; t),$$

может быть выражена через решения гамильтоновой системы, для которых справедливо $b(x, y, t) = b^*(x, y, t)$.

Система уравнений Гамильтона при таком условии принимает вид

$$
\begin{aligned}
i\frac{\partial}{\partial t}G(x_1, x_2) &= \int dz\, T(x_2, z)\, G(x_1, z) - \int dz\, T(z, x_1)\, G(z, x_2) + \\
&+ \iiint dy\, dz\, dw\, V(x_2, y;\, z, w)\big(G(x_1, z)\, G^*(y, w) - G(x_1, w)\, G^*(y, z)\big) - \\
&- \iiint dy\, dz\, dw\, V(z, w;\, x_1, y)\big(G(z, x_2)\, G(w, y) - G(w, x_2)\, G(z, y)\big),
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

где функция $G(x, y)$ выражается через функцию $b(x, y)$ как решение уравнения

$$
G(x, y) = \int dz\, b(x, y)\, b^*(y, z) + \iint dz\, dw\, b(x, z)\, b^*(w, z)\, G(w, y).
$$

§ 2. Учет операторов B^+, B^- и температурные уравнения БКШ-Боголюбова

Ультравторичное квантование уравнения (3.1) можно провести с учетом пар. В этом случае в пространстве $\mathscr{L}$ появятся операторы $\widehat{B}_1^{\pm}(x_1, x_2)$ и $\widehat{B}_2^{\pm}(y_1, y_2)$, а операторы $\overline{\widehat{H}}$, $\overline{\widehat{E}}$ примут вид

$$
\begin{aligned}
\overline{\widehat{H}} = \sum_{K,M=0}^{\infty} \int \cdots \int dx_1\, dy_1 \ldots dx_{K+2M} dy_{K+3M} \overset{2}{\widehat{b}}{}^{+}(x_1, y_1) \ldots \overset{2}{\widehat{b}}{}^{+}(x_K, y_K) \\
\overset{2}{\widehat{B}}{}_2^{+}(x_{K+1}, x_{K+2}) \overset{2}{\widehat{B}}{}_2^{+}(y_{K+1}, y_{K+2}) \overset{2}{\widehat{B}}{}_1^{+}(x_{K+2M-1}, x_{K+2M}) \\
\cdot \overset{2}{\widehat{B}}{}_1^{+}(y_{K+2M-1}, y_{K+2M})\big(H_{K+2M}(x) - H_{K+2M}(y)\big) \\
A \underset{x_1 \ldots x_{K+2M}}{\mathrm{Symm}}\ A \underset{y_1 \ldots y_{K+2M}}{\mathrm{Symm}} \big(\overset{1}{\widehat{b}}{}^{-}(x_1, y_1) \cdot \ldots \cdot \overset{1}{\widehat{b}}{}^{-}(x_K, y_K) \cdot \overset{1}{\widehat{B}}{}_1^{-}(x_{K+1}, x_{K+2}) \cdot \\
\cdot \overset{1}{\widehat{B}}{}_2^{-}(y_{K+1}, y_{K+2}) \cdot \overset{1}{\widehat{B}}{}_1^{-}(x_{K+2M-11}, x_{K+2M}) \cdot \overset{1}{\widehat{B}}{}_2^{-}(y_{K+2M-1}, y_{K+2M})\big) \cdot \\
\cdot \exp\Big(\iint dx\, dy\, \overset{2}{\widehat{b}}{}^{+}(x, y)\, \overset{1}{\widehat{b}}{}^{-}(x, y) - \iint dz\, dw\, \overset{2}{\widehat{B}}{}_1^{+}(z, w) \overset{1}{\widehat{B}}{}_1^{-}(z, w) - \\
- \iint dz'\, dw'\, \overset{2}{\widehat{B}}{}_2^{+}(z', w') \overset{1}{\widehat{B}}{}_2^{-}(z', w')\Big),
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

$$\overline{\widehat{E}} = \sum_{K,M=0}^{\infty} \int \cdots \int dx_1\, dy_1 \ldots dx_{K+2M} dy_{K+2M} \overset{2}{\widehat{b}}{}^{+}(x_1, y_1) \cdot \ldots \cdot$$

$$\overset{2}{\widehat{b}}{}^{+}(x_K, y_K) \overset{2}{\widehat{B}}{}^{+}_{2}(x_{K+1}, x_{K+2}) \overset{2}{\widehat{B}}{}^{+}_{2}(y_{K+1}, y_{K+2}) \cdot \overset{2}{\widehat{B}}{}^{+}_{1}(x_{K+2M-1}, x_{K+2M})$$

$$\overset{2}{\widehat{B}}{}^{+}_{1}(y_{K+2M-1}, y_{K+2M}) \cdot \big(H_{K+2M}(x) - H_{K+2M}(y)\big)$$

$$A \underset{x_1 \cdots x_{K+2M}}{\mathrm{Symm}} A \underset{y_1 \cdots y_{K+2M}}{\mathrm{Symm}} \big(\overset{1}{\widehat{b}}{}^{-}(x_1, y_1) \cdot \ldots \cdot \overset{1}{\widehat{b}}{}^{-}(x_K, y_K) \cdot \overset{1}{\widehat{B}}{}^{-}_{1}(x_{K+1}, x_{K+2}) \cdot$$

$$\overset{1}{\widehat{B}}{}^{-}_{2}(y_{K+1}, y_{K+2}) \cdot \overset{1}{\widehat{B}}{}^{-}_{1}(x_{K+2M-11}, x_{K+2M}) \cdot \overset{1}{\widehat{B}}{}^{-}_{2}(y_{K+2M-1}, y_{K+2M})\big) \cdot$$

$$\cdot \exp\Big(\iint dx\, dy\, \overset{2}{\widehat{b}}{}^{+}(x, y) \overset{1}{\widehat{b}}{}^{-}(x, y) - \iint dz\, dw\, \overset{2}{\widehat{B}}{}^{+}_{1}(z, w) \overset{1}{\widehat{B}}{}^{-}_{1}(z, w) -$$

$$- \iint dz'\, dw'\, \overset{2}{\widehat{B}}{}^{+}_{2}(z', w') \overset{1}{\widehat{B}}{}^{-}_{2}(z', w')\Big), \quad (3.12)$$

Символы операторов (3.11) и (3.12) определяют следующую систему уравнений:

$$i\frac{\partial}{\partial t} G(x_1, x_2) = \int dz\, T(x_2, z)\, G(x_1, z) - \int dz\, T(z, x_1)\, G(z, x_2) +$$

$$+ \iiint dy\, dz\, dw\, V(x_2, y; z, w)\big(G(x_1, z)\, G(y, w) -$$

$$- G(x_1, w)\, G(y, z) - R^*(x_1, y)\, R(w, z)\big) -$$

$$- \iiint dy\, dz\, dw\, V(z, w; x_1, y)\big(G(z, x_2)\, G(w, y) -$$

$$- G(w, x_2)\, G(z, y) - R^*(x_1, y)\, R(w, z)\big), \quad (3.13)$$

$$i\frac{\partial}{\partial t} R(x_1, x_2) = \int dz\, \big(T(x_2, z)\, R(x_1, z) + T(x_1, z)\, R(z, x_2)\big) +$$

$$+ \iint dz\, dw\, V(x_1, x_2; z, w)\, R(z, w) +$$

$$+ \iiint dy\, dz\, dw\, V(x_2, y; z, w) \cdot \big(G(x_1, w)\, R(x_1, z) -$$

$$- G(y, z)\, R(x_1, w) - G(y, x_1)\, R(w, z)\, R(w, z)\big) +$$

$$+ \iiint dy\, dz\, dw\, V(x_1, y; z, w)\big(G(y, w)\, R(z, x_2) -$$

$$- G(y, z)\, R(w, x_2) - G(y, x_2)\, R(z, w)\big), \quad (3.14)$$

$$G(x, y) = G^*(y, x), \quad R(x, y) = -R(y, x).$$

При $R = 0$ система уравнений (3.13), (3.14) сводится к уравнению (3.10). Уравнения (3.13), (3.14) хорошо известны в теории сверхпроводимости БКШ. Рассмотрим в $L_2(\mathbf{T})$ операторы $\widehat{H}$, $\widehat{B}$, $\widehat{G}$ и $\widehat{R}$, ядра которых соответственно есть

$$H(x, y) = T(x, y) + \iint dz\, dw\big(V(x, z; y, w) - V(x, z; w, y)\big)G(z, w),$$

$$B(x, y) = \iint dz\, dw \cdot V(x, y; z, w)\, R(z, w), \quad G(x, y) \text{ и } R(x, y).$$

Система уравнений (3.13), (3.14) может быть записана в виде

$$i\frac{\partial}{\partial t}\widehat{A} = [\widehat{A}, \widehat{L}], \tag{3.15}$$

где $\widehat{A}$ и $\widehat{L}$ — следующие операторы и $L_2(\mathbf{T}) \oplus L_2(\mathbf{T})$:

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} \widehat{G} - \frac{1}{2} & -R^* \\ \widehat{R} & -\widehat{G}^* + \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \widehat{L} = \begin{pmatrix} \widehat{H}^* & -\widehat{B}^* \\ \widehat{B} & -\widehat{H} \end{pmatrix}. \tag{3.16}$$

Решения уравнения (3.15), не зависящие от t, могут быть получены из следующего самосогласованного ($\widehat{H}$ и $\widehat{B}$ зависят от $\widehat{G}$ и $\widehat{R}$) уравнения:

$$\widehat{A} = f(\widehat{L}), \tag{3.17}$$

где f — произвольная функция. Для определения свободной энергии системы фермионов можно применить пуантилистическую картину. Из пуантилистической картины следует, что $f(\xi)$ в (3.17) имеет вид

$$f(\xi) = \frac{1}{e^{\frac{\xi}{\theta}} + 1}.$$

Теперь интегральное уравнение совпадает с температурными уравнениями БКШ-Боголюбова. Из них определяется температура фазового перехода из сверхпроводящего состояния в нормальное и скачок теплоемкости при этом переходе. Таким образом, ультравторичное квантование и отвечающий ему символ («полагаем операторы c-числами») позволяет получить известные уравнения непосредственно.

Учет квантованной энтропии позволяет получить нечто большее: зависимость температуры фазового перехода от тока, аналогично тому, как это было показано во введении для сверхтекучести.

Глава 4

ВВЕДЕНИЕ ОПЕРАТОРА СВОБОДНОЙ ЭНЕРГИИ ДЛЯ АНСАМБЛЯ (эвристические соображения)

Введение

В этой главе приведены эвристические соображения, которые позволяют определить оператор свободной энергии.

В «Статистической физике» Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [67], в других книгах данной тематики ([68]–[71]) приведены формулы, определяющие число W_i — число способов распределения N_i частиц по G_i состояниям для ферми-газа:

$$W_i = \frac{G_i!}{N_i!\,(G_i - N_i)!} \tag{4.1}$$

и для бозе-газа:

$$W_i = \frac{(G_i + N_i - 1)!}{(G_i - 1)!\,N_i!}. \tag{4.2}$$

Целое число состояний G_i интерпретируется как число «ячеек» в i-м энергетическом «ящике» с энергией ε_i [69]. В зависимости от того для ферми- или для бозе-газа ищется равновесное распределение, число W_i определяется формулой (4.1) или формулой (4.2) соответственно. Таким образом Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц в [67], другие авторы книг по статистической физике ([68]–[71]) получают равновесные распределения, совпадающие в одном случае со статистикой Ферми, а в другом — со статистикой Бозе.

Проведем в формуле (4.1) естественную замену $G_i = N_i + S_i - 1$. Поскольку $G_i > N_i$, разность $(G_i - N_i)$ считается для ферми-газа большой (для логарифма $(G_i - N_i)!$ используется формула Стирлинга), и, следовательно, введенное число S_i тоже велико. Теперь формула (4.1) принимает вид $W_i = \frac{(S_i + N_i - 1)!}{(S_i - 1)!\,N_i!}$, т.е. совпадает с формулой (4.2) для бозе-газа.

При всех указанных в [67]–[71] условиях на числа N_i и G_i:

$$G_i \geqslant N_i \gg 1, \tag{4.3}$$

задано полное число частиц — $\sum_i N_i = N$,

фиксирована полная энергия газа — $\sum_i N_i \varepsilon_i = U$,

и в конечном счете $G_i \gg N_i$, мы не можем отличить формулу в бозе-ситуации от формулы в ферми-ситуации. Такое «недоразумение» происходит от того, что нигде не сказано, что число G_i возможных состояний N_i частиц, обладающих энергией ε_i, (не смотря на то, что $G_i \geqslant N_i$) считается не зависящим от N_i. Максимум энтропии ищется по переменным N_i при фиксированных числах G_i. Таким образом, неявно числа N_i считаются переменными величинами, а G_i — постоянными.

Но переменные величины всегда могут интерпретироваться как операторы умножения на эти величины. Формуле (4.1) будет соответствовать оператор $\widehat{W}_i = \frac{G_i!}{\widehat{N}_i!\,(G_i - \widehat{N}_i)!}$, а формуле (4.2) — оператор $\widehat{W}_i = \frac{(G_i + \widehat{N}_i - 1)!}{(G_i - 1)!\,\widehat{N}_i!}$, где $\widehat{N}_i$ — оператор умножения на число N_i. Естественно рассматривать не максимум выражения $\ln \prod_i W_i$ при условиях (4.3), а нижнее собственное значение оператора, который имеет вид $\sum_i \varepsilon_i \widehat{N}_i - \theta \ln \prod_i \widehat{W}_i$, при фиксированных константах G_i, θ — температура. Тогда никакой «путаницы» даже в этом простейшем случае не возникает, а получаются равновесные распределения, совпадающие соответственно с распределениями Ферми и Бозе[1].

Мы определим в общем случае оператор свободной энергии $\widehat{F}$ и покажем, что значительно удобнее рассматривать не формулу Гиббса для статистической суммы — $\sum = \sum e^{-\varepsilon_i/\theta}$, а формулу

$$\sum = \operatorname{Sp} e^{-\widehat{F}/\theta}, \tag{4.4}$$

[1] G_i, от которых зависит $\ln \widehat{W}_i$, т.е. энтропия, не сказывается при $N_i \to \infty$, $G_i \to \infty$ на распределениях. Поэтому G_i мы будем называть «духами».

где $\widehat{F}$ — квантованная свободная энергия. Оба эти подхода оказываются совершенно эквивалентными для большого числа частиц и большого объема. При этом мы определим аксиоматически квантованную энтропию и квантованную свободную энергию и для случая, когда общее число частиц $N = \sum\limits_i N_i$ не велико. Формула (4.4) более наглядна, т. к. ее правая часть есть сумма собственных значений оператора $e^{\frac{-\widehat{F}}{\theta}}$, откуда сразу видно, что минимальное собственное значение при $N \to \infty$ дает главный вклад. Такое представление статистической суммы чрезвычайно полезно для написания асимптотик при $N \to \infty$.

При определении квантованной энтропии мы будем исходить из равенства вышеприведенных шпуров:

$$\mathrm{Sp}\, e^{-\frac{\widehat{H}}{\theta}} = \mathrm{Sp}\, e^{-(\widehat{H}-\theta\widehat{S})/\theta}. \tag{4.5}$$

Эти шпуры рассматриваются в разных пространствах: например, первый в $L_2(T_1^{3N})$, а второй в $L_2(T_2^{3N})$. От разности объемов торов зависят «духи». Преимущество выражения, стоящего в правой части равенства, заключается в том, что большой параметр (например, большой объем V или большое число частиц N) будет стоять в самой экспоненте и, значит, главный член будет определяться минимальным собственным значением (зависящим от θ и V) оператора свободной энергии $\widehat{H} - \theta\widehat{S}$.

В качестве примера рассмотрим систему из N тождественных бозонов в двух случаях: на трехмерном торе T_1 с длиной сторон L/G, где G — некоторое целое число, и на трехмерном торе T_2 с длиной сторон L. При этом будем считать, что $N \ll L$, поэтому «духи», отвечающие N, малы по сравнению с «духами», отвечающими L, и ими можно пренебречь.

Пусть во втором случае вторично квантованный гамильтониан системы имеет вид

$$\widehat{H}_2 = \int dx \widehat{\psi}_2^+(y)\varepsilon(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y})\widehat{\psi}_2^-(y),$$

где $\widehat{\psi}_2^+$, $\widehat{\psi}_2^-$ — операторы рождения и уничтожения частиц [75, стр. 271] в точке $y \in T_2$; $\varepsilon(p)$ — некоторая гладкая функция, удовлетворяющая условию

$$\varepsilon\Big(\frac{2\pi\hbar}{L}(Gl+n)\Big) = \varepsilon\Big(\frac{2\pi\hbar}{L}Gl\Big), \tag{4.6}$$

где $l = (l_1, l_2, l_3)$, l_i — целые числа, $n = (n_1, n_2, n_3)\, n_i$ — целые числа, удовлетворяющие условию $0 \le n_1, n_2, n_3 < G$.

Обозначим

$$a_q^{\pm} = \left(\frac{G}{L}\right)^3 \int dx\, e^{\pm\frac{i}{\hbar}qy} \psi_1^{\pm}(x),$$

где $\psi_1^{\pm}(x)$ — операторы рождения и уничтожения, соответствующие первому случаю, в точке $x \in T_1$; $q = \frac{2\pi\hbar}{L} G(n_1, n_2, n_3)$, n_i — целые числа.

Вторично квантованный гамильтониан системы $\widehat{H}_1$, соответствующий первому случаю, можно записать в виде

$$\widehat{H}_1 = \sum_q \varepsilon(q) a_q^+ a_q^-.$$

Можно показать, что имеет место тождество

$$\mathrm{Sp}_N\, e^{-\frac{\widehat{H}_2}{\theta}} = \mathrm{Sp}_N\, e^{-\frac{\widehat{H}_1 - \theta\widehat{S}}{\theta}},$$

где Sp_N обозначает след ограничения оператора на N-частичное подпространство; оператор $\widehat{S}$ имеет вид

$$\widehat{S} = \sum_q \ln \frac{\Gamma(\widehat{N}_q + G^3)}{\Gamma(\widehat{N}_q + 1)\Gamma(G^3)},$$

где $\widehat{N}_q = a_q^+ a_q^-$; $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция.

Поскольку $1 \ll N_q \ll G^3$, то оператор $\widehat{S}$ можно записать в виде

$$\widehat{S} = -\sum_q \ln\bigl(\Gamma(\widehat{N}_q + 1)\bigr) + \ln(G^3) \sum_q \widehat{N}_q.$$

Обозначим

$$R_1 = \left\{p\colon p = \frac{2\pi\hbar}{L} G \cdot (n_1, n_2, n_3),\ n_i \in \mathbb{Z}\right\};$$

$$R_2 = \left\{q\colon q = \frac{2\pi\hbar}{L} \cdot (m_1, m_2, m_3),\ m_i \in \mathbb{Z}\right\};$$

$$I_p = \left\{q\colon q = p + \frac{2\pi\hbar}{L} \cdot (m_1, m_2, m_3),\ 0 \leqslant m_i < G\right\},\ p \in R_2;$$

$\mathscr{N}$ — множество всех совокупностей $\{N_p\}_{p \in R_1}$, $N_p = 0, 1, 2, \ldots$;

$\mathscr{M}$ — множество всех совокупностей $\{M_q\}_{q \in R_2}$, $M_q = 0, 1, 2, \ldots$

Собственные значения ограничения $\widehat{H}_1^{(N)}$ оператора $\widehat{H}_1$ на N-частичное подпространство имеют вид

$$\lambda_{\widetilde{N}(1)} = \sum_{p \in R_1} \varepsilon(p) N_p, \quad \widetilde{N} \equiv \{N_p\}_{p \in R_1} \in \mathscr{N}, \quad \sum_{p \in R_1} N_p = N.$$

Собственные значения ограничения $\widehat{H}_2^{(N)}$ оператора $\widehat{H}_2$ на N-частичное подпространство имеют вид

$$\lambda_{\widetilde{N}^{(2)}} = \sum_{p\in R_2} \varepsilon(p) N_p, \quad \widetilde{N} \equiv \{N_p\}_{p\in R_2} \in \mathcal{N}, \quad \sum_{p\in R_2} N_p = N.$$

Учитывая условие (4.6) на функцию ε, $\lambda^{(2)}_{\widetilde{M}}$ можно записать в виде

$$\lambda^{(2)}_{\widetilde{M}} = \sum_{p\in R_1} \varepsilon(p) \sum_{q\in I_p} M_q.$$

Таким образом, множества собственных значений $\widehat{H}_1^{(N)}$ и $\widehat{H}_2^{(N)}$ совпадают.

Предположим, что уровни $\lambda^{(1)}_{\widetilde{N}}$ не вырождены. Тогда кратность уровня $\sum\limits_{p\in R_1} \varepsilon(p) N_p$ оператора $\widehat{H}_2^{(N)}$ равна

$$\Gamma_{\widetilde{N}} = \prod_{p\in R_1} \frac{(N_p + G^3 - 1)!}{N_p!\,(G^3-1)!} \approx \prod_{p\in R_1} \frac{(G^3)^{N_p}}{N_p!}.$$

Интегральное ядро $H_2^{(N)}(x, y)$, $x, y \in T_l^N$ оператора $\widehat{H}_2^{(N)}$ можно записать в виде

$$H_2^{(N)}(x, y) = \sum_{\substack{\widetilde{N}\in\mathcal{N},\\ \sum_{p\in R_1} N_p = N}}, \quad \lambda^{(1)}_{\widetilde{N}} \cdot \sum_{\substack{\widetilde{M}\in\mathcal{M},\\ \lambda^{(2)}_{\widetilde{M}} = \lambda^{(1)}_{\widetilde{N}}}} \psi^{(2)}_{\widetilde{M}}(x) \psi^{(2)^*}_{\widetilde{M}}(y),$$

где $\psi^{(2)}_{\widetilde{M}}(x)$ — собственные ортонормированные функции $\widehat{H}_2^{(N)}$, соответствующие собственяому значению $\lambda^{(2)}_{\widetilde{M}}$. Эта формула аналогична формуле для интегрального ядра оператора $\widehat{A}'$ (см. выше).

Полученные формулы позволяют вычислить $S_{p_N} e^{-\frac{\widehat{H}_2}{\theta}}$:

$$S_{p_N} e^{-\frac{\widehat{H}_2}{\theta}} = \operatorname{Sp} e^{-\frac{\widehat{H}_2^{(N)}}{\theta}} = \sum_{\substack{\widetilde{N}\in\mathcal{N},\\ \sum_{p\in R_1} N_p = N}} e^{-\frac{\lambda^{(1)}_{\widetilde{N}}}{\theta}} \Gamma_{\widetilde{N}} = \sum_{\substack{\widetilde{N}\in\mathcal{N},\\ \sum_{p\in R_1} N_p = N}} \exp\Big\{-\frac{1}{\theta}\Big[\lambda^{(1)}_{\widetilde{N}} -$$

$$-\theta \ln \prod_{p'\in R_1} \frac{(N_{p'} + G^3 - 1)!}{N_{p'}!\,(G^3-1)!}\Big]\Big\} = S_{p_N}\Big\{-\frac{1}{\theta}\Big[\widehat{H}_1 - \theta \sum_{p'\in R_1} \frac{\Gamma(\widehat{N}_{p'}+1)}{\Gamma(\widehat{H}_{p'}+1)\Gamma(G^3)}\Big]\Big\} =$$

$$= S_{p_N} e^{-\frac{\widehat{H}_1 - \theta \widehat{S}'}{\theta}}.$$

Перейдем к основной идее абстрактного определения квантованной энтропии.

Пусть имеется последовательность гильбертовых пространств H_n и некоторый самосопряженный неотрицательный оператор $\widehat{A}$ с дискретным спектром, определенный на всех H_n (оператор $\widehat{A}$, вообще говоря, может зависеть от n). Причем при $n \to \infty$ его спектр сгущается и его собственные значения в H_n остаются собственными значениями в H_{n+k} при $k > 1$. Фиксируем числа $n_1 \gg 1$ и $n_2 \gg n_1$. Пусть $\lambda_{k,2}$ — собственное значение, а $\psi_{k,2}$ — собственные функции оператора $\widehat{A}$ в H_{n_2}, а $\{\lambda_{k,1}\} \subset \{\lambda_{k,2}\}$ — собственные значения оператора $\widehat{A}$ в H_{n_1}. Сопоставим оператору $\widehat{A}$ в H_{n_1} с ядром $\sum\limits_k \lambda_{k,2}\psi_{k,2}(x)\psi^*_{k,2}(y)$ следующий оператор $\widehat{A}'$ в H_{n_2} с ядром

$$\sum_k \lambda_{k,1} \sum_{l:\, \lambda_{k,1} \leqslant \lambda_{l,2} \leqslant \lambda_{k+1,1}} \psi_{l,2}(x)\psi^*_{l,2}(y).$$

Рассмотрим $Sp_{H_{n_2}} \widehat{A}$, который в пределе при $n_2 \to \infty$ мало отличается от $Sp_{H_{n_2}} \widehat{A}$. Вместе с тем, $Sp_{H_{n_2}} \widehat{A}'$ может быть выражен через $Sp_{H_{n_1}} \widehat{A}\widehat{B}$, где $\ln \widehat{B}$ определяет оператор энтропии. В пределе можно считать, что $\mathrm{Sp}\,\widehat{A} = \mathrm{Sp}\,\widehat{A}\widehat{B}$, где Sp в правой части равенства определяется также в пространстве H_n, но несколько медленнее стремится к бесконечности, чем при вычислении Sp в левой части. От разности $n_2 - n_1 \to \infty$ результат по существу не зависит, поскольку левая часть остается прежней, и мы будем называть эту величину «духом». В формулах (4.1), (4.2) числа G_i являются «духами» и, как известно, для большого числа частиц N распределения Ферми и Бозе от них не зависят. В случае, когда оператор $\widehat{A}$ зависит от нескольких параметров n, то «духи» надо брать по каждому параметру.

Рассмотрим общую систему N бозонов в объеме V. Будем считать, что известна термодинамическая энтропия $S(\varepsilon, V, N)$ этой системы, где ε — энергия. В таком случае мы можем предъявить в явном виде оператор энтропии в фоковском пространстве. Введем «духи», отвечающие объему G_1 и числу частиц G_2, и рассмотрим новую систему $G_2 N$ бозонов в объеме $G_1 V$ тем же гамильтонианом, что и исходная система. Пусть $\widehat{H}$ — вторично квантованный гамильтониан, а $\widehat{N}$ — оператор числа частиц. Оператор энтропии имеет вид

$$\widehat{S} = S\Big(\widehat{H}, V, \frac{\widehat{N}}{G_2}\Big) - S(\widehat{H}, G_1 V, \widehat{N}).$$

Исходя из термодинамического соотношения

$$P = -\frac{1}{\theta}\frac{\partial S}{\partial V}(\varepsilon, V, N),$$

можно определить вторично квантованный оператор давления

$$\widehat{P} = -\frac{1}{\theta}\frac{\partial S}{\partial V}\Big(\widehat{H},\, V,\, \frac{\widehat{N}}{G_2}\Big) + \frac{1}{\theta}\frac{\partial S}{\partial V}(\widehat{H},\, VG_1,\, \widehat{N})$$

при температуре θ.

Это определение вроде бы естественно, но надо помимо равенства шпуров, указанного выше, еще доказать, что в экспоненте правой части равенства (4.5) появится большой параметр. Только тогда это квантование энтропии имеет смысл.

Введем операторы более точно.

Введем пространства для рассмотрения M парных частиц и K частиц со статистическим спином (номером). Будем считать, что N частиц находятся на трехмерном торе $\mathbf{T}$, радиусы тора равны L и частицы обладают спином J. Спиновую переменную будем обозначать греческой буквой σ. Введем дискретную переменную s, которую будем называть статистическим спином (номером), для краткости будем употреблять сокращение статспин. Переменная s принимает значения $1, 2, \ldots$ Пусть $N = K+2M$, где K, $M \geqslant 0$ целые числа.

Определение 1. Гильбертово пространство $\mathcal{F}_{K,M}$ состоит из функций

$$\Psi(x_1, \sigma_1, s_1; x_2, \sigma_2, s_2; \ldots; x_K, \sigma_k, s_K; y_1, \sigma_1', y_2, \sigma_2'; y_3, \sigma_3', y_4, \sigma_4'; \ldots; y_{2M-1}, \sigma_{2M-1}', y_{2M}, \sigma_{2M}'),$$

$$x_i, y_i \in \mathbf{T}, \quad \sigma_i, \sigma_i' = 1, 2, \ldots, 2J+1, \quad i = 1, 2, \ldots, K, \quad j = 1, 2, \ldots, M, \tag{4.7}$$

симметричных относительно перестановок троек переменных

$$(x_i, \sigma_i, s_i) \text{ и } (x_{i'}, \sigma_{i'}, s_{i'}), \quad i, i' = 1, 2, \ldots, K,$$

и симметричных относительно перестановок четверок переменных

$$(y_{2j-1}, \sigma_{2j-1}', y_{2j}, \sigma_{2j}') \text{ и } (y_{2j'-1}, \sigma_{2j'-1}', y_{2j'}, \sigma_{2j'}'), \quad j, j' = 1, 2, \ldots, M.$$

Кроме того, при фиксированных спиновых переменных σ_i, σ_j' и фиксированных статспиновых переменных s_i, $i = 1, 2, \ldots, K$, $j = 1, 2, \ldots, M$, эти функции являются элементами пространства $L_2(\mathbf{T}^N)$, а также выполняется условие:

$$\sum_{\sigma_1=1}^{2J+1} \cdots \sum_{\sigma_K=1}^{2J+1} \sum_{\sigma_1'=1}^{2J+1} \cdots \sum_{\sigma_{2M}=1}^{2J+1} \sum_{s_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{s_K=1}^{\infty} \int \cdots \int dx_1 \ldots dx_K \cdot$$
$$\cdot\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_{2M-1} dy_{2M} \big|\Psi(x_1, \sigma_1, s_1; x_2, \sigma_2, s_2; \ldots; x_K, \sigma_k, s_K;$$
$$y_1, \sigma_1', y_2, \sigma_2'; y_3, \sigma_3', y_4, \sigma_4'; \ldots; y_{2M-1}, \sigma_{2M-1}', y_{2M}, \sigma_{2M}')\big|^2 < \infty. \tag{4.8}$$

Левая часть неравенства (4.8) равна квадрату нормы элемента (4.7) пространства $\mathcal{F}_{K,M}$.

Определение 2. Гильбертово пространство $\mathcal{F} = \bigoplus\limits_{K,M=0}^{\infty} \mathcal{F}_{K,M}$ состоит из двух параметрических последовательностей $\{\Psi_{K,M}\}$, $K, M = 0, 1, \ldots$, где член последовательности $\Psi_{K,M}$ является элементом пространства $\mathcal{F}_{K,M}$.

В силу симметрии функций (4.7), пространство $\mathcal{F}$ является некоторым вариантом бозонного пространства Фока [62] со статспином. Вакуумный вектор [62] пространства $\mathcal{F}$ имеет вид $\Psi_0 = \{\Psi^0_{K,M}\}$, где $\Psi^0_{K,M} = 0$ при $K > 0$ или $M > 0$, $\Psi^0_{0,0} = 1$.

Стандартным образом [62] в пространстве $\mathcal{F}$ вводятся операторы рождения и уничтожения двух типов:

$\widehat{B}^+(y_1, \sigma_1', y_2, \sigma_2')$, $\widehat{B}^-(y_1, \sigma_1', y_2, \sigma_2')$ — соответственно операторы рождения и уничтожения пар, и

$\widehat{b}^+(x, \sigma, s)$, $\widehat{b}^-(x, \sigma, s)$ — соответственно операторы рождения и уничтожения частиц со статспином.

Введем понятие ультравторичного квантования в бозонном случае.

Пусть $\mathcal{H}$ — бозонное пространство Фока, элементами которого являются последовательности $\{Y_n\}$, $n = 0, 1, \ldots$, где член последовательности Y_n является функцией $Y_n(x_1, \sigma_1, \ldots, x_n, \sigma_n)$ из пространства $L_2\big((\mathrm{T}^1 \times [1, \ldots, 2J+1])^n\big)$, симметричной относительно перестановок пар переменных (x_i, σ_i) и (x_j, σ_j), $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Операторы рождения и уничтожения в пространстве $\mathcal{H}$ будем обозначать соответственно $\psi^+(x, \sigma)$ и $\psi^-(x, \sigma)$.

Ультравторичный квантованный оператор, отвечающий набору операторов H_N в пространствах $L_2(R^{3N})$, по определению имеет вид

$$\begin{gathered}
\overline{\widehat{H}} = \sum_{K,M=0}^{\infty} \frac{1}{K!\,M!} \sum_{j_1=1}^{J} \cdots \sum_{j_K=1}^{J} \int \cdots \int dx_1 \ldots dx_{x_K}\, dy_1 \ldots dy_{2M} \overset{2}{\widehat{b}}{}^+(x_1, j_1) \ldots \\
\ldots \overset{2}{\widehat{b}}{}^+(x_K, j_K) \overset{2}{\widehat{B}}{}^+(y_1, y_2) \ldots \overset{2}{\widehat{B}}{}^+(y_{2M-1}, y_{2M}) \cdot \\
\cdot H_{K+2M}(x_1, \ldots, x_K, y_1, \ldots, y_{2M}) \operatorname*{Symm}_{x_1 \ldots y_{2M}} \big(\overset{1}{\widehat{b}}{}^-(x_1, j_1) \ldots \overset{1}{\widehat{b}}{}^-(x_K, j_K)\big) \qquad (4.9) \\
\overset{1}{\widehat{B}}{}^+(y_1, y_2) \ldots \overset{1}{\widehat{B}}{}^+(y_1, y_2) \ldots \overset{1}{\widehat{B}}{}^+(y_{2M-1}, y_{2M}) \\
\exp\Big(-\sum_{j=1}^{J} \int dx \overset{2}{\widehat{b}}{}^+(x, j) \overset{1}{\widehat{b}}{}^+(x, j) - \iint dz\, dw\, \overset{2}{\widehat{B}}{}^+(z, w) \overset{1}{\widehat{B}}{}^+(z, w) \Big),
\end{gathered}$$

где Symm означает симметризацию.

Имеет место

Теорема. *Проекция оператора* $\overline{\widehat{H}}$ *на* N*-частичное симметричное подпространство равна* H_N.

Из теоремы следует, что уравнения Шредингера с гамильтонианами $H_N: H_N\Psi = \lambda\Psi$ эквивалентны уравнению

$$\overline{\widehat{H}}\Phi = \lambda\overline{\widehat{E}}\Phi, \quad \Phi \in \mathscr{F}, \tag{4.10}$$

где $\overline{\widehat{E}}$ — оператор вида

$$\begin{gathered}\overline{\widehat{E}} = \sum_{K,\,M=0}^{\infty} \frac{1}{K!\,M!} \sum_{j_1=1}^{J} \cdots \sum_{j_K=1}^{J} \int \cdots \int dx_1 \ldots dx_K\, dy_1 \ldots dy_{2M} \\ \overset{2}{\widehat{b}}{}^{+}(x_1, j_1) \ldots \overset{2}{\widehat{b}}{}^{+}(x_K, j_K) \overset{2}{\widehat{B}}{}^{+}(y_1, y_2) \ldots \overset{2}{\widehat{B}}{}^{+}(y_{2M-1}, y_{2M}) \cdot \\ \cdot \operatorname*{Symm}_{x_1 \cdots y_{2M}} \Big(\overset{1}{\widehat{b}}{}^{-}(x_1, j_1) \ldots \overset{1}{\widehat{b}}{}^{-}(x_K, j_K) \overset{1}{\widehat{B}}{}^{-}(y_1, y_2) \ldots \overset{1}{\widehat{B}}{}^{-}(y_{2M-1}, y_{2M})\Big) \cdot \\ \cdot \exp\left(-\sum_{j=1}^{J} \int dx \overset{2}{\widehat{b}}{}^{+}(x, j) \overset{1}{\widehat{b}}{}^{-}(x, j) - \iint dz\, dw \overset{2}{\widehat{B}}{}^{+}(z, w) \overset{1}{\widehat{B}}{}^{-}(z, w)\right).\end{gathered} \tag{4.10'}$$

Рассмотрим оператор в пространстве $\mathscr{H} \times \mathscr{F}$ вида

$$\begin{gathered}\widehat{\rho}\big[b^{+}(\cdot),\, b^{-}(\cdot),\, B^{+}(\cdot),\, B^{-}(\cdot),\, \psi^{+}\psi^{-}\big] = \sum_{K,\,M=0}^{\infty} \frac{1}{K!\,M!\,(K+2M)!} \cdot \\ \cdot \left(\sum_{j=1}^{J} \iint dx\, dy \overset{2}{\widehat{\psi}}{}^{+}(x) \overset{1}{\widehat{\psi}}{}^{-}(y) \cdot \widehat{b}^{-}(x, j) \widehat{b}^{+}(y, j)\right)^{K} \\ \left(\iint dz\, dw \widehat{B}^{-}(z, w) \overset{2}{\widehat{\psi}}{}^{+}(z) \overset{2}{\widehat{\psi}}{}^{+}(w)\right)^{M} \left(\iint dz'\, dw' \widehat{B}^{+}(z', w') \cdot \cdot \overset{1}{\widehat{\psi}}{}^{-}(z) \overset{1}{\widehat{\psi}}{}^{-}(w)\right)^{M} \cdot \\ \cdot \exp\left(-\int d\xi \overset{2}{\widehat{\psi}}{}^{+}(\xi) \overset{1}{\widehat{\psi}}{}^{-}(\xi)\right).\end{gathered}$$

Аналогично, оператор (4.9) может быть записан в виде

$$\begin{gathered}\overline{\widehat{H}} = Sp_{\mathscr{H}}\left(\widehat{\rho}\big[\overset{2}{\widehat{b}}{}^{+}(\cdot),\, \overset{1}{\widehat{b}}{}^{-}(\cdot),\, \overset{2}{\widehat{B}}{}^{+}(\cdot),\, \overset{1}{\widehat{B}}{}^{-}(\cdot)\big]\widehat{H}\right) \exp\left(-\sum_{j-1}^{J} \int dx \overset{2}{\widehat{b}}{}^{+}(x, j) \overset{1}{\widehat{b}}{}^{-}(x, j) - \right. \\ \left. - \iint dz\, dw \overset{2}{\widehat{B}}{}^{+}(z, w) \overset{1}{\widehat{B}}{}^{-}(z, w)\right),\end{gathered} \tag{4.11}$$

где $\widehat{H}$ — оператор в фоковском пространстве.

Заметим, что кратность собственных значений (4.10) оператора $\overline{\widehat{H}}$ равна кратности соответствующих собственных значений H_{K+2M}, умноженной на $\dfrac{(K+J-1)!}{K!\,(J-1)!}$.

Дополнительная кратность спектра не зависит от гамильтониана.

Мы приведем эвристический вывод оператора энтропии в общем случае. Отметим прежде всего, что самосопряженный (неотрицательный) оператор $\widehat{A}$ в гильбертовом пространстве может быть записан в виде

$$f(\widehat{A}) = \int\limits_0^\infty f(\lambda)\,dE_\lambda,$$

где E_λ — спектральное семейство, в частности

$$\widehat{A}f = \sum_{n=0}^\infty \int \lambda_n \Psi_n(x)\Psi_n(\xi) f(\xi)\,d\xi,$$

если спектр дискретный. Если спектр непрерывный и E_λ дифференцируемо по λ, то

$$\operatorname{Sp} f(\widehat{A}) = \int f(\lambda)\rho(\lambda)\,d\lambda$$

и соответственно,

$$\operatorname{Sp} e^{\frac{-\widehat{A}}{\theta}} = \int e^{-\frac{\lambda}{\theta}}\rho(\lambda)\,d\lambda = \int e^{-\frac{\lambda}{\theta}+\ln\rho(\lambda)}d\lambda.$$

Функцию в экспоненте можно трактовать как оператор умножения на функцию от λ, а значит, ей отвечает оператор

$$\frac{-\widehat{A}}{\theta} + \ln\rho(\widehat{A}) = -\int\Big[\frac{\lambda}{\theta} - \ln\rho(\lambda)\Big]dE_\lambda. \tag{4.12}$$

Рассмотрим теперь $\operatorname{Sp} e^{-\frac{\overline{\widehat{H}}}{\theta}}$.

Поскольку ультравторичное нвантование функции от оператора равно функции от ультравторично квантованного оператора, то

$$\operatorname{Sp} c^{-\frac{\widehat{H}}{\theta}} = \frac{K!\,(J-1)!}{(K+J-1)!}\operatorname{Sp}_{\mathscr{F}} e^{-\frac{\overline{\widehat{H}}}{\theta}} =$$

$$= \operatorname{Sp}_{\mathscr{F}}\operatorname{Sp}_{\mathscr{H}} e^{-\frac{\widehat{H}}{\theta}}\rho\big(\widehat{\psi}^+,\,\widehat{\psi}^-,\,\widehat{b}^+(s),\,\widehat{b}^-(s),\,\widehat{B}^+,\,\widehat{B}^-\big) =$$

$$= \operatorname{Sp}_{\mathscr{F}}\operatorname{Sp}_{\mathscr{H}} e^{-\frac{\widehat{H}}{\theta}+\ln\left[\rho(\widehat{\psi}^+,\,\widehat{\psi}^-,\,\widehat{b}^+(s),\,\widehat{b}^-(s),\,\widehat{B}^+,\,\widehat{B}^-)\right]}.$$

Если рассмотреть оператор, стоящий в экспоненте как оператор в $\mathscr{F}$, то соответственно мы должны записать

$$\operatorname{Sp}_{\mathscr{H}}\Big(-\frac{\widehat{H}}{\theta}+\ln\big(\rho(\widehat{\psi}^{+},\,\widehat{\psi}^{-};\,\widehat{b}^{+}(s),\,\widehat{b}^{-}(s),\,\widehat{B}^{+},\,\widehat{B}^{-})\big)\Big)\cdot$$

$$\cdot\rho(\widehat{\psi}^{+},\widehat{\psi}^{-};\widehat{b}^{+}(s),\widehat{b}^{-}(s),\,\widehat{B}^{+},\widehat{B}^{-})=-\frac{\overline{\overline{\widehat{H}}}}{\theta}+\operatorname{Sp}_{\mathscr{H}}\rho(\widehat{\psi}^{+},\widehat{\psi}^{-};\widehat{b}^{+}(s),\widehat{b}^{-}(s),\widehat{B}^{+},\,\widehat{B}^{-})\cdot$$

$$\cdot\exp\big[\rho(\widehat{\psi}^{+},\,\widehat{\psi}^{-};\,\widehat{b}^{+}(s),\,\widehat{b}^{-}(s),\,\widehat{B}^{+},\,\widehat{B}^{-})\big].$$

Мы получаем умноженный на θ оператор свободной энергии в пространстве $\mathscr{F}$. Нетрудно убедиться, что минимум его собственного значения для случая, когда $\widehat{H}$ — оператор Гамильтона, без взаимодействия совпадает с $\operatorname{Sp}_{\mathscr{H}} e^{-\frac{\widehat{H}}{\theta}}$ в термодинамическом пределе. Полученный оператор энтропии не зависит от гамильтониана и поэтому может быть рассмотрен лишь в случае, когда взаимодействие мало. Теперь «заморозим» операторы $\widehat{b}^{+}$, $\widehat{b}^{-}$, $\widehat{B}^{+}$, $\widehat{B}^{-}$ под знаком логарифма. Это можно сделать, т. к. у них порядок действия определен (см. [14]). В силу указанного соответствия алгебр вторично квантованных и ультранторично квантованных операторов, мы можем выключить $\widehat{\psi}^{+}$ и $\widehat{\psi}^{-}$ из автономных скобок, так что автономные скобки берутся только по $b^{+}(s)$, $b^{-}(s)$, B^{+} и B^{-}:

$$\overline{\overline{\widehat{S}}}=\operatorname{Sp}_{\mathscr{H}}\Big\{\rho(\overset{2}{\widehat{\psi}^{+}},\,\overset{1}{\widehat{\psi}^{-}},\,\overset{2}{\widehat{b}^{+}}(s),\,\overset{1}{\widehat{b}^{-}}(s),\,\overset{2}{\widehat{B}^{+}},\,\overset{1}{\widehat{B}^{-}})\cdot$$

$$\cdot\ln\Big[\rho(\overset{2'}{\widehat{\psi}^{+}},\,\overset{1'}{\widehat{\psi}^{-}},\,\overset{2}{\widehat{b}^{+}}(s),\,\overset{1}{\widehat{b}^{-}}(s),\,\overset{2}{\widehat{B}^{+}},\,\overset{1}{\widehat{B}^{-}})\Big]\Big\}\operatorname{Sp}\rho(\overset{2}{\widehat{\psi}^{+}},\,\overset{1}{\widehat{\psi}^{-}},\,\overset{2}{\widehat{b}^{+}}(s),\,\overset{1}{\widehat{b}^{-}}(s),\,\overset{2}{\widehat{B}^{+}},\,\overset{1}{\widehat{B}^{-}}). \tag{4.13}$$

Иначе говоря, если зафиксировать $\widehat{b}^{+}$, $\widehat{b}^{-}$, $\widehat{B}^{+}$, $\widehat{B}^{-}$ в автономных скобках, то $\widehat{\psi}^{-}$ и $\widehat{\psi}^{+}$ как в ρ, так и в $\ln\rho$, стоят в виковском упорядочении. Если далее «разморозить» $\widehat{b}^{+}$, $\widehat{b}^{-}$, $\widehat{B}^{+}$, $\widehat{B}^{-}$, то они будут стоять в виковском упорядочении под знаком ln, т. е. ln берется от оператора $\widehat{\rho}$:

$$\ln\widehat{\rho}(\,\cdot\,,\ \cdot\,,\overset{2}{\widehat{b}^{+}}(s),\overset{1}{\widehat{b}^{-}}(s),\,\overset{2}{\widehat{B}^{+}},\,\overset{1}{\widehat{B}^{-}}). \tag{4.14}$$

В эту энтропию можно ввести и «духи».

Квантованными значениями свободной энергии системы N бозонов при температуре θ называются числа λ, для которых имеет ненулевое решение следующее уравнение:

$$(\widehat{H}+\theta\overline{\overline{\widehat{S}}})\Phi=\lambda\overline{\overline{\widehat{E}}}\Phi,\quad \Phi\in\mathscr{F},\quad \overline{\overline{\widehat{N}}}\Phi=N\Phi. \tag{4.15}$$

В случае, когда взаимодействие между бозонами слабое, можно пренебречь экспонентамн

$$\exp\Big(-\sum_{j=1}^{\infty}\int dx b^*(x,j)\,b(x,j)\Big)$$

в выражениях для операторов $\overline{\widehat{H}}$, $\overline{\widehat{S}}$, $\overline{\widehat{E}}$ и $\overline{\widehat{N}}$, тогда асимптотика решений уравнения (4.15) по большому среднему числу бозонов $\overline{N}$

$$\overline{N}\big[b^*(x,j),b(x,j)\big]=\frac{\mathrm{Sp}\big(\widehat{N}\widehat{\rho}(b^*(x,j),b(x,j))\big)}{\mathrm{Sp}\big(\widehat{\rho}(b^*(x,j),b(x,j))\big)} \tag{4.16}$$

и малому взнимодействию выражается через периодические траектории «гамильтониаиа»

$$\mathscr{F}=\frac{F\big[b^*(x,j),b(x,j)\big]}{E\big(b^*(x,j),b(x,j)\big)} \tag{4.17}$$

и через решевия уравнения в вариациях для периодических траекторий. Рассмотрим гамильтонову систему, отвечающую (4.17):

$$\begin{aligned} i\frac{\partial b}{\partial t}(x,i;t)&=\frac{\delta\mathscr{F}\big[b^*(x,j;t),b(x,j;t)\big]}{\delta b^*(x,j;t)},\\ i\frac{\partial b^*}{\partial t}(x,i;t)&=-\frac{\delta\mathscr{F}\big[b^*(x,j;t),b(x,j;t)\big]}{\delta b^*(x,j;t)}. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Среднее число частиц (4.16) является интегралом этой гамильтоновой системы. Будем искать периодические решения системы (4.18) в виде

$$b(x,j;t)=\sqrt{\overline{N}a(p_j)}\,\frac{e^{-i\mu t}e^{ip_j x/a}}{L^{3/2}}, \tag{4.19}$$

где $a(p_j)=1$ для векоторого p_0, $0\leqslant a(p)<1$ при $p_o\neq p$, p_i — взаимно однозначное отображение множества померов $j=1,2,\dots$ ва множество векторов $p=2\pi a/L(l_1,l_2,l_3)$, l_α — целые. В термодииамическом пределе при $L\to\infty$, $\overline{N}\to\infty$, $\overline{N}/L^3\to n=\mathrm{const}$ уравпение для $a(p)$ имеет вид

$$\begin{aligned} a(p,p_0,n,\theta)=\exp\Big(-\frac{1}{\theta}\Big(&\frac{\hbar^2(p-p_0)^2}{2ma^2}+U_0a^3n_0\widetilde{v}(p-p_0)+\\ &+\frac{U_0a^3}{(2\pi)^3}\int dq\big(\widetilde{v}(p-q)-\widetilde{v}(p_0-q)\big)n(q)\Big)\Big), \end{aligned} \tag{4.20}$$

где n_0 — плотность бозонов в конденсате

$$n_0 = n - \frac{1}{(2\pi)^3} \int dp\, n(p),$$

а

$$n(p) \equiv n(p, p_0, n, \theta) = a(p, p_0, n, \theta) / \big(1 - a(p, p_0, n, \theta)\big)$$

представляет распределение бозонов по импульсам. Точка минимума функционала

$$\mathscr{F}\big[b^*(x, j), b(x, j)\big] - \mu \overline{N}\big[b^*(x, j), b(x, j)\big] \tag{4.21}$$

определяет значение p_0, зависящее от θ и являющееся критической скоростью Ландау. Отметим, что для $p_0 = 0$ температура θ_c, при которой решения уравнения (4.20) с $n_0 > 0$ переходят в решения этих уравнений с $n_0 = 0$, является температурой фазового перехода из состояния с конденсатом в состояние без конденсата. Уравнение для определения критической температуры θ_c имеет вид

$$n = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dp\, n(p, 0, n, \theta_c). \tag{4.22}$$

Оно совпадает с результатами [72]–[74], выведенными из существенно более сложных, чем (4.20) уравнений для пар бозонов с помощью преобразований Боголюбова. Из условия минимальности функционала (4.21) в точке (4.19) следует, что при критической температуре критическая скорость обращается в нуль.

Распределение (4.20) при $\theta = 0$ дает движение со скоростью $\frac{p_0}{\sqrt{2m}}$, при $p_0 = 0$ оно превращается в температурное уравнение Хартри–Фока, а значит, в этом простейшем случае мы просто делаем сдвиг по угловой скорости $\frac{p_0}{\sqrt{2m}}$.

§ 1. Вторично квантованная энтропия

В качестве примера рассмотрим систему из N тождественных бозонов. Поместим ее на трехмерный тор T_1, длина сторон которого равна L. Соответствующий оператор Гамильтона действует в пространстве симметричных функций из $L_2(T_1^N)$; предположим, что он имеет вид

$$H_{1N} = \sum_{j=1}^{N} \varepsilon\Big(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j}\Big), \tag{4.23}$$

где $x_j = (x_j^1, x_j^2, x_j^3) \in T_1$, $\hbar > 0$ — постоянная Планка, $\varepsilon(p) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ — функция, для которой справедливо равенство

$$\varepsilon\Big(\frac{2\pi\hbar}{L}Gl + \frac{2\pi\hbar}{L}n\Big) = \varepsilon\Big(\frac{2\pi\hbar}{L}Gl\Big), \tag{4.24}$$

где $l = (l_1, l_2, l_3)$, l_1, l_2, l_3 — целые числа, $G > 1$ — целое число, $n = (n_1, n_2, n_3)$, $0 \leqslant n_1, n_2, n_3 < G$ — целые числа.

Введем тор T_2, длина сторов которого равна L/G. Рассмотрим пространство симметричных функций из $L_2(T_2^N)$.

Введем в этом пространстве следующий оператор $H_{2N}(\theta)$, зависящий от параметра $\theta > 0$. Рассмотрим полную систему функций вида

$$\Psi_{\{q\}}(y_1, \ldots, u_N) = \operatorname*{Symm}_{y_1, \ldots, y_N} e^{\frac{i}{\hbar}(q_1 y_1 + q_2 y_2 + \ldots + q_N y_N)}, \tag{4.25}$$

где $\{q\}$ — набор векторов $q_1, q_2, \ldots, q_N$, каждый из которых имеет вид $q = \frac{2\pi\hbar}{L}G(n_1, n_2, n_3)$, n_1, n_2, n_3 — целые числа, $y_i \in T_2$, $\operatorname*{Symm}_{y_1, \ldots, y_N}$ — оператор симметризации относительно переменных $y_1, y_2, \ldots, y_N$. На функции (4.25) оператор H_2 действует следующим образом:

$$\begin{aligned}(H_{2N}\Psi_{\{q\}})(y_1, \ldots, y_N) &= \\ &= \Big(\sum_q \varepsilon(q) N_q - \theta \sum_q \ln\Big(\frac{(N_q + G^3 - 1)!}{N_q!\,(G^3 - 1)!}\Big)\Big)\Psi_{\{q\}}(y_1, \ldots, y_N),\end{aligned} \tag{4.26}$$

где $q = \frac{2\pi\hbar}{L}G \cdot (n_1, n_2, n_2)$, n_1, n_2, n_3 — целые числа, $\sum_q$ — обозначение для суммы по множеству всех таких векторов q, N_q — целые числа, зависящие от q и от набора $\{p\}$:

$$N_q = \sum_{s=1}^N \delta_{qq_s},$$

где $\delta_{qq'} = 1$ при $q = q'$ и $\delta_{qq'} = 0$ при $q \neq q'$.

Имеет место следующая

Лемма 1.

$$\operatorname{Sp} e^{-\frac{H_{1N}}{\theta}} = \operatorname{Sp} e^{-\frac{H_{2N}(\theta)}{\theta}}.$$

Доказательство. Полная система собственных функций оператора H_{1N} имеет вид

$$\Psi_{\{p\}}(x_1, \ldots, x_N) = \operatorname*{Symm}_{x_1, \ldots, x_N} e^{\frac{i}{\hbar}(p_1x_1+\ldots+p_Nx_N)}, \qquad (4.27)$$

где $\{p\}$ — набор векторов $p_1, \ldots, p_N$, каждый из которых имеет вид $p_j = \frac{2\pi\hbar}{L}(n_1, n_2, n_3)$, n_1, n_2, n_3 — целые числа, $x_j \in T_1$. Собственные значения оператора H_{1N}, отвечающие (4.27), есть

$$\lambda_{\{p\}} = \sum_{j=1}^{N} \varepsilon(p_j). \qquad (4.28)$$

В силу свойства (4.24), спектр (4.28) является вырожденным. Все собственные значения (4.28) могут быть представлены в виде

$$E_{\{N\}} = \sum_q \varepsilon(q) N_q, \qquad (4.29)$$

где $\{N\}$ — набор целых чисел $N_q \geqslant 0$, таких, что $\sum_q N_q = N$, причем кратность собственного значения (4.29) равна

$$\Gamma_{\{N\}} = \prod_q \frac{(N_q + G^3 - 1)!}{N_q!\,(G^3 - 1)!}. \qquad (4.30)$$

По определению,

$$\operatorname{Sp} e^{-\frac{H_{1N}}{\theta}} = \sum_{\{N\}} e^{-\frac{E_{\{N\}}}{\theta}} \Gamma_{\{N\}}, \qquad (4.31)$$

но, учитывая определение оператора $H_{2N}(\theta)$ и формулы (4.29), (4.30), получим, что правая часть равенства (4.31) есть $\operatorname{Sp} e^{-\frac{H_{2N}(\theta)}{\theta}}$.

Рассмотрим бозонное фоковское [62] пространство $\mathscr{H}_1$, элементами которого являются последовательности функций $\{\Psi_N\}$, $N = 0, 1, 2, \ldots$, где $\Psi_N(x_1, \ldots, x_N) \in L_2(T_1^N)$ — функция, симметричная относительно перестановок любых пар переменных x_j и $x_{j'}$, $j, j' = 1, 2, \ldots, N$.

Введем в этом пространстве $\mathscr{H}_1$ следующий оператор:

$$\widehat{H}_1 = \int dx \widehat{\psi}_1^+(x)\varepsilon\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\widehat{\psi}_1^-(x), \tag{4.32}$$

где $\widehat{\psi}_1^+(x)$, $\widehat{\psi}_1^-$ — соответственно операторы рождении и уничтожения [62] в пространстве $\mathscr{H}_1$.

Аналогично рассмотрим бозонное фоковское пространство $\mathscr{H}_2$, состоящее из последовательностей функций $\{\Phi_N\}$, $N = 0, 1, 2, \ldots$, где $\Phi_N(y_1, \ldots, y_N) \in L_2(T_2^N)$ — симметричная относительно перестановок пар переменных y_j и $y_{j'}$, $j, j' = 1, 2, \ldots, N$.

Операторы рождения и уничтожения в $\mathscr{H}_2$ обозначим соответственно $\widehat{\psi}_2^+(y)$ и $\widehat{\psi}_2^-(y)$. Введем в $\mathscr{H}_2$ следующие операторы:

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}_q^+ &= \int dy \left(\frac{G}{L}\right)^3 e^{-\frac{i}{\hbar}qy}\widehat{\psi}_2^+(y), \\ \widehat{\psi}_q^- &= \int dy \left(\frac{G}{L}\right)^3 e^{-\frac{i}{\hbar}qy}\widehat{\psi}_2^-(y), \end{aligned} \tag{4.33}$$

где $q = \dfrac{2\pi\hbar G}{L}(n_1, n_2, n_3)$, n_1, n_2, n_3 — целые числа.

Эти операторы удовлетворяют коммуникационным соотношениям:

$$[\widehat{\psi}_q^-, \widehat{\psi}_{q'}^+] = \delta_{qq'}, \quad [\widehat{\psi}_q^-, \widehat{\psi}_{q'}^-] = [\widehat{\psi}_q^+, \widehat{\psi}_{q'}^+] = 0,$$

а кроме того, на вакуумный вектор Φ_0 [62] пространства $\mathscr{H}_2$, оператор $\widehat{\psi}_q^-$ действует следующим образом: $\widehat{\psi}_q^-\Phi_0 = 0$. Введем в пространство $\mathscr{H}_2$ оператор

$$\widehat{H}_2(\theta) = \sum_q \varepsilon(q)\widehat{\psi}_q^+\widehat{\psi}_q^- - \theta\sum_q \ln\left(\frac{\Gamma\left([[\widehat{\psi}_q^+\,\widehat{\psi}_q^-]] + G^3\right)}{\Gamma\left([[\widehat{\psi}_q^+\,\widehat{\psi}_q^-]] + 1\right)\Gamma(G^3)}\right), \tag{4.34}$$

где $\Gamma(t)$, $t \in R$ — гамма-функция Эйлера, $[[]]$ — автономные скобки [14].

N-частичным подпространством пространства $\mathscr{H}_1$ или $\mathscr{H}_2$ называется [62] подпространство, элементы которого являются собственными функциями соответствующего оператора числа частиц

$$\widehat{N}_1 = \int dx\, \widehat{\psi}_1^+(x)\,\widehat{\psi}_1^-(x) \text{ или } \widehat{N}_2 = \int dy\, \widehat{\psi}_2^+(y)\,\widehat{\psi}_2^-(y) = \sum_q \widehat{\psi}_q^+\,\widehat{\psi}_q^-$$

с собственным значением N.

Из леммы 1 следует
Утверждение 1.

$$\operatorname{Sp}_N e^{-\frac{\widehat{H}_1}{\theta}} = \operatorname{Sp}_N e^{-\frac{\widehat{H}_2(\theta)}{\theta}},$$

где Sp_N обозначает след ограничения оператора на N-частичное подпространство.

§ 2. Ультравторично квантованная энтропия для бозонов со статспином

Перейдем к рассмотрению ультравторично квантованных задач. Рассмотрим пространство $\mathscr{F}_{1N}$, элементами которого являются функции

$$\Psi(x_1, s_1; x_2, s_2; \ldots; x_N, s_N), \tag{4.35}$$

где $x_j \in T_1$, s_j — дискретнан переменная, принимающая значения $1, 2, \ldots, J_1$. Будем называть эту переменную статистическим спином (статспин) или номером, $j = 1, 2, \ldots, N$, нричем функции (4.35) симметричны относительно любых перестановок пар переменных (x_j, s_j) и $(x_{j'}, s_{j'})$, $j, j' = 1, 2, \ldots, N$, а также принадлежат пространству $L_2\big((T_1 \times \{1, 2, \ldots, J_1\})^N\big)$, то есть справедливо неравенство

$$\sum_{s_1=1}^{J_1} \cdots \sum_{s_N=1}^{J_1} \int \cdots \int dx_1 \ldots dx_2 \left|\Psi(x_1, s_1; \ldots; x_N, s_N)\right|^2 < \infty.$$

Левая часть этого неравенства равна квадрату нормы элемента (4.35) пространства $\mathscr{F}_{1N}$.

Введем пространство $\mathscr{F}_1 = \bigoplus\limits_{N=0}^{\infty} \mathscr{F}_{1N}$, состоящее из последовательностей функций $\{\Psi_N\}$, $N = 0, 1, \ldots$, где $\Psi_N \in \mathscr{F}_{1N}$ — функция вида (4.35). Пространство $\mathscr{F}_1$ является бозонным фоковским пространством, и в нем стандартным образом [62] вводятся операторы рождения $\widehat{b}_1^+(x, s)$ и уничтожения $\widehat{b}_1(x, s)$ частиц со статспином.

Симметричным подпространством $\mathscr{F}_1^{\mathrm{Symm}}$ пространства $\mathscr{F}_1$ назовем множество последовательностей $\{\Psi_N\}$, $N = 0, 1 \ldots$, которые состоят из функций (4.35), симметричных относительно любых перестановок неременных x_j и $x_{j'}$ и симметричных относительно любых перестановок переменных s_j и $s_{j'}$. N-частичное подпространство нространства $\mathscr{F}_1$ изометричсски изоморфно пространству $\mathscr{F}_{1N}$

(будем его обозначать так же, как $\mathscr{F}_{1N}$). Симметричным N-частичным подпространством $\mathscr{F}_{1N}^{\mathrm{Symm}}$ пространства $\mathscr{F}_1$ будем называть пересечение подпространств $\mathscr{F}_{1N}$ и $\mathscr{F}_{1N}^{\mathrm{Symm}}$.

Теперь введем пространства $\mathscr{F}_{2N}$ и $\mathscr{F}_2$, полностью аналогично определению пространств $\mathscr{F}_{1N}$ и $\mathscr{F}_1$, заменив в этом определении переменные $xJ \in T_1$ на $y_j \in T_2$, а переменные $s_j = 1, \ldots, J_1$ на $t_j = 1, 2, \ldots, J_2$, где $J_2 = \dfrac{J_1}{Q}$ — целое число, $Q > 1$ — целое число. И аналогично введем симметричное $\mathscr{F}_2^{\mathrm{Symm}}$ N-частичное $\mathscr{F}_{2N}$ и N-частичное симметричное $\mathscr{F}_{2N}^{\mathrm{Symm}}$ подпространство пространства $\mathscr{F}_2$. Пространство $\mathscr{F}_2$ также, как и $\mathscr{F}_1$, является бозонным фоковским пространством, операторы рождения и уничтожения в $\mathscr{F}_2$ будем обозначать соответственно $\widehat{b}_2^+(y, t)$ и $\widehat{b}_2^-(y, t)$.

Пусть задана последовательность операторов $\{A_N\}$, где A_N — оператор в пространстве симметричных функций $\Psi(x_1, \ldots, x_N) \in L_2(T_1^N)$ такой, что

$$(A_N \Psi)(x_1, \ldots, x_N) = \\ = A_N(\overset{2}{x}_1, \ldots, \overset{2}{x}_N; -i\hbar\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x_1}}, \ldots, -i\hbar\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x_N}})\Psi(x_1, \ldots, x_N).$$

Числа над операторами обозначают порядок их действия [14].

В случае, когда коэффициенты суммирования [51]–[61] равны $1/N!$, следующий оператор в пространстве $\mathscr{F}_1$

$$\overline{\widehat{A}} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \sum_{s_1=1}^{J_1} \cdots \sum_{s_N=1}^{J_N} \int \cdots \int dx_1 \ldots dx_N \overset{2}{\widehat{b}_1^+}(x_1, s_1) \cdot \ldots \cdot \overset{2}{\widehat{b}_1^+}(x_N, s_N) \cdot \\ \cdot A_N \cdot \underset{x, \ldots, x_N}{\mathrm{Symm}} \big(\overset{1}{\widehat{b}_1^-}(x_1, s_1) \cdot \ldots \cdot \overset{1}{\widehat{b}_1^-}(x_N, s_N)\big) \exp\Bigg(-\sum_{s=1}^{J_1} dx \overset{2}{\widehat{b}_1^+}(x, s) \overset{1}{\widehat{b}_1^-}(x, s)\Bigg) \tag{4.36}$$

называется ультравторично квантованным [51]–[61].

Легко убедиться с помощью непосредственного вычисления, что ультравторично квантованные операторы (4.36) обладают следующими свойствами.

Утверждение 2. Справедливо равенство

$$\mathrm{Sp}_{N,\mathrm{Symm}} \overline{\widehat{A}} = (\mathrm{Sp}\, A_N) \cdot \frac{(N + J_1 - 1)!}{N!\,(J_1 - 1)!}, \tag{4.37}$$

где $\mathrm{Sp}_{N,\mathrm{Symm}}$ обозначает след ограничения оператора $\overline{\widehat{A}}$ на N-частичное симметричное подпространство $\mathscr{F}_{1N}^{\mathrm{Symm}}$.

Утверждение 3. Пусть $\overline{\widehat{B}}$ — ультраторично квантованный оператор вида (4.36), отвечающий последовательности операторов $\{B_N\}$, $N = 0, 1, 2, \ldots$, где $B_N = A_N^n$, а $n > 1$ — целое число. Тогда имеет место равенство

$$\overline{\widehat{B}} = \big(\overline{\widehat{A}}\big)^n. \tag{4.38}$$

Будем далее обозначать через $\overline{\widehat{H}}_1$ оператор в пространстве $\mathscr{F}_1$ вида (4.36), отвечающий последовательности операторов $\{H_{1N}\}$, где H_{1N} — операторы (4.23). С помощью утверждений 2 и 3 можно доказать, что имеет место

Лемма 2.

$$\mathrm{Sp}_{N,\mathrm{Symm}} e^{-\frac{\overline{\widehat{H}}_1}{\theta}} = \Big(\mathrm{Sp} e^{-\frac{H_{1N}}{\theta}}\Big)\frac{(N+J_1-1)!}{N!\,(J_1-1)!}.$$

Введем в пространстве $\mathscr{F}_2$ следующие операторы:

$$\begin{aligned} \widehat{b}_{qt}^- &= \frac{1}{L^{3/2}}\int dy\, \widehat{b}_2^-(y,t) e^{-\frac{iq}{\hbar}y},\\ \widehat{b}_{qt}^+ &= \frac{1}{L^{3/2}}\int dy\, \widehat{b}_2^+(y,t) e^{\frac{iq}{\hbar}y}. \end{aligned} \tag{4.39}$$

Эти операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\big[\widehat{b}_{qt}^-, \widehat{b}_{q't'}^+\big] = \delta_{qq'}\,\delta_{tt'}, \quad \big[\widehat{b}_{qt}^\pm, \widehat{b}_{q't'}^\pm\big] = 0,$$

и вакуумный вектор операторов (4.39) совпадает с вакуумным вектором операторов $\widehat{b}_2^\pm(y,t)$.

Рассмотрим в пространстве $\mathscr{F}_2$ операторы $\overline{\widehat{H}}_2(\theta)$ и $\overline{\widehat{F}}(\theta)$ вида

$$\begin{aligned} \overline{\widehat{H}}_2(\theta) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \sum_{q_1} \cdots \sum_{q_N} \sum_{t_1=1}^{J_2} \cdots \sum_{t_N}^{J_2} \overset{2}{\widehat{b}}{}_{q_1 t_1}^{+} \cdot \ldots \cdot \overset{2}{\widehat{b}}{}_{q_N t_N}^{+} \cdot \\ \cdot \operatorname*{Symm}_{q_1 \ldots q_N}\big(\overset{1}{\widehat{b}}{}_{q_1 t_1}^{-} \ldots \overset{1}{\widehat{b}}{}_{q_N t_N}^{-}\big)\Big(\sum_q \varepsilon(q) M_q - \theta \sum_q \ln\Big[\frac{(M_q+G^3-1)!}{M_q!\,G^3!}\Big] - \\ -\theta \sum_{t=1}^{J_2} \ln\Big[\frac{(K_t+Q-1)!}{K_t!\,(Q-1)!}\Big]\Big) \exp\Big(-\sum_q \sum_{t=1}^{J_2} \overset{2}{\widehat{b}}{}_{qt}^{+} \overset{1}{\widehat{b}}{}_{qt}^{-}\Big), \end{aligned} \tag{4.40}$$

$$\overline{\widehat{F}}(\theta) = \sum_q \sum_{t=1}^{J_2} \varepsilon(q)\widehat{b}_{qt}^{+}\widehat{b}_{qt}^{-} + \theta \sum_q \sum_{t=1}^{J_2} \ln\bigl[\Gamma\bigl([[\widehat{b}_{qt}^{+}\widehat{b}_{qt}^{-}]] + 1\bigr)\bigr] -$$
$$-\theta \sum_q \ln\Bigl(\frac{\Gamma(\widehat{M}_q + G^3)}{\Gamma(G^3)}\Bigr) - \theta \sum_{t=1}^{J_2} \ln\Bigl(\frac{\Gamma(\widehat{K}_t + Q)}{\Gamma(Q)}\Bigr) - \tag{4.41}$$
$$-\theta J_1 \ln J_1 + \theta(N + J_1) \ln)(N + J_1) - \theta N,$$

где в формуле (4.40) M_q и K_t являются функциями от $q_1, \ldots, q_N$ и $t_1, \ldots, t_n$:

$$M_q = \sum_{\alpha=1}^{N} \delta_{qq_\alpha}, \quad K_t = \sum_{\alpha=1}^{N} \delta_{tt_\alpha}, \tag{4.42}$$

а в формуле (4.41) операторы $\widehat{M_q}$ и $\widehat{K}_t$ имеют вид

$$\widehat{M_q} = \sum_{t=1}^{J_2} \widehat{b}qt^{+}\widehat{b}qt^{-}. \tag{4.43}$$

Справедлива следующая

Лемма 3.

$$\mathrm{Sp}_{N,\mathrm{Symm}} e^{-\frac{\overline{\widehat{H}}_1}{\theta}} = \mathrm{Sp}_{N,\mathrm{Symm}} e^{-\frac{\overline{\widehat{H}}_2(\theta)}{\theta}} = \mathrm{Sp}_N e^{-\frac{\overline{\widehat{F}}(\theta)}{\theta}}.$$

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 1.

Рассмотрим теперь случай, когда $L \to \infty$ и $N \to \infty$ так, что $\frac{N}{L^3} = h = \mathrm{const}$ (термодинамический предел).

Свободной энергией при температуре $\theta > 0$ системы N бозонов с гамильтонианом (4.23) H_{1N} называют величину

$$F(\theta) = -\theta \ln\Bigl(\mathrm{Sp}\, e^{-\frac{H_{1N}}{\theta}}\Bigr). \tag{4.44}$$

Пусть $G \sim L^3$, $1 > \varepsilon > 0$, тогда имеет место

Предложение 1. *При $N \to \infty$, $G \to \infty$, $L \to \infty$ свободная энергия (4.44) асимптотически равна минимальному собственному значению оператора $\widehat{H}_2(\theta)$ (4.34) на N-частичном подпространстве пространства $\mathscr{H}_2$.*

Приведем эвристическое обоснование. Из леммы 1 следует, что

$$F(\theta) = -\theta \ln\Bigl(\mathrm{Sp}_N e^{-H_2(\theta)/\theta}\Bigr).$$

Собственные значения оператора $\widehat{H}_2(\theta)$ (4.34) на N-частичном подпространстве пространства $\mathscr{H}_2$ имеют вид

$$E_{\{N\}}(\theta) = \sum_q \varepsilon(q) N_q - \theta \sum_q \ln\Bigl(\frac{(N_q + G^3 - 1)!}{N_q\,!\,(G^3)!}\Bigr), \tag{4.45}$$

где $\{N\}$ набор целых чисел $N_q \geqslant 0$ такой, что

$$\sum_q N_q = N. \tag{4.46}$$

По определению следа

$$\mathrm{Sp}_N e^{-H_2(\theta)/\theta} = \sum_{\{N\}} e^{-E_{\{N\}}(\theta)/\theta}, \tag{4.47}$$

где $\sum_{\{N\}}$ обозначает суммирование по всем наборам целых чисел $\{N\}$ таких, что $\sum\limits_q N_q = N$.

Векторы q в выражениях (4.45) и (4.46) пробегают множество значений $\frac{2\pi\hbar G}{L}(n_1, n_2, n_3)$, где n_1, n_2, n_3 — целые числа. Поэтому сделаем в выражениях (4.45)—(4.47) замену. Из условия (4.46) следует, что $n(q) \sim \dfrac{N}{L^3}$. При такой замене выражение (4.45) асимптотически равно:

$$E_{\{N\}}(\theta) \approx \sum_q \varepsilon(q) G^3 n(q) + \theta \sum_q G^3 n(q) \ln\bigl(n(q)\bigr) - \\ - \theta \sum_q G^3 \bigl(1 + n(q)\bigr) \ln\bigl(1 + n(q)\bigr). \tag{4.48}$$

В выражении (4.48) при всех членах стоит большой параметр G^3, поэтому для вычисления суммы в правой части равенства (4.47) можно воспользоваться методом Лапласа для сумм, а этот метод приводит к асимптотическому равенству

$$\ln\Bigl(\mathrm{Sp}_N e^{-\widehat{H}_2(\theta)/\theta}\Bigr) \sim -\frac{1}{\theta} \min_{\{N\}} E_{\{N\}}(\theta),$$

которое и требуется доказать.

В случае ультравторичного квантовавин справедливо аналогичное

Предложение 2. *При* $N \to \infty$, $G \to \infty$, $L \to \infty$ *классическая свободная энергия* (4.44) *асимптотически равна минимальному собственному значению оператора квантованной свободной энергии* $\overline{\widehat{F}}(\theta)$ (4.41).

С помощью лемм 2 и 3 это предложение доказывается так же, как и предыдущее.

Заметим теперь, что если $J_2 = 1$, то пространство $\mathcal{F}_2$ совпадает с пространством $\mathcal{H}_2$, и можно сказать, что оператор $\overline{\widehat{F}}(\theta)$ (4.41) в этом случае совпадает с $\widehat{H}_2(\theta)$ (4.34). Таким образом, утверждение предложения 2 в этом случае совпадает с утверждением предложения 1.

§ 3. Учет операторов рождения пар в ультравторично квантованной свободной энергии

Аналогично тому, как в предыдущих параграфах была получена свободная энергия во вторично квантованном и ультравторично квантованном «холостом» случаях, можно получить свободную энергию для системы, в которой есть конденсат парных частиц. В этом случае аналогично вводится пространство.

Ультравторично квантованные операторы (4.36) с операторами рождения $\widehat{B}^{+}(x, y)$ и уничтожения $\widehat{B}^{-}(x, y)$ пар принимают вид:

$$\overline{\widehat{A}} = \sum_{K,M=0}^{\infty} \frac{1}{K!\,M!} \sum_{s_1=1}^{J_1} \dots \sum_{s_K=1}^{J_K} \int \dots \int dx_1 \dots dx_K\, dy_1 \dots dy_{2M} \cdot$$

$$\cdot \overset{2}{\widehat{b}}{}^{+}(x_1, s_1) \dots \overset{2}{\widehat{b}}{}^{+}(x_K, s_K)\, \overset{2}{\widehat{B}}{}^{+}(y_1, y_2) \dots \overset{2}{\widehat{B}}{}^{+}(y_{2M-1}, y_{2M}) A_{K+2M} \cdot$$

$$\cdot \operatorname*{Symm}_{x_1 \dots x_K, y_1 \dots y_{2M}} \Big(\overset{1}{\widehat{b}}{}^{-}(x_1, s_1) \cdot \ldots \cdot \overset{1}{\widehat{b}}{}^{-}(x_K, s_K) \cdot \overset{1}{\widehat{B}}{}^{-}(y_1, y_2) \cdot$$

$$\cdot \ldots \overset{1}{\widehat{B}}{}^{-}(y_{2M-1}, y_{2M})\Big) \exp\Big(-\sum_{s=1}^{J} \int dx\, \overset{2}{\widehat{b}}{}^{+}(x, s)\, \overset{1}{\widehat{b}}{}^{-}(x, s) -$$

$$\iint dy\, dz\, \overset{2}{\widehat{B}}{}^{+}(y, z)\, \overset{1}{\widehat{B}}{}^{-}(y, z)\Big).$$

Для таких операторов справедливо утверждение, аналогичное утверждению 2. А именно, справедливо равенство

$$\mathrm{Sp}_{K,M,\mathrm{Symm}}\overline{\overline{\widehat{A}}} = (\mathrm{Sp}\ A_N)\frac{(K+J_1-1)!}{K!\,(J_1-1)!}.$$

Кроме того, в случае с парами также справедливо утверждение 3. Введем операторы

$$\widehat{B}^-_{q_1q_2} = \iint dy_1\,dy_2\,\widehat{B}^-(y_1,\,y_2)e^{-i\frac{q_1y_1+q_2y_2}{\hbar}},$$

$$\widehat{B}^+_{q_1q_2} = \iint dy_1\,dy_2\,\widehat{B}^+(y_1,\,y_2)e^{i\frac{q_1y_1+q_2y_2}{\hbar}},$$

которые удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\left[\widehat{B}^-_{q_1q_2},\,\widehat{B}^+_{q_1'q_2'}\right] = \delta_{q_1q_1'}\delta_{q_2q_2'},\ \left[\widehat{B}^\pm_{q_1q_2},\,\widehat{B}^\pm_{q_1'q_2'}\right] = 0.$$

Рассмотрим оператор

$$\begin{aligned}\overline{\overline{\widehat{F}}}(\theta) = \sum_q\sum_{t=1}^{J_2}\varepsilon(q)\widehat{b}^-_{qt}\widehat{b}^+_{qt} + \sum_{qq'}\bigl(\varepsilon(q)+\varepsilon(q')\bigr)\widehat{B}^+_{qq'}\widehat{B}^-_{qq'} + \\ +\theta\sum_q\sum_{t=1}^{J_2}\ln\bigl(\Gamma(\widehat{B}^+_{qq'}\widehat{B}^-_{qq'}-1)\bigr) + \theta\sum_{qq'}\ln\bigl(\Gamma(B^+_{qq'}\,B_{qq'}+1)\bigr) - \\ -\theta\sum_q\ln\Bigl(\frac{\Gamma(\widehat{M}_q+G^3)}{\Gamma(G^3)}\Bigr) - \theta\sum_{t=1}^{J_2}\ln\Bigl(\frac{\Gamma(\widehat{K}_t+Q)}{\Gamma(Q)}\Bigr) - \\ -\theta\ln\Bigl(\frac{K!\,M!\,(J_1-1)!}{(K+J_1-1)!\,(K+2M)!}\Bigr),\end{aligned} \tag{4.49}$$

где

$$\widehat{M}_q = \sum_{t=1}^{J_2}\widehat{b}^+_{qt}\widehat{b}^-_{qt} = \sum_{q'}\widehat{B}^+_{qq'}\widehat{B}^-_{qq'} + \sum_{q'}\widehat{B}^+_{q'q}\widehat{B}^-_{q'q},$$

$$\widehat{K}_t = \sum_q\widehat{b}^+_{qt}\widehat{b}^-_{qt}.$$

В парном случае имеет место

Предложение 3. *В термодинамическом пределе свободная энергия* (4.44) *асимптотически равна минимальному* собственному *значению оператора*

$$\overline{\widehat{F}}(\theta). \tag{4.50}$$

Обоснование этого предложения полностью аналогично обоснованию предложения 2.

Замечание. Хотя в теоремах речь идет о термодинамическом пределе, на самом деле они верны, когда $N \to \infty$ много медленнее, чем L^3. В силу общего способа, данного во введении, мы должны были бы увеличивать не только размер тора, но и число частиц N. Тогда у нас получился бы также «дух» по числу N. А раз мы зафиксировали N, это значит, что дух по N мы взяли равным нулю. И хотя имеет место равенство шпуров и асимптотики, все же мы не учли существенного увеличения частоты спектра при переходе от N_1 к N_2, $N_2 \gg N_1 \gg 1$.

Это означает, что свободная энергия, вычисленная выше, годится лишь при

$$N \ll G^3 \sim Q,$$

возможно (гипотеза!), и для конечных N. Это значит, что формулы (4.50) и другие существенно упростятся, когда мы применим формулу Стирлинга в членах, содержащих G^3 и Q.

§ 4. Пример оператора свободной энергии для статистического ансамбля

Далее рассматривается статистический ансамбль и вводится оператор свободной энергии для ансамбля. Статистический ансамбль представляет собой большое число одинаковых термодинамических систем, которые не взаимодействуют между собой. Поэтому статистический ансамбль можно считать идеальным газом, «частицами» которого являются термодинамические системы.

Рассмотрим простой случай, когда термодинамическая система есть идеальный газ. Введем оператор свободной энергии для ансамбля таких систем аналогично тому, как это было сделано в предыдущих параграфах.

Будем считать, что N частиц находятся на трехмерном торе $\mathbb{T}$, все три окружности которого равны L. Пространство состояний такой квантовой системы есть $L_2(\mathbb{T}^N)$. Оператор Гамильтона идеального газа имеет вид

$$\widehat{H}_N = -\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{j=1}^{N}\Delta_j, \tag{4.51}$$

где $\Delta_j = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_{j\alpha}^2}$ — оператор Лапласа, $x_{j\alpha}$ — координаты j-й частицы на торе $\mathbb{T}$, $x_j = (x_{j1}, x_{j2}, x_{j3})$. Стационарное уравнение Шредингера, отвечающее гамильтониану (4.51):

$$\widehat{H}_N \Psi(x_1, \dots, x_N) = E\Psi(x_1, \dots, x_N), \tag{4.52}$$

где $\Psi(x_1, \dots, x_N)$ — функции из пространства $L_2(\mathbb{T}^N)$. Мы не считаем, что газ состоит из фермионов или бозонов, поэтому никаких условий симметрии или антисимметрии на функцию Ψ не накладывается (то есть частицы различимы). Из решений уравнения (4.52) можно выбрать полную ортонормированную в $L_2(\mathbb{T}^N)$ систему функций

$$\Psi_{\{K\}}(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{L^{3N/2}} e^{i\sum_{j=1}^{N} K_j x_j}, \tag{4.53}$$

где K_j — трехмерные векторы вида $K_j = \frac{2\pi}{L}(l_{j1}, l_{j2}, l_{j3})$, $l_{j\alpha}$ — целые, $K_j x_j = \sum_{\alpha=1}^{3} K_{j\alpha} x_{j\alpha}$, $\{K\}$ — обозначение для набора векторов $K_1, K_2, \dots, K_N$. Соответствующее функции (4.53) собственное значение оператора (4.51) имеет вид

$$E_{\{K\}} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\hbar^2 K_j^2}{2m}. \tag{4.54}$$

Удельная свободная энергия $F(\theta, n)$ [67] системы различимых частиц с гамильтонианом H_N при температуре θ и плотности n определяется как термодинамический предел величины

$$-\frac{\theta}{N} \ln\left(\frac{1}{N!}\mathrm{Sp}(e^{-\widehat{H}_N/\theta})\right) = \frac{F(\theta, L^3, N)}{N}. \tag{4.55}$$

Под термодинамическим понимается предел при $N \to \infty$, $L \to \infty$, $N/L^3 = n$ — постоянная величина, $F(\theta, L^3, N)$ называют [67] свободной энергией системы N частиц в объеме L^3 при температуре θ, асимптотика свободной энергии в термодинамическом пределе имеет вид $Nf(\theta, n) + o(N)$. Для идеального газа с учетом (4.54) из (4.55) получается, что главный член асимптотики свободной энергии имеет вид

$$-N\theta \ln\left(\frac{e}{n(2\pi)^3} \int dq e^{-\hbar^2 q^2/(2m\theta)}\right) = -N\theta \ln\left(\frac{e}{n(2\pi)^3} \left(\frac{2m\pi\theta}{\hbar^2}\right)^{3/2}\right), \tag{4.56}$$

где e — основание натурального логарифма, $q \in \mathbb{R}^3$.

Покажем теперь, что асимптотика выражения (4.55) совпадает с асимптотикой минимального собственного значения некоторого оператора. Рассмотрим статистический ансамбль [67] из K одинаковых систем N частиц на торе $\mathbb{T}$ с гамильтонианом (4.51) и будем считать, что эти K систем образуют одну систему: KN частиц на торе $\mathbb{T}$, все три окружности которого равны $\sqrt[3]{K}L$, с гамильтонианом H_{KN} вида (4.51), действующим в пространстве $L_2(\widetilde{T}^{KN})$. Из принципа термодинамической аддитивности [67] следует, что в термодинамическом пределе для любого значения K имеет место асимптотическое равенство

$$-\frac{\theta}{N}\ln\left(\frac{1}{N!}\operatorname{Sp}e^{-\widehat{H}_N/\theta}\right)\sim-\frac{\theta}{(KN)!}\ln\left(\operatorname{Sp}e^{-\widehat{\widetilde{H}}_{KN}/\theta}\right). \tag{4.57}$$

Формула (4.56) в случае идеального газа позволяет убедитьсн в этом непосредственно. Рассмотрим $\operatorname{Sp}e^{-\widehat{\widetilde{H}}_{KN}/\theta}$, в силу того, что $\widehat{\widetilde{H}}_{KN}$ имеет вид (4.51), только переменная x лежит на большом торе $\widetilde{\mathbb{T}}$, собственные значения этого оператора аналогичны (4.34) и могут быть записаны в виде

$$\widetilde{E}_{\{p\}}=\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=1}^{K}\frac{\hbar^2p_{jl}^2}{2m}, \tag{4.58}$$

где p_{jl} — трехмерные векторы вида $\dfrac{2\pi}{L\sqrt[3]{K}}(K_1,K_2,K_3)$, K_1,K_2,K_3 — целые числа. Поэтому имеет место равенство

$$\operatorname{Sp}e^{-\widehat{\widetilde{H}}_{KN}/\theta}=\left(\sum_{p_1}\sum_{p_2}\dots\sum_{p_N}e^{(-\hbar^2/2m\theta)\sum_{j=1}^{N}p_j^2}\right)^K. \tag{4.59}$$

Используя метод, аналогичный использованному ранее, можно показать, что в термодинамическом пределе главный член асимптотики правой части равенства (4.59) совпадает с главным членом асимптотики выражения

$$K!K^N\sum_{\{NK\}}\prod_{\{K\}}\left(e^{-\frac{E_{\{K\}}}{\theta}N_{\{K\}}}e^{N_{\{K\}}}e^{-N_{\{K\}}\ln N_{\{K\}}}\right), \tag{4.60}$$

где $E_{\{K\}}$ имеет вид (4.34), $\{K\}$ — введенные выше наборы векторов $K_1,\dots,K_N$, $\prod_{\{K\}}$ — произведение по всем таким наборам, $N_{\{K\}}$ —

целое число, зависящее от $\{K\}$, $\{N\}$ — обозначение для набора всех таких чисел, $\sum_{\{N\},K}$ — обозначение для суммы по всем наборам $\{N\}$ таким, что $\sum_{\{K\}} N_{\{K\}} = K$. Очевидно, что выражение (4.60) совпадает с выражением

$$K!K^N \operatorname{Sp}_K \left(e^{-K\widehat{A}/\theta}\right),$$

где $\widehat{A}$ — вторично квантованный оператор в бозонном фоковском пространстве [62]:

$$\widehat{A} = \sum_{\{K\}} \left(E_{\{K\}} \frac{\widehat{N}(K_1, \ldots, K_N)}{K} - \theta \frac{\widehat{N}(K_1, \ldots, K_N)}{K} \right.$$

$$\left. + \theta \frac{\widehat{N}(K_1, \ldots, K_N)}{K} \ln \widehat{N}(K_1, \ldots, K_N) \right), \qquad (4.61)$$

где

$$\widehat{N}(K_1, \ldots, K_N) = \widehat{\psi}^+(K_1, \ldots, K_N)\widehat{\psi}^-(K_1, \ldots, K_N),$$

а $\widehat{\psi}^+(K_1, \ldots, K_N)$ и $\widehat{\psi}^-(K_1, \ldots, K_N)$ — операторы рождения и уничтожения [62] в фоковском пространстве, а Sp_K означает, что берется след ограниченного оператора на K-частичное подпространство пространства Фока. Все асимптотические равенства, написанные до сих пор, справедливы при любом K, поэтому мы можем рассмотреть предел $K \to \infty$.

Легко убедиться, аналогично тому, как это было сделано выше, что в этом пределе асимптотика $\operatorname{Sp}_K(e^{-K\widehat{A}/\theta})$ в главном члене совпадает с $e^{-\frac{K}{\theta}a}$, где a — минимальное собственное значение оператора $\widehat{A}$ на K-частичном подпространстве. Из этого, с учетом (4.57) и (4.59), следует, что свободная энергия идеального газа N частиц на торе $\mathbb{T}$ с гамильтонианом (4.51) при температуре θ в термодинамическом пределе асимптотически эквивалентна минимальному собственному значению вторично квантованного оператора

$$\widehat{F}_{\theta,K} = \sum_{\{K\}} E_{\{E\}} \frac{\widehat{N}(K_1, \ldots, K_N)}{K}$$

$$+\theta \sum_{\{K\}} \frac{\widehat{N}(K_1, \ldots, K_N)}{K} \ln \left(\frac{\widehat{N}(K_1, \ldots, K_N)}{K} \right) - \theta + \theta N \ln N \qquad (4.62)$$

на K-частичном подпространстве при $K \to \infty$. Оператор (4.62) отличается от (4.61) на число, не зависящее от операторов $\widehat{\psi}^{\pm}(K_1, \ldots, K_N)$.

Оператор (4.62) является вторично квантованным оператором свободной энергии ансамбля. Заметим в заключение, что этот оператор написан, во-первых, в частном случае, когда системы ансамбля представляют собой идеальный газ, и, во-вторых, в предположении, что системы неразличимы, а это не соответствует физике. Далее оператор свободной энергии ансамбля вводится для произвольных систем, и при этом учитывается, что эти системы, хотя и одинаковы, но различимы, т. е. подчиняются классической статистике. Отметим также, что операторы свободной энергии из предыдущих параграфов зависят от параметров — «духов», а оператор (4.62) зависит только от одного параметра K — числа систем в ансамбле.

Глава 5

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНСАМБЛЬ ГИББСА И КВАНТОВАНИЕ ТЕРМОДИНАМИКИ

§ 1. Статистический ансамбль

В статистической физике широко используется концепция статистического ансамбля [67]. Статистический ансамбль представляет собой систему большого числа невзаимодействующих одинаковых термодинамических систем. Если термодинамическая система состоит из N частиц на трехмерном торе $\mathbb{T}$, все три окружности которого равны L, то пространство состояний этой системы есть $L_2(\mathbb{T}^N)$. Пусть гамильтониан системы есть оператор $H(\overset{2}{x}, \overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}})$ в пространстве $L_2(\mathbb{T}^N)$, где $x \in \mathbb{T}^N$. Рассмотрим статистический ансамбль как квантовую систему k одинаковых, но различимых частиц (то есть не бозонов и не фермионов, роль «частицы» в данном случае играет термодинамическая система).

Пространство состояний такой системы есть

$$\underbrace{L_2(\mathbb{T}^N)\bigotimes \ldots \bigotimes L_2(\mathbb{T}^N)}_{k \text{ раз}} = \mathcal{L}_k,$$

а гамильтониан, так как нет взаимодействия между «частицами», есть сумма гамильтонианов:

$$\widehat{H}_k = \sum_{j=1}^{k} H\Big(\overset{2}{x_j}, \overset{1}{\frac{\partial}{\partial x_j}}\Big). \tag{5.1}$$

Поскольку оператор (5.1) не является бозонным, обычное вторичное квантование не применимо для рассмотрения статистического ансамбля, поэтому рассмотрим вторичное квантование этого оператора с номерами. Для этого рассмотрим пространство $\mathcal{G}_k$, элементами которого являются функции $\Phi(x_1, s_1; \ldots; x_k, s_k)$, где $x_j \in \mathbb{T}^N$, $j = 1, \ldots, k$, $s_j = 1, \ldots, J$ — дискретная переменная, называемая номером или статистический спином, J — натуральное число, или бесконечность; эти функции симметричны относительно перестановок любых пар переменных x_j, s_j и x_i, s_i, и для них выполнено неравенство

$$\sum_{s_1=0}^{J} \cdots \sum_{s_k=0}^{J} \int \cdots \int dx_1 \ldots dx_k |\Phi(x_1, s_1; \ldots; x_k, s_k)|^2 < \infty.$$

Левая часть этого неравенства задает квадрат нормы вектора пространства $\mathcal{G}_k$. Введем теперь пространство $\mathcal{G} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{G}_k$. Это пространство, в силу симметрии функций, из которых состоят пространства $\mathcal{G}_k$, является бозонным фоковским пространством, в нем стандартным образом [62] вводятся операторы рождения $\widehat{b}^+(x, s)$ и уничтожения $\widehat{b}^-(x, s)$ пары частица – номер и существует вакуумный вектор Φ_0, свойства этих операторов:

$$\left[\widehat{b}^-(x, s), \widehat{b}^+(x', s')\right] = \delta_{ss'} \delta(x - x'),$$

$$\left[\widehat{b}^\pm(x, s), \widehat{b}^\pm(x', s')\right] = 0,$$

$$\widehat{b}^-(x, s)\Phi_0 = 0, \qquad (\Phi_0, \Phi_0) = 1,$$

кроме того, любой вектор пространства $\mathcal{G}$ единственным образом представляется в виде

$$\Phi = \sum_{k=0} \frac{1}{\sqrt{k!}} \sum_{s_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{s_k=0}^{\infty} \int \cdots \int dx_1 \ldots dx_k \Phi_k(x_1, s_1; \ldots x_k, s_k) \times$$

$$\widehat{b}^+(x_1, s_1) \ldots \widehat{b}^+(x_k, s_k) \Phi_0,$$

где $\Phi_k \in \mathcal{G}^k$.

В представлении вторичного квантования оператору (5.1) соответствует следующий оператор в пространстве $\mathcal{G}$:

$$\overline{\widehat{H}} = \sum_{s=0}^{J} \int dx \widehat{b}^+(x, s) H\Big(\overset{2}{x}, \overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}\Big) \widehat{b}^-(x, s). \tag{5.2}$$

Оператор (5.2) отличается от рассмотренных в главе 3 тем, что не содержит операторов проектирования на симметричное или антисимметричное относительно переменных x подпространство. Среди собственных функций этого оператора есть функции с любыми симметричными свойствами, поэтому можно говорить, что он учитывает все парастатистики.

Будем считать, что известна полная ортонормированная система функций оператора $H\left(\overset{2}{x}, \overset{1}{\partial/\partial x}\right)$: $\{\varphi_\alpha(x)\}, \alpha = 1, 2, \ldots,$ и соответствующие собственные значения $\{\varepsilon_\alpha\}$.

Полная ортонормированная система собственных функций оператора (5.1) в пространстве $\mathcal{L}_k$ имеет вид

$$\Phi_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}(x_1, \ldots, x_k) = \prod_{j=1}^{k} \varphi_{\alpha_j}(x_j), \qquad \alpha_j = 1, 2, \ldots, \tag{5.3}$$

а соответствующие собственные значения

$$E_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k} = \sum_{j=1}^{k} \varepsilon_{\alpha_j}. \tag{5.4}$$

Полная ортонормированная система собственных функций оператора (5.2) на подпространстве $\mathcal{G}_k$ пространства $\mathcal{G}$ имеет вид

$$\Phi_{\{n\}} = \Big(\prod_{\alpha=1}^{\infty}\prod_{s=1}^{J}\Big(\int dx \varphi_\alpha(x)\widehat{b}^+(x, s)\Big)^{n_{\alpha s}} \frac{1}{\sqrt{n_{\alpha s}!}}\Big)\Phi_0, \tag{5.5}$$

где $\{n\}$ — обозначение для набора целых чисел $n_{\alpha s} \geqslant 0$ таких, что $\sum\limits_{\alpha=1}^{\infty} \sum\limits_{s=1}^{J} n_{\alpha s} = k$.

Соответствующие собственные значения оператора (5.2) есть

$$E_{\{n\}} = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \varepsilon_\alpha \sum_{s=1}^{J} n_{\alpha s}. \tag{5.6}$$

§ 2. Серии и квазичастицы ансамбля

Собственные функции (5.3) и (5.5) операторов (5.1) и (5.2) могут быть разбиты на серии в пределе при $k \to \infty$. Важное понятие асимптотической серии было введено в [41]. Требуется указать класс операторов, относительно которого определяются серии. Пусть δ — фиксированное число такое, что $0 < \delta < 1$. Рассмотрим в пространстве $\mathcal{L}_k$ класс операторов, образованный линейными комбинациями всех операторов $\widehat{A}$ вида

$$(\widehat{A}\Phi)(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{1 \leqslant j_1 \neq \ldots \neq j_M \leqslant k} \int \cdots \int dy_1 \ldots dy_k$$

$$A_{j_1 \ldots j_M}(x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}; y_{j_1}, \ldots, y_{j_k}) \Big(\prod_{j \neq j_1, \ldots, j_M} \delta(x_j - y_j) \Big) \Phi(y_1, \ldots, y_k), \tag{5.7}$$

где M — число такое, что $M < k^\delta$.

