ПОСЛЕДНИЕ РАБОТЫ А. ПУАНКАРЕ

R&C Dynamics
РХД
Москва • Ижевск
2001

УДК 519

Пуанкаре А.
Последние работы. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001, 208 стр.

В книге собраны основные математические и естественно-научные работы периода 1900–1912 г. Одно из важных мест занимают его доклады на математических конгрессах и геттингенские лекции. Большинство работ ранее на русский язык не переводились.

Представляют интерес для широкого круга читателей, интересующихся математикой и естествознанием.

ISBN 5-93972-038-2

http://rcd.ru

Содержание

ОТ РЕДАКЦИИ

В этой книге собраны работы великого французского математика А. Пуанкаре (1854–1912), написанные, в основном, в последнее десятилетие его жизни. В этот период Пуанкаре, продолжая получать замечательные результаты в математических дисциплинах, начал уделять большое внимание философским вопросам математических наук, физическим теориям, популяризации науки и ее преподаванию. Об этом свидетельствуют его выступления на двух математических конгрессах (1900, 1908), где он, в противовес Д. Гильберту, отстаивал свою точку зрения на математику как науку, тесно связанную с физикой, вопросами техники, и подчеркивал огромное влияние математики на весь процесс человеческого мышления и ее роль в познании реального мира.

В некотором смысле, эти идеи Пуанкаре только сейчас начинают проникать во все здание науки — после засилья формального подхода Гильберта, которое привело к «бурбакизации» математики.

Большинство работ, собранных в книге, никогда не переводились на русский язык. В их переводе приняли участие Ю. А. Данилов, М. Финкельберг, А. В. Борисов, И. С. Мамаев.

Само издание книги вряд ли было бы возможно без вдохновляющих бесед с В. И. Арнольдом и В. В. Козловым, которые указали нам на реальную роль А. Пуанкаре в формировании современной математики. Надеемся, что издание этой книги будет полезно широкому кругу читателей — от студентов до специалистов-математиков, а также историков науки. Возможно, что для молодых читателей она станет тем звеном, которое необходимо для того, чтобы выбрать математику в качестве основного занятия, и нацелит на новые достижения и открытия.

БУДУЩЕЕ МАТЕМАТИКИ

Из доклада на конгрессе[1]

Мы рассматриваем различные отдельные науки, которые вместе образуют математику. Мы видим, чего достигла каждая из них, к чему они стремятся и чего можно ожидать в будущем. Если эти рассмотрения справедливы, мы должны заметить, что великие достижения прошлого случались тогда, когда эти науки сближались, когда осознавалось подобие их форм, несмотря на различие в предмете, когда они становились моделями друг для друга, так, чтобы каждая из них могла воспользоваться достижениями другой. В то же время мы должны предвидеть будущий прогресс в сближениях подобного рода.

Арифметика

Прогресс в арифметике оказался более медленным, чем в алгебре и в анализе. Легко понять, почему. Чувство непрерывности — бесценный проводник, которого не хватает арифметике. Каждое целое число отделено от других и, если можно так выразиться, имеет свою индивидуальную особенность. Каждое из них является своего рода исключением, вот почему в теории чисел очень редко появляются общие теоремы, вот почему даже существующие теоремы более скрыты и дольше ускользают от исследователей.

Если арифметика отстала от алгебры и анализа, то лучше всего для нее будет искать модели в этих науках, чтобы воспользоваться

[1] На 4-м международном конгрессе математиков (Рим, апрель, 1908) А. Пуанкаре согласился подготовить доклад о будущем математики, который был зачитан г-ном Дарбу на общем собрании 10 апреля (ввиду недомогания Пуанкаре). В этом томе мы сочли необходимым воспроизвести часть, касающуюся арифметики и алгебры. С одной стороны она служит комментарием и пояснением к общим идеям, руководившим А. Пуанкаре в его исследованиях и работах, опубликованных ниже. С другой стороны, она оказывается на удивление пророческой и характеризует математическую мысль гения, который был более чувствителен к богатству и мощи методов, чем к деталям результатов.

их прогрессом. Арифметик должен основываться на аналогиях с алгеброй. Эти аналогии многочисленны, и если в большинстве случаев они еще не достаточно хорошо изучены, чтобы стать полезными, то их по крайней мере предчувствуют уже давно и даже язык этих двух наук показывает, что они уже замечены. Так, например, происходит, когда говорят о трансцендентных числах и когда отдают себе отчет, что будущая классификация этих чисел уже имеет своим прообразом классификацию трансцендентных функций. Однако еще не очень хорошо видно, каким способом можно будет перейти от одной классификации к другой. Но если бы этот способ был очевиден, то переход был бы уже сделан и не являлся бы вопросом будущего.

Первый пример, который приходит на ум, это теория сравнений, где мы находим точную параллель с теорией алгебраических уравнений. Конечно, эта параллель будет еще дополняться и уточняться, как например в теориях алгебраических кривых и сравнений от двух переменных. И когда задачи о сравнениях со многими переменными будут решены, это станет первым шагом к решению многих вопросов неопределенного анализа[1].

Другой пример, где аналогию заметили не сразу, предоставляет нам теория полей и идеалов. Чтобы подойти к нему с другой стороны, рассмотрим кривые, высеченные на поверхности. Настоящим числам соответствуют полные пересечения, простым идеалам («идеальным числам») — неразложимые кривые. Другие классы идеалов тоже имеют свои аналоги.

Несомненно, эта аналогия не может не внести ясность в теорию идеалов или в теорию поверхностей, или же в обе сразу[2].

Теория форм, а особенно квадратичных форм, тесно связана с теорией идеалов. Если среди арифметических теорий она оформилась одной из первых, то причина этого — в достижении единства этой теории через рассмотрение групп линейных преобразований.

Эти преобразования позволили провести классификацию, и, следовательно, наведение порядка. Не исключено, что все плоды введения групп преобразований, которых можно было ожидать, уже собраны. Но

[1]Рассуждения такого рода привели к множественным достижениям в теории диофантовых уравнений.

[2]Значимость теории идеалов в кольце многочленов и современной теории алгебраических функций хорошо известна. Здесь можно увидеть силу пророческого дара А. Пуанкаре.

раз уж линейные преобразования порождают такие перспективы в геометрии, а геометрия аналитическая доставляет нам много других преобразований (как, например, бирациональные преобразования алгебраической кривой), то нужно воспользоваться ими и искать арифметические аналоги. Без всякого сомнения, они образуют разрывные группы, для которых прежде всего необходимо изучать фундаментальную область, являющуюся ключом ко всему остальному. В этом исследовании, несомненно, не обойтись без *Геометрии чисел* Минковского.

Идея, которая еще не использована до конца — это идея Эрмита ввести непрерывные переменные в теорию чисел. Поясним, что она означает. Возьмем в качестве начальных данных определенную квадратичную форму F' и другую форму F, и применим к ним одно и то же преобразование. Если преобразованная форма F' становится приведенной, то говорят, что преобразование приведено, а также, что преобразованная форма F приведена. Получается, что если форма F' сохраняется некоторыми преобразованиями, у F может быть несколько приведенных форм. Но это неудобство существенно, и его никак нельзя избежать. Впрочем, существование приведенных форм и преобразований не мешает классификации форм. Ясно, что эта идея, которую до сих пор применяли только к очень специальным формам и преобразованиям, может быть распространена на группы нелинейных преобразований. Она несет в себе очень многое и отнюдь не исчерпана[1].

Областью арифметики, в которой единство кажется совершенно отсутствующим, является теория простых чисел. Здесь нет ничего, кроме асимптотических законов, и ничего бо́льшего ожидать не приходится. Но эти законы изолированы, и подойти к ним можно только непересекающимися дорогами, по-видимому, не сообщающимися между собой. Кажется, я предчувствую, откуда явится желанное единство, но вижу это очень смутно. Несомненно, все сведется к изучению семейства трансцендентных функций, которое позволит вычислить асимптотически некоторые функции больших чисел путем исследования их особых точек и применения метода Дарбу[2].

---

[1] Сам А. Пуанкаре привел примеры таких групп нелинейных преобразований, и они были впоследствии изучены. (Mémorie 348, p. 483 и примечания)

[2] Известно, что наиболее важный прогресс в теории простых чисел был достигнут при аналитическом изучении ζ-функции Римана.

Алгебра

Теория алгебраических уравнений уже давно привлекает внимание геометров. К ней можно подойти многочисленными и разнообразными способами. Самой важной, конечно, является теория групп, к которой мы возвращаемся. Но имеется также вопрос о численном нахождении корней и вопрос о количестве вещественных корней. Лагерр показал, что способом Штурма исчерпывается не все. Остается место для изучения систем инвариантов, не меняющих знак, когда число вещественных корней остается тем же. Можно также составлять степенные ряды, представляющие функции, особые точки которых совпадают с корнями алгебраического уравнения (например, рациональные функции со знаменателем, равным ведущему члену этого уравнения). Коэффициенты при членах высшего порядка задают нам корни с большей или меньшей точностью. Здесь мы имеем в зародыше способ приближенных вычислений, которые можно изучать систематически.

Вот уже 40 лет, как появилось учение об инвариантах алгебраических форм, которое, казалось, поглотит всю алгебру. Сейчас оно разжаловано, и тем не менее оно еще не исчерпало себя. Надо только не ограничиваться, к примеру, инвариантами линейных преобразований, а изучать инварианты произвольных групп. Ранее известные теоремы позволят нам найти другие, более общие, которые начнут группироваться вокруг прежних, как кристалл подпитывается раствором. Что касается известной теоремы Гордана об ограниченности числа различных инвариантов, чье доказательство замечательно упростил Гильберт, мне кажется, что она приводит нас к гораздо более общему вопросу: если имеется бесконечно много многочленов, алгебраически зависящих от конечного числа среди них, можно ли всегда получить эти многочлены путем сложения и умножения из конечного набора[1]?

Не надо думать, что алгебра закончена, т. к. она обеспечивает нам правила для формирования всех возможных комбинаций. Остается найти интересующие нас комбинации, удовлетворяющие тому или иному условию. Так возникает что-то вроде неопределенного анализа, где неизвестными являются уже не целые числа, а многочлены. Тогда это будет алгебра, взявшая за образец арифметику, алгебра, которая руководствуется аналогиями между целыми числами и многочленами, будь

[1] Кажется, что эта программа предваряет множество теорий современной алгебры.

то многочлены с произвольными коэффициентами, либо многочлены с целыми коэффициентами[1].

Геометрия[2]

По-видимому, геометрия не может содержать ничего такого, чего не было бы уже в алгебре или в анализе: ведь геометрические факты — это те же факты алгебры или анализа, но только выраженные на другом языке. Казалось бы, поэтому, что после того обзора, который мы сделали, не остается больше ничего сказать, специально относящегося к геометрии. Но думать так — значило бы проглядеть важность самого языка, когда он удачно создан, значило бы не понимать того, что прибавляет к вещам способ обозначения этих вещей и, следовательно, способ их группирования.

И прежде всего геометрические рассуждения приводят нас к постановке новых проблем; конечно, это, если угодно, аналитические проблемы, но анализ никогда не привел бы нас к их постановке. Однако анализ извлекает для себя из этого выгоду, как и из того, что он вынужден разрешать проблемы для удовлетворения потребностей физики.

Большое преимущество геометрии состоит именно в том, что в ней чувства могут прийти на помощь рассудку и помогают отгадать нужный путь, так что многие предпочитают приводить проблемы анализа к их геометрической форме. К несчастью, наши чувства не могут вести нас особенно далеко, они покидают нас, лишь только мы обнаруживаем желание унестись за три классические измерения. Значит ли это, что, выйдя из той области, в которой они нас, по-видимому, хотят удержать, мы не вправе более рассчитывать на что-либо, кроме чистого анализа, и что всякая геометрия более чем трех измерений тщетна и бесцельна? Величайшие умы предшествующего нам поколения ответили бы: «да»; мы же теперь так освоились с этим понятием, что можем говорить о нем даже в университетском курсе, не вызывая особенного удивления.

[1]Эта концепция кажется связанной с построением полей алгебраических чисел (и полей Галуа) с помощью полиномов, определенных с точностью до сравнения по некоторому модулю.

[2]Приведем три раздела, относящиеся к главе II «Будущее математики» в книге «Наука и метод». Эта книга была также выпущена в 1908 г., однако, последние разделы не были включены в доклад, в то же время разделы «Арифметика» и «Алгебра» в докладе приведены в более развернутом виде.

Но к чему оно нам? Ответ очевиден: оно дает нам прежде всего весьма удобный способ выражения, язык, который в очень немногих словах выражает то, что при обыкновенном аналитическом языке потребовало бы пространных фраз. Мало того: этот язык побуждает нас называть одним и тем же именем сходные между собой вещи и закрепляет аналогии, делая невозможным забвение их. Он дает нам возможность ориентироваться в этом пространстве, слишком громадном для нас, которого мы не можем обнять иначе, как вызывая перед собой постоянно образ видимого пространства, хотя последнее представляет собой лишь весьма несовершенное его изображение. И тут, как и в предыдущих примерах, аналогия с тем, что просто, помогает нам понять то, что сложно.

Эта геометрия пространств, имеющих более трех измерений, не является простой аналитической геометрией: она имеет характер не исключительно количественный, но также и качественный, и этим-то она особенно интересна. Есть дисциплина, которую называют «Analysis situs» и предметом изучения которой являются соотношения расположений различных элементов фигуры независимо от их величины. Эта геометрия — чисто качественная: ее теоремы остались бы справедливыми, если бы точные фигуры были заменены грубыми изображениями, созданными ребенком. Можно построить также Analysis situs более чем трех измерений. Важность Analysis situs огромна, и я не думаю, чтобы его значение могло быть преувеличено; это достаточно подтверждается той пользой, которую из него извлек Риман[1], один из главных творцов этой дисциплины. Нужно дойти до ее полного построения в пространствах высшего порядка; тогда у нас будет в руках такое орудие, которое позволит действительно видеть в гиперпространстве и расширить область наших чувственных восприятии.

Быть может, проблемы Analysis situs не были бы даже поставлены, если бы пользовались только языком анализа; впрочем, нет, я ошибаюсь: они были бы, несомненно, поставлены, ибо их разрешение необходимо для множества вопросов анализа, но наверное изолированно, так что нельзя было бы вовсе усмотреть их общей связи. Особенно содействовало недавнему успеху геометрии введение понятия о преобразованиях и группах. Благодаря этому понятию геометрия перестала

[1]Б. Риман (1826–1866) — выдающийся немецкий математик, выдвинувший ряд основных идей топологии. Имеет многочисленные труды по разнообразным разделам математики. — *Прим. ред.*

быть агрегатом теорем, более или менее интересных, но следующих одна за другой без всякого сходства между ними, она приобрела единство. А с другой стороны, история не должна забывать того, что именно по поводу геометрии начали систематически исследовать непрерывные преобразования, так что чистые геометры со своей стороны также содействовали развитию идеи группы, идеи, столь полезной в других отраслях математики.

Канторизм

Выше я говорил о представляющейся нам необходимости постоянно восходить к основным принципам нашей науки и о той пользе, которую отсюда может извлечь наука о человеческом духе. Эта потребность породила два стремления, занявшие весьма обширное место на самых последних страницах истории математики. Первое из них — канторизм, заслуги которого перед наукой известны. Одна из характерных черт канторизма состоит в том, что вместо того, чтобы подниматься к общему, строя все более и более сложные конструкции, и вводить определения через построения, он исходит из genus supremum[1] и дает определения только per genus proximum et differentiam specificam[2], как сказали бы схоластики. Этим объясняется тот ужас, который он некоторое время тому назад вызвал в иных умах, например у Эрмита, излюбленной идеей которого является сравнение математических наук с естественными. У большинства из нас эти предубеждения уже рассеялись, но случилось так, что натолкнулись на некоторые парадоксы, которые привели бы в восторг Зенона Элейского[3] и мегарскую школу[4]. И тогда все пустились в поиски за противоядием. Я держусь того мнения — и не я один, — что важно вводить в рассмотрение исключительно такие вещи, которые можно вполне определить при помощи конечного количества слов. Но какое бы противоядие ни было признано действительным, мы можем предвкушать наслаждение врача, имеющего возможность наблюдать интересный патологический случай.

[1]Высший род (*лат.*). — ***Прим. ред.***

[2]Через родовое сходство и видовое отличие (*лат.*). — ***Прим. ред.***

[3]Зенон из Элеи (ок. 490–430 гг. до н. э.) — древнегреческий философ, известен своими знаменитыми парадоксами: «Ахиллес», «Стрела» и другие. — ***Прим. ред.***

[4]Одна из школ древнегреческой философии, представителям которой приписывают рождение многих известных софизмов. — ***Прим. ред.***

Поиски постулатов

С другой стороны, мы видим попытки перечислить те более или менее скрытые аксиомы и постулаты, которые служат основанием для различных математических теорий. Самые блестящие результаты получил Гильберт. На первый взгляд эта область кажется довольно ограниченной; кажется, что когда перечень будет закончен — а это не замедлит произойти, — нечего будет больше делать. Но когда все будет перечислено, тогда найдется множество приемов для классификации всего материала; хороший библиотекарь всегда находит себе занятие, а каждая новая классификация будет поучительна для философа.

Этим я кончаю мой обзор, которого я не мог и рассчитывать сделать полным по множеству причин, и прежде всего потому, что я и без того уже слишком злоупотребил вашим вниманием. Думаю, что приведенных примеров будет достаточно, для того чтобы показать вам, в чем состоял механизм прогресса математических наук в прошлом и в каком направлении они должны будут двигаться в будущем.

ДЕМОН АРРЕНИУСА

Hommage à Louis Olivier, p. 281–287, Paris (26 septembre 1911)

Среди новых идей, в большом количестве возникающих у гениального Аррениуса, есть одна, которая заслуживает особого внимания. Эта гипотеза касается будущего нашей Вселенной и предполагает (или, по крайней мере, старается предположить) более утешительные перспективы, чем классическая теория Клаузиуса. Мир, если верить шведскому ученому, не будет фатально обречен на *тепловую смерть,* ему не предназначено погибнуть в мрачном однообразии.

Известно, что тепловые машины могут работать только между двумя источниками: источником тепла и источником холода. Теплота первого источника может лишь частично превратиться в работу, и необходимо, чтобы часть этой теплоты тратилась на источник холода. Из этого следует, что источник тепла охладится, а источник холода нагреется. Их температуры станут равными и источники истощатся.

Если рассматривать всю Вселенную как огромную тепловую машину, то источник тепла будет представлен Солнцами, источник холода — Туманностями, и все источники, которыми мы располагаем, будут рассматриваться как промежуточные звенья огромной шкалы, которая простирается между этими двумя источниками. Тогда чем может поддерживаться источник тепла? Только энергией, существующей в мире в механической форме. Но для наших Солнц это лишь малая толика, которая вряд ли сможет утолить их аппетит в течение нескольких миллионов лет. И тогда Звезды начнут охлаждаться, а Туманности нагреваться до тех пор, пока не исчезнет разность температур: Вселенная приговорена к *тепловой смерти.*

Именно это утверждает второй принцип термодинамики. Но какова причина существования этого принципа? По мнению многих физиков, этот принцип есть не что иное, как следствие закона больших чисел. Частиц очень много, и их движения стремятся распределиться случайно. Все стремится перемешаться, т. к. если легко спрятать ячменное зернышко в горстке зерна, то очень трудно его там найти и оттуда извлечь. Частицы неисчислимы и очень малы, поэтому их практически невозможно различить, когда они перемешаны.

По словам Максвелла, для того, чтобы обратить поток и передать теплоту холодного тела теплому телу, необходимо существо, достаточно маленькое и достаточно умное для того, чтобы проводить отбор крошечных предметов. Это утонченное существо, способное увидеть то, что ускользает от нашего взора, смогло бы отделить «теплые», т. е. быстрые, частицы от частиц «холодных», т. е. медленных . Это вымышленное существо называют *демоном Максвелла.*

Следовательно, чтобы сохранить жизнь нашему миру, чтобы поддержать Туманности холодными, а Солнца теплыми, необходим автоматический демон Максвелла. Как полагает Аррениус, именно это ему и удалось найти. Действительно, как работал бы демон Максвелла, чтобы нагреть половину газообразной массы, охлаждая при этом другую половину? Он разделил бы сосуд на две части перегородкой, снабженной маленькими дверцами, которые он смог бы открывать или закрывать, когда угодно. Если бы быстрая частица, двигающаяся слева, приближалась к одной из этих дверей, он поспешил бы ее закрыть и частица отскочила бы влево, и, напротив, он открыл бы дверь для медленной частицы, двигающейся слева или для быстрой частицы, двигающейся справа. В конечном счете, слева находились бы быстрые частицы, а справа — медленные, газ с левой стороны был бы теплым, а с правой стороны — холодным.

Итак, что происходит в Туманностях? Материя там очень разреженная, частицы газа лишь слабо удерживаются гравитацией. Следовательно, частицы должны часто отрываться и теряться в бесконечной пустоте. Но какие частицы больше всего подвержены этому? Очевидно, это самые быстрые частицы. Действительно, ракета, запущенная с начальной скоростью с поверхности Земли, будет иметь тем бо́льшие шансы выйти из сферы земного притяжения, чем больше была ее начальная скорость. Следовательно, частицы, которые остаются в Туманности, будут медленными, т. е. холодными, а частицы, которые покидают Туманность, будут быстрыми, т. е. теплыми. Таким способом Туманности могут оставаться холодными, несмотря на теплоту, которую они получают от Солнц. Имеет место некий отбор, наподобие производимому демоном Максвелла. Однако этот отбор является автоматическим.

Частицы, выскальзывающие из Туманностей, в конце концов входят в сферу притяжения Солнц и падают на их поверхность, приобретая большую скорость вследствие тяготения. Одновременно с тем, как они добавляют массу Солнцу, они поддерживают теплоту столкновениями друг с другом.

Однако такое решение еще не удовлетворительно. Во-первых, хорошо известно, что масса Солнца не увеличивается. Во-вторых, Туманности, в конце концов, опустели бы и потеряли свою материю, которая сосредоточилась бы в Солнцах. Мир стал бы однообразным и пришел к тепловой смерти, но другим путем. Таким образом Аррениус вынужден дополнить свою гипотезу. Для этого он прибегает к явлению давления света Максвелла–Бертолли. Известно, что очень легкие тела отталкиваются светом, так, например, образуются хвосты комет, очень разреженная материя которых отталкивается солнечным светом. Аррениус предполагает, что очень мелкие частицы, отделившиеся от Солнца, могут подвергаться аналогичному действию. Сначала они образуют солнечную корону, но там не останавливаются: давление Максвелла отталкивает их намного дальше, за пределы солнечной системы и до отдаленных Туманностей. Туманности, отдающие материю Солнцам, получили бы материю обратно, так что получилось бы полнейшее равновесие между материей, которая прибыла, и той, которая убыла.

Что нам следует думать о такой соблазнительной теории? Все ли трудности устранены? Еще нет. Материя подчиняется двум антагоническим силам: силе ньютоновского тяготения, которое притягивает ее к Солнцу, и давлению Максвелла, которое склонно ее оттуда оттолкнуть. Первая из этих сил берет верх над второй, если тело большое и тяжелое, т. к. она пропорциональна массе, тогда как давление излучения зависит от площади поверхности. Отталкивание, наоборот, берет верх для капелек, размеры которых составляют только несколько тысячных долей миллиметра. Наконец, притяжение вновь берет верх для тел, которые очень малы по отношению к длине волны и, следовательно, которые, не могут отражать свет, как, например, для изолированных частиц. Тогда можно представить себе нечто вроде возвратно-поступательного движения: капельки отталкиваются Солнцем; по той или иной причине, находясь на некотором расстоянии, они скапливаются в достаточно большое тело или распадаются на слишком маленькие частицы. Притяжение вновь берет верх, материя сталкивается с Солнцем, где она вновь принимает форму капелек и так далее, до бесконечности.

Но это не вечное движение. Работа, необходимая для поддержания этого бесконечного возвратно-поступательного движения, получена из солнечного тепла. Мы имеем дело с тепловой машиной. Каков коэффициент полезного действия этой машины? Легко видеть, что он не может превысить половины. Действительно, одна из этих частиц может рассматриваться как экран, который задерживает солнечное излучение. Когда частица отталкивается, то пространство, в котором это излучение может распространяться, расширяется, сюда и затрачивается тепло Солнца. Закон Максвелла показывает, что эти затраты в точности равны работе давления излучения. Таким образом, половина энергии, исходящей от Солнца, будет использована для механической работы над частицей, а другая половина для нагревания пространства. Следовательно, потерянная теплота в конечном счете достигает Туманности. В силах ли демон Аррениуса возвратить нам эту теплоту? Частицы, отрывающиеся от Туманности, покидают ее с некоторой скоростью. Когда они вновь падают на Солнце, эта скорость увеличивается, таким образом, сталкиваясь с поверхностью Солнца, частицы передают ему энергию, которой они обладали при отрыве, и, плюс к этому, энергию, которую они приобрели при падении. Эта энергия была вычислена в рассуждениях, которые мы только что провели для возвратно-поступательного движения. И мы видели, что она составляет в лучшем случае всего-навсего половину энергии, излучаемой Солнцем.

Для того, чтобы восстановление было полным, необходимо, чтобы другая половина была представлена начальной энергией, которую эти частицы имели, покидая Туманность, т. е. чтобы их начальная скорость была подобна той, которую приобретает тело, падающее из бесконечности на Солнце, и которая составляет несколько сотен километров в секунду. Но это достаточно неправдоподобно. Туманности очень холодные, т. е. средняя скорость их частиц очень мала. Хотя их и покидают наибыстрейшие частицы, все же те, что имеют скорости такого порядка, могут быть лишь исключениями даже среди частиц, которые не удерживаются в Туманности притяжением.

Трудно окончательно отказаться от столь обольстительной идеи, и мы склонны задаться вопросом, не является ли она скорее неполной, чем неверной. Демон Аррениуса не может справиться со своей задачей, но, может быть найдутся другие, которые ему в этом помогут? Нельзя ли, например, кроме помещения демона в источник холода поместить другой в источник тепла? У меня имеется свой, предположительный и несколько необоснованный взгляд на этот вопрос. Позвольте мне сказать об этом несколько слов.

Не могут ли частицы, покидающие Солнца, быть объектом отбора, как те частицы, который покидают Туманности? На этот раз должны будут вырваться не самые теплые частицы, а самые холодные. Итак, рассмотрим, каким механизмом производятся капельки, подвергающиеся давлению излучения:

1° определенные частицы газа ионизируются;

2° каждый ион становится центром конденсации для некоторых перенасыщенных паров.

Таким образом, отбор происходил бы совершенно естественно:

1° если холодные, т.е. медленные частицы, легче ионизировались бы, чем быстрые частицы;

2° если конденсация скорее проходила бы вокруг медленных ионов, чем вокруг быстрых;

3° если самые медленные частицы пара обращались бы в жидкость легче, чем самые быстрые.

Я не вижу никакого смысла придерживаться первой гипотезы. Вторая гипотеза более правдоподобна. Понятно, что ион в состоянии покоя сможет легче сыграть свою роль центра конденсации, чем ион в состоянии движения, поскольку катящийся камень не обрастает мхом. Но главным образом удобно придерживаться третьей гипотезы. Представим себе капельку в процессе образования и частицы пара, вращающиеся вблизи этой капельки. Их можно сравнить с астероидами, которые вращались бы возле планеты и слегка касались ее атмосферы. Те, которые будут обладать повышенной скоростью, будут двигаться безостановочно; самые медленные будут задерживаться и падать на ее поверхность. Нет сомнения также, что когда жидкость взаимодействует со своим паром, то между их частицами происходит постоянный обмен. Удерживаемые какое-то время притяжением жидкости, одни частицы в конце концов покидают ее и становятся паром, а другие, напротив, снова обращаются в жидкость.

Очевидно, что задерживаться будут самые медленные частицы, а отрываться самые быстрые. Все происходит как в Туманности, о чем уже было сказано выше. Из этого следует, между прочим, что должна существовать разность температур между жидкостью и ее паром. Я не знаю, можно ли ее определить. Как бы там ни было, можно представить себе аналогичный механизм, играющий в источнике тепла роль автоматического демона. Во всяком случае, этот демон работал бы в правильном направлении, но я не в силах определить, в состоянии ли он выполнить свою работу.

ЛОГИКА И ИНТУИЦИЯ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ НАУКЕ И ПРЕПОДАВАНИИ

L'enseignement mathématique, t. 1, p. 157–162 (15 mai 1889)

Для разъяснения вопроса, который я собираюсь обсудить, и который, на мой взгляд, является чрезвычайно важным в преподавании математики, необходимо взглянуть назад на историю развития науки.

Если прочитать книгу, написанную 50 лет назад, то большинство рассуждений, которые мы там найдем, покажутся нам недостаточно строгими.

В то время принималось без доказательства, что непрерывная функция не может менять знака, не обращаясь в нуль. В настоящее время это доказывается. Также принималось без доказательства, что обычные правила вычисления применимы к несоизмеримым числам. Ныне и это доказывается. Делались и другие допущения, которые порой оказывались ложными.

Таким образом, видно, что наука продвинулась в направлении строгости. Я бы сказал, более того, что она уже достигла строгости, и наши рассуждения не покажутся смешными нашим потомкам. Разумеется, я говорю о тех рассуждениях, которые нас самих удовлетворяют.

Но каким образом мы добились строгости? Путем ограничения в науке роли интуиции и усиления роли формальной логики. Прежде употреблялось множество понятий, рассматриваемых как основные, априорные и интуитивные. Таковыми были понятия целого числа, дроби, непрерывного роста, пространства, точки, линии, поверхности и т. д. На сегодняшний день лишь одно понятие осталось основным — понятие целого числа. Все другие понятия являются только комбинациями, и такой ценой достигается полная строгость.

Наши отцы вписывали в плоскую фигуру ряд прямоугольников и в качестве предела суммы площадей этих прямоугольников получали интеграл, равный ее площади. Действительно, говорили они, разность между искомой площадью и суммой стремится к нулю, т. к. можно сделать эту разность меньше, чем любое заданное число. Такие рассуждения проводились без особой тщательности, так как отцы наши полагали, что хорошо понимают, что такое площадь. Нас же, напротив, такое рассуждение не удовлетворяет, так как нам известно, что эти понятия нельзя впитать с молоком матери; и невозможно узнать, что такое площадь, не пользуясь интегральным исчислением. Мы больше не доказываем, что площадь равняется интегралу, а рассматриваем интеграл как определение площади. Понятие площади, основанное когда-то на интуиции, само по себе не кажется нам уже правомочным.

С другой стороны, математические понятия приобрели столь совершенную чистоту только за счет удаления от действительности. Можно пересечь всю страну математики и не встретить ни единого препятствия из рассекавших ее в былые времена. Но эти препятствия не исчезли, они лишь передвинулись к границам. И нам придется заново преодолевать их, если мы захотим пересечь границы, чтобы войти в практические области.

Понятие было раньше более или менее расплывчатым, образованным из несвязных элементов, одни из которых априорные, а другие получены обобщением опытных данных. Его основные свойства полагались интуитивно известными. В настоящее время все эмпирические элементы отвергаются, допускаются лишь априорные. Для определения берется одно из свойств, а все остальные выводятся из него строгими рассуждениями. Однако остается доказать, что свойство, служащее определением, действительно отвечает реальности, которая нам известна из опыта, откуда неосознанным обобщением раньше и выводилось интуитивное понятие. Это очень хорошо показал М. Мило в работе, которую он защитил на гуманитарном факультете в Париже.

Вот в каком направлении развивалась наука последние полвека.

Тогда и появилась целая куча вычурных функций, которые, казалось бы, старались как можно меньше походить на общеупотребительные функции, служащие определенным целям. Всюду разрывные, или же непрерывные, но нигде не дифференцируемые... Более того, с точки зрения логики, именно эти странные функции являются наиболее общими; напротив, те функции, которые встречаются сами по себе и следуют простым законам, оказываются лишь очень частным случаем, и для них отводится самый дальний уголок.

В былые дни, когда изобретали новую функцию, следовали какой-нибудь практической цели. Сегодня их придумывают нарочно для того, чтобы найти пробелы в рассуждениях наших отцов, и ни для чего больше.

Итак, если логика должна быть нашим единственным путеводителем в вопросах образования, то, очевидно, нужно начинать преподавание с самых вычурных функций. Начинающего нужно в первую голову ознакомить с этой кунсткамерой. Иначе он никогда не достигнет желанной строгости, а если и достигнет, то лишь мало-помалу.

Вот на что осудила бы нас абсолютная логика. Должны ли мы принести ей такую жертву? Таков вопрос, на который я, со своей стороны, не колеблясь, отвечаю — нет.

Преподавателю, без сомнения, трудно обучать рассуждению, которое не полностью его удовлетворяет. И на его взгляд, сказать «мы принимаем», или «часто бывает, что», вместо «очевидно, что», будет не более чем малопригодным паллиативом.

Однако удовлетворение педагога не является единственной целью в процессе обучения, и необходимо, прежде всего, поставить перед собой вопрос о том, что представляет собой ум ученика и во что желательно его развить.

Зоологи утверждают, что эмбриональное развитие животного за очень короткое время повторяет всю историю развития данного рода. По-видимому, умственное развитие также проходит подобные стадии. Задача учителя состоит в том, чтобы провести разум ребенка тем путем, которым проходил разум его отцов, ускоряя определенные этапы развития, но не пропуская ни одного из них. В этом отношении, история науки должна быть нашим проводником.

Когда ученик начинает серьезно изучать математику, он полагает известными понятия дроби, непрерывности, площади криволинейной поверхности. Он считает очевидным, например, что непрерывная функция не может поменять знак, не обращаясь в нуль. Если вы ему скажете без предварительной подготовки: «Нет, все это не очевидно. Необходимо, чтобы я вам это доказал», — и если в своем доказательстве вы опираетесь на посылки, которые не кажутся ему более очевидными, чем заключение, то что же тогда подумает этот бедняга? Он решит, что математическая наука является лишь произвольным скоплением бесполезных премудростей. Тогда либо ему это надоест, либо он будет забавляться этим как игрой, и придет к образу мыслей, характерному для греческих софистов.

Напротив, когда ученик станет более продвинутым, ознакомится с математическими рассуждениями, а разум его созреет благодаря этому знакомству, сомнения возникнут сами собой, и ваше доказательство придется кстати. Оно пробудит новые сомнения, и вопросы у ребенка будут возникать один за другим, как они возникали у наших отцов, до тех пор, пока его не станет удовлетворять лишь абсолютная строгость. Недостаточно сомневаться во всем, необходимо знать, почему сомневаешься.

Это еще не все. Я уже говорил, что с точки зрения чистой логики остается лишь одно основное понятие — целого числа, — а все другие понятия являются только комбинациями. Но можно придумать целое множество подобных комбинаций. Почему эти, а не другие? Выбор объясняется лишь памятью об интуитивном понятии, место которого занимает данная комбинация. Если эта память отсутствует, выбор покажется необоснованным. Так, чтобы понять теорию, недостаточно констатировать, что ведущий к ней путь не прегражден препятствием; необходимо отдавать себе отчет в причинах, которые заставляют выбрать этот путь. И вообще, можно ли говорить о понимании теории, если желать сразу же придать ей окончательную форму, диктуемую безупречной логикой, так, чтобы и следа не осталось от блужданий, которые к ней привели? Нет, это не называется понять по-настоящему, такую даже и не запомнить, разве только наизусть.

Основная цель математического преподавания — развить некоторые умственные способности, и интуиция среди них занимает не последнее место. Именно посредством интуиции математический мир взаимодействует с миром реальным. И даже если чистая математика смогла бы без нее обойтись, то к ней все равно приходилось бы прибегать, чтобы заполнить пропасть между символами и действительностью. Таким образом, практики всегда будут нуждаться в интуиции, а на одного чистого геометра должно приходиться 100 практиков.

Однако и для чистого геометра самого по себе интуиция необходима: посредством логики доказывают, но придумывают посредством интуиции. И недостаточно критиковать чужие теоремы, нужно придумывать новые. Недостаточно уметь составлять правильные комбинации, необходимо обладать искусством выбирать между всеми возможными сочетаниями. Выше я уже говорил, почему именно интуиция учит нас этому искусству. Без нее геометр был бы подобен писателю, в совершенстве владеющему грамматикой, но лишенному идей.

Но как бы эта способность развивалась, если, стоит ей показаться на свет божий, ее настойчиво преследуют и изгоняют, если учат не доверять ей, даже не разобравшись еще, что хорошего можно из нее извлечь?

Разве искусство рассуждать правильно не является важнейшим качеством, которое учитель математики должен развить прежде всего? Я и не думаю забывать об этом, и этим следует заниматься с самого начала. Однако, хватает возможностей учить начинающих правильным рассуждениям в тех областях математики, где неудобства, о которых я говорил, отсутствуют. Существует целый ряд теорем, в которых абсолютная логика воцарилась с рождения, естественнейшим образом, если так можно выразиться; которые, тем самым, сохранили форму, приданную им первыми геометрами.

То, чего следует избегать, это придирок к мелочам в изложении основных принципов. Они не мешают научиться правильно рассуждать, если только позаботиться о том, чтобы не подать ученикам ложные идеи. Иногда для этого необходимо много такта со стороны учителя. А часто достаточно просто сказать (как я объяснял выше): «мы принимаем» вместо «очевидно, что».

Среди молодых людей, получающих полное математическое образование, одни, вероятно, станут инженерами. Они изучают геометрию для того, чтобы ею пользоваться. Прежде всего необходимо, чтобы они научились хорошо и быстро понимать. И именно в интуиции они нуждаются в первую очередь. Другие — их меньше — в свою очередь, возможно, станут учителями. Следовательно, им необходимо дойти до сущности. Углубленное и точное знание основных принципов необходимо для них прежде всего. Но это не причина не развивать у них интуицию, так как они создали бы себе ложное представление о науке, рассматривая ее только с одной стороны. И кроме того, им бы не удалось развить у своих учеников качество, которого они сами лишены.

Я написал довольно большую статью о достаточно абстрактном и общем вопросе. Чтобы заслужить снисхождение читателя, сделаю несколько точных заключений.

В специальных школах, а также в первом классе политехнической школы не следует говорить о функциях без производных, а если и упоминать о них, то со словами: «Возможно, такие бывают, но мы ими не занимаемся».

Когда ученикам впервые говорят об интегралах, их следует определять через площади, а строгое определение можно дать только после того, как ученики вычислят множество этих интегралов.

ОБ ОБОБЩЕНИИ МЕТОДА ЯКОБИ

Comptes rendus de l'Acadèmie des Sciences, t. 149, p. 1105–1108
(13 dècembre 1909)

Известно, что метод вариации постоянных позволяет решить задачу динамики, когда решена другая задача динамики — более простая[1], но немного отличающаюся от первой. Однако эту более простую задачу удобней решать методом Якоби для того, чтобы уравнения сохраняли каноническую форму. Здесь, однако, можно столкнуться с некоторыми трудностями, которые я обнаружил, когда хотел применить этот метод в теории прецессии и вращения твердых тел. Таким образом, я постараюсь немного обобщить метод Якоби.

Пусть имеется динамическая система с n степенями свободы, положение которой определяется n координатами x_i. Назовем T кинетической энергией, U — потенциальной энергией, а $T+U=F$ — полной энергией. Положим $y_i = \dfrac{dT}{dx'_i}$ и запишем канонические уравнения Гамильтона

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dF}{dy}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{dF}{dx}. \tag{1}$$

Произведем замену переменных, выражая x в функции $n+n'$ новых переменных q_k, *которых больше количества степеней свободы,* и положим, что

$$p_k = \frac{dT}{dq'_k}.$$

Будем считать, что выполняется тождество

$$\sum y\,dx = \sum p\,dq, \tag{2}$$

и что p связаны между собой n' линейными отношениями так, что только между ними n являются независимыми. Назовем их p_a. Оставшиеся

[1]Имеются в виду возмущенная и невозмущенная системы. — ***Прим. перев.***

переменные, которые назовем p_b, будут являться функциями от p_a, q_a и q_b. Тогда можно задаться вопросом — может ли T быть выражена в виде функции от p и q. Равенство $dT = \sum q\,dp$, которое имеет место, когда q рассматривается как постоянная, позволяет нам ответить на этот вопрос утвердительно. Следовательно, T и F могут быть выражены в функции p_a, q_a и q_b, и уравнение живых сил может быть записано в виде

$$F(p_a, q_a, q_b) = \text{const}. \tag{3}$$

Пусть теперь S является функцией от q_a и q_b, определенной уравнением в частных производных

$$F\Big(\frac{dS}{dq_a}, q_a, -\frac{dS}{dp_b}\Big) = \text{const}, \tag{4}$$

так, что

$$p_a = \frac{dS}{dq_a}, \quad q_b = -\frac{dS}{dp_b}, \tag{5}$$

и, кроме того, зависящая от n произвольных постоянных y'_i (равному числу степеней свободы). Положим

$$x'_i = \frac{dS}{dy'_i}, \tag{6}$$

откуда

$$dS = \sum p_a\,dq_a - \sum q_b\,dp_b + \sum x'\,dy'. \tag{7}$$

Второй член этого равенства является точным дифференциалом, если p_b рассматриваются как независимые переменные и тем более, если p_b полагаются связанными с p_a линейными соотношениями, о которых мы уже упоминали. Сопоставив формулы (7) и (2), можно сделать вывод, что величина

$$dS_1 = \sum y\,dx - \sum y'\,dx' \tag{8}$$

является полным дифференциалом. Тождество (8) показывает, что S_1 является функцией лишь от x и x' и, соответственно, имеем уравнения

$$y = \frac{dS_1}{dx}, \quad y' = \frac{dS_1}{dx'}, \tag{9}$$

которые определяют x' и y' в зависимости от x и y. Отношение (8) показывает, что замена переменных является канонической и не изменяет каноническую форму уравнений. Таким образом, для нашей первой простой задачи получим уравнения

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dF}{dy'}, \quad \frac{dy'}{dt} = -\frac{dF}{dx'},$$

которые сразу интегрируются, поскольку F зависит только от y'. Для получения уравнений полной задачи заменим F на F^*:

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dF^*}{dy'}, \quad \frac{dy'}{dt} = -\frac{dF^*}{dx'}.$$

Применим этот метод в теории прецессии. Положим

$$F^* = T + U, \quad F = T,$$

причем U будем считать существенно меньшей, чем T. Хотя имеется три степени свободы, выберем $n + n' = 5$ координат, которые аналогичны нашим переменным q. Они имеют следующий смысл:

1° Угол φ между плоскостью OPz, проходящей через подвижную ось Oz и произвольную ось OP, и подвижной плоскостью Oyz.

2° Угол ψ между подвижной осью Oz и осью OP.

3° Угол χ между плоскостью OPz и плоскостью OPZ, которая проходит через ось OP и неподвижную ось OZ.

4° Угол ω между осями OP и OZ.

5° Угол θ между плоскостью OYZ и неподвижной плоскостью OYZ.

Переменные p определим в форме

$$\Phi = \frac{dT}{d\varphi}, \quad \Psi = \frac{dT}{d\psi'}, \quad G = \frac{dT}{d\chi'}, \quad \Omega = \frac{dT}{d\omega'}, \quad \Theta = \frac{dT}{d\theta'}.$$

Они представляют моменты вращения относительно оси Oz, перпендикуляра к POz, относительно OP, перпендикуляра к плоскости POZ, и, наконец, относительно OZ. Теперь можно выразить T как функцию от переменных φ, ψ, θ, ω, χ, Φ, G, Θ. Вводя производящую функцию S, не изменяя при этом постоянных y', получим

$$dS = \Phi\, d\varphi + G\, d\chi + \Theta\, d\theta - \psi\, d\psi - \omega\, d\Omega. \tag{10}$$

Необходимо определить Φ, G, Θ, Ψ и ω так, чтобы правая часть (10) была точным дифференциалом и чтобы функция $T(\varphi,\,\psi,\,\theta,\,\omega,\,\chi,\,\Phi,\,G,\,\Theta)$ приводилась к постоянной. При этом решение должно зависеть от трех произвольных постоянных. Этого можно добиться, положив

$$\begin{gathered}\psi = \text{const}, \quad \omega = \text{const}, \quad G = \text{const},\\ \Phi = G\cos\psi = \text{const}, \quad \Theta = G\cos\omega = \text{const}.\end{gathered} \tag{11}$$

Теперь легко ввести три произвольных независимых постоянных G, Φ и Θ и получить

$$S = \Phi\varphi + G\chi + \Theta\theta - \psi\Psi - \omega\Omega, \quad T = \frac{G^2}{2A} + \frac{(A-C)\Phi^2}{2AC}$$

(A и C являются двумя моментами инерции Земли).

Условия (11) означают, что PO является осью момента вращения. Из этого следует, что

$$\Psi = \Omega = 0, \quad S = \Phi\varphi + C\chi + \Theta\theta.$$

Переменные Φ, G, Θ выступают вместо переменной y', следовательно $\varphi = \dfrac{dS}{d\Phi}$, переменные χ и θ играют роль x'. Таким образом шесть переменных удовлетворяют канонической системе, и для некоторой функции $F^* = T + U$ имеем

$$\begin{gathered}\frac{d\chi}{dt} = \frac{dF^*}{dG}, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dF^*}{d\Phi}, \qquad \frac{d\theta}{dt} = \frac{dF^*}{d\Theta},\\ \frac{dG}{dt} = -\frac{dF^*}{d\chi}, \quad \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{dF^*}{d\varphi}, \quad \frac{d\Theta}{dt} = -\frac{dF^*}{d\theta}.\end{gathered}$$

Для первой простой задачи, для которой $F = T$, получим

$$\begin{gathered}\frac{d\chi}{dt} = \frac{dT}{dG} = \frac{G}{A} = \text{const}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dT}{d\varphi} = \frac{A-C}{2AC}\Phi = \text{const}, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{dT}{d\Theta} = 0;\\ \frac{dG}{dt} = -\frac{dT}{d\chi} = 0, \quad \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{dT}{d\varphi} = 0, \quad \frac{d\Theta}{dt} = -\frac{dT}{d\theta} = 0.\end{gathered}$$

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ И ПРИНЦИПЕ НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ

Comptes rendus de l'Acadèmie des Sciences, t. 123, p. 915–918
(30 novembre 1896)

Теория периодических решений в некоторых случаях имеет отношение к принципу наименьшего действия.

Рассмотрим три тела, двигающиеся в плоскости и притягивающиеся друг к другу обратно пропорционально кубу расстояний или бóльшей степени этих расстояний. Обозначим эти три тела буквами a, b, c.

Кинетическая энергия T и силовая функция U являются существенно положительными. Силовая функция U равна сумме членов формы $\frac{kmm'}{r^n}$, где k — положительная постоянная, m и m' — массы двух тел из данных трех, r — расстояние между ними, а n — показатель степени, по крайней мере, равный двум.

При этих условиях действие по Гамильтону

$$J = \int\limits_{t_0}^{t_1} (T + U)\, dt$$

будет существенно положительным.

Рассмотрим класс траекторий наших трех тел a, b, c; это будут фиктивные траектории, не удовлетворяющие уравнениям движения[1]. Однако, они будут удовлетворять следующим условиям:

1) В момент времени t_1 расстояния трех тел будут такими же, как в момент t_0. Скорости будут одинаковыми по величине и будут образовывать одинаковые углы со сторонами треугольника, составленного из трех тел. Другими словами, фигура, образованная тремя телами и прямыми, которые представляют их скорости, приобретает в момент

[1]Здесь речь идет о возможных (или кинематически допустимых) движениях. — *Прим. перев.*

времени t_1 ту же форму, которую она имела в момент времени t_0. Иначе говоря, расстояния между тремя телами будут периодическими функциями от времени периода $t_1 - t_0$.

2) Прямая bc через период t_0, t_1 будет иметь угол ω_1 с абсолютной прямой.

3) Прямая ac через тот же период будет иметь угол $\omega_1 + 2K_2\pi$, где K_2 — заданное целое число.

4) Прямая ab будет иметь угол $\omega_1 + 2K_3\pi$, где K_3 — заданное целое число[1].

Таким образом, класс фиктивных траекторий определяется тремя вещественными произвольными постоянными t_0, t_1 и ω_1 и двумя целыми произвольными числами K_2 и K_3.

Действие по Гамильтону, которое не может стать отрицательным, будет допускать минимум и, на основании принципа наименьшего действия, траектория, которая будет соответствовать этому минимуму, должна являться действительной траекторией и удовлетворять уравнениям движения.

Эта действительная траектория, по определению, будет соответствовать периодическому решению задачи, с периодом $t_1 - t_0$.[2]

Наша цель — доказать, что в каждом классе фиктивных траекторий есть одна, которая соответствует минимуму действия по Гамильтону и, следовательно, периодическому решению.

Для этого достаточно показать, что если наша фиктивная траектория будет непрерывным образом меняться, то она не сможет перейти из одного класса в другой без того, чтобы действие по Гамильтону стало бесконечным.

Действительно, переход из одного класса в другой произойдет тогда, когда два тела из этих трех столкнутся. Если, например, a и c сталкиваются, то к рассматриваемой траектории T будут бесконечно близки две другие T' и T''. Для T' тело a пройдет очень близко от c, но справа. Для T'' оно пройдет также близко от c, но слева. Ясно, что целые числа K_2, которые соответствуют T' и T'', будут отличаться на единицу.

