

ВВЕДЕНИЕ В ВЭЙВЛЕТЫ

This is a volume in
WAVELET ANALYSIS AND ITS APPLICATIONS

CHARLES K. CHUI, SERIES EDITOR
Texas A&M University, College Station, Texas

An Introduction to Wavelets

Charles K. Chui

Department of Mathematics
Texas A&M University, College Station, Texas



ACADEMIC PRESS
San Diego • New York • Boston • London • Sydney • Tokyo • Toronto

К. Чуи

ВВЕДЕНИЕ В ВЭЙВЛЕТЫ

Перевод с английского
Я. М. ЖИЛЕЙКИНА

Рекомендовано Научно-методическим советом по математике
Учебно-методического объединения университетов
для использования в учебном процессе для студентов вузов
по специальности «Прикладная математика»



Москва «Мир» 2001

УДК 519.6
ББК 22.193
Ч87

Чуи Ч.

Ч87 Введение в вэйвлеты: Пер. с англ. — М.: Мир, 2001. — 412 с., ил.

ISBN 5-03-003397-1

Учебное пособие по теории вэйвлетов — одному из активно развивающихся направлений теоретической и прикладной математики, написанное известным американским специалистом по вычислительной математике. Книга написана так, что от читателя требуется только знание основ теории функций и вещественного анализа. В книге содержатся формулировки и доказательства всех основных положений теории вэйвлетов, большое внимание уделено частотно-временной обработке сигналов, дано много примеров, иллюстрирующих применение теории. Изложение отличается простотой, ясностью и лаконичностью.

Для студентов высших учебных заведений, специализирующихся по математике и инженерным наукам, — как учебное пособие, для специалистов, работающих в этой области, — как справочное пособие.

ББК 22.193



Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту №00-01-14042

Редакция литературы по математическим наукам

ISBN 5-03-003397-1 (русск.)
ISBN 0-12-174584-8 (англ.)

Copyright © 1992 by Academic Press.
All Rights Reserved.
© перевод на русский язык,
«Мир», 2001

Предисловие переводчика

Предлагаемая читателю книга «Введение в вэйвлеты» посвящена бурно развивающейся области современной теоретической и прикладной математики. Теория вэйвлетов, или как их иногда называют в русской литературе — всплесков, имеет истоки в таких классических областях математики, как теория функций вещественного переменного, теория ортогональных рядов, преобразование Фурье и другие интегральные преобразования, теория функций комплексного переменного, функциональный анализ. Основные подходы и методы теории вэйвлетов базируются на результатах классиков математической науки: Ж. Фурье, А. Лебега, Н. Н. Лузина, С. Банаха, Д. Гильберта, А. Н. Колмогорова, А. Зигмунда, Н. К. Бари, А. Хаара, А. Кальдерона, Дж. Литтлвуда, Р. Пэли, Д. Габора, К. Шеннона, Н. Винера. Особенно следует выделить результаты этих авторов, направленные на модернизацию и совершенствование методов представления функций в виде интегралов и рядов.

Интерес к этой теме обусловлен широким применением гармонического анализа и методов преобразования Фурье, а также их использованием в таких науках, как теория информации и обработка сигналов. Поэтому теория вэйвлетов и их применения неразрывно связаны также и с развитием прикладных областей современной науки: цифровой обработки

сигналов и изображений, теории фильтрации и кодирования, теории сплайнов, дискретных и быстрых преобразований.

Наиболее бурное развитие теории вэйвлетов приходится на 80–90-е годы XX века. В этот период получены законченные теоретические результаты и разработаны эффективные методы их практического применения. Следует отметить, что на практике в теории фильтрации, при обработке и передаче информации вэйвлеты фактически применялись уже в 40–50-х годах. Один из крупнейших специалистов в области теории и применения вэйвлетов профессор С. Малла пишет: «В основу вэйвлетов положена не какая-либо «новая блестящая идея», а концепции, которые существовали в разнообразных формах во многих различных областях знаний. Формализация и появление «теории вэйвлетов» есть результат совместных усилий математиков, физиков и инженеров, которые независимо развивали сходные идеи.» (Список дополнительной литературы по вэйвлетам, [68].) Поэтому многие положения теории вэйвлетов допускают формулировку и интерпретацию в терминах других наук.

В настоящее время библиография по вэйвлетам насчитывает несколько сот наименований, и в этой области активно работает много ученых в разных странах мира, в том числе и в России. Хотя, к сожалению, несмотря на огромный вклад российских и советских ученых в функциональный анализ, теорию ортогональных рядов и разложений и другие области математики, российская научная общественность осталась несколько в стороне от такой важной и современной области науки как теория вэйвлетов и их применения. Предлагаемая читателю монография, возможно, является первой книгой на русском языке, целиком посвященной этой актуальной теме. Важной целью ее издания является ликвидация информационного вакуума в рассматриваемой научной области.

Монография «Введение в вэйвлеты» принадлежит перу известного американского математика, крупного специалиста в области вэйвлетов, профессора Чарльза К. Чуи. Первона-

чальные результаты по теории вэйвлетов и ее применениям были получены в 80-е годы представителями французской научной школы. Эти результаты связаны с именами И. Мейера, С. Малла, И. Добеши, Ж. Баттла, А. Коэна, Ж. Виля, Р. Куафмана и других. Здесь интересно отметить, что вышеперечисленные ученые — это специалисты в чистой математике, квантовой механике, инженеры-электрики и инженеры-акустики, при этом временной диапазон получения ими основных результатов изменяется от начала века до 80-х годов. В дальнейшем, ввиду большой научной и практической актуальности, вэйвлетами стали заниматься ученые других стран. В России одним из первых обратил внимание на новое направление профессор С. Б. Стечкин; затем этой тематикой стали заниматься его ученики, а также математики Петербурга и Новосибирска. Наибольшее внимание теории вэйвлетов было уделено в США. К работе в этой области было привлечено большое количество математиков как из США, так и из других стран. Так, профессор И. Добеши, один из ведущих специалистов в этой области, прочла цикл лекций в США, опубликовала монографию «Десять лекций по вэйвлетам», которая стала классической, и сейчас работает в Принстонском университете.

Профессор Чарльз К. Чуи — крупный специалист в области вычислительной математики (теории сплайнов и теории приближения функций) и теории обработки сигналов. Он возглавляет группу математиков, активно работающих в области вэйвлетов и их применений. Предлагаемая читателю книга является первым, основополагающим томом из серии «Вэйвлеты — руководство по теории и применениям», издаваемой в Академик Пресс под его редакцией [18]. В настоящее время вышли в свет десять томов этой серии. Тома со 2-го по 10-й — это сборники, содержащие статьи ведущих специалистов, посвященные применениям и обобщениям вэйвлетов.

Отметим наиболее характерные особенности предлагаемой читателю книги. Во-первых, это основополагающая книга по

теории вэйвлетов, которая содержит формулировки и доказательства всех основных положений этой теории. Характерно, что в библиографиях всех книг по вэйвлетам монография Чарльза К. Чуи всегда занимает одно из первых мест рядом с книгами И. Мейера и И. Добеши. Во-вторых, ее отличают простота и лаконичность изложения. Стил ь книги близок к традиционно математическому стилю. Это, по сути дела, годовой курс лекций для студентов высших учебных заведений, которые специализируются по математике и инженерным наукам. Все определения и доказательства автор дает четко и математически строго. Безусловно, что для более подробного и широкого изучения вэйвлетов и их применений читателю следует обратиться также и к другим книгам по этой тематике.

Скажем несколько слов об особенностях перевода этой монографии на русский язык. Как упоминалось выше, теория вэйвлетов находится на стыке нескольких наук. Поэтому используемый в книге словарь терминов отличается от терминов математического и функционального анализов и носит специфический характер. Так как английский язык во многих областях человеческой деятельности стал международным языком, то на его базе сформировался широко распространенный специальный язык, который используется при описании задач вэйвлет-анализа. Перевод с этого языка на русский язык представляет определенные сложности, ввиду отсутствия общепринятого однозначного перевода используемых терминов. Определение значения многих терминов, используемых автором, дается непосредственно по тексту и не вызывает трудностей при чтении. Для определенности при составлении предметного указателя наряду с русскоязычным термином в скобках приводится его английский эквивалент. Это поможет читателю при чтении англоязычной литературы по данной тематике. Кроме того, ниже мы даем пояснение ряда используемых в книге терминов.

1. Аналоговый сигнал — analog signal; изменяющаяся функция времени или пространства; часто представляет измеренную физическую величину, которая носит колеблющийся характер; квадрат нормы в пространстве L^2 определяет энергию аналогового сигнала; эта функция может быть непрерывно или дискретно заданной, в последнем случае она называется цифровым сигналом — digital signal.

2. Выборка — sampling; выбор элементов некоторого множества для его изучения; линейный оператор, действующий на непрерывный (f) или дискретный ($\{f_k\}$) сигналы, результатом чего является дискретный сигнал $\{\varphi_k\}$.

Разрезающая выборка — upsampling; линейный оператор U такой, что $\varphi_{2k} = f_k$ и $\varphi_{2k+1} = 0$.

Сгущающая выборка — downsampling; линейный оператор D такой, что $\varphi_k = f_{2k}$; результат действия такого оператора иногда называют децимацией — decimation.

3. Двойственное — dual; может использоваться как в качестве прилагательного: двойственная функция, двойственный вэйвлет, так и в качестве существительного: построение ψ и соответствующего ему двойственного $\tilde{\psi}$.

4. Диапазон — band; область изменения аргумента функции; наиболее часто этот термин применяется при изменении сигнала в частотной области.

Поддиапазон — subband.

Частотный диапазон — frequency band.

5. Дискретное преобразование Фурье — discrete Fourier transform; определение дано в § 2.4: пусть $\{f_k\} \in \ell^p$ — цифровой сигнал, дискретное преобразование Фурье — это периодическая функция или ряд Фурье $\sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k e^{ikx}$; такое определение отличается от общепринятого: $\{f_k\}$ $k = 0, 1, \dots, N - 1$, $\{\tilde{c}_k\} = \tilde{F}(\{f_k\})$, где $\tilde{c}_k = \frac{1}{N} \sum_{\nu=0}^{N-1} f_\nu e^{-2\pi i \frac{\nu k}{N}}$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$.

6. Интерактивный режим — on-line.

7. Каркас — frame.

8. Малая волна — small wave; нетривиальная функция $f(t) \in L^2(R)$ (или $L^1(R)$), удовлетворяющая условию $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 0$.

9. Масштаб — scale; общепринятый термин, означающий отношение размеров реального объекта и его модели; характерные размеры области определения функции.

Масштабирующая функция — scaling function.

Масштабный параметр — scale parameter.

10. Приближение и удаление (объекта) — zoom-in and zoom-out (of object); часто употребляется в том смысле, что некоторый метод «обладает свойством приближения и удаления ...».

11. Свертка — convolution; сверткой двух функций $f(t)$ и $g(t)$ называется функция $h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau$, а дискретной сверткой — $h(k) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(m)g(k - m)$.

12. Символ — symbol; символом последовательности $\{c_k\}$ называется функция $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$.

13. Сплайн — spline; определения терминов, связанных со сплайнами, даются в главе 4; в этой книге рассматриваются сплайны с эквидистантными узлами и для их обозначения в оригинале используется дополнительное прилагательное «кардинальный», которое при переводе опущено. Выражения «базисное сплайн-разложение», «базисный сплайн-вэйвлет» означают, что для построения «разложений» и «вэйвлетов» используются базисные сплайны (B -сплайны).

14. Среднее — average. Среднее значение — average value.