Серии собственных функций оператора (5.1) будем определять относительно этого класса операторов.

Каждой из функций (5.3) сопоставим набор чисел $k_\beta(\alpha_1, ..., \alpha_k)$, $\beta = 1, 2, \ldots,$ таких, что

$$k_\beta(\alpha_1, ..., \alpha_k) = \sum_{s=1}^{k} \delta_{\beta \alpha_s}. \tag{5.8}$$

Очевидно, k_β равно числу тех α_s, $s = 1, ..., k$, которые равны β. Кроме того, только конечное число из k_β отлично от нуля, и имеет место равенство $\sum_{\beta=1}^{\infty} k_\beta = k$.

Будем считать, что собственные значения ε_α имеют свойство: $\varepsilon_\alpha < \varepsilon_{\alpha+1}$. В таком случае разобьем множество собственных функций (5.3) на серии следующим образом: будем считать, что к серии с номером α относятся все функции (5.3), у которых $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{k_\beta}{k} = 0$ при $\beta > \alpha$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{k_\alpha}{k} > 0$. Легко убедиться, что матричные элементы операторов (5.7) на функциях, принадлежащих разным сериям, равны нулю. Кроме того, очевидно, что собственные значения серии с номером α ограничены снизу в пределе при $k \to \infty$ величиной $k\varepsilon_\alpha$. Во вторично квантованном случае собственной функции (5.5) оператора (5.2) сопоставляется набор чисел $k_\alpha = \sum\limits_{s=1}^{J} n_{\alpha s}$ и серии определяются аналогично. Семейство операторов, аналогичное (5.7), есть все линейные комбинации следующих операторов в пространстве $\mathscr{G}$:

$$\widehat{A} = \sum_{s_1=1}^{J} ... \sum_{s_M=1}^{J} \sum_{s'_1=1}^{J} ... \sum_{s'_M=1}^{J} \int ... \int dx_1...dx_M dy_1...dy_M \times$$

$$\widehat{b}^{+}(x_1, s_1)...\widehat{b}^{+}(x_M, s_M)\widehat{b}^{-}(y_M, s'_M)...\widehat{b}^{-}(y_1, s'_1)\times$$
$$A(x_1, s_1; ...; x_M, s_M; y_1, s'_1; ...; y_M, s'_M),$$

где $M < k^{\delta}$.

§ 3. Операторы статистического веса и энтропии

До сих пор рассматривался статистический ансамбль без учета температуры. Возможно, однако, что, в результате действия некоторых сил, ансамбль стохастизировался, после чего каждое состояние ансамбля получило вероятность, с которой ансамбль может быть найден именно в этом состоянии. Естественно предположить, что в результате действия сил, которые приводят к стохастизации ансамбля, все состояния систем ансамбля являются равновероятными. Это предположение однозначно приводит к выражению для вероятности обнаружить ансамбль в каком-либо состоянии и, соответственно, позволяет определить операторы статистического веса и энтропии. Рассмотрим сначала простой пример.

Рассмотрим серию из k независимых опытов, причем будем считать, что в каждом опыте возможно два различных равновероятных исхода, то есть вероятность каждого исхода в одном опыте равна 1/2 [79]. Рассмотрим следующее событие: в серии из k независимых опытов первый исход встречается k_1 раз, а второй — $k_2 = k - k_1$ раз, а в каком порядке следуют исходы не имеет значения. Очевидно, что число разных исходов рассматриваемой серии из k независимых опытов равно 2^k, причем все эти исходы серии опытов равновероятны, кроме того, рассматриваемое событие реализуется в

$$\Gamma(k_1, k_2) = \frac{k!}{k_1!k_2!}, \tag{5.9}$$

исходах из этих 2^k. Поэтому для вероятности рассматриваемого события получается хорошо известная в теории вероятностей формула [79]

$$W(k_1, k_2) = \frac{k!}{k_1!k_2!}\frac{1}{2^k}.$$

На практике такая серия из k независимых опытов может быть реализована в опыте с бросанием монет [79], кроме того, аналогом такой серии опытов в статистической физике является, например, система k невзаимодействующих спинов 1/2 [80] или вообще любой ансамбль, состоящий из k невзаимодействующих подсистем, у каждой из которых есть два возможных состояния. Пространство состояний такого ансамбля есть $\mathbf{C}^{2k}$, и, согласно квантовой механике состояния, описываются функциями дискретного переменного $\Phi(j_1, \ldots, j_k)$, где j_s принимает значения $1, 2$. Гамильтониан $\widehat{H_k}$ системы из k невзаимодействующих подсистем, каждая из которых может находиться в двух состояниях, имеет вид

$$\left(\widehat{H}\Phi\right)(j_1, \ldots, j_k) = \sum_{s=1}^{k} \lambda_{j_s} \Phi(j_1, \ldots, j_k), \tag{5.10}$$

где λ_1, λ_2 — некоторые действительные числа, возможные значения энергии подсистемы. Полная система собственных функций гамильтониана (5.10) есть

$$\Phi_{\{n\}}(j_1, \ldots, j_k) = \prod_{s=1}^{k} \delta_{j_s n_s}, \tag{5.11}$$

где $\{n\}$ — некоторый набор чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k = 1, 2$, δ — символ Кронекера. Больцман предложил следующее соотношение между энтропией состояния и числом способов, которым это состояние реализуется, $S = \ln(\Gamma)$ [67] (здесь и далее использована безразмерная энтропия). Введем в пространстве $\mathbf{C}^{2k}$ оператор $\widehat{\Gamma}$ вида

$$\left(\widehat{\Gamma}\Phi\right)(j_1, \ldots, j_k) = \frac{k!}{k_1! k_2!} \Phi(j_1, \ldots, j_k), \tag{5.12}$$

где k_1, k_2 зависят от переменных $j_1, \ldots, j_k$ следующим образом:

$$k_1 = \sum_{s=1}^{k} \delta_{1 j_s}, \qquad k_2 = \sum_{s=1}^{k} \delta_{2 j_s}, \tag{5.13}$$

Эта зависимость в (5.12) опущена, для того чтобы не загромождать формулу. Функции (5.11) соответствуют состояниям, у которых k_1 подсистем находится в первом состоянии и k_2 подсистем — во втором, где k_1 и k_2 выражаются формулой (5.13), в которую вместо j_s надо подставить n_s. Очевидно, что эти функции являются собственными функциями оператора (5.12), причем соответствующее собственное значение задается формулой (5.9), то есть равно возможному числу состояний с заданными k_1 и k_2. Поэтому естественно интерпретировать оператор (5.12) как оператор статистического веса. Теперь, следуя подходу Больцмана, определим оператор энтропии как

$$\widehat{S} = \ln\left(\widehat{\Gamma}\right). \tag{5.14}$$

Соответствие между теорией вероятностей и квантовой механикой, а также определение операторов статистического веса и энтропии легко переносятся на общий случай.

В качестве вспомогательного примера для перехода к общему случаю рассмотрим квантование энтропии и вероятности для систем, состоящих из k невзаимодействующих подсистем, каждая из которых имеет M уровней. Пространство состояний квантовой системы в этом случае есть $\mathbf{C}^{kM}$, состояния системы описываются функциями $\Phi(j_1,\ldots,j_k)$, где j_s принимает значения $1,\ldots,M$. Гамильтониан системы задается формулой (5.10), в которой надо учесть, что дискретные переменные j_s изменяются от 1 до M и $\lambda_1,\ldots,\lambda_M$ — действительные числа, набор собственных функций этого гамильтониана задается формулой (5.11), в которой числа $n_1, n_2, \ldots, n_k$ принимают значения $1,\ldots,M$. Аналогом такой квантовой системы в теории вероятностей является серия из k независимых опытов, в каждом из которых возможны M исходов. Число разных исходов этой серии опытов равно M^k. Рассмотрим следующее событие: в серии из k независимых опытов первый исход встречается k_1 раз, второй — k_2 раз, $\ldots$, M-й — $k_M = k - \sum_{s=1}^{M-1} k_s$ раз, причем безразлично, в каком порядке следуют эти исходы. Число различных исходов серии испытаний, в которых реализуется рассматриваемое событие, равно

$$\Gamma(k_1,\ldots,k_M) = \frac{k!}{\prod_{\alpha=1}^{M} k_\alpha!}. \tag{5.15}$$

Используя (5.15), введем, аналогично тому, как это было сделано выше, следующий оператор статистического веса $\widehat{\Gamma}$ в пространстве состояний рассматриваемой квантовой системы

$$\left(\widehat{\Gamma}\Phi\right)(j_1,\ldots,j_k) = \frac{k!}{\prod_{\alpha=1}^{M} k_\alpha!}\Phi(j_1,\ldots,j_k), \tag{5.16}$$

где $k_1, \ldots k_M$ зависят от переменных $j_1, \ldots, j_k$:

$$k_\alpha = \sum_{s=1}^{k} \delta_{\alpha j_s}, \qquad \alpha = 1, \ldots, M, \tag{5.17}$$

эта зависимость в (5.16) опущена. Соответствующий оператор энтропии выражается формулой (5.14).

Очевидно, что в формулах для операторов энтропии и статистического веса число M формально может быть заменено на ∞, и таким образом эти операторы определяются в пространстве l_2^k для ансамбля k невзаимодействующих подсистем, каждая из которых имеет бесконечное счетное число уровней. Кроме того, операторы могут быть введены в рассмотренном выше случае. Рассмотрим случай, когда пространство состояний квантовой системы k невзаимодействующих подсистем есть пространство $\mathscr{L}_k$, а пространство состояний подсистемы — соответственно $L_2(\mathbb{T}^N)$.

В предыдущем параграфе каждой функции (5.3) сопоставлен набор чисел k_β по формуле (5.8). Сопоставим теперь каждой функции (5.3) число

$$\frac{k!}{\prod_{\alpha=1}^{\infty} k_\alpha!}. \tag{5.18}$$

Выражение (5.18), очевидно, совпадает с числом функций (5.3), у которых наборы чисел (5.8) совпадают. Оператором статистического веса для рассматриваемой системы будем называть оператор $\widehat{\Gamma}_k$ в пространстве $\mathscr{L}_k$, ядро которого имеет вид

$$\Gamma_k(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_k) = \sum_{\alpha_1=1}^{\infty} \ldots \sum_{\alpha_k=1}^{\infty} \frac{k!}{\prod_{\alpha=1}^{\infty} k_\alpha!} \times$$
$$\times \Phi_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k}(x_1, \ldots, x_k) \Phi^*_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k}(y_1, \ldots, y_k). \tag{5.19}$$

Оператором энтропии будем называть оператор $\widehat{S}$ в пространстве $\mathscr{L}_k$, который выражается через оператор статистического веса по формуле

$$\widehat{S}_k = \ln\left(\widehat{\Gamma}_k\right). \tag{5.20}$$

Вторично квантованными аналогами операторов (5.19) и (5.20) являются следующие операторы в пространстве $\mathscr{G}$:

$$\widehat{\widehat{\Gamma}} = \frac{\Gamma(\widehat{\widehat{k}} + 1)}{\prod_{\alpha=1}^{\infty} \Gamma(\widehat{\widehat{k}}_\alpha + 1)}, \tag{5.21}$$

$$\widehat{\widehat{S}} = \ln(\widehat{\widehat{\Gamma}}), \tag{5.22}$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция, а $\overline{\widehat{k}}$, $\overline{\widehat{k}}_\alpha$ — следующие операторы в пространстве $\mathcal{G}$:

$$\overline{\widehat{k}}_\alpha = \sum_{s=0}^{J} \iint dxdy \widehat{b}^{+}(x,s)\widehat{b}^{-}(y,s)\varphi_\alpha(x)\varphi_\alpha^{*}(y), \tag{5.23}$$

$$\overline{\widehat{k}} = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \overline{\widehat{k}}_\alpha. \tag{5.24}$$

В предыдущей главе введены специальные симметричные $\mathcal{F}^{symm}$ и антисимметричные $\mathcal{F}^{asymm}$ подпространства пространства ультравторичного квантования $\mathcal{F}$, а ультранторично квантованные операторы отличны от нуля только на этих подпространствах. Однако операторы (5.21) и (5.22) отличны от нуля на всем пространстве $\mathcal{G}$. Это свнзано с тем, что здесь рассматривается квантование по всем парастатистикам, а не только симметричный или антисимметричный случаи.

Далее рассмотрим оператор

$$\overline{\widehat{F}}_\theta = \overline{\widehat{H}} - \theta\overline{\widehat{S}}, \tag{5.25}$$

который будем называть вторично квантованным оператором свободной энергии статистического ансамбля при температуре θ. Будем называть собственными значениями свободной энергии термодинамической системы N частиц на торе $\mathbb{T}$ при температуре θ такие числа λ, для которых существует последовательность векторов $\Phi_k \in \mathcal{G}$, $\Phi_k \neq 0$ таких, что

$$\overline{\widehat{F}}_\theta \Phi_k = \omega_k \Phi_k, \qquad \overline{\widehat{k}}\Phi_k = k\Phi_k,$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\omega_k}{k} = \lambda. \tag{5.26}$$

Из явного вида операторов $\overline{\widehat{H}}$ (5.2) и $\overline{\widehat{S}}$ (5.22) следует, что для нахождения асимптотики собственных значений оператора $\overline{\widehat{F}}_\theta$ (5.25) в пределе при $k \to \infty$ (k — собственное значение оператора $\overline{\widehat{k}}$) применимы методы, развитые в [16, 64, 71], поскольку при операторах $\widehat{b}^{\pm}(x,s)$ стоит малый параметр $1/\sqrt{k}$. Оператору $\overline{\widehat{F}}_\theta$ в пределе при $k \to \infty$ соответствует следующий символ (см. определение символа в [64]):

$$F_\theta\left[b^*(\cdot), b(\cdot)\right] = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \varepsilon_\alpha k_\alpha - \theta \sum_{\alpha=1}^{\infty} k_\alpha \ln\left(\frac{k_\alpha}{k}\right), \qquad (5.27)$$

где k_α, k — функционалы вида

$$k_\alpha = \sum_{s=0}^{J} \iint dx dy b^*(x,s) b(y,s) \varphi_\alpha(x) \varphi_\alpha^*(y), \qquad k = \sum_{\alpha=1}^{\infty} k_\alpha, \qquad (5.28)$$

кроме того, нри получении (5.27) использовано то, что $\{\varphi_\alpha\}$, $\alpha = 1, 2, \ldots$ — полный ортонормированный набор собственных функций оператора $H(\overset{2}{x}, \overset{1}{\partial/\partial x})$ в пространстве $L_2(\mathbb{T}^N)$, а $\{\varepsilon_\alpha\}$ — набор соответствующих собственных значений. Согласно [16, 64, 71], собственные значения свободной энергии (5.26) являются решениями следующего уравнения:

$$\frac{\delta F_\theta}{\delta b^*(x,s)} = \lambda b(x,s). \qquad (5.29)$$

Для функционала F_θ (5.27) уравнение (5.29) может быть записано в виде следующей системы:

$$\left(\varepsilon_\alpha - \theta \ln\left(\frac{k_\alpha}{k}\right) - \lambda\right) \int dy b(y,s) \varphi^*(y) = 0, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, \qquad (5.30)$$

$$s = 0, 1, \ldots J.$$

Эта система уравнений эквивалентна следующей:

$$H\left(\overset{2}{x}, \overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}\right) \Psi_\alpha(x) + \theta \ln\left(\frac{\|\Psi_\alpha\|^2}{\sum_{\beta=1}^{\infty} \|\Psi_\beta\|^2}\right) \Psi_\alpha(x) = \lambda \Psi_\alpha(x), \qquad (5.31)$$

$$\Psi_\alpha \in L_2(\mathbb{T}^N), \qquad (\Psi_\alpha, \Psi_\beta) = 0 \quad \text{при} \quad \alpha \neq \beta.$$

§ 4. Решения унитарно-нелинейного уравнения

Исследуем решения уравнения (5.31). Это уравнение является так называемым уравнением с унитарной нелинейностью, общая теория таких уравнений развивается автором в следующей части. Поскольку система N частиц находится на трехмерном торе $\mathbb{T}$, то $x = (x_1, \ldots, x_N)$, $x_j = (x_{j1}, x_{j2}, x_{j3})$, $0 \le x_{jn} \le L$. Будем далее для определенности считать, что гамильтониан этой системы $H(\overset{2}{x}, \overset{1}{\partial/\partial x})$ имеет вид

$$\widehat{H}_N = -\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{j=1}^{N}\Delta_j + \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=j+1}^{N} V(x_j - x_i), \tag{5.32}$$

где $\Delta_j = \sum_{n=1}^{3} \dfrac{\partial^2}{\partial x_{jn}^2}$ — оператор Лапласа на торе $\mathbb{T}$, $V(x)$ — гладкая функция на торе. Теперь уравнение (5.31) может быть записано в виде

$$\lambda\Psi_\alpha(x_1, \ldots, x_N) = \widehat{H}_N\Psi_\alpha(x_1, \ldots, x_N) + \\ + \theta \ln\left(\frac{\|\Psi_\alpha\|^2}{\sum_{\beta=1}^{\infty}\|\Psi_\beta\|^2}\right)\Psi_\alpha(x_1, \ldots, x_N), \tag{5.33}$$

$$(\Psi_\alpha, \Psi_\beta) = 0 \quad \text{при} \quad \alpha \ne \beta.$$

Все решения системы (5.33) могут быть предъявлены. Например, уравнения (5.33) имеют решения вида $\Psi_\alpha(x_1, \ldots, x_N) = \delta_{\alpha n}\varphi_n(x_1, \ldots, x_N)$, $\lambda = \varepsilon_n$, где $\varphi_n(x_1, \ldots, x_N)$ и ε_n, $n = 1, 2, \ldots$ — полный ортонормированный набор собственных функций оператора (5.32) и соответствующий набор собственных значений (мы учитываем, что $a \ln a = 0$ при $a = 0$). Легко также убедиться, что существуют решения вида

$$\Psi_\alpha(x_1, \ldots, x_N) = a_1\delta_{\alpha n_1}\varphi_{n1}(x_1, \ldots, x_N) + a_2\delta_{\alpha n_2}\varphi_{n1}(x_1, \ldots, x_N), \\ \lambda = -\theta \ln\left(e^{-\varepsilon_{n_1}/\theta} + e^{-\varepsilon_{n_2}/\theta}\right), \tag{5.34}$$

где

$$a_{1,2} = \sqrt{e^{-\varepsilon_{n_1,n_2}/\theta} \Big/ \left(e^{-\varepsilon_{n_1}/\theta} + e^{-\varepsilon_{n_2}/\theta}\right)}.$$

Формулы (5.34) очевидным образом обобщаются на случай вообще любого $l \ge 1$: функции

$$\Psi_\alpha(x_1, \ldots, x_N) = \sum_{j=1}^{l} a_j\delta_{\alpha n_j}\varphi_{n_j}(x_1, \ldots, x_N), \tag{5.35}$$

где n_j — произвольный набор чисел $n_1 \neq n_2 \neq \ldots \neq n_l$, являются решениями системы (5.33) с собственным значением

$$\lambda = -\theta \ln \left(\sum_{j=1}^{l} e^{-\varepsilon_{n_j}/\theta} \right) \tag{5.36}$$

при условии, что

$$a_j = \sqrt{e^{-\varepsilon_{n_j}/\theta} \Big/ \sum_{r=1}^{l} e^{-\varepsilon_{n_r}/\theta}}.$$

Формулы (5.35) и (5.36) распространяются и на случай бесконечного числа l. Вообще, справедливо следующее утверждение: набор функций $\Psi_\alpha(x_1, \ldots, x_N)$ является решением системы уравнений (5.33) тогда и только тогда, когда этот набор имеет вид

$$\Psi_\alpha(x_1, \ldots, x_N) = a_\alpha \varphi_{n_\alpha}(x_1, \ldots, x_N) b_\alpha, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, \tag{5.37}$$

где n_α — взаимооднозначное отображение множества натуральных чисел на себя, b_α — коэффициенты, принимающие значения 0 и 1, a_α имеют вид

$$a_\alpha = \sqrt{e^{-\varepsilon_{n_\alpha}/\theta} \Big/ \sum_{\beta=1}^{\infty} b_\beta e^{-\varepsilon_{n_\beta}/\theta}},$$

соответствующее собственное значение есть

$$\lambda = -\theta \ln \left(\sum_{\alpha=1}^{\infty} b_\alpha e^{-\varepsilon_{n_\alpha}/\theta} \right). \tag{5.38}$$

Рассмотрим подробно множество собственных значений свободной энергии (5.38). Так как $b_\alpha = 0$ или 1, $\theta > 0$, то выражение (5.38) тем меньше, чем больше слагаемых в сумме отлично от 0. Очевидно, что минимальное из всех значений (5.38) есть $\lambda = -\theta \ln(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varepsilon_n/\theta})$ и совпадает со свободной энергией системы N частиц на торе $\mathbb{T}$ с гамильтонианом $\widehat{H}_N$ при температуре θ [67]. Будем считать, что $\varepsilon_n \leq \varepsilon_{n+1}$. В этом случае ближайшее к самому нижнему значению λ будет $-\theta \ln(\sum_{n=2}^{\infty} e^{-\varepsilon_n/\theta})$ и так далее.

Как было показано, среди собственных значений (5.38) содержатся все собственные значения ε_n гамильтониана $\widehat{H}_N$. Кроме того, все собственные значения (5.38) разбиваются на классы следующим образом: при $\theta \to 0$ выражение (5.38) в зависимости от b_α сходится к какому-либо значению ε_n, λ, имеющие одинаковый предел при $\theta \to 0$, относятся к одному классу.

Итак, выше были определены возможные значения квантованной свободной энергии термодинамической системы. При этом вполне естественно, что минимальное из этих квантованных значений совпадает с «обычной» термодинамической свободной энергией системы. В работах [51–61] автор ввел и развил понятие серии для многочастичных задач статистической физики и квантовой механики. Согласно [51–61] серия — это некоторый набор собственных функций и собственных значений гамильтониана системы; основное свойство серий заключается в том, что матричные элементы операторов из достаточно широкого класса для функций из разных серий экспоненциально малы в термодинамическом пределе. При отличной от нуля температуре статистическая система всегда стремится к состоянию термодинамического равновесия, которое описывается распределением Гиббса по всем собственным функциям гамильтониана. Однако это состояние равновесия может достигаться за очень большое время. Например, если в начальный момент система распределена только по состояниям некоторой серии, то, в силу малости матричных элементов, вероятность перехода из одной серии в другую мала, поэтому за относительно короткое время в системе установится распределение Гиббса по состояниям серии, и система довольно долгое время может находиться в таком метастабильном состоянии. Устойчивость состояния определяется малостью величины $\exp(-\varepsilon/\theta)$, где ε — максимальное собственное значение серии. Можно говорить о свободной энергии метастабильного температурного распределения, отвечающего данной серии; естественно считать, что эта свободная энергия равна выражению (5.38), в котором набор ε есть набор собственных значений рассматриваемой серии.

§ 5. Ультравторичное квантование унитарно-нелинейного уравнения

В предыдущем параграфе в предположении, что известны собственные значения гамильтониана термодинамической системы, были найдены в явном виде решения унитарно-нелинейного уравнения (5.33) и таким образом были найдены собственные значения квантовой свободной энергии. Однако на самом деле в случае произвольного гамильтониана вида (5.32) не известны его собственные значения. Поэтому важную роль играют методы нахождения асимптотик решений уравнения (5.33) в различных предельных случаях. Уравнение (5.33) было получено в пределе из ультраторично квантованного уравнения; ниже будет показано, что само это уравнение также может быть проквантовано ультраторично и в представлении ультраторичного квантования может быть построена асимптотика его решений.

В главе 3 было введено ультраторичное квантование для линейных задач квантовой механики и статистической физики. Покажем, каким образом может быть ультраторично проквантовано унитарно-нелинейное уравнение (5.33) с учетом пар частица-номер и пар из двух частиц. Поскольку в главе 3 рассмотрен общий случай квантования с учетом всех типов кластеров, то приведем здесь конкретные формулы для случая квантования с учетом пар. Пространством ультраторичного квантования является $\mathcal{F}$ — бозонное пространство Фока [62], $\widehat{b}^{+}(x,s)$ — оператор рождения частиц с номером s, $\widehat{b}^{-}(x,s)$ — оператор уничтожения частиц с номером s в пространстве $\mathcal{F}$ [62], $\widehat{B}^{+}(x,x')$ — оператор рождения пары частиц, $\widehat{B}^{-}(x,x')$ — оператор уничтожения пары частиц в этом пространстве. Эти операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям:

$$[\widehat{b}^{-}(x,s),\widehat{b}^{+}(x',s')]=\delta_{ss'}\delta(x-x'),\qquad [\widehat{b}^{\pm}(x,s),\widehat{b}^{\pm}(x',s')]=0,$$
$$[\widehat{B}^{-}(x_1,x_2)\widehat{B}^{+}(x_1',x_2')]=\delta(x_1-x_1')\delta(x_2-x_2'),$$
$$[\widehat{B}^{\pm}(x_1,x_2),\widehat{B}^{\pm}(x_1',x_2')]=0,$$
$$[\widehat{b}^{\pm}(x,s),\widehat{B}^{\pm}(x_1',x_2')]=[\widehat{b}^{\pm}(x,s),\widehat{b}^{\mp}(x_1',x_2')]=0. \tag{5.39}$$

Далее, Φ_0 — вакуумный вектор в пространстве $\mathcal{F}$, обладающий следующими свойствами:

$$\widehat{b}^{-}(x,s)\Phi_0=0,\qquad \widehat{B}^{-}(x_1,x_2)\Phi_0=0. \tag{5.40}$$

Переменная x лежит на трехмерном торе $L\times L\times L$, который обозначается $\mathbb{T}$. Переменная статистического спина s — дискретная, $s=0,1,\dots$. Любой вектор Φ пространства $\mathcal{F}$ единственным образом представляется в виде

$$\Phi=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{M=0}^{\infty}\frac{1}{k!M!}\sum_{s_1=0}^{\infty}\dots\sum_{s_k=0}^{\infty}\int\dots\int dx_1\dots dx_k dy_1\dots dy_{2M}$$

$$\cdot \Phi_{k,M}(x_1, s_1; \ldots; x_k, s_k; y_1, y_2; \ldots; y_{2M-1}, y_{2M})$$

$$\cdot \widehat{b}^+(x_1, s_1) \cdot \ldots \cdot \widehat{b}^+(x_k, s_k) \widehat{B}^+(y_1, y_2) \cdot \ldots \cdot \widehat{B}^+(y_{2M-1}, y_{2M}) \Phi_0, \quad (5.41)$$

где функция $\Phi_{k,M}(x_1, s_1; \ldots; x_k, s_k; y_1, y_2; \ldots; y_{2M-1}, y_{2M})$ симметрична относительно перестановок пар переменных (x_j, s_j) и (x_i, s_i) и симметрична относительно перестановок пар переменных (y_{2j-1}, y_{2j}) и (y_{2i-1}, y_{2i}). В бозонном случае вводится подпространство $\mathscr{F}^{\mathrm{Symm}}_{k,M}$, состоящее из векторов Φ, у которых $\Phi_{k',M'} = 0$ при $(k', M') \neq \neq (k, M)$, а $\Phi_{k,M}$ является симметричной функцией переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_{2M}$. В фермионном случае аналогично вводится подпространство $\mathscr{F}^{\mathrm{Asymm}}_{k,M}$, состоящее из векторов Φ таких, что $\Phi_{k',M'} = 0$ при $(k', M') \neq (k, M)$, и $\Phi_{k,M}$ — антисимметричная функция переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_{2M}$. Ортогональный проектор пространства $\mathscr{F}$ на подпространство $\mathscr{F}^{\mathrm{Symm}}_{k,M}$ имеет вид:

$$\widehat{\Pi}^{\mathrm{Symm}}_{k,M} = \frac{1}{k!M!} \sum_{s_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{s_k=0}^{\infty} \int \ldots \int dx_1 \ldots dx_k dy_1 \ldots dy_{2M}$$

$$\cdot \widehat{b}^+(x_1, s_1) \cdot \ldots \cdot \widehat{b}^+(x_k, s_k) \widehat{B}^+(y_1, y_2) \cdot \ldots \cdot \widehat{B}^+(y_{2M-1}, y_{2M})$$

$$\cdot \operatorname*{Symm}_{x_1 \ldots x_k y_1 \ldots y_{2M}} \Big(\widehat{b}^-(x_1, s_1) \cdot \ldots \cdot \widehat{b}^-(x_k, s_k) \widehat{B}^-(y_1, y_2) \cdot \ldots$$

$$\cdot \widehat{B}^-(y_{2M-1}, y_{2M}) \Big)$$

$$\cdot \exp\Big(-\sum_{s=0}^{\infty} \int dx \widehat{b}^+(x,s) \widehat{b}^-(x,s) - \iint dy dy' \widehat{B}^+(y,y') \widehat{B}^-(y,y') \Big), \quad (5.42)$$

где $\mathrm{Symm}_{x_1 \ldots x_k y_1 \ldots y_{2M}}$ — оператор симметризации по переменным $x_1, \ldots, x_k$, $y_1, \ldots, y_{2M}$, а операторы $\widehat{b}^+(x,s)$, $\widehat{b}^-(x,s)$, $\widehat{B}^+(y,y')$, $\widehat{B}^-(y,y')$ упорядочены виковским способом [62]. Ортогональный проектор пространства $\mathscr{F}$ на подпространство $\mathscr{F}^{\mathrm{Asymm}}_{k,M}$ имеет вид:

$$\widehat{\Pi}^{\mathrm{Asymm}}_{k,M} = \frac{1}{k!M!} \sum_{s_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{s_k=0}^{\infty} \int \ldots \int dx_1 \ldots dx_k dy_1 \ldots dy_{2M}$$

$$\cdot \widehat{b}^+(x_1, s_1) \cdot \ldots \cdot \widehat{b}^+(x_k, s_k) \widehat{B}^+(y_1, y_2) \cdot \ldots \cdot \widehat{B}^+(y_{2M-1}, y_{2M})$$

$$\cdot \operatorname*{Asymm}_{x_1\ldots x_k y_1\ldots y_{2M}} \Big(\widehat{b}^-(x_1,s_1)\cdot\ldots\cdot\widehat{b}^-(x_k,s_k)\widehat{B}^-(y_1,y_2)\cdot\ldots$$

$$\cdot\widehat{B}^-(y_{2M-1},y_{2M})\Big)$$

$$\cdot\exp\Big(-\sum_{s=0}^{\infty}\int dx\widehat{b}^+(x,s)\widehat{b}^-(x,s)-\iint dydy'\widehat{B}^+(y,y')\widehat{B}^-(y,y')\Big), \tag{5.43}$$

где $\operatorname{Asymm}_{x_1\ldots x_k y_1\ldots y_{2M}}$ — оператор антисимметризации по переменным $x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_{2M}$. Здесь и везде далее, если не оговорено особо, операторы $\widehat{b}^+(x,s)$, $\widehat{b}^-(x,s)$, $\widehat{B}^+(y,y')$, $\widehat{B}^-(y,y')$ упорядочены виковским способом.

В предыдущем параграфе рассматриваетсн система N тождественных частиц на торе $\mathbb{T}$, гамильтониан которой имеет вид

$$\widehat{H}_N=-\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{j=1}^{N}\Delta_j+\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=j+1}^{N}V(x_j-x_l). \tag{5.44}$$

Этому оператору в бозонном случае отвечает ультранторично квантованный гамильтониан следующего вида:

$$\overline{\widehat{H}}_B=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{M=0}^{\infty}\frac{1}{k!M!}\sum_{s_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{s_k=0}^{\infty}\int\ldots\int dx_1\ldots dx_k dy_1\ldots dy_{2M}$$

$$\cdot\widehat{b}^+(x_1,s_1)\cdot\ldots\cdot\widehat{b}^+(x_k,s_k)\widehat{B}^+(y_1,y_2)\cdot\ldots\cdot\widehat{B}^+(y_{2M-1},y_{2M})\widehat{H}_{k+2M}$$

$$\cdot \operatorname*{Symm}_{x_1\ldots x_k y_1\ldots y_{2M}} \Big(\widehat{b}^-(x_1,s_1)\cdot\ldots\cdot\widehat{b}^-(x_k,s_k)\widehat{B}^-(y_1,y_2)\cdot\ldots$$

$$\cdot\widehat{B}^-(y_{2M-1},y_{2M})\Big)$$

$$\cdot\exp\Big(-\sum_{s=0}^{\infty}\int dx\widehat{b}^+(x,s)\widehat{b}^-(x,s)-\iint dydy'\widehat{B}^+(y,y')\widehat{B}^-(y,y')\Big), \tag{5.45}$$

а в фермионном случае соответствующий оператор $\overline{\widehat{H}}_F$ выражается аналогичной формулой, в которой Symm заменнется на Asymm. По аналогии с (5.44) и (5.45), ультравторично квантованный оператор $\overline{\widehat{A}}$ сопоставляется любому N-частичному оператору

$$\widehat{A}_N\Big(\overset{2}{x}_1,\ldots,\overset{2}{x}_N;-i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x_1}},\ldots,-i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x_N}}\Big).$$

Например, единичному оператору сопоставляется в бозонном случае ультравторично квантованный единичный оператор вида

$$\overline{\overline{\widehat{E}}}_B = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{M=0}^{\infty} \frac{1}{k!M!} \sum_{s_1=0}^{\infty} \dots \sum_{s_k=0}^{\infty} \int \dots \int dx_1 \dots dx_k dy_1 \dots dy_{2M}$$

$$\cdot \widehat{b}^+(x_1,s_1)\cdot \ldots \cdot \widehat{b}^+(x_k,s_k)\widehat{B}^+(y_1,y_2)\cdot \ldots \cdot \widehat{B}^+(y_{2M-1},y_{2M})$$

$$\cdot \operatorname*{Symm}_{x_1\dots x_k y_1 \dots y_{2M}} \Big(\widehat{b}^-(x_1,s_1)\cdot \ldots \cdot \widehat{b}^-(x_k,s_k)\widehat{B}^-(y_1,y_2)\cdot \ldots$$

$$\cdot \widehat{B}^-(y_{2M-1},y_{2M})\Big)$$

$$\cdot \exp\Big(-\sum_{s=0}^{\infty} \int dx \widehat{b}^+(x,s)\widehat{b}^-(x,s) - \iint dy dy' \widehat{B}^+(y,y')\widehat{B}^-(y,y')\Big), \tag{5.46}$$

который есть сумма проекторов (5.42). Аналогично, ультравторично квантованный единичный оператор в фермионном случае есть

$$\overline{\overline{\widehat{E}}}_F = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{M=0}^{\infty} \widehat{\Pi}_{k,M}^{\mathrm{Asymm}},$$

а в формуле (5.46) Symm заменяется на Asymm. Стационарное уравнение Шредингера эквивалентно следующей задаче на собственные значения

$$\overline{\overline{\widehat{H}}}_{B,F}\Phi = \lambda \overline{\overline{\widehat{E}}}_B\Phi, \qquad \overline{\overline{\widehat{E}}}\Phi \neq 0, \tag{5.47}$$

в бозе- и ферми-случаях, в силу того, что на подпространствах $\mathscr{F}_{k,M}^{\mathrm{Symm}}$ и $\mathscr{F}_{k,M}^{\mathrm{Asymm}}$ пространства $\mathscr{F}$ операторы $\overline{\overline{\widehat{H}}}_B$ и $\overline{\overline{\widehat{H}}}_F$ соответственно совпадают с оператором $\widehat{H}_{k+2M}$. Поэтому собственные значения λ задачи (5.47) в бозонном и фермионном случаях совпадают с соответствующими собственными значениями операторов $\widehat{H}_N$ (5.46). В случае, когда коммутаторы между операторами $\widehat{b}^-(x,s)$ и $\widehat{b}^+(x,s)$, а также $\widehat{B}^-(x,y)$ и $\widehat{B}^+(x,y)$ малы как $1/N$, асимптотика решений задачи (5.47), согласно [16, 64, 71], определяется точками экстремума символа, отвечающего задаче (5.47). В бозонном случае символ имеет вид

$$\mathscr{H}_B[b^*(\cdot), b(\cdot), B^*(\cdot), B(\cdot)] =$$

$$
= \left\{ \sum_{k,M=0}^{\infty} \frac{1}{k!M!} \sum_{s_1=0}^{\infty} \dots \sum_{s_k=0}^{\infty} \int \dots \int dx_1 \dots dx_k dy_1 \dots dy_{2M} \right.
$$

$$
\cdot b^*(x_1, s_1) \cdot \ldots \cdot b^*(x_k, s_k) B^*(y_1, y_2) \cdot \ldots \cdot B^*(y_{2M-1}, y_{2M}) H_{k+2M}
$$

$$
\left. \cdot \operatorname*{Symm}_{x_1 \dots x_k y_1 \dots y_{2M}} \Big(b(x_1, s_1) \cdot \ldots \cdot b(x_k, s_k) B(y_1, y_2) \cdot \ldots \cdot B(y_{2M-1}, y_{2M}) \Big) \right\}
$$

$$
\cdot \left\{ \sum_{k',M'=0}^{\infty} \frac{1}{k'!M'!} \sum_{s'_1=0}^{\infty} \dots \sum_{s'_{k'}=0}^{\infty} \int \dots \int dx'_1 \dots dx'_{k'} dy'_1 \dots dy'_{2M'} \right.
$$

$$
\cdot b^*(x'_1, s'_1) \cdot \ldots \cdot b^*(x'_{k'}, s'_{k'}) B^*(y'_1, y'_2) \cdot \ldots \cdot B^*(y'_{2M'-1}, y'_{2M'})
$$

$$
\left. \cdot \operatorname*{Symm}_{x'_1 \dots x'_{k'} y'_1 \dots y'_{2M'}} \big(b(x'_1, s'_1) \dots b(x'_{k'}, s'_{k'}) B(y'_1, y'_2) \dots B(y'_{2M'-1}, y'_{2M'}) \big) \right\}. \tag{5.48}
$$

В фермиевском случае символ выражается аналогично, только Symm в формуле (5.48) заменяется на Asymm. В бозонном случае имеет место следующее тождество для символа (5.48):

$$
\mathscr{H}_B[b^*(\cdot), b(\cdot), B^*(\cdot), B(\cdot)] = \frac{\mathrm{Sp}(\widehat{\rho}_B \widehat{H})}{\mathrm{Sp}(\widehat{\rho}_B)}, \tag{5.49}
$$

где $\widehat{H}$, $\widehat{\rho}_B$ — вторично квантованные операторы, причем $\widehat{\rho}_B$ зависит от функций $b(x,s)$, $B(y,y')$:

$$
\widehat{H} = \int dx \widehat{\psi}^+(x) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \right) \widehat{\psi}^-(x) +
$$

$$
+ \frac{1}{2} \iint dx dy V(x,y) \widehat{\psi}^+(y) \widehat{\psi}^+(x) \widehat{\psi}^-(y) \widehat{\psi}^-(x), \tag{5.50}
$$

$$
\widehat{\rho}_B = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{M=0}^{\infty} \frac{1}{k!M!(k+2M)!} \left(\sum_{s=0}^{\infty} \iint dx dx' b(x,s) b^*(x',s) \widehat{\psi}^+(x) \widehat{\psi}^-(x') \right)^k
$$

$$
\cdot \left(\iint dy_1 dy_2 B(y_1, y_2) \widehat{\psi}^+(y_1) \widehat{\psi}^+(y_2) \right)^M
$$

$$
\cdot \left(\iint dy'_1 dy'_2 B(y'_1, y'_2) \widehat{\psi}^-(y'_1) \widehat{\psi}^-(y'_2) \right)^M
$$

$$
\cdot \exp\left(-\int dz \widehat{\psi}^+(z) \widehat{\psi}^-(z) \right), \tag{5.51}
$$

где $\widehat{\psi}^{+}(x)$, $\widehat{\psi}^{-}(x)$ — бозевские операторы рождения и уничтожения, упорядоченные по Вику [62]. В ферми-случае имеет место аналогичное тождество

$$\mathscr{H}_F[b^*(\cdot),b(\cdot),B^*(\cdot),B(\cdot)]=\frac{\mathrm{Sp}(\widehat{\rho}_F\widehat{H})}{\mathrm{Sp}(\widehat{\rho}_F)}, \tag{5.49$'$}$$

где $\widehat{H}$, $\widehat{\rho}_F$ — следующие вторично квантованные операторы:

$$\widehat{H}=\int dx\widehat{\psi}^{+}(x)\Big(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Big)\widehat{\psi}^{-}(x)+ \\ +\frac{1}{2}\iint dxdyV(x,y)\widehat{\psi}^{+}(x)\widehat{\psi}^{+}(y)\widehat{\psi}^{-}(y)\widehat{\psi}^{-}(x); \tag{5.51$'$}$$

$$\widehat{\rho}_F=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{M=0}^{\infty}\frac{1}{k!M!(k+2M)!}\Big(\iint dy_1dy_2B(y_1,y_2)\widehat{\psi}^{+}(y_1)\widehat{\psi}^{+}(y_2)\Big)^M \\ \cdot\sum_{s_1=0}^{\infty}\dots\sum_{s_k=0}^{\infty}\int\dots\int dx_1dx_1'\dots dx_kdx_k' \\ \cdot b(x_1,s_1)b^*(x_1',s_1)\cdot\ldots\cdot b(x_k,s_k)b^*(x_k',s_k) \\ \cdot\widehat{\psi}^{+}(x_1)\cdot\ldots\cdot\widehat{\psi}^{+}(x_k)\widehat{P}_0\widehat{\psi}^{-}(x_k')\cdot\ldots\cdot\widehat{\psi}^{-}(x_1') \\ \cdot\Big(\iint dy_1'dy_2'B(y_1',y_2')\widehat{\psi}^{-}(y_2')\widehat{\psi}^{-}(y_1')\Big)^M, \tag{5.52}$$

и в данном случае $\widehat{\psi}^{+}(x)$, $\widehat{\psi}^{-}(x)$ — фермиевские операторы рождения и уничтожения, $\widehat{P}_0$ — проектор на вакуумный вектор фермионного фоковского пространства. Вообще, для произвольного вторичного квантованного оператора $\widehat{A}$ символ отвечающего ему ультравторично квантованного оператора $\widehat{\widehat{A}}$ в фермионном и бозонном случаях выражается формулой

$$A_{B,F}[b^*(\cdot),b(\cdot),B^*(\cdot),B(\cdot)]=\frac{\mathrm{Sp}(\widehat{\rho}_{B,F}\widehat{A})}{\mathrm{Sp}(\widehat{\rho}_{B,F})}.$$

В пространстве $\mathscr{F}$ вводятся бозонный и фермионный ультравторично квантованные операторы числа частиц:

$$\overline{\overline{N}}_B=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{M=0}^{\infty}(k+2M)\widehat{\Pi}_{k,M}^{\mathrm{Symm}},\qquad \overline{\overline{N}}_F=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{M=0}^{\infty}(k+2M)\widehat{\Pi}_{k,M}^{\mathrm{Asymm}}. \tag{5.53}$$

Соответственно в бозонном случае символ оператора $\widehat{\widehat{N}}_B$ имеет вид

$$N_B = \Bigg\{ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{M=0}^{\infty} \frac{k+2M}{k!M!} \sum_{s_1=0}^{\infty} \dots \sum_{s_k=0}^{\infty} \int \dots \int dx_1 \dots dx_{k+2M}$$

$$\cdot b^*(x_1, s_1) \cdot \ \dots \ \cdot b^*(x_k, s_k) B^*(x_{k+1}, x_{k+2}) \cdot \ \dots \ \cdot B^*(x_{k+2M-1}, x_{k+2M})$$

$$\cdot \operatorname*{Symm}_{x_1 \dots x_{k+2M}} \Big(b(x_1, s_1) \cdot \ \dots \ \cdot b(x_k, s_k) B(x_{k+1}, x_{k+2}) \cdot \ \dots$$

$$\cdot B(x_{k+2M-1}, x_{k+2M}) \Big) \Bigg\}$$

$$\cdot \Bigg\{ \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{M'=0}^{\infty} \frac{1}{k'!M'!} \sum_{s_1'=0}^{\infty} \dots \sum_{s_{k'}'=0}^{\infty} \int \dots \int dz_1 \dots dz_{k'+2M'}$$

$$\cdot b^*(z_1, s_1') \cdot \ \dots \ \cdot b^*(z_{k'}, s_{k'}') B^*(z_{k'+1}, z_{k'+2}) \cdot \ \dots \ \cdot B^*(x_{k'+2M'-1}, x_{k'+2M'})$$

$$\cdot \operatorname*{Symm}_{z_1 \dots z_{k'+2M'}} \Big(b(z_1, s_1') \cdot \ \dots \ \cdot B(z_{k'+2M'-1}, z_{k'+2M'}) \Big) \Bigg\}^{-1}. \tag{5.54}$$

В соответствующей формуле в фермионном случае Symm заменяется на Asymm.

Теперь определим функционал энтропии на пространстве $\mathscr{F}$, то есть каждому вектору $\Phi \in \mathscr{F}$ сопоставим энтропию, равную

$$S_{B,F} = -\operatorname{Sp}(\widehat{R}_{B,F}(\Phi) \ln \widehat{R}_{B,F}(\Phi)),$$

где $\widehat{R}_{B,F}(\Phi)$ — бозонный или фермионный вторично квантованный оператор

$$\widehat{R}_{B,F}(\Phi) = \Bigg\{ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{M=0}^{\infty} \frac{1}{k!M!(k+2M)!}$$

$$\cdot \sum_{s_1=0}^{\infty} \dots \sum_{s_k=0}^{\infty} \int \dots \int dx_1 dx_1' \dots dx_k dx_k' dy_1 dy_1' \dots dy_{2M} dy_{2M}'$$

$$\cdot \widehat{\psi}^+(y_1) \dots \widehat{\psi}^+(y_{2M}) \widehat{\psi}^+(x_1) \dots \widehat{\psi}^+(x_k)$$

$$\cdot \widehat{\mathscr{P}}_0 \widehat{\psi}^-(x_k') \dots \widehat{\psi}^-(x_1') \widehat{\psi}^-(y_{2M}') \dots \widehat{\psi}^-(y_1')$$

$$\cdot \Big(\Phi, \overset{2}{\widehat{b}}{}^+(x_1, s_1) \cdot \ \dots \ \cdot \overset{2}{\widehat{b}}{}^+(x_k, s_k) \overset{2}{\widehat{B}}{}^+(y_1, y_2) \cdot \ \dots \ \cdot \overset{2}{\widehat{B}}{}^+(y_{2M-1}, y_{2M})$$

$$
\cdot \exp\Bigg(-\sum_{s=0}^{\infty} \int dx \overset{2}{\widehat{b}^{+}}(x,s) \overset{1}{\widehat{b}^{-}}(x,s) - \iint dy dy' \overset{2}{\widehat{B}^{+}}(y,y') \overset{1}{\widehat{B}^{-}}(y,y') \Bigg)
$$

$$
\cdot \overset{1}{\widehat{B}^{-}}(y'_{2M-1}, y'_{2M}) \cdot \ldots \cdot \overset{1}{\widehat{B}^{-}}(y'_1, y'_2) \overset{1}{\widehat{b}^{-}}(x'_k, s_k) \cdot \ldots
$$

$$
\cdot \overset{1}{\widehat{b}^{-}}(x'_1, s_1)\Phi \Bigg)\Bigg\} \Big(\Phi, \overline{\overline{\widehat{E}}}_{B,F}\Phi\Big)^{-1}. \tag{5.55}
$$

Здесь, в зависимости от рассматриваемого случая, $\widehat{\psi}^{\pm}(x)$ — бозонные или фермионные фоковские операторы, $\widehat{\mathscr{P}}_0$ — оператор ортогонального проектирования на вакуумный вектор фоковского пространства. Кроме того, введем на пространстве $\mathscr{F}$ функционалы

$$
\mathscr{E}_{B,F} = \frac{(\Phi, \overline{\overline{\widehat{H}}}_{B,F}\Phi)}{(\Phi, \overline{\overline{\widehat{E}}}_{B,F}\Phi)}, \tag{5.56}
$$

которые будем называть фермионной и бозонной внутренней энергией, отвечающей вектору Φ. Будем называть собственными значениями внутренней энергии экстремальные значения функционала $\mathscr{E}_{B,F}$ при дополнительных условиях

$$
S_{B,F} = \text{const}, \qquad \frac{(\Phi, \overline{\overline{\widehat{N}}}_{B,F}\Phi)}{(\Phi, \overline{\overline{\widehat{E}}}_{B,F}\Phi)} = N. \tag{5.57}
$$

Уравнение экстремума функционалов (5.56) при условиях (5.57) может быть приведено к виду

$$
\big(\overline{\overline{\widehat{H}}} + \theta \overline{\overline{\widehat{L}}}(\Phi)\big)\Phi = \lambda \overline{\overline{\widehat{E}}}\Phi, \tag{5.58}
$$

где θ — множитель Лагранжа при условии $S_{B,F} = \text{const}$ (который имеет смысл температуры); множитель Лагранжа, отвечающий второму из условий (5.57), включается в λ в силу коммутации гамильтониана и энтропии с оператором числа частиц, $\overline{\overline{\widehat{L}}}_{B,F}(\Phi)$ — ультраторично квантованный оператор, отвечающий $\ln \widehat{R}(\Phi)$. Уравнение (5.58) является ультраторично квантованным вариантом уравнения (5.33), и их собственные значения совпадают.

Для нахождения асимптотики решений уравнения (5.58) в случае, когда в пределе при $N \to \infty$ при операторах $\widehat{b}^{\pm}(x,s)$, $\widehat{B}^{\pm}(x,y)$

стоит малый параметр $1/N$, положим в функционалах $\mathscr{E}_{B,F}$, $N_{B,F}$ и $S_{B,F}$ операторы $\widehat{b}^+(x,s)$ и $\widehat{b}^-(x,s)$ с — числами $b^*(x,s)$ и $b(x,s)$, соответственно, а операторы $\widehat{B}^+(x,y)$ и $\widehat{B}^-(x,y)$ — $B^*(x,y)$ и $B(x,y)$. Получим из $\mathscr{E}_{B,F}$ и $N_{B,F}$ символы $\mathscr{H}_B$ (5.48) и N_B (5.54) или $\mathscr{H}_F$ и N_F в соответствующем бозонном или фермионном случаях. Из $S_{B,F}$ получим символы энтропии

$$S_{B,F} = -\operatorname{Sp}\left(\frac{\widehat{\rho}_{B,F}}{\operatorname{Sp}\widehat{\rho}_{B,F}}\ln\left(\frac{\widehat{\rho}_{B,F}}{\operatorname{Sp}\widehat{\rho}_{B,F}}\right)\right). \tag{5.59}$$

Минимум символа $\mathscr{H}_F$ при дополнительных условиях $S_F = S$, $N_F = N$ достигается при таких $B(x,y)$, $b(x,s)$, что

$$\frac{\delta\mathscr{H}_F}{\delta b^*(x,s)} - \mu\frac{\delta N_F}{\delta b^*(x,s)} - \theta\frac{\delta S_F}{\delta b^*(x,s)} = 0,$$

$$\frac{\delta\mathscr{H}_F}{\delta B^*(x,y)} - \mu\frac{\delta N_F}{\delta B^*(x,y)} - \theta\frac{\delta S_F}{\delta B^*(x,y)} = 0. \tag{5.60}$$

Эти уравнения заменой переменных приводятся к хорошо известным уравнениям БКШ [8] теории сверхпроводимости. Уравнения БКШ имеют вид

$$\begin{pmatrix} \widehat{G} - \frac{1}{2} & \widehat{R}^+ \\ \widehat{R} & -\widehat{G}^* + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = f_\theta\begin{pmatrix} \widehat{T} & \widehat{V}^+ \\ \widehat{V} & -\widehat{T}^* \end{pmatrix}, \tag{5.61}$$

где $\widehat{G}$, $\widehat{R}$, $\widehat{T}$, $\widehat{V}$ — операторы в пространстве $L_2(\mathbb{T})$, причем $\widehat{T}$ и $\widehat{V}$ выражаются через $\widehat{G}$ и $\widehat{R}$:

$$(\widehat{G}u)(x) = \int dy\, G(x,y)u(y)$$

$$(\widehat{R}u)(x) = \int dy\, R(x,y)u(y)$$

$$(\widehat{T}u)(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta u(x) - \mu u(x) +$$

$$+\int dy\, V(x-y)\left(G(y,y)u(x) + G(y,x)u(y)\right)$$

$$(\widehat{V}u)(x) = \int dy\, V(x-y)R(y,x)u(y),$$

знак $*$ в (5.61) обозначает комплексное сопряжение оператора, а знак $+$ — эрмитово, кроме того, функция $f_\theta(t)$, $t \in \mathbb{R}$ имеет вид

$$f_\theta(t) = \frac{1}{2}\mathrm{th}\left(\frac{t}{2\theta}\right),$$

а μ выражается иэ условия

$$N = \sum_{s=1}^{2} \int dx\, G(x,s,x,s). \tag{5.62}$$

Уравнения (5.61), (5.62) получаются из уравнений (5.60) следующей эаменой переменных:

$$\widehat{G} = (1+\widehat{A}^{\mathrm{tr}})^{-1}\Big(\widehat{A}^{\mathrm{tr}} - \widehat{B}^*(1+\widehat{A})^{-1}\widehat{B}(1+\widehat{A}^{\mathrm{tr}})^{-1}\times$$
$$\times \left(1 - \widehat{B}^*(1+\widehat{A})^{-1}\widehat{B}(1+\widehat{A}^{\mathrm{tr}})^{-1}\right)^{-1}\Big),$$

$$\widehat{R} = -(1+\widehat{A})^{-1}\widehat{B}(1+\widehat{A}^{\mathrm{tr}})^{-1}\left(1 - \widehat{B}^*(1+\widehat{A})^{-1}\widehat{B}(1+\widehat{A}^{\mathrm{tr}})^{-1}\right)^{-1}, \tag{5.63}$$

где $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ — операторы в $L_2(\mathbb{T})$, ядра которых выражаются через функции $b(x,s)$ и $B(x,y)$ следующим образом

$$(\widehat{A}u)(x) = \int dy \sum_{s=1}^{\infty} b(x,s)b^*(y,s)u(y),$$

$$(\widehat{B}u)(x,s) = \int dy\, B(x,y)u(y),$$

а tr обозначает транспонирование.

Часть II

КВАНТОВЫЙ ХАОС

ВВЕДЕНИЕ К ЧАСТИ II

Поскольку энтропия является оператором, то естественно рассматривать такое семейство собственных значений оператора свободной энергии, которое при температуре, равной нулю, превратилось бы в собственные значения уравнения Шредингера. В частности, в те собственные значения, которые отвечают метастабильному состоянию в работе Боголюбова о сверхтекучести [28]. Естественно, они могут быть экстраполированы в собственные значения оператора свободной энергии. Точно также можно определить критерий сверхтекучести Ландау, который при температуре, равной нулю, совпадает с критерием Боголюбова (см. введение). Однако если температура не равна нулю, то можно предполагать возникновение хаотичности, которой нет в работе Боголюбова [28]. Учет этой хаотичности может быть получен методом хаотических фаз. Но мы будем исходить из математических фактов, а не из эвристического метода хаотических фаз. А именно: мы возмутим задачу таким образом, чтобы классический предел был эргодичен и содержал существенно несимметричный потенциал. Затем в асимптотических формулах положим этот потенциал равным нулю. Тогда ответ будет совпадать с ответом, полученным методом хаотических фаз. Следовательно, в одномерном случае спектр такого оператора будет совпадать со спектром Боголюбова, а в многомерном — будет существенно иным. В этой связи проблема квантового хаоса будет играть большую роль при рассмотрении задачи с квантованной свободной энергией.

Такой подход похож на метод квазисредних Боголюбова, когда симметрия задачи снимается возмущением, а затем это возмущение полагается равным нулю. Этому вопросу посвящена данная глава о квантовом хаосе.

Глава 1

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ КВАНТОВЫЙ ХАОС ДЛЯ СИСТЕМ БОЗОНОВ И ФЕРМИОНОВ

Эта глава имеет эвристический характер, ее могут читать и физики.

§ 1. Определение детерминированного квантового хаоса как формального ряда по степеням константы Планка $\hbar$

1.1. Определение квантового хаоса степени q

В начале проведем «гладкое осреднение». Для этого выберем произвольную положительную функцию $\rho_\varepsilon(y) \in C_0^\infty$, равную нулю вне ε-окрестности уровня E, т. е. $\rho_\varepsilon(y) \equiv 0$ для $y \notin [E-\varepsilon, E+\varepsilon]$. Пусть $L(p, x, \hbar) \in C^\infty(R^{2n+1})$ — вейлевский символ оператора $\widehat{L}$: $L(p, x, \hbar) = \mathrm{Smb}_w \widehat{L}$. Рассмотрим среднее квантово-механическое значение, усредненное по энергии,

$$\Phi(\hbar, E, \varepsilon) = \frac{\int \sum\limits_i \rho_\varepsilon(E_i) \Psi_i^*(x) \widehat{L} \Psi_i(x) dx}{\sum\limits_i \rho_\varepsilon(E_i)} \tag{1.1}$$

и «индивидуальное» значение

$$\Phi_i(\hbar) = \int \Psi_i^*(x) \widehat{L} \Psi_i(x) dx. \tag{1.2}$$

Предположим, что существует последовательность E_{i_k} такая, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{\hbar \to 0} \frac{1}{\hbar^{n+1}} \Big\{ \Phi_{i_k}(\hbar) - \sum_{n=0}^{s} \frac{\Phi_\hbar^{(n)}(\hbar, E_{i_k}, \varepsilon)}{n!} \Big\} \tag{1.3}$$

для любого $s \le q$. Б этом случае мы говорим, что последовательность $\Psi_{i_k}(x)$ является *хаотической степени* q. Это определение эквивалентно данному автором в [38].

1.2. Мера квантовой эргодичности

Как известно, если система с гамильтонианом $H(p, x, 0)$ эргодична на уровне энергии E, то среднее значение динамической величины $\phi(p, x)$ имеет вид

$$\iint \phi(p, x)\delta\big(E - H(p, x, 0)\big)dp\,dx = \int \phi\,d\mu.$$

Используя аппроксимацию дельта-функции с помощью гладкой «колоколообразной» функции δ_ε, это среднее можно записать также в виде

$$\int \phi\,d\mu = \lim_{\varepsilon\to 0}\int \phi(p, x)\delta_\varepsilon\big(E - H(p, x, 0)\big)dp\,dx.$$

Наше определение приводит к следующему обобщению понятия меры $d\mu$ в квантовом случае

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int \phi(p, x)\mathrm{Smb}_w\delta_\varepsilon\big(E - H(p, x, \hbar)\big)dp\,dx. \tag{1.4}$$

Заметим,что мы сначала должны разложить $\mathrm{Smb}_w\delta_\varepsilon(E-H(p,x,\hbar))$ по степеням $\hbar$, причем первые члены разложения имеют вид:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Smb}_w\delta_\varepsilon(\widehat{H} - E) = \delta_\varepsilon(H - E)+\\
&+\hbar^2\Big\{\frac{1}{8}\delta_\varepsilon''(H-E)\sum_{jk}\Big[\frac{\partial^2 H}{\partial x_j\partial p_k}\times\frac{\partial^2 H}{\partial x_k\partial p_j} - \frac{\partial^2 H}{\partial x_j\partial x_k}\times\frac{\partial^2 H}{\partial p_j\partial p_k}\Big]+\\
&+\frac{1}{24}\delta_\varepsilon'''(H-E)\sum_{jk}\Big[\frac{\partial H}{\partial p_j}\times\frac{\partial^2 H}{\partial x_j\partial x_k}\times\frac{\partial H}{\partial p_k}-\\
&-2\frac{\partial H}{\partial p_j}\times\frac{\partial^2 H}{\partial x_j\partial p_k}\times\frac{\partial H}{\partial x_k}+\frac{\partial H}{\partial x_j}\times\frac{\partial^2 H}{\partial p_j\partial p_k}\times\frac{\partial H}{\partial x_k}\Big]\Big\}+\hbar^4\dots
\end{aligned} \tag{1.5}$$

1.3. Определение серии

Определение серии зависит от *априорной* константы A, которая является еще одним параметром системы и, в свою очередь, может зависеть от других параметров. В этой связи мы вводим масштаб s, характеризующий уровень грубости. Другими словами, мы преднолагаем, что функция $f(x)$, так же как и ее Фурье-нреобразование, — целые, но заменяем x на безразмерный аргумент x/s. Более того, если A сколь угодно большое, тогда серия определяется в соответствии с параметром s. Говоря точнее, класс рассматриваемых функций удовлетворяет следующему условию: существует константа C такая, что

$$\||x_j|^n f\|_{L_2} \leqslant Cs^n\sqrt{n!}, \qquad \left\|\frac{\partial^n f}{\partial x_j^n}\right\|_{L_2} \leqslant Cs^{-n}\sqrt{n!}. \tag{1.6}$$

Отсюда следует, что серия зависит также от s.

Итак, **определение**. Пусть ψ — ортонормированная собственная функция семейства онераторов L_h, соответствующая конечному значению λ, и нусть ψ' — другая ортонормированная функция. Будем говорить, что ψ' принадлежит A-серии относительно (ψ, λ), если найдется такое f, удовлетворяющее (1.6).

Пример. Рассмотрим уравнение Шредингера для двумерного осциллятора с частотой ω_1 и ω_2. Его спектр имеет вид

$$E_{n,m} = h\omega\Big(n + \frac{1}{2}\Big) + h\omega_2\Big(m + \frac{1}{2}\Big).$$

Пусть $n_1 = [1/h]$ ($[x]$ — наибольшее целое число x) и $m_1 = [2/h]$, $h \to 0$ и нусть ψ — некоторая собственная функция, соответствующая E_{n_1,m_1}.

Пусть $\omega_2 = \pi\omega_1$. Тогда собственные значения E_{n_1+k,m_1+l}, где $|kl| \leqslant \mathrm{const}\cdot A$, и только эти собственные значения принадлежат одной A-серии относительно ψ. Это значит, что вероятность перехода между E_{n_1,m_1} и этими собственными значениями не слишком мала, но достаточна мала для E_{n_1,m_1} и других собственных значений (включая собственное значение, ближайшее к E_{n_1,m_1} при $m/k \to -\pi$). Хотя разность между E_{n_1,m_1} и ближайшими собственными значениями равна $O(h^2)$, осциллятор может иснускать кванты только порядка $O(h)$. Значит, каждая серия состоит из собственных значений, находящихся друг от друга на расстоянии $O(h)$, нронуская все собственные значения норядка $O(h^2)$.

Тенерь введем определение сверхтекучести для симметрического случая и сверхпроводимости для антисимметрического случая («high current»).

Будем говорить, что задача описывает «high current», если существуют (ψ, λ) такие, что μ, принадлежащая соответствующей A-серии, удовлетворяет следующим неравенствам.

1) $\mu - \lambda \geqslant d - \delta(A)$, $d > 0$, $\delta(A) \to 0$ при $A \to \infty$, $N \to \infty$;

2) $(ich/2m)\int\limits_{\Omega}\{\psi\nabla\psi^* - \psi^*\nabla\psi\}\,dx \geqslant \alpha$ для некоторых $\alpha > 0$ и Ω, $\operatorname{mes}\Omega > 0$, где a и $\operatorname{mes}\Omega$ не зависят от A и N.

§ 2. Хаос в слабо неидеальном бозе-газе

2.1. Хаос для решений уравнения Хартри. Интегральное уравнение

Ситуация, когда необходимо изучать асимптотику по числу частиц N в системе, $N \to \infty$, требует более глубокого подхода и уточненного определения квантового хаоса. Для того чтобы понять соответствующую постановку проблемы, достаточно рассмотреть в качестве примера систему из N классических частиц со слабым дальнодействующим потенциалом взаимодействия, т. е. систему, описываемую при $N \to \infty$ уравнением Власова.

Характеристики уравненин Власова приближенно описывают траекторию отдельно взятой частицы. Это означает, что можно выделить следующие два случая:

1) случай, когда исходная задача эргодична, т. е. траектория системы в $6N$-мерном фазовом пространстве эргодична на некотором уровне энергии E_N;

2) случай, когда траектория, описываемая уравнениями характеристик уравнения Власова, эргодична в 6-мерном фазовом пространстве яа собственном уровне энергии, связанном с E_N.

Мы можем подобным образом различать два случая, говоря о квантовом хаосе, а именно, квантовый хаос до перехода к пределу при $N \to \infty$ и квантовый «хаос» «собственных функций» уравнения Хартри для бозонов и системы уранений Хартри–Фока для фермионов. В случае фермионов, даже когда $h = 0$, указанным двум возможностнм будут соответствовать разяые соотношения и разные уравяеяин.

Уравнения нестандартных характеристик, в смысле [41] для системы бозонов, удовлетворяющих уравнению Шрёдингера

$$ih\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \left\{-\sum_{i=1}^{N}\frac{h^2}{2m}\Delta_i + U(x) + \frac{1}{N}\sum_{N\geqslant i>j} V(x_i - x_j)\right\}\Psi, \qquad (1.7)$$

где

$$U(x) \in C^\infty, \quad V(y) \in C^\infty, \quad V(0) = 0,$$

$$\Delta_i = \frac{\partial^2}{\partial x_{i_1}} + \frac{\partial^2}{\partial x_{i_2}} + \frac{\partial^2}{\partial x_{i_3}},\ x_i = (x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}) \in R^3,\ U(x) \in C^\infty,\ V(y) \in C^\infty,$$

могут быть представлены в виде уравнения типа Хартри (называемого также уравнением Гросса–Питаевского) [31]

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + U(x)\Psi + \Psi\int V(x-\zeta)\left|\Psi(\zeta, t)\right|^2 d\zeta. \tag{1.8}$$

Его периодические решения вида

$$\Psi(x, t) = \exp\left(\frac{i\Lambda_n t}{\hbar}\right)\Psi_n(x)$$

удовлетворяют уравнению

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi_n + W_n(x, \hbar)\Psi_n = \Lambda_n\Psi_n, \quad \int\left|\Psi_n(x)\right|^2 dx = 1, \tag{1.9}$$

где «одетый» потенциал $W_n(x, \hbar)$ имеет вид

$$W_n(x, \hbar) = \int V(x-\zeta)\left|\Psi_n(\zeta)\right|^2 d\zeta. \tag{1.10}$$

Если теперь трактовать уравнение типа Хартри (8) как уравнение Шрёдингера с «одетым» потенциалом, т. е. рассматривать случай 2) хаотнческого поведения, не уравнение (6), а уравнеяие (8), то тогда, обобщая естественным образом распределение (1) и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, можно получить следующее интегральное уравнение для «одетого» потенциала:

$$W(x, \hbar, E) =$$

$$= U(x) + \frac{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left[\int V(x-\zeta)\operatorname{Smb}_w\delta_\varepsilon\left(\frac{\widehat{p}^2}{2m} + W(\zeta, \hbar, E) - E\right)d\zeta\, dp + O(\hbar^\infty)\right]}{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left[\int \operatorname{Smb}_w\delta_\varepsilon\left(\frac{\widehat{p}^2}{2m} + W(x, \hbar, E) - E\right)d\zeta\, dp + O(\hbar^\infty)\right]}. \tag{1.11}$$

Будем говорить, что решение уравнений (8)–(9) является *хаотическим степени* q, если решение интегрального уравнения таково, что одетый потенциал (8), имеющий вид

$$W_n(x,\hbar) = W(x,\hbar,\Lambda_n), \tag{1.12}$$

соответствует квантовому хаосу степени q для (8). Легко видеть, что в этом случае система (8)–(9) также выполнена с точностью до $\hbar^{q+1}$.

2.2. Хаос уравнения Шрёдингера для бозонов при числе частиц N, стремящемся к бесконечности

В теории сверхтекучести уравнение (6) рассматривается на торе радиусом L в случае, когда спектр (8) становится непрерывным при $L \sim N^{1/3} \to \infty$. Рассмотрим сначала только этот случай и покажем, что если параметры задачи удовлетворяют соотношению

$$N \gg \frac{ma^2E}{n},$$

где a — эффективный радиус взаимодействия $V(x,y) = V(x-y)$, то, разлагая (1) по степеням $\hbar$ и переходя к пределу при $\epsilon \to 0$, можно вновь прийти к уравнениям (8)–(10).

Если спектр (8) остается дискретным, то соотношения (8)–(10) выполнены при условии

$$V(x,x) = \big(\Delta V(x,y)\big)_{y=x} = 0,$$

только с точностью до $\hbar^5$, т. е. в этом случае степень хаоса может быть не более четырех.

Уравнение нестандартных характеристик, соответствующее температурному случаю или случаю, когда производится осреднение по энергиям в смысле (1), имеет вид

$$\Big(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(x)\Big)\Phi_i(x) + \frac{\sum\limits_j \int dy V(x,y)\sigma(\lambda_j)\Phi_j^*(y)\Phi_j(y)}{\sum\limits_l \sigma(\lambda_l)}\Phi_i(x) +$$

$$+\frac{\int dy V(x,y)\Phi_i(y)\sum \Phi_j^*(y)\Phi_j(x)\sigma(\lambda_j)}{\sum\limits_l \sigma(\lambda_l)} = \lambda_i\Phi_i(x), \tag{1.13}$$

где $\sigma(\zeta)$ — «колоколообразная» функция, стремящаяся к $\delta(\zeta - E)$ при $T \to 0$, E — химический потенциал. Первый член правой части (12) дает уравнения (8)–(11). Второй член может быть записан в виде

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\int \Phi_j^*(y)\Phi_j(x)\sigma(\lambda_j)\Phi_i(y)V(x, y)dy}{\sum_k \sigma(\lambda_k)} = \sigma(\widehat{H})V(\zeta, x)\Phi_i(x)\Big|_{\zeta=x}, \quad (1.14)$$

где $\widehat{H}$ — оператор, имеющий вид

$$\widehat{H}\varphi(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j \int \Phi_j^*(y)\Phi_j(x)\varphi(y), \quad (1.15)$$

а λ_j и $\Phi_j(x)$ — решения уравнения (12).

Более того,

$$\sigma(\widehat{H})\Phi_j(x) = \left[\sigma(\widehat{H}), V(\zeta, x)\right]\Phi_i + V(\zeta, x)\sigma(\widehat{H})\Phi_i(x) =$$
$$= \left[\sigma(\widehat{H}), V(\zeta, x)\right]\Phi_i(x) + V(\zeta, x)\sigma(\lambda_i)\Phi_i(x). \quad (1.16)$$

Коммутатор операторов $\sigma(\widehat{H})$ и $V(\zeta, x)$ может быть выражен через коммутатор $\widehat{H}$ и $V(\zeta, x)$ с помощью операторных методов [14] (число сверху обозначает порядок действия оператора, а шляпки опускаются) следующим образом:

$$\left[V, \sigma(H)\right] = \overset{1}{V}\sigma(\overset{2}{H}) - \overset{2}{V}\sigma(\overset{1}{H}) = \overset{2}{V}\sigma(\overset{3}{H}) - \overset{2}{V}\sigma(\overset{1}{H}) = \overset{2}{V}\left(\sigma(\overset{3}{H}) - \sigma(\overset{1}{H})\right) =$$
$$= \overset{2}{V}\frac{\sigma(\overset{3}{H}) - \sigma(\overset{1}{H})}{\overset{3}{H} - \overset{1}{H}}(\overset{3}{H} - \overset{1}{H}) = \overset{3}{V}(\overset{4}{H} - \overset{2}{H})\frac{\sigma(\overset{5}{H}) - \sigma(\overset{1}{H})}{\overset{5}{H} - \overset{1}{H}} =$$
$$= [\overset{2}{V}, H]\frac{\sigma(\overset{5}{H}) - \sigma(\overset{1}{H})}{\overset{5}{H} - \overset{1}{H}} = [\overset{2}{V}, H]\frac{\sigma(\overset{3}{H}) - \sigma(\overset{1}{H})}{\overset{3}{H} - \overset{1}{H}}. \quad (1.17)$$

Таким образом,

$$\left[V, \sigma(H)\right]\Psi_i = [\overset{2}{V}, H]\frac{\sigma(\overset{3}{H}) - \sigma(\lambda_i)}{\overset{3}{H} - \lambda_i}\Psi_i = \frac{\sigma(H) - \sigma(\lambda_i)}{H - \lambda_i}[V, H]\Psi_i =$$
$$= \left[\frac{\sigma(H) - \sigma(\lambda_i)}{H - \lambda_i}, [V, H]\right]\Psi_i + [V, H]\sigma'_\lambda(\lambda_i)\Psi_i. \quad (1.18)$$

Аналогично, обозначив

$$\sigma_1(H) = \frac{\sigma(H) - \sigma(\lambda_i)}{H - \lambda_i}, \quad V_1 = [V, H], \tag{1.19}$$

будем иметь

$$[\sigma_1(H), V_1]\Psi_i = \left[\frac{\sigma(H) - \sigma(\lambda_i)}{H - \lambda_i}, [V_1, H]\right]\Psi_i + [V_1, H]\sigma'_{1\lambda}(\lambda_i)\Psi_i. \tag{1.20}$$

Этот процесс может быть продолжен по индукции, и каждый новый коммутатор увеличивает порядок по $\hbar$ на единицу.

Выражение $\sigma_\lambda^{(n)}(\lambda_i)/\sum \sigma_\lambda(\lambda_i)$ стремится к нулю при $L \to \infty$.

Если спектр (6) остается дискретным при $L \to \infty$, то в эргодической ситуации разница между точками λ_i будет порядка $\hbar^3$ и, следовательно, $\sum \sigma(\lambda_i) \sim \hbar^{-3}$. Если, кроме того, $V(x, x) = 0$, и $\left[V(x, y)\right]_{x=y} = 0$, то, начиная с члена порядка $O(\hbar^5)$, члены разложения по $\hbar$ делятся на $\varepsilon\left(\sigma_\lambda^{(n)} \sim \frac{1}{\varepsilon^n}\right)$ и не имеют предела при $\varepsilon \to 0$.

Таким образом, мы снова приходим к уравнениям (8) и (10). Тот же результат может быть получен и при произвольном «размазывании» δ-функции (1).

§ 3. Квазиклассические фермионы при $N \to \infty$

3.1. Одиночные, парные (куперовские) и мультипарные фермионы (ядерные снязывания)

Здесь мы рассмотрим случай, при котором спины электронов имеют одинаковую направленность. Общий случай может быть рассмотрен аналогичным образом.

Асимптотика спектра (6) для многих фермионов содержит существенно различные семейства спектральных серий (о понятии спектральных серий см. [41] и § 4). Перный случай, который приводит к системе уравнений Хартри – Фока, соответствует вариационному принципу, при котором решение ищется в виде:

$$\mathrm{Asymm}\, \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)\ldots\varphi_N(x_N) \tag{1.21}$$

(«Asymm» обозначает антисимметризацию по $x_1, \ldots, x_N$; в данном случае это детерминант Слейтера); этот случай соответствует непарным электронам (будем называть их «одиночными» [41]).

Второй случай — пары Купера — соответствует вариационному принципу, при котором число электронов четно ($2N$) и решение ищется в виде

$$\mathrm{Asymm}\,\varphi_1(x_1,\,x_2)\varphi_2(x_3,\,x_4)\varphi_3(x_5,\,x_6)\ldots\varphi_N(x_{2N-1},\,x_{2N}), \qquad (1.22)$$

что соответствует парным («женатым») электронам. Этот случай дает объяснение нвлению сверхпроводимости.

И, наконец, третий случай соответствует ситуации, при которой каждый фермион спарен с другим. Решение может быть представлено в виде произведения $N(N-1)/2$ членов, определяемых с помощью одной антисимметрической функции $\varphi(x,\,y) = -\varphi(y,\,x)$:

$$\varphi(x_1,\,x_2)\varphi(x_1,\,x_3)\varphi(x_1,\,x_4)\ldots\varphi(x_2,\,x_3)\varphi(x_2,\,x_4)\varphi(x_2,\,x_5)\ldots \\ \ldots\varphi(x_{N-1},\,x_N), \quad (1.23)$$

Этот случай, который, возможно, соответствует ндерным взаимодействиям, был рассмотрен автором в [29]. Он соответствует случаю притяжения между частицами и их коллапсу при нулевом уровне энергии в классической механике. «Хаос» на нулевом уровне классической энергии является особой проблемой, которая требует другого определения хаоса и ниже рассматриваться не будет.

Все три случан имеют место и для классических фермионов [41, 30]. Рассмотрим сначала подробнее, что означает классический предельный переход для системы тождественных фермионов [30].

3.2. Фермионы в классической механике

Пусть $\Psi_1(x_1,\,\ldots,\,x_N,\,t)$ — решение уравнения (6), антисимметричного относительно $x_1,\,\ldots,\,x_N, x_i\subset R^3$, и пусть $\Psi_2(x_1,\,\ldots,\,x_N,t)$ — симметричное решение этого уравнения. Сопоставим им функцию распределения Вигнера вида

$$P_w(p_1,\,\ldots,\,p_N,x_1,\,\ldots,\,x_N,t){=}(2\pi\hbar)^{-3N/2}\!\!\int\!\Psi_1\Big(x_1{+}\frac{\zeta_1}{2},\,\ldots,x_N{+}\frac{\zeta_N}{2},t\Big)\times \\ \times\Psi_2^*\Big(x_1-\frac{\zeta_1}{2},\,\ldots,\,x_N-\frac{\zeta_N}{2},\,t\Big)\exp\Big\{\frac{i}{\hbar}\sum_{k=1}^{N}p_k\zeta_k\Big\}d\zeta_1,\,\ldots,\,d\zeta_N. \quad (1.24)$$

Она удовлетворяет хорошо известному уравнению Вигнера. Очевидно, что она антисимметрична относительно перестановок любых пар $(x_i,\,p_i)$ и $(x_j,\,p_j)$, $(i\neq j)$.

Уравнение Вигнера для гладкой функции $\varphi(x_1, \dots, x_N, p_1, \dots, p_N)$ стремится к уравнению Лиувилля, соответствующему функции Гамильтона

$$H = \sum_{i=1}^{N} \Big(\frac{p_i^2}{2m} - U(x_i) \Big) + \sum_{N \geqslant i > j} V(x_i, x_j).$$

Решение задачи Коши для уравнения Вигнера с гладкими антисимметричными начальными данными, не зависящими от $\hbar$, стремится при $\hbar \to 0$ к решению уравнения Лиувилля с такими же начальными данными. Отсюда следует аналогичный факт для распределений.

Предположим теперь, что $\Psi_n(x_1, \dots, x_N)$ — симметрические, а $\Psi'_m(x_1, \dots, x_N)$ — антисимметрические собственные функции оператора Шрёдингера, соответствующие хаосу порядка q. Можно доказать следующее предложение относительно первого члена разложения по $\hbar$.

Пусть α — собственное значение, которое отвечает антисимметрическому собственному распределению $\widetilde{\chi}_\alpha$ оператора Лиувилля $\widehat{L}$,

$$\widehat{L}\Phi = i\{H, \Phi\},$$

($\{\cdot, \cdot\}$ — скобки Пуассона) на многообразии $H(p, x) = E$. Существуют последовательности симметрических и антисимметрических собственных функций $\{\Psi_n\}$ и $\{\Psi'_m\}$ оператора Шрёдингера (6), соответствующие собственным значениям E_n и E'_m, такие, что

1) $E_n \to E$ и $E'_m \to E$ при $n \to \infty$, $m \to \infty$ и $\hbar \to 0$;

2) $E'_m - E_n = \alpha\hbar + O(\hbar^2)$;

3) последовательность функций Вигнера, соответствующая парам Ψ_n и Ψ'_m, является (слабо) сходящейся как последовательность функционалов на пространстве Шварца к распределению $\widetilde{\chi}_\alpha$.

Это означает, что существует последовательность матричных элементов $\hbar$-псевдодифференциального оператора $\widehat{A}$ с символом Вейля $A(p, x) \in C_0^\infty$,

$$\big\{(\Psi_n, \widehat{A}\Psi'_m)\big\}, \tag{1.25}$$

где Ψ_n — симметрические собстненные функции и Ψ'_m — антисимметрические собственные функции оператора (6) такие, что соответствующие им собственные значения E_n и E'_m удовлетворяют условиям

$$n \to \infty, \quad m \to \infty, \quad E_n \to E, \quad E'_m \to E$$

и

$$E'_m - E_n = \alpha\hbar + O(\hbar^2), \quad \hbar \to 0,$$

стремящаяся к выражению

$$\iint A(p, x)\chi_\alpha(p, x)\delta\big(E - H(p, x)\big)dp\,dx, \qquad (1.26)$$

где $\chi_\alpha(p,x)$ — антисимметрическое собственное распределение ограничения оператора Лиувилля $\widehat{L}$ на поверхность уровнн $H(p,x)=E$.

Вычисление поправок по $\hbar$ к оператору Лиунилля приводится в [41]. Б формулу (27) необходимо подставить соответствующие антисимметрические собственные распределения, причем вместо $\delta\big(E - H(p, x)\big)$ должно стоять $\mathrm{Smb}_w\delta(E - \widehat{H})$. Получающееся при этом выражение дает последующие приближения в разложении (24) по степеням $\hbar$.

3.3. Одиночные фермионы при $\hbar \to 0$ и $N \to \infty$

Перейдем теперь к случаю, когда $N \to \infty$. Оказывается, что в случае одиночных фермионов роль хаотизации не настолько значительна, как для бозонов, и пределы не зависят от порядка перехода к пределу яо ε. Следовательно, все зависит от порядка перехода к пределу по $\hbar$ и по N. Поэтому мы сразу рассматриваем уравнения Хартри–Фока, которые получены при произвольной зависимости между $\hbar$ и N, как уравнения нестандартных характеристик для специального квантования, аналогичного бозонному квантованию, проведенного автором в [41].

Пусть функции $\phi_i(x)$, $i \in \{1, \dots, n\}$ являются решениями системы уравнений Хартри–Фока

$$\begin{gathered}\Big(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(x)\Big)\phi_i(x)+ \\ + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\int dyV(x, y)\phi_j^*(y)\big(\phi_j(y)\phi_i(x) - \phi_j(x)\phi_i(y)\big) = \lambda_i\phi_i(x), \\ i = 1, \dots, N; \quad \int dx\phi_i^*(x)\phi_j(x) = \delta_{ij}, \quad \forall i, j, \quad (1.27)\end{gathered}$$

где $\hbar$ — постоянная Планка (мы предполагаем, что она стремится к нулю), $U(x)$ — внешний потенциал, $V(x, y)/N$ — потенциал взаимодействия, $V(x, y) = V(y, x)$. Пусть $f^*(p)$ — решение уравнения

Хартри–Фока для бозонов в импульсном представлении.

$$\Big(\frac{p^2}{2m} + U\Big(-i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\Big)\Big)f^*(p) +$$
$$+\frac{N-1}{N}\int dk f(k)V\Big(-i\hbar\frac{\partial}{\partial p}, -i\hbar\frac{\partial}{\partial k}\Big)f^*(k)f^*(p) = \Omega f^*(p),$$
$$\int dp f^*(p)f(p) = 1. \quad (1.28)$$

Для большей наглядности вместо функций Вигнера будем рассматривать функции

$$u_i(x, p) = \phi_i(x)f^*(p)e^{-\frac{i}{\hbar}px},$$

которые удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$(\lambda_i - \Omega)u_i(x, p) =$$
$$= \Big(\frac{1}{2m}\Big(p - i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\Big)^2 - \frac{p^2}{2m} + U(x) - U\Big(x - i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\Big)\Big)u_i(x, p) +$$
$$+\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\iint dy\,dk\,u_i(y, k)\Big(V(x, y) - V\Big(x - i\hbar\frac{\partial}{\partial p}, y - i\hbar\frac{\partial}{\partial k}\Big)\Big)\times$$
$$\times\big(u_j(y, k)u_i(x, p) - u_j(x, p)u_i(y, k)\big),$$
$$\iint dx\,dp\,u_i^*(x, p)u_j(x, p) = \delta_{ij}. \quad (1.29)$$

Отметим, что при написании окончательного уравнения функции Вигнера оказываются более удобны, потому что они дают симметрическое уравнение, в котором члены нечетной степени по $\hbar$ исчезают.

Положим $\mu_i = (\lambda_i - \Omega)/\hbar$ и запишем систему (28) с точностью до $O(\hbar^1)$:

$$\mu_i u_i(x, p) = i\Big(\frac{\partial U(x)}{\partial x}\frac{\partial}{\partial p} - \frac{p}{m}\frac{\partial}{\partial x}\Big)u_i(x, p) +$$
$$+ i\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\iint dy\,dk\,u_j(y, k)\Big(\frac{\partial V(x, y)}{\partial x}\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial V(x, y)}{\partial y}\frac{\partial}{\partial k}\Big)\times$$
$$\times\big(u_j(y, k)u_i(x, p) - u_j(x, p)u_i(y, k)\big). \quad (1.30)$$

Сумма обменных членов, деленных на N как в (29), так и в любых других приближениях по $\hbar$ системы (28), стремится к нулю, как $O(1/N)$, а остаток стремится при $\hbar \to 0$ и $N \to \infty$ по модулю ($\hbar^\infty$) к тем же уравнениям (8)–(10). Таким образом, в случае одиночных фермионов эти уравнения имеют место всегда, а не только для квантово-хаотических систем. Отметим, что в отличие от обычного случая, при котором сначала рассматривается предельный переход $N \to \infty$, а потом $\hbar \to 0$ (уравнение Томаса–Ферми), здесь сначала осуществляется предельный переход $\hbar \to 0$, а потом $N \to \infty$.

Другими словами, $N \gg 1$ и $N \ll (mL^2E/\hbar^2)$, что означает, что или имеет место квазиклассическая ситуация, или плотность ферми-газа мала.

3.4. Интегральное уравнение хаоса для парных фермионов

Пусть число частиц четно, $2N$. Рассмотрим многовременной формализм и введем собственное время τ и автисимметриэатор в уравнение (6) так, что

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial\tau} = \Big[\frac{i\hbar}{N}\sum_{i=1}^{2N}\frac{\partial}{\partial t_i} - \widehat{H}\Big]\operatorname{Asymm}\Psi = 0,$$

и при $\tau = 0$ и $\tau = \sum t_i$, решение этого уравнения совпадает с антисимметрическим решением уравнения (6).

Пусть пары имеют вид

$$(t_1, x_1; t_2, x_2), (t_3, x_3; t_4, x_4), \ldots, (t_{2N-1}, x_{2N-1}; t_{2N}, x_{2N}).$$

Решение является симметрическим по отношению к перестановкам этих пар. Проквантуем это уравнение вторично по этим парам, формально рассматриваемым как бозоны. Соответствующую систему нестандартных характеристик по аналогии с (7) можно записать в виде одного уравнения на $\Psi(x_1, t_1; x_2, t_2; \tau)$, $\Psi(\cdot, \cdot; \cdot, \cdot; \tau) \in L^2(R^3 \times R \times R^3 \times R)$. После подстановки

$$\Psi(x_1, t_1; x_2, t_2; \tau) = \exp\Big(\frac{i}{\hbar}\lambda(t_1 + t_2)\Big)\Psi(x_1, x_2)$$

и предельного перехода $N \to \infty$, данное уравнение сводится к уравнениям Боголюбова для сверхпроводимости. Если теперь пренебречь, как и выше, в предыдущем разделе, обменным взаимодействием, то в результате получится следующее уравнение для «одетого» потенциала:

$$W(x_1, x_2) = U(x_1) + U(x_2) + 2V(x_1, x_2) + \\ + \frac{2}{R}\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int (V(x_1, y) + V(y, x_2))\mathrm{Smb}_w\delta_\varepsilon\Big(\frac{\widehat{p}_y^2 + \widehat{p}_z^2}{2m} + \\ + W(y, z_2) - E\Big)dy\,dz\,dp_y\,dp_z + O(\hbar^\infty)\right\},$$

где

$$R = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int \mathrm{Smb}_w\delta_\varepsilon\Big(\frac{\widehat{p}_x^2 + \widehat{p}_y^2}{2m} + W(x, y) - E\Big)dx\,dy\,dp_x\,dp_y + O(\hbar^\infty)\right\},$$

E — некоторая константа. (Напомним, что $V(x_1, x_2) = V(x_2, x_1)$.)

Существование одиночных «изолированных» фермионов дает вклад порядка $1/N$, который можно учесть в уравнениях переноса, соответствующих рассматриваемым нестандартным характеристикам.

§ 4. Спектральные серии и температурное распределение при квантовом хаосе

4.1. Постулат температурного распределения для спектральных серий

В [41] были определены спектральные серии, характеризующиеся следующим свойством: матричные элементы перехода от каждого элемента одной из спектральных серий к любому элементу какой-либо другой спектральной серии являются «бесконечно малыми» для любого оператора, имеющего «физический смысл». Под «физически осмысленным» оператором при этом понимается оператор с символом Вейля $H(p, x)$, обладающим некоторыми естественными свойствами.

Простейшим примером (представленным в [39]) является квантовый осциллятор в квазиклассическом приближении с несоизмеримыми частотами. Около классического уровня энергии расстояние между точками спектра порядка $O(\hbar^3)$, а возможные переходы (кванты) — порядка $O(\hbar)$. Это означает, что спектр распадается на серии, в каждой из которых расстояние меду точками спектра порядка $O(\hbar)$. В этом случае матричные элементы перехода от элементов одной спектральной серии к элементам другой для оператора $L(x, \widehat{p})$ с вейлевским символом $L(x, p) \in C^{\infty}$ быстро стремятся к нулю (быстрее, чем любая степень $\hbar$).

Имеет место следующий наиболее важный постулат: статистическая сумма должна вычисляться по одной спектральной серии.

Хотя этот постулат не следует из каких бы то ни было (даже эвристических) физических соображений, он фактически используется физиками, как если бы он был очевиден. Поскольку физиками понятие спектральной серии не вводилось, получается так, что они используют различные правила вычисления статистической суммы системы в зависимости от сорта составляющих систему частиц: суммирование при вычислении статистической суммы производится или только по симметрическим состонниям, что приводит к «бозонам», или только по антисимметрическим состояниям, длн «фермионов», или только по состояниям, соответствующим «квазичастицам» (однако в последнем случае вычисленин проводятсн лишь для нулевой скорости системы). Обсудим последний случай более подробно.

Собственные частоты квазичастиц для симметрических решений уравнения (6) в отсутствие внешнего поля были вычислены Боголюбовым [28]:

$$\omega(k) = -pk + \sqrt{|k|^2\widetilde{V}(|k|) + \frac{\hbar^2|k|^4}{4}}, \quad k = (k_1, k_2, k_3), \tag{1.31}$$

где $\widetilde{V}(k)$ — фурье-образ потенциала взаимодействия $V(x,y)=V(x-y)$, $p/m(p = (p_1, p_2, p_3))$ — скорость движения системы в целом. В этом случае спектр имеет вид

$$\lambda_{p, \{\nu_k\}} = \lambda_0(p) + \sum \omega(k)\nu_k,$$

где ν_k пробегают все целые положительные числа.

Различные значения p соответствуют различным спектральным сериям. Из формулы (30) видно, что для достаточно малых p существуют такие собственные значенин, которые меньше, чем все собственные значения нулевой спектральной серии ($p = 0$). Если следовать Гиббсу, то даже при нулевой скорости ($p = 0$) в статистическую сумму необходимо включить не только собственные значенин нулевой спектральной серии, но и других серий. Тем не менее, на практике так не поступают, и работает сформулированный выше постулат.

4.2. Пуантилистическая картина температурного распределения. Второй постулат для температурного распределения

Можно дать физическое объяснение этому постулату после анализа, смысла температурного распределения и понятия смешанного состояния частицы.

Рассмотрим для определенности бозе-частицу. Под смешанным состоянием такой частицы

$$\sum a_k \Psi_k^*(x)\Psi_k(y) \tag{1.32}$$

можно подразумевать такое состояние, которое является пределом при $N \to \infty$ среднего состояния по большому ансамблю N таких же (тождественных с ней) частиц, в котором $n_k(N)$ частиц находятся в состоянии $\Psi_k(x)$, $\|\Psi_k\| = 1$, причем

$$a_k = \lim_{N\to\infty} \frac{n_k(N)}{N}.$$

Соберем все эти N частиц в одно состояние, описывающееся собственной функцией, имеющей вид произведения одночастичных собственных функций, таким образом, что на уровне $\lambda_k(N)$, соответствующем в пределе $N \to \infty$ вектору $\Psi_k(x)$, будет находиться $n_k(N)$ частиц и т. д. Тем самым, смешанному состонию станится в соответствие чистое состояние системы из N частиц. Отметим, что для ферми-частиц все аналогично с той разницей, что смешанное состояние (31) необходимо нормировать не на единицу, а на среднее число частиц (т. к., в силу принципа Паули, $n_k(N) \leqslant 1$ и, следовательно, отношение $n_k(N)/N$ стремится к нулю при $N \to \infty$, а N-частичные чистые состояния оказываются при этом нормированными на число частиц N).

Если у нас уже имеется задача, в которой исследуется система из N частиц с $N \gg 1$, то вместо смешанных состояний можно рассматривать чистые состоянин, что, как мы видели выше, должно дать такую же картину, как и при использовании обычных смешанных состонний. Будем называть такую картину «пуантилистической». Предельный ответ нри $N \to \infty$ в объеме $V \to \infty$ не зависит от способа, с помощью которого эта картина нарисована, а именно, смешением «цветов» или с помощью «пуантилистической техники».

Однако поскольку предметом нашего рассмотрения является детерминированный хаос и особенно детерминированный хаос для многочастичных систем, то более удобным представляется вовсе избежать вероятностного подхода и рассматривать пуантилистическую картину.

У нас имеется ансамбль взаимодействующих частиц при $N \to \infty$, и для него можно написать распределение по чистым состояниям, учитывая каждую частицу в поле, создаваемом всеми другими частицами (в самосогласованном поле).

Пуантилистическая картина помогает как при некоторых математических доказательствах и оценках (см. [41], где аналогичный результат не может быть получен для смешанного состояния), так и при эвристических рассуждениях, позволяющих обобщить распределение Гиббса и трактовать его в более широком смысле.

В качестве эвристического примера возьмем формулу (30) в одномерном случае при $p = 0$ и, следуя Боголюбову, будем рассматривать задачу на окружности радиусом L. Тогда k будет принимать значения $k_i = (2\pi/L)i$, $i \in Z$. Выберем j_i таким образом, что

$$j_i - j_{i-1} = \left[\exp\left(+\frac{\omega(k_i)\nu_{k_i}}{k_B T}\right)\right], \tag{1.33}$$

где $\{\nu_{k_i}\}$ — некоторый набор целых неотрицательных чисел; в обозначении j_i зависимость от этого набора для краткости записи не указывается; T — температура; k_B — константа Больцмана. Тогда

$$G(x, y) \sum_{\{\nu_{k_i}\}} \sum_{s} \Psi_{j_s}(x)\Psi^*_{j_s}(y) \sim$$

$$\sim \sum_{\nu} \int d\lambda \Psi_\lambda(x)\Psi^*_\lambda(y) \exp\left(-\frac{\omega(\lambda)\nu}{k_B T}\right) = \int \frac{\Psi_\lambda(x)\Psi^*_\lambda(y)}{1 - \exp\left(-\frac{\omega(\lambda)}{k_B T}\right)} d\lambda,$$

где Ψ_j — состояние, соответствующее k_j, и статистическая сумма имеет вид

$$\int G(x, x)dx \sim \int \frac{d\lambda}{1 - \exp\left(-\frac{\omega(\lambda)}{k_B T}\right)}. \tag{1.34}$$

Приведенное вычисление представляется не менее естественным, чем отбор определенных слагаемых в сумме $\operatorname{Sp} \exp\left(-\frac{\widehat{H}}{k_B T}\right)$.

Аналогично, дырочная модель также оказывается не менее естественной; в этой модели на уровни (32) помещаются как частицы, так и дырки. Другими словами, для $T = 0$ все уровни, находящиеся ниже уровня E, заняты, а уровни, находящиеся выше уровня E, свободны. Более того, с ростом температуры частицы размещаются на уровнях (32) и исчезают на уровнях, соответствующих $k_j = -\left(\frac{2\pi}{L}\right)j$ при условии (32).

Наконец, второй постулат оказывается также естественным с точки зрения пуантиллистической картины.