[1] Во всех случаях имеется в виду угол с одной и той же неподвижной в пространстве прямой. — *Прим. перев.*

[2] Отметим, что более точно речь идет о периодических движениях в пространстве относительных положений тел. В абсолютном пространстве тела могут не возвращаться к исходному положению. — *Прим. перев.*

Отметим теперь, что если a и c сталкиваются, то действие бесконечно.

Действительно, действие будет того же порядка величины, что и $\int 2U\,dt$, или $\int 2\sqrt{U}\,dr$, или $2kmm'\int \frac{dr}{r^{\frac{n}{2}}}$, т. е. действие будет бесконечным при $n \geqslant 2$. Если, как мы предполагаем, притяжение обратно пропорционально кубу расстояний, то $n = 2$.

Итак, в каждом классе должен быть минимум действия. Следовательно, там должна быть и действительная траектория, соответствующая периодическому решению задачи.

Каждому набору величин двух произвольных постоянных $t_1 - t_0$ и ω_1, а также каждому набору величин двух целых чисел K_2 и K_3 соответствует периодическое решение.

Очевидно, что наше доказательство приемлемо только тогда, когда притяжение для очень малых расстояний такого же порядка, как и обратная величина куба расстояния, либо более высокого порядка.

Во всех этих случаях будем иметь бесконечное количество периодических решений.

Однако, в случае ньютоновского закона действие больше не обращается бесконечность, когда два тела сталкиваются. Здесь мы не можем более утверждать, что в каждом классе существует периодическое решение.

Необходимо отметить, что каждой величине периода $t_1 - t_0$ и каждой величине угла ω_1 (при этом два значения, кратные 2π, не считаются различными) соответствует периодическое решение. Для следующей задачи можно было бы получить аналогичные результаты: предположим, что закон тяготения совпадает с законом Ньютона, когда расстояние больше малой величины ε, и с законом обратного куба расстояний, когда расстояние меньше, чем ε. Тогда, кроме случая, когда два тела из трех приближаются друг к другу (в этом случае движение возмущено на малом отрезке времени), траектории будут такими же, что и закона Ньютона. Таким образом предыдущее рассмотрение применимо к модифицированной задаче. Однако результаты для обычной задачи трех тел не могут быть столь просто получены аналогичным образом.

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ И ПРИНЦИПЕ НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ

Comptes rendus de l'Acadèmie des Sciences, t. 124, p. 713–716
(5 avril 1897)

Рассмотрим движущуюся точку на плоскости. Уравнения движения могут быть записаны следующим образом

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dU}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dU}{dy}, \tag{1}$$

а интеграл живых сил

$$\frac{1}{2}\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right) = U + h, \tag{2}$$

где U является силовой функцией. Нашей целью является изучение периодических решений этих уравнений с новой точки зрения. Траектория, которая соответствует периодическому решению, будет замкнутой кривой (T).

Каждому периодическому решению будут соответствовать два характеристических показателя — равные по величине и противоположные по знаку. Если эти два показателя являются мнимыми, то периодическое решение будет устойчивым. Если они являются действительными, то решение будет неустойчивым. Применение принципа наименьшего действия приведет нас к расширению этой классификации, в которой будут различаться два вида неустойчивых решений.

По принципу Мопертюи известно, что интеграл

$$J = \int \sqrt{U+h}\, ds,$$

называемый *действием*, является наименьшим для траектории, удовлетворяющей уравнениям (1), по сравнению с бесконечно близкими кривыми, в окрестности этого экстремума. Это верно для двух экстремумов в окрестности каждого из них. Но, вообще, нам известно лишь то, что первая вариация δJ интеграла J равняется нулю.

Это условие является необходимым, но недостаточным для того, чтобы имелся минимум.

Если продолжать обсуждение, то необходимо прибегнуть к понятию кинетических фокусов, определение которых мы сейчас напомним. Пусть M — точка, расположенная на траектории T. Проведем через эту точку другую траекторию, бесконечно близкую к T. Если эта траектория пересекает T в точке M', то точка M' будет фокусом точки M.

Изучение кинетических фокусов в случае периодических решений приводит к следующим результатам.

Сначала положим, что периодическое решение устойчиво. Пусть s — дуга соответствующей замкнутой траектории (T), исходящая из некоторого начала, а S — общая длина этой траектории. Существует постоянно возрастающая функция $f(s)$, увеличивающаяся от 0 до 2π при длине s, возрастающей от 0 до S, такая, что

$$f(s+S) = f(s) + 2\pi.$$

Соотношение между величиной дуги s, соответствующей точке M траектории (T) и величиной s', соответствующей своему фокусу M', имеет вид

$$f(s') = f(s) + \text{const}.$$

Если периодическое решение неустойчиво, то различаются два случая:

1) решение будет решением первого вида, если ни одна из точек траектории не имеет фокуса. Тогда траектории, соответствующие асимптотическим решениям, будут спиральными кривыми, обвивающимися вокруг траектории (T) и приближающимся к ней асимптотически. Витки этой спиральной кривой не пересекают траекторию (T) и не пересекаются между собой, по крайней мере, если ограничиться частью кривой, которая не слишком удаляется от (T);

2) однако, может представиться и другой случай, в этом случае говорят, что неустойчивое периодическое решение является решением второго вида. При этом замкнутая кривая (T) будет разделена на четное число дуг. Пусть $2p$ будет таким четным числом, а A_0, $A_1, \ldots, A_{2p-1}$ — точками деления. Достигая большей симметрии в обозначениях, мы для одной и той же произвольной точки A_q будем иметь бесконечную последовательность символов A_q, A_{q+2p}, A_{q+4p}, ...

Для точек деления предполагается выполнение условий:

1°. Точка A_{q+1} является фокусом точки A_q.

2°. Если точка M находится на дуге A_q, A_{q+1}, то его фокус будет находиться на дуге A_{q+1}, A_{q+2}.

3°. Пусть M_1 — фокус точки M, M_2 — второй фокус точки M, т.е. фокус точки M_1, а M_q — q-й фокус точки M. Если точка M находится на дуге A_0A_1, то на ней будут находится и точки M_{2p}, M_{4p}, ... , M_{2kp}, ... и эти точки будут бесконечно и постоянно приближаться к одной из точек A_0 или A_1.

4°. На дуге A_0A_1 имеется точка B_0, которая совпадает со своим $2p$-м фокусом и, когда k будет стремиться к $+\infty$, то точка M_{-2kp} будет бесконечно приближаться к B_0.

Таким образом, асимптотические решения представлены кривыми, которые имеют отличную форму, как в предыдущем случае: они бесконечное количество раз пересекают кривую (T), и точки пересечения имеют в качестве предельных точек точку A_0 и ее фокусы или точку B_0 с ее фокусами.

Установив это, укажем два момента, на которые следует обратить внимание:

1) необходимое и достаточное условие того, что периодическое решение, представленное замкнутой кривой (T) соответствует наименьшему действию, состоит в том, что все замкнутые кривые бесконечно близки. Это именно то условие, при котором решение является неустойчивым решением первого вида;

2) предположим, что функция U и первоначальные условия движения меняются непрерывным образом, и что рассматривается периодическое решение, которое меняется также непрерывным образом. При этом невозможно непосредственно перейти от неустойчивого решения первого вида к неустойчивому решению второго вида. Можно будет лишь перейти от неустойчивого решения одного из двух видов к устойчивому решению, либо наоборот.

То, что мы указали, применимо без изменения для случая относительного движения.

Предположим, что подвижная точка рассматривается в системе двух подвижных осей, приводимых в движение равномерным вращением с угловой скоростью ω. Тогда уравнения движения будут следующими

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\omega\frac{dy}{dt} = \frac{dU}{dx}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + 2\omega\frac{dx}{dt} = \frac{dU}{dy}.$$

При этом в силовой функции U имеется член, происходящий от обычной центробежной силы.

Интеграл живых сил имеет вид

$$\frac{1}{2}\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right) = U + h,$$

а выражение действия можно записать следующим образом

$$J = \int [ds\sqrt{U+h} + \omega(x\,dy - y\,dx)].$$

ИДЕИ ГЕРЦА В МЕХАНИКЕ

Revue Générale des Sciences, t. 8, p. 734–743

(30 septembre 1897)

В 1890 году великий электротехник Герц достиг апогея своей славы. Все европейские академии не жалели для него никаких наград. Все надеялись, что его ждут еще долгие годы, и что они будут такими же блестящими, какими были годы его дебюта.

К сожалению, болезнь, от которой ему суждено было так преждевременно уйти из жизни, уже поразила его и почти полностью приостановила его экспериментальную деятельность. Едва ли у него было время на оборудование его новой лаборатории в Бонне. Болезнь помешала этому и лишила его и нас открытий, которые он надеялся там сделать.

Он еще оказывал огромное влияние на физические науки и работал с учениками, но свое собственное открытие за этот период совершил только одно. Это было открытие фундаментальной важности: прозрачность алюминия для катодных лучей.

Но будучи так жестоко огражденным природой от исследований, столь важных для него, он не остался бездеятельным. Если ощущения и изменяли ему, то его ум работал по-прежнему, и служил ему в глубоких философских размышлениях о Механике[1]. Результаты этих размышлений были опубликованы в Сочинениях, вышедших уже после его смерти. В этой статье я хотел бы вкратце их изложить и обсудить.

Прежде всего Герц критикует две основные системы, существовавшие к тому моменту, которые мы будем называть классической и энергетической системами. Кроме того Герц предлагает третью систему, которую назовем системой Герца.

[1]Выделения в тексте прописными буквами принадлежат Пуанкаре. — *Прим. перев.*

I. Классическая система

1. Определение силы. Первая попытка согласования наблюдений механики называется *классической системой.* По словам Герца, это «великая королевская дорога, основные станции которой носят имена Архимеда, Галилея, Ньютона и Лагранжа. Основные понятия, находящиеся в отправной точке, это понятия *пространства, времени, силы* и *массы.* Сила в этой системе рассматривается как причина движения. Она предшествует движению и существует независимо от него».

Попытаемся теперь объяснить, почему Герца не удовлетворяло такое рассмотрение.

Прежде всего мы сталкиваемся с трудностями при определении основных понятий. Что такое *масса*? — Это, отвечает Ньютон, произведение объема на плотность. — Было бы лучше сказать, отвечают Томсон и Тэйт, что плотность — это коэффициент деления массы на объем. Что такое *сила*? — Это, отвечает Лагранж, причина, вызывающая или пытающаяся вызвать движение тела. — Кирхгоф скажет, что это произведение массы на *ускорение.* Но, в таком случае, почему бы не сказать, что масса является частным от деления силы на ускорение?

Эти трудности неискоренимы.

Говорить, что сила — это причина движения, значит заниматься Метафизикой, и это определение, если им довольствоваться, было бы абсолютно бесплодным. Чтобы определение на что-то годилось, оно должно учить нас *мерить силу.* Этого, впрочем, уже достаточно, и вовсе необязательно, чтобы оно одновременно объясняло нам, что представляет собой сила *сама по себе* и является ли она причиной или следствием движения.

Таким образом, сначала необходимо определить равенство двух сил. О равенстве двух сил можно говорить в случае, когда приложенные к одной и той же массе, они передают ей одинаковое ускорение или, когда являясь прямо противоположными друг другу, они уравновешиваются. Это определение обманчиво. Нельзя «отцепить» силу, приложенную к одному телу, чтобы применить ее и к другому телу, как отцепляют локомотив, чтобы прицепить его к другому составу. Следовательно, невозможно узнать, какое ускорение данная сила, приложенная к данному телу, передала бы другому телу, *если бы* она была приложена к нему. Невозможно узнать, как вели бы себя две силы, не являющиеся прямо противоположными, *если бы* они стали прямо противоположны.

Именно это определение пытаются материализовать, если можно так выразиться, когда сила измеряется динамометром или когда она уравновешивается каким-нибудь грузом. Две силы, F и F', которые, положим для простоты, являются вертикальными и направленными снизу вверх, применяются к двум телам, C и C' соответственно. Подвесим тело P сначала к телу C, затем к телу C'. Если равновесие имеет место в обоих случаях, то можно сделать вывод, что две силы F и F' являются равными между собой, поскольку они обе равняются весу тела P.

Но уверены ли мы в том, что тело P сохранило тот же вес, когда мы перенесли его с первого тела на второе? Отнюдь, *мы уверены в обратном.* Мы знаем, что сила тяжести в разных точках различна, к примеру, на полюсе она больше, чем на экваторе. Несомненно, разница очень мала, и мы не принимаем это во внимание на практике. Однако правильному определению следовало бы иметь математическую строгость. Такой строгости недостает. То, что мы говорили о весе, очевидно, равно применимо к силе упругости пружины динамометра, которую могут изменить температура и множество других обстоятельств.

Это еще не все. Нельзя сказать, что вес тела P приложен к телу C и непосредственно уравновешивает силу F. То, что на самом деле прилагается к телу C, является действием A тела P на тело C. В свою очередь, тело P подвергается, с одной стороны, своему весу, с другой стороны, реакции R тела C на тело P. В результате сила F равняется силе A, поскольку она уравновешивает ее. Сила A равна R на основании принципа равенства действия и противодействия. Наконец, сила R равна весу тела P, т. к. она уравновешивает его. Именно из этих трех равенств мы выводим, как следствие, равенство силы F и веса тела P.

Таким образом, мы вынуждены ввести в определение равенства двух сил тот же принцип равенства действия и противодействия. *Раз так, этот принцип следовало бы рассматривать не как экспериментальный закон, а как определение.*

Следовательно, чтобы определить равенство двух сил, у нас есть два правила: равенство двух сил, которые уравновешивают друг друга, и равенство действия и противодействия. Однако, как мы видели выше, этих двух правил недостаточно. Мы вынуждены прибегнуть к третьему правилу и признать, что некоторые силы, как, например, вес тела, являются постоянными по величине и по направлению. Но это третье правило, как мы уже сказали, является экспериментальным законом; оно лишь приблизительно верно. *Определение наше плохое.*

Итак, мы вновь возвращаемся к определению Кирхгофа: *сила равна произведению массы на ускорение.* Этот «закон Ньютона» перестает, в свою очередь, рассматриваться как экспериментальный закон, теперь он становится лишь определением. Но это определение также недостаточно, поскольку мы не знаем, что такое масса. Оно, несомненно, позволяет нам вычислить отношение двух сил, приложенных к одному и тому же телу в разные моменты времени. Но оно ничего не говорит об отношении двух сил, приложенных к двум разным телам.

Для того, чтобы дополнить это определение, необходимо вновь прибегнуть к третьему закону Ньютона (равенству действия и противодействия), рассматриваемому к тому же не как экспериментальный закон, а как определение. Два тела A и B воздействуют друг на друга. Ускорение тела A, умноженное на массу тела A, равняется действию тела B на A. Также, произведение ускорения тела B на его массу равно противодействию тела A на B. Поскольку, по определению, действие равняется противодействию, массы тел A и B обратно пропорциональны ускорениям этих двух тел. Итак, отношение этих двух масс определено, и остается только проверить на опыте, что это отношение постоянно.

Все было бы хорошо, если бы в наличии были только два тела A и B, отстраненных от воздействия внешнего мира. Однако, это не так. Ускорение тела A вызывается не только действием тела B, но и действием многих других тел C, D, ... Следовательно, чтобы применить предыдущее правило, необходимо разложить ускорение тела A на несколько составляющих и выяснить, какая из этих составляющих вызывается действием тела B.

Это выделение было бы еще возможно, если *допустить*, что действие тела C на тело A просто прибавляется к действию тела B на тело A, а присутствие тела C не видоизменяет действия тела B на тело A, или что присутствие тела B не видоизменяет действия тела C на тело A; если допустить, следовательно, что два тела притягиваются друг к другу с силой, направленной по прямой, которая их соединяет и зависит только от расстояния между ними; одним словом, если допустить *гипотезу центральных сил.*

Известно, что при определении масс небесных тел пользуются совсем другим принципом. Закон тяготения гласит, что притяжение двух тел пропорционально их массам. Если r является расстоянием между ними, m и m' — их массами, то их притяжение будет $\frac{kmm'}{r^2}$ для некоторой постоянной k.

Таким образом, измеряется не та масса, которая равняется отношению силы к ускорению, а та, что создает силу притяжения; т. е. измеряется не инерция тела, а его притягивающая мощь.

Этот способ измерения является косвенным, и его использование теоретически необязательно. Вполне можно было бы допустить, что притяжение обратно пропорционально квадрату расстояния, не будучи при этом пропорционально произведению масс: притяжение равнялось бы $\frac{f}{r^2}$, но не удовлетворялось бы равенство $f = kmm'$. Тогда можно было бы тем не менее измерить массы небесных тел, наблюдая за их *относительными* движениями.

Имеем ли мы право принять гипотезу о центральных силах? Является ли эта гипотеза абсолютно точной? Достоверно ли, что она никогда не будет противоречить эксперименту? Кто осмелился бы утверждать это? А если нам придется отказаться от этой гипотезы, то все сооружение, воздвигнутое с таким трудом, рухнет.

У нас нет больше права говорить о составляющей ускорения тела A, вызываемой действием тела B. Мы не способны отделить эту составляющую от ускорения, которое вызывается действием тела C или действием другого тела. Правило для измерения масс перестает быть применимым.

Тогда что же остается от принципа равенства действия и противодействия? Если гипотеза центральных сил отбрасывается, то этот принцип должен, очевидно, быть сформулирован следующим образом: геометрическая равнодействующая всех сил, приложенных к различным телам системы, изолированной от всех внешних воздействий, будет равняться нулю. Или, иначе говоря, движение центра тяжести этой системы будет прямолинейным и равномерным.

Вероятно, это можно рассматривать как способ определения массы. Положение центра тяжести, очевидно, зависит от значений, придаваемых массам. Необходимо будет расставить эти значения таким образом, чтобы движение центра тяжести было прямолинейным и равномерным. Это будет всегда возможно, если третий закон Ньютона верен, и в общем случае способ распределения масс определен однозначно.

Но не существует системы, изолированной от всех внешних воздействий. Все части Вселенной с большей или меньшей силой подвергаются действию всех других частей. *Закон движения центра тяжести является абсолютно верным, только если его применяют ко всей Вселенной.*

Но тогда, для того, чтобы получить значения масс, было бы необходимым наблюдать за движением центра тяжести Вселенной. Абсурдность этого следствия очевидна. Мы знаем лишь относительные движения. Движение центра тяжести Вселенной останется для нас навечно неизвестным.

Следовательно, ничего не остается, и все наши усилия оказались напрасными. Мы пришли к следующему определению, которое является лишь свидетельством нашего бессилия: *массы — это коэффициенты, которые удобно вводить в вычислениях.*

Мы смогли бы переделать всю Механику, приписав всем массам новые значения. Эта новая механика не противоречила бы ни опыту, ни основным принципам динамики (принципу инерции, пропорциональности сил массам и ускорениям, равенству действия и противодействия, прямолинейному и равномерному движению центра тяжести, принципу площадей).

Только уравнения этой новой Механики были бы *менее простыми.* Поясним, что менее простыми были бы просто первые члены, т. е. те члены, которые нам уже известны из опыта. Возможно, был бы способ изменить массы малых величин так, чтобы *полные* уравнения не выигрывали и не проигрывали в простоте.

Я дольше, чем сам Герц, настаивал на этом обсуждении. Но я хотел показать, что Герц не просто искал повода для германофильской ссоры с Галилеем и Ньютоном. Мы должны сделать вывод, что в рамках классической системы *невозможно ввести удовлетворительного понятия силы и массы.*

2. Различные возражения. Далее Герц задается вопросом, являются ли принципы Механики абсолютно верными. «По мнению многих физиков, — говорит он, — немыслимо, чтобы самый отдаленный опыт смог когда-нибудь что-либо изменить в нерушимых основах механики; а между тем, то, что вытекает из опыта, всегда может быть исправлено опытом».

После того, что мы только что сказали, эти опасения представляются излишними. Принципы динамики казались нам сначала экспериментальными истинами. Но мы уже были вынуждены пользоваться ими как определениями. Именно *по определению* сила равна произведению массы на ускорение. Вот принцип, который отныне не подвергается опасности от проведения какого-либо последующего опыта. Также, именно по определению действие равняется противодействию.

Но тогда, скажут нам, эти не поддающиеся проверке принципы абсолютно лишены всякого значения. Опыт не может им противоречить, однако они не могут научить нас ничему полезному. Тогда к чему вообще изучать Динамику?

Этот слишком поспешный вывод был бы несправедливым. В природе не существует *совершенно* изолированной системы, полностью неподверженной всякому внешнему воздействию. Однако существуют *почти* изолированные системы.

Если наблюдать за подобной системой, то можно изучать не только относительное движение некоторых ее частей, одних по отношению к другим, но и движение ее центра тяжести по отношению к другим частям Вселенной. Тогда устанавливается, что движение этого центра тяжести является *почти* прямолинейным и равномерным в соответствии с третьим законом Ньютона.

Это экспериментальная истина, которая не может быть опровергнута опытом. Действительно, что бы нам показал более точный опыт? Он показал бы, что закон только приблизительно верен. Но это нам уже известно.

Вот объяснение тому, как опыт смог послужить основой в принципах Механики и при всем этом никогда не сможет им противоречить.

Но вернемся к рассуждениям Герца. Классическая система является неполной, т. к. все движения, совместимые с принципами Динамики, не осуществляются в Природе и даже не являются осуществимыми. Действительно, очевидно, что принципы площадей и движения центра тяжести не являются единственными законами, которые управляют явлениями природы. Несомненно, было бы безрассудным требовать от Динамики, чтобы она заключила в одну формулу все законы, которые физика открыла или сможет открыть. Тем не менее, систему Механики, в которой умалчивается закон сохранения энергии, следует рассматривать как неполную и недостаточную.

«Наша система, — заключает Герц, — действительно, включает *все* естественные движения, но в то же время она включает в себя и много *других* неестественных движений. Система, которая исключит часть этих движений, будет более соответствовать природе вещей и, следовательно, будет являться прогрессивной». Такова, например, энергетическая система, о которой пойдет речь ниже, и в которой фундаментальный закон сохранения энергии вводится совершенно естественно.

Возможно, не вполне ясно, что мешает этому фундаментальному закону быть включенным в классическую систему наряду с другими принципами.

Но Герц задается еще одним вопросом. Классическая система дает нам картину внешнего мира. Является ли эта картина *простой*? Избавлена ли она от паразитических штрихов, произвольно введенных наряду с существенными чертами? Не являются ли силы, которые нам пришлось ввести, ненужными механизмами, работающими впустую?

На столе лежит кусочек железа. Наблюдатель, не осведомленный заранее, подумает, что поскольку нет движения, нет и силы. Но как он ошибается! Физика учит нас тому, что каждый атом железа притягивается всеми другими атомами Вселенной. Кроме того, каждый атом железа намагничен и, следовательно, подвергается действию всех магнитов во Вселенной. Все электрические токи мира также действуют на этот атом. Не будем забывать и об электростатических силах, молекулярных силах и т. д.

Если бы некоторые из этих сил действовали отдельно, то их действие было бы огромным. И тогда кусочек железа разлетелся бы на части. К счастью, они действуют все вместе и уравновешиваются так, что совершенно ничего не происходит. Наш не осведомленный заранее наблюдатель, который видит только одно — кусочек железа в состоянии покоя, очевидно, подумает, что все эти силы существуют лишь в нашем воображении.

Несомненно, в этих рассмотрениях нет ничего абсурдного, но система, которая бы избавила нас от этого, была бы уже одним этим лучше нашей.

Это возражение никого не оставит равнодушным. Впрочем, чтобы показать, что оно не является чисто искусственным, достаточно напомнить об одной полемике, которая произошла несколько лет назад между двумя очень известными учеными, фон Гельмгольцем и Бертраном, предметом которой был вопрос о взаимодействиях токов. Бертран, пытаясь перевести на классический язык теорию фон Гельмгольца, столкнулся с неразрешимыми противоречиями. Каждый элемент тока должен был подчиняться паре, состоящей из двух равных и противоположно направленных сил. Бертран вычислил, что каждая из этих двух составляющих должна быть настолько большой, чтобы вызвать разрушение провода. И он сделал вывод о несостоятельности теории. Напротив, фон Гельмгольц, сторонник энергетической системы, не видел здесь никакой трудности.

Таким образом, согласно Герцу, от классической системы следует отказаться, т. к.

1° корректное определение силы невозможно;

2° система неполная;

3° система вводит паразитические гипотезы, и эти гипотезы часто порождают трудности чисто искусственные, но тем не менее достаточно значительные, чтобы запутать лучших ученых.

II. Энергетическая система

1. Различные возражения. Энергетическая система возникла в результате открытия закона сохранения энергии. Именно фон Гельмгольц придал этой системе определенную форму.

Начнем с определения двух величин, которые играют основную роль в этой теории. Этими двумя величинами являются: с одной стороны *кинетическая энергия* или живая сила, с другой стороны, *потенциальная энергия*.

Все изменения, которые могут претерпевать природные тела, определяются двумя экспериментальными законами.

1°. Сумма кинетической и потенциальной энергии является постоянной величиной. В этом заключается закон сохранения энергии.

2°. Если система тел находится в положении A в момент времени t_0 и в положении B в момент времени t_1, то она всегда переходит из первого положения ко второму таким путем, что *среднее* значение разности между двумя видами энергии в интервале времени, который разделяет моменты t_0 и t_1, будет наименьшим возможным.

Это и есть принцип Гамильтона, который является одной из форм принципа наименьшего действия.

Энергетическая теория имеет следующие преимущества над классической теорией:

1° она является более полной, т. е. закон сохранения энергии и принцип Гамильтона дают нам больше, чем основные принципы классической теории, и исключают некоторые движения, которые не осуществляются природой и которые были бы совместимы с классической теорией;

2° она освобождает нас от гипотезы атомов, чего было почти невозможно избежать в классической теории.

Но она, в свою очередь, вызывает новые трудности. Прежде, чем сказать о возражениях Герца, отмечу два, которые приходят мне в голову: определения двух видов энергии вызвали бы почти такие же большие трудности, как определение силы и массы в первой системе. Однако, от этих трудностей легче избавиться, по крайней мере, в самых простых случаях.

Рассмотрим изолированную систему, образованную некоторым количеством материальных точек. Предположим, что эти точки подчиняются силам, которые зависят только от их относительного положения и от их взаимных расстояний и не зависят от их скоростей. Можно подобрать такие силы в соответствии с законом сохранения энергии.

В этом простом случае утверждение закона сохранения энергии является предельно простым. Некоторая величина, доступная опыту, должна оставаться постоянной. Эта величина представляет собой сумму двух членов: первый член зависит только от положения материальных точек и не зависит от их скоростей; второй член пропорционален квадратам этих скоростей. Данное разложение можно образовать только одним единственным способом.

Первый из этих членов, который мы обозначим U, будет потенциальной энергией; второй член — кинетической энергией, будем обозначать его T.

Верно, что если $T + U$ является постоянной величиной, то постоянной величиной будет также любая функция $\varphi(T + U)$ от $T + U$.

Но эта функция $\varphi(T + U)$ не будет вообще говоря являться суммой двух членов, один из которых не зависит от скоростей, а второй пропорционален квадратам скоростей. Среди функций, которые остаются постоянными, есть только одна, которая обладает этим свойством, а именно функция $T + U$ (или линейная функция от $T + U$, что не дает ничего нового, поскольку эту линейную функцию всегда можно свести к $T + U$ заменой единицы длины и начала координат). Эту функцию мы и назовем энергией; первый член — потенциальной, а второй — кинетической. Таким образом, определение двух видов энергии может быть доведено до конца без какой-либо двусмысленности.

То же относится и к определению массы. Кинетическая энергия или живая сила очень просто выражается с помощью масс и относительных скоростей всех материальных точек по отношению к одной из них. Эти относительные скорости доступны наблюдению, и когда мы получим выражение кинетической энергии как функции этих относительных скоростей, коэффициенты этого выражения дадут нам массы.

Таким образом, в этом простом случае можно без труда определить основные понятия. Однако трудности возникают вновь в более сложных случаях, например, если силы зависят также от скоростей, вместо того, чтобы зависеть только от расстояний. Например, Вебер предполагает, что взаимодействие двух электрических частиц зависит не только от расстояния между ними, но и от их скорости и ускорения. Если бы материальные точки притягивались по аналогичному закону, то U зависела бы от скорости и могла бы содержать член, пропорциональный квадрату скорости.

Как среди членов, пропорциональных квадратам скоростей, различить те члены, которые происходят от T или от U? Как, стало быть, различить две части энергии? Более того, как определить *саму* энергию? Нет больше никакой причины брать за определение $T+U$, вместо какой-нибудь функции от $T+U$, если пропало свойство, которое характеризовало $T+U$ — свойство быть суммой двух членов специального вида.

Но это не все. Необходимо учитывать не только механическую энергию в собственном смысле этого слова, но и другие формы энергии: теплоту, химическую энергию, электрическую энергию и т. д. Закон сохранения энергии должен быть записан следующим образом:

$$T + U + Q = \text{const},$$

где T представляло бы кинетическую энергию, U — потенциальную энергию положения (зависящую только от положения тела), а Q — внутреннюю молекулярную энергию в термической, химической или электрической форме.

Если бы эти три члена были абсолютно различными, если бы T была пропорциональна квадратам скоростей, U — независима от этих скоростей и от состояния тел, Q — независима от скоростей и от положения тел, а зависела бы только от их внутреннего состояния, то все было бы не так плохо.

Выражение для энергии можно было бы разложить только одним единственным способом на три члена этого вида.

Тем не менее дело обстоит совсем по-другому. При рассмотрении электризованных тел, электрическая энергия, вызванная их взаимодействием, очевидно, будет зависеть от их зарядов, т. е. от их внутреннего состояния. Но она в равной степени будет зависеть и от их положения. Если эти тела находятся в движении, то они будут воздействовать друг на друга электродинамически, а электродинамическая энергия будет зависеть не только от их состояния и положения, но и от их скоростей.

Таким образом, у нас больше нет никакой возможности выделить члены, которые должны быть составными частями T, U и Q, и отделить три части энергии.

Если $(T + U + Q)$ постоянна, то постоянной будет и любая функция $\varphi(T + U + Q)$.

Если бы $T + U + Q$ имела тот специальный вид, который мы рассматривали выше, то двусмысленности не возникло бы. Среди функций $\varphi(T + U + Q)$, которые остаются постоянными, только одна имела бы этот специальный вид, и именно эту функцию мы условились бы называть энергией.

Но, как мы уже сказали, дело обстоит не вполне так. Среди функций, которые остаются постоянными, нет таких, которые имели бы в точности этот специальный вид. Как выбрать среди них ту, которая должна называться энергией? В нашем выборе мы не можем больше ничем руководствоваться.

Остается только сформулировать закон сохранения энергии так: *Есть что-то, что остается постоянным.* В этом виде закон оказывается, в свою очередь, вне досягаемости опыта и сводится к некой тавтологии. Ясно, что если мир управляется законами, то будут существовать величины, которые остаются постоянными. Как и законы Ньютона, по аналогичной причине, закон сохранения энергии, основанный на опыте, не мог бы больше опровергаться опытом.

Это обсуждение показывает, что при переходе от классической системы к энергетической произошел прогресс. Но одновременно, это обсуждение доказывает недостаточность данного прогресса.

Другое возражение кажется мне еще более серьезным. Принцип наименьшего действия применим к обратимым явлениям, но совершенно неудовлетворителен по отношению к необратимым явлениям. Попытка фон Гельмгольца применить этот принцип к такого рода явлениям не удалась и не могла удасться. Тут остается начать и кончить.

Но Герц дальше всего развивал другие возражения, почти метафизического порядка.

Если энергия является, так сказать, *материализованной*, то она всегда должна быть положительной. Однако, имеются случаи, в которых трудно уклониться от рассмотрения отрицательной энергии. Рассмотрим, например, Юпитер, вращающийся вокруг Солнца. Полная энергия выражается как $av^2 - \frac{b}{r} + c$, где a, b, c — три положительные постоянные, v — скорость Юпитера, r — расстояние от него до Солнца.

Поскольку мы располагаем константой c, мы можем предположить ее достаточно большой для того, чтобы энергия была положительной. Здесь уже есть нечто необоснованное, что шокирует наше сознание.

Более того, представим теперь, что какое-то небесное тело, имеющее огромную массу и огромную скорость, пересекает Солнечную систему. Когда оно пролетит и вновь удалится на огромное расстояние, орбиты планет претерпят значительные изменения. Можно представить, например, что большая ось орбиты Юпитера станет намного меньше, но эта орбита останется близкой к круговой. Какой бы большой ни была c, если новая большая ось достаточно мала, выражение $av^2 - \frac{b}{r} + c$ станет отрицательным, и мы вновь столкнемся с трудностью, которой надеялись избежать, выбирая c достаточно большой.

В итоге, нельзя утверждать, что энергия всегда остается положительной.

С другой стороны, для того, чтобы *материализовать* энергию, необходимо ее *локализовать*. Это легко для кинетической энергии, но не для потенциальной. Где локализовать потенциальную энергию, вызванную притяжением двух светил? В одном из двух светил? В обоих? В промежуточной среде?

В самом утверждении принципа наименьшего действия есть что-то шокирующее для нашего сознания. Для того, чтобы отправиться из одной точки в другую, материальная частица, изолированная от действия внешних сил, но обязанная двигаться по данной поверхности, выберет геодезическую линию, т. е. наиболее короткий путь.

Как будто бы эта частица знает точку, куда ее хотят привести, предвидит время, за которое она туда доберется, следуя тем или иным путем, и выбирает самый удобный путь. Судя по такому изложению, эта частица является, если можно так выразиться, живым и свободным существом. Ясно, что было бы лучше заменить это менее шокирующим утверждением, где, как сказали бы философы, конечные цели не подменяли бы действительные причины.

2. Пример с шаром. Последнее возражение, которое, кажется, более всего возмущало Герца, носит несколько другой характер.

Известно, что такое система со связями. Представим сначала две точки, соединенные жестким стержнем так, что расстояние между ними сохраняется неизменным; или, более общо, предположим, что некоторый механизм поддерживает соотношение между координатами двух или нескольких точек системы. Это первый вид связи, который называется «жесткой связью».

Предположим теперь, что сфера катится по плоскости. Скорость точки касания должна равняться нулю. Таким образом, мы получаем второй вид связи, который выражается соотношением не только между координатами нескольких точек системы, но и между их координатами и их скоростями.

Системы, в которых существуют связи второго вида, имеют любопытное свойство, которое мы попытаемся сейчас объяснить на только что приведенном простом примере. Это пример шара, катящегося по горизонтальной плоскости.

Пусть O — точка горизонтальной плоскости, а C — центр сферы.

Для полного определения положения подвижной сферы возьмем три неподвижные оси координат Ox, Oy, Oz, где первые две находятся в горизонтальной плоскости, соприкасающейся со сферой. И возьмем три оси координат, жестко связанные со сферой $C\xi$, $C\eta$ и $C\zeta$.

Положение сферы будет полностью определено, если задать две координаты точки касания и девять косинусов направлений подвижных осей по отношению к неподвижным осям. Пусть A — положение сферы, когда точка касания находится в начальной точке O и подвижные оси параллельны неподвижным осям.

Координаты точки касания равны $x = 0$, $y = 0$, и девять косинусов таковы:

$$\begin{array}{ccc} 1, & 0, & 0; \\ 0, & 1, & 0; \\ 0, & 0, & 1. \end{array}$$

Придадим сфере бесконечно малое вращение ε вокруг оси $C\xi$. Сфера придет в положение B, где координатами точки касания станут $x = 0$, $y = 0$, а девять косинусов будут равны:

$$\begin{array}{ccc} 1, & 0, & 0; \\ 0, & \cos\varepsilon, & \sin\varepsilon; \\ 0, & -\sin\varepsilon, & \cos\varepsilon. \end{array}$$

Но это вращение невозможно, т.к. оно заставило бы сферу проскальзывать, а не катиться по плоскости. Следовательно, невозможно перейти от положения A к бесконечно близкому положению B *непосредственно*, т.е. путем бесконечно малого движения.

Однако сейчас мы увидим, что этот переход может произойти *косвенно*, т.е. путем конечного движения.

Начнем с положения A. Заставим сферу катиться по плоскости таким образом, чтобы мгновенная ось вращения находилась в горизонтальной плоскости и была всегда параллельна оси Oy, и остановимся, когда ось $C\xi$ станет вертикальной и параллельной оси Oz. Мы придем в положение D, где координатами точки касания станут $x = \frac{\pi}{2}R$, $y = 0$, где R — радиус сферы, а девять косинусов будут равны:

$$\begin{array}{ccc} 0, & 0, & -1; \\ 0, & 1, & 0; \\ 1, & 0, & 0. \end{array}$$

В положении D точка касания находится на конце вертикальной оси $C\xi$.

Применим к сфере вращение ε вокруг оси $C\xi$. Это вращение представляет собой проворачивание вокруг вертикальной оси, проходящей через точку касания; оно не допускает никакого скольжения и, следовательно, совместно со связями.

В таком случае сфера приходит в положение E, где координатами касания являются $x = \frac{\pi}{2}R$, $y = 0$, а косинусы таковы:

$$\begin{array}{ccc} 0, & 0, & 1; \\ \sin\varepsilon, & \cos\varepsilon, & 0; \\ \cos\varepsilon, & -\sin\varepsilon, & 0. \end{array}$$

Теперь пусть сфера катится так, чтобы мгновенная ось вращения оставалась постоянно параллельной оси Oy и, следовательно, чтобы точка касания всегда находилась на оси Ox. Остановимся, когда точка касания вернется в начальную точку O. Легко видеть, что мы пришли в положение B.

Следовательно, можно перейти от положения A к положению B посредством перехода через положения D и E.

Герц называет системы ***голономными,*** если связи не позволяют непосредственно переходить из одного положения в другое бесконечно близкое положение, то они не позволяют также переходить от первого положения ко второму косвенно. В таких системах существуют только жесткие связи.

Видно, что наша сфера не является голономной системой.

Итак, бывает, что принцип наименьшего действия не применим к неголономным системам. Действительно, можно перейти от положения A к положению B таким путем, который мы только что рассмотрели, и, несомненно, множеством других путей. Среди всех этих путей есть, очевидно, один, который соответствует наименьшему действию. Следовательно, сфера должна была бы быть в состоянии проследовать по этому пути из A в B. Но это не так: каковы бы ни были начальные условия движения, сфера никогда не перейдет из A в B.

Более того, если сфера действительно переходит из положения A в положение A', она не всегда движется тем путем, который соответствует минимальному действию.

Принцип наименьшего действия больше не является верным.

«В этом случае, — говорит Герц, — сфера, которая подчинялась бы этому принципу, казалась бы живым существом, которое сознательно преследовало бы определенную цель, тогда как сфера, которая следовала бы закону природы, имела бы вид неодушевленной однообразно катящейся массы... Но подобных связей в природе не существует. Так называемое качение без проскальзывания является на самом деле качением с небольшим проскальзыванием. Это явление входит в ряд необратимых явлений, таких как трение, еще плохо изученных, к которым мы еще не умеем применять истинные принципы Механики.»

«Качение без проскальзывания, — ответим мы, — не противоречит ни закону сохранения энергии, ни какому-либо из известных законов физики. Это явление может быть осуществлено в наблюдаемом мире с такой точностью, которая позволяет использовать его для конструирования самых точных машин интегрирования (планиметры, гармонические анализаторы и т. д.) Мы не имеем никакого права исключать его как невозможное. Проблемы же наши остаются независимо от того, реализуется ли такое качение в точности или же лишь приблизительно. Для того, чтобы принять принцип, необходимо потребовать, чтобы его применение к задаче, данные которой близки к точным, давало бы и близкие к точным результаты. К тому же, другие, жесткие связи также лишь приблизительно осуществимы в природе. Однако их ведь не исключают из рассмотрения...»

III. Система Герца

Теперь рассмотрим систему, которой Герц предлагает заменить две теории, которые он критикует. Эта система основывается на следующих гипотезах:

1°. В природе существуют только системы со связями, но изолированные от всякого воздействия внешних сил.

2°. Если некоторые тела, как нам кажется, подчиняются силам, то это означает, что они связаны с другими телами, которые для нас невидимы.

Пусть материальная точка, которая нам кажется свободной, не описывает между тем прямолинейной траектории. Прежде механики говорили, что этого не происходит, потому что на нее действует сила, а Герц объясняет это тем, что она не свободна, а связана с другими невидимыми точками.

На первый взгляд эта гипотеза кажется странной: для чего кроме видимых тел вводить предположительные невидимые тела? Однако, отвечает Герц, две старые теории вынуждены равно предполагать кроме видимых тел какие-то невидимые сущности. Классическая теория вводит силы, энергетическая теория вводит энергию. Но эти невидимые сущности, сила и энергия, неизвестного и таинственного происхождения. А наши гипотетические сущности, напротив, имеют совершенно ту же природу, как и видимые тела.

Проще и естественней, не так ли?

Можно было бы обсуждать этот вопрос и утверждать, что сущности прежних теорий должны быть сохранены именно по причине их таинственной природы. Уважение к этой тайне является свидетельством нашего незнания. И поскольку наше незнание является несомненным, не лучше было бы признать это, чем скрывать?

Но пойдем дальше и посмотрим, какую пользу извлекает Герц из своих гипотез.

Движение систем со связями, без внешней силы, определяется одним единственным законом.

Среди движений, совместимых со связями, осуществится то движение, для которого сумма масс, умноженных на квадрат ускорений, является минимальной.

Этот принцип эквивалентен принципу наименьшего действия, если система является голономной. Но он более общий, поскольку он также применим и для неголономных систем.

Чтобы лучше осознать значение этого принципа, приведем простой пример: точка, которая движется по поверхности. Здесь мы имеем только одну материальную точку, следовательно, ускорение должно быть минимальным. Для этого необходимо, чтобы касательное уравнение равнялось нулю. Поскольку это ускорение равняется $\frac{dv}{dt}$, где v — скорость, а t — время, то v является постоянной, и движение точки равномерно. Кроме того, необходимо, чтобы нормальное ускорение было минимальным. Оно равняется $\frac{v^2}{\rho}$, где ρ — радиус кривизны траектории, или же $\frac{v^2}{R\cos\varphi}$, где R — радиус кривизны нормального сечения поверхности, а φ — угол, образуемый соприкасающейся плоскостью траектории с нормалью к поверхности.

Поскольку скорость предполагается заданной по величине и направлению, v и R известны.

Таким образом, необходимо, чтобы $\cos\varphi = 1$, т. е. чтобы соприкасающаяся плоскость траектории была нормальна к поверхности, или, иначе говоря, чтобы подвижная точка описывала геодезическую линию.

Теперь, чтобы показать, как можно объяснить движение систем, на которые, как нам *кажется*, действуют силы, возьмем еще один простой пример с центробежным регулятором. Этот хорошо известный прибор состоит из параллелограмма $ABCD$ с подвижными сочленениями в вершинах. В противолежащих углах этого параллелограмма, B и D, находятся массивные шары. Верхний угол A зафиксирован. В нижнем углу C закреплено кольцо, которое может скользить вдоль вертикального неподвижного стержня AX. Все устройство приводится в действие вращательным движением вокруг стержня AX. К кольцу C подвешен стержень T.

Центробежная сила стремится развести шары и, следовательно, поднять кольцо C и стержень T. Следовательно, этот стержень T подвергается силе тяги, которая тем сильнее, чем быстрее вращение.

Предположим теперь, что некий наблюдатель видит только этот стержень, т. е. представим, что шары, стержень AX и параллелограмм сделаны из материала, невидимого для наблюдателя. Этот наблюдатель установит, что на стержень T действует тяга. Но поскольку он не увидит, каким образом эта тяга возникает, он припишет ее таинственной причине, «силе», притяжению, которое действует со стороны точки A на стержень.

Итак, согласно Герцу, всякий раз, как мы воображаем силу, мы становимся жертвами аналогичной иллюзии.

Тогда встает вопрос: можно ли подобрать систему сочленений, которая имитирует систему сил, определяемую произвольным законом, или приближает ее с любой точностью? Ответ должен быть утвердительным. Достаточно напомнить о теореме Кёнигса, которая могла бы послужить основой для доказательства.

Эта теорема гласит: *всегда можно представить такую систему сочленений, что точка этой системы описывает произвольную кривую или алгебраическую поверхность*; *или, иначе говоря, можно представить такую систему сочленений, что координаты точек системы в силу их связей будут подчинены произвольным наперед заданным алгебраическим отношениям.*

Вот только предположения, из которых выводится заданное поведение, могут оказаться очень уж сложными.

Впрочем, это не первая попытка, которую делали в этом направлении. Невозможно не заметить сходства гипотез Герца с теорией лорда Кельвина о гиростатической упругости.

Как известно, лорд Кельвин пытался объяснить свойства эфира без привлечения понятия силы. Он даже придал определенную форму своей гипотезе: он представляет эфир одной из тех механических моделей, которые так любят англичане. Английские ученые, довольные тем, что воплощают свои идеи в осязаемую форму, не боятся сложности этих моделей, в которых множатся стержни, шатуны, желобы, как в механическом ателье.

Чтобы дать читателю представление, опишем модель гиростатического эфира. Эфир образован чем-то вроде решетки. Каждая ячейка этой решетки — тетраэдр. Каждое ребро этого тетраэдра образовано двумя стержнями, один из которых полый, а другой сплошной, скользящими один в другом. Следовательно, это ребро растяжимое, но не гибкое.

В каждой ячейке находится устройство, образованное тремя стержнями, жестко соединенными друг с другом под прямыми углами. Каждый из этих трех стержней опирается на два противолежащих ребра тетраэдра. Наконец, каждый из них содержит четыре гироскопа.

В системе, которую мы только что описали, нет потенциальной энергии. Есть только кинетическая: энергия тетраэдров и энергия гироскопов. Между тем, образованная таким образом среда ведет себя, как упругая: она передает поперечные колебания в точности как эфир.

Также добавим, что системы сочленений такого рода, содержащие гироскопы, не только могут имитировать все силы, которые мы находим в природе, но также и те, которые в природе не встречаются. Это именно та цель, которую ставил себе лорд Кельвин. Он пытался объяснить некоторые свойства эфира, которые, как ему казалось, не поддаются разгадке в рамках обычных предположений.

Известно, что гироскопическая ось склонна сохранять определенное направление в пространстве. Когда ее отклоняют, она стремится вернуться, как будто бы под воздействием направляющей силы. Эта кажущаяся сила, стремящаяся сохранить направление оси гироскопа, не уравновешивается, в отличие от реальных сил, равным и обратным противодействием. Следовательно, к ней неприменим закон действия и противодействия и его следствия, как например, правило площадей, которым подчиняются естественные силы.

Таким образом, ясно, что гиростатическая гипотеза, в которой освобождаются от этого ограничительного закона, охватывает факты, которые не могут быть объяснены обычными гипотезами, согласованными с этим законом.

Что же следует думать о теории Герца? Она наверно интересна, но не удовлетворяет нас полностью, будучи во многом гипотетичной.

Герцу удалось обезопаситься от некоторых возражений, которые его мучили. Однако, он отмел не все возражения.

Трудности, которые мы так долго обсуждали в начале этой статьи, можно резюмировать следующим образом.

Есть множество изложений основ Динамики, но ни в одном из них толком не различаются определения, экспериментальные факты и математические теоремы. В системе Герца это различие еще не является совершенно четким и, кроме того, он вводит четвертый элемент — гипотезу. При всем том, одной своей новизной, этот способ изложения оказывается полезным — он заставляет нас размышлять, отказываться от прежних ассоциаций идей. Мы пока не можем охватить взором целое здание; хорошо уже, если есть новая перспектива, открывающаяся с новой точки зрения.

ЗАМЕТКИ О ГИПОТЕЗЕ ЛАПЛАСА

Bulletin astronomique, t. 28, p. 251–266 (juillet 1911)

1. Известно, что в космогонической гипотезе Лапласа предполагается, что первичная туманность, стягиваясь, образует ряд колец, из которых затем происходят различные планеты. Можно спросить себя, каковы условия устойчивости этих колец и какова причина их разрушения. Роша определил условия их образования следующим путем. Необходимо предположить, что туманность очень сильно уплотнена к центру и состоит из отчетливо выраженного сферического ядра и очень разреженной атмосферы; сравнение моментов вращения безусловно заставляет нас делать такие предположения. Итак, пусть M — масса ядра, ω — скорость вращения, предполагаемого равномерным, r — расстояние от точки x, y, z до начала координат. За ось вращения примем ось x. Уравнение свободной поверхности атмосферы будет

$$\frac{\omega^2}{2}(z^2+y^2)+\frac{M}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=C,$$

поверхность вращения с меридианальным сечением

$$\frac{\omega^2 y^2}{2}+\frac{M}{\sqrt{x^2+y^2}}=C. \tag{1}$$

Для некоторых значений постоянной C эта кривая имеет две двойных точки, и тогда происходит образование колец из атмосферы.

Если придать C эти значения, у кривой будут бесконечные ветви, так что если уравнение (1) оставалось бы в силе, то отделившиеся части центральной массы не смогли бы образовать кольца и улетели бы на бесконечность. Однако ясно, что эти части не сумели бы сохранить неизменной угловую скорость ω, которая до этого момента предполагалась постоянной. Став изолированными, они не примут больше участия в общем вращении, и их угловая скорость будет уменьшаться согласно закону площадей по мере того, как они будут удаляться от оси.