Скользящее среднее — moving average; если задана последовательность $\{c_k\}$ и последовательность весов $\{a_k\}$, то скользящим средним называется последовательность $\{\bar{c}_k\}$ такая, что $\bar{c}_k = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} c_{\ell} a_{k-\ell}$; иногда автор идентифицирует скользящее среднее с дискретной сверткой: $\bar{c}_k = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} c_{\ell} a_{k-\ell}$.

15. Фильтр — filter; линейный оператор, приводящий к изменению (фильтрации) как формы сигнала во временной области, так и образа сигнала в частотной области; основное внимание в книге уделяется частотной фильтрации сигнала.

Низкочастотный фильтр — low-pass filter; фильтр, пропускающий низкочастотную составляющую сигнала.

Диапазонный фильтр — band-pass filter; фильтр, пропускающий составляющую сигнала из определенного диапазона частот.

Высокочастотный фильтр — high-pass filter; фильтр, пропускающий высокочастотную составляющую сигнала.

Поддиапазонный фильтр — subband filter; фильтр, пропускающий составляющую сигнала из некоторого поддиапазона основного диапазона частот.

Блок фильтров — bank of filters; набор фильтров.

Что касается обозначений, используемых автором, то они приводятся в книге по мере изложения материала. Отметим только, что символ $:=$ означает определение выражения, стоящего слева от этого знака, $\{x_k\}$ — последовательность или множество элементов x_k . Конец доказательств отмечается знаком $\square$.

Так как книга в оригинале была опубликована в 1992 г., мы сочли целесообразным добавить дополнительный список литературы, который, не претендуя на полноту, содержит основные работы по вэйвлетам, вышедшие в последние годы.

Отметим также, что большое количество информации по вэйвлетам может быть получено с помощью компьютерной сети Internet. Среди этих материалов можно указать компьютерный журнал Wavelet Digest, который доступен через Internet по адресу

<http://www.wavelet.org>.

Значительный интерес представляет библиотека стандартных программ по вэйвлетам и частотно-временным преобра-

зованиям WaveLab, разработанная в Станфордском Университете США, которая входит в состав пакета MatLab и доступна по адресу

<http://www-stat.stanford.edu/wavelab>.

В Политехнической школе (École Polytechnique) во Франции разработана и поддерживается библиотека стандартных программ LastWave для вэйвлет-обработки сигналов и изображений, которой можно воспользоваться через Internet по адресу

<http://wave.cmap.polytechnique.fr/soft/LastWave/>.

Более подробно с программным матобеспечением по вэйвлетам можно ознакомиться в цитируемой выше монографии С. Малла «Обзор вэйвлет-обработки сигналов» (Список дополнительной литературы по вэйвлетам, [68]).

В заключение я хочу выразить благодарность всем, кто помогал мне в переводе, редактировании и выходе в свет этой книги. Я благодарю академика Н. С. Бахвалова за постоянное внимание к работе и ряд ценных советов, профессора Т. П. Лукашенко, который прочитал перевод книги и сделал ряд замечаний. Хочу поблагодарить участников семинара механико-математического факультета МГУ под руководством профессора В. М. Тихомирова: профессоров С. В. Кoniaгина, В. Б. Демидовича и других. Беседа с ними мне была полезна. Вся работа по набору книги, созданию электронного макета на языке $\text{\LaTeX}$ и редактированию была выполнена моими коллегами из Научно-исследовательского вычислительного центра МГУ Ю. И. Осипик и Л. Г. Васильевой, которых я искренне благодарю. Я всегда получал удовлетворение от моих контактов с автором книги профессором Чарльзом К. Чуи и хочу выразить ему свою благодарность.

Март 2001 г.

Я. М. Жилейкин
jam@srcc.msu.su

Предисловие к русскому изданию

Несмотря на то, что гармонический анализ продолжает быть очень популярной и важной математической дисциплиной, никогда не было уделено столько внимания его вычислительным аспектам, как начиная с появления «вэйвлетов» в конце 1980-х годов. В действительности вычислительный гармонический анализ, который с недавнего времени стал активной областью исследований, построен на базе основных принципов математики вэйвлетов. С точки зрения применения в теоретических и инженерных науках вэйвлет-преобразование привело к использованию мощного математического набора методов локализованного частотно-временного и пространственно-фазового анализов многомасштабных явлений. Эти методы дополнили аппарат современных научных исследований и стимулировали развитие инженерных приложений. В результате вычислительный гармонический анализ можно рассматривать как междисциплинарную область исследований.

Для освоения вычислительного гармонического анализа в высшей степени целесообразно приобрести основополагающие знания по математике вэйвлетов. «Введение в вэйвлеты», переведенное на русский язык специалистом по прикладным методам вычислительной математики, может служить читателю достаточным основанием для научных исследований в этой увлекательной междисциплинарной области. Опубликовано

ванная впервые издательством Академик Пресс в США в январе 1992 г., эта книга была затем переведена на японский и китайский языки, соответственно, в 1993 и 1994 гг. Предлагаемое читателю русское издание, квалифицированно переведенное на русский язык с небольшими изменениями профессором Я. М. Жилейкиным, дополнено также расширенной библиографией по теории и применениям вэйвлетов.

Автор выражает глубокую благодарность профессору Я. М. Жилейкину за проявленную им инициативу и весьма своевременное завершение этого трудного и желанного проекта.

Июль 2000 г.,
Станфорд, Калифорния,
США.

Чарльз К. Чуи

Предисловие

Анализ Фурье — это хорошо разработанный предмет, занимающий центральное место в математическом анализе и его приложениях. Не только технические приемы этого предмета имеют фундаментальное значение во всех разделах науки и техники, но как интегральное преобразование Фурье, так и ряды Фурье имеют наглядную физическую интерпретацию. Более того, вычислительные аспекты рядов Фурье особенно привлекательны главным образом по причине свойства ортогональности этих рядов и простоты их выражения с использованием только двух функций: $\sin x$ и $\cos x$.

В последние годы тема «вэйвлет-анализа» привлекла большое внимание в равной мере как математиков, так и инженеров. Так же, как и в анализе Фурье, вэйвлет-анализ имеет два существенных и важных раздела: «интегральные вэйвлет-преобразования» и «вэйвлет-ряды».

Интегральное вэйвлет-преобразование определяется как свертка с учетом растяжения некоторой функции $\tilde{\psi}$, называемой «базисным вэйвлетом», в то время как вэйвлет-ряд выражается через единственную функцию ψ , называемую « $\mathcal{R}$ -вэйвлетом» (или просто вэйвлетом) с помощью двух очень простых операций: двоичных растяжений и целочисленных сдвигов.

Однако в отличие от анализа Фурье интегральное вэйвлет-преобразование с базисным вэйвлетом $\tilde{\psi}$ тесно связано с вэйвлет-рядом, определяемым через вэйвлет ψ . В самом деле, если $\tilde{\psi}$ выбран как «двойственный» к ψ , то коэффициенты вэйвлет-ряда любой интегрируемой с квадратом функции f в точности равны значениям интегрального вэйвлет-преобразования, вычисленным в точках, определенных двумя параметрами на соответствующих масштабных уровнях, характеризующих двоичным растяжением.

Так как интегральное вэйвлет-преобразование функции f одновременно локализует f и ее преобразование Фурье $\hat{f}$ со способностью сжатия и расширения и так как существуют алгоритмы получения последовательностей коэффициентов вэйвлет-рядов в режиме реального времени, а также восстановления f по этим коэффициентам, то перечень возможных применений вэйвлет-анализа кажется бесконечным. С другой стороны, полиномиальные сплайн-функции занимают важное место среди простейших функций, используемых для вычислительных и прикладных целей. Поэтому они наиболее привлекательны для анализа и построения вэйвлетов.

Эта книга представляет собой вводный курс в вэйвлет-анализ и в ней обращено особое внимание на сплайн-вэйвлеты и частотно-временной анализ. Краткий обзор этого материала, включающий классификацию вэйвлетов, интегральное вэйвлет-преобразование для частотно-временного анализа, кратномасштабный анализ, выделяющий важнейшие свойства сплайнов, и вэйвлет-алгоритмы для разложения и восстановления функций, будет представлен в первой главе. Цель этой главы не в получении глубоких результатов, а в создании общего впечатления о том, что является предметом вэйвлет-анализа и какую часть его мы намерены осветить в этой книге.

Изложение построено так, что содержит в себе все необходимые материалы. Единственное, что нужно от читателя — это знание основ теории функций и вещественного анализа. С этой целью предварительный материал по анализу Фурье и теории сигналов включен в главы 2 и 3, а вводный материал по базисным сплайнам дан в главе 4. Следует указать, однако, что главы 3 и 4 содержат материал, являющийся неотделимой частью вэйвлет-анализа. В частности, в главе 3 понятия «каркасов» и, более общее, — «двухпараметрических вэйвлетов» — вводятся в рассуждениях о восстановлении функций по частичной информации о ее интегральном вэйвлет-преобразовании в частотно-временном анализе.

«Вэйвлет-ряды» являются общей темой последних трех глав. В главе 5 обсуждается общий подход к анализу и построению масштабирующих функций и вэйвлетов. Сплайн-вэйвлеты, которые служат простейшими примерами, изучаются в главе 6. Последняя глава посвящена исследованию ортогональных вэйвлетов и вэйвлет-пакетов.

Эта монография в основном была написана под влиянием пионерских работ А. Коэна, Р. Куафмана, И. Добеши, С. Малла и И. Мейера, так же как и моих совместных работ с Х. Л. Ши и Дж. З. Вонгом.

При изучении этого увлекательного предмета мне были весьма полезны беседы и переписка с многочисленными коллегами, которым я очень благодарен. Особенно я хотел бы упомянуть П. Ошера, Г. Баттла, А. К. Чэна, А. Коэна, И. Добеши, Д. Жоржа, Т. Н. Т. Гудмэна, С. Жаффара, К. Ли, С. Малла, И. Мейера, К. А. Мичелли, Е. Каку, Х. Л. Ши, Дж. Стеклера, Дж. З. Вонга, Дж. Д. Ворда и Р. Веллса.

Среди моих друзей, кто прочитал отдельные части моей рукописи и сделал много ценных замечаний, я особенно обязан К. Ли, Е. Каку, Х. Л. Ши и Н. Сивакумару. Я постоянно получал удовольствие от помощи Робина Кэмпбелла, кото-

рый набрал в L^AT_EX'е всю рукопись, Стефани Селлерс и моей жены Маргарет, которые ее переработали и получили в виде, готовом для опубликования.

В заключение я хочу выразить благодарность за действенную помощь и дружеское участие издательскому отделу Академик Пресс и особенно Чарльзу Глэйзеру, который всегда верил в меня.

Колледж Стэйшн,
Техас, Октябрь 1991г.

Чарльз К. Чуи

Глава 1

Обзор

В настоящее время «вэйвлеты» стали очень популярной темой многих научных и инженерных обсуждений. Некоторые видят в вэйвлетах новый способ представления функций, рассматривают их как технику частотно-временного анализа, другие смотрят на них как на новый математический предмет. Конечно, все они правы, так как «вэйвлеты» представляют собой многосторонний инструмент с очень богатым математическим содержанием и огромными возможностями для применения. Однако ввиду того, что предмет находится только в процессе своего быстрого развития, еще рано составлять о нем окончательное представление.

Цель этой книги очень скромна — книга задумана как учебник, содержащий материалы вводного односеместрового курса лекций для аспирантов и студентов старших курсов математических и инженерных учебных заведений; книга написана также для всех математиков и инженеров, которые хотят изучить предмет. Для специалистов она может служить дополнением к более продвинутым монографиям, таким как два тома И. Мейера «Вэйвлеты и операторы» [21], к томам серии «Вэйвлеты — руководство по теории и применениям» [18] и к книге И. Добеши «Вэйвлеты» [20].