4.3. Энергия хаоса как термодинамическая переменная

Каждому энергетическому уровню (8)–(9) соответствует его собственная спектральная серия и свое собственное множество квазичастиц. Выбор этого уровня, как представляется, определяется внешними условиями. Следовательно, эта переменная имеет смысл термодинамического параметра, *потенциала хаоса*. В дальнейших рассуждениях мы предполагаем, что собственное значение Λ_n уравнений (8)–(9) соответствует квантовому хаосу. Даже для случая, при котором внешнее поле равно нулю, мы предполагаем, что стенки сосуда таковы, что создают этот хаос. С математической точки зрения это означает, что рассматривается последовательность внешних потенциалов U_n такая, что $U_n(x) \to 0$ (при $n \to \infty$) всюду за исключением окрестности стенок, и что хаотическое поведение имеет место при всех n. Тогда оказывается, что если энергия хаоса E не равна нулю, то формулу (30) следует заменить на

$$\frac{N\widetilde{V}(k)k^2}{mc_0L^3}\int\frac{d\vec{n}}{\left(\omega(k)+\sqrt{2E/m}(\vec{n},k)\right)^2-\hbar^2k^4/(4m^2)} = 1, \tag{1.35}$$

где

$$c_0 = \int d\vec{n}, \quad |\vec{n}| = 1, \quad \widetilde{V}(k) = \int dx\exp(-ikx)V(x).$$

Эта простая формула требует весьма сложного математического доказательства [31]–[33]. Для $E = 0$ она с учетом требования $\omega(k) > 0$ дает (34) и для потенциала взаимодействия, стремящегося к нулю, переходит в формулу

$$\omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m} + |k|\sqrt{2E/m}. \tag{1.36}$$

Таким образом, если идеальный газ в сосуде находится в состоянии квантового хаоса с потенциалом хаоса, равным E, то

1) может иметь место сверхтекучесть для скорости v такой, что $mv^2/2 < E$;

2) температура фазового перехода сдвигается, причем в то время, как увеличение скорости уменьшает ее, увеличение степени турбулентности (хаоса) приводит к росту этой температуры.

Из того, что потенциал хаоса является термодинамической переменной, следует, что простейший путь поиска фазовых переходов состоит в изменении этой переменной. Таким образом, в квазиклассической асимптотике, если для $E < E^0$ рассматривается спектральная серия, которая соответствует одной из несимметричных впадин «одетого» потенциала $W(x)$, и если при $E = E^{(0)}$ мы находимся на вершине горба, который отделяет одну впадину от другой, тогда переход через точку $E^{(0)}$, который меняет объем области $X = \{x\colon W(x) = E\}$, означает фазовый переход первого рода. Б случае $2N - 2$ пар фермионов и двух одиночных фермионов гамильтониав нестандартных характеристик отличается от гамильтониана, соответствующего случаю, когда все электроны спарены, на величину $O(1/N)$. Разница $\lambda(E)$ между гамильтонианами зависит от энергии хаоса E. В точке $E^{(1)}$, в которой $\lambda(E)$ меняет свой знак, происходит фазовый переход второго рода, поскольку после перехода гамильтониан, соответствующий двум одиночным фермионам, становится минимальным, т. е. минимум гамильтониана имеет слабый разрыв, который в физике обычно называют удалением «апертуры в спектре». Из того, что, как мы видели выше, температурная зависимость является многозначной, следует, что переход по потенциалу хаоса является более простым показателем существования фазового перехода. После этого можно определить указанные конечные наборы температурных распределений, и экспериментатор должен выбрать из них те, которые наиболее подходят для объяснения изучаемого эффекта.

Глава 2
КВАНТОВАЯ ЭРГОДИЧНОСТЬ[1]

В знаменитой работе Боголюбова [28] о слабо неидеальном бозе-газе было получено известное дисперсионное соотношение для квазичастиц, определяющее так называемую кривую Ландау вида

$$\omega = vk + \sqrt{k^2\widetilde{V}(k) + h^2\frac{k^4}{4}}, \tag{2.1}$$

где $\omega(k)$ — частота квазичастицы, v — скорость, k — волновое число, $\widetilde{V}$ — преобразование фурье-потенциала взаимодействия n-частичной задачи уравнении Шрёдингера

$$ih\frac{d\psi}{dt} = \left(-\frac{h^2}{2}\sum_{i=1}^{n}\Delta_i + \varepsilon\sum_{i\neq j}^{n}V(x^i - x^j)\right)\psi,$$

где n — число частиц ($n \to \infty$), ε — малый параметр порядка $\varepsilon \sim 1/n$, Δ_i — оператор Лапласа для i-й частицы (детали см. в [29, 32, 33, 39]).

Соотношение (2.1) позволило определить критерий Ландау сверхтекучести.

Заметим, что соотношение (2.1) эквивалентно следующему псевдодифференциальному уравнению, определяющему квазичастицы:

$$\omega = i\frac{\partial}{\partial t}, \quad k = i\frac{\partial}{\partial q},$$

т. е.

$$i\frac{\partial}{\partial t}u = iv\frac{\partial u}{\partial q} + \sqrt{\Delta\widetilde{V}\left(i\frac{\partial}{\partial q}\right) + h^2\frac{\Delta^2}{4}}u. \tag{2.2}$$

Естественно, что в случае присутствия внешнего поля соответствующее (2.1) уравнение будет с переменными коэффициентами.

---

[1] Здесь мы следуем результатам работы [32], написанной совместно с А. С. Мищенко.

В этой связи возникла проблема обобщения дисперсионного соотношения (2.1) на случай, когда присутствует внешнее поле, а также его квазиклассического разложения.

Ниже будут получены асимятотический ряд по степеням h и рекуррентные асимптотические формулы для указанной выше задачи, которые в случае, изученном Боголюбовым, приводят к его результатам.

Более того, рассматривается уравнение Шрёдингера–Лапласа–Бельтрами на многообразии с произвольным потенциалом взаимодействия между частицами. Мы получаем псевдодифференциальный оператор $(\operatorname{mod} h^\infty)$ на многообразии, описывающий уровень энергии гамильтониапа

$$w(q, p) - E = 0, \tag{2.3}$$

где w удовлетворяет уравнению самосогласованного поля (см. [31, 34]). В общем случае получаются рекуррентные уравнения. На самом деле, уравнения для квазичастицы являются уравнениями в вариациях для нелинейного уравнения Вигнера, отвечающего уравнению Хартри. Ниже получены как асимптотика стационарного уравнения Вигнера–Хартри, отвечающего уровню энергии (2.3) в эргодической ситуации, так и асимптотика обобщенной собственной функции уравнения в вариациях, соответствующего этому же многообразию уровня энергии.

§ 1. Обозначения и терминология

Рассмотрим фазовое пространство

$$\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n_q \oplus \mathbb{R}^n_p$$

с координатами

$$q = \{q^1, \ldots, q^n\}, \quad p = \{p_1, \ldots, p_n\}$$

и симплектической формой

$$\omega = dp \wedge dq = \sum_{j=1}^{n} dp_j \wedge dp^j.$$

Пусть $H(q, p)$ — функция Гамильтона на фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$. Через

$$\{H, f\} = \sum \Bigl(\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial f}{\partial x^j} - \frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial x^j}\Bigr)$$

обозначим скобку Пуассона, т. е. действие гамильтонова векторного поля, ассоциированного с функцией Гамильтона H, на функцию f.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \{H(q, p), \rho(q, p)\} - \left\{\rho(q, p), \int K(q, p; \xi, \eta)\rho(\xi, \eta)d\xi\,\partial\eta\right\} = 0. \tag{2.4}$$

Пусть $w(q, p)$ — функция, удовлетворяющая следующему уравнению:

$$w(q, p) = H(q, p) + \int K(q, p; \xi, \eta)\delta\big(E - w(\xi, \eta)\big)d\xi\,d\eta. \tag{2.5}$$

Тогда функция $\rho(q, p) = \delta\big(E - w(q, p)\big)$ удовлетворяет уравнению (2.4), поскольку уравнение (2.4) эквивалентно следующему уравнению:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \{w(q, p), \rho(q, p)\} = 0.$$

Уравнение (2.4) заменяем на его квантовый аналог.

Все функции на фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ будем считать зависящими от малого параметра h, причем разлагающимися в формальные ряды по степеням h и с точностью до функций, являющихся $o(h^N)$ для любого N.

Пусть

$$\widehat{f} = f\Big(\overbrace{q^1, \ldots, q^n}^{2}, \overbrace{ih\frac{\partial}{\partial q^1}, \ldots, ih\frac{\partial}{\partial q^n}}^{1}\Big). \tag{2.6}$$

Тогда композиции двух операторов типа (2.6) соответствует функция, формальный ряд по степеням h для которой имеет следующий вид:

$$f * g = \sum_\alpha \frac{(ih)^{|\alpha|}}{\alpha!}\left(\frac{\partial^{|\alpha|}f}{\partial p_\alpha}\right)\left(\frac{\partial^{|\alpha|}g}{\partial q^\alpha}\right), \tag{2.7}$$

где

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \quad \alpha_j \geqslant 0, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n.$$

Обозначим

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{ih}(f * g - g * f). \tag{2.8}$$

Как следствие получаем, что

$$\widehat{\langle f, g\rangle} = \frac{1}{ih}[\widehat{f}, \widehat{g}]. \tag{2.9}$$

Из формул (2.7), (2.9) следует, что операция $*$ превращает пространство $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ функций Гамильтона в ассоциативную (некоммутативную) алгебру, а операция $\langle\cdot,\cdot\rangle$ образует алгебру Ли дифференцирований вышеуказанной ассоциативной алгебры.

Рассмотрим оператор 8, который сопоставляет оператору (2.6) формально-сопряженный оператор:

$$\widehat{\mathbf{S}(f)} = \overline{f}\Bigl(\overbrace{q^1, \ldots, q^n}^{1}, \overbrace{ih\frac{\partial}{\partial q^1}, \ldots, ih\frac{\partial}{\partial q^n}}^{2}\Bigr).$$

Легко проверить, что

$$\mathbf{S}(f)(q, p) = \sum_\alpha \frac{(ih)^{|\alpha|}}{\alpha!}\Bigl(\frac{\partial^{2|\alpha|}\overline{f}}{\partial p_\alpha \partial q^\alpha}\Bigr). \tag{2.10}$$

Из формулы (2.10), в частности, следует, что оператор $\mathbf{S}$ обратим, причем

$$\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}.$$

Обратный оператор вычисляется по той же формуле:

$$\mathbf{S}^{-1}(f)(q, p) = \sum_\alpha \frac{(-ih)^{|\alpha|}}{\alpha!}\Bigl(\frac{\partial^{2|\alpha|} f}{\partial p_\alpha \partial q^\alpha}\Bigr).$$

Более того, имеет место следующее соотношение:

$$\mathbf{S}(f * g) = \mathbf{S}(g) * \mathbf{S}(f).$$

Квантовый аналог уравнения (2.4) имеет следующий вид:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \bigl\langle H(q, p), \rho(q, p)\bigr\rangle - \Bigl\langle \rho(q, p), \int K(q, p; \xi, \eta)\rho(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta\Bigr\rangle = 0. \tag{2.11}$$

Пусть $\rho(q, p)$ — такая функция, что

$$\widehat{\rho}(q, p) = \delta\bigl(\widehat{w}(q, p) - E\bigr).$$

Функция ρ выражается через функцию w с помощью некоторого дифференциального оператора $\mathscr{D}(w)$

$$\rho(q, p) = \mathscr{D}(w). \tag{2.12}$$

Заменим уравнение (2.5) на уравнеяие

$$w(q, p) = H(q, p) + \int K(q, p; \xi, \eta)\mathscr{D}(w)(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta. \tag{2.13}$$

Теорема 1. *Функция $\rho(q, p)$ удовлетворяет уравнению* (2.11).

Доказательство. В самом деле, уравнение (2.12) можно записать в виде

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \left\langle H(q, p) + \int K(q, p; \xi, \eta)\rho(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,\ \rho(q, p)\right\rangle = 0. \tag{2.14}$$

В силу (2.12) и (2.13), уравнение (2.14) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \langle w, \rho\rangle = 0.$$

Поскольку оператор $\widehat{\rho}(q, p)$ есть функция от оператора $\widehat{w}(q, p)$, то

$$\langle w, \rho\rangle = 0.$$

Таким образом, мы можем написать уравнение в вариациях длн нелинейного уравнения (2.11). Пусть $\sigma(q, p)$ обозначает вариацию решения $\rho(q, p)$. Тогда $\sigma(q, p)$ удовлетворяет линейному уравнению

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \langle H(q, p), \sigma(q, p)\rangle - \left\langle \sigma(q, p), \int K(q, p; \xi, \eta)\rho(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta\right\rangle - \\ - \left\langle \rho(q, p), \int K(q, p; \xi, \eta)\sigma(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta\right\rangle = 0$$

или

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \langle w(q, p), \sigma(q, p)\rangle - \left\langle \rho(q, p), \int K(q, p; \xi, \eta)\sigma(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta\right\rangle = 0. \tag{2.15}$$

Будем искать решение уравнения (2.15) в классе функций вида

$$\sigma(q, p) = \rho(q, p) * f(q, p) + g(q, p) * \rho(q, p).$$

Тогда уравнение (2.15) запишется в следующем виде:

$$\frac{\partial(\rho * f + g * \rho)}{\partial t} + \langle w,\, \rho * f + g * \rho\rangle -$$
$$-\left\langle \rho,\, \int K(q,\, p;\, \xi,\, \eta)\big(\rho(\xi,\, \eta) * f(\xi,\, \eta) + g(\xi,\, \eta) * \rho(\xi,\, \eta)\big)d\xi\, d\eta \right\rangle = 0.$$

Положим

$$g = -f + iha.$$

Тогда

$$\rho * \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(-f + iha)}{\partial t} * \rho + \rho * \langle w,\, f\rangle + \big\langle w,\, (-f + iha)\big\rangle * \rho -$$
$$-\rho * \int K(q,\, p;\, \xi,\, \eta)\Big(\big\langle \rho(\xi,\, \eta),\, f(\xi,\, \eta)\big\rangle + a(\xi,\, \eta) * \rho(\xi,\, \eta)\Big)d\xi\, d\eta +$$
$$+ \int K(q,\, p;\, \xi,\, \eta)\Big(\big\langle \rho(\xi,\, \eta),\, f(\xi,\, \eta)\big\rangle + a(\xi,\, \eta) * \rho(\xi,\, \eta)\Big)d\xi\, d\eta\, * \,\rho = 0. \tag{2.16}$$

Обозначим через $\mathscr{V}$ пространство всех функций вида $\rho * f + g * \rho$. Пространство $\mathscr{V}$ может быть представлено в виде суммы

$$\mathscr{V} = \mathscr{V}_l + \mathscr{V}_r,$$

где $\mathscr{V}_l$ — пространство функций вида $\rho * f$, а $\mathscr{V}_r$ — пространство функций вида $g * \rho$.

Таким образом, уравнение (2.16) есть уравнение в пространстве $\mathscr{V}$.

§ 2. Разложение пространства $\mathscr{V}$

Элементы пространства $\mathscr{V}$ однозначно определяются парой функций $(f,\, g)$. Другими словами, имеется эпиморфизм

$$\begin{gathered}\alpha\colon \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \oplus \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \to \mathscr{V},\\ \alpha(f,\, g) = \rho * f + g * \rho.\end{gathered} \tag{2.17}$$

Опишем подпространство пар функций $(f,\, g)$, для которых

$$\rho(q,\, p) * f(q,\, p) + g(q,\, p) * \rho(q,\, p) = 0,$$

т. е. ядро отображения α.

Лемма 1. *Если*

$$\rho(q,\, p) * f(q,\, p) = 0, \tag{2.18}$$

то

$$f(q,\, p) = w(q,\, p) * g(q,\, p).$$

Доказательство. Прежде всего, заметим, что функция $\rho(q, p)$ может быть представлена в виде асимптотического ряда, первые члены которого имеют вид:

$$\rho(q, p) = \delta\big(w(q, p)\big) + ih\delta^{(2)}\big(w(q, p)\big)\frac{\partial w}{\partial p_j}\frac{\partial w}{\partial q^j} + o(h). \tag{2.19}$$

Представим функцию f в виде формального ряда

$$f(q, p) = f_0(q, p) + ihf_1(q, p) + (ih)^2 f_2(q, p) + \ldots$$

Тогда

$$\rho(q, p) * f(q, p) = \rho(q, p)f(q, p) + ih\frac{\partial \rho}{\partial p_j}\frac{\partial f}{\partial q^j} + o(h) = \\ = \delta\big(w(q, p)\big)f_0(q, p) + O(h).$$

Следовательно, функция f_0 делится на w, т. е.

$$f_0(q, p) = g_0(q, p)w(q, p) = g_0(q, p) * w(q, p) + O(h).$$

Значит,

$$f(q, p) = w(q, p) * g_0(q, p) + ihf'(q, p). \tag{2.20}$$

Применяя (2.18) к левой и правой части (2.20), получаем

$$0 = \rho(q, p) * f(q, p) = \rho(q, p) * w(q, p) * g_0(q, p) + ih\rho(q, p) * f'(q, p),$$

следовательно,

$$\rho(q, p) * f'(q, p) = 0.$$

Таким образом, применяя (2.20) к функции f', по индукции получаем, что

$$f(q, p) = w(q, p) * \left(\sum_{j=0}^{n}(ih)^j g_j(q, p)\right) + (ih)^{n+1} f^{(n+1)}(q, p).$$

По симметрии получаем аналогичное утверждение.

Лемма 2. *Если*

$$f(q, p) * \rho(q, p) = 0,$$

то

$$f(q, p) = g(q, p) * w(q, p).$$

Теорема 2. *Пусть гамильтоново векторное поле, определяемое функцией Гамильтона $w(q, p)$ на поверхности уровня $L = \{w(q, p) = 0\} \subset \mathbb{R}^{2n}$, эргодично. Пусть пара функций (f, g) удовлетворяет условию*

$$\rho(q, p) * f(q, p) + g(q, p) * \rho(q, p) = 0. \tag{2.21}$$

Тогда

$$f(q, p) = w(q, p) * f'(q, p), \quad g(q, p) = g'(q, p) * w(q, p)$$

с точностью до постоянных функций.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим функции f и g в виде формальных рядов по степеням h:

$$f(q, p) = f_0(q, p) + ihf_1(q, p) + (ih)^2 f_2(q, p) + \ldots, \tag{2.22}$$

$$g(q, p) = g_0(q, p) + ihg_1(q, p) + (ih)^2 g_2(q, p) + \ldots \tag{2.23}$$

Подставляя выражения (2.22), (2.23) в (2.21) и учитывая (2.19), получаем

$$\begin{aligned} \rho(q, p) * f(q, p) + g(q, p) * \rho(q, p) = \delta\bigl(w(q, p)\bigr)\bigl(f_0(q, p) + g_0(q, p)\bigr) + \\ + ih\Bigl(\delta^{(2)}\bigl(w(q, p)\bigr)\frac{\partial w}{\partial p_j}\frac{\partial w}{\partial q^j}\bigl(f_0(q, p) + g_0(q, p)\bigr) + \\ + \delta^{(1)}\bigl(w(q, p)\bigr)\Bigl(\frac{\partial w}{\partial p_j}\frac{\partial f_0}{\partial q^j} + \frac{\partial g_0}{\partial p_j}\frac{\partial w}{\partial q^j}\Bigr) + \\ + \delta\bigl(w(q, p)\bigr)\bigl(f_1(q, p) + g_1(q, p)\bigr)\Bigr) + o(ih). \end{aligned} \tag{2.24}$$

Приравнивая к нулю член при нулевой степени по h ($h = 0$), получаем, что

$$\delta\bigl(w(q, p)\bigr)\bigl(f_0(q, p) + g_0(q, p)\bigr) = 0,$$

что означает

$$\bigl(f_0(q, p) + g_0(q, p)\bigr) = w(q, p)u(q, p),$$

т. е.

$$g_0(q, p) = w(q, p)u(q, p) - f_0(q, p). \tag{2.25}$$

Тогда член при первой степени по h в формуле (2.24) примет, с учетом (2.25), следующий вид

$$
\begin{gathered}
-\delta^{(1)}\big(w(q,p)\big)\frac{\partial w}{\partial p_j}\frac{\partial w}{\partial q^j}u(q,p)+\\
+\delta^{(1)}\big(w(q,p)\big)\Big(\frac{\partial w}{\partial p_j}\frac{\partial f_0}{\partial q^j}-\frac{\partial f_0}{\partial p_j}\frac{\partial w}{\partial q^j}+\frac{\partial w}{\partial p_j}\frac{\partial w}{\partial q^j}u(q,p)+ \qquad (2.26)\\
+w(q,p)\frac{\partial u}{\partial p_j}\frac{\partial w}{\partial q^j}u(q,p)\Big)+\delta\big(w(q,p)\big)\big(f_1(q,p)+g_1(q,p)\big)+o(ih).
\end{gathered}
$$

Приравнивая в (2.26) члены при $\delta^{(1)}$, получаем

$$
\frac{\partial w}{\partial p_j}\frac{\partial f_0}{\partial q^j}-\frac{\partial f_0}{\partial p_j}\frac{\partial w}{\partial q^j}=0.
$$

По предположению теоремы, динамический поток, задаваемый функцией Гамильтона w, эргодичен. Следовательно, функция f_0 на подмногообразии L постоянна. Без ограничения общности будем считать, что функция f в некоторой точке подмногообразия обращается тождественно по h в нуль. В этом случае получаем, что

$$
\begin{aligned}
f_0(q,p)&=w(q,p)u_0(q,p),\\
g_0(q,p)&=w(q,p)v_0(q,p).
\end{aligned}
$$

Значит,

$$
\begin{aligned}
f(q,p)&=w(q,p)*u_0(q,p)+ihf'(q,p),\\
g(q,p)&=v_0(q,p)*w(q,p)+ihg'(q,p),
\end{aligned}
$$

и, следовательно, для пары функций (f',g') тоже выполнены условия теоремы. Применяя индукцию по степеням h, получаем искомое представление функций (f,g).

§ 3. Разложение функций по степеням w

Согласно теореме 2 уравнение (16) разлагается в два уравнения:

$$
\begin{gathered}
\rho*\Big(\frac{\partial f}{\partial t}+\langle w,f\rangle-\int K(q,p;\xi,\eta)\big(\langle\rho(\xi,\eta),f(\xi,\eta)\rangle+\\
+a(\xi,\eta)*\rho(\xi,\eta)\big)d\xi\,d\eta\Big)=c\rho, \qquad (2.27)
\end{gathered}
$$

$$\left(\frac{\partial(-f+iha)}{\partial t}+\langle w,\,(-f+iha)\rangle+\int K(q,\,p;\,\xi,\,\eta)\big(\langle\rho(\xi,\,\eta),\,f(\xi,\,\eta)\rangle+\right.$$
$$\left.+\,a(\xi,\,\eta)*\rho(\xi,\,\eta)\big)d\xi\,d\eta\right)*\rho=-\,c\rho. \quad (2.28)$$

Уравнение (2.27) есть уравнение в пространстве $\mathscr{V}_l$, в то время как уравнение (2.28) — уравнение в пространстве $\mathscr{V}_r$. Таким образом, требуется описать пространства $\mathscr{V}_l$, $\mathscr{V}_r$ и уравнения (2.27), (2.28) в терминах пространства функций на подмногообразии

$$L=\{w(q,\,p)=0\}\subset\mathbb{R}^{2n}.$$

Пусть

$$\mathbf{R}\colon \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})\to\mathscr{C}^\infty(L) \quad (2.29)$$

есть оператор ограничения на подмногообразие L, а $\mathbf{L}$ — такой проектор

$$\mathbf{L}\colon \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}\to\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}),$$

что

$$\mathbf{RL}=\mathbf{R} \quad (2.30)$$

и

$$\mathbf{L}(w\,f)=0. \quad (2.31)$$

В частности, это значит, что проектор $\mathbf{L}$ разлагается в композицию

$$\mathbf{L}=\mathbf{DR}$$

для некоторого оператора

$$\mathbf{D}\colon \mathscr{C}^\infty(L)\to\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}). \quad (2.32)$$

Очевидно, что

$$\mathbf{RD}=1.$$

Следовательно,

$$\mathbf{R}(\mathbf{1}-\mathbf{DR})=\mathbf{0}.$$

Значит, существует такой оператор $\mathbf{I}$, что

$$\mathbf{I}(f)=\frac{1}{w}(\mathbf{1}-\mathbf{L})(f).$$

Полагая

$$\mathbf{U}(g)=w\cdot g-w*g,$$
$$\mathbf{V}(g)=w\cdot g-g*w,$$

получаем разложения

$$\dot{f} = \sum_{k=0}^{n} (w^{*k} *)\widetilde{\mathbf{P}}_k(f) + \big(w^{*(n+1)} *\big)\widetilde{\mathbf{P}}'_n(f), \tag{2.33}$$

$$f = \sum_{k=0}^{n} (* \, w^{*k})\widetilde{\mathbf{Q}}_k(f) + \big(* \, w^{*(n+1)}\big)\widetilde{\mathbf{Q}}'_n(f), \tag{2.34}$$

где

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbf{P}}_k &= \mathbf{L}(\mathbf{1} - \mathbf{UI})^{-1}\big(\mathbf{I}(\mathbf{1} - \mathbf{UI})^{-1}\big)^{k+1},\\
\widetilde{\mathbf{P}}'_k &= \big(\mathbf{I}(\mathbf{1} - \mathbf{UI})^{-1}\big)^{k},\\
\widetilde{\mathbf{Q}}_k &= \mathbf{L}(\mathbf{1} - \mathbf{VI})^{-1}\big(\mathbf{I}(\mathbf{1} - \mathbf{VI})^{-1}\big)^{k},\\
\widetilde{\mathbf{Q}}'_k &= \big(\mathbf{I}(\mathbf{1} - \mathbf{VI})^{-1}\big)^{k+1}.
\end{aligned}$$

Оператор $\mathbf{I}$ удовлетворяет соотношениям

$$\begin{gathered}
w\mathbf{I}(f) = (\mathbf{1} - \mathbf{L})(f),\\
\mathbf{I}(w\,f) = f.
\end{gathered}$$

Следовательно, операторы

$$\mathbf{P}_k = (w^{*k} *)\widetilde{\mathbf{P}}_k$$

являются проекторами, причем

$$\mathbf{P}_l\mathbf{P}_k = 0 \text{ при } l \neq k, \quad \mathbf{P}_k\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_k.$$

В самом деле, имеем следующие соотношения:

$$\begin{gathered}
\mathbf{IL} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{L}w = 0, \quad w * = w - \mathbf{U},\\
w\mathbf{I} = \mathbf{1} - \mathbf{L}, \quad \mathbf{I}w = \mathbf{1}.
\end{gathered}$$

Значит,

$$\mathbf{I}(w *) = \mathbf{1} - \mathbf{IU},$$

т. е.

$$(\mathbf{1} - \mathbf{IU})^{-1}\mathbf{I}(w *) = \mathbf{1}$$

или

$$(\mathbf{1} - \mathbf{UI})^{-1}(w *) = w.$$

Тогда

$$\mathbf{P}_k\mathbf{P}_s=(w\,*)^k\mathbf{L}(\mathbf{1}-\mathbf{UI})^{-1}\big((\mathbf{1}-\mathbf{IU})^{-1}\mathbf{I}\big)^k(w\,*)^s\mathbf{L}(\mathbf{1}-\mathbf{UI})^{-1}\big((\mathbf{1}-\mathbf{IU})^{-1}\mathbf{I}\big)^s.$$

Пусть $k > s$. Тогда

$$\mathbf{P}_k\mathbf{P}_s=(w\,*)^k\mathbf{L}(\mathbf{1}-\mathbf{UI})^{-1}\big((\mathbf{1}-\mathbf{IU})^{-1}\mathbf{I}\big)^{k-s}\mathbf{L}(\mathbf{1}-\mathbf{UI})^{-1}\big((\mathbf{1}-\mathbf{IU})^{-1}\mathbf{I}\big)^s,$$

т. е.

$$\mathbf{P}_k\mathbf{P}_s=(w\,*)^k\mathbf{L}(\mathbf{1}-\mathbf{UI})^{-1}\big((\mathbf{1}-\mathbf{IU})^{-1}\mathbf{I}\big)^{k-s-1}\times \\ \times(\mathbf{1}-\mathbf{IU})^{-1}\mathbf{IL}(\mathbf{1}-\mathbf{UI})\big((\mathbf{1}-\mathbf{IU})^{-1}\mathbf{I}\big)^s=0.$$

Пусть $k < s$. Тогда

$$\mathbf{P}_k\mathbf{P}_s=(w\,*)^k\mathbf{L}(\mathbf{1}-\mathbf{UI})^{-1}(w\,*)^{s-k}\mathbf{L}(\mathbf{1}-\mathbf{UI})^{-1}\big((\mathbf{1}-\mathbf{IU})^{-1}\mathbf{I}\big)^s,$$

т. е.

$$\mathbf{P}_k\mathbf{P}_s=(w\,*)^k\mathbf{L}w(w\,*)^{s-k-1}\mathbf{L}(\mathbf{1}-\mathbf{UI})^{-1}\big((\mathbf{1}-\mathbf{IU})^{-1}\mathbf{I}\big)^s=0.$$

Если же $k = s$, то

$$\mathbf{P}_k\mathbf{P}_k=(w\,*)^k\mathbf{L}(\mathbf{1}-\mathbf{UI})^{-1}\mathbf{L}(\mathbf{1}-\mathbf{UI})^{-1}\big((\mathbf{1}-\mathbf{IU})^{-1}\mathbf{I}\big)^s= \\ =(w\,*)^k\mathbf{LL}(\mathbf{1}-\mathbf{UI})^{-1}=\mathbf{P}_k.$$

То же самое касается и проекторов $\mathbf{Q}_k$.

Заметим, что при $k = 0$ имеем

$$\widetilde{\mathbf{P}}_0=\mathbf{P}_0,\quad \widetilde{\mathbf{Q}}_0=\mathbf{Q}_0.$$

Таким образом, для построения разложений (2.33) и (2.34) достаточно построить проектор $\mathbf{L}$, удовлетворяющий условиям (2.30), (2.31). Для этого рассмотрим трубчатую окрестность $W \supset L$, например, $W\big\{|w| < \varepsilon\big\}$. Пусть $\varphi = \varphi(w)$ — функция, равная единице в окрестности нуля и носитель которой лежит в интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Для достаточно малого α окрестность W ретрагируется на подмногообразие L, т. е. существует гладкое отображение

$$\psi\colon W \to L,$$

постоянное на подмногообразии L. Положим

$$\mathbf{L}(f) = \varphi\big(w(q, p)\big)\mathbf{R}(f) \circ \psi(p, q). \tag{2.35}$$

Второй сомножитель в (2.35) определен не всюду, а только в окрестности W, однако первый сомножитель имеет носитель внутри W, так что правая часть (2.35) корректно определена. Условие (2.30) выполняется автоматически, поскольку функция φ равна единице на подмногообразии L, а ψ постоянно на L. Условие (2.31) тоже выполнено, поскольку $\mathbf{R}(w\, f) = 0$.

Разложения (2.33) и (2.34) показывают, что ядро отображения (2.17) на каждом слагаемом описывается соответствующим проектором $\widetilde{\mathbf{P}}_0$ или $\widetilde{\mathbf{Q}}_0$. Именно, если

$$\alpha_l \colon \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \to \mathscr{V}_l, \quad \alpha_l(f) = \rho * f,$$
$$\alpha_r \colon \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \to \mathscr{V}_r, \quad \alpha_r(g) = g * \rho$$

— ограничения отображения (2.17), то

$$\operatorname{Ker} \alpha_l = \operatorname{Ker} \mathbf{P}_0, \quad \operatorname{Ker} \alpha_r = \operatorname{Ker} \mathbf{Q}_0.$$

§ 4. Редукция уравнений на подмногообразие L

Таким образом, уравнения (2.27) и (2.28) можно переписать в виде системы уравнений на подмногообразии L:

$$\mathbf{RP}_0\Big(\mathbf{D}\frac{\partial f}{\partial t} + \langle w, \mathbf{D}f\rangle - \int K(q, p; \xi, \eta)\big(\langle \rho(\xi, \eta), \mathbf{D}f(\xi, \eta)\rangle + \\ + \mathbf{D}a(\xi, \eta) * \rho(\xi, \eta)\big)d\xi\, d\eta\Big) = c, \tag{2.36}$$

$$\mathbf{RQ}_0\Big(\mathbf{D}\frac{\partial(-f + iha)}{\partial t} + \langle w, \mathbf{D}(-f + iha)\rangle + \\ + \int K(q, p; \xi, \eta)\big(\langle \rho(\xi, \eta), \mathbf{D}f(\xi, \eta)\rangle + \mathbf{D}a(\xi, \eta) * \rho(\xi, \eta)\big)d\xi\, d\eta\Big) = -c. \tag{2.37}$$

Уравнение (2.28) эквивалентно следующему уравнению:

$$\rho * \mathbf{S}\Big(\frac{\partial(-f + iha)}{\partial t} + \langle w, (-f + iha)\rangle + \\ + \int K(q, p; \xi, \eta)\big(\langle \rho(\xi, \eta), f(\xi, \eta)\rangle + a(\xi, \eta) * \rho(\xi, \eta)\big)d\xi\, d\eta\Big) = -c\rho.$$

Тогда с помощью проектора $\mathbf{P}_0$ уравнения (2.27) и (2.28) эквивалентны следующим уравнениям:

$$\mathbf{P}_0\Big(\frac{\partial f}{\partial t} + \langle w,\, f\rangle - \int K(q,\, p;\, \xi,\, \eta)\big(\langle \rho(\xi,\, \eta),\, f(\xi,\, \eta)\rangle + \\ + a(\xi,\, \eta) * \rho(\xi,\, \eta)\big)d\xi\, d\eta\Big) = c, \quad (2.38)$$

$$\mathbf{P}_0\mathbf{S}\Big(\frac{\partial(-f + iha)}{\partial t} + \langle w,\, (-f + iha)\rangle + \\ + \int K(q,\, p;\, \xi,\, \eta)\big(\langle \rho(\xi,\, \eta),\, f(\xi,\, \eta)\rangle + a(\xi,\, \eta) * \rho(\xi,\, \eta)\big)d\xi\, d\eta\Big) = -c. \quad (2.39)$$

Или

$$\mathbf{P}_0\Big(\frac{\partial f}{\partial t} + \langle w,\, f\rangle - \int K(q,\, p;\, \xi,\, \eta)\big(\langle \rho(\xi,\, \eta),\, f(\xi,\, \eta)\rangle + \\ a(\xi,\, \eta) * \rho(\xi,\, \eta)\big)d\xi\, d\eta\Big) = c,$$

$$\overline{\mathbf{P}_0\mathbf{S}_0}\Big(\frac{\partial(-f + iha)}{\partial t} + \langle w,\, (-f + iha)\rangle + \\ + \int K(q,\, p;\, \xi,\, \eta)\big(\langle \rho(\xi,\, \eta),\, f(\xi,\, \eta)\rangle + a(\xi,\, \eta) * \rho(\xi,\, \eta)\big)d\xi\, d\eta\Big) = -c.$$

Уравнения (2.38) и (2.39) можно ограничить на функции, определенные на подмногообразии L с помощью вложения (2.32):

$$\mathbf{R}\mathbf{P}_0\Big(\frac{\partial \mathbf{D}f}{\partial t} + \langle w,\, \mathbf{D}f\rangle - \\ - \int K(q,\, p;\, \xi,\, \eta)\big(\langle \rho(\xi,\, \eta),\, \mathbf{D}f(\xi,\, \eta)\rangle + \mathbf{D}a(\xi,\, \eta) * \rho(\xi,\, \eta)\big)d\xi\, d\eta\Big) = c,$$

$$\mathbf{R}\mathbf{P}_0\mathbf{S}\Big(\frac{\partial(-\mathbf{D}f + ih\mathbf{D}a)}{\partial t} + \langle w,\, (-\mathbf{D}f + ih\mathbf{D}a)\rangle + \\ + \int K(q,\, p;\, \xi,\, \eta)\big(\langle \rho(\xi,\, \eta),\, \mathbf{D}f(\xi,\, \eta)\rangle + \mathbf{D}a(\xi,\, \eta) * \rho(\xi,\, \eta)\big)d\xi\, d\eta\Big) = -c. \quad (2.40)$$

Если оператор $\mathbf{S}$ сохраннет подпространство

$$\operatorname{Im}\mathbf{L} = \operatorname{Im}\mathbf{D} \subset \mathscr{C}^{\infty}(\mathbb{R}^{2n}),$$

то уравнение (2.39) можно записать в виде

$$\mathbf{RSP}_0\mathbf{S}\Big(\frac{\partial(-\mathbf{D}f + ih\mathbf{D}a)}{\partial t} + \langle w,\, (-\mathbf{D}f + ih\mathbf{D}a)\rangle +$$
$$+ \int K(q,\, p;\, \xi,\, \eta)\big(\langle \rho(\xi,\, \eta),\, \mathbf{D}f(\xi,\, \eta)\rangle + \mathbf{D}a(\xi,\, \eta) * \rho(\xi,\, \eta)\big)d\xi\, d\eta\Big) = -c$$

или

$$\mathbf{RSP}_0\mathbf{S}\Big(\frac{\partial(-\mathbf{D}f + ih\mathbf{D}a)}{\partial t} + \langle w,\, (-\mathbf{D}f + ih\mathbf{D}a)\rangle +$$
$$+ \int K(q,\, p;\, \xi,\, \eta)\big(\langle \rho(\xi,\, \eta),\, \mathbf{D}f(\xi,\, \eta)\rangle + \mathbf{D}a(\xi,\, \eta) * \rho(\xi,\, \eta)\big)d\xi\, d\eta\Big) = -c. \tag{2.41}$$

Таким образом, уравнения (2.40) и (2.41) после упрощений примут вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{RP}_0\Big(\langle w,\, \mathbf{D}f\rangle -$$
$$- \int K(q,\, p;\, \xi,\, \eta)\big(\langle \rho(\xi,\, \eta),\, \mathbf{D}f(\xi,\, \eta)\rangle + \mathbf{D}a(\xi,\, \eta) * \rho(\xi,\, \eta)\big)d\xi\, d\eta\Big) = c,$$
$$\frac{\partial(-f + iha)}{\partial t} + \mathbf{RSP}_0\mathbf{S}\Big(\langle w,\, (-\mathbf{D}f + ih\mathbf{D}a)\rangle +$$
$$+ \int K(q,\, p;\, \xi,\, \eta)\big(\langle \rho(\xi,\, \eta),\mathbf{D}f(\xi,\, \eta)\rangle + \mathbf{D}a(\xi,\, \eta) * \rho(\xi,\, \eta)\big)d\xi\, d\eta\Big) = -c.$$

Прибавляя первое уравнение ко второму, получаем

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \mathbf{R}\frac{1}{ih}(\mathbf{P}_0 - \mathbf{SP}_0\mathbf{S})\langle w,\, \mathbf{D}f\rangle + \mathbf{RSP}_0\mathbf{S}\langle w,\, \mathbf{D}a\rangle -$$
$$- \mathbf{R}\frac{1}{ih}(\mathbf{P}_0 - \mathbf{SP}_0\mathbf{S})\Big(\int K(q,\, p;\, \xi,\, \eta)\big(\langle \rho(\xi,\, \eta),\, \mathbf{D}f(\xi,\, \eta)\rangle +$$
$$+ \mathbf{D}a(\xi,\, \eta) * \rho(\xi,\, \eta)\big)d\xi\, d\eta\Big) = 0.$$

§ 5. Случай квадратичной функции Гамильтона

Допустим, что функция Гамильтона w имеет вид

$$w = \frac{1}{2}|p|^2 + u(q) - E = \frac{1}{2}\big(|p|^2 - p_0^2(q)\big),$$

а ядро интегральной части имеет вид

$$K(q,\,p;\,\xi,\,\eta) = K(q-\xi). \tag{2.42}$$

В этом случае в качестве оператора $\mathbf{D}$ можно взять онератор продолжения функции с многообразия L до функции на фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ биоднородной степени нуль по переменным $(p,\,h)$. Более широко рассмотрим подпространства $H_k^b \subset \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, состоящие из функций, однородных степени k:

$$f(q,\,\lambda p,\,\lambda h) = \lambda^k f(q,\,p,\,h), \quad \lambda > 0.$$

Очевидно, что ограничение оператора L на подпространство H_k^b

$$\mathbf{L}\big|_{H_k^b} : H_k^b \to \mathscr{C}^\infty(L)$$

является изоморфизмом. Обозначим через

$$L_k^b : \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \to \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$$

проектор на подпространство H_k вдоль ядра $\operatorname{Ker}\mathbf{R}$ (см. (2.29)). Очевидно, что

$$L_k^b(f)(q,\,p,\,h) = f\Big(q,\,p\frac{p_0}{|p|},\,h\frac{p_0}{|p|}\Big)\Big(\frac{p_0}{|p|}\Big)^k$$

или

$$L_k^b(f) = L_0^b(f)\Big(\frac{p_0}{|p|}\Big)^k.$$

Также очевидно, что имеет место следующее соотношение:

$$L_k^b(fg) = L_\alpha^b(f)L_\beta^b(g) \quad \text{для} \quad \alpha+\beta = k.$$

Пусть $K_l = \operatorname{Ker}\mathbf{P}_0$. Для любого k имеет место разложение

$$\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}) = H_k^b \oplus K_l.$$

Наконец, рассмотрим проекцию

$$\mathbf{P}_{k,\,s}^b : H_k^b \to H_{k+s}^b$$

вдоль подпространства K_l.

Теорема 3. *Пусть w — произвольная функция. Тогда проекция*

$$\mathbf{P}^b_{k,1}\colon H^b_k \to H^b_{k+1}$$

не зависит от номера k.

Доказательство. Пусть $f \in H^b_k$, т. е.

$$f(q,p,h) = \Big(\frac{p_0}{|p|}\Big)^k g(q,p,h), \quad g \in H^b_0.$$

Тогда

$$f = \frac{|p|}{p_0} f + \Big(1 - \frac{|p|}{p_0}\Big) f = \frac{|p|}{p_0} f + w \frac{2}{p_0\big(|p| + p_0\big)} f =$$

$$= \frac{|p|}{p_0} f + w * \frac{2}{p_0\big(|p|+p_0\big)} f - \Big(\sum_{|\alpha|\geqslant 1} \frac{(ih)^{|\alpha|}}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} w}{(\partial p)^\alpha} \frac{\partial^{|\alpha|}}{(\partial q)^\alpha}\Big)\Big(\frac{2}{p_0\big(|p|+p_0\big)} f\Big) =$$

$$= \frac{|p|}{p_0} f + \sum_{|\alpha|\geqslant 0} h_\alpha(q,p,h) \frac{\partial^\alpha f}{\partial q^\alpha} + w * g_1.$$

Функции $h_\alpha(q,p,h) = O(h)$ не зависят от номера k, а

$$\frac{\partial^\alpha f}{\partial q^\alpha} \in H^b_k.$$

Далее,

$$h_\alpha(q,p,h) \frac{\partial^\alpha f}{\partial q^\alpha} = L^b_{k+1}\Big(h_\alpha(q,p,h) \frac{\partial^\alpha f}{\partial q^\alpha}\Big) +$$

$$+ w \frac{1}{w}(1 - L^b_{k+1})\Big(h_\alpha(q,p,h) \frac{\partial^\alpha f}{\partial q^\alpha}\Big) = L^b_1\big(h_\alpha(q,p,h)\big) L^b_k\Big(\frac{\partial^\alpha f}{\partial q^\alpha}\Big) +$$

$$+ w \frac{1}{w}\Big(\big(h_\alpha(q,p,h) \frac{\partial^\alpha f}{\partial q^\alpha} - L^b_1\big(h_\alpha(q,p,h)\big) L^b_k\Big(\frac{\partial^\alpha f}{\partial q^\alpha}\Big)\Big) =$$

$$= L^b_1\big(h_\alpha(q,p,h)\big) \frac{\partial^\alpha f}{\partial q^\alpha} + w \frac{h_\alpha(q,p,h) - L_1\big(h_\alpha(q,p,h)\big)}{w} \frac{\partial^\alpha f}{\partial q^\alpha} =$$

$$= L^b_1\big(h_\alpha(q,p,h)\big) \frac{\partial^\alpha f}{\partial q^\alpha} + w * \frac{h_\alpha(q,p,h) - L_1\big(h_\alpha(q,p,h)\big)}{w} \frac{\partial^\alpha f}{\partial q^\alpha} -$$

$$-\left(\sum_{|\alpha|\geqslant 1}\frac{(ih)^{|\alpha|}}{\alpha!}\frac{\partial^{|\alpha|}w}{(\partial p)^{\alpha}}\frac{\partial^{|\alpha|}}{(\partial q)^{\alpha}}\right)\times\left(\frac{h_{\alpha}(q,p,h)-L_1\big(h_{\alpha}(q,p,h)\big)}{w}\frac{\partial^{\alpha}f}{\partial q^{\alpha}}\right)=$$

$$=L_1^b\big(h_{\alpha}(q,p,h)\big)\frac{\partial^{\alpha}f}{\partial q^{\alpha}}+\sum_{|\alpha|\geqslant 0}h_{\alpha}^{(2)}(q,p,h)\frac{\partial^{\alpha}f}{\partial q^{\alpha}}+w*g_2,$$

причем $h_{\alpha}^{(2)}(q,p,h)=O(h^2)$ и не зависят от номера k. Для завершения доказательства теоремы необходимо продолжить разложение индукцией по степеням k.

Следствие 1. *Справедливо следующее равенство:* $\mathbf{P}_{k,2}^b = (\mathbf{P}_{k,1}^b)^2$.

Теорема 4. *Проекция* $\mathbf{P}_{k,2}^b\colon H_k^b\to H_{k+2}^b$ *задается формулой*

$$\mathbf{P}_{k,2}^b=|p|^2(1+D)\frac{1}{p_0^2},$$

где

$$D=\frac{2ih}{|p|^2}(p,\nabla_q)+\frac{(ih)^2}{|p|^2}(\nabla_q,\nabla_q).$$

Доказательство. Пусть $f\in H_k^b$,

$$f(q,p,h)=\left(\frac{|p|}{p_0}\right)^k g(q,p,h),\quad g\in H_0^b.$$

Тогда

$$f(q,p,h)=\left(\frac{|p|}{p_0}\right)^2 f(q,p,h)+\left(1-\left(\frac{|p|}{p_0}\right)^2\right)f(q,p,h)=$$

$$=\left(\frac{|p|}{p_0}\right)^2 f(q,p,h)-w\frac{2}{p_0^2}f(q,p,h)=$$

$$=\left(\frac{|p|}{p_0}\right)^2 f(q,p,h)-w*\left(\frac{2}{p_0^2}f(q,p,h)\right)+$$

$$+\left(ih(p,\nabla_q)+\frac{(ih)^2}{2}(\nabla_q,\nabla_q)\right)\left(\frac{2}{p_0^2}f(q,p,h)\right)=$$

$$=|p|^2(1+D)\frac{1}{p_0^2}f-w*\left(\frac{2}{p_0^2}f(q,p,h)\right).$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}^b_{k,\,2} = |p|^2(1+D)\frac{1}{p_0^2}.$$

Следствие 2. *Справедливо следующее:*

$$\mathbf{P}^b_{k,\,2} = |p|\sqrt{(1+D)\frac{1}{p_0^2}}.$$

Теоремы 3, 4 позволяют найти разложение квантовой скобки Пуассона. Пусть $f \in H^b_0$. Тогда

$$\langle w, f\rangle = \Big((p, \nabla_q) + \frac{ih}{2}(\nabla_q, \nabla_q)\Big)f + \sum_{|\alpha|\geqslant 1}\frac{(ih)^{|\alpha|-1}}{2\alpha!}\frac{\partial^{|\alpha|}p_0^2}{\partial q^\alpha}\frac{\partial^{|\alpha|}f}{\partial p^\alpha} = \frac{|p|^2}{2ih}Df + Af.$$

Здесь

$$Af = \sum_{|\alpha|\geqslant 1}\frac{(ih)^{|\alpha|-1}}{2\alpha!}\frac{\partial^{|\alpha|}p_0^2}{\partial p^\alpha}\frac{\partial^{|\alpha|}f}{\partial p^\alpha}.$$

Первое слагаемое

$$\frac{|p|^2}{2ih}Df \in H^b_1,$$

а второе $Af \in H^b_{-1}$. Следовательно,

$$\mathbf{P}^b_0\langle w, f\rangle = \mathbf{P}^b_{1,\,-1}\frac{|p|^2}{2ih}Df + \mathbf{P}^b_{-1,\,1}Af =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{(1+D)\frac{1}{p_0^2}}}\frac{|p|}{2ih}Df + |p|\sqrt{(1+D)\frac{1}{p_0^2}}Af.$$

Поэтому уравнение

$$\rho * \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \langle w, f\rangle\right) = 0 \tag{2.43}$$

эквивалентно уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{(1+D)\frac{1}{p_0^2}}}\frac{|p|}{2ih}Df + |p|\sqrt{(1+D)\frac{1}{p_0^2}}Af = 0. \tag{2.44}$$

Аналогично уравнению (2.43) можно записать уравнение

$$\left(\frac{\partial g}{\partial t} + \langle w,\, g\rangle\right) * \rho = 0$$

в виде эквивалентного уравнения на пространстве H_0^b биоднородных функций

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \sqrt{\left(1 + \frac{ih}{p_0^2}A\right)\frac{p_0^2}{|p|^2}}\,\frac{|p|^2}{2ih}Dg + \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{ih}{p_0^2}A\right)\frac{p_0^2}{|p|^2}}}Ag = 0. \tag{2.45}$$

В самом деле, нужно вычислить операторы проектирования

$$\mathbf{Q}_{k,\,s}^b : H_k^b \to H_{k+s}^b$$

вдоль подпространства $K_r = \operatorname{Ker} \mathbf{Q}_0$. Пусть $f \in H_k^b$. Тогда

$$\begin{aligned} f(q,\,p,\,h) &= \left(\frac{|p|}{p_0}\right)^2 f(q,\,p,\,h) + \left(1 - \left(\frac{|p|}{p_0}\right)^2\right) f(q,\,p,\,h) = \\ &= \left(\frac{|p|}{p_0}\right)^2 f(q,\,p,\,h) - w\frac{2}{p_0^2} f(q,\,p,\,h) = \\ &= \left(\frac{|p|}{p_0}\right)^2 f(q,\,p,\,h) - \left(\frac{2}{p_0^2} f(q,\,p,\,h)\right) * w - \frac{2ih}{p_0^2}Af. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} Q_{k,\,2}^b &= \left(\frac{|p|}{p_0}\right)^2 \left(1 + \frac{2ih}{p_0^2}A\right)^{-1}, \\ Q_{k,\,1}^b &= \sqrt{\left(\frac{|p|}{p_0}\right)^2 \left(1 + \frac{2ih}{p_0^2}A\right)^{-1}}, \\ Q_{k,\,-2}^b &= \left(1 + \frac{2ih}{p_0^2}A\right)\left(\frac{|p|}{p_0}\right)^2, \\ Q_{k,\,1}^b &= \sqrt{\left(1 + \frac{2ih}{p_0^2}A\right)\left(\frac{p_0}{|p|}\right)^2}. \end{aligned}$$

Наконец, рассмотрим действие проекторов $\mathbf{P}_0$ и $\mathbf{Q}_0$ на интегральные члены. В случае, когда ядро интегральной части имеет вид (2.42), функция

$$\varphi = \int K(q, p;\, \xi, \eta)\big(\langle \rho(\xi, \eta),\, \mathbf{D}f(\xi, \eta)\rangle + \mathbf{D}a(\xi, \eta) * \rho(\xi, \eta)\big)d\xi\, d\eta$$

зависит только от q и h,

$$\varphi = \varphi(q,\, h).$$

Следовательно,

$$\mathbf{Q}_0\big(\varphi(q,\, h)\big) = \varphi\Big(q,\, h\frac{p_0}{|p|}\Big).$$

Для проектора же $\mathbf{P}_0^b$ получается более сложная формула:

$$\mathbf{P}_0\big(\varphi(q,\, h)\big) = \varphi\Big(\overbrace{x}^{1}\overbrace{h\mathbf{P}^b_{k,\,-1}}^{2}\Big)(1).$$

§ 6. Случай однородных функций

Рассмотрим пространство H_k однородных функций только по одной группе переменных p:

$$f(q,\, \lambda p,\, h) = \lambda^k f(q,\, p,\, h), \quad \lambda > 0.$$

Обозначим через

$$L_k\colon \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \to \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$$

проектор на подпространство H_k вдоль ядра $\operatorname{Ker} \mathbf{R}$ (см. (2.29)).

Теорема 5. *Проекция*

$$\mathbf{P}_{k,\,1}\colon H_k \to H_{k+1}$$

задается уравнением

$$\mathbf{P}^2_{k,\,1}(1 - A_0) = A_2 + 2\mathbf{P}_{k,\,1}A_1,$$

где

$$A_0 = (ih)^2(\nabla_q,\, \nabla_q)\frac{1}{p_0^2}, \quad A_1 = ih(p,\, \nabla_q)\frac{1}{p_0^2}, \quad A_2 = \frac{|p|^2}{p_0^2}.$$

Доказательство. Пусть $f \in H_k$. Тогда

$$f(q,p,h) = \frac{|p|^2}{p_0^2} f(q,p,h) + \Big(1 - \Big(\frac{|p|^2}{p_0^2}\Big) f(q,p,h) =$$

$$= \frac{|p|^2}{p_0^2} f(q,p,h) - \Big(w \frac{2}{p_0^2} f(q,p,h)\Big) = \frac{|p|^2}{p_0^2} f(q,p,h) - \Big(w * \frac{2}{p_0^2} f(q,p,h)\Big) +$$

$$+ \Big(ih(p, \nabla_q) + \frac{(ih)^2}{2}(\nabla_q, \nabla_q)\Big)\Big(\frac{2}{p_0^2} f(q,p,h)\Big) \sim A_2 f + A_1 f + A_0 f.$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}_{k,1}^2 = A_2 + 2\mathbf{P}_{k,1} A_1 + \mathbf{P}_{k,1}^2 A_0.$$

Теорема 6. *Проекция*

$$\mathbf{Q}_{k,1} \colon H_k \to H_{k+1}$$

задается уравнением

$$\mathbf{Q}_{k,1}^2 = A_2 - \sum_{|\alpha| \geqslant 1} (ih)^{|\alpha|} (\mathbf{Q}_{k,1})^{|\alpha|+2} B_\alpha,$$

где

$$B_\alpha = \Big(\frac{1}{\alpha!\, p_0^2}\Big) \frac{\partial^{|\alpha|} p_0^2}{\partial q^\alpha} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial p^\alpha}.$$

§ 7. Случай нулевого потенциала

В этом случае $p_0(q) \equiv \mathrm{const}$, $A = 0$. Тогда

$$\rho(q,p) \equiv \rho(p) = \delta\Big(\frac{1}{2}|p|^2 - \frac{1}{2}p_0^2\Big). \tag{2.46}$$

Будем искать решение в виде

$$\begin{aligned} f(q,p,h) &= f_0(p,h) e^{i\left(\omega t + (k,q)\right)}, \\ a(q,p,h) &= a_0(p,h) e^{i\left(\omega t + (k,q)\right)}, \end{aligned} \tag{2.47}$$

где функции $f_0(p,h)$ и $a_0(p,h)$ — однородные степени 0, т. е.

$$f_0(p,h),\ a_0(p,h) \in H_0^b.$$

Прежде всего, вычислим интегральный член:

$$I = \int V(q-\xi)\big(\langle\rho(\eta), f(\xi,\eta)\rangle + a(\xi,\eta) * \rho(\eta)\big)d\xi\, d\eta = I_1 - I_2 + I_3,$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \int V(q-\xi)\frac{1}{ih}\rho(\eta) * f(\xi,\eta)d\xi\, d\eta, \\ I_2 &= \int V(q-\xi)\frac{1}{ih}f(\xi,\eta) * \rho(\eta)d\xi\, d\eta, \\ I_3 &= \int V(q-\xi)a(\xi,\eta) * \rho(\eta)d\xi\, d\eta. \end{aligned} \tag{2.48}$$

Подставляя (2.47) в (2.48), получаем

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{ih}\int V(q-\xi)\big(\rho(\eta) * f_0(\eta)e^{i(\omega t+(k,\xi))}\big)d\xi\, d\eta = \\ &= \frac{1}{ih}\int V(q-\xi)\sum_{|\alpha|\geqslant 0}\frac{(ih)^{|\alpha|}}{\alpha!}\Big(\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial\eta^\alpha}\rho(\eta)\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial\xi^\alpha}e^{i(\omega t+(k,\xi))}f_0(\eta)\Big)d\xi\, d\eta = \\ &= \frac{1}{ih}e^{i\omega t}\int V(q-\xi)\sum_{|\alpha|\geqslant 0}\frac{(ih)^{|\alpha|}}{\alpha!}\Big(\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial\eta^\alpha}\rho(\eta)(ik)^\alpha e^{i(k,\xi)}f_0(\eta)\Big)d\xi\, d\eta = \\ &= \frac{1}{ih}e^{i\omega t}\int V(q-\xi)e^{i(k,\xi)}\rho(\eta-hk)f_0(\eta)d\xi\, d\eta = \\ &= \frac{1}{ih}e^{i(\omega t+(q,k))}\widetilde{V}(k)\int\rho(\eta-hk)f_0(\eta)d\eta. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{ih}e^{i(\omega t+(q,k))}\widetilde{V}(k)\int\rho(\eta)f_0(\eta)d\eta, \\ I_3 &= e^{i(\omega t+(q,k))}\widetilde{V}(k)\int\rho(\eta)a_0(\eta)d\eta. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$I = I(q,h) = e^{i(\omega t+(q,k))}\widetilde{V}(k)\int\Big(f_0(\eta)\frac{\rho(\eta-hk)-\rho(\eta)}{ih} + a_0(\eta)\rho(\eta)\Big)d\eta = \\ = e^{i(\omega t+(q,k))}\widetilde{V}(k)J(h). \tag{2.49}$$

Вычислим теперь операторы $\mathbf{P}_{k,1}$ и $\mathbf{Q}_{k,1}$. Имеем

$$\mathbf{P}_{k,1} = \big(A_1 + \sqrt{A_1^2 + (1-A_0)A_2}\big)(1-A_0)^{-1} =$$
$$= \left(\sqrt{1 - \frac{(ih)^2}{p_0^2}(\nabla_q, \nabla_q)\frac{|p|^2}{p_0^2} + \frac{(ih)^2}{p_0^4}(p, \nabla_q)^2} + \frac{ih}{p_0^2}(p, \nabla_q)\right)\times$$
$$\times\left(1 - \frac{(ih)^2}{p_0^2}(\nabla_q, \nabla_q)\right)^{-1},$$

$$\mathbf{Q}_1 = \sqrt{A_2} = \frac{|p|}{p_0}.$$

Применим полученные формулы к уравнениям (2.36) и (2.37), которые мы запишем в следующем виде:

$$\mathbf{P}_0\Big(\frac{\partial f}{\partial t} + (p, \nabla_q)f + \frac{(ih)}{2}(\nabla_q, \nabla_q)f - I\Big) = c, \tag{2.50}$$

$$\mathbf{Q}_0\Big(\frac{\partial(-f+iha)}{\partial t} + (p, \nabla_q)(-f+iha) + \frac{(ih)}{2}(\nabla_q, \nabla_q)(-f+iha) + I\Big) = -c, \tag{2.51}$$

где f, $a \in H_0$. Тогда уравнения (2.50) и (2.51) упрощаются:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{P}_0\big((p, \nabla_q)f\big) + \frac{(ih)}{2}(\nabla_q, \nabla_q)f - I = c,$$
$$\frac{\partial(-f+iha)}{\partial t} + \mathbf{Q}_0\big((p, \nabla_q)(-f+iha)\big) + \frac{(ih)}{2}(\nabla_q, \nabla_q)(-f+iha) + I = -c$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{P}_{k,-1}\big((p, \nabla_q)f\big) + \frac{(ih)}{2}(\nabla_q, \nabla_q)f - I = c, \tag{2.52}$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \mathbf{Q}_{k,-1}\big((p, \nabla_q)a\big) + \frac{\mathbf{P}_{k,-1} - \mathbf{Q}_{k,-1}}{ih}\big((p, \nabla_q)f\big) + \frac{(ih)}{2}(\nabla_q, \nabla_q)a = 0. \tag{2.53}$$

Применение операторов к функциям вида (2.47) сводится к умножению, т. е.

$$\mathbf{P}_{k,-1}f = P(p, h, k)f,$$

где

$$P(p,\,h,\,k)=\frac{p_0^2-h^2(k,\,k)}{\sqrt{\big(p_0^2-h^2(k,\,k)\big)|p|^2+h^2(p,\,k)^2}-h(p,\,k)}=$$
$$=\frac{1}{|p|^2}\Big(\sqrt{\big(p_0^2-h^2(k,\,k)\big)|p|^2+h^2(p,\,k)^2}+h(p,\,k)\Big).$$

Тогда уравнения (2.52), (2.53) имеют вид

$$\Big(i\omega+iP(p,\,h,\,k)(p,\,k)-\frac{ih}{2}(k,\,k)\Big)f_0-\widetilde{V}(k)J(h)=0, \tag{2.54}$$

$$\Big(i\omega+i\frac{p_0}{|p|}(p,\,k)-ih\frac{(k,\,k)}{2}\Big)a_0+\frac{P(p,\,h,\,k)-\frac{p_0}{|p|}}{h}(p,\,k)f_0=0. \tag{2.55}$$

Обозначим

$$A(p,\,h,\,k,\,\omega)=\frac{\widetilde{V}(k)}{\omega+P(p,\,k)(p,\,k)-h\frac{(k,\,k)}{2}}, \tag{2.56}$$

$$B(p,\,h,\,k,\,\omega)=\frac{\Big(P(p,\,h,\,k)-\frac{p_0}{|p|}\Big)(p,\,k)A(p,\,h,\,k,\,\omega)}{h\Big(\omega+\frac{p_0}{|p|}(p,\,k)-h\frac{(k,\,k)}{2}\Big)}. \tag{2.57}$$

Обе функции A и B являются однородными степени 0, т. е.

$$A,\,B\in H_0^b.$$

Тогда уравнения (2.54) и (2.55) имеют вид

$$\begin{aligned} f_0&=\frac{1}{i}J(h)A(p,\,h,\,k,\,\omega),\\ a_0&=-J(h)B(p,\,h,\,k,\,\omega). \end{aligned} \tag{2.58}$$

Подставляя (2.58) в определение функции $J(h)$ (2.49), получаем соотношение на ω

$$\int\Big(A(p,\,h,\,k,\,\omega)\frac{1}{h}\big(\rho(p-hk)-\rho(p)\big)-B(p,\,h,\,k,\,\omega)\rho(p)\Big)dp=-1$$

или

$$\int\Big(\frac{A(p+hk,\,h,\,k,\,\omega)-A(p,\,h,\,k,\,\omega)}{h}-B(p,\,h,\,k,\,\omega)\Big)\rho(p)dp=-1. \tag{2.59}$$

Выражение (2.59) можно упростить следующим образом. Положим

$$A(p,\,h,\,k,\,\omega)=\frac{\widetilde{V}(k)}{\omega+(p,\,k)-h(\frac{(k,\,k)}{2})}-$$

$$-\frac{\widetilde{V}(k)(p,\,k)\big(P(p,\,k)-1\big)}{\Big(\omega+P(p,\,k)(p,\,k)-h\frac{(k,\,k)}{2}\Big)\Big(\omega+(p,\,k)-h\frac{(k,\,k)}{2}\Big)}=$$

$$=\frac{\widetilde{V}(k)}{\omega+(p,\,k)-h\frac{(k,\,k)}{2}}-\frac{(p,\,k)\big(P(p,\,k)-1\big)}{\Big(\omega+(p,\,k)-h\frac{(k,\,k)}{2}\Big)}A(p,\,h,\,k,\,\omega). \tag{2.60}$$

Заметим, что

$$P(p,\,k)-1=\frac{1}{|p|^2}\Big(\sqrt{(p_0^2-h^2(k,\,k))|p|^2+h^2(p,\,k)^2}-\big(|p|^2-h(p,\,k)\big)\Big)=$$

$$=\frac{1}{|p|^2}\frac{(p_0^2-h^2(k,\,k))|p|^2+h^2(p,\,k)^2-\big(|p|^2-h(p,\,k)\big)^2}{\sqrt{(p_0^2-h^2(k,\,k))|p|^2+h^2(p,\,k)^2}+\big(|p|^2-h(p,\,k)\big)}=$$

$$=\frac{\big(p_0^2-h^2(k,\,k)\big)-|p|^2+2h(p,\,k)}{\sqrt{(p_0^2-h^2(k,\,k))|p|^2+h^2(p,\,k)^2}+\big(|p|^2-h(p,\,k)\big)}=$$

$$=-\frac{|p-hk|^2-p_0^2}{\sqrt{(p_0^2-h^2(k,\,k))|p|^2+h^2(p,\,k)^2}+\big(|p|^2-h(p,\,k)\big)}=$$

$$=\big(|p-hk|^2-p_0^2\big)D(p,\,h,\,k). \tag{2.61}$$

Подставим (2.61) в (2.60):

$$A(p,\,h,\,k,\,\omega)=$$
$$=\frac{\widetilde{V}(k)}{\omega+(p,\,k)-h\dfrac{(k,\,k)}{2}}-\frac{(p,\,k)\Big(\big(|p-hk|^2-p_0^2\big)D(p,\,h,\,k)\Big)}{\Big(\omega+(p,\,k)-h\dfrac{(k,\,k)}{2}\Big)}A(p,\,h,\,k,\,\omega). \tag{2.62}$$

Теперь подставим (2.62) в (2.59) и учтем, что при интегрировании можно положить

$$|p|_2=p_0^2.$$

Имеем

$$-1=\int\Big(\frac{A(p+hk,\,h,\,k,\,\omega)-A(p,\,h,\,k,\,\omega)}{h}-B(p,\,h,\,k,\,\omega)\Big)\rho(p)dp=$$
$$=\int\Big(\frac{1}{h}\bigg(\frac{\widetilde{V}(k)}{\omega+(p,\,k)+h\dfrac{(k,\,k)}{2}}-\frac{\widetilde{V}(k)}{\omega+(p,\,k)-h\dfrac{(k,\,k)}{2}}\bigg)+$$
$$+\frac{(p,\,k)\big(P(p,\,k)-1\big)}{h\Big(\omega+(p,\,k)-h\dfrac{(k,\,k)}{2}\Big)}A(p,\,h,\,k,\,\omega)-B(p,\,h,\,k,\,\omega)\Big)\rho(p)dp=$$
$$=\int\Big(\frac{1}{h}\bigg(\frac{\widetilde{V}(k)}{\omega+(p,\,k)+h\dfrac{(k,\,k)}{2}}-\frac{\widetilde{V}(k)}{\omega+(p,\,k)-h\dfrac{(k,\,k)}{2}}\bigg)+$$
$$+\frac{(p,\,k)\big(P(p,\,k)-1\big)}{h\Big(\omega+(p,\,k)-h\dfrac{(k,\,k)}{2}\Big)}A(p,\,h,\,k,\,\omega)-$$
$$-\frac{(p,\,k)\big(P(p,\,h,\,k)-\frac{p_0}{|p|}\big)}{h(\omega+\frac{p_0}{|p|}(p,\,k)-h\dfrac{(k,\,k)}{2})}A(p,\,h,\,k,\,\omega)\Big)\rho(p)dp=$$
$$=\int\bigg(-\frac{(k,\,k)\widetilde{V}(k)}{\big(\omega+(p,\,k)\big)^2-h^2\dfrac{(k,\,k)}{4}}\bigg)\rho(p)dp.$$

Окончательно

$$\int \left(\frac{(k,\, k)\widetilde{V}(k)}{\big(\omega + (p,\, k)\big)^2 - h^2 \frac{(k,\, k)^2}{4}} \right) \rho(p) dp = 1. \tag{2.63}$$

Формула (2.63) дает соотношение на ω и k.

§ 8. Одномерный случай (случай Боголюбова)

В этом случае обе функции (2.56) и (2.57) не зависят от переменной p. Следовательно, уравнение (2.59) имеет вид:

$$\int \big(B(p,\, h,\, k,\, \omega)\big) \rho(p) dp = 1. \tag{2.64}$$

Далее, имеем

$$P(p,\, h,\, k) = \frac{p_0^2 - h^2(k,\, k)}{\sqrt{\big(p_0^2 - h^2(k,\, k)\big)|p|^2 + h^2(p,\, k)^2} - h(p,\, k)} = \frac{p_0}{|p|} + \frac{hk}{p},$$

$$A(p,\, h,\, k,\, \omega) = \frac{\widetilde{V}(k)}{\omega + p_0 \frac{p}{|p|} k + hk^2 - \frac{hk^2}{2}} = \frac{\widetilde{V}(k)}{\omega + p_0 \frac{p}{|p|} k + \frac{hk^2}{2}},$$

$$B(p,\, h,\, k,\, \omega) = \frac{hk^2 \widetilde{V}(k)}{h\Big(\omega + p_0 \frac{p}{|p|} k + \frac{hk^2}{2}\Big)\Big(\omega + p_0 \frac{p}{|p|} k - \frac{hk^2}{2}\Big)} =$$

$$= \frac{k^2 \widetilde{V}(k)}{\Big(\omega + p_0 \frac{p}{|p|} k\Big)^2 - \frac{h^2 k^4}{4}}.$$

В качестве функции (2.46) можно взять функцию

$$\rho(p) = p_0 \delta\Big(\frac{1}{2}|p|^2 - \frac{1}{2} p_0^2\Big) = \big(\delta(p - p_0) + \delta(p + p_0)\big). \tag{2.65}$$

Тогда уравнение (2.64) принимает следующий вид:

$$B(p_0,\, h,\, k,\, \omega) + B(-p_0,\, h,\, k,\, \omega) = 1,$$

т. е.

$$\frac{k^2\widetilde{V}(k)}{(\omega+p_0k)^2-\frac{h^2k^4}{4}}+\frac{k^2\widetilde{V}(k)}{(\omega-p_0k)^2-h^2\frac{k^4}{4}}=1.$$

Следовательно,

$$\omega^2=k^2\Big(p_0^2+\widetilde{V}(k)+h^2\frac{k^2}{4}+\sqrt{\big(4p_0^2\widetilde{V}(k)+\widetilde{V}(k)\big)+h^2k^2\big(p_0^2+\widetilde{V}(k)\big)+h^4\frac{k^4}{8}}\Big).$$

8.1. Случай Боголюбова

Носитель функции (65), очевидно, состоит из двух точек p_0 и $-p_0$, т. е. изоэнергетическая поверхность L состоит из двух компонент связности. Случай Боголюбова получается, если в качестве функции $\rho(p,q)$ взять ограничение функции (65) на компоненту $p = p_0$. Тогда уравнение (59) примет вид:

$$B(p_0, h, k, \omega) = 1,$$

т. е.

$$\omega = -kp_0 \pm \sqrt{k^2\widetilde{V}(k)+h^2\frac{k^4}{4}}.$$

§ 9. Построение исчисления на римановом многообразии

Рассмотрим в качестве фазового пространства кокасательное расслоение T^*M к многообразию M. Пусть $q = \{q^1, \ldots, q^n\}$, $p = \{p_1, \ldots, p_n\}$ — локальная система координат на фазовом пространстве T^*M. Если q', p' — другая локальная система координат, то предполагается, что

$$q^j = q^j(q'^1, \ldots, q'^n) \tag{2.66}$$

и

$$p_i = p'_j\frac{\partial q'^j}{\partial q^i}. \tag{2.67}$$

Рассмотрим функцию Гамильтона $H(q, p)$ на фазовом пространстве T^*M, которая является полиномиальной относительно переменных p для любой системы локальных координат (q, p). Условия

(2.66) и (2.67) показывают, что свойство функции H быть (однородным) полиномом не зависит от выбора системы локальных координат. В частности, если H является однородным полиномом степени m, то

$$H(q, p) = T^{i_1, i_2, \ldots, i_m}(q^1, \ldots, q^n) p_{i_1} p_{i_2} \ldots p_{i_m}, \tag{2.68}$$

где

$$T = \{T^{i_1, i_2, \ldots, i_m}\}$$

— ковариантное симметрическое тензорное поле валентности $(m, 0)$. Фиксируем на многообразии M риманову метрику и соответствующую ей симметрическую связность, задаваемую в виде операции ковариантного градиента

$$\nabla_k = \frac{\nabla}{\partial q_k},$$

применяемого к произвольным тензорным полям на многообразии M.

Тогда каждая однородная функция Гамильтона вида (2.68) задает дифференциальный оператор порядка m по формуле

$$H\Big(q, ih\frac{\nabla}{\partial q}\Big) = (ih)^m T^{j_1, j_2, \ldots, j_m}(q^1, \ldots, q^n) \nabla_{j_1} \nabla_{j_2} \ldots \nabla_{j_m}. \tag{2.69}$$

Причем формула (2.69) распространяется на произвольную функцию $H(q, p)$, полиномиальную по переменным p. Обратно, всякий дифференциальный оператор порядка m на многообразии M задается по формуле (2.69) для некоторой функции $H(q, p)$, являющейся полиномом степени m по переменным p.

Таким образом, операция композиции операторов $H\Big(q, ih\dfrac{\nabla}{\partial q}\Big)$ порождает некоммутативную операцию $*$ на пространстве функций на фазовом пространстве T^*M.

Опишем операцию $*$ в локальной системе координат (q, p). Каждое векторное поле $\dfrac{\partial}{\partial q^j}$ порождает на многообразии T^*M векторное поле X_j по формуле

$$X_j = \frac{\partial}{\partial q^j} + \Gamma^k_{jl}\, p_k \frac{\partial}{\partial p_l},$$

соответствующей горизонтальному лифту векторного поля $\dfrac{\partial}{\partial q^j}$.

На фазовом пространстве T^*M задаем риманову метрику, которая на касательных векторах

$$\frac{\partial}{\partial p_j},\ X_j$$

задается формулами

$$\left(\frac{\partial}{\partial p_j},\ \frac{\partial}{\partial p_k}\right) = g^{jk}, \quad (X_j,\ X_k) = g_{jk}, \quad \left(X_j,\ \frac{\partial}{\partial p_k}\right) = 0.$$

Тогда

$$f(q,\,p) * g(q,\,p) = \sum_{k\geqslant 0} \frac{(ih)^k}{k!} \sum_{i_1 i_2 \dots i_k} \left(\frac{\nabla}{\partial p_{i_1}} \frac{\nabla}{\partial p_{i_2}} \cdots \frac{\nabla}{\partial p_{i_k}} f(q,\,p)\right) \times$$
$$\times \left(\nabla_{X_{i_1}} \nabla_{X_{i_2}} \dots \nabla_{X_{i_k}} g(q,\,p)\right).$$

Формулы (2.44), (2.45) могут быть применены, если операторы ∇_{q^i} заменить на операторы ∇_{X_i}.

§ 10. Асимптотические собственные функции

Рассматривается нелинейный оператор

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \big\langle H(q,\,p),\,\rho(q,\,p,\,t)\big\rangle - \Big\langle \rho(q,\,p,\,t), \int K(q,\,p;\,\xi,\,\eta)\rho(\xi,\,\eta,\,t)\,d\xi\,d\eta\Big\rangle = 0, \tag{2.70}$$

где ядро $K(q,\,p;\,\xi,\,\eta)$, как правило, представляется в более простом виде

$$K(q,\,p;\,\xi,\,\eta) = V(q-\xi),$$

V является гладкой финитной функцией. Положим

$$V_\rho = \int V(q-\xi)\rho(\xi,\,p)\,d\xi\,dp.$$

Тогда уравнение (2.70) записывается в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \big\langle H(q,\,p),\,\rho(q,\,p,\,t)\big\rangle - \big\langle \rho(q,\,p,\,t),\,V_\rho\big\rangle = 0.$$

Рассмотрим понятие квазирешения, введенное в [4], несколько ослабив его условия. Уравнение (2.70) можно понимать как нелинейное уравнение с унитарной нелинейностью в смысле [35]. Решение этого уравнения является решением линейного уравнения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\langle H(q,p),\,\rho(q,p,t)\rangle-\Big\langle \rho(q,p,t),\int K(q,p;\xi,\eta)\,v(\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta\Big\rangle=0 \tag{2.71}$$

или

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\langle H(q,p),\,\rho(q,p,t)\rangle-\langle \rho(q,p,t),\,V_v\rangle=0$$

при условии

$$v(q,p,t)=\rho(q,p,t).$$

Следуя [35], рассмотрим на разбиении отрезка $[0,T]$ на N равных частей длины T/N такую функцию $\widetilde{\rho}_T(q,p,t)$, что на каждом отрезке $\big[kT/N,\,(k+1)T/N\big]\widetilde{\rho}_T(q,p,t)$ удовлетворяет уравнению (2.71), в котором

$$v(q,p,t)\equiv\widetilde{\rho}_T\Big(q,p,\frac{kT}{N}\Big),$$

где

$$\widetilde{\rho}_T(q,p,0)=\rho(q,p).$$

Тогда функцию

$$\rho(q,p,T)=\rho_N(q,p,T)=\widetilde{\rho}_T(q,p,T) \tag{2.72}$$

назовем *квазирешением задачи Коши* (2.70) с *начальным условием*

$$\rho(q,p,t)=\rho_0(q,p). \tag{2.73}$$

Заметим, что это определение подходит и для обобщенных функций из пространства, сопряженного к пространству Шварца.

Определение 1. Скажем, что функция $\rho_0(q,p)$ является *слабым приближением k-порядка собственной функции уравнения* (2.70) (с нулевым собственным значением), если для любого N квазирешение $\rho_N(q,p,t)$ задачи Коши (2.70), (2.73) удовлетворяет условию: для любой функции φ из пространства Шварца выполнено неравенство

$$\big(\varphi,\,\rho_N(q,p,t)-\rho_0(q,p)\big)\leqslant Ch^k,$$

причем константа C зависит от выбора функции φ, но не зависит от $t\in[0,T]$.

Обозначим через $\widetilde{\mathbb{S}}$ пространство гладких функций, имеющих рост на бесконечности не выше некоторого полинома. Наша цель заключается в доказательстве следующей теоремы.

Теорема 7. *Пусть* $\rho_0(q, p)$ *— такая функция, что для любой функции* φ *из пространства функций* $\widetilde{\mathbb{S}}$ *имеет место неравенство*

$$\big(\widehat{H}(\rho_0), \varphi\big) \leqslant Ch^k. \tag{2.74}$$

Тогда функция ρ_0 *является слабым приближением* k*-порядка собственной функции уравнения* (2.70).

Доказательство. Согласно определению 1 требуется доказать неравенство

$$\big(\varphi, \rho_N(q, p, T) - \rho_0(q, p)\big) \leqslant Ch^k,$$

где $\rho_N(q, p, t)$ — квазирешение задачи Коши (2.70) с начальным условием (2.73). Согласно (2.72) имеем

$$\rho_N(q, p, T) = \widetilde{\rho}_T(q, p, T).$$

Рассмотрим первый отрезок $[0, T/N]$. При $t = 0$

$$\widetilde{\rho}_T(q, p, 0) = \rho_0(q, p).$$

На $[0, T/N]$ функция $\widetilde{\rho}_T(q, p, t)$ удовлетворяет линейному уравнению (2.71), в котором

$$v(q, p, t) = \rho_0(q, p). \tag{2.75}$$

Проверим, что линейное уравнение (2.71) с условием (2.75) удовлетворяет условиям леммы 4 работы [4]. В самом деле, линейный оператор, задаваемый в уравнении (2.71), порождается символом

$$\widetilde{H}(q, p) = H(q, p) + \int V(q - \xi)\rho_0(\xi, p)d\xi\, dp,$$

который, очевидно, является символом эллиптического оператора. Следовательно, согласно лемме 4 [4], имеем

$$\Big(\widetilde{\rho}_T\Big(q, p, \frac{T}{N}\Big) - \rho_0(q, p), \varphi\Big) \leqslant Ch^k. \tag{2.76}$$

Для проведения индукции по номеру разбиения отрезка $[0, T]$ достаточно проверить, что функция $\rho_1 = \widetilde{\rho}_T(q, p, T/N)$ удовлетворяет условию (2.74) теоремы. Имеем

$$\big(\widehat{H}(\rho_1), \varphi\big) = \big(\widehat{H}(\rho_0), \varphi\big) + \big(\widehat{H}(\rho_1) - \widehat{H}(\rho_0), \varphi\big). \tag{2.77}$$

Первое слагаемое в (2.77) оценивается по условию (2.74) теоремы. Второе слагаемое перепишем в следующем виде:

$$(\widehat{H}(\rho_1)-\widehat{H}(\rho_0),\, \varphi)=(\langle H(q,\, p),\, \rho_1-\rho_0\rangle,\, \varphi)+(\langle V_{\rho_1},\, \rho_1\rangle-\langle V_{\rho_0},\, \rho_0\rangle,\, \varphi). \tag{2.78}$$

Первое слагаемое в (2.78) имеет вид

$$(\langle H(q,\, p),\, \rho_1-\rho_0\rangle,\, \varphi)=(\rho_1-\rho_0,\, \langle H(q,\, p),\, \varphi\rangle)$$

и оценивается с помощью (2.76). Второе слагаемое представим в виде

$$\begin{aligned}(\langle V_{\rho_1},\, \rho_1\rangle-\langle V_{\rho_0},\, \rho_0\rangle,\, \varphi) &= (\langle V_{\rho_1},\, \rho_1-\rho_0\rangle+\langle V_{\rho_1-\rho_0},\, \rho_0\rangle,\, \varphi) = \\ &= (\rho_1-\rho_0,\, \langle V_{p_1},\, \varphi\rangle)+(\langle V_{\rho_1-\rho_0},\, \rho_0\rangle,\, \varphi) = \\ &= (\rho_1-\rho_0,\, \langle V_{p_1},\, \varphi\rangle)+(\rho_0,\, \langle V_{\rho_1-\rho_0},\, \varphi\rangle).\end{aligned} \tag{2.79}$$

Первое слагаемое в (2.79) оценивается в силу (2.76). Второе слагаемое в (2.79) зависит от оценки функции

$$V_{\rho_1-\rho_0}(q)=\int V(q-\xi)(\rho_1(\xi,\, p)-\rho_0(\xi,\, p))\,d\xi\, dp. \tag{2.80}$$

Требуется доказать, что функция (2.80) удовлетворяет оценкам

$$\left|\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial q^{\alpha}}V_{\rho_1-\rho_0}(q)\right| \leqslant \frac{C}{(1+|q|)^N}h^k.$$

Для этого нам придется усовершенствовать леммы 1–4 из работы [4]. Предположим, что функция $H(q,\, p)$ удовлетворяет классическим условиям символа эллиптического самосопряженного оператора второго порядка, т. е.

$$\left|\frac{\partial^{|\alpha+\beta|}}{\partial q^{\alpha}\partial p^{\beta}}H(q,\, p)\right| \leqslant C(1+|p|)^{2-|\beta|},$$

$$|H(q,\, p)| \geqslant c(1+|p|)^2.$$

В этом случае соболевская норма

$$(\|f\|_s^h)^2=((1+h^2\Delta)^s f,\, f) \tag{2.81}$$

эквивалентна норме, построенной по оператору $\widehat{H}$:

$$\|f\|^h_{2s} \sim \left\|(1+\widehat{H})^s f\right\|_0.$$

Соответствующее пространство, пополненное по норме (2.81), будем обозначать через H^h_s. Тогда, как следует из леммы 1 [4], для решения задачи Коши

$$ih\frac{\partial}{\partial t}\Phi + \widehat{H}\Phi = 0, \quad \Phi\big|_{t=0} = \Phi_0 \tag{2.82}$$

выполнено неравенство

$$\begin{aligned}\left\|\left(1+|q|^2\right)^l\Phi\right\|^h_{2s} \leqslant C\Big(\left\|\left(1+|q|^2\right)^l\Phi_0\right\|^h_{2s} + \left\|\left(1+|q|^2\right)^{l-\frac{1}{2}}\Phi_0\right\|^h_{2s+1} + \ldots \\ \ldots + \left\|\Phi_0\right\|^h_{2s+2l}\Big) \leqslant C\Big(\left\|\left(1+|q|^2\right)^l\Phi_0\right\|^h_{2s+2l}\Big).\end{aligned} \tag{2.83}$$

Тогда имеет место следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть*

$$\frac{\Phi_0}{\left(1+|q|^2\right)^l} \in H^h_{2s}.$$

Тогда решение задачи Коши (2.82) *удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi_0}{\left(1+|q|^2\right)^l} \in H^h_{2s-2l}.$$

Доказательство. Пусть

$$\psi_0 \in H^h_{-2s+2l} \tag{2.84}$$

— произвольная функция. Поскольку

$$\Phi = e^{\frac{i}{h}\widehat{H}t}\Phi_0,$$

имеем

$$\begin{aligned}\left(\frac{\Phi}{\left(1+|q|\right)^l}, \psi_0\right) &= \left(\frac{1}{\left(1+|q|\right)^l}e^{\frac{i}{h}\widehat{H}t}\Phi_0, \psi_0\right) = \\ &= \left(e^{\frac{i}{h}\widehat{H}t}\Phi_0, \frac{1}{\left(1+|q|\right)^l}\psi_0\right) = \left(\Phi_0, e^{\frac{i}{h}\widehat{H}t}\Big(\frac{1}{\left(1+|q|\right)^l}\psi_0\Big)\right).\end{aligned} \tag{2.85}$$

Пусть

$$u_0 = \left(\frac{1}{\left(1+|q|\right)^l}\,\psi_0\right), \quad u = e^{\frac{i}{h}\widehat{H}t}u_0.$$

Очевидно, что

$$\left(1+|q|\right)^l u_0 \in H^h_{-2s+2l}.$$

Следовательно, можно применить неравенство (2.83):

$$\left(1+|q|\right)^l u \in H^h_{-2s}.$$

Тогда (2.85) ограничено для любой функции (2.84) и

$$\frac{\Phi}{\left(1+|q|\right)^l} \in H^h_{2s-2l}.$$

Таким образом, получаем неравенство

$$\left\|\left(1+|q|^2\right)^l\Phi\right\|^h_{2s} \leqslant C\left(\left\|\left(1+|q|^2\right)^l\Phi_0\right\|^h_{2s+2|l|}\right).$$

Введем норму

$$\|f\|^h_{2l,\,2s} = \left\|\left(1+|q|^2\right)^l(1+h^h\Delta)^s f\right\|_0 \tag{2.86}$$

и двойственную норму

$$\widetilde{\|f\|}^h_{2l,\,2s} = \left\|(1+h^2\Delta)^s\left(1+|q|^2\right)^l f\right\|_0. \tag{2.87}$$

Лемма 4. *Нормы* (2.86) *и* (2.87) *эквивалентны.*

Применяя преобразование Фурье и учитывая лемму 4, получим также неравенство

$$\left\|\left(1+|q|^2\right)^l\Phi\right\|^h_{2s} \leqslant C\left(\left\|\left(1+|q|^2\right)^{l+|s|}\Phi_0\right\|^h_{2s}\right)$$

или

$$\left\|\left(1+|q|^2\right)^l\Phi\right\|^h_{2s} \leqslant C\left(\left\|\left(1+|q|^2\right)^{l+|s|}\Phi_0\right\|^h_{2s+|l|}\right). \tag{2.88}$$

Теперь неравенства (2.88) можно применить к оператору $\langle\widehat{H},\,\cdot\rangle$, который действует на функциях $f(q,\,p)$. Для этого определим норму

$$\|f\|^h_{2l_1,2l_2,2s_1,2s_2} = \left\|\left(1+|q|^2\right)^{l_1}\left(1+|q|^2\right)^{l_2}(1+h^2\Delta_q)^{s_1}(1+h^2\Delta_p)^{s_2}f\right\|_0.$$

Лемма 5. *Решения задачи Коши*

$$ih\frac{\partial}{\partial t}\Phi + [\widehat{H}, \Phi] = 0, \quad \Phi\big|_{t=0} = \Phi_0 \tag{2.89}$$

удовлетворяют неравенству

$$\big\|\Phi\big\|^h_{2l_1,2l_2,2s_1,2s_2} \leqslant C\big\|\Phi_0\big\|^h_{2\left(l_1+|s_2|\right),2\left(l_2+|s_1|+|s_2|+|l_1|\right),2\left(s_1+|l_1|\right),2s_2}.$$

Таким образом, если функция Φ_0, определяющая начальное условие задачи Коши (2.89), является достаточно гладкой и растет па бесконечности пе быстрее некоторого полинома, то и само решение задачи Коши является достаточно гладкой функцией и растущей не быстрее некоторого полинома па бесконечности. В самом деле, если решение Φ должно быть гладким порядка (s_1, s_2), а начальная функция Φ_0 имеет рост па бесконечности порядка $(-l_1, -l_2)$, то функция Φ_0 должна иметь гладкость порядка $\left(s_1 + |l_1|, s_2\right)$, и при этом рост на бесконечности функции Φ не будет превосходить порядок $(-l_1, -s_2, -l_2 - l_1 - s_1 - 2s_2)$. Доказательство леммы 3 из [34] остается без изменения. В формулировке леммы 4 из [34] следует пространство пробных функций заменить на пространство бесконечно гладких функций, имеющих рост на бесконечности не выше полиномиального.

Часть III

ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ СРЕДНЕГО ПОЛЯ. СУЩЕСТВОВАНИЕ, АСИМПТОТИКИ И КВАНТОВАНИЕ

Глава 1

Асимптотическое поведение при $N \to \infty$ траекторий N-точечных масс, взаимодействующих по закону тяготения Ньютона[1]

Введение

В данной главе мы покажем связь между точкой в $3N$-мерном пространстве и N точками в 3-мерном пространстве. Она посвящена исследованию асимптотики траекторий точечных масс (зарядов), взаимодействующих по закону Ньютона (Кулона). Эти массы (заряды) образуют ансамбль $\mathfrak{M}_N$, состоящий из N точек в R^3. Асимптотика траекторий рассматриваетсн при $N \to \infty$.

В главе получено три основных результата (теорема 2.2, теорема 6.2 и теорема 7.2). Дадим сначала их предварительное описание, а затем приведем точные формулировки основных результатов.

Первый результат касается асимптотики траекторий многочастичной задачи, когда частицы проходят расстояния порядка начальных взаимных расстояний между ними. При получении этого результата (как, впрочем, и остальных) существенным моментом является описание начального расположения $\mathfrak{M}_N$ в R^3 с помощью атласа, т. е. положения частиц в начальный момент соотносятся с узлами равномерной решетки, попадающими внутрь единичного шара в R^3. Аналогично, с помощью атласа (отображения из того же единичного шара в $R^1_+(R^1)$) задается начальное распределение масс (зарядов). Таким образом, начальные положения частиц и их массы (заряды) определяются с помощью отображений из единичного трехмерного шара в R^3 и $R^1_+(R^1)$ соответственно. Эти отображения будем называть атласом распределения координат и атласом

[1]Здесь мы следуем результатам работы [10], написанной совместно с П. П. Мосоловым.

распределения масс (зарядов). Асимптотика траекторий частиц выражается через эти атласы, и физический смысл ее состоит в том, что каждая частица на расстоянии порядка начальных взаимных расстояний между ними движется по закону свободного падения, т. е. с постоянным ускорением, в силовом поле, определяемом атласами начальных распределений координат и масс (зарядов).

Второй результат показывает, что если предположить выполненной гипотезу разреженности для $\{\mathfrak{M}_N\}$, то этот же закон свободного падения действует па гораздо больших масштабах по сравнению с начальными взаимными расстояниями между частицами. Формулировка гипотезы разреженности связана с условием разреженности для семейства $\mathfrak{M}_N$. Дадим две эквивалентные формулировки этого условия. Последовательность ансамблей частиц $\{\mathfrak{M}_N\}$ удовлетворяет условию разреженности, если существует в R^3 шар K_N радиуса lN^σ ($l > 0$, $\sigma \geqslant 0$) такой, что расстояния между частицами из $\mathfrak{M}_N$, находящимися в K_N, не меньше величины порядка взаимных расстояний между частицами, когда система из N частиц равномерно распределена в шаре радиуса lN^σ. Вне K_N система $\mathfrak{M}_N$ становится все более разреженной по мере удаления частиц от центра K_N. Именно, если шаровой слой с центром в центре K_N, внешним радиусом $3R/2$ и внутренним радиусом $R/2$, $R \geqslant lN^\sigma$, подобно сжать так, что внешняя сфера будет иметь радиус lN^σ, то образы частиц шарового слоя при этом подобном преобразовании будут удовлетворять условию распределения частиц в K_N.

Вторая формулировка условия разреженности такова. Для частиц из $\mathfrak{M}_N$, содержащихся в некотором шаре K_N радиуса lN^σ, отношение объема шара радиуса, равного минимальному расстоянию между частицами в K_N, к объему K_N не менее γ/N ($\gamma > 0$ не зависит от N). Далее, для частиц из $\mathfrak{M}_N$, расположенных в шаровом слое $R/2 \leqslant r \leqslant 3R/2$ (r — расстояние от точки R^3 до центра K_N, $R \geqslant lN^\sigma$), отношение объема шара радиуса, равного минимальному расстоянию между частицами в шаровом слое, к объему шара радиуса R тоже не менее γ/N. Естественно, рассматриваются шаровые слои, содержащие не менее двух частиц из $\mathfrak{M}_N$.

Заметим, что если в шаре K_N содержится не менее $[\nu N]$ частиц из $\mathfrak{M}_N$, где $\nu > 0$ не зависит от N, то lN^σ — характерный масштаб систем $\mathfrak{M}_N$.

Гипотеза разреженности состоит в том, что при движении точек ансамбля $\mathfrak{M}_N$ в каждый момент времени выполняется условие разреженности с одними и теми же γ, σ и l.

При условии выполнения гипотезы разреженности закон свободного падения выполняется на масштабах до порядка $lN^\sigma/\ln N$ в то время, как взаимные расстояния между частицами имеют порядок $lN^{\sigma-1/3}$. Таким образом, закон свободного падения выполняется для тех масштабов, для которых выполняется гипотеза разреженности (но не больших $lN^{\sigma}/\ln N$). Гипотеза разреженности всегда выполнена для масштабов порядка $lN^{\sigma-1/3}$, если она выполняется в начальный момент времени.

Третий результат связан с асимптотикой траекторий на масштабах всей системы, т. е. когда точки проходят расстояния порядка lN^{σ}. Для получения асимптотики на таких расстояниях нам приходится привлекать гипотезу, более сильную по сравнению с гипотезой разреженности. Именно, предполагается существование атласов распределения координат и масс в каждый момент времени в процессе движения, удовлетворяющих условиям, накладываемым на атласы в начальный момент времени. Из гипотезы существования в процессе движения атласов вытекает гипотеза разреженности. С другой стороны, гипотеза разреженности допускает наличие свободного от частиц ненулевого телесного угла, что невозможно в рамках гипотезы существования атласов.

В предположении существования атласов доказано, что траектории точек ансамбля $\mathfrak{M}_N$ близки к траекториям системы пылевидной гидродинамики (0.25) или, что то же, к решениям уравнения характеристик для уравнения Власова (0.21). Заметим, что в расчетах динамики звезд используют для описания траекторий звезд характеристики для уравнения Власова. Такая методика расчета предполагает существование указанных выше атласов в процессе движения. Нами показано, что имеет место и обратное, т. е. если существуют атласы в процессе движения, то траектории точечных масс (звезд) асимптотически близки к характеристикам уравнения Власова. Более того, в работе получена количественная характеристика отличия траекторий точечных масс от соответствующих гидродинамических траекторий.

Перейдем теперь к математической постановке задачи. Остановимся прежде всего на нумерации частиц в начальный момент времени. В связи с этим от N перейдем к другому большому параметру $M (M \gg 1)$. Пусть B_r — открытый шар в R^3 радиуса r с центром в начале координат. Рассмотрим векторы k с целыми координатами такие, что k/M из B_1 и не менее чем на λ/M удалены от границы B_1, т. е. k/M из $B_{1-\lambda/M}$. Здесь $\lambda > 0$ не зависит от M. В дальнейшем для простоты изложения удобно положить $\lambda = 3$. Таким образом, мы будем рассматривать целочисленные векторы k такие, что k/M из $B_{1-3/M}$. Именно эти векторы k будут участвовать в нумерации частиц из $\mathfrak{M}_N$. Таким образом, число частиц N — величина порядка M^3. Сопоставление начальных положений частиц в R^3 с целочисленными векторами k осуществляется гладкой функцией $f_M: B_1 \to R^3$. Именно,

$$r^k(0) = M^\alpha f_M(k/M), \quad \alpha = 3\sigma, \quad k/M \in B_{1-3/M}.$$

Отображение $M^\alpha f_M(\eta)\colon B_1 \to R^3$ называется координатным атласом ансамбля $\mathfrak{M}_N$. Начальные скорости частиц зададим в виде

$$\dot r^k(0) = M^\beta g_M\big(f_M(k/M)\big), \quad k/M \in B_{1-3/M},$$

где $g_M: R^3 \to R^3$ — гладкая функция; эта функция называется атласом распределения начальных скоростей точек $\mathfrak{M}_N$. Далее, положим

$$q_M^k = q_M(k/M),$$

где $g_M: B_1 \to R_+^1(R^1)$ — гладкая функция (атлас распределения масс (зарядов)) в начальный момепт времепи.

Таким образом, приходим к ностановке задачи:

$$\ddot r^k(t) = \sum_{j\neq k} q_M^j(r^j - r^k)/|r^j - r^k|^3; \quad j/M,\, k/M \in B_{1-3/M},$$
$$r^k(0) = M^\alpha f_M(k/M), \quad \dot r^k(0) = M^\beta g_M\big(f_M(k/M)\big), \quad q_M^k = q_M(k/M). \tag{0.1}$$

Сформулируем сначала теорему об асимптотическом поведении траекторий задачи (0.1), когда частицы пробегают расстояния порядка начальных взаимных расстояний между ними ($lM^{\alpha-1}$). Доказательство этой теоремы не связано с гипотезой разреженности.