Таким образом, по меньшей мере у двойных точек нельзя рассматривать ω как постоянную, и маловероятно, что эта равномерность вращения могла бы поддерживаться в очень разреженной атмосфере туманности. Поэтому отныне будем предполагать, что ω меняется согласно некоторому закону. Кроме того, для вывода уравнения (1) мы пренебрегали притяжением этой атмосферы из-за ее низкой плотности. Так больше делать нельзя: это и само по себе очевидно, и сверх того, в дальнейшем мы увидим, что полагая притяжение равным нулю, мы пришли бы к заключению о неустойчивости колец.

Уравнения гиростатики дают нам следующее:

$$\frac{dP}{dx} + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = 0, \quad \frac{dP}{dy} + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy} = \omega^2 y, \quad \frac{dP}{dz} + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} = \omega^2 z,$$

где p — давление, ρ — плотность газа или жидкости, P — потенциал притяжения.

Эти уравнения можно записать как

$$dP + \frac{dp}{\rho} = \omega^2 R\, dR, \tag{2}$$

полагая $R^2 = y^2 + z^2$. Предположим, что p — функция от ρ (так будет происходить в большинстве случаев и, в частности, если туманность находится либо в изотермическом либо в адиабатическом равновесии). Тогда $\frac{dp}{\rho}$ является точным дифференциалом, а стало быть, $\omega^2 R\, dR$ тоже должен быть точным, т. е. ω зависит только от R. Следовательно, полагаем

$$\frac{dp}{\rho} = d\pi, \quad \omega^2 R\, dR = d\varphi(R),$$

тогда из уравнения (2) получим, что

$$P + \pi = \varphi(R) + \text{const}.$$

На свободной поверхности π должно быть равным нулю, таким образом, уравнение этой свободной поверхности будет выглядеть как

$$\varphi - P = C. \tag{3}$$

Если предположить, что ω является постоянной, и пренебречь притяжением атмосферы, то получим

$$\varphi = \frac{\omega^2}{2}R^2, \quad P = -\frac{M}{r},$$

и мы вновь сталкиваемся с уравнением Роша

$$\frac{\omega^2}{2}R + \frac{M}{r} = C.$$

В общем случае полагаем

$$P = -\frac{M}{r} + \delta P,$$

где член δP очень мал и возникает вследствие притяжения атмосферы. Обсудим форму поверхности (3). Сразу видно, что это поверхность вращения. По причине симметрии она допускает в общем случае плоскость экваториальной симметрии, которая будет плоскостью $x = 0$. Предположим, что мы хотим изучить пересечение поверхности прямой, параллельной оси x. Видно, что вдоль этой прямой φ постоянна, тогда как $\frac{M}{r}$ начинает расти, когда $|x|$ приближается к нулю. Если пренебречь δP, то это приведет к заключению, что первый член уравнения (3), когда изменяется только x, имеет единственный максимум при $x = 0$ и, следовательно, любая прямая, параллельная оси x, пересекает поверхность не более, чем в двух точках. Это заключение не изменится, когда мы перейдем к следующим приближениям, поскольку выражение $-\delta P$, возникающее вследствие притяжения атмосферы, также достигает максимума при $x = 0$, так как движущееся тело, обязанное двигаться по прямой, параллельной оси x, и находящееся под действием притяжения атмосферы, будет стремиться приблизиться к плоскости $x = 0$. Это очевидно, если эта атмосфера ограничена поверхностью, которую каждая прямая, параллельная оси x, пересекает максимум в двух точках, симметричных относительно плоскости $x = 0$. Итак, можно определить форму этой атмосферы последовательными приближениями. Сначала пренебрежем δP; во втором приближении примем за δP потенциал, вызванный притяжением атмосферы, ограниченной поверхностью, которая была вычислена в первом приближении и т. д. Предельная поверхность удовлетворяет условию в первом приближении и, как только что было показано, если она удовлетворяет условию в n-м приближении, то она будет удовлетворять ему и в $(n+1)$-м приближении. Следовательно, она также будет удовлетворять этому условию и во всех последующих приближениях.

Можно возразить, что знания свободной поверхности будет недостаточно для определения δP, и так как плотность атмосферы является переменной, необходимо знать все поверхности одинаковой плотности, то есть все поверхности, где $\pi = \text{const}$. Но все эти поверхности будут удовлетворять вышеизложенному условию в первом приближении, и так же проверяется, что если они удовлетворяют ему в n-м приближении, то они будут удовлетворять ему и в $(n+1)$-м приближении.

Таким образом заключаем, что поверхность (3) пересекается любой прямой, параллельной оси x, не более чем в двух точках, симметричных относительно экваториальной плоскости $x = 0$.

Чтобы изучить эту поверхность, или скорее ее меридианальное сечение, достаточно изучить вариацию выражения

$$\varphi(y) - P(y), \tag{4}$$

т. е. первого члена уравнения (3), где $x = z = 0$. Если

$$\varphi(y_0) - P(y_0) > C,$$

то поверхность (3) пересекает прямую $y = y_0$, $z = z_0$ в двух точках, и они не пересекаются, если

$$\varphi(y_0) - P(y_0) < C.$$

Если наша атмосфера не простирается бесконечно, то выражение (4) для очень большого y должно быть меньше, чем C; оно бесконечно для $y = 0$, потому что $\frac{M}{r} = \frac{M}{y} = +\infty$. Необходимо рассмотреть последовательные максимумы и минимумы выражения (4). Одним из самых простых является случай, где выражение (4) при уменьшении y от $+\infty$ до 0 сначала растет, достигнув максимума при $y = y_0$, затем уменьшается, достигнув минимума для $y = y_1$, и затем снова растет до бесконечности.

Обозначим через C_0 максимум, а через C_1 минимум. Если возьмем $C = C_1$, то меридианальная кривая, симметричная относительно двух осей, имеет две двойных точки, как показано на рисунке. Двойные точки A и A' имеют координаты

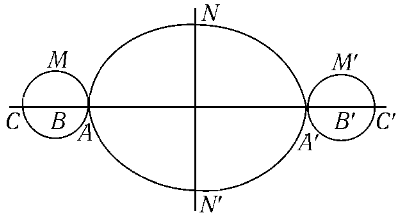
$$x = z = 0, \quad y = \pm y_1,$$

а точки B и B' имеют координаты

$$x = z = 0, \quad y = \pm y_0$$

и соответствуют максимуму выражения (4).

Если вращать меридианальную кривую вокруг оси x, то она заметет поверхность вращения с двойной кривой. Видно, что кольцо, заметенное AMC и $A'M'C'$ стремится к тому, чтобы отделиться от центральной массы, заметенной $ANA'N'$.



Если бы мы сначала пренебрегли δP, то мы имели бы

$$-P(y) = \frac{M}{y}.$$

Для того, чтобы выражение (4) имело минимум, необходимо для начала, чтобы

$$\frac{d}{dy}(\varphi - P) = \omega^2 y - \frac{M}{y^2} = 0,$$

т. е. чтобы $\omega^2 y^3 = M$. Тогда ω является угловой скоростью на круговой орбите радиуса y, заданной третьим законом Кеплера; далее, необходимо, чтобы

$$\frac{d^2}{dy^2}(\varphi - P) > 0$$

или

$$\omega^2 + 2\omega\omega' y + \frac{2M}{y^2} = 3\omega^2 + 2\omega\omega' y < 0.$$

Это означает, что $\omega^3 y^3$ должно увеличиваться вместе с y. Следовательно, все законы зависимости ω от y не допускают образования колец.

Если рассмотреть туманность с очень слабыми конвекционными токами, то взаимное трение различных частей будет сохранять равномерность вращения, ω будет постоянной, $\omega^2 y^3$ будет возрастающей функцией, и образование колец станет возможным. Если перейти к крайней противоположности и предположить очень мощные конвекционные токи, то в силу принципа площадей, произведение ωy^2 будет стремиться к сохранению для газообразной массы, переносимой этими токами; так как эти токи перемешивают всю массу, функция ωy^2 станет постоянной. Это можно было бы назвать *адиабатическим равновесием* аналогично термическому равновесию атмосферы Земли. Если ωy^2 постоянна, то функция $\omega^2 y^3$ является убывающей, и образование колец невозможно. Следовательно, необходимо допустить, что в туманности Лапласа конвекционные токи слишком слабы для того, чтобы противодействовать влиянию трения и следовательно, процесс должен быть чрезвычайно медленным.

2. Рассмотрим сейчас устойчивость образованных колец. Для того, чтобы кольцо образовалось и осталось устойчивым, необходимо прежде всего, чтобы свободная поверхность имела форму, указанную на рисунке и, следовательно, чтобы соответствующий точке B максимум существовал. В точке B будем иметь

$$\frac{d(\varphi - P)}{dy} = 0, \qquad \frac{d^2(\varphi - P)}{dy^2} < 0.$$

Первое условие приблизительно дает $\omega^2 y^3 = M$. Тогда найдем, каковы в точке B вторые производные трех частей $\varphi - p$:

производная от ...	φ	$\dfrac{M}{r}$	$-\delta P$
$\dfrac{d^2}{dx^2}\cdots$	0	$-\dfrac{M}{y^2} = -\omega^2 - \varepsilon'$	$-\varepsilon$
$\dfrac{d^2}{dy^2}\cdots$	$\omega^2 + 2\omega\omega' y$	$2\omega^2 + 2\varepsilon'$	$-4\pi\rho + \varepsilon + \varepsilon'$
$\dfrac{d^2}{dz^2}\cdots$	ω^2	$-\omega^2 - \varepsilon'$	$-\varepsilon'$.

Действительно, φ не зависит от x. Ее вторые производные по y и z выводятся непосредственно из ее определения. С другой стороны, имеется

$$\frac{d^2}{dy^2}\frac{M}{r} = \frac{2M}{y^2}, \qquad \frac{d^2}{dx^2}\frac{M}{r} = \frac{d^2}{dz^2}\frac{M}{r} = -\frac{M}{y^3},$$

и приблизительно получаем

$$\frac{M}{y^3} = \omega^2.$$

Для строгости необходимо записать

$$\frac{M}{y^3} = \omega^2 + \frac{1}{y}\frac{d\delta P}{dy}.$$

Что касается $\dfrac{d^2(-\delta P)}{dx^2}$, сошлемся на замечание, сделанное выше, что $-\delta P$ на прямой, параллельной оси x, имеет единственный максимум при $x = 0$ и что, следовательно, эта производная отрицательна.

С другой стороны, полагая

$$\delta P = f(R), \quad \frac{d\delta P}{dR} = f'(R), \quad \ldots,$$

находим (поскольку в точке B $z = 0$)

$$\frac{1}{y}\frac{d\delta P}{dy} = +\frac{f'}{R}, \quad \frac{d^2\delta P}{dz^2} = \frac{f'}{R};$$

отсюда

$$\frac{1}{y}\frac{d\delta P}{dy} = \varepsilon', \quad -\frac{d^2\delta P}{dz^2} = -\varepsilon'.$$

Кроме того, из уравнения Пуассона $\Delta\delta P = +4\pi\rho$ (где ρ — плотность жидкости) выводим

$$-\frac{d^2\delta P}{dy^2} = -4\pi\rho + \varepsilon + \varepsilon'.$$

Таким образом, нам необходимо рассмотреть ε как положительное, однако знак ε' неизвестен, хотя эта производная, вероятнее всего, положительна.

Итак, получаем

$$\frac{d^2(\varphi - \rho)}{dy^2} = 3\omega^2 + 2\omega\omega' y - 4\pi\rho + \varepsilon + 3\varepsilon' < 0.$$

Если ρ очень мало, то с необходимостью ε и $3\varepsilon'$ также малы, что влечет за собой

$$3\omega^2 + 2\omega\omega' y < 0.$$

Это означает, что $\omega^2 y^3$ убывает, когда растет y. Следовательно, если в окрестности точки B функция $\omega^2 y^3$ убывает, то устойчивость может иметь место при сколь угодно низкой плотности ρ, но если функция $\omega^2 y^3$ возрастает, то кольцо может быть устойчивым, только если плотность остается выше определенного предела.

Чтобы уточнить результат, предположим, что масса кольца очень мала не только по отношению к массе центрального ядра, но и относительно массы атмосферы, которая остается вокруг этого ядра.

Тогда положим

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad \varepsilon' = \varepsilon_1' + \varepsilon_2',$$

где ε_1 и ε_1' относятся к притяжению атмосферы, находящейся вокруг ядра, а ε_2 и ε_2' — к притяжению кольца. При данных условиях ε_1' положительно, если предположить, что свободная поверхность атмосферы ядра является выпуклой; с другой стороны, ε_2' очень мало по сравнению с ε_1'; отношение между этими двумя величинами такого же порядка по величине, как отношение *линейных* размеров меридианального сечения кольца к меридианальному сечению атмосферы ядра. В конечном итоге, заключаем $\varepsilon' > 0$ и, следовательно,

$$4\pi\rho > 3\omega^2 + 2\omega\omega' y. \tag{5}$$

Если бы вращение было равномерным, это дало бы

$$4\pi\rho > 3\omega^2.$$

Заметим, что для образования кольца необходимо, чтобы функция $\omega^2 y^3$ была возрастающей в точке A, а для того, чтобы кольцо было устойчивым, если при этом плотность очень низкая, необходимо, чтобы эта функция была убывающей в точке B. Исходя из того, что эти две точки находятся вблизи друг от друга, заключаем, что в кольце, в момент его образования, функция $\omega^2 y^3$ является практически постоянной.

Теперь найдем нижний предел плотности. Этот результат должен быть близок к тому результату, который был дан ранее для кольца Сатурна[1], но предел этот более точен. Вернемся сейчас к тому вычис-

[1] О кольце Сатурна см. Пуанкаре «Фигуры равновесия», РХД, 2000. — *Прим. перев.*

лению, которое было сделано для кольца Сатурна. Необходимо, чтобы во всех точках поверхности кольца

$$\frac{d}{dn}(\varphi - P) < 0,$$

где $\frac{d}{dn}$ обозначает производную по нормали, направленной наружу. Следовательно, имеем, на основании теоремы Грина,

$$\int \frac{d}{dn}(\varphi - P)\, d\sigma = \int \Delta(\varphi - P)\, d\tau < 0,$$

где $d\sigma$ — элемент поверхности кольца, а $d\tau$ — элемент его объема. Итак,

$$\Delta\varphi = 2\omega^2 + 2\omega\omega' y,$$
$$\Delta P = 4\pi\rho;$$

отсюда

$$4\pi\rho > 2\omega^2 + 2\omega\omega' y.$$

3. Плотность также имеет верхний предел. Для того, чтобы его вычислить, достаточно обратиться к расчетам Максвелла кольца Сатурна, принцип которых мы вкратце напомним. Пусть кольцо, образованное спутниками, равномерно распределено по окружности радиуса a и движется по этой окружности равномерно. Пусть a и $\nu_0 + \omega t$ — полярные координаты одного из спутников. Допустим, что он сместился и его координаты стали

$$\alpha(1 + \varepsilon), \quad \nu_0 + \omega y + \sigma,$$

где ε и σ очень малы. Пусть V — потенциал, вызванный взаимным притяжением этих спутников.

Уравнения в вариациях, которые определяют ε и σ, суть следующие: ($\sigma', \ldots$ обозначают производные от $\sigma, \ldots$ по времени)

$$3\omega^2\varepsilon + 2\omega\sigma' - \varepsilon' = -\frac{1}{a^2}\frac{dV}{d\varepsilon}; \quad \sigma' + 2\omega\varepsilon' = \frac{1}{a^2}\frac{dV}{d\sigma}. \tag{6}$$

Постараемся удовлетворить уравнениям (6), приняв

$$\varepsilon = A\cos(m\nu_0 + nt), \quad \sigma = B\sin(m\nu_0' + nt).$$

Поясним: у нас столько же пар уравнений, сколько и спутников; ε и σ не одинаковы для всех спутников и, следовательно, это не только функции от t, но и от ν_0 — исходной долготы спутника, которая является величиной, отличающей одни спутники от других. Коэффициент m должен быть целым числом. Действительно, когда ν_0 увеличивается на 2π, мы вновь оказываемся на том же самом спутнике. Следовательно, необходимо, чтобы ε и σ принимали те же значения. Что касается n, то оно является неизвестным. При таких условиях будем иметь

$$\frac{dV}{d\varepsilon} = a^2 A\alpha\cos(m\nu_0 + nt), \quad \frac{dV}{d\sigma} = a^2 B\beta\sin(m\nu_0 + nt),$$

где α и β — постоянные коэффициенты, которые мы постараемся определить немного позже. Итак, подставляя в уравнение (6),

$$(3\omega^2 + n^2 + \alpha)A + 2\omega nB = 0, \quad 2\omega nA + (n^2 + \beta)B = 0,$$

или, исключая A и B,

$$(3\omega^2 + n^2 + \alpha)(n^2 + \beta) - 4\omega^2 n^2 = 0. \tag{7}$$

Для устойчивости это уравнение должно иметь вещественные корни. Если предположить массу кольца равной нулю, то мы имели бы

$$\alpha = \beta = 0, \quad n^2(n^2 - \omega^2) = 0,$$

и устойчивость была бы обеспечена; если предположить, что $\omega = 0$, получили бы

$$(n^2 + \alpha)(n^2 + \beta) = 0,$$

а т. к. α и β в общем случае положительны, то имеем неустойчивость. Это уже означает, что для устойчивости необходимо, чтобы масса кольца была достаточной и тем большей, чем больше ω.

Для того, чтобы распространить эти результаты на непрерывное кольцо, сначала понадобится немного доброй воли, так как в непрерывном кольце ω не является вообще говоря постоянной, и a во всяком случае переменная. Но если меридианальное сечение кольца мало́ относительно своего радиуса, то не безрассудно предполагать, что уравнение (7) остается приблизительно применимым. Остается определить α и β.

Пусть V_0 — потенциал невозмущенного кольца, V_0+P — потенциал возмущенного кольца, ρ — плотность невозмущенного кольца, $\rho+\delta$ — плотность возмущенного кольца. Таким образом $\frac{P}{V}$ и $\frac{\delta}{\rho}$ очень малы.

Число m не фигурирует явно в уравнении (7), но α и β зависят от m. Мы должны выбрать число m самым неблагоприятным для устойчивости, поскольку достаточно, чтобы какое-либо из уравнений (7) имело бы мнимые корни, и тогда кольцо будет неустойчивым. Итак, именно большие значения m и являются самыми неблагоприятными. Таким образом, предположим, m настолько велико, что если перемещаться вдоль окружности, то функции V, ε, σ будут изменяться намного быстрее, чем если перемещаться по радиус-вектору. Следовательно, $\frac{dV}{d\varepsilon}$, $\frac{d^2V}{d\varepsilon^2}$ будут значительно меньше, чем $\frac{dV}{d\sigma}$, $\frac{d^2V}{d\sigma^2}$, а α значительно меньше β.

Выберем прямоугольные оси, считая началом координат рассматриваемую точку. Ось y направлена по радиус-вектору в центр туманности, ось z параллельна оси вращения, ось x — касательная к окружности, описанной двигающейся точкой.

В этих условиях
$$\Delta P = -4\pi\delta.$$

Но, согласно сделанному выше предположению (m — очень большое), производные по y и z очень малы по сравнению с производными по x. При таких условиях ΔP сводится практически к $\frac{d^2P}{dx^2}$ и тогда можно записать, что
$$\frac{d^2P}{dx^2} = -4\pi\delta.$$

С другой стороны, имеем (согласно связи между прямоугольными координатами и полярными координатами σ и ε)
$$d\sigma = a\,dx, \tag{8}$$

и, следовательно,
$$\frac{dV}{d\sigma} = \frac{dP}{d\sigma} = a\frac{dP}{dx}.$$

Уравнение непрерывности нам дает
$$-\frac{\delta}{\rho} = \frac{\partial\delta x}{\partial x} + \frac{\partial\delta y}{\partial y} + \frac{\partial\delta z}{\partial z},$$

где δx, δy, δz — проекции на три оси вектора, который соединяет положения возмущенного и невозмущенного спутника. Пренебрегая производными по y и z, мы можем записать

$$\frac{\partial \delta y}{\partial y} = \frac{\partial \delta z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \delta x}{\partial x} = a\frac{\partial \sigma}{\partial x},$$

где частная производная

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{1}{a}\frac{\partial \sigma}{\partial \nu_0} = \frac{mB}{a}\cos(m\nu_0 + nt)$$

не имеет ничего общего с отношением $\frac{d\sigma}{dn}$ дифференциалов, которые фигурируют в уравнении (8). Следовательно, уравнение непрерывности станет

$$a\frac{\partial \sigma}{\partial x} = -\frac{\delta}{\rho},$$

отсюда

$$\frac{d^2P}{dx^2} = 4\pi a\rho\frac{\partial \sigma}{\partial x}.$$

Проинтегрировав, находим

$$\frac{dP}{dx} = 4\pi a\rho\sigma,$$

отсюда

$$\frac{1}{a^2}\frac{dV}{d\sigma} = 4\pi\rho\sigma, \quad \beta = 4\pi\rho.$$

Таким образом, если подставим в уравнение (7)

$$\alpha = 0, \quad \beta = 4\pi\rho,$$

то получим

$$(3\omega^2 + n^2)(n^2 + 4\pi\rho) - 4\omega^2 n^2 = 0 \tag{9}$$

или

$$n^4 + n^2(4\pi\rho - \omega^2) + 12\pi\rho\omega^2 = 0.$$

Для того, чтобы корни были действительными, необходимо, чтобы

$$(4\pi\rho - \omega^2)^2 > 12\omega^2 4\pi\rho, \quad (4\pi\rho)^2 - 14\omega^2(4\pi\rho) + \omega^4 > 0.$$

Значения $\frac{4\pi\rho}{\omega^2}$, которые обнуляют первый член, близки к $\frac{1}{14}$ и 14. Именно первое значение является подходящим. Отсюда выводим, что

$$4\pi\rho < \frac{\omega^2}{14}. \tag{10}$$

4. Плотность ρ находится между двумя пределами, заданными неравенствами (5) и (10). Нижний предел, заданный равенством (5), зависит от ω', следовательно, он зависит не только от средней угловой скорости, но и от закона распределения угловых скоростей, что не свойственно для верхнего предела.

В момент образования кольца плотность ρ очень мала, так что неравенство (10) выполняется. С другой стороны, вращение не равномерно и ничто не мешает предположить, что $\omega^2 y^3$ убывает в окрестности точки B и, следовательно, что кольцо является устойчивым.

Но эту устойчивость можно быстро разрушить тремя путями:

1°. Трение стремится уравнять вращения. Следовательно, если $\omega' = 0$, то неравенство (5) становится

$$4\pi\rho > 3\omega^2$$

и несовместимо с неравенством (10).

2°. Вследствие сжатия кольцо концентрируется таким образом, что его меридианальное сечение стремится свестись к центру силы тяжести. Каков эффект этого сжатия? Пусть y — радиус окружности, описанной частицей, и ω — ее угловая скорость. Пусть y_0 и ω_0 — значения y и ω в момент образования кольца. Можно предположить, что в этот момент

$$\omega_0^2 y_0^3 = M.$$

С другой стороны, на основании закона площадей, имеем

$$\omega_0 y_0^2 = \omega y^2.$$

Пусть a — средний радиус окружности

$$y_0 = a(1 + \varepsilon_0), \quad y = a(1 + \varepsilon).$$

Можно предположить, что сжатие происходит равномерно, так что

$$\varepsilon = \lambda\varepsilon_0.$$

Тогда получаем, что

$$\omega = \frac{\sqrt{y_0 M}}{y^2},$$

или если ε и ε_0 малы,

$$\omega = \sqrt{M} a^{-\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{\varepsilon_0}{2} - 2\varepsilon\right) = \sqrt{M} a^{-\frac{3}{2}} \left[1 + \frac{\varepsilon_0}{2}(1 - 4\lambda)\right].$$

Видно, что для $\lambda = \frac{1}{4}$ вращение становится равномерным. Кроме того, находим, что

$$\omega = \sqrt{M} a^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{y}{a}\right)^{\mu},$$

где

$$\mu = \frac{1 - 4\lambda}{2\lambda}.$$

Это влечет

$$\omega' y = \mu\omega,$$

и неравенство (5) становится

$$4\pi\rho > (3 + 2\mu)\omega^2.$$

Для того, чтобы оно было совместимо с неравенством (10), необходимо

$$\frac{1}{14} > 3 + 2\mu = \frac{1 - \lambda}{\lambda},$$

откуда

$$\lambda = \frac{14}{15}.$$

Устойчивость пропадет, как только линейный размер меридианального сечения уменьшится до $\frac{1}{15}$.

3°. Наконец, вследствие сжатия ρ увеличится и, таким образом, неравенство (10) перестанет выполняться.

По всем этим причинам кольцо быстро разделится на независимые части, которые будут двигаться, каждая сама по себе, согласно закону Кеплера. Эти части, описывающие близкие орбиты, в конце концов столкнутся и объединятся в единое целое.

5. Теперь перейдем к вопросу о направлении вращения планет. Его пытались разрешить через условия вращения кольца: это вращение считалось равномерным, благодаря трению; тогда линейные скорости внешних частей должны быть больше, чем скорости внутренних. Но необходимо отказаться от этой точки зрения. Действительно, если бы линейные скорости возрастали вместе с y, т. е. если бы ωy возрастало, то

$$\omega' y + \omega > 0$$

и, следовательно,

$$4\pi\rho > \omega^2 + 2\omega\omega' y > \omega^2,$$

а это несовместимо с неравенством (10). Таким образом, кольцо разрушится, прежде чем его вращение станет равномерным.

Первоначальное направление вращения планеты будет определено условиями соударений различных частей кольца, когда после того, как они отделились друг от друга, они сталкиваются и сливаются в единый сфероид. В этот момент части будут по отдельности подчиняться законам Кеплера. При этом линейная скорость самых внешних частей будет меньше скорости самых внутренних, так что первоначальное направление вращения всегда будет обратным.

Вращения могут стать прямыми только под действием приливов и механизма, выдуманного Роша.

О НОВОЙ ФОРМЕ УРАВНЕНИЙ МЕХАНИКИ

Comptes rendus l'Académie des Sciences, t. 132, p. 369–371
(18 février 1901)

При исследовании вращательного движения твердых тел с полостью, заполненной жидкостью, общие уравнения механики могут быть представлены в форме, удобной для последующих обобщений.

Предположим, что имеется n степеней свободы, обозначим через $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — переменные, которые определяют положение системы. Пусть T и U — кинетическая и потенциальная энергии.

Рассмотрим непрерывную транзитивную группу[1]. Пусть $X_i(f)$ — любое бесконечно малое преобразование этой группы, такое, что

$$X_i(f) = X_i^1 \frac{df}{dx_1} + X_i^2 \frac{df}{dx_2} + \ldots + X_i^n \frac{df}{dx_n}.$$

Эти преобразования, образующие группу[2], удовлетворяют соотношениям

$$X_i X_k - X_k X_i = \sum c_{ik,\,s} X_s.$$

Можно полагать (поскольку эта группа транзитивная), что

$$x'_\mu = \frac{dx_\mu}{dt} = \eta_1 X_1^\mu + \eta_2 X_2^\mu + \ldots + \eta_r X_r^\mu,$$

то есть из положения $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ системы можно перейти к бесконечно близкому положению $(x_1 + x'_1 dt, \ldots, x_n + x'_n dt)$ при помощи бесконечно малого преобразования группы вида $\sum \eta_i dt X_i(f)$.

[1] В современной терминологии — группа Ли. — *Прим. перев.*

[2] В современной терминологии — алгебру Ли. — *Прим. перев.*

Вместо того, чтобы выражать кинетическую энергию T как функцию от x' и x, выразим ее через η и x. Зададим для η и x виртуальные приращения $\delta\eta$ и δx, для приращений T и U находим

$$\delta T = \sum \frac{dT}{d\eta}\delta\eta + \sum \frac{dT}{dx}\delta x; \quad \delta U = \sum \frac{dU}{dx}\delta x.$$

Учитывая, что группа является транзитивной, можно положить, что

$$\delta x_\mu = \omega_1 X_1^\mu + \omega_2 X_2^\mu + \ldots + \omega_r X_r^\mu,$$

то есть из положения системы x_i можно перейти в бесконечно близкое состояние $x_i + \delta x_i$ через бесконечно малое преобразование группы $\sum \omega_i X_i(f)$. Положим, что

$$\sum\left(\frac{dT}{dx} - \frac{dU}{dx}\right)\delta x = \sum \Omega_i\omega_i.$$

Тогда для интеграла Гамильтона

$$J = \int (T - U)dt$$

будем иметь

$$\delta J = \int\left(\sum \frac{dT}{d\eta_i}\delta\eta_i + \sum \Omega_i\omega_i\right)dt.$$

Несложно получить соотношения

$$\delta\eta_i = \frac{d\omega_i}{dt} + \sum c_{ski}\eta_k\omega_s.$$

Из принципа наименьшего действия находим

$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{d\eta_s} = \sum c_{ski}\frac{dT}{d\eta_i}\eta_k + \Omega_s. \qquad (1)$$

Частными случаями уравнений (1) являются

1° **Уравнения Лагранжа**, в этом случае группа сводится к трансляциям, которые увеличивают каждую из переменных x_i на бесконечно малую постоянную.

2° **Уравнения Эйлера для вращения твердых тел**, где в качестве η_i используются составляющие поворота p, q, r, а Ω_s соответствует парам внешних сил.

Они особенно интересны в случае, когда $U = 0$, а T зависит только от η.

О ПРЕЦЕССИИ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ

Bulletin astronomique, t. 27, p. 321–356 (septembre 1910)

I. Твердая мантия и жидкое ядро

1. Именно лорд Кельвин одним из первых высказал мнение о твердости земного шара и нашел всесторонние аргументы в пользу своего мнения. Некоторые из них основаны на наблюдениях прецессии и нутации. В частности, будем ссылаться на его Popular Lecture, vol. III, p. 244 и его Mathematical Papers, vol. III, p. 320. В своих исследованиях он рассматривает гипотезу недеформируемой твердой мантии, внутри которой находится однородная жидкость. Он предполагает, что и внешняя поверхность этой твердой мантии, и внутренняя ее полость являются эллипсоидами.

Первоначально он утверждал, что константа прецессии, согласно этой гипотезе, должна значительно отличаться от константы, соответствующей твердому телу Земли и является результатом наблюдений. Это было бы более очевидно, если бы внутренняя полость была сферической. Внутренняя жидкая сфера тогда имела бы ось вращения, отличную от оси вращения твердой мантии. Первая из этих осей была бы фиксирована, тогда как вторая прецессировала, поэтому константа прецессии была бы такой, как будто имеется только твердая мантия.

Вначале лорд Кельвин полагал, что при очень малом сплющивании результат не может заметно измениться, но, поразмыслив над этим вопросом, он осознал свою ошибку. Из-за эффекта, который он назвал *гиростатической жесткостью*, рассмотренное им сложное(жидкое) тело стремится вести себя как твердое. Эта жесткость проявляется более явно, если период прецессии, выраженный в днях, очень велик по сравнению с величиной, обратной сплющиванию. Ее можно было бы обнаружить и тем самым подтвердить теоретические рассуждения, но дело обстоит совсем иначе для нутации Брэдли, период которой превышает величину, обратную сплющиванию, не более, чем в 23 раза, ни, a fortiori, для полумесячных и полугодовых нутаций, чьи периоды меньше этой величины. Эти различия должны быть более существенными, чтобы обнаружится при наблюдениях.

2. Прежде чем идти дальше, будет небесполезно показать, как можно представить теорию Кельвина в новом и более простом виде. Для начала я введу термин *простое движение*. Так, я буду говорить, что движение жидкости простое, если компоненты скорости каждой частицы жидкости являются линейными функциями координат. Основываясь на теории вихрей Гельмгольца, легко установить, что если движение является простым в начальный момент времени, то оно всегда остается таковым, при условии, что жидкость целиком заполняет эллипсоидальный сосуд, даже если этот сосуд перемещается или деформируется, но всегда остается эллипсоидальным. Это позволяет нам рассматривать далее только простые движения. Пусть уравнение

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$$

задает эллипсоид в главных осях, который для начала будем считать постоянным.

Частице жидкости x, y, z, скорость которой u, v, w, поставим в соответствие фиктивную частицу с координатами

$$x' = x\sqrt{a}, \quad y' = y\sqrt{b}, \quad z' = z\sqrt{c}$$

и скоростью

$$u' = u\sqrt{a}, \quad v' = v\sqrt{b}, \quad w' = w\sqrt{c}.$$

Совокупность фиктивных частиц заполняет сферу S, уравнение которой: $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$. Нетрудно видеть, что если движение жидкости простое, то эти фиктивные частицы будут перемещаться как частицы твердого тела. Таким образом, вопрос сводится к изучению вращения сферы S. Пусть p_1, q_1, r_1 — компоненты ее угловой скорости. Получим

$$u = r_1\sqrt{\frac{a}{b}}y - q_1\sqrt{\frac{c}{a}}z,$$

$$v = p_1\sqrt{\frac{c}{b}}z - r_1\sqrt{\frac{a}{b}}x,$$

$$w = q_1\sqrt{\frac{a}{c}}x - p_1\sqrt{\frac{b}{c}}y.$$

До сих пор мы предполагали, что эллипсоид неподвижен. Теперь предположим, что этот эллипсоид является недеформируемым, но подвижным. Эти же формулы описывают *относительное* движение жидкости по отношению к твердой мантии. Для того, чтобы получить абсолютное движение, необходимо учесть переносное движение, которое сводится к вращению твердой мантии и подвижных осей. Пусть p, q, r — проекции угловой скорости данного вращения на *подвижные оси*. Для абсолютных скоростей получаем

$$\begin{cases} u = r_1\sqrt{\dfrac{b}{a}}y - q_1\sqrt{\dfrac{c}{a}}z + ry - qz, \\ v = p_1\sqrt{\dfrac{c}{b}}z - r_1\sqrt{\dfrac{a}{b}}x + pz - rx, \\ w = q_1\sqrt{\dfrac{a}{c}}x - p_1\sqrt{\dfrac{b}{c}}y + qx - py, \end{cases} \tag{1}$$

где подвижные оси являются главными осями эллипсоида.

3. Легко вычислить кинетическую энергию[1] относительного движения. Она равна

$$\frac{1}{2}(A_1p_1^2 + B_1q_1^2 + C_1r_1^2),$$

где

$$A_1 = \frac{4\pi d}{15}\frac{1}{\sqrt{abc}}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

и аналогичные выражения для B_1 и C_1; d — плотность жидкости.

Аналогично определенные величины A'_1p_1, B'_1q_1, C'_1r_1, являющиеся тремя составляющими вращательного момента[2] относительного движения, где

$$A'_1 = \frac{8\pi d}{15}\frac{1}{\sqrt{abc}}\frac{1}{\sqrt{bc}}.$$

Очевидно, что если сплюснутость очень мала, то имеем $A_1 = A'_1$ с точностью до членов порядка не более, чем квадрат сплюснутости.

Что касается кинетической энергии переносного движения, то она равна

$$\frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2),$$

[1] В оригинале la force vive — живая сила, устаревший термин для кинетической энергии. — *Прим. перев.*

[2] Кинетический момент в современной терминологии. — *Прим. перев.*

где A, B, C — три момента инерции *полного* тела (твердая мантия и содержащаяся в ней жидкость).

Тогда кинетическая энергия абсолютного движения имеет вид

$$T = \frac{1}{2}\sum Ap^2 + \sum A_1' pp_1 + \frac{1}{2}\sum A_1 p_1^2. \tag{2}$$

4. Уравнения движения можно записать в более простом виде:

$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{dp} + r\frac{dT}{dq} - q\frac{dT}{dr} = -1, \tag{3}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{dp_1} - r_1\frac{dT}{dq_1} + q_1\frac{dT}{dr_1} = 0, \tag{4}$$

причем остальные уравнения получаются циклической перестановкой, L, M, N — моменты внешней силы. Отметим, что эти уравнения обладают на первый взгляд озадачивающим различием в знаках.

В уравнении (3) второе слагаемое имеет знак «+», а третье — знак «−». В уравнении (4) все наоборот. Это очень легко объяснить. Угловая скорость p, q, r задает абсолютное вращение эллипсоида и проецируется на главные оси эллипсоида, которые являются *подвижными осями*. Наоборот, угловая скорость p_1, q_1, r_1 задает *относительное* вращение сферы S по отношению к эллипсоиду, она проецируется также на главные оси эллипсоида, которые являются неподвижными для относительного вращения.

Эти уравнения можно вывести многими способами. Сошлемся лишь на два из них: сначала будем опираться на теорему, которая была доказана в «Отчетах Академии Наук», т. 132, с. 369[1]. Приведем здесь формулировку этой теоремы:

Теорема. *Пусть механическая система определена системой r переменных x_i. Рассмотрим простую транзитивную группу преобразований Ли[2]. Пусть X_1, X_2, ... , X_r — бесконечно малые преобразования этой группы, таким образом, что, например, X_k задает преобразование x_i как функции от x, мало отличающееся от x_i. Запишем уравнения структуры группы в виде*

$$X_iX_k - X_kX_i = \sum c_{iks}X_s,$$

[1]См. стр. 72 этого сборника. — *Прим. перев.*

[2]См. примечание на стр. 72. — *Прим. перев.*

где c_{iks} являются постоянными. Смысл этих обозначений хорошо известен тем, кто знаком с работами Ли. Если, к примеру,

$$X_i X_k - X_k X_i = 0,$$

это означает, что два преобразования X_i и X_k перестановочны.

Положим, что в момент времени dt переменные x_i меняются на $x_i + \dfrac{dx_i}{dt}\,dt$, т. е. они подвергаются бесконечно малому преобразованию

$$dt(\eta_1 X_1 + \eta_2 X_2 + \ldots + \eta_r X_r).$$

Пусть T — кинетическая энергия системы, а U — потенциальная. T будет функцией от x и от η, а U — функцией от x. Зададим теперь для x_i виртуальные приращения δx_i. Это приведет к бесконечно малому преобразованию

$$\omega_1 X_1 + \omega_2 X_2 + \ldots + \omega_r X_r,$$

где введены ω_i. Определим ведичины Ω_i при помощи тождества

$$\sum\left(\frac{dT}{dx} - \frac{dU}{dx}\right)\delta x = \Sigma\Omega_i\omega_i.$$

Для введенных обозначений указанная теорема утверждает, что уравнения движения можно представить в следующей форме (которая содержит как частный случай уравнения Лагранжа и уравнения Эйлера для вращения твердых тел):

$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{d\eta_s} = \sum c_{ski}\frac{dT}{d\eta_i}\eta_k + \Omega_s. \tag{5}$$

Именно эту формулу уместно употребить в рассматриваемом нами случае. Мы имеем шесть степеней свободы[1], 6 возможных бесконечно малых преобразований представляют собой:

1° вращение полного тела вокруг одной из осей эллипсоида;

2° простое движение жидкости, соответствующее вращению сферы S вокруг одной из осей эллипсоида, оставляющее твердую мантию

[1] В современной терминологии для гамильтоновых систем. В данном случае система описывается шестью фазовыми переменными, а имеет лишь две степени свободы (см., например, Борисов А. В., Мамаев И. С. «Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике».)

неподвижной. Пусть X, Y, Z, X_1, Y_1, Z_1 — шесть указанных преобразований. Правила композиции вращений дают нам уравнения структуры группы:

$$XY - YX = Z, \quad X_1Y_1 - Y_1X_1 = -Z_1,$$
$$YZ - ZY = X, \quad Y_1Z_1 - Z_1Y_1 = -X_1,$$
$$ZX - XZ = Y, \quad Z_1Y_1 - X_1Z_1 = -Y_1$$

С другой стороны, каждое из преобразований X, Y, Z перестановочно с преобразованиями X_1, Y_1, Z_1. Теперь понятно, что все постоянные c равны 0, $+1$, или -1.

В промежуток времени dt твердая мантия подвергается бесконечно малому вращению, составляющими которого являются $p\,dt$, $q\,dt$, $r\,dt$. При этом сфера S подвергается вращению по отношению к твердой мантии, и компонентами этого вращения являются p_1dt, q_1dt, r_1dt таким образом, что наши переменные претерпевают бесконечно малое преобразование

$$dt(pX + qY + rZ + p_1X_1 + q_1Y_1 + r_1Z_1),$$

которое показывает, что η — не что иное как p, q, r, p_1, q_1, r_1.

Поскольку T зависит только от η, имеем

$$-\sum \frac{dU}{dx}\,\delta x = \sum \Omega\omega.$$

Это означает, что $\sum \Omega\omega$ представляет собой виртуальную работу внешних сил при очень малом перемещении системы. Следовательно, три первых Ω являются моментами внешних сил. Что же касается последних трех, то они равны 0, т. к. преобразования X_1, Y_1, Z_1 не производят никакой работы. Применение формулы (5) приводит нас также к уравнениям (3) и (4).

5. Те же самые уравнения можно вывести другим способом. Уравнение (3) — это не что иное как интеграл площадей. Действительно, вращательный момент имеет следующие составляющие (на три подвижные оси):

$$\frac{dT}{dp}, \quad \frac{dT}{dq}, \quad \frac{dT}{dr},$$

а уравнение (3) выражает то, что *абсолютная* скорость конца этого вектора равна по величине и направлению моменту внешних сил.

Что касается уравнения (4), то оно является следствием теоремы Гельмгольца о вихрях. Интеграл Гельмгольца

$$\int (u\,dx + v\,dy + w\,dz),$$

взятый по некоторому плоскому диаметральному сечению эллипсоида с точностью до постоянного множителя представляет собой

$$\frac{dT}{dp_1}\cos\alpha + \frac{dT}{dq_1}\cos\beta + \frac{dT}{dr_1}\cos\gamma,$$

где α, β, γ — направляющие косинусы нормали к плоскости большого круга сферы S, который соответствует рассматриваемому диаметральному сечению. Чтобы в этом убедиться, достаточно обратиться к уравнениям (1) и (2). Таким образом, теорема Гельмгольца показывает, что вектор $\frac{dT}{dp_1}$, $\frac{dT}{dq_1}$, $\frac{dT}{dr_1}$ неизменно связан со сферой S, что как раз точно выражается уравнением (4).

6. Если воспользоваться выражением для T, то можно записать уравнения (3) и (4) в виде

$$Ap' + A_1p_1' + r(Bq + B_1'q_1) - q(Cr + C_1'r_1) = -L, \tag{6}$$

$$A_1p' + A_1p_1' - r_1(B_1'q + B_1q_1) + q_1(C_1'r + C_1r_1) = 0 \tag{7}$$

вместе с уравнениями, которые получаются циклической перестановкой. Здесь p' и p_1' являются производными от p и p_1 по времени.

Первое следствие этих уравнений таково, что если твердую мантию удерживать неподвижной, то внутреннее движение жидкости будет следовать законам движения Пуансо[1].

Если предположить, что внешние силы отсутствуют,

$$L = M = N = 0,$$

то нетрудно найти следующие интегралы

$$T = \text{const}, \quad \sum\left(\frac{dT}{dp}\right)^2 = \text{const}, \quad \sum\left(\frac{dT}{dp_1}\right)^2 = \text{const}. \tag{8}$$

[1]Имеется в виду свободное движение твердого тела вокруг неподвижной точки — задача Эйлера – Пуансо.

Если внутренняя полость предполагается сферической, то имеем

$$A_1 = A_1' = B_1 = B_1' = C_1 = C_1'.$$

Тогда, вычитая уравнения (6) и (7), находим

$$(A - A_1)p' + rq(B - C) = -L,$$

что показывает, что движение твердой мантии является таким же, как если бы ее моменты инерции были $A - A_1$, $B - A_1$, $C - A_1$, т. е. как *если бы она существовала независимо.*

7. Предположим теперь, что тело симметрично относительно оси. Тогда получим

$$A = B, \quad A_1 = B_1, \quad A_1' = B_1', \quad C_1 = C_1', \quad N = 0 \tag{9}$$

и уравнения

$$Cr' + C_1 r_1' + B_1'(qp_1 - pq_1) = 0,$$
$$C_1 r' + C_1 r_1' + B_1'(qp_1 - pq_1) = 0,$$

которые выводятся из (6) и (7) при условиях симметрии. Принимая во внимание соотношения (9), легко получаем

$$r' = 0, \quad r = \mathrm{const}$$

и

$$C_1 r_1' + B_1'(qp_1 - pq_1) = 0. \tag{10}$$

Кроме того, если предположить, что $L = M = 0$, то можно завершить интегрирование через квадратуры.

Напомним, что r — константа, тогда из уравнений (8) получим величины

$$p^2 + q^2, \quad p_1^2 + q_1^2, \quad pp_1 + qq_1, \quad (qp_1 - pq_1)^2$$

в виде многочленов второй и четвертой степени от r_1. В этом случае уравнение (10) дает нам r_1 в эллиптической функции времени. Наконец, мы можем показать, что, например, производная по времени

$$\operatorname{arctg} \frac{Ap + A_1' p_1}{Aq + A_1' q_1}$$

есть известная функция времени.

8. Рассмотрим случай, когда p, q, p_1, q_1 бесконечно малые первого порядка. Тогда из соотношения (10) следует, что компонента r_1 является бесконечно малым второго порядка и ей можно пренебречь. Положим

$$-L = K\cos kt, \quad -M = -K\sin kt, \quad N = 0.$$

В общем случае L и M — периодические функции времени, которые можно разложить в ряд Фурье. Мы рассмотрим только один из членов разложения. Если положим, что амплитуда при sin и cos одна и та же, то можно записать

$$C\cos kt = A\cos kt + A'\cos(-kt);$$
$$D\sin kt = A\sin kt + A'\sin(-kt),$$

где

$$C = A + A', \quad D = A - A'.$$

Пренебрегая r_1 и учитывая равенства (9), перепишем уравнение в виде

$$Ap' + A_1'p_1 + r(Aq + A_1'q_1) - qCr = K\cos kt,$$
$$Aq' + A_1'q_1 - r(Ap + A_1'p_1) + pCr = -K\sin kt,$$
$$A_1'p' + A_1p_1' + q_1C_1r = 0,$$
$$A_1'q' + A_1q_1' - p_1C_1r = 0.$$

Отсюда находим

$$p = \alpha\sin kt, \quad q = \alpha\cos kt, \quad p_1 = \alpha_1\sin kt, \quad q_1 = \alpha_1\cos kt,$$

где коэффициенты α, α_1 подчиняются уравнениям

$$\begin{cases} (A\alpha + A_1'\alpha_1)(k + r) - \alpha Cr = K, \\ (A_1'\alpha + A_1\alpha_1)k + C_1\alpha_1 r = 0. \end{cases} \tag{11}$$

9. Для анализа системы (11) предположим, что сплюснутость очень мала. Это позволяет, как было показано выше, положить $A_1 = A'$. Кроме того, предположим, что два эллипсоида, внешний и внутренний, почти одинаковы. Это условие можно записать в виде

$$\frac{A}{C} = \frac{A_1}{C_1}$$

или

$$\frac{C-A}{A}=\frac{C_1-A_1}{A_1}=\varepsilon,$$

где ε — степень сплюснутости. Теперь положим

$$A=1,\quad A_1=\lambda,\quad C=1+\varepsilon,\quad C_1=\lambda(1+\varepsilon),\quad \lambda\alpha_1=\beta.$$

Это возможно за счет выбора единицы измерения. Тогда для твердого тела $\lambda=0$, а для жидкости, покрытой очень тонкой мантией, $\lambda=1$. При этом уравнения (11) принимают следующий вид:

$$\begin{cases}\alpha(k-\varepsilon r)+\beta(k+r)=K,\\ \alpha\lambda k+\beta(k+r+\varepsilon r)=0,\end{cases}\tag{12}$$

откуда

$$\alpha\Delta=K(k+r+\varepsilon r),$$

где $\Delta=(k-\varepsilon r)(k+r+\varepsilon r)-\lambda k(k+r)$ — определитель уравнений (12). Необходимо узнать, каким образом амплитуда α нутации меняется в зависимости от λ (т. е. как она зависит от толщины твердой мантии).

Поскольку $k+r+\varepsilon r$ не зависит от λ, то видно, что α обратно пропорциональна Δ.

Пусть N — число дней в периоде рассматриваемой нутации. Будем иметь

$$\frac{k+r}{1}=\frac{r}{-N}=\frac{k}{N+1}.$$

Следовательно Δ пропорциональна $(N+1+\varepsilon N)(1-\varepsilon N)-\lambda(N+1)$ или, поскольку εN незначительно по сравнению с $N+1$, пропорционально $(N+1)(1-\varepsilon N-\lambda)$ или $1-\varepsilon N-\lambda$. Если мы обозначим через α_0 амплитуду нутации для твердого тела, т. е. для $\lambda=0$, то получим

$$\frac{\alpha}{\alpha_0}=\frac{\varepsilon N-1}{\varepsilon N-1+\lambda}.$$

Легко видеть, что если εN очень велико, т. е. если период нутации очень велик по сравнению с обратной величиной сплюснутости, то отношение $\frac{\alpha}{\alpha_0}$ приблизительно равняется единице, таким образом, нутация мало отличается от своего теоретического значения. Однако это не справедливо для коротких нутаций в отличие от полугодовых или полумесячных нутаций, которые могут поменять знак и становятся бесконечными для некоторого значения толщины, такой, что выполняется условие

$$\varepsilon N=1-\lambda.$$

Таким образом, в целом выводы лорда Кельвина проверены. Однако полученные числовые значения не совпадают. Я ему как-то сообщил об этом, и он мне ответил, что один ирландский ученый указал ему уже это уточнение. Но я не знаю, написал ли этот ученый что-нибудь по этому поводу.