Вэйвлет-анализ — относительно новый предмет, поэтому подходы к изложению и организации материала в этой книге отличаются от других. Цель данной главы — дать общие идеи о том, что такое вэйвлет-анализ и какая его часть будет изложена в этой книге.

1.1. От анализа Фурье к вэйвлет-анализу

Обозначим через $L^2(0, 2\pi)$ множество всех измеримых функций f , определенных на интервале $(0, 2\pi)$ и таких, что

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx < \infty.$$

Читатель, который не знаком с основами теории интеграла Лебега, может считать, что f являются кусочно-непрерывными функциями. Всегда можно предположить, что функции из $L^2(0, 2\pi)$ периодически продолжаемы на всю вещественную ось

$$\mathbf{R} := (-\infty, \infty),$$

а именно: $f(x) = f(x - 2\pi)$ для всех x . Поэтому множество $L^2(0, 2\pi)$ часто называют пространством 2π -периодических функций, интегрируемых с квадратом. Легко можно проверить, что $L^2(0, 2\pi)$ — векторное пространство. Любую f из $L^2(0, 2\pi)$ можно представить рядом Фурье

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad (1.1.1)$$

где константы c_n , называемые коэффициентами Фурье, определяются формулой

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx. \quad (1.1.2)$$

Сходимость рядов в (1.1.1) в пространстве $L^2(0, 2\pi)$ означает, что

$$\lim_{M, N \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \left| f(x) - \sum_{n=-M}^N c_n e^{inx} \right|^2 dx = 0.$$

Имеются две явные особенности разложений в ряды Фурье (1.1.1). Первая особенность состоит в том, что f разлагается в бесконечную сумму взаимно ортогональных компонент $g_n := c_n e^{inx}$, где ортогональность означает, что

$$\langle g_m, g_n \rangle^* = 0 \quad \text{для всех} \quad m \neq n \quad (1.1.3)$$

со скалярным произведением в (1.1.3), определенным формулой:

$$\langle g_m, g_n \rangle^* := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_m(x) \overline{g_n(x)} dx, \quad (1.1.4)$$

где черта над функцией означает операцию комплексного сопряжения. Условие (1.1.3) является следствием важного и простого факта, что

$$w_n(x) := e^{inx}, \quad n = \dots, -1, 0, 1, \dots, \quad (1.1.5)$$

образует ортонормированный (о.н.) базис в $L^2(0, 2\pi)$.

Вторая особенность разложения в ряд Фурье (1.1.1) состоит в том, что о.н. базис $\{w_n\}$ порождается *растяжением* единственной функции

$$w(x) := e^{ix}, \quad (1.1.6)$$

так, что $w_n(x) = w(nx)$ для всех целых n . Это будет называться в дальнейшем *целочисленным растяжением*.

Подводя итог, можно сказать, что каждая 2π -периодическая, интегрируемая с квадратом функция порождается «суперпозицией» целочисленных растяжений базисной функции $w(x) = e^{ix}$.

Из свойств базиса $\{w_n\}$ следует также, что разложение в ряд Фурье (1.1.1) удовлетворяет так называемому *равенству Парсеваля*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2. \quad (1.1.7)$$

Пусть ℓ^2 обозначает пространство всех суммируемых с квадратом бесконечных последовательностей; другими словами, $\{c_n\} \in \ell^2$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < \infty.$$

Отсюда, если квадратный корень величины, стоящей в левой части (1.1.7), используется в качестве «нормы» для измерения функций из $L^2(0, 2\pi)$ и одновременно квадратный корень величины в правой части (1.1.7) используется как норма в ℓ^2 , то пространство функций $L^2(0, 2\pi)$ и пространство последовательностей ℓ^2 *изометричны* друг другу. Возвращаясь к вышеприведенному замечанию о разложениях в ряды Фурье (1.1.1), можно также сказать, что *каждая 2π -периодическая интегрируемая с квадратом функция представляет собой ℓ^2 -линейную комбинацию целочисленных растяжений базисной функции $w(x) = e^{ix}$* . Мы обращаем особое внимание на тот факт, что базисная функция

$$w(x) = e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

которая является *синусоидальной волной*, — это *только одна* функция, требуемая для порождения всех 2π -периодических интегрируемых с квадратом функций. Для любого целого, большого по абсолютной величине n волна $w_n(x) = w(nx)$ имеет высокую частоту, а для малых по абсолютной величине значений n волна $w_n(x)$ имеет низкую частоту. Таким образом, каждая функция из $L^2(0, 2\pi)$ состоит из волн различных частот.

Далее рассмотрим пространство $L^2(\mathbf{R})$ измеримых функций f , определенных на вещественной оси $\mathbf{R}$, удовлетворяющих неравенству

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty.$$

Ясно, что два пространства функций $L^2(0, 2\pi)$ и $L^2(\mathbf{R})$ совершенно различны. В частности, каждая функция (ее локальное среднее значение) из $L^2(\mathbf{R})$ должна «затухать» до нуля при x , стремящемся к $\pm\infty$, но синусоидальные (волны) функции $w_n(x)$ не принадлежат $L^2(\mathbf{R})$. В сущности, если мы хотим использовать «волны», порождающие $L^2(\mathbf{R})$, то эти волны должны были бы затухать до нуля при $x \rightarrow \pm\infty$, и из всех практических соображений это затухание должно было бы быть очень быстрым. Так мы приходим к рассмотрению малых волн, или *вэйвлетов*, для порождения $L^2(\mathbf{R})$. Так же, как и в случае $L^2(0, 2\pi)$, где одна функция $w(x) = e^{ix}$ порождает целое пространство, мы предпочитаем иметь одну функцию для порождения всего $L^2(\mathbf{R})$ и будем обозначать ее через ψ . Но если вэйвлет ψ имеет очень быстрое затухание, то как он может покрыть всю вещественную ось? Очевидным способом является сдвиг ψ вдоль $\mathbf{R}$.

Пусть $\mathbf{Z}$ обозначает множество целых чисел:

$$\{\mathbf{Z} = \dots, -1, 0, 1, \dots\}.$$

Простейший способ для ψ покрыть все множество $\mathbf{R}$ состоит в рассмотрении всех *целочисленных сдвигов* ψ , а именно

$$\psi(x - k), \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Затем, так же как и в синусоидальном случае, мы должны рассматривать волны различных частот. По разным причинам, которые вскоре будут ясны читателю, мы не хотим рассматривать волны *единичной частоты*, но скорее волны с частотами, разделенными на последовательные «октавы» (или частотные диапазоны). Ради вычислительной эффективности мы будем использовать для частотного разбиения целые степени 2. В результате мы рассматриваем малые волны

$$\psi(2^j x - k), \quad j, k \in \mathbf{Z}. \quad (1.1.8)$$

Заметим, что $\psi(2^j x - k)$ получена из одной «вэйвлет-функции» ψ в результате *двоичного растяжения* (т.е. растяжения в 2^j раз) и *двухпараметрического сдвига* (на $k/2^j$).

Итак, нас интересуют «вэйвлет-функции» ψ , двоичные растяжения и двухпараметрические сдвиги которых достаточны для представления любой функции из $L^2(\mathbf{R})$. Для простоты давайте рассмотрим сначала ортогональный базис, порожденный функцией ψ . Позже в этой главе (см. § 1.4) мы введем более общие «вэйвлет-ряды».

Повсюду в этой книге мы будем использовать следующие обозначения для *скалярного произведения* и *нормы* в пространстве $L^2(\mathbf{R})$:

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx; \quad (1.1.9)$$

$$\|f\|_2 := \langle f, f \rangle^{1/2}, \quad (1.1.10)$$

где $f, g \in L^2(\mathbf{R})$. Заметим, что для любых $j, k \in \mathbf{Z}$ мы имеем

$$\|f(2^j \cdot - k)\|_2 = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |f(2^j x - k)|^2 dx \right\}^{1/2} = 2^{-j/2} \|f\|_2.$$

Следовательно, если функция $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ имеет единичную норму, то все функции $\psi_{j,k}$, определенные формулой

$$\psi_{j,k}(x) := 2^{j/2} \psi(2^j x - k), \quad j, k \in \mathbf{Z}, \quad (1.1.11)$$

также имеют единичную норму, то есть

$$\|\psi_{j,k}\|_2 = \|\psi\|_2 = 1, \quad j, k \in \mathbf{Z}. \quad (1.1.12)$$

В этой книге будет часто использоваться символ Кронекера

$$\delta_{j,k} := \begin{cases} 1 & \text{для } j = k, \\ 0 & \text{для } j \neq k, \end{cases} \quad (1.1.13)$$

определенный в $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.

Определение 1.1. Функция $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ называется ортогональным вэйвлетом (или о.н. вэйвлетом), если семейство $\{\psi_{jk}\}$, определенное формулой (1.1.11), является ортонормированным базисом в $L^2(\mathbf{R})$; это означает, что

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{\ell,m} \rangle = \delta_{j,\ell} \cdot \delta_{k,m}, \quad j, k, \ell, m \in \mathbf{Z}, \quad (1.1.14)$$

и любая $f \in L^2(\mathbf{R})$ может быть представлена как

$$f(x) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} c_{j,k} \psi_{j,k}(x), \quad (1.1.15)$$

где ряд (1.1.15) сходится в $L^2(\mathbf{R})$, а именно

$$\lim_{M_1, N_1, M_2, N_2 \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{j=-M_2}^{N_2} \sum_{k=-M_1}^{N_1} c_{j,k} \psi_{j,k} \right\|_2 = 0.$$

Простейшим примером ортогонального вэйвлета является функция Хаара ψ_H , определенная формулой

$$\psi_H(x) := \begin{cases} 1 & \text{для } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ -1 & \text{для } \frac{1}{2} \leq x < 1, \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (1.1.16)$$

Мы проведем краткое обсуждение свойств этой функции в параграфах 1.5 и 1.6. Другие о.н. вэйвлеты будут изучены более подробно в главе 7.

Ряды, представляющие функции f в (1.1.15), называются *вэйвлет-рядами*. Аналогично обозначению коэффициентов Фурье в (1.1.2) вэйвлет-коэффициенты c_{jk} определяются формулой

$$c_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle. \quad (1.1.17)$$

Если мы определим интегральное преобразование W_ψ в $L^2(\mathbf{R})$ как

$$(W_\psi f)(b, a) := |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)} dx, \quad f \in L^2(\mathbf{R}), \quad (1.1.18)$$

то вэйвлет-коэффициенты в (1.1.15) и (1.1.17) принимают вид

$$c_{j,k} = (W_\psi f) \left(\frac{k}{2^j}, \frac{1}{2^j} \right). \quad (1.1.19)$$

Линейное преобразование W_ψ называется *интегральным вэйвлет-преобразованием* относительно «базисного вэйвлета» ψ . Следовательно, (j, k) -й *вэйвлет-коэффициент функции f определяется интегральным вэйвлет-преобразованием f , вычисленным в точке двухпараметрического сдвига $b = k/2^j$ с двоичным растяжением $a = 2^{-j}$* , где тот же о.н. вэйвлет ψ используется для порождения вэйвлет-ряда (1.1.15) и для определения интегрального вэйвлет-преобразования (1.1.18).