Пусть $f_M(\eta)$ удовлетворнет условинм:

Если η_1, η_2 таковы, что $|\eta_1| \leqslant 1 - 1/M$, $|\eta_2| \leqslant 1 - 1/M$, $|\eta_1 - \eta_2| \leqslant d/M$, то существует число $c_1^0(d)$ такое, что

$$c_1^0\big(|f_M(\eta_1)| + 1\big) \geqslant |f_M(\eta_2)|. \tag{0.2}$$

Длн любых η_1, η_2 из B_1 выполнены неравенства:

$$\begin{gathered} c_2^0\big|f_M^2(\eta_1) + f_M^2(\eta_2) + 1\big|^{1/2} \leqslant \big|f_M(\eta_1) - f_M(\eta_2)\big|/|\eta_1 - \eta_2| \leqslant \\ \leqslant c_3^0\big|f_M^2(\eta_1) + f_M^2(\eta_2) + 1\big|^{q/2}, \quad q \geqslant 1. \end{gathered} \tag{0.3}$$

Постоянные в неравенствах будем нумеровать двумя индексами c_j^i, где i — номер параграфа, c_j^0 обозпачают постояппые в неравенствах во введении.

Условия (0.2), (0.3), по существу, характеризуют распределение частиц при удалении па бескопечность. Например, опи выполнепы, если $f_M(\eta) = f(\eta)$, где $f(\eta)$ — диффеоморфизм B_1 на R^3, который в некоторой окрестности $|\eta| = 1$ совпадает с отображением

$$f(\eta) = \eta\theta(\eta/|\eta|)\big(1 - |\eta|\big)^{-m}, \tag{0.4}$$

где θ — гладкая положительная функция, q в (0.3) равно $(m+1)/m$.

Заметим, что из условий (0.2), (0.3), вообще говоря, не следует, что $f_M(\eta)$ — отображение B_1 на R^3.

Пусть q_M удовлетворяет условиям

$$\big|q_M(\eta)\big| \leqslant c_4^0, \quad \big|q'_M(\eta)\big| = \left|\frac{\partial q_M}{\partial \eta}\right| = \sum_i \left|\frac{\partial q_M}{\partial \eta_i}\right| \leqslant c_5^0. \tag{0.5}$$

Теорема (локальная). *Пусть* ε, δ $(0 < \varepsilon < 1, 0 < \delta < 1)$ — *некоторые числа,* f_M, q_M *удовлетворяют условиям* (0.2), (0.3), (0.5). *Найдется* $M_0(\varepsilon, \delta)$ *такое, что при* $M > M_0$ *и при*

$$0 \leqslant t \leqslant \frac{c_2^0(1-\varepsilon)M^{\alpha-1}(1-\delta)}{GM^\beta + \big[G^2M^{2\beta} + Fc_2^0(1-\varepsilon)M^{2-\alpha}\big]^{1/2}} \tag{0.6}$$

($G \geqslant \max\limits_x \big|g_M(x)\big|$, $F \geqslant \max\limits_{\xi \in R^3} \left|\int\limits_{B_1} q_M(\eta)\dfrac{\xi - f_M(\eta)}{\big|\xi - f_M(\eta)\big|^3}\,d\eta\right|$, c_2^0 *определено в* (0.3)) *существует решение задачи* (0.1) *и выполняется соотношение:*

$$\left|\ddot{r}^k(t) - \frac{1}{M^{2\alpha-3}}\int\limits_{B_1} g_M(\eta)\frac{f_M(\eta) - f_M(k/M)}{\big|f_M(\eta) - f_M(k/M)\big|^3}d\eta\right| \leqslant$$
$$\leqslant c_6^0 \ln M/\varepsilon^3 M^{2\alpha-2}\big(f_M^2(k/M) + 1\big)^{(3-q)/2}, \tag{0.7}$$

число q *определено в* (0.3).

Формула (0.7) показывает, что в указанном промежутке времени траектории частиц асимптотически близки к параболам. Из этой формулы следует, что начальные ускорения $\ddot{r}^k(0)$ ограничены, вообще говоря, лишь при $\alpha \geqslant 3/2$ $(\sigma \geqslant 1/2)$. Заметим, что в теореме величины масс (зарядов) предполагаются медленно меняющимися при переходе от частицы к соседней частице. В то же время этого предположения нет относительно начальных скоростей.

Перейдем теперь к формулировке результата для времен, больших по сравнению с (0.6). Предположим сначала, что

$$\alpha + 2\beta < 3. \tag{0.8}$$

Пусть

$$0 \leqslant t \leqslant \psi(M)T \leqslant c_7^0(M^{3\alpha-3}/\ln M)^{1/2}, \tag{0.9}$$

где c_7^0 — достаточно малое число. Относительно f_m предполагаются выполненными следующие условия: f_M — диффеоморфизм B_1 на R^3,

$$|\partial f_M^{-1}/\partial x| \leqslant c_8^0/(1+|x|) \quad \forall x \in R^3, \tag{0.10}$$

где φ^{-1} — обратная функция к φ,

$$|\partial^{|k|} f_M^{-1}/\partial x^k| \leqslant c_9^0(M)/(1+|x|), \quad |k| = 2,\ 3, \tag{0.11}$$

$$\frac{Df_M^{-1}}{Dx} > 0, \quad \text{где} \quad \frac{D\varphi}{Dx} = \det\Big(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\Big), \tag{0.12}$$

$$\Big|\frac{\partial}{\partial x}\frac{Df_M^{-1}}{Dx}\Big| \leqslant \frac{c_{10}^0}{1+|x|^3}, \tag{0.13}$$

$$\Big|\frac{\partial}{\partial x}\frac{Df_M^{-1}}{Dx}\Big| \leqslant \frac{c_{11}^0(M)}{1+|x|}\cdot\Big|\frac{Df_M^{-1}}{Dx}\Big|. \tag{0.14}$$

Заметим, что условия (0.10)–(0.14) выполнены для достаточно гладкого отображения $f(\eta)$ вида (0.4).

Пусть g_M удовлетворяет условиям:

$$|g_M(x)| \leqslant c_{12}^0, \tag{0.15}$$

$$|g_M(x)| \leqslant c_{13}^0(M)/(1+|x|)^2, \tag{0.16}$$

$$|\partial^2 g_M/\partial x^2| \leqslant c_{14}^0(M), \tag{0.17}$$

$$M^{\beta-\alpha}\psi(M)|\partial g_M/\partial x| \leqslant c_{15}^0. \tag{0.18}$$

Условие (0.18) характеризует допустимое изменение начальной скорости при переходе от частицы к соседней частице. Заметим, что условие (0.16) не означает стремления к нулю начальных скоростей периферийных частиц, так как $c_{13}^0(M)$, вообще говоря, — неограниченно возрастающая функция M. Действительно, например, при $g_M(x) = M^s\varphi(x/|x|)/(M^s+|x|^2)$ и $f(\eta) = \eta/(1-|\eta|)^m$, $s > 2m$, для периферийных частиц будем иметь

$$g_M(f_M(k/M)) = \varphi(k/|k|) + \beta_{M,k},$$

где $|\beta_{M,k}| \to 0$ при $M \to \infty$, $|k/M| \to 1$.

Таким образом, отображение φ задает распределение начальных скоростей периферийных частиц. В проведенном рассуждении существенным является то, что k/M принадлежит $B_{1-3/M}$.

Условие (0.16) не является существенным. Несколько усложняя технику, можно было бы заменить его требованием ограниченности функции g_M (см. замечание 3.2).

На функцию $g_M(\eta)$ наложим условие

$$\left|\partial^2 q_M(\eta)/\partial\eta^2\right| \leqslant c_{16}^0(M). \tag{0.19}$$

Теорема (закон свободного падения). *Пусть* α *и* β *связаны условием* (0.8), *функция* f_M *— диффеоморфизм* B_1 *на* R^3, *причем выполнены соотношения* (0.2), (0.3) *с* $q < 3/2$, (0.10)–(0.14), *функция* g_M *удовлетворяет соотношениям* (0.15)–(0.18), q_M *удовлетворяет условиям* (0.5), (0.19). *Далее, пусть в промежутке* (0.9) *задача* (0.1) *имеет решение, удовлетворяющее гипотезе разреженности. Тогда решение* (0.1) *в промежутке* (0.9) *асимптотически близко к параболическим траекториям:*

$$\left|r^k(t) - r^k(0) - \frac{t}{M^{2\alpha-3}} \int\limits_{B_1} q_M \frac{f_M(\eta) - f_M(k/M)}{\left|f_M(\eta) - f_M(k/M)\right|^3} d\eta\right| \leqslant$$

$$\leqslant c_{17}^0 \frac{t}{M^{2\alpha-3}} \left(\frac{\ln M}{M} + \frac{\psi^2(M)}{M^{2\alpha-3}}\right)^{2/5} (\ln M)^{3/5}. \tag{0.20}$$

Пусть $\beta = 0$, $\alpha = 3/2$. Тогда в локальной теореме интервал времени имеет величину порядка $t_0 M^{1/4}$, в то время как в основной теореме интервал времени достигает величины порядка $t_0 M^{3/4}/(\ln M)^{1/2}$.

При некоторых дополнительных предположениях формула (0.20) допускает уточнение. Именно, пусть $\overline{x}_M(\tau, \xi)$ — решение следующей задачи:

$$\frac{\partial^2 \overline{x}_M}{\partial\tau^2} = k_1(M) \int\limits_{B_1} q_M(\eta) \frac{\overline{x}_M(\tau, f_M(\eta)) - \overline{x}_M(\tau, \xi)}{\left|\overline{x}_M(\tau, f_M(\eta)) - \overline{x}_M(\tau, \xi)\right|^3} d\eta + \overline{P}_M(\tau, \xi),$$

$$\overline{x}_M(0, \xi) = \xi, \quad \frac{\partial \overline{x}_M}{\partial\tau}(0, \xi) = k_2(M) g_M(\xi), \quad k_1(M) = \psi^2(M) M^{3-3\alpha},$$

$$k_2(M) = M^{\beta-\alpha}\psi(M), \quad 0 \leqslant \tau \leqslant T, \quad 0 \leqslant \psi(M) T \leqslant c_7^0 (M^{3\alpha-3}/\ln M)^{1/2}. \tag{0.21}$$

Предположим, что решение (0.21) удовлетворяет условиям:

$$
\begin{gathered}
\left|\overline{x}_M^{(1)}\right| \leqslant \frac{c_{18}^0(M)}{1+\xi^2}, \quad \left|\frac{\partial^2 \overline{x}_M}{\partial \xi^2}\right| \leqslant c_{19}^0(M), \\
\left|\frac{\partial \overline{x}_M^{(2)}}{\partial \xi}\right| \leqslant c_{20}^0 k_1(M), \quad \text{где} \quad \varphi^{(i)} = \frac{\partial^i \varphi}{\partial \tau^i}.
\end{gathered} \tag{0.22}
$$

Теорема (уточнение закона свободного падения). *В условиях предыдущей теоремы (без предположения* (0.8)), *если дополнительно выполнены соотношения* (0.22), *справедливо неравенство*

$$
\begin{gathered}
\left|\dot{r}^{(k)}(t) - \frac{\partial \overline{x}_M}{\partial \tau}\big(\tau,\, f_M(k/M)\big)\Big|_{\tau=t/\psi(M)} \cdot \frac{M^\alpha}{\psi(M)}\right| \leqslant \\
\leqslant c_{21}^0 \frac{M^\alpha t}{\psi^2(M)} \Big(\frac{\ln M}{M} k_1(M) + |||\overline{P}_M||| \Big|_{\tau=t/\psi(M)}\Big)^{2/5} \big(k_1(M)\ln M\big)^{3/5},
\end{gathered} \tag{0.23}
$$

где

$$
|||\overline{P}_M||| = \max_{0\leqslant \tau' \leqslant \tau} \left\{ \int\limits_{R_3} \left|\overline{P}_M(\tau',\, \xi)\right|^2 d\xi \right\}^{1/2}.
$$

Оценка (0.20) следует из (0.23), если положить

$$
\overline{x}_M(\tau,\, \xi) = \xi + \tau k_2(M) g_M(\xi) + \frac{k_1(M)\tau^2}{2} \int\limits_{B_1} q_M \frac{f_M(\eta) - \xi}{\left|f_M(\eta) - \xi\right|^3} d\eta; \tag{0.24}
$$

при этом в случае (0.8) $|||\overline{P}_M||| \leqslant c_{22}^0 k_1^2(M)$. Для $\overline{x}_M$ вида (0.24) условия (0.22) проверяются непосредственно. Задача (0.21) представляет собой задачу Коши для системы характеристик уравнения Власова, описывающего бесстолкновительную плазму [12]. Некоторые математические исследования задачи (0.21) содержатся в [13].

Отображения f_M, g_M, q_M, удовлетворяющие всем перечисленным выше условиям, будем называть гладкими, регулярными на бесконечности атласами.

Дадим, наконец, формулировку теоремы о связи траекторий задачи (0.1) с пылевидной гидродинамикой, т.е. с задачей (0.21), когда $\overline{P}_M = 0$, $k_1(M) = 1$, $k_2(M) = 1$. Пусть $0 \leqslant t \leqslant TM^{3(\alpha-1)/2}$

($k_1 = 1$), $\beta = (3-\alpha)/2$ ($k_2 = 1$), и пусть $f_M(\xi) = f(\xi)$, $g_M(x) = g(x)$, $q_M(\xi) = q(\xi)$ задают гладкие, регулярные на бесконечности атласы. Предположим еще, что в каждый момент времени в процессе движения существует гладкий, регулярный на бесконечности атлас $M^\alpha f(t, M, \xi)$ распределения координат точечных масс, удовлетворяющий условию

$$\left|f(t, M, \xi)\right| \geqslant c_{23}^0\left(1-|\xi|\right)^{-m_1}, \quad m_1 > 0.$$

Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема (гидродинамическое приближение). *Для достаточно малого T существует решение задачи* (0.21) *при* $k_1(M) = k_2(M) = 1$, $\overline{P}_M = 0$ *для всех* t, $0 \leqslant t \leqslant TM^{3(\alpha-1)/2}$, *и выполняется оценка*

$$\left|\dot{r}^k(t) - M^{(3-\alpha)/2}\frac{\partial \overline{x}}{\partial \tau}(\tau, k/M)\Big|_{\tau=t/M^{3(\alpha-1)/2}}\right| \leqslant c_{24}^0 t M^{3-2\alpha}(\ln M/M)^{2/5}$$

при $0 \leqslant t \leqslant TM^{3(\alpha-1)/2}$.

Отметим, что, в отличие от традиционной статистической связи между движением частиц и гидродинамикой, теорема о гидродинамическом приближении дает оценку близости траекторий.

Теоремы о законе свободного падения и о гидродинамическом приближении доказываются по единой схеме. Она аналогична схеме перехода от задачи о нопоречных колебаниях упругой нити с сосредоточенными массами к задаче о поперечных колебаниях струны. В случае колебаний нити с сосредоточенными массами теорема о близости движения масс к движению соответствующих точек струны связана с априорными оценками для гиперболических уравнений. В рассматриваемом в работе случае аналогом уравнения колебаний струны является уравнение характеристик для уравнения Власова (0.21) (правая часть этого уравнения получается из правой части уравнения (0.1) заменой суммы на интеграл). Получение теоремы о приближении решения задачи (0.1) траекториями, связанными с решением задачи (0.21), затруднено тем, что уравнение в вариациях для (0.21), которое при доказательстве теоремы о приближении играет существенную роль, содержит в правой части неограниченный оператор. Кстати, отметим, что закон тяготения Ньютона имеет в некотором смысле предельную особенность. Именно, если бы степень знаменателя в интеграле в (0.21) была бы на $\varepsilon > 0$ меньше трех, то правая часть уравнения в вариациях была бы ограниченным оператором и получение теоремы о близости не представляло бы труда. В связи с этим обстоятельством вводятся нован независиман нереметнан $x = \overline{x}(\tau, \xi)$ и новые искомые функции

$$\rho(x, \tau) = q\big(f^{-1}(\overline{x}^{-1}(\tau, x))\big)\frac{Df^{-1}(\overline{x}^{-1}(\tau, x))}{Dx},$$

$$u(x, \tau) = \frac{\partial\overline{x}(\tau, \xi)}{\partial\tau}\bigg|_{\xi=\overline{x}^{-1}(\tau, x)}.$$

Задача (0.21) нереходит в задачу

$$\partial\rho/\partial\tau + \operatorname{div}\rho u = 0, \quad \partial u/\partial\tau + (u, \nabla)u = -\nabla\Phi, \quad \Delta\Phi = 4\pi\rho,$$
$$\rho(x, 0) = q\big(f^{-1}(x)\big)\cdot\frac{Df^{-1}(x)}{Dx}, \quad u(x, 0) = g(x). \tag{0.25}$$

Система уравнений (0.25) называется системой уравнений пылевидной гидродинамики и имеет непосредственную механическую интернретацию. Она описывает движение сплошной среды, точки которой движутся в собственном гравитационном поле с нотенциалом Φ, порожденном распределением плотности $\rho(x, \tau)$. Априорные оценки нолучаются для системы (0.25), а затем они нереносятся на решения задачи (0.21). Основным предположением, при котором доказаны априорные оценки, является предноложение об ограниченности $\partial u/\partial x$ или, что то же, об ограниченности $\partial^2 x/\partial\tau\partial\xi$. Доказательство ограниченности соответствующих производных является одним из центральных результатов работы (леммы 6.1, 7.1). При нроведении этих доказательств используются гинотезы разреженности и существования атласов.

Полученные в работе результаты донускают непосредственные обобщения. Отметим некоторые из них. Во-нервых, можно рассмотреть постановку задачи, когда частицы, взаимодействующие но закону тяготения Ньютона (притяжения - отталкивания Кулона), находятся во внешнем силовом поле, на которое они не влияют. В этом случае в правой части уравнения (0.1) добавляется слагаемое, соответствующее внешнему силовому нолю, что приведет к неоднородной системе нылевидной гидродинамики. Во-вторых, нредположение о существовании гладкого атласа распределения масс (зарядов) означает, что близкие частицы имеют близкие массы (заряды). Это условие существования гладкого атласа расннределения масс (зарядов) всегда выполнено, если все массы (заряды) частиц одинаковы. Можно рассмотреть случай, когда в системе частиц имеются частицы с массами (зарядами) днух сортов. Точно так же можно рассмотреть случай, когда массы (заряды) частиц нринимают конечное число значений, не зависящее от N. В этой задаче для каждой совокупности частиц с одинаковыми массами (зарндами) нужно вводить свои атласы распределепин координат, масс (зарядов), скоростей. Уравнения пылевидной гидродинамики в рассматрнваемом случае будут представлять собой снстему уравпений для двух взаимопроникающих, гравитирующих сплошных сред. Для этой снстемы по той же схеме, что н в случае пылевидной гидродинамики, можпо получить априорные оценки, аналогичные оценкам для (0.25). Кроме того, подчеркнем еще раз, что апрнорпые оценки можно получать в пространствах квадратнчно-суммируемых с весом функций, что позволяет снять предположения о характере новедения на бесконечности скоростей частиц.

§ 1. Оценки интегральных сумм

Элементарным кубом будем называть куб с ребром длины $1/M$ и вершинами, расположенными в точках k/M, где $k = (k_1, k_2, k_3)$, k_i — целые числа. Между элементарными кубами и точками вида k/M можно установить взаимно однозначное соответствие. Именно, элемептарному кубу ностаним в соответствие вершину k/M, в которой сумма координат наибольшая. Этот элементарпый куб обозначается $Q_{k/M}$. Пусть z — точка из B_1 (B_1 — единичпый открытый шар в R^3 с центром в начале координат). Рассмотрим куб $Q_{k/M}$, содержащий z. Из разбиения R^3 на элементарные кубы удалим $Q_{k/M}$ и s слоев элементарных кубов, окаймляющих $Q_{k/M}$. Полученное множество, являющееся дополнением к кубу, обозначим $P_s(z)$. Пусть $\Omega_s(z)$ — множество η из B_1, для которых $|z - \eta| \geqslant s/M$.

Лемма 1. *При* $s > 1$

$$\frac{1}{M^3}\sum \frac{1}{|z-k/M|^p} \leqslant A_p = \left[\frac{(s+1)^2+2}{s^2}\right]^{p/2} \int\limits_{\Omega_s(z)} \frac{d\eta}{|z-\eta|^p}, \qquad (1.26)$$

$$k/M \in P_s(z) \cap B_{1-sM}.$$

Доказательство. Для k/M из $P_s(z) \cap B_{1-sM}$ куб $Q_{k/M}$ содержится в $\Omega_s(z)$. Так как отпошение расстояний от точки z до любых двух точек в $Q_{k/M}$ из $P_s(z)$ не более чем $\left((s+1)^2+2\right)^{1/2}/s$, то отсюда вытекает утверждение леммы. ■

Замечание 1. Величина A_p допускает оценку

$$A_p \leqslant 4\pi\left[\frac{(s+1)^2+2}{s^2}\right]^{p/2} \int\limits_{s/M}^{1} \frac{dr}{r^{p-2}}.$$

Пусть $\psi\colon B_1 \to R^3$ удовлетворяет условиям:

Для любых ξ, η из $Q_{k/M}$, если $Q_{k/M}$ удален от границы B_1 (т. е. $|x| = 1$) не менее чем на $1/M$, существует число c_1^1 такое, что

$$c_1^1\big(|\psi(\eta)| + 1\big) \geqslant |\psi(\xi)|. \tag{1.27}$$

Далее, для любых ξ, η из B_1

$$\begin{gathered} c_2^1|\psi^2(\eta) + \psi^2(\xi) + 1|^{1/2} \leqslant |\psi(\eta) - \psi(\xi)|/|\eta - \xi| \leqslant \\ \leqslant c_3^1|\psi^2(\eta) + \psi^2(\xi) + 1|^{q/2}, \quad q \geqslant 1. \end{gathered} \tag{1.28}$$

Пусть $F(\lambda, \eta)\colon R^3 \times B_1 \to R^3$ — ненрерывное отображение, удовлетворяющее условиям:

$$|F(\lambda, \eta)| \leqslant c_4^1|\lambda|, \tag{1.29}$$

$$|F(\lambda, \eta_1) - F(\lambda, \eta_2)| \leqslant c_5^1|\lambda|\,|\eta_1 - \eta_2|, \tag{1.30}$$

$$|F(\lambda_1, \eta) - F(\lambda_2, \eta)| \leqslant c_6^1|\lambda_1 - \lambda_2|. \tag{1.31}$$

Лемма 2. *Пусть $x = \psi(z)$. Тогда выполнено соотношение*

$$\begin{gathered} A = \left|\frac{1}{M^3}\sum_{k\in S(z)} \frac{F\big(x - \psi(k/M), k/M\big)}{\big|x - \psi(k/M)\big|^3} - \int\limits_{B_1} \frac{F\big(x-\psi(\eta), \eta\big)}{\big|x - \psi(\eta)\big|^3}\,d\eta\right| \leqslant \\ \leqslant c_7^1 \ln M/M(x^2+1)^{(3-q)/2}, \end{gathered} \tag{1.32}$$

где $S(z)$ — множество векторов k с целыми координатами и таких, что k/M из $B_{1-3/M}$ и $|z - k/M| \geqslant d/M$.

Доказательство. Заметим, что интеграл в (1.7) существует в силу предположений (1.3), (1.4). Представим B_1 в виде

$$B_1 = Q^1 \bigcup Q^2 \bigcup_k Q_{k/M}, \quad k \in S(z),$$

где Q^1 — пересечение множеств B_1 и $|z - \eta| \leqslant d_1/M$ (d_1 — некоторое положительное число), Q^2 — некоторое множество, содержащееся в шаровом слое $B_1 \setminus B_{1-5/M}$. Из условий (1.3), (1.4) следует:

$$\left|\int\limits_{Q^1} \frac{F\big(x - \psi(\eta), \eta\big)}{\big|x - \psi(\eta)\big|^3}\,d\eta\right| \leqslant c_4^1 \int\limits_{|z-\eta|\leqslant d_1/M} \frac{d\eta}{\big|\psi(z) - \psi(\eta)\big|^2} \leqslant \frac{c_8^1}{M(x^2+1)}. \tag{1.33}$$

Далее, имеют место неравенства:

$$
\left| \int\limits_{Q^3} \frac{F\bigl(x - \psi(\eta),\, \eta\bigr)}{\bigl|x - \psi(\eta)\bigr|^3}\, d\eta \right| \leqslant c_4^1 \int\limits_{B_1 \setminus B_{1-5/M}} \frac{d\eta}{\bigl|\psi(z) - \psi(\eta)\bigr|^2} \leqslant
$$

$$
\leqslant \frac{c_9^1}{x^2 + 1} \int\limits_{B_1 \setminus B_{1-5/M}} \frac{d\eta}{|z - \eta|^2} = \frac{c_9^1 J}{x^2 + 1}.
$$

Оценим интеграл J:

$$
J = \int\limits_{\substack{B_1 \setminus B_{1-5/M} \\ \eta_3 \geqslant 0}} \frac{d\eta}{|z - \eta|^2} + \int\limits_{\substack{B_1 \setminus B_{1-5/M} \\ \eta_3 \leqslant 0}} \frac{d\eta}{|z - \eta|^2} = J_+ + J_-.
$$

Область $B_1 \setminus B_{1-5/M}$, $\eta_3 \geqslant 0$ диффеоморфно с ограниченным по M якобианом отобразим на область

$$
1 - 1/M \leqslant \sigma_1 \leqslant 1, \quad \sigma_2^2 + \sigma_3^2 \leqslant 1.
$$

При этом диффеоморфизме z переходит в y. Следовательно, для J_+ имеет место оценка

$$
J_+ \leqslant c_{10}^1 \int\limits_{1-1/M}^{1} d\sigma_1 \int\limits_{-1}^{1} d\sigma_2 \int\limits_{-1}^{1} \frac{d\sigma_3}{|y - \sigma|^2} = c_{10}^1 J_1,
$$

$$
J_1 \leqslant \pi \int\limits_{1-1/M}^{1} d\sigma_1 \int\limits_{-1}^{1} \frac{d\sigma_2}{\bigl(|y_1 - \sigma_2|^2 + |y_2 - \sigma_2|^2\bigr)^{1/2}} \leqslant
$$

$$
\leqslant \pi\sqrt{2} \int\limits_{1-1/M}^{1} d\sigma_1 \int\limits_{-1}^{1} \frac{d\sigma_2}{|y_1 - \sigma_1| + |y_2 - \sigma_2|} \leqslant
$$

$$
\leqslant 4\pi\sqrt{2} \int\limits_{1-1/M}^{1} \bigl|\ln|\sigma_1 - y_1|\bigr| d\sigma_1 \leqslant \frac{c_{11}^1 \ln M}{M},
$$

откуда получаем, что

$$\left| \int\limits_{Q^2} \frac{F\big(x - \psi(\eta),\, \eta\big)}{\big|x - \psi(\eta)\big|^3}\, d\eta \right| \leqslant \frac{c_{12}^1 \ln M}{(x^2+1)M}. \tag{1.34}$$

Пусть k из $S(z)$. Рассмотрим разность

$$A^k = \frac{1}{M^3} \frac{F\big(x - \psi(k/M),\, k/M\big)}{|x - \psi(k/M)|^3} - \int\limits_{Q_{k/M}} \frac{F\big(x - \psi(\eta),\, \eta\big)}{|x - \psi(\eta)|^3}\, d\eta =$$

$$= \int\limits_{Q_{k/M}} \frac{F\big(x - \psi(k/M),\, k/M\big) - F\big(x - \psi(\eta),\, \eta\big)}{|x - \psi(k/M)|^3}\, d\eta +$$

$$+ \int\limits_{Q_{k/M}} F\big(x - \psi(\eta),\, \eta\big) \left[\frac{1}{|x - \psi(k/M)|^3} - \frac{1}{|x - \psi(\eta)|^3} \right] d\eta = A_1^k + A_2^k.$$

Из свойств функций ψ, F находим

$$|A_1^k| \leqslant \frac{c_{13}^1}{M^4 |z - k/M|^3 (x^2+1)^{(3-q)/2}}, \tag{1.35}$$

$$|A_2^k| \leqslant \frac{c_{14}^1}{M^4 |z - k/M|^3 (x^2+1)^{(3-q)/2}}. \tag{1.36}$$

Из неравенств (1.8)–(1.11) и леммы 1.1 следует утверждение леммы 1.2. ■

Замечание 2. Неравенство (1.7) остается выполненным с c_7^1, не зависящим от M, и в случае, когда ψ, F зависят от M, если только постоянные в (1.2)–(1.6) не зависят от M.

§ 2. Локальные движения

Рассмотрим задачу (0.1) и сделаем в ней замену переменных $r^k = M^\alpha x^k$. Тогда задача (0.1) перепишется в виде

$$\begin{gathered} M^{3\alpha} \ddot{x}^k(t) = \sum_{j \neq k} q_M^j \big(x^j(t) - x^k(t)\big) / \big|x^j(t) - x^k(t)\big|^3, \\ x^k(0) - f_M(k/M), \quad \dot{x}^k(0) = M^{\beta - \alpha} g_M\big(f_M(k/M)\big), \\ k/M, \quad j/M \in B_{1-3/M}. \end{gathered} \tag{1.37}$$

Пусть f_M удовлетворяет левой части неравенства (0.3). Обозначим через $U_M^{k,\varepsilon}$ множество в R^3:

$$U_M^{k,\varepsilon} = \{x \colon |x - f_M(k/M)| \leqslant c_2^0(1-\varepsilon)/2M\}, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Лемма 3. *Если x^i из $U_M^{i,\varepsilon}$, то*

$$|x^k - x^j| \geqslant \varepsilon |f_M(k/M) - f_M(j/M)|.$$

Доказательство. Действительно,

$$|x^k - x^j| \geqslant \varepsilon |f_M(k/M) - f_M(j/M)| + (1-\varepsilon)|f_M(k/M) - f_M(j/M)| - \\ -|x^k - f_M(k/M)| - |x^j - f_M(j/M)| \geqslant \varepsilon |f_M(k/M) - f_M(j/M)| + \\ + \frac{c_2^0(1-\varepsilon)}{M}\left(\left(f_M^2(k/M) + f_M^2(j/M) + 1\right)^{1/2} - 1\right).$$

■

Лемма 4. *Если x^i из $U_M^{i,\varepsilon}$ и q_M^j ограничены при всех M, j, то*

$$\frac{1}{M^3}\left|\sum_{j\neq k} q_M^j \frac{x^j - x^k}{|x^j - x^k|^3} - \sum_{j\neq k} q_M^j \frac{f_M(j/M) - f_M(k/M)}{|f_M(j/M) - f_M(k/M)|^3}\right| \leqslant \\ \leqslant \frac{c_1^2 \ln M}{\varepsilon^3 M \left(f_M^2(k/M) + 1\right)^{3/2}}, \tag{1.38}$$

где j/M, $k/M \in B_{1-3/M}$, c_1^2 от M и ε не зависит.

Доказательство. Из леммы 2.1 и левой части (0.3) находим

$$\frac{|x^j - x^k - f_M(j/M) + f_M(k/M)|}{|x^j - x^k|^3} \leqslant \frac{c_2^2}{M\varepsilon^3 \left(f_M^2(k/M)+1\right)^{3/2} |k/M - j/M|^3}, \tag{1.39}$$

$$|f_M(j/M) - f_M(k/M)| \left|\frac{1}{|x^j - x^k|^3} - \frac{1}{|f_M(j/M) - f_M(k/M)|^3}\right| \leqslant \\ \leqslant \frac{c_3^2}{\varepsilon^3 \left(f_M^2(k/M) + 1\right)^{3/2} |k/M - j/M|^3}. \tag{1.40}$$

Из неравенств (2.3), (2.4), ограниченности q_M^j и леммы 1.1 следует (2.2). ■

Пусть

$$G \geqslant |g_M(x)|, \quad F \geqslant \left| \int\limits_{B_1} q_M \frac{f_M(\eta) - f_M(k/M)}{\left|f_M(\eta) - f_M(k/M)\right|^3}\, d\eta \right|, \quad F > 0.$$

Теорема 1. *Пусть f_M удовлетворяет условиям* (0.2), (0.3), *q_M удовлетворяет* (0.5). *Тогда для любых ε, δ $(0 < \varepsilon < 1, 0 < \delta < 1)$ найдется $M_0(\varepsilon, \delta)$ такое, что при $M > M_0$ и при*

$$0 \leqslant t \leqslant \frac{c_2^0(1-\varepsilon)M^{\alpha-1}(1-\delta)}{GM^\beta + \left[G^2M^{2\beta} + Fc_2^0(1-\varepsilon)M^{2-\alpha}\right]^{1/2}} \tag{1.41}$$

существует решение задачи (2.1), *причем $x^k(t)$ из $U_M^{k,\varepsilon}$ и*

$$\left| \ddot{x}^k(t) - \frac{1}{M^{3\alpha-3}} \int\limits_{B_1} q_M(\eta) \frac{f_M(\eta) - f_M(k/M)}{\left|f_M(\eta) - f_M(k/M)\right|^3}\, d\eta \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_4^2 \ln M}{\varepsilon^3 M^{3\alpha-2}\left(f_M^2(k/M) + 1\right)^{(3-q)/2}}. \tag{1.42}$$

Доказательство. Утверждение теоремы вытекает из следующих рассуждений. Пусть частица в начальный момент находится в точке $f_M(k/M)$ и имеет начальную скорость $M^{\beta-\alpha}G$. Пусть эта частица движется но лучу в направлении начальной скорости с ускорением $F/M^{3\alpha-3}$. Формула (2.5) укаэывает промежуток времени, в течение которого частица остается во множестве $U_M^{k,\varepsilon}$. Из лемм 2.2, 2.1 следует, что при x^k из $U_M^{k,\varepsilon}$ имеет место оценка (2.6). Следовательно, действительно, точка x^k в пределах $U_M^{k,\varepsilon}$ движется с ускорением, не превосходящим $F/M^{3\alpha-3}$ (с точностью до $o(F/M^{3\alpha-3})$). Теорема доказапа. ■

Из теоремы 2.1 непосредственно вытекает

Теорема 2 (локальная). *В условиях теоремы* 2.1 *для любых ε, δ $(0 < \varepsilon < 1,\ 0 < \delta < 1)$ найдется $M_0(\varepsilon, \delta)$ такое, что* *при $M > M_0$ и t из интервала (2.5) существует решение задачи (0.1) и выполняется соотношение*

$$\left|\ddot{r}^k(t) - \frac{1}{M^{3\alpha-3}} \int\limits_{B_1} q_M(\eta) \frac{f_M(\eta) - f_M(k/M)}{\left|f_M(\eta) - f_M(k/M)\right|^3} d\eta \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_4^2 \ln M}{\varepsilon^3 M^{2\alpha-2} \left(f_M^2(k/M) + 1\right)^{(3-q)/2}}. \quad (1.43)$$

Замечание 3. Из теоремы 2.2 следует, что начальные ускорения частиц имеют порядок $aM^{3-2\alpha}$, т.е. они ограничены нри всех M и k лишь нри $\alpha \geqslant 3/2$.

Замечание 4. Полученные в § 2 результаты непосредственно нереносятся на случай движения частиц, находящихся в некотором внешнем силовом ноле.

§ 3. Уравнения пылевидной гидродинамики

Предположим, что отображение f_M — диффеоморфизм B_1 на R^3. Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial^2 x_M(\tau, \xi)}{\partial \tau^2} = k_1(M) \int\limits_{B_1} q_M(\eta) \frac{x_M(\tau, f_M(\eta)) - x_M(\tau, \xi)}{|x_M(\tau, f_M(\eta)) - x_M(\tau, \xi)|^3} d\eta + P_M(\tau, \xi),$$

$$x_M(0, \xi) = \xi, \quad \frac{\partial x_M}{\partial \tau}(0, \xi) = k_2(M) g_M(\xi), \quad 0 \leqslant \tau \leqslant T, \quad \xi \in R^3. \quad (1.44)$$

Пусть $x_M(\tau, \xi)$ удовлетворнет условию

$$0 < c_1^3 \leqslant \frac{|x_M(\tau, \xi) - x_M(\tau, \eta)|}{|\xi - \eta|}. \quad (1.45)$$

Из (3.2) следует, что существует обратная фуякция x_M^{-1}. Предположим, что при фиксированном M $x_M(\tau, \xi)$, $x_M^{-1}(\tau, x)$ — дважды гладкие функции своих переменных. Рассмотрим функции

$$\rho_M(\tau, x) = q_M\left(f_M^{-1}\left(x_M^{-1}(\tau, x)\right)\right) \frac{D f_M^{-1}\left(x_M^{-1}(\tau, x)\right)}{Dx},$$

$$u_M(\tau, x) = x_M^{(1)}(\tau, \xi)\Big|_{\xi = x_M^{-1}(\tau, x)},$$

где $\varphi^{(i)}(\tau, \xi) = \dfrac{\partial^i \varphi}{\partial \tau^i}(\tau, \xi)$.

Лемма 5. *Функции ρ_M, u_M удовлетворяют уравнению*

$$\frac{\partial \rho_M}{\partial \tau} + \operatorname{div} \rho_M u_M = 0.$$

Доказательство. Пусть Ω_τ — область в R^3, прообразом которой при отображении $x - x_M(\tau, \xi)$ является область Ω_0. Тогда имеет место равенство

$$\frac{d}{d\tau} \int\limits_{\Omega_\tau} \rho_M(\tau, x)\, dx = \frac{d}{d\tau} \int\limits_{\Omega_0} q_M\big(f_M^{-1}(\xi)\big) \frac{D f_M^{-1}}{D\xi}(\xi)\, d\xi = 0. \tag{1.46}$$

С другой стороны,

$$\frac{d}{d\tau} \int\limits_{\Omega_\tau} \rho_M(\tau, x)\, dx = \int\limits_{\Omega_0} \bigg\{ \Big[\nabla_x \rho_M(\tau, x_M(\tau, \xi)) \frac{\partial x_M}{\partial \tau}(\tau, \xi) +$$

$$+ \frac{\partial \rho_M}{\partial \tau}(\tau, x_M(\tau, \xi)) \Big] \frac{D x_M(\tau, \xi)}{D\xi} + \rho_M(\tau, x_M(\tau, \xi)) \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{D x_M}{D\xi}(\tau, \xi) \bigg\} d\xi =$$

$$= \int\limits_{\Omega_\tau} \Big[\frac{\partial \rho_M}{\partial \tau}(\tau, x) + u_M(\tau, x) \nabla_x \rho_M(\tau, x) \Big] dx +$$

$$+ \int\limits_{\Omega_\tau} \rho_M(\tau, x) \Big(\frac{D x_M^{-1}(\tau, x)}{Dx} \Big)^{-1} \Big(\frac{\partial}{\partial \tau} \frac{D x_M(\tau, \xi)}{D\xi} \Big) \bigg|_{\xi = x_M^{-1}(\tau, x)} dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega_\tau} \Big[\frac{\partial \rho_M}{\partial \tau}(\tau, x) + u_M(\tau, x) \nabla_x \rho_M(\tau, x) + \rho_M(\tau, x) \operatorname{div} u_M(\tau, x) \Big] dx.$$

В силу произвольности Ω_τ, из условия (3.3) вытекает утверждение леммы. ∎

Лемма 6. *Пусть $x_M^{-1}(\tau, x)$ удовлетворяет условию (3.2),*

$$\frac{D x_M^{-1}}{Dx} > 0, \tag{1.47}$$

$f_M(\eta)$ удовлетворяет условиям (0.10), (0.12) и $q_M(\eta)$ — ограниченная функция. Тогда для функции $\rho_M(\tau, x)$ выполняется неравенство

$$0 < \rho_M(\tau, x) < \frac{c_2^3}{(1 + x^2)^{3/2}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия (3.2) следует, что

$$\left|\frac{\partial x_M^{-1}}{\partial x}\right| \leqslant c_3^3.$$

Следовательно,

$$0 < \frac{Dx_M^{-1}}{Dx} < c_4^3.$$

Далее,

$$\frac{Df_M^{-1}(x_M^{-1}(\tau,\, x))}{Dx} = \frac{Df_M^{-1}}{Dy}(y)\bigg|_{y=x_M^{-1}(\tau,\,x)} \cdot \frac{Dx_M^{-1}}{Dx}(\tau,\, x).$$

Из последнего соотношения и условий леммы вытекает требуемое неравенство для $\rho_M(\tau,\, x)$.

Положим

$$\Phi_M(\tau,\, x) = -\int\limits_{R^3} \frac{\rho_M(\tau,\, \lambda)}{|x-\lambda|}\, d\lambda.$$

Тогда находим, что

$$\Delta_x\Phi_M(\tau,\, x) = \int\limits_{R^3} \frac{(x-\lambda)\rho_M(\tau,\, \lambda)}{|x-\lambda|^3}\, d\lambda = -\int\limits_{B_1} q_M(\eta)\frac{x_M(\tau,\, f_M(\eta)) - x}{|x_M(\tau,\, f_M(\eta)) - x|^3}\, d\eta,$$

$$\Delta_x\Phi_M = 4\pi\rho_M(\tau,\, x). \tag{1.48}$$

Лемма 7. *Функции $\rho_M(\tau,\, x)$, $u_M(\tau,\, x)$, $\Phi_M(\tau,\, x)$ являются решением задачи*

$$\frac{\partial\rho_M}{\partial\tau} + \operatorname{div}\rho_M u_M = 0, \tag{1.49}$$

$$\frac{\partial u_M}{\partial\tau} + (u_M,\, \nabla)u_M = -k_1(M)\nabla\Phi_M + p_M(\tau,\, x), \tag{1.50}$$

$$\Delta\Phi_M = 4\pi\rho_M, \tag{1.51}$$

$$u_M(0,\, x) = k_2 g_M(x), \quad \rho_M(0,\, x) = q_M\big(f_M^{-1}(x)\big)\frac{Df_M^{-1}}{Dx}(x),$$

где

$$p_M(\tau,\, x) = P_M(\tau,\, \xi)\Big|_{\xi = x_M^{-1}(\tau,\, x)}.$$

Доказательство. Утверждение леммы непосредственно следует из задачи (3.1), полученных выше результатов и равенства

$$\frac{\partial^2 x_M(\tau,\xi)}{\partial\tau^2} = \left[\frac{\partial u_M}{\partial\tau}(\tau,x) + (u_M(\tau,x),\nabla_x)u_M(\tau,x)\right]\bigg|_{x=x_M(\tau,\xi)}.$$

Замечание 5. Система (3.6)–(3.8) имеет естественную физическую интерпретацию. Заметим, что заменой τ коэффициент $k_1(M)$ в (3.1) можно сделать единичным. При этой же замене $k_1(M)$ исчезает в (3.7). Получающаяся при такой замене система уравнений описывает динамику сплошной среды, состоящей из заряженных (гравитирующих) частиц, находящихся в собственном электрическом (гравитационном) поле. Систему (3.6)–(3.8) называют системой уравнений пылевидной гидродинамики.

Пусть $\overline{x}_M(\tau,\xi)$ — решение задачи (3.1) для $\overline{f}_M$, $\overline{g}_M$, $\overline{q}_M$, $\overline{P}_M$ и по $\overline{x}_M$ можно построить функции $\overline{u}_M$, $\overline{\rho}_M$, $\overline{\Phi}_M$, удовлетворяющие системе (3.6)–(3.8). Предположим, что

$$\left|\frac{\partial\overline{u}_M^i}{\partial x_j} + \frac{\partial\overline{u}_M^j}{\partial x_i}\right| \leqslant c_{\overline{u}}, \tag{1.52}$$

$$|\operatorname{div} u_M| \leqslant c_u, \tag{1.53}$$

$$|u_M| \leqslant \frac{c_M}{1+|x|^r}, \quad |\overline{u}_M| \leqslant \frac{c_M}{1+|x|^r}, \quad r > \frac{2}{3}, \tag{1.54}$$

$$u_M,\ \overline{u}_M \in L_2(R^3), \tag{1.55}$$

$$0 \leqslant \rho_M \leqslant c_\rho, \tag{1.56}$$

$$\begin{gathered} |\rho_M^{(i)}| \leqslant \frac{c_M}{1+|x|^3}, \quad |\overline{\rho}_M^{(i)}| \leqslant \frac{c_M}{1+|x|^3}, \\ i = 0, 1, \quad x \in R^3, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant T. \end{gathered} \tag{1.57}$$

Кроме того, предполагается, что при фиксированном M ρ_M — достаточно гладкая функция x, τ.

Обозначим

$$w_M = u_M - \overline{u}_M, \quad \rho_M - \overline{\rho}_M = \gamma_M, \quad \Psi_M = \Phi_M - \overline{\Phi}_M,$$
$$s_M = p_M - \overline{p}_M, \quad \|\varphi\| = \left\{\int_{R^3} |\varphi|^2\,dx\right\}^{1/2}.$$

Теорема 3. *Для функции w_M при $0 \leqslant \tau \leqslant T$ имеет место оценка*

$$\|w_M\| \leqslant \tau k_4 S_M(\tau) + \left\{ \tau^2 k_4^2 S_M^2(\tau) + k_4 \|g_M - \overline{g}_M\|^2 k_2^2(M) + \right.$$

$$\left. + 2k_1^2(M) k_3 \left\| \int\limits_{R^3} \frac{x-\lambda}{|x-\lambda|^3} \left[q_M\big(f_M^{-1}(\lambda)\big) \frac{Df_M^{-1}}{D\lambda} - \overline{q}_M\big(\overline{f}_M^{-1}(\lambda)\big) \frac{D\overline{f}_M^{-1}}{D\lambda} \right] d\lambda \right\|^2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

где $S_M(\tau) = \max\limits_{0 \leqslant \tau' \leqslant \tau} \|s_M(\tau')\|$, $k_4(c_\rho + c_{\overline{u}},\, c_u + c_{\overline{u}})$ — локально ограниченная функция своих аргументов,

$$k_3(\tau,\, c_\rho + c_u) = \frac{e^{\tau A(c_\rho + c_u)} - 1}{A(c_\rho + c_u)},$$

A — постоянная, не зависящая от данных задачи.

Доказательство. Из уравнений (3.7) следует, что

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\|w_M\|^2 \leqslant A_1(c_{\overline{u}} + c_u + 1)\|w_M\|^2 + k_1^2(M)\|\nabla\Psi_M\|^2 + \|s_M\|\,\|w_M\|. \tag{1.58}$$

При получении (3.15) были использованы предположения (3.9)–(3.12). Из уравнений (3.6), (3.8) находим

$$\frac{d}{d\tau}\|\nabla_x \Psi_M\|^2 \leqslant A_2 c_\rho \|w_M\|^2 + A_3(c_\rho + c_{\overline{u}})\|\nabla_x \Psi_M\|^2. \tag{1.59}$$

При выводе (3.16) используются предположения (3.9), (3.11)–(3.14) и предположение о гладкости ρ_M. Из (3.16) вытекает неравенство

$$\|\nabla\Psi_M\|^2 \leqslant \left(\|\nabla\Psi_M\big|_{\tau=0}\|^2 + A_2 c_\rho \int\limits_0^\tau \|w_M\|^2 d\tau' \right) \cdot \exp\big(\tau A_3(c_\rho + c_{\overline{u}})\big). \tag{1.60}$$

Из (3.15) и (3.17) находим, что

$$\|w_M\|^2 \leqslant \|w_M\big|_{\tau=0}\|^2 + 2k_1^2(M)\|\nabla\Psi_M\big|_{\tau=0}\|^2 \frac{e^{\tau A_3(c_\rho + c_{\overline{u}})} - 1}{A_3(c_\rho + c_{\overline{u}})} +$$

$$+ \int\limits_0^\tau \|w_M\|^2 \left[2A_1(c_{\overline{u}} + c_u) + 2k_1^2(M) A_2 c_\rho \frac{e^{\tau A_3(c_\rho + c_{\overline{u}})} - e^{\tau' A_3(c_\rho + c_{\overline{u}})}}{A_3(c_\rho + c_{\overline{u}})} \right] d\tau'. \tag{1.61}$$

Из (3.18) следует, что

$$\|w_M\|^2 \leqslant k_4\Big(\|w_M\big|_{\tau=0}\|^2 + 2\int\limits_0^\tau \|s_M\|\,\|w_M\|d\tau' + 2k_1^2(M)k_3\|\nabla\Psi_M\big|_{\tau=0}\|^2\Big).$$

Пусть $0 \leqslant \tau' \leqslant \tau$. Тогда из носледнего неравенства имеем

$$\max_{0\leqslant\tau'\leqslant\tau}\|w_M\|^2 = \omega^2 \leqslant k_4\big(\|w_M\big|_{\tau=0}\|^2 + 2\tau\omega S_M(\tau) + 2k_1^2(M)k_3\|\nabla\Psi_M\big|_{\tau=0}\|^2\big). \quad (1.62)$$

Решая квадратное неравенство (3.19) относительно ω, получаем утверждение теоремы. ■

Из теоремы 3.1 следует единственность гладкого решения задачи Коши для системы уравнений пылевидной гидродинамики (3.6)–(3.8).

Замечание 6. Условия (3.11), (3.12) являются техничесними. Они связаны с тем, что теорема 3.1 дает оценку в метрнке $L_2(R^3)$. Заметим, что, буквально новторяя рассуждения теоремы 3.1, можно получить аналогичные оценки в нространствах функций с нормой

$$\|w\|_Q = \left\{\int\limits_{R^3}|w|^2 Q(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Именно, пусть $Q(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция такая, что $0 < Q(x) \leqslant 1$, $|\partial Q(x)/\partial x| \leqslant A_0 Q(x)$. Аналогично (3.15) получаем неравепство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\|w_M\|_Q^2 \leqslant \overline{A}_1\|w_M\|_Q^2 + k_1^2(M)\|\nabla_x\Psi_M\|^2 + \|s_M\|_Q\|w_M\|_Q.$$

При получении последнего неравекства, если $Q(x)$ достаточно быстро убывает на бескоиечности, нет необходимости привлекать условия (3.11), (3.12). Эти условия можно заменить, нанример, условием ограниченности и $u_M(x,\tau)$. Из хода доказательства (3.16) видно, что имеет место следующее неравенство:

$$\frac{d}{d\tau}\|\nabla_x\Psi_M\|^2 \leqslant \overline{A}_2\|\rho_M w_M\|^2 + \overline{A}_3\|\nabla_x\Psi_M\|^2.$$

Предполагая, что $Q \geqslant A_4\rho_M^2$, находим, что имеет место утверждение теоремы 3.1 для указанных выше норм. Из леммы 3.2 получаем условие на характер поведения функции $Q(x)$:

$$Q(x) \geqslant A_5/\big(1+|x|^6\big).$$

Это условие достаточно для того, чтобы заменить условия (3.11), (3.12) требованием ограниченности скоростей на бесконечности.

Условия (3.9)–(3.14), налагаемые на u_M, ρ_M, можно переформулировать в виде условий на $x_M(\tau,\xi)$. Именно, имеет место следующая лемма.

Лемма 8. *Пусть $x_M(\tau,\xi)$ удовлетворяет условиям: $x_M(\tau,\xi)$ — достаточно гладкая функция τ, ξ, $x_M(0,\xi)=\xi$,*

$$\left|\frac{\partial x_M^{(1)}}{\partial \xi}\right| \leqslant c_5^3, \tag{1.63}$$

причем c_5^3T достаточно мало,

$$|\partial^2 x_M/\partial\xi^2| \leqslant c_6^3(M), \tag{1.64}$$

$$|x_M^{(1)}| \leqslant c_7^3(M)/(1+\xi^2). \tag{1.65}$$

Пусть $f_M(\eta)$ удовлетворяет условиям (0.10), (0.12), (0.14) *и $q_M(\eta)$ — условию* (0.5). *Тогда существует функция $x_M^{-1}(\tau,x)$ и функции $x_M(\tau,\xi)$, $x_M^{-1}(\tau,x)$, $u_M(\tau,x)$, $\rho_M(\tau,x)$ удовлетворяют условиям* (3.2), (3.4), (3.9)–(3.14).

Доказательство. Из условия (3.20) следует, что

$$\left|\frac{\partial x_M}{\partial\xi}(\tau,\xi)-E\right| \leqslant c_5^3\tau, \tag{1.66}$$

т. е. матрица $\partial x_M/\partial\xi$ обратима для всех ξ из R^3 и $0\leqslant\tau\leqslant T$, следовательно, существует $x_M^{-1}(\tau,x)$ — также достаточно гладкан функция переменных τ, x. Так как

$$\frac{\partial x_M^{-1}}{\partial x} = \left(\frac{\partial x_M(\tau,\xi)}{\partial\xi}\bigg|_{\xi=x_M^{-1}(\tau,x)}\right)^{-1},$$

то, в силу (3.23) и малости c_5^3T, находим, что

$$\left|\frac{\partial x_M^{-1}}{\partial x}\right| \leqslant c_8^3 \quad \forall x\in R^3,\quad 0\leqslant\tau\leqslant T. \tag{1.67}$$

Из (3.24) следует (3.4). Кроме того, из (3.20), (3.24) следует условие (3.25), более сильное по сравнению с (3.2):

$$c_9^3 \leqslant \frac{|x_M(\tau, \xi) - x_M(\tau, \eta)|}{|\xi - \eta|} \leqslant c_{10}^3, \quad c_9^3 > 0. \tag{1.68}$$

Неравенства (3.9), (3.10) для $u_M(\tau, x)$ непосредственно следуют из (3.20), (3.24). Соотношения (3.11), (3.12) можно получить из (3.22), (3.25). Именно, из этих неравенств следует, что

$$|u| \leqslant c_{11}^3(M)/(1 + x^2).$$

Условие (3.13) вытекает из предположений леммы относительно q_M, f_M, неравенства (3.24) и леммы 3.2. Неравенство (3.14) можно получить из вида $\partial \rho_M / \partial \tau$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho_M}{\partial \tau} &= q_M\big(f_M^{-1}(x_M^{-1}(\tau, x))\big) \frac{\partial f_M^{-1}}{\partial y}(y)\Big|_{y = x_M^{-1}(\tau, x)} \times \\
&\quad \times \frac{\partial x_M^{-1}}{\partial \tau} \frac{D f_M^{-1}}{D y}(y)\Big|_{y = x_M^{-1}(\tau, x)} \frac{D x_M^{-1}}{D x}(\tau, x) + \\
&+ q_M\big(f_M^{-1}(x_M^{-1}(\tau, x))\big) \Big\{ \Big(\frac{\partial}{\partial y} \frac{D f_M^{-1}}{D y}\Big)\Big|_{y = x_M^{-1}(\tau, x)} \frac{D x_M^{-1}}{D x}(\tau, x) \frac{\partial x_M^{-1}}{\partial \tau}(\tau, x) - \\
&- \frac{D f_M^{-1}}{D y}(y)\Big|_{y = x_M^{-1}(\tau, x)} \frac{1}{\Big(\frac{D x_M}{D \xi}\Big|_{\xi = x_M^{-1}(\tau, x)}\Big)^2} \Big[\Big(\frac{\partial}{\partial \tau} \frac{D x_M}{D \xi}\Big)\Big|_{\xi = x_M^{-1}(\tau, x)} + \\
&\quad + \Big(\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{D x_M}{D \xi}\Big)\Big|_{\xi = x_M^{-1}(\tau, x)} \frac{\partial x_M^{-1}}{\partial \tau}\Big]\Big\}
\end{aligned}$$

и соотношения

$$\frac{\partial x_M^{-1}}{\partial \tau} = -\Big(\frac{\partial x_M}{\partial \xi}\Big|_{\xi = x_M^{-1}(\tau, x)}\Big)^{-1} \frac{\partial x_M}{\partial \tau}(\tau, \xi)\Big|_{\xi = x_M^{-1}(\tau, x)}. \tag{1.69}$$

Из (3.26) и (3.25) следует, что

$$|\partial x_M^{-1} / \partial \tau| \leqslant c_{12}^3(M)/(1 + x^2).$$

§ 4. Полевая формулировка многочастичной задачи и ее связь с пылевидной гидродинамикой

Рассмотрим задачу:

$$\frac{d^2x_\xi}{dt^2} = \frac{1}{M^{3\alpha}} \sum_{j/M\in B_{1-3/M}} q^j_M \frac{x^j(t) - x_\xi}{\left|x^j(t) - x_\xi\right|^3} \rho_M\bigl(x_\xi,\, x^j(t)\bigr),$$
$$x_\xi(0) = \xi, \quad \frac{dx_\xi}{dt}(0) = M^{\beta-\alpha} g_M(\xi), \quad \xi \in R^3, \quad 0 \leqslant t \leqslant T_M, \tag{1.70}$$

где $x^k(t)$ — решение задачи (2.1),

$$\rho_M(x,\, y) = \rho\Bigl(\frac{M|x-y|}{(x^2+1)^{1/2}}\Bigr), \quad \rho(\lambda) \in c^\infty[0,\, \infty), \quad 0 \leqslant \rho \leqslant 1,$$

$\rho(\lambda) = 0$ при $\lambda \leqslant \delta$; $\rho(\lambda) = 1$ при $\lambda \geqslant 2\delta$. В предположении гладкости $x^k(t)$ в промежутке $0 \leqslant t \leqslant T_M$ задача (4.1) всегда разрешима при фиксированном M на том же промежутке времени.

Рассмотрим задачу (полевая формулировка (2.1)):

$$M^{3\alpha}\frac{\partial^2 x_M(t,\,\xi)}{\partial t^2} = \sum_{j/M\in B_{1-3/M}} q^j_M(j/M) \frac{x_M\bigl(t,\, f_M(j/M)\bigr) - x_M(t,\,\xi)}{\left|x_M\bigl(t,\, f_M(j/M)\bigr) - x_M(t,\,\xi)\right|^3} \times$$
$$\times \rho_M\bigl(x_M(t,\,\xi)\bigr),\, x_M\bigl(t,\, f_M(j/M)\bigr) =$$
$$= M^3 F_M(x_M,\, t) = M^3 \sum_{j/M\in B_{1-3/M}} F^j_M(x_M,\, t);$$
$$x_M(0,\,\xi) = \xi,\ \partial x_M(0,\,\xi)/\partial t = M^{\beta-\alpha} g_M(\xi),\ 0 \leqslant t \leqslant T_M,\ \xi \in R^3. \tag{1.71}$$

Связь задачи (4.2) с задачами (2.1), (4.1) опирается на условие разреженности и гипотезу разреженности, сформулированные во введении. Соотношение (0.3) обеспечивает выполнение условия разреженности (порядка σ, $\sigma = 3\alpha$) в начальный момент времени, причем в качестве K_N можно взять шар радиуса $lN^\sigma(l_1 M^\alpha)$ с центром в начале координат. Пусть при $0 \leqslant t \leqslant T_M$ выполнена гипотеза разреженности и шар K_N может смещаться из начального положения на величину порядка своего радиуса. При этих предположениях имеет место следующая теорема.

Теорема 4. *Если величина δ достаточно мала по сравнению с γ, то задача* (4.2) *эквивалентна совокупности задач* (2.1), (4.1).

Доказательство. Решение задачи (4.3) проводится в два этапа. Сначала положим

$$\xi = f_M(k/M), \quad k/M \in B_{1-3/M}$$

и обозначим через $\overline{x}^k(t)$ функцию $x_M\big(t, f_M(k/M)\big)$. Тогда для $\overline{x}^k(t)$ из (4.2) получается система обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которой при фиксированном M существует для всех t. Если в этой системе ρ_M положить равным единице, то она превращается в систему уравнений (2.1). Далее, подставляя $\overline{x}^k(t)$ вместо $x_M\big(t, f_M(k/M)\big)$ в (4.2), приходим к задаче, аналогичной (4.1), в которой $x^k(t)$ заменены на $\overline{x}^k(t)$. Таким образом, утверждение теоремы сводится к доказательству равенства $x^k(t) = \overline{x}^k(t)$. Это равенство будет доказано, если показать, что

$$\rho_M\big(x^k(t), x^j(t)\big) = 1 \quad \text{при} \quad k \neq j, \tag{1.72}$$

так как в этом случае $x^k(t)$ и $\overline{x}^k(t)$ являются решениями одной и той же задачи Коши. Докажем (4.3).

Пусть сначала $r^k(t)$, $r^j(t)$ из $K_N(t)$. Тогда из условия разреженности следует, что

$$|x^k - x^j| \geqslant c_1^4\gamma^{1/3}/M.$$

Так как в данном случае $|x^k| \leqslant c_2^4$, то

$$M|x^k - x^j| \geqslant c_3^4\gamma^{1/3}\big((x^k)^2 + 1\big)^{1/2}.$$

Из последнего неравенства следует утверждение теоремы.

Пусть теперь $r^k(t)$ из $K_N(t)$, $r^j(t)$ не принадлежит $K_N(t)$. Рассмотрим шаровой слой с центром в центре $K_N(t)$, внешним радиусом $3R/2$ и внутренним радиусом $R/2$, где R — расстояние от центра $K_N(t)$ до $r^j(t)$. Очевидно, что $R \geqslant c_4^4 M^\alpha$. Если $r^k(t)$ не входит в этот шаровой слой, то $\big|x^j(t) - x^k(t)\big| \geqslant c_4^4/2$ и утверждевие теоремы выполнено; если $r^k(t)$ содержится в шаровом слое, то

$$\big|r^k(t) - r^j(t)\big| \geqslant c_5^4\gamma^{1/3}R/M,$$

откуда $M\big|x^k(t) - x^j(t)\big| \geqslant c_5^4\ \gamma^{1/3}$, и, следовательно, в этом случае утверждепие теоремы также выполнено.

Пусть теперь $r^k(t)$ не входит в $K_N(t)$. Заметим, что в этом случае расстонние R от $r^k(t)$ до центра $K_N(t)$ допускает оценку $R \geqslant c_7^4\big(M^{2\alpha} + \left|r^k(t)\right|^2\big)^{1/2}$. Далее, используя условие разреженности, аналогично предыдущему приходим к неравенству

$$M\left|x^k(t) - x^j(t)\right| \geqslant c_8^4\gamma^{1/3}.$$

Теорема доказана. ■

Рассмотрим теперь вопрос о свнзи задачи (4.2) с пылевидной гидродинамикой. Пусть $T_M = \psi(M)T$. Положим

$$t = \psi(M)\tau, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant T,$$
$$\widetilde{x}_M(\tau, \xi) = x_M\big(\tau\psi(M), \xi\big).$$

В дальнейшем волну в обозначениях будем опускать. Задача (4.2) принимает вид:

$$\begin{gathered}\partial^2 x_M(\tau, \xi)/\partial\tau^2 = k_1(M)F_M(x_M, \tau),\\ x_M(0, \xi) = \xi, \quad \partial x_M(0, \xi)/\partial\tau = k_2(M)g_M(\xi),\end{gathered} \tag{1.73}$$

где

$$k_1(M) = M^{3-3\alpha}\psi^2(M), \quad k_2(M) = M^{\beta-\alpha}\psi(M),$$
$$F_M(x_M, \tau) = \frac{1}{M^3}\sum_{j/M\in B_{1-3/M}} q_M(j/M)\frac{x_M\big(\tau, f_M(j/M)\big) - x_M(\tau, \xi)}{\left|x_M\big(\tau, f_M(j/M)\big) - x_M(\tau, \xi)\right|^3}\times$$
$$\times\rho_M\big(x_M(\tau, \xi), x_M\big(\tau, f_M(j/M)\big)\big) = \sum_{j/M\in B_{1-3/M}} F_M^j(x_M, \tau).$$

Пусть $x_M(\tau, \xi)$ при $0 \leqslant \tau \leqslant T$ удовлетворяет условию

$$c_9^4 \leqslant \left|x_M(\tau, \xi) - x_M(\tau, \eta)\right|/\left|\xi - \eta\right| \leqslant c_{10}^4, \quad c_9^4 > 0. \tag{1.74}$$

Обозначим через $P_M(\tau, \xi)$ следующую функцию:

$$P_M(\tau, \xi) = F_M\big(x_M(\tau, \xi), \tau\big) = \int\limits_{B_1} q_M(\eta)\frac{x_M\big(\tau, f_M(\eta)\big) - x_M(\tau, \xi)}{\left|x_M\big(\tau, f_M(\eta)\big) - x_M(\tau, \xi)\right|^3}\,d\eta. \tag{1.75}$$

Лемма 9. *Если $q_M(\eta)$ непрерывна и равномерно ограничена для всех M вместе с первыми частными производными (см.* (0.5)) *и $f_M(\eta)$ удовлетворяет условиям* (0.2), (0.3), *то*

$$\left|P_M(\tau,\xi)\right| \leqslant \frac{c_{11}^4 \ln M}{M(1+\xi^2)^{(3-q)/2}}, \quad q \geqslant 1.$$

Число q указано в (0.3).

Доказательство. Положим $z_M = f_M^{-1}(\xi)$. Тогда для всех j таких, что при достаточно больших d $|z_M - j/M| > d/M$, выполняется равенство

$$\rho_M\big(x_M(\tau,\xi),\, x_M(\tau,\, f_M(j/M))\big) = 1. \tag{1.76}$$

Равенство (4.7) следует из (4.5), свойства (0.3) функции f_M и определения ρ_M. Представим $P_M(\tau,\xi)$ в виде

$$P_M = \sum_{|z_M - j/M| \leqslant d/M} F_M^j + \sum_{|z_M - j/M| > d/M} F_M^j -$$

$$- \int\limits_{B_1} q_M(\eta) \frac{x_M\big(\tau,\, f_M(\eta)\big) - x_M(\tau,\xi)}{\left|x_M\big(\tau,\, f_M(\eta)\big) - x_M(\tau,\xi)\right|^3} d\eta = P_M^1 + P_M^2 - P_M^3.$$

В силу леммы 1.2,

$$|P_M^2 - P_M^3| \leqslant c_{12}^4 \ln M / M(1+\xi^2)^{(3-q)/2}.$$

В сумме P_M^1 число слагаемых не зависит от M и каждое слагаемое не превосходит $c_{13}^4/M(1+\xi^2)$.

Пусть $\overline{x}_M(\tau,\xi)$ удовлетворяет задаче (3.1). Предположим, что $x_M(\tau,\xi)$, $\overline{x}_M(\tau,\xi)$ — гладкие функции переменяых τ, ξ, существуют гладкие функции $x_M^{-1}(\tau,x)$, $\overline{x}_M^{-1}(\tau,x)$ и выполнены соотношения (3.9)–(3.11). Далее предполагается, что выполнены условия леммы 4.1, $\overline{P}_M(\tau,\xi)$ (правая часть в (3.1)) из $L_2(R^3)$, g_M, $\overline{g}_M$ из $L_2(R^3)$ и для $x_M(\tau,x)$ выполнено (4.5). В этих предположениях имеет место

Теорема 5. *Для функции $w_M = u_M - \overline{u}_M$, где u_M, $\overline{u}_M$ построены по x_M, $\overline{x}_M$, q_M, $\overline{q}_M$, g_M, $\overline{g}_M$, f_M, $\overline{f}_M$, справедливо неравенство*

$$\|w_M\| \leqslant \tau k_4\big(k_1(M)|||p_M||| + |||\overline{p}_M|||\big) +$$

$$+\left\{\tau^2 k_4^2\big(k_1(M)|||p_M||| + |||\overline{p}_M|||\big)^2 + k_4\big[k_2^2(M)\|g_M - \overline{g}_M\|^2 + \right.$$

$$+ 2k_1^2(M)k_3\Bigg\|\int\limits_{R^3}\frac{x-\lambda}{|x-\lambda|^3}\Big[q_M\big(f_M^{-1}(\lambda)\big)\frac{Df_M^{-1}}{D\lambda}(\lambda) -$$

$$\left. - \overline{q}_M\big(\overline{f}_M^{-1}(\lambda)\big)\frac{D\overline{f}_M^{-1}}{D\lambda}(\lambda)\Big]\,d\lambda\Bigg\|^2\right\}^{1/2} = R,$$

где

$$p_M(\tau, x) = P_M(\tau, \xi)\big|_{\xi = x_M^{-1}(\tau, x)}, \quad \overline{p}_M(\tau, x) = \overline{P}_M(\tau, \xi)\big|_{\xi = \overline{x}_M^{-1}(\tau, x)},$$

$P_M(\tau, \xi)$ *определено формулой* (4.6) (*другие обозначения указаны в теореме* 3.1).

Доказательство. Утверждение теоремы 4.2 непосредственно следует из теоремы 3.1. ■

Замечание 7. Из леммы 4.1 при $q < 3/2$ имеем

$$|||p_M||| \leqslant c_{14}^4 \ln M/M.$$

Замечание 8. Из теоремы Харди – Литтлвуда – Соболева [см. [7], стр. 141] следует:

$$\Bigg\|\int\limits_{R^3}\frac{x-\lambda}{|x-\lambda|^3}\Big[q_M\big(f_M^{-1}(\lambda)\big)\frac{Df_M^{-1}}{D\lambda}(\lambda) - \overline{q}_M\big(\overline{f}_M^{-1}(\lambda)\big)\frac{D\overline{f}_M^{-1}}{D\lambda}(\lambda)\Big]\,d\lambda\Bigg\| \leqslant$$

$$\leqslant c_{15}^4\left(\int\limits_{R^3}\Big|q_M\big(f_M^{-1}(\lambda)\big)\frac{Df_M^{-1}}{D\lambda}(\lambda) - \overline{q}_M\big(\overline{f}_M^{-1}(\lambda)\big)\frac{D\overline{f}_M^{-1}}{D\lambda}(\lambda)\Big|^{6/5}d\lambda\right)^{5/6}.$$

Замечание 9. Достаточные условия, обеспечивающие выполнение всех условий, налагаемых на $x_M(\tau, \xi)$ в теореме 4.2, приведены в лемме 3.4.

§ 5. Асимптотика решения уравнений пылевидной гидродинамики

Рассмотрим функцию

$$y_M(\tau, \xi) = \xi + k_2(M)\tau\overline{g}_M(\xi) + \frac{\tau^2 k_1(M)}{2}\int\limits_{B_1}\overline{q}_M(\eta)\frac{\overline{f}_M(\eta) - \xi}{\big|\overline{f}_M(\eta) - \xi\big|^3}\,d\eta.$$

Лемма 10. *Пусть $\overline{q}_M$ удовлетворяет условию* (0.5), $\overline{f}_M$ *удовлетворяет условиям* (0.3), (0.10), (0.13). *Тогда выполняется неравенство*

$$\left|\frac{\partial}{\partial\xi}\int\limits_{B_1}\overline{q}_M(\eta)\frac{\overline{f}_M(\eta)-\xi}{\left|\overline{f}_M(\eta)-\xi\right|^3}\,d\eta\right|\leqslant c_1^5.$$

Доказательство. Утверждение леммы эквивалентно неравенству

$$I=\left|\int\limits_{R^3}\frac{\lambda}{|\lambda|^3}\Big(\frac{\partial}{\partial y}A(y)\Big)\Big|_{y=\lambda+\xi}d\lambda\right|\leqslant c_1^5,$$

где $A(y)=\overline{q}_M\big(\overline{f}_M^{-1}(y)\big)\big(D\overline{f}_M^{-1}(y)/Dy\big)$. В силу предположений леммы находим, что

$$\left|\frac{\partial}{\partial y}A(y)\right|\leqslant\frac{c_2^5}{1+|y|^3}. \tag{1.77}$$

Таким образом,

$$I\leqslant c_2^5\int\limits_{R^3}\frac{d\lambda}{|\lambda|^2\big(1+|\lambda+\xi|^3\big)}\leqslant\frac{c_2^5}{|\xi|^2}\int\limits_{R^3}\frac{d\eta}{|\eta|^2\Big(\frac{1}{|\xi|^3}+|\eta+s|^3\Big)}, \tag{1.78}$$

где $|s|=1$. Далее, из (5.2) находим

$$I\leqslant\frac{c_2^5}{2|\xi|^{0,5}}\int\limits_{R^3}\frac{d\eta}{|\eta|^2|\eta+s|^{1,5}}\leqslant\frac{c_3^5}{|\xi|^{0,5}}.$$

Ограниченность I при $|\xi|\leqslant\text{const}$ вытекает непосредственно из неравенства (5.1).

Лемма 11. *Пусть выполнены условия леммы* 5.1 *и, кроме того,* $\overline{g}_M$ *удовлетворяет условию* (0.17), $\overline{f}_M$ *удовлетворяет условию* (0.11) *и* $\overline{q}_M$ *удовлетворяет условию* (0.19). *Тогда для* $y_M(\tau,\xi)$ *выполнены неравенства:*

$$\left|\frac{\partial y_M^{(1)}}{\partial\xi}\right|\leqslant k_2(M)\left|\frac{\partial\overline{g}_M}{\partial\xi}\right|+\tau k_1(M)c_4^5(M),\qquad\left|\frac{\partial^2y_M}{\partial\xi^2}\right|\leqslant c_5^5(M).$$

Доказательство. Первое утверждение леммы вытекает из леммы 5.1. Второе утверждение леммы 5.2 доказывается аналогично лемме 5.1. ■

Лемма 12. *Пусть $\overline{g}_M(\xi)$ удовлетворяет условию* (0.16), $\overline{f}_M$ *удовлетворяет условию* (0.3) *и* $\overline{q}_M(\eta)$ — *непрерывная функция* η, *ограниченная равномерно по* M. *Тогда* $y_M(\tau, \xi)$ *удовлетворяет неравенству*

$$|y_M^{(1)}| \leqslant c_8^5(M)/(1+\xi^2).$$

Доказательство. Полагая $\xi = f_M(z_M)$, из определения $y_M(\tau, \xi)$ находим, что

$$|y_M^{(2)}| \leqslant k_1(M)c_7^5 \Big/ \int\limits_{B_1} \frac{d\eta}{\left|\overline{f}_M(\eta) + \overline{f}_M(z_M)\right|^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_8^5 k_1(M)}{\xi^2+1} \int\limits_{B_1} \frac{d\eta}{|z_M - \eta|^2} \leqslant \frac{c_9^5 k_1(M)}{\xi^2+1}.$$

Из этого неравенства, так как $0 \leqslant \tau \leqslant T$, следует утверждение леммы 5.3.

Лемма 13. *Пусть*

$$k_2(M) \max_{\xi} \left|\frac{\partial \overline{g}_M}{\partial \xi}\right| \leqslant c_{10}^5 k_1(M), \quad \lim_{M\to\infty} k_1(M) = 0,$$

и пусть $\overline{f}_M(\eta)$, $\overline{q}_M(\eta)$ *удовлетворяют условиям леммы* 5.1. *Тогда для* $y_M(\tau, \xi)$ *выполняется соотношение*

$$\left|\partial^2 y_M(\tau,\xi)/\partial\tau^2 - k_1(M) \int\limits_{B_1} \overline{q}_M(\eta) \frac{y_M\big(\tau, \overline{f}_M(\eta)\big) - y_M(\tau,\xi)}{\left|y_M\big(\tau, \overline{f}_M(\eta)\big) - y_M(\tau,\xi)\right|^3} d\eta\right| \leqslant$$

$$\leqslant c_{11}^5 k_1^2(M)/(1+\xi^2). \quad (1.79)$$

Доказательство. Неравенство (5.3) является следствием неравенства

$$I = \int\limits_{B_1} \left| \frac{A_M}{|A_M|^3} - \frac{A_M - B_M}{|A_M - B_M|^3} \right| d\eta \leqslant \frac{c_{12}^5 k_1(M)}{1+\xi^2},$$

где

$$A_M = \overline{f}_M(\eta) - \xi, \quad B_M = k_2(M)\left[\overline{g}_M\big(\overline{f}_M(\eta)\big) - \overline{g}_M(\xi)\right] +$$

$$+ k_1(M) \int\limits_{B_1} \overline{q}_M(\sigma) \left[\frac{\overline{f}_M(\sigma) - \overline{f}_M(\eta)}{\left|\overline{f}_M(\sigma) - \overline{f}_M(\eta)\right|^3} - \frac{\overline{f}_M(\sigma) - \xi}{\left|\overline{f}_M(\sigma) - \xi\right|^3} \right] d\sigma.$$

Из алгебраических преобразований находим

$$\left|\frac{A_M}{|A_M|^3} - \frac{A_M + B_M}{|A_M + B_M|^3}\right| \leqslant \frac{5}{2}\frac{|B_M|}{|A_M + B_M|^3} + \frac{3}{2}\frac{B_M}{|A_M|^2|A_M + B_M|}.$$

Из леммы 5.1 и предположений леммы 5.4 имеем

$$|B_M| \leqslant c_{13}^5 k_1(M)|A_M|.$$

Следовательно,

$$I \leqslant c_{14}^5 k_1(M) \int\limits_{B_1} \frac{d\eta}{\left|\overline{f}_M(\eta) - \xi\right|^2} \leqslant \frac{c_{15}^5 k_1(M)}{1+\xi^2}.$$

Лемма 5.4 доказана. ■

Замечание 10. Рассмотрим задачу (3.1), в которой $P_M \equiv 0$. Эту задачу перепишем в виде

$$x_M(\tau, \xi) = \xi + k_2(M)\tau g_M(\xi) +$$
$$+ k_1(M)\int\limits_0^\tau (\tau - \tau')\int\limits_{B_1} q_M(\eta)\frac{x_M(\tau', f_M(\eta)) - x_M(\tau', \xi)}{\left|x_M(\tau', f_M(\eta)) - x_M(\tau', \xi)\right|^3}\, d\eta\, d\tau'. \quad (1.80)$$

Если $k_1(M) \to 0$ при $M \to \infty$, то уравнение (5.4) можно решать методом итераций, рассматривая в качестве нулевого приближения к решению функцию $x_{M,0}(\tau, \xi) = \xi$. Функция $y_M(\tau, \xi)$ совпадает с первым приближением

$$y_M(\tau, \xi) = x_{M,1}(\tau, \xi),$$

причем из леммы 5.4 следует, что это приближение удовлетворяет (5.4) с точностью до $k_1^2(M)$. Рассматривая более высокие приближения, можно находить приближения решения (5.4) с более высокой степенью $k_1(M)$.

§ 6. Асимптотическое поведение траекторий многочастичной задачи в случае, когда пробеги частиц превосходят начальные взаимные расстояния между ними

Вернемся к рассмотрению задачи (4.4). Предположим, что задача (2.1) разрешима при

$$0 \leqslant t \leqslant T_M = \psi(M)T \quad \big(t = \psi(M)\tau,\ 0 \leqslant \tau \leqslant T\big),$$

причем для $r^k(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant T$ выполнена гипотеза разреженности. Переформулируем эту гипотезу для $x^k(\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant T$. Именно, предполагается, что при $0 \leqslant \tau \leqslant T$ для $x^k(\tau)$ выполнены два соотношения:

$$\left|x^k(\tau) - x^j(\tau)\right| \geqslant \varkappa/M \quad \forall k,\, j \quad (k \neq j), \tag{1.81}$$

и если $x^k(\tau)$, $x^j(\tau)$ содержатся в слое $R/2 \leqslant |x| \leqslant 3R/2$ $\forall R > 0$, то

$$\left|x^k(\tau) - x^j(\tau)\right| \geqslant R\varkappa/M \quad (k \neq j). \tag{1.82}$$

Положим, как и раньше,

$$F_M(x,\, \tau) = \frac{1}{M^3} \sum_{k/M \in B_{1-3/M}} q_M(k/M) \frac{x^k(\tau) - x}{\left|x^k(\tau) - x\right|^3} \rho_M\bigl(x,\, x^k,\, (\tau)\bigr).$$

Лемма 14. *Для $F_M(x,\, \tau)$ выполняются следующие неравенства:*

$$\left|F_M(x,\, \tau)\right| \leqslant c_1^6/(1+x^2), \quad \left|\partial F_M(x,\, \tau)/\partial x\right| \leqslant c_2^6 \ln M/(1+x^2)^{3/2}.$$

Доказательство. Из определения $F_M(x,\, \tau)$ имеем:

$$\left|F_M(x,\, \tau)\right| \leqslant \frac{1}{M^3} \sum_{k/M \in B_{1-3/M}} \rho_M\bigl(x,\, x^k(\tau)\bigr)/\left|x - x^k(\tau)\right|^2,$$

$$\left|\frac{\partial F_M(x,\, \tau)}{\partial x}\right| \leqslant \frac{1}{M^3} \sum_{k/M \in B_{1-3/M}} \left\{ \frac{4\rho_M}{\left|x - x^k(\tau)\right|^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{M\left|\rho'(M\left|x - x^k(\tau)\right|/(x^2+1)^{1/2})\right|}{\left|x - x^k(\tau)\right|(x^2+1)^{1/2}} \left[\frac{1}{\left|x - x^k(\tau)\right|} + \frac{1}{(x^2+1)^{1/2}}\right] \right\}.$$

Пусть сначала при фиксированном τ для всех k

$$\left|x - x^k(\tau)\right| \geqslant \bigl(|x| + 1\bigr)/2. \tag{1.83}$$

Тогда для этих x

$$\left|F_M(x,\, \tau)\right| \leqslant c_3^6/(1+x^2), \quad \left|\partial F_M(x,\, \tau)/\partial x\right| \leqslant c_4^6/(1+x^2)^{3/2}. \tag{1.84}$$

Заметим, что в случае (6.3) $\rho'\big(M|x - x^k(\tau)|/(x^2+1)^{1/2}\big) = 0$. Пусть теперь для x найдется $x^{\bar{k}}$ такое, что при данном τ

$$|x - x^{\bar{k}}(\tau)| < \big(|x|+1\big)/2. \tag{1.85}$$

Будем считать, что при этом $\bar{k}$ для фиксированного τ реализуется минимум по j функции $|x - x^j(\tau)|$. Тогда имеем

$$|x^{\bar{k}} - x^k| = |x^{\bar{k}} - x + x - x^k| \leqslant 2|x - x^k|$$

и, следовательно,

$$|x - x^k(\tau)| \geqslant |x^{\bar{k}}(\tau) - x^k(\tau)|/2. \tag{1.86}$$

Иэ условия (6.5) находим:

$$|x^{\bar{k}}| + 1 \geqslant \big(|x|+1\big)/2. \tag{1.87}$$

Для $F_M(x,\tau)$ имеет место неравенство

$$|F_M(x,\tau)| \leqslant \frac{1}{M^3}\frac{\rho_M\big(x, x^{\bar{k}}(\tau)\big)}{|x - x^{\bar{k}}(\tau)|^2} + \sum_{\substack{k\neq\bar{k}\\ k/M\in B_{1-3/M}}} \frac{\rho_M\big(x, x^k(\tau)\big)}{|x - x^k(\tau)|^2} = A_1 + A_2.$$

Для A_1 имеем оценку

$$A_1 \leqslant c_5^6/M\big(1+|x|^2\big).$$

Величину A_2, используя (6.6), можно оценить следующим образом:

$$A_2 \leqslant \frac{4}{M^3}\sum_{\substack{k\neq\bar{k}\\ k/M\in B_{1-3/M}}} \frac{1}{|x^{\bar{k}} - x^k|^2} = 4B.$$

Приступим теперь к оценке величины B. Пусть сначала $|x| \leqslant 2$. В этом случае из (6.5) следует, что $|x^{\bar{k}}(\tau)| \leqslant 7/2$. Представим B в виде

$$B = \frac{1}{M^3}{\sum_{k\neq\bar{k}}}' \frac{1}{|x^{\bar{k}} - x^k|^2} + \frac{1}{M^3}{\sum_{k\neq\bar{k}}}'' \frac{1}{|x^{\bar{k}} - x^k|^2} = B_1 + B_2, \tag{1.88}$$

где в B_1 собраны слагаемые из B, для которых $|x^{\overline{k}} - x^k| \leqslant 1$, а в B_2 — слагаемые, где $|x^{\overline{k}} - x^k| > 1$. Так как число слагаемых в B_2 не превосходит величины порядка M^3, то $B_2 \leqslant c_8^6$. Нетрудно видеть, что все точки x^k из B_1 входят в шар радиуса 5: $|x^k| < 5$. Рассмотрим в этом шаре решетку с шагом $\big([\varkappa]+1\big)/3M$ и введем новую нумерацию частиц. Именно, каждой частице из B_1 поставим в соответствие один из ближайших узлов решетки. В силу (6.1), двум разным x^k не может соответствовать один и тот же узел. Более того, если частице x^k соответствует узел $p\big([\varkappa]+1\big)/3M$, а частице x^j соответствует узел $q\big([\varkappa]+1\big)/3M$, то существует положительное число c_7^6 такое, что

$$|x^k - x^j| \geqslant c_7^6 |p-q|/M.$$

Следовательно, если частице $x^{\overline{k}}$ соответствует узел $\overline{p}\big([\varkappa]+1\big)/3M$, то для B_1, используя лемму 1.1, получаем оценку

$$B_1 \leqslant \frac{1}{(c_7^6)^2} \sum_{\substack{q \neq \overline{p} \\ q/M \in B_5}} \frac{1}{\left|\dfrac{\overline{p}}{M} - \dfrac{q}{M}\right|^2} \leqslant c_8^6. \tag{1.89}$$

Таким образом, доказано, что для $|x| \leqslant 2$ имеет место оценка $|F_M| \leqslant c_9^6$. Пусть теперь $|x| > 2$. Тогда из (6.5) следует, что $|x^{\overline{k}}| \geqslant 1/2$. Рассмотрим шаровой слой $|x^{\overline{k}}|/2 \leqslant |x| \leqslant 3|x^{\overline{k}}|/2$ и представим опять B в виде (6.8), где в B_1 собраны x^j, находящиеся в шаровом слое, а в B_2 содержатся x^k, не попавшие в шаровой слой. Так как в B_2 $|x^k - x^{\overline{k}}| \geqslant |x^{\overline{k}}|/2$, то, в силу (6.7),

$$|B_2| \leqslant c_{10}^6/|x^{\overline{k}}|^2 \leqslant c_{11}^6/|x|^2.$$

В сумме B_1 введем обозначения $y^j = x^j/|x^{\overline{k}}|$. Тогда

$$B_1 = \frac{1}{M^3} \sum_{k \neq \overline{k}} \frac{1}{|x^{\overline{k}}|^2 |y^{\overline{k}} - y^k|^2}.$$

Из соотношения (6.2) следует, что для y^k выполняется (6.1). Следовательно, используя перенумерацию y^k по соответствующей решетке, получим оценку B_1, аналогичную (6.9). Тем самым доказано первое утверждение леммы 6.1. Для $\partial F_M/\partial x$ оценка выражения

$$\frac{1}{M^3} \sum_{k/M \in B_{1-3/M}} \frac{\rho_M}{\big|x - x^k(\tau)\big|^3}$$

проводится аналогично предыдущему. Покажем, что если выполнены (6.5) и условия (6.1), (6.2), то число слагаемых в сумме для $\partial F_M/\partial x$, содержащих ρ', не зависит от M, x, τ.

Предположим сначала опять, что $|x| \leqslant 2$. Тогда, используя перенумерацию частиц, получим

$$|x - x^k| \geqslant |x^{\bar{k}} - x^k|/2 \geqslant c_{12}^6|\bar{p} - p|/M,$$

откуда следует, что

$$\frac{M|x - x^k|}{\left(|x|^2 + 1\right)^{1/2}} \geqslant c_{13}^6|\bar{p} - p|, \tag{1.90}$$

где c_{13}^6 не зависит от M, x, τ. Неравенство (6.10) определяет число возможных номеров, для которых $\rho' \neq 0$.

Пусть теперь $|x| > 2$. Нетрудно видеть, что при достаточно больших M величина ρ' может быть отлична от нуля только для частиц в шаровом слое $|x^{\bar{k}}|/2 \leqslant |x| \leqslant 3|x^{\bar{k}}|/2$. Но в этом слое

$$|x - x^k| \geqslant |x^{\bar{k}}|\,|y^{\bar{k}} - y^k| \geqslant |x^{\bar{k}}|c_{12}^6|\bar{p} - p|/M.$$

Тем самым мы опять приходим к неравенству (6.10), из которого следует искомое утверждение. Лемма 6.1 доказана. ∎

Теорема 6. *Пусть* $k_1(M) \leqslant A_1/\ln M$, $k_2(M)|g_M| \leqslant A_2$, $g_M(\xi)$ *удовлетворяет* (0.16), (0.17), *и пусть*

$$T\left(k_2(M)\left|\frac{\partial g_M}{\partial \xi}\right| + Tk_1(M)\ln M\right) \leqslant B, \tag{1.91}$$

где B достаточно мало. Тогда существует решение задачи (4.4), *удовлетворяющее условиям* (3.20)–(3.22).

Доказательство. Существование решения задачи (4.4) при фиксированном M для любого T следует из ограниченности и гладкости функции F_M. Условие (3.21) также непосредственно вытекает из условий теоремы и определения функции F_M. Из леммы 6.1 и предположений теоремы следует, что

$$\left|x_M(\tau, \xi) - \xi - \tau k_2(M) g_M(\xi)\right| \leqslant k_1(M) c_1^6 \tau^2/2,$$

откуда находим, что

$$|x_M| \geqslant |\xi| - c_{14}^6.$$

Таким образом, из леммы 6.1 имеем

$$|x_M^{(2)}| \leqslant c_{15}^6 k_1(M)/(1+\xi^2),$$

следовательно,

$$\left|x_M^{(1)} - k_2(M) g_M(\xi)\right| \leqslant c_{15}^6 \tau k_1(M)/(1+\xi^2).$$

Из последнего неравенства и (0.16) следует (3.22).

Далее, дифференцируя уравнение в (4.4), находим:

$$\left(\frac{\partial x_M}{\partial \xi}\right)^{(2)} = k_1(M) \frac{\partial F_M}{\partial x}(x,\, \tau)\Big|_{x=x_M(\tau,\,\xi)} \frac{\partial x_M}{\partial \xi}, \tag{1.92}$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial x_M}{\partial \xi} - E - \tau k_2(M) \frac{\partial g_M}{\partial \xi} =$$

$$= \int\limits_0^\tau (\tau - \tau') k_1(M) \frac{\partial F_M}{\partial x}(x,\, \tau')\Big|_{x=x_M(\tau',\,\xi)} \frac{\partial x_M}{\partial \xi}(\tau',\, \xi) d\tau',$$

где E — единичная матрица. Следовательно, учитывая результаты леммы 6.1 и предположение относительно $k_1(M)$, находим, что

$$\left|\frac{\partial x_M}{\partial \xi}\right| \leqslant c_{16}^6 \left| E + \tau k_2(M) \frac{\partial g_M}{\partial \xi} \right|. \tag{1.93}$$

Из (6.12), (6.13) следует, что

$$\left|\frac{\partial x_M^{(1)}}{\partial \xi} - k_2(M) \frac{\partial g_M}{\partial \xi}\right| \leqslant c_{17}^6 \left|E + \tau k_2(M) \partial g_M / \partial \xi\right| \tau k_1(M) \ln M. \tag{1.94}$$

Из (6.14) вытекает условие (3.20). Теорема 6.1 доказана. ■

Лемма 15. *Пусть $x_M(\tau,\, \xi)$ такова, что*

$$\left|\partial x_M^{(1)}(\tau,\, \xi)/\partial \xi\right| \leqslant c_{18}^6,$$

$$c_{19}^6 \left| x_M(\tau,\, \xi) - x_M(\tau,\, \eta)\right| \geqslant |\xi - \eta|$$

и $x_M(0,\xi)=\xi$. *Пусть, далее,* $\overline{x}_M(\tau,\xi)$ *удовлетворяет условиям:*

$$0<c_{20}^6\leqslant D\overline{x}_M/D\xi\leqslant c_{21}^6,\quad \overline{x}_M(0,\xi)=\xi,$$

и существует $\overline{x}_M^{-1}(\tau,x)$. *Кроме того, предполагается, что при* $0\leqslant\tau\leqslant T$ *функции* $\partial x_M(\tau,\xi)/\partial\tau$, $\partial\overline{x}_M(\tau,\xi)/\partial\tau$ *принадлежат* $L_2(R^3)$. *Тогда для выражений*

$$A=\left\|\frac{\partial x_M}{\partial\tau}(\tau,\xi)-\frac{\partial\overline{x}_M}{\partial\tau}(\tau,\xi)\right\|,$$
$$B=\left\|\frac{\partial x_M}{\partial\tau}(\tau,\xi)\Big|_{\xi=x_M^{-1}(\tau,x)}-\frac{\partial\overline{x}_M}{\partial\tau}(\tau,\xi)\Big|_{\xi=\overline{x}_M^{-1}(\tau,x)}\right\|$$

выполняется соотношение $c_{22}^6B\geqslant A$.

Доказательство. Из предположений леммы имеем

$$\left\|\frac{\partial x_M}{\partial\tau}\Big|_{\xi=\overline{x}_M^{-1}(\tau,x)}-\frac{\partial\overline{x}_M}{\partial\tau}\Big|_{\xi=\overline{x}_M^{-1}(\tau,x)}\right\|\geqslant c_{20}^6A. \qquad (1.95)$$

С другой стороны,

$$\left\|\frac{\partial x_M}{\partial\tau}\Big|_{\xi=\overline{x}_M^{-1}(\tau,x)}-\frac{\partial\overline{x}_M}{\partial\tau}\Big|_{\xi=\overline{x}_M^{-1}(\tau,x)}\right\|\leqslant$$
$$\leqslant B+\left\|\frac{\partial x_M}{\partial\tau}\Big|_{\xi=x_M^{-1}(\tau,x)}-\frac{\partial x_M}{\partial\tau}\Big|_{\xi=\overline{x}_M^{-1}(\tau,x)}\right\|\leqslant$$
$$\leqslant B+c_{18}^6\left\|x_M^{-1}(\tau,x)-\overline{x}_M^{-1}(\tau,x)\right\|\leqslant B+c_{18}^6c_{19}^6\left\|x-x_M\big(\tau,x_M^{-1}(\tau,x)\big)\right\|\leqslant$$
$$\leqslant B+c_{18}^6c_{19}^6c_{21}^6\left\|\overline{x}_M(\tau,\lambda)-x_M(\tau,\lambda)\right\|. \qquad (1.96)$$

Из (6.15), (6.16) находим, что

$$A\leqslant\frac{1}{c_{20}^6}B+\frac{c_{18}^6c_{19}^6c_{21}^6}{c_{20}^6}\int\limits_0^\tau A\,d\tau'. \qquad (1.97)$$

Из неравенства (6.17) следует утверждение леммы 6.2.

Теорема 7. *Пусть* f_M, g_M, q_M *удовлетворяют условиям* (0,2), (0.3), (0.5), (0.10)–(0.19), T *удовлетворяет условию* (6.11), $x^k(t)$ –

решение задачи (2.1), *удовлетворяющее гипотезе разреженности при* $0 \leqslant t \leqslant T_M = T\psi(M)$. *Пусть* $x_M(\tau, \xi)$ — *решение задачи* (4.4), $\overline{x}_M(\tau, \xi)$ — *решение задачи* (3.1), *удовлетворяющее условиям* (3.20)–(3.22). *Кроме того, предполагается, что* $\overline{f}_M, \overline{g}_M, \overline{q}_M$ *удовлетворяют тем же условиям, что и* f_M, g_M, q_M. *Тогда имеет место неравенство*

$$\left\| \frac{\partial x_M}{\partial \tau}(\tau, \xi) - \frac{\partial \overline{x}_M}{\partial \tau}(\tau, \xi) \right\| \leqslant c_{23}^6 R,$$

где R *определено в теореме* 4.2.

Доказательство. Утверждение теоремы непосредственно следует из леммы 6.2 и результатов § 4. ■

Теорема 8. *В предположениях теоремы* 6.2 *и при условии*

$$\left| \frac{\partial x_M^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{\partial \overline{x}_M^{(2)}}{\partial \xi} \right| \leqslant c_{24}^6(M) \tag{1.98}$$

имеет место неравенство

$$\left| \frac{\partial x_M}{\partial \tau}(\tau, \xi) - \frac{\partial \overline{x}_M}{\partial \partial \tau}(\tau, \xi) \right| \leqslant$$
$$\leqslant \left\{ c_{24}^6(M)\tau + k_2(M) \left| \frac{\partial g_M}{\partial \xi} - \frac{\partial \overline{g}_M}{\partial \xi} \right| \right\}^{3/5} (c_{25}^6 R)^{2/5}.$$

Доказательство. Утверждение теоремы вытекает из предположений теоремы и мультипликативного неравенства Гальярдо [8], Ниренберга [9] (см. также [10], стр. 236)

$$\max |u| \leqslant c \|u\|^{2/5} \left(\max |u'|\right)^{3/5}, \quad \|u\| < \infty.$$

■

Следствие 1. *Пусть* $f_M = \overline{f}_M$, $g_M = \overline{g}_M$, $q_M = \overline{q}_M$, $\overline{P}_M(\tau, \xi) = 0$. *Тогда имеет место неравенство*

$$\left| \dot{x}^k(\tau) - \frac{\partial \overline{x}_M}{\partial \tau}\left(\tau, f_M(k/M)\right) \right| \leqslant c_{26}^6 \tau \left(c_{24}^6(M)\right)^{3/5} \left(\frac{k_1(M) \ln M}{M} \right)^{2/5}$$

(уточнение основной теоремы для $\overline{P}_M = 0$ (см. введение, (0.23))).