Можно также задаться вопросом, каков период собственных нутаций системы. Это соответствует случаю, когда Δ обращается в нуль, что дает

$$N = \frac{1-\lambda}{\varepsilon}.$$

Он является более коротким, чем период Эйлера. Напротив, известно, что период Чандлера, определенный из наблюдений, является длиннее.

II. Однородная жидкость

1. Изложив предшествующие результаты, лорд Кельвин задается вопросом — какой была бы прецессия свободной жидкой массы — и говорит, что она должна вести себя как твердое тело.

«Хотя, — говорит он, — общая задача не была еще решена совместным образом, я думаю, что скоро появится полное решение, которое покажет, что прецессия и нутация будут практически такими же, как в твердом шаре».

Сейчас мы увидим, что эти предположения вполне обоснованы.

Для начала предположим, что жидкость *однородна.*

Пусть x_0, y_0, z_0 — начальные координаты одной из ее частиц, x, y, z — ее настоящие координаты. Если движение простое, то x, y, z являются линейными функциями от x_0, y_0, z_0, и мы можем записать:

$$\begin{cases} x = \alpha_1 x_0 + \beta_1 y_0 + \gamma_1 z_0, \\ y = \alpha_2 x_0 + \beta_2 y_0 + \gamma_2 z_0, \\ z = \alpha_3 x_0 + \beta_3 y_0 + \gamma_3 z_0, \end{cases} \tag{1}$$

где α, β, γ — функции времени. Жидкость является несжимаемой, поэтому детерминант Δ матрицы этих коэффициентов равен единице.

Предположим, что исходная свободная поверхность жидкости имеет форму эллипсоида. Поскольку движение простое, то эта свободная поверхность будет всегда сохранять форму эллипсоида. Ничто не заставляет нас рассматривать в качестве *исходной* ситуации ту, которая в некоторый момент времени была в действительности. Мы можем выбрать идеальную начальную ситуацию, от которой можем перейти к реальной ситуации через простое (а впрочем и любое) движение. Следовательно, мы сможем предположить, что свободная исходная поверхность задана следующим уравнением:

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1.$$

Но поскольку частицы, изначально находящиеся на поверхности, там же и остаются, то уравнением свободной поверхности всегда будет

$$\sum x_0^2 = 1.$$

Уравнения гидродинамики приводят нас к

$$\sum x''\,dx = \frac{dp}{\rho} - dV,$$

где $x'' = \alpha_1'' x_0 + \beta_1'' y_0 + \gamma_1'' z_0$ — вторая производная от x по времени, p — давление, ρ — плотность жидкости, а V — потенциал. Поскольку жидкость однородна, то мы можем принять $\rho = 1$. Что касается потенциала, то он состоит из двух частей: внутренний потенциал V_i, возникающий вследствие притяжения частиц жидкости между собой; внешний потенциал V_e, вызванный действием внешних (небесных) тел. Следовательно, мы можем окончательно записать уравнение в виде

$$\sum x''\,dx = dp - dV_i - dV_e. \tag{2}$$

2. Для того, чтобы подтвердить наши гипотезы, мы должны показать, что два члена могут быть равны дифференциалу многочлена второй степени.

Первый член должен быть точным дифференциалом и это может быть только дифференциал многочлена второй степени, поскольку при простом движении x'' и x являются многочленами первой степени. Перейдем ко второму члену:

1° V_i — многочлен второй степени, если свободная поверхность является эллипсоидом, поскольку потенциал, вызванный притяжением эллипсоида является многочленом второй степени *внутри этого эллипсоида*;

2° V_e будет многочленом второй степени. Действительно, V_e может быть разложен по степенями x, y, z. Члены со степенями 0 и 1 можно опустить при изучении движения тела вокруг своего центра тяжести. Члены выше второй степени не должны учитываться вследствие малости. Следовательно, остаются члены второй степени.

3° Давление p подчинено единственному условию — оно является постоянным на свободной поверхности. Так как свободная поверхность является эллипсоидом $\psi = 1$, то достаточно положить y пропорциональным ψ, чтобы удовлетворить этому условию и чтобы в то же время p заведомо было многочленом второй степени. Таким образом, наши гипотезы подтверждены.

3. Пусть $\psi = 1$ — уравнение свободной поверхности, которая предполагается мало отличающейся от сферы. Можем записать

$$\psi = (1+a)x^2 + (1+b)y^2 + (1+c)z^2,$$

где a, b и c очень малы и подчиняются условию несжимаемости

$$a + b + c = 0.$$

Согласно теории притяжения эллипсоидов, мы можем записать

$$V_i = (1+k'a)x^2 + (1+k'b)y^2 + (1+k'c)z^2,$$

где $k' = \frac{3}{5}$. Мы предполагаем единицы выбранными таким образом, что для сферы имеем $V_i = \sum x^2$.

С другой стороны, поскольку $\psi = \sum x_0^2$, получим

$$V_i = k' \sum x_0^2 + (1 - k') \sum x^2, \tag{3}$$

и эта формула не будет зависеть от выбора осей. С другой стороны, предположим, что

$$p = \lambda' \sum x_0^2 + \text{const},$$

и подставим эти значения p и V_i в уравнение (2), где для начала положим $V_e = 0$. Отождествляя коэффициенты при $x_0 dx_0$, $y_0 dx_0$, $x_0 dy_0$, находим

$$\sum \alpha\alpha'' = k\sum \alpha^2 + \lambda, \tag{4}$$

$$\sum \alpha''\beta = \sum \alpha\beta'' = k\sum \alpha\beta, \tag{5}$$

где для сокращения мы положили

$$\lambda = 2\lambda' - 2k', \quad k = 2(k' - 1) = -\frac{4}{5}.$$

Если принять во внимание V_e, то получим

$$\sum \alpha''\alpha = k\sum \alpha^2 + \lambda - \frac{d^2V_e}{dx_0^2}, \tag{6}$$

$$\sum \alpha''\beta = \sum \alpha\beta'' = k\sum \alpha\beta - \frac{d^2V_e}{dx_0\, dy_0}. \tag{7}$$

Разумеется, к этим уравнениям следует присоединить уравнения, которые можно получить с учетом симметрии, и заметить, что такие суммы, как $\sum \alpha''\beta$, разумеется, обозначают

$$\sum \alpha''\beta = \alpha_1''\beta_1 + \alpha_2''\beta_2 + \alpha_3''\beta_3.$$

Далее мы рассмотрим другие аналогичные суммы, где суммирование происходит другим способом. Так, например, сумму

$$\alpha_1''\alpha_2 + \beta_1''\beta_2 + \gamma_1''\gamma_2$$

мы запишем в виде $\sum \alpha_1''\alpha_2$, где индексы сохранены таким образом, чтобы не было никакой неясности.

4. Эти уравнения допускают частные интегралы. Если предположим, что $V_e = 0$, то мы получим интеграл кинетической энергии (живых сил) и интеграл площадей. Последний запишется в виде

$$\sum m(x'y - xy') = \text{const},$$

где m — масса одной частицы. Подставив x, y, z из соотношений (1), его можно записать как

$$(\alpha_1'\alpha_2 - \alpha_2'\alpha_1)\sum mx_0^2 + (\alpha_1'\beta_2 - \beta_2'\alpha_1 + \alpha_2\beta_1' - \alpha_2'\beta_1)\sum mx_0y_0 + \ldots = \text{const}.$$

Поскольку начальной фигурой является сфера $\sum x_0^2 = 1$, имеем

$$\sum mx_0^2 = \sum my_0^2 = \sum mz_0^2, \quad \sum mx_0y_0 = \sum mx_0z_0 = \sum my_0z_0 = 0.$$

Таким образом интеграл площадей приводится к виду

$$\sum(\alpha_1'\alpha_2 - \alpha_2'\alpha_1) = \text{const}, \tag{8}$$

где порядок суммирования был объяснен в конце предыдущего пункта. Предположим теперь, что учитывается V_e. Первый член уравнения (8) представляет с точностью до числового коэффициента постоянную площадей. Следовательно, производная этого первого члена будет равна с точностью до числового коэффициента моменту внешней силы.

Теорема Гельмгольца далее показывает, что интеграл

$$\int x'\,dx + y'\,dy + z'\,dz,$$

взятый вдоль замкнутого контура, постоянен. Этот интеграл в данном случае равен

$$\sum \alpha'\alpha \int x_0dx_0 + \sum \alpha'\beta \int x_0dy_0 + \sum \alpha'\beta' \int y_0dx_0 + \ldots$$

Если для замкнутой кривой выполнено соотношение

$$\int x_0dx_0 = \int (x_0dy_0 + y_0dx_0) = 0,$$

то из теоремы Гельмгольца следует уравнение

$$\sum(\alpha'\beta - \alpha\beta') = \text{const}, \tag{9}$$

а также уравнения, которые выводятся при помощи симметрии.

Уравнение (9) справедливо, когда V_e не обязательно равно нулю.

Чтобы вывести (8) из (4) и (5), были необходимы сложные вычисления. Но эти вычисления необязательны для (9), которое непосредственно вытекает из интегрирования выражения

$$\sum \alpha\beta'' = \sum \alpha''\beta.$$

5. Уравнения (4) и (5) допускают простое частное решение. Достаточно положить

$$\begin{cases} \alpha_1 = \rho\cos\omega t, & \alpha_2 = -\rho\sin\omega t, & \alpha_3 = 0, \\ \beta_1 = \rho\sin\omega t, & \beta_2 = \rho\cos\omega t, & \beta_3 = 0, \\ \gamma_1 = 0, & \gamma_2 = 0, & \gamma_3 = 0, \end{cases} \tag{10}$$

откуда

$$\rho^2(\omega^2 + k) + \lambda = kc^2 + \lambda = 0; \quad k = \frac{\omega^2\rho^2}{c^2 - \rho^2}.$$

С другой стороны, из условия несжимаемости $\Delta = 1$, находим

$$\rho^2 c = 1.$$

Это решение применимо в случае, когда сплюснутая жидкая масса равномерно вращается. В наших рассуждениях фигурируют ρ и c — две главные оси эллипсоида.

6. Решения, которые мы будем рассматривать, ненамного отличаются от решения (10), даже если возьмем $V_e \neq 0$ и рассмотрим уравнения (6) и (7), которые будут допускать решения, мало отличающиеся от (10), потому что мы полагаем V_e малым. Применим метод *уравнений в вариациях,* т.е. заменим α_1, α_2, α_3, ... на

$$\alpha_1 + \delta\alpha_1 = \rho\cos\omega t + \delta\alpha_1, \quad \alpha_2 + \delta\alpha_2 = -\rho\sin\omega t + \delta\alpha_2,$$
$$\alpha_3 + \delta\alpha_3 = \delta\alpha_3, \ \ldots,$$

и отбросим квадраты вариаций $\delta\alpha_1$, ... Таким образом получим линейные дифференциальные уравнения для этих вариаций $\delta\alpha_1$, ... Эти уравнения будут лишены второго члена, если $V_e = 0$, как следует из уравнений (6) и (7). В противном случае этот член появляется.

Замечательно то, что эти линейные уравнения разделяются на две различные группы.

Уравнения, выведенные из соотношения $\Delta = 1$ и уравнений (4) и (5) для $\alpha\alpha''$, $\alpha''\beta$, $\alpha\beta''$, $\beta\beta''$ и $\gamma\gamma''$, содержат только неизвестные

$$\delta\alpha_1, \quad \delta\alpha_2, \quad \delta\beta_1, \quad \delta\beta_2, \quad \delta\gamma_3, \quad \delta\lambda.$$

Напротив, уравнения, выведенные из уравнений (4) и (5) для $\alpha\gamma''$, $\alpha''\gamma$, $\beta\gamma''$, $\beta''\gamma$, не содержат других неизвестных, кроме $\delta\alpha_3$, $\delta\beta_3$, $\delta\gamma_1$, $\delta\gamma_2$.

В случае, когда $V_e = 0$, неизвестные первой группы соответствуют решению, которое описывает равномерное вращение, со скоростью, мало отличающейся от ω, и собственные колебания жидкости, в которых плоскость xy остается плоскостью симметрии. В случае, когда $V_e \neq 0$, эти переменные описывают приливы и отливы жидкости под влиянием возмущенного тела.

Именно неизвестные второй группы связаны с явлением нутации, их нам и следует рассмотреть.

7. Наконец, запишем уравнение второй группы. Находим

$$\delta \sum \alpha\gamma = \sum \alpha\delta\gamma + \sum \gamma\delta\alpha,$$

и далее

$$\sum \alpha\delta\gamma = \alpha_1\delta\gamma_1 + \alpha_2\delta\gamma_2 + \alpha_3\delta\gamma_3 = \rho\cos\omega t\delta\gamma_1 - \rho\sin\omega t\delta\gamma_2,$$

и, продолжая вычислять таким образом, получим

$$\delta \sum \alpha\gamma + i\delta \sum \beta\gamma = \rho e^{i\omega t}\xi + c\eta,$$

где

$$\delta\gamma_1 + i\delta\gamma_2 = \xi, \quad \delta\alpha_3 + i\delta\beta_3 = \eta.$$

Таким образом, вещественные и мнимые части двух неизвестных ξ и η являются нашими первоначальными неизвестными $\delta\gamma$ и $\delta\alpha$. Находим также

$$\delta \sum \alpha''\gamma + i\delta \sum \beta''\gamma = -\omega^2\rho e^{i\omega t}\xi + c\eta'',$$
$$\delta \sum \alpha\gamma'' + i\delta \sum \beta\gamma'' = \rho e^{i\omega t}\xi''.$$

Итак, уравнения (4) и (5) можно рассматривать как уравнение в вариациях

$$\delta \sum \alpha\gamma'' + i\delta \sum \beta\gamma'' = \delta \sum \alpha''\gamma + i\delta \sum \beta''\gamma = k\Big(\delta \sum \alpha\gamma + i\delta \sum \beta\gamma\Big),$$

или

$$\rho e^{i\omega t}\xi'' = -\omega^2\rho e^{i\omega t}\xi + c\eta'' = k(\rho e^{i\omega t}\xi + c\eta''). \tag{11}$$

Уравнение Гельмгольца, которое можно вывести через вариацию уравнения (9) и через уравнения, которые получаются с помощью симметрии, дает нам

$$\rho e^{i\omega t}\xi' - i\omega\rho e^{i\omega t}\xi - c\eta' = \text{const}. \tag{12}$$

Интеграл площадей можно вывести через вариацию (9) (и через уравнения, полученные с помощью симметрии) и записать в виде

$$\rho e^{-i\omega t}(\eta' + i\omega\eta) - c\xi' = \text{const}. \tag{13}$$

Дифференцирование уравнения (13) дает

$$\rho e^{-i\omega t}(\eta' + \omega^2\eta) - c\xi'' = 0. \tag{14}$$

Если в (14) мы заменим ε'' и η'' на их значения, взятые из (11), и примем во внимание, что $k(c^2 - \rho^2) = \omega^2\rho^2$, то это уравнение станет тождеством.

Если теперь принять во внимание V_e, то необходимо добавить к последнему члену уравнения (11) величину

$$-\left(\frac{d^2V_e}{dx_0dz_0} + i\frac{d^2V_e}{dy_0dz_0}\right).$$

Но так как V_e мало, мы можем в этих уточняющих членах положить

$$\rho = c = 1, \quad \delta\alpha = \delta\beta = \delta\gamma = 0,$$

откуда

$$x = x_0\cos\omega t + y_0\sin\omega t, \quad y = -x_0\sin\omega t + y_0\cos\omega t, \quad z = z_0,$$

и, наконец,

$$\frac{dF}{dx_0} + i\frac{dF}{dy_0} = \left(\frac{dF}{dx} + i\frac{dF}{dy}\right)e^{i\omega t},$$

так что член, добавляемый к последнему члену уравнения (11) представляет собой

$$-\left(\frac{d^2V_e}{dx\,dz} + i\frac{d^2V_e}{dy\,dz}\right)e^{i\omega t}. \tag{15}$$

Если жидкость перемещается как твердое тело, то $\sum x^2$ должно быть независимым от времени и, следовательно, равным своему значению для решения (10), т. е. мы получим $\sum x^2 = \rho^2(x_0^2 + y_0^2) + c^2 z_0^2$. Отсюда выводим

$$\sum \alpha\gamma = \sum \beta\gamma = 0,$$

или

$$\delta \sum \alpha\gamma + i\delta \sum \beta\gamma = 0,$$

или

$$\rho e^{i\omega t}\xi + c\eta = 0. \tag{16}$$

8. Потенциал V_e — известная функция координат притягиваемой точки x, y, z и времени, потому что координаты небесного тела заданы известными функциями времени. Следовательно, выражение (15) — известная функция времени. Она может быть разложена в ряд Фурье. Периоды различных членов в

$$\frac{d^2 V_e}{dx\,dz} + i\frac{d^2 V_e}{dy\,dz} \tag{17}$$

относительно длинные, поскольку это периоды разных нутаций. Значит, если обозначить через $A\varepsilon^{i\varepsilon t}$ один из членов разложения в (17) и, следовательно, через $-A\varepsilon^{i(\omega+\varepsilon)t}$ соответствующий член разложения в (15), то ε будет мало́ по сравнению с ω.

Можно выделить этот член, и тогда уравнения (11) будут выглядеть следующим образом

$$\begin{cases} k(\rho e^{i\omega t}\xi + c\eta) - \rho e^{i\omega t}\xi'' = Ae^{i(\omega+\varepsilon)t}, \\ \omega^2 \rho e^{i\omega t}\xi - c\eta'' + \rho e^{i\omega t}\xi'' = 0. \end{cases} \tag{18}$$

Мы удовлетворим (18), если положим

$$\rho\xi = ae^{i\omega t}, \quad c\eta = be^{i(\omega+\varepsilon)t},$$

что приводит к уравнениям

$$\begin{cases} a(k+\varepsilon^2) + bk = A, \\ a(\omega^2 - \varepsilon^2) + b(\omega+\varepsilon)^2 = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Детерминант уравнений (19) равен

$$\Delta = (2k + \varepsilon\omega + \varepsilon^2)\varepsilon(\omega + \varepsilon).$$

Для того, чтобы получить *собственное* колебание системы, необходимо положить $\Delta = 0$ и найти решение для ε, α и β. Таким образом, допустим, что $\Delta = 0$, это равенство ведет к следующим решениям:

1° $\varepsilon = 0$ соответствует равномерному вращению с угловой скоростью ω вокруг оси, мало отличающейся от оси z;

2° $\omega + \varepsilon = 0$ соответствует следующей гипотезе: предположим, что перед тем как придать жидкости равномерное вращение вокруг оси z, мы переместили небольшое количество частиц внутрь жидкости, *не изменяя ее внешнюю форму.* Это решение будет мало отличаться от решения (10), соответствующее тому же вращению как по величине, так и по направлению, той же сплюснутости, той же ориентации осей эллипсоида. Одним словом, от решения (10) оно будет отличаться лишь тем, что некоторые (определенные) частицы поменялись местами с другими.

3° $2k + \varepsilon\omega + \varepsilon^2 = 0$ соответствует собственным колебаниям очень короткого периода, немного больше одного часа.

Теперь, если мы хотим учесть действие небесного тела, мы более не будем полагать $A = 0$, в результате получим

$$a = \frac{A(\omega+\varepsilon)^2}{\Delta} = \frac{A(\omega+\varepsilon)}{\varepsilon(2k+\varepsilon\omega+\varepsilon^2)},$$

$$b = -\frac{A(\omega^2-\varepsilon^2)}{\Delta} = -\frac{A(\omega-\varepsilon)}{\varepsilon(2k+\varepsilon\omega+\varepsilon^2)}.$$

Согласно нашей гипотезе, ε по отношению к ω очень мало́, а $\dfrac{\omega^2}{k}$ имеет порядок сплюснутости. Следовательно, можно пренебречь величиной ε, стоящей перед ω и $\varepsilon\omega + \varepsilon^2$ перед $2k$, что дает

$$a = \frac{A\omega}{2k\varepsilon}, \quad b = -\frac{A\omega}{2k\varepsilon},$$

откуда

$$a + b = 0.$$

Однако соотношение $a + b = 0$ эквивалентно соотношению (16). Оно означает, что жидкость ведет себя как твердое тело.

9. Этот результат может быть получен иначе. Запишем уравнение площадей, которое представляет собой не что иное как уравнение (13), в случае $V_e = 0$. Если $V_e \neq 0$, то мы вынуждены написать, что производная постоянной площадей равна моменту внешних сил. Итак, первый член в уравнении (13) с точностью до числового коэффициента равен отношению постоянной площадей к площади в плоскости xy плюс мнимая единица $\sqrt{-1}$, умноженная на отношение постоянной площадей к площади в плоскости yz. Следовательно, производная этого первого члена, т.е. первый член уравнения (14), должна быть равна $M + iL$, где L и M с точностью до числового коэффициента являются моментами внешних сил относительно осей x и y. Таким образом, получим

$$\rho e^{-i\omega t}(\eta'' + \omega^2\eta) - c\xi'' = M + iN. \qquad (14\ \text{bis})$$

Второй член может быть разложен в ряд Фурье. Пусть $Be^{i\varepsilon t}$ – один из его членов. Отделим этот член и запишем уравнение

$$\rho e^{-i\omega t}(\eta'' + \omega^2\eta) - c\xi'' = Be^{i\varepsilon t}. \qquad (14\ \text{ter})$$

Это уравнение справедливо как для твердого тела, так и для жидкости. В случае жидкости, это уравнение должно быть дополнено уравнением Гельмгольца, т.е. вторым уравнением (18), а в случае твердого тела — уравнением (16). Таким образом, находим

$$\begin{aligned} \frac{\rho b}{c}[\omega^2 - (\omega+\varepsilon)^2] + \frac{ca}{\rho}\varepsilon^2 &= B \quad (\text{жидкость или твердое тело}),\\ a(\omega-\varepsilon) + b(\omega+\varepsilon) &= 0 \quad (\text{жидкость}),\\ a + b &= 0 \quad (\text{твердое тело}). \end{aligned}$$

Таким образом, при условии что ε мало по отношению к ω, из двух последних уравнений следует, что твердое и жидкое тела будут вести себя практически одинаково. Этот анализ движений однородной жидкости близок к анализу, проделанному мной в VII томе «Acta mathematica», начиная с 347 страницы. Из этого анализа следует, что колебания эллипсоида могут быть разделены на части, отдельно поддающиеся изучению. В каждую из таких частей входят только функции Ламе определенного порядка. Движения, которые мы здесь рассмотрели, соответствуют функциям Ламе первого порядка.

III. Гиростатическая жесткость

1. Рассмотрим теперь, что происходит в случае неоднородной жидкости. Уравнения гидродинамики имеют вид

$$\sum x''\,dx = \frac{dp}{D} - dV_i - dV_e, \tag{1}$$

как следует из параграфа II. Обозначим через D плотность жидкости, которую нельзя больше принимать за единицу, поскольку жидкость неоднородна. Частное решение — это решение, когда жидкость освобождена от всяческого внешнего действия и совершает равномерное вращение с угловой скоростью ω вокруг оси z. В этом случае имеем $V_e = 0$. Отметим индексом 1 буквы, относящиеся к этому решению, и запишем следующее уравнение

$$\sum x_1''\,dx_1 = \frac{dp_1}{D} - dV_{1,i}. \tag{2}$$

Величина D в этом случае не меняется. Сравним теперь однородную жидкость, подверженную внешним действиям, и пометим индексом 2 соответствующие буквы. Получим

$$\sum x_2''\,dx_2 = dp_2 - dV_{2i} - dV_e. \tag{3}$$

D стало равняться единице, а V_e предположительно является таким же, как в первом случае. Рассмотрим, наконец, случай однородной жидкости, освобожденной от всякого внешнего действия и приведенной в равномерное вращение. Отмечая буквы показателем 3, получим

$$\sum x_3''\,dx_3 = dp_3 - dV_{3i}. \tag{4}$$

Во втором параграфе мы увидели, что если *период нутации достаточно большой*, то однородная жидкость будет вести себя как твердое тело. При этом потенциал V_i будет одинаковым в обоих случаях (для той же частицы x_0, y_0, z_0). Действительно, этот потенциал вызван притяжением эллипсоида, а этот эллипсоид переместился, не деформируясь, вовлекая в свое движение точку, притягивающую x_0, y_0, z_0. Следовательно, получим

$$V_{2i} = V_{3i}.$$

Также имеем равенство

$$p_2' = p_3$$

(значение постоянных λ и λ' во втором параграфе одинаково в обоих случаях). Следовательно, вычитая (3) из (4), получим

$$dV_e = \sum x_3'' \, dx_3 - \sum x_2'' \, dx_2. \tag{5}$$

Заметим также, что движения однородной жидкости в случае уравнения (2) и в случае уравнения (4) одинаковы, так что имеем

$$x_1 = x_3, \quad x_1'' = x_3'', \quad \sum x_1'' \, dx_1 = \sum x_3'' \, dx_3.$$

Но уравнением (1) можно удовлетворить, если предположить, что неоднородная жидкость движется согласно тем же законам, что и однородная жидкость в случае уравнения (3), т.е. таким образом, что $x = x_2$, это влечет за собой

$$x'' = x_2'', \quad \sum x'' \, dx = \sum x_2'' \, dx_2.$$

Необходимым и достаточным условием существования этого решения является возможность приведения dp к выражению, которое является полным дифференциалом функции, обращающейся в нуль на свободной поверхности.

Если $x = x_2$, то жидкость ведет себя как твердое тело, и можно, повторяя наше рассуждение, использующее $V_{2,i} = V_{3,i}$, доказать, что

$$V_i = V_{1,i}.$$

При этих условиях уравнения (1) и (2) принимают вид

$$\sum x_2'' \, dx_2 = \frac{dp}{D} - dV_i - dV_e, \tag{1 bis}$$

$$\sum x_3'' \, dx_3 = \frac{dp_1}{D} - dV_i. \tag{2 bis}$$

Вычитая первое уравнение из второго и принимая во внимание уравнение (5), находим соотношение

$$dp = dp_1,$$

которое показывает, что dp — полный дифференциал функции p_1, которая обращается в нуль на свободной поверхности. Что и требовалось доказать.

Таким образом, как *для неоднородной свободной жидкости, так для однородной свободной жидкости прецессия и нутация будут такими же, как для твердого тела.*

2. Очевидно, мы вновь возвращаемся к уже знакомому понятию *гиростатической жесткости*, и в этом случае можно задаться вопросом, почему данное рассуждение не применимо в случае, рассмотренном в первом параграфе, в случае, для которого мы получили совершенно иные результаты. На самом деле это доказательство остается применимым, но есть важное различие. Напомним формулу из первого параграфа:

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = \frac{\varepsilon N - 1}{\varepsilon N - 1 + \lambda}.$$

Когда N стремится к бесконечности, отношение $\frac{\alpha}{\alpha_0}$ стремится к 1, т. е. рассматриваемое тело стремится вести себя как твердое тело: однако в формуле фигурирует не N, а εN, и N может быть очень большим, хотя εN не велико. Если εN очень большое, т. е. если период нутации, выраженный в днях, является очень большим и не только по абсолютной величине, но и по отношению к обратной величине сплюснутости, то гиростатическая жесткость проявляется в полной мере, и нутация будет такой же, что и для твердого тела. Но этого не произойдет, если εN является конечным. Это явление уже объяснил лорд Кельвин, однако мы рассмотрим его более подробно.

3. Каково происхождение гиростатической жесткости? Это не что иное как частный случай более общего явления резонанса.

Рассмотрим некоторую систему в абсолютном или относительном равновесии и изучим ее малые колебания вблизи положения равновесия. Их можно определить с помощью линейных уравнений. И если x, y, z, ... представляют координаты системы (которые в положении равновесия равны нулю), то получим уравнения в виде:

$$D(x, y, z, \dots) = \sum A e^{i\varepsilon t},$$

где D — линейная функция с постоянными коэффициентами относительно x, y, z, ... и их производных. $\sum A e^{i\varepsilon t}$ представляет совокупность членов, возникающих вследствие возмущающих внешних сил, которые разлагаются в ряд Фурье. Рассмотрим, в частности, уравнения без правой части

$$D(x,\, y,\, z,\, \ldots) = 0, \tag{6}$$

которые определяют собственные колебания системы и уравнения

$$D(x,\, y,\, z,\, \ldots) = Ae^{i\varepsilon t}, \tag{7}$$

которые позволяют учесть действие одной из составляющих возмущающих сил.

Уравнение (7) будет удовлетворено, если положить

$$x = ae^{i\varepsilon t}, \quad y = be^{i\varepsilon t}, \quad z = ce^{i\varepsilon t}, \quad \ldots \tag{8}$$

Находим, что a, b, c, ... заданы системой уравнений с коэффициентами, зависящими от ε, разрешая которую, получим

$$a = \frac{P_1(\varepsilon)}{\Delta}, \quad b = \frac{P_2(\varepsilon)}{\Delta}, \quad \ldots,$$

где Δ — многочлен с вещественными коэффициентами от ε, не зависящий от коэффициентов A, который является детерминантом системы линейных уравнений, P_1, P_2 — многочлены от ε с вещественными коэффициентами, линейные относительно A. Нули многочлена Δ, которые назовем ε_1, ε_2, ..., соответствуют периодам собственных колебаний системы, определяемых уравнением (6). Рациональные функции $\frac{P_1}{\Delta}$, $\frac{P_2}{\Delta}$, ... могут быть разложены на простые дроби. Таким образом, находим

$$\begin{gathered}
a = \frac{a_1}{\varepsilon - \varepsilon_1} + \frac{a_2}{\varepsilon - \varepsilon_2} + \ldots, \\
b = \frac{b_1}{\varepsilon - \varepsilon_1} + \frac{b_2}{\varepsilon - \varepsilon_2} + \ldots, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{gathered}$$

Нетрудно видеть, что уравнение (6) удовлетворяется, если положить

$$x = a_1 e^{i\varepsilon_1 t}, \quad y = b_1 e^{i\varepsilon_1 t}, \quad z = c_1 e^{i\varepsilon_1 t}, \quad \ldots \tag{9}$$

Если ε близко к ε_1, то a, b, c, ... становятся очень большими. Это явление резонанса. В этом случае член, имеющий в качестве знаменателя $\varepsilon - \varepsilon_1$, становится преобладающим, и имеем

$$\frac{a}{b_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = \ldots ,$$

т. е. система ведет себя, как при собственном колебании (9), близком к резонансному.

Следовательно, *если период возмущающей силы становится очень близким к периоду одного из собственных колебаний системы, то она ведет себя так же, как при этом собственном колебании.*

Этот результат перестает быть справедливым, если два коэффициента ε_1 и ε_2 очень мало отличаются друг от друга и если ε одновременно близко и к ε_1, и к ε_2 таким образом, что $\varepsilon - \varepsilon_1$ и $\varepsilon - \varepsilon_2$ одного и того же порядка. В этом случае больше нет преобладающего члена. Это явление называется *двойным резонансом.*

4. Применим эти принципы для объяснения гиростатической жидкости. Рассмотрим некоторую механическую систему в относительном равновесии по отношению к подвижным осям, вращающимся вокруг оси z с постоянной скоростью ω. Система может колебаться вблизи этого положения относительного равновесия. Мы будем различать собственные колебания, т. е. те колебания, которые возникают вблизи равновесия в случае, когда система освобождена от всякой внешней возмущающей силы, и ее вынужденные колебания, период которых будет таким же, как период возмущающей силы.

Если неподвижному наблюдателю кажется, что возмущающие силы меняются очень медленно, то наблюдателю, связанному с подвижными осями, силы покажутся вращающимися вокруг оси z с угловой скоростью ω, т. е. что их период будет равен приблизительно $\frac{2\pi}{\omega}$.

Итак, среди собственных колебаний системы необходимо различать следующие: система, согласно гипотезе, может вращаться с угловой скоростью ω вокруг оси z, и именно тогда она находится в относительном равновесии по отношению к вращающимся осям. Но если устранить все внешние действия, она сможет равным образом вращаться с постоянной скоростью ω вокруг оси, очень мало отличающейся от оси z. При указанных условиях система немного отклоняется от относительного равновесия, и возникают собственные колебания, период которых как раз $\frac{2\pi}{\omega}$. При таких собственных колебаниях система будет вести себя как твердое тело.

Таким образом, возникнет резонанс, и при вынужденном колебании система будет вести себя примерно как твердое тело. Будет иметься гиростатическая жесткость. Исключением будет являться лишь наличие *двойного резонанса,* когда система обладает другим собственным колебанием, где она не ведет себя как твердое тело, и период которого близок к $\frac{2\pi}{\omega}$.

5. Это как раз происходит в случае, описываемом в первом параграфе. Существует собственное колебание, период которого задан формулой

$$N = \frac{1-\lambda}{\varepsilon},$$

(здесь я использую обозначения из первого параграфа). Этот период очень длинный, т. е. примерно такой же, как период возмущающих сил.

Для того чтобы лучше дать представление об этом, нам следует вернуться к проблеме, используя обозначения параграфа I и методы параграфа II. Тем самым мы облегчим сравнение результатов из этих двух параграфов и изучение промежуточных случаев.

Соотношение между координатами x, y, z и начальными координатами x_0, y_0, z_0 выражаются формулами (1) как для твердой мантии, так и для жидкого ядра, только функции α, β, γ не будут одинаковыми в обоих случаях. Предположим, что уравнение общей поверхности, которая изнутри ограничивает твердую мантию, а жидкое ядро снаружи, имеет вид

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1.$$

Это заставляет предположить, что твердая мантия была еще жидкой в идеальном начальном состоянии и стала твердеть в дальнейшей фазе после того, как приобрела свою определенную форму. Эту гипотезу можно предполагать беспрепятственно — поскольку речь идет об идеальном начальном состоянии.

Рассмотрим частное решение, когда вся система вращается с угловой ω, и, следовательно, где имеются решения, мало отличающиеся от решений (10) из второго параграфа как для мантии, так и для ядра. Положим, что величины

$$\xi = \delta\gamma_1 + i\delta\gamma_2 = \gamma_1 + i\gamma_2, \quad \eta = \delta\alpha_3 + i\delta\beta_3 = \alpha_3 + i\beta_3$$

соответствуют жидкости, а ξ_1 и η_1 — величины, соответствующие твердой мантии.

Эта мантия должна удовлетворять условию (16), п. 16 второго параграфа, то есть имеем

$$\rho e^{i\omega t}\xi_1 + c\eta_1 = 0. \tag{10}$$

Запишем теперь, что внешняя поверхность жидкости совпадает с внутренней поверхностью твердого тела. Прежде всего условие того, что свободная поверхность жидкости не искажается. Следует положить

$$\sum x_0^2 = \frac{x^2+y^2}{\rho^2} + \frac{z^2}{c^2},$$

откуда

$$\frac{\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2}{\rho^2} + \frac{\alpha_3\gamma_3}{c^2} = \frac{\beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2}{\rho^2} + \frac{\beta_3\gamma_3}{c^2} = 0.$$

Заменяя в этой формуле α_1, α_2, β_1, β_2, γ_3 на $\rho\cos\omega t$, $-\rho\sin\omega t$, $\rho\sin\omega t$, $\rho\cos\omega t$, c, переменные $\gamma_1 + i\gamma_2$ и $\alpha_3 + i\beta_3$ на ξ и η и используя то же вычисление, что и в п. 16 второго параграфа, найдем

$$\frac{e^{i\omega t}\xi}{\rho} + \frac{\eta}{c} = 0,$$

или

$$ce^{i\omega t}\xi + \rho\eta = 0.$$

Если записать условие, что внутренняя поверхность твердого тела и внешняя поверхность жидкости испытывают одинаковую деформацию, то получим

$$ce^{i\omega t}(\xi - \xi_1) + \rho(\eta - \eta_1) = 0. \tag{11}$$

6. В п. 13 второго параграфа мы нашли постоянную площадей для жидкости. Сделаем те же самые вычисления и для твердой мантии. Действительно, мы имеем

$$\sum m(x'y - xy') = (\alpha_1'\alpha_2 - \alpha_2'\alpha_1)\sum mx_0^2 + \sum mx_0y_0(\ldots) + \ldots$$

Здесь более нельзя предполагать, что

$$\sum mx_0^2 = \sum my_0^2 = \sum mz_0^2.$$

Но, так как тело обладает осью симметрии, можно записать следующие выражения

$$\sum mx_0y_0 = \sum my_0z_0 = \sum mx_0z_0 = 0,$$
$$\sum mx_0^2 = \sum my_0^2 = A, \quad \sum mz_0^2 = C,$$

где постоянные A и C имеют другое значения, чем во втором параграфе. Далее легко видеть, что

$$\sum m(x'y - xy') = A[(\alpha_1'\alpha_2 - \alpha_2'\alpha_1) + (\beta_1'\beta_2 - \beta_2'\beta_1)] + C(\gamma_1'\gamma_2 - \gamma_2'\gamma_1).$$

Находим также

$$\begin{aligned}\mathfrak{M} &= \sum m(x'z - xz') = \\ &= A[(\alpha_1'\alpha_3 - \alpha_3'\alpha_1) + (\beta_1'\beta_3 - \beta_3'\beta_1)] + C(\gamma_1'\gamma_3 - \gamma_3'\gamma_1), \\ \mathfrak{L} &= \sum m(y'z - yz') = \\ &= A[(\alpha_2'\alpha_3 - \alpha_3'\alpha_2) + (\beta_2'\beta_3 - \beta_3'\beta_2)] + C(\gamma_2'\gamma_3 - \gamma_3'\gamma_2).\end{aligned}$$

Составим выражение

$$-\mathfrak{M} - i\mathfrak{L},$$

заменив

$$\alpha_1 + i\alpha_2, \quad \beta_1 + i\beta_2, \quad \gamma_3, \quad \alpha_3 + i\alpha_3, \quad \gamma_1 + i\gamma_2$$

их значениями

$$\rho e^{-i\omega t}, \quad i\rho e^{-i\omega t}, \quad c, \quad \eta_1, \quad \xi_1$$

(переменные η_1, ξ_1 введены для твердой мантии); находим следующее уравнение

$$-\mathfrak{M} - i\mathfrak{L} = A\rho e^{-i\omega t}(\eta_1' + i\omega\eta_1) - Ce\xi_1'.$$

С помощью подобного вычисления было получено уравнение (13) в п. 16 второго параграфа. Чтобы получить выражение, аналогичное для $-\mathfrak{M} - i\mathfrak{L}$ и соответствующее всему телу, необходимо добавить первый член этого уравнения (13), что приводит к выражению

$$A\rho e^{-i\omega t}(\eta_1' + i\omega\eta_1) - Cc\xi_1' + \rho e^{-i\omega t}(\eta' + i\omega\eta) - c\xi'.$$

На основании закона площадей это выражение должно быть постоянным, если отсутствует внешняя сила. Если же таковая имеется, то его производная

$$A\rho e^{-i\omega t}(\eta_1'' + \omega^2\eta_1) - Cc\xi_1'' + \rho e^{-i\omega t}(\eta'' + \omega^2\eta) - c\xi''$$

должна равняться простой комбинации моментов внешних сил, то есть известной функции времени. Раскладывая последнюю в ряд Фурье, находим

$$A\rho e^{-i\omega t}(\eta_1'' + \omega^2\eta_1) - Cc\xi_1'' + \rho e^{-i\omega t}(\eta'' + \omega^2\eta) - c\xi'' = \sum Be^{i\varepsilon t}. \quad (12)$$

7. Кроме того, у нас есть второе уравнение (18) из второго параграфа, которое остается справедливым, поскольку оно получается как производная уравнения Гельмгольца (12) из второго параграфа. Оно составляет вместе с уравнениями (10), (11), (12) полную систему наших уравнений, которую можно записать, сохраняя при этом один из членов правой части уравнения (12), в виде

$$A\rho e^{-i\omega t}(\eta_1'' + \omega^2\eta_1) - Cc\xi_1'' + \rho e^{-i\omega t}(\eta'' + \omega^2\eta) - c\xi'' = Be^{i\varepsilon t};$$

$$\begin{cases} \rho e^{i\omega t}\xi_1 + c\eta_1 = 0, \\ ce^{i\omega t}(\xi - \xi_1) + \rho(\eta - \eta_1) = 0, \\ \omega^2\rho e^{i\omega t} - c\eta'' + \rho e^{i\omega t}\xi'' = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Проинтегрируем их, полагая

$$\rho\xi = ae^{i\varepsilon t}, \quad c\eta = be^{i(\omega+\varepsilon)t}, \quad \rho\xi_1 = a_1e^{i\varepsilon t}, \quad c\eta_1 = b_1e^{i(\omega+\varepsilon)t},$$

что приводит к соотношениям

$$\frac{Ca_1 + a}{\rho^2}\varepsilon^2 - \frac{Ab_1 + b}{c^2}(2\omega\varepsilon + \varepsilon^2) = \frac{B}{\rho c};$$

$$\begin{cases} a_1 + b_1 = 0, \\ \dfrac{a - a_1}{\rho^2} + \dfrac{b - b_1}{c^2} = 0, \\ a(\omega^2 - \varepsilon^2) + b(\omega + \varepsilon)^2 = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Детерминант этой системы записывается следующим образом

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\varepsilon^2}{\rho^2} & \dfrac{C\varepsilon^2}{\rho^2} & -\dfrac{2\omega\varepsilon+\varepsilon^2}{c^2} & -A\dfrac{2\omega\varepsilon+\varepsilon^2}{c^2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & -\dfrac{1}{\rho^2} & \dfrac{1}{c^2} & -\dfrac{1}{c^2} \\ \omega^2-\varepsilon^2 & 0 & (\omega+\varepsilon)^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Так как первая строка матрицы делится на ε, Δ также делится на ε.

Коэффициент при ε равен

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -\dfrac{2\omega}{c^2} & -\dfrac{2A\omega}{c^2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \dfrac{1}{\rho^2} & -\dfrac{1}{\rho^2} & \dfrac{1}{c^2} & -\dfrac{1}{c^2} \\ \omega^2 & 0 & \omega^2 & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{\rho^2}-\frac{1}{c^2}\right)\frac{2\omega^2}{c^2}(1+A).$$

Следовательно, Δ не делится ε^2, исключая случай $\dfrac{1}{\rho^2}=\dfrac{1}{c^2}$, т. е. если внутренняя полость несферична. Для последнего случая можно установить, что

$$\Delta = 2\varepsilon^2(\omega+\varepsilon)(2A\omega+A\varepsilon+C\varepsilon)\frac{1}{c^2}.$$

Следовательно, уравнение $\Delta=0$ допускает при очень малом $\dfrac{1}{\rho^2}-\dfrac{1}{c^2}$ четыре корня, один из которых равен нулю, другой — очень мал, третий — равен $-\omega$ и четвертый близок к $-\dfrac{2A\omega}{A+C}$. Мы видели, чему соответствует первый (вращение всего тела вокруг оси, мало отличающейся от оси z) и третий корни (перемещение жидких частиц внутри жидкого ядра, при котором одни частицы легко заменяются на другие).

Именно наличию второго очень малого корня мы обязаны всем особенностям явления. Если период возмущающей силы соответствует очень малому ε, возникает резонанс с нулевым корнем. Если бы существовал только один такой резонанс, то тело вело бы себя примерно так, как при собственном колебании, которое соответствует этому нулевому корню, т. е. как твердое тело, и имелась бы *гиростатическая* *жесткость*. Это происходит, если сплюснутость внутренней эллиптической полости не слишком мала. Но так как она очень мала, то уравнение $\Delta = 0$ допускает очень малый корень. Возникнет *двойной резонанс*, и амплитуда нутации будет сильно отличаться от амплитуды твердого тела.

IV. Воздействие упругости

Теперь рассмотрим, что произойдет, если предположить, что твердая часть Земли является не твердым, а упругим телом. Предположим сначала, что Земля полностью является упругим твердым сфероидом, и затем, что она является твердым упругим сфероидом, заполненным жидкостью.

Рассмотрим сначала первую гипотезу. Будет ли амплитуда некоторых нутаций меняться? Согласно предыдущему параграфу этот вопрос сводится к следующему: какой имеется резонанс — простой или двойной? Другими словами, имеет ли уравнение для ε, аналогичное уравнению $\Delta = 0$ предыдущего параграфа, нулевой корень, а все другие при этом являются конечными, или же оно допускает нулевой корень и еще один, очень малый? Ответ можно найти очень быстро. В предельном случае неизменяемого тела, то есть когда предполагается бесконечная жесткость, существует простой резонанс. В этом случае существует один нулевой корень, а другие — конечные; необходимо также, чтобы эти корни были конечными для некоторой жесткости, ибо если бы один из них был очень малым для любой жесткости, он остался бы таковым и для бесконечной жесткости. Значит, имеется простой резонанс, гиростатическая жесткость проявляется полностью, амплитуда разных нутаций является такой же, как и для неизменяющегося тела.

Перейдем ко второй гипотезе, в которой речь пойдет об изучении собственных колебаний системы. Твердая мантия будет следовать законам упругости. Пусть x, y, z — координаты некоторой точки; $x + u$, $y + v$, $z + w$ — ее координаты после деформации. Положим

$$\theta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz},$$

и пусть μ и ν — два коэффициента, тогда получим

$$(\nu + \mu)\frac{d\theta}{dx} + \mu\Delta u = \frac{d^2u}{dt^2}.$$

Кроме того, имеются граничные условия. Обозначим составляющие давления P_{xx}, P_{xy}, ... так, что

$$P_{xx} = \nu\theta + 2\mu\frac{du}{dx}, \quad P_{xy} = \mu\Big(\frac{du}{dy} + \frac{d\nu}{dx}\Big), \quad \ldots$$

Пусть α, β, γ — направляющие косинусы нормали к свободной поверхности, положим

$$X = \alpha P_{xx} + \beta P_{xy} + \gamma P_{xz},$$

$$Y = \alpha P_{xy} + \beta P_{yy} + \gamma P_{yz},$$

$$Z = \alpha P_{xz} + \beta P_{yz} + \gamma P_{zz}.$$

Вектор X, Y, Z задает силу, действующую на элемент свободной поверхности. На внешней свободной границе этот вектор быть равен нулю. На внутренней границе он направлен по нормали к поверхности и по величине равен гиростатическому давлению жидкости.

Предположим, что внешняя и внутренняя границы будут сферами (или мало отличающимися от них фигурами), и что давление p равно, к примеру, сферическому многочлену P второго порядка. Мы сможем удовлетворить нашим уравнениям, полагая

$$u = xPR + S\frac{dP}{dx}, \quad v = yPR + S\frac{dP}{dy}, \quad w = zPR + S\frac{dP}{dz},$$

где R и S — функции от $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Можно показать, что R и S удовлетворяют двум уравнениям второго порядка, а четыре постоянные интегрирования определяются граничными условиями. Следовательно, неизвестные функции R и S могут быть полностью определены и не зависят от сферического многочлена P, если оставить неизмененным его порядок.

Общее решение задачи может быть найдено следующим образом: пусть

$$u = u_1, \quad v = v_1, \quad w = w_1$$

только что рассмотренное частное решение. Тогда общее решение будет иметь вид

$$u = u_1 + u_2, \quad v = v_1 + v_2, \quad w = w_1 + w_2,$$

где u_2, v_2, w_2 представляют произвольное перемещение, для которого рассматриваемое тело ведет себя как неизменяемое твердое тело. Следовательно, это перемещение является простым вращением. Предположим, что тело вращается вокруг оси, расположенной в плоскости xy. В этом случае решение будет зависеть от двух произвольных постоянных.

Прежде всего необходимо вычислить p. Для этого воспользуемся результатами второго параграфа. Действительно, можно допустить, что движение жидкости остается *простым,* для этого достаточно, как мы уже видели, чтобы ее внешняя поверхность оставалась эллипсоидальной, то есть чтобы внутренняя поверхность твердой мантии, первично сферическая, стала вследствие деформации эллипсоидом. Нетрудно показать, что эта гипотеза соответствует тому, что $p = P$ является сферическим многочленом второго порядка.

Следовательно, мы снова получим уравнение

$$\begin{cases} \sum x''\,dx = dp - dV, \\ V = k'\sum x_0^2 + (1-k')\sum x^2. \end{cases} \tag{1}$$

Слагаемые в p, которые нас интересуют, имеют вид

$$hx_0z_0 + h_1y_0z_0,$$

коэффициенты при них следует вычислить. Используя способ, изложенный во втором параграфе, из уравнений (1) находим

$$\begin{aligned} \sum \alpha''\gamma = \sum \alpha\gamma'' = k\sum \alpha\gamma + h, \\ \sum \beta''\gamma = \sum \beta\gamma'' = k\sum \beta\gamma + h_1. \end{aligned}$$

Если положить $h + ih_1 = \overline{\omega}$ и вспомнить выражение для ξ и η, то эти уравнения примут форму:

$$-\omega^2\rho e^{i\omega t}\xi + c\eta'' = \rho e^{i\omega t}\xi'' = k(\rho e^{i\omega t}\xi + c\eta) + \overline{\omega}. \tag{2}$$

Таким образом для интересующих нас слагаемых получим

$$p = \Re\overline{\omega}z_0(x_0 - iy_0),$$

где символ $\Re$ обозначает *действительную часть.*

Отбрасывая квадраты ε, η и $\overline{\omega}$, можно показать, что

$$p = P = \Re\frac{\omega}{c\rho}z(x - iy)e^{-i\omega t} = \Re\overline{\omega}z_0(x_0 - iy_0).$$

При этих условиях, решение зависит от четырех произвольных постоянных, которые задаются действительной и мнимой частью $\overline{\omega}$ и двумя постоянными, определяющими вращение u_2, v_2, w_2.