Важность интегрального вэйвлет-преобразования будет обсуждена в следующих параграфах этой главы. Здесь мы только отметим, что это интегральное преобразование значительно обобщает (интегральное) преобразование Фурье $\mathcal{F}$, определяемое формулой

$$(\mathcal{F}, f)(y) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyx} f(x) dx, \quad f \in L^2(\mathbf{R}). \quad (1.1.20)$$

Математическое рассмотрение этого преобразования откладывается до следующей главы. Как известно, преобразование Фурье представляет собой другую важную составляющую анализа Фурье. Интересно отметить, что в то время, как две составляющие анализа Фурье, а именно ряд Фурье и преобразование Фурье, явно не связаны друг с другом, две соответствующие составляющие вэйвлет-анализа: вэйвлет-ряд (1.1.15) и интегральное вэйвлет-преобразование (1.1.18), тесно связаны друг с другом, как это описывается формулой (1.1.19).

1.2. Интегральное вэйвлет-преобразование и частотно-временной анализ

Преобразование Фурье $\mathcal{F}$, определенное в (1.1.20), не только мощный математический инструмент, но и допускает важные физические толкования в приложениях. Например, если функция $f \in L^2(\mathbf{R})$ рассматривается как *аналоговый сигнал с конечной энергией*, определяемой его нормой $\|f\|_2$, то преобразование Фурье

$$\hat{f}(\omega) := (\mathcal{F}f)(\omega) \quad (1.2.1)$$

функции f представляет собой *спектр* этого сигнала. В анализе сигналов аналоговые сигналы определяются во *временной области*, а спектральная информация об этих сигналах дается в *частотной области*. Для простоты представления будем допускать существование отрицательных частот. Поэтому в обоих случаях временной и частотной областями будет вещественная ось $\mathbf{R}$. Аналогично равенству Парсеваля для рядов Фурье, равенство Парсеваля, которое описывает связь между функциями из $L^2(\mathbf{R})$ и их преобразованием Фурье, дается формулой

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle, \quad f, g \in L^2(\mathbf{R}). \quad (1.2.2)$$

Здесь используется понятие скалярного произведения, определенное в (1.1.9), и, как мы увидим в следующей главе, преобразование Фурье $\mathcal{F}$ отображает $L^2(\mathbf{R})$ на себя. Как следствие равенства (1.2.2) мы видим, что энергия аналогового сигнала прямо пропорциональна его спектральному содержанию; более точно,

$$\|f\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\hat{f}\|_2, \quad f \in L^2(\mathbf{R}). \quad (1.2.3)$$

Однако формула

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\omega} f(t) dt \quad (1.2.4)$$

преобразования Фурье в таком виде не удобна для практических задач. Во-первых, чтобы извлечь спектральную информацию $\hat{f}(\omega)$ об аналоговом сигнале $f(t)$ по этой формуле, следует использовать бесконечные интервалы времени: иметь информацию о прошлом и будущем сигнала, чтобы вычислить спектр для одной частоты ω . Во-вторых, формула (1.2.4) не отражает эволюцию частот со временем. Что действительно необходимо — это определить интервалы времени, которые дают спектральную информацию о любой нужной частотной области (или диапазоне частот). Кроме того, так как частота сигнала обратно пропорциональна длительности его периода, то в случае высокочастотной спектральной информации временной интервал может быть взят относительно малым для обеспечения нужной точности, а в случае низкочастотной спектральной информации такой временной интервал должен быть взят относительно большим. Другими словами, важно иметь гибкое частотно-временное окно, которое автоматически сжимается в окрестности высоких частотных центров и расширяется у низких частотных центров. К счастью, интегральное вэйвлет-преобразование W_ψ , относящееся к некоторому «базисному вэйвлету» ψ , как это следует из формулы (1.1.18), обладает этой способностью сжатия и растяжения.

Рассмотрим специфический случай, когда обе функции — ψ и ее преобразование Фурье $\hat{\psi}$ — имеют достаточно быстрое затухание и могут использоваться в качестве *функций-окон*. Для любой функции w из $L^2(\mathbf{R})$, используемой в качестве функции-окна, можно ввести понятия его «центра» и «ширины», которые определяются следующим образом.

Определение 1.2. *Тождественно не равная нулю функция $w \in L^2(\mathbf{R})$ называется функцией-окном, если $xw(x)$ также*

принадлежит $L^2(\mathbf{R})$. Центр t^* и радиус Δ_w функции-окна w определяются как

$$t^* := \frac{1}{\|w\|_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} x |w(x)|^2 dx \quad (1.2.5)$$

и

$$\Delta_w := \frac{1}{\|w\|_2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (x - t^*)^2 |w(x)|^2 dx \right\}^{1/2}, \quad (1.2.6)$$

соответственно; ширина функции-окна равняется $2\Delta_w$.

Мы еще формально не определили «базисный вэйвлет» ψ , и отложим это до следующего параграфа. В качестве примера базисного вэйвлета может быть взят любой ортогональный вэйвлет, как это было рассмотрено в предыдущем параграфе. Во всяком случае, мы увидим, что любой базисный вэйвлет, являющийся функцией-окном, должен обязательно удовлетворять равенству

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0, \quad (1.2.7)$$

так что его график изображает *малую волну*.

Предположим, что ψ — базисный вэйвлет, такой что ψ и его преобразование Фурье $\hat{\psi}$ являются функциями-окнами с центрами и радиусами $t^*, \omega^*, \Delta_\psi, \Delta_{\hat{\psi}}$, соответственно. Тогда в первую очередь ясно, что интегральное вэйвлет-преобразование

$$(W_\psi f)(b, a) = |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \quad (1.2.8)$$

аналогового сигнала f , как это определено в (1.1.18), локализует сигнал во «временном окне»

$$[b + at^* - a\Delta_\psi, b + at^* + a\Delta_\psi],$$

с центром окна в $b + at^*$ и шириной, равной $2a\Delta_\psi$. В анализе сигналов это носит название «временной локализации». С другой стороны, если мы положим

$$\eta(\omega) := \hat{\psi}(\omega + \omega^*), \quad (1.2.9)$$

то η также функция-окно с центром в нуле и радиусом, равным $\Delta_{\hat{\psi}}$. Вследствие равенства Парсеваля (1.2.2) интегральное вэйвлет-преобразование (1.2.8) принимает вид

$$(W_{\psi}f)(b, a) = \frac{a|a|^{-\frac{1}{2}}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{ib\omega} \overline{\eta\left(a\left(\omega - \frac{\omega^*}{a}\right)\right)} d\omega. \quad (1.2.10)$$

Отсюда, с точностью до множителя $a \cdot |a|^{-\frac{1}{2}}/2\pi$ и линейного сдвига по фазе $e^{ib\omega}$, определенного величиной параметра b , та же самая величина $(W_{\psi}f)(b, a)$ дает локализованную информацию о спектре $\hat{f}(\omega)$ сигнала $f(t)$ с «частотным окном»

$$\left[\frac{\omega^*}{a} - \frac{1}{a} \Delta_{\hat{\psi}}, \frac{\omega^*}{a} + \frac{1}{a} \Delta_{\hat{\psi}} \right],$$

центр которого находится в точке ω^*/a , а ширина равна $2\Delta_{\hat{\psi}}/a$. Это называется «частотной локализацией» сигнала. Так как выражения в правой части (1.2.8) и (1.2.10) определяют одну и ту же функцию, мы приходим к понятию «частотно-временного окна»:

$$[b + at^* - a\Delta_{\psi}, b + at^* + a\Delta_{\psi}] \times \left[\frac{\omega^*}{a} - \frac{1}{a} \Delta_{\hat{\psi}}, \frac{\omega^*}{a} + \frac{1}{a} \Delta_{\hat{\psi}} \right] \quad (1.2.11)$$

для частотно-временного анализа сигналов, в котором используются интегральные вэйвлет-преобразования относительно базисного вэйвлета ψ с описанными выше свойствами функций-окон.

Следует сделать некоторые замечания. Во-первых, так как в конце концов мы должны рассматривать положительные частоты, то базисный вэйвлет ψ следует выбирать так, чтобы центр ω^* функции $\hat{\psi}$ был положительным числом. На практике это положительное число вместе с положительным масштабным параметром a выбирается таким образом, что ω^*/a является *частотным центром* для интересующего нас *диапазона частот* $\left[\frac{\omega^*}{a} - \frac{1}{a} \Delta_{\hat{\psi}}, \frac{\omega^*}{a} + \frac{1}{a} \Delta_{\hat{\psi}} \right]$. Тогда отношение

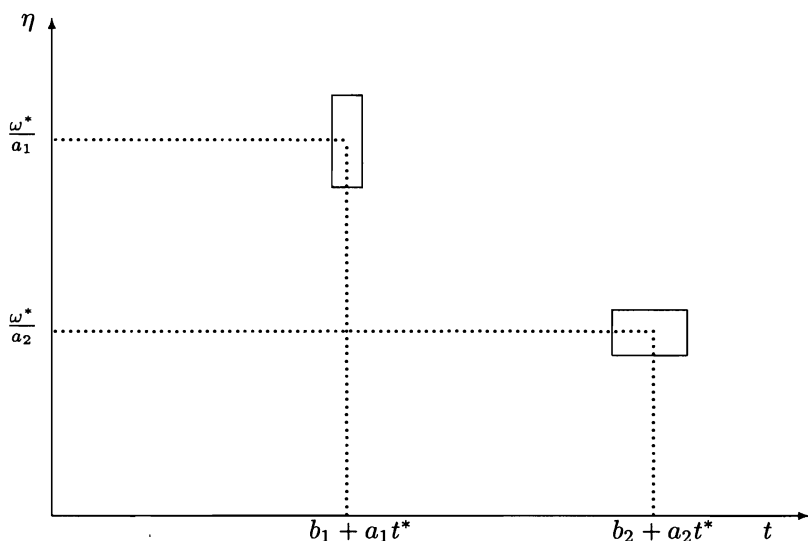


Рис. 1.2.1. Частотно-временные окна, $a_1 < a_2$.

частотного центра к ширине диапазона частот равняется

$$\frac{\omega^*/a}{2\Delta_{\hat{\psi}}/a} = \frac{\omega^*}{2\Delta_{\hat{\psi}}} \quad (1.2.12)$$

и не зависит от параметра a и положения частотного центра. Эта величина называется Q -*постоянной* частотного анализа. Важно, что частотно-временное окно (1.2.11) сужается (по переменной t) при больших частотных центрах ω^*/a и расширяется при малых частотных центрах ω^*/a (см. рис. 1.2.1); в то же время площадь частотно-временного окна остается постоянной, равной $4\Delta_{\hat{\psi}}\Delta\hat{\psi}$. Это как раз то, что наиболее желательно при частотно-временном анализе. Более подробно на этих особенностях вэйвлет-преобразования мы остановимся в главе 3.

1.3. Формулы обращения и двойственные

Интегральное вэйвлет-преобразование $(W_\psi f)(b, a)$ определяет расположение (в терминах $b + at^*$), «размер» (в терминах параметра a) и полную величину (измеряемую значением $(W_\psi f)(b, a)$) области изменения f с учетом способности сжатия и растяжения. Эта информация крайне ценна для многих применений, таких как частотно-временной анализ. Для примера, при сжатии информации значения $(W_\psi f)(b, a)$, ниже некоторого определенного уровня, удаляются; в случае низкочастотной фильтрации $(W_\psi f)(b, a)$ заменяется нулем для малых значений параметра a . В любом случае (новая и модифицированная) функция f должна быть восстановлена по значениям $(W_\psi f)(b, a)$. Любая формула, которая выражает f через значение $(W_\psi f)(b, a)$, будет называться *обратной формулой* и функция ψ — ядро, используемое в этой формуле, — *двойственным* базисного вэйвлета ψ . На практике функция ψ может использоваться как *базисный вэйвлет* только в том случае, если обратная формула существует.