Предположим, что

$$\left|\frac{\partial \overline{x}_M^{(2)}}{\partial \xi}\right| \leqslant c_{27}^6 k_1(M). \tag{1.99}$$

Так как, в силу сделанных выше предположений,

$$\left|\frac{\partial x_M^{(2)}}{\partial \xi}\right| \leqslant c_{28}^6 k_1(M) \ln M,$$

то

$$c_{24}^6 \leqslant c_{29}^6 k_1(M) \ln M.$$

Теорема 9. *Пусть* $f_M = \overline{f}_M$, $g_M = \overline{g}_M$, $q_M = \overline{q}_M$ *и выполнены предположения теоремы* 6.2. *Пусть, далее,* $k_1(M) \leqslant s/\ln M$, s — *достаточно малое число и выполнены условия леммы* 5.4. *Тогда имеет место соотношение*

$$\left|\dot{x}^k(\tau) - k_2(M) g_M\bigl(f_M(k/M)\bigr) - \tau k_1(M) \int\limits_{B_1} q_M(\eta) \frac{f_M(\eta) - f_M(k/M)}{\bigl|f_M(\eta) - f_M(k/M)\bigr|^3}\, d\eta\right| \leqslant$$
$$\leqslant c_{30}^6 \tau k_1(M) \bigl|k_1(M) + \ln M/M\bigr|^{2/5} (\ln M)^{3/5}. \tag{1.100}$$

Доказательство. Утверждение теоремы 6.4 непосредственно следует из теоремы 6.3, в которой $\overline{x}_M(\tau, \xi)$ положено равным $y_M(\tau, \xi)$ (см. § 5). Заметим, что в этом случае условие (6.19) непосредственно следует из леммы 5.1. ■

Теорема 6.4 представляет собой после перехода к соответствующим переменным закон свободного падения, сформулированный во введении.

§ 7. Асимптотическая близость траекторий точечных масс, взаимодействующих по закону тяготения Ньютона к траекториям системы пылевидной гидродинамики

Этот параграф посвящен исследованию асимптотики траекторий задачи (0.1) при $0 \leqslant t \leqslant \psi(M)T$, когда $k_1(M) = M^{3-3\alpha}\psi^2(M) = 1$ для достаточно малого T. Основным техническим моментом здесь является получение ограниченности $\partial F_M/\partial x$, где F_M определено в лемме 6.1. Из леммы 6.1 вытекает лишь то, что при выполнении гипотезы разреженности имеет место оценка

$$|\partial F_M/\partial x| \leqslant c_2^6 \ln M/(1+x^2)^{3/2}. \tag{1.101}$$

Мы покажем, что, заменяя гипотезу разреженяости более сильным предположением относительно траекторий системы (0.1), имеет место ограниченность $\partial F_M/\partial x$, и тем самым окажется возможным установить асимптотическую близость на расстояниях порядка lM^α, т.е. расстояниях порядка характерного масштаба системы точечных масс, траекторий задачи (0.1) к траекториям, связанным с решением задачи Коши для уранений пылевидной гидродинамики. Именно, предполагается, что в каждый момент времени t существует гладкий, регулярный на бесконечности атлас $M^\alpha f(t, M, \xi)$ такой, что

$$\left|f(t, M, \xi)\right| \geqslant c_1^7/\bigl(1-|\xi|\bigr)^{m_1}, \quad m_1 > 0. \tag{1.102}$$

Предположим еще, что в каждый момент времени существует гладкий атлас $q(t, M, \xi)$ распределения масс.

Лемма 16. *В предположении существования гладкого, регулярного на бесконечности атласа $M^\alpha f(t, M, \xi)$ распределения координат, удовлетворяющего условию (7.2), и гладкого атласа $q(t, M, \xi)$ распределения масс имеет место оценка*

$$|\partial F_M/\partial x| \leqslant c_2^7(1+x^2)^{-1}. \tag{1.103}$$

Доказательство. Требование существования гладкого, регулярного на бесконечности атласа $M^\alpha f(t, M, \xi)$ влечет выполнение гипотезы разреженности и, следовательно, нераненства (7.1). Поэтому (7.3) выполнено при $|x| \geqslant \ln M$. Таким образом, (7.3) нужно установить лишь для $|x| \leqslant \ln M$. Из определения F_M имеем

$$\frac{\partial (F_M)_i}{\partial x_k} = \frac{1}{M^3} \sum_{j/M \in B_{1-3/M}} q(\tau, M, j/M)\left\{ \frac{f_i(\tau, M, j/M) - x_i}{|f(\tau, M, j/M) - x|^3} \frac{\partial \rho_M}{\partial x_k} + \right.$$
$$\left. + \rho_M(x, f) \cdot \frac{3(f_i - x_i)(f_k - x_k) - |f-x|^2 \delta_{ik}}{|f-x|^5} \right\}, \tag{1.104}$$

где δ_{ik} — символ Кронекера и вместо переменного t введено переменное τ, $t = \psi(M)\tau$. Заметим, что при фиксированном x ρ_M отлично от единицы лишь для конечного числа номеров j, причем это число не зависит от x, τ, M. Оценим величины отдельных слагаемых в (7.4):

$$\frac{\rho_M}{|f-x|^3} = \rho\Big(\frac{M|f-x|}{(x^2+1)^{1/2}}\Big)\frac{(x^2+1)^{3/2}}{M^3|f-x|^3}\frac{M^3}{(x^2+1)^{3/2}} \leqslant \frac{c_3^7 M^3}{(x^2+1)^{3/2}},$$
$$\frac{1}{|f-x|^2}\Big|\frac{\partial \rho_M}{\partial x_k}\Big| \leqslant \frac{c_4^7 M^3}{(x^2+1)^{3/2}}. \tag{1.105}$$

Таким образом, из (7.4), (7.5) следует, что

$$\big|\partial(F_M)_i/\partial x_k\big| \leqslant c_5^7/(x^2+1)^{3/2} + \\ + \frac{1}{M^3}\sum_{j\in S(z_M)} q(\tau, M, j/M)\frac{3(f_i-x_i)(f_k-x_k)-|f-x|^2\delta_{ik}}{|f-x|^5},$$

где z_M определяется из уравнения $x = f(\tau, M, z_M)$, $S(z_M)$ — множество индексов j, для которых $j/M \in B_{1-3/M}$, $|z_M - j/M| \geqslant c/M$. Из неравенства

$$\left|\int\limits_{Q_{j/M}} q(\tau, M, \xi)\,d\xi - \frac{1}{M^3}q(\tau, M, j/M)\right| \leqslant c_6^7/M^4$$

и из леммы 1.1 следует, что

$$\big|\partial(F_M)_i/\partial x_k\big| \leqslant c_7^7(x^2+1)^{-3/2} + \\ + \sum_{j\in S(z_M)} \frac{3(f_i-x_i)(f_k-x_k)-|f-x|^2\delta_{ik}}{|f-x|^5}\int\limits_{Q_{j/M}} q(\tau, M, \xi)\,d\xi.$$

Оценим теперь следующий интеграл:

$$N_j^{i,k} = \int\limits_{Q_{j/M}} q(\tau, M, \xi)\Big(\frac{A_{ik}(j/M)}{B(j/M)} - \frac{A_{ik}(\xi)}{B(\xi)}\Big)d\xi = N_{j,1}^{i,k} + N_{j,2}^{i,k},$$

где

$$B(\xi) = \left|f(\tau, M, \xi) - x\right|^5,$$

$$A_{ik}(\xi) = 3\big(f_i(\tau, M, \xi) - x_i\big)\big(f_k(\tau, M, \xi) - x_k\big) - \left|f(\tau, M, \xi) - x\right|^2\delta_{ik},$$

$$N_{j,1}^{i,k} = \int\limits_{Q_{j/M}} q(\tau, M, \xi)\Big(\frac{A_{ik}(\xi)}{B(j/M)} - \frac{A_{ik}(\xi)}{B(\xi)}\Big)\, d\xi,$$

$$N_{j,2}^{i,k} = \int\limits_{Q_{j/M}} q(\tau, M, \xi)\Big(\frac{A_{ik}(j/M)}{B(j/M)} - \frac{A_{ik}(\xi)}{B(j/M)}\Big)\, d\xi.$$

В силу предположений относительно $f(\tau, M, \xi)$, имеем оценку:

$$\left|N_{j,1}^{i,k}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_8^7}{M}\int\limits_{Q_{j/M}} \frac{\big(|f(\tau,M,j/M)|+1\big)^q \sum\limits_{k=0}^{4}\left|f(\tau,M,j/M)-x\right|^{4-k}\left|f(\tau,M,\xi)-x\right|^k}{\left|f(\tau,M,j/M)-x\right|^5\left|f(\tau,M,\xi)-x\right|^3}\, d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_9^7}{M^4}\Big[|z_M - j/M|^{-4}\big(\left|f(\tau, M, j/M)\right| + |x| + 1\big)^{q-4} +$$

$$+ M^{-1}|z_M - j/M|^{-5}\big(\left|f(\tau, M, j/M)\right| + |x| + 1\big)^{2q-5}\Big].$$

Следовательно, при $q \leqslant 3/2$ для всех x выполняется неравенство

$$\sum_{j\in S(z_M)} \left|N_{j,1}^{i,k}\right| \leqslant c_{10}^7(1 + x^2)^{-1}.$$

Аналогично доказывается, что для всех x при $q \leqslant 3/2$ выполнено неравенство

$$\sum_{j\in S(z_M)} \left|N_{j,2}^{i,k}\right| \leqslant c_{11}^7(1 + x^2)^{-1}.$$

Таким образом, получаем оценку

$$\left|\frac{\partial (F_M)_i}{\partial x_k}\right| \leqslant \frac{c_{12}^7}{1 + x^2} + \left|\int\limits_{\bigcup_j Q_{j/M}} q(\tau, M, \xi)\frac{A_{ik}(\xi)}{B(\xi)}\, d\xi\right|.$$

Представим единичный шар B_1 в виде $B_1 = K \bigcup U \bigcup_j Q_{j/M}$, где U — конечное число кубов, окаймляющих точку z_M, так что для ξ, не входящего в U, выполнено неравенство $|z_M - \xi| \geqslant c/M$,

$$K = B_1 \setminus \Bigl(\bigcup_j Q_{j/M} \bigcup U\Bigr).$$

Так как, в силу (7.2),

$$|z_M| \leqslant 1 - (1/c_1^7 \ln M)^{1/m_1}, \tag{1.106}$$

а толщина каймы K порядка c/M, то U и K не пересекаются. Для интеграла но K имеем оценку

$$\left|\int_K qA_{ik}B^{-1}d\xi\right| \leqslant c_{13}^7 \int_K |z_M - \xi|^{-3}\bigl(|x|^3+1\bigr)^{-1}d\xi \leqslant$$
$$\leqslant c_{14}^7(\ln M)^{3/m_1}M^{-1}\bigl(|x|^3+1\bigr)^{-1} \leqslant c_{15}^7(1+x^2)^{-1}.$$

Следовательно, справедливо соотношение

$$\bigl|\partial(F_M)_i/\partial x_k\bigr| \leqslant c_{16}^7(1+x^2)^{-1} + |J|,$$
$$J = \int_{B_1\setminus U} q(\tau, M, \xi)A_{ik}(\xi)B^{-1}(\xi)\,d\xi.$$

Сделаем в J замену переменных, положив $\lambda = f(\tau, M, \xi)$:

$$J = \int_{R^3\setminus V} q\frac{Df^{-1}}{D\lambda}\frac{3(\lambda_i - x_i)(\lambda_k - x_k) - |\lambda - x|^2\delta_{ik}}{|\lambda - x|^5}\,d\lambda,$$

где V — образ U при отображении $\lambda = f(\tau, M, \xi)$. Рассмотрим в V шар V_x с центром в x и радиуса $\delta_1 x/M$, где δ_1 настолько мало, что V_x содержится в V (δ_1 не зависит от x, M, τ). Множество V, в силу свойств f, содержится в шаре O_x с центром в x радиуса $\delta_2\bigl(|x|^q +$

$+1)/M$. Нетрудно видеть, что выполняются неравенства:

$$\left|\int_V \Psi\, d\lambda\right| \leqslant \left|\int_{U_x} \Psi\, d\lambda\right| + \left|\int_{V\setminus U_x} \Psi\, d\lambda\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_{V_x} \Psi\, d\lambda\right| + c_{17}^7 \int_{O_x\setminus V_x} \frac{Df^{-1}}{D\lambda}(\tau,\, M,\, \lambda)\frac{d\lambda}{|\lambda - x|^3},$$

где

$$\Psi = q\bigl(\tau,\, M,\, f^{-1}(\tau,\, M,\, \lambda)\bigr)\frac{Df^{-1}}{D\lambda}\frac{3(\lambda_i - x_i)(\lambda_k - x_k) - |x - \lambda|^2\delta_{ik}}{|\lambda - x|^5}.$$

Заметим, что для λ из V_x

$$\left|q(\ldots,\lambda)\frac{Df^{-1}}{Dx}(\ldots,\lambda) - q(\ldots,x)\frac{Df^{-1}}{Dx}(\ldots,x)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\eta\in V_x}\left|\frac{\partial}{\partial\eta}\Bigl[q(\ldots,\eta)\frac{Df^{-1}}{D\eta}(\ldots,\eta)\Bigr]\right| |\lambda - x|$$

и что, в силу предположений относительно f и q,

$$\sup_{\eta\in V_x}\left|\frac{\partial}{\partial\eta}\Bigl[q\bigl(\tau,\, M,\, f^{-1}(\tau,\, M,\, \eta)\bigr)\frac{Df^{-1}}{D\eta}(\tau,\, M,\, \eta)\Bigr]\right| \leqslant \frac{c_{18}^7}{1 + |x|^3}.$$

Тогда находим, что

$$\left|\int_{U_x} \Psi\, d\lambda\right| = \left|\int_{U_x}\Bigl(q(\ldots,\lambda)\frac{Df^{-1}}{D\lambda}(\ldots,\lambda) - q(\ldots,x)\frac{Df^{-1}}{Dx}(\ldots,x)\Bigr)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{3(\lambda_i - x_i)(\lambda_k - x_k) - |\lambda - x|^2\delta_{ik}}{|\lambda - x|^5}\, d\lambda\right| \leqslant c_{19}^7 \int_{U_x} \frac{d\lambda}{|\lambda - x|^2}\cdot\frac{1}{1 + |x|^3} \leqslant$$

$$\leqslant c_{20}^7 \frac{|x|}{M\bigl(1 + |x|^3\bigr)} \leqslant \frac{c_{21}^7}{1 + x^2}.$$

Имеют место следующие неравенства:

$$\int\limits_{O_x\setminus V_x} \frac{Df^{-1}}{D\lambda}\frac{d\lambda}{|\lambda-x|^3} \leqslant \frac{c_{22}^7}{1+|x|^3}\int\limits_{\delta_1|x|/M}^{\delta_2(|x|^q+1)/M}\frac{1}{r}\,dr \leqslant$$

$$\leqslant c_{23}^7\frac{\ln|x|}{1+|x|^3}\leqslant c_{24}^7(1+x^2)^{-1}.$$

Из этих неравенств следует, что

$$\left|\frac{\partial(F_M)_i}{\partial x_k}\right| \leqslant \frac{c_{25}^7}{1+x^2}+\left|\int\limits_{R^3} q\frac{Df^{-1}}{D\lambda}\frac{3(\lambda_i-x_i)(\lambda_k-x_k)-|\lambda-x|^2\delta_{ik}}{|\lambda-x|^5}\,d\lambda\right|. \tag{1.107}$$

Для сингулярного интеграла в правой части (7.7) выполняется оценка ([11], стр. 57)

$$\left|\int\limits_{R^3} q\frac{Df^{-1}}{D\lambda}\frac{3(\lambda_i-x_i)(\lambda_k-x_k)-|x-\lambda|^2\delta_{ik}}{|\lambda-x|^5}d\lambda\right| \leqslant \frac{c_{26}^7}{1+x^2}. \tag{1.108}$$

Из неравенств (7.7), (7.8) вытекает утверждение леммы. ■

Теорема 10. *Если* $f_M(\xi)=f(\xi)$, $g_M(x)=g(x)$, $q_M(\xi)=q(\xi)$, $\beta=(3-\alpha)/2(k_2(M)=1)$, $0\leqslant t\leqslant TM^{3(\alpha-1)/2}$, $g(x)$ *— гладкий, регулярный на бесконечности атлас распределения скоростей и выполнены условия леммы* 7.1, *то для достаточно малого* T *выполняется неравенство*

$$\left|\frac{\partial x_M(\tau,\xi)}{\partial\tau}-\frac{\partial x_{M'}(\tau,\xi)}{\partial\tau}\right| \leqslant \tau c_{27}^7\Big(\frac{\ln M}{M}+\frac{\ln M'}{M'}\Big)^{2/5},$$

где $t=\tau M^{3(\alpha-1)/2}$.

Доказательство. Из лемм 7.1, 3.4 следует, что прн достаточно малом T для $x_M(\tau,\xi)$, $x_{M'}(\tau,\xi)$ выполняются условия (3.20)–(3.22). Возьмем в качестве $\overline{x}_M(\tau,\xi)$ в теореме 3.1 функцию $x_{M'}(\tau,\xi)$. Тогда получим, что

$$\|w_M\| \leqslant \tau c_{28}^7\Big(\frac{\ln M}{M}+\frac{\ln M'}{M'}\Big). \tag{1.109}$$

Из (7.9) и леммы 6.2 следует, что

$$\left\|\frac{\partial x_M(\tau,\,\xi)}{\partial\tau}-\frac{\partial x_{M'}(\tau,\,\xi)}{\partial\tau}\right\|\leqslant\tau c_{29}^7\Big(\frac{\ln M}{M}+\frac{\ln M'}{M'}\Big).$$

Так как для x_m, $x_{M'}$, в силу леммы 7.1, выполняется неравенство

$$\big|\partial x_M^{(2)}/\partial\xi\big|+\big|\partial x_{M'}^{(2)}/\partial\xi\big|\leqslant c_{30}^7, \tag{1.110}$$

то из теоремы 6.3 вытекает утверждение теоремы. ∎

Теорема 7.1 показывает, что система функций $\partial x_M(\tau,\,\xi)/\partial\tau$ фундаментальна по M в пространстве C. Следовательно, существует предел $\overline{x}(\tau,\,\xi)$ функций $x_M(\tau,\,\xi)$ и выполняется оценка

$$\left|\frac{\partial x_M(\tau,\,\xi)}{\partial\tau}-\frac{\partial\overline{x}(\tau,\,\xi)}{\partial\tau}\right|\leqslant\tau c_{27}^7\Big(\frac{\ln M}{M}\Big)^{2/5}. \tag{1.111}$$

Из (7.10) следует, что при каждом τ, $0\leqslant\tau\leqslant T$, почти всюду в R^3 существуют $\partial\overline{x}/\partial\xi$, $\partial^2\overline{x}/\partial\tau\partial\xi$, которые равномерно ограничены ([12], стр. 449) (теорема В. В. Степанова). Следовательно, при достаточно малом T справедливы неравенства

$$c_{31}^7|\xi-\eta|\leqslant\big|\overline{x}(\tau,\,\xi)-\overline{x}(\tau,\,\eta)\big|\leqslant c_{32}^7|\xi-\eta|. \tag{1.112}$$

Функция $\overline{x}(\tau,\,\xi)$ удовлетворяет начальным условиям

$$\overline{x}(0,\,\xi)=\xi,\quad \partial\overline{x}(0,\,\xi)/\partial\tau=g(\xi). \tag{1.113}$$

Покажем, что при $0\leqslant\tau\leqslant T$ функция $\overline{x}(\tau,\,\xi)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2\overline{x}(\tau,\,\xi)}{\partial\tau^2}=\int\limits_{B_1}q(\eta)\frac{\overline{x}\big(\tau,\,f(\eta)\big)-\overline{x}(\tau,\,\xi)}{\big|\overline{x}\big(\tau,\,f(\eta)\big)-\overline{x}(\tau,\,\xi)\big|^3}\,d\eta. \tag{1.114}$$

Действительно, функцин x_M удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial x_M}{\partial\tau}=g(\xi)+\int\limits_0^\tau\int\limits_{B_1}q(\eta)\frac{\overline{x}\big(\tau',\,f(\eta)\big)-\overline{x}(\tau',\,\xi)}{\big|\overline{x}\big(\tau',\,f(\eta)\big)-\overline{x}(\tau',\,\xi)\big|^3}\,d\eta\,d\tau'+\int\limits_0^\tau P_M\,d\tau'. \tag{1.115}$$

В силу равномерной ограниченности $\partial x_M/\partial\xi$ и в силу леммы 1.2, находим, что

$$\int\limits_0^\tau P_M\,d\tau' \to 0 \quad \text{при} \quad M\to\infty.$$

Положим

$$A = \big(x_M(\tau',\,f(\eta)) - x_M(\tau',\,\xi)\big)\big(\big|x_M(\tau',\,f(\eta)) - x_M(\tau',\,\xi)\big|^{-3} - \\ - \big|\overline{x}(\tau',\,f(\eta)) - \overline{x}(\tau',\,\xi)\big|^{-3}\big),$$

$$B = \frac{\big(x_M(\tau',\,f(\eta)) - x_M(\tau',\,\xi)\big) - \big(\overline{x}(\tau',\,f(\eta)) - \overline{x}(\tau',\,\xi)\big)}{\big|\overline{x}(\tau',\,f(\eta)) - \overline{x}(\tau',\,\xi)\big|^3}.$$

Тогда, полагая $\xi = f(z)$, приходим к неравенству

$$|B| \leqslant c_{33}^7 \frac{\big|x_M(\tau',\,f(\eta)) - \overline{x}(\tau',\,f(\eta))\big|^{1/2} + \big|x_M(\tau',\,\xi) - \overline{x}(\tau',\,\xi)\big|^{1/2}}{|\eta - z|^{2,5}}.$$

Следовательно, из (7.11) вытекает, что

$$\int\limits_0^\tau\int\limits_{B_1} |B|\,d\eta\,d\tau' \to 0 \quad \text{при} \quad M\to\infty.$$

Аналогично доказывается, что

$$\int\limits_0^\tau\int\limits_{B_1} |A|\,d\eta\,d\tau' \to 0 \quad \text{при} \quad M\to\infty.$$

Итак, переходя к пределу по M в (7.15), находим, что

$$\frac{\partial\overline{x}(\tau,\,\xi)}{\partial\tau} = g(\xi) + \int\limits_0^\tau\int\limits_{B_1} q(\eta)\frac{\overline{x}(\tau',\,f(\eta)) - \overline{x}(\tau',\,\xi)}{\big|\overline{x}(\tau',\,f(\eta)) - \overline{x}(\tau',\,\xi)\big|^3}\,d\eta\,d\tau'. \qquad (1.116)$$

Сделаем в (7.16) замену переменных, положив $\lambda = f(\eta)$. Тогда уравнение (7.16) перепишется в виде

$$\frac{\partial\overline{x}(\tau,\,\xi)}{\partial\tau} = g(\xi) + \int\limits_0^\tau\int\limits_{R^3} \frac{\Phi(\tau',\,\lambda,\,\xi)}{|\Phi|^3} q\frac{Df^{-1}}{D\lambda}\frac{d\lambda}{|\lambda-\xi|^2}\,d\tau',$$

где
$$\Phi(\tau, \lambda, \xi) = \big(\overline{x}(\tau, \lambda) - \overline{x}(\tau, \xi)\big)|\lambda - \xi|^{-1}.$$
Оценим приращение по τ функции Φ:

$$\big|\Phi(\tau_1, \lambda, \xi) - \Phi(\tau_2, \lambda, \xi)\big| \leqslant \frac{c_{34}^7}{|\lambda - \xi|^{0,5}}\big(\big|\overline{x}(\tau_1, \lambda) - \overline{x}(\tau_2, \lambda)\big|^{0,5} +$$
$$+ \big|\overline{x}(\tau_1, \xi) - \overline{x}(\tau_2, \xi)\big|^{0,5}\big) \leqslant c_{35}^7|\lambda - \xi|^{-0,5}|\tau_1 - \tau_2|^{0,5} \max_{\tau,\lambda} |\partial\overline{x}/\partial\tau|^{0,5} \leqslant$$
$$\leqslant c_{36}^7|\lambda - \xi|^{-0,5}|\tau_1 - \tau_2|^{0,5}. \qquad (1.117)$$

Из неравенств (7.17), (7.12) следует, что
$$\int\limits_{R^3} q\frac{Df^{-1}}{D\lambda}\frac{\Phi}{|\Phi|^3}\frac{d\lambda}{|\lambda - \xi|^2}$$
– непрерывная функция τ'. Итак, доказано, что $\overline{x}(\tau, \xi)$ удовлетворяет уравнению (7.14). Сформулируем полученные результаты в виде следующей теоремы.

Теорема 11. *Пусть выполнены предположения теоремы* 7.1. *Тогда существует решение* $\overline{x}(\tau, \xi)$ *задачи* (7.13), (7.14) *и оно определяет асимптотику траекторий точечных масс*:
$$\left|\dot{r}^k(t) - M^{(3-\alpha)/2}\frac{\partial\overline{x}}{\partial\tau}\Big(\tau, \frac{k}{M}\Big)\Big|_{\tau = t/M^{3(\alpha-1)/2}}\right| \leqslant c_{37}^7 t M^{3-2\alpha}(\ln M/M)^{2/5}$$
при $0 \leqslant t \leqslant M^{3(\alpha-1)/2}T$.

Глава 2

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, УРАВНЕНИЕ ВЛАСОВА

§ 1. T-отображения и метод ломаных Эйлера

Самосогласованные уравнения плазмы без учета столкновений описывают взаимодействие частицы с усредненными полями других частиц. Эти нелинейные уравнения обычно содержат производные первого порядка, а их коэффициенты зависят от свертки неизвестной функции $u(x, t)$ с некоторыми заданными потенциалами. Из физических соображений следует, что коэффициенты зависят от значения неизвестной функции в некоторый предшествующий момент: $u(x, t-\varepsilon)$ (эффект запаздывания или релаксации). Однако параметр ε настолько мал, что в уравнении мы им пренебрегаем. Но при составлении разностной схемы для таких уравнений этот факт, по существу, учитывается, поскольку значения коэффициентов берутся на предыдущем шаге по сравнению с решением.

Мы введем специальное понятие T-отображения, в котором на самом деле отражается факт запаздывания коэффициентов уравнения и которое дает метод построения решения нелинейного уравнения шагами по t. В этом смысле T-отображение иногда стоит ближе к реальным физическим процессам, чем само уравнение. С другой стороны, как будет показано ниже, метод T-отображений обобщает метод ломаных Эйлера. Таким образом, метод T-отображений может служить конструктивным методом доказательства существования решений. Кроме того, T-отображения тесно связаны с понятием нелинейного континуального интеграла (см. гл. IV) и, с нашей точки зрения, естественно решения «характеристических уравнений» для континуального интеграла записывать в виде T-отображения, поскольку континуальный интеграл может быть также интерпретирован как метод построения решения шагами по t.

T-отображения, ассоциированные с нелинейными уравнениями квантовой механики (гл. III, IV), являются естественным обобщением T-произведений, причем в этом случае формулы выпутывания Фейнмана переносятся на T-отображения. Именно это фундаментальное обстоятельство позволяет построить квазиклассическую асимнтотику нелинейных уравнений квантовой механики и нелинейный контияуальный интеграл, отвечающий им.

Уравнение Власова, как уже говорилось, играет в наших построениях такую же роль, как уравнение Лиувилля классической механики для фейнмановского континуального интеграла.

В этой главе после изложения общих свойств T-отображений рассматриваются нелинейные уравнения, обобщающие уравнения Власова, а затем изучаются общие интегро-дифференциальные уравнения первого порядка.

В данном первом параграфе главы мы дадим определение T-отображения и изучим его связь с методом ломаных Эйлера. Определение T-отображения мы дадим в три этапа. Прежде чем сформулировать общее определение, мы рассмотрим линейный случай и затем случай псевдодифференциальных операторов.

Многие уравнения математической физики и, в частности, квантовой механики являются эволюционными уравнениями вида

$$-i\frac{\partial\psi(t)}{\partial t} + \widehat{H}(t)\psi(t) = 0,$$

где $\psi(t)$ — функция со значениями в гильбертовом пространстве, $\widehat{H}(t)$ — заданный линейный неограниченный самосопряженный оператор в этом же пространстве. Формально решение такого уравнения записывают в виде T-произведения следующим образом:

$$\psi(t) = \exp\Big\{-i\int_{t_0}^{t}\overset{T}{\widehat{H}}(\tau)d\tau\Big\}\psi(t_0).$$

Под этим понимается следующий предел «хронологического» произведения:

$$\psi(t) = \lim_{\delta_N\to 0}\exp\big\{-i\Delta t_{N-1}\widehat{H}(t_{N-1})\big\}\dots\exp\big\{-i\Delta t_0\widehat{H}(t_0)\big\}\psi(t_0), \quad (2.1)$$

где $t_0 < t_1 < \ldots < t_N \equiv t$ — некоторое разбиение отрезка $[t_0, t]$ на N интервалов длины $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$, а $\delta_N = \max\limits_j \Delta t_j$.

Таким образом, для получепин функции ψ в «момент времени» $t+dt$ нужно применить «инфинитезимальный» оператор $\exp\{-i\,dt\widehat{H}(t)\}$ к функции ψ в «момент времени» t:

$$\psi(t+dt) = \exp\{-i\,dt\widehat{H}(t)\}\psi(t).$$

Предел (1.1) мы будем обозначать

$$\psi(t) = \left[\prod_{\tau=t_0}^{t} \exp\{-i\,d\tau \overset{\tau}{\widehat{H}}(\tau)\}\right]\psi(t_0).$$

Аналогично определяется нелинейное T-отображение. Вначале дадим определение в том частном случае, который в дальнейшем будет играть важную роль. Пусть B_n — некоторое банахово пространство функций от n вещественных переменных и $H\colon B_n \to B_{2n}$ — некоторое нелинейное отображение. Для каждой функции $\psi \in B_n$ ее образ $H[\psi]$ есть функцин от $2n$ переменных. Обозначим эти переменные через $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $p = (p_1, \ldots, p_n)$; таким образом, $H[\psi](x, p)$ есть функция на $\mathbb{R}^{2n}$. Сопоставим ей псевдодифференциальный оператор $\widehat{H}[\psi] \overset{\text{def}}{=} H[\psi](\overset{2}{x}, \overset{1}{p})$, где $\overset{1}{p} = -ih\,\overset{1}{\partial/\partial x}$, h — некоторый вещественный параметр (постоянная Планка), номера 1 и 2 обозначают порядок действия оператора.

Рассмотрим зволюционное уравнение

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \bigl(\widehat{H}[\psi]\bigr)\psi. \tag{2.2}$$

Решение зволюционного уравнения (1.2) будем формально представлять в виде

$$\psi(t) = \lim_{\delta_N\to 0}\psi_N, \tag{2.3}$$

где ψ_N определяется из следующей рекуррентной системы равенств:

$$\psi_{k+1} = \exp\{-i\Delta t_k \widehat{H}[\psi_k]\}\psi_k, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1,$$
$$\psi_0 = \psi(t_0),$$

или, в дифференциальной форме,

$$\psi(t+dt) = \exp\{-i\,dt\widehat{H}\bigl[\psi(t)\bigr]\}\psi(t).$$

Такое представление функции $\psi(t)$ мы будем записывать в виде

$$\psi(t) = \left[\prod_{\tau=t_0}^{t} \exp\left\{-i\, d\tau \overset{\tau}{\widehat{H}}\left[\psi(t)\right]\right\}\right]\psi(t_0). \tag{2.4}$$

Таким образом, значение функции ψ в момент $t+dt$ может быть получено применением инфинитезимального оператора $\exp\left\{-i\, dt\widehat{H}\left[\psi(t)\right]\right\}$ к функции $\psi(t)$.

Отображение $\psi(t_0) \to \psi(t)$, построенное по формулам (1.3), мы назовем *Т-отображением* по аналогии с термином «T-произведение», которым обычно обозначают мультипликативный интеграл (1.1). Таким образом, T-произведение есть частный случай T-отображения, когда оператор H линеен.

Дадим теперь самое общее определение T-отображения, не связанное ни с псевдодифференциальными операторами, ни с каким-либо эволюционным уравнением.

Рассмотрим некоторое банахово пространство B и обозначим через $C([0,\, t],\, B)$ банахово пространство непрерывных функций $\psi = \psi(t)$ на $[0,\, t] \subset \mathbf{R}$ со значениями в B, наделенное нормой

$$\|\psi\|_{C([0,\,t],\,B)} = \sup_{0 \leqslant \tau \leqslant t} \|\psi(\tau)\|_B.$$

Пространство $C([0,\, 0],\, B)$ отождествим с B.

Пусть $t \geqslant t'$. Каждой функции $\psi \in C([0,\, t],\, B)$ сопоставим ее сужение на $[0,\, t']$; получим новую функцию $\psi' \in C([0,\, t'],\, B)$. В дальнейшем мы будем опускать знак штриха и обозначать через ψ как саму исходную функцию, так и все ее сужения на меньшие отрезки.

Пусть заданы $\varepsilon_0 > 0$, $T_0 > 0$ и при любых t, ε таких, что $0 \leqslant t \leqslant T_0$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, определено некоторое двупараметрическое семейство отображений $W_{t,\varepsilon}\colon C([0,\, t],\, B) \to B$ такое, что при любом $t \in [0,\, T_0]$ и любом $v \in C([0,\, t],\, B)$ элемент $W_{t,\varepsilon}[v]$ непрерывно зависит от ε и $W_{t,0}[v] = v(t)$. Положим

$$\left(S_{t,\varepsilon}[v]\right)(\tau) = \begin{cases} W_{t,\tau-t}[v], & t \leqslant \tau \leqslant t+\varepsilon, \\ v(\tau), & \tau \leqslant t. \end{cases} \tag{2.5}$$

Получим отображение

$$S_{t,\varepsilon}\colon C([0,\, t],\, B) \to C([0,\, t+\varepsilon],\, B).$$

Обозначим через $0 \equiv t_0 < \ldots < t_N \equiv T_0$ точки разбиения отрезка $[0, T_0]$ на интервалы $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$, где $j = 0, \ldots, N$. Максимальную длину этих интервалов обозначим $\delta_N = \max\limits_j \Delta t_j$.

Пусть $v_0 \in B$. Положим

$$v_N = S_{t_{N-1},\Delta t_{N-1}} \circ \ldots \circ S_{t_0,\Delta t_0}[v_0]. \tag{2.6}$$

Здесь кружок $\circ$ обозначает композицию нелинейных отображений.

Вообще говоря, предел $\lim\limits_{\delta_N \to 0} v_n$ по норме пространства $C([0,T_0],B)$ существует не при всех $v_0 \in B$. Пусть D — подмножество в B, на котором этот предел существует.

Определение 1. Пусть $v_0 \in D$ и $v = \lim\limits_{\delta_N \to 0} v_N$. Отображение $v_0 \to v$ назовем T-отображением с образующей $S_{t,\varepsilon}$ и обозначим

$$v(t) = \left(\prod_{\tau=0}^{t} \circ \overset{T}{S}_{\tau,d\tau} \right) [v_0]. \tag{2.7}$$

Будем говорить, что T-отображение с образующей $S_{t,\varepsilon}$ существует на элементе v_0 на отрезке времени $[0, T_0]$ в норме пространства $C([0, T_0], B)$.

Пример 1. Пусть $\tau \in [0, T_0]$ и R_τ — непрерывное отображение $C([0, \tau], B)$ в B. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{aligned} \frac{d\psi(\tau)}{d\tau} &= R_\tau[\psi], \qquad && \psi \in C\bigl([0, T_0], B\bigr), \\ \psi(\tau)\big|_{\tau=t} &= v(t), && v \in C\bigl([0, t], B\bigr). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Здесь t — фиксированная точка из отрезка $[0, T_0 - \varepsilon_0]$. Решение этой задачи Коши $\psi(\tau)$ при каждом τ есть элемент пространства B.

Рассмотрим семейство отображений

$$W_{t,\varepsilon} \colon v \to \psi(t+\varepsilon), \quad \varepsilon \leqslant \varepsilon_0,$$

соответствующее семейство $S_{t,\varepsilon}$ действует по формуле

$$\bigl(S_{t,\varepsilon}[v]\bigr)(\tau) = \begin{cases} \psi(\tau), & t \leqslant \tau \leqslant t+\varepsilon, \\ v(\tau), & \tau \leqslant t. \end{cases} \tag{2.9}$$

Очевидно, что элемент

$$v_N = S_{t_{N-1},\Delta t_{N-1}} \circ \ldots \circ S_{t_0,\Delta t_0}[\psi_0]$$

является решением задачи Коши

$$\frac{d\psi(\tau)}{d\tau} = R_\tau[\psi], \quad \psi\big|_{\tau=0} = \psi_0 \in B.$$

Следовательно, нри любом N $\psi = v_N$, т. е.

$$\psi = S_{t_{N-1},\Delta t_{N-1}} \circ \ldots \circ S_{t_0,\Delta t_0}[\psi_0].$$

При $N \to \infty$, $\delta_N \to 0$ получаем: $\psi = \lim v_n$ и, значит, $S_{t,\varepsilon}$ является образующей T-отображения $\psi_0 \to \psi$. Ясно, что любой оператор $S'_{t,\varepsilon}$ такой, что $S_{t,\varepsilon} - S'_{t,\varepsilon} = O(\varepsilon^2)$, будет служить образующей этого же T-отображения.

Рассмотрим теперь T-отображение, ассоциированное с более общим эволюционным уравнением.

Пример 2. Пусть $B_1 \subset B_2$ — два банаховых пространства с нормами $\|\cdot\|_1 \geqslant \|\cdot\|_2$. Обозначим через $C_j(t) = C\big([0, t], B_j\big)$ пространство непрерывных отображений $[0, t] \to B_j$ $(j = 1, 2)$. Тогда $C_1(t) \subset C_2(t)$.

Пусть нри каждом $t \in [0, T_0]$ задано непрерывное отображение

$$R_t\colon C_1(t) \to B_2,$$

причем для любого $v \in C_1(t)$ $R_t(v)$ есть непрерывная функция аргумента $t \in [0, T_0]$.

Задачей Коши для оператора R_t с начальным условием $\psi_0 \in B_1$ называется система уравнений для функции $\psi(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T_0)$:

$$\frac{d}{dt}\psi(t) = R_t(\psi), \quad \psi(0) = \psi_0, \tag{2.10}$$

причем производная берется в норме B_2:

$$\lim_{\Delta t \to +0}\left\| \frac{d}{dt}\psi(t) - \frac{\psi(t+\Delta t) - \psi(t)}{\Delta t}\right\|_2 = 0.$$

Пусть задана образующая T-отображения

$$S_{t,\varepsilon}\colon C_1(t) \to C_1(t+\varepsilon).$$

Определение 2. Если при любом $t \in [0, T_0]$ образующая $S_{t,\varepsilon}$ удовлетворяет условию

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \left\| \frac{(S_{t,\varepsilon}[v])(\varepsilon) - v(t)}{\varepsilon} - R_t(v) \right\|_2 = 0 \qquad (2.11)$$

локально равномерно по $v \in C_1(t)$, то $S_{t,\varepsilon}$ называется инфинитезимальным разрешающим оператором для задачи Коши (1.10).

Лемма 1. *Пусть $S_{t,\varepsilon}$ — инфинитезимальный разрешающий оператор для задачи Коши* (1.10), *и пусть T-отображение $\psi(t) = \left(\prod_{\tau=0}^{t} \circ \overset{\tau}{S}_{\tau,\partial\tau}\right)[\psi_0]$ существует на элементе $\psi_0 \in B_1$ на отрезке времени $[0, T_0]$ в норме $C_1(T_0)$. Тогда функция ψ является решением задачи* (1.10).

Доказательство. Пусть Δ_N — некоторое разбиение $[0, T_0]$ и

$$\psi_N = S_{t_{N-1}, \Delta t_{N-1}} \circ \ldots \circ S_{t_0, \Delta t_0}[\psi_0].$$

Тогда если $t_{j+1} \geqslant t \geqslant t_j$, то

$$\psi_N(t) = \left(S_{t_j, t-t_j}[\psi_N]\right)(t).$$

Поэтому, в силу (1.11), найдется N_0 такое, что

$$\lim_{\Delta t \to +0} \left\| \frac{\psi_N(t_j + \Delta t) - \psi_N(t_j)}{\Delta t} - R_{t_j}[\psi_N] \right\|_2 = 0$$

равномерно по $N \geqslant N_0$.

Зафиксируем точку $t \in [0, T_0]$ и выберем последовательность разбиений $\{\Delta_N\}$так, чтобы при каждом N один из узлов t_j совпадал с t.

Тогда, в силу того, что R_t непрерывен и T-отображение с образующей $S_{t,\varepsilon}$ существует на ψ_0, имеем

$$\lim_{\Delta t \to +0} \left\| \frac{\psi(t + \Delta t) - \psi(t)}{\Delta t} - R_t[\psi] \right\|_2 = 0.$$

Лемма доказана. ■

Предположим теперь, что нелинейный оператор R_t в задаче Коши (1.10) имеет специальный вид

$$R_t(\psi) = A_t(\psi)\psi(t),$$

где $A_t(\psi)$ при каждом $\psi \in C_1(t)$ есть линейный непрерывный оператор из B_1 в B_2, являющийся инфинитезимальной образующей для однопараметрической полугруппы $e^{\varepsilon A_t(\psi)}$. В качестве инфинитезимального разрешающего оператора задачи

$$\frac{d}{dt}\psi(t) = A_t(\psi)\psi(t), \quad \psi(0) = \psi_0, \tag{2.12}$$

можно выбрать оператор

$$\big(S_{t,\varepsilon}[v]\big)(\tau) = \begin{cases} e^{(\tau-t)A_t(v)}v(t), & t \leqslant \tau \leqslant t+\varepsilon, \\ v(t), & \tau \leqslant t. \end{cases} \tag{2.13}$$

T-отображение с такой образующей записывается следующим образом:

$$\psi(t) = \prod_{\tau=0}^{t} e^{\tau A_\tau(\psi)d\tau}\psi_0. \tag{2.14}$$

В случае, когда показатель экспоненты не зависит от ψ, это T-отображение переходит в T-произведение.

Проследим теперь аналогию между методом T-отображений и методом ломаных Эйлера. При решении обыкновенных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве эта аналогия оказывается полной (лемма 1.2).

Пусть B — банахово пространство, $\Theta\colon B \times \mathbf{R} \to B$ — непрерывное отображение. Через $\dfrac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t)$ будем обозначать производную $\dot{x}(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$ функции $t \to x(t) \in B$. Рассмотрим задачу Коши

$$\dot{x}(t) = \Theta\big(x(t), t\big), \quad x(0) = x^0 \in B. \tag{2.15}$$

Построим T-отображение, отвечающее этой задаче. Образующую $S_{t,\varepsilon}$ зададим формулой

$$\big(S_{t,\varepsilon}[x]\big)(\tau) = \begin{cases} x(\tau), & \tau \leqslant t, \\ x(t) + (\tau - t)\Theta\big(x(t), t\big), & t \leqslant \tau \leqslant t+\varepsilon. \end{cases}$$

Образующая $S_{t,\varepsilon}$ является инфинитезимальным разрешающим оператором задачи Коши (1.15). Докажем существование T-отображения с этой образующей.

Определение 3. Отображение $\omega\colon B_1 \to B_2$ банаховых пространств B_1 и B_2 будем называть липшиц-непрерывным, если существует такая непрерывная функция γ на $\mathbf{R}^2$, что для любых x, $y \in B_1$

$$\left\|\omega(x) - \omega(y)\right\|_{B_2} \leqslant \|x-y\|_{B_1}\gamma\bigl(\|x\|_{B_1},\, \|y\|_{B_1}\bigr). \tag{2.16}$$

Обозначим через $\|\cdot\|$ норму в банаховом пространстве B.

Лемма 2. *Пусть отображение Θ липшиц-непрерывно и при любом $T > 0$ существует константа $c \geqslant 0$ такая, что при $|t| \leqslant T$ и при любом $x \in B$ справедливо неравенство*

$$\left\|\Theta(x,\, t)\right\| \leqslant c\bigl(1 + \|x\|\bigr). \tag{2.17}$$

Тогда T-отображение $x(t) = \prod\limits_{\tau=0}^{t} \circ \overset{\tau}{S}_{\tau,\,d\tau}[x^0]$ существует при любом $x^0 \in B$ на любом отрезке $[0,\, T]$ и дает решение $x(t)$ задачи Коши (1.15). Это решение единственно.

Мы приведем подробное доказательство леммы 1.2. В [14] показано, что это доказательство почти без изменений переносится на нелинейные интегро-дифференциальные уравнения, содержащие частные производные.

Доказательство леммы 1.2. Пусть $0 \equiv t_0 < t_1 < \ldots < t_N \equiv t$ — некоторое разбиение отрезка $[0,\, t]$. Определим функцию $x^{(N)}$ на $[0,\, t]$ следующим равенством:

$$x^{(N)} = S_{t_{N-1},\Delta t_{N-1}} \circ \ldots \circ S_{t_0,\Delta t_0}[x^0].$$

На каждом отрезке $\tau \in [t_k,\, t_{k+1}]$ $(k = 0,\, 1,\, \ldots,\, N-1)$ значения функции $x^{(N)}$ вычисляются по формуле

$$x^{(N)}(\tau) = x^{(N)}(t_k) + (\tau - t_k)\Theta\bigl(x^{(N)}(t_k),\, t_k\bigr). \tag{2.18}$$

Таким образом, функцин $x^{(N)}$ есть ломаная Эйлера для задачи (1.15) в банаховом пространстве B. Сходимость T-отображения с образующей $S_{t,\varepsilon}$ означает существование предела $\lim\limits_{\delta_N\to 0} x^{(N)}$ последовательности ломаных Эйлера (когда диаметр разбиения $\delta_N = \max\limits_k \Delta t_k$ стремится к нулю). Докажем существование этого предела.

Из формулы (1.18) и оценки (1.17) следует

$$\left\|x^{(N)}(\tau)\right\| \leqslant \left\|x^{(N)}(t_k)\right\|\left(1+(\tau-t_k)c\right) \quad \text{при} \quad \tau\in[t_k,\, t_{k+1}].$$

Константа c не зависит от τ и выбора точек разбиения t_k. Из этого неравенства по индукции получим оценку:

$$\left\|x^{(N)}(\tau)\right\| \leqslant \|x^0\|(1+c\Delta t_0)\dots(1+c\Delta t_{k-1})\left(1+c(\tau-t_k)\right) \leqslant \\ \leqslant \|x^0\|e^{\tau c} \leqslant \|x^0\|e^{tc}. \quad (2.19)$$

Тем самым доказана равномерная ограниченность последовательности ломаных Эйлера. Из (1.16), (1.18) и (1.19) следует оценка разности

$$\left\|x^{(N)}-x^{(N)}(t_k)\right\| \leqslant c(\tau-t_k)\left\|x^{(N)}(t_k)\right\| \leqslant c(\tau-t_k)\|x^0\|e^{tc}. \quad (2.20)$$

Докажем фундаментальность последовательности $\{x^{(N)}\}$ в пространстве $C\big([0,\,t],\,B\big)$. В силу (1.20), достаточно рассмотреть случай, когда точки t_k в (1.18) имеют вид

$$t_k = k\frac{t}{N}.$$

Пусть $M=Nl$, где l — натуральное число. Достаточно доказать, что разность $x^{(N)}-x^{(N)}$ стремится к нулю в норме $C\big([0,\,t],\,B\big)$ при $N\to\infty$ равномерно по l.

Обозначим $\varepsilon=\dfrac{t}{M}$. Пусть $\tau\in|0,t|$. Найдутся номер $k\in\{0,1,\dots,N-1\}$ и номер $j\in\{0,\,1,\,\dots,\,l-1\}$ такие, что

$$t_k+j\varepsilon \leqslant \tau < t_k+(j+1)\varepsilon.$$

Из формулы (1.18) (записанной для функции $x^{(M)}$ вместо $x^{(N)}$) следует, что

$$x^{(M)}(\tau)=x^{(M)}(t_k)+\sum_{s=0}^{j-1}\varepsilon\Theta\big(x^{(M)}(t_k+s\varepsilon),\,t_k+s\varepsilon\big)+ \\ +(\tau-t_k-j\varepsilon)\Theta\big(x^{(M)}(t_k+j\varepsilon),\,t_k+j\varepsilon\big). \quad (2.21)$$

Вычтем из равенства (1.21) равенство (1.18). Оценим норму получившейся разности:

$$\left\|x^{(M)}(\tau) - x^{(N)}(\tau)\right\| \leqslant \left\|x^{(M)}(t_k) - x^{(N)}(t_k)\right\| + \\ + \varepsilon \sum_{s=0}^{j} \left\|\Theta\left(x^{(M)}(t_k + s\varepsilon),\, t_k + s\varepsilon\right) - \Theta\left(x^{(N)}(t_k),\, t_k\right)\right\|. \quad (2.22)$$

Как было показано в (1.19), последовательность $\{x^{(N)}\}$ равномерно ограничена на отрезке $[0,\, t]$. Отсюда и из липшиц-непрерывности отображения Θ следует оценка

$$\left\|\Theta\left(x^{(M)}(t_k + s\varepsilon),\, t_k + s\varepsilon\right) - \Theta\left(x^{(N)}(t_k),\, t_k\right)\right\| \leqslant \\ \leqslant c_1\left(\left\|x^{(M)}(t_k + s\varepsilon) - x^{(N)}(t_k)\right\| + s\varepsilon\right), \quad (2.23)$$

где c_1 — некоторая констапта, зависящая лишь от t и от нормы $\|x^0\|$ начальной точки x^0.

Обозпачим $\alpha(\tau) = \left\|x^{(M)}(\tau) - x^{(N)}(\tau)\right\|$. Используя формулы (1.23) и (1.20), перепишем нераненство (1.22) в следующем виде:

$$\alpha(\tau) \leqslant \alpha(t_k) + \varepsilon \sum_{s=0}^{j} c_1 \alpha(t_k + s\varepsilon) + c_2 \varepsilon^2 \frac{j(j+1)}{2},$$

где

$$c_2 = c_1 c \|x^0\| e^{tc} + c_1, \quad \varepsilon^2 \frac{j(j+1)}{2} \leqslant \frac{\delta^2}{l^2} \cdot \frac{l(l+1)}{2} \leqslant \delta^2.$$

Отсюда по индукции получается оценка

$$\alpha(\tau) \leqslant \left[\alpha(t_k)(1 + \varepsilon c_1) + c_2\delta^2\right](1 + \varepsilon c_1)^{l-1}, \quad \tau \in [t_k,\, t_{k+1}|.$$

Снова, применяя индукцию к этому неравенству, получим

$$\alpha(\tau) \leqslant c_2\delta^2\left[(1 + \varepsilon c_1)^l + (1 + \varepsilon c_1)^{2l} + \ldots + (1 + \varepsilon c_1)^{Nl}\right] \leqslant \\ \leqslant N c_2 \frac{t^2}{N^2}\left(1 + \frac{tc_1}{M}\right)^M \leqslant \frac{c_2 t^2}{N} e^{tc_1}.$$

Таким образом, мы доказали, что $\alpha(\tau) = \left\|x^{(M)}(\tau) - x^{(N)}(\tau)\right\| \to 0$ при $N \to \infty$ ранномерно по l и по $\tau \in [0,\, t]$. Следовательно, последовательность $\{x^{(N)}\}$ фундаментальна в пространстве $C\left([0,\, t],\, B\right)$.

Обозначим через $x(\tau)$ ее предел $x(\tau) = \lim_{N\to\infty} x^{(N)}(\tau)$. Из (1.18) следует, что

$$x^{(N)}\Big(k\frac{t}{N}\Big) = x^0 + \sum_{s=0}^{k-1} \frac{t}{N}\Theta\Big(x^{(N)}\Big(s\frac{t}{N}\Big),\, s\frac{t}{N}\Big),\ 1 \leqslant k \leqslant N. \qquad (2.24)$$

Пусть $0 < \tau < t$. Положим в формуле (1.24) $k = \Big[N\frac{\tau}{t}\Big]$, где квадратные скобки обозначают целую часть. Учитывая, что $\Big[N\frac{\tau}{t}\Big]\frac{t}{N} \to \tau$, получим из (1.24) интегральное уравнение для $x(\tau)$:

$$x(\tau) = x^0 + \int\limits_0^\tau \Theta\big(x(\mu),\, \mu\big)\, d\mu.$$

Следовательно, функция $x(\tau)$ всюду на $[0,\, t]$ является решением задачи Коши (1.15). Единственность решения этой задачи следует из липшиц-непрерывности отображения θ. Этим доказана сходимость T-отображения с образующей $S_{t,\varepsilon}$ к решению задачи (1.15) при всех $t \in (0,\, \infty)$. Лемма доказана. ■

В заключение параграфа рассмотрим обобщение задачи (1.15). Пусть задано некоторое отображение Ω пространства $C(\mathbf{R},\, B)$ в себя. Каждой непрерывной функции $x\colon \mathbf{R} \to B$ отображение Ω сопоставляет непрерывную функцию $\Omega[x]\colon \mathbf{R} \to B$. Предположим, что Ω удовлетворяет следующему условию:

(А) если $x,\, y \in C(\mathbf{R},\, B)$ и $x(\tau) = y(\tau)$ при $0 \leqslant \tau \leqslant t$, то $\Omega[x](t) = \Omega[y](t)$.

Иными словами, значение $\Omega[x](t)$ не зависит от поведения функции $x = x(\tau)$ при $\tau > t$. Символически это можно записать так:

$$\frac{\delta\Omega[x](t)}{\delta x(\tau)} = 0 \quad \text{при} \quad \tau > t.$$

Если $x \in C\big([0,\, T],\, B\big)$, то, доопределив функцию x подходящей константой при $t > T$, мы получим непрерывную функцию на $\mathbf{R}$ (обозначин ее снова x) и, следовательно, сможем построить функцию $\Omega[x](\tau)$. Таким образом, отображение Ω индуцирует при каждом $T > 0$ отображение $\Omega\colon C\big([0,\, T],\, B\big) \to C\big([0,\, T],\, B\big)$.

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = \Omega[x](t), \quad t \in [0,\, T], \\ &x(0) = x^0 \in B. \end{aligned} \qquad (2.25)$$

В силу того, что отображение Ω удовлетворяет условию (A), решение задачи (1.25) можно искать методом ломаных Эйлера. Каждому разбиению $0 \equiv t_0 < t_1 < \ldots < t_N \equiv T$ отрезка $[0, T]$ сопоставим непрерывную функцию $x^{(N)}$ на $[0, T]$ (ломаную Эйлера), которая определяется рекуррентной формулой

$$x^{(N)}(0) = x^0,$$
$$x^{(N)}(t) = x^{(N)}(t_k) + (t - t_k)\Omega[x^{(N)}](t_k), \quad t \in [t_k, t_{k+1}].$$

Предел $\lim\limits_{N\to\infty} x^{(N)}(t) = x(t)$, если он существует, можно представить в виде T-отображения:

$$x(t) = \left(\prod_{\tau=0}^{t} \circ \overset{\tau}{S}_{\tau, d\tau}[x]\right)(x^0), \tag{2.26}$$

где образующая $S_{t,\varepsilon}$ задана формулой

$$\big(S_{t,\varepsilon}[x]\big)(\tau) = \begin{cases} x(\tau), & \tau \leqslant t, \\ x(\tau) + (\tau - t)\Omega[x](t), & t \leqslant \tau \leqslant t + \varepsilon. \end{cases}$$

Лемма 3. (а) *Пусть при каждом $R > 0$ отображение Ω пространства $C\big([0, R], B\big)$ в себя липшиц-непрерывно. Тогда найдется отрезок $[0, T_0]$, на котором решение задачи Коши* (1.25) *существует, единственно и равно T-отображению* (1.26).

(б) *Если, кроме условия пункта* (а), *отображение Ω при каждом $R > 0$ удовлетворяет оценке*

$$\big\|\Omega[x]\big\|_{C([0, R], B)} \leqslant \mathrm{const}_R\big(1 + \|x\|_{C([0, R], B)}\big),$$

то T-отображение (1.26) *существует на любом отрезке $[0, T]$ и равно решению задачи* (1.25).

Доказательство леммы почти дословно повторяет доказательство леммы 1.2, и мы его опускаем.

§ 2. Уравнения типа Власова

В этом и следующем параграфах мы будем рассматривать лишь вещественные функции, не оговаривая этого обстоятельства каждый раз особо. Через $\dfrac{\partial a}{\partial p}\,\dfrac{\partial b}{\partial q}$ обозначается скалярное произведение $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial a}{\partial p_k}\dfrac{\partial b}{\partial q_k}$.

Пусть

$$\mathscr{H}(q, p, [F]) = H_0(q, p) + \iint V(q, p, q', p')F(q', p', t)\, dq'\, dp',$$

где $q, p \in \mathbf{R}^n$, $t \in \mathbf{R}$, H_0 и V — некоторые гладкие функции.

Рассмотрим следующее нелинейное уравнение (Власова):

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p}(q, p, [F])\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial q}(q, p, [F])\frac{\partial F}{\partial p} = 0. \tag{2.27}$$

Мы докажем в теореме 2.2, что задача Коши для уравнения Власова обладает следующим свойством: ее решения $F(q, p, t')$ и $F(q, p, t'')$ в любые два момента времени t' и t'' связаны между собой каноническим преобразованием. Это фундаментальное свойство сохраняется и для существенно более общих уравнений. Напомним, что диффеоморфизм $\gamma\colon \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$ называется каноническим преобразовавием, если он сохраняет форму Ω, т. е. $\gamma^*\Omega = \Omega$. Через γ^* здесь обозначено отображение дифференциальных форм, индуцированное γ.

Введем ряд обозначений, которые мы будем использовать в дальнейшем. Обозначим через $C^k(\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n)$ пространство k раз дифференцируемых отображений $v\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$, наделенное следующей нормой:

$$\|v\|_{C^{(k)}(\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbf{R}^m}\left\{\sum_{|\alpha|=1}^{k}\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} v(x)\right|\right\} + \sup_{x\in\mathbf{R}^m}\frac{|v(x)|}{1+|x|}.$$

Пусть $C^\infty(\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n)\bigcap_k C^{(k)}(\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n)$ — соответствующее счетно-нормированное пространство гладких отображений.

Кроме того, введем шкалу гильбертовых простравств $H^l_s(\mathbf{R}^m)$, каждое из которых является пополнением пространства Шварца $S(\mathbf{R}^m)$ по норме

$$\|u\|_{H^l_s} = \left(\int (1+|x|^2)^{-l}\left|(1-\Delta)^{s/2}u(x)\right|^2 dx\right)^{1/2}.$$

Простравство

$$S_{-\infty}(\mathbf{R}^m) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bigcup_s \bigcap_l H^l_s(\mathbf{R}^m)$$

наделим естественной сходимостью: скажем, что $u_n \to 0$, если $\exists s \forall l \|u_n\|_{H^l_s} \to 0$.

Двойственное к $S_{-\infty}$ пространство обозначим

$$S^\infty(\mathbf{R}^m) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_l \bigcap_s H^l_s(\mathbf{R}^m)$$

и наделим его следующей сходимостью: $u_n \to 0$, если $\exists l \forall k = 0, 1, \ldots$

$$\|u_n\|_{S^k_l} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_x \left\{ \big(1+|x|\big)^{-l} \sum_{|\alpha|=0}^{k} \left| \Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^\alpha u_n(x) \right| \right\} \to 0.$$

И, наконец, последний объект, который нам понадобится, — фазовое пространство $\mathbf{R}^{2n}$, т. е. четномерное евклидово пространство, наделенное симплектической структурой, которую задает невырожденная 2-форма $\Omega = \frac{1}{2} J\,dz \wedge dz$, где $z \in \mathbf{R}^{2n}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$, I — единичная $n \times n$-матрица. Скобка Пуассона двух функций H, f на $\mathbf{R}^{2n}$ задается формулой $\{H, f\} = \langle J \frac{\partial H}{\partial Z}, \frac{\partial f}{\partial z} \rangle$, где скобки $\langle \ldots, \ldots \rangle$ обозначают скалярное произведение в $\mathbf{R}^{2n}$.

Рассмотрим теперь некоторое отображение

$$\begin{gathered} H\colon S_{-\infty}(\mathbf{R}^{2n}) \times C^\infty(\mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}) \to S^\infty(\mathbf{R}^{2n}), \\ H : (f, v) \to H[f, v]. \end{gathered} \tag{2.28}$$

При фиксированных f и v функция $H[f, v]$ есть гладкая функция на фазовом пространстве $\mathbf{R}^{2n}$, ее значение в точке z обозначим $H[f, v](z)$. Везде ниже будем предполагать, что $\operatorname{Im} H[f, v] = 0$, если $\operatorname{Im} f = 0$.

Определение 4. Отображение H назовем отображением Гамильтона[1], если оно инвариантно относительно канонических преобразований, т. е. $H[\gamma^* f, v \circ \gamma] = H[f, v]$ для любого канонического преобразования $\gamma \in C^\infty(\mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n})$.

Пример 3. Положим

$$H[f, v](z) = H_0(z) + \iint V\big(z, v(z')\big) f(z') dz', \tag{2.29}$$

где $H_0 \in S^\infty(\mathbf{R}^{2n})$, $V \in S(\mathbf{R}^{4n})$ — некоторые вещественные функции. Отображение H, определенное этой формулой, является отображением Гамильтона.

[1]По аналогии с термином «функция Гамильтона» в классической механике. Ниже мы увидим, что отображение Гамильтона описывает движение частиц в самосогласованном поле.

Пусть id — тождественное отображение $\mathbf{R}^{2n}$ на себя. Отображению Гамильтона H сопоставим следующее уравнение:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \left\langle J\frac{\partial H[F, \mathrm{id}]}{\partial z}, \frac{\partial F}{\partial z}\right\rangle = 0 \tag{2.30}$$

и назовем его уравнением Власова - Лиувилля.

В случае, когда отображение Гамильтона H задано формулой (2.3), уравнение Власова - Лиувилля совпадает с уравнением Власова (2.1), поскольку в этом случае $H[F, \mathrm{id}](z) = \mathscr{H}(q, p, [F])$, где $z = (q, p)$, $q \in \mathbf{R}^n$, $p \in \mathbf{R}^n$.

Общее уравнение Власова - Лиувилля (2.4) будет занимать центральное место в последующих главах. В этом параграфе мы получим теорему существования решения задачи Коши для этого уравнения и проследим его аналогию с классическим уравнением Лиувилля.

Сопоставим отображению Гамильтона H и некоторой вещественной функции $F_0 \in S_{-\infty}(\mathbf{R}^{2n})$ следующую задачу Коши:

$$\dot{Z} = J\frac{\partial H[F_0, Z]}{\partial z} \circ Z, \quad Z\big|_{t=0} = \mathrm{id} \tag{2.31}$$

в пространстве $C^\infty(\mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n})$. Уравнение (2.5) назовем ураннением Власова - Гамильтона.

Решением задачи (2.5) является семейство гладких отображений $Z[t]\colon \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$, совпадающее при $t = 0$ с тождественным отображением. Значение отображения $Z[t]$ в точке $w \in \mathbf{R}^{2n}$ будем обозначать $Z(w, t) = Z[t](w)$.

Правая часть дифференциального уравнения задачи (2.5) есть отображение $J\dfrac{\partial H\big[F_0, Z[t]\big]}{\partial z} \circ Z[t]$, принимающее в точке w значение $J\dfrac{\partial H\big[F_0, Z[t]\big]}{\partial z}\big(Z(w, t)\big)$. В этих обозначениях задача (2.5) имеет вид

$$\frac{\partial Z(w, t)}{\partial t} = J\frac{\partial H\big[F_0, Z[t]\big]}{\partial z}\big(Z(w, t)\big), \quad Z(w, 0) = w.$$

Пример 4. Выпишем уравнение Власова - Гамильтона в том случае, когда отображение H задано формулой (2.3). Имеем из (2.5)

$$\frac{\partial Z(w, t)}{\partial t} = J\frac{\partial H_0}{\partial z}\big(Z(w, t)\big) + \int J\frac{\partial V}{\partial Z}\big(Z(w, t)\big), \quad \big(Z(w', t)\big)f(w')dw'. \tag{2.32}$$

Это интегро-дифференциальное уравнение в $\mathbf{R}^{2n}$. Начальное условие имеет вид $Z(w, 0) = w$. Мы рассматриваем уравнение (2.6) как обыкновенное дифференциальное в пространстве отображений $C^\infty(\mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n})$.

Предположим теперь, что отображение Гамильтона H и функция F_0 удовлетворяют следующим двум условиям:

Условие (A). Отображение $v \to \dfrac{\partial H[F_0, v]}{\partial z}$ расширнется до липшиц-непрерывного отображения пространства $C(\mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n})$ в себя.

Условие (B). Существуют константы $c_\alpha \geqslant 0$ такие, что для всех $z \in \mathbf{R}^{2n}$, $v \in C(\mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n})$ выполнены неравенства

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^\alpha H[F_0, v](z)\right| \leqslant c_\alpha \quad \text{при} \quad |\alpha| \geqslant 2.$$

Если отображение H задано формулой (2.3), а функция F_0 порождает меру $F_0(z)\,dz$ с компактным носителем в $\mathbf{R}^{2n}$, то условия (A), (B) будут выполнены при следующих огравичениих на функции H_0 и V:

$$\left|\frac{\partial H_0}{\partial z}(z)\right| + \left|\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)V(z, z')\right| \leqslant c_1(1+|z|),$$

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^\alpha H_0(z)\right| + \left|\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^\alpha V(z, z')\right| \leqslant c_\alpha, \quad |\alpha| \geqslant 2.$$

Как мы увидим ниже, при построении квазиклассических асимптотик, функция F_0 имеет вид $F_0(z) = \left|\varphi(z)\right|^2 \delta_\Lambda(z)$, где $\varphi \in C_0^\infty$, а δ_Λ есть δ-функция, сосредоточенная на лагранжевом подмногообразии $\Lambda \in \mathbf{R}^{2n}$.

Сейчас мы покажем, что условия (A), (B) обеспечивают существование решения задачи (2.5) при всех $t \in \mathbf{R}$.

Теорема 1. *Если отображение Гамильтона H и функция F_0 удовлетворяют условиям* (A), (B), *то решение $Z[t]$ задачи* (2.5) *существует в $C^\infty(\mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n})$ при всех t. Это решение единственно и является каноническим преобразованием фазового пространства $\mathbf{R}^{2n}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим отображение Ξ пространства $C(\mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n})$ в себя следующей формулой:

$$\Xi(v) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial H[F_0, v]}{\partial z} \circ v.$$

Задача (2.5) имеет вид

$$\dot{Z} = \Xi(Z), \quad Z[0] = \mathrm{id}. \tag{2.33}$$

Докажем разрешимость (2.7) в пространстве $C(\mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n})$. Имеем оценку в норме $C(\mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n})$

$$\|\Xi(v)\| \leqslant \mathrm{const}(1 + \|v\|).$$

Кроме того, в силу условий (A), (B), отображение Ξ пространства $C(\mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n})$ в себя липшиц-непрерывно. Лемма 1.2 гарантирует в этом случае однозначную разрешимость задачи (2.7) в пространстве $C(\mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n})$ при всех $t \in \mathbf{R}$. Пусть $Z[t](w) = Z(w, t)$ — значение решения задачи (2.7) в точке w. Мы имеем

$$\frac{\partial Z}{\partial t}(w, t) = f\big(Z(w, t), t\big), \quad Z(w, 0) = w \in \mathbf{R}^{2n}, \tag{2.7$'$}$$

где

$$f(z, t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \Xi\big[Z[t]\big](z), \quad f(z, t) \leqslant a_0(t) < \infty.$$

Из (2.7′) дифференцированием по w получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial Z}{\partial w}\Big) = \frac{\partial f}{\partial Z}(Z, t)\frac{\partial Z}{\partial w}, \quad \frac{\partial Z}{\partial w}\Big|_{t=0} = \mathrm{id}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial Z(w, t)}{\partial w} = \prod_{\mu=0}^{t} \exp\left\{\frac{\mu}{\dfrac{\partial f}{\partial z}\big(Z(w, \mu), \mu\big)d\mu}\right\}.$$

Отсюда получаем оценку:

$$\left|\frac{\partial Z}{\partial w}(w, t)\right| \leqslant \exp\left\{\int_0^t \left|\frac{\partial f}{\partial z}\big(Z(w, \mu), \mu\big)\right| d\mu\right\} \leqslant e^{\int_0^t a_0(\mu)d\mu}.$$

Таким образом, доказано, что $Z[t] \in C^{(1)}(\mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n})$). Точно так же, используя индукцию, можно доказать, что $Z[t] \in C^{(k)}(\mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n})$ для любого $k = 0, 1, 2, \ldots$ Следовательно, $Z[t]$ — это единственное решение задачи (2.7) в $C^{\infty}(\mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n})$.

Обозначим $L(z, t) = H\big[F_0, Z[t]\big](z)$ и перепишем задачу (2.5) (или (2.7)) следующим образом:

$$\dot{Z} = J\frac{\partial L}{\partial Z}(Z, t), \quad Z\big|_{t=0} = \mathrm{id}.$$

Решением этой задачи Коши, как хорошо известно, является семейство канонических преобразований. Поэтому $Z[t]$ — канонично. Теорема доказана. ■

Следствие. *Пусть Λ_0 — лагранжево многообразие в $\mathbf{R}^{2n}$. Тогда многообразие $\Lambda_t \stackrel{\mathrm{def}}{=} Z[t]\Lambda_0 = \big\{Z(w, t)\big|w \in \Lambda_0\big\}$, полученное сдвигом Λ_0 вдоль решений уравнения Власова–Гамильтона, также лагранжево.*

Замечание. Построенное н теореме 2.1 семейстно нанонических преобразований $Z[t]$ ие является, вообще гоноря, группой преобразований, т. е. $Z[t_1 + t_2] \neq Z[t_1]Z[t_2]$. Однако если функция F_0 такова, что $H\big[Z[t]^*F_0, v\big] = H[F_0, v]$ для всех $t \in \mathbf{R}$, $v \in C^\infty(\mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n})$, то $Z[t]$ — группа. В частности, это так, если функция F_0 есть δ-функция, сосредоточенная на лагранжевом миогообразии, инвариантном отиосительно всех преобразований $Z[t]$. Пример такой ситуации разбирается в § 1 гл. III.

Рассмотрим теперь уравнение Власова–Лиувилля (2.4) и поставим для него задачу Коши:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \left\langle J\frac{\partial H[F, \mathrm{id}]}{\partial z}(z), \frac{\partial F}{\partial z}\right\rangle = 0, \qquad F\big|_{t=0} = F_0. \tag{2.34}$$

Теорема 2. *Пусть отображение Гамильтона H и функция F_0 удовлетворяют условиям* (A), (B). *Тогда решение $F(t) \in S_{-\infty}(\mathbf{R}^{2n})$ задачи* (2.8) *существует и имеет вид*

$$F(t) = \big(Z[t]^{-1}\big)^* F_0, \tag{2.35}$$

где $Z[t]$ — семейство канонических преобразований, заданное уравнениями (2.5).

Доказательство. Определим функцию $F(t)$ равенством (2.9). Так как отображение H инвариантно относительно канонических преобразований, то

$$H\big[F_0, Z[t]\big] = H\big[Z[t]^{-1*}F_0, \mathrm{id}\big] = H\big[F(t), \mathrm{id}\big]. \tag{2.36}$$

Далее, поскольку

$$F_0(w) = Z[t]^* F(t), \tag{2.37}$$

то

$$\frac{\partial}{\partial t}\big[Z[t]^* F(t)\big] = 0 \tag{2.38}$$

или

$$Z[t]^* \Big(\frac{\partial F}{\partial t} + \Big\langle \dot Z, \frac{\partial F}{\partial z} \Big\rangle \Big) = 0. \tag{2.39}$$

Используя (2.5) и (2.10), заменим здесь $\dot Z$ на $J \dfrac{\partial H[F, \mathrm{id}]}{\partial z}$.

Получим

$$Z[t]^* \Big(\frac{\partial F}{\partial t} \Big\langle J, \frac{\partial H[F, \mathrm{id}]}{\partial z}, \frac{\partial F}{\partial z} \Big\rangle \Big) = 0.$$

Следовательно, функция F удовлетворяет дифференциальному уравненню (2.8). Начальное условие (2.8) также выполнено, так как $Z[0] = \mathrm{id}$. Теорема доказана. ■

С помощью теоремы 2.2 решенне задачи (2.8) иногда удается построить явно. Рассмотрим пример.

Пример 5. Решим следующую задачу Коши для уравнения Власова:

$$\begin{gathered} \frac{\partial F}{\partial t} + p\frac{\partial F}{\partial q} - q\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{\partial F}{\partial q} \iint q' F(q', p', t) dq'\, dp' = 0, \\ F(q, p, t)\big|_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-q^2} \delta(p - \cos q), \end{gathered} \tag{2.40}$$

где δ есть δ-функция Дирака.

Напишем уравнения Власова–Гамильтона, отвечающие задаче (2.14) при $z = (q, p)$, $Z[t] = \big(Q[t], P[t]\big)$, $Z(z, t) = \big(Q(z, t), P(z, t)\big)$:

$$\begin{gathered} \dot Q = P, \quad \dot P = -Q - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int Q(q_0, \cos q_0, t) e^{-q_0^2} dq_0, \\ Q(q, p, t)\big|_{t=0} = q, \quad P(q, p, t)\big|_{t=0} = p. \end{gathered} \tag{2.41}$$

Для функции Q получаем уравнение второго порядка:

$$\ddot Q + Q + f(t) = 0, \quad Q(0) = q, \quad \dot Q(0) = p,$$

где

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int Q(q, \cos q, t) e^{-q^2}\, dq.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$Q(q, p, t) = q\cos t + p\sin t - \int\limits_0^t \sin(t-\tau) f(\tau)\, d\tau. \qquad (2.42)$$

Положим $p = \cos q$, затем умножим все равенство (2.16) на $\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-q^2}$ и проинтегрируем по dq. Учитывая, что

$$\int q e^{-q^2} dq = 0, \quad \int e^{-q^2} dq = \sqrt{\pi}, \quad \int \cos q \cdot e^{-q^2} dq = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{e}},$$

получим

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{e}} \sin t - \int\limits_0^t \sin(t-\tau) f(\tau)\, d\tau.$$

Отсюда

$$\ddot{f} + 2f = 0, \quad f(0) = 0, \quad \dot{f}(0) = \frac{1}{\sqrt[4]{e}}.$$

Решая это уравнение, найдем $f(t)$, а из (2.16) найдем функцию Q:

$$Q(q, p, t) = q\cos t + p\sin t + \frac{1}{\sqrt[4]{e}} \left(\frac{\sin t\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \sin t \right).$$

Функция P определяется из уравнения $\dot{Q} = P$. Из общей формулы (2.9) теперь получим решение задачи (2.14):

$$F(q, p, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-q_0(q,p,t)^2} \delta\big(p_0(q, p, t) - \cos q_0(q, p, t)\big),$$

где

$$q_0(q, p, t) = q\cos t - p\sin t + \frac{\sin t}{\sqrt[4]{e}} (\cos t\sqrt{2} - \cos t) -$$
$$- \frac{\cos t}{\sqrt[4]{e}} \left(\frac{\sin t\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \sin t \right),$$

$$p_0(q,\,p,\,t)=q\sin t+p\cos t-\frac{\cos t}{\sqrt[4]{e}}(\cos t\sqrt{2}-\cos t)-$$
$$-\frac{\sin t}{\sqrt[4]{e}}\Big(\frac{\sin t\sqrt{2}}{\sqrt{2}}-\sin t\Big).$$

Введем теперь два новых понятия: действие и энтропию для уравнения Власова–Лиувилля.

Пусть $\Lambda_0=\big\{\big(q(\alpha),\,p(\alpha)\big)\big\}$ — некоторое лагранжево многообразие в $\mathbf{R}^{2n}=\mathbf{R}^n_q\times\mathbf{R}^n_p$, α — локальные координаты на Λ_0.

Предположим, что Λ_0 односвязно. Пусть $d\mu_0$ — некоторая мера на Λ_0, а F_0 — обобщенная функция на $\mathbf{R}^{2n}$, сосредоточенная на Λ_0 и определяемая мерой μ_0:

$$\langle F_0,\,\varphi\rangle\stackrel{\text{def}}{=}\int\limits_{\Lambda_0}\varphi\big(q(\alpha),\,p(\alpha)\big)\,d\mu_0(\alpha),\qquad\varphi\in C(\mathbf{R}^{2n}).$$

Предположим, что функция F_0 и отображение Гамильтона H удовлетворяют условиям (A), (B). Построим решение $F(t)=\big(Z[t]^{-1}\big)^*F_0$ задачи Коши (2.8) для уравнения Власова–Лиувилля, где $Z[t]=\big(Q[t],\,P[t]\big)$ — каноническое преобразование, заданное уравнениями Власова–Гамильтона (2.5). Это преобразование переводит Λ_0 в некоторое лагранжево многообразие $\Lambda_t=Z[t](\Lambda_0)$. Мера $d\mu_0$ индуцирует меру $d\mu_t=\big(Z[t]^{-1}\big)^*d\mu_0$ на Λ_t, так что для любой непрерывной функции χ на Λ_0 справедливо равенство

$$\int\limits_{\Lambda_0}\chi\,d\mu_0=\int\limits_{\Lambda_t}\big(Z[t]^{-1}\big)^*\chi\,d\mu_t.$$

Поскольку многообразие Λ_0, по предположению, односвязно, на нем существует глобальное действие S_0, т. е. такая гладкая функция, для которой

$$dS_0=p\,dq\big|_{\Lambda_0}. \tag{2.43}$$

Этим условием действие S_0 определено с точностью до произвольной аддитивной константы. Рассмотрим далее при каждом t следующую функцию $\widetilde{S}(t)$ на Λ_0:

$$\widetilde{S}(t)=S_0+\int\limits_0^t\big(P[\tau]\dot{Q}[\tau]-H\big[F_0,\,Q[\tau],\,P[\tau]\big]\big(Q[\tau],\,P[\tau]\big)\big)_{\Lambda_0}d\tau. \tag{2.44}$$

Определение 5. Функцию

$$S(t) \stackrel{\text{def}}{=} \left(Z[t]^{-1}\right)^{*} \widetilde{S}(t) \tag{2.45}$$

будем называть действием, отвечающим задаче Коши (2.8) для уравнения Власова – Лиувилля. Энтропией $H_0(t)$ этой же задачи будем называть среднее от действия по мере $d\mu_t$:

$$H_0(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{\Lambda_t} S(t)\, d\mu_t. \tag{2.46}$$

Пример 6. Рассмотрим многообразие Λ_0, заданное уравнением

$$p = \frac{\partial \Phi_0}{\partial q}(q),$$

где $\Phi_0 \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. Заметим, что в этом случае переменные $q = (q_1, \ldots, q_n)$ могут служить глобальными координатами на $\Lambda_0 \subset \mathbf{R}_q^n \times \mathbf{R}_q^n$. Рассмотрим начальное распределение, сосредоточенное на Λ_0 с весом $\varkappa_0 \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$:

$$F_0(q, p) = \varkappa_0(q)\delta\Big(p - \frac{\partial \Phi_0}{\partial q}(q)\Big), \tag{2.47}$$

т. е. $d\mu_0 = \varkappa_0\, dq$. Мы вновь обозначим через $F(q, p, t)$ решение задачи Коши (2.8) с начальным условием (2.21). Длн энтропии этой задачи Коши на том отрезке времени $t \in [0, T]$, на котором проекция $\pi_q \colon \Lambda_t \to \mathbf{R}_q^n$ многообразия Λ_t на координатную q-гиперплоскость является диффеоморфизмом (т. е. вплоть до фокальной точки), имеет место следующая формула:

$$H_0(t) = \iint \Phi(q, t) F(q, p, t)\, dq\, dp, \tag{2.48}$$

где Φ — решение задачи Коши

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + H\big[F(t), \mathrm{id}\big]\Big(q, \frac{\partial \Phi}{\partial q}\Big) = 0, \quad \Phi|_{t=0} = \Phi_0. \tag{2.49}$$

Докажем это утверждение. Обозначим через $(Q(q,p,t),\ P(q,p,t))$ значение отображения $Z[t] = \big(Q[t],\ P[t]\big)$ в точке $(q, p) \in \mathbf{R}^{2n}$.

Функции

$$X(q^0, t) \overset{\text{def}}{=} Q\Big(q^0, \frac{\partial \Phi_0}{\partial q}(q^0), t\Big)$$

и

$$\Xi(q, t) = P\Big(q^0, \frac{\partial \Phi_0}{\partial q}(q^0), t\Big)$$

удовлетворяют следующей гамильтоновой системе уравнений:

$$\dot{X} = \frac{\partial H\big[F(t), \mathrm{id}\big]}{\partial p}(X, \Xi), \quad X\big|_{t=0} = q_0,$$

$$\dot{\Xi} = -\frac{\partial H\big[F(t), \mathrm{id}\big]}{\partial q}(X, \Xi), \quad \Xi\big|_{t=0} = \frac{\partial \Phi_0}{\partial q}(q^0).$$

С другой стороны, по определению (2.18), (2.19), имеем

$$(\pi_q^{-1})^* S(t) = \Big[\Phi_0(q^0) + \int_0^t \big(\Xi(q^0, \tau)\dot{X}(q_0, \tau) - \\ - H\big[F(\tau), \mathrm{id}\big]\big(X(q^0, \tau), \Xi(q^0, \tau)\big)\big)\, d\tau\Big]_{q^0 = q^0(q, t)}, \quad (2.50)$$

где $q^0(q, t)$ — решение неявного уравнения

$$q = X(q^0, t).$$

Через π_q^{-1} мы обозначили здесь отображение, обратное к проекции $\pi_q\colon \Lambda_t \to \mathbf{R}_q^n$. В силу предположения о невырожденности этой проекции, такое обратное отображение существует.

Хорошо известно (в теореме 3.1 доказано более общее утверждение), что функция $\Phi(q, t) = (\pi_q^{-1})^* S(t)$, заданная формулой (2.24), является решением задачи (2.23). Остается доказать, что энтропия вычисляется по формуле (2.22).

Преобразуем интеграл, стоящий в правой части (2.22):

$$\iint \Phi(q, t) F(q, p, t)\, dq\, dp = \\ = \int \big[(\pi_q^{-1})^* \big(Z[t]^{-1}\big)^* \widetilde{S}(t)\big] \big[\big(Z[t]^{-1}\big)^* F_0\big]\, dp\, dq = \\ = \int \chi_0(q^0) \big[Z[t]^* (\pi_q^{-1})^* \big(Z[t]^{-1}\big)^* \widetilde{S}(t)\big]\Big|_{p^0 = \frac{\partial \Phi}{\partial q}(q^0)} dq. \quad (2.51)$$

Функция, стоящая в квадратных скобках в последнем интеграле, равна

$$(\pi_{q^0}^{-1})^*\left[\pi_{q^0}^* Z[t]^*(\pi_q^{-1})^*\left(Z[t]^{-1}\right)^*\widetilde{S}(t)\right] = (\pi_{q^0}^{-1})^*\widetilde{S}(t).$$

Здесь $\pi_{q^0}^{-1}$ — это обратное отображение к $\pi_{q_0}:\Lambda_0\to\mathbf{R}^n_{q^0}$. Таким образом, из (2.25) получаем

$$\iint \Phi(q,t)F(q,p,t)\,dq\,dp = \int \varkappa_0(q^0)\left[(\pi_{q_0}^{-1})^*\widetilde{S}(t)\right](q^0)\,dq^0 = \\ = \int\limits_{\Lambda_0}\widetilde{S}(t)\,d\mu_0. \quad (2.52)$$

В последнем равенстве мы использовали формулу $d\mu_0=\pi_{q^0}^*(\varkappa(q^0)dq^0)$, которая следует из (2.21). Остается заметить, что интеграл $\int\limits_{\Lambda_0}\widetilde{S}(t)d\mu_0$ совпадает с энтропией $H_0(t)$, заданной формулой (2.20). Утверждение доказано.

В заключение параграфа мы укажем на одно естественное обобщение рассмотренного уравнения Власова–Лиувилля. Это обобщение связаво с тем, что отображение Гамильтона $H[f,v]$ может быть определено на функциях f и v, явно зависящих от времени, например,так:

$$H[f,v](z,t) = H_0(z,t) + \int\limits_0^t d\tau \int V\big(z,t,v(z',\tau),\tau\big)f(z',\tau)\,dz'. \quad (2.53)$$

Такому отображению отвечают уравнение Власова–Лиувилля:

$$\frac{\partial F}{\partial t}\left\langle J\frac{\partial H[F,\mathrm{Id}]}{\partial z}(z,t),\ \frac{\partial F}{\partial z}\right\rangle = 0$$

и уравнеиие Власова–Гамильтона:

$$\dot{Z}(w,t) = J\frac{\partial H[F_0,Z]}{\partial z}\big(Z(w,t),t\big).$$

Вся теория, развитая в этом параграфе, может быть почти автоматически перенесена на отображения H вида (2.27) или, более общим образом, на такие отображения, которые инвариантны относительно канонических преобразований и удовлетворяют условию $\dfrac{\delta H[f, v]}{\delta v(z', t')}(z, t) = 0$ при $t' > t$, т.е. зависят от значений функции v лишь в моменты времени, предшествующие t. С точки зрения T-отображений и обыкновенных дифференциальных уравнений, такое обобщение уже обсуждалось в конце § 1б и здесь мы не будем на нем подробнее останавливаться.

§ 3. Интегро-дифференциальные уравнения первого порядка

Мы предъявим в этом параграфе решение задачи Коши для интегро-дифференциальных уравнений с частыми производными первого порядка и, в частности, для уравнении следующего вида:

$$\frac{\partial S}{\partial t}(q, t) + F\Big(t, q, \frac{\partial S}{\partial q}(q, t)\Big) + \\ + \int\limits_0^t dt' \int dq' V\Big(q, \frac{\partial S}{\partial q}(q, t), t, q', \frac{\partial S}{\partial q'}(q', t'), t'\Big) = 0.$$

1. Обозначения. Через $C^{(k)}(\mathbf{R}^m)$ обозначим пространство k раз дифференцируемых вещественных функций на $\mathbf{R}^m$. При $k = 0$ индекс (k) будем опускать. Пусть задано $T > 0$. Будем рассматривать тройки функций (J, Q, P), где $J \in C\big(\mathbf{R}^n \times [0, T]\big)$, $Q, P \in C\big(\mathbf{R}^n \times [0, T] \to \mathbf{R}^n\big)$. Каждая такая тройка дает элемент пространства $C\big(\mathbf{R}^n \times [0, T] \to \mathbf{R}^{2n+1}\big)$. Координаты в $\mathbf{R}^n \times [0, T]$ будем обозначать (q, t), а в $\mathbf{R}^{2n} \times [0, T]$ — (q, p, t). Ниже нам понадобятся специальные тройки функций. Перван — это тройка вида $\Big(1, \mathrm{id}, \dfrac{\partial S}{\partial q}\Big)$, где 1 — единичная функция, id — отображение $\mathbf{R}^n \times [0, T] \to \mathbf{R}^n$, заданное формулой $\mathrm{id}(q, t) = q$, а $\dfrac{\partial S}{\partial q}(q, t)$ — вектор из частных производных некоторой функции $S \in C^{(1)}\big(\mathbf{R}^n \times [0, T]\big)$.

Далее, пусть $\gamma_t \colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ — семейство дифференцируемых преобразований, непрерывно зависящее от t и $Q, P \in C(\mathbf{R}^n \times [0, T] \to \mathbf{R}^n)$. Обозначим через $(\det d\gamma)(q, t)$ якобиан $\det \dfrac{\partial \gamma_t(q)}{\partial q}$. Образуем следующие две тройки функций:

$$(\det d\gamma,\ \gamma^* Q,\ \gamma^* P) \quad \text{и} \quad (1,\ Q,\ P).$$

Теперь рассмотрим некоторое отображение $\mathscr{H}$, определенное на всевозможных тройках:

$$\mathscr{H}\colon C(\mathbf{R}^n \times [0,\ T] \to \mathbf{R}^{2n+1}) \to C^{(2)}(\mathbf{R}^{2n+1}). \tag{2.54}$$

Каждую тройку $(J,\ Q,\ P)$ это отображение переводит н функцию $\mathscr{H}[J,\ Q,\ P]$, заданиую на $\mathbf{R}^{2n+1}$. Значение этой функции в точке $(q,\ p,\ t) \in \mathbf{R}^{2n} \times [0,\ T]$ будем обозначать $\mathscr{H}[J,\ Q,\ P](q,\ p,\ t)$.

Сопоставим отображению $\mathscr{H}$ еще одно отображение $\Omega_{\mathscr{H}}$ пространства $C([0,\ T] \to C(\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{2n+2n^2}))$ в себя, определенное следующим образом. Пусть $Q(t), P(t) \in C(\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n)$, $Y(t), I(t) \in C(\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{n^2})$, где $t \in [0,\ T]$. Тогда набор функций $(Q,\ P,\ Y,\ I)$ принадлежит пространству $C\big([0,\ T] \to C(\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{2n+2n^2})\big)$. Причем всякий элемент из этого пространства можно представить в виде указанного набора функций. Последние два элемента Y, I такого набора будем рассматривать как $n \times n$-матричнозначные функции. Положим

$$\Omega_{\mathscr{H}}(Q,\ P,\ Y,\ I) = (U,\ V,\ L,\ M),$$

где

$$U = \frac{\partial \mathscr{H}[\det Y,\ Q,\ P]}{\partial p}(Q,\ P,\ t), \qquad V = -\frac{\partial \mathscr{H}[\det Y,\ Q,\ P]}{\partial q}(Q,\ P,\ t),$$

$$L = \frac{\partial^2 \mathscr{H}}{\partial p \partial q} \cdot Y + \frac{\partial^2 \mathscr{H}}{\partial p \partial q} \cdot I, \qquad M = -\frac{\partial^2 \mathscr{H}}{\partial q \partial q} \cdot Y - \frac{\partial^2 \mathscr{H}}{\partial q \partial q} \cdot I. \tag{2.55}$$

Здесь через $\dfrac{\partial^2 \mathscr{H}}{\partial p \partial q}$ обозначены $n \times n$-матрицы из вторых производных функций $\mathscr{H}[\det Y,\ Q,\ P](q,\ p,\ t)$, взятые в точке $q = Q$, $p = P$. Таким образом, отображение $\Omega_{\mathscr{H}}$ определено.

2. Теперь мы можем сформулировать основную теорему этого параграфа. Пусть задано отображение $\mathscr{H}$ вида (3.1). Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial S}{\partial t}(q,\ t) + \mathscr{H}\Big[1,\ \mathrm{id},\ \frac{\partial S}{\partial q}\Big]\Big(q,\ \frac{\partial S}{\partial q}(q,\ t),\ t\Big) = 0,$$

$$S(q,\ 0) = S_0(q), \tag{2.56}$$

где $S_0 \in C^{(2)}(\mathbf{R}^n)$, причем носитель $\operatorname{supp} S_0$ — компакт в $\mathbf{R}^n$.

Подчиним $\mathscr{H}$ следующим трем условиям:

Условие A. Значения функции $\mathscr{H}[J, Q, P](q, p, t)$ не зависят от поведения функций $J = J(q', t')$, $Q = Q(q', t')$, $P = P(q', t')$ при $t' > t$, т. е.

$$\frac{\delta}{\delta J(q', t')}\mathscr{H}[J, Q, P](q, p, t) = 0,$$

$$\frac{\delta}{\delta Q(q', t')}\mathscr{H}[J, Q, P](q, p, t) = \frac{\delta}{\delta P(q', t')}\mathscr{H}[J, Q, P](q, p, t) = 0.$$

Условие B. Для любого непрерывного семейства γ_t дифференцируемых невырожденных, не меняющих ориентацию преобразований $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ справедливо равенство

$$\mathscr{H}[\det d\gamma_t, \gamma^* Q, \gamma^* P] = \mathscr{H}[1, Q, P]$$

(обозначения см. в п. 1).

Условие C. Отображение $\Omega_{\mathscr{H}}$ пространства $C\big([0, T] \to C(\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{2n+2n^2})\big)$ в себя, заданное формулами (3.2), липшиц-непрерывно.

Сопоставим тенерь задаче Коши (3.3) следующее уравнение характеристик:

$$\dot{\mathfrak{X}} = \Omega_{\mathscr{H}}(\mathfrak{X}) \tag{2.57}$$

и поставим начальное условие:

$$\mathfrak{X}(0) = \left(\mathrm{id}, \frac{\partial S_0}{\partial q}, \|\delta_{ij}\|, \left\|\frac{\partial^2 S_0}{\partial q_i \partial q_j}\right\|\right) \in C\big([0, T] \to C(\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{2n+2n^2})\big). \tag{3.4'}$$

В силу леммы 1.3(а), из условий (A) и (C) следует, что задача Коши (3.4), (3.4′) имеет единственное решение $\mathfrak{X}(q, t) = \big(Q(q, t), P(q, t), Y(q, t), I(q, t)\big)$ на некотором отрезке времени t. Поскольку в начальный момент матрица Y — единичнан, то найдется такое $T_0 > 0$, что при $t \in [0, T_0]$, $q \in \operatorname{supp} S_0$ выполняется неравенство

$$\det Y(q, t) > 0.$$

Теорема 3. *Если отображение $\mathscr{H}$ удовлетворяет условиям* (A), (B), (C), *то при $t \in [0, T_0]$ решение задачи Коши* (3.3) *существует и представимо в виде*

$$S(q, t) = \Big[S_0(q^0) + \int_0^t \big(\dot{Q}(q^0, \tau)P(q^0, \tau) - \\ - \mathscr{H}[\det Y, Q, P](Q(q^0, \tau), P(q^0, \tau), \tau)\big)d\tau\Big]\Big|_{q^0 = q^0(q, t)}, \tag{2.58}$$

где $q^0(q, t)$ — *решение неявного уравнения*

$$q = Q(q^0, t).$$

Доказательству этой теоремы предпошлем следующую лемму.

Лемма 4. *Пусть функция* S *определена формулой* (35). *Тогда*

$$\frac{\partial S}{\partial q}(Q(q^0, t), t) = P(q^0, t). \tag{2.59}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство (3.6) проверяется непосредственным дифференцированием. Действительно, подставим в (3.5) $q = Q(q^0, t)$ и продифференцируем обе части (3.5) по q_k^0, т. е. по k-й компоненте вектора $q^0 = (q_1^0, \ldots, q_n^0)$. Получим равенство:

$$\sum_l \frac{\partial S}{\partial q_l} \cdot \frac{\partial Q_l}{\partial q_k^0} = \frac{\partial S_0}{\partial q_k^0} + \int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial q_k^0}\big[\dot{Q}P - \mathscr{H}[\det Y, Q, P](Q, P, \tau)\big]d\tau, \tag{2.60}$$

где $Q_1, \ldots, Q_n$ — компоненты вектор-функции $Q = Q(q^0, t)$. Вычислим производную под знаком интеграла в (3.7):

$$\frac{\partial}{\partial q_k^0}[\dot{Q}P - \mathscr{H}] = \sum_l \Big[\frac{\partial}{\partial \tau}\Big(\frac{\partial Q_l}{\partial q_k^0}\Big) \cdot P_l + \dot{Q}_l \frac{\partial P_l}{\partial q_k^0} - \frac{\partial Q_l}{\partial q_k^0} \cdot \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial q_l} - \frac{\partial P_l}{\partial q_k^0} \cdot \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p_l}\Big].$$

Используя (3.4), получаем отсюда

$$\frac{\partial}{\partial q_k^0}[\dot{Q}P - \mathscr{H}] = \sum_l \frac{\partial}{\partial \tau}\Big(\frac{\partial Q_l}{\partial q_k^0} P_l\Big).$$

Подставляя этот результат в (3.7), найдем

$$\sum_l \frac{\partial S}{\partial q_l} \cdot \frac{\partial Q_l}{\partial q_k^0} = \frac{\partial S_0}{\partial q_k^0} + \sum_l \int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial \tau}\Big(\frac{\partial Q_l}{\partial q_k^0} P_l\Big)d\tau. \tag{2.61}$$

Из начальных условий (3.4′) следует, что

$$P_l\big|_{\tau=0} = \frac{\partial S_0}{\partial q_l}(q^0), \quad \frac{\partial Q_l}{\partial q_k^0}\Big|_{\tau=0} = \delta_{lk}.$$

Отсюда и из (3.8) получаем

$$\sum_l \frac{\partial S}{\partial q_l}(Q, t)\frac{\partial Q_l}{\partial q_k^0} = \sum_l P_l \frac{\partial Q_l}{\partial q_k^0}. \tag{2.62}$$

Из (3.4) следует, что матрицы Якоби $\dfrac{\partial Q}{\partial q^0}$ и $\dfrac{\partial P}{\partial q^0}$ совнадают с Y и I, соответствснно. Поэтому нри тех t, при которых $\det Y(q^0, t) > 0$, из (3.9) следует искомое равенство (3.6).

Доказательство теоремы 3.1. Из равенства (3.6) и условия (B) нолучим

$$\mathscr{H}[\det Y, Q, P] = \mathscr{H}[1, \mathrm{id}, \frac{\partial S}{\partial q}].$$

Обозначим $f(q, p, t) = \mathscr{H}\Big[1, \mathrm{id}, \dfrac{\partial S}{\partial q}\Big](q, p, t)$. Уравнения для компонент Q, P функции $\mathfrak{X}$ и формула (3.3) в новых обозначениях имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \frac{\partial f}{\partial p}(Q, P, t), \qquad & Q\big|_{t=0} &= q^0, \\ \dot{P} &= -\frac{\partial f}{\partial q}(Q, P, t), \qquad & P\big|_{t=0} &= \frac{\partial S_0}{\partial q}(q^0) \end{aligned} \tag{2.63}$$

и

$$\begin{aligned} S(q, t) = \Big[S_0(q^0) + \int\limits_0^t \big(\dot{Q}(q^0, \tau)P(q^0, \tau) - {} \\ - f(Q(q^0, \tau), P(q^0, \tau), \tau)\big)d\tau\Big]\Big|_{q^0=q^0(q,t)}. \end{aligned} \tag{2.64}$$

Известно, что на отрезке времени, на котором $\det \dfrac{\partial Q(q^0, t)}{\partial q^0} > 0$, функция S, задаваемая формулой (3.11), удовлетворяет задаче Коши

$$\frac{\partial S}{\partial t} + f\Big(q, \frac{\partial S}{\partial t} t\Big) = 0, \quad S|_{t=0} = S_0. \tag{2.65}$$

Для полноты изложения приведем здесь доказательстно этого утверждения.