Теперь необходимо вывести уравнения, аналогичные уравнениям (13) и (14) третьего параграфа, для определения величин, играющих роль ε_1 и η_1. Первое уравнение — это уравнение площадей; второе необходимо заменить уравнением упругого равновесия, которое имеет вид

$$\sum xu = (r^2 R + 2S)P.$$

Легко проверить, что это выражение равно $\sum xu_1$, так как $\sum xu_2 = 0$. Таким образом, возвращаясь к уравнению (2), найдем соотношение между $\sum xu$ и действительными и мнимыми частями ξ и η. Можно представить это уравнение в форме, аналогичной уравнениям (13) третьего параграфа следующим образом: обратимся к случаю с жидкостью и воспользуемся уравнением (1) второго параграфа. Пусть x, y, z — значения координат, которые соответствуют решению (10) этих уравнений; $x + u$, $y + v$, $y + w$ — значения, которые соответствуют решению, подробно рассмотренному в п. 16 этого же параграфа. Получим

$$x + iy = \rho(x_0 + iy_0)e^{-i\omega t}, \quad z = cz_0, \quad u + iv = \xi z_0, \quad w = \Re\eta(x_0 - iy_0).$$

Отсюда находим

$$\sum xu = \Re(\rho\xi e^{i\omega t} + c\eta)(x_0 - iy_0)z_0.$$

По аналогии, установим также, что

$$\sum xu = \Re(\rho\xi_1 e^{i\omega t} + c\eta_1)(x_0 - iy_0)z_0. \tag{3}$$

Отметим, что это уравнение действительно представляет два соотношения между действительными и мнимыми частями ξ_1 и η_1, так как коэффициенты при $x_0 z_0$ и $y_0 z_0$ должны быть тождественны в двух указанных выражениях и наше уравнение примет вид

$$\Re(\rho\xi_1 e^{i\omega t} + c\eta_1)(x_0 - iy_0)z_0 = (r^2\Re + 2S)\Re\overline{\omega}z_0(x_0 - iy_0),$$

откуда

$$\rho \xi_1 e^{i\omega t} + c\eta_1 = \lambda \overline{\omega}, \tag{4}$$

где

$$\lambda = r^2 \mathfrak{R} + 2S$$

должна быть рассмотрена как заданная постоянная. Действительно, уравнения упругости позволяют нам определить функции R и S, и в этих функциях для r следует задать значение, которое соответствует внутренней свободной поверхности, мало отличающейся от сферы.

Перейдем к третьему уравнению (13) из третьего параграфа. Оно показывает, что внутренняя свободная поверхность мантии совпадает с внешней свободной поверхностью жидкого ядра. То же самое условие в данном случае имеет вид

$$\sum xu = \mathfrak{R}(ce^{i\omega t}\xi + \rho\eta)(x_0 - iy_0)z_0,$$

где можно взять $\rho = c$, поскольку мы пренебрегаем сплюснутостью,

$$\mathfrak{R}(e^{i\omega t}\xi_1 + c\eta_1) = \mathfrak{R}(\rho e^{i\omega t}\xi + c\eta). \tag{5}$$

Тем самым мы окончательно определяем ξ_1 и η_1. Полагая, что $x_0 = y_0 = 0$, $z_0 = 1$, мы имеем

$$u + w = \xi_1 z_0.$$

Легко видеть, что четвертое уравнение Гельмгольца остается неизменным. Таким образом видно, что деформации твердой мантии зависят только от четырех произвольных постоянных. За них можно принять действительные и мнимые части ξ_1 и η_1.

Можно выбрать другую систему координат, выбирая ось z таким образом, чтобы новая ось x образовала с предыдущей осью угол φ. Это сводится к преобразованию $x_0 - iy_0 \mapsto (x_0 - iy_0)e^{-i\varphi}$, $u + iv \mapsto (u+iv)e^{i\varphi}$ и, следовательно, ξ, η, ξ_1, $\eta_1 \mapsto \xi e^{i\varphi}$, $\eta e^{i\varphi}$, $\xi_1 e^{i\varphi}$, $\eta_1 e^{i\varphi}$.

Уравнение площадей определяет линейное соотношение между ξ, η, ξ_1, η_1, их мнимыми сопряженными величинами ξ^0, η^0, ξ_1^0, η_1^0 и их производными. Но эти уравнения сохраняются в новой системе координат, то есть при замене ξ, η, ξ_1, η_1, ξ^0, η^0, ξ_1^0, η_1^0 в $\xi e^{i\varphi}$, $\eta e^{i\varphi}$, $\xi_1 e^{i\varphi}$, $\eta_1 e^{i\varphi}$, $\xi^0 e^{-i\varphi}$, $\eta^0 e^{-i\varphi}$, $\xi_1^0 e^{-i\varphi}$, $\eta_1^0 e^{-i\varphi}$. Первое слагаемое можно разделить на две части: первая умножается на $e^{i\varphi}$, вторая — на $e^{-i\varphi}$, и, т.к. равенство выполняется при произвольном φ, то каждая из этих двух частей должна равняться нулю. Таким образом, приравняем к нулю первую часть, зависящую только от ξ, η, ξ_1, η_1, и получим уравнение площадей в виде

$$F(\xi,\, \eta,\, \xi_1,\, \eta_1) = 0,$$

первый член которого линеен по переменным ξ, η, ξ_1, η_1 и их производным. Из уравнений (2) и (4) получаем уравнение упругости

$$\rho e^{i\omega t}\xi_1 + c\eta_1 + \lambda k(\rho e^{i\omega t}\xi + c\eta) + \lambda\rho e^{i\omega t}\xi'' = 0,$$

последнее уравнение (13) третьего параграфа, остается справедливым без изменений

$$\omega^2\rho e^{i\omega t}\xi - c\eta'' + \rho e^{i\omega t}\xi'' = 0,$$

и последнее уравнение

$$\rho e^{i\omega t}(\xi - \xi_1) + c(\eta - \eta_1) = 0$$

получается из уравнения (5).

Если положить, как в третьем параграфе,

$$\rho\xi = ae^{i\varepsilon t}, \quad c\eta = be^{i(\omega+\varepsilon)t}, \quad \rho\xi_1 = a_1e^{i\varepsilon t}, \quad c\eta_1 = b_1e^{i(\omega+\varepsilon)t}, \tag{6}$$

то получим

$$\begin{cases} Aa + A_1a_1 + Bb + B_1b_1 = 0, \\ \lambda(k+\varepsilon^2)a + a_1 + \lambda kb + b_1 = 0, \\ a - a_1 + b - b_1 = 0, \\ a(\omega^2 - \varepsilon^2) + b(\omega+\varepsilon)^2 = 0, \end{cases} \tag{14 bis}$$

где A, A_1, B, B_1 — функции от ε. Чтобы найти эти функции, отметим, что $F(\xi,\, \eta,\, \xi_1,\, \eta_1)$ определяет не постоянную площадей, а ее производную по времени. Если $\Phi(\xi,\, \eta,\, \xi_1,\, \eta_1)$ представляет эту постоянную, то, заменяя на ξ и η их значениями (1), получим

$$\Phi(\xi,\, \eta,\, \xi_1,\, \eta_1) = (A'a + A_1'a_1 + B'b + B_1'b_1)e^{i\varepsilon t},$$

где A', … целые многочлены от ε. Продифференцировав это выражение по времени, имеем

$$F(\xi,\, \eta,\, \xi_1,\, \eta_1) = i\varepsilon(A'a + A_1'a_1 + B'b + B_1'b_1)e^{i\varepsilon t},$$

и, следовательно, справедливы равенства

$$A = i\varepsilon A', \quad A_1 = i\varepsilon A_1', \quad B = i\varepsilon B', \quad B_1 = i\varepsilon B_1',$$

показывающие, что A, A_1, B, B_1 делится на ε. Следовательно, детерминант уравнений (14 bis) равен нулю при $\varepsilon = 0$, и имеется резонанс. Это нам уже известно. Остается определить является этот резонанс простым или двойным. Для этого первую строку (14 bis) разделим на $i\varepsilon$ и положим $\varepsilon = 0$. В результате получаем детерминант вида

$$\begin{vmatrix} A' & A_1' & B' & B_1' \\ \lambda k & 1 & \lambda k & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ \omega^2 & 0 & \omega^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Данный детерминант обращается в ноль при $\rho^2 = c^2$, следовательно, он очень мал при ρ^2, близком к c^2. Действительно, рассмотрим матрицу, состоящую из трех последних строк детерминанта. Если $c^2 = \rho^2$, то столбцы 1 и 3 этой матрицы будут совпадать, и аналогично столбцы 2 и 4. Следовательно, детерминант равен нулю. ■

Таким образом, имеется двойной резонанс, следовательно, амплитуда нутаций будет значительно отличаться от аналогичной амплитуды для твердого тела.

ОБ ОДНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЕ

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 1912, **33**, 375–507

§ 1. Введение

Никогда до сих пор я не выступал в печати с настолько незаконченной работой, поэтому считаю необходимым пояснить в нескольких словах, почему я решился на такую публикацию, а также — почему я занялся этой работой. Уже довольно давно я доказал существование периодических решений в задаче трех тел, однако результат не был полностью удовлетворительным, так как, если существование каждого вида решений и было установлено для малых значений масс, оставалось неясным, что случится для больших значений, какие из этих решений останутся и в каком порядке они исчезнут. Размышляя над этим вопросом, я пришел к убеждению, что ответ должен зависеть от справедливости или ложности некоторой геометрической теоремы, формулировка которой очень проста, по крайней мере, для случая ограниченной задачи и для задачи динамики только с двумя степенями свободы.

Итак, я должен был установить, справедлива ли эта теорема, или она неверна, однако я встретился с затруднениями, которых не ожидал. Мне пришлось по отдельности рассмотреть большое число особых случаев, но возможные случаи чересчур многочисленны, чтобы я смог их все изучить. Однако, во всех случаях, которые мне удалось рассмотреть, теорема оказалась правильной. В течение двух лет я безуспешно пытался или найти общее доказательство, или же обнаружить такой пример, который привел бы к опровержению теоремы.

Итак, мое убеждение в том, что теорема справедлива, укреплялось с каждым днем, но мне не удалось подвести под него солидное основание.

Представляется, что в подобном положении я должен был бы воздержаться от какой бы то ни было публикации, пока не решу вопроса, однако после бесполезных попыток, которые я предпринимал в течение ряда долгих месяцев, мне показалось, что самым мудрым решением было бы предоставить проблеме созревать, а мне — отдохнуть от нее несколько лет. Однако это было бы правильно, если бы я был уверен в том, что смогу со временем снова взяться за эту проблему, но, учитывая мой возраст, я не могу за это поручиться. С другой стороны, значение предмета слишком велико (и я попытаюсь ниже разъяснить это), а совокупность уже полученных результатов слишком значительна, чтобы я решился бесполезно забросить их. Я могу надеяться, что геометры, которые заинтересуются этой проблемой и окажутся, вне всякого сомнения, счастливее меня, смогут извлечь некоторую пользу из этих результатов и применить их для того, чтобы найти нужный путь.

Надеюсь, что этих рассуждений мне достаточно для оправдания.

§ 2. Формулировка теоремы

Будем обозначать через x и y полярные координаты точки и рассмотрим круговое кольцо, заключенное между двумя окружностями, внешней окружностью $x = a$ и внутренней окружностью $x = b$. Рассмотрим точечное обратимое преобразование этого кольца T самого на себя. Обозначим через x и y координаты точки M, а через X и Y — координаты преобразованной точки, и наложим два следующих условия.

Первое условие. Так как T преобразует круговое кольцо самое в себя, то оно преобразует самих в себя и две граничные окружности, $x = a$ и $x = b$, так что получим $X = x$, когда $x = a$ или $x = b$; однако при этом $Y < y$ при $x = a$ и $Y > y$ при $x = b$ или наоборот. Иначе говоря, описанное преобразование преобразует друг в друга каждую из граничных окружностей, причем все точки *каждой* окружности продвигаются *в одном и том же направлении*, хотя вообще и на неравные величины, но таким образом, что вращения *обеих* окружностей происходят в *противоположные стороны*. Может показаться, что подобная формулировка не имеет смысла, поскольку y и Y определены лишь с точностью до кратных 2π, но если мы зададим в соответствии с каким-либо соглашением точное значение $Y - y$ в какой-либо точке кольца, то значение $Y - y$ полностью определится *вследствие непрерывности* во всех точках кольца.

Второе условие. Преобразование сохраняет площади или, более общим образом, оно допускает положительный интегральный инвариант, иначе говоря, существует положительная функция $f(x, y)$, такая, что

$$\iint f(x, y)dx\,dy \equiv \iint f(X, Y)dX\,dY,$$

причем эти два интеграла распространены на некоторую область и на соответствующую преобразованную область.

Если выполнены эти два условия, то я утверждаю, что всегда внутри кольца будут существовать две точки, которых преобразование не изменяет.

Будем для упрощения предполагать, что преобразование является аналитическим, но в этом нет ничего существенного.

Можно было бы попытаться наметить следующее доказательство. Достаточно будет пояснить его для простейшего случая $f(x, y) = 1$. Тогда X и Y, рассматриваемые как функции от x и y, должны будут удовлетворять уравнению в частных производных

$$\frac{dX}{dx}\frac{dY}{dy} - \frac{dX}{dy}\frac{dY}{dx} = 1,$$

т. е. условию, что

$$dZ = (X - x)dy - dX(Y - y)$$

есть точный дифференциал.

Нетрудно усмотреть, что Z есть однозначная функция x и y, периодическая по y; она должна иметь максимум и минимум, которые недостижимы на граничных окружностях. Итак, если бы x и y были однозначными функциями от X и y, то максимум мог бы быть достигнут только при

$$X = x, \quad Y = y$$

и можно было бы прийти к заключению, что внутри кольца существуют две такие точки, для которых $X = x$, $Y = y$, т. е. две инвариантных точки. Однако это не всегда так, и максимум может иметь место и для таких точек, для которых

$$\frac{dX}{dx} = \left[(X - x) - (Y - y)\frac{dX}{dy}\right] = 0,$$

что и показывает, что доказательство приложимо только к инфинитезимальным преобразованиям.

Эта теорема может быть представлена и в другом виде, совершенно эквивалентном, но в некотором роде противоположном изложенному выше. Представим себе, что преобразование T продолжает удовлетворять первому из условий, *но не второму*; взамен этого оно удовлетворяет третьему условию.

Третье условие. Внутри всего кольца не существует инвариантных точек.

Я утверждаю, что если дело обстоит именно так, то преобразование T не может удовлетворять второму условию, т. е. *иметь инвариантный положительный интеграл.*

Очевидно, что обе формулировки совершенно эквивалентны; если любое преобразование, удовлетворяющее первому и третьему условиям не удовлетворяет второму условию, то всякое преобразование, удовлетворяющее первому и второму условиям, не может удовлетворить третьему условию; оно, следовательно, будет иметь по крайней мере одну инвариантную точку, и, следовательно, не менее двух таких точек, ибо Analysis situs (и, в частности, теорема Кронекера) непосредственно показывает, что число последних четно.

Теперь, чтобы показать, что второе условие не может быть выполнено при выполнении первого и третьего условий, я постараюсь показать что можно построить замкнутый контур C, обладающий следующими свойствами:

1) он охватывает внутреннюю граничную окружность $x = b$ таким образом, что при полном его обходе y меняется от 0 до 2π;

2) он не пересекает свое преобразование C', так что он или целиком вне него, или целиком внутри него.

Если это так, то кольцевая площадь, заключенная между C и $x = b$, преобразуется в площадь, заключенную между C' и $x = b$.

Однако одна из этих площадей является частью другой. Если, например, C' полностью находится вне C, то площадь, заключенная между C' и $x = b$, состоит из площади, заключенной между C' и C, плюс площадь, заключенная между C и $x = b$. Следовательно, невозможно, чтобы при преобразовании площади сохраняли свои величины. Итак, не может быть и речи о том, чтобы преобразование допускало положительный интегральный инвариант.

В тех попытках доказательства, которые я намерен предпринять, я буду в основном рассматривать вторую форму теоремы, иначе говоря, я исследую тот случай, когда преобразования удовлетворят первому и третьему условиям; я классифицирую их и для каждого класса попробую построить тот контур C, который был определен выше. Наоборот, в приложениях удобнее будет применять теорему в ее первой форме.

§ 3. Применения теоремы

Если окажется возможным установить теорему, то это повлечет за собой несколько немедленных обобщений.

Действительно, сперва предположим, что граничная внутренняя окружность $x = b$ сводится к точке, тогда наше кольцо станет кругом. Если тогда на внешней окружности $x = a$ постоянно имеем $Y > y$, а вблизи центра $Y < y$ или наоборот; если, кроме того, преобразование допускает интегральный инвариант, то внутри круга будет по крайней мере две точки, не изменившиеся при преобразовании. С другой стороны, мы можем применить те же принципы и к произвольной степени T'' преобразования T.

Посмотрим теперь, как все это можно применить к задачам динамики в случае двух степеней свободы. Для упрощения я рассмотрю, в частности, простейшую из этих задач — проблему геодезических линий на выпуклой поверхности (по этому вопросу я написал мемуар[1]). Нам нужно сперва найти подходящее для нашего объекта геометрическое представление; определим то, что будем называть элементом, и постараемся каждому из этих элементов поставить в соответствие точку пространства. Элементом будет совокупность одной геодезической линии и одной точки этой геодезической линии. Одну и ту же геодезическую кривую следует рассматривать как две различные геодезические линии, в зависимости от того, в каком направлении она пробегается. Каждому элементу соответствует триэдр, определенный следующим образом: сперва проведем к поверхности в рассматриваемой точке нормаль, причем извне; затем проведем касательную к геодезической линии, в том направлении, в котором последняя пробегается; наконец, проведем к этим двум прямым перпендикуляр, также имеющий определенное направление. Перенесем затем при помощи поступательного движения наш прямоугольный триэдр так, чтобы его вершина совпала с началом. Таким образом, каждому прямоугольному триэдру с вер-

[1] О геодезических линиях на выпуклых поверхностях (см. Избранные труды. III. М.: Наука, 1974). — *Прим. ред.*

шиной в начале соответствует один и только один *элемент*; так как поверхность выпуклая, то имеются только две точки, в которых касательная плоскость перпендикулярна к первому ребру триэдра и только в одной из этих точек *внешняя* нормаль будет параллельна этому ребру и иметь *то же направление*.

Через эту точку проходит геодезическая линия, причем только одна, касательная к которой будет параллельна второму ребру триэдра; направление, по которому мы идем вдоль этой геодезической линии, также тем самым определено.

Установив это, определим каждый триэдр с помощью кватерниона

$$\lambda,\ \mu,\ \nu,\ \rho\,(\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\rho^2=1),$$

который дает нам вращение, необходимое для того, чтобы привести триэдр из начального положения, определенного раз и навсегда, в действительное. Тогда косинус полуугла этого вращения будет равен λ, а его синус будет $\sqrt{\mu^2+\nu^2+\rho^2}$; направляющие косинусы оси вращения пропорциональны μ, ν, ρ.

Заметим при этом, что два кватерниона: λ, μ, ν, ρ и $-\lambda$, $-\mu$, $-\nu$, $-\rho$ представляют одно и то же вращение и, следовательно, один и тот же триэдр и один и тот же *элемент*.

Положим затем

$$\lambda=\frac{1-\xi^2-\eta^2-\zeta^2}{1+\xi^2+\eta^2+\zeta^2},\quad \mu=\frac{2\xi}{1-\xi^2+\eta^2+\zeta^2},$$
$$\nu=\frac{2\eta}{1+\xi^2+\eta^2+\zeta^2},\quad \rho=\frac{2\zeta}{1+\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$$

и представим наш элемент точкой пространства с прямоугольными координатами ξ, η, ζ. Каждой точке пространства соответствуют *две* точки пространства, которые можно вывести одну из другой при помощи инверсии с полюсом в начале и со степенью, равной -1.

Геодезическая линия, образованная бесконечным множеством подобных элементов, будет представлена в этом пространстве кривой. Через каждую точку этого пространства проходит одна и только одна из этих кривых, причем определенным является и направление прохождения этой кривой. Я обозначу эти кривые через C.

В случае сферы геодезические линии являются большими кругами, а кривые C образуют семейство кругов, плоскости которых проходят через начало и степень которых относительно этого начала равна -1. Два из этих кругов C не могут встретиться и они всегда сцеплены друг с другом. В общем случае каждому периодическому решению проблемы, т.е. каждой замкнутой геодезической линии, соответствует замкнутая кривая C.

В качестве второго примера я возьму частный случай задачи трех тел, известный под названием *ограниченной* задачи. Отнесем систему трех тел, как это делается обычно, к вращающимся осям, и запишем интеграл Якоби (или интеграл живых сил в относительном движении) в форме

$$J = c,$$

где c — постоянная, а J — функция наших четырех переменных, которыми будут: x и y, координаты возмущенного тела x' и y', составляющие его скорости. Если рассматривать c в качестве заданной постоянной, то независимыми будут лишь три из этих переменных.

Можно записать, что

$$J = \frac{x'^2 + y'^2}{2} + H,$$

где H зависит лишь от x и y. При этих условиях будем иметь

$$H < c.$$

Это неравенство определяет какую-то область на плоскости и в некоторых случаях, которыми мы ограничимся, эта область β ограничена замкнутой кривой α; в каждой точке области β скорость по величине определена уравнением Якоби, но направление ее остается произвольным; в каждой точке кривой α эта скорость равна нулю, так что направление не имеет значения. Итак, каждой точке β соответствует бесконечное количество *элементов*, каждой точке α соответствует только один элемент; это и приводит нас к следующему геометрическому представлению.

Мы можем сопоставить взаимно однозначно области β внутренность круга β', а кривой α — его окружность α'. Установив это, представим себе круг γ, плоскость которого перпендикулярна плоскости круга β', а степень его относительно центра β' равна квадрату радиуса β'; он пересечет плоскость β' в двух точках, из которых одна будет внутренней, а вторая — внешней по отношению к окружности α'.

Пусть M будет первой из этих точек, а x, y — соответствующей точкой области β. Тогда мы представим различные *элементы* с помощью точки пространства следующим образом: когда представляющая точка будет описывать круг γ, то x и y будут сохранять постоянные значения, соответствующие точке M, а угол $\operatorname{arctg}(y'/x')$, определяющий направление скорости, будет изменяться от 0 до 2π. Тогда каждой точке β будет соответствовать бесконечное число элементов, представленных различными точками круга γ. Если точка M находится на α' и, следовательно, соответствующая ей точка на α, то круг γ сводится к точке, как и должно быть, поскольку каждой точке α соответствует только один элемент.

Итак, каждому элементу соответствует одна и только одна точка пространства[1], и наоборот.

Траектория будет представлена кривой двоякой кривизны C; через каждую точку пространства проходит одна и только одна из этих кривых. Направление, в котором пробегается эта кривая, также является определенным. Замкнутые кривые C представляют собой периодические решения.

Предположим теперь, что в любом из двух предыдущих примеров замкнутая кривая C_0 представляет периодическое решение, а поверхность A ограничена этой кривой.

Будем предполагать, что поверхность A является односвязной и не пересекается сама с собой и, более того, что она *без контакта*, т. е. что ни в одной точке этой площади кривые C не касаются искривленной поверхности, часть которой составляет наша область.

Пусть теперь P — произвольная точка A; через эту точку проходит кривая C, причем только одна; проследим ход этой кривой до тех пор, пока она опять не встретит A в P'. Точку P' можно назвать *последующей* для P; преобразование T, с помощью которого осуществляется переход от некоторой точки к следующей, является точечным преобразованием поверхности A самой в себя. Необходимо заметить, что точка P' изменяется непрерывным образом, если непрерывно изменяется P. Действительно, можно допустить, что изменение будет прерывным, при одном из следующих обстоятельств.

1. Если, рассматривая последовательные точки P, P', P'', P''', ... пересечения C с A, мы увидим, что в определенный момент P' и P''

[1]Пополненного одной бесконечно удаленной точкой. — *Прим. ред.*

совпадут, а затем станут мнимыми, так что с этого момента первой точкой пересечения C с A будет P''' а не P'.

2. Если, наоборот, в некоторый момент времени две новые точки пересечения P_1 и P_2 появятся таким образом, что первым пересечением C и A станет P_1, а не P'.

3. Если в некоторый данный момент времени P' выйдет из области A и первым пересечением с этого момента окажется P'', а не P'; или же, наоборот, если в область A войдет новая точка пересечения P_1, которая включится между P и P'.

Ни одно из этих обстоятельств не сможет представиться в рассматриваемом положении: первые два потому, что кривая C не может стать касательной к A, которая *лишена контакта*; третье благодаря тому, что через некоторую точку кривой C_0, ограничивающей A, никогда не сможет пройти кривая C иная, чем C_0.

Если точка P сливается с первой следующей за ней точкой P' или с какой-либо из последующих, то кривая C окажется замкнутой, а решение — периодическим. Отметим, кроме того, что преобразование T допускает положительный интегральный инвариант в соответствии с принципами, изложенными мною в другом месте[1].

Теперь мы должны ввести понятие характеристических показателей, а также устойчивости периодических решений. Известно, что всякое периодическое решение допускает два равных характеристических показателя с противоположными знаками[2]. Если периодическое решение устойчиво, то эти два показателя сопряженные мнимые.

В этом случае мы можем ввести понятие приведенного аргумента («Новые методы небесной механики», т. III, п. 347) и понятие кинетических фокусов, что укажет нам, каким образом изменяется точка P', когда точка P весьма близка к граничной кривой C_0. Что же такое кинетический фокус? Рассмотрим кривую C_1, очень мало отличающуюся от C_0 и представляющую траекторию или некоторую геодезическую линию, очень мало отличающуюся от той, которую представляет C_0. Пусть G_0 и G_1 будут две геодезические линии и две траектории, представленные соответственно кривыми C_0 и C_1.

Для того чтобы написать уравнение кривой C_1, мы возьмем специальную систему координат u, v и w следующим образом:

[1] См. «Новые методы небесной механики», т. I, II, III. — *Прим. ред.*

[2] См. «Новые методы небесной механики», т. I, гл. IV.

1) координаты некоторой точки рассматриваемой траектории или геодезической линии зависят только от u и v, тогда как направление касательной зависит одновременно от u, v и w;

2) уравнениями кривой C будут $v = w = 0$, а u изменяется от 0 до 2π при полном обходе замкнутой кривой C_0.

При этих условиях[1] мы увидим, что если кривая C_0 соответствует устойчивой траектории, то уравнения кривой C_1, весьма мало отличающейся от C_0, могут быть записаны в виде

$$\frac{v}{a} = \rho \sin(\theta + h), \quad \frac{w}{a} = \rho_1 \sin(\theta + h) + \rho_2 \cos(\theta + h),$$

где a и h являются постоянными интегрирования, причем первая из них очень мала; ρ, ρ_1, ρ_2 — периодические функции от u; θ — функция от u, *всегда возрастающая*, производная от которой является периодической. Можно будет записать, что

$$\theta = \alpha u + \varphi(u),$$

где $\varphi(u)$ — периодическая функция; тогда $i\alpha$ есть то, что называют характеристическим показателем.

Точки пересечения G_1 и G_0 можно получить, приравняв v нулю, что даст уравнение

$$\theta + h = K\pi,$$

где K — целое число. Если M является точкой пересечения G_0 и G_1, а M — следующей точкой пересечения, то M' называется первым кинетическим фокусом M, и тогда, если θ и θ' — соответствующие значения θ, получим

$$\theta - \theta' = \pi.$$

Напишем теперь уравнение нашей поверхности A в форме

$$F(u, v, w) = 0;$$

если мы разложим первый член по степеням v и w, то член нулевой степени будет равен нулю, так как поверхность A проходит через кривую C_0. Мы можем пренебречь членами порядка выше первого, так

[1] См. «Новые методы небесной механики» или мемуар «О геодезических линиях на выпуклых поверхностях». А. Пуанкаре, Избранные труды.

как мы должны придать v и w лишь весьма малые значения, и тогда останется
$$g\,v + g_1\,w = 0,$$
где g и g_1 — периодические функции u. Если мы заменим v и w их значениями, то получим
$$\rho\sin(\theta + h) + \rho_1\cos(\theta + h) = 0,$$
где ρ и ρ_1 — новые периодические функции от u. Если положим
$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \operatorname{tg}\lambda,$$
то λ будет функцией от u, производная которой является периодической и которая не может отличаться от периодической функции от и более, чем на число, кратное u, которое я обозначу $m\,u$, тогда наше уравнение примет вид
$$\sin\,(\theta + \lambda + h) = 0.$$
Итак, мы получим последовательные точки пересечения C_1 и A, написав, что этот синус равен нулю; аргумент синуса должен быть кратным π; но следует отметить, что поверхность A *ограничена* C_0 и не простирается вне этой кривой; следовательно, подходят только четные кратные, и надо написать, что
$$\theta + \lambda + b = 2\,v - \pi.$$
Если теперь P и P' будут двумя последовательными точками пересечения и θ, λ и θ', λ' — соответствующими значениями θ и λ, то получим
$$(\theta' + \lambda') - (\theta + \lambda) = 2\pi.$$
Следует заметить, что $\theta + \lambda$ — постоянно возрастающая функция от u; действительно, для очень малых v и w можно написать, что
$$F(u,\,v,\,w) = R\,\sin(\theta + \lambda + h),$$
где $R = \sqrt{\rho^2 + \rho_1^2}$ есть периодическая функция от u. Тогда пересечения C_1 с A можно получить, приравняв F нулю, а *соприкосновения* C_1 с A, записав, что
$$F = F' = 0,$$

где F' производная от F по u; это дает соотношения

$$F = R\sin(\theta+\lambda+h) = 0,$$
$$F' = R'\sin(\theta+\lambda+h) + R(\theta'+\lambda')\cos(\theta+\lambda+h) = 0.$$

Если бы имело место $\theta'+\lambda' = 0$, то можно было взять $h = \theta - \lambda$, и условия оказались бы выполненными. Однако это невозможно, так как поверхность A, по предположению, *без контакта.* Производная от $\theta+\lambda$ не может, следовательно, стать нулем, и $\theta+\lambda$ постоянно изменяется в одном и том же направлении; при этом всегда можно сделать так, чтобы было возрастание.

Функция $\dfrac{\theta+\lambda}{a+m}$ может быть названа *приведенным аргументом*, если несколько обобщить это понятие. Величина $a+m$ отличается от a лишь на целое число

$$m = \frac{\lambda(u+2\pi)-\lambda(u)}{2\pi},$$

которое для обоих выбранных примеров оказывается равным нулю. Приведенный аргумент после каждого полного оборота по C_0 возрастает на 2π, и так как это возрастающая функция от u, то ее можно использовать для определения положения точки на C_0; если P очень близко к C_0, то приведенный аргумент P отличается от приведенного аргумента своего преобразования P' на $\dfrac{2\pi}{\alpha+m}$.

Установив это, мы можем уподобить поверхность поверхности круга с точки зрения Analysis situs. Мы можем, следовательно, определить положение точки этой поверхности с помощью системы координат x и y, аналогичных полярным координатам, таким образом, чтобы уравнение кривой C_0 было

$$x = a$$

и чтобы на этой кривой y было равно приведенному аргументу. Наше преобразование T сохраняет, следовательно, кривую $x = a$ и оказывается таким, что

$$Y - y = \frac{2\pi}{\alpha+m} = \text{const}.$$

Теорема Кронекера учит нас в этом случае, что внутри A имеется *нечетное* число точек, не изменяемых преобразованием; каждой из этих точек соответствует периодическая траектория; по крайней мере, одна из этих траекторий устойчива.

Пусть P_0 будет соответствующей точкой; мы можем выбрать нашу координатную систему так, чтобы эта точка соответствовала полюсу

$$x = 0.$$

Преобразование T сохраняет, таким образом, не только окружность $x{=}a$, но также и внутреннюю граничную окружность $x = 0$, которая оказывается сведенной к точке.

Пусть C_0' — та замкнутая кривая C, которая проходит через P_0; введем систему координат u', v', w', которая будет для C_0' тем, чем для C_0 была система u, v, w. Предположим, кроме того, что в этой системе уравнением A будет $u' = 0$. Это сделать мы можем, но лишь при условии, что откажемся от первого предположения, сделанного по поводу u, v, w (а именно, что точка геодезической линии или траектории не меняется, меняется лишь направление касательной при условии изменения w, тогда как u и v остаются постоянными). Сказать по правде, это предположение не играет никакой существенной роли, и мы приняли его лишь с целью облегчить формулировку определения кинетических фокусов. При этих условиях уравнения некоторой кривой C, близкой к C_0', будут

$$\frac{v'}{a'} = \rho' \sin(\theta' + h'), \qquad \frac{w'}{a'} = \rho_1' \sin(\theta' + h') + \rho_2' \cos(\theta' + h'),$$

и мы получим

$$\theta' = \beta\, u' + \varphi'(u),$$

где φ' периодическая; $i\beta$ — характеристический показатель. Таким образом, при возрастании u' на 2π θ' возрастает на $2\pi\beta$. Мы можем выбрать координатную систему x, y таким образом, чтобы в непосредственной близости от P_0, т. е. при очень малом x, с достаточной точностью соблюдались соотношения

$$\frac{v'}{x} = \rho' \sin y, \qquad \frac{w'}{x} = \rho' \sin y + \rho_2' \cos y,$$

причем для ρ', ρ_1', ρ_2' берутся значения, которые они принимают при $u' = 0$.

Итак, когда u' увеличится на 2π, т. е. когда мы перейдем от точки P к точке p', $y = \theta' + h'$ возрастет на $2\beta\pi$, или, точнее (так как y определяется до кратного 2π), станет равным $2\pi(\beta + n)$, где n — целое число; тогда мы получим

$$Y - y = 2\pi(\beta + n).$$

Сперва может показаться, что целое число n является произвольным, в противоположность m, но если целиком обойти область A, то разность $Y - y$ должна меняться непрерывным образом, что и определяет n.

Установив это, рассмотрим преобразование T^p, т. е. p-ю степень преобразования T; такое преобразование сохраняет $x = a$ и $x = 0$, и оно допускает, как и T, ***положительный интегральный инвариант***, в соответствии с принципами, изложенными в моей книге «Новые методы небесной механики»; оно даст нам, с другой стороны, на линии $x = a$

$$Y - y = 2\pi \frac{p}{\alpha + m}$$

и при $x = 0$

$$Y - y = 2\pi\, p(\beta + n).$$

Оно существенно не будет отличаться от того, которое получается из него при замене Y на $Y + 2q\pi$, где q — целое число, так как Y определяется лишь с точностью до кратного 2π. Для этого нового преобразования получим на $x = a$

$$Y - y = 2\pi\Big(\frac{\alpha}{\alpha + m} + q\Big),$$

а при $x = 0$

$$Y - y = 2\pi[p(\beta + n) + q].$$

За вычетом того случая, когда

$$(\beta + n)(\alpha + m) = 1,$$

можно найти бесконечное число пар целых чисел p и q таких, что

$$\Big(\frac{p}{\alpha + m} + q\Big)[p(\beta + n) + q] < 0,$$

т. е.

$$\frac{1}{\alpha+m} > -\frac{q}{p} > \beta+n$$

или

$$\frac{1}{\alpha+m} < -\frac{q}{p} < \beta+n.$$

Итак, теорема будет применима, и окажутся по крайней мере две такие точки, которые не меняются при нашем преобразовании. Эти две точки дадут нам два периодических решения.

Так как p и q могут принимать бесконечно много значений, то мы получаем в результате *бесконечное число периодических решений* (что до сих пор было доказано лишь для малых значений масс).

Предположим, что для определенных значений данных задачи построены кривые C_0 и C_0', а также область A. Будем теперь менять данные задачи. C_0 будет меняться непрерывным образом; можно также менять непрерывным образом A, сохраняя притом ее существенные свойства, в частности, отсутствие контакта. Никаких препятствий мы при этом не встретим, пока будет существовать C_0. Итак, пока будут существовать C_0 и C_0', все то, что мы высказали, остается в силе. Периодические решения, соответствующие паре целых чисел p, q, смогут исчезнуть полностью лишь после слияния с C_0 или C_0', что происходит при

$$-\frac{q}{p} = \frac{1}{\alpha+m} \quad \text{или} \quad = \beta+n.$$

Это разъясняет взаимоотношения между периодическими решениями и может быть приложено также к исследованию периодических решений второго рода.

Я предвижу также, однако значительно менее ясным образом, что то же самое можно было бы использовать для того, чтобы показать, что периодические решения везде плотны.

Посмотрим теперь, что получается в тех двух частных примерах, рассмотренных нами выше, а сначала в том из них, в котором рассматриваются геодезические линии. Предположим, что поверхность очень мало отличается от сферы; мы видели в этом случае, что замкнутые геодезические линии без двойных точек[1] соответствуют максимумам, минимумам и минимаксам некоторой величины, являющейся не чем иным, как длиной большого астрономического круга.

[1] См. мемуар «О геодезических линиях на выпуклых поверхностях». А. Пуанкаре, Избранные труды.

Число этих максимумов равно $4n + 2$, где n — целое число. Однако если не считать различными две геодезические линии, совершенно идентичные, но пробегаемые в противоположных направлениях, то мы получим для геодезических линий нечетное число, равное $2n + 1$; именно так я поступал в указанном мемуаре. Здесь же, наоборот, две геодезические линии, отличающиеся лишь направлением пробегания, считаются двумя различными кривыми C. Число замкнутых кривых C, относящихся к этой категории, следовательно, четно; все они пересекают A в одной точке, за исключением C_0, ограничивающей A. Следовательно, число кривых C, пересекающих A, нечетно, как это и должно быть. При желании можно подобрать C'_0 таким образом, чтобы C_0 и C'_0 соответствовали двум геодезическим линиям, различающимся лишь по своему направлению.

Если поверхность S сводится к сфере, то кривая C_0 станет окружностью и в качестве A можно принять плоскую область, ограниченную этой окружностью.

В ограниченной проблеме будем исходить из случая, для которого возмущающая масса равна нулю: в таком случае для возмущенного тела будут иметь место две круговые орбиты, соответствующие уравнению Якоби (см. выше). Эти орбиты и соответствуют C_0 и C'_0.

§ 4. Определения и обозначения

После того как я объяснил ту роль, которую смогла бы сыграть исследуемая теорема, если бы она оказалась верной, я должен изложить соображения, которые побуждают меня верить в ее справедливость. Для этого я возьму теорему в ее второй форме; иными словами, буду предполагать, что преобразование T не оставляет неизменной ни одной точки, и постараюсь установить, что оно не допускает интегрального инварианта.

Для удобства я буду пользоваться двумя способами представления: иногда буду применять само круговое кольцо, так что x и y станут полярными координатами; это то, что я назову *круговым изображением*. Иногда же буду рассматривать x и y в качестве ортогональных координат, и предположу, вопреки обычаю, что ось x вертикальна, а ось y горизонтальна; я буду называть это *спрямленным изображением*. Нетрудно перейти от одного изображения ко второму: кривые $x = \text{const}$ являются окружностями при первом способе и горизонталями при втором; кривые $x = \text{const}$ будут радиусами-векторами при первом и вертикалями при втором.

Необходимо все же заметить, что одной точке кругового изображения соответствует бесконечное число точек спрямленного изображения $(x,\, y;\; x,\, y + 2\pi;\; x,\, y + 4\pi;\, \ldots)$.

Таким образом, мы будем различать кривые, замкнутые в широком и в узком смысле; первые являются замкнутыми на круговом изображении и не замкнуты на спрямленном; вторые являются замкнутыми на обоих изображениях.

Предполагается, что преобразование T всегда однозначно: координатами точки M будут x и y, а координатами преобразованной точки M' будут X и Y; координатами же преобразованной точки в случае обратного преобразования T^{-1} будут (X) и (Y).

Наше круговое кольцо ограничено двумя граничными окружностями

$$x = X = a, \quad x = X = b,$$

из которых первая внешняя, а вторая внутренняя; обе сохраняются при преобразовании.

Замечательные кривые, которые нам придется исследовать, следующие.

1) окружности (или горизонтали) $x = c$;

2) кривые $X = c$, преобразованиями которых являются кривые $x = c$; последние, как и первые, должны быть замкнутыми в узком смысле;

3) кривые $X = x$, причем две из этих кривых рассматриваются как различные, хотя они и имеют одно и то же уравнение, если от одной из них нельзя перейти к другой по непрерывному пути, удовлетворяющем тому же уравнению;

4) линии, преобразованные из них, $(X) = x$.

Если мы будем рассматривать три кривые $X = x$, $X = c$, $x = c$, то всякая точка, принадлежащая двум из них, будет принадлежать и третьей, и если две из них касаются между собой, то в той же точке их касается и третья.

На кривой $X = x$ не может существовать такой точки, в которой было бы $Y = y$, так как эта точка, в которой мы имели бы $X = x$, $Y = y$, была бы точкой, не изменяемой с помощью T, а мы предположили, что этого случиться не может. Итак, $Y - y$ сохраняет свой знак вдоль той же кривой $X = x$, что понуждает меня различать два вида кривых $X = x$: кривые *положительные и отрицательные*, в зависимости от того, положительна или отрицательна разность $Y - y$. По предположению разность $Y - y$ всегда положительна на одной из граничных окружностей и отрицательна на другой. Все кривые $X = x$, которые примыкают к одной из этих окружностей, следовательно, положительны; все же те, которые примыкают к другой, отрицательны, и ни одна кривая $X = x$ не может проходить от одной окружности к другой.

Итак, кривые $X = x$ делятся на три категории:

1. Открытые кривые, оба конца которых лежат на одной из граничных окружностей.

2. Замкнутые кривые в широком смысле.

3. Кривые, замкнутые в узком смысле.

Мы существенно не снизим общности, если предположим, что ни одна из этих кривых не имеет двойных точек.

Рассмотрим спрямленное изображение и на этом изображении те точки, в которых касательная к кривой $X = x$ горизонтальна; эти точки будем называть *основаниями* или *вершинами*, в зависимости от того, будет ли в них высота (измеряемая координатой X) максимумом или минимумом. Отрезок кривой $X = x$, заключенный между последовательно расположенными основанием и вершиной, на котором вследствие этого не находится ни другое основание, ни другая вершина, будет называться *ветвью* кривой $X = x$, и я всегда буду употреблять слово ветвь именно в этом смысле.

Если M точка кривой $X = x$, то преобразованная из нее точка M' будет иметь ту же высоту (это в точности то, что выражает уравнение $X = x$ и окажется на преобразованной кривой $(X) = x$, откуда вытекают следствия: каждое основание или каждая вершина $X = x$ преобразовывается в основание или в вершину $(X) = x$, которые имеют ту же высоту; всякая ветвь $X = x$, пробегаемая, например, вверх, будет иметь в качестве преобразованной ветвь $(X) = x$, пробегаемую также вверх.

Если ветвь $X = x$ положительна, то преобразованная из нее $(X) = x$ не сможет пересечь ее и полностью находится справа (все время на спрямленном изображении); ее также можно назвать положительной. Наоборот, она целиком находится слева, если кривая $X = x$ отрицательна.

§ 5. Пересечение двух замкнутых кривых

Рассмотрим окружность $x = c$ и ее обратное преобразование $X = c$, которое также является кривой, замкнутой в широком смысле. Эти две кривые допускают на круговом изображении четное число m точек пересечения, однако эти точки на ортогональном изображении будут представлены бесконечным числом точек. Начнем с того, что перенумеруем эти точки пересечения, следуя по кривой $X = c$ в направлении возрастающих Y. Если мы пройдем затем $x = c$ в направлении возрастающих Y, то встретим все эти точки пересечения, однако, в общем случае, в ином порядке. В том случае, когда они следуют друг за другом в точном соответствии с порядком своих номеров, мы будем называть их распределение *нормальным.*

Мы уже отметили, что число m действительно различных точек пересечения всегда четно; проходя $x = c$ от $y = y_0$ до $y - y_0 + 2\pi$, мы последовательно встретим перенумерованные точки

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m. \tag{1}$$

Ряд (1) определяет способ распределения точек пересечения; очевидно, его можно заменить следующим рядом:

$$\alpha_1 + m, \alpha_2 + m, \ldots, \alpha_m + m,$$

являющимся рядом номеров точек, встречающихся при пробегании $x = c$ от $y = y_0 + 2\pi$ до $y = y_0 + 4\pi$. Если распределение нормально, то числа ряда (1) — m последовательных целых чисел. Во всех случаях эти числа попеременно четны и нечетны.

Дугу линии $X = c$, заключенную между двумя из этих точек пересечения, будем называть *элементарной*, если она не пересекает линии $x = c$ (хотя оба ее конца, конечно, находятся на этой линии). Элементарные дуги будут *внешними* или *внутренними*, в зависимости от того, располагаются ли они на круговом изображении снаружи или внутри окружности $x = c$. Можно предположить, что *два конца внешней элементарной дуги всегда имеют номера* $2n - 1$ и $2n$, а концы внутренней элементарной дуги — номера $2n$ и $2n + 1$.

Элементарная дуга будет *прямой*, если ее конец более высокого номера находится на спрямленном изображении справа от другого конца; она будет *обратной* в противоположном случае; иными словами, если дуга прямая, то Y и y изменяются в одну и ту же сторону при переходе от одного конца к другому.

Кривая $X = c$, полученная обратным преобразованием из кривой $x = c$, не имеющей двойных точек, также не содержит двойных точек. Отсюда следует, что две ее элементарные дуги не могут пересечься; это можно было бы выразить так: если A, B и C, D — концы двух внешних элементарных дуг (или двух внутренних элементарных дуг), то два отрезка AB и CD (взятые на горизонтали $x = c$ в спрямленном изображении), могут наложиться один на другой, иначе говоря, точки C и D обе являются внешними или обе внутренними по отношению к интервалу AB.

Это условие можно было бы высказать и иначе. Рассмотрим ряд (1) и дополним его, добавив к нему число $\alpha_1 + m$, так чтобы получилось нечто вроде замкнутого круга (напомним, что перенумерованные точки α_1 и $\alpha_1 + m$ идентичны, если не на спрямленном, то во всяком случае на круговом изображении). В ряде, дополненном таким образом, я смогу выделить $m/2$ пар по два последовательных числа в каждой, из которых первое четно, а второе нечетно. Если мы будем рассматривать некоторые из этих пар, то следовательно, необходимо, чтобы два числа одной пары были заключены между двумя числами другой, или же чтобы между последними не попадало ни одно, ни другое. (Одна из этих пар не может быть, например, равной 14, а вторая 52.) Подобно этому, в составе нашего ряда имеется $m/2$ пар, по два последовательных числа в каждом, из которых первое четно, а второе нечетно. То же самое условие должно выполняться для любых двух из этих пар.

Итак, мы ознакомились с двумя формулировками необходимых и достаточных условий *возможности* ряда (1). Обе эти формулировки эквивалентны, и они применимы к пересечению двух произвольных замкнутых кривых без двойной точки. В первой формулировке рассматриваются две замкнутые кривые (в широком смысле) $X = c$ и $x = c$, и предполагается, что $X = c$ разложено на элементарные дуги. Во второй формулировке выполняются роли обеих кривых и на элементарные дуги раскладывается кривая $x = c$.

Рассмотрим две внешние элементарные дуги AB и CD. Если два конца C и D лежат на отрезке AB горизонтали $x = c$ при спрямленном изображении, так что дуга CD полностью заключена в пределах области, ограниченной дугой AB и ее хордой, то мы будем говорить, что CD *перекрывается* AB. То же самое определение приложимо, очевидно, и к внутренним дугам.

Элементарная дуга называется *первичной*, если она не перекрывается никакой другой, и *последней*, если она не перекрывает никакую другую. Дуга CD *непосредственно* перекрыта дугой AB, если не существует никакой элементарной дуги, которая перекрыла бы CD и сама была не перекрыта AB.

Из этих определений легко можно вывести следующие предложения:

1. Если две дуги перекрываются непосредственно, то одна из них является прямой, а вторая — обратной.

2. Каждая первичная дуга — прямая.

3. Если распределение нормально, то все дуги одновременно и *первичные* и *последние*.

4. Продолжим бесконечно ряд (1), добавляя к нему точки, которые получатся при замене α_i на $\alpha_i + k\,m$, где k — целое положительное или отрицательное число; иначе, что сводится к тому же, образуем продолженный ряд (1), записав номера всех точек, которые последовательно встретятся нам при пробегании горизонтали от $y = -\infty$ до $y = +\infty$.

Если в этом продолженном ряде рассмотрим числа, соответствующие концам внешних первичных дуг, то эти номера будут следовать в порядке возрастания.

5. Разность номеров двух концов некоторой первичной дуги (и, тем более, произвольной дуги) не может превышать $m - 1$.