Далее мы изучим четыре различные ситуации в порядке увеличения ограничений на область определения $W_\psi f$.

(1°) *Восстановление по $(W_\psi f)(b, a)$, $a, b \in \mathbf{R}$.*

Для того чтобы восстановить f по $(W_\psi f)(b, a)$, нам потребуется константа

$$C_\psi := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty. \quad (1.3.1)$$

Конечность этой константы сужает класс функций ψ из $L^2(\mathbf{R})$, которые могут быть использованы в качестве «базисных вэйвлетов» в интегральном вэйвлет-преобразовании. В частности, если ψ является функцией-окном, то она принадлежит пространству $L^1(\mathbf{R})$, то есть

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)| dx < \infty,$$

откуда следует, что $\hat{\psi}$ — непрерывная функция в $\mathbf{R}$ (см. теорему 2.2 в главе 2). Далее из (1.3.1) следует, что функция $\hat{\psi}$ обращается в нуль в начале координат, другими словами,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0. \quad (1.3.2)$$

Поэтому график базисного вэйвлета ψ представляет собой малую волну. С помощью константы C_ψ получаем следующую формулу восстановления:

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbf{R}^2} \int \{(W_\psi f)(b, a)\} \left\{ |a|^{-\frac{1}{2}} \psi \left(\frac{x-b}{a} \right) \right\} \frac{dad b}{a^2}, \quad f \in L^2(\mathbf{R}), \quad (1.3.3)$$

где $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Заметим, что то же самое ядро

$$|a|^{-\frac{1}{2}} \psi \left(\frac{x-b}{a} \right),$$

с точностью до знака комплексного сопряжения используется для определения обоих интегральных преобразований: (1.1.18) и его обращения (1.3.3). Следовательно, $\bar{\psi}$ можно назвать *двойственным* базисного вэйвлета ψ . Конечно, нельзя ожидать единственности этого двойственного.

(2°) *Восстановление по* $(W_\psi f)(b, a), b \in \mathbf{R}, a > 0$.

В частотно-временном анализе, как это обсуждалось в предыдущем параграфе, мы используем положительную константу, умноженную на a^{-1} , для представления частот. Следовательно, если нас интересуют только положительные частоты, то нам нужна формула восстановления, в которой интегрирование осуществляется по области $\mathbf{R} \times (0, \infty)$ вместо $\mathbf{R}^2$. Поэтому следует теперь рассмотреть еще более узкий класс базисных вэйвлетов ψ , а именно: вэйвлеты, удовлетворяющие равенству

$$\int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega = \int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}(-\omega)|^2}{\omega} d\omega = \frac{1}{2} C_\psi < \infty, \quad (1.3.4)$$

где C_ψ определена в (1.3.1). К примеру, любая вещественная ψ , удовлетворяющая (1.3.1), может быть взята в этом случае в качестве базисного вэйвлета. Для любой ψ , удовлетворяющей (1.3.4), мы имеем следующую формулу восстановления:

$$f(x) = \frac{2}{C_\psi} \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty \{(W_\psi f)(b, a)\} \left\{ \frac{1}{\sqrt{a}} \psi \left(\frac{x-b}{a} \right) \right\} db \right] \frac{da}{a^2}, f \in L^2(\mathbf{R}). \quad (1.3.5)$$

За исключением множителя 2, это та же самая формула, что и формула восстановления (1.3.3). Конечно, на базисный вэйвлет ψ в (1.3.5) наложены дополнительные ограничения. Так же как и в пункте (1°), в рассматриваемой ситуации мы снова называем $\bar{\psi}$, комплексно сопряженную ψ , *двойственным* базисного вэйвлета ψ . Здесь также нет оснований ожидать единственности двойственного.

(3°) *Восстановление по* $(W_\psi f)(b, a), b \in \mathbf{R}, a = \frac{1}{2^j}, j \in \mathbf{Z}$.

Сосредоточивая наше внимание на случае, когда $a = 2^{-j}$, где j пробегает все целые числа, мы можем рассматривать частотно-временную локализацию с частотными окнами

$$B_j := [2^j \omega^* - 2^j \Delta_{\hat{\psi}}, 2^j \omega^* + 2^j \Delta_{\hat{\psi}}], \quad j \in \mathbf{Z}. \quad (1.3.6)$$

В частности, если центр ω^* окна $\hat{\psi}$ выбран как

$$\omega^* = 3\Delta_{\hat{\psi}},$$

то диапазоны частот $B_j, j \in \mathbf{Z}$, в (1.3.6) образуют несвязное разбиение всей частотной оси $[0, \infty)$, за исключением концов интервалов B_j . Интегральное вэйвлет-преобразование (1.2.8) используется для определения временных интервалов $[b + 2^{-j}t^* - 2^{-j}\Delta_\psi, b + 2^{-j}t^* + 2^{-j}\Delta_\psi]$, на которых спектральное содержание сигнала f , с частотами из B_j , имеет достаточно большое значение, а именно: значение $|(W_\psi f)(b, a)|$ лежит выше некоторого порога.

Так как доступна только часть информации об $W_\psi f$, то базисный вэйвлет ψ должен удовлетворять более сильным

условиям, чем (1.3.1), для получения формулы восстановления. Условие, которое мы налагаем на ψ , называется *условием устойчивости* и имеет следующий вид:

$$A \leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(2^{-j}\omega)|^2 \leq B, \quad (1.3.7)$$

где A и B , $0 < A \leq B < \infty$ — константы, не зависящие от ω . Из формулы (1.3.7) следует, что ψ удовлетворяет также неравенствам

$$A \ln 2 \leq \int_0^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega, \int_0^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(-\omega)|^2}{\omega} d\omega \leq B \ln 2, \quad (1.3.8)$$

которые означают, что C_{ψ} лежит между $2A \ln 2$ и $2B \ln 2$. Подробно об этом будет говориться в § 3.4. Если $\hat{\psi}$ удовлетворяет (1.3.7), то базисный вэйвлет ψ имеет *двойственное* ψ^* , преобразование Фурье которого задается формулой

$$\hat{\psi}^*(\omega) := \frac{\overline{\hat{\psi}(\omega)}}{\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(2^{-j}\omega)|^2}. \quad (1.3.9)$$

Формула восстановления, использующая это двойственное, может быть определена следующим образом:

$$f(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{2^{j/2} (W_{\psi} f)(b, 2^{-j})\} \{2^j \psi^*(2^j(x-b))\} db,$$

$$f \in L^2(\mathbf{R}).$$

Так как базисные вэйвлеты ψ в этом случае имеют большое теоретическое и прикладное значение, им дано специальное название.

Определение 1.3. Функция $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ называется «двухпараметрическим вэйвлетом», если она удовлетворяет условию устойчивости (1.3.7) для почти всех $\omega \in \mathbf{R}$ и некоторых констант A и B таких, что $0 < A \leq B < \infty$.

В главе 3 будет показано, что даже двухпараметрические вэйвлеты в общем случае не имеют единственного двойственного. Наиболее интересными примерами двухпараметрических вэйвлетов, по всей видимости, являются так называемые *каркасы*, которые будут введены в § 3.5.

(4°) *Восстановление по* $(W_\psi f)(b, a)$, $b = \frac{k}{2^j}$, $a = 2^{-j}$, $j, k \in \mathbf{Z}$.

С целью создания эффективных алгоритмов для определения интегрального вэйвлет-преобразования $(W_\psi f)(b, a)$ и для восстановления f по $(W_\psi f)(b, a)$ рассматривают только дискретные выборки. Очень важно разбить частотную ось на диапазоны частот, использующие степени 2 для масштабного параметра a , как это было сказано в (3°), гораздо более эффективно рассматривать только модели с двухпараметрическими значениями $b = k/2^j$ на временной оси при $a = 2^{-j}$, $j \in \mathbf{Z}$, вместо произвольных $b \in \mathbf{R}$. Во многих применениях при таком единообразном дискретном моделировании мы очень мало теряем в общности задачи, и, как мы увидим далее, математическая теория такого подхода очень привлекательна. Сначала заметим, что

$$(W_\psi f) \left(\frac{k}{2^j}, \frac{1}{2^j} \right) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{\{2^{j/2} \psi(2^j x - k)\}} dx = \langle f, \psi_{j,k} \rangle, \quad (1.3.10)$$

где, так же как и в (1.1.11),

$$\psi_{j,k}(x) := 2^{j/2} \psi(2^j x - k), \quad j, k \in \mathbf{Z}. \quad (1.3.11)$$

Однако в общем случае мы не требуем, чтобы $\{\psi_{j,k}\}$ была о.н. базисом в $L^2(\mathbf{R})$, как это было в §1.1. Действительно, достаточно, чтобы $\{\psi_{j,k}\}$ была «устойчивым» базисом, как это будет определено ниже.

Определение 1.4. Функция $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ называется *$\mathcal{R}$ -функцией*, если $\{\psi_{j,k}\}$, как это определено в (1.3.12), является базисом Рисса в $L^2(\mathbf{R})$, в том смысле, что линейная оболочка $\psi_{j,k}$, $j, k \in \mathbf{Z}$, плотна в $L^2(\mathbf{R})$ и что существуют положи-

тельные константы A и B , $0 < A \leq B < \infty$ такие, что

$$A \| \{c_{j,k}\} \|_{\ell^2}^2 \leq \left\| \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{j,k} \psi_{j,k} \right\|_2^2 \leq B \| \{c_{j,k}\} \|_{\ell^2}^2 \quad (1.3.12)$$

для всех бесконечных суммируемых с квадратом последовательностей $\{c_{j,k}\}$, то есть

$$\| \{c_{j,k}\} \|_{\ell^2}^2 := \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_{j,k}|^2 < \infty.$$

Предположим, что ψ — $\mathcal{R}$ -функция. Тогда существует единственный базис Рисса $\{\psi^{j,k}\}$ в $L^2(\mathbf{R})$, двойственный $\{\psi_{j,k}\}$ в том смысле, что

$$\langle \psi_{j,k}, \psi^{\ell,m} \rangle = \delta_{j,\ell} \cdot \delta_{k,m}, \quad j, k, \ell, m \in \mathbf{Z}. \quad (1.3.13)$$

Отсюда любая функция $f \in L^2(\mathbf{R})$ имеет следующее (единственное) разложение в ряд:

$$f(x) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi^{j,k}(x). \quad (1.3.14)$$

Однако, хотя коэффициенты являются значениями интегрального вэйвлет-преобразования функции f относительно ψ , ряд (1.3.15) не является обязательно вэйвлет-рядом. Для того чтобы он был таковым, должна существовать некоторая функция $\tilde{\psi} \in L^2(\mathbf{R})$, и двойственный базис $\{\psi^{j,k}\}$ в формуле (1.3.15) получается из $\tilde{\psi}$ как

$$\psi^{j,k}(x) = \tilde{\psi}_{j,k}(x), \quad (1.3.15)$$

где, как обычно, используется обозначение

$$\tilde{\psi}_{j,k}(x) := 2^{j/2} \tilde{\psi}(2^j x - k). \quad (1.3.16)$$

Если $\{\psi_{j,k}\}$ —о.н. базис в $L^2(\mathbf{R})$, как уже обсуждалось в (1.1.14), (1.1.15) и (1.1.17), то ясно, что (1.3.14) имеет место

при $\psi^{j,k} = \psi_{j,k}$, или $\tilde{\psi} = \psi$. Однако в общем случае, как это мы увидим в следующем параграфе, $\tilde{\psi}$ может не существовать. Если ψ так выбрано, что $\tilde{\psi}$ существует, то пара $(\psi, \tilde{\psi})$ очень полезна для определения значений интегрального вэйвлет-преобразования функции $f \in L^2(\mathbf{R})$ в двухпараметрических точках и для различных двоичных масштабных уровней (или октав), а также для восстановления f по значениям ее интегрального вэйвлет-преобразования. А именно, мы имеем:

$$f(x) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \tilde{\psi}_{j,k}(x) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} \langle f, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle \psi_{j,k}(x). \quad (1.3.17)$$

1.4. Классификация вэйвлетов

Пусть $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ — $\mathcal{R}$ -функция, тогда последовательность $\{\psi_{j,k}\}$, определенная в (1.3.12), является базисом Рисса в $L^2(\mathbf{R})$. Первый вопрос, с которым мы сталкиваемся — происходит ли базис $\{\psi^{j,k}\}$, двойственный $\{\psi_{j,k}\}$, как это определено в (1.3.14), от некоторой функции $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ согласно формулам (1.3.16)-(1.3.17). Что самое удивительное, в общем случае ответ отрицательный.