Подставляя $q = Q(q^0, t)$ в (3.11) и дифференцируя обе части равенства (3.11) по t, получим

$$\frac{\partial S}{\partial t}(Q, t) + \frac{\partial S}{\partial q}(Q, t) \cdot \dot{Q} = \dot{Q} \cdot P - f(Q, P, t).$$

В силу (3.6), отсюда следует, что

$$\frac{\partial S}{\partial t}\big(Q(q^0, t), t\big) + f\big(Q(q^0, t), P(q^0, t), t\big) = 0.$$

Полагая в этом равенстве $q^0 = q^0(q, t)$ и вновь используя (3.6), придем к уравнению (3.12). Начальное условие (3.12), очевидно, выполнено. Остается заметить, что задача (3.12) совпадает с (3.3). Теорема доказана. ■

Пример 7. Решим задачу Коши

$$\frac{\partial S}{\partial t} + q\frac{\partial S}{\partial t} + \int\limits_{-1}^{1} \frac{\partial S}{\partial q'}(q', t)\, dq' = 0, \quad S|_{t=0} = S_0. \tag{2.66}$$

Здесь $q \in \mathbf{R}$, $S_0 \in C^{(2)}(\mathbf{R})$. Применим метод теоремы 3.1. Система характеристик (3.4) имеет в данном случае простой вид:

$$\begin{gathered}\dot Q = Q, \quad Q|_{t=0} = q^0,\\ \dot P = -P, \quad P|_{t=0} = S_0'(q^0),\\ \dot Y = Y, \quad Y|_{t=0} = 1,\\ \dot I = -I, \quad I|_{t=0} = S_0''(q^0).\end{gathered}$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} Q = q^0 e^t, \quad P = S_0'(q^0)e^{-t},\\ Y = e^t, \quad I = S_0''(q^0)e^{-t}.\end{aligned} \tag{2.67}$$

Следовательно,

$$q^0(q, t) = qe^{-t}.$$

Теперь вычислим интеграл

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{\partial S}{\partial q}(q, t)\, dq = \int\limits_{q^0(-1, t)}^{q^0(1, t)} \frac{\partial S}{\partial q}\big(Q(q^0, t), t\big)\frac{\partial Q(q^0, t)}{\partial q^0}\, dq^0.$$

Используя равенства (3.6) и (3.14), получим

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{\partial S}{\partial q}(q, t)\, dq = \int\limits_{q^0(-1, t)}^{q^0(1, t)} S_0'(q^0)\, dq^0 = S_0(e^t) - S_0(-e^t) \overset{\text{def}}{=} \Psi(t).$$

Из формулы (3.5) найдем

$$S(q,t)=\Big[S_0(q^0)+\int_0^t\big(\dot{Q}P-(QP+\Psi)\big)d\tau\Big]\Big|_{q^0=q^0(q,t)}=$$

$$=S_0(qe^{-t})+\int_0^t\big(S_0(e^{-\tau})-S_0(e^{-\tau})\big)\,d\tau.$$

Мы получили искомое решение задачи Коши (3.13).

В заключение параграфа рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение, относящееся к уравнению Власова–Лиувилля так же, как уравнение Гамильтона–Якоби относится к уравнению Лиувилля. Для простоты, рассмотрим лишь следующий частный случай уравнения Власова–Лиувилля:

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\Big\langle J\frac{\partial H[F,\,\mathrm{id}]}{\partial z},\,\frac{\partial F}{\partial z}\Big\rangle=0, \qquad (2.68)$$
$$F|_{t=0}=F_0,$$

где

$$H[f,\,Z](z)=H_0+\int V\big(z,\,Z(z')\big)f(z')\,dz'. \qquad (3.15')$$

Будем предполагать, что функция F_0 и отображение Гамильтона H удовлетворяют условиям (A), (B) из § 2.

Как и раньше, обозначим $z=(q,p)$, $V(z,Z)=V(q,p,Q,P)$, $H_0(z)=H_0(q,p)$.

Сопоставим задаче Коши (3.15) следующую задачу:

$$\frac{\partial S(q,\omega,t)}{\partial t}+H_0\Big(q,\,\frac{\partial S(q,\omega,t)}{\partial q}\Big)+$$
$$+\iint V\Big(q,\,\frac{\partial S(q,\omega,t)}{\partial q},\,q',\,\frac{\partial S(q',\omega',t)}{\partial q'}\Big)\cdot F_0\Big(\frac{\partial S(q',\omega',t)}{\partial\omega'},\,\omega'\Big)\times$$
$$\times\det\Big\|\frac{\partial^2 S(q',\omega',t)}{\partial q_i'\partial\omega_j'}\Big\|^{-1}dq'\,d\omega'=0, \qquad (2.69)$$
$$S(q,\omega,0)=q^{\omega}.$$

Здесь $q,\,\omega\in\mathbf{R}^n$.

Мы построим решение задачи (3.16) на отрезке времени $[0, T]$ таком, что

$$J_S \stackrel{\text{def}}{=} \det\left\|\frac{\partial^2 S(q,\omega,t)}{\partial q_i' \partial \omega_j'}\right\| \geqslant \varepsilon > 0 \quad \text{при} \quad t \in [0, T].$$

Будем обозначать

$$\left(\left(\frac{\partial S}{\partial \omega}\right)^* F_0\right)(q,\omega) \stackrel{\text{def}}{=} F_0\left(\frac{\partial S(q,\omega,t)}{\partial \omega}, \omega\right).$$

В этих обозначениях задача (3.16) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left[J_S\left(\frac{\partial S}{\partial \omega}\right)^* F_0,\ \pi_q,\ \frac{\partial S}{\partial q}\right]\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = 0,$$
$$S(q,\omega,0) = q^\omega, \tag{3.16'}$$

где проекция $\pi_q\colon \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^n$ определена формулой $\pi_q(q,p) \stackrel{\text{def}}{=} q$. Сопоставим задаче Коши (3.16′) систему уравнений Власова – Гамильтона:

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \frac{\partial H[F_0, Q, P]}{\partial p}(Q, P), \quad Q|_{t=0} = q^0, \\ \dot{P} &= -\frac{\partial H[F_0, Q, P]}{\partial p}(Q, P), \quad P|_{t=0} = \omega. \end{aligned} \tag{2.70}$$

Эта система разрешима при всех t, в силу предположений, наложенных на отображение Гамильтона H. Обозначим решение (3.17) через

$$Q(\tau) = Q(q^0, \omega, t), \quad P(\tau) = P(q^0, \omega, t).$$

Теорема 4. *Пусть $T_0 > 0$ таково, что при $t \in [0, T_0]$, q^0, $\omega \in \mathbf{R}^n$*

$$\frac{\mathcal{D}Q(q^0,\omega,t)}{\mathcal{D}q^0} \neq 0.$$

Тогда при $t \in [0, T_0]$ решение задачи Коши (3.16) существует и имеет вид

$$S(q,\omega,t) = \left[q^0\omega + \int_0^t \Big(P(q^0,\omega,\tau)\frac{\partial Q}{\partial \tau}(q^0,\omega,\tau) - \right.$$
$$\left. - H\big[F_0, Q(\tau), P(\tau)\big]\big(Q(q^0,\omega,\tau), P(q^0,\omega,\tau)\big)\Big)\, d\tau\right]\Bigg|_{q^0 = q^0(q,\omega,t)}, \tag{2.71}$$

где $q^0(q, \omega, t)$ — *решение неявного уравнения*

$$q = Q(q^0, \omega, t).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $f(t, q, p) \stackrel{\text{def}}{=} H[F_0, Q(t), P(t)](q, p)$. Выше было установлено (см. доказательство теоремы 3.1), что функция S, определенная формулой (3.18), является решением следующей задачи:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + f\Big(t, q, \frac{\partial S}{\partial q}\Big) = 0, \quad S|_{t=0} = q\omega. \tag{2.72}$$

Функции Q, P удовлетворяют гамильтоновой системе:

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \frac{\partial f}{\partial p}(t, Q, P), \quad Q|_{t=0} = q_0, \\ \dot{P} &= -\frac{\partial f}{\partial q}(t, Q, P), \quad P|_{t=0} = \omega. \end{aligned} \tag{2.73}$$

Докажем, что решение задачи (3.19) и решение уравнений (3.20) связаны следующими формулами:

$$\begin{gathered} P\big(q^0(q, \omega, t), \omega, t\big) = \frac{\partial S}{\partial q}(q, \omega, t), \\ q^0(q, \omega, t) = \frac{\partial S}{\partial \omega}(q, \omega, t), \\ \frac{\mathcal{D}Q}{\mathcal{D}q^0}\big(q^0(q, \omega, t), \omega, t\big) = \det\left\| \frac{\partial^2 S(q, \omega, t)}{\partial q_i \partial \omega_j} \right\|^{-1}. \end{gathered} \tag{2.74}$$

Первая из этих формул совпадает с формулой (3.6), третья следует из второй. Остается доказать вторую формулу (3.21). Имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big[\frac{\partial S}{\partial \omega}\big(Q(q^0, \omega, t), \omega, t\big)\Big] = \frac{\partial^2 S}{\partial \omega \partial q} \cdot \dot{Q} + \frac{\partial^2 S}{\partial \omega \partial t}. \tag{2.75}$$

Из (3.19) следует, что

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \omega \partial t} = -\frac{\partial}{\partial \omega}\Big[f\Big(t, q, \frac{\partial S}{\partial q}(q, \omega, t)\Big)\Big] = -\frac{\partial^2 S}{\partial \omega \partial q} \cdot \frac{\partial f}{\partial p}\Big(t, q, \frac{\partial S}{\partial q}\Big).$$

Из этого равенства и первого уравнения (3.20) мы видим, что правая часть равенства (3.22) равна нулю. Значит, величина

$$\frac{\partial S}{\partial \omega}(Q(q^0, \omega, t), \omega, t)$$

не зависит от времени и, в силу начальных условий (3.19), (3.20), равна

$$\frac{\partial S}{\partial \omega}(Q(q^0, \omega, 0), \omega, 0) = q^0.$$

Формулы (3.21) доказаны.

Из (3.21) с помощью замены переменных в интеграле (3.15′) получим соотношение

$$H[F_0, Q, P](q, p) = H\Big[J_S\Big(\frac{\partial S}{\partial \omega}\Big)^* F_0, \pi_q, \frac{\partial S}{\partial q}\Big](q, p),$$

которое устанавливает идентичность задач (3.16) и (3.19). Отсюда непосредственно следует утверждение теоремы. ■

В процессе доказательства теоремы было установлено, что решение S задачи (3.16) удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\big[F(t), \mathrm{id}\big]\Big(q, \frac{\partial S}{\partial q}\Big) = 0, \tag{2.76}$$

где $F(t)$ — решение задачи Коши (3.15) для уравненин Власова–Лиувилля.

Отметим, что решение уравнения (3.23) с нроизвольными начальными условиями $S|_{t=0} = \Phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ может быть получено из решения задачи (3.16) с помощью преобразования Лежавдра. Для этого решим систему неявных уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial \omega}(q, \omega, t) = y, \quad \frac{\partial \Phi_0}{\partial y}(y) = \omega$$

относительно y и ω. При достаточно малом t эта система разрешима; обозначим ее решение через $y = y(q, t)$, $\omega = \omega(q, t)$. Тогда функция

$$\Phi(q, t) \stackrel{\text{def}}{=} S\big(q, \omega(q, t), t\big) + \Phi_0\big(y(q, t)\big) - y(q, t)\omega(q, t)$$

удовлетворяет уравнению (3.23) и начальному условию $\Phi|_{t=0} = \Phi_0$.

Глава 3

УНИТАРНО-НЕЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

§ 1. Вводные замечания

Если во вторично квантованном операторе Гамильотна положить операторы рождения и уничтожения «с-числами»[1], как это впервые предложил Дирак, а затем Боголюбов, а позже этот метод использовался уже многими физиками, то мы перейдем к уравнениям типа Хартри.

Мы установили выше существенно более сложный, чем обычный гамильтониан, вторично квантованный оператор свободной энергии. Нестандартное уравнение, отвечающее ему, имеет вид

$$\frac{\partial \widehat{f}}{\partial t} = \big[H(\widehat{\psi}^{+}, \widehat{\psi}^{-}) - \Theta S(\widehat{\psi}^{+}, \widehat{\psi}^{-})\big]\widehat{f}.$$

Зависимость энтропии от операторов $\widehat{\psi}^{+}$, $\widehat{\psi}^{-}$ может быть весьма сложной. Поэтому разумно исследовать общий класс нелинейных операторов (где $\widehat{\psi}^{-}$ и $\widehat{\psi}^{+}$ — «с-числа»), которые мы назвали унитарно нелинейными.

Поскольку в изложенной концепции именно эти уравнения играют ключевую роль, в том числе при переходе к самосогласованным классическим уравнениям и уравнениям гидродинамики, мы посвящаем им эту главу.

Решение $F(x, p, t)$ уравнения Власова, рассмотренного в предыдущей главе, может быть интерпретировано как плотность распределения классических частиц по координатам и импульсам. Так, например, среднее значение импульса частиц в момент t равно

$$\langle p\rangle = \iint p\cdot F(x, p, t)\,dx\,dp, \tag{3.1}$$

[1]Т. е. положим коммутатор между ними равным нулю.

а среднее значение энергии частиц с функцией Гамильтона $\frac{p^2}{2m} + V(x)$ равно

$$\langle E\rangle = \iint\Big(\frac{p^2}{2m} + V(x)\Big)F(x, p, t)\,dx\,dp. \tag{3.2}$$

В квантовой механике состояние системы описывается некоторой «волновой» функцией $\psi = \psi(x, t)$, непрерывной по t и принадлежащей $L^2(\mathbf{R}^n)$ по аргументу x. Среднее значение $\langle\widehat{p}\rangle_{\text{кв}}$ оператора импульса $\widehat{p} = -ih\frac{\partial}{\partial x}$ в этом квантовом случае определяется интегралом вида

$$\langle\widehat{p}\rangle_{\text{кв}} = \int\psi(x, t)\overline{\widehat{p}\psi(x, t)}\,dx, \tag{3.3}$$

а среднее значение оператора энергии $\widehat{E} = \frac{\widehat{p}^2}{2m} + V(x)$ — интегралом вида

$$\langle\widehat{E}\rangle_{\text{кв}} = \int\psi(x, t)\overline{\widehat{E}\psi(x, t)}\,dx. \tag{3.4}$$

Говорят, что $\langle\widehat{p}\rangle_{\text{кв}}$ и $\langle\widehat{E}\rangle_{\text{кв}}$ — это средние значения операторов $\widehat{p}$ и $\widehat{E}$ в состоянии ψ.

По волновой функции ψ можно построить такую квантовую функцию распределения $F_{\text{кв}}(x, p, t)$, чтобы, например, средние $\langle\widehat{p}\rangle_{\text{кв}}$ и $\langle\widehat{E}\rangle_{\text{кв}}$ определялись по формулам (1.1) и (1.2), в которых вместо F стоит $F_{\text{кв}}$. Такая квантовая функция распределения имеет вид

$$(2\pi h)^{-n/2}\psi(x, t)\overline{\widetilde{\psi}(p, t)}e^{-\frac{ixp}{h}}$$

и называется функцией плотности ρ_ψ, отвечающей волновой функции ψ. Таким образом, имеем

$$F_{\text{кв}} = \rho_\psi.$$

Формулы (1.3) и (1.4) (см. [9]) можно переписать следующим образом:

$$\langle\widehat{p}\rangle_{\text{кв}} = \iint p\cdot\rho_\psi(x, p, t)\,dx\,dp,$$

$$\langle\widehat{E}\rangle_{\text{кв}} = \iint\Big(\frac{p^2}{2m} + V(x)\Big)\rho_\psi(x, p, t)\,dx\,dp.$$

Вообще, среднее оператора $\widehat{f} = f(\overset{2}{x}, \overset{1}{p})$ в состоянии ψ равно

$$\langle \widehat{f}\,\rangle_{\text{кв}} \overset{\text{def}}{=} \int \psi(x, t)\overline{\widehat{f}\psi(x, t)}\,dx = \iint \overline{f(x, p)}\rho_\psi(x, p, t)\,dx\,dp \qquad (3.5)$$

$$(\overset{1}{p} = \overset{1}{\widehat{p}}, \quad \widehat{p} = ih\,\partial/\partial x).$$

Волновая функция ψ в линейной теории подчиняется обычно некоторому линейному дифференциальному уравнению в частных нроизводных. Мы будем рассматривать такие нелинейные уравнения, которые нолучаются из этих линейных, если считать, что их коэффициенты являются функциями от средних значений вида (1.5) в состоянии, определнемом решением ψ. Примером таких уравнений могут служить уравнения типа Хартри, а также уравнения, полученные в [9] при «квантовании» уравнений Власова. Все они имеют следующий вид:

$$\begin{gathered} H[\rho_\psi](\overset{2}{x}, \overset{1}{p})\psi = 0, \\ H[\rho_\psi|(x, p) = F(x, p, I_1[\rho_\psi], \dots, I_r[\rho_\psi|), \end{gathered} \qquad (3.6)$$

где $F(x, p, \lambda)$ — заданная функция от переменных $x, p \in \mathbf{R}^n$, $\lambda \in \mathbf{R}^r$, а функционалы $I_1, \dots, I_r$ имеют вид средних (1.5):

$$I_j[\rho_\psi] = \int \overline{k_j(x, p, x', p')}\rho_\psi(x', p')\,dx'\,dp' =$$

$$= \int \overline{\psi(x')k_j(x, p, \overset{2}{x'}, -i\partial/\overset{1}{\partial x'})\psi(x')}\,dx'.$$

Ураннения типа (1.6) мы будем называть унитарно-нелинейными уравнениями, а онераторы $\psi \to H[\rho_\psi](\overset{2}{x}, \overset{1}{p})\psi$ — унитарно-нелинейными операторами (или кратко UN-операторами). Это название связано с тем обстоятельством, что при унитарных преобразованиях в пространстве волновых функций ψ символ UN-оператора преобразуется с помощью унитарпого каяонического преобразовапия (определение символа UN-оператора и точная формулировка этого ураннения приведепы в § 2).

После определения общего UN-оператора, которое будет дано в § 2, мы рассмотрим задачу Коши для такого оператора

$$-ih\partial\psi/\partial t + H[\rho_\psi](\overset{2}{x}, \overset{1}{p})\psi = 0, \quad \psi\big|_{t=0} = \psi_{0,h}(x). \qquad (3.7)$$

В [11, 9] при некоторых предположениях на символ H методом T-отображений была доказана теорема существования решения задачи (1.7). В § 3 изучаются способы нредставления решения этой задачи с помощью формул «выпутывания» (по терминологии Фейнмана).

Далее, в главе III будут изучаться асимптотические решения (при $h \to 0$) задачи (1.7). Эти асимнтотические решения для широкого класса символов H строятся явно. Будет рассмотрен вопрос о сходимости при $h \to 0$ функции плотности ρ_ψ, отвечающей решению ψ, к решению предельного классического уравнения Власова. В главе IV эти же вонросы поставлены и решены для систем унитарно-нелинейных уравнений.

§ 2. Определение унитарно-нелинейных операторов

Начнем с определения унитарно-нелинейных операторов типа Гильберта – Шмидта.

Определение 1. Пусть H — гладкое отображение пространства $L^2(\mathbf{R}^{2n})$ в себя:

$$\rho(x, p) \to H[\rho](x, p).$$

Унитарно-нелинейным оператором (или кратко UN-оператором) типа Гильберта – Шмидта назовем отображение $\mathscr{H}$ пространства $L^2(\mathbf{R}^n)$ в себя, определенное формулой

$$\mathscr{H}[\psi] = H[\rho_\psi](\overset{2}{x}, \overset{1}{p})\psi, \tag{3.8}$$

где ρ_ψ — функция плотности, отвечающая ψ. Отображение H назовем нелинейным символом оператора $\mathscr{H}$, а функцию $H[\rho_\psi]$ — линейным символом оператора $\mathscr{H}$ в состоянии ψ.

Пример 8. Пусть нелинейный символ H является постоянным отображением: $H[\rho] = f_0$, f_0 — фиксированная функция из $L^2(\mathbf{R}^{2n})$. Унитарно-нелинейный оператор $\widehat{H}$ с таким символом является линейным псевдодифференциальным оператором

$$\mathscr{H}[\psi] = f_0(\overset{2}{x}, \overset{1}{p})\psi.$$

Таким образом, класс UN-операторов включает в себя линейные псевдодифферепциальные операторы.

Пример 9. Пусть символ H является линейным ограниченным отображением $L^2(\mathbf{R}^{2n})$ в себя. Представим его в виде интегрального оператора с обобщенным ядром $K(x,\,p,\,x',\,p')$, т. е.

$$H[\rho](x,\,p) = \int \overline{K(x,\,p;\,x',\,p')}\rho(x',\,p')\,dx'\,dp'.$$

UN-оператор $\widehat{H}$ с таким символом действует по формуле

$$(\mathscr{H}[\psi])(x) = \left(\int \psi(y)\overline{K(\overset{2}{x},\,-ih\overset{1}{\partial/\partial x},\,\overset{2}{y},\,-ih\overset{1}{\partial}/y)\psi(y)\partial y}\right)\psi(x).$$

Если $H = \mathbf{1}$ — единичный оператор, то

$$\mathscr{H}[\psi] = (2\pi h)^{-n}\|\psi\|^2 \cdot \psi(x).$$

Рассмотрим, как изменяется нелинейный символ UN-оператора при унитарных преобразованиях.

Имеется изометрин [9]:

$$\mu\colon L^2(\mathbf{R}^{2n}) \to H_2, \quad \mu(f) \equiv f(\overset{2}{x},\,\overset{1}{p})$$

на класс H_2 линейных операторов Гильберта–Шмидта, действующих в пространстве $L^2(\mathbf{R}^2)$. Пусть V — некоторый линейный унитарный оператор в $L^2(\mathbf{R}^2)$. Определим в H_2 оператор Ad_V по формуле

$$\mathrm{Ad}_V(T) = VTV^{-1}. \tag{3.9}$$

Сопоставим также оператору V следующий линейный унитарный оператор $\widetilde{V}$ в пространстве $L^2(\mathbf{R}^{2n})$:

$$\widetilde{V} = \mu^{-1} \circ \mathrm{Ad}_V \circ \mu. \tag{3.10}$$

Теорема 1. *Пусть $\mathscr{H}$ есть UN-оператор типа Гильберта–Шмидта, а V — линейное унитарное преобразование пространства $L^2(\mathbf{R}^n)$. Тогда отображение $V^{-1} \circ \mathscr{H} \circ V$ является UN-оператором и его нелинейный символ H_V связан с символом H каноническим унитарным преобразованием:*

$$H_V = \widetilde{V}^{-1} \circ H \circ \widetilde{V}.$$

Доказательство. Требуется показать, что $V^{-1}\mathscr{H}[V\psi] = \mathscr{H}_V[\psi]$ для любой функции $\psi \in L^2(\mathbf{R}^n)$, где $\mathscr{H}_V$ есть UN-оператор с символом H_V. Имеем, по определению,

$$\mathscr{H}_V[\psi] = f(\overset{2}{x}, \overset{1}{p})\psi,$$

где

$$f = H_V[\rho_\psi] = \widetilde{V}^{-1}H[\widetilde{V}\rho_\psi].$$

В силу формул (2.2), (2.3),

$$f \equiv \mu^{-1}\big(V \cdot H[\widetilde{V}\rho_\psi] \cdot (\overset{2}{x}, \overset{1}{p}) \cdot V^{-1}\big)$$

и

$$\widetilde{V}\rho_\psi = \mu^{-1}\big(V \cdot \rho_\psi(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}) \cdot V^{-1}\big).$$

Поэтому остается доказать, что

$$V \cdot \rho_\psi(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}) \cdot V^{-1} = \rho_{V_\psi}(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}).$$

Это равенство следует из унитарности оператора V и формулы (б) леммы 1.3 главы II [9]. Лемма доказана. ■

Дадим теперь определение более общих унитарно-нелинейных операторов. Рассмотрим некоторое отображение

$$r\colon S_{-\infty}(\mathbf{R}^{2n}) \to S^{\infty}(\mathbf{R}^{2n}).$$

Положим $S_0 = S^{\infty}(\mathbf{R}^{2n})$ и обозначим через $\mathscr{L}_k$ пространство всех непрерывных отображений из $S_{-\infty}(\mathbf{R}^{2n})$ в $\mathscr{L}_{k-1}$ (где $k = 1, 2, \ldots$). Наделим $\mathscr{L}_k$ непрерывной сходимостью [10, 18]. Отображение r называется гладким, если оно само и все его дифференциалы $D_r^k\colon \mathscr{L}_0 \to \mathscr{L}_k$ ограничены, т. е. переводят ограниченные множества в ограниченные.

Определение 2. Пусть $H\colon S_{-\infty}(\mathbf{R}^{2n}) \to S^{\infty}(\mathbf{R}^{2n})$ — гладкое отображение. Оператор

$$\mathscr{H}\colon S(\mathbf{R}^n) \to S(\mathbf{R}^n),$$

заданный формулой

$$\mathscr{H}[\psi] = H[\rho_\psi](\overset{2}{x}, \overset{1}{p})\psi, \quad \psi \in S(\mathbf{R}^n),$$

назовем унитарно-нелинейным (или, кратко, UN-оператором).

Как и выше, функцию $H[\rho_\psi]$ будем называть линейным символом UN-оператора $\mathscr{H}$ в состоянии ψ, а отображение H — нелинейным символом этого оператора.

Пример 10. Пусть нелинейный символ задается формулой

$$H[\rho](x, p) = \frac{|p|^2}{2} + V_0(x) + \iint \overline{V(x - x')}\rho(x', p')\,dx'\,dp',$$

где V, $V_0 \in S^\infty(\mathbf{R}^n)$. Отвечающий этому символу UN-оператор действует по следующему правилу:

$$\widehat{H}[\psi] = -\frac{h^2}{2}\Delta\psi(x) + V_0(x)\psi(x) + \psi(x)\iint \psi(y)\overline{V(x - y)\psi(y)}\,dy. \quad (3.11)$$

Унитарно-нелинейные операторы вида (2.4) будут в дальнейшем находиться в центре нашего внимания.

§ 3. Квантование кинетических уравнений

Квантованием обычно называют некоторый формальный способ сопоставления величинам классической механики некоммутирующих операторов в гильбертовом пространстве. В настоящее время проблема квантования потеряла свою остроту. В 20-е годы нашего столетия после открытия квантований Гейзенберга и Шредингера и установления Дираком их эквивалентности эта проблема была очень актуальна.

Напомним кратко схему квантования Гейзенберга, Шредингера и Фейнмана.

1. Квантование Гейзенберга. Пусть $x(t)$, $p(t)$ — решение уравнений Ньютона

$$\dot{x} = p, \quad \dot{p} = -\frac{\partial V(x)}{\partial x}, \quad (3.12)$$

удовлетворяющее некоторым начальным данным $x(0) = x^0$, $p(0) = p^0$. Рассмотрим те же уравнения (1), но с операторнозначными начальными данными $\widehat{x}^0$, $\widehat{p}^0$, коммутатор которых $[\widehat{x}^0, \widehat{p}^0]$ равен ih, где h — постоянная Планка. Нетрудно видеть, что решение $\widehat{X}(t)$, $\widehat{P}(t)$ уравнений (1) с такими начальными данными существует, причем соотношение коммутации сохраняется во времени:

$$\bigl[\widehat{X}(t), \widehat{P}(t)\bigr] = ih.$$

Соответствие

$$\bigl(x(t), p(t)\bigr) \to \bigl(\widehat{X}(t), \widehat{P}(t)\bigr)$$

называют *квантованием Гейзенберга*.

2. Квантование Шредингера. Сопоставим координатным функциям $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $p = (p_1, \ldots, p_n)$ в фазовом пространстве $\mathbf{R}^{2n} = \mathbf{R}^n_x \times \mathbf{R}^n_p$ следующие операторы в $L^2(\mathbf{R}^n)$:

$$x_j \to \widehat{x}_j \text{ — оператор умножения на } x_j,$$

$$p_j \to \widehat{p}_j = -ih\frac{\partial}{\partial x_j} \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Функции Гамильтона $H(x, p) = p^2/2 + V(x)$, отвечающей уравнениям (1), при этом будет сопоставлен оператор $\widehat{H} = \widehat{p}^2/2 + V(\widehat{x})$. Напишем уравнение Шредингера для гамильтониана $\widehat{H}$:

$$-ih\frac{\partial\psi}{\partial t} + \widehat{H}\psi = 0. \tag{3.13}$$

Квантование Шредингера — это переход от уравнений Ньютона (1) к уравнению Шредингера.

Нетрудно видеть, что операторы Гейзенберга $\widehat{X}(t)$, $\widehat{P}(t)$, построенные в п. 1, имеют вид

$$\widehat{X}(t) = e^{\frac{i}{h}\widehat{H}t}\widehat{x}^0 e^{-\frac{i}{h}\widehat{H}t}, \quad \widehat{P}(t) = e^{\frac{i}{h}\widehat{H}t}\widehat{p}^0 e^{-\frac{i}{h}\widehat{H}t}.$$

3. Квантование Фейнмана. Рассмотрим оператор $T_{\Delta t}$ в $L^2(\mathbf{R}^n)$, действующий по формуле

$$T_{\Delta t}u(x) = \iint \exp\Big\{\frac{i}{h}\Big[p(x-y) - \Big(\frac{|p|^2}{2} + V\Big(\frac{x+y}{2}\Big)\Big)\Delta t\Big]\Big\}u(y)\,dy\,dp, \quad u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n).$$

Положим

$$\psi(x, t) = \lim_{N\to\infty}(T_{t/N})^N\psi_0(x).$$

Этот предел может быть интерпретирован как континуальный интеграл по траекториям:

$$\psi(x, t) = \iint\limits_{q(t)=x} D_p D_q \exp\Big\{\frac{i}{h}\int_0^t p(\tau)dq(\tau) - \Big(\frac{|p(\tau)|^2}{2} + V\big(q(\tau)\big)\Big)d\tau\Big\}\psi_0\big(q(0)\big).$$

Можно показать, что $\psi(x, t)$ удовлетворяет уравнению Шредингера (3.2) и начальному условию $\psi(x, 0) = \psi_0(x)$.

Таким образом, мы видим, что все эти способы квантования эквивалентны. Однако в случае более общей функции Гамильтона $H(x, p)$ такой, что $\partial^2 H/\partial p\,\partial x \neq 0$, эти способы зависят от действия операторов $\widehat{p}$ и $\widehat{x}$ в уравнениях (3.1) или (3.2).

Например, релятивистскому уравнению для функции Гамильтона

$$\begin{gathered}\bigl(H - e\varphi(x)\bigr)^2 = \bigl(p - eA(x)\bigr)^2 + mc^2,\\ \varphi(x),\ A(x) \in C^\infty, \quad e,\ m,\ c = \mathrm{const}\end{gathered} \tag{3.14}$$

отвечает квантовое уравнение Клейна – Гордона

$$\Bigl(ih\frac{\partial}{\partial t} - e\varphi(x)\Bigr)^2 \psi(x, t) = \Bigl(ih\frac{\partial}{\partial x} - eA(x)\Bigr)^2 \psi(x, t) + mc^2\psi(x, t). \tag{3.15}$$

С другой стороны, можно найти из уравнения (3.3) функцию H явно:

$$H = e\varphi(x) \pm \sqrt{\bigl(p - eA(x)\bigr)^2 + mc^2},$$

и сопоставить ей квантовые уравнения

$$ih\frac{\partial\psi_l}{\partial t} = e\varphi(x)\psi \pm \sqrt{\Bigl(ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}} + eA(\overset{2}{x})\Bigr)^2 + mc^2\psi(x, y)}. \tag{3.16}$$

Квантование в этом случае не единственно (с точностью до $O(h^2)$), и выбор уравнения (3.4) (а не (3.5)) диктуется дополнительными соображениями релятивистской инвариантности.

В квазиклассическом приближении автором был предложен способ квантования не уравнений или гамильтониана, а поверхностей в фазовом пространстве, названных автором лагранжевыми. Тот факт, что уравнения характеристик, отвечающие уравнению Власова, сохраняют лагранжевость поверхностей, позволяет применить этот способ для квантования решений уравнения Власова.

В настоящем параграфе будет обобщен формализм квантования на уравнения Власова и получены уравнения нелинейной квантовой механики как квантованные уравнения Власова. Будет установлено соответствие между (классическим) уравнением Власова и (квантовым) уравнением для матрицы плотности, отвечающей уравнению Хартри. В одну сторону это соответствие формализуется с помощью разностного квантования. Переход при $h \to 0$ от функции плотности к решению уравнения Власова (§ 2 гл. II) обосновывает это соответствие в другую сторону.

В нараграфе нроводится также способ квантования части классических частиц. Например, пусть имеются две частицы с координатами $x = (x_1, x_2, x_3)$ и $y = (y_1, y_2, y_3)$, и нусть $V(x, y)$ — потенциал взаимодействия между ними, так что классический лагранжиан равен

$$L(\dot{x}, \dot{y}, x, y) = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\dot{y}^2}{2} - V(x, y).$$

Если нервая частица — квантовая, а вторая — классическая, то уравнения Ньютона, прокваптовапные по первой частице и классические — но второй, имеют вид

$$-ih\frac{\partial\psi(x, t)}{\partial t} - \frac{h^2}{2}\Delta\psi + V\big(x, y(y_0, \dot{y}_0, t, [\psi])\big)\psi = 0, \tag{3.17}$$

$$\ddot{y} = -\int \left|\psi(x, t)\right|^2 \frac{\partial V}{\partial y}(x, y)\, dx, \tag{3.18}$$

$$y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}_0.$$

Если задана функция распределения классических частиц $\rho(y_0, \dot{y}_0)$ в начальный момент, то в уравнении (3.6) последний член нужно проинтегрировать но y_0 и $\dot{y}_0$ с весом $\rho(y_0, \dot{y}_0)$. Система уравнений (3.6), (3.7) так же, как и нелинейные уравнения квантовой механики, относится к единому классу операторов с унитарной нелинейяостью, введенных в § 2.

Уравнения типа (3.6), (3.7) в последнее время используются в полуклассической теории взаимодействия квантовых и классических частиц в кваптовой теории поля (например, при взаимодействии с гравитационным полем). Отметим еще раз, что методы, развитые здесь для операторов с унитарной пелинейностью, изложены с таким расчетом, чтобы их можно было применить (на нестрогом уровне) к подобным уранпениям квантовой теории поля.

4. Квантование уравнений Власова. Рассмотрим задачу Коши для кинетического уравпения Власова:

$$\frac{\partial g_0}{\partial t} + \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p}(x, p, t; [g_0])\frac{\partial g_0}{\partial x} - \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial x}(x, p, t; [g_0])\frac{\partial g_0}{\partial p} = 0, \tag{3.19}$$

$$g_0(x, p, 0) = \rho_0(x, p),$$

где ρ_0 — вещественнан функция, $\mathscr{H}(x, p, t; [g_0])$ — гладкая вещественная функция Гамильтона, интегрально зависящая от g_0. Это означает, что $\mathscr{H}$ есть гладкая функция от интегралов вида

$$\iint dy_1\, d\xi_1 \ldots \iint dy_m\, d\xi_m V(x, p, t; y_1, \ldots \\ \ldots y_m, \xi_1, \ldots, \xi_m) g_0(y_1, \xi_1, t) \ldots g_0(y_m, \xi_m, t),$$

которые мы будем кратко записывать

$$\iint dy\, d\xi\, V(x, p, t; y, \xi) g_0(y, \xi, t). \tag{3.20}$$

Здесь функция $V(x, p, t; y, \xi)$ вещественна и фияитна по (y, ξ). Предположим, кроме того, что все производные по (x, p) функции $\mathscr{H}(x, p, t; [g_0])$ входят в $L^2(\mathbf{R}^n_x \times \mathbf{R}^n_p)$.

Сделаем в каждом интеграле (3.9) замену переменных

$$y = X(z, \omega, t), \quad \xi = P(z, \omega, t)$$

с якобианом, равным единице, и замепим функцию g_0 на $\rho_0(z, \omega)$. В результате интеграл (3.9) примет вид

$$\iint dz\, d\omega\, V\big(x, p, t; X(z, \omega, t)\, P(z, \omega, t)\big) \rho_0(z, \omega). \tag{3.21}$$

Обозначим через $\mathscr{H}\big(x, p, t; [X, P, \rho_0]\big)$ функцию, получившуюся после замены каждого иптеграла (3.9), входящего в $\mathscr{H}(x, p, t; [g_0])$, на интеграл (3.10).

Система характеристик для задачи (3.8) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p}\big(X, P, t; [X, P, \rho_0]\big), \quad X(z, \omega, 0) = z, \\ \frac{\partial P}{\partial t} &= -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial x}\big(X, P, t; [X, P, \rho_0]\big), \quad P(z, \omega, 0) = \omega. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Квантованием Гейзенберга (уравнений (3.11) или (3.8)) назовем следующие правила сопоставления классическим величинам квантовых операторов, зависящих от параметра $h \in (0, 1)$.

I. Классическим характеристикам $X^{(j)}(z, \omega, t)$, $P^{(j)}(z, \omega, t)$, $j = 1, \ldots, n$, сопоставим семейства самосопряженных операторов

$\widehat{X}_h(t)$, $\widehat{P}_h(t)$ в $L^2(\mathbf{R}^n)$ с коммутационными соотношениями:

$$\begin{aligned}
&\big[\widehat{X}_h^{(j)}(t),\, \widehat{P}_h^{(k)}(t)\big] = ih\delta_{jk};\\
&\big[\widehat{X}_h^{(j)}(t),\, \widehat{X}_h^{(k)}(t)\big] = \big[\widehat{P}_h^{(j)}(t),\, \widehat{P}_h^{(k)}(t)\big] = 0.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

II. Каждой вещественной функции $f \in L^2(\mathbf{R}^{2n})$, $f = f(x, p)$ сопоставим самосопряженный оператор Гильберта–Шмидта

$$f\big(\overset{2}{\widehat{X}}(t),\, \overset{1}{\widehat{P}}(t),\, h\big),$$

где

$$f(x, p, h) = \exp\Big\{\frac{(-ih)}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial p_k}\Big\} f(x, p).$$

III. Начальной функции ρ_0 (3.8) сопоставим некоторый самосопряженный оператор Гильберта–Шмидта $\widehat{\rho}_h$ в $L^2(\mathbf{R}^n)$, а каждому интегралу вида (3.10) — скалярное произведение в пространстве Шмидта $H_2(L^2)$:

$$\int V(X, P)\rho_0 \to (2\pi h)^n \operatorname{tr}\big[V(\overset{2}{\widehat{X}}_h,\, \overset{1}{\widehat{P}}_h,\, h)\widehat{\rho}_h\big]. \tag{3.24}$$

Преобразуем каждый интеграл (3.10), входящий в функцию $\mathscr{H}\big(x, p, t; [X, P, \rho_0]\big)$, по правилу (3.13). Получим некоторую новую функцию $\mathscr{H}\big(x, p, t; [\widehat{X}_h, \widehat{P}_h, \widehat{\rho}_h]\big)$. Обозначим

$$\mathscr{H}\big(x, p, t, h;\, [\widehat{X}_h, \widehat{P}_h, \widehat{\rho}_h]\big) = \exp\Big\{\frac{(-ih)}{2}\frac{\partial^2}{\partial x \partial p}\Big\}\mathscr{H}\big(x, p, t;\, [\widehat{X}_h, \widehat{P}_h, \widehat{\rho}_h]\big).$$

Классическая система характеристик (3.11) после квантования I, II, III перейдет в систему операторных уравнений Гейзенберга

$$\begin{aligned}
\frac{d\widehat{X}_h(t)}{dt} &= \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p}\big(\overset{2}{\widehat{X}}_h(t),\, \overset{1}{\widehat{P}}_h(t),\, t,\, h;\, [\widehat{X}_h, \widehat{P}_h, \widehat{\rho}_h]\big),\\
\frac{d\widehat{P}_h(t)}{dt} &= -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial x}\big(\overset{2}{\widehat{X}}_h(t),\, \overset{1}{\widehat{P}}_h(t),\, t,\, h,\, [\widehat{X}_h, \widehat{P}_h, \widehat{\rho}_h]\big).
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Пусть найдено решение уравнений (3.14) с начальными данными, удовлетворяющими соотношениям коммутации (3.12) (при $t = 0$). Тогда соотношения (3.12) остаются справедливыми при всех t.

По теореме Неймана, существует унитарный оператор U_t в $L^2(\mathbf{R}^n)$ такой, что

$$\widehat{X}_h(t) = U_t^{-1} x U_t, \quad \widehat{P}_h(t) = U_t^{-1}\Big(-ih\frac{\partial}{\partial x}\Big)U_t.$$

Можно выбрать U_t так, чтобы было справедливо уравнение

$$-ih\frac{\partial U_t}{\partial t} + \mathscr{H}\big(\overset{2}{x}, -ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}, t, h; [\widehat{X}_h, \widehat{P}_h, \widehat{\rho}_h]\big)U_t = 0.$$

Пусть

$$g_h(x, p, t) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{smb} U_t \widehat{\rho}_h U_t^{-1}.$$

Тогда

$$(2\pi h)^n \operatorname{tr}\, \big[V(\overset{2}{\widehat{X}_h}, \overset{1}{\widehat{P}_h}, h)\widehat{\rho}_h\big] = \int V(y, \xi, h) g_h(y, \xi, t)\, dy\, d\xi.$$

Отсюда получим ряд простых следствий, которые мы сформулируем в виде двух лемм.

Лемма 1. *Функция g_h удовлетворяет уравнению для функции плотности:*

$$-ih\frac{\partial g_h}{\partial t} + \mathscr{H}\big(\overset{2}{x}, p - ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}, t, h; [g_h]\big)g_h - \\ - \overline{\mathscr{H}}\big(x - ih\overset{2}{\frac{\partial}{\partial p}}, \overset{1}{p}, t, h; [g_h]\big)g_h = 0. \quad (3.26)$$

Предположим теперь, что начальные данные системы (3.14) имеют вид $\widehat{X}_h(0) = x$, $\widehat{P}_h(0) = -ih\,\partial/\partial x$, а оператор $\widehat{\rho}_h$ в III действует по формуле

$$\widehat{\rho}_h v = (2\pi h)^{-n}(v, \psi_0)_{L^2}\psi_0,$$

где $\psi_0 = \psi_0(\circ, h) \in L^2(\mathbf{R}^{2n})$. В этом случае из определения функции $g_h(x, p, t)$ получим следующее утверждение.

Лемма 2. *Функция g_h имеет вид функции плотности*

$$g_h(x, p, t) = (2\pi h)^{-n/2}\psi(x, t, h)\overline{\tilde{\psi}(p, t, h)}e^{-\frac{1}{h}xp}, \tag{3.27}$$

где функция ψ является решением задачи Коши для оператора с унитарной нелинейностью

$$\begin{gathered}-ih\frac{\partial\psi}{\partial t} + \mathscr{H}\Big(\overset{2}{x}, -ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}, t, h; [\psi]\Big)\psi = 0,\\ \psi(x, 0, h) = \psi_0(x, h).\end{gathered} \tag{3.28}$$

Здесь символ $\mathscr{H}(x, p, t, h; [\psi])$ получается из функции

$$\exp\Big\{\frac{-ih}{2}\frac{\partial^2}{\partial x\partial p}\Big\}\mathscr{H}(x, p, t; [g_0])$$

заменой каждого интеграла вида (3.9) на интеграл

$$\int \psi(y, t, h)\overline{V(x, p, t; \overset{2}{y}, -ih\overset{1}{\partial}/\partial y, h)\psi(y, t, h)}\, dy,$$

где

$$V(x, p, t; y, \xi, h) = \exp\Big\{\frac{-ih}{2}\frac{\partial^2}{\partial y\partial\xi}\Big\}V(x, p, t; y, \xi).$$

Таким образом, от уравнения Власова (3.2) и системы уравнений характеристик для него (3.11) мы перешли с помощью правил квантования I–III к квантовым нелинейным уравнениям, аналогичным:

— системе Гейзенберга (3.14),

— уравнению для функции плотности (3.15),

— уравнению Шредингера для гамильтониана с унитарной нелинейностью (3.17).

5. Разностное квантование. Отметим еще один способ перехода от обобщенного уравнении Власова к уравнению для функции плотности.

Пусть H — некоторое отображение $L^2(\mathbf{R}^{2n})$ в $S^\infty(\mathbf{R}^{2n})$, причем для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{2n})$ отображение $g \to \varphi H[g]$ является гладким в $L^2(\mathbf{R}^{2n})$. Напомним, что обобщенным уравнением Власова мы называем следующее уравнение:

$$\frac{\partial g_0}{\partial t} + \frac{\partial H[g_0](x, p)}{\partial p}\frac{\partial g_0}{\partial x} - \frac{\partial H[g_0](x, p)}{\partial x}\frac{\partial g_0}{\partial p} - \frac{\partial^2 H[g_0](x, p)}{\partial x\partial p}g_0 = 0. \tag{3.29}$$

Пусть $\Phi(z)$ — аналитическая функция двух комплексных переменных z_1, z_2, растущая на вещественной плоскости $\operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2 = 0$ не быстрее степени. Обозначим $\widehat{x} = i\partial/\partial p$, $\widehat{p} = -i\partial/\partial x$, и пусть

$$\varkappa\big(x, y, p, \xi; [g]\big) = \Phi(\xi\widehat{x}, y\widehat{p})H[g](x, p).$$

Рассмотрим следующее обобщение уравнения (3.18):

$$\frac{\partial g_0}{\partial t} + \varkappa\big(\overset{2}{x}, \overset{2}{\widehat{x}}, \overset{1}{p}, \overset{1}{\widehat{p}}; [g_0]\big)g_0 = 0. \tag{3.30}$$

В случае $\Phi(z_1, z_2) \equiv z_1 - z_2$ уравнение (3.19) совпадает с (3.18).

В общем случае символ Φ назовем *производящим символом* уравнения (3.19). *Разностным квантованием* назовем следующее преобразование производящего символа:

$$\Phi(z) \to \Phi_h(z) = \Phi\Big(\frac{e^{-ihz_1} - 1}{-ih}, \frac{e^{-ihz_2} - 1}{-ih}\Big).$$

Здесь h — некоторый вещественный параметр. Очевидно,

$$\lim_{h\to 0} \Phi_h(z) = \Phi(z).$$

Разностное квантование $\Phi \to \Phi_h$ переводит уравнение (3.19) в уравнение

$$\frac{\partial g_h}{\partial t} + \varkappa_h\big(\overset{2}{x}, \overset{2}{\widehat{x}}, \overset{1}{p}, \overset{1}{\widehat{p}}; [g_h]\big)g_h = 0, \tag{3.31}$$

где

$$\varkappa_h\big(x, y, p, \xi; [g]\big) = \Phi_h(\xi\widehat{x}, y\widehat{p})H[g](x, p).$$

В случае производящего символа $\Phi(z) = z_1 - z_2$ квантованное уравнение (3.20) имеет вид

$$(-ih)\frac{\partial g_h}{\partial t} + H[g_h]\Big(\overset{2}{x}, -p - ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}\Big)g_h - H[g_h]\Big(x - ih\overset{2}{\frac{\partial}{p\partial}}, \overset{1}{p}\Big)g_h = 0.$$

Таким образом, разностное квантование переводит уравнение Власова (3.18) в уравнение для функции плотности.

Интересным свойством разностного квантования является возможность его вторичного применения. Пусть θ еще один вещественный параметр. Рассмотрим «вторичное» разностное квантование:

$$\Phi_h(z) \to \Phi_{h,\theta}(z) \overset{\text{def}}{=} \Phi_h\Big(\frac{e^{-i\theta z_1} - 1}{-i\theta}, \frac{e^{-i\theta z_2} - 1}{-i\theta}\Big).$$

Пусть

$$\varkappa_{h,\theta}(x, y, p, \xi; [g]) = \Phi_{h,\theta}(\xi\widehat{x}, y\widehat{p})H[g](x, p).$$

«Вторично разностно квантованное» уравнение имеет вид

$$\frac{\partial g_{h,\theta}}{\partial t}+\varkappa_{h,\theta}\big(\overset{2}{x},\ \overset{2}{\hat{x}},\ \overset{1}{p},\ \overset{1}{\hat{p}};\ [g_{h,\theta}]\big)g_{h,\theta}=0.$$

Указанный метод квантования может быть применен многократно.

6. Частичное квантование. В качестве примера использования методов квантования из п. 4 получим уравнения для системы, состоящей из двух частиц — легкой (квантовой) и тяжелой (классической).

Рассмотрим уравнения Ньютона

$$\begin{aligned}\ddot{x}&=-\frac{\partial V}{\partial x}(x,q),\quad x\big|_{t=0}=x_0,\quad \dot{x}\big|_{t=0}=p_0,\\ \ddot{q}&=-\frac{\partial V}{\partial q}(x,q),\quad q\big|_{t=0}=q_0,\quad \dot{q}\big|_{t=0}=\xi_0,\end{aligned}\tag{3.32}$$

где x_0, $p_0\in\mathbf{R}^n$, q_0, $\xi_0\in\mathbf{R}^k$.

Проквантуем эту систему по первой группе переменных x. Для этого выпишем систему уравнений Власова, отвечающую (3.21):

$$\begin{gathered}\frac{\partial g_0}{\partial t}+p\frac{\partial g_0}{\partial x}-\frac{\partial g_0}{\partial p}\iint\frac{\partial V}{\partial x}(x,q')f_0(q',\xi',t)\,dq'\,d\xi'=0,\\ \frac{\partial f_0}{\partial t}+\xi\frac{\partial f_0}{\partial q}-\frac{\partial f_0}{\partial \xi}\iint\frac{\partial V}{\partial q}(x',q)g_0(x',p',t)\,dx'\,dp'=0,\\ g_0(x,p,0)=\delta(x-x_0)\delta(p-p_0),\\ f_0(y,\xi,0)=\delta(q-q_0)\delta(\xi-\xi_0).\end{gathered}\tag{3.33}$$

Проквантуем отдельно первое уравнение системы (3.22) по правилам п. 4. Получим

$$\begin{gathered}-ih\frac{\partial g_h}{\partial t}+H\Big(\overset{2}{x},\,p-ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}},\,t\Big)g_h-H\Big(x-ih\overset{2}{\frac{\partial}{p}},\,\overset{1}{p},\,t\Big)g_h=0,\\ \frac{\partial f_0}{\partial t}+\xi\frac{\partial f_0}{\partial q}-\frac{\partial f_0}{\partial \xi}\iint\frac{\partial V}{\partial q}(x',q)g_h(x',p',t)\,dx'\,dp'=0,\end{gathered}\tag{3.34}$$

где

$$H(x,p,t)=\frac{|p|^2}{2}+\iint V(x,q')f_0(q',\xi',t)\,dq'\,d\xi'.$$

Для того чтобы решение g_h системы (3.23) слабо сходилось к g_0 при $h \to 0$, нужно потребовать, чтобы в начальный момент функция $g_h(x, p, 0)$ слабо сходилась к $\delta(x - x_0) \cdot \delta(p - p_0)$.

Уравнения (3.23) являются искомыми частично квантованными уравнениями. Можно переписать их в виде уравнений Шредингера и Ньютона:

$$-ih\frac{\partial\psi_h}{\partial t} - h^2\Delta\psi_h + \psi_h V\big(x, q(t)\big) = 0, \qquad\qquad \ddot{q} = -\int \frac{\partial V}{\partial q}(x', q)\big|\psi_h(x', t)\big|^2 dx', \tag{3.35}$$

причем

$$\lim_{h\to 0}(2\pi h)^{-n/2}\psi_h(x, 0)\overline{\widetilde{\psi}_h(p, 0)e}^{-\frac{i}{h}xp} = \delta(x - x_0)\delta(p - p_0),$$

$$q(0) = q_0, \quad \dot{q}(0) = \xi_0.$$

При этом функция g_h из (3.23) является функцией плотности, отвечающей ψ_h.

Рассмотрим теперь более общую систему уравнений Власова:

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial F_1}{\partial x} - \frac{\partial H_1}{\partial x}\frac{\partial F_1}{\partial p} - \frac{\partial F_1}{\partial p}\int\limits_{\mathbf{R}^{2m}} \frac{\partial \rho_1}{\partial x}(x; y, \xi)\times \times F_2(y, \xi, t)\, dy\, d\xi = 0, \tag{3.36}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial t} + \frac{\partial H_2}{\partial \xi}(y, \xi, t)\frac{\partial F_2}{\partial y} - \frac{\partial H_2}{\partial y}\frac{\partial F_2}{\partial \xi} - \frac{\partial F_2}{\partial \xi}\int\limits_{\mathbf{R}^{2n}} \frac{\partial \rho_2}{\partial y}(y; x, p)\times \times F_1(x, p, t)\, dx\, dp = 0,$$

где $x, p \in \mathbf{R}^n$, $y, \xi \in \mathbf{R}^m$, а H_1, H_2, ρ_1, ρ_2 — заданные вещественные функции. Поставим некоторые начальные условия:

$$F_1(x, p, 0) = F_{10}(x, p), \quad F_2(y, \xi, 0) = F_{20}(y, \xi).$$

Проквантуем первое уравнение системы (3.25). Аналогично предыдущему примеру получим уравнение Шредингера:

$$-ih\frac{\partial\psi_h}{\partial t} + H_1\Big(\overset{2}{x}, -ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}, t\Big)\psi_h + + \psi_h\int \rho_1(x; y, \xi)F_2(y, \xi, t)\, dy\, d\xi = 0, \tag{3.37}$$

причем начальные данные $\psi_h(x, 0)$ удовлетворяют следующему условию:

$$\lim_{h\to 0}(2\pi h)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{i}{h}xp}\psi_h(x, 0)\overline{\widetilde{\psi}_h(p, 0)} = F_{10}(x, p)$$

(предел берется в некотором пространстве Соболева W_2^{-s}). Второе уравнение системы (3.25) после такого квантования перейдет в следующее:

$$\frac{\partial F_2}{\partial t} + \frac{\partial H_2}{\partial \xi}\frac{\partial F_2}{\partial y} - \frac{\partial H_2}{\partial y}\frac{\partial F_2}{\partial \xi} -$$
$$- \frac{\partial F_2}{\partial \xi}\int \psi_h(x, t)\overline{\frac{\partial \rho_2}{\partial y}\Big(y; \overset{2}{x}, -ih\overset{1}{\frac{\partial}{x}}\Big)}\psi_h(x, t)dx = 0. \quad (3.38)$$

Система, состоящая из уравнения Шредингера (3.26) и уравнения Власова (3.27), является результатом частичного квантования системы (3.25).

Можно также переписать уравнение (3.26), введя характеристики уравнения (3.27). В результате мы придем к следующей системе:

$$-ih\frac{\partial \psi_h}{\partial t} + H_1\Big(\overset{2}{x}, -ih\overset{1}{\frac{\partial}{x}}, t\Big)\psi_h +$$
$$+ \psi_h\int \rho_1\big(x; Y_h(y, \xi, t), \Xi_h(y, \xi, t)\big)F_{20}(y, \xi)\, dy\, d\xi = 0,$$
$$\frac{\partial Y_h}{\partial t} = \frac{\partial H_2}{\partial y}(Y_h, \Xi_h, t), \quad Y_h(y, \xi, 0) = y,$$
$$\frac{\partial \Xi_h}{\partial t} = -\frac{\partial H_2}{\partial y}(Y_h, \Xi_h, t) - \int \psi_h(x, t) \times \overline{\frac{\partial \rho_2}{\partial y}\Big(Y_h; \overset{2}{x}, -ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}\Big)}\psi_h(x, t)\, dx,$$
$$\Xi_h(y, \xi, 0) = \xi.$$

Пример 11. Частичное квантование электрона в классической системе электрон – осцилляторы поля.

Рассмотрим классическое движение электрона в электромагнитном поле с учетом самодействия. Пусть $\big(q(t), p(t)\big)$ — координата и импульс электрона, удовлетворяющие системе Гамильтона:

$$\dot q = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot p = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad (3.39)$$

где

$$H(q,\, p) = \varphi(q,\, t) + \left|p + A(q,\, t)\right|^2,$$

φ, $A = (A_1,\, A_2,\, A_3)$ — скалярный и векторный потенциалы электромагнитного поля. Имеет место разложение

$$\varphi = \varphi' + \varphi'', \quad A = A' + A'',$$

где $(\varphi',\, A')$ — потенциалы внешнего поля, $(\varphi'',\, A'')$ — потенциалы собственного поля электрона. Уравнения для потенциалов $\varphi(x,\, t)$, $A(x,\, t)$ имеют вид

$$\Box\varphi = \alpha\delta\big(x - q(t)\big), \quad \Box A = \beta\delta\big(x - q(t)\big), \tag{3.40}$$

где $\Box = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\Delta$ — оператор Даламбера, c — скорость света, α — некоторая константа, $\beta = \alpha\dot{q}$.

Уравнения (3.29) будем рассматривать как бесконечномерную гамильтонову систему с функцией Гамильтона:

$$\mathscr{H}(\varphi,\, A,\, \dot{\varphi},\, \dot{A}) = \int\Big\{\frac{1}{2}\big(|\dot{\varphi}|^2 + c^2|\nabla\varphi|^2\big) - \alpha\varphi\delta\big(x - q(t)\big) + \\ + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\big(|\dot{A}_i|^2 + c^2|\nabla A_i|^2\big) - \beta A\delta\big(x - q(t)\big)\Big\}\, dx.$$

Гамильтоново представление уравнений (3.29) имеет вид

$$\ddot{\varphi} = -\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\varphi}, \quad \ddot{A} = -\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial A}. \tag{3.41}$$

Проквантуем частично первую пару уравнений (3.28) в системе (3.28), (3.30). Получим квантовое уравнение для электрона:

$$-ih\frac{\partial\psi_h(q,\, t)}{\partial t} + \varphi(q,\, t)\psi_h(q,\, t) + \left|-ih\frac{\partial}{\partial q} + A(q,\, t)\right|^2 \times \psi_h(q,\, t) = 0 \tag{3.42}$$

и уравнения поля

$$\ddot{\varphi} = -\int|\psi_h|^2\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\varphi}\, dq, \quad \ddot{A} = -\int\overline{\psi}_h\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial A}\psi_h\, dq.$$

Используя явный вид функции $\mathscr{H}$, уравнения поля перепишем в следующем виде:

$$\begin{aligned}\Box\varphi &= \alpha\overline{\psi_h}(x,\,t)\psi_h(x,\,t),\\ \Box A &= -\operatorname{Re}2ih\alpha\overline{\psi_h}(x,\,t)\nabla\psi_h(x,\,t).\end{aligned}\tag{3.43}$$

Полученная система (3.31), (3.32) является нелинейным уравнением квантовой механики (см. введение). Таким образом, нелинейные уравнения квантовой механики могут быть интерпретированы так же, как частично квантованные. Стало быть, чтобы получить уравнение квантовой электродинамики (4)–(7) из системы (3.28), (3.30), нужно сначала частично проквантовать уравнение (3.28) (длн электрона) и только потом провести полное вторичное квантование частично проквантованных уравнений.

§ 4. Теорема существования T-отображения

Рассмотрим задачу Коши для следующего уравнения с унитарной нелинейностью:

$$\begin{gathered}-i\frac{\partial\psi_k(x,\,t)}{\partial t} - \Delta\psi_k(x,\,t) + \sum_{l=1}^{m} V_{kl}(x)\psi_l(x,\,t) + \\ + \sum_{l,j=1}^{m} \psi_l(x,\,t)\int \rho_{kl}^{(j)}(x,\,y)\big|\psi_j(y,\,t)\big|^2 dy = 0, \\ \psi_k(x,\,0) = \psi_{0k}(x), \quad k = 1,\,\ldots,\,m.\end{gathered}\tag{3.44}$$

Здесь $\psi_0 = (\psi_{01},\,\ldots,\,\psi_{0m}) \in L^{2,m}(\mathbf{R}^n)$, а функции V_{kl}, $\rho_{kl}^{(j)}$ непрерывны, ограничены и симметричны:

$$V_{kl}(x) = \overline{V_{lk}(x)}, \quad \rho_{kl}^{(j)}(x,\,y) = \overline{\rho_{lk}^{(j)}(x,\,y)}.$$

Напомним, что $L^{2,m}(\mathbf{R}^n)$ — пространство m-мерных вектор-функций с нормой

$$\|\psi\|^2 = \sum_{j=1}^{m}\int\big|\psi_j(x)\big|^2 dx.$$

Аналогично определяется пространство Соболева $W_2^{k,m}(\mathbf{R}^n)$ с нормой

$$\|\psi_0\|^2_{W_2^{k,m}} = \sum_{j=1}^{m}\|\psi_{0j}\|^2_{W_2^k}.$$

Введем следующие сокращенные обозначения. Пусть $\psi(t)$ — функция на $\mathbf{R}$ со значениями в $L^{2,m}(\mathbf{R}^n)$

$$\psi(t) = \big(\psi_1(t), \ldots, \psi_m(t)\big), \quad \varphi(t) \in L^{2,m}(\mathbf{R}^n).$$

Пусть $v \in L^{2,m}(\mathbf{R}^n)$. Рассмотрим непрерывную матричнозначную функцию с матричными элементами вида

$$V_{ij}(\,\cdot\,) + \sum_{l=1}^{m} \int \rho_{ij}^{l}(\cdot, y)\big|v_l(y)\big|^2 dy,$$

которую мы обозначим через $A[v]$. Обозначим через $\widehat{A}[v]$ ограниченный линейный оператора в $L^{2,m}(\mathbf{R}^n)$, действующий по формуле

$$\big(\widehat{A}[v]u\big)_i = \sum_{j=1}^{m} A[v]_{ij} u_j \quad (i = 1, \ldots, m),$$

где $u \in L^{2,m}(\mathbf{R}^n)$. Используя введенные обозначения, перепишем задачу (4.1) в виде

$$\begin{gathered} -i\frac{d}{dt}\psi(t) - \Delta\psi(t) + \widehat{A}\big[\psi(t)\big]\psi(t) = 0, \\ \psi(0) = \psi_0. \end{gathered} \tag{3.45}$$

Докажем, что решение $\psi(t) \in L^{2,m}(\mathbf{R}^n)$ этой задачи Коши существует и задается T-отображением

$$\psi(t) = \left(\prod_{\tau=0}^{t} G_{d\tau}\big[\psi(\tau)\big]\right)[\psi_0]$$

с образующей

$$G_\varepsilon[v] = \exp\{i\varepsilon\Delta\}\exp\{i\varepsilon\widehat{A}[v]\}, \quad v \in L^{2,m}(\mathbf{R}^n),$$

где Δ — оператор Лапласа.

Пусть $\delta = t/N$, $N = 1, 2, \ldots$ Рассмотрим последовательность функций

$$\begin{gathered} \psi_{N,0} = \psi_0, \\ \psi_{N,k+1} = G_\delta[\psi_{N,k}], \quad k = 0, 1, \ldots, N-1. \end{gathered}$$

Обозначим $\psi_N(t) = \psi_{N,N}$. Докажем существование T-отображения $\psi_0 \to \lim\limits_{N\to\infty} \psi_N(t)$.

Теорема 2. *Пусть $\psi_0 \in W_2^{2,m}(\mathbf{R}^n)$. Тогда в норме $L^{2,m}(\mathbf{R}^n)$ равномерно на любом отрезке $t \in [0, T]$ существует предел $\psi(t) = \lim\limits_{N\to\infty} \psi_N(t)$, удовлетворяющий задаче Коши (4.2).*

Доказательство. 1) Прежде всего заметим, что последовательность $\{\psi_{N,k}\}$ ограничена равномерно по N и k. Действительно, имеют место равенства

$$\left\|\exp\left\{i\epsilon\widehat{A}[v]\right\}\right\| = 1, \quad \left\|\exp\{i\epsilon\Delta\}\right\| = 1$$

(нормы всех операторов — это обычные онераторные нормы $L^{2,m} \to L^{2,m}$). Поэтому

$$\|\psi_{N,k}\| = \|\psi_0\|. \tag{3.46}$$

2) Докажем формулу

$$\psi_{N,k} = \exp\{ik\delta\Delta\}\psi_0 + \\ + i\delta\sum_{j=0}^{k-1}\exp\left\{i(k-j-1)\delta\Delta\right\}\widehat{A}[\psi_{N,j}]\psi_{N,j} + O\Big(\frac{1}{N}\Big). \tag{3.47}$$

Заметим, что последовательность операторов $\widehat{A}[v]$ равномерно ограничена на любом шаре $\|v\| \leqslant r$, т.е. существует константа C_r такая, что

$$\left\|\widehat{A}[v]\right\| \leqslant C_r. \tag{3.48}$$

Поэтому (см. (4.3))

$$\exp\left\{i\delta\widehat{A}[\psi_{N,j}]\right\} = 1 + i\delta[\widehat{A}\psi_{N,j}] + O(1/N^2).$$

Отсюда получаем следующую рекуррентную формулу для $\psi_{N,k}$:

$$\psi_{N,k} = \exp\{i\delta\Delta\}\psi_{N,k-1} + i\delta\exp\{i\delta\Delta\}\widehat{A}[\psi_{N,k-1}]\psi_{N,k-1} + O\Big(\frac{1}{N^2}\Big), \tag{3.49}$$

где остаток $O(1/N^2)$ имеет оценку $\left\|O(1/N^2)\right\| \leqslant C/N^2$, причем C не зависит от $k = 1, \ldots, N$. Из (4.6) элементарными вычислениями получим (4.4).

3) Докажем неравенство

$$\|\psi_{N,l+k} - \psi_{N,l}\| \leqslant C_0 e^{C_1 t}\big(k\delta + \left\|\exp\{i\delta k\Delta\}\psi_0 - \psi_0\right\|\big), \tag{3.50}$$

где C_0, C_1 — некоторые постоннные, $l+k \leqslant N$. Из формулы (4.4) следует, что

$$\begin{aligned}\psi_{N,l+k}-\psi_{N,l} = \exp\{il\delta\Delta\}\big(\exp\{ik\delta\Delta\}\psi_0-\psi_0\big)+\\ + i\delta\sum_{j=0}^{k-1}\exp\big\{i\delta(k+l-j-1)\Delta\big\}\widehat{A}[\psi_{N,j}]\psi_{N,j}+\\ + i\delta\sum_{j=0}^{l-1}\exp\big\{i\delta(l-j-1)\Delta\big\}\big(\widehat{A}[\psi_{N,j+k}]\psi_{N,j+k}-\\ -\widehat{A}[\psi_{N,j}]\psi_{N,j}\big)+O\Big(\frac{1}{N}\Big).\end{aligned}$$

Отсюда и из (4.5) получаем систсму неравенств

$$\begin{aligned}&a_0 \leqslant C\varepsilon,\\ &a_l \leqslant C\Big(\varepsilon + k\delta + \sum_{j=0}^{l-1}\delta a_j\Big), \quad j=1,\,\ldots,\,N,\end{aligned}$$

где

$$a_j = \|\psi_{N,j+k}-\psi_{N,j}\|, \quad \varepsilon = \|\psi_0-\exp\{ik\delta\Delta\}\psi_0\|.$$

Из этих неравенств следует оценка (4.7).

4) Докажем, что последовательность $\{\psi_N(t)\}$ фундаментальна. Зафиксируем, помимо N, еще одно целое число $M \geqslant 1$. Отметим, что

$$\frac{j}{M}-\Big[\frac{j}{M}\Big] \leqslant 1,$$

где через $[j/M]$ обозначена целая часть рационального числа j/M. Поэтому из (4.7) получим

$$\psi_{MN,j} = \psi_{MN,M[j/M]} + O\Big(\frac{1}{N}\Big), \tag{3.51}$$

где $\|O(1/N)\| \leqslant \big(\delta+\|\psi_0-\exp\{i\delta(j/M-[j/M])\Delta\}\psi_0\|\big) \leqslant \delta\|\psi_0\|_{W_2^{2,m}(\mathbf{R}^n)}$. Обозначим $\gamma_N = \delta\|\psi_0\|_{W_2^{2,m}(\mathbf{R}^n)}$.

Итак, мы имеем два разбиения отрезка $[0,t]$: первое — на отрезки длины t/N, а второе — на отрезки длины $t/(MN)$. Ясно, что узлы первого разбиения содержатся в множестве узлов второго разбиения. При этом узлы первого разбиения выделяются среди узлов второго разбиения тем, что их номер кратен M. Формула (4.8) означает, что для любого узла второго разбиения с номером $j \in \{1, \ldots, MN\}$ найдется узел первого разбиения с номером $j_0 = M[j/M]$ такой, что функции $\psi_{MN,j}$ и ψ_{MN,j_0} отличаются друг от друга по норме $L^{2,m}(\mathbf{R}^n)$ на величину порядка $O(\gamma_N)$ равномерно по j.

Запишем формулу (4.4), заменяя N на MN для номера $k_0 = Ml$, кратного M, причем в правой части все функции в узлах второго разбиения аппроксимируем функциями в узлах первого разбиения, используя (4.8). В результате получим

$$\begin{aligned}\psi_{MN,Ml} &= \exp\{il\delta\Delta\}\psi_0 + i\delta\sum_{j=0}^{l-1}\exp\bigl\{i\delta(l-j-1)\Delta\bigr\}\times\\ &\quad\times \widehat{A}[\psi_{MN,Mj}]\psi_{MN,Mj} + O(\gamma_N),\\ &\quad l = 1, \ldots, N.\end{aligned} \tag{3.52}$$

Обозначим

$$b_j = \|\psi_{N,j} - \psi_{NM,Mj}\|.$$

Вычитая равенство (4.4) из (4.9) и оценивая норму левой части получившейся разности, придем к следующей системе оценок:

$$\begin{aligned}&b_0 \leqslant \alpha_N,\\ &b_l \leqslant \alpha_N + c\delta\sum_{j=0}^{l-1} b_j, \quad l = 1, \ldots, N,\end{aligned}$$

где $\alpha_N \leqslant C_1\gamma_N$. Отсюда получим равномерную по l оценку

$$b_l \leqslant \alpha_N e^{C_2 t}. \tag{3.53}$$

В частности, при $l = N$ имеем

$$\bigl\|\psi_N(t) - \psi_{NM}(t)\bigr\| \leqslant \frac{t}{N} C_1 e^{C_2 t}\|\psi_0\|_{W_2^{2,m}\mathbf{R}^n}.$$

Тем самым доказана равномерная сходимость последовательности $\bigl\{\psi_N(t)\bigr\}$ на любом отрезке $[0, T_0]$ к некоторой функции $\psi = \psi(t)$ со значениями в $L^{2,m}(\mathbf{R}^n)$.

5) Поскольку каждая функция ψ_N непрерывна на $[0, T_0]$, то ψ непрерывна на $[0, T_0]$.

Из (4.10) следует, что при $\tau \leqslant t$ и $\dfrac{k(N)t}{N} \to \tau$ последовательность функций $\{\psi_{N,k(N)}\}$ сходится к $\psi(\tau)$. Следовательно, римановы суммы

$$\sum_{k=0}^{N-1} \frac{t}{N} \exp\Big\{i\frac{t}{N}(N-k-1)\Delta\Big\}\widehat{A}(\psi_{N,k})\psi_{N,k}$$

сходятся при $N \to \infty$ в норме $L^{2,m}(\mathbf{R}^n)$ к интегралу от непрерывпой функции со значениями в банаховом пространстве:

$$\int_0^t d\tau \exp\big\{i(t-\tau)\Delta\big\}\widehat{A}\big(\psi(\tau)\big)\psi(\tau).$$

Перейдем к пределу при $N \to \infty$ в равенстве (4.4). Получим интегральное уравнение для функции $\psi(t)$:

$$\psi(t) = \exp\{it\Delta\}\psi_0 + i\int_0^t d\tau \exp\big\{i(t-\tau)\Delta\big\}\widehat{A}\big(\psi(\tau)\big)\psi(\tau). \tag{3.54}$$

Отсюда следует, что функция $\psi(t)$ удовлетворяет задаче (4.2). Теорема доказана. ■

Замечание 1. Предположим, что коэффициенты V_{kl} и $\rho_{kl}^{(j)}$ уравнения (4.1) являются гладкими функциями, ограниченными со всеми своими производными. В этом случае теорема 4.1 допускает следующее уточнение.

Пусть $\psi_0 \in W_2^{k+2,m}(\mathbf{R}^n)$, где k — некоторое вещественное число. Тогда T-отображение $\psi_0 \to \psi(t) = \lim \psi_N(t)$ существует в $W_2^{k,m}(\mathbf{R}^n)$, причем сходимость $\psi_N(t) \to \psi(t)$ равномерна на любом отрезке $t \in [0, T_0]$, а предельная функция имеет оценку

$$\big\|\psi(t)\big\|_{W_2^{k,m}} \leqslant \|\psi_0\|_{W_2^{k,m}} e^{Ct}.$$

§ 5. Формулы выпутывания

В этом параграфе мы покажем, как работают известные формулы выпутывания (терминология Фейнмана) в случае T-отображений, порожденных унитарно-нелинейными операторами, а также T-отображений, отвечающих уравнению Власова.

Процесс выпутывания состоит в следующем. Пусть $A(\mu)$ при каждом $\mu \in \mathbf{R}$ есть инфинитезимальный оператор для однопараметрической полугруппы $e^{A(\mu)t}$ $(t \geqslant 0)$ в банаховом пространстве B. Предположим, что при $\tau,\, t \in [0,\, T]$ существует T-произведение $\prod\limits_{\mu=\tau}^{t} \exp\{\overset{\mu}{A}(\mu)\,d\mu\}$.

Пусть также в пространстве B задано некоторое семейство обратимых линейных ограниченных операторов $U(\mu)$, $\mu \in [0,\, T]$.

Определение 3. Выпутыванием оператора $U(\mu)$ из T-произведения $\prod\limits_{\mu=\tau}^{t} \exp\{\overset{\mu}{A}(\mu)d\mu\}$ назовем преобразование оператора $A(\mu)$ в новый оператор $\widetilde{A}(\mu)$ такой, что

$$\prod_{\mu=\tau}^{t} \exp\{\overset{\mu}{A}(\mu)\,d\mu\} = U(t) \cdot \prod_{\mu=\tau}^{t} \exp\{\overset{\mu}{\widetilde{A}}(\mu)\,d\mu\} \cdot U(\tau)^{-1}. \tag{3.55}$$

Приведем явную формулу для оператора $\widetilde{A}(\mu)$. Выпишем задачи Коши, разрешающими операторами которых служат T-произведения

$$\Omega(t,\, \tau) = \prod_{\mu=\tau}^{t} \exp\{\overset{\mu}{A}(\mu)\,d\mu\} \quad \text{и} \quad \widetilde{\Omega}(t,\, \tau) = \prod_{\mu=\tau}^{t} \exp\{\overset{\mu}{\widetilde{A}}(\mu)\,d\mu\}.$$

Эти задачи имеют вид

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = A(t)\Omega, \quad \Omega\big|_{t=\tau} = 1, \tag{3.56}$$

$$\frac{\partial \widetilde{\Omega}}{\partial t} = \widetilde{A}(t)\widetilde{\Omega}, \quad \widetilde{\Omega}\big|_{t=\tau} = 1. \tag{5.2'}$$

Лемма 3. *Пусть $\mathcal{D}$ — плотное линейное многообразие, инвариантное относительно $U(t)$ и $A(t)$, $t \in [0,\, T]$, и пусть на $\mathcal{D}$ оператор $U(t)$ обратим и сильно дифференцируем при $t \in [0,\, T]$. Обозначим*

$$\widetilde{A}(t) \overset{\text{def}}{=} U(t)^{-1} \cdot A(t) \cdot U(t) - U(t)^{-1} \cdot \frac{dU(t)}{dt}. \tag{3.57}$$

Предположим, что задачи Коши (5.2), (5.2′) *имеют на* $\mathscr{D}$ *единственные решения. Тогда на* $\mathscr{D}$ *имеет место равенство*

$$\Omega(t, \tau) = U(t) \cdot \widetilde{\Omega}(t, \tau) \cdot U(t)^{-1}. \tag{3.58}$$

Лемма доказывается постановкой оператора $U(t)^{-1} \cdot \Omega \cdot U(\tau)$ в дифференциальное уравнение задачи (5.2′). В силу единственности решепия этой задачи, указанпый оператор должен совпадать с $\widetilde{\Omega}$ на $\mathscr{D}$, что и доказывает формулу (5.4).

Сравнивая (5.1), (5.4), мы видим, что формула (5.3) дает явное представление для преобразования выпутывания $A(t) \to \widetilde{A}(t)$. Можно сформулировать полученное утверждение следующим образом: если семейство $U(\mu)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dU(\mu)}{d\mu} = A(\mu) \cdot U(\mu) - U(\mu) \cdot \widetilde{A}(\mu),$$

то выпутывание оператора $U(t)$ переводит оператор $A(\mu)$ в $\widetilde{A}(\mu)$. В частности, выпутывание оператора $U(t)$, удовлетворяющего уравнению

$$\frac{dU(\mu)}{d\mu} = \big[A(\mu) \cdot U(\mu)\big],$$

не изменяет оператора $A(\mu)$.

Применим теперь формулы выпутывания к T-отображению, отвечающему уравнению Власова – Лиувилля.

Пусть задано отображение Гамильтона $H[f, v](z) = H_0(z) + H_1[\rho, v](z)$, где фувкция H_0 не зависит от f, v и удовлетворяет условиям

$$\left|\frac{\partial}{\partial z} H_0(z)\right| \leqslant c\big(1 + |z|\big), \quad \left|\Big(\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{\alpha} H_0(z)\right| \leqslant c_\alpha, \quad |\alpha| \geqslant 2.$$

Пусть, далее, функция $F_0 \in S_{-\infty}(\mathbf{R}^{2n})$ такова, что нара (F_0, H_1) удовлетворяет условиям (A), (B) § 2 гл. I.

Как показано в теореме 2.2 гл. I, при любом $t \in \mathbf{R}$ существует решение

$$F(t) = \prod_{\tau=0}^{t} \circ \exp\Big\{-\overline{\Big\langle J \frac{\partial H\big[F(\tau), \mathrm{id}\big]}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\Big\rangle}^{\,\tau} d\tau\Big\} F_0 \tag{3.59}$$

задачи Коши для уравненин Власова – Лиувилля

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial H[F, \mathrm{id}]}{\partial z}, \frac{\partial F}{\partial z} \right\rangle = 0, \quad F\big|_{t=0} = F_0. \tag{5.5$'$}$$

Если решение $F(\tau)$ найдено, то, подставив его в показатель экспоненты в правой части формулы (5.5), мы получим выражение для $F(t)$ в виде T-произведения. Применим к этому T-произведению формулу выпутывания из леммы 5.1. Будем выпутывать оператор

$$U(t) = \prod_{\tau=0}^{t} \exp\Big\{ \overline{-J\Big\langle \frac{\partial H_0}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z} \Big\rangle}^{\tau} d\tau \Big\}.$$

Этот оператор представляет собой обратный сдвиг за время t вдоль траекторий уравнения Гамильтона

$$\frac{d}{dt} Z^{(0)} = J \frac{\partial H_0}{\partial z} \circ Z^{(0)}, \quad Z^{(0)}\big|_{t=0} = \mathrm{id}. \tag{3.60}$$

Таким образом,

$$U(t) = Z^{(0)}[t]^{*^{-1}}. \tag{3.61}$$

Выпутывание $U(t)$ из T-произведения (5.5) дает следующий результат:

$$\begin{gathered} F(t) = U(t) f(t), \\ f(t) = \prod_{\tau=0}^{t} \exp\{ -\overset{\tau}{\widetilde{A}}\, d\tau \} F_0, \end{gathered} \tag{3.62}$$

где

$$\begin{aligned} \widetilde{A}(\tau) &= U(\tau)^{-1} \circ \Big\langle J \frac{\partial H[F(\tau), \mathrm{id}]}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z} \Big\rangle \circ U(\tau) + U(\tau)^{-1} \frac{dU(\tau)}{d\tau} = \\ &= U(\tau)^{-1} \Big\langle J \frac{\partial H_1[F(\tau), \mathrm{id}]}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z} \Big\rangle \circ U(\tau), \quad z \in \mathbf{R}^{2n}. \end{aligned}$$

Используя формулу (5.7), преобразуем оператор $\widetilde{A}(\tau)$ к следующему виду:

$$\widetilde{A}(\tau) = \Big\langle J \frac{\partial H_{1,0}[f(\tau), \mathrm{id}]}{\partial z}(z, t), \frac{\partial}{\partial z} \Big\rangle, \tag{3.63}$$

где

$$H_{1,0}[f, v](z, t) \stackrel{\text{def}}{=} H_1\bigl[f, Z^{(0)}[\tau] \circ v\bigr]\bigl(Z^{(0)}(z, t)\bigr).$$

Действительно, в силу инвариантности H_1 относительно канонических преобразований и формул (5.8), (5.7), мы имеем

$$H_1\bigl[F(t), \mathrm{id}\bigr] = H_1\bigl[Z^{(0)}[t]^{*-1} f(t), \mathrm{id}\bigr] = H_1\bigl[f(t), Z^{(0)}[t]\bigr]. \tag{3.64}$$

Далее, для любой гладкой функции $a(z)$ справедлива формула

$$Z^{(0)}[t]^* \circ \Bigl\langle J\frac{\partial a(z)}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\Bigr\rangle \circ Z^{(0)}[t]^{*-1} = \Bigl\langle J\frac{\partial}{\partial z}\bigl[a\bigl(Z^0(z, t)\bigr)\bigr], \frac{\partial}{\partial z}\Bigr\rangle, \tag{3.65}$$

поскольку отображение $z \to Z^{(0)}(z, t)$ канонично.

Из (5.10) и (5.11) следует искомое равенство (5.9). Таким образом, мы получили следующую формулу выпутывания:

$$F(t) = Z^{(0)}[t]^{*-1} f(t),$$

$$f(t) = \prod_{\tau=0}^{t} \exp\Bigl\{-\overline{\overset{\tau}{\Bigl\langle J\frac{\partial H_{1,0}\bigl[f(\tau), Z^{(0)}[\tau]\bigr]}{\partial z}(z, \tau), \frac{\partial}{\partial z}\Bigr\rangle}}\, d\tau\Bigr\} F_0.$$

На языке дифференциальных уравнений этот результат выглядит следующим образом.

Теорема 3. *Решение задачи Коши* (5.5′) *для уравнения Власова–Лиувилля, отвечающего отображению Гамильтона*

$$H[f, v](z) = H_0(z) + H_1[f, v](z), \tag{3.66}$$

имеет вид

$$F(t) = Z^{(0)}[t]^{*-1} f(t), \tag{3.67}$$

где $Z^{(0)}$ *— решение уравнения Гамильтона* (5.6), *а функция* $f(t)$ *является решением задачи Коши*

$$\frac{\partial f(z, t)}{\partial t} + \Bigl\langle J\frac{\partial H_{1,0}\bigl[f(t), \mathrm{id}\bigr]}{\partial z}(z, t), \frac{\partial f(z, t)}{\partial z}\Bigr\rangle = 0, \qquad f(z, 0) = F_0(z). \tag{3.68}$$

Отображение Гамильтона $H_{1,0}$, *которому отвечает уравнение Власова–Лиувилля* (5.5′), *определено следующей формулой:*

$$H_{1,0}[f, v] = Z^{(0)}[t]^*\bigl(H_1\bigl[f, Z^{(0)}[t] \cdot v\bigr]\bigr). \tag{3.69}$$

Таким образом, процесс выпутывания привел нас от уравнения Власова – Лиувилля (5.5′) к новому уравнению Власова – Лиувилля (5.14).

Определение 4. Отображение Гамильтона $H_{1,0}$, заданное формулой (5.15), назовем отображением Гамильтона в представлении взаимодействия (отвечающем разложению исходного отображения H на функцию Гамильтона H_0 свободного движения и на взаимодействие H_1). Дифференциальное уравнение (5.14) и соответствующее ему уравнение Власова – Гамильтона будем называть уравнениями Власова – Лиувилля и Власова – Гамильтона в представлении взаимодействия.

Из формул (5.13), (5.14) и теоремы **2.2** гл. I получаем

Следствие 1. *Решение задачи* (5.5′) *имеет вид*

$$F(t) = \big(Z[t]^{-1}\big)^* F_0, \tag{3.70}$$

где $Z[t]$ *— каноническое преобразование, заданное формулой*

$$Z[t] = Z^{(0)}[t] \circ W[t], \tag{3.71}$$

причем $W[t]$ *— решение уравнения Власова – Гамильтона в представлении взаимодействия с начальным условием* $W[0] = \mathrm{id}$.

Полезно сравнить формулу (5.16) с формулой (2.9) из главы I и убедиться в том, что $Z[t]$ — это решение уравнения Власова – Гамильтона, отвечающего исходному отображению Гамильтона H. Таким образом, (5.17) также можно воспринимать как формулу выпутывания на языке канонических отображений.

В заключение параграфа рассмотрим применение формул выпутывания к T-отображениям, отвечающим унитарно-нелинейным операторам.

Пусть задан унитарно-нелинейный оператор $\psi \to H[\rho_\psi](\overset{2}{x}, \overset{1}{p})\psi$, причем

$$H[\rho_\psi](z) = H_{\text{своб}}(z) + H_1[\rho_\psi](z), \tag{3.72}$$

где функция $H_{\text{своб}}$ не зависит от ρ_ψ и определяет линейный, самосопряженный в $L^2(\mathbf{R}^n)$ псевдодифференциальный оператор

$$\widehat{H}_{\text{своб}} = H_{\text{своб}}(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}).$$

Будем кратко обозначать

$$\widehat{H}[\rho_\psi] \stackrel{\mathrm{def}}{=} H[\rho_\psi](\overset{2}{x}, \overset{1}{p}).$$

Предположим, что задача Коши

$$-ih\frac{\partial\psi}{\partial t} + \widehat{H}[\rho_\psi]\psi = 0, \quad \psi\big|_{t=0} = \psi_0 \in S(\mathbf{R}^n) \tag{3.73}$$

разрешима [11] в $L^2(\mathbf{R}^n)$ и решение задается T-отображением:

$$\psi(t) = \prod_{\tau=0}^{t} \circ \exp\Big\{-\frac{i}{h}\overset{\tau}{\widehat{H}}[\rho_{\psi(\tau)}]\Big\}\psi_0. \tag{3.74}$$

Обозначим через $U(t)$ унитарный оператор

$$U(t) = \exp\Big\{-\frac{i}{h}\widehat{H}_{\text{своб}}t\Big\}.$$

Предположим, что решение задачи (5.19) найдено и подставлено в показатель экспоненты в правой части (5.20). Из полученного T-произведения выпутаем оператор $U(t)$. Получим

$$\begin{aligned} \psi(t) &= U(t)\cdot\chi(t), \\ \chi(t) &= \prod_{\tau=0}^{t} \exp\Big\{-\frac{i}{h}\overset{\tau}{\widetilde{A}}(\tau)\,d\tau\Big\}\psi_0, \end{aligned} \tag{3.75}$$

где

$$\widetilde{A}(\tau) = U(\tau)^{-1}\circ\widehat{H}[\rho_{\psi(\tau)}]\circ U(\tau) - ihU(\tau)^{-1}\frac{dU(\tau)}{d\tau} = \\ = U(\tau)^{-1}\circ\widehat{H}_1[\rho_{\psi(\tau)}]\circ H(\tau).$$

В силу теоремы 2.1 о каноническом преобразовании символа унитарно-нелинейного оператора, мы имеем

$$\widetilde{A}(\tau) = \widehat{H}_{1,h}[\rho_{\chi(\tau)}] \equiv H_{1,h}[\rho_{\chi(\tau)}](\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, \tau),$$

где

$$H_{1,h} = \widetilde{U}(\tau)^{-1}\circ H_1\circ\widetilde{U}(\tau). \tag{3.76}$$

Здесь использованы обозначении § 2:

$$\widetilde{U}(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \mu^{-1} \circ \mathrm{Ad}_{U(\tau)} \circ \mu,$$

$$\mu\colon f \to f(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}), \quad \mathrm{Ad}_{U(\tau)}\widehat{f} \stackrel{\text{def}}{=} U(\tau)\widehat{f}U(\tau)^{-1}.$$

Из (5.21) получаем следующую формулу выпутывания:

$$\begin{aligned} \psi(t) &= U(t)\chi(t), \\ \chi(t) &= \prod_{\tau=0}^{t} \exp\Big\{-\frac{i}{h}\overset{\tau}{\widehat{\widetilde{H}}}_{1,h}[\rho_{\psi(\tau)}]\,d\tau\Big\}\psi_0. \end{aligned} \tag{3.77}$$

Сформулируем этот результат на языке дифференциальных уравнений.

Теорема 4. *Решение задачи Коши* (5.19) *имеет вид* $\psi(t) = \exp\Big\{-\frac{i}{h}\widehat{H}t\Big\}\chi(t)$, *где функция* χ *удовлетворяет соотношениям*

$$-ih\frac{\partial\chi}{\partial t} + \widehat{\widetilde{H}}_{1,h}[\rho_{\chi(\tau)}]\chi = 0, \quad \chi\big|_{t=0} = \psi_0. \tag{3.78}$$

Таким образом, от унитарно-нелинейного уравнении (5.19) в результате выпутывания мы пришли к унитарно-нелинейному уравнению (5.24) с новым нелинейным символом $\widetilde{H}_{1,h}$.

Определение 5. Символ $\widetilde{H}_{1,h}$, заданный формулой (5.22), в которой $U(\tau) = \exp\Big\{-\frac{i}{h}\widehat{H}_{\text{своб}}\tau\Big\}$, назовем нелинейным символом в представлении взаимодействия (отвечающем разбиению (5.18) символа H на символ свободного движения $H_{\text{своб}}$ и символ взаимодействия H_1). Функцию плотности ρ_χ назовем функцией плотности задачи (5.19) в представлении взаимодействин.

Пример применения полученных формул выпутывания для асимптотического решения задачи Коши вида (5.19) при $h \to 0$ будет рассмотрен в § 1, гл. III. В § 3 гл. III на том же примере будет установлено, что если унитарно-нелинейный оператор $\psi \to \widehat{H}[\rho_\psi]\psi$ ассоциирован с отображением Гамильтона H, т. е. имеет вид

$$\psi \to \widehat{H}[\rho_\psi, \mathrm{id}]\psi,$$

причем, как и в (5.12), имеет место разложение

$$H[f, v](z) = H_0(z) + H_1[f, v](z),$$

то нелинейный символ в представлении взаимодействия $H_{1,h}$, в пределе при $h \to 0$ переходит в отображение Гамильтона в представлении взаимодействия $H_{1,0}$, заданное формулой (5.15), а функция плотности $\rho_{\chi(\tau)}$ переходит при $h \to 0$ в решение уравнения Власова – Лиувилля в представлении взаимодействия (5.14).

§ 6. Ультравторичное квантование унитарно нелинейных операторов

Эта процедура весьма проста. Мы вначале вторично квантуем унитарно нелинейный оператор, заменяя $\widehat{\psi}$ на $\widehat{\psi}^-$, а $\widehat{\psi}^*$ на $\widehat{\psi}^+$, а затем рассматриван шпур полученного оператора и оператора

$$\widehat{S}(\widehat{b}^+, \widehat{b}^-, \widehat{B}^+, \widehat{B}^-, \widehat{\psi}^+, \widehat{\psi}^-) \quad \text{«по } \widehat{\psi}^+, \widehat{\psi}^-\text{»},$$

т. е. в обычном фоковском пространстве.

Символ полученного оператора (т. е. переход от $\widehat{b}^-$, $\widehat{b}^+$, $\widehat{B}^+$, $\widehat{B}^-$ к с-числам) спова нвляется унитарно нелинейным оператором, и к нему может быть применима вся предыдущая теория.

Рассмотрим случай, когда B^+, B^- отсутствуют. Отметим, что число частиц, отвечающих b^-, b^+, сохраняется, и, значит, если мы зададим его в начальный момент, то оно сохрапитсн во времени. В квазиклассическом пределе это выражепие переходит в уравнение Власова, а если в последнем задать решение в начальный момепт в виде

$$\rho(x)\delta(V - V(x, 0)),$$

то решение будет иметь вид $\rho(x,t)\delta(V-V(x,t))$, где $\rho(x,t)$ удовлетворяет уравпепию непрерывности, а $V(x,t)$ — некоторому уравнепию гидродинамического типа. В этом смысле решения для ρ и $V(x,t)$ «относятся» к уравнению Власова, как уравпение Шредингера к уравнению Вигнера (для матрицы Вигнера). Действительно, если в уравпении Вигпера искать подобное же решение, то мы получим уравпение для квадрата модуля и фазы уравнения Шредингера. Если одновременно с $h \to 0$ стремить к δ-функции взаимодействие между частицами и положить число частиц

$$\int d_x b^+(x,1) b^-(x,1) = m, \quad \sum_{s=2}^{\infty} \int dx b^+(x,s) b^-(x,s) = N - m,$$

то в пределе мы получим уравнение гидродинамики Ван-дер-Ваальса.

Глава 4

КВАЗИКЛАССИЧЕСКАЯ АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ УНИТАРНО-НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Нелинейное уравнение квантовой механики

В этой главе будет изложен метод построения квазиклассической асимптотики решений общих унитарно-нелинейных уравнений. В данном параграфе мы, в частности, построим асимптотическое решение задачи Коши для конкретного унитарно-нелинейного уравнения, а именно — уравнения Шрёдингера для парного взаимодействин. Кроме того, в конце нараграфа рассматриваетсн пример вычисления квазиклассической асимптотики собственных чисел и собственных значений нелинейного уравнения Шрёдингера.

Будем решать следующую задачу Коши:

$$-ih\partial\psi/\partial t - h^2\Delta\psi + \left(\int V(x-y)\big|\psi(y,\,t)\big|^2 dy\right)\psi = 0, \qquad \psi\big|_{t=0} = \exp\left\{\frac{i}{h}S_0\right\}\chi_0, \tag{4.1}$$

где $\psi = \psi(x,\,t)$ — подлежащая определению «волновая функцин», $x\in\mathbf{R}^n$, χ_0, $S_0 \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, функции χ_0, S_0, V — вещественные, Δ — оператор Лапласа.

Таким образом, задача (1.1) отличается от обычного уравнения Шрёдингера квантовой механики тем, что потенциал поля зависит от волновой функции ψ. Поэтому уравнение (1.1) можно назвать уравнением самосогласованного поля. Параметр h в (1.1) считается малым. Нашей задачей будет отыскание приближенного (асимптотического) решения (1.1) при $h \to 0$.

Вудет доказано, что задача (1.1) и целый ряд подобных ей нелинейных задач, которые мы рассмотрим ниже, имеют асимптотические решения вида

$$\psi(x,\, t) = e^{\frac{i}{h}S(x,\, t)}\varphi(x,\, t,\, h), \tag{4.2}$$

где амплитуда φ регулярпа при $h \to 0$ (в отличие от экспопенты $e^{iS/h}$, производные которой сингулярны при $h \to 0$). Точнее, асимптотическое решение имеет вид (1.2) лишь при достаточно малом времени t; в целом же оно строится с помощью более сложной конструкции канонического оператора [10].

Наличие у дифференциального уравнения решений типа (1.2) тесно связано с существованием у него характеристик и бихарактеристик. Если же таковые существуют, то представление решения в виде (1.2) является непосредственным следствием формул выпутыванин, полученных в главе II. Продемопстрируем справедливость этого утверждепия па примере решепия задачи Коши (1.1).

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}X(z,\, t,\, h) + 2\int \frac{\partial V}{\partial x}\bigl(X(z,\, t,\, h) - X(y,\, t,\, h)\bigr)\bigl|\chi(y,\, t,\, h)\bigr|^2 dy = 0,$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial t}(z,t,h) = ih\Bigl(\frac{\mathfrak{D}X(z,t,h)}{\mathfrak{D}}\Bigr)^{1/2}\left[\Delta\left(\frac{\chi(z,t,h)}{\Bigl(\frac{\mathfrak{D}X(z,t,h)}{\mathfrak{D}z}\Bigr)^{1/2}}\Bigg|_{z=X^{-1}(x,t,h)}\right)\right]_{x=X} \tag{4.3}$$

с начальными условиями

$$X(z,\, 0,\, h) = z, \quad \frac{\partial X}{\partial t}(z,\, 0,\, h) = \nabla S_0(z),$$
$$\chi(z,\, 0,\, h) = \chi_0(z). \tag{1.3'}$$

Здесь через X^{-1} обозпачепа функция, обратная к X, т. е.

$$X\bigl(X^{-1}(x,\, t,\, h),\, t,\, h\bigr) = X.$$

Система (1.3) рассматривается на том интервале времени $t \in [0,\, T_0]$, где якобиан $\dfrac{\mathfrak{D}X(z,\, t,\, h)}{\mathfrak{D}z}$ положителен.