Рангом точки пересечения назовем, по определению, место, которое занимает ее номер в ряде (1). Последнюю дугу характеризует то, что ранги обоих ее концов последовательные числа, равно как и их номера. Что же касается нормального распределения, то оно характеризуется тем, что ранги следуют в том же порядке, что и номера, и что всегда можно устроить так, чтобы ранг некоторой точки стал равным ее номеру.

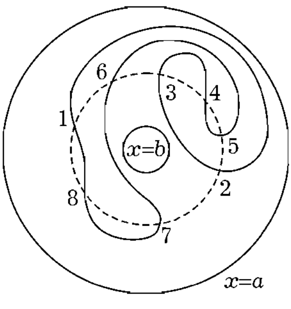


Рис. 1

Можно лучше разобраться в изложенном, если рассмотреть рис. 1; для него было использовано круговое изображение. Две граничные окружности $x = a$ и $x = b$ представлены сплошными линиями, то же сделано и для кривой $X = c$; что касается окружности $x = c$, то она изображена пунктирной линией; внешние элементарные дуги будут

12, 34, 56 и 78, а внутренние элементарные дуги — 23, 45, 67, 81; дуги 12, 78, 67, 23 являются первичными, дуги 34, 78, 45, 81 — последними; дуга 34 перекрыта дугой 56, а дуга 56 перекрыта дугой 12.

§ 6. Нумерация ветвей

Рассмотрим на спрямленном изображении различные *ветви* $X = x$; сопоставим каждой ветви (A) число $n(A)$, соблюдая при этом следующее условие.

Если горизонталь $x = c$ пересекает две ветви (A) и (B) и если ее пересечение с (A) будет слева от ее пересечения с (B), то должно быть

$$n(A) < n(B).$$

Нетрудно показать, что это условие не вносит никакого противоречия и что можно подобрать числа $n(A)$ таким образом, чтобы одновременно удовлетворялись все эти неравенства. Число $n(A)$ будет называться *рангом* ветви (A). Можно выбрать эти числа так, чтобы они представили всю последовательность целых чисел, начиная от $-\infty$ вплоть до $+\infty$, причем без какого-либо *пропуска*; если бы пропуски существовали, то для их заполнения было бы достаточно «сомкнуть ряды».

На спрямленном изображении число ветвей бесконечно, и ранги следуют от $-\infty$ до $+\infty$, но эти ветви соответствуют лишь конечному числу ветвей на круговом изображении, так как каждой точке кругового изображения соответствует бесконечное число точек спрямленного. Итак, достаточно представить себе часть спрямленного изображения, заключенную между $y = y_0$ и $y = y_0 + 2\pi$ и содержащую лишь конечное число ветвей, так как спрямленное изображение при возрастании y на 2π воспроизводится периодически.

Аналогично определяется и ранг ветвей $(X) = x$. *Номером* ветви $X = x$ будет ранг ветви $(X) = x$, являющейся преобразованием первой; *номером* ветви $(X) = x$ будет ранг ветви $X = x$, являющейся ее обратным преобразованием.

Нетрудно дать себе отчет в том, как такая нумерация ветвей $X = x$ связана с нумерацией пересечений $X = c$ и $x = c$, изученной в предыдущем параграфе.

Рассмотрим окружность $x = c$, представленную на спрямленном изображении горизонталью; ее пересечения с $X = c$ будут находиться на одной из ветвей $X = x$.

Горизонталь $x = c$ не встретится со всеми ветвями $X = x$, но все ее точки пересечения с одной из этих ветвей будут находиться на $X = x$; номера и ранги ее точек пересечения с $X = c$ следуют в том же порядке, что и номера и ранги соответствующих ветвей $X = x$. Но в то время, как последовательность номеров (или последовательность рангов) точек пересечения $X = c$ и $x = c$ не имеет пропусков, последовательность номеров (или последовательность рангов) соответствующих ветвей $X = x$ может их иметь, так как $x = c$ не пересекает всех этих ветвей. Для того, чтобы перейти от второй последовательности к первой, достаточно «сомкнуть ряды». Следует заметить, что, «смыкая ряды», мы не меняем четности номеров (а равно и рангов).

Условимся говорить, что номера (или ранги) двух ветвей являются *последовательными на уровне данной горизонтали* $x = c$, если эта горизонталь не пересекает никакой ветви, номера (или ранги) которой заключены между номерами (или рангами) этих двух ветвей.

В соответствии со всеми этими соглашениями, номер ветви $X = x$, и ранг и номер соответствующей точки пересечения между $X = c$ и $x = c$ будут всегда одинаковой четности.

Кривые $X = x$ делят круговое кольцо (или его спрямленное изображение) на области; в одних имеем $X > x$, а в других $X < x$. Из соглашения настоящего и предыдущего параграфов вытекает, что *области $X > x$ ограничены слева ветвями четного номера, а справа — ветвями нечетного номера.* Для областей $X < x$ имеет место противоположное.

Рассмотрим основание (или вершину), в котором сходятся две ветви. Пусть α_0 и β_0 — номер и ранг левой ветви, α_1 и β_1 — номер и ранг правой ветви; два номера α_0 и α_1, так же как и два ранга β_0 и β_1, должны быть *последовательными на уровне этого основания* (или этой вершины). Будем говорить, что это основание (соответственно, вершина) нечетно, если α_0 нечетное, и *четно* при четном α_0.

Будем говорить, что основание (вершина) является *прямым* при $\alpha_0 < \alpha_1$ и *обратным* при $\alpha_0 > \alpha_1$.

§ 7. Запрещенные области

Рассмотрим на спрямленном изображении две кривые $x = c$ и $X = c$ и различные области, определяемые ими. Будем различать *дозволенные области*, в которых знак $X - c$ тот же, что и знак $x - c$, и области запрещенные, в которых оба знака различны и в которые, следовательно, не могут проникнуть кривые $X = x$. Область, заключенная между элементарной дугой HK кривой $X = c$, и дугами, перекрываемыми ею (в смысле § 5), является дозволенной, если HK — обратна, и запрещенной при прямой HK.

Установив это, возьмем какую-либо вершину S' на какой-либо кривой $X = x$; пусть $x = c$ будет горизонталь, расположенная под этой вершиной и пересекающая $X = x$ в точках A и B, очень близких к этой вершине. Пусть AMB — элементарная дуга кривой $X = c$, которая идет от A к B, и R — область, заключенная между этой дугой и горизонталью AB. Если эта дуга является обратной (т. е., если обратная вершина S), то область R дозволенная, а сопредельные области запрещенные, так что дуга ASB кривой $X = x$ должна пересечь эту область, которая таким образом оказывается разделенной на две частичные области $AMBS$ и $ASBA$.

В первой области мы будем иметь $x > X > c$, а во второй $X > x > c$; следовательно, ветвь AS, ограничивающая слева область $X > x$, имеет четный номер, иначе говоря, вершина S является четной. ***Итак, не может быть нечетных обратных вершин, и, как видим, не может быть также четных обратных оснований.***

С другой стороны, нетрудно обнаружить, что *самая высокая вершина любой кривой* $X = x$ *всегда прямая*; то же самое можно сказать и относительно самого низкого основания.

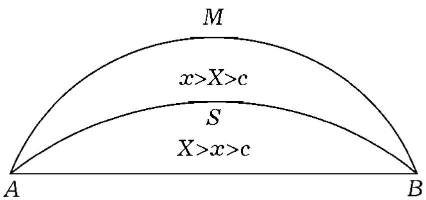


Рис. 2

Пусть, в самом деле, R — область, охваченная кривой $X = x$, если эта кривая замкнута в узком смысле, или же заключенная между этой кривой и горизонталью $x = b$ (соответствующей на круговом изображении внутренней граничной окружности). Пусть R' преобразовано из R, пусть S – наиболее высокая вершина нашей кривой; преобразованная из нее S' будет самой высокой вершиной кривой $(X) = x$, которая ограничивает R'. Пусть M — точка, описывающая контур области R, причем область остается справа; преобразованная из нее M' опишет контур R', также оставляя эту область справа; когда M попадет в S, она будет двигаться слева направо, так как S является наиболее высокой точкой контура R; в это же мгновение M' попадет в S' и, в силу тех же соображений, будет двигаться слева направо. Сказать, что эти две точки движутся в одном и том же направлении, означает, что вершина является прямой. Это и требовалось доказать.

§ 8. Условия возможности

Итак, преобразование T характеризуется следующими данными, которые нетрудно распознать на спрямленном изображении.

1. *Формой* кривых $X = x$, числом и расположением ветвей каждой из них, относительной высотой различных вершин или оснований. Когда задаются формой кривых, *ранг* каждой ветви оказывается определенным, так как он зависит только от относительного геометрического положения ветвей.

2. *Номером* каждой ветви.

3. *Знаками* каждой из кривых $X = x$, которые могут быть положительными или отрицательными в смысле § 4.

Эти данные, однако, нельзя выбрать произвольно: они должны удовлетворять некоторым условиям, которые я и перечислю.

1. Предположим, что кривые $X = x$ пересечены произвольной горизонталью $x = c$. Эта горизонталь не пересечет всех ветвей кривых; но если мы выпишем номера ветвей, пересекаемых ею, в том порядке, в котором она встречается с ними, или, что то же самое, в порядке рангов, то получим бесконечную последовательность.

Каждой из пересеченных ветвей соответствует одна из точек пересечения $X = c$ и $x = c$; номер этой ветви вообще не равен номеру этой точки пересечения, так как ряд номеров имеет пропуски, соответствующие ветвям, не пересеченным кривой $x = c$, в то время как ряд номеров точек пересечения таких пропусков не имеет. Однако эти два ряда номеров следуют друг за другом в одном и том же порядке (таким образом, что можно перейти от одного к другому, «смыкая ряды»). Итак, первый из этих рядов, так же как и второй, должен удовлетворять условию § 5, которое можно сформулировать следующим образом.

Рассмотрим ряд номеров, которые попеременно четны и нечетны; отметим в нем две пары последовательных номеров, таких, что в каждой из них первый номер будет четным, а второй — нечетным. Эти две пары не должны *налагаться* одна на другую в смысле § 5; то же самое должно иметь место и для двух пар последовательных номеров, в которых первый номер нечетный, а второй четный.

2. Номера и ранги двух ветвей, которые сходятся в какой-либо вершине или в каком-либо основании, должны быть *последовательными* на уровне этой вершины или этого основания, в смысле § 6.

3. Не должны встречаться ни *четное обратное основание, ни нечетная обратная вершина.*

4. Вблизи граничных горизонталей $x = a$ и $x = b$ номера различных ветвей должны следовать друг за другом в том же порядке, что и их ранги. И действительно, $X = a$, например, совпадает с $x = a$. Итак, если c близко к a, то $X = c$ будет мало отличаться от $x = c$, и при этом любая касательная к $X = c$ будет всегда составлять весьма малый угол с горизонталью $x = c$, а когда две замкнутые кривые мало удаляются друг от друга, распределение их точек пересечения будет нормальным в смысле § 5.

5. Две ветви, принадлежащие одной и той же кривой, и, в частности, две ветви, попадающие в одну и ту же вершину или в одно и то же основание, должны быть *одинакового знака.*

6. Мы видели, что если одна ветвь $X = x$ положительна, то преобразованная из нее $(X) = x$ должна располагаться справа от нее. Итак, пусть даны ветви A и B кривой $X = x$; предположим, что они «обратны», т. е., что номер A *больше* номера B, а ранг A *меньше* ранга B, и что они, кроме того, имеют *противоположные знаки.* Тогда необходимо, чтобы A было положительным, а B отрицательным. Не может случиться, чтобы A оказалось отрицательным, а B положительным; если бы это имело место, A оказалась бы справа от своей преобразованной A', а B — слева от своей преобразованной B'; но этого не может случиться: A слева от B, так как ее ранг меньше, а A' справа от B', так как номер A больше.

§ 9. Положительные и отрицательные дуги

Для того чтобы продолжить рассуждения, я введу новое понятие. Рассмотрим замкнутый контур C, пробегаемый в определенном направлении движущейся точкой P, и точку M; *коэффициентом* контура C будет число m, если угол вектора MP с фиксированным направлением увеличивается на $2m\pi$, когда точка P описывает целиком контур C. Углы отсчитываются в направлении, противоположном принятому в тригонометрии. Контур будет *положительным*, если его коэффициент по отношению к произвольной точке плоскости всегда положителен или нуль; он будет называться *отрицательным*, если этот коэффициент всегда отрицателен или нуль; он будет *определенным*, если окажется или положительным, или отрицательным.

Пусть $ABCDA$ и $ECBFE$ — два замкнутых контура. Можно объединить их, исключая общие части BC и CB, которые в обоих составляющих контурах пробегались в противоположных направлениях; в результате этого получится контур $ABFECDA$. Можно записать

$$ABCDA + ECBFE = ABFECDA$$

или

$$ABCDA = ABFECDA - ECBFE.$$

Так мы определим *сумму* или *разность* двух контуров; подобно этому, можно было бы определить сумму и разность и нескольких контуров. Очевидно, что если один контур является суммой нескольких других, то его коэффициент по отношению к произвольной точке M равен сумме коэффициентов составляющих контуров.

Определим теперь знак дуги $X = x$ или дуги $X = c$. Дуга $X = x$ *положительна*, если она принадлежит положительной ветви, *пробегаемой с подъемом*, или отрицательной ветви, пробегаемой со спуском; она *отрицательна*, если принадлежит отрицательной ветви, пробегаемой с подъемом, или положительной ветви, пробегаемой со спуском. Слово «положительная» не имеет, следовательно, одного и того же смысла в рассуждениях о ветви и о дуге, так как в случае ветви (ср. § 4) знак не зависит от направления движения.

Пусть AB — положительная дуга, принадлежащая положительной ветви $X = x$, пробегаемой с подъемом, как это показано стрелкой на рис. 3. Преобразованная из нее дуга $A'B'$, следовательно, находится справа от нее; замкнем контур $ABB'A'A$, проведя горизонтали BB' и $A'A$ (это — горизонтали спрямленного изображения, уравнение которых есть $x = \text{const}$). Очевидно, что определенный таким образом контур *положителен*, что и оправдывает название положительной дуги.

Можно обобщить это и ввести понятие дуг $X = x$, *компенсированно* положительных или отрицательных.

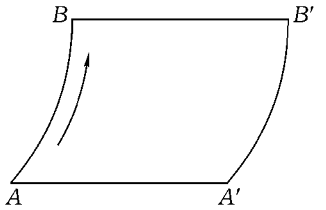


Рис. 3

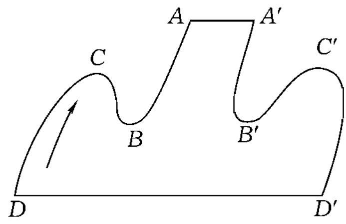


Рис. 4

Пусть дана дуга $DCBA$, принадлежащая положительной кривой $X = x$, и пусть на этой дуге имеем *обратную* вершину C и *обратное* основание B, причем так, что A находится над D, тогда как C и B расположены на промежуточной высоте; дуга эта пробегается в направлении, показанном стрелкой. Тогда можно построить преобразованную дугу $D'C'B'A'$, которая расположена так, как показано на рис. 4, и замкнуть обе дуги горизонталями AA' и $D'D$. Ясно, что контур $DCBAA'B'C'D'D$ положителен, и дугу $DCBA$ мы назовем *компенсированно положительной*. Ниже мы все же не будем пользоваться компенсированно положительными дугами.

Перейдем теперь к дугам $X = c$. Пусть AMB — одна из этих дуг, пробегаемая в направлении AMB.

Рассмотрим на спрямленном изображении хорду BA этой дуги, которая принадлежит горизонтали $x = c$, если, как мы это предполагаем, концы A и B будут точками пересечения $X = c$ и $x = c$. Рассмотрим контур $AMBA$, образованный этой дугой и ее хордой. Дугу мы назовем *определенной, положительной* или *отрицательной*, в зависимости от того, определенным, положительным или отрицательным является сам контур.

Элементарные дуги всегда являются определенными; знак дуги AMB тот же, что и знак произведения $\alpha\beta\gamma$, где:

$\alpha = +1$, если номер и ранг A нечетные, и $\alpha = -1$, если они — четные;

$\beta = +1$, если ранг A меньше ранга B, и $\beta = -1$ в противоположном случае;

$\gamma = +1$, если номер A меньше номера B, и $\gamma = -1$ в противоположном случае; действительно, дуга AMB пробегается слева направо, если $\beta = +1$; она находит над своей хордой тогда, когда $\alpha\gamma = +1$.

В качестве второго примера рассмотрим случай дуги AMB, причем ранги A и B будут последовательными на рассматриваемом уровне; подобная дуга всегда является *определенной*; знак ее опять-таки совпадает со знаком произведения $\alpha\,\beta\,\gamma$.

§ 10. Контур C

Представим себе некоторый контур C, замкнутый в широком смысле и образованный исключительно дугами $X = x$ и дугами $X = c$, причем дуги или *все положительны*, или *все отрицательны*; направление, в котором пробегается контур C, задано. Пусть C' — контур, преобразованный из C; он составлен из дуг $(X) = x$ и дуг $x = c$.

Я утверждаю, что для того, чтобы установить теорему, являющуюся предметом настоящего мемуара, достаточно установить существование этого контура C.

Для этого я постараюсь определить индексы контура $C - C'$ относительно некоторой точки плоскости, но воспользуюсь круговым изображением, чтобы контуры C и C' были замкнутыми.

Итак, пусть

$$A_1\,B_1\,M\,A_2\,B_2\,M_2\ldots A_n\,B_n\,M_n\,A_1$$

— контур C, и

$$A_1'\,B_1'\,M_1'\ldots M_n'\,A_1'$$

— преобразованный из него контур C'; дуги A_iB_i будут дугами $X = x$, и для определенности рассуждения пусть все они *положительны*; дуги $B_iM_iA_{i+1}$ будут дугами $X = \text{const}$, и все они также положительны; дуги $A_i'B_i'$ будут дугами $(X) = x$, а дуги $B_i'M_i'A_{i+1}'$ дугами $x = c$. Точки A_i, и A_i' (или же B_i, и B_i') находятся на одной и той же высоте на спрямленном изображении, так что мы можем начертить дуги A_iA_i' и B_iB_i', которые будут дугами $x = c$, т. е. горизонталями при спрямленном изображении и окружностями при круговом изображении. Тогда получим

$$\begin{gathered}C - C' = A_1\,B_1\,B_1'\,A_1'\,A_1 + B_1\,M_1\,A_2\,A_2'\,M_1'\,B_1'\,B_1 + A_2\,B_2\,B_2'\,A_2'\,A_2 + \\ +B_2\,M_2\,A_3\,A_3'\,M_2'\,B_2'\,B_2 + \ldots + B_n\,M_n\,A_1\,A_1'\,M_n'B_n'B_n.\end{gathered}$$

Действительно, если мы рассмотрим различные слагаемые в правой части, то увидим, что дуга $B_1\,B_1'$ первого уничтожается дугой $B_1'\,B_1$

второго, а дуга $A_2\,A_1'$ второго уничтожается дугой $A_2'\,A_2$ третьего и т. д. и, в конце концов, дуга $A_1\,A_1'$ последнего уничтожается дугой $A_i'\,A_i$ первого.

Контур $A_1\,B_1\,B_1'\,A_1$ аналогичен (если возвратиться к спрямленному изображению) контуру фигуры; контур $B_1\,M_1\,A_2\,A_2'\,M_1'\,B_1'\,B_1$ образован дугой $B_1\,M_1\,A_2$ и ее хордой (опять-таки на спрямленном изображении) и т. д. *Все эти контуры положительны*, так как дуги $A_1\,B_1$, $B_1\,M_1\,M_2, \ldots$ положительны.

Итак, контур $C - C'$ положителен. Я утверждаю: это доказывает, что *здесь не может быть положительного интегрального инварианта.* Действительно, пусть I — подобный инвариант. Пусть $I(R)$ будет тем, что дает этот инвариант, когда интегрирование распространено на область R.

Контуры C и C' разделят плоскость (на круговом изображении) на некоторое число областей R_i; положим,

$$I(C) = \sum N_k\,I\,(R_k), \quad I(C') = \sum N_k'\,I\,(R_k),$$

где N_k — индекс контура C и N_k' — индекс контура C' относительно произвольной точки области R_k (ясно, что эти индексы будут одинаковыми для двух точек, принадлежащих одной и той же области R_k). Так как I является инвариантом, то должно иметь место равенство

$$I(C) = I(C').$$

С другой стороны, так как контур $C - C'$ положителен, то

$$N_k \geqslant N_k',$$

причем знак равенства не может иметь места для всех областей, ибо наши два контура не совпадают; с другой стороны, поскольку инвариант положителен, то отсюда

$$I(R_k) > 0$$

и, следовательно,

$$I(C) > I(C'),$$

что противоречиво.

Если, в частности, контур C не имеет двойной точки (на круговом изображении), то он не сможет пересечь преобразованного контура C', так что один из этих контуров будет находиться целиком внутри другого; это справедливо для большинства примеров, которые мы рассмотрим ниже.

Кроме контуров C и C', мы рассмотрим другие контуры C'' и C''', определенные следующим образом. Контур C'' выводится из контура C заменой в нем каждой из дуг $X = c$ ее хордой (на спрямленном изображении); контур же C'' будет преобразованным из него, так что

C	образуется из дуг	$X = x$	и из дуг	$X = c$,
C'	»	$(X) = x$	»	$x = c$,
C''	»	$(X) = x$	»	$x = c$,
C'''	»	$(X) = x$	»	$(X) = c$.

Итак, контуры C''' и C'' являются относительно обратного преобразования T^{-1} тем же, чем C и C' относительно T. Действительно, от одного случая к другому можно перейти, заставив (X) играть роль X, и наоборот.

Я утверждаю теперь, что если дуги, из которых образован C, имеют один и тот же знак, например, если все они положительны, то те, которые образуют C''', будут также одного знака, я хочу сказать, что они все будут отрицательными.

Если A является одной из дуг C, принадлежащей, например, кривой $X = x$, положительной и пробегаемой вверх, то преобразованная из нее дуга A' будет входить в состав C''', причем пробегается также вверх. Однако, относительно T^{-1} она будет принадлежать к отрицательной кривой $(X) = x$, действительно, если A', преобразованная из A с помощью T, находится справа от A, то A, преобразованная из A' с помощью T^{-1}, будет находиться слева от A'.

Пусть теперь AMB — дуга $X = c$, составляющая часть C, а AB — ее хорда, являющаяся частью C''. Пусть затем $A'M'B'$ и $A'B'$ дуги, преобразованные из первых, и соответственно являющиеся частями C' и C'''. Тогда AB и $A'M'B'$ составят часть кривой $x = c$, а $A'B'$ — часть кривой $(X) = c$, так что на спрямленном изображении AB окажется хордой AMB, тогда как $A'M'B'$ станет хордой $A'B'$. Если затем контур $AMBA$, образованный AMB и ее хордой, положителен, то положительным будет и преобразованный из него контур $A'M'B'A'$, а обратный контур $A'B'M'A'$, образованный дугой $A'B'$ и ее хордой, будет отрицательным. Это и следовало доказать.

Таким образом, очевидно, что если $C - C'$ является положительным, то то же самое будет и с $C' - C'''$; следовательно, безразлично, рассматривать ли C, C' и T или же C''', C'' и T^{-1}.

§ 11. Сеть

Представим себе сеть, построенную следующим образом: возьмем круговое изображение, начертим, кроме граничных окружностей, окружности $x = c$, которые касаются (либо в вершине, либо в основании) кривой $X = x$. Каждая из этих окружностей пересечет различные кривые $X = x$ и коснется одной из них. Каждой из точек пересечения или касания будет соответствовать *узел* сети. Соединим эти узлы путями, соответствующими определенным дугам, о которых шла речь в § 9. Рассмотрим, например, одну из окружностей $x = c$, которые мы начертили; вычертим пути, соответствующие всем положительным и отрицательным дугам соответствующей кривой $X = c$. (Итак, мы получим пути, соответствующие всем элементарным дугам этой кривой, которые, как мы уже сказали, все являются определенными; среди них будут пути, соответствующие всем дугам этой кривой, концы которых имеют последовательные номера на рассматриваемом уровне; но будут еще и другие пути, так как вообще есть и другие определенные дуги.) Это будут *горизонтальные* пути сети. Мы соединим, сверх того, узлы $x = c$ с узлами на окружности непосредственно внешней или непосредственно внутренней с помощью *наклонных путей*. Эти последние будут соответствовать определенным дугам кривых $X = x$, один из концов которых будет находиться в одном из таких узлов.

Условимся, что ни один из этих путей нельзя пробегать в двух направлениях, иначе говоря: или все направления путей соответствуют положительной дуге, или же *все* они пробегаются в противоположном направлении. Вот как мы проведем выбор между этими двумя соглашениями: ветви $X = x$, которые примыкают к внешней граничной окружности $x = a$, имеют один и тот же знак (ср. § 3), тогда как те, которые примыкают к $x = b$, имеют противоположный знак. Если все первые положительны, то мы условимся, что все пути должны пробегаться в направлении положительных дуг; в противоположном случае будет иметь место обратное.

Итак, всякий наклонный путь, примыкающий к $x = b$ (который соответствует при спрямленном изображении самому низкому уровню, а при круговом изображении — внутренней граничной окружности), должен пробегаться вверх; всякий наклонный путь, примыкающий к $x = a$, пробегается вниз.

Для того чтобы наша теорема оказалась справедливой, т. е. для того чтобы существовал контур C, *достаточно, чтобы можно было вернуться к исходной точке, пройдя пути сети в предписанном направлении.*

Отсюда вытекает следующее правило: назовем *тупиком* любой узел сети, к которому сходятся некоторые пути, но *из которого не выходит ни один путь.* Исключим из нашей сети все тупики, а также все пути, попадающие в них. Может случиться, что измененная таким образом сеть будет содержать тупики, которые не принадлежали к первоначальной сети. Мы будем оперировать с этими *индуцированными* тупиками так, как с *первичными*, и продолжим наше оперирование, пока не вынуждены будем остановиться, что может произойти в двух случаях.

1. Может оказаться, что мы вынуждены остановиться, ибо придем к модифицированной сети, которая более не будет содержать тупиков, ни индуцированных, ни первичных. В этом случае наша теорема будет доказана для рассмотренного преобразования T. Действительно, будем исходить из какого-либо узла: это возможно, так как это не тупик; мы прибудем ко второму узлу, откуда опять-таки сможем выйти. Будем продолжать таким образом до тех пор, пока не вернемся к узлу, через который мы уже проходили, что должно произойти, так как число узлов конечное. Таким образом, мы опишем замкнутый контур, пробегая все пути в соответствии с предписанным направлением, и этот контур будет контуром C.

2. Может случиться, что мы остановимся, так как исчерпаем все узлы. Тогда можно было бы доказать, что существуют такие преобразования T, для которых наша теорема не справедлива.

Итак, мы должны действовать следующим образом: необходимо построить всеми возможными способами кривые $X = x$, *соблюдая* при этом *условия* § 8; затем мы построим сеть, определенную выше, и будем действовать с нею описанным порядком. Если в любом случае мы вынуждены будем остановиться в соответствии с первым случаем, то наша теорема справедлива; но даже одно-единственное исключение достаточно для доказательства ее неверности.

§ 12. Частные случаи

Первый частный случай. Первый частный случай, который нам предстоит рассмотреть, это случай *нормального распределения*, т. е. тот, когда точки пересечения каждой из кривых $x = c$ с *соответствующей* кривой $X = c$ распределены нормальным образом в смысле § 4. Иначе, что сводится к тому же, этот тот случай, когда номер каждой ветви равен ее рангу (и когда, следовательно, нет ни обратного основания, ни обратной вершины).

В этом случае я утверждаю, что наша сеть не содержит тупика и что, следовательно, можно построить контур C. Действительно, если мы рассмотрим кривую $X = c$, то эта кривая не будет содержать никакой определенной дуги, кроме элементарных дуг, которые одновременно будут первичными и конечными и которые попеременно будут положительными и отрицательными (если договориться пробегать $X = c$ в направлении возрастающих Y). Исключение будет, когда кривая $x = c$ *коснется* кривой $X = c$ и, следовательно, кривой $X = x$ в основании или в вершине. Действительно, в этом случае две из точек пересечения сольются, элементарная дуга, соединявшая одну и другую, исчезнет, так что мы получим две последовательные дуги одного и того же знака. Это значит, что из двух горизонтальных путей, которые заканчиваются в основании или в вершине, один удаляется от такой точки, а второй приближается к ней.

Итак, здесь не может быть тупика в узле, не являющемся ни основанием, ни вершиной, так как один из двух наклонных путей, которые там заканчиваются, удаляется; однако его не может быть также в основании или в вершине, так как один из двух горизонтальных путей, которые там заканчиваются, удаляется.

Второй частный случай. Предположим, что у нас есть лишь два вида кривых $X = x$: кривые L, примыкающие к внешней окружности $x = a$, и кривые K, примыкающие к $x = b$.

Предположим, что, пробегая кривые L от одного конца до другого. мы встретим ветви постоянно возрастающего ранга, и что так же обстоит дело при пробегании кривых K. (Это случится, в частности, если мы предположим, что ни в одной точке кривых L и K касательная, при спрямленном изображении, не будет вертикальна.)

Установив это, мы сможем построить контур C' следующим образом: пусть L' и K' преобразования кривых L и K; при пробегании кривой L слева направо (на спрямленном изображении), все ветви, пробегаемые вниз, будут, например, четными (т. е. четного номера или ранга), а все те, которые будут пробегаться вверх, окажутся нечетными; для кривых K все будет наоборот.

Кривые L смогут иметь лишь четные основания и нечетные вершины, следовательно, у них не будет ни обратного основания, ни обратной вершины, т. е. здесь номера следуют в том же порядке, что и ранги. Если, наоборот, окажется, что на кривых L нисходящие ветви нечетны, а на кривых K они окажутся четными, то в случае кривых K номера будут следовать в том же порядке, что и ранги; однако будем считать, что перед нами первый случай.

Теперь я предположу (оставаясь при спрямленном изображении) что кривые L' — светящиеся, а кривые K — матовые; кривые L будут светиться, но ни одна из их точек не будет испускать свет во всех направлениях; она сможет испускать свет лишь горизонтально (направо если кривые L отрицательны, а кривые K положительны, налево — в противоположном случае). Все происходит так, как если бы в каждой из этих точек находился маленький параболический рефлектор, отбрасывающий пучок параллельных лучей. При этих условиях часть плоскости будет освещена, а часть окажется в тени. *Граница тени и будет не что иное, как контур C'.* Я не привожу доказательства, так как оно длинное.

Третий частный случай. Имеются лишь два вида кривых $X = x$: кривые L, примыкающие к $x = a$, кривые K, примыкающие к $x = b$. На каждой из этих кривых, при пробегании их слева направо, встречаются ветви с постоянно возрастающими номерами.

Этот случай по отношению к T^{-1} составляет то же, что второй по отношению к T. Следовательно, можно построить контур C'' (из которого можно получить C и C'), рассматривая кривые K, например, как матовые, тогда как кривые L будут испускать горизонтальные световые лучи в подходящем направлении. Границей тени будет контур C''.

§ 13. Пояснения к рисункам

Кроме трех случаев, рассмотренных в предыдущем параграфе и обладающих некоторой общностью, я изучил также большое число частных случаев, и мне всегда удавалось построить контуры C, C', C'', C'''. Не приходится и думать о том, чтобы привести здесь все эти случаи; некоторые примеры представлены на приложенных здесь рисунках, которые нуждаются в нескольких пояснениях.

Я использовал спрямленное изображение; мы знаем, что на этом изображении кривые воспроизводятся периодически, так как когда y переходит в $y + 2\pi$, получаются те же фигуры; *я давал только один период*, и нетрудно добавить другие.

Контур, представленный на каждом рисунке, — контур C'', образованный дугами $X = x$ и дугами $x = c$, представленными горизонтальными отрезками. Граничные горизонты $x = a$ и $x = b$ даны сплошными линиями *так же, как и контур* C''; наоборот, часть кривых $X = x$, не входящих в состав C'', дана пунктиром. Цифра, находящаяся около каждой ветви $X = x$, является ее номером. Около каждой кривой $X = x$ стоит знак $+$ или $-$, в зависимости от того, положительна ли она или отрицательна.

Нетрудно проверить на каждом рисунке, что шесть условий § 8 выполнены; для проверки первого условия можно сделать сечение произвольной горизонталью и получить таким образом последовательность номеров в определенном порядке, учитывая лишь ветви, пересеченные этой горизонталью; затем станет видно, что если начертить кривую, которая пересечет горизонталь в соответствии с порядком номеров точек пересечения, то эта кривая не будет самопересекаться.

Что касается второго условия, то можно установить, например на рис. 14, что в вершине 63 сходятся ветви 6 и 3, но что поскольку вершина 45 находится ниже, то горизонталь вершины 63 не встретится с ветвями 4 и 5, что на этом уровне номера 6 и 3 окажутся последовательными.

Относительно третьего условия: можно увидеть, например на рис. 8, что основание 98, являющееся обратным, нечетное, тогда как вершина 87, также обратная, четная.

Я не буду останавливаться ни на четвертом, ни на пятом условии, проверить их соблюдение легко. Что касается шестого условия, то возьмем для примера рис. 21; здесь мы видим, что ветви 8 и 7 положительны, а ветви 3, 6, 5, 4 — отрицательны; ранг первых двух меньше, но поскольку это ветви самого большого номера (и самого маленького ранга) и они положительны, то условие выполнено.

Предположим, что наш контур пробегается слева направо. В этих условиях дуги $X = x$, составляющие часть C'', и дуги $x = c$ того же самого контура или, скорее, соответствующие дуги $X = c$, оказываются все определенными и одного знака, а именно:

они положительны на рис. 5–7, 10, 11, 18, 20, 23;

они отрицательны на рис. 8, 9, 12–17, 19, 21, 22, 24.

Действительно, например, на рис. 5 можно видеть, что положительные ветви $X = x$ пробегаются с подъемом, а отрицательные — со спуском.

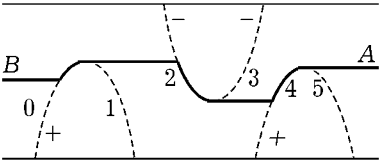


Рис. 5

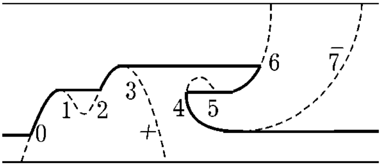


Рис. 6

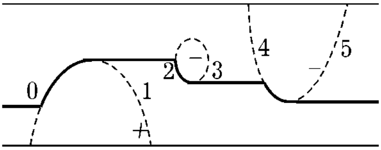


Рис. 7

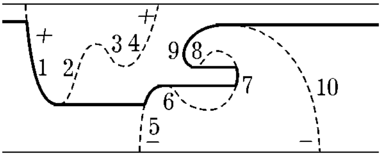


Рис. 8

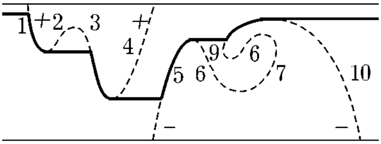


Рис. 9

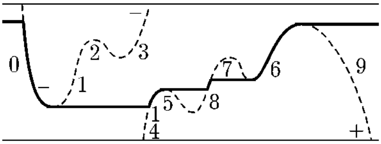


Рис. 10

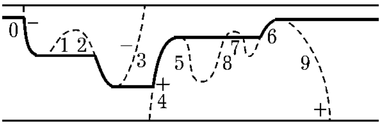


Рис. 11

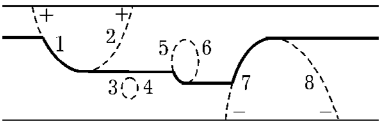


Рис. 12

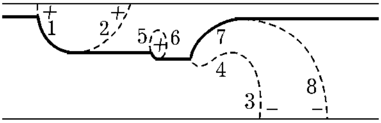


Рис. 13

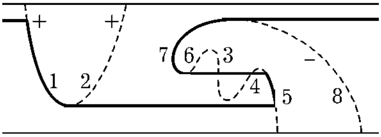


Рис. 14

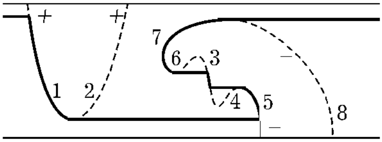


Рис. 15

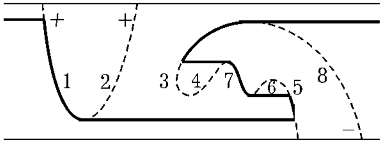


Рис. 16

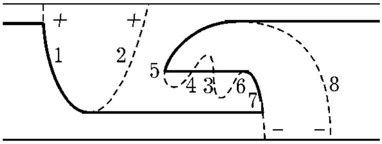


Рис. 17

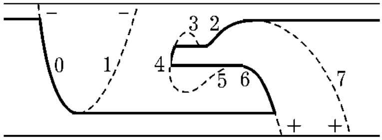


Рис. 18

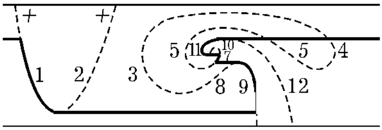


Рис. 19

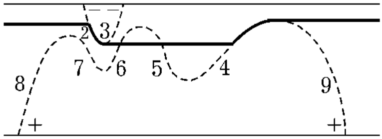


Рис. 20

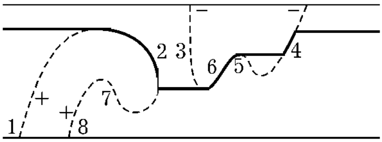


Рис. 21

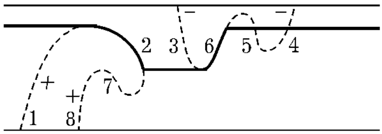


Рис. 22

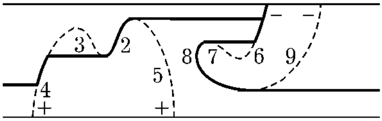


Рис. 23

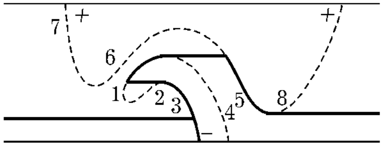


Рис. 24

С другой стороны, дуги $x = c$ или, скорее, соответствующие дуги $X = c$, вполне определенны. Рассмотрим, например, рис. 5. Здесь мы видим три горизонтали; первую, я ее обозначу 12, которая идет от ветви 1 к ветви 2; вторую, которая идет от 3 к 4; третью, которая выходит от ветви 5, и, в случае продолжения, пошла бы к ветви под номером 6 (не представленной на рисунке), отличающейся на один период от ветви под номером 0. Эта горизонталь заканчивается на рисунке в A, но ее следовало бы дополнить горизонтальным отрезком, который отличался бы на период от изображенного на рисунке, который идет от точки B к ветви 0. Все эти горизонтали соответствуют элементарным дугам, и, следовательно, являются определенными, так как номера их концов последовательны. То же самое будет и для рис. 8, например, для горизонтали 25, так как номера 2 и 5 являются последовательными на уровне этой горизонтали, которая не пересекает ветвей 3 и 4.

Рассмотрим теперь рис. 9. Если продлить горизонталь 69, то она пересечет некоторые ветви $X = x$, но ни одной точки пересечения не окажется между 6 и 9; следовательно, *ранги* концов являются последовательными на рассматриваемом уровне. Итак, соответствующая дуга опять-таки оказывается определенной. На рис. 19 горизонталь 10.13, которая идет от ветви 10 к ветви 13, отличаясь от ветви 1 на один период, тоже соответствует определенной дуге; действительно, между концами 10 и 13 находятся точки пересечения 5 и 4, но их номера не заключаются между 10 и 13. Отсюда следует, что соответствующая дуга $X = c$ не пересекает своей хорды (на спрямленном изображении).

Остается определить знак этих разных дуг. Я возьму в качестве примера рис. 8; дуга 25 отрицательна, так как она пробегается слева направо, а 2 — четно и < 5; 67 отрицательна, так как она пробегается слева направо, а 6 четное и < 7; 78 отрицательна, так как она пробегается влево, а 7 нечетно и < 8; наконец, 10.11 отрицательна по тем же причинам, что и 25 и 67.

Рис. 5–7 соответствуют первому частному случаю § 12 (нормальное распределение); рис. 8 и 9 соответствуют третьему случаю § 12; здесь легко распознаются контуры тени, определенные в том параграфе; рис. 10, 11 и 20 соответствуют второму случаю § 12; рис. 10 и 11 выводятся из 8 и 9 переходом от T к обратному преобразованию T^{-1}. Наконец, рис. 12 и 13 показывают, как контуры тени § 12 должны видоизменяться при появлении *островов*, т. е. кривых $X = x$, замкнутых в узком смысле.

ГЕТТИНГЕНСКИЕ ЛЕКЦИИ

Предисловие

Геттингенский университет обратился ко мне с лестным предложением выступить перед ученой аудиторией с докладами по различным вопросам чистого анализа, математической физике, теоретической астрономии и философии математики; прочитанные мной по этому случаю публичные лекции были записаны несколькими студентами, которые любезно исправили многочисленные погрешности, допущенные мной против немецкой грамматики. Выражаю им мою искреннюю признательность.

Пользуясь случаем, приношу читательской аудитории свои извинения за краткость, с которой были рассмотрены затронутые мной проблемы. Я располагал лишь весьма ограниченным временем и по большей части мог изложить лишь основную идею полученных результатов и основные принципы, на которых основаны доказательства, не вдаваясь в детали самих доказательств.

Доклад первый

Об уравнениях Фредгольма

Как известно, решением интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b f(x, y)\varphi(y)\, dy + \psi(x) \tag{1}$$

служит интегральное уравнение того же рода

$$\varphi(x) = \psi(x) + \lambda \int_a^b \psi(y) G(x, y)\, dy, \tag{1a}$$

где

$$G(x, y) = \frac{N(x, y; \lambda \mid f)}{D(\lambda \mid f)}.$$

Из теории Фредгольма мы знаем, что N и D — две целые трансцендентные функции от λ. Чтобы выписать их разложения в явном виде, обозначим, следуя Фредгольму, через $f\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ y_1, y_2, \ldots, y_n \end{pmatrix}$ n-рядный детерминант, общий элемент которого есть $f(x_i, y_k)$. Полагая

$$a_n = \int_a^b \int_a^b \ldots \int_a^b f\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \end{pmatrix} dx_1 \ldots dx_2,$$

получаем

$$D(\lambda) = \sum_0^\infty \frac{(-\lambda)^n}{n!}\, a_n.$$

Преобразуем это уравнение, образуя с помощью «итерации» ядро, возникающее из $f(x, y)$. Если положить

$$f(x_\alpha, x_\beta)\, f(x_\beta, x_\gamma) \ldots f(x_\lambda, x_\mu)\, f(x_\mu, x_\alpha) = f(x_\alpha, x_\beta \ldots, x_\lambda, x_\mu),$$

то ясно, что $f\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_n \\ x_1, \ldots, x_n \end{pmatrix}$ примет вид

$$\sum \pm \prod f(x_\alpha, \ldots, x_\mu),$$

как следует непосредственно из разложения детерминанта. Пусть

$$b_k = \int\limits_a^b \ldots \int\limits_a^b f(x_\alpha, \ldots, x_\mu)\, dx_\alpha \ldots dx_\mu,$$

где k означает число переменных интегрирования. Тогда как нетрудно видеть, мы можем также положить

$$b_k = \int\limits_a^b f_k(x, x)\, dx,$$

если под

$$f_k(x, y) = \int\limits_a^b \ldots \int\limits_a^b f(x, x_\alpha)\, f(x_\alpha, x_\beta) \ldots f(x_\lambda, y)\, dx_\alpha \ldots dx_\lambda$$

понимать k-кратно интегрированное ядро.

В силу выписанных выше соотношений имеем:

$$a_n = \sum \pm \prod b_k.$$

Заметим, что некоторые из величин b_k, входящих в произведение $\prod b_k$, могут оказаться равными и что, кроме того, некоторые из произведений $\prod b_k$ также могут оказаться равными, а именно те, которые получаются одно из другого при перестановке x_i, в результате чего из комбинаторных соображений для a_n получается выражение вида

$$a_n = \sum_{a\alpha+b\beta+c\gamma+\ldots=n} \frac{n!}{a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots a!b!c!\ldots} \left[(-1)^{\alpha+1} b_\alpha\right]^a \left[(-1)^{\beta+1} b_\beta\right]^b \left[(-1)^{\gamma+1} b_\gamma\right]^c \ldots,$$

а также

$$D(\lambda) = \sum_{a,b,c,\ldots} \frac{1}{a!b!c!\ldots} \left(-\frac{\lambda^\alpha b_\alpha}{\alpha}\right)^a \cdot \left(-\frac{\lambda^\beta b_\beta}{\beta}\right)^b \cdot \left(-\frac{\lambda^\gamma b_\gamma}{\gamma}\right)^c \ldots,$$

то есть

$$D(\lambda) = \prod_1^\infty e^{-\frac{\lambda^\alpha b_\alpha}{\alpha}}, \tag{2}$$

и, следовательно,

$$\log D(\lambda) = -\sum \frac{\lambda^\alpha b_\alpha}{\alpha}, \tag{2a}$$

$$\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = -\sum \lambda^{\alpha-1} b_\alpha. \tag{2b}$$

Числитель $N(x,\, y;\, \lambda)$ функции $G(x,\, y;\, \lambda)$ можно определить соотношением

$$N(x,\, y;\, \lambda) = D(\lambda)\cdot\sum \lambda^h f_{h+1}(x,\, y). \tag{3}$$

Эти соотношения, установленные еще Фредгольмом, весьма полезны в качестве исходного пункта многих рассмотрений, которые мы продемонстрируем лишь на нескольких примерах.

Метод Фредгольма непосредственно применим только к таким ядрам $f(x,\, y)$, которые остаются конечными. Если ядро в некоторых точках обращается в бесконечность, то может представиться случай, что какое-то итерированное ядро, например, $f_n(x,\, y)$, остается конечным. В этом случае интегральное уравнение с итерированным ядром может быть решено по методу Фредгольма, и, как показал Фредгольм, первоначальное интегральное уравнение (1) может быть сведено к такому уравнению с итерированным ядром. Решение также дается формулой вида (1a), только на этот раз следует положить

$$G = \frac{N_1(x,\, y;\, \lambda)}{D_n(\lambda)},$$

где

$$D_n(\lambda) = D(\lambda^n \mid f_n)$$

и

$$N_1(x,\, y;\, \lambda) = D_n(\lambda)\cdot\sum \lambda^h f_{h+1}(x,\, y).$$

При этом N_1 и D_n — снова целые трансцендентные функции от λ; однако оказывается, что они обладают общим делителем; мы хотим показать, каким образом это следует из наших формул (2) и (3) и как получить представление мероморфной функции G в виде дроби, числитель и знаменатель которой — целые функции, не имеющие общего делителя.

Из нашего предположения относительно итерированных ядер следует, что коэффициенты b_n, $b_{n+1}, \ldots$ конечны. Если теперь мы, следуя соотношению $(2a)$, образуем ряд

$$K(\lambda) = -\lambda^n \frac{b_n}{n} - \lambda^{n+1} \frac{b_{n+1}}{n+1} - \cdots ,$$

то этот ряд сходится. Положим теперь

$$G(x, y; \lambda) = \frac{e^K \sum \lambda^h f_{h+1}}{e^K};$$

мы утверждаем, что эта формула дает требуемое представление.

Чтобы доказать это, необходимо убедиться в том, что e^K и $e^K \sum \lambda^{h+1} f_{h+1}$ — целые функции.

Для этого образуем $\frac{dK}{d\lambda}$. Нетрудно вычислить, что

$$-\frac{dK(\lambda)}{d\lambda} = \lambda^{n-1} \int\limits_a^b \frac{N_1(x, x)}{D_n(\lambda)}\, dx + \sum_{k=1}^{k=n-1} \lambda^{n+k-1} \int\limits_a^b\!\!\int\limits_a^b \frac{N_1(x, y)}{D_n}\, f_k(x, y)\, dx\, dy.$$

Отсюда мы заключаем, что $\frac{dK}{d\lambda}$ — мероморфная функция от λ, так как она обладает самое большее полюсами в нулях знаменателя $D_n(\lambda)$, т. е. в точках $\lambda = \alpha \cdot \lambda_i$, где α — корень n-й степени из единицы, а λ_i — собственное значение ядра f_n. Можно показать, что в этих возможных точках расходимости вычет Коши производной $\frac{dK}{d\lambda}$ равен 1 или 0 в зависимости от того, выбрано ли значение $\alpha = 1$ или $\alpha \neq 1$. Мы не станем приводить здесь соответствующие вычисления; воспользуемся тем, что при $\lambda = \lambda_k$ вычет функции $\frac{N_1(x, y)}{D_n}$ равен $\varphi_k(x)\psi_k(y)$, где φ_k, ψ_k — соответствующие $\lambda = \lambda_k$ собственные функции, удовлетворяющие уравнениям

$$\int\limits_a^b \varphi_k(x) f_p(y, x)\, dx = \lambda_k^{-p} \varphi_k(y),$$

$$\int\limits_a^b \psi_k(z) f_p(z, y)\, dz = \lambda_k^{-p} \psi_k(y).$$

Отсюда следует, что $e^{K(\lambda)}$ — целая трансцендентная функция, обращающаяся в нуль только в точках $\lambda = \lambda_k$.