Например, пусть $\eta \in L^2(\mathbf{R})$ — некоторый ортогональный вэйвлет, в соответствии с определением 1.1. Для любого комплексного числа z , такого что $|z| < 1$, рассмотрим функцию

$$\psi(x) := \psi_z(x) := \eta(x) - \bar{z}\sqrt{2}\eta(2x). \quad (1.4.1)$$

Тогда ясно, что последовательность $\{\psi_{j,k}\}$, определенная в (1.3.12), является базисом Рисса в $L^2(\mathbf{R})$. Рассмотрим теперь двойственный базис $\{\psi^{j,k}\}$ относительно $\{\psi_{j,k}\}$. В частности, легко проверить, что

$$\begin{cases} \psi^{0,0}(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \eta_{-\ell,0}(x) z^{\ell}, \\ \psi^{0,1}(x) = \eta_{0,1}(x). \end{cases} \quad (1.4.2)$$

Если может быть найдена некоторая функция $\tilde{\psi} = \tilde{\psi}_z \in L^2(\mathbf{R})$, для которой выполняются (1.3.16)–(1.3.17), то мы имеем

$$\begin{aligned}\eta(x) &= \eta_{0,1}(x+1) = \psi^{0,1}(x+1) \\ &= \tilde{\psi}_{0,1}(x+1) = \tilde{\psi}_{0,0}(x) \\ &= \psi^{0,0}(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \eta_{-\ell,0}(x) z^{\ell},\end{aligned}$$

или

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \eta_{-\ell,0}(x) z^{\ell} = 0.$$

Так как очевидно, что последнее равенство неверно, за исключением, может быть, конечного числа значений z , где $|z| \leq r$ и $0 < r < 1$ – произвольное число, то мы заключаем, что функции $\tilde{\psi} = \tilde{\psi}_z$ в общем случае не существует.

Эти рассуждения обуславливают следующее определение «вэйвлетов».

Определение 1.5. $\mathcal{R}$ -функция $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ называется $\mathcal{R}$ -вэйвлетом (или вэйвлетом), если существует функция $\tilde{\psi} \in L^2(\mathbf{R})$ такая, что $\{\psi_{j,k}\}$ и $\{\tilde{\psi}_{j,k}\}$, как это определено (1.3.12) и (1.3.17), являются двойственными базисами в $L^2(\mathbf{R})$. Если ψ – $\mathcal{R}$ -вэйвлет, то $\tilde{\psi}$ называют двойственным вэйвлетом, соответствующим ψ .

Ясно, что двойственный вэйвлет – единственный, и сам является вэйвлетом. Если говорить более точно, то пара $(\psi, \tilde{\psi})$ симметрична в смысле того, что ψ также является двойственным вэйвлетом для $\tilde{\psi}$. Для удобства будем просто называть ψ вэйвлетом, а $\tilde{\psi}$ – «двойственным» для ψ . Как мы уже заметили в параграфе 1.3, если ψ – ортогональный вэйвлет, то он является двойственным самому себе в том смысле, что $\tilde{\psi} = \psi$.

Важно придать особое значение тому факту, что любой вэйвлет, ортогональный или нет, порождает разложение любой функции $f \in L^2(\mathbf{R})$ в вэйвлет-ряд, а именно:

$$f(x) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} c_{j,k} \psi_{j,k}(x),$$

где каждый коэффициент $c_{j,k}$ есть интегральное вэйвлет-преобразование f относительно $\tilde{\psi}$ двойственного ψ , вычисленное в точках временной шкалы

$$(b, a) = \left(\frac{k}{2^j}, \frac{1}{2^j} \right).$$

Пусть ψ — любой вэйвлет, и рассмотрим порожденный им базис Рисса $\{\psi_{j,k}\}$. Для каждого $j \in \mathbf{Z}$ обозначим через W_j замыкание линейной оболочки $\{\psi_{j,k} : k \in \mathbf{Z}\}$, а именно:

$$W_j := \text{clos}_{L^2(\mathbf{R})}(\psi_{j,k} : k \in \mathbf{Z}). \quad (1.4.3)$$

Очевидно, что $L^2(\mathbf{R})$ может быть разложено в *прямую сумму* подпространств W_j :

$$L^2(\mathbf{R}) = \sum_{j \in \mathbf{Z}}^{\bullet} W_j := \cdots \dot{+} W_{-1} \dot{+} W_0 \dot{+} W_1 \dot{+} \cdots, \quad (1.4.4)$$

в том смысле, что любую $f \in L^2(\mathbf{R})$ можно единственным образом представить в виде суммы

$$f(x) = \cdots + g_{-1}(x) + g_0(x) + g_1(x) + \cdots, \quad (1.4.5)$$

где $g_j \in W_j$ для всех $j \in \mathbf{Z}$. Точки над знаком суммирования и над плюсами в (1.4.4) указывают на то, что берутся «прямые суммы».

Если ψ ортогональный вэйвлет, то подпространства W_j из $L^2(\mathbf{R})$ — взаимно ортогональны, другими словами

$$\langle g_j, g_\ell \rangle = 0, \quad j \neq \ell, \quad \text{где } g_j \in W_j \text{ и } g_\ell \in W_\ell. \quad (1.4.6)$$

В этом случае мы будем использовать обозначение

$$W_j \perp W_\ell, \quad j \neq \ell. \quad (1.4.7)$$

Соответственно прямая сумма в (1.4.4) становится *ортогональной суммой*:

$$L^2(\mathbf{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbf{Z}} W_j := \cdots \oplus W_{-1} \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \cdots, \quad (1.4.8)$$

где окружность вокруг знака плюс в (1.4.8) означает «ортогональную сумму». Разложение (1.4.8) обычно называют *ортогональным разложением* $L^2(\mathbf{R})$. Это означает, что разложение (1.4.5) любой $f \in L^2(\mathbf{R})$ в виде (бесконечной) суммы функций $g_j \in W_j$ не только единственно, но и то, что компоненты разложения f взаимно ортогональны, как указано в (1.4.6).

Таким образом, ортогональный вэйвлет ψ порождает ортогональное разложение $L^2(\mathbf{R})$. Однако мы использовали не все ортогональные свойства $\{\psi_{j,k}\}$, а именно: для каждого j условие ортогональности $\langle \psi_{j,k}, \psi_{j,\ell} \rangle = \delta_{k,\ell}$ не отражено в формуле (1.4.8). Это означает, что существует широкий класс вэйвлетов, которые могут быть использованы для порождения ортогональных разложений $L^2(\mathbf{R})$. Имеющаяся в нашем распоряжении гибкость математического аппарата позволяет конструировать вэйвлеты, обладающие некоторыми нужными свойствами. Наиболее важным свойством, которое может быть выполнено для вэйвлетов ψ с компактным носителем за счет такой гибкости, является их «симметричность» или «антисимметричность». Подробно мы рассмотрим это в главах 5 и 6.

Определение 1.6. Вэйвлет ψ в $L^2(\mathbf{R})$ называется *полуортогональным вэйвлетом* (или *п.о. вэйвлетом*), если порожденный им базис Рисса $\{\psi_{j,k}\}$ удовлетворяет равенству

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{\ell,m} \rangle = 0, \quad j \neq \ell; \quad j, k, \ell, m \in \mathbf{Z}. \quad (1.4.9)$$

Очевидно, что каждый п.о. вэйвлет порождает ортогональное разложение (1.4.8) $L^2(\mathbf{R})$, и любой о.н. вэйвлет является также п.о. вэйвлетом. Вэйвлет (или более точно, $\mathcal{R}$ -вэйвлет) ψ называется *неортогональным* (или *н.о.*) вэйвлетом, если он не является п.о. вэйвлетом. Однако, будучи $\mathcal{R}$ -вэйвлетом, он имеет двойственный вэйвлет $\tilde{\psi}$, и пара $(\psi, \tilde{\psi})$ обладает свойством *биортогональности*:

$$\langle \psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{\ell,m} \rangle = \delta_{j,\ell} \delta_{k,m}, \quad j, k, \ell, m \in \mathbf{Z}. \quad (1.4.10)$$

1.5. Кратномасштабный анализ, сплайны и вэйвлеты

Любой вэйвлет, полуортогональный или нет, порождает разложение $L^2(\mathbf{R})$ в прямую сумму подпространств (1.4.4). Для каждого $j \in \mathbf{Z}$ будем рассматривать замкнутые подпространства

$$V_j = \cdots \dot{+} W_{j-2} \dot{+} W_{j-1}, \quad j \in \mathbf{Z}, \quad (1.5.1)$$

в $L^2(\mathbf{R})$. Ясно, что эти подпространства обладают следующими свойствами:

$$(1^\circ) \quad \cdots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \cdots,$$

$$(2^\circ) \quad \text{clos}_{L^2} \left(\bigcup_{j \in \mathbf{Z}} V_j \right) = L^2(\mathbf{R}),$$

$$(3^\circ) \quad \bigcap_{j \in \mathbf{Z}} V_j = \{0\},$$

$$(4^\circ) \quad V_{j+1} = V_j \dot{+} W_j, \quad j \in \mathbf{Z} \quad \text{и}$$

(5°) $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}, j \in \mathbf{Z}$. Следовательно, в противоположность подпространствам W_j , которые удовлетворяют соотношению

$$W_j \cap W_\ell = \{0\}, \quad j \neq \ell,$$

подпространства V_j вложены друг в друга, как это описано в условии (1°), и обладают тем свойством, что любая функция f из $L^2(\mathbf{R})$ может быть приближена с произвольной точностью ее проекциями $P_j f$ на V_j , что следует из условия (2°). С другой стороны, с уменьшением j проекции $P_j f$ могут иметь сколь угодно малую энергию, что обусловлено условием (3°). Условиями (1°) – (3°) не описывается *наиболее важное* внутреннее свойство этих пространств, которое состоит в том, что всё больше и больше «колебаний» $P_j f$ убирается при $j \rightarrow -\infty$. В сущности, эти колебания счищаются слой за слоем в порядке убывания «размеров колебаний» (более известных как *диапазоны частот*) и откладываются в дополнительных под-

пространствах W_j , в соответствии с (4°). Ввиду условия (5°) этот процесс может протекать очень эффективно.