С помощью формул выпутывания мы докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Решение задачи Коши* (1.1) *на отрезке времени* $[0, T_0]$, *на котором* $\mathscr{D}X/\mathscr{D}z > 0$, *имеет вид*

$$\psi(x, t, h) = \left(\exp\left\{ \frac{i}{h} \widetilde{S}(z, t, h) \right\} \frac{\chi(z, t, h)}{\left(\dfrac{\mathscr{D}X(z, t, h)}{\mathscr{D}z} \right)^{1/2}} \right)_{z = X^{-1}(x, t, h)}, \quad (4.4)$$

где функции X, χ *являются решением задачи* (1.3), (1.3′), *а функция* $\widetilde{S}$ *определена формулой*

$$\widetilde{S}(z, t, h) = S_0(z) + \int_0^t \left(\frac{1}{4} \left| \frac{\partial X}{\partial \tau}(z, \tau, h) \right|^2 - \right.$$
$$\left. - \int V\bigl(X(z, \tau, h) - X(y, \tau, h)\bigr) \bigl|\chi(y, \tau, h)\bigr|^2 dy \right) d\tau. \quad (4.5)$$

Доказательство. Как было показапо в [11] (см. теорему 1.1. гл. III [9]), решение задачи (1.1) существует и задается T-отображением

$$\psi(t) = \prod_{\tau=0}^{t} \exp\left\{ -\frac{i}{h} d\tau \overset{\tau}{B} \bigl[\psi(\tau)\bigr] \right\} \psi(0), \quad \psi(t) = \psi(x, t, h), \quad (4.6)$$

где

$$B\bigl[\psi(\tau)\bigr] = -h^2 \Delta + \int V(x - y) \bigl|\psi(y, \tau, h)\bigr|^2 dy.$$

Применим к (1.6) формулу выпутывания из § 3 гл. II, «выпутаем» осциллирующий множитель $\exp\left\{ \frac{i}{h} S(t) \right\}$ с произвольной вещественной фазой $S(t) = S(x, t, h)$ такой, что $S(t)\big|_{t=0} = S_0(x)$. Получим

$$\psi(t) = e^{\frac{i}{h} S(t)} \varphi(t), \quad \varphi(t) = \varphi(x, t, h), \quad (4.7)$$

где

$$\varphi(t) = \prod_{\tau=0}^{t} \circ \exp\bigl\{ d\tau \overset{\tau}{B}_1 \bigl[\varphi(\tau)\bigr] \bigr\} \varphi(0), \quad \varphi(0) = \chi_0$$

и образующая B_1 определена формулой

$$B_1\big[\varphi(\tau)\big] = -\frac{i}{h}\Big(\frac{\partial S}{\partial \tau} + \Big(\frac{\partial S}{\partial x}\Big)^2 + \int V(x-y)\big|\varphi(y,\tau,h)\big|^2 dy\Big) - \\ - 2\frac{\partial S}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial x} - \Delta S + ih\Delta. \quad (4.8)$$

Функцию S мы выберем ниже так, чтобы член порядка $1/h$ в формуле (1.8) был равен нулю. А сейчас повторно применим формулу вынутывания к T-отображению (1.7), определяющему функцию φ. «Выпутаем» оператор

$$U(t) = \prod_{\tau=0}^{t} \exp\big\{-d\tau \overset{\tau}{A}(\tau)\big\},$$

где

$$A(\tau) = 2\frac{\partial S}{\partial x}(x,\tau,h)\frac{\partial}{\partial x}.$$

Получим

$$\varphi(t) = U(t)f(t),$$

$$f(t) = \prod_{\tau=0}^{t} \circ\exp\big\{d\tau \overset{\tau}{B_2}\big[f(\tau)\big]\big\}f(0), \quad (4.9)$$

где $f(t) = f(x,t,h)$ $f(0) = \chi_0$, а образующая B_2 определена формулой

$$B_2\big[f(\tau)\big] = -\frac{i}{h}a_0\big(\tau,[f]\big) - a_1(\tau) + ih\widehat{U}(\tau)^{-1}\circ\Delta\circ\widehat{U}(\tau). \quad (4.10)$$

Здесь мы обозначили

$$a_1(t) \equiv a_1(x,t,h) = \Delta S\big(X(x,t,h),t,h\big),$$

$$a_0\big(t,[f]\big) \equiv a_0\big(x,t,h,[f]\big) = \frac{\partial S}{\partial t}\big(X(x,t,h),t,h\big) + \\ + \big|\nabla S\big(X(x,t,h),t,h\big)\big|^2 + \int V\big(X(x,t,h) - X(y,t,h)\big)\times \\ \times\exp\Big\{2\int_0^t a_1(y,\tau,h)\,d\tau\Big\}\big|f(y,t,h)\big|^2 dy, \quad X_j(x,t,h) = U_t^{-1}\circ x_j\circ U_t, \\ j = 1,\ldots,n, \quad X = (X_1,\ldots,X_n).$$

Очевидно, вектор-функция X, определенная по этим формулам, удовлетворяет следующим равенствам:

$$\frac{\partial X}{\partial t} = 2\nabla S(X, t, h), \quad X\big|_{t=0} = x. \tag{4.11}$$

Отметим следующее очевидное тождество:

$$\frac{\mathscr{D}X}{\mathscr{D}x} \equiv \exp\left\{2\int_0^t a_1(\tau)\,d\tau\right\},$$

и еще один раз применим формулу выпутывания — на этот раз к T-отображению (1.9). «Выпутаем» множитель $\exp\left\{-\int_0^t a_1(\tau)\,d\tau\right\}$. Получим

$$f(t) = \exp\left\{-\int_0^t a_1(\tau)\,d\tau\right\}\chi(t), \quad \chi(t) = \chi(x, t, h), \tag{4.12}$$

$$\chi(t) = \prod_{\tau=0}^{t} \circ \exp\{d\tau \overset{\tau}{B_3}[\chi(\tau)]\}\chi(0),$$

где $\chi(0) = \chi_0$, а образующая B_3 определена формулой

$$B_3[\chi(\tau)] = -\frac{i}{h}\Big[\frac{\partial S}{\partial \tau}(X(x, \tau, h), \tau, h) + \big|\nabla S(X(x, \tau, h), \tau, h)\big|^2 +$$
$$+ \int V\big(X(x, \tau, h) - X(y, \tau, h)\big)\big|\chi(y, \tau, h)\big|^2 dy\Big] + ih\widetilde{\Delta}(\tau). \tag{4.13}$$

Оператор $\widetilde{\Delta}(\tau)$ есть оператор Лапласа Δ в обкладках оператора

$$W(\tau) = U(\tau) \circ \left(\frac{\mathscr{D}X(x, \tau, h)}{\mathscr{D}x}\right)^{-1/2}, \ \text{ т. е. } \ \widetilde{\Delta}(\tau) = W^{-1}(\tau) \circ \Delta \circ W(\tau).$$

Выберем функцию S так, чтобы коэффициент при $(-i/h)$ в правой части (1.13) был равен нулю. Получим

$$\frac{\partial S}{\partial t} + |\nabla S|^2 + \int V\big(x - X(y, \tau, h)\big)\big|\chi(y, \tau, h)\big|^2 dy = 0.$$

Решение этого уравнения Гамильтона – Якоби легко выразить через функцию X. Учитывая (1.11), найдем

$$S(x, t, h) = \widetilde{S}\big(X^{-1}(x, t, h), t, h\big) = U(t)\widetilde{S}(x, t, h),$$

где функция $\widetilde{S}$ определена формулой (1.5).

В свою очередь, для функции X получим первое из уравнений системы (1.3), а также начальные условия (1.3′). Уравнение для функции χ следует из (1.12), (1.13):

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = ih\widetilde{\Delta}(t)\chi, \quad \chi\big|_{t=0} = \chi_0.$$

Исходная функция ψ после трехкратного «выпутывания» записывается следующим образом:

$$\psi = e^{\frac{i}{h}S}U(t)\Big(\Big(\frac{\mathcal{D}X}{\mathcal{D}x}\Big)^{-1/2}\chi\Big).$$

Отсюда следует формула (1.4).

Решение системы (1.3), (1.3′) существует, поскольку существует решение задачи (3.1). Действительно, функцию X можно определить, решая обычное уравнение Ньютона

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + 2\int \frac{\partial V}{\partial x}(X - y)\big|\psi(y, t, h)\big|^2 dy = 0,$$

а затем вычислить функцию χ по формуле

$$\chi(x, t, h) = \psi\big(X(x, t, h), t, h\big)\exp\Big\{-\frac{i}{h}\widetilde{S}(x, t, h)\Big\}\Big(\frac{\mathcal{D}X(x, t, h)}{\mathcal{D}x}\Big)^{1/2},$$

где

$$\widetilde{S}(x, t, h) = S_0(x) + \int\limits_0^t \Big(\frac{1}{4}\Big|\frac{\partial X}{\partial \tau}(x, \tau, h)\Big|^2 - \\ - \int V\big(X(x, \tau, h) - y\big)\big|\psi(y, \tau, h)\big|^2 dy\Big)\, d\tau.$$

Выше было проверено, что найденная таким образом пара функций X, χ удовлетворяет системе (1.3), (1.3′) на том отрезке времени, где положителен якобиан $\mathcal{D}X/\mathcal{D}x$. Теорема доказана. ■

Следствие. *Решение задачи* (1.1) *на отрезке* $[0, T_0]$ *имеет следующую асимптотику*:

$$\psi(x, t, h) = \left[\exp\left\{\frac{i}{h}\widetilde{S}(q, t)\right\}\frac{\chi_0^2(q)}{\left(\dfrac{\mathscr{D}X^0(q, t)}{\mathscr{D}q}\right)^{1/2}}\right]_{q=(X^0)^{-1}(x, t)} + O(h), \quad (4.14)$$

где $\|O(h)\|_{L^2} \leqslant c\cdot h$, *функция* $X^0(q, t)$ *является решением задачи*

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 X^0(q, t)}{\partial t^2} + 2\int \frac{\partial V}{\partial x}\big(X^0(q, t) - X^0(y, t)\big)\chi_0^2(y)\,dy = 0,\\ X^0(q, 0) = q, \quad \frac{\partial X^0}{\partial t}(q, 0) = \nabla S_0(q),\end{gathered} \quad (4.15)$$

а функция $\widetilde{S}$ *определяется формулой*

$$\widetilde{S}(q, t) = S_0(q) + \int_0^t \left(\frac{1}{4}\left|\frac{\partial X^0}{\partial \tau}(q, \tau)\right|^2 - \right.$$
$$\left. - \int V\big(X^0(q, \tau) - X^0(y, \tau)\big)\chi_0^2(y)\,dy\right)d\tau. \quad (4.16)$$

Доказательство. Решение задачи (1.3), (1.3′) имеет вид

$$X(q, t, h) = X^0(q, t) + O(h^2),$$
$$\chi(q, t, h) = \chi_0(q) + (-ih)\chi_1(q, t) + O(h^2),$$

где $\operatorname{Im}\chi_1 = 0$, а функция $X^0(q, t)$ является решением задачи (1.15). Поэтому формула (1.14) следует из (1.4).

Замечание. Уравнение (1.15) является уравнением Власова – Гамильтона, изученным в гл. 1. Отвечающая ему задача Коши для уравнения Власова имеет вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial F}{\partial t} + 2p\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial p}\iint \frac{\partial V}{\partial x}(x - y)F(y, \xi, t)\,dy\,d\xi = 0,\\ F(x, p, 0) = \chi_0^2(x)\delta\big(p - \nabla S_0(x)\big).\end{gathered} \quad (4.17)$$

Решение задачи (1.17) легко выписать, явно зпая решение задачи (1.15):

$$F(x, p, t) = \left[\chi_0^2(q)\left(\frac{\mathcal{D}X^0(q, t)}{\mathcal{D}q}\right)^{-1}\delta\left(p - \frac{\partial X^0}{\partial t}(q, t)\right)\right]_{q=(X^0)^{-1}(x,t)}.$$

Энтропия задачи (1.17), которая была определепа в § 2 гл. I, равпа

$$H_0(t) = \int \widetilde{S}(q, t)\chi_0^2(q)\,dq,$$

где функция $\widetilde{S}(q, t)$ задана формулой (1.16). С другой стороны, из формулы (1.4) получим

$$\int (-\mathrm{ih})\big[\ln\psi(x, t, h)\big]\cdot\big|\psi(x, t, h)\big|^2 dx =$$
$$= \int\left(\widetilde{S}(q, t, h) - \mathrm{ih}\ln\chi(q, t, h) + \frac{ih}{2}\ln\frac{\mathcal{D}X(q, t, h)}{\mathcal{D}q}\right)\chi^2(q, t, h)\,dq.$$

Следовательно, имеет место следующая формула для энтропии уравнения Власова:

$$H_0(t) = \lim_{h\to 0}(-\mathrm{ih})\big((\ln\psi)\cdot\psi, \psi\big),$$

где ψ — решение задачи (1.1), а скобки $(\ldots, \ldots)$ обозначают скалярпое произведение в L^2.

Рассмотрим теперь вопрос о получении глобальных (при всех t) формул для асимптотики решения задачи (1.1).

В теореме 1.1 асимптотика решения задачи (1.1) была построена лишь на отрезке времени $0 \leqslant t \leqslant T_0$, в то время как решения характеристической системы (1.15) существуют глобальпо. Причина такого ограничения заключена в невозможности обратить функцию X при всех $t \geqslant 0$. Действительно, якобиан $J(q, t) = \mathcal{D}X^0(q, t)/\mathcal{D}q$, лишь в исключительных случаях может быть отличеп от пуля при всех $t \geqslant 0$, а, вообще говоря, $J(q, t) = 0$ — в некоторые моменты времени $t_1, t_2, \ldots$. Соответствующие точки $X^0(q, t_1)$, $X^0(q, t_2)$, ... называют фокальными. Асимптотическое решение в окрестности фокальной точки пе имеет вида (1.2), а строится с помощью канонического оператора. Этот оператор позволяет выписать формулу для асимптотического решеяия сразу при всех t.

Рассмотрим $(n+1)$-мерное многообразие Λ в фазовом пространстве $\mathbf{R}^{2n+2} = \{(x, t; p, p^t) \mid (x, p) \in \mathbf{R}^{2n}, t, p^t \in \mathbf{R}\}$, задаваемое формулами

$$x = X^0(q, t), \quad p = \frac{1}{2}\frac{\partial X^0}{\partial t}(q, t),$$
$$p^t = -\frac{1}{4}\left|\frac{\partial X^0}{\partial t}(q, t)\right|^2 - \int V\big(X^0(q, t) - X^0(y, t)\big)\chi_0^2(y)\,dy,$$

где X^0 — решение задачи (1.15). Многообразие Λ лагранжево относительно формы $dx\wedge dp+dt\wedge dp^t$ в $\mathbf{R}^{2n+2}$ (определение лагранжевости было дано в § 2 гл. I).

Пусть $\mathscr{K}^{1/h}$ — канонический оператор на Λ, определенный с точностью $O(h)$ по мере $d\sigma = dq \wedge dt$ [10].

Лемма 1. *Функция*

$$\psi(x, t, h) = [\mathscr{K}^{1/h}\chi_0](x, t) \tag{4.18}$$

является асимптотическим решением задачи Коши (1.1) *по модулю* $O(h^2)$, *т. е.*

$$-ih\partial\psi/\partial t - h^2\Delta\psi + \psi\int V(x-y)\big|\psi(y, t, h)\big|^2 dy = O(h^2),$$
$$\psi(x, 0, h) = \chi_0(x)e^{\frac{i}{h}S_0(x)},$$

где

$$\big\|O(h^2)\big\|_{L^2} \leqslant h^2 \cdot c(t).$$

Доказательство. По лемме 12.2 книги [10] найдем

$$\int V(x-y)\big|\big[\mathscr{K}_\Lambda^{1/h}\chi_0\big](y, t)\big|^2 dy = \int V\big(x - X^0(q, t)\big)\chi_0^2(q)\,dq + O(h^2).$$

Обозначим эту функцию через $W(x, t, h)$.

Подставим функцию $\psi = \mathscr{K}^{1/h}\chi_0$ в уравнение (1.1). Используя теорему 11.1 гл. V книги [10], получим

$$\big[-ih\partial/\partial t - h^2\Delta + W(x, t, h)\big]\big[\mathscr{K}^{1/h}\chi_0\big](x, t) =$$
$$= (-ih)\Big[\mathscr{K}^{1/h}\frac{\partial\chi_0}{\partial t}\Big](x, t) + O(h^2) = O(h^2),$$

так как $\partial\chi_0/\partial t = 0$. Лемма доказана. ∎

Ниже, в § 3 будет доказано, что функция (1.18) является не только асимптотическим решением задачи (1.1), но и асимптотикой по модулю $O(h)$ точного решения этой задачи.

Теперь мы построим асимптотическое решение задачи (1.1) еще одним методом. Используем исчисление псевдодифференциальных операторов и его более общий вариант, разработанный в [10].

Решение задачи (1.1) при малых t будем искать в виде

$$\psi(x,\,t,\,h)=\widehat{T}(t)e^{\frac{i}{h}S_0(x)}\chi_0(x), \tag{4.19}$$

где

$$\widehat{T}(t)=\varphi(\overset{2}{x},\,\overset{1}{p},\,t)\exp\Big\{\frac{i}{h}S(\overset{2}{x},\,\overset{1}{p},\,t)\Big\}. \tag{1.19$'$}$$

Для того чтобы предъявить функции S и φ, рассмотрим следующую задачу Коши для уравнения Власова – Гамильтона:

$$\frac{\partial^2 X(q,\,\omega,\,t)}{\partial t^2}+2\int\frac{\partial V}{\partial x}\big(X(q,\,\omega,\,t)-X(y,\,\nabla S_0(y),\,t)\big)\chi_0^2(y)\,dy=0,$$
$$X(q,\,\omega,\,0)=q,\quad \frac{\partial X}{\partial t}(q,\,\omega,\,0)=2\omega. \tag{4.20}$$

Здесь $q,\,\omega\in\mathbf{R}^n$.

Пусть $e_0\in C_0^\infty(\mathbf{R}^{2n})$ — любая вещественная финитная функция, тождественно равная единице в окрестности следующего компакта в $\mathbf{R}^{2n}$:

$$Q=\big\{(x,\,p)\mid p=\nabla S_0(x),\,x\in\operatorname{supp}\chi_0\big\}.$$

В силу леммы 2.1 гл. 1, существует глобальное решение $X(q,\,\omega,\,t)$ задачи (1.20). Найдем такое $T_0>0$, что $\mathcal{D}X/\mathcal{D}z\geqslant\varepsilon>0$ при $(q,\,\omega)\in\in\operatorname{supp}e_0$, $t\in[0,\,T_0]$. На отрезке $[0,\,T_0]$ построим две функции:

$$S(x,\,p,\,t)=p(q-x)+\int_0^t d\tau\Big(\frac{1}{4}\Big|\frac{\partial X}{\partial\tau}(q,\,p,\,\tau)\Big|^2-$$
$$-\int V\big(X(q,\,p,\,\tau)-X\big(y,\,\nabla S_0(y),\,\tau\big)\big)\chi_0^2(y)\,dy\Big)=X^{-1}(x,\,p,\,t),$$
$$\varphi(x,\,p,\,t)=e_0\Big(x+\frac{\partial S}{\partial p}(x,\,p,\,t),\,p\Big)\times\det\Big\|\delta_{ij}+\frac{\partial^2 S}{\partial x_i\partial p_j}(x,\,p,\,t)\Big\|^{1/2}, \tag{4.21}$$

где $q=X^{-1}(x,\,p,\,t)$ есть решение уравнения $X(q,\,p,\,t)=x$.

Лемма 2. *Функция ψ, заданная на отрезке $t \in [0, T_0]$ формулами* (1.19), (1.19′), *где φ и S определены равенствами* (1.21), *является асимптотическим решением задачи* (1.1) *по модулю $O(h^2)$.*

Доказательство. По теореме 1.8 гл. V книги [10] имеем

$$\widehat{T}(t)^* \circ \rho(x) \circ \widehat{T}(t) = \rho\Big(\frac{X(\overset{2}{x}, \overset{3}{p}, t) + X(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, t)}{2}\Big) e_0(\overset{2}{x}, \overset{3}{p}) e_0(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}) + O(h^2)$$

для любой функции $\rho \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. Отсюда получим

$$\int V(x' - x)\big|\psi(x, t, h)\big|^2 dx =$$
$$= \int \Big[e^{-\frac{i}{h}S_0(x)}\chi_0(x)\Big] V\Big(x' - \frac{X(\overset{2}{x}, \overset{3}{p}, t) + X(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, t)}{2}\Big) \times$$
$$\times\, e_0(\overset{2}{x}, \overset{3}{p}) e_0(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}) e^{\frac{i}{h}S_0(x)} \chi_0(x)\, dx + O(h^2).$$

Здесь $x' \in \mathbf{R}^n$ — параметр.

Используя формулу коммутации с экспонентой [10], имеем

$$\int V(x' - x)\big|\psi(x, t, h)\big|^2 dx =$$
$$= \int \chi_0(x) V\left(x' - \frac{X\Big(\overset{2}{x}, -ih\overset{3}{\frac{\partial}{\partial x} + \nabla S_0}, t\Big) + X\Big(\overset{2}{x}, -ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x} + \nabla S_0}, t\Big)}{2}\right) \times$$
$$\times\, e_0\Big(\overset{2}{x}, -ih\frac{\partial}{\partial x} + \nabla S_0\Big) e_0\Big(\overset{2}{x}, -ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x} + \nabla S_0}\Big) \chi_0(x)\, dx. \quad (4.22)$$

Для любого символа $f \in S^\infty(\mathbf{R}^n)$ справедливо разложение [10]:

$$f\Big(-ih\frac{\partial}{\partial x} + \nabla S_0\Big) = f(\nabla S_0) + (-ih)\Big[\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_k}(\nabla S_0)\frac{\partial}{\partial x_k} +$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial p_k \partial p_j}(\nabla S_0)\frac{\partial^2 S_0}{\partial x_k \partial x_j}\Big] + O(h^2). \quad (4.23)$$

С помощью этой формулы разложим подынтегральное выражение в (1.22) по степеням параметра h. При этом ограничимся точностью $O(h^2)$. Член, содержащий множитель $(-ih)$, в этом разложении будет отсутствовать, в силу вещественности функций V, e_0, χ_0

и правой части (1.22). Таким образом, получим

$$\int V(x'-x)\big|\psi(x,\,t,\,h)\big|^2dx = \int \chi_0(x)^2 V\big(x' - X\big(x,\,\nabla S_0(x),\,t\big)\big)\times \\ \times e_0^2\big(x,\,\nabla S_0(x)\big)dx + h^2\cdot O(1). \quad (1.23')$$

Остаток $O(1)$ здесь представляет собой гладкую финитную функцию, все производные которой ограничены при $h\to 0$. Функцию e_0^2 в (1.23′) можно заменить единицей, так как $e_0\big(x,\,\nabla S_0(x)\big)=1$ при $x\in \operatorname{supp}\chi_0$.

Подставим теперь функцию ψ, заданную формулой (1.19), в уравнение (1.1). Для того чтобы эта функция удовлетворяла уравнению, достаточно, чтобы было выполнено равенство

$$-ih\frac{d\widehat{T}(t)}{dt} + H(\overset{2}{x},\,\overset{1}{p},\,t)\circ\widehat{T}(t) = 0, \qquad (4.24)$$

где

$$H(x,\,p,\,t) \overset{\mathrm{def}}{=} p^2 + \int V(x-y)\big|\psi(y,\,t,\,h)\big|^2dy.$$

По формуле композиции [10]

$$\big[H(\overset{2}{x},\,\overset{1}{p},\,t)\big]\cdot\Big[\Big(e^{\frac{i}{h}S}\varphi\Big)(\overset{2}{x},\,\overset{1}{p},\,t)\Big] = \Big(e^{\frac{i}{h}S}Q\Big)(\overset{2}{x},\,\overset{1}{p},\,t),$$

где

$$Q(x,\,p,\,t) = e^{-\frac{i}{h}S(x,p,t)}H(\overset{2}{x},\,p-\mathrm{ih}\,\overset{1}{\partial/\partial x},\,t)e^{\frac{i}{h}S(x,p,t)}\varphi(x,\,p,\,t) = \\ = H(\overset{2}{x},\,p+\nabla S\overset{1}{-}\mathrm{ih}\,\partial/\partial x,\,t)\varphi(x,\,p,\,t).$$

Поэтому уравнение (1.24) выполняется, если

$$-ih\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial t}\cdot\varphi + Q = 0. \qquad (4.25)$$

Функцию Q разложим в ряд по степеням h, используя (1.2.3):

$$Q = H(x,\,p+\nabla S,\,t)\varphi + (-ih)\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_k}(x,\,p+\nabla S,\,t)\frac{\partial\varphi}{\partial x_k} + \\ + \frac{(-ih)}{2}\sum_{k,j=1}^{n}\frac{\partial^2 H}{\partial p_k\partial p_j}(x,\,p+\nabla S,\,t)\frac{\partial^2 S}{\partial x_k\partial x_j}\varphi + O(h^2).$$

Учитывая явный вид функции H, получим из (1.25) следующее уравнение:

$$\Big(\frac{\partial S}{\partial t}+|p+\nabla S|^2+\int\chi_0^2(y)V\big(x-X(y,\nabla S_0(y),t)\big)dy\Big)\varphi+$$
$$+(-ih)\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+2(p+\nabla S)\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\Delta S\cdot\varphi\Big)+O(h^2)=0.$$

Функции S и φ, определенные формулами (1.21), таковы, что в левой части этого уравнения остается единственное ненулевое слагаемое $O(h^2)$ (подробное доказательство можно найти в [10]). Лемма доказана. ■

Замечание. Применяя метод стационарной фазы, легко доказать, что функция (1.19), построенная с помощью операторного метода, совпадает в рассматриваемом частном случае по $\mathrm{mod}\,O(h)$ с найденной ранее в теореме 1.1 асимптотикой. Преимущество представления (1.19) состоит в том, что оно почти без изменений переносится на более сложные задачи, в которых начальные данные не имеют такого простого вида, как в (1.1). Подробнее мы изучим этот вопрос в § 3.

В заключение этого параграфа рассмотрим пример асимптотического решения задачи на собственные значения для нелинейного уравнения квантовой механики.

Пример 12. Задача состоит в следующем: требуется найти число λ и функцию $\psi\in H_2^0(\mathbf{R})$ такие, что

$$\|\psi\|_{L^2}=1, \tag{4.26}$$

$$-\frac{h^2}{2}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x)+\frac{1}{2}\psi(x)\int(x-y)^2\varkappa(y)\big|\psi(y)\big|^2dy=\lambda\psi(x). \tag{4.27}$$

Здесь $h>0$ — параметр, $x,\,y\in\mathbf{R}$, $\varkappa\in C(\mathbf{R})'$ — некоторая плотность меры на $\mathbf{R}$, причем $\varkappa(-x)=\varkappa(x)$, $\operatorname{Im}\varkappa=0$.

Уравнение (1.27) представляет собой уравнение самосогласованного квантового осциллятора. Мы решим это уравнение с точностью до $O(h^2)$, точнее мы найдем серию чисел $\lambda_m=\lambda_m(h)$, $m=0,1,2,\ldots$, и функций $\psi_m(x,h)$ для которых уравнения (1.26), (1.27) выполнены с точностью до $O(h^2)$.

Как и в линейном случае [10], решение будем искать в виде

$$\psi=\mathscr{K}_\Lambda^{1/h}\varphi,$$

где Λ — некоторое лагранжево многообразие (т. е гладкая кривая) на плоскости $\mathbf{R}^2$, $\mathscr{K}_\Lambda^{1/h}$ — канонический оператор на Λ, φ — гладкая функция на Λ. Многообразие Λ подберем так, чтобы оно было должным образом квантованяо [10] и инвариантпо относительпо канонических преобразований $Z[t]$, порождаемых уравнением Власова – Гамильтона.

Пусть кривая Λ задается уравпениями $\Lambda = \{(x, p) \mid x = x(\alpha), p = p(\alpha)\}$, где α — параметр. В силу унитарности канонического оператора [10], мы имеем

$$\int (x-y)^2 \varkappa(y) \left|(\mathscr{K}_\Lambda^{1/h}\varphi)(y)\right|^2 dy = \int \bigl(x-(x(\alpha)\bigr)^2 \varkappa\bigl(x(\alpha)\bigr) \left|\varphi(\alpha)\right|^2 d\alpha + O(h^2)$$

и

$$\int \left|(\mathscr{K}_\Lambda^{1/h}\varphi)(y)\right|^2 dy = \int \left|\varphi(\alpha)\right|^2 d\alpha + O(h^2),$$

где $d\alpha$ — мера на Λ, участвующая в определепии канопического оператора [10]. Подставлнн эти выражения в (1.26) и (1.27), пайдем $\varphi = \sqrt{\dfrac{1}{\operatorname{mes}\Lambda}}$ и выпишем систему уравнений Гамильтона, отвечающую преобразованному уравнению (1.27):

$$\dot X = P,$$
$$\dot P = -\frac{1}{\operatorname{mes}\Lambda} \int\limits_\Lambda \bigl(X - x(\alpha)\bigr) \varkappa\bigl(x(\alpha)\bigr) d\alpha.$$

Поскольку кривая $\bigl(X(t), P(t)\bigr)$ должпа совпадать с Λ, то естествепно считать, что $\alpha = t$, $d\alpha = dt$ и $x(\alpha) = X(t)$, $p(\alpha) = P(t)$, где $X(t)$, $P(t)$ — периодические функции с некоторым периодом T. Таким образом, многообразие Λ мы ищем в виде

$$\Lambda = \{(x, p) \mid x = X(t), p = P(t)\}, \tag{4.28}$$

где X, P — периодическое с периодом T решение системы уравнений Власона – Гамильтона

$$\dot X(t) = P(t),$$
$$\dot P(t) = -\frac{1}{T} \int\limits_0^T \bigl(X(t) - X(\tau)\bigr) \varkappa\bigl(X(\tau)\bigr)\, d\tau.$$

Отсюда получаем уравнение для функции X:

$$\ddot{X} + \omega^2 X = \gamma, \quad X(t+T) = X(t), \tag{4.29}$$

где $\omega = \omega[X] \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{1}{T}\int\limits_0^T \varkappa(X(\tau))\,d\tau\right)^{1/2}$,

$$\gamma = \gamma[X] \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{T}\int\limits_0^T X(\tau)\varkappa(X(\tau))\,d\tau. \tag{4.30}$$

Функция Гамильтона, отвечающая дифференциальному уравнению (1.29), имеет вид

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2} + \frac{1}{2T}\int\limits_0^T (x - X(\tau))^2 \varkappa(X(\tau))\,d\tau.$$

В силу (1.27), мы должны потребовать, чтобы $H\big|_\Lambda = \lambda$, т. е. $H(X(t), P(t)) = \lambda$. Достаточно этого потребовать при $t = 0$:

$$\frac{1}{2}(\dot{X}(0))^2 + \frac{1}{2T}\int\limits_0^T (X(0) - X(\tau))^2 \varkappa(X(\tau))\,d\tau = \lambda. \tag{4.31}$$

Если уравнения (1.29) и (1.31) выполнены, многообразие Λ задано формулой (1.28) и на нем выполнены условия квантования (см. ниже), то функция

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{T}}(\mathscr{K}_\Lambda^{1/h} 1)(x)$$

удовлетворяет уравнениим (1.26), (1.27) с точностью до $O(h^2)$, т. е. является искомой асимптотикой собственной функции самосогласованного осциллятора.

Из (1.29) мы имеем

$$T = \frac{2\pi}{\omega},$$

$$X(t) = r\cos(\omega t) + \frac{\gamma}{\omega^2},$$

где $r > 0$ — некоторая константа. Подставим эти выражения в формулы (1.30). Получим

$$\omega^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varkappa\Big(r\cos t + \frac{\gamma}{\omega^2}\Big)\,dt,$$

$$0 = \int_0^{2\pi} \cos t \cdot \varkappa\Big(r\cos t + \frac{\gamma}{\omega^2}\Big)\,dt.$$

Поскольку $\varkappa$, по условию, является четной функцией, то последнее равенство будет выполнено, если положить

$$\gamma = 0.$$

Остаются условие

$$\omega^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varkappa(r\cos t)\,dt \tag{4.32}$$

и условие (1.31), которое теперь приобретает следующий вид:

$$\omega^2 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2 t\varkappa(r\cos t)\,dt = \frac{2\lambda}{r^2}. \tag{4.33}$$

Помимо этих двух уравнений, для определения неизвестных величин ω, r, λ у нас имеется еще условие квантования, которому должно удовлетворять многообразие Λ для того, чтобы на нем существовал канонический оператор $\mathscr{K}_\Lambda^{1/h}$. Это условие выглядит следующим образом:

$$\int_\Lambda p\,dx = (2m+\nu)\pi h,$$

где $m = 0, 1, 2, \ldots$, ν — индекс (в смысле [10]) цикла, образованного многообразием Λ. В нашем случае Λ есть эллипс

$$x = X(t) = r\cos(\omega t), \quad p = P(t) = -r\omega\sin(\omega t)$$

и поэтому $\nu = 1$. Следовательно, условие квантования выглядит так:

$$r^2\omega^2 = (2m+1)h. \tag{4.34}$$

Из уравнений (1.32), (1.33), (1.34) найдем

$$\lambda \equiv \lambda_m = \Big(m+\frac{1}{2}\Big)h + g\Big(f^{-1}\Big(\Big(m+\frac{1}{2}\Big)h\Big)\Big), \tag{4.35}$$

где

$$g(r) = \frac{r^2}{4\pi}\int_0^{2\pi}(\cos^2 t)\varkappa(r\cos t)\,dt,$$

$$f(r) = \frac{r^2}{4\pi}\int_0^{2\pi}\varkappa(r\cos t)\,dt,$$

и предполагается, что отображение $r \to f(r)$ имеет обратное f^{-1} при $r > 0$.

Формула (1.35) дает серию асимптотических собственных значений уравнения (1.27), а соответствующие асимптотические собственные функции имеют вид

$$\psi(x) = \psi_m(x, h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\mathscr{K}^{1/h}_{\Lambda(m,h)}1)(x), \tag{4.36}$$

где $\Lambda(m, h)$, $m = 0, 1, 2, \ldots,$ — серия эллипсов в плоскости (x, p), заданных уравнениими

$$\frac{x^2}{f^{-1}\Big(\Big(m+\frac{1}{2}\Big)h\Big)^2} + \frac{p^2}{2\Big(m+\frac{1}{2}\Big)h} = 1.$$

Канонический оператор в формуле (1.36) строится по мере dt, где t пробегает $[0, 2\pi]$ и параметризует эллипс $\Lambda(m, h)$ по формуле

$$x = f^{-1}\Big(\Big(m+\frac{1}{2}\Big)h\Big)\cdot\cos t.$$

§ 2. Асимптотика функции плотности

Мы построили в предыдущем параграфе асимптотическое решение унитарно-нелинейного уравнения (1.1) с точностью до $O(h^2)$.

Построение тем же методом асимптотики с точностью до $O(h^N)$, где $N > 2$, наталкивается на трудности при сшивании локальных решений в окрестностях фокальных точек. Мы укажем здесь путь, позволяющий обойти эти трудности и легко построить асимптотическое решение унитарно-нелинейного уравнения с любой точностью $O(h^N)$.

Постановка задачи такова. Рассматривается задача Коши для UN-оператора:

$$
\begin{gathered}
-ih\frac{\partial\psi}{\partial t} + H[\rho_\psi, \mathrm{id}]\Big(\overset{2}{x}, -ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}\Big)\psi = 0,\\
\psi\big|_{t=0} = \psi_{0,h}.
\end{gathered}
\tag{4.37}
$$

(Обозначения см. в § 2, гл. II; $x \in \mathbf{R}^n$.) Предполагается, что начальная функция $\psi_{0,h}$ такова, что отвечающая ей функция плотности $\rho_{\psi_{0,h}}$ разлагается при $h \to 0$ в асимптотический ряд по степеням h, коэффициенты которого $F_0^{(j)}$ суть обобщенные функции па $\mathbf{R}^{2n}$:

$$
\rho_{\psi_{0,h}} = F_0 + (-ih)F_0^{(1)} + (-ih)^2F_0^{(2)} + \dots
\tag{4.38}
$$

Требуется построить гладкую функцию ψ_N, отличающуюся от решепий ψ задачи (2.1) яа $O(h^N)$. Схема построения ψ_N такова:

(I). Рассматриваем задачу Коши для функции плотности ρ_ψ, отвечающей решению ψ. Эта задача, как было показано в [9] (§ 1, гл. II), имеет вид

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial\rho_\psi}{\partial t} + \frac{i}{h}\Big\{H[\rho_\psi, \mathrm{id}]\Big(\overset{2}{x}, p - ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}\Big) - H[\rho_\psi, \mathrm{id}]\Big(x - ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial p}}, \overset{2}{p}\Big)\Big\}\rho_\psi = 0,\\
\rho_\psi\big|_{t=0} = \rho_{\psi_{0,h}}.
\end{gathered}
\tag{4.39}
$$

При $h = 0$ задача (2.3) переходит в задачу Коши для уравнения Власова – Лиувилля:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial F}{\partial t} + \Big\langle J\frac{\partial H[F, \mathrm{id}]}{\partial z}, \frac{\partial F}{\partial z}\Big\rangle = 0,\\
F\big|_{t=0} = F_0,
\end{gathered}
\tag{4.40}
$$

где F_0 — первый коэффициепт в разложении (2.2).

Естественно искать решение задачи (2.3) в виде асимптотического ряда по степеням h:

$$\rho_\psi = F + (-ih)F^{(1)} + (-ih)^2 F^{(2)} + \dots \tag{4.41}$$

Уравнения, которые получатся для коэффициентов $F^{(j)}$, легко решаются.

(II). После того как функция ρ_ψ вычислена с точностью до $O(h^N)$: $\rho_\psi = \rho^{(N)} + O(h^N)$, можно построить символ $H_N \stackrel{\text{def}}{=} H[\rho^{(N)}, \mathrm{id}]$, который будет отличаться от линейного символа UN-оператора задачи (2.1) в состоянии ψ на величину порядка $O(h^N)$. Таким образом, с точностью до $O(h^N)$ задача (2.1) заменится па следующую линейную задачу:

$$-ih\frac{\partial\psi}{\partial t} + H_N\Big(\overset{2}{x}, -ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}, t\Big)\psi = 0, \quad \psi\big|_{t=0} = \psi_{0,h}. \tag{4.42}$$

Решение задачи (2.6) строится методом канонического оператора с любой точностью $O(h^N)$. Полученная в результате функция ψ_N и является искомой асимптотикой решения задачи (2.1). Доказательство этого утверждепия будет приведено в данной главе.

Первый параграф мы начнем с примера явного построения асимптотики вида (2.5) для функции плотности нелинейного уравнения квантовой механики.

Пример 13. Пусть ψ — решение задачи Коши (1.1) и

$$\rho_\psi(x, p, t) = \psi(x, t)\overline{\widetilde{\psi}(p, t)}e^{-\frac{i}{h}xp}(2\pi h)^{-n/2}$$

— соответствующая функция плотности. Для того чтобы вычислить асимптотическое разложение ρ_ψ при $h \to 0$ в любой момент времени, получим вначале такое разложение в момент $t = 0$. В силу [9] (лемма 1.3 гл. II), мы имеем

$$(f, \rho_{\psi_{0,h}}) = (\widehat{f}\psi_{0,h}, \psi_{0,h}), \tag{4.43}$$

где

$$\widehat{f} = f(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}), \quad f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{2n})$$

и начальная функция $\psi_{0,h}$ имеет вид $\psi_{0,h} = e^{\frac{i}{h}S_0}\chi_0$. Воспользуемся следующей формулой коммутации псевдодифференциального оператора с экспонентой [10]:

$$f(\overset{2}{x}, \overset{1}{p})e^{\frac{i}{h}S_0}\chi_0 = e^{\frac{i}{h}S_0}\left(\sum_{k=0}^{N-1}(-ih)^k L_k\Big(\overset{2}{x}, \overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}\Big)\chi_0+(-ih)^N\widehat{Q}_N\chi_0\right), \quad (4.44)$$

где

$$L_k(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=k}^{2k}\sum_{|\beta|=0}^{k}\frac{\partial^\alpha f}{\partial p^\alpha}\Big(x, \frac{\partial S_0}{\partial x}(x)\Big)\Phi_{\alpha,\beta}(x)\xi^\beta,$$

$\Phi_{\alpha,\beta}$ — вещественные полиномы от производных функции S_0, $\xi^\beta = \xi_1^{\beta_1} : \ldots : \xi_k^{\beta_k}$; остаток $\widehat{Q}_N$ имеет оценку

$$(\chi_0, \widehat{Q}_{N\chi_0})_{L^2(\mathbf{R}^n)} \leqslant \text{const}.$$

Из формул (2.7), (2.8) мы получаем

$$(f, \rho_{\psi_{0,h}}) = \sum_{k=0}^{N-1}(ih)^k\iint F_0^{(k)}(x, p)f(x, p)\,dx\,dp + (ih)^N(\chi_0, \widehat{Q}_N\chi_0),$$

где обобщенные функции $F_0^{(k)}$ заданы равенствами:

$$F_0^{(k)}(x, p) = \sum_{|\alpha|=k}^{2k}\sum_{|\beta|=0}^{k}(-1)^{|\alpha|+k}\Phi_{\alpha,\beta}(x)\chi_0(x)\frac{\partial^\beta\chi_0(x)}{\partial x^\beta}\delta^{(\alpha)}\Big(p-\frac{\partial S_0}{\partial x}(x)\Big). \quad (4.45)$$

Таким образом, вычислены все коэффициенты разложения (2.2). Теперь вычислим разложение функции ρ_ψ при любом t. Уравнение (2.3) для ρ_ψ в рассматриваемом случае имеет вид

$$\frac{\partial\rho_\psi}{\partial t} + 2p\frac{\partial\rho_\psi}{\partial x} - ih\Delta_x\rho_\psi + \\ + \left(\iint\frac{i}{h}\Big[V(x-y) - V\Big(x-y-ih\frac{\partial}{\partial p}\Big)\Big]\rho_\psi(y, \xi, t)\,dy\,d\xi\right)\rho_\psi = 0.$$

Подставим сюда разложение (2.5) и получим уравнение для коэффициентов F, $F^{(1)}$, $F^{(2)}, \ldots$ Эти уравнения имеют следующий вид:

при $k = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + 2p\frac{\partial F}{\partial x} = \left(\iint \frac{\partial V}{\partial x}(x-y)F(y,\,\xi,\,t)\,dy\,d\xi\right)\frac{\partial F}{\partial p} = 0 \tag{4.46}$$

и при $k \geqslant 1$

$$\frac{\partial F^{(k)}}{\partial t} + 2p\frac{\partial F^{(k)}}{\partial x} - \left(\iint \frac{\partial V}{\partial x}(x-y)F(y,\,\xi,\,t)\,dy\,d\xi\right)\frac{\partial F^{(k)}}{\partial p} - \\ - \left(\iint \frac{\partial V}{\partial x}(x-y)F^{(k)}(y,\,\xi,\,t)\,dy\,d\xi\right)\frac{\partial F}{\partial p} = M_k. \tag{4.47}$$

Здесь M_k — функция, зависящая от коэффициентов F и $F^{(j)}$ с номерами $j < k$. Явный вид M_k следующий:

$$M_k(x,\,p,\,t) = \\ = \sum_{m=0}^{k-1}\sum_{|\alpha|=k+1-m}\frac{1}{\alpha!}\left(\iint \frac{\partial^\alpha V(x-y)}{\partial x^\alpha}F^{(m)}(y,\xi,t)\,dy\,d\xi\right)\frac{\partial^\alpha F^{(0)}(x,p,t)}{\partial p^\alpha} + \\ + \sum_{l=1}^{k-1}\sum_{m=0}^{k-l}\sum_{|\alpha|=k+1-l-m}\frac{1}{\alpha!}\left(\iint \frac{\partial^\alpha V(x-y)}{\partial x^\alpha}F^{(m)}(y,\xi,t)\,dy\,d\xi\right)\cdot \\ \cdot\frac{\partial^\alpha F^{(l)}(x,p,t)}{\partial p^\alpha} - \Delta_x F^{(k-1)}(x,\,p,\,t). \tag{4.48}$$

Здесь $F^{(m)} \equiv F$ при $m = 0$. Начальные условия для функций $F^{(k)}$ получаем из (2.9): $F^{(k)}\big|_{t=0} = F_0^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Цепочка уравнений (2.10), (2.11) с такими начальными условиями решается следующим образом.

Для уравнения Власова (2.10) с начальным условием $F\big|_{t=0} = \left(\chi_0(x)\right)^2\delta\left(p - \frac{\partial S_0}{\partial x}(x)\right)$ выписываем уравнения характеристик, т. е. уравнения Власова – Гамильтона (1.15):

$$\dot X = 2P, \qquad X\big|_{t=0} = x,$$

$$\dot P = -\int \frac{\partial V}{\partial x}\left(X - X\left(y,\,\frac{\partial S_0(y)}{\partial y},\,t\right)\right)\chi_0^2(y)\,dy, \quad P\big|_{t=0} = p.$$

Пусть $Z(x, p, t) = \big(X(x, p, t), P(x, p, t)\big)$ — решение этой задачи. Преобразование $Z[t]\colon (x, p) \to Z(x, p, t)$, как было показано в § 2 гл. I, является каноническим. Решив уравнения

$$x = X(x_0, p_0, t), \quad p = P(x_0, p_0, t)$$

относительно x_0, p_0, мы вычислим обратное преобразование $Z[t]^{-1}$: $(x, p) \to \big(x_0(x, p, t), p_0(x, p, t)\big)$. Используя теорему 2.2 гл. I, получаем решение $F(x, p, t)$ уравнения Власова (2.10):

$$F(x, p, t) = \chi_0^2\big(x_0(x, p, t)\big)\delta\Big(p_0(x, p, t) - \frac{\partial S_0}{\partial x}\big(x_0(x, p, t)\big)\Big). \tag{4.49}$$

Далее, последовательно решаем цепочку уравнений (2.11) нри $k = 1, 2, \ldots$ Положим

$$F^{(k)}(x, p, t) = f^{(k)}\big(x_0(x, p, t), p_0(x, p, t), t\big)$$

и получим для функций $f^{(k)}$ уравнение типа Вольтерра:

$$f^{(k)}(x, p, t) = \int\limits_0^t d\tau \frac{\partial F}{\partial p}\big(X(x, p, \tau), P(x, p, \tau), \tau\big)\times$$
$$\times \iint \frac{\partial V}{\partial x}\big(X(x, p, \tau) - X(y, \xi, \tau)\big) f^{(k)}(y, \xi, \tau)dy\, d\xi + M_k'(x, p, t), \tag{4.50}$$

где $k = 1, 2, \ldots, 2N$,

$$M_k'(x, p, t) = \int\limits_0^t M_k\big(X(x, p, \tau), P(x, p, \tau), \tau\big)\, d\tau + F_0^{(k)}(x, p).$$

Решения $f^{(k)}$ цепочки уравнений (2.14) являются обобщенными функцинми. Существование таких решений в пространстве обобщенных функций $S_{-\infty}(\mathbf{R}^{2n})$ будет доказано в теореме 2.1. Сейчас мы покажем, как в реальных задачах решаются уравнения вида (2.14).

Заметим, что начальные условия $F_0^{(k)}$ имеют, в силу (2.9), следующий вид:

$$F_0^{(k)}(x, p) = \sum_{|\alpha|=k}^{2k} \delta^{(\alpha)}\Big(p - \frac{\partial S_0(x)}{x}\Big)U_{0\alpha}(x),$$

где $U_{0\alpha} \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. Будем искать $f^{(k)}$ в виде суммы

$$f^{(k)}(x, p, t) = \sum_{|\alpha|=0}^{\nu k} \delta^{(\alpha)}\Big(p - \frac{\partial S_0(x)}{\partial x}\Big) U_\alpha(x, t), \quad \nu_k = (k+1)^2. \quad (4.51)$$

Найдем функции U_α.

Подставив выражение (2.15) для $f^{(k)}$ в формулу (2.12), убедимся, что функции M_k имеют вид такой же суммы:

$$M_k(X(x, p, t), P(x, p, t), t) \sum_{|\alpha|=0}^{\nu k} \delta^{(\alpha)}\Big(p - \frac{\partial S_0(x)}{\partial x}\Big) m_\alpha(x, t).$$

Здесь функции m_α известны, если известны функции $f^{(j)}$ при $j < k$. Подставим выписанные выражения для $f^{(k)}$ и M_k в уравнение (2.14) и приравняем коэффициенты, стоящие слева и справа при одинаковых производных от δ-функции. Получим систему интегральных уравнений Вольтерра следующего вида:

$$U_\alpha(x, t) = \int_0^t d\tau \int \sum_{|\beta|=0}^{\nu k} A_{\alpha,\beta}(x, x', \tau) U_\beta(x', \tau) dx' +$$
$$+ \int_0^t m_\alpha(x, \tau) d\tau + U_{0\alpha}(x), \quad (4.52)$$

где $|\alpha| = 0, 1, \ldots, \nu_k$, функции $A_{\alpha,\beta}$ — гладкие вещественные и явно вычисляемые из (2.14); кроме того, $A_{\alpha,\beta} \in S(\mathbf{R}^{2n}_{x,x'}) \otimes C^\infty(\mathbf{R}_t)$.

Функции на стандартпым образом вычисляются из (2.16) итерациями; при этом $U_\alpha \in S(\mathbf{R}^n_x) \otimes C^\infty(\mathbf{R}_t)$. Таким образом, мы решаем уравнения (2.14) последовательно: при $k=1$, при $k=2, \ldots$, при $k=2N$ и решение $f^{(k)}$ имеет вид (2.15).

Таким образом, будут вычислены все коэффициенты разложения (2.5), и нелинейное уравнение Шрёдингера (1.1) с точностью до $O(h^N)$ приобретает следующий линейный вид:

$$-ih\frac{\partial\psi(x, t)}{\partial t} - h^2\Delta\psi(x, t) + \bigg(\int V\Big(x - X\Big(y, \frac{\partial S_0}{\partial y}(y), t\Big)\chi_0^2(y)\, dy\Big)\bigg) \times$$
$$\times\, \psi(x, t) + \sum_{k=1}^{N} (-ih)^k \iint V\big(x - X(y, \xi, t)\big) f^{(k)}(y, \xi, t)\, dy\, d\xi\, \psi(x, t) = 0.$$

Теперь мы вернемся к общим унитарно-нелинейным операторам и установим, прежде всего, что функция плотности ρ_ψ, удовлетворяющая задаче (2.3), в пределе при $h \to 0$ переходит в решение уравнения Власова – Лиувилля.

Пусть задано отображение

$$H\colon S_{-\infty}(\mathbf{R}^{2n}) \times C^\infty(\mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}) \times [0, 1] \to S^\infty(\mathbf{R}^{2n})$$

такое, что при $h = 0$ отображение $H_0\colon (f, v) \to H[f, v, h]\big|_{h=0}$ из $S_{-\infty}(\mathbf{R}^{2n}) \times C^\infty(\mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n})$ в $S^\infty(\mathbf{R}^{2n})$ является отображением Гамильтона. Кроме того, предположим, что отображение

$$(f, h) \to H[f, \mathrm{id}, h]$$

из $S_{-\infty}(\mathbf{R}^{2n})\times[0, 1]$ в $S^\infty(\mathbf{R}^{2n})$ является гладким и для любой функции f, имеющей вид функции плотности $f = \rho_\varphi$, где $\varphi \in S(\mathbf{R}^n)$, оператор $H[\rho_\varphi, \mathrm{id}, h](\overset{2}{x}, \overset{1}{p})$ самосопряжен в $L^2(\mathbf{R}^n)$ при любом $h \in [0, 1]$.

Определим UN-оператор

$$\mathscr{H}[\psi] = H[\rho_\psi, \mathrm{id}, h]\Big(\overset{2}{x}, -ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}\Big)\psi$$

и рассмотрим задачу Коши

$$-ij\frac{\partial\psi}{\partial t} + \mathscr{H}[\psi] = 0, \quad \psi\big|_{t=0} = \psi_{0,h}, \tag{4.53}$$

где $\psi_{0,h} \in S(\mathbf{R}^n)$.

Теорема 2. *Пусть выполнены сформулированные выше условия на отображение H, и пусть существует вещественная функция $F_0 \in \in S_{-\infty}(\mathbf{R}^{2n})$ такая, что $\rho_{\psi_{0,h}} \to F_0$ в $S_{-\infty}(\mathbf{R}^{2n})$ при $h \to 0$, а пара (F_0, H_0) удовлетворяет условиям* (A), (B) § 2 *гл.* I. *Пусть, кроме того, решение $\psi(t)$ задачи* (2.17) *существует в $S(\mathbf{R}^n)$ при $t \in [0, T]$ и*

$$\exists_S \forall l \sup_{t\in[0,T]} \sup_{h\in[0,1]} \big\|\rho_{\psi(t)}\big\|_{H^{-l}_{-s}(\mathbf{R}^n)} < \infty.$$

Тогда функция плотности $\rho_{\psi(t)}$ сходится при $h \to 0$ в пространстве $S_{-\infty}(\mathbf{R}^{2n})$ к решению $F(t)$ задачи Коши для уравнения Власова – Лиувилля

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \Big\langle J\frac{\partial H_0[F, \mathrm{id}]}{\partial z}, \frac{\partial F}{\partial z}\Big\rangle = 0, \quad F\big|_{t=0} = F_0, \tag{4.54}$$

равномерно по $t \in [0, T]$.

Как было показано в [11], условиям этой теоремы удовлетворяет унитарно-нелинейный оператор уравнения квантовой механики ([9], III, § 1). Таким образом, получаем

Следствие 1. *Пусть вещественные функции V_0, V ограничены на* $\mathbf{R}^n$ *со всеми производными, а функция $\psi_{0,h} \in S(\mathbf{R}^n)$ такова, что $\rho_{\psi_{0,h}} \to F_0$ при $h \to 0$ в пространстве $S_{-\infty}(\mathbf{R}^{2n})$, причем* $\operatorname{Im} F_0 = 0$. *Тогда функция плотности $\rho_{\psi(t)}$, отвечающая решению задачи Коши*

$$-ih\frac{\partial\psi(x,\,t)}{\partial t} - h^2\Delta\psi(x,\,t) + V_0(x)\psi(x,\,t) +$$

$$+\,\psi(x,\,t)\int V(x-y)\big|\psi(y,\,t)\big|^2 dy = 0, \quad \psi(x,\,0) = \psi_{0,h}(x), \qquad (4.55)$$

сходится при $h \to 0$ в пространстве $S_{-\infty}(\mathbf{R}^{2n})$ к решению задачи Коши для уравнения Власова

$$\frac{\partial F}{\partial t} + 2p\frac{\partial F}{\partial x} - \Big(\frac{\partial V_0(x)}{\partial x} + \iint \frac{\partial V(x-y)}{\partial x}F(y,\,\xi,\,t)\,dy\,d\xi\Big)\frac{\partial F}{\partial p} = 0,$$

$$F\big|_{t=0} = F_0,$$

равномерно на любом отрезке $t \in [0,\,T]$.

Как мы видели выше, в примере 2.1, если $\psi_{0,h} = e^{\frac{i}{h}S_0(x)}\chi_0(x)$, то $\rho_{\psi_{0,h}} \to F_0$ при $h \to 0$, где $F_0(x,\,p) = \big|\chi_0(x)\big|^2\delta\Big(p - \dfrac{\partial S_0(x)}{\partial x}\Big)$. Следовательно, функция плотности $\rho_{\psi(t)}$, отвечающая решению $\psi(t)$ задачи Коши (1.1), имеет пределом при $h \to 0$ обобщенную функцию

$$F(x,\,p,\,t) = \big|\chi_0\big(x_0(x,\,p,\,t)\big)\big|^2\delta\Big(p_0(x,\,p,\,t) - \frac{\partial S_0}{\partial x}\big(x_0(x,\,p,\,t)\big)\Big).$$

Здесь $x_0(x,\,p,\,t)$ и $p_0(x,\,p,\,t)$ — решения уравнений

$$x = X(x_0,\,p_0,\,t), \quad p = P(x_0,\,p_0,\,t),$$

где $P = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial X}{\partial t}$, а функция X удовлетворяет задаче (1.20). В частности, мы имеем

$$\int V(x-y)\big|\psi(y,\,t)\big|^2 dy \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \int V\big(x - X^0(y,\,t)\big)\big|\chi_0(y)\big|^2 dy,$$

где X^0 — решение задачи (1.15).

Перейдем теперь к доказательству теоремы 2.1.

Доказательство теоремы 2.1. Функция плотности $\rho_{\psi(t)}(x, p) \stackrel{\text{def}}{=}$ $\stackrel{\text{def}}{=} \rho(x, p, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{i}{h}\Big\{H[\rho, \mathrm{id}, h](\overset{2}{x}, p - ih\overset{1}{\partial}/\partial x) - \overline{H[\rho, \mathrm{id}, h]}(x - ih\overset{2}{\partial}/\partial p, \overset{1}{p})\Big\}\rho = 0. \tag{4.56}$$

В силу условий, наложенных на отображение H, оператор в фигурных скобках можно переписать следующим образом:

$$(-ih)\Big\langle J\frac{\partial H_0[\rho, \mathrm{id}]}{\partial z}(z), \frac{\partial}{\partial z}\Big\rangle + (-ih)^2\widehat{H}_1[\rho, h],$$

где $z = (x, p) \in \mathbf{R}^{2n}$,

$$\widehat{H}_1[\rho, h] \stackrel{\text{def}}{=} H_1[\rho, h]\Big(\overset{2}{z}, -ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial z}}\Big),$$
$$H_1\colon S_{-\infty}(\mathbf{R}^{2n}) \times [0, 1] \to S^{\infty}(\mathbf{R}^{4n})$$

— гладкое отображение. Следовательно, уравнение для функции ρ имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \Big\langle J\frac{\partial H_0[\rho, \mathrm{id}]}{\partial z}(z), \frac{\partial \rho}{\partial z}\Big\rangle + (-ih)\widehat{H}_1[\rho, h]\rho = 0. \tag{4.57}$$

Преобразуем теперь функцию $H_0[\rho, \mathrm{id}](z)$; разложим ее по формуле Тейлора в точке $\rho = F$, где $F = F(z, t)$ — решение задачи (2.18). Получим

$$H_0[\rho, \mathrm{id}](z) = H_0[F, \mathrm{id}](z) + \big(K_1[\rho](\rho - F)\big)(z), \tag{4.58}$$

где

$$K_1[\rho] = \int_0^t DH_0\big[\tau\rho + (1-\tau)F, \mathrm{id}\big]\, d\tau,$$

DH_0 — дифференциал отображения $\rho \to H_0[\rho, \mathrm{id}]$. Из формул (2.18), (2.21), (2.22) следует уравнение для разности $\rho - F$:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho - F) + \Big\langle J\frac{\partial H_0[F, \mathrm{id}]}{\partial z}, \frac{\partial(\rho - F)}{\partial z}\Big\rangle +$$
$$+ K[\rho](\rho - F) + (-ih)\widehat{H}_1[\rho, h]\rho = 0, \tag{4.59}$$

где оператор $K[\rho]$ действует по следующей формуле:

$$K[\rho]u \stackrel{\text{def}}{=} \left\langle J\frac{\partial}{\partial z}(K_1[\rho]u)(z),\, \frac{\partial\rho}{\partial z}\right\rangle.$$

Пусть $Z[y]$ — решение уравнения Власова–Гамильтона

$$\dot{Z}[t] = J\frac{\partial H_0}{\partial z}\left[F_0,\, Z[t]\right] \circ Z[t]$$

с начальным условием $Z[0] = \mathrm{id}$. В силу теоремы 2.1 гл. I, из условий доказываемой теоремы следует, что решение $Z[t] \in C^\infty(\mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n})$ существует при всех $t \in \mathbf{R}$ и является каноническим преобразованием фазового пространства $\mathbf{R}^{2n}$:

$$Z[t]\colon w \to Z(w,\, t).$$

Обозначим

$$u(w,\, t) = (\rho - F)\big(Z(w,\, t),\, t\big).$$

В силу (2.23), уравнение для функции и выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \widetilde{K}[\rho,\, t]u + (-ih)\widetilde{\Omega}[\rho,\, t,\, h] = 0, \tag{4.60}$$

где

$$\widetilde{K}[\rho,\, t] = Z[t]^* \circ K[\rho] \circ Z[t]^{-1*},$$
$$\widetilde{\Omega}[\rho,\, t,\, h] = Z[t]^* \widehat{H}_1[\rho,\, h]\rho.$$

Интегрируем (2.24) по dt и оценим норму $u(t)$ в шкале $H^l_S(\mathbf{R}^{2n})$. В результате получаем следующее утверждение: если ограничены нормы

$$\begin{aligned} \sup_{t\in[0,\,T]}\sup_{h\in[0,\,1]} \left\|\widetilde{K}[\rho,\, t]\right\|_{H^{-l}_{-s}\to H^{-l}_{-s}} &\leqslant \widetilde{k}_{l,s,T} < \infty,\\ \sup_{t\in[0,\,T]}\sup_{h\in[0,\,1]} \left\|\widetilde{\Omega}[\rho,\, t,\, h]\right\|_{H^{-l}_{-s}} &\leqslant \widetilde{\omega}_{l,s,T} < \infty, \end{aligned} \tag{4.61}$$

где $l,\, s > 0$, то имеет место оценка

$$\sup_{t\in[0,\,T]} \left\|u(t)\right\|_{H^{-l}_{-s}} \leqslant \widetilde{c}_{l,s,T}\Big(\sup_{t\in[0,\,T]} \left\|u(0)\right\|_{H^{-l}_{-s}} + h\Big),$$

где константа $\widetilde{c}_{l,s,T}$ зависит только от чисел $\widetilde{k}_{l,s,T}$, $\widetilde{\omega}_{l,s,T}$, стоящих в оценках (2.25). Поскольку $Z[t] \in C^{(k)}(\mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n})$ при любом $k = 0, 1, 2, \ldots$ (теорема 2.1 гл. I), то справедливы оценки

$$\|\rho(t) - F(t)\|_{H^{-l}_{-s}} \leqslant a_{l,s,t}\|u(t)\|_{H^{-l}_{-s}},$$
$$\|\widetilde{\Omega}[\rho, t, h]\|_{H^{-l}_{-s}} \leqslant a_{l,s,t}\|\widehat{H}_1[\rho]\rho\|_{H^{-l}_{-s}},$$
$$\|\widetilde{K}[\rho, t]\|_{H^{-l}_{-s}\to H^{-l}_{-s}} \leqslant a_{l,s,t}\|K[\rho]\|_{H^{-l}_{-s}\to H^{-l}_{-s}},$$

где $a_{l,s,t}$ непрерывно зависит от $t \in \mathbf{R}$. Таким образом, если мы установим оценки

$$\begin{gathered}\sup_{t\in[0,T]}\sup_{h\in[0,1]}\|K[\rho]\|_{H^{-l}_{-s}\to H^{-l}_{-s}} \leqslant k_{l,s,T} < \infty,\\ \sup_{t\in[0,T]}\sup_{h\in[0,1]}\|\widehat{H}_1[\rho, h]\|_{H^{-l}_{-s}} \leqslant \omega_{l,s,T} < \infty,\end{gathered} \tag{4.62}$$

то из них будет следовать, что

$$\sup_{t\in[0,T]}\|\rho(t) - F(t)\|_{H^{-l}_{-s}} \leqslant c_{l,s,T}\bigl(h + \sup_{t\in[0,T]}\|\rho(0) - F(0)\|_{H^{-l}_{-s}}\bigr), \tag{4.63}$$

где константа $c_{l,s,T}$ зависит только от чисел $k_{l,s,T}$ и $\omega_{l,s,T}$. Мы сейчас докажем, что $\exists S_0 \geqslant 0\ {}_AS \geqslant S_0 \exists l_0 \forall l \geqslant l_0$ выполнены оценки (2.26). Из этого будет следовать утверждение теоремы. Действительно, по условию теоремы,

$$\rho(0) \equiv \rho_{\psi_{0,h}} \to F_0 \equiv F(0), \quad h \to 0,$$

т. е. $\exists S_1 \forall l$

$$\|\rho(0) - F(0)\|_{H^{-l}_{-s_1}} \to 0, \quad h \to 0.$$

Если доказано упомянутое выше утверждение об оценках (2.26), то мы можем выбрать $s = \max\{s_0, s_1\}$ и получим из (2.27)

$$\lim_{h\to 0}\sup_{t\in[0,T]}\|\rho(t) - F(t)\|_{H^{-l}_{-s}} = 0$$

для любого l, что и требовалось доказать.

Осталось получить оценки (2.26). По предположению,

$$\exists_{s_2} \forall l \sup_t \sup_h \|\rho(t)\|_{H^{-l}_{-s_2}} < \infty. \tag{4.64}$$

Кроме того, отображение $H_0[\rho, \mathrm{id}]$ — гладкое и, в частности, его дифференциал DH_0 ограничен. Множество функций

$$\{\tau\rho(t) + (1-\tau)F(t) \mid \tau \in [0, 1|, \quad t \in [0, T], \quad h \in [0, 1]\}$$

ограничено в $S_{-\infty}(\mathbf{R}^{2n})$; следовательно, его образ при отображении DH_0 ограничен. Поэтому $\forall_S \exists m \forall k \exists l_0 \forall l \geqslant l_0$:

$$\sup_\tau \sup_t \sup_h \left\| DH_0\left[\tau\rho(t) + (1-\tau)F(t),\, \mathrm{id}\right] \right\|_{H^{-l}_{-s} \to S^{k+1}_m} < \infty. \tag{4.65}$$

Выберем здесь $k = s + 1$ $s_0 \stackrel{\mathrm{def}}{=} s_2 + 1$ и пусть $s \geqslant s_0$.

Имеем следующую оценку, вытекающую из определения оператора $K[\rho]$:

$$\left\|K[\rho]\right\|_{H^{-l}_{-s} \to H^{-l}_{-s}} \leqslant \|\rho\|_{H^{-l-m}_{-s_2}} \times \int\limits_0^1 \left\| DH_0\left[\tau\rho - (1-\tau)F,\, \mathrm{id}\right] \right\|_{H^{-l}_{-s} \to S^{s+1}_m} d\tau.$$

Отсюда и из (2.28), (2.29) для любого $l \geqslant l_0$ получим

$$\sup_t \sup_h \left\|K[\rho]\right\|_{H^{-l}_{-s} \to H^{-l}_{-s}} < \infty.$$

Этим доказана первая оценка (2.26). Аналогично: $\exists s' \forall l' \exists l$:

$$\left\|\widehat{H}_1[\rho, h]\rho\right\|_{H^{-l'}_{-s'}} \leqslant \|\rho\|_{H^{-l}_{-s_2}} \cdot \left\|\widehat{H}_1[\rho, h]\right\|_{H^{-l'}_{-s'} \to H^{-l}_{-s_2}},$$

причем

$$\sup_t \sup_h \left\|\widehat{H}_1[\rho, h]\right\|_{H^{-l'}_{-s'} \to H^{-l}_{-s_2}} < \infty.$$

Этим доказана вторая оценка (2.26). Теорема доказана. ∎

Итак, мы установили, что решение квантового уравнения для функции плотности сходится при $h \to 0$ к решению классического уравнения Власова - Лиувилля. Этот результат можно уточнить. Если предположить, что начальная функция плотности $\rho_{\psi_{0,h}}$ разлагается в асимптотический ряд (2.2), то удается доказать, что и в любой момент t функция плотности $\rho_{\psi(t)}$ разлагается в асимптотический ряд (2.5), первый коэффициент которого является решением классического уравнения Власова - Лиувилля, а все последующие коэффициенты определяются из некоторой рекуррентной цепочки уравнений типа Вольтерра. Эта цепочка уравнений была нами вписана в примере 2.1 для случая унитарно-нелинейного оператора квантовой механики. Теперь мы сделаем то же самое в общем случае.

Разложим оператор $\widehat{H}_1[\rho, h] = H_1[\rho, h]\Big(\overset{2}{z}, -i\overset{1}{\dfrac{\partial}{\partial z}}\Big)$, определенный в доказательстве теоремы 2.1, в ряд по степеням $(-ih)$:

$$\widehat{H}_1[\rho, h] = \sum_{k=1}^{2N}(-ih)^{k-1}\widehat{f}_k[\rho] + (-ih)^{2N}\widehat{H}_N[\rho, h], \tag{4.66}$$

где $N \geqslant 1$ — целое,

$$\widehat{H}_N[\rho, h] = H_N[\rho, h]\Big(\overset{2}{z}, -i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial z}}\Big),$$

$H_N\colon S_{-\infty}(\mathbf{R}^{2n}) \times [0, 1] \to S^{\infty}(\mathbf{R}^{4n})$ — гладкое отображение, а операторы $\widehat{f}_k[\rho]$ могут быть легко вычислены явно из (2.20):

$$\widehat{f}_k[\rho] = \sum_{l=0}^{k+1}\sum_{|\alpha|=l+1}(i)^{k-l+1}\bigg[\Big(\frac{\partial}{\partial h}\Big)^{k-l+1}\bigg(\Big(\frac{\partial}{\partial p}\Big)^{\alpha}H[\rho, \mathrm{id}, h](\overset{2}{x}, p)\Big(\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}\Big)^{\alpha} -$$

$$- \Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^{\alpha}\overline{H[\rho, \mathrm{id}, h]}(x, \overset{1}{p})\Big(\overset{2}{\frac{\partial}{\partial p}}\Big)^{\alpha}\bigg)\bigg]_{h=0}. \tag{4.67}$$

Подставим разложение (2.30) в (2.20). Получим

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \Big\langle J\frac{\partial H_0[\rho, \mathrm{id}]}{\partial z}, \frac{\partial\rho}{\partial z}\Big\rangle + \sum_{k=1}^{2N}(-ih)^k\widehat{f}_k[\rho]\rho + (-ih)^{2N+1}\widehat{H}_N[\rho, h]\rho = 0.$$

Подставим сюда разложение (2.5) для функции ρ, разложим все функции в ряды Тейлора по степеням h, соберем члены при одинаковых степенях $(-ih)^j$ и приравняем их к нулю. Получим рекуррентную цепочку уравнений:

$$\frac{\partial F^{(j)}}{\partial t} + \Big\langle J\frac{\partial H_0[F, \mathrm{id}]}{\partial z}, \frac{\partial F^{(j)}}{\partial z}\Big\rangle + K[F](F^{(j)}) +$$

$$+ \Phi_j[F, F^{(1)}, \ldots, F^{(j-1)}] = 0, \tag{4.68}$$

где $j = 1, 2, \ldots, 2N$, оператор $K[F]$ был определен в доказательстве теоремы 2.1:

$$K[F](u) = \Big\langle J\frac{\partial}{\partial z}\big(DH_0[F, \mathrm{id}|u)(z), \frac{\partial F}{\partial z}\Big\rangle,$$

а функционалы Φ_j зависят от коэффициентов $F^{(m)}$ с номерами $m < j$. Явный вид Φ_j легко вычисляется из (2.31), но окончательные формулы слишком громоздки и мы их не будем выписывать. Укажем лишь, что при $j = 1$ $\Phi_1[F] = f_1[F]F$.

Как при доказательстве теоремы 2.1 перейдем от уравнения (2.32) к уравнению для функции

$$\widetilde{F}^{(j)}(w, t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} F^{(j)}\big(Z(w, t), t\big),$$

где $Z(w, t)$ — решение уравнения Власова - Гамильтона. Обозначим, как и раньше,

$$\widetilde{K}[F, t] = Z[t]^* \circ K[F] \circ Z[t]^{-1^*},$$
$$\widetilde{\Phi}_j(t) = Z[t]^* \Phi_j[F, F^{(1)}, \ldots, F^{j-1}].$$

Получим следующее уравнение для $\widetilde{F}^{(j)}$:

$$\frac{\partial \widetilde{F}^{(j)}}{\partial t} + \widetilde{K}[F, t](\widetilde{F}^{(j)}) + \widetilde{\Phi}_j(t) = 0. \qquad (4.69)$$

Начальное условие следует из (2.2):

$$\widetilde{F}^{(j)}\big|_{t=0} = F_0^{(j)}.$$

Проинтегрируем (2.33):

$$\widetilde{F}^{(j)}(t) + \int_0^t \widetilde{K}[F, \tau]\big(\widetilde{F}^{(j)}(\tau)\big)\, d\tau = \widetilde{F}^{(j)}(0) - \int_0^t \widetilde{\Phi}^{(j)}(\tau)\, d\tau. \qquad (4.70)$$

Как уже было доказано в (2.25), если $F_0 \in S_{-\infty}(\mathbf{R}^{2n})$, то найдется такое $s_0 \geqslant 0$, что для любого $l \geqslant 0$ и любого $T \geqslant 0$

$$\sup_{t\in[0, T]} \big\|\widetilde{K}[F, t]\big\|_{H^{-l}_{-s_0} \to H^{-l}_{-s_0}} < \infty.$$

Кроме того, существует $s_j \geqslant 0$, $s_j \geqslant s_0$ такое, что для любого $l \geqslant 0$ и любого $T \geqslant 0$

$$\sup_{t\in[0, T]} \Big\|\widetilde{F}^j(0) - \int_t^0 \widetilde{\Phi}^{(j)}(\tau)\, d\tau\Big\|_{H^{-l}_{-s_j}} < \infty.$$

Следовательно, уравнение типа Вольтерра (2.34) разрешимо в каждом пространстве $H^{-l}_{-s_j}(\mathbf{R}^{2n})$, $l \geqslant 0$, т. е. оно разрешимо в $S_{-\infty}(\mathbf{R}^{2n})$.

Вычислив функции $\widetilde{F}^{(j)}$ последовательно при $l = 1$, при $j = 2, \ldots$, при $j = 2N$, мы вычислим тем самым $2N$-ую частичную сумму асимптотического ряда (2.5):

$$\rho_{\psi(t)} \sim \rho^{(N)}(t) \overset{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{2N} (-ih)^j F^{(j)}(t) = Z[t]^{*-1}\Big(F_0 + \sum_{j=1}^{2N} (-ih)^j \widetilde{F}^{(j)}(t)\Big). \tag{4.71}$$

Тот факт, что эта частичная сумма $\rho^{(N)}(t)$ отличается на $O(h^{2N+1})$ от истинной функции плотности $\rho_{\psi(t)}$, доказывается точно так же, как и теорема 2.1. Таким образом, мы получаем следующий результат.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1 *и, кроме того, существуют такие функции* $F_0^{(1)}, \ldots, F_0^{(2N)} \in S_{-\infty}(\mathbf{R}^{2n})$, *для которых справедливо равенство*

$$\rho_{\psi_{0,h}} - F_0 - \sum_{j=1}^{2N} (-ih)^j F_0^{(j)} = O(h^{2N+1}),$$

где $O(h^{2N+1}) = h^{2N+1} \cdot \rho_{N,h}$ *и семейство функций* $\{\rho_{N,h} \mid h \in [0, 1]\}$ *ограничено в* $S_{-\infty}(\mathbf{R}^{2n})$. *Тогда справедливо равенство*

$$\rho_{\psi(t)} - \rho^{(N)}(t) = O(h^{2N+1})$$

(*равномерно по* $t \in [0, T]$), *где функция* $\rho^{(N)}(t)$ *определена в* (2.35).

§ 3. Асимптотика решения задачи Коши для унитарно-нелинейного уравнения

Выполняя программу, намеченную в начале § 2, мы приступим теперь к построению асимптотики решения задачи Коши (2.17):

$$\begin{gathered} -ih\frac{\partial \psi}{\partial t} + H[\rho_\psi, \mathrm{id}, h](\overset{2}{x}, \overset{1}{p})\psi = 0, \\ \psi\big|_{t=0} = \psi_{0,h}. \end{gathered} \tag{4.72}$$

В теореме 2.2 была вычислена асимптотика функции плотности ρ_ψ, отвечающей решению этой задачи Коши:

$$\begin{gathered}\rho_\psi = \rho^{(N)} + (-ih)^{2N+1}\rho_{N,h},\\ \rho^{(N)} = \sum_{j=0}^{2N}(-ih)^j F^{(j)}, \quad F^{(0)} \equiv F.\end{gathered} \tag{4.73}$$

Предположим, что носители $\operatorname{supp} F_0^{(j)}$ всех функций $F^{(j)}$ при $t = 0$ и $j = 0, 1, 2, \ldots$ содержатся в фиксированвом компакте $\Omega \subset \mathbf{R}^{2n}$. Выберем любую функцию $e_0 \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{2n})$, равную единице в окрестности Ω. Эта функция понадобится нам ниже.

Заменяя в задаче (3.1) ρ_ψ на $\rho^{(N)}$, мы получаем вместо (3.1) линейное уравнение

$$-ih\frac{\partial\psi'}{\partial t} + H[\rho^{(N)}, \mathrm{id}, h](\overset{2}{x}, \overset{1}{p})\psi' = 0. \tag{4.74}$$

Функция Гамильтона этого уравнения имеет вид

$$H[\rho^{(N)}, \mathrm{id}, h]\big|_{h=0} = H_0[F, \mathrm{id}].$$

Выпишем соответствующие уравненин Гамильтона:

$$\begin{aligned}\dot X &= \frac{\partial H_0[F, \mathrm{id}]}{\partial p}(X, P), \quad X\big|_{t=0} = x_0,\\ \dot P &= -\frac{\partial H_0[F, \mathrm{id}]}{\partial x}(X, P), \quad P\big|_{t=0} = p_0.\end{aligned} \tag{4.75}$$

Очевидно, решение $Z(x_0, p_0, t) = \big(X(x_0, p_0, t),\ P(x_0, p_0, t)\big)$ задачи (3.4) совпадает с решением задачи Коши для уравнения Власова - Гамильтона, отвечающего отображению Гамильтона H_0. Построим в фазовом пространстве $\mathbf{R}^{4n+2}$ (с координатами $(x, p) \in \mathbf{R}^{2n}$, $t \in \mathbf{R}$ и импульсами $(\xi, \eta) \in \mathbf{R}^{2n}$, $\theta \in \mathbf{R}$) следующее лагранжево многообразие:

$$\begin{aligned}\Lambda = \big\{(x, p, t; \xi, \eta, \theta) \mid {} & x = X(x_0, p_0, t),\ p = p_0,\\ & \xi = P(x_0, p_0, t) - p_0,\ \eta = 0,\\ & \theta = -H_0[F, \mathrm{id}]\big(X(x_0, p_0, t), P(x_0, p_0, t)\big),\\ & (x_0, p_0) \in \operatorname{supp} e_0,\ |t| \leqslant T\big\}.\end{aligned}$$

Обозначим через $\mathscr{K}_\Lambda^{1/h}$ канонический оператор на этом многообразии, построенный по мере $dx_0 \wedge dp_0 \wedge dt$ с точностью до $O(h^N)$. Из результатов работы [10] следует

Лемма 3. *На многообразии Λ существует такая функция*

$$\varphi^{(N)} = \sum_{k=0}^{N} (-ih)^k \varphi_k(x_0, p_0, t), \quad \varphi \in C_0^\infty(\Lambda),$$

что

$$\begin{aligned} &\varphi_0(x_0, p_0, 0) = e_0(x_0, p_0), \\ &\varphi_k(x_0, p_0, 0) = 0 \quad \text{при} \quad k \geqslant 1 \end{aligned} \tag{4.76}$$

и функция

$$\mathscr{K}_N(x, p, t) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathscr{K}_\Lambda^{1/h} \varphi^{(N)})(x, p, t)$$

удовлетворяет следующим условиям:

$$-ih\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{K}_N + H[\rho^{(N)}, \mathrm{id}, h]\Big(\overset{2}{x}, p - ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}\Big)\mathscr{K}_N = (-ih)^{N+1}\mathscr{R}_{N,h}, \tag{4.77}$$
$$\mathscr{K}_N\big|_{t=0} = e_0.$$

Здесь правая часть $\mathscr{R}_{N,h}$ имеет оценку

$$\sup_{t\in[0,T]} \big\|\mathscr{R}_{N,h}(t)\big\|_{H_k^{-l}(\mathbf{R}^{2n})} \leqslant \frac{c_{k,l,T}}{h^k}$$

для любых k, l, $h \geqslant 0$.

Более того, функции φ_k, указанные в лемме 3.1, строятся явно как решения некоторой рекуррентной цепочки обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Например, функция φ_0 определяется из следующего уравнения:

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + b(X, P, t)\varphi_0 = 0, \tag{4.78}$$

где

$$b(x, p, t) = i\frac{\partial H\big[F(t), \mathrm{id}, h\big](x, p)}{\partial h}\Big|_{h=0} -$$
$$- \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial p_j} H_0\big[F(t), \mathrm{id}\big] + \big(DH_0\big[F(t), \mathrm{id}\big]\big(F^{(1)}(t)\big)\big)(x, p),$$

$F^{(1)}$ — коэффициент при $(-ih)$ в разложении (**3**.2).

Решение уравнения (3.7) с начальным условием (3.5) легко вычисляется[1]:

$$\varphi_0(x_0,\, p_0,\, t) = e_0(x_0,\, p_0)e^{-\int\limits_0^t b\left(X(x_0,p_0,\tau),\, P(x_0,p_0,\tau)\tau\right)d\tau}.$$

Аналогичный вид имеют и остальные функции φ_k в лемме 3.1.

Теперь мы можем сформулировать основную теорему этого параграфа.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теорем* 2.1, 2.2, *а также сформулированное выше предположение о компактности носителей функций* $F_0,\, F_0^{(1)},\, \ldots,\, F_0^{(2N)}$. *Тогда функция*

$$\psi_N \stackrel{\text{def}}{=} \big(\mathscr{K}_\Lambda^{1/h}\varphi^{(N)}\big)(\overset{2}{x},\, \overset{1}{p},\, t)\psi_{0,h} \tag{4.79}$$

является асимптотикой с точностью до $O(h^N)$ *решения* φ *задачи Коши* (3.1) *для унитарно-нелинейного оператора. Точнее*:

$$\sup_{t\in[0,\,T]}\big\|\psi_N(t) - \psi(t)\big\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \leqslant \text{const}\cdot h^N.$$

Доказательство. В силу (3.6), функция ψ_N удовлетворяет уравнению

$$-ih\frac{\partial\psi_N}{\partial t} + H[\rho^{(N)},\, \text{id},\, h](\overset{2}{x},\, \overset{1}{p})\psi_N = (-ih)^{N+1}r_{N,h}, \tag{4.80}$$

где

$$r_{N,h} \stackrel{\text{def}}{=} \mathscr{R}_{N,h}(\overset{2}{x},\, \overset{1}{p},\, t)\psi_{0,h}.$$

Кроме того,

$$\psi_N\big|_{t=0} = e_0(\overset{2}{x},\, \overset{1}{p})\psi_{0,h}. \tag{4.81}$$

Из (3.1), (3.9) и условия самосопряженности оператора $H[\rho_\psi,\, \text{id},\, h](\overset{2}{x},\, \overset{1}{p})$ легко получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\|\psi-\psi_N\|^2 + (-\mathrm{i}h)^N\big[(\omega_{N,h},\, \psi-\psi_N)+(-1)^N(\psi-\psi_N,\, \omega_{N,h})\big]=0, \tag{4.82}$$

[1] Если оператор $\widehat{H}[\rho_\psi,\, \text{id},\, h[$ самосопряжен, то $b(x,\, p,\, t) \equiv 0$.

где

$$\omega_{N,h} \overset{\text{def}}{=} r_{N,h} + a_{N,h}(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, t)\psi_N,$$

$$a_{N,h} \overset{\text{def}}{=} \int_0^1 d\tau DH\big[\tau\rho_\psi + (1-\tau)\rho^{(N)}, \mathrm{id}, h\big](\rho_{N,h}),$$

функция $\rho_{N,h}$ определена в (3.2), а норма $\|\ldots\|$ и скалярное произведение $(\ldots, \ldots)$ берутся в $L^2(\mathbf{R}^n)$.

Из (3.11) немедленно следует оценка:

$$\Big\|\frac{\psi(t)-\psi_N(t)}{h^N}\Big\| \leqslant \Big\|\frac{\psi(0)-\psi_N(0)}{h^N}\Big\| + \int_0^t \big\|\omega_{N,h}(\tau)\big\|\,d\tau. \tag{4.83}$$

Таким образом, остается оценить разность $\psi(0)-\psi_N(0)$. В силу (3.10), имеем

$$\psi(0)-\psi_N(0) = (1-e_0)(\overset{2}{x}, \overset{1}{p})\psi_{0,h}.$$

Пусть $e_1 = (1-e_0)$ и $T = e_1(\overset{2}{x}, \overset{1}{p})$. Тогда

$$\big\|\psi(0)-\psi_N(0)\big\|^2 = (T^*T\psi_{0,h}, \psi_{0,h}) = \big(f_h(\overset{2}{x}, \overset{1}{p})\psi_{0,h}, \psi_{0,h}\big),$$

где

$$f_h = \mathrm{smb}\{T^*T\}e_1\Big(\overset{2}{x}, p - ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}\Big)e_1(x, p). \tag{4.84}$$

Из леммы 1.3 гл. II [9] следует, что

$$\big\|\psi(0)-\psi_N(0)\big\|^2 = \iint f_h(x, p)\overline{\rho_{\psi_{0,h}}(x, p)}\,dx\,dp.$$

Подставим сюда разложение (3.2) при $t = 0$:

$$\big\|\psi(0)-\psi_N(0)\big\|^2 = \iint f_h(x, p)\overline{\rho^N(x, p, 0)}\,dx\,dp + \\ + (-ih)^{2N+1}\iint f_h(x, p)\overline{\rho_{N,h}(x, p, 0)}\,dx\,dp. \tag{4.85}$$

С другой стороны, из (3.13) имеем

$$f_h(x,\,p) = \sum_{|\alpha|=0}^{2N} \frac{1}{\alpha!}\Big[\Big(\frac{\partial}{\partial p}\Big)^{\alpha} e_1(x,\,p)\Big]\Big[\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^{\alpha} e_1(x,\,p)\Big](-ih)^{|\alpha|} + \\ + (-ih)^{2N+1} f_{N,h}(x,\,p),$$

где остаток $f_{N,h}$ ограничен на $\mathbf{R}^{2n}$ со всеми производными равномерно по $h \in [0,\,1]$. Следовательно, учитывая, что носители e_1 и $\rho^{(N)}$ не пересекаются, мы получаем из (3.14)

$$\big\|\psi(0) - \psi_N(0)\big\|^2 = (-ih)^{2N+1} \iint \big[f_{N,h}(x,\,p)\overline{\rho^{(N)}(x,\,p,\,0)} + \\ + f_h(x,\,p)\overline{\rho_{N,h}(x,\,p,\,0)}\big]\,dx\,dp.$$

Интеграл в правой части ограничен равномерно по $h \in [0,\,1]$, таким образом,

$$\big\|\psi(0) - \psi_N(0)\big\|^2 \leqslant h^{2N+1} \cdot \text{const}.$$

Из (3.12) теперь получаем, что

$$\sup_{h\in[0,\,1]}\sup_{t\in[0,\,T]}\Big\|\frac{\psi(t) - \psi_N(t)}{h^N}\Big\| \leqslant \text{const}. \tag{4.86}$$

Теорема доказана. ■

В случае нелинейного оператора квантовой механики (2.19) теорему 3.1 можно несколько уточнить.

Следствие 2. *Пусть выполнены условия следствия* 2.1 *и функции* $\varphi^{(N)}$, $\psi_N = \big(\mathscr{K}_\Lambda^{1/h}\varphi^{(N)}\big)(\overset{2}{x},\,\overset{1}{p},\,t)\psi_{0,h}$ *построены как в лемме* 3.1 *и теореме* 3.1 *для унитарно-нелинейного оператора задачи* (2.19). *Тогда*

$$\sup_{t\in[0,\,T]}\big\|\psi(t) - \psi_N(t)\big\|_{H_h^{-l}(\mathbf{R}^{2n})} \leqslant c_{k,l,T} \cdot h^{N-k}, \quad 0 \leqslant k \leqslant N.$$

В заключение параграфа мы получим асимптотику при $h \to 0$ решения унитарно-нелинейного уравнения в представлении взаимодействия.

Пусть унитарно-нелинейный оператор $\mathscr{H}$ задачи (2.17) допускает разложение

$$\mathscr{H}[\psi] = \widehat{H}_{\text{своб.}}\psi + \widehat{H}_1[\rho_\psi, \text{id}, h]\psi, \tag{4.87}$$

где

$$\widehat{H}_{\text{своб.}} = H_{\text{своб.}}(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, h), \ \widehat{H}_1[\rho_\psi, \text{id}, h] = H_1[\rho_\psi, \text{id}, h](\overset{2}{x}, \overset{1}{p}).$$

Таким образом, оператор $\widehat{H}_{\text{своб.}}$ здесь линеен, а нелинейный оператор $\widehat{H}_1[\rho_\psi, \text{id}, h]$ отвечает за взаимодействие.

Будем предполагать, что оба символа $H_{\text{своб.}}$ и H_1 удовлетворяют условиям теоремы 2.1. Положим $H_0 \stackrel{\text{def}}{=} H_{\text{своб.}}\big|_{h=0}$.

Рассмотрим уравнение Гамильтона

$$\dot{Z}^{(0)} = J\frac{\partial H_0}{\partial z} \circ Z^{(0)}, \quad Z^{(0)}\big|_{t=0} = \text{id}. \tag{4.88}$$

Его решение $Z^0[t]$, в силу сделанных предположений, существует при всех $t \in \mathbf{R}$ в пространстве $C^\infty(\mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n})$ и задает однопараметрическую группу канонических преобразований пространства $\mathbf{R}^{2n}$.

Положим, следуя формуле (3.15) гл. II,

$$H_{1,0}[f, v] = Z^{(0)}[t]^* H_1\big[f, Z^{(0)}[t] \circ v, 0\big]. \tag{4.89}$$

Теорема 5. *Для любого целого $N \geqslant 1$ имеет место следующее разложение символа в представлении взаимодействия*:

$$H_{1,h}[f, \text{id}] = H_{1,0}[f, \text{id}] + \sum_{k=1}^{N} (-ih)^k M_k[f] + (-ih)^{N+1} R_N[f, h],$$

где $f \in S_{-\infty}(\mathbf{R}^{2n})$,

$$M_k \colon S_{-\infty}(\mathbf{R}^{2n}) \to S^\infty(\mathbf{R}^{2n}), \quad k = 1, \dots, N,$$

и $R_N \colon S_{-\infty}(\mathbf{R}^{2n}) \times [0, 1] \to S^\infty(\mathbf{R}^{2n})$ — некоторые гладкие отображения, а $H_{1,0}$ — отображение Гамильтона в представлении взаимодействия (3.18). *Кроме того, функция плотности задачи* (2.17) *в представлении взаимодействия сходится при $h \to 0$ в пространстве $S_{-\infty}(\mathbf{R}^{2n})$ к решению f задачи Коши для уравнения Власова–Лиувилля в представлении взаимодействия.*

Теорема 3.2 доказывается аналогично теореме 2.1. Итак, главная часть символа в представлении взаимодействия найдена: она равна $H_{1,0}\big[f(t),\,\mathrm{id}\big]$. Выпишем соответствующее уравнение Власова – Гамильтона:

$$\dot{W}[t] = J\frac{\partial H_{1,0}\big[F_0,\, W[t]\big]}{\partial z} \circ W[t], \quad W\big|_{t=0} = \mathrm{id}. \tag{4.90}$$

В силу сделанных предположений, решение задачи (3.19) существует при любом $t \in \mathbf{R}$ в пространстве $C^\infty(\mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n})$. Мы можем теперь, следуя теореме 3.1, построить асимптотику решения χ задачи Коши (2.17) в представлении взаимодействия:

$$\chi(t) = \big(\mathscr{K}^{1/h}_{\Lambda_1}\widetilde{\varphi}^{(N)}\big)(\overset{2}{x},\, \overset{1}{p},\, t)\psi_{0,h} + O(h^N),$$
$$\sup_{t\in[0,\,T]}\big\|O(h^N)\big\|_{L^2} \leqslant h^N\cdot\mathrm{const}.$$

Здесь функция $\widetilde{\varphi}^{(N)}$ строится аналогично функции $\varphi^{(N)}$ из леммы 3.1, но вместо отображения H_0 теперь берется отображение $H_{1,0}$, а вместо лагранжева многообразия — Λ-многообразие Λ_1, построенное по решению задачи (3.19) и отображению Гамильтона $H_{1,0}$, аналогично тому, как Λ строилось по решению задачи (3.4) и отображению Гамильтона H_0.

Пример 14. Запишем задачу (2.15) для нелинейного оператора квантовой механики в представлении взаимодействия:

$$-ih\frac{\partial\chi(x,\,t)}{\partial t} + \int dy\big(\overline{\chi(y,\,t)}V\big(\widehat{X}(t)_x - \widehat{X}(t)_y\big)\chi(y,\,t)\big)\chi(x,\,t) = 0,$$
$$\chi(x,\,0) = \psi_{0,h}(x). \tag{4.91}$$

Здесь $x = (x_1,\,\ldots,\,x_n) \in \mathbf{R}^n$, а через $\widehat{X}(t)_x$ и $\widehat{X}(t)_y$ обозначен один и тот же набор операторов $\widehat{X}(t) = \big(\widehat{X}_1(t),\,\ldots,\,\widehat{X}_n(t)\big)$, но действующий на функции от аргументов x и y, соответственно, и определенный следующей формулой:

$$\widehat{X}_j(t)_x = e^{\frac{i}{h}\widehat{H}_0 t} \circ x_j \circ e^{-\frac{i}{h}\widehat{H}_0 t}, \quad j = 1,\,\ldots,\,n,$$

где $H_0(x,\,p) = -p^2 + V_0(x)$, x_j — оператор умножения на аргумент x_j.

При разных номерах $j \neq k$ операторы $\widehat{X}_j(t)$ и $\widehat{X}_k(t)$ коммутируют, поэтому в уравнении (3.20) можно не указывать их взаимный порядок.

Функция от набора операторов $\widehat{X}(t)$ задается следующей формулой:

$$f\big(\widehat{X}(t)\big) = e^{\frac{i}{h}\widehat{H}_0 t} \circ f(x) \circ e^{-\frac{i}{h}\widehat{H}_0 t},$$

где $f(x)$ — оператор умножения на функцию $f \in S^\infty(\mathbf{R}^{2n})$. Для того чтобы вычислить асимптотическое разложение $f\big(\widehat{X}(t)\big)$ при $h \to 0$, запишем дифференциальное уравнение Гейзенберга, которому удовлетворяет этот оператор:

$$-ih\frac{d}{dt}f\big(\widehat{X}(t)\big) = \big[\widehat{H}_0,\, f\big(\widehat{X}(t)\big)\big].$$

Решение этого уравнения можно искать в следующем виде:

$$f\big(\widehat{X}(t)\big) = g(\overset{2}{x},\, \overset{1}{p},\, t),$$

где

$$-ih\frac{\partial g}{\partial t} = H_0\Big(\overset{2}{x},\, p - ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}\Big)g - H_0\Big(x - ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial p}},\, \overset{2}{p}\Big)g, \tag{4.92}$$
$$g\big|_{t=0} = f.$$

Решение задачи (3.21) в пространстве $S^\infty(\mathbf{R}^{2n})$ дается формулой

$$g(x,\, p,\, t) = e^{Rt}f(x,\, p),$$
$$R = 2p\frac{\partial}{\partial x} - \int_0^1 d\tau\frac{\partial V}{\partial x}\Big(x - ih\tau\frac{\partial}{\partial p}\Big)\frac{\partial}{\partial p} - ih\Delta.$$

Асимптотика функции g при $h \to 0$ вычислнется из уравнения (3.21) аналогично теореме **2.2**:

$$g = g_0 + O(h),$$
$$g_0(x,\, p,\, t) = f\big(X^{(0)}(x,\, p,\, t)\big),$$

где $X^{(0)}$ — решение уравнения Ньютона

$$\ddot{X}^{(0)} + 2\frac{\partial V_0}{\partial x}(X^{(0)}) = 0$$

с начальными условиями

$$X^{(0)}\big|_{t=0} = x, \quad \dot{X}^{(0)}\big|_{t=0} = 2p.$$

Следовательно, с точностью до оператора с символом порядка $O(h)$ интеграл в уравнении (3.2) имеет вид

$$\int dy \Big(\overline{\chi(y,\,t)} V\Big(X^{(0)}\Big(\overset{2}{x}, -ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}},\, t\Big) - X^{(0)}\Big(\overset{2}{y}, -ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial y}},\, t\Big)\Big)\chi(y,\,t)\Big)\chi(x,\,t).$$

Перепишем это выражение с помощью функции плотности в представлении взаимодействия ρ_χ. В результате уравнение (3.20) приобретает следующий вид:

$$-ih\frac{\partial \chi(x,\,t)}{\partial t} + \iint dy\, d\xi \overline{\rho_\chi(y,\,\xi,\,t)} V\Big(X^{(0)}\Big(\overset{2}{x}, -ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}},\, t\Big) - X^{(0)}(y,\,\xi,\,t)\Big)\chi(x,\,t) + O(h)\chi = 0.$$

Выпишем соответствующее уравнение Власова – Лиувилля в представлении взаимодействия:

$$\frac{\partial f(z,\,t)}{\partial t} + \Big\langle J\frac{\partial}{\partial z}\iint f(z',\,t)V\big(X^{(0)}(z,\,t) - X^{(0)}(z',\,t)\big)\,dz',\, \frac{\partial f(z,\,t)}{\partial z}\Big\rangle = 0, \quad (4.93)$$

где $z = (x,\,p)$, $z' = (y,\,\xi)$.