Если таким же образом рассмотреть числитель функции G, то станет ясно, что он является мероморфной функцией от λ, которая может обращаться в бесконечность самое большее в точках $\lambda = \alpha\lambda_i$. Однако рассмотрение вычетов показывает, что этого не происходит и, тем самым, что числитель $e^K \sum \lambda^h f_{h+1}$ — также целая трансцендентная функция. Тем самым приведение фредгольмовой дроби выполнено.

Разложение в ряд числителя и знаменателя фредгольмовой дроби в таком приведенном виде мы получаем, обратившись к способу построения $K(\lambda)$; представляя числитель в виде

$$e^{K(\lambda)} = \sum (-\lambda)^n \frac{a'_n}{n!},$$

получаем

$$a'_n = \sum_{a\alpha+b\beta+c\gamma+\ldots=n} \pm b_\alpha^a b_\beta^b b_\gamma^c \ldots ,$$

где следует положить

$$b_\alpha = \begin{cases} 0, & \text{при } \alpha < n, \\ \displaystyle\int_a^b f_\alpha(x,\, x)\, dx, & \text{при } \alpha \geqslant n. \end{cases}$$

Аналогичным образом образуется и числитель. Следовательно, детерминанты следует разложить, как обычно, но при этом отбросить те члены разложения, которые содержат множитель вида $f(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_k)$ с числом переменных меньше n.

Формулы (2), (2а) и (3) можно использовать и в том случае, когда кроме ядра $f(x,\, y)$ все итерированные ядра также обращаются в бесконечность, и метод Фредгольма заведомо становится неприменим. Пусть, например, числа $b_1,\, b_2, \ldots, b_{n-1}$ бесконечны, а числа $b_n,\, b_{n+1}, \ldots$ конечны. В этом случае можно образовать ряд $K(\lambda)$, спросить, сходится ли он, и выяснить, не представляет ли $e^{K(\lambda)}$ целую функцию. Мне удалось доказать это в предположении, что $f(x,\, y)$ — симметричное ядро, т.е. что

$$f(x,\, y) = f(y,\, x).$$

При этом я использовал соотношения

$$b_n = \sum \lambda_i^{-n},$$

которые должны выполняться для $n > 2$, так как по теореме Адамара род функции $D(\lambda)$ меньше 2.

Доказательство я не привожу из-за недостатка времени.

Для числителя фредгольмовской дроби я не проводил рассуждения.

Несколько слов я хотел бы еще сказать об интегральном уравнении первого рода. Метод Фредгольма непосредственно применим к некоторым из таких уравнений, если их предварительно свести к интегральным уравнениям второго рода. Например, рассмотрим уравнение

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)\left[e^{ixy} + \lambda f(x,\, y)\right] dy = \psi(x), \qquad (-\infty < x < +\infty), \tag{1}$$

где функция $\psi(x)$ задана, $\varphi(x)$ — искомая функция, в то время как составная часть $f(x,\, y)$ ядра — заданная функция, удовлетворяющая некоторым приведенным ниже ограничительным условиям. Искомую функцию $\varphi(y)$ представим в виде

$$\varphi(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi(z) e^{-izy}\, dz,$$

из которого по интегральной теореме Фурье, если $\Phi(x)$ удовлетворяет условиям, при которых выполняется эта теорема, следует, что обратное выражение

$$2\pi\Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) e^{ixy}\, dy.$$

Соответственно, (1) преобразуется в

$$2\pi\Phi(x) + \lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi(z) f(x,\, y) e^{-izy}\, dz\, dy = \psi(x),$$

или

$$2\pi\Phi(x) + \lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi(z)K(x, z)\, dz = \psi(x),$$

где

$$K(x, z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)e^{-izy}\, dy, \tag{2}$$

и мы приходим к интегральному уравнению второго рода. Ядро (2) допускает применение метода Фредгольма, например, если $f(x, y)$ и $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ равномерно по x при $y = \pm\infty$ сходятся к нулю, и выполняется неравенство

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < \frac{M}{1 + y^2},$$

где M — константа, не зависящая от x и y. Например, относительно $\psi(x)$ достаточно предположить, что она обладает лишь конечным числом максимумов и минимумов и абсолютно интегрируема в интервале от $-\infty$ до $+\infty$.

Тот же метод можно применить к ряду

$$\psi(x) = \sum_{(m)} A_m\big[e^{imx} + \lambda\theta_m(x)\big];$$

проблема возникает, если $\psi(x)$ и функции $\theta_m(x)$ заданы, а коэффициенты A_m требуется вычислить таким образом, чтобы имело место выписанное выше разложение. Если ранее речь шла об обобщении *интегральной теоремы Фурье*, то теперь нам понадобится обобщение *ряда Фурье*.

Подставляя $\varphi(z)$ в виде

$$\varphi(z) = \sum_{(m)} A_m e^{imz}; \qquad 2\pi A_m = \int\limits_0^{2\pi} \varphi(z)e^{-imz}\, dz,$$

получаем

$$\psi(x) = \varphi(x) + \frac{\lambda}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \varphi(z) \sum_{(m)} e^{-imz}\theta_m(x)\, dz.$$

Относительно ряда, выступающего здесь в роли ядра, следует предположить, что он сходится абсолютно и равномерно, т. е. что ряд

$$\sum_{(m)} |\theta_m(x)| \tag{3}$$

сходится равномерно.

Например, если положить

$$\lambda = 1, \quad \theta_m(x) = e^{i\mu_m x} - e^{imx},$$

то получится разложение вида

$$\psi(x) = \sum_{(m)} A_m e^{i\mu_m x}.$$

Условие (3) будет выполнено, если мы предположим абсолютную сходимость ряда

$$\sum_{(m)} (\mu_m - m).$$

Наконец, рассмотрим еще уравнение

$$\int_0^{2\pi} \varphi(y)\left[e^{ixy} + \lambda f(x, y)\right] dy = \psi(x), \quad (-\infty < x < +\infty), \tag{4}$$

которое отличается от (1) тем, что интеграл берется не в бесконечных, а в конечных пределах. В этом случае функцию $\psi(x)$ нельзя выбирать произвольным образом: если $f(x, y)$ голоморфна, то $\psi(x)$ должна быть целой трансцендентной функцией для того, чтобы уравнение (4) имело решение. Наоборот, значения $\psi(m)$ функции ψ при всех целых числах m по существу можно выбирать произвольно. Действительно, если положить

$$\varphi(z) = \sum_{(m)} A_m e^{-imz}, \quad \text{где} \quad 2\pi A_m = \int_0^{2\pi} \varphi(y) e^{imy}\, dy,$$

то уравнение (4) при $x = m$ переходит в

$$2\pi A_m + \lambda \sum_{(p)} A_p \int_0^{2\pi} [e^{-ipy} f(m, y)]\, dy = \psi(m).$$

Таким образом, мы приходим к системе бесконечно многих линейных уравнений с бесконечно многими неизвестными, исследованием которых занимались Хилл, Х. фон Кох, Гильберт и др. Решение этой системы, если мы примем относительно ряда

$$\sum_{(p,m)} \int_0^{2\pi} e^{-ipy} f(m, y)\, dy \tag{5}$$

предположение о его абсолютной и равномерной сходимости, окажется полностью аналогичным фредгольмову решению интегральных уравнений и, подобно этому решению, будет мероморфной функцией параметра λ. Но, как показывает интегрирование по частям, равномерная и абсолютная сходимость ряда (5) имеет место, если сумма

$$\sum_{(m)} f''(m, z)$$

или интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f''(x, z)\, dx$$

сходятся абсолютно и равномерно.

Отчетливо видны сходство и различие двух случаев — (1) и (2): в зависимости от того, бесконечны или конечны пределы интегрирования, или от того, имеет ли ядро в пределах интегрирования сингулярность достаточно высокого порядка или не имеет сингулярности, «заданную» функцию можно выбирать по существу произвольным образом или приписывать ей бесконечный, но *дискретный* ряд значений. Было бы небезынтересно исследовать различие между случаями (1) и (2) с помощью итерирования ядра.

Доклад второй

Приложение теории интегральных уравнений к морским приливам

Сегодня я хочу поговорить о некоторых приложениях теории интегральных уравнений к морским приливам. В прошлом семестре я прочитал об этом явлении лекцию.

Дифференциальные уравнения задачи имеют следующий вид

$$\begin{cases} a)\ k^2 \sum \dfrac{\partial}{\partial x}\left(h_1 \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + k^2 \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\dfrac{\partial h_2}{\partial y} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\dfrac{\partial h_2}{\partial x}\right) = \zeta, \\ b)\ g \cdot \zeta = -\lambda^2 \varphi + \Pi + W. \end{cases} \tag{1}$$

При этом мы предполагаем, что сферическая поверхность Земли с помощью стереографической поверхности конформно отображена на $(x,\, y)$ — плоскость; $k(x,\, y)$ — коэффициент подобия между плоскостью и сферой. Решение задачи о приливах мы намереваемся представить в виде периодических функций времени t и специально предполагаем, что наши уравнения (1) соответствуют единственному периодическому слагаемому вида $A\cos(\lambda t + \alpha)$, так что λ в наших уравнениях определяет период колебаний; удобно ввести вместо косинуса комплексные экспоненциальные величины и тем самым предположить, что все наши функции имеют вид

$$e^{i\lambda t} \cdot f(x,\, y);$$

действительная и мнимая части такого комплексного решения дают нам решения, имеющие физический смысл.

Функция $\varphi(x,\, y)$ определяется из соотношения

$$-\lambda^2 \varphi = V - p,$$

где V — гидростатический потенциал, p — давление.

Если h — глубина моря, то пусть по определению

$$h_1 = -\frac{h\lambda^2}{-\lambda^2 + 4\omega^2 \cos^2 \vartheta},$$

$$h_2 = -\frac{2\omega i \cos\vartheta}{\lambda} \cdot h_1,$$

где i — мнимая единица, ϑ — широта точки на поверхности Земли, соответствующей точке (x, y), ω — угловая скорость Земли, $\zeta(x, y)$ — разность между толщиной среднего и возмущенного слоя воды, т. е. $\zeta > 0$ соответствует отливу, $\zeta < 0$ соответствует приливу.

Пусть g — ускорение силы тяжести, W — потенциал возмущающих сил, H — потенциал, обусловленный притяжением массы воды толщиной ζ. Например, если

$$\zeta = \sum A_n X_n,$$

то

$$\Pi = \sum \frac{4\pi A_n}{2n+1} X_n,$$

где X_n — шаровые функции.

Единицы измерения выбраны так, что плотность воды равна единице и радиус Земли равен единице.

Величиной Π в большинстве случаев можно пренебречь; если это сделать, то для φ сразу же получается дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка. Чтобы оно определяло φ, необходимо знать некоторые краевые условия. Мы различаем два случая:

1. Море обнесено вдоль береговой линии вертикальной стеной.

В этом случае

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} + \frac{2\omega i}{\lambda} \cos\vartheta \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial s} = 0,$$

где $\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}$ — нормальная, а $\dfrac{\partial\varphi}{\partial s}$ — тангенциальная производные от φ.

2. Граница моря не вертикальна. Тогда на ней

$$h = 0 \text{ и, следовательно, } h_1 = h_2 = 0.$$

В этом случае краевое условие означает, что функция φ на границе должна оставаться регулярной и конечной.

Чтобы применить к этим задачам методы интегральных уравнений, прежде всего вспомним некоторые общие положения, установленные Гильбертом и Пикаром для дифференциальных уравнений. Пусть

$$D(u) = f(x, y)$$

— дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка для u эллиптического типа. Тогда существует удовлетворяющее определенным краевым условиям решение u, представимое в виде

$$u = \int f' \, G \, d\sigma',$$

где $G(x, y; x', y')$ — функция Грина дифференциального выражения $D(u)$, соответствующая этим краевым условиям; f' — функция $f(x', y')$, $d\sigma' = dx' \cdot dy'$, и интеграл берется по той области плоскости (x', y'), для которой поставлены краевые условия. Чтобы вычислить функцию Грина и тем самым решить краевую задачу, положим

$$D(u) = D_0(u) + D_1(u),$$

где

$$D_1(u) = a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu$$

— линейное дифференциальное выражение. Предположим, что функция Грина G_0 дифференциального выражения $D_0(u)$ нам известна. Тогда мы имеем решение уравнения

$$D(\varphi) = f$$

вида

$$\varphi = \int G_0 \left(f' - a'\frac{\partial \varphi'}{\partial x'} - b'\frac{\partial \varphi'}{\partial y'} - c'\varphi' \right) d\sigma'.$$

Выделив отсюда с помощью интегрирования по частям производные $\dfrac{\partial \varphi'}{\partial x'}$, $\dfrac{\partial \varphi'}{\partial y'}$, мы тотчас же приходим к интегральному уравнению второго рода для φ, которое может быть решено методом Фредгольма, если ядро не слишком сингулярно.

В интересующей нас проблеме приливных течений имеет место именно случай сильной сингулярности; ядро обращается в бесконечность столь высокого порядка, что метод Фредгольма становится неприменимым, однако я хочу вам показать, каким образом можно преодолеть эти трудности.

Рассмотрим сначала случай первого граничного условия

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} + C\frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0,$$

где C — заданная функция от x и y. Дифференциальное уравнение, которое возникает, когда мы пренебрегаем величиной Π, имеет вид

$$A\Delta\varphi + D_1 = f,$$

и мы оказываемся перед задачей интегрирования уравнения

$$\Delta\varphi = F$$

с нашим краевым условием.

Эта задача эквивалентна задаче о нахождении внутри граничной кривой регулярной потенциальной функции V, которая удовлетворяет на границе условию $\dfrac{\partial V}{\partial n} + C\dfrac{\partial V}{\partial s} = 0$, задающим простое распределение потенциала на границе. Если обозначить через s длину дуги граничной кривой от некоторой заданной начальной точки до точки P, а через s' — длину дуги от той же начальной точки до точки P', то для V получается интегральное уравнение; но его ядро $K(s,\, s')$ имеет при $s = s'$ сингулярность первого порядка, и поэтому интеграл

$$\int\limits_A^B K(x,\, y)\, f(y)\, dy$$

следует понимать в смысле главного значения Коши, которое по определению есть арифметическое среднее двух значений, которые принимает интеграл, если на комплексной y-плоскости при обходе точки $y = x$ один раз выберу путь AMB над действительной осью, а другой раз — путь $AM'B$ под действительной осью.

Вместо того, чтобы использовать методы, которые Келлогг разработал для таких не непрерывных ядер, я хочу предложить вам другой подход. Рассмотрим наряду с операцией

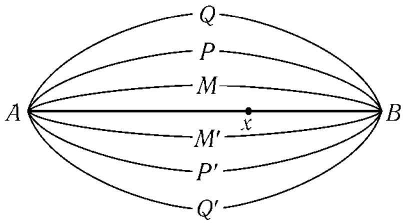


Рис. 1

$$S(f(x)) = \int K(x, y)\, f(y)\, dy$$

итерированную операцию

$$S^2(f(x)) = \iint K(x, z)K(z, y)\, f(y)\, dz\, dy,$$

в которой интеграл также следует понимать в смысле главного значения Коши, т. е. следующим образом. Для переменной z мы рассматриваем пути AMB, $AM'B$, для переменной y — пути APB, $AP'B$, которые могут располагаться рядом друг с другом, как на рис. 1. Затем мы образуем 4 интеграла, которые возникают, если путь для z комбинировать с путем для y:

$$\begin{aligned} z&: \ AMB,\ AM'B,\ AMB,\ AM'B; \\ y&: \ APB,\ APB,\ AP'B,\ AP'B. \end{aligned}$$

Из этих 4 интегралов мы образуем арифметическое среднее. Выбрав еще 2 пути AQB, $AQ'B$, как на рис. 1, мы увидим, что в первой комбинации путей путь AMB для z заменяется путем $AQB + AMBQA$, во второй комбинации путь $AM'B$ заменяется путем $AQ'B$, в третьей — путь AMB заменяется путем AQB и в четвертой комбинации путь $AM'B$ заменяется путем $AQ'B + AM'BQ'A$, поэтому в дальнейшем мы располагаем следующими комбинациями путей:

z	y
$AQB + AMBQA$	APB
$AQ'B$	APB
AQB	$AP'B$
$AQ'B + AM'BQ'A$	$AP'B$.

Выписав соответствующие интегралы и применив теорию вычетов к замкнутым путям, мы увидим, что наша операция $S^2(f(x))$, соответствующая интегральному уравнению первого рода, переходит в операцию, задаваемую левой частью интегрального уравнения второго рода, ядро которого всюду остается конечным; если мы сначала возьмем четыре комбинации путей AQB и $AQ'B$ с путями APB и $AP'B$, то получим двойной интеграл, который не может обращаться в бесконечность, так как на этих путях $x \neq y$ и $y \neq z$. Если теперь мы рассмотрим две комбинации путей $AMBQA$, APB и $AM'BQ'A$, $AP'B$ или $AMBQA$, APB и $AQ'BM'A$, $BP'A$, то нетрудно видеть, что z описывает вокруг y замкнутую кривую $AMBQA$ или $AQ'BM'A$, а y одновременно описывает вокруг x замкнутую кривую $APBP'A$. Следовательно, мы можем воспользоваться теорией вычетов и получим член, в который неизвестная функция входит не под знаком интеграла, как в левой части интегрального уравнения второго рода. Поскольку мы пришли к всюду регулярному интегральному уравнению второго рода, к которому применим метод Фредгольма, трудность в решении нашей задачи преодолена.

Лишь один пункт нуждается в пояснении: если x и y одновременно попадают в одну из конечных точек A, B интервала, то приведенные выше рассуждения утрачивают силу и кажется, будто в этих точках конечность нашего ядра, полученного с помощью итерации, отнюдь не гарантирована. Но в интересующей нас задаче эти опасения устраняются тем, что береговая линия («край моря»), которая является интервалом интегрирования, замкнута, из чего следует, что точки A и B не могут быть исключением.

Этими замечаниями мы завершаем рассмотрение случая вертикальной кромки моря.

Рассмотрим второй, более трудный, случай, когда море не окружено вертикальной стеной. В этом случае на границе

$$h = h_1 = h_2 = 0.$$

Так как члены второго порядка нашего дифференциального уравнения для φ представлены выражением

$$h_1 \Delta \varphi,$$

граничная линия является сингулярной линией для этого дифференциального уравнения. Кроме того, величины h_1, h_2 для *критической географической широты* ϑ, определяемой соотношением

$$4\omega^2 \cos^2 \vartheta = \lambda^2,$$

обращаются в бесконечность. Чтобы решить задачу, несмотря на эти сингулярности, которые приводят к обращению ядра K в бесконечность, я был вынужден заменить действительную область интегрирования комплексной, превратив y в комплексную переменную $y + iz$; x при этом остается действительным.

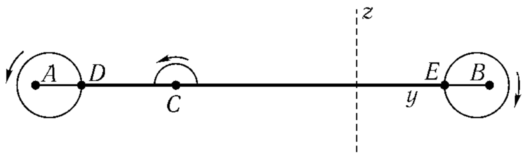


Рис. 2

Будем интерпретировать x, y, z как обычные прямоугольные координаты в трехмерном пространстве и условимся считать отрезок AB (рис. 2) диаметром сечения плоскости $x = \mathrm{const}$ с бассейном моря, лежащим в (x, y)-плоскости. Если C соответствует критической географической широте, то эту сингулярность нетрудно обойти, сойдя с действительной оси в комплексную плоскость. Если мы выберем далее любые две точки D и E, лежащие между A и B, и обойдем точку A, выйдя из D и вернувшись в ту же точку, по малой замкнутой кривой и проделаем аналогичную операцию с точкой B, или, говоря на пространственном языке, заключим граничную кривую в кольцеобразный футляр, то тем самым мы поставим задачу проинтегрировать наше дифференциальное уравнение таким образом, чтобы решение φ, если бы мы проследили за изменением его значений вдоль кривой, окружающей точку A, возвращалось в точку D с тем же значением, с которым оно вышло из D. «Измененное» таким образом краевое условие эквивалентно исходному, которое требовало, чтобы φ на границе (в точке A) оставалось конечным и вело себя регулярным образом. Правда, функции Грина G и G_1, соответствующие новым и старым краевым условиям, не тождественны, хотя и являются решениями уравнения

$$D(u) = f, \tag{2}$$

удовлетворяющими соответствующим краевым условиям. В этом проще всего убедиться в случае, когда имеется только одна переменная y;

применяя интегральную теорему Коши, получаем из соотношений

$$u = \int G(y,\, y')f(y')\,dy', \qquad u_1 = \int G_1(y,\, y')f(y')\,dy',$$

что $u - u_1 = 0$.

Чтобы решить задачу (1), я воспользуюсь изложенным выше методом, который в данном случае подразделяется на две ступени, так как наше измененное краевое условие недопустимо для уравнения $\Delta u = f$.[1] Мы можем положить

$$D(u) = \Delta(h_1 u) + D_1(u) + D_2(u);$$

где $D_1(u)$ содержит только члены первого порядка по $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, а $D_2(u)$ содержит и функцию u. Интегрируя уравнение

$$\Delta(v) = f$$

с краевым условием $v = 0$, получаем для $u = \dfrac{v}{h_1}$ на краю конечную и регулярную функцию, для которой

$$\Delta(h_1 u) \equiv D_0(u) = f.$$

Затем мы используем уже обычные методы и интегрируем уравнение

$$D_0(u) + D_2(u) = f$$

с первоначальным краевым условием. Ядро интегрального уравнения, которое надлежит использовать в этом случае, хотя и обращается в бесконечность, но имеет сингулярность такого порядка, что та устраняется при итерировании ядра: мы избегаем интегрирования по частям, так как оно привело бы к появлению членов с сингулярностью более высокого порядка.

Преодоленная проблема интегрирования эквивалентна интегрированию уравнения

$$D_0(u) + D_2(u) = f$$

[1] Это условие не того рода, чтобы оно выделяло определенное решение уравнения $\Delta(u) = f$.

с измененным краевым условием, и потому мы можем теперь подняться на вторую ступень и найти решение уравнения

$$D(u) \equiv (D_0(u) + D_2(u)) + D_1(u) = f$$

с измененным краевым условием.

До сих пор мы предполагали, что член П пренебрежимо мал. Если отказаться от этого предположения, то никаких новых трудностей при этом не возникнет. Величина П есть потенциал притяжения, порожденный ζ; следовательно,

$$\Pi = \int \frac{\zeta' \, d\sigma'}{r},$$

где $d\sigma'$ — элемент поверхности шара, ζ' — значение функции ζ в центре тяжести (x', y') этого элемента поверхности, а r — расстояние, измеренное в трехмерном пространстве между двумя точками (x, y) и (x', y') шара, а интегрирование проводится по всей поверхности шара. Величину П можно также представить в виде

$$\Pi = \int \frac{\zeta' \, dx' \, dy'}{k^2 r}.$$

Подставив это выражение в наши исходные уравнения, первое из которых с помощью соответствующей функции Грина и с учетом краевого условия из дифференциального уравнения превращается в интегральное, мы получаем систему двух интегральных уравнений для ζ и φ, решаемых с помощью рассмотренных выше методов.

Доклад третий

Применение интегральных уравнений к волнам Герца

Сегодня я хочу посвятить свое сообщение применению интегральных уравнений к волнам Герца, в особенности, к замечательнейшим явлениям дифракции, играющих столь важную роль в беспроволочной телеграфии; достойно удивления, что кривизна земной поверхности, препятствующая распространению света, не мешает распространению волн Герца, и последние могут по земной поверхности дойти от Европы до Америки. То, что волны Герца имеют гораздо бóльшую длину, чем световые волны, само по себе не объясняет это явление. Объяснение возникает лишь при рассмотрении дифференциальных уравнений проблемы.

Если принять, что скорость света равна единице, и, следуя Максвеллу, понимать

под α, β, γ	—	компоненты магнитной силы,
под F, G, H	—	компоненты векторного потенциала,
под f, g, h	—	компоненты электрического смещения,
под ψ	—	скалярный потенциал,
под u, v, w	—	компоненты тока проводимости,
под ρ	—	плотность электричества,

то имеют место следующие уравнения:

$$\alpha = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial x}, \ \ldots \ 4\pi f = -\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial x}, \ \ldots \ 4\pi\left(\mu + \frac{\partial f}{\partial t}\right) = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = \rho, \quad \sum \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0$$

и, следовательно,

$$4\pi\mu = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - \Delta F, \quad 4\pi\rho = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \Delta\psi.$$

Рассмотрим теперь затухающее синхронное колебание. Предположим для этого, что все наши функции пропорциональны экспоненциальным величинам

$$e^{i\omega t}.$$

Из возникающих при этом комплексных решений мы получаем физические решения, разделяя комплексные на действительные и мнимые части. Действительная часть от ω дает период колебания, а мнимая — затухание.

Из нашего представления решений следует, что

$$\frac{\partial F}{\partial t} = i\omega F, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial t} = i\omega\psi,$$

это позволяет записать F и ψ в виде запаздывающих потенциалов следующим образом:

$$F = \int \mu' \frac{e^{-i\omega r}}{r}\, d\tau', \qquad \psi = \int \rho' \frac{e^{-i\omega r}}{r}\, d\tau';$$

где $d\tau'$ — пространственный элемент в (x', y', z')-пространстве; μ' и ρ' — значения μ и ρ в точке (x', y', z'); r — расстояние между точками x', y', z' и (x, y, z).

В большинстве задач встречаются две различные среды — свободный эфир и проводящее тело; относительно последнего мы предполагаем, что оно ведет себя как идеальный проводник, что внутри него поле равно нулю, электрические силовые линии нормальны к его поверхности, а магнитные силовые линии попадают внутрь тела; то, что заряд и ток отличны от нуля только на поверхности проводника, мы учтем тем, что модифицируем приведенные выше выражения для F и ψ, заменив интеграл по объему интегралом по поверхности. Для этого запишем

$$\psi = \int \rho'' \frac{e^{-i\omega r}}{r} d\sigma',$$

$$F = \int \mu'' \frac{e^{-i\omega r}}{r} d\sigma',$$

где ρ'' и μ'' теперь означают поверхностные плотности заряда и тока, а $d\sigma'$ — элемент поверхности.

Обычно мы различаем два проводящих тела; одно мы условимся называть внешним, а другое внутренним проводником; эти проводники порождают, соответственно, внешнее и внутреннее поле; внешнее поле задано, внутреннее требуется найти. Например, когда мы рассматриваем проблему приема электрических волн, передатчик служит внешним проводником, приемник — внутренним проводником; в задаче о дифракции электрических волн возбудитель выполняет роль внешнего проводника, а земной шар — роль внутреннего проводника; в задаче о возбуждении колебаний нет никакого внешнего поля, в этом случае возбудитель следует рассматривать как внутренний проводник.

Чтобы свести задачу к интегральному уравнению, условимся понимать под введенными выше функциями только такие, которые относятся к неизвестным внутренним полям, чтобы, например, выписанные выше интегралы распространялись только по поверхности внутреннего проводника; если мы примем во внимание, что в силу принятого выше предположения внутренние нормальные компоненты вектора электрического поля должны обращаться в нуль на внутреннем проводнике, то, обозначив через l, m и n направляющие косинусы нормали, мы получим из наших исходных уравнений

$$4\pi f = \frac{\partial\psi}{\partial n} + i\omega(lF + mG + nH) = N,$$

где N — нормальная компонента внешнего поля, т.е. известная функция.

Если мы обозначим теперь поверхностную плотность вместо ρ'' через μ'', то вследствие выражения для ψ получим

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = 2\pi\mu + \int \mu' \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-i\omega r}}{r}\right) d\sigma'.$$

Воспользовавшись далее нашим выражением для F и соответствующими выражениями G и H, мы приходим к соотношению

$$i\omega \sum lF = \int \frac{e^{-i\omega r}}{r} i\omega \sum l\mu''\, d\sigma'.$$

Это выражение в некоторых случаях, интегрируя по частям, можно преобразовать к виду

$$-i\omega \int L\mu'\, d\sigma',$$

где L — известная функция. В итоге мы получаем

$$2\pi\mu + \int \mu' \left\{ \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-i\omega r}}{r}\right) - i\omega L \right\} d\sigma' = N,$$

а это — интегральное уравнение второго рода для μ, которое требовалось найти. В самом общем случае мы приходим к двум интегральным уравнениям с двумя неизвестными, которыми могут быть, например, μ и ν, где величина μ определена выше; мы полагаем $\nu = \frac{dN}{dn}$, где $\frac{d}{dn}$ — производная в направлении нормали, N — нормальная компонента магнитной силы.

Функцию L можно образовать особенно просто, если внутренний проводник имеет форму тела вращения, а внешнее поле обладает вращательной симметрией (рис. 3). Если s и s' — длины дуг, измеренные от конца оси вращения вдоль меридиана до точек P и P', ϑ — угол между нормалью в точке P и касательной к меридиану в точке P', то L как функция от ϑ, s и s' определяется дифференциальным уравнением

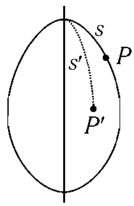


Рис. 3

$$\frac{\partial L}{\partial s'} = \frac{e^{-i\omega r}}{r}\cos\vartheta.$$

Как следует из изложенного выше, проблема приема электрических волн сводится к интегральному уравнению второго рода.

Если мы хотим рассмотреть только проблему возбуждения электрических волн, то внешнее поле следует положить равным нулю, то есть $N = 0$, и мы получаем однородное интегральное уравнение; входящую в них величину ω не следует более интерпретировать как значение произвольного параметра, а как число, которое требуется найти и которое играет роль собственного значения.

Я записываю наше интегральное уравнение в виде

$$2\pi\mu + \int K\mu'\, d\sigma' = N$$

с ядром K; ввожу неопределенный параметр λ и рассматриваю общее уравнение

$$2\pi\mu + \lambda\int K\mu'\, d\sigma' = N.$$

Первый член зависит от двух неопределенных параметров λ и ω. Если воспользоваться обычным методом Фредгольма, то решение нашего приведенного выше интегрального уравнения получается в виде мероморфной функции от λ, числитель которой — целая функция от λ. Можно показать, что этот числитель является к тому же целой функцией от ω, такой, чтобы выделенные нами значения ω были нулями целой трансцендентной функции.

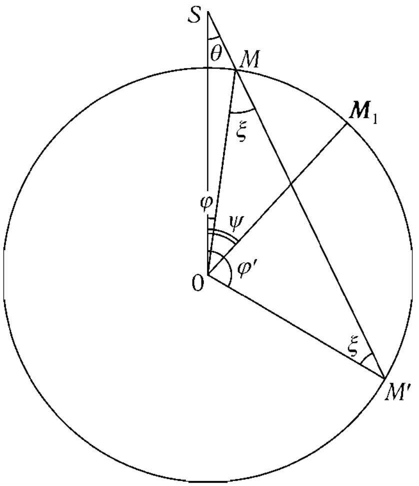


Рис. 4

Рассмотрим теперь подробнее более общую задачу о дифракции.

Предположим для этого, что внутренний проводник имеет форму шара (земного шара) радиуса ρ и что внешнее поле (нормальную компоненту которого мы обозначим через N) создается точечным возбудителем S, расстояние D до которого от центра O Земли лишь очень немногим больше радиуса ρ (рис. 4). Выберем направление OS за z-ось и обозначим через φ отклонение направления OM, где M — переменная точка на поверхности шара, от OS. Смысл переменных ϑ, ξ, φ'; r и r' ясен из рис. 4:

$$OM = OM' = OM_1 = \rho,$$
$$OS = D, \quad SM = r, \quad SM' = r'.$$

Значение нормальной производной N внешнего поля в точке M, как нетрудно видеть, вычисляется по формуле

$$4\pi N = e^{i\omega(t-r)}\left[\frac{i\omega}{r}\sin\vartheta\,\sin\xi + \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{i\omega r^3}\right)(\sin\vartheta\,\sin\xi + 2\cos\vartheta\,\cos\xi)\right].$$

Так как ω — очень большое число (так как длина волн Герца мала по сравнению с радиусом Земли), в этой формуле достаточно сохранить лишь первый член в квадратных скобках.

Выше мы привели уравнение для волн Герца к виду

$$2\pi\mu = \int \mu' K \, d\sigma' + N$$

и показали, как можно вычислить ядро K. Если теперь мы разложим N и K по шаровым функциям или, так как наша задача обладает симметрией тела вращения с осью OS, по полиномам Лежандра P_n, то получим из этого интегрального уравнения поверхностную плотность электрических зарядов μ также в виде ряда по полиномам Лежандра P_n. В результате получаем:

$$N = \sum K_n P_n; \qquad \int\limits_0^\pi P_n N \sin\varphi \, d\varphi = \frac{2K_n}{2n+1}.$$

Величины K_n имеют вид

$$\frac{A_n J_n(\omega\rho)}{\rho^2},$$

где A_n — число, зависящее только от n, но не зависящее от ρ, а J_n — функция, связанная с функциями Бесселя.

Действительно, под J_n мы понимаем голоморфное в окрестности точки $x = 0$ решение уравнения

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y\left(1 - \frac{n(n+1)}{x^2}\right) = 0,$$

а под $I_n(x)$ — тот интеграл этого уравнения, который при больших положительных значениях x приближенно ведет себя как e^{-ix}. Так как J_n и I_n взаимно независимы, мы можем предположить, что

$$I_n' J_n - J_n' I_n = 1,$$

если под J_n' и I_n' понимать производные от J_n и I_n.

Решение нашего интегрального уравнения принимает вид

$$\mu = A \sum \frac{K_n P_n(\cos\varphi)}{I_n'(\omega\rho) J_n(\omega\rho)}.$$

Но поскольку выражение для K_n содержит в числителе множитель $J_n(\omega\rho)$, и вследствие этого член $J_n(\omega\rho)$ сокращается, характеристическое уравнение для *собственных частот* сводится к

$$I_n'(\omega\rho) = 0.$$

Чтобы придать результатам наглядность, воспользуемся приближенными формулами. Они основаны на том, что при очень больших ω величина $\frac{D}{\rho} - 1$ очень мала. Мы используем следующую приближенную формулу

$$\int \eta\, e^{i\omega\theta}\, dx = \eta\, e^{i\theta} \sqrt{\frac{2\pi}{\omega\theta''}} e^{\pm\frac{i\pi}{4}},$$

где θ и η — заданные функции от x, ω — очень большое число, θ'' — вторая производная от θ, и в правую часть в качестве аргумента следует подставлять такое значение, при котором θ достигает максимума или минимума; в зависимости от того, какой случай представится, в множителе $e^{\pm\frac{i\pi}{4}}$ следует выбирать либо знак $+$, либо знак $-$. Если функция θ имеет в интервале, по которому проводится интегрирование, несколько максимумов или минимумов, то выражение в правой части следует заменить суммой аналогичных членов.

Используя эту формулу, мы получаем для полиномов Лежандра $P_n(\cos\varphi)$ следующее приближенное выражение, справедливое при больших n:

$$P_n = 2\sqrt{\frac{2\pi}{n\,\sin\varphi}} \cdot \cos\left(n\varphi + \frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Из него мы получаем для K_n при $n < \omega\rho$

$$K_n = \frac{2n+1}{8r\sqrt{n}} \left[e^{i\alpha} + e^{i\alpha'}\right] \frac{i\omega\,\sin\vartheta\,\sin\xi}{\sqrt{D\rho}\,\cos\vartheta\,\cos\xi} \sqrt{\frac{\sin\vartheta}{\omega\rho}}.$$

При этом вместо α и α' следует подставлять выражения

$$\alpha = n\varphi - \omega r + \frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{2},$$

$$\alpha' = n\varphi' - \omega r' + \frac{\varphi'}{2},$$

а ξ, ϑ, φ, φ', r и r' — их значения, представленные на рис. 4, для которых

$$\sin\xi = \frac{n}{\omega\rho} \quad \left(\xi < \frac{\pi}{2}\right).$$

Такая же приближенная формула выполняется при $n > \omega\rho$, если в прямоугольных скобках сумму $e^{i\alpha} + e^{i\alpha'}$ заменить на $e^{i\alpha}$ или на $e^{i\alpha'}$; я не буду останавливаться здесь на соображениях относительно того, какой из двух членов следует сохранить.

Чтобы вычислить приближенно член $I'_n J_n$, необходимо различать случай $n < \omega\rho$ и случай $n > \omega\rho$. В первом случае необходимо положить

$$I'_n J_n = e^{i\frac{\alpha-\alpha'}{2}} \cdot \cos\frac{\alpha-\alpha'}{2},$$

во втором случае —

$$I'_n J_n = \frac{1}{2}.$$

Отсюда следует, что и при $n < \omega\rho$, и при $n > \omega\rho$, и больших n

$$\frac{K_n}{I'_n J_n} = \frac{\sqrt{n}}{2r}\, e^{i\alpha} \frac{i\sqrt{\omega}\sin\xi\,(\sin\vartheta)^{3/2}}{\rho\sqrt{D}\,\cos\vartheta\,\cos\xi}.$$ [1]

В сумме, которой мы представили μ, решающее значение имеют те члены, для которых приближенно $n = \omega$. При этих значениях приближенно выполняются соотношения

$$\xi = \frac{\pi}{2} \text{ и } r = \sqrt{2\rho D}.$$

Так как в силу малости величины $\dfrac{D}{\rho} - 1$ угол φ всегда близок к нулю, α как функция от n изменяется очень мало, если n ограничено целыми числами близкими к $n = \omega$. Следовательно, если мы хотим выбрать единицу длины так, чтобы $\rho = 1$, то можно записать

$$\mu = C \sum \frac{\sqrt{\omega}\sin\xi\,(\sin\vartheta)^{3/2}}{\sqrt{\cos\vartheta\,\cos\xi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sin\psi}} \left(\cos n\psi + \frac{\psi}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$

μ — значение поверхности плотности электричества в точке M_1 (см. рис. 4).

[1]Выражение для μ можно записать в более простом виде, а именно

$$\mu = \frac{-i}{4\pi\omega^2\rho^2 D^2} \sum n(n+1)(2n+1)\frac{I_n(\omega D)}{I'_n(\omega\rho)}\, P_n(\cos\varphi),$$

и это — не приближенная, а точная формула.

Из соотношений

$$\sin\xi = \frac{n}{\omega}, \quad \sin\vartheta = \frac{n}{\omega D}; \quad \cos\xi = \sqrt{1-\frac{n^2}{\omega^2}}, \quad \cos\vartheta = \sqrt{1-\frac{n^2}{D^2\omega^2}}$$

получаем:

$$\frac{\sin\xi\,(\sin\vartheta)^{3/2}}{\sqrt{\cos\vartheta\,\cos\xi}} = \frac{\frac{n}{\omega}\cdot\left(\frac{n}{\omega D}\right)^{3/2}\sqrt{D}}{\sqrt[4]{\left(1+\frac{n}{\omega}\right)\left(1+\frac{n}{D\omega}\right)}} \times$$

$$\times \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt[4]{\omega-n}\cdot\sqrt[4]{\omega(D-1)}}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{1+\dfrac{\omega-n}{\omega(D-1)}}},$$

так что в окрестности $n=\omega$ выражение, стоящее в левой части равенства, имеет такой же порядок величины как и

$$\frac{\sqrt[4]{\omega}}{\sqrt[4]{D-1}}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{n-\omega}}.$$

Используя это приближение в нашей формуле для μ и заменяя $\cos(n\psi+ +\frac{\psi}{2}-\frac{\pi}{4})$ экспонентой $e^{i\left(n\psi+\frac{\psi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}$, мы приходим к ряду

$$\frac{\omega^{3/4}e^{i\left(\frac{\psi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{\sin\psi}\cdot\sqrt[4]{D-1}}\cdot\sum_{(n)}\frac{e^{in\psi}}{\sqrt[4]{n-\omega}}.$$

Полагая

$$S=\sum_{(n)}\frac{e^{in\psi}}{\sqrt{n-\omega}},$$

мы получаем возможность рассматривать

$$\int\limits_{\nu}^{\nu+1} Se^{-i\omega\psi}\,d\omega \qquad (\nu \text{ — целое число})$$

как среднее значение ряда S, и я заменю S этим средним значением. Такой прием заведомо обоснован, если нам требуется лишь установить порядок величины S, тем более, что в действительности антенна испускает не только колебания с одной-единственной длиной волны, а целый сплошной спектр колебаний. Мы получаем

$$\int_{\nu}^{\nu+1} Se^{-i\omega\psi}\,d\omega = \sum_{(n)} \int_{\nu}^{\nu+1} \frac{e^{i(n-\omega)\psi}}{\sqrt[4]{n-\omega}}d\omega = -\int_{-\omega}^{+\infty} \frac{e^{iq\psi}}{\sqrt[4]{q}}\,dq,$$

а так как число ω очень велико, интересующий нас интеграл по существу совпадает с $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iq\psi}}{\sqrt[4]{q}}\,dq$.

Аналогичным образом можно показать, что средним значением ряда

$$\sum \frac{e^{-in\psi}}{\sqrt[4]{n-\omega}}$$

можно пренебречь по сравнению с S. Тем самым мы приходим к заключению, что

$$\mu \text{ по порядку величины сравнимо с } \frac{\sqrt[4]{\omega^3}}{\sqrt[4]{D-1}}$$

и, следовательно, отношение

$$\frac{\mu}{N} \text{ по порядку величины сравнимо с } \frac{1}{\sqrt[4]{\omega(D-1)}}.$$

Соответственно, дифракция тем сильнее, чем ближе источник S к поверхности Земли и чем длиннее испускаемые волны. Так объясняется тот удивительный на первый взгляд факт, что используемые в беспроволочной телеграфии волны Герца позволяют передавать телеграфные сигналы с европейского континента, например, в Америку.

Если желательно рассматривать не среднее значение ряда, представляемое некоторым интегралом, а истинное значение ряда, то необходимо провести некоторый анализ на основе теоремы Абеля. Результаты такого рассмотрения оказываются несколько более сложными, но по существу совершенно аналогичными приведенным выше.

Замечание. Я заметил, что последние заключения нуждаются в некоторых изменениях. Приближенные формулы, которыми я пользовался, становятся неверными, если числа n оказываются очень близкими к $\omega\rho$. Их следует заменить другими числами, входящими в целую трансцендентную функцию, удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$y'' = xy.$$

Поскольку число членов, подлежащих такого рода модификации, невелико, я поначалу полагал, что вносимые изменения не скажутся на окончательном результате. Однако более глубокий анализ показал, что это не так. Сумма модифицируемых членов сравнима с суммой других членов, которые я учел и которые задаются приведенной выше формулой; поэтому модифицируемые и другие члены почти полностью компенсируются, так что значение μ, задаваемое окончательными формулами, оказывается значительно меньше значения, вычисляемого по приведенным выше формулам.

Доклад четвертый

О приведении абелевых интегралов и теории фуксовых функций

Господа! Сегодня я хочу поделиться с вами некоторыми соображениями о приведении абелевых интегралов в связи с теорией автоморфных, в особенности фуксовых, функций.

Система абелевых функций от p переменных с $2p$ периодами называется ***приводимой***, если ее можно свести к системе функций от q переменных с $2q$ периодами ($q > p$). Важно с самого начала различать два случая.

В ***первом*** случае систему S абелевых функций от p переменных можно образовать с помощью ***алгебраической кривой*** C рода p. Точно так же возникает система S' от q переменных из теории алгебраического образования рода q.

Однако известно, что первый случай не является общим, так как кривая C зависит только от $3p - 3$ постоянных, в то время как общие абелевы функции от p переменных содержат $\frac{p(p+1)}{2}$ параметров. Во ***втором*** из двух случаев, которые мы различаем, по крайней мере одна из двух систем S и S' не получается из теории алгебраических кривых.

Сегодня я ограничусь в своем докладе исключительно первым из названных случаев. Но в его пределах необходимо различать два подслучая, а именно свои соображения мы будем связывать с двумя алгебраическими кривыми C и C'. В случае приводимости между двумя кривыми возникает алгебраическое *соответствие*. Свойство этого соответствия лежит в основе установленного различия между случаями.

Первый случай состоит в следующем. В силу соответствия каждой точке M кривой C сопоставляется одна и только одна точка M' кривой C'. Наоборот, каждой точке кривой C' соответствуют n точек кривой C. Я называю n ***характеристическим числом*** соответствия, а C — ***многократной кривой*** для кривой C'.

Названный выше первый случай не является общим. Напротив, второй случай обладает необходимой общностью. Соответствие устанавливается не между отдельными точками M и M', а между системой точек $M_1, \ldots, M_\nu$ кривой C с координатами $(x_1, y_1), \ldots, (x_\nu, y_\nu)$ и системой точек $M_1', \ldots, M_\nu'$ кривой C' с координатами $(x_1', y_1'), \ldots, (x_\nu', y_\nu')$. При этом каждой системе точек на C соответствует одна и только одна система точек на C'. Наоборот, каждой системе точек на C' соответствует, вообще говоря, несколько систем точек на C. Кривую C я называю *псевдомногократной* кривой для C'.

В первом случае x' и y' — рациональные функции от x и y, в то время как во втором случае мы можем лишь заключить, что любая рациональная и симметричная функция от $(x_1', y_1', \ldots, x_\nu', y_\nu')$ есть в то же время рациональная функция от $(x_1, y_1, \ldots, x_\nu, y_\nu)$. Нетрудно видеть, что любая кривая C, многократная для C', является в то же время псевдомногократной для C'. Наоборот, я располагаю многими примерами, которые показывают, что не каждая псевдомногократная кривая для C' является в то же время многократной кривой для C'. Я не буду останавливаться на этом подробно, так как все мои последующие рассуждения относятся исключительно к *первому случаю.*

В случае приводимости наших интегралов их таблицу периодов можно представить в особой *нормальной форме.* Свойства этой таблицы наглядно видны из следующих двух примеров.

1) $q = 1$; $p = 3$. Таблица периодов может быть приведена к виду

$$\begin{pmatrix} 2i\pi & 0 & 0 & h & \frac{2i\pi}{\alpha} & 0 \\ 0 & 2i\pi & 0 & \frac{2i\pi}{\alpha} & a & b \\ 0 & 0 & 2i\pi & 0 & b & c \end{pmatrix}.$$

2) $q = 2$; $p = 2$. В этом случае нормированные периоды имеют следующие значения:

$$\begin{pmatrix} 2i\pi & 0 & 0 & 0 & a & b & 0 & \frac{2i\pi}{\alpha} \\ 0 & 2i\pi & 0 & 0 & b & c & \frac{2\pi i}{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 2i\pi & 0 & 0 & \frac{2\pi i}{\alpha\beta} & a' & b' \\ 0 & 0 & 0 & 2i\pi & \frac{2i\pi}{\alpha} & 0 & b' & c' \end{pmatrix}.$$

Числа α и β в обеих таблицах — целые рациональные числа.

Теперь я определю второе *характеристическое число* $\varkappa$. Оно указывает порядок тета-функции от q переменных, в которую можно преобразовать в случае приводимости тета-функцию первого порядка от p переменных. В первом примере $\varkappa = \alpha$, во втором — $\varkappa = \alpha\beta$. ***Оба характеристических числа n и $\varkappa$ всегда равны.*** Я нашел два доказательства этого утверждения, основные положения которых я сейчас изложу.

Первое доказательство. Пусть M и M' — два абелевых интеграла первого, второго или третьего рода кривой C. Мысленно представим себе соответствующую риманову поверхность, на которой в каком-то месте из одной точки проведены $2p$ замкнутых разреза, не разделяющие поверхности на отдельные куски. Тогда M и M' могут обладать следующими периодами:

$$M: x_1, x_2, \ldots, x_{2p},$$
$$M': y_1, y_2, \ldots, y_{2p}.$$

Теперь мне необходимо определить характеристическую фундаментальную *билинейную форму*, а именно, я полагаю

$$F(x, y) = \int M\,dM',$$

где интеграл следует брать по всему контуру разреза. Если x и y — нормальные периоды, то $F(x, y)$ принимает следующий вид:

$$F(x, y) = \sum_{\varkappa=1}^{p} (x_{2\varkappa-1}y_{2\varkappa} - x_{2\varkappa}y_{2\varkappa-1}).$$

Если предположить, что M — один из приводимых интегралов, то его $2p$ периодов можно линейно и с целочисленными коэффициентами выразить всего лишь через $2q$ периодов $\omega_1, \ldots, \omega_{2q}$, и я получаю

$$x_\varkappa = \sum_{j=1}^{2q} x_{\varkappa j}\omega_j \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, 2p),$$

где $m_\varkappa$ — целые рациональные числа. Если теперь M и M' — интегралы первого рода, то, как известно,

$$F(x, y) = 0.$$

Если в это уравнение подставить выражение для x через ω, то получится билинейное уравнение между y и ω, которое можно записать в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^{2q} H_j\omega_j = 0.$$

Пусть теперь $u_1, \ldots, u_p$ — p линейно независимых интегралов первого рода кривой C. Тогда мы можем положить

$$U = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \ldots + \mu_p u_p,$$
$$U' = \mu_1' u_1 + \mu_2' u_2 + \ldots + \mu_p' u_p.$$

Остающиеся пока неопределенными коэффициенты μ' следует найти таким образом, чтобы они удовлетворяли $2q$ линейным уравнениям

$$H_j = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, 2q).$$

Если еще заметить, что эти $2q$ уравнений не являются линейно независимыми, и между ними имеются q соотношений

$$\sum H_j\omega_j = 0,$$

а поэтому легко понять, что M_1 также приводима и что, так как M принадлежит семейству из q приводимых интегралов, то M' является элементом $(p-q)$-кратного бесконечного линейного семейства приводимых интегралов. Это только предварительное соображение.