Действительно, если упомянутое подпространство V_0 порождено единственной функцией $\phi \in L^2(\mathbf{R})$ в смысле, что

$$V_0 = \text{clos}_{L^2(\mathbf{R})}(\phi_{0,k} : k \in \mathbf{Z}), \quad (1.5.2)$$

где

$$\phi_{j,k}(x) := 2^{j/2} \phi(2^j x - k), \quad (1.5.3)$$

то все подпространства V_j также порождены той же функцией ϕ (точно так же, как подпространства W_j порождены ψ согласно (1.4.3)), а именно

$$V_j = \text{clos}_{L^2(\mathbf{R})}(\phi_{j,k} : k \in \mathbf{Z}), \quad j \in \mathbf{Z}. \quad (1.5.4)$$

Отсюда процесс «счищения» с V_j подпространства W_{j-1} , затем $W_{j-2}, \dots, W_{j-\ell}$ может быть выполнен достаточно эффективно. Мы вернемся к этому рассуждению в следующем параграфе.

Определение 1.7. Говорят, что функция $\phi \in L^2(\mathbf{R})$ порождает кратномасштабный анализ (КМА), если она порождает последовательность вложенных друг в друга замкнутых подпространств V_j , которые удовлетворяют условиям (1°) – (3°) и (5°) в смысле (1.5.4), и $\{\phi_{0,k}\}$ образует базис Рисса в V_0 . Здесь, аналогично определению 1.4., для того чтобы $\{\phi_{0,k}\}$ была базисом Рисса в V_0 , должны существовать две константы A и $B, 0 < A \leq B < \infty$, такие что

$$A \|\{c_k\}\|_{\ell^2}^2 \leq \left\| \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \phi_{0,k} \right\|_2^2 \leq B \|\{c_k\}\|_{\ell^2}^2 \quad (1.5.5)$$

для всех бесконечных суммируемых с квадратом последовательностей $\{c_k\}$, то есть

$$\|\{c_k\}\|_{\ell^2}^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 < \infty. \quad (1.5.6)$$

Если ϕ порождает КМА, то ϕ называется «масштабирующей функцией».

Точное определение (КМА) будет дано в §5.1. Типичными примерами масштабирующих функций ϕ являются B -сплайны m -го порядка N_m , где m — произвольное положительное целое число. Более точно, B -сплайн первого порядка N_1 — это характеристическая функция единичного интервала $[0, 1)$, и для $m \geq 2$ N_m определяется рекурсивно интегралом свертки:

$$N_m(x) := \int_{-\infty}^{\infty} N_{m-1}(x-t)N_1(t)dt = \int_0^1 N_{m-1}(x-t)dt. \quad (1.5.7)$$

Чтобы описать подпространство V_0 , порожденное N_m , необходимо ввести следующие обозначения:

$$\begin{cases} \pi_n & \text{— множество всех полиномов степени не выше } n. \\ C^n & \text{— множество всех функций } f \text{ таких, что} \\ & f, f', \dots, f^{(n)} \text{ всюду непрерывны. Также пусть } C = C^0. \end{cases} \quad (1.5.8)$$

Подпространство V_0 , порожденное N_m , состоит из всех функций $f \in C^{m-2} \cap L^2(\mathbf{R})$ таких, что на любом интервале $[k, k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$ функция f принадлежит множеству π_{m-1} , т.е.

$$f|_{[k, k+1)} \in \pi_{m-1}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Из условия (5°) для КМА мы можем теперь определить все другие подпространства V_j , а именно

$$V_j = \{f \in C^{m-2} \cap L^2(\mathbf{R}) : f|_{[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j})} \in \pi_{m-1}, \quad k \in \mathbf{Z}\}.$$

Так как сплайны — кусочно-полиномиальные функции, то они легко могут использоваться при вычислениях. Действительно, алгоритмы для графического изображения кривых с помощью сплайнов и для вычисления их полиномиальных составляющих, особенно в терминах B -сетей (или коэффициентов Бернштейна—Безье), чрезвычайно эффективны. Сверх того,

так как B -сплайны имеют наименьший возможный носитель, то применимы схемы локальной интерполяции для аппроксимации функций в $C \cap L^2(\mathbf{R})$ с помощью любого сплайн-подпространства V_j . Все такие алгоритмы могут использоваться в режиме реального времени. Детали будут изучены в главе 4.

Из последовательности вложенных друг в друга сплайн-подпространств V_j мы получаем подпространства W_j как ортогональные дополнения, а именно:

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \quad j \in \mathbf{Z}. \quad (1.5.9)$$

Эти подпространства W_j взаимно ортогональны и образуют ортогональное разложение $L^2(\mathbf{R})$, как это следует из (1.4.7) и (1.4.8). Точно так же, как B -сплайн N_m является функцией с наименьшим носителем, порождающей $\{V_j\}$, интересно найти функцию $\psi_m \in W_0$ с наименьшим носителем, которая порождала бы взаимно ортогональные подпространства W_j , в смысле (1.4.3), с функциями $\psi_{m,j,k}$ вместо $\psi_{j,k}$, где

$$\psi_{m,j,k}(x) = 2^{j/2} \psi_m(2^j x - k), \quad j, k \in \mathbf{Z}. \quad (1.5.10)$$

Эти функции с компактным носителем, ψ_m , будут называться B -вэйвлетами порядка m . В главе 6 будут выведены явные формулы для всех ψ_m и их двойственных $\tilde{\psi}_m$, $m = 1, 2, \dots$. Интересно сравнить носители B -сплайнов и B -вэйвлетов. Под носителем непрерывной функции f , обращающейся в нуль вне некоторого ограниченного интервала, мы понимаем наименьшую замкнутую область, вне которой f тождественно равна нулю. Стандартное обозначение – $\text{supp } f$. Мы увидим, что

$$\begin{cases} \text{supp } N_m = [0, m], \\ \text{supp } \psi_m = [0, 2m - 1] \end{cases} \quad (1.5.11)$$

для всех $m = 1, 2, \dots$. Кроме наименьшего носителя B -вэйвлеты ψ_m обладают многими другими важными свойствами.

Здесь мы отметим только три из них. Во-первых, из (1.5.9) следует, что каждый ψ_m является п.о. вэйвлетом. Во-вторых, нетрудно построить эффективные алгоритмы вычисления ψ_m и всех его производных. И наконец, B -вэйвлеты ψ_m — симметричны для четных m и антисимметричны для нечетных m ; это означает, что

$$\begin{cases} \psi_m(x) = \psi_m(2m-1-x) & \text{для четных } m, \\ \psi_m(x) = -\psi_m(2m-1-x) & \text{для нечетных } m. \end{cases} \quad (1.5.12)$$

Симметрия и антисимметрия вэйвлет-функций очень важны в приложениях, связанных с анализом сигналов. Например, эти понятия играют главную роль для устранения искажений при восстановлении сжатой информации. Этот вопрос будет обсуждаться в главе 5. Другие интересные свойства ψ_m будут изучены в главе 6.

1.6. Вэйвлет-разложения и вэйвлет-восстановления

Вернемся к рассмотрению основной структуры кратномасштабного анализа и вэйвлетов, как это определено в (1.5.1), где $\{V_j\}$ порождена некоторой масштабирующей функцией $\phi \in L^2(\mathbf{R})$ и $\{W_j\}$ порождена некоторым вэйвлетом $\psi \in L^2(\mathbf{R})$. В этом случае, ввиду условия (2°), каждая f из $L^2(\mathbf{R})$ с любой желаемой точностью может быть приближена функцией $f_N \in V_N$ при некотором $N \in \mathbf{Z}$. Так как $V_j = V_{j-1} \dot{+} W_{j-1}$ для любого $j \in \mathbf{Z}$, f_N имеет единственное разложение:

$$f_N = f_{N-1} + g_{N-1},$$

где $f_{N-1} \in V_{N-1}$ и $g_{N-1} \in W_{N-1}$. Повторяя этот процесс, имеем:

$$f_N = g_{N-1} + g_{N-2} + \cdots + g_{N-M} + f_{N-M}, \quad (1.6.1)$$

где $f_j \in V_j$ и $g_j \in W_j$ для любого j и M выбирается так, чтобы f_{N-M} была достаточно «размыта». «Разложение» в (1.6.1), которое единственно, называется *вэйвлет-разложением*, и «размытость» измеряется в терминах «колебаний» (или более точно, частоты или числа периодов на единицу длины) функции f_{N-M} . Наименее эффективный «критерий остановки» состоит в требовании, чтобы $\|f_{N-M}\|$ был меньше некоторого порога. В последующем мы обсудим алгоритмический подход к выражению f_N в виде прямой суммы его компонент $g_{N-1}, \dots, g_{N-M}$ и f_{N-M} и восстановлению f_N по этим компонентам.

Так как масштабирующая функция $\phi \in V_0$ и вэйвлет $\psi \in W_0$ принадлежат V_1 , а V_1 порождено $\phi_{1,k}(x) = 2^{1/2}\phi(2x - k)$, $k \in \mathbf{Z}$, то существуют две последовательности $\{p_k\}$ и $\{q_k\} \in \ell^2$ такие, что

$$\phi(x) = \sum_k p_k \phi(2x - k), \quad (1.6.2)$$

$$\psi(x) = \sum_k q_k \phi(2x - k) \quad (1.6.3)$$

для всех $x \in \mathbf{R}$. Формулы (1.6.2) и (1.6.3) называются *двухмасштабными соотношениями* масштабирующей функции и вэйвлета, соответственно. С другой стороны, так как $\phi(2x)$ и $\phi(2x - 1)$ принадлежат V_1 и $V_1 = V_0 + W_0$, то существуют четыре ℓ^2 последовательности, которые мы обозначаем как $\{a_{-2k}\}, \{b_{-2k}\}, \{a_{1-2k}\}$ и $\{b_{1-2k}\}, k \in \mathbf{Z}$, такие что

$$\phi(2x) = \sum_k [a_{-2k} \phi(x - k) + b_{-2k} \psi(x - k)], \quad (1.6.4)$$

$$\phi(2x - 1) = \sum_k [a_{1-2k} \phi(x - k) + b_{1-2k} \psi(x - k)] \quad (1.6.5)$$

для всех $x \in \mathbf{R}$. Две формулы (1.6.4) и (1.6.5) могут быть объединены в одну:

$$\phi(2x - \ell) = \sum_k [a_{\ell-2k} \phi(x - k) + b_{\ell-2k} \psi(x - k)], \quad \ell \in \mathbf{Z}, \quad (1.6.6)$$

которая называется *соотношением разложения* для ϕ и ψ . Теперь мы имеем две пары последовательностей $(\{p_k\}, \{q_k\})$ и $(\{a_k\}, \{b_k\})$, которые единственны и проистекают из представления в виде прямой суммы $V_1 = V_0 + W_0$. Эти последовательности используются для определения последующих алгоритмов разложения и восстановления. Поэтому, $\{p_k\}$ и $\{q_k\}$ называются последовательностями восстановления, тогда как $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$ — последовательностью разложения.

Для того чтобы описать эти алгоритмы, сначала напомним, что обе функции $f_j \in V_j$ и $g_j \in W_j$ единственным образом представляются рядами:

$$\begin{cases} f_j(x) = \sum_k c_k^j \phi(2^j x - k), \\ \text{где } \mathbf{c}^j = \{c_k^j\} \in \ell^2 \end{cases} \quad (1.6.7)$$

и

$$\begin{cases} g_j(x) = \sum_k d_k^j \psi(2^j x - k), \\ \text{где } \mathbf{d}^j = \{d_k^j\} \in \ell^2, \end{cases} \quad (1.6.8)$$

здесь мы умышленно опустили нормировочный коэффициент $2^{j/2}$, написав $\phi(2^j x - k)$ и $\psi(2^j x - k)$ вместо обычных $\phi_{j,k}$ и $\psi_{j,k}$, для того чтобы избежать ненужного умножения на $\sqrt{2}$ в алгоритмах. В следующих алгоритмах разложения и восстановления функции f_j и g_j представлены с помощью последовательностей $\mathbf{c}^j$ и $\mathbf{d}^j$, как это определено в (1.6.7) и (1.6.8).