Пусть $f(z,\,0) = F_0(z) = \lim\limits_{h\to 0}\rho_{\psi_{0,h}}(z)$. Решение уравнения (3.22) с этим начальным условием имеет вид

$$f(t) = W[t]^{*^{-1}}F_0,$$

где $W[t]$ — решение задачи Коши (3.19) для уравнения Власова – Гамильтона в представлении взаимодействия, причем соответствующее отображение Гамильтона $H_{1,0}$ задано формулой

$$H_{1,0}[f,\,v](z,\,v) = \iint f(z',\,t)V\big(X^{(0)}(z,\,t) - X^{(0)}\big(v(z'),\,t\big)\big)\,dz',$$

$$v \in C^\infty(\mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}), \quad f \in S_{-\infty}(\mathbf{R}^{2n}).$$

В силу теоремы 3.2, функция плотности $\rho_{\chi(t)}$ при $h \to 0$ переходит в решение уравнения Власова – Лиувилля $f(t)$.

§4. Континуально-интегральные уравнения

В этом параграфе вводится континуально-интегральное уравнение, которому удовлетворяет T-отображение, отвечающее нелинейным уравнениям квантовой механики. Правая часть этого уравнения может быть интерпретирована как нелинейный континуальный интеграл.

Рассмотрим T-отображение с образующей

$$G_{t,\varepsilon}[v] = G_{t,\varepsilon}(\overset{2}{x},\, -ih\overset{1}{\partial}/\partial x,\, t;\, [v])v(x,\, t),$$

являющейся псевдодифференциальным оператором с унитарной нелинейностью. Пусть $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{N+1} = t$ — некоторое разбиение отрезка $[0,\, t]$, $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$, $\delta_N = \max\limits_j \Delta t_j$, $x \in \mathbf{R}^n$. T-отображение

$$\psi_0(x) \to \psi(x,\, t) = \left(\prod_{\tau=0}^{t} \circ \overset{\tau}{G}_{\tau,d\tau}\right)[\psi_0] \tag{4.94}$$

строится по формулам

$$\psi(x,\, t) = \lim_{\delta_N \to 0} \psi_{N+1}(x,\, t),$$
$$\psi_0(x,\, t) = \psi_0(x),$$

где $\psi_{k+1}(x,\, t) = \psi_k(x,\, t)$ при $0 \leqslant t \leqslant t_k$ и

$$\psi_{k+1}(x,\, t) = G_{t_k,t-t_k}(\overset{2}{x},\, -ih\overset{1}{\partial}/\partial x;\, [\psi_k])\psi_k(x,\, t_k)$$

при $t_k \leqslant t_{k+1}$ $(k = 0,\, 1,\, \ldots,\, N)$. Из этих формул и из определения псевдодифференциального оператора

$$f\left(\overset{2}{x},\, -ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}\right)u(x) = \frac{1}{(2\pi h)^n}\int dp\, e^{\frac{i}{h}xp} f(x,\, p)\int e^{-\frac{i}{h}yp} u(y)\, dy$$

получим следующую лемму.

Лемма 4. *Пусть в норме некоторого пространства Соболева* $W_2^k(\mathbf{R}^n)$, $k \geqslant 0$ *существует* T-*отображение* (4.1). *Тогда спра-*

ведливо равенство

$$\psi(x,\,t)=\lim_{\delta_N\to 0}\frac{1}{(2\pi h)^{(N+1)n}}\int\dots\int\exp\Big\{\frac{i}{h}\sum_{k=0}^{N}(x_{k+1}-x_k)\xi_k\Big\}\times$$
$$\times\prod_{k=0}^{N}G_{t_k,\Delta t_k}\big(x_{k+1},\,\xi_k;\,[\psi]\big)\psi_0(x_0)\,dx\,d\xi,\quad (4.95)$$

где $x_{N+1}=x$ *и* $dx=dx_0\dots dx_N$, $d\xi=\partial\xi_0\dots d\xi_N$, $x_j,\,\xi_j\in\mathbf{R}^n$; *предел берется в норме* $W_2^k(\mathbf{R}^n)$.

Запишем равенство (4.2) в следующей (континуальной) форме:

$$\psi(x,\,t)=\int\limits_{q(t)=0}\mathscr{D}q\int\mathscr{D}p\psi_0\big(q(0)\big)\exp\Big\{\frac{i}{h}\int\limits_0^t p(\tau)\,dq(\tau)\Big\}\times$$
$$\times\prod_{\tau=0}^{t}G_{\tau,d\tau}\big(q(\tau),\,p(\tau);\,[\psi]\big),\quad (4.96)$$

где формально обозначено $\mathscr{D}q=\prod\limits_{\tau=0}^{t}\dfrac{dq(\tau)}{(2\pi h)^{n/2}}$, $q(\tau)\in\mathbf{R}^n$.

Равенство (4.3) назовем *континуально-интегральным уравнением*, отвечающим T-отображению (4.1). Это есть уравнение относительно неизвестной функции ψ. Лемма 4.1 дает метод вычисления функции $\psi(x,\,t)$ по ее значениям в предыдущие моменты времени.

Следствие. *Пусть* $V(x)$ *и* $a(x,\,y)$ — *вещественные и непрерывные ограниченные функции соответственно на* $\mathbf{R}^n$ *и* $\mathbf{R}^{2n}$. *Тогда решение задачи Коши*

$$-ih\frac{\partial\psi(x,\,t)}{\partial t}-h^2\Delta\psi(x,\,t)+V(x)\psi(x,\,t)+$$
$$+\,\psi(x,\,t)\int a(x,\,y)\big|\psi(y,\,t)\big|^2dy=0,\quad (4.97)$$
$$\psi(x,\,0)=\psi_0(x)$$

удовлетворяет при каждом $\psi_0 \in W_2^2(\mathbb{R}^n)$ *уравнению*

$$\psi(x,\,t) = \lim_{N\to\infty} (4\pi i h)^{-\frac{(N+1)}{2}n} \int \frac{\psi_0(x_0)dx_0 \dots dx_N}{\left(\sqrt{\Delta t_0 \dots \Delta t_N}\right)^n} \times$$

$$\times \exp\Big\{\frac{i}{h}\sum_{k=0}^{N}\Big[\frac{1}{4}\Big(\frac{x_{k+1}-x_k}{\Delta t_k}\Big)^2 - V(x_{k+1}) -$$

$$- \int a(x_{k+1},\,y)\big|\psi(y,\,t_k)\big|^2 dy\Big]\Delta t_k\Big\}, \quad (4.98)$$

где $x_{N+1} \equiv x$.

Континуальной записью формулы (4.5) назовем следующее континуально-интегральное уравнение:

$$\psi(x,\,t) = \int\limits_{q(t)=x} Dq\psi_0\big(q(0)\big)\exp\Big\{\frac{i}{h}\int\limits_0^t\Big[\frac{\big|\dot q(\tau)\big|^2}{4} - V\big(q(\tau)\big) -$$

$$- \int a(q(\tau),\,y)\big|\psi(y,\,\tau)\big|^2 dy\Big]d\tau\Big\}, \quad (4.99)$$

где формально обозначено

$$Dq = \prod_{\tau=0}^{t} \frac{dq(\tau)}{(d\tau\, 4\pi i h)^{n/2}}.$$

Асимптотическое решение этого континуально-интегрального уравнения проводится методом, обобщающим известный метод стационарной фазы для континуального интеграла Фейнмана [13]. Как известно, метод стационарной фазы применим к интегралу вида

$$I = \int e^{\frac{i}{h}F(x)}\varphi(x)\,dx, \quad \varphi \in C_0^\infty, \quad F \in C^\infty$$

при условии, что стационарные точки $x = x_1,\,\dots,\,x_n$ решения уравнения $dF(x) = 0$ — невырождены, т. е. матрица A формы d^2F невырождена в стационарных точках. Формула метода стационарной фазы имеет вид

$$I \approx (2\pi i h)^{n/2}\sum_k \big|D(x^k)\big|^{-1/2}\exp\Big\{\frac{i}{h}\Big(F(x_k) - \frac{i\pi\gamma_k}{2}\Big)\Big\}\varphi(x_k),$$

где $D(x) = \det A$, а γ_k — индекс Морса стационарной точки x_k. Эта формула была перенесена автором в 1965 г. [13, 14] на случай континуального интеграла Фейнмана. Интеграл Фейнмана представляется в виде

$$I = \int \exp\Big\{\frac{i}{h} S\big[q(\tau)\big]\Big\}\, dq(\tau), \tag{4.100}$$

где $S\big[q(\tau)\big] = \int\limits_0^t L(\dot q,\, q,\, \tau)\, d\tau$, $q = q(\tau)$, $q(0) = y$, $q(t) = x$, $L(\dot q,\, q,\, \tau) = \dfrac{\dot q^2}{2} - V(q,\, \tau)$. Если уравнение $\delta S\big[q(\tau)\big] = 0$ имеет невырожденные решения $q^k = q^k(\tau)$, т.е. $\delta^2 S$ при $q(\tau) = q^k(\tau)$ не имеет нулевого собственного значения, то

$$I \approx (2\pi i h)^{n/2} \sum_k \big|D(q^k)\big|^{-1/2} \exp\Big\{\frac{i}{h}\Big(S\big[q^k(\tau)\big] - \frac{i\pi\gamma_k}{2}\Big)\Big\}, \tag{4.101}$$

где γ_k — индекс Морса экстремали $q^k(\tau)$, а

$$D(q^k) = \det \frac{\partial^2 S\big[q^k(\tau)\big]}{\partial x\, \partial y}.$$

Этот ответ может быть переписан в виде канонического оператора, отвечающего лагранжеву многообразию $\Lambda^n(t)$ в фазовом пространстве p, x. Это многообразие в областях, хорошо проектируемых на x-плоскость, задается уравнением $p = \dfrac{\partial S(q^k(\tau))}{\partial x}$. В целом, $\Lambda^n(t)$ задается уравнениями $p = P(t,\, y,\, p_0)$, $x = X(t,\, y,\, p_0)$, где P, X удовлетворяют уравнениям Ньютона $\dot X = P$, $\dot P = -\dfrac{\partial V(X,\, t)}{\partial x}$ и начальным условиям $X\big|_{t=0} = y$, $P\big|_{t=0} = p_0$. Уравнение $X(t,\, y,\, p_0) = x$ относительно p_0 для фиксированных y, x и t определяет точки p_0^k такие, что $q^k(\tau) = X(\tau,\, y,\, p_0^k)$, а $D(q^k) = \det\Big\|\dfrac{\partial X_i}{\partial p_{0j}^k}(t,\, y,\, p_0^k)\Big\|$.

Если вырожденные экстремали отсутствуют, то окрестность точки x на $\Lambda^n(t)$ хорошо проектируется на плоскость x. При этом условии в окрестности точки x канонический оператор равен правой части выражения (4.8). В окрестности точек, в которых матрица $\Big\|\dfrac{\partial X_i}{\partial p_{0j}}\Big\|$ вырождена. Эта формула для канонического оператора сохраняется, если часть координат (вырожденных) заменить на импульсы и совершить по ним преобразование Фурье[1].

Канонический оператор $\mathcal{K}^{1/h}_{\Lambda^n(t)}$ на $\Lambda^n(t)$ дает асимптотику при $h \to 0$ континуального интеграла (4.7) как в невырожденных, так и в вырожденных стационарных точках — траекториях. Таким образом, соотношение $I \approx \mathcal{K}^{1/h}_{\Lambda^n(t)}$ обобщает (4.8) и это соотношение можно считать формулой метода стационарной фазы.

Нелинейный континуальный функционал Φ, который мы получили в (4.6), обобщает континуальный интеграл Фейнмана. Роль уравнений Ньютона в нем играет система уравнений характеристик для уравнения Власова. Траекторий (в фазовом пространстве) у этой системы нет, но начальное лагранжево многообразие $\{(x, p) \mid x = y\}$ она переводит в некоторое лагранжево многообразие $\Lambda^n(t)$.

В следствии 3.1 было показано, что для функционала Φ также имеет место соотношение $\Phi \approx \mathcal{K}^{1/h}_{\Lambda^n(t)}$, которое естественно трактовать как формулу метода стационарной фазы для него.

[1]То есть в таком смешанном p, x представлении формула для канонического оператора сохраняет вид (4.8).

Глава 5

СИСТЕМЫ УНИТАРНО-НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

В этой главе рассматриваются примеры построения квазиклассической асимптотики для некоторых систем уравнений с унитарной нелинейностью.

§ 1. Уравнения Хартри

Система уравнений Хартри имеет следующий вид:

$$-ih\frac{\partial\psi^{(j)}}{\partial t} - h^2\Delta\psi^{(j)} + V_0(x)\psi^{(j)} + \\ + \Big(\sum_{k=1}^{m}\int V_{jk}(x-y)\big|\psi^{(k)}(y,t)\big|^2 dy\Big)\psi^{(j)} = 0, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{5.1}$$

Будем в дальнейшем предполагать, что функции V_0 и V_{jk} вещественны и ограничены со всеми нроизводными на $\mathbf{R}^n$.

Обозначим через M комплексное пространство $\mathbf{C}^m$ со стандартным скалярным произведением и нормой. Введем пространство $L^2(\mathbf{R}^n \to M)$ вектор-функций на $\mathbf{R}^n$ со значениями в M, а также пространства $H^l_k(\mathbf{R}^n \to M)$,

$$S(\mathbf{R}^n \to M), \quad S_{-\infty}(\mathbf{R}^n \to M), \quad S^\infty(\mathbf{R}^n \to M).$$

Рассмотрим T-отображение

$$\psi(t) = \prod_{\tau=0}^{t} \circ \overline{\Big[\exp(ih\Delta\,d\tau)\exp\Big\{-\frac{i}{h}A[\rho_{\psi(\tau)}](x)\,d\tau\Big\}\Big]}^{\,\tau}\psi(0), \tag{5.2}$$

где $\psi = (\psi^{(1)}, \ldots, \psi^{(m)}$, $\rho_\psi = (\rho_{\psi(1)}, \ldots, \rho_{\psi(m)})$ — вектор-функция плотности, $A[\rho_\psi]$ — диагональная матрица с коэффициентами

$$A[\rho_\psi](x)_{jk} = \delta_{jk}\left(\sum_l \iint V_{jl}(x-y)\rho_{\psi^{(l)}(\tau)}(y, \xi)\, dy\, d\xi + V_0(x)\right).$$

Теорема 1. [11] *T-отображение* (1.2) *существует в пространстве $L^2(\mathbf{R}^n \to M)$ на любом отрезке времени $t \in [0, T_0]$ и для любой начальной функции $\psi(0) \in H^0_2(\mathbf{R}^n \to M)$. Функция $\psi(t)$, определяемая этим T-отображением, удовлетворяет уравнению Хартри* (1.1).

Предположим теперь, что начальная вектор-функция $\psi(0) = \psi_{0,h} \in \in S(\mathbf{R}^n \to M)$ такова, что вектор-функция плотности $\rho_{\psi_{0,h}}$ сходится при $h \to 0$ в пространстве $S_{-\infty}(\mathbf{R}^{2n} \to M)$ к некоторой вещественной вектор-функции $F^0 = (F^0_1, \ldots, F^0_m)$. В этом случае имеет место аналог следствия 2.1 из гл. III.

Теорема 2. *Вектор-функция плотности $\rho_{\psi(t)}$, отвечающая решению $\psi(t)$ уравнения* (1.1), *сходится при $h \to 0$ в пространстве $S_{-\infty}(\mathbf{R}^{2n} \to M)$ равномерно на любом отрезке $t \in [0, T]$ к вектор-функции $F(t) = \big(F_1(t), \ldots, F_m(t)\big)$, удовлетворяющей следующей задаче Коши:*

$$\frac{\partial F_j}{\partial t} + 2p\frac{\partial F_j}{\partial x} - \left(\frac{\partial V_0}{\partial x} + \sum_{k=1}^m \iint \frac{\partial V_{jk}}{\partial x}(x-y)F_k(y, \xi, t)\, dy\, d\xi\right)\frac{\partial F_j}{\partial p} = 0,$$
$$F_j\big|_{t=0} = F^0_j, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{5.3}$$

Доказательство теоремы совершенно аналогично доказательству теоремы 2.1 гл. III. Существование решения задачи (1.3) будет установлено ниже.

Система дифференциальных уравнений (1.3) представляет собой векторный аналог уравнения Власова. Выпишем соответствующую систему уравнений Власова – Гамильтона:

$$\dot X^{(j)} = 2P^{(j)},$$
$$\dot P^{(j)} = -\frac{\partial V_0}{\partial x}(X^{(j)}) -$$
$$-\sum_{k=1}^m \iint \frac{\partial V_{jk}}{\partial x}\big(X^{(j)} - X^{(k)}(x', p', t)\big)F^0_k(x', p')\, dx'\, dp', \tag{5.4}$$
$$X^{(j)}\big|_{t=0} = x, \quad P^{(j)}\big|_{t=0} = p, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Функции $Z^{(j)}[t] = \big(X^{(j)}[t],\ P^{(j)}[t]\big)$ определяют некоторое преобразование $Z^{(j)}[t]\colon (x, p) \to Z^{(j)}(x, p, t)$ фазового пространства $\mathbf{R}^{2n}$. При $t=0$ это преобразование является тождественным: $Z^{(j)}[0]=\mathrm{id}$.

Аналогично теоремам 2.1, 2.2 гл. I доказывается следующее утверждение:

Теорема 3. *Решение* $Z^{(1)}[t], \dots, Z^{(m)}[t] \in C^\infty(\mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n})$ *системы* (1.4) *существует и единственно при всех* t. *Каждое отображение* $Z^{(j)}[t]$ *является каноническим. Решение задачи* (1.3) *существует в* $S_{-\infty}(\mathbf{R}^{2n} \to M)$ *при всех* t *и дается формулой*

$$F_j(t) = Z^{(j)}[t]^{*-1}F_j^0, \quad j = 1, \dots, m.$$

Предположим теперь, что начальная вектор-функция плотности $\rho_{\psi_{0,h}}$ разлагаетсн в асимптотический ряд

$$\rho_{\psi_{0,h}} = F^0 + \sum_{\mu=1}^{2N}(-ih)^\mu F^{(\mu)} + h^{2N+1}\rho^{(N,h)(0)}, \tag{5.5}$$

где $F_0^{(\mu)} \in S_{-\infty}(\mathbf{R}^{2n} \to M)$, $\mu = 1, \dots, 2N$, семейство функций $\{\rho^{(N,h)(0)}h \in [0, 1]\}$ ограничено в $S_{-\infty}(\mathbf{R}^{2n} \to M)$. Будем предполагать всюду ниже, что носители функции F^0, $F^{(0,\mu)}$, $\mu = 1, \dots, 2N$, содержатся в фиксированном компакте в $\mathbf{R}^{2n}$. Построим разложение вектор-функции плотности $\rho_{\psi(t)}$ при $h \to 0$ в любой момент времени t аналогично тому, как это было сделано в § 2 гл. III длн скалярной функции плотности.

Выпишем уравнение для вектор-функции плотности

$$-ih\frac{\partial\rho_\psi}{\partial t} + \Big[\Big(p - \mathrm{i}h\frac{\partial}{\partial x}\Big)^2 - p^2\Big]\rho_\psi - \Big(A[\rho_\psi]\Big(x - ih\frac{\partial}{\partial p}\Big) - A[\rho_\psi](x)\Big)\rho_\psi = 0 \tag{5.6}$$

и разложим оператор, стоящий в левой части, по степеням параметра h. Получим

$$\frac{\partial\rho_\psi}{\partial t} + 2p\frac{\partial\rho_\psi}{\partial x} - \frac{\partial A[\rho_\psi](x)}{\partial x}\frac{\partial\rho_\psi}{\partial p} + (-ih)\Delta\rho_\psi - \sum_{|\alpha|=2}^{2N+1}\frac{(-ih)^{|\alpha|-1}}{\alpha!}\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^\alpha A[\rho_\psi](x)\Big(\frac{\partial}{\partial p}\Big)^\alpha\rho_\psi + (-ih)^{2N+1}\lambda_{N,h}[\rho_\psi] = 0, \tag{5.7}$$

где $\lambda_{N,h}[\rho_\psi]$ есть остаток в разложении функции $A[\rho_\psi]\Big(x - ih\dfrac{\partial}{\partial p}\Big)\rho_\psi$ по степеням $(-\mathrm{ih})$. Подставим в (1.7) разложение функции ρ_ψ по степеням h:

$$\rho_\psi = \sum_{\mu=1}^{2N}(-ih)^\mu F^{(\mu)} + O(h^{2N+1}) \tag{5.8}$$

с неизвестными пока функциями $F^{(1)}, \ldots, F^{(2N)}$ и приравняем нулю коэффициенты при одинаковых степенях $(-\mathrm{ih})$. Получим цепочку уравнений

$$\frac{\partial F^{(\mu)}}{\partial t} + 2p\frac{\partial F^{(\mu)}}{\partial x} - \frac{\partial A[F](x)}{\partial x}\cdot\frac{\partial F^{(\mu)}}{p} + K[F|(F^{(\mu)}) + \Phi^{(\mu)} = 0, \tag{5.9}$$
$$\mu = 1, \ldots, N.$$

Здесь оператор $K[F]\colon S_{-\infty}(\mathbf{R}^{2n} \to M) \to S_{-\infty}(\mathbf{R}^{2n} \to M)$ определен формулой

$$K[F](u)_j \stackrel{\text{def}}{=} -\sum_{l=1}^{m}\iint \frac{\partial V_{jl}(x-y)}{\partial x}u_l(y,\xi)\,dy\,d\xi\frac{\partial F_j}{\partial p}(x,p,t),$$

а функции $\Phi^{(\mu)} \in S_{-\infty}(\mathbf{R}^{2n} \to M)$ имеют следующий вид:

$$(\Phi^{(\mu)})_j(x,p,t) = \sum_{\nu=0}^{\mu-1}\sum_{|\alpha|=\mu-\nu+1}\frac{(-1)}{\alpha!}\Big[\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^\alpha V_0(x)\Big]\Big(\frac{\partial}{\partial p}\Big)^\alpha F_j^{(\nu)}(x,p,t) -$$
$$-\sum_{\nu=1}^{\mu-1}\sum_{\omega=0}^{\mu-\nu}\sum_{|\alpha|=\mu-\nu-\omega+1}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\alpha!}\iint\Big[\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^\alpha V_{jk}(x-y)\Big]F_k^{(\nu)}(y,\xi,t)\,dy\,d\xi\times$$
$$\times\Big(\frac{\partial}{\partial p}\Big)^\alpha F_j^{(\omega)}(x,p,t) - \sum_{\nu=0}^{\mu-1}\sum_{|\alpha|=\mu-\nu+1}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\alpha!}\iint\Big[\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^\alpha V_{jk}(x-y)\Big]\times$$
$$\times F_k(y,\xi,t)\,dy\,d\xi\Big(\frac{\partial}{\partial p}\Big)^\alpha F_j^{(\nu)}(x,p,t) + \delta_{\mu,1}\Delta_x F_j^{(\mu-1)}(x,p,t).$$

Важно отметить, что функция $\Phi^{(\mu)}$ зависит только от $F^{(\nu)}$ с номерами $\nu < \mu$. Перепишем векторное уравнение (1.9) покомпонентно:

$$\frac{\partial F_j^{(\mu)}}{\partial t} + 2p\frac{\partial F_j^{(\mu)}}{\partial x} - \sum_{k=1}^{m} \iint \frac{\partial V_{jk}}{\partial x}(x-y)F_k(y,\,\xi,\,t)\,dy\,d\xi \times$$

$$\times \frac{\partial F_j^{(\mu)}}{\partial p} - \sum_{k=1}^{m} \iint \frac{\partial V_{jk}}{\partial x}(x-y)F_k^{(\mu)}(y,\,\xi,\,t)\,dy\,d\xi \frac{\partial F_j}{\partial p} +$$

$$+ (\Phi^{(\mu)})_j = 0, \quad f = 1,\,\ldots,\,m. \quad (5.10)$$

Сделаем в каждом k-м слагаемом в левой части (1.10) под знаком интеграла замену переменных $(y,\,\xi) \to \big(X^{(k)}(y,\,\xi,\,t),\,P^{(k)}(y,\,\xi,\,t)\big)$, а во всем уравнении (1.10) — замену $(x,\,p) \to (X^{(j)}(x,\,p,\,t),\,P^{(j)}(x,\,p,\,t))$, где $Z^{(j)} = \big(X^{(j)},\,P^{(j)}\big)$ — решение системы (1.4). В результате уравнение (1.10) перейдет в следующее:

$$\frac{\partial \widetilde{F}^{(\mu)}}{\partial t} + \widetilde{K}(t)\big(\widetilde{F}^{(\mu)}(t)\big) + \widetilde{\Phi}^{(\mu)}(t) = 0, \quad (5.11)$$

где оператор $\widetilde{K}(t)\colon S_{-\infty}(\mathbf{R}^{2n} \to M) \to S_{-\infty}(\mathbf{R}^{2n} \to M)$ задан формулой

$$\big(\widetilde{K}(t)u\big)_j(x,\,p,\,t) = -\sum_{k=1}^{m} \iint \frac{\partial V_{jk}}{\partial x}\big(X^{(j)}(x,\,p,\,t) - X^{(k)}(y,\,\xi,\,t)\big) \times$$

$$\times u(y,\,\xi)\,dy\,d\xi \frac{\partial F_j}{\partial p}\big(X^{(j)}(x,\,p,\,t),\,P^{(j)}(x,\,p,\,t),\,t\big),$$

а вектор-функции $\widetilde{F}^{(\mu)}$, $\widetilde{\Phi}^{(\mu)}$ определены следующими равенствами:

$$\widetilde{F}_j^{(\mu)}(t) \stackrel{\text{def}}{=} Z^{(j)}[t]^* F_j^{(\mu)}(t), \quad \widetilde{\Phi}_j^{(\mu)}(t) = Z^{(j)}[t]^* \Phi_j^{(\mu)}(t),$$
$$j = 1,\,\ldots,\,m.$$

Интегрируя (1.11) по dt, получим уравнение типа Вольтерра, аналогичное (2.34) из гл. III,

$$\widetilde{F}^{(\mu)}(t) + \int_0^t \widetilde{K}(\tau)\big(\widetilde{F}(\tau)\big)\,d\tau = F^{(0,\mu)} - \int_0^t \widetilde{\Phi}^{(\mu)}(\tau)\,d\tau, \quad (5.12)$$
$$\mu = 1,\,\ldots,\,N.$$

Точно так же, как это было сделано в § 2 гл. III, доказывается существование решения каждого уравнения (1.12) в пространстве $S_{-\infty}(\mathbf{R}^{2n} \to M)$. Цепочка уравнений (1.12) решается последовательно: сначала при $\mu = 1$, затем при $\mu = 2$ и т. д. На каждом шагу функция $\widetilde{\Phi}^{(\mu)}$ в правой части (1.12) будет определена, так как она зависит от функций $F^{(\nu)}$ лишь с номерами $\nu < \mu$.

Таким образом, вычислены все коэффициенты разложения (1.8) и мы получаем следующий аналог теоремы 2.2 гл. III.

Теорема 4. *Пусть имеет место разложение* (1.5) *и вектор-функции* $\widetilde{F}^{(\mu)}$ *найдены из цепочки уравнений* (1.12). *Тогда при* $j = 1, \ldots, m$ *справедлива формула*

$$\rho_{\psi^{(j)}(t)} = Z^{(j)}[t]^{*-1}\Big(F_j^0 + \sum_{\mu=1}^{N}(-ih)^{\mu}\widetilde{F}_j^{(\mu)}(t)\Big) + h^{N+1}\rho_j^{(N,h)}(t,) \qquad (5.13)$$

где семейство вектор-функций

$$\{\rho^{(N,h)}(t) \mid h \in [0,1], \quad t \in [0, T]\}$$

ограничено в $S_{-\infty}(\mathbf{R}^{2n} \to M)$ *при любом* $T > 0$.

Формула (1.13) дает нам асимптотику вектор-функции плотности $\rho_{\psi(t)}$ при $h \to 0$ и тем самым позволяет перейти с точностью $O(h^N)$ от нелинейной системы уравнений Хартри (1.1) к набору из m независимых линейных уравнений по схеме, изложенной в начале § 2 гл. III.

Линейные уравнения, о которых идет речь, в данном случае имеют вид

$$\begin{aligned} -ih\frac{\partial\psi^{(j)}}{\partial t} - h^2\Delta\psi^{(j)} + V_0(x)\psi^{(j)} + \psi^{(j)}\Big(\sum_{k=1}^{m}\int V_{jk}\big(x - X^{(k)}(y,\xi,t)\big)\times \\ \times F_{0k}(y,\xi)\,dy\,d\xi\Big) + \psi^{(j)}\Big(\sum_{\mu=1}^{N}(-ih)^{\mu}\int V_{jk}\big(x - X^{(k)}(y,\xi,t)\big)\times \\ \times \widetilde{F}_k^{(\mu)}(y,\xi,t)\,dy\,d\xi\Big) + O(h^{N+1}) = 0, \quad j = 1, \ldots, m. \qquad (5.14) \end{aligned}$$

Решение каждого из этих уравнений с начальным условием $\psi^{(j)}\big|_{t=0} = \psi_{0,h}^{(j)}$, для которого имеет место (1.5), строится методом канонического оператора (§ 3 гл. III).

Пусть лагранжево многообразие $\Lambda_j \subset \mathbf{R}^{4n+2}$ построено так же, как многообразие Λ в § 3 гл. III, но вместо функции Гамильтона $H_0[F, \mathrm{id}]$ взята функция

$$H_j(x, p, t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} p^2 + V_0(x) + \sum_{k=1}^{m} \int V_{jk}\big(x - X^{(k)}(y, \xi, t)\big) F_k^0(y, \xi)\, dy\, d\xi.$$

Далее, пусть $\mathscr{K}_{\Lambda_j}^{1/h}$ — канонический оператор на Λ_j и функция $\varphi_j^{(N)}$ на Λ_j построена так, как это указано в лемме 3.1 гл. III, т. е. так, чтобы функция

$$\psi_{N,h}^{(j)}(x, t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \big(\mathscr{K}_{\Lambda_j}^{1/h} \varphi_j^{(N)}\big)(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, t)\psi_{0,h}^{(j)} \tag{5.15}$$

удовлетворила уравнению (1.14) с точностью до $O(h^{N+1})$ и было выполнено начальное условие

$$\varphi_j^{(N)}\big|_{t=0} = e_0(x, p),$$

где e_0 — фиксированная гладкая вещественная финитная функцин, равнан единице в окрестности носителей всех функций F^0, $F^{(0,\mu)}$ из (1.5).

После того как функции $\psi_{N,h}^{(j)}$, $N = 1, \ldots, m$, вида (1.15) найдены, мы можем, аналогично теореме 3.1 гл. III, доказать следующее утверждение.

Теорема 5. *Функция* $\psi_{N,h} = \big(\psi_{N,h}^{(1)}, \ldots, \psi_{N,h}^{(m)}\big)$, *построенная по формуле* (1.15), *отличается на* $O(h^N)$ *от точного решения* ψ *системы уравнений Хартри* (1.1) *с начальными условиями* $\psi\big|_{t=0} = \psi_{0,h}$. *Точнее, для любых* $k, l, T \geqslant 0$ *и любого* $h \in [0, 1]$ *справедлива оценка*

$$\sup_{t \in [0, T]} \big\|\psi_{N,h}(t) - \psi(t)\big\|_{H_k^{-l}(\mathbf{R}^n \to M)} \leqslant h^{N-k} \cdot \mathrm{const}_{T,k,l}.$$

§ 2. Температурные уравнения Хартри

Рассмотрим бесконечномерное обобщение задачи Коши (1.1). Пусть $\widehat{H} = -h^2\Delta + U(x)$ — оператор Шрёдингера $L^2(\mathbf{R}^n)$ с гладким вещественным потенциалом U, причем функция $U(x)$ достаточно сильно растет при $|x| \to \infty$, так что спектр $\widehat{H}$ дискретен

$$E_1(h) < E_2(h) < \ldots < E_j(h) < \ldots$$

и регулярен при $h \to 0$:

$$\sup_{0 \leqslant h \leqslant 1} E_j(h) < \infty.$$

Пусть оператор $e^{-t\widehat{H}}$ и все его коммутаторы с x и $-i\partial/\partial x$ при любом $t > 0$ являются операторами Гильберта–Шмидта в $L^2(\mathbf{R}^n)$, а собственные функции $\chi_j = \chi_j(x, h)$ оператора $\widehat{H}$

$$\widehat{H}\chi_j = E_j\chi_j, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

образуют базис в пространстве $L^2(\mathbf{R}^n)$ и таковы, что соответствующие функции плотности ρ_{χ_j} имеют по модулю $O(h^\infty)$ компактный в $\mathbf{R}^{2n}$ носитель, т. е.

$$\rho_{\chi_j} = g_j + k_j,$$

$\operatorname{supp} g_j$ — компакт, не зависящий от h и от j, $\bigl|k_j(x, p, h)\bigr| \leqslant h^N \cdot c_{N,j}$ при любом N.

Обозначим

$$\sigma(h) = \sum_{j=1}^{\infty} \exp\bigl\{-\beta E_j(h)\bigr\}, \quad \beta = \frac{1}{R\theta} = \text{const} > 0, \tag{5.16}$$

где R — постоянная Больцмана, θ — температура. Сходимость и асимптотика ряда $\sigma(h)$ будут изучены ниже.

Рассмотрим бесконечный набор функций $\psi_1, \psi_2, \ldots \in S(\mathbf{R}^n)$ и построим потенциал (статистическую сумму)

$$V[\rho_\psi](x) = \frac{1}{\sigma(h)} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\beta E_j(h)} \iint V(x-y)\rho_{\psi_j}(y, \xi)\, dy\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{\sigma(h)} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\beta E_j(h)} \int V(x-y)\bigl|\psi_j(y)\bigr|^2 dy, \tag{5.17}$$

где функция V вещественна и ограничена со всеми производными на $\mathbf{R}^n$, а через ρ_ψ обозначен бесконечномерный вектор, компонентами которого являются функции плотности ρ_{ψ_j}, $j = 1, 2, \ldots$

Температурными уравнениями Хартри [15] называется следующая унитарно-нелинейная задача Коши:

$$
\begin{gathered}
-ih\frac{\partial\psi_j}{\partial t}-h^2\Delta\psi_j+V[\rho_\psi]\psi_j=0,\\
\psi\big|_{t=0}=\chi_j,\quad j=1,2,\ldots
\end{gathered}
\tag{5.18}
$$

Нашей задачей будет построение асимптотического (при $h\to 0$) решения этой задачи.

Заметим, что начальные функции χ_j в задаче (2.3) не удовлетворяют, вообще говоря, асимптотическим условиям, типа наличия разложения (1.5) для функции плотности. Тем не менее, используя полноту системы $\{\chi_j\}$, удается получить регулярное асимптотическое разложение по степеням h для потенциала $V[\rho_\psi]$ и тем самым свести задачу (2.3) к набору незацепленных линейных уравнений.

Будем искать решение задачи (2.3) в следующем виде:

$$
\psi_j(x,t)=e^{\frac{\beta}{2}E_j(h)}G(\overset{2}{x},\overset{1}{p},t)\chi_j(x,h),
\tag{5.19}
$$

где

$$
G(\overset{2}{x},\overset{1}{p},0)=\exp\Big\{-\frac{\beta}{2}\widehat{H}\Big\}.
\tag{5.20}
$$

Подставив функции (2.4) в формулу (2.2), получим

$$
V[\rho_\psi](q)=\frac{1}{\sigma(h)}\sum_{j=1}^{\infty}(V_q\widehat{G}\chi_j,\widehat{G}\chi_j)_{L^2(\mathbf{R}^n)},
$$

где $q\in\mathbf{R}^n$, V_q — оператор умножения на $V(q-x)$ в пространстве $L^2(\mathbf{R}^n_x)$.

Поскольку система $\{\chi_j\}$ образует базис в $L^2(\mathbf{R}^n)$, то для любых $1/h$-псевдодифференциальных операторов $\widehat{f}=f(\overset{1}{x},\overset{2}{p})$ и $\widehat{g}=g(\overset{2}{x},\overset{1}{p})$ — с достаточно быстро убывающими символами справедлива формула для следа $\operatorname{tr}(\widehat{f}\widehat{g}^*)$

$$
\sum_{j=1}^{\infty}(\widehat{f}\chi_j,\widehat{g}\chi_j)_{L^2}=\frac{1}{(2\pi h)^n}\iint f(y,\xi)\overline{g(y,\xi)}\,dy\,d\xi.
$$

По предположению, $\exp\Bigl\{-\frac{\beta}{2}\widehat{H}\Bigr\}$ есть оператор Гильберта–Шмидта; его символ G интегрируем с квадратом $\mathbf{R}^{2n}$; поэтому

$$V[\rho_{\psi(t)}](x) = \frac{1}{\sigma(h)(2\pi h)^n}\iint V(x-y)\bigl|G(y,\,\xi,\,t)\bigr|^2\,dy\,d\xi. \tag{5.21}$$

В частности, сравнивая (2.1) и (2.2), получим следующую формулу для $\sigma(h)$:

$$\sigma(h) = \frac{1}{(2\pi h)^n}\int\bigl|G(y,\,\xi,\,0)\bigr|^2\,dy\,d\xi.$$

Начальное условие для G найдем из (2.5):

$$G(x,\,p,\,0) = \mathrm{smb}\,\Bigl\{e^{-\frac{\beta}{2}\widehat{H}}\Bigr\},$$

где smb — это отображение, обратное к отображению μ: $f \to f(\overset{2}{x},\,\overset{1}{p})$ (см. [9] § 1 гл. II). Таким образом, получаем

$$\sigma(h) = \frac{\lambda(h)}{(2\pi h)^n},$$

где

$$\lambda(h) = \iint \mathrm{smb}\,\Bigl\{e^{-\frac{\beta}{2}\widehat{H}}\Bigr\}(x,\,p)\,dx\,dp \tag{5.22}$$

(что, очевидно, следует и непосредственно из (2.1)).

Получим теперь дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет символ G. Для этого подставим функцию (2.4) в левую часть уравнения (2.3). Для того чтобы (2.3) было выполнено, достаточно потребовать выполнения следующего операторного равенства:

$$-ih\frac{\partial}{\partial t}G(\overset{2}{x},\,\overset{1}{p},\,t) - h^2\overset{3}{\Delta}\cdot G(\overset{2}{x},\,\overset{1}{p},\,t) + V[\rho_\psi](\overset{2}{x})G(\overset{2}{x},\,\overset{1}{p},\,t) = 0.$$

Символ оператора, стоящего слева, имеет вид

$$-ih\frac{\partial G}{\partial t}(x,\,p,\,t) + \Bigl(p - ih\frac{\partial}{\partial x}\Bigr)^2 G(x,\,p,\,t) + V[\rho_\psi](x)G(x,\,p,\,t).$$

Он должен быть равен нулю при всех x, p, t. Это условие и дает искомое уравнение для G. Остается только выразить $V[\rho_\psi]$ через G. Это сделано в формуле (2.6), которую мы можем переписать следующим образом:

$$V[\rho_\psi](x,t = \frac{1}{\lambda(h)}\iiiint V(x-y)\rho_G(y,\xi;\eta,\omega;t)\,dy\,d\xi\,d\eta\,d\omega \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} V[\rho_{G(t)}](x), \quad (5.23)$$

где $x, y, \xi, \eta, \omega \in \mathbf{R}^n$, а ρ_G — функция плотности на $\mathbf{R}^{4n}$, отвечающая G:

$$\rho_G(z;w;t) = (2\pi h)^{-n} e^{-\frac{i}{h}\langle z,w\rangle} G(z,t)\overline{\widetilde{G}(w,t)},$$

$z, w \in \mathbf{R}^{2n}$, волна обозначает преобразование Фурье.

Итак, уравнение для G имеет вид

$$-ih\frac{\partial G}{\partial t} + \left(p - ih\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 G + V[\rho_{G(t)}](x)G = 0, \quad (5.24)$$

а начальное условие есть

$$G\big|_{t=0} = \operatorname{smb}\left\{e^{-\frac{\beta}{2}\widehat{H}}\right\}. \quad (5.25)$$

Уравнение (2.9) представлнет собой изученное в гл. II и III нелинейное уравнение квантовой механики. Поэтому достаточно получить разложение по степеням h начальной функции плотности $\rho_{G(0)}$, а затем по схеме главы III мы легко вычислим асимптотику G при $h \to 0$.

По формуле для символа сложной функции ([10], стр. 340) получим

$$\operatorname{smb}\left\{e^{-\frac{\beta}{2}\widehat{H}}\right\}(x,p) = \exp\left\{-\frac{\beta}{2}\widehat{H}_p\right\}(1), \quad (5.26)$$

где

$$\widehat{H}_p = \left(p - ih\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + U(x),$$

1 — единичная функция на $\mathbf{R}^n$.

Далее, из формулы для сложной функции ([10], стр. 40) получим разложение правой части (2.11) по степеням параметра h.

Лемма 1. *Существуют вещественные функции $f_k \in S^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ $k = 0, 1, 2, \ldots, N$ такие, что*

$$\operatorname{smb}\left\{e^{-\frac{\beta}{2}\widehat{H}}\right\}(x, p) = e^{-\frac{\beta}{2}\left(p^2+U(x)\right)}\sum_{k=0}^{N}(-ih)^k f_k(x, p) + h^N f_{N,h}(x, p), \tag{5.27}$$

где остаток $f_{N,h}$ для любого $k \geqslant 0$ удовлетворяет оценке

$$\sup_{h\in[0,1]} \|f_{N,h}\|_{H_k^0(\mathbb{R}^{2n})} \leqslant \mathrm{const}_k.$$

Первые два коэффициента f_0, f_1 имеют следующий вид:

$$f_0(x, p) = 1,$$
$$f_1(x, p) = \frac{\beta^2}{4}\frac{\partial U(x)}{\partial x}p,$$

а остальные вычисляются по рекуррентной формуле, приведенной в [10], *стр.* 40.

Из формулы (2.12) и начального условия (2.10) немедленно получаем следующее разложение для функции плотности $\rho_{G(0)}$:

$$\rho_{G(0)}(z, w) = \sum_{m=0}^{2N}(-ih)^m \sum_{|\alpha|=0}^{m}\sum_{k=0}^{m-|\alpha|} f_{m-k-|\alpha|}(z)\left[\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\beta}{2}\frac{\partial H}{\partial z}\right)^\alpha f_k(z)\right]\times$$
$$\times e^{-\beta H(z)}\frac{(-1)^{|\alpha|+k}}{\alpha!}\left(\frac{\partial}{\partial w}\right)^\alpha \delta(w) + O(h^{2N+1}),$$

где обозначено $H(z) \equiv H(x, p) = p^2 + U(x)$, а $\delta(w)$ есть δ-функция Дирака, сосредоточенная в нуле.

Теперь, повторяя рассуждения § 2 гл. III, мы вычислим разложение $\rho_{G(t)}$ при любом t. Формулы получаются, однако, очень громоздкими. Поэтому мы ограничимся нулевым приближением $N = 0$. Имеем

$$\rho_{G(0)}(z, w) = e^{-\beta H(z)}\delta(w) + O(h). \tag{5.28}$$

Отсюда и из (2.7) получаем

$$\lambda(h) = \int e^{-\beta H(z)}dz + O(h) = \left(\frac{\pi}{\beta}\right)^{n/2}\int e^{-\beta U(x)}dx + O(h). \tag{5.29}$$

Обозначим $z = (x, \xi)$, $w = (p, \omega)$. Тогда система уравнений Власова – Гамильтона, отвечающая (2.9), в силу (2.13) имеет следующий вид:

$$\dot{X} = 2P, \quad \dot{\Xi} = 0, \quad \dot{\Omega} = -2\Xi,$$

$$\dot{P} = -\frac{1}{\lambda(0)} \int V\bigl(X - X(x', p', t)\bigr) e^{-\beta H(x', \xi')} \delta(p') \delta(\omega')\, d\xi'\, dp'\, d\omega'\, dx';$$

$$X\big|_{t=0} = x, \quad \Xi\big|_{t=0} = \xi, \quad P\big|_{t=0} = p, \quad \Omega\big|_{t=0} = \omega.$$

Следовательно,

$$Xi = \xi, \quad \Omega = \omega - 2t\xi,$$

а для пары $Z = \bigl(X(x, p, t);\, P(x, p, t)\bigr)$ мы имеем следующую систему уравнений:

$$\dot{X} = 2P,$$

$$\dot{P} = \frac{(-1)}{\left(\int e^{-\beta U(y)}\, dy\right)} \int e^{-\beta U(x')} \frac{\partial V}{\partial x}\bigl(X - X(x', 0, t)\bigr)\, dx', \tag{5.30}$$

$$X\big|_{t=0} = x, \quad P\big|_{t=0} = p$$

(мы использовали формулу (2.4) для $\lambda(0)$).

Уравнения (2.15) являются искомыми уравнениями Власова – Гамильтона для системы температурных уравнений Хартри (2.3).

Подведем предварительный итог наших построений.

Теорема 6. *Решение* $\psi_j(t) \in L^2(\mathbf{R}^n)$, $j = 1, 2, \dots$ *задачи Коши* (2.3) *для температурных уравнений Хартри существует и задается формулой*

$$\psi_j(t) = e^{-\frac{\beta}{2}E_j} G(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, t)\chi_j,$$

где функция $G(x, p, t)$ *является решением задачи Коши* (2.9), (2.10). *При этом потенциал* (2.2) *имеет следующий вид*:

$$V[\rho_{\psi(t)}](x) = \sum_{k=0}^{N} (-ih)^k V_k(x, t) + (-ih)^{N+1} V_{N,h}(x, t), \tag{5.31}$$

где

$$V_0(x, t) = \int \frac{e^{-\beta U(y)} V\bigl(x - X(y, 0, t)\bigr)\, dy}{\int e^{-\beta U(y')}\, dy'},$$

X — решение системы (2.15), $V_k(t) \in S^\infty(\mathbf{R}^n)$ явно вычисляемые вещественные функции, и при некотором $l \geqslant 0$ справедлива оценка

$$\sup_{t\in[0,T]} \sup_{h\in[0,1]} \left\|V_{N,h}(t)\right\|_{H^{-l}_{-k}} \leqslant \mathrm{const}_{k,T}$$

для любых $T \geqslant 0$, $k \geqslant 0$.

Разложение (2.16) делает задачу Коши (2.3) линейной с точностью до $O(h^{N+1})$, и, более того, все уравнения системы (2.3) расцепляются. Решение каждого из получившихся уравнений строится с помощью канонического оператора, как это было указано в § 3, гл. III.

Введем лагранжево многообразие Λ в $\mathbf{R}^{4n+2}$ по формуле

$$\Lambda = \bigl\{(x,\, p,\, t,\, \xi,\, \omega,\, \theta) \mid x{=}X(x_0,\, p_0,\, t),\ p = p_0,\ \xi = P(x_0,\, p_0,\, t) - p_0,$$
$$\theta = \left|P(x_0,\, p_0,\, t)\right|^2 - V_0\bigl(X(x_0,\, p_0,\, t),\, t\bigr),\ (x_0,\, p_0) \in\ \mathrm{supp}\, e_0 |t| \leqslant T\bigr\},$$

где T — любое фиксированное положительное число, а $e_0 \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{2n})$ — некоторая вещественная функция, равная 1 в окрестности носителя по mod $\bigl(O(h^\infty)\bigr)$ функций ρ_{χ_j} (ср. условие на ρ_{χ_j} в начале параграфа).

Построим на Λ функцию $\varphi^{(N)} = \sum\limits_{k=0}^{N} (-ih)^k \varphi_k$ аналогично лемме 3.1 гл. III так, чтобы функция $(\mathscr{K}_\Lambda^{1/h} \varphi^{(N)})(x,\, p,\, t)$ удовлетворяла уравнению (2.9) с точностью до $O(h^{N+1})$ при $t \leqslant T$ и были выполнены начальные условия

$$\varphi_k\big|_{t=0} = e_0 f_k e^{-\frac{\beta}{2}H}, \quad k = 0,\, 1,\, \ldots,\, N.$$

В результате получим теорему.

Теорема 7. *Функции*

$$\psi_j^{(N)} = e^{\frac{\beta}{2}E_j(h)} (\mathscr{K}_\Lambda^{1/h} \varphi^{(N)})(\overset{2}{x},\, \overset{1}{p},\, t) \chi_j(x,\, h)$$

отличаются от точного решения задачи (2.3) на $O(h^N)$; точнее имеет место оценка

$$\sup_{t\in[0,T]} \left\|\psi_j^{(N)}(t) - \psi_j(t)\right\|_{L^2} \leqslant h^N \cdot \mathrm{const}_{j,T}, \quad j = 1,\, 2,\, \ldots$$

§ 3. Квазиклассическая асимптотика решений системы уравнений нелинейной квантовой механики

1. Постановка задачи. В этом параграфе мы изучим асимптотические решения систем нелинейных уравнений, не распадающихся, в отличие от уравнений Хартри, на отдельные скалярные уравнения носле вычисления потенциала взаимодействия V.

Символы онераторов, которые мы теперь будем рассматривать, являются матричнозначными функциями. Пусть

$$V = (V^{(1)}, \ldots, V^{(M)}) \in \mathbf{R}^M, \quad x \in R^n, \quad t \in \mathbf{R}, \quad h \in (0, 1).$$

Рассмотрим матричнозначную функцию $F(x, p, t, V, h)$ класса $S^\infty(\mathbf{R}^n_x \times \mathbf{R}^n_p \times \mathbf{R}^M_V, m)$,[1] гладко зависящую от t и h. Пусть

$$F(x, p, t, V, h) = \sum_{j=0}^{s} (-ih)^j F_j(x, p, t, V) \tag{5.32}$$

и матрица $F_0(x, p, t, V)$ имеет l различных вещественных собственных значений $\mu_k(x, p, t, V)$ постоянной кратности r_k, не имеет жордановых клеток, и соответствующие собственные подпространства не зависят от V.

Положим

$$V_h^{(k)}(x, t) = \sum_{\nu=1}^{M} \int_0^t d\tau \int_{R^n} f_{k\nu}(x, t, y, \tau) \left|\psi_\nu(y, \tau)\right|^2 dy, \tag{5.33}$$

где $f_{k\nu}(\cdot, t, \cdot, \tau) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{2n})$ — гладкие вещественные функции t, $\tau \in \mathbf{R}$. Потенциалы $V_h^{(k)}$ квадратично зависят от M вектор-функций $\psi_\nu = (\psi_\mu^{(1)}, \ldots, \psi_\nu^{(m)})$.

Рассмотрим задачу Коши для системы нелинейных уравнений, обобщающих уравнения нелинейной оптики с пространственной и временной дисперсией (в частном случае — уравнений Максвелла) [27]:

$$\begin{gathered} -ih\frac{\partial \psi_\nu}{\partial t} + F(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, t, V_h(\overset{2}{x}, t), h)\psi_\nu = 0, \\ \psi_\nu(x, 0) = \psi_{0\nu}(x, h), \quad \nu = 1, \ldots, M. \end{gathered} \tag{5.34}$$

[1] Все элементы матрицы класса $S^\infty(\mathbf{R}^n, m)$ принадлежат $S^\infty(\mathbf{R}^n)$; m — это размер матрицы.

Найдем ее асимптотическое решение при $h \to 0$ с произвольной точностью $O(h^N)$ (для уравнений оптики $h = 1/\omega$, где ω — частота).

Наложим следующие условия на начальные данные (3.3):

а) финитность: все компоненты $\psi_{0\nu}^{(j)}(x, h)$ и их $1/h$-преобразования Фурье $\widehat{\psi}_{0\nu}^{(j)}(p, h)$ вместе со всеми производными вне компактной области (x, p) имеют порядок $O(h^\infty)$, т.е. существует функция $e_0 \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ такая, что

$$\begin{gathered}\psi_{0\nu}^{(j)}(x, h) = e_0(x) e_0(\widehat{p}) \psi_{0\nu}^{(j)} + O(h^\infty),\\ \widehat{p} = -ih\frac{\partial}{\partial x};\end{gathered} \tag{5.35}$$

б) условные предельности: для любого матричнозначного символа $A \in S^\infty(\mathbf{R}^{2n}, m)$

$$\bigl(A(\overset{2}{x}, \overset{1}{p})\psi_{0\nu}, \psi_{0\nu}\bigr) = \sum_{k=0}^{N-1} (-ih)^k \iint \operatorname{tr}\bigl(A(x, p)\rho_\nu^{(k)}(x, p)^*\bigr)\, dx\, dp + O(h^N), \tag{5.36}$$

где $(\chi, \psi) = \int \sum\limits_{i=1}^{m} \chi^{(i)}(x)\overline{\psi^{(i)}(x)}dx$; tr обозначает след, * — эрмитово сопряжение матрицы, $\rho_\nu^{(k)}$ — некоторые $m \times m$-матрицы из финитных обобщенных функций, матрица $\rho_\nu^{(0)}$ — эрмитова.

2. Вычисление средних. В отличие от предыдущих примеров, здесь мы не будем сводить вычисление потенциала взаимодействия к асимптотическому разложению матрицы плотности. Используем другой метод.

Пусть $X^{(j)}(z, \omega, t)$, $P^{(j)}(z, \omega, t)$ — гладкие функции со значениями в $\mathbf{R}^n$ ($j = 1, \ldots, l$; $z, \omega \in \mathbf{R}^n$; $t \in \mathbf{R}$), удовлетворяющие гамильтоновой системе уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{\partial X^{(j)}}{\partial t} &= \frac{\partial \lambda_j}{\partial p}(X^{(j)}, P^{(j)}, t), \quad X^{(j)}(z, \omega, 0) = z,\\ \frac{\partial P^{(j)}}{\partial t} &= -\frac{\partial \lambda_j}{\partial x}(X^{(j)}, P^{(j)}, t), \quad P^{(j)}(z, \omega, 0) = \omega,\end{aligned} \tag{5.37}$$

где $\lambda_j \in C^\infty$ — вещественные функции, причем

$$\lambda_i(x, p, t) \neq \lambda_j(x, p, t), \quad i \neq j. \tag{5.38}$$

Рассмотрим $(n+1)$-мерные лагранжевы многообразия в $(\mathbf{R}^n_x \times \mathbf{R}_t) \times (\mathbf{R}^n_p \times \mathbf{R}_{p^t})$:

$$\Lambda_j(\omega) = \{(x, t, p, p^t) \mid x = X(z, \omega, t),\ p = P(z, \omega, t) - \omega,\\ p^t = -\lambda_j(X, P, t);\quad z \in \mathbf{R}^n\}.$$

Пусть $\mathscr{K}_j = \mathscr{K}^{1/h}_{j,\omega}$ — канонический оператор на семействе Λ_j по mod h^N [13, 18]. Будем искать асимптотическое решение задачи (3.3) в виде

$$\psi_\nu(x, t, h) = \sum_{j=1}^{l} [\mathscr{K}_j a_j](\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, t)\psi_{0\nu}(x, h), \tag{5.39}$$

где

$$a_j(z, \omega, t, h) = \sum_{k=0}^{N-1} (-ih)^k a_j^{(k)}(z, \omega, t), \tag{5.40}$$

$a_j^{(k)}$ — гладкие $m \times m$-матричнозначные функции. Подставим (3.8) в формулу (3.2) для потенциала взаимодействия

$$V_h^{(k)}(y, t) = \sum_{\nu=1}^{M} \sum_{i,j=1}^{l} \int_0^t d\tau \big([\mathscr{K}_i a_i^*](\overset{2}{x}, \overset{3}{p}, \tau) f_{\nu k}(y, t, \overset{2}{x}, \tau) \times \\ \times [\mathscr{K}_j a_j](\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, \tau)\psi_{0\nu}, \psi_{0\nu}\big), \tag{5.41}$$

где a_i^* — сопряженная к матрице a_i. В этой сумме останутся лишь слагаемые при $i = j$, а остальные члены имеют порядок $O(h^\infty)$. В силу условия (3.5), для этого достаточно доказать, что при $i \neq j$

$$\int_0^t \overline{[\mathscr{K}_i \varphi_i]}(\overset{2}{x}, \overset{3}{p}, \tau) f_{\nu,k}(y, t, \overset{2}{x}, \tau)[\mathscr{K}_j \varphi_j](\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, \tau) d\tau = O(h^\infty) \tag{5.42}$$

для любых скалярных функций φ_i, φ_j, причем правая часть $O(h^\infty)$ есть оператор $\varkappa_h(y, \overset{2}{x}, \overset{1}{p}, t)$, символ которого является гладким и быстро убывает по x, p и по $1/h$ со всеми производными. Формула (3.11) вытекает из следующей леммы.

Лемма 2. *При $i \neq j$ и любом $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{2n})$ имеет место соотношение*

$$\int_0^t d\tau \int e^{\frac{i}{h}x(p'-p)} \overline{[\mathcal{K}_i\varphi_i](x,p,\tau)}[\mathcal{K}_j\varphi_j](x,p',\tau)u(x)\,dx = O(h^\infty), \quad (5.43)$$

где остаток $O(h^\infty) = \varkappa_h'(p', p, t)$ является гладким и быстро убывает при $(1/h, p', p) \to \infty$ со всеми производными.

Доказательство. Подставим вместо канонических операторов $\mathcal{K}_i$, $\mathcal{K}_j$ в (3.12) их разложения по особым и неособым картам [13, 18]. Вычислим затем стационарные точки получившихся интегралов. Оказывается, что при условии (3.7) стационарных точек у этих интегралов нет, и поэтому они равны $O(h^\infty)$. Продемонстрируем это лишь в случае неособых карт. Аналогично рассматривается общий случай.

С точностью до несущественных множителей интеграл (3.12) переписывается (в неособых картах) в виде

$$\int_0^t d\tau \int \exp\Big\{\frac{i}{h}\big[x(p'-p) + S_j(x,p',\tau) - S_i(x,p,\tau)\big]\Big\}\times$$
$$\times \frac{\varphi_j(x_0^{(j)}(x,p',\tau),p',\tau)\overline{\varphi}_i(x_0^{(i)}(x,p,\tau),p,\tau)}{\sqrt{|J_j(x,p',\tau)J_i(x,p,\tau)|}}u(x)\,dx, \quad (5.44)$$

где $x_0^{(s)}(x,p,\tau)$ — решение уравнения $x = X^{(s)}(x_0,p,\tau)$, $s = i, j$, а $J_s(x,p,\tau) = \dfrac{DX^{(s)}}{Dx_0}(x^{(s)}(x,p,\tau),p,\tau) \neq 0$. Действия S_i и S_j удовлетворяют уравненинм Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial S_k(x,p,t)}{\partial t} + \lambda_k\Big(x, \frac{\partial S_k(x,p,t)}{\partial x} + p, t\Big) = 0, \quad k = i, j. \quad (5.45)$$

Вычислим стационарную точку $(\widetilde{x}, \widetilde{\tau})$ интеграла (3.13). Она определяется из уравнений

$$\frac{\partial S_j}{\partial x}(\widetilde{x},p',\widetilde{\tau}) + p' = \frac{\partial S_i}{\partial x}(\widetilde{x},p,\widetilde{\tau}) + p \overset{\text{def}}{=} \widetilde{p},$$
$$\frac{\partial S_j}{\partial \tau}(\widetilde{x},p',\widetilde{\tau}) = \frac{\partial S_i}{\partial \tau}(\widetilde{x},p,\widetilde{\tau}).$$

Отсюда и из (3.14) вытекает равенство

$$\lambda_i(\widetilde{x}, \widetilde{p}, \widetilde{\tau}) = \lambda_j(\widetilde{x}, \widetilde{p}, \widetilde{\tau}),$$

которое при $i \neq j$ не может иметь места в силу (3.7). Следовательно, интеграл (3.13) не имеет стационарных точек и равен $O(h^\infty)$. Лемма 3.1 доказана. ■

Теперь в формуле (3.10) остаются лишь слагаемые с индексами $i = j$. Они преобразуются с помощью теорем § 12 гл. V [18]. Главный член получившейся асимптотики V_h имеет вид

$$V_h^{(k)}(y, t) = \sum_{\nu=1}^{M} \sum_{j=1}^{l} \int_0^t d\tau \big(a_j^*(\overset{2}{x}, \overset{3}{p}, \tau) \times$$

$$\times f_{\nu,k}\Big(y, t, X^{(j)}\Big(\overset{2}{x}, \frac{\overset{1}{p} + \overset{3}{p}}{2}, \tau\Big), \tau\Big) a_j(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, \tau)\psi_{0\nu}, \psi_{0\nu}\big) + O(h).$$

Используя (3.5) и (3.9), отсюда найдем окончательное выражение для асимптотики V_h^k. Сформулируем этот результат в виде леммы.

Лемма 3. *Имеет место разложение*

$$V_h(x, t) = V_0(x, t) + \sum_{r=1}^{N-1} (-ih)^r V_r(x, t) + O(h^N), \tag{5.46}$$

где коэффициенты $V_0, \ldots, V_{N-1}$ — *некоторые функции, интегрально зависящие от* $a_j^{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$; $j = 1, \ldots, l$. *Для* V_0 *имеется явное выражение*

$$V_0^{(k)}(x, t) = \sum_{\nu=1}^{M} \sum_{i=1}^{l} \int_0^t d\tau \iint \operatorname{tr}\big[a_i^{(0)}(z, \omega, \tau)^* a_i^{(0)}(z, \omega, \tau) \times$$

$$\times \rho_\nu^{(0)}(z, \omega)\big] f_{k\nu}\big(x, t, X^{(i)}(z, \omega, \tau), \tau\big)\, dz\, d\omega. \tag{5.47}$$

3. Построение асимптотического решения. Подставим разложение (3.15) в уравнение (3.3). Нелинейный оператор $\widehat{F}$ в (3.3) примет вид

$$\widehat{F} = F\big(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, t, V_0(\overset{2}{x}, t)\big) + (-ih)F_1\big(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, t, V_0(\overset{2}{x}, t)\big) + \\ + (-ih)\frac{\partial F_0}{\partial V}\big(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, t, V_0(\overset{2}{x}, t)\big)V_1(\overset{2}{x}, t) + O(h^2). \quad (5.48)$$

Напомним, что через $\mu_j(x, p, t, V)$, $j = 1, \ldots, l$, мы обозначаем собственные числа матрицы $F_0(x, p, t, V)$. Пусть $E_j(x, p, t)$ — соответствующие операторы проектирования в C^m на j-е собственное подпространство, причем

$$E_jE_k = \delta_{j,k}E_j, \quad \sum_{j=1}^{l} E_j = I, \quad \sum_{j=1}^{l} \mu_jE_j = F_0, \\ (F_0 - \mu_j)E_j = E_j(F_0 - \mu_j) = 0. \quad (5.49)$$

Кратность r_j собственного числа μ_j, по условию, не зависит от (x, p, t, V) и $\sum\limits_{j=1}^{l} r_j = m$.

Из (3.17) видно, что главную роль при коммутации оператора $\widehat{F}$ с каноническими операторами (3.8) будет играть матричный символ $F^{(0)}$, где

$$F^{(j)}(x, p, t) = F_j\big(x, p, t, V_0(x, t)\big), \quad j = 0, 1, \ldots$$

Обозначим

$$\lambda_j(x, p, t) = \mu_j\big(x, p, t, V_0(x, t)\big), \quad j = 1, \ldots, l. \quad (5.50)$$

Тогда E_j и λ_j удовлетворяют соотношениям вида (3.18) с заменой F_0 на $F^{(0)}$.

Формула (3.19) задает функцию Гамильтона λ_j для системы уравнений (3.6). Отметим, что λ_j зависит от V_0, а V_0 есть функционал от $X^{(i)}$, $i = 1, \ldots, l$ (см. (3.16)). Таким образом, $\lambda_j(x, p, t)$ интегрально зависит от функций $X^{(i)}$, т. е. система (3.6) представляет собой систему интегро-дифференциальных уравнений, рассмотренную в гл. I.

Отметим, что в формуле (3.16) для V_0 участвуют еще невычисленные матрицы $a_i^{(0)}$. Для их нахождения подставим функцию (3.8) в уравнение (3.3) и воспользуемся теоремой [18] о коммутации

$1/h$-псевдодифференциального оператора с каноническим оператором:

$$
\begin{aligned}
-ih\frac{\partial\psi_\nu}{\partial t} &+ F(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, t, V_h(\overset{2}{x}, t), h))\psi_\nu = \\
&= \sum_{j=1}^{l}[\mathcal{K}_j R_j a_j](\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, t)\psi_{0\nu}(x, h) + (-ih)^N Q_N(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, t, h)\psi_{0\nu}, \quad (5.51)
\end{aligned}
$$

где символ остатка Q_N имеет оценку

$$
\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial p}\right)^\beta Q_N(x, p, t, h)\right| \leqslant \frac{C_{\alpha,\beta,r_1,r_2}(t)h^{-|\alpha|-|\beta|-n}}{\left(1+|x|\right)^{r_1}\left(1+|p|\right)^{r_2}} \tag{5.52}
$$

для любых α, β, r_1, r_2. Операторы R_j в (3.20) разлагаются по степеням h:

$$
R_j = \sum_{r=0}^{N-1}(-ih)^k R_j^{(r)}. \tag{5.53}
$$

Здесь $R_j^{(r)}$ — дифференциальный оператор порядка j с гладкими, не зависящими от h матричнозначными $(m \times m)$ коэффициентами,

$$
\begin{gathered}
R_j^{(0)} = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{l}(\lambda_k - \lambda_j)E_k, \\
E_j R_j^{(1)} E_j = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \Gamma_j\right)E_j,
\end{gathered} \tag{5.54}
$$

причем все функции в (3.23) вычисляются в точке $x = X^{(j)}$, $p = P^{(j)}$. Матрица Γ_j задается формулами

$$
\begin{aligned}
\Gamma_j = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2\lambda_j}{\partial x\partial p}E_j &+ \frac{\partial L_j}{\partial p}\frac{\partial F^{(0)}}{\partial x}E_j - \frac{\partial L_j}{\partial \mu}\frac{\partial F^{(0)}}{\partial t}E_j + \\
&+ E_j F^{(1)} E_j + E_j \frac{\partial F_0}{\partial V}V_1 E_j, \quad (5.55)
\end{aligned}
$$

где $L_j(\mu, x, p) = \left(\mu - \lambda_j(x, p, t)\right)\left(\mu - F^{(0)}(x, p, t)\right)^{-1}$, причем производные от L_j в (3.24) берутся в точке $\mu = -\lambda_j(X^{(j)}, P^{(j)}, t)$.

Кроме того, справедливы тождества

$$\Gamma_j E_j = \Gamma_j, \quad E_j \Gamma_j = \Gamma_j + (1 - E_j)\frac{dE_j}{dt_j}, \tag{5.56}$$

где $\dfrac{d}{dt_j} = \dfrac{\partial}{\partial t} + \dfrac{\partial \lambda_j}{\partial p}\dfrac{\partial}{\partial x} - \dfrac{\partial \lambda_j}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial p}$ — производная вдоль траекторий (3.6).

Подставим в (3.20) разложение (3.9) и потребуем, чтобы в правой части коэффициенты при степенях $(-ih)^k$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, были равны нулю. Получим систему уравнений для матриц $a_j^{(k)}$:

$$\begin{aligned}
&R_j^{(0)} a_j^{(0)} = 0,\\
&R_j^{(0)} a_j^{(1)} + R_j^{(1)} a_j^{(0)} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&R_j^{(0)} a_j^{(N-1)} + \ldots + R_j^{(N-1)} a_j^{(0)} = 0.
\end{aligned} \tag{5.57}$$

Потребуем, чтобы в начальный момент $t = 0$

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{l} a_j^{(0)}(z, \omega, 0) = e_0(z) e_0(\omega) I,\\
&\sum_{j=1}^{l} a_j^{(k)}(z, \omega, 0) = 0, \quad k \geqslant 1,
\end{aligned} \tag{5.58}$$

где I — единичная матрица.

Тогда из (3.8) и начальных условий (3.6) получим

$$\psi_\nu(x, 0, h) = \sum_{j=1}^{l} \sum_{k=0}^{N-1} (-ih)^k a_j^{(k)}(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, 0)\psi_{0\nu}(x, h) =$$
$$= e_0(x) e_0(\widehat{p})\psi_{0\nu}(x, h) = \psi_{0\nu}(x, h) + O(h^\infty).$$

В последнем равенстве мы использовали формулу (3.4).

Таким образом, условия (3.27) гарантируют удовлетворение начальным данным (3.3) с точностью до $O(h^\infty)$.

Решим систему уравнений (3.26), (3.27). Из первого уравнения (3.26) и формулы (3.23) имеем

$$\sum_{k \neq j} (\lambda_k - \lambda_j) E_k a_j^{(0)} = 0$$

или, учитывая, что $\sum\limits_k \lambda_k E_k = F^{(0)}$,

$$F^{(0)} a_j^{(0)} = \lambda_j a_j^{(0)}.$$

Отсюда следует, что область значений $a_j^{(0)}$ (как оператора в C^m) должна принадлежать собственному подпространству $F^{(0)}$, отвечающему собственному числу λ_j, т. е.

$$E_j a_j^{(0)} = a_j^{(0)}. \tag{5.59}$$

Второе уравнение (3.26) запишем в виде

$$E_j R_j^{(1)} E_j a_j^{(1)} + R_j^{(0)} a_j^{(1)} + (1 - E_j) R_j^{(1)} a_j^{(0)} + E_j R_j^{(1)} (1 - E_j) a_j^0 = 0.$$

В силу (3.23) и (3.28), отсюда получаем два равенства:

$$\begin{aligned} &E_j R_j^{(1)} a_j^{(0)} = 0, \\ &R_j^{(0)} a_j^{(1)} + (1 + E_j) R_j^{(1)} a_j^{(0)} = 0. \end{aligned} \tag{5.60}$$

Первое из этих равенств дает *уравнение переноса* для $a_j^{(0)}$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Gamma_j\right) a_j^{(0)} = 0. \tag{5.61}$$

Начальное условие выберем исходя из (3.28) и начальных условий (3.27):

$$a_j^{(0)}(z, \omega, 0) = e_0(z) e_0(\omega) E_j\big(X^{(j)}(z, \omega, 0), P^{(j)}(z, \omega, 0), 0\big). \tag{5.62}$$

Покажем, что решение уравнений (3.30), (3.31) удовлетворяет условию (3.28). Действительно, положим

$$a_j^{(0)} E_j b_j^{(0)}.$$

Тогда для матрицы $b_j^{(0)}$ получим уравнение

$$E_j \frac{\partial b_j^{(0)}}{\partial t} + \left(\frac{d}{dt_j} E_j\right) b_j^{(0)} + \Gamma_j E_j b_j^{(0)} = 0. \tag{5.63}$$

Выберем матрицу $b_j^{(0)}$ так, чтобы она удовлетворяла задаче

$$\frac{\partial b_j^{(0)}}{\partial t} + \Big(\frac{d}{dt_j} E_j\Big) b_j^{(0)} + \Gamma_j b_j^{(0)} = 0, \qquad b_j^{(0)}(z, \omega, 0) = e_0(z) e_0(\omega) I. \tag{5.64}$$

Тогда, в силу (3.25), матрица $b_j^{(0)}$ автоматически будет удовлетворять и уравнению (3.32), а, следовательно, решение задачи (3.30), (3.31) обязательно имеет вид

$$a_j^{(0)}(z, \omega, t) = E_j\big(X^{(j)}(z, \omega, t), P^{(j)}(z, \omega, t), t\big) b_j^{(0)}(z, \omega, t),$$

т. е. условие (3.28) выполнено. Остальные коэффициенты $a_j^{(k)}$, $k = 1$, $2, \ldots$, вычисляются аналогично из системы (3.26).

В качестве примера найдем матрицу $a_j^{(1)}$. Используя (3.29) и (3.23), получим

$$E_k a_j^{(1)} = \frac{1}{(\lambda_j - \lambda_k)} E_k R_j^{(1)} a_j^0, \quad k \neq j. \tag{5.65}$$

Для того чтобы определить саму матрицу $a_j^{(1)} = E_j a_j^{(1)} + \sum\limits_{k \neq j} E_k a_j^{(1)}$, остается найти компоненту $E_j a_j^{(1)}$. Она вычисляется из третьего уравнения системы (3.26):

$$R_j^{(0)} a_j^{(2)} + R_j^{(1)} a_j^{(1)} + R_j^{(2)} a_j^{(0)} = 0.$$

Действительно (см. (3.23)),

$$E_j R_j^{(1)} E_j a_j^{(1)} + E_j R_j^{(2)} a_j^{(0)} + \sum_{k \neq j} E_j R_j^{(1)} E_k a_j^{(1)} = 0$$

или

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t} + \Gamma_j\Big)(E_j a_j) = -E_j R_j^{(2)} a_j^{(0)} + \sum_{k \neq j} \frac{1}{(\lambda_k - \lambda_j)} E_j R_j^{(1)} E_k R_j^{(1)} a_j^{(0)}. \tag{5.66}$$

Поставим начальные условия

$$E_j a_j^{(1)}\Big|_{t=0} = \sum_{k \neq j} \Big(\frac{E_j R_k^{(1)} a_k^{(0)}}{\lambda_j - \lambda_k}\Big)\Big|_{t=0}. \tag{5.67}$$

Тогда условия (3.27) автоматически выполняются. Как и при переходе от (3.30) к (3.33), рассмотрим матрицу $b_j^{(1)}(z,\omega,t)$, удовлетворяющую задаче

$$\begin{gathered}\Big(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{dE_j}{dt_j}+\Gamma_j\Big)b_j^{(1)}=\Big(\sum_{k\neq j}\frac{R_j^{(1)}E_kR_j^{(1)}E_j}{\lambda_k-\lambda_j}-R_j^{(2)}E_j\Big)b_j^{(0)},\\ b_j^{(1)}(z,\omega,0)=\sum_{k\neq j}\Big(\frac{R_k^{(1)}E_kb_k^{(0)}}{\lambda_j-\lambda_k}\Big)(z,\omega,0).\end{gathered}\tag{5.68}$$

Тогда решение (3.35), (3.36) имеет вид

$$E_ja_j^{(1)}=E_jb_j^{(1)}.$$

Таким образом, в силу (3.34),

$$a_j^{(1)}=E_jb_j^{(1)}+\sum_{k\neq j}\frac{1}{(\lambda_j-\lambda_k)}E_kR_j^{(1)}E_jb_j^{(0)}.$$

Аналогично вычисляются и остальные матрицы $a_j^{(k)}$, $k=2,\ldots,N-1$; при этом

$$a_j^{(k)}=E_jb_j^{(k)}+\sum_{s\neq j}E_sa_j^{(k)},\tag{5.69}$$

где матрицы $E_sa_j^{(k)}$ определяются явно через $a_j^{(k-1)},\ldots,a_j^{(0)}$ аналогично (3.34):

$$E_sa_j^{(k)}=\frac{1}{(\lambda_j-\lambda_s)}E_sf_j^{(k)}(a_j^{(0)},\ldots,a_j^{(k-1)}),$$

а матрица $b_j^{(k)}$ удовлетворяет задаче Коши вида

$$\begin{gathered}\Big(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{dE_j}{dt}+\Gamma_j\Big)b_j^{(k)}=D_j^{(k)}(b_j^{(0)},\ldots,b_j^{(k-1)}),\\ b_j^{(k)}\big|_{t=0}=\sum_{s=j}\Big(\frac{f_s^{(k)}(a_s^{(0)},\ldots,a_s^{(k-1)})}{\lambda_j-\lambda_s}\Big)\Big|_{t=0}\end{gathered}\tag{5.70}$$

с известными функциями $D_j^{(k)}$ в правой части и $f_s^{(k)}$ в начальных данных.

Подведем итог. Считая известными решения $X^{(j)}$, $P^{(j)}$ системы (3.6), мы определили потенциалы $V_0^{(k)}$ (см. (3.16)) и свели вычисление матриц

$$a_j^{(k)},\ k = 0, \ldots, N-1, \quad j = 1, \ldots, l,$$

к решению обыкновенных дифференциальных уравнений вида (3.39).

Таким образом, из (3.6), (3.16), (3.19), (3.33) получаем следующую систему уравнений для функций X^j, P^j:

$$\text{(I)} \quad \begin{aligned} \frac{\partial X^{(j)}}{\partial t} &= \frac{\partial \lambda_j}{\partial p}(X^{(j)}, P^{(j)}, t), \quad X^{(j)}(z, \omega, 0) = z; \\ \frac{\partial P^{(j)}}{\partial t} &= -\frac{\partial \lambda_j}{\partial x}(X^{(j)}, P^{(j)}, t), \quad P^{(j)}(z, \omega, 0) = \omega, \end{aligned}$$

и матриц $b_j^{(0)}$:

$$\text{(II)} \quad \begin{gathered} \frac{\partial b_j^{(0)}}{\partial t} + \left[\frac{\partial}{\partial t} E_j\big(X^{(j)}(z, \omega, t), P^{(j)}(z, \omega, t), t\big)\right] b_j^{(0)} + \Gamma_j b_j^{(0)} = 0, \\ b_j^{(0)}(z, \omega, 0) = e_0(z) e_0(\omega) I, \end{gathered}$$

где

$$\begin{gathered} \lambda_j(x, p, t) = \mu_j\big(x, p, t, V_0(x, t)\big), \\ E_j(x, p, t) = P_j\big(x, p, t, V_0(x, t)\big); \quad j = 1, \ldots, l, \end{gathered}$$

а потенциал взаимодействия V_0 задается формулами

$$\begin{aligned} V_0^{(k)}(x, t) = \sum_{\nu=1}^{M} \sum_{i=1}^{l} \int_0^t d\tau \iint f_{k\nu}\big(x, t, X^{(i)}(z, \omega, \tau), \tau\big) \times \\ \times \operatorname{tr}\big[b_i^{(0)}(z, \omega, \tau)^* E_i\big(X^{(i)}(z, \omega, \tau) P^{(i)}(z, \omega, \tau), \tau\big)^* \times \\ \times E_i\big(X^{(i)}(z, \omega, \tau), P^{(i)}(z, \omega, \tau), \tau\big) \times \\ \times b_i^{(0)}(z, \omega, \tau) \rho_\nu^{(0)}(z, \omega)\big]\, dz\, d\omega, \quad k = 1, \ldots, M. \end{aligned}$$

Матрица Γ_j здесь определена формулой (3.24).

Система (I), (II) является системой обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка, изученных в гл. I. Она имеет решение на некотором отрезке $[0, T_0]$. На этом отрезке времени из формулы (3.38) мы определим все коэффициенты $a_j^{(k)}$ разложения (3.9), т.е. вычислим функции ψ_ν из (3.8). Итак, доказана

Теорема 8. *Вектор-функции* $\psi_\nu(x,t,h)=\sum\limits_{j=1}^{l}[\mathscr{K}_j a_j](\overset{2}{x},\overset{1}{p},t)\psi_{0\nu}(x,h)$ *удовлетворяют задаче*

$$-ih\frac{\partial\psi_\nu}{\partial t}+F(\overset{2}{x},\overset{1}{p},t,V_h(\overset{2}{x},t),h)\psi_\nu=(-ih)^N R_{N,\nu}(x,t,h),$$
$$\psi_\nu(x,0,h)=\psi_{0\nu}(x,h)+O(h^\infty),\quad \nu=1,\dots,M,$$

причем «невязки» $R_{N,\nu}$ *имеют следующую оценку в пространстве* W_2^k:

$$\sup_{\tau\in[0,T_0]}\left\|R_{N,\nu}(\,\cdot\,,\tau,h)\right\|_{W_2^k}d\tau\leqslant C_k h^{-k},\quad k=0,1,2,\dots,$$
$$\nu=1,\dots,M.$$

Пример 15. Рассмотрим систему уравнений нелинейной квантовой механики:

$$-ih\frac{\partial\psi}{\partial t}=e\Phi+c\Big(-ih\frac{\partial}{\partial x}-\frac{e}{c}A\Big)\alpha\psi+mc^2\beta\psi=0, \tag{5.71}$$

$$\Box\Phi=\frac{4\pi e}{c}|\psi|^2,\quad \Box A\frac{4\pi e}{c}\overline{\psi}\alpha\psi, \tag{5.72}$$

где Φ, A — скалярный и векторный потенциалы электромагнитного поля, $\alpha=\begin{pmatrix}0&\sigma\\ \sigma&0\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}1&0\\ 0&-1\end{pmatrix}$ — 4×4-матрицы, $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$ — матрицы Паули, ψ — четырехкомпонентная вектор-функция. Гамильтониан уравнения (3.40) имеет два собственных числа $\lambda_\pm(x,p,t)=$ $=e\Phi(x,t)\mp c\sqrt{m^2c^2+\left|p-\frac{e}{c}A(x,t)\right|^2}$, $x,p\in\mathbf{R}^3$; знаки $\pm$ соответствуют уравнениям для электрона и позитрона. Поставим начальные условия для (3.40), отвечающее электрону:

$$\psi(x,0)=e^{\frac{i}{h}S_0(x)}\chi_0(x)e_0(x), \tag{5.73}$$

где $e_0 \in C_0^\infty(\mathbf{R}^3)$, $\chi_0 = \begin{pmatrix} \chi_0' \\ \chi_0'' \end{pmatrix}$ — собственная функция, отвечающая $\lambda_+(x, \nabla S_0(x), 0)$, т. е.

$$\chi_0'(x)\Big(mc + \sqrt{m^2c^2 + \Big|\nabla S_0(x) - \frac{e}{c}A(x, 0)\Big|^2}\Big) + \\ + \Big(\nabla S_0(x) - \frac{e}{c}A(x, 0)\Big)\sigma\chi_0''(x) = 0.$$

Выпишем систему Гамильтона:

$$\begin{gathered} \dot{x} = H_p, \quad \dot{p} = -H_x, \quad \dot{t} = H_{p^t}, \quad \dot{p}^t = -H_t, \\ x\big|_{\tau=0} = x_0, \quad p\big|_{\tau=0} = \nabla S_0(x_0), \quad t\big|_{\tau=0} = 0, \\ p^t\big|_{\tau=0} = \lambda_+(x_0, \nabla S_0(x_0), 0), \end{gathered} \tag{5.74}$$

где $H(x, t, p, p^t) = \big(p^t - e\Phi(x, t)\big)^2 - c^2\Big|p - \frac{e}{c}A(x, t)\Big|^2 - m^2c^2$, а точка обозначает дифференцирование по τ. Кроме того, рассмотрим уравнение вращения спина для (3.40) (см. выше уравнение (II) или [13], стр. 323):

$$i\frac{\partial\chi}{\partial\tau} = \frac{e}{2mc}(\mathscr{B}\sigma' + i\mathscr{E}\alpha)\chi, \ \big| \ \chi_{\tau=0} = \chi_0(x_0)e_0(x_0), \tag{5.75}$$

где $\sigma' = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}$ — 4-рядные матрицы Паули, $\mathscr{B} = \operatorname{rot} A$ — магнитная индукция, $\mathscr{E} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}$ — электрическая напряженность, причем вектор-функции $\mathscr{B}$ и $\mathscr{E}$ берутся в точке $x = x(x_0, t)$. Уравнения для потенциалов электромагнитного поля (3.41) в пределе ($h \to 0$) примут вид

$$\Box\Phi = \frac{4\pi e}{c}|\chi^2|/|J|, \quad \Box A = \frac{4\pi e}{c}\overline{\chi}\alpha\chi/|J|, \tag{5.76}$$

где $J = Dx/Dx_0$.

Пусть Φ, A, χ, x, t, p, p^t — решение характеристической системы (3.43)–(3.45). Рассмотрим лагранжево многообразие в $\mathbf{R}_x^n \times \mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_p^n \times \mathbf{R}_{p^t}$:

$$\Lambda^{n+1} = \big\{x = x(x_0, \tau), \ t = t(x_0, \tau), \ p = p(x_0, \tau), \\ p^t = p^t(x_0, \tau), \ x_0 \in \operatorname{supp} e_0, \ \tau \in \mathbf{R}\big\}.$$

Пусть $\mathscr{K}^{1/h}$ — канонический оператор на нем с точностью до $O(h)$. Из теоремы 3.1 получим следующий результат.

Теорема 9. *Существует отрезок* $[0, T_0]$, *на котором функция*

$$\psi(x, t) = \mathscr{K}^{1/h}(\chi)$$

удовлетворяет системе уравнений (3.40), (3.41) *с точностью до* $O(h^2)$ *(в норме* L^2*).*

Аналогичный результат можно получить при всех $t \in \mathbb{R}$, накладывая некоторые условия «общего положения» на многообразие Λ.

Замечание. Нетрудно убедиться, что система (3.43)–(3.45) является записанной в лагранжевых координатах системой уравнений релятивистской полевой гидродинамики заряженной жидкости:

$$m\Big(\frac{\partial}{\partial t} + v\nabla\Big)\frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = e\mathscr{E} + \frac{e}{c}[v \times \mathscr{B}],$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho v = 0,$$

$$\Box\Phi = 4\pi\rho, \quad \Box A = 4\pi\rho v.$$

Литература

[1] Маслов В. П., Экспертизы и эксперименты, Новый Мир, № 1, 1991, 243–252.

[2] Квасников И. А., Термодинамика и статистическая физика, Изд. Университет, 1987.

[3] Кадомцев В. В., Коллективные явления в плазме, М., «Наука», 1976.

[4] Schönberg M., Application of second quantization method to the classical statistical mechanics, I, Nuovo cim., 1952, Т. 9, № 12, с. 1139; II, 1953, Т. 10, № 4, с. 419.

[5] Фон Нейман, Математические основы квантовой механики, М., «Наука», 1984.

[6] Маслов В. П., Уравнение Колмогорова – Феллера и стохастическая модель квантовой механики, Итоги науки и техники, М., ВИНИТИ, 1982,Т. 19, 55–84.

[7] Combe Ph., Guerra F., Rodrigues R., Sirugue M., Sirugue – Collin M., Quantum dynamical time evolution as stochastic flow on phase space, «Physica», 1984, V. 124A, 561–574.

[8] Bertraud J., Gaveau B., Rideau G., Poisson processes and quantum field theory: a model, Lect. Notes in Math., 1985, V. 1109, 74–80.

[9] Blanchard Ph., Sirugue M., Large deviations from classical paths, Comm. Math. Phys., 1985, V. 101, 173–185.

[10] Маслов В. П., Мосолов П. П., Изв. АН СССР, серия математическан, 1978, т. 42, № 5, 1063–1100.

[11] Maslov V. P. and Shvedov O. Yu, An Asymptotic Formula for the N-Particle Density Function as $N \to \infty$ and a Violation of the Chaos Hypothesis, Russian Journal of Mathematical Physics, vol. 2, no. 2 (1994), pp. 217–234.

[12] Боголюбов Н. Н., Проблемы динамической теории в статистической физике. М.-Л., 1946.

[13] Маслов В. П., Комплексные марковские цепи и континуальный интеграл Фейнмана для нелинейных уравнений. М., «Наука», 1976 (РЖ Мат., 1976, 11Б972К).

[14] Маслов В. П., Операторные методы. М., «Наука», 1973.

[15] Чеботарев А. М., Представление решения уравнения типа Хартри в виде T-отображения. Докл. АН СССР, 1975, 222, №5, 1037–1040 (РЖ Мат., 1976, 1А616).

[16] Маслов В. П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях, М.: «Наука», 1977.

[17] Maslov V. P. Non-standart characteristics in asymptotic problems, International Congress of Mathematicians, Warsaw, 1983.

[18] Фейнман Р., Хиббс А., Квантован механика и интегралы по траекториям, М., «Мир», 1968.

[19] Химе Э., Филлипс Р., Функциональный анализ и нолугруппы. М., ИЛ, 1962.

[20] Власов А. А., Теория многих частиц, Гостехиздат, 1950.

[21] Власов А. А., Нелокальная статистическая механика. М., «Наука», 1978.

[22] Во Хань Фук, Четвериков В. М., Обобщенные солитоны уравнения Шрёдингера с унитаряой нелинейностью, Теор. и матем. физ., 1978, 36, №3, 345–351.

[23] Маслов В. П., Уравнении самосогласованного поля., В сб. «Соврем. пробл. мат.», т. 11 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР), М., 1978.

[24] Маслов В. П., Назайкинский В. Е., Алгебры с общими перестановочными соотношениями и их приложения, В сб. «Соврем. пробл. мат.», т. 13, 5–143 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР), М., 1978.

[25] Чеботарев А. М., О T-отображении, связанном с уравнением Хартри, Матем. заметки, 1977, 21, № 5, 605–614.

[26] Чеботарев А. М. Континуальные интегралы и T-отображения. Докл. АН СССР, 1975, 225, № 4, 763–765 (РЖ Мат., 1976, 5Б742).

[27] Шварц А. С., Существование солитонов и обобщенных солитонов у одномерных нелинейных уравнений, Теор. и матем. физ., 1975, 24, 333–346.

[28] Боголюбов Н. Н., О теории сверхтекучести, Изв. АН СССР, серия физика, т. II, № 1, 1947, 77–90.

[29] Маслов В. П., О новом вариационном принципе для фермионов, Мат. заметки. т. 62, № 4, 1997, 633–634.

[30] Маслов В. П., Теорема о классическом пределе при $h \to \infty$ для N взаимодействующих фермионов, Мат. заметки, т. 63, № 1, 1998, 145–146.

[31] Маслов В. П., Шведов О. Ю., Квантование в окрестности классических решений в задаче для N тел и сверхтекучесть, Теорет. мат. физ., т. 98, № 2, 1994, 266–288.

[32] Маслов В. П., Мищенко А. С., Квазиклассическая асимптотика квазичастиц, Матем. сборник, т. 189, № 6, 85–116.

[33] Маслов В. П., Кучеренко В. В., Спектр системы N-бозонов при $N \to \infty$, Докл. РАН, т. 348, № 2, 1996, 169–172.

[34] Маслов В. П., Об интегральном уравнении вида $u(x) = F(x) + \int G(x, \xi) u_+^{k/2}(\xi)\, d\xi / u_+^{k/2}(\xi)\, d\xi$. Функционал. анал. и приложения, т. 28, № 1, 1994, 41–50.

[35] Маслов В. П., Об интегральном уравнении вида $u(x) = F(x) + \int G(x, \xi) u_+{}^{(n-2)/2}(\xi) d\xi / u_+{}^{(n-2)/2}(\xi) d\xi$ в случае $n = 2$ и $n = 3$, Мат. заметки, т. 55, № 3, 1994, 96–108.

[36] Маслов В. П., Квазиклассическая асимптотика собственных функций уравнения Шрёдингера – Хартри. Новый вид классического самосогласованного поля, Теорет. мат. физ., т. 99, № 1, 1994, 141–154.

[37] Achmanov S. A., Hochlov R. V., Suchorukov A. P., Self-defokusing, and self-modulation in nonliner medium, «Lasergaud buch». V. 2, Holland-press, 1972, 5–108.

[38] Kato T., Quasi linear equation of evolution, with applications to partial differential equations. Lect. Notes. Math., 1975, 448, 25–70.

[39] Langmuir I., Blodgett K., Currents limited by space charge between concentric spheres. Phys. Rev., 1924, 24, № 1, 49–59.

[40] Lieb E. H., Simon B., The Hartree-Fock theory for Coulumb systems., Comm. math. phys., 1977, 53, № 3, 185–194.

[41] Maslov V. P., Quasi-particles associated with isoenergetic manifolds corresponding to classical self-consistent fields, I–XI, Russ. Juor. of Math. Phys. v. 2–5, 1995–1997.

[42] В. П. Маслов, Геометрическое квантование термодинамики и статистические поправки в критических точках, Теор. и мат. физ., т. 101, №3, 1994.

[43] В. П. Маслов, Аналитическое продолжение асимнтотических формул и аксиоматика термодинамики и квазитермодинамики, Функц. анал. и его приложепин, т. 28, №4, 1994.

[44] В. П. Маслов, Геометрическое квантование термодинамики, фазовые переходы и асимптотика в критических точках, Мат. заметки, т. 56, №3, 1994.

[45] В. П. Маслов, Обобщение аксиомы Гиббса, геометрическая классификация фазовых переходов и асимптотика в критических точках, Докл. РАН, т. 340, №2, 1995.

[46] В. П. Маслов, О новом методе вторичного кваятования фермионов, Мат. заметки, т. 61, №4, 1997.

[47] В. П. Маслов, О фазовых переходах для классических фермионов, Мат. заметки, т. 63, №4, 1998.

[48] В. П. Маслов, О фазовых переходах для классических бозонов, фермионов и элементарных классических частиц, Мат. заметки, т. 63, №5, 1998.

[49] В. П. Маслов, О фазовых переходах для классических фермионов, Мат. заметки, т. 64, №3, 1998.

[50] В. П. Маслов, А. М. Чеботарев, Логарифмическая асимптотика решения задачи больших уклонений для уравнения Вольцмана с малым переносом момента, Мат. заметки, т. 64, №1, 1998.

[51] В. П. Маслов, О методе осреднения для N взаимодействующих фермионов при $N \to \infty$, Докл. РАН, т. 369, №3, 1999.

[52] В. П. Маслов, Туннельная асимптотика для неидеального ферми-газа, Докл. РАН, т. 369, №5, 1999.

[53] В. П. Маслов, Пары Купера и осреднение операторов в неидеальном бозе-газе. Докл. РАН, т. 369, №4, 1999.

[54] В. П. Маслов, О сверхтекучести в жидком гелии, Мат. заметки, т. 66, №10, 1999.

[55] В. П. Маслов, О высокотемпературной сверхпроводимости, Мат. заметки, т. 66, №11, 1999.

[56] В. П. Маслов, Асимптотика при $N \to \infty$ для N классических фермионов и бозонов, Мат. заметки, т. 66, №12, 1999.

[57] В. П. Маслов, Задача фазовых переходов в сверхпроводящей и нормальной жидкости, Теор. и мат. физ., т. 121, №3, 1999.

[58] В. П. Маслов, О методе осреднения для квантовой задачи многих тел, Функ. ан. и его прилож., т. 33, №4, 1999.

[59] В. П. Маслов, Обобщение метода вторичного квантования на случай специальных тензорных произведений пространств Фока и квантование свободной энергии, Функ. ан. и его прилож., т. 34, №4, 2000.

[60] В. П. Маслов, Квантование термодинамики, Вестник МГУ, №6, 2000.

[61] В. П. Маслов, О способе осреднения для большого числа кластеров. Фазовые переходы, Теор. и мат. физ., т. 125, №2, 2000.

[62] Ф. А. Березин, Метод вторичного квантования, «Наука», Москва 1955.

[63] В. П. Маслов, С. Э. Таривердиев, Асимптотика уравнения Колмогорова – Феллера для большого числа частиц, Итоги науки и техн., ВИНИТИ, т. 19, 1982.

[64] В. П. Маслов, О. Ю. Шведов, Метод комплексного ростка в многочастичных задачах и задачах квантовой теории поля, УРСС, Москва, 2000.

[65] В. П. Маслов, А. М. Чеботарев, О втором члене логарифмической асимптотики функциональных интегралов, Итоги науки и техники ВИНИТИ, т. 19, 1982.

[66] В. П. Маслов, О. Ю. Шведов, Туннельная асимптотика во вторично квантованных системах, Докл. РАН, т. 341, №1, 1995.

[67] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Статистическая физика, «Наука», Москва, 1964, (Теор. физика, Том V).

[68] Ю. Б. Румер, М. Ш. Рынкин, Термодинамика, статистическая физика и кинетика, «Наука», Москва, 1972.

[69] Л. Бриллюэн, Квантовая статистика, Гос. научно-техническое издательство Украины, Киев, 1934.

[70] Макс Планк, Избранные труды, «Наука», Москва.,1975.

[71] В. П. Маслов, Теория возмущений и асимптотические методы, Москва, «Наука», 1988.

[72] Glassgold A. E., Kaufman A. N., Watson K. M. // Phys. Rev., 1960, v. 120, p. 660.

[73] Lee T. D., Yang C. N. // Phys. Rev., 1959, v. 113, p. 1419.

[74] Girardeau M. // J. of Math. Phys., 1962, v. 3, p. 131.

[75] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, Москва: Наука, 1964, (Теор. физика, Том III).

[76] Л. Д. Ландау, К теории сверхтекучести, ДАН СССР, т. 61, №253, 1948.

[77] Н. Н. Боголюбов, Избранные научные труды, т. 2, Киев, Наука, 1970.

[78] П. Дирак, Основы квантовой механики, монография, 1935.

[79] Е. С. Вентцель, Теория вероятностей, 1962.

[80] Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, Статистическая физика, Москва, Наука, 1979.

Маслов Виктор Павлович

Квантование термодинамики и ультравторичное квантование

Дизайнер М. В. Ботя
Технический редактор А. В. Широбоков
Компьютерная верстка С. В. Высоцкий
Корректор М. А. Ложкина

Подписано в печать 18.11.01. Формат $60 \times 84^1/_{16}$.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 22,32. Уч. изд. л. 22,44.
Гарнитура Журнальная. Бумага офсетная №1.
Тираж 1500 экз. Заказ №

АНО «Институт компьютерных исследований»
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
Лицензия на издательскую деятельность ЛУ №084 от 03.04.00.
http://rcd.ru E-mail: borisov@rcd.ru