Я замечу, что H_j является линейной функцией от $y_\varkappa$, поэтому можно записать

$$H_j = \sum_1^{2p} h_{ij} y_i \quad (j = 1,\, 2,\, \ldots,\, 2q),$$

где h_{ij} — рациональные числа. Из элементов $m_{i\varkappa}$ и $h_{i\varkappa}$ я сформулирую две таблицы из $2q$ столбцов и $2p$ строк. Из обоих я сформирую определенные n-рядные детерминанты. Я также обозначу числа m через D и соответственно числа h через D'.

Тогда будем иметь

$$J = \sum DD'.$$

Величина J является *инвариантным* членом в следующем смысле: она остается без изменений, если какую-либо систему периодов x или ω

заменить на эквивалентную. При этом назовем две системы периодов эквивалентными, если они целочисленно и линейно выражаются друг через друга. Теперь можно с одной стороны доказать, что

$$J = \varkappa^2,$$

а с другой

$$J = n^2.$$

Из этого следует, что $\varkappa = 0$, что и заканчивает доказательство. Перейдем к другому доказательству.

Второе доказательство существенно короче. Оно основано на сравнении принадлежащих к S и S' билинейных форм $F(x, y)$ и $\Phi(\omega, \omega')$. С одной стороны, имеем

$$F(x, y) = n\Phi(\omega, \omega'),$$

с другой,

$$F(x, y) = \varkappa\Phi(\omega, \omega').$$

Из этого вытекает, что $\varkappa = n$.

Я подхожу теперь к *связи теории приведения с теорией фуксовых функций.*

Как известно, каждая алгебраическая кривая C определяется системой фуксовых функций. Теперь применим то обстоятельство, что кривая C является многократной кривой для C' следующим образом. Всегда справедливо, что кривая C' определяет группу окружности G', и аналогично, кривая C определяет группу G, при этом G является подгруппой G'. Из того, что кривая C является n-кратной кривой C, следует, что G является подгруппой G' индекса n. Можно получить при этом фундаментальные области G и G, которые оказываются связанными друг с другом. Получен P, ограничивающий G, развивается на n полиномов $P'(\beta)$, которые эквивалентны друг другу в смысле псевдоевклидовой геометрии.

Я обозначу *сторону* полигона P' через $\gamma(\alpha)$ и аналогичную сторону в $P'(\beta)$ через $\gamma(\alpha, \beta)$. Сторона $\gamma(\alpha, \beta)$ лежит или внутри или на границе P. Я буду предполагать, что сторона $\gamma(\alpha)$ переходит в $\gamma(\alpha')$ при групповой операции GG'. Если теперь $\gamma(\alpha, \beta)$ лежит на границе P, то имеется еще одна сторона $\gamma(\alpha', \beta')$ на этой границе, которая конгруентна исходной при действии G. Если же $\gamma(\alpha, \beta)$ лежит во внутренности P, то подобной отличной стороны не существует, но $\gamma(\alpha, \beta)$ и $\gamma(\alpha', \beta')$ связаны друг с другом и образуют общую сторону для $P'(\beta)$ и $P'(\beta')$. Но при этом всегда справедливо, что всякая сторона $\gamma(\alpha)$ полигона P' получается при перестановке n цифр $1, 2, \ldots, n$.

Проведенное выше рассмотрение аналогичным образом можно распространить на *углы полигона* P'. Мы можем объединить стороны в пары и разбить углы на циклы таким образом, что угол одного цикла получается при помощи операции (действия) G над другим циклом. При этом каждый цикл снова можно определить некоторой перестановкой цифр $1, 2, \ldots, n$, которые становятся упорядоченными, подобно сторонам. Я предположу теперь, что полигон P имеет $2N$ сторон и Q угловых циклов. Подобные обозначения введем и для P': $2N'$ и Q'. Один угловой цикл P', соответствующий перестановкам, разбивается в циклические перестановки. Для всех угловых циклов может быть целое число λ_i циклических перестановок для некоторой цифры i. Далее можно установить следующие соотношения:

$$2p = N - Q + 1$$
$$2q = N' - Q' + 1$$
$$Q + 2p - 2 = n(Q' + 2q - 2)$$
$$n(Q' - Q) = 2(p - 1) - 2n(q - 1)$$
$$\sum \lambda_i = Q$$
$$\sum i\lambda_i = nQ'.$$

Изложенные выше общие соображения позволяют нам теперь вывести несколько красивых и важных *теорем о неевклидовой геометрии многоугольников, образованных дугами окружностей, а также геометрии алгебраических кривых.* Я приведу далее несколько примеров таких теорем, не останавливаясь на доказательствах. Впрочем, основные идеи доказательств содержатся в заключительной части моего доклада.

1) $p = 3,\ q = 2,\ n = 2,\ m = m' = 4.$

Через m и m' обозначены порядки кривых C и C'. Кривая C не имеет двойных точек, кривая C' имеет одну двойную точку. *Из 28 двойных касательных к C 6 проходят через одну точку вне кривой.*

2) $p = 4,\ q = 2,\ n = 2,\ m = 4,\ m' = 5.$

У кривой C две двойные точки, у кривой C' — только одна. Если дифференциалы приводимых интегралов первого рода положить равными нулю, то мы получим *пучок конических сечений*, четырьмя базисными точками которого служат двойные точки кривой C и две другие точки той же кривой. Шесть этих конических сечений дважды касаются кривой C. Те из них, которые касаются кривой C в базисной точке, соприкасаются сами собой в этой точке.

3) $p = 2,\ q = 1,\ n = 1$.

Кривая C — *кратное двух различных* кривых C' и C''. Существует фуксова группа G, для которой можно построить как первый многоугольник P_1, состоящий из двух многоугольников группы G', соответствующей кривой C', так и второй многоугольник P_2, состоящий из двух многоугольников группы G'', соответствующей кривой C''. Таким образом, G содержится и в G', и в G'' как подгруппа индекса 2. Схематический чертеж на рис. 5 помогает составить наглядное представление об отношениях между многоугольниками. Две упомянутые выше фундаментальные области P_1 и P_2 группы G представлены многоугольниками с вершинами A и C. Каждый из этих многоугольников распадается на два шестиугольника — фундаментальные области группы G' или G''. Чтобы сделать более наглядной эквивалентность P_1 и P_2, центры симметрии упомянутых шестиугольников соединены с серединами сторон, чтобы все многоугольники можно было легче построить из получающихся четырехугольников.

Перехожу к теоремам из геометрии алгебраических кривых, которым нас учит этот пример. Если M' — точка на кривой C', то на кривой C ей соответствуют две точки M_a и M_b. Каждой из них на кривой C'' соответствует по одной точке: M''_a и M''_b. Следовательно, в общем случае каждой точке кривой C' соответствуют две точки кривой C''. Точно так же мы заключаем, что в общем случае каждой точке кривой C'' соответствуют две точки кривой C'. Соответствие (C', C'') имеет две точки ветвления M'_1 и M'_2. Следовательно, каждой из них соответствует только одна точка кривой C, а также только одна точка кривой C'': M''_1 и M''_2. Соотношение (C'', C) также имеет две точки ветвления N''_1 и N''_2. Каждой из них соответствует только одна точка кривой C': N'_1 и N'_2. Первую из теорем, которые мы хотели привести, можно сформулировать следующим образом.

Точки N'_1 и N'_2, с одной стороны, и точки M''_1 и M''_2, с другой, совпадают.

Перехожу ко второй теореме, которая имеет место, когда кривые C' и C'' третьего порядка.

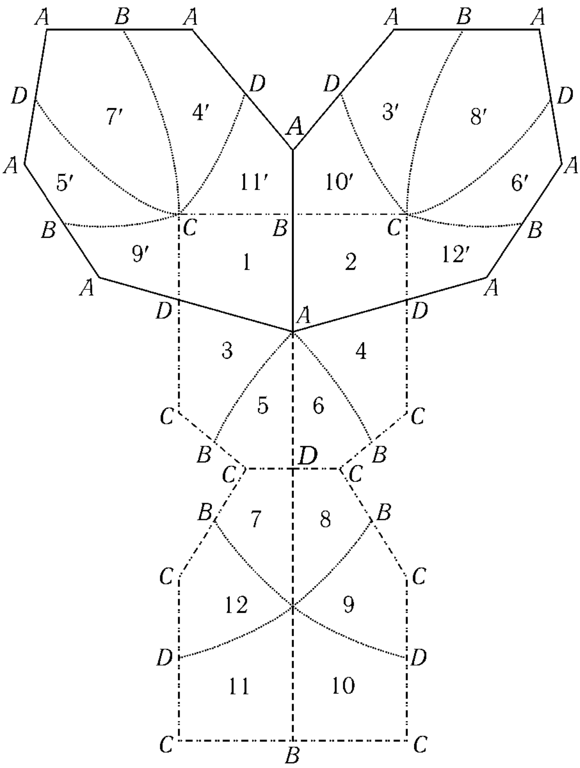


Рис. 5

В точке $N_1' = N_2'$ я могу провести касательную к кривой C'. Соединяю затем точки M_1' и M_2' секущей. Касательная и секущая пересекаются в точке, лежащей на кривой C'. Точно так же я могу провести через точку $M_1'' = M_2''$ касательную к кривой C'' и продолжить ее до пересечения с секущей $N_1''N_2''$. Точка пересечения лежит на кривой C''.

Эти немногочисленные примеры позволяют понять, сколь многочисленны различные частные случаи.

Доклад пятый

О трансфинитных числах

Господа! Сегодня мой доклад посвящен понятию трансфинитного кардинального числа, и прежде всего я хочу поговорить об одном *кажущемся* противоречии, которое якобы содержит это понятие. Но прежде чем начать, я хотел бы сделать следующее предварительное замечание: по моему мнению, предмет мыслим только тогда, когда его можно определить конечным число слов. Предмет, определимый конечным числом слов, я буду для краткости называть просто определимым. С этой точки зрения неопределимый предмет немыслим. Аналогично, я буду называть закономерность высказываемой, если ее можно высказать за конечное число слов.

Г-н Ришар доказал, что множество определимых предметов счетно, т.е. кардинальное число этого множества есть $\aleph_0$. Доказательство совсем просто: пусть α — число слов в словаре, тогда n словами можно определить самое большее α^n предметов. Если теперь разрешить n неограниченно возрастать, то, как нетрудно видеть, даже в этом случае невозможно выйти за пределы счетного множества. Следовательно, мощность множества мыслимых предметов была бы равна $\aleph_0$. Г-н Шенфлис возразил против этого доказательства, заметив, что с помощью одного-единственного определения можно задать несколько, даже бесконечно много предметов. В качестве примера он приводит определение функций-констант, которых, очевидно, бесконечно много. Такое возражение неприемлемо потому, что определения этого типа задают не отдельные предметы, а их совокупность, в нашем примере — *множество* функций-констант, и это множество представляет собой один-единственный предмет. Итак, выдвинутое г-ном Шенфлисом возражение необосновано.

Как известно, Кантор доказал, что континуум не счетно-бесконечен; это противоречит доказательству Ришара. Возникает вопрос: какое из двух доказательств верно. Я утверждаю, что оба доказательства верны и что противоречие, о котором идет речь, лишь кажущееся. Для обоснования этого утверждения я приведу новое доказательство теоремы Кантора. Таким образом, предположим, что задан отрезок AB и правило, по которому каждой точке этого отрезка поставлено в соответствие целое число. Для простоты условимся обозначать точки соответствующими им целыми числами. Разделим наш отрезок двумя произвольно выбранными точками A_1 и A_2 на три части, которые назовем подотрезками первой ступени; каждую из этих частей в свою очередь разделим на три части и получим подотрезки второй ступени; мысленно представим себе этот процесс продолженным до бесконечности, причем длины подотрезков у каждой границы должны уменьшаться. Точка 1 принадлежит одной или, самое большее (когда точка 1 совпадает с точкой A_1 или точкой A_2) двум подотрезкам первой ступени, и, следовательно, заведомо существует один подотрезок первой ступени, которому точка 1 не принадлежит. На этом отрезке найдем точку с наименьшим номером, которых должно быть по меньшей мере две. Среди трех подотрезков второй ступени, принадлежащих тому отрезку первой ступени, на котором мы находимся, снова найдется по крайней мере один, к которому не принадлежит последняя из рассмотренных нами точек. Продолжив наш метод на этом отрезке, мы получим в итоге последовательность отрезков, обладающих следующими свойствами: каждый из них содержится во всех предыдущих отрезках, и один из отрезков n-ой ступени не содержит ни одну из точек с номерами от 1 до $n-1$. Из первого свойства следует, что должна существовать по крайней мере одна точка, общая для всех отрезков; тогда как из второго свойства следует, что номер этой точки должен быть больше любого конечного числа, т. е. этой точке невозможно поставить в соответствие ни одно из чисел.

Из какого предположения мы исходили в этом примере? Мы приняли предположение о правиле, по которому каждой точке отрезка поставлено в соответствие некоторое целое число. Затем нам удалось определить точку, которой не соответствует никакое число. В этом отношении приведенные выше различные доказательства теоремы не отличаются. Но прежде всего необходимо установить правило. По Ришару, такое правило, по-видимому, существует, но Кантор доказал противоположное. Можно ли найти выход из создавшейся дилеммы? Проанализируем, как надлежит понимать слово «определимый». Мы берем перечень всех конечных утверждений и вычеркиваем из него все утверждения, которые не определяют никакой точки. Оставшиеся утверждения мы поставим в соответствие целым числам. Если теперь мы снова просмотрим наш перечень, то в общем случае можно показать, что некоторые из ранее вычеркнутых утверждений теперь придется оставить. Действительно, утверждения, в которых речь шла о правиле соответствия, ранее не имели значения, так как точки не были поставлены в соответствие целым точкам. Теперь же эти утверждения обрели значение и поэтому должны оставаться в нашем списке. Если бы мы изменили правило, по которому устанавливается соответствие между точками и целыми числами, то та же самая трудность повторилась, и так до бесконечности. Но именно в этом и заключается разрешение кажущего противоречия между Ришаром и Кантором. Пусть M_0 — множество целых чисел, M_1 — множество точек нашего отрезка, определяемых всеми конечными утверждениями, сохранившихся в нашем перечне после первого вычеркивания, G_1 — правило, устанавливающее соответствие между M_0 и M_1. Правило G_1 порождает новое множество определимых точек M_2. Но множеству $M_1 + M_2$ соответствует новое правило G_2, которое в свою очередь порождает новое множество M_3, и т. д. Доказательство Ришара учит нас, что там, где я оборву применение нашего построения, всегда существует некоторое правило соответствия, тогда как Кантор доказывает, что наше построение можно продолжать сколь угодно долго. Таким образом, между доказательствами Ришара и Кантора никакого противоречия не возникает.

Видимость противоречия связана с тем, что правилу соответствия по Ришару недостает одного свойства, которое я назову «предикативностью», заимствуя это выражение у одного английского философа. (По Расселлу, у которого я заимствую этот термин, определение двух понятий A и A' не предикативно, если A упоминается в определении понятия A' и наоборот.) Под предикативностью я понимаю следующее. Каждое правило соответствия предполагает определенную классификацию. Я называю соответствие предикативным, если лежащая в его основе классификация предикативна. Что же касается классификации, то я называю ее предикативной,если она не изменяется от введения новых элементов. В этом смысле правило соответствия Ришара непредикативно; более того, введение предложенного им правила соответствия изменяет классификацию утверждений на имеющие значение и на не имеющие значение. То, что в этом случае имеется в виду под атрибутом «предикативный», лучше всего пояснить на примере. Если мне требуется упорядочить множество, распределив образующие его предметы по некоторому числу коробок, то могут представиться два случая: либо упорядоченные предметы в конце концов окажутся на своих местах, либо мне придется всякий раз, когда я буду классифицировать новый предмет, извлекать какой-то другой предмет (или другие предметы) из той коробки (или тех коробок), в которой он (или они) находились. В первом случае я называю классификацию предикативной, во втором — непредикативной. Хороший пример непредикативного определения привел Расселл: пусть A — наименьшее число, для определения которого требуется более ста немецких слов. Число A должно существовать, так как с помощью ста слов можно определить лишь конечное количество чисел. Но определение, которое мы выше дали числу A, содержит меньше ста слов, таким образом, число A и *определимо*, и *неопределимо*.

Цермело высказал возражение против отказа от непредикативных определений, ссылаясь на то, что в таком случае пришлось бы отказаться от большей части математики, например, от доказательства существования корня алгебраического уравнения.

Как известно, это доказательство состоит в следующем.

Дано алгебраическое уравнение $F(x) = 0$. Доказывают, что у $|F(x)|$ должен быть минимум. Пусть x_0 — то значение аргумента, при котором достигается минимум, следовательно,

$$|F(x)| \geqslant |F(x_0)|.$$

Отсюда далее следует, что $F(x_0) = 0$. Такое определение $F(x_0)$ непредикативно, так как значение $F(x_0)$ зависит от множества значений $F(x)$, к которому оно принадлежит.

Я не могу останавливаться на обосновании этого возражения. Доказательство можно преобразовать так, чтобы непредикативные определения из него исчезли. Для этого я рассмотрю совокупность значений аргумента вида $\dfrac{m+ni}{p}$, где m, n и p — целые числа. Я могу воспользоваться теми же рассуждениями, что и прежде, но значение аргумента, при котором достигается минимум $|F|$, вообще говоря не принадлежит к рассматриваемым значениям аргумента. Тем самым мы избегаем круга в доказательстве. От каждого математического доказательства можно потребовать, чтобы оно содержало только предикативные определения и т. д., так как в противном случае доказательство нестрого.

А как обстоит дело с классическим доказательством теоремы Бернштейна? Свободно ли оно от противоречия? Как известно, теорема

Бернштейна утверждает, что если даны три множества A, B и C, такие, что A содержится в B, а B содержится в C, и если A эквивалентно C, то A должно быть эквивалентно B. Таким образом, и в этом случае речь идет о правиле, по которому устанавливается соответствие. Если первое правило установления соответствия (между A и C) предикативно, то, как показывает доказательство, второе правило установления соответствия между A и B также должно быть предикативным.

Что же касается второго трансфинитного кардинального числа $\aleph_1$, то я не совсем убежден в том, что оно существует. Мы приходим к нему через рассмотрение множества ординальных чисел мощности $\aleph_0$; ясно, что это множество должно иметь более высокую мощность. Спрашивается, однако, замкнуто ли оно, чтобы мы могли говорить о его мощности, не впадая при этом в противоречие. Актуальной бесконечности здесь во всяком случае не существует.

А как обстоит дело с знаменитой *проблемой континуума*? Можно ли вполне упорядочить точки пространства? Что мы под этим понимаем? Возможны два случая. Во-первых, мы можем утверждать, что правило вполне упорядочения высказываемо за конечное число слов; тогда это утверждение не доказуемо, и даже г-н Цермело не претендует на то, чтобы представить такое доказательство. Но мы допускаем и такую возможность, что правило не выразимо с помощью конечного числа слов. В этом случае я не могу придать утверждению никакого смысла, оно для меня — «пустой звук». В этом и заключается трудность. И в этом же — причина споров по поводу почти гениальной теоремы Цермело. Эти споры весьма примечательны: одни отвергают постулат выбора, но тем не менее считают доказательство правильным, другие считают постулат выбора приемлемым, но не признают доказательство.

Я могу говорить на эту тему еще несколько часов, но не в силах решить проблему.

Доклад шестой
Новая механика

Дамы и господа! Сегодня я вынужден говорить по-французски и поэтому считаю необходимым принести вам свои извинения. Правда, свои предыдущие доклады я прочитал на немецком языке, на очень плохом немецком: говорить на чужом языке означает идти, хромая; хромому необходимы костыли; моими костылями до сих пор были математические формулы; вы даже не представляете, как много они значат для оратора, который не слишком тверд в языке. Но сегодня я не хочу использовать в своем докладе формулы, тем самым я остаюсь без костылей, и поэтому мне придется говорить по-французски.

Как вам известно, в этом мире нет ничего определенного, ничего незыблемого; самые могущественные, самые прочные империи не вечны — на эту тему охотно разглагольствуют религиозные проповедники. Научные теории подобны империям: долголетие им отнюдь не уготовано. И если какой-нибудь из них удалось найти себе безопасное убежище от ударов времени, то это, несомненно, ньютоновская механика. В этом отношении она не знает себе равных, это монумент, воздвигнутый на века, и я отнюдь не собираюсь говорить о том, что этот монумент воздвигнут на земле, что он преждевременен, наоборот, я утверждаю, что этот монумент неколебим. В это же время я не могу не упомянуть о том, что ньютоновская механика подвергается нападкам великих ниспровергателей, и среди них г-н Макс Абрахам и голландский физик г-н Лоренц. Я хотел бы сказать несколько слов о руинах старого здания и фундаменте нового, воздвигаемого на его месте.

Что прежде всего характерно для старой механики? Три простых факта: я рассматриваю тело в состоянии покоя, сообщаю ему импульс, то есть в течение заданного времени действую на него заданной силой; тело приходит в движение, приобретает некоторую скорость; если на тело, которое обрело эту скорость, подействовать той же силой в течение того же времени, то скорость удвоится; при дальнейшем повторении скорость утроится после того, как мы сообщим телу такой же импульс в третий раз. После того, как мы проделаем это достаточно большое число раз, тело приобретет очень большую скорость, которая может превзойти любой предел, т. е. скорость тела станет бесконечной.

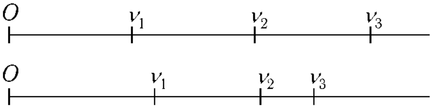


Рис. 6

Наоборот, в новой механике телу, находившемуся в покое, невозможно сообщить скорость превышающую скорость света. Как такое возможно? Рассмотрим то же самое тело, находящееся в покое. Придадим ему такой же импульс, как в первый раз, и оно приобретет такую же скорость; сообщим ему такой же импульс второй раз, скорость тела возрастет, но не удвоится; третий импульс окажет аналогичное действие, скорость будет постепенно возрастать, но все меньше и меньше, тело сопротивляется все сильнее и сильнее. Это сопротивление, т. е. инерция, есть то, что принято называть массой; таким образом, все, что происходит в новой механике, сводится к тому, что масса не постоянна, а возрастает со скоростью. Это явление мы можем представить графически (рис. 6): в старой механике тело приобретает после первого импульса скорость, представленную отрезком $O\nu_1$, после второго импульса скорость $O\nu_1$ получает приращение $\nu_1\nu_2$, равное $O\nu_1$; с каждым новым импульсом скорость возрастает на такую же величину, и отрезок, изображающий скорость тела, каждый раз удлиняется на одну и ту же величину; в новой механике скорость, представляемая отрезком $O\nu'_1$, возрастает последовательно на отрезки $\nu'_1\nu'_2$, $\nu'_2\nu'_3, \ldots$, которые становятся все короче, причем так, что результирующая скорость не может превзойти определенный предел — скорость света.

Каким образом можно прийти к таким заключениям? Существуют ли прямые экспериментальные подтверждения? Расхождения между старой и новой механиками возникают не только для тел, движущихся с большими скоростями; просто при очень больших скоростях различия проявляются более заметно и ощутимо. Но что такое очень большая скорость? Это скорость автомобиля, делающего 100 км в час; какой восторг охватывает при движении с такой скоростью! Но с точки зрения новой механики эта скорость очень мала, можно сказать, скорость улитки. Астрономия дает нам более высокие скорости: Меркурий, самое быстрое из небесных тел, проходит те же 100 км, но не за час, а за секунду, но и такая скорость не достаточна (очень мала) для того, чтобы мы могли заметить различие между старой и новой механикой. Я уже не говорю о пушечных ядрах: они движутся быстрее, чем автомобиль, но медленнее, чем Меркурий. Как вам известно, снаряды, выпущенные из современных орудий, летят гораздо быстрее. Упомяну о радии, который испускает «снаряды» (если подходить с точки зрения энергии): «скорострельность» радия необычайно велика, начальная скорость испускаемых частиц достигает 100000 км в секунду, т. е. трети скорости света. Правда, калибр радиевых «снарядов» и их вес очень малы, и нам не следует рассчитывать на эту артиллерию в надежде увеличить боевую мощность наших армий. Можно ли экспериментировать с такими частицами? Такие эксперименты проводились и небезуспешно. Под влиянием электрического и магнитного поля траектории частиц отклоняются, что позволяет судить об инерции частиц и измерять ее. Было установлено, что масса зависит от скорости, и сформулирована следующая закономерность: инерция тела возрастает с его скоростью, которая всегда остается меньше скорости света, т. е. 300000 км в секунду.

Перехожу ко второму принципу — принципу относительности. Предположим, что некий наблюдатель движется вправо. Все, что происходит с точки зрения этого наблюдателя, происходит так, как если бы он находился в состоянии покоя: окружающие предметы движутся влево, никакими средствами невозможно установить, движутся ли предметы в действительности, и неподвижен ли наблюдатель или находится в движении. В любом курсе механики говорится, что пассажиру, стоящему на палубе судна, кажется будто движется берег, тогда как его самого незаметно уносит в противоположном направлении движение судна. При более внимательном рассмотрении следующее простое понятие обретает фундаментальное значение. Никакими средствами невозможно решить вопрос, никаким экспериментом невозможно опровергнуть принцип: абсолютное пространство не существует, все наблюдаемые нами перемещения относительны. Эти соображения хорошо знакомы философам. Как-то раз мне представился случай сформулировать их публично. В результате я приобрел известность, которую охотно избежал бы. Все реакционные французские газеты принялись доказывать, что Солнце обращается вокруг Земли. На знаменитом процессе инквизиции против Галилея последний был признан виновным по всем пунктам.

Но вернемся к старой механике. Она допускала принцип относительности. Вместо того, чтобы основываться на экспериментах, старая механика выводила свои законы из этого фундаментального принципа. Этих соображений было достаточно для чисто механических явлений, но не меньшую роль они играли и в других важных разделах физики, например, в оптике. Скорость света относительно эфира рассматривалась как абсолютная. Эту скорость можно было измерить. Теоретически физики получили средство, позволявшее сравнивать перемещение движущегося тела с абсолютным перемещением, средство, позволявшее решать, находится ли тело в абсолютном движении или не находится.

Тонкие эксперименты, необычайно точные приборы, в описание которых я не буду сейчас вдаваться, позволили предпринять попытки практически реализовать сравнение абсолютного и относительного движений. Результат оказался равным нулю. Принцип относительности не допускает никаких ограничений в новой механике. Он имеет, так сказать, абсолютное значение.

Чтобы понять роль, которую принцип относительности играет в новой механике, поговорим прежде всего о кажущемся времени — остроумнейшем изобретении физика Лоренца. Предположим, что два наблюдателя находятся в Париже (наблюдатель A) и Берлине (наблюдатель B). У A и B имеются одинаковые хронометры, которые наблюдатели хотят сверить и поставить одинаково. Наблюдатели на редкость педантичны и хотят добиться совпадения показаний своих хронометров с необычайной точностью, например, с точностью не до секунды, а до миллиардной доли секунды. Как добиться столь высокой точности? Из Парижа в Берлин A посылает телеграфный сигнал, если угодно, чтобы быть совсем современным, он использует беспроволочный телеграф. Наблюдатель B отмечает момент приема сигнала, и этот момент становится началом отсчета времени для обоих хронометров. Но для того, чтобы дойти из Парижа в Берлин, сигналу требуется определенное время: сигнал распространяется всего лишь со скоростью света и, следовательно, достигает наблюдателя B с запозданием. Наблюдатель B слишком умен для того, чтобы не учитывать этого обстоятельства, и он пытается исправить положение. Проще всего поступить следующим образом: взяв встречные сигналы, испущенные наблюдателем A и B, образовать среднее полученных поправок и таким образом определить точное время. Но вполне ли определено это среднее? Мы предполагаем, что от A к B сигнал распространяется за то же время, за которое доходит от B к A. Но ведь Земля в своем движении переносит наблюдателей A и B относительно эфира, среды-носителя электрических волн. Когда наблюдатель A испускает свой сигнал, тот бежит перед ним, а B удаляется от сигнала, поэтому времени требуется больше, чем в случае, когда оба наблюдателя покоились бы. Наоборот, если бы сигналы испускал B, а принимал A, то времени потребовалось бы меньше, поскольку наблюдатель A двигался бы навстречу сигналам. Наблюдателям совершенно невозможно узнать, показывают ли их хронометры одно и то же время или показания хронометров расходятся. Каким бы ни был используемый метод, те же трудности остаются и при наблюдении астрономических явлений — любой оптический метод сталкивается с одними и теми же трудностями: наблюдатель B может знать только промежутки кажущегося времени, своего рода локального времени. Принцип относительности универсален.

В старой механике принцип относительности позволил вывести все фундаментальные законы. Может быть стоит попытаться вернуться к классическим рассуждениям и придерживаться их? Рассмотрим снова двух наблюдателей A и B, как принято обозначать любых двух наблюдателей в математике. Предположим, что они движутся, удаляясь друг от друга, и ни один из них не движется быстрее света, например A движется со скоростью 200000 км в секунду налево, а B — со скоростью 200000 км в секунду направо. Можно считать, что наблюдатель A покоится, а наблюдатель B движется относительно него с кажущейся скоростью 400000 км в секунду. Если наблюдатель A знаком с новой механикой, то он скажет: «B обладает скоростью, которой он не может достичь, следовательно я нахожусь не в состоянии покоя, а в движении». Может показаться, что A в состоянии выносить в своем состоянии абсолютные суждения. Но было бы необходимо, чтобы A мог наблюдать движение B. Чтобы произвести такое наблюдение, A и B сначала сверяют свои часы, затем B посылает наблюдателю A телеграммы, по которым тот устанавливает последовательность точек, в которых находится B; рассматривая совокупность последовательных положений наблюдателя B, наблюдатель A получает возможность судить о его движении и начертить траекторию наблюдателя B. Но поскольку сигналы распространяются со скоростью света, часы, которые отсчитывают кажущееся время, изменяют свой ход в каждый момент времени, и все происходит так, как если бы часы наблюдателя B спешили. Движение наблюдателя B кажется сильно замедленным, и его кажущаяся скорость относительно наблюдателя A не превосходит того предела, которого она не должна достигать. Наблюдатель A никаким способом не может установить, движется ли он или находится в состоянии абсолютного покоя.

Необходимо принять еще и третью гипотезу, еще более удивительную, еще более трудную для восприятия, еще более противоречащую нашим привычным представлениям. Эта гипотеза гласит, что любое тело, совершающее поступательное движение, претерпевает деформацию в направлении движения. Например, сфера деформируется в сплющенный эллипсоид, малая ось которого параллельна направлению движения. Если такая деформация незаметна при любом параллельном переносе, то лишь потому, что из-за своей малости она почти неощутима. Земля в своем движении по орбите деформируется примерно на 1/200000000. Чтобы заметить такое тонкое явление, необходимо располагать чрезвычайно точными измерительными приборами. В нашем же случае их точность должна была бы быть бесконечной (и это отнюдь не завышенное требование!), поскольку переносимые Землей приборы сами претерпевают такое же сокращение в направлении движения. Сокращение остается незамеченным: измерительный стержень должен быть короче измеряемой длины. Можно лишь придумать те или иные способы, позволяющие сравнивать длину движущихся тел с помощью скорости света. Таковы тонкие эксперименты, поставленные Майкельсоном. Я не буду останавливаться на их подробном изложении. Скажу только, что результаты их оказались весьма необычными: каким бы странным нам это не казалось, приходится признать, что третья гипотеза полностью подтвердилась.

Таковы основы новой механики. Опираясь на изложенные выше гипотезы, можно показать, что новая механика совместима с принципом относительности.

Применим теперь новую механику к новой концепции вещества.

Для современного физика атом не является более простым элементом: он превратился в настоящую вселенную, в которой мириады планет, гравитируя, обращаются вокруг крохотных солнц. И солнца, и планеты представляют собой частицы, *заряженные* либо отрицательно, либо положительно. Физик называет отрицательно заряженные «планеты» *электронами* и строит из них всю Вселенную. Некоторые представляют себе нейтральный атом как положительно заряженную центральную массу, вокруг которой обращается большое число отрицательно заряженных электронов, суммарный электрический заряд которых равен по величине заряду центрального ядра.

Такая концепция вещества позволяет легко учесть увеличение массы тела с увеличением скорости, которое является одной из характерных особенностей новой механики. Любое тело представляет собой не только совокупность электронов, оно позволяет нам обнаруживать электроны. Заметим теперь, что изолированный электрон, перемещаясь в эфире, порождает электрический ток, т. е. электромагнитное поле. Это поле соответствует некоторому количеству энергии, локализованной не в электроне, а в эфире. Изменение скорости электрона по величине или направлению приводит к изменению поля и превращается в изменение электромагнитной энергии эфира. Согласно ньютоновской механике затраты энергии обусловлены только инерцией движущегося тела, тогда как согласно новой механике часть затрат энергии связана с тем, что можно было бы назвать инерцией эфира относительно электромагнитных сил. Инерция эфира возрастает с увеличением скорости и в пределе, когда скорость стремится к скорости света, обращается в бесконечность. Кажущаяся масса электрона возрастает со скоростью. Как показали эксперименты Кауфмана, реальная постоянная масса электрона пренебрежимо мала по сравнению с кажущейся массой, и ее можно считать равной нулю.

В новой концепции вещества постоянная масса вещества бесследно исчезает. Инерцией обладает только эфир, но отнюдь не вещество. Только эфир оказывает сопротивление движению. Можно было бы сказать так: вещества нет, есть только дыры в эфире. В том, что касается стационарных или квазистационарных движений, новая механика (в той степени приближения, которую позволяют достичь наши измерения) не отличается от ньютоновской механики. Единственное отличие состоит в том, что в новой механике масса перестает быть независимой от скорости и угла, образуемого скоростью с направлением ускоряющей силы. Если же скорость изменяется с большим ускорением, как это происходит, например, в случае очень быстрых колебаний, то генерация волн Герца представляет потерю энергии электроном, стремящимся смягчить свое движение. Таким образом, в беспроволочной телеграфии испускание волн вызвано колебаниями электронов в осциллирующем разряде.

Аналогичные колебания происходят в пламени, а также в раскаленных телах. По Лоренцу, внутри раскаленного тела циркулирует значительное количество электронов, которые, не имея возможности покинуть тело, носятся по всем направлениям и отражаются от поверхности тела. Эти электроны можно было бы сравнить с роем мушек, попавших в бокал и тщетно пытающихся выбраться за стенки своей темницы, отчаянно трепеща крылышками. Чем выше температура, тем быстрее движение электронов, тем больше взаимных столкновений и тем многочисленнее отражения от стенок. При каждом столкновении и каждом отражении испускается электромагнитная волна, и раскаленные тела позволяют нам наглядно воспринять эти волны.

Трубка Крукса делает движение электронов почти осязаемым. Электроны, испускаемые катодом, бомбардируют антикатод. Катодные лучи интенсивно «освещают» антикатод и частично отражаются, порождая электромагнитное излучение, которое многие физики отождествляют с рентгеновскими лучами.

В заключение нам остается изучить отношения новой механики с астрономией. Коль скоро понятие постоянной массы тела утрачивает силу, то что происходит с законом всемирного тяготения Ньютона? Он может выполняться только для тел, находящихся в состоянии покоя. Кроме того, необходимо принять во внимание, что тяготение распространяется не мгновенно. Следовательно, вполне обоснован вопрос о том, не усложнит ли новая механика астрономию, не позволяя получить более точное приближение, чем то, которое дает классическая небесная механика. Г-н Лоренц попытался рассмотреть этот вопрос. Исходя из закона всемирного тяготения Ньютона, который по предположению выполняется для двух наэлектризованных тел, находящихся в состоянии покоя, Лоренц вычислил электродинамическое действие токов, порождаемых этими движущимися телами. Таким способом Лоренц получил новый закон всемирного тяготения, в который как параметры входят скорости двух тел. Прежде чем приступать к анализу того, как новый закон всемирного тяготения учитывает астрономические явления, заметим, что ускорение небесных тел влечет за собой электромагнитное излучение и, следовательно, диссипацию энергии, что в свою очередь уменьшает скорость небесных тел. Следовательно, в конечном счете планеты должны упасть на Солнце. Но подобная перспектива не должна нас пугать: катастрофа может произойти только через миллионы миллиардов веков. Обратившись теперь к закону всемирного тяготения, мы легко заметим, что различие между старой и новой механикой тем заметнее, чем больше скорости планет. Следовательно, если такое различие заметно у какой-нибудь планеты, то наиболее ощутимо оно у Меркурия, так как Меркурий обладает наибольшей скоростью среди всех планет. Справедливо заключение о том, что Меркурий представляет собой еще не объясненную аномалию: движение перигелия Меркурия происходит быстрее, чем движение, вычисляемое по классической теории. Наблюдаемое ускорение на $38''$ больше. Леверрье приписал эту аномалию влиянию еще не открытой планеты, и один астроном-любитель сообщил о том, что ему якобы удалось наблюдать прохождение этой планеты по Солнцу. Никому больше наблюдать неизвестную планету не доводилось, и, к сожалению, уверенность в существовании этой планеты не имеет под собой никакой основы. Новая механика позволяет лучше учесть относительную ошибку в движении Меркурия, но и она оставляет ошибку в $32''$ между теоретической величиной и наблюдением. Таким образом, новой механике не удалось достичь должного согласия с теорией Меркурия. Если такой результат не может считаться решающим свидетельством в пользу новой механики, то в еще меньшей степени его можно считать неблагоприятным для принятия новой механики, поскольку вносимая новой механикой поправка к старой теории имеет нужный знак. Теории других планет не столь существенно изменяются под влиянием новой механики, и поправки почти полностью совпадают с теми значениями, которые дает классическая теория.

В заключение я хочу сказать, что вопреки весьма веским аргументам и выдвигаемым против них фактам, было бы преждевременно считать классическую механику полностью отвергнутой. Как бы то ни было, она остается механикой скоростей, очень малых по сравнению со скоростью света, и, следовательно, механикой нашей практической жизни и нашей земной техники. И хотя за несколько последних лет соперница классической механики одерживает одну победу за другой, я хотел бы обратить ваше внимание на некий педагогический «подводный камень», таящий немалую опасность, которой не избежали некоторые почтенные ученые мужи, особенно во Франции. Эти мэтры не нашли ничего лучше, как, преподавая своим воспитанникам элементарную механику, обучать их новой механике, в которой понятия массы и времени имеют совсем иной смысл, чем в классической механике, которая по их мнению устарела, и ее необходимо заменить новой механикой. С высоты новой механики они считают классическую механику пережитком прошлого, изменяют учебные программы и внушают своим ученикам презрительное отношение к классической механике. Однако я глубоко убежден, что именно презираемая этими мэтрами классическая механика остается необходимой и поныне, и что, не зная ее, невозможно глубоко понять новую механику.

ГЕТТИНГЕНСКИЕ ЛЕКЦИИ ПУАНКАРЕ[1]

Дж. Д. Биркгоф

В этих шести геттингенских лекциях, прочитанных 22–28 апреля 1909 г. по приглашению комиссии Вольфскеля, Пуанкаре с большим мастерством затронул широкий круг интересных вопросов. Однако, вследствие ряда причин методы и результаты были представлены очень кратко, что сделало эту маленькую книгу трудночитаемой. К счастью, читатель, не удовлетворенный данным конспективным изложением, может в значительной степени пополнить его с помощью недавних статей Пуанкаре[2]. Представленные в них темы в порядке очередности таковы: (1) уравнения Фредгольма, (2) применение теории интегральных уравнений к движению жидкости, (3) применение теории интегральных уравнений к волнам Герца, (4) приведение абелевых интегралов и теория фуксовых функций, (5) трансфинитные числа, (6) новая механика. Шестая лекция, популярная по сути, была прочитана на французском языке.

Уравнения Фредгольма. Известно, что интегральное уравнение второго рода

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_a^b f(x, y)\varphi(y)dy + \psi(x)$$

допускает два формальных решения: решение Неймана в виде степенного ряда по положительным целочисленным степеням параметра λ, сходящегося при малых значениях λ, и решение Фредгольма в виде отношения двух целых функций от λ. Сначала подсчетом комбинаций Пуанкаре выводит фундаментальную формулу для $\log D(\lambda)$, где $D(\lambda)$ —

[1]Poincaré's Göttingen Lectures. Bull. Amer. Society, vol. 17, №4, Jan., 1911.

[2]Первая лекция: Acta Mathematica, vol. 33 (1909), p. 57–86. Третья лекция: Palermo Rendiconti, vol. 30 (1910), p. 169–259. Четвертая лекция: Palermo Rendiconti, vol. 29 (1909), p. 281–336. Пятая лекция: Acta Mathematica, vol. 32 (1908), p. 195–200 и Revue de Metaphysique et de Morale, 1909, p. 461–482.

знаменатель резольвенты Фредгольма, а затем сразу определяет числитель по формуле Неймана для резольвенты. С помощью этого метода сравнения можно провести явный анализ решения интегрального уравнения. Естественное обобщение этого метода позволяет Пуанкаре обратиться к важному случаю, когда ядро $f(x, y)$ становится бесконечным, но некоторое итерированное ядро $f_n(x, y)$ остается конечным. Фредгольм показал, что решение существует; но в его формулах остался общий множитель в числителе и знаменателе, который далее можно устранить с помощью модифицированной резольвенты. Эта резольвента получается очень просто — вычеркиванием определенных членов из резольвенты Фредгольма.

Далее изложены некоторые частные результаты для случая, когда $f(x, y)$ и все итерированные ядра становятся бесконечными, и лекция заканчивается рассмотрением двух особых интегральных уравнений первого рода, приводимых к уравнениям Фредгольма при помощи интеграла и ряда Фурье.

Применение теории интегральных уравнений к движению жидкости. В этой и последующей лекциях рассматриваются типичные и важные примеры из области математической физики, приводящие к уравнениям Фредгольма.

Первая задача — определить движение жидкости в море с изменяющейся глубиной на вращающейся земле под влиянием периодических возмущающих сил. Если пренебречь силами притяжения, возникающими при перемещении воды, то получится неоднородное линейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными. Это уравнение и рассматривается в лекции. Когда море окружено вертикальной стеной, применяется метод Гильберта и Пикара для построения ядра или функции Грина соответствующего интегрального уравнения, которое является уравнением первого рода. Тогда к уравнению можно применить метод Келлогга или метод интегрирования в комплексной плоскости, предложенный Пуанкаре, который заменяет данное интегральное уравнение на эквивалентное уравнение второго рода. Если берег моря невертикальный, то соответствующая прямая является сингулярной для дифференциального уравнения. Теперь необходимо принять во внимание вторую линию (критическую широту). Снова может быть выполнено аналогичное приведение последовательностью из трех шагов. Таким образом доказывается существование решения в обоих случаях. Наконец, показано, что никаких новых затруднений не возникает, если не пренебрегать притяжением вследствие перемещения воды.

Применение теории интегральных уравнений к волнам Герца. Пуанкаре исследует явление криволинейного распространения волн Герца по земной поверхности, которые объясняют возможность передачи радиограмм на значительные расстояния. Это явление связано с большой длиной волны Герца по сравнению с длиной световой волны, распространяющейся по прямой. Проводятся количественные математические рассуждения. Рассматривая землю как внешний проводник и передатчик как внутренний и учитывая затухающие синхронные колебания, можно получить интегральное уравнение второго рода для определения плотности электрического заряда μ, индуцируемого на поверхности земли. Однако это приводит только к теореме существования. Пуанкаре доводит задачу до практического результата, получая приближенное выражение для μ; этот метод зависит от разложения по μ в полиномах Лежандра и использования асимптотических формул. Оказывается, что кривизна растет с увеличением длины волны и уменьшением расстояния от передатчика до земли[1].

Приведение абелевых интегралов и теория фуксовых функций. Если дана система S абелевых функций, которая приводима с помощью второй системы S', и если как S, так и S' возникают из алгебраических кривых C и C', то существует множество алгебраических соответствий между группами точек на кривых. Рассматривается только тот случай, в котором одной точке на кривой C соответствует одна точка на кривой C', тогда как одной точке на кривой C' может соответствовать n точек на кривой C. В этом случае существуют определенные приводимые интегралы, принадлежащие C, и таблица периодов имеет простую нормальную форму. Также доказывается, что число n равно порядку соответствующей тета-функции. Теперь известно, что существует фуксова функция, которая униформизирует любую алгебраическую кривую, в частности, C'. Фундаментальные многоугольники для кривых C' можно взять ограниченными дугами окружностей и так, что каждый многоугольник для C будет образован из n таких многоугольников для C'. Соответствие между интеграла-

[1]В конце лекции было замечено, что окончательные выводы необходимо модифицировать, поскольку были упущены важные члены.

ми и многоугольниками приводит к многочисленным геометрическим фактам, относящихся к кривым C и C' и конгруэнтным многоугольникам в пространстве постоянной отрицательной кривизны. Дано несколько примеров, иллюстрирующих одну красивую теорему, касающуюся кривых C и C', которая может быть получена в результате такого анализа.

Трансфинитные числа. В этой лекции Пуанкаре раскрывает свое отношение к некоторым тонкостям в этой противоречивой области математики. Две основные идеи, которые он оспаривает, таковы: первая, что не существует никакой математической сущности, которая бы не определялась конечным числом слов, и вторая, что все определения должны быть, как он их называет, «предикативными». Например, Пуанкаре возражает против известного доказательства того, что любое алгебраическое уравнение $f(x) = 0$ имеет корень, зависящий от существования минимума $|f(x)|$. Поскольку с его точки зрения нельзя говорить о совокупности всех значений $f(x)$ иначе, как о тех значениях, для которых x определен конечным числом слов. Это недопустимо, так как понятие совокупности определяемых значений x непредикативно. Трудность заключается в том, что в этой «совокупности» содержатся элементы, которые сами определены в терминах «совокупности», и, следовательно, это понятие приводит к порочному кругу. Разъяснение значения слова «предикативный», данное в лекции, не совсем ясно.

Пуанкаре начинает с рассмотрения очевидного противоречия между доказательством Ришара (основанного на первой из сформулированных выше идей) того, что континуум счетен, и доказательством Кантора, что он несчетен, однако показано, что это противоречие несущественно, так как Ришар использует непредикативное определение.

Затем он переходит к тому, как необходимо излагать с его точки зрения доказательство теоремы о том, что любое алгебраическое уравнение $f(x) = 0$ имеет корень.

В заключение кратко затрагиваются другие вопросы. По Пуанкаре, теорема Бернштейна верна, а задача правильного упорядочивания континуума (в канторовском смысле) кажется ему не имеющей значения. Кроме того, он не убежден в существовании второго трансфинитного кардинального числа. Все эти выводы находятся в точном согласии с двумя основными идеями.

Принципиальное возражение, которое может быть выдвинуто против таких взглядов Пуанкаре (и многих других математиков), практическое, заключающееся в том, что эти взгляды очень сильно ограничены понятием *класса*. Однако скорее интуиция, чем логика, восстает против их принятия. Судя по прошлому, этот факт говорит в пользу этих взглядов; они составляют шаг на пути исключения бесконечного из математики, и есть основания сомневаться, будет ли в дальнейшем играть какую-то решающую роль в строгой математике понятие бесконечного класса как объективно существующего.

Новая механика. В этой заключительной популярной лекции рассмотрены те видоизменения, которым может подвергнуться механика в результате последних достижений в физике. Если окончательными уравнениями движения окажутся уравнения электромагнитного поля, а эксперименты, кажется, указывают на это, то следуют поразительные выводы: ни один эксперимент не даст возможность отличить, находимся ли мы в состоянии покоя или совершаем равномерное прямолинейное движение относительно эфира; никто не сможет сказать, что два события одновременны в абсолютном смысле; кроме того, все тела будут испытывать сокращение в направлении своего движения. Вот эту интереснейшую тему, точнее, получающуюся в результате видоизмененную механику, и рассматривает Пуанкаре. Можно надеяться заметить отклонение от законов ньютоновской механики только для тел, имеющих очень большую скорость. Сейчас Меркурий движется с наибольшей из всех планет скоростью, и именно Меркурий обладает небольшой аномалией, не объясненной до сих пор. Новая механика частично объясняет это, как показал Лоренц, однако нигде больше не дает ощутимых изменений в движении планет. Представив эти факты, Пуанкаре заканчивает замечанием, что ньютоновская механика навсегда останется механикой при скоростях, малых по отношению к скорости света, и потому сохранит свое фундаментальное значение.

Последние работы А. Пуанкаре

Дизайнер М. В. Ботя
Технический редактор А. В. Широбоков
Компьютерная подготовка: И. В. Рылова
С. В. Высоцкий
Компьютерная графика М. А. Дьячкова
Корректор А. В. Пигузова

Подписано к печати 22.02.01. Формат $60 \times 84^1/_{16}$.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 12,09. Уч. изд. л. 12,32.
Гарнитура Computer Modern Roman. Бумага офсетная № 1.
Тираж 1000 экз. Заказ №

Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика»
426057, г. Ижевск, ул. Пастухова, 13.
Лицензия на издательскую деятельность ЛУ № 084 от 03.04.00.

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленных диапозитивов в ФГУП «Полиграф-ресурсы».
101429, г. Москва, ул. Петровка, 26.