(а) *Алгоритм разложения*

Применяя (1.6.6)–(1.6.8), имеем

$$\begin{cases} c_k^{j-1} = \sum_{\ell} a_{\ell-2k} c_{\ell}^j; \\ d_k^{j-1} = \sum_{\ell} b_{\ell-2k} c_{\ell}^j. \end{cases} \quad (1.6.9)$$

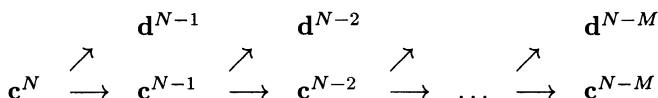


Рис. 1.6.1. Вэйвлет-разложение.

Заметим, что обе последовательности $\mathbf{c}^{j-1}$ и $\mathbf{d}^{j-1}$ — получаются из $\mathbf{c}^j$ по схеме *скользящего среднего*, использующего последовательности разложения в качестве «весов» с той особенностью, что эти скользящие средние вычисляются только в четных точках. Это называется сгущающей выборкой. Поэтому каждая стрелка на рис.1.6.1 указывает на скользящее среднее вместе со сгущающей выборкой.

(б) *Алгоритм восстановления*

Применяя (1.6.2), (1.6.3) и (1.6.8), имеем:

$$c_k^j = \sum_{\ell} [p_{k-2\ell} c_{\ell}^{j-1} + q_{k-2\ell} d_{\ell}^{j-1}] \quad (1.6.10)$$

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{d}^{N-M} & & \mathbf{d}^{N-M+1} & & \mathbf{d}^{N-1} & & \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ \mathbf{c}^{N-M} & \longrightarrow & \mathbf{c}^{N-M+1} & \longrightarrow & \dots & \mathbf{c}^{N-1} & \longrightarrow \mathbf{c}^N \end{array}$$

Рис. 1.6.2. Вэйвлет-восстановление.

Здесь $\mathbf{c}^j$ получается из $\mathbf{c}^{j-1}$ и $\mathbf{d}^{j-1}$ с помощью двух скользящих средних, использующих последовательности восстановления в качестве «весов», с той особенностью, что разрежающая выборка должна быть выполнена до реализации скользящих средних. Более точно, значения c_{ℓ}^{j-1} и d_{ℓ}^{j-1} берутся при четных индексах $m = 2\ell$ и нули — при нечетных индексах $m = 2\ell + 1$, затем выполняется (дискретная) свертка по отношению к $\{p_m\}$ и $\{q_m\}$.

Мы заканчиваем этот параграф несколькими замечаниями о двух приведенных выше алгоритмах. Во-первых, если весовая последовательность ($\{a_k\}$, $\{b_k\}$, $\{p_k\}$ или $\{q_k\}$) конечна, то соответствующий алгоритм скользящего среднего — это очень простой фильтр с конечным импульсным откликом (КИО-фильтр). Если, однако, весовая последовательность бесконечна, то алгоритм скользящего среднего есть фильтр с бесконечным импульсным откликом (БИО-фильтр). Как известно, БИО-фильтры могут быть использованы как филь-

тры с авторегрессивными скользящими средними (АРСС-фильтры) в случае, если символ весовой последовательности (или ее « z -преобразование») есть рациональная функция. Мы будем называть такие весовые последовательности «АРСС-последовательностями». Иначе, бесконечная весовая последовательность должна быть усечена, чтобы привести к КИО-фильтру. Во-вторых, если весовая последовательность состоит из иррациональных чисел или чисел с длинным десятичным разложением, то необходимо их округление («квантование»). Конечно, усечение и квантование влекут за собой погрешности, которые должны быть оценены *a priori*. Наконец, так как масштабирующая функция и вэйвлет-пара (ϕ, ψ) используются как «зеркальные фильтры», то симметрия (или, по крайней мере антисимметрия) очень важна во многих применениях, связанных с анализом сигналов. Например, при восстановлении изображений по сжатой информации отсутствие симметрии или антисимметрии влечет за собой существенные искажения. Как будет видно в главе 5, свойства симметрии (ϕ, ψ) находят свое отражение в симметрии последовательностей разложения и восстановления. Краткое описание методов обработки сигналов и изображений будет дано в главе 3.

В главе 6 мы увидим, что в тех случаях, когда сплайн-вэйвлеты ψ_m (с минимальным носителем) используются в качестве ψ , последовательности восстановления конечны, а последовательности разложения — АРСС-последовательности. Все эти последовательности симметричны для четных m и антисимметричны для нечетных m . Кроме того, выделяя общий знаменатель членов последовательности, мы придем к последовательности с целочисленными членами.

С другой стороны, когда рассматриваются ортогональные вэйвлеты ψ с компактным носителем, то последовательности разложения и восстановления конечны. Однако для непрерывных ψ возможно отсутствие симметрии и антисимметрии, и соответствующие последовательности разложения и восста-

новления должны быть подвергнуты квантованию. Детальное обсуждение структуры и схем построения масштабирующих функций и вэйвлетов будет дано в главе 5. В частности, в этой главе будет изучена тесная связь между линейно-фазовой фильтрацией и симметричными масштабирующими функциями и вэйвлетами. Последние две главы посвящены соответственно полуортогональным и ортогональным вэйвлетам. Более точно, достаточно полный анализ базисных сплайн-вэйвлетов будет дан в главе 6, и рассуждения об ортогональных вэйвлетах, особенно с компактным носителем, будут представлены в главе 7. Также в эту главу будет включено краткое рассмотрение ортогональных вэйвлет-пакетов, которые применяются для лучшей частотно-временной локализации.

Глава 2

Анализ Фурье

Тема анализа Фурье — одна из самых старых в математическом анализе, она чрезвычайно важна как для математиков, так и для инженеров. С практической точки зрения, когда говорят об анализе Фурье, обычно имеют в виду (интегральное) преобразование Фурье и ряды Фурье. Преобразование Фурье — это интеграл Фурье от некоторой функции f , определенной на вещественной оси $\mathbf{R}$. Когда f представляется как аналоговый сигнал, то ее область определения $\mathbf{R}$ называют непрерывной временной областью. В этом случае преобразование Фурье $\hat{f}$ от f описывает спектральное поведение сигнала f . Так как спектральная информация дается в терминах частоты, область определения преобразования Фурье $\hat{f}$, которой также является $\mathbf{R}$, называется частотной областью. С другой стороны, ряды Фурье — это преобразование бесконечных последовательностей в периодические функции. Следовательно, когда бесконечная последовательность представляет собой цифровой сигнал, то его область определения, которой является множество целых чисел $\mathbf{Z}$, называется дискретной временной областью. В этом случае ряд Фурье также описывает спектральное поведение цифрового сигнала, и область определения ряда Фурье также вещественная ось $\mathbf{R}$,

которая является частотной областью. Однако, так как ряды Фурье имеют период, равный 2π , частотная область $\mathbf{R}$ в этом случае обычно идентифицируется с единичной окружностью. Для математика такое отождествление более предпочтительно, так как «дуальная группа» $\mathbf{Z}$ — это «группа окружности».

Важность преобразования Фурье и рядов Фурье проистекает не только из значительности их физической интерпретации, как при частотно-временном анализе сигналов, но также из того факта, что аналитическая Фурье-техника является весьма мощной. Так, например, при изучении вэйвлет-анализа часто встречается формула суммирования Пуассона, равенство Парсеваля для рядов и для интегралов, преобразование Фурье функции Гаусса, свертка функций, дельта-функция и т.д. Так как предполагается, что эта монография должна быть самодостаточной, то есть содержать все нужные для изложения данные, то в этой главе будут приведены предварительные материалы по основам анализа Фурье.

2.1. Прямое и обратное преобразования Фурье

В этой главе предполагается, что все функции f , определенные на вещественной оси $\mathbf{R}$, измеримы. Для читателя, который не владеет основами теории Лебега, но хочет понять некоторые основные теоремы, можно допустить, что f — кусочно непрерывны, то есть можно считать, что в каждом случае существуют точки $\{x_j\}$ на $\mathbf{R}$, не имеющие конечных точек сгущения такие, что $x_j' < x_{j+1}$ для всех j и что f непрерывна на каждом открытом интервале (x_j, x_{j+1}) так же, как на бесконечных интервалах $(-\infty, \min x_j)$ и $(\max x_j, \infty)$, если $\min x_j$ или $\max x_j$ существуют. Для каждого p , $1 \leq p < \infty$, обозначим через $L^p(\mathbf{R})$ класс измеримых функций f на $\mathbf{R}$ таких,

что интеграл (Лебега)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx$$

конечен. Также обозначим через $L^\infty(\mathbf{R})$ множество почти всюду (п.в.) ограниченных функций; такими являются функции, ограниченные всюду, кроме множества меры (Лебега) нуль. Отсюда, наделенное «нормой»

$$\|f\|_p := \begin{cases} \{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx\}^{\frac{1}{p}} & \text{для } 1 \leq p < \infty, \\ \text{ess sup}_{-\infty < x < \infty} |f(x)| & \text{для } p = \infty, \end{cases}$$

каждое $L^p(\mathbf{R})$, $1 \leq p \leq \infty$, является пространством Банаха. Так как в этой вводной монографии для понимания сущности вэйвлетов и частотно-временного анализа не требуется дополнительных знаний о структуре пространств Банаха, читатель должен только знать несколько элементарных свойств норм $L^p(\mathbf{R})$ таких, как неравенство Минковского:

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \quad (2.1.1)$$

и неравенство Гельдера:

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p(p-1)^{-1}}, \quad (2.1.2)$$

где $p(p-1)^{-1}$ должно быть заменено 1 при $p = \infty$. Следствием неравенства (2.1.2) является неравенство Шварца:

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2. \quad (2.1.3)$$

Отсюда, ввиду (2.1.3), мы можем определить «скалярное произведение»

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx, \quad f, g \in L^2(\mathbf{R}). \quad (2.1.4)$$

Наделенное этим скалярным произведением Банахово пространство $L^2(\mathbf{R})$ становится Гильбертовым пространством. Ясно, что

$$\langle f, f \rangle = \|f\|_2^2, \quad f \in L^2(\mathbf{R}). \quad (2.1.5)$$

В дальнейшем в первую очередь мы сосредоточим наше внимание на функциях из $L^1(\mathbf{R})$. Как обычно (для математиков), мнимая единица будет обозначаться через i . Инженеры-электрики могут при желании во всем тексте заменить i на j .

Определение 2.1. Преобразование Фурье функции $f \in L^1(\mathbf{R})$ определяется как

$$\hat{f}(\omega) = (\mathcal{F}f)(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx. \quad (2.1.6)$$

Некоторые основные свойства $\hat{f}(\omega)$ для любой $f \in L^1(\mathbf{R})$ объединены в следующей теореме.

Теорема 2.2. Пусть $f \in L^1(\mathbf{R})$. Тогда ее преобразование Фурье $\hat{f}$ обладает следующими свойствами:

- (а) $\hat{f} \in L^\infty(\mathbf{R})$, где $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$;
- (б) $\hat{f}$ равномерно непрерывна на $\mathbf{R}$;
- (в) если производная f' от f также существует и принадлежит $L^1(\mathbf{R})$, то

$$\hat{f}'(\omega) = i\omega \hat{f}(\omega); \quad (2.1.7)$$

- (г) $\hat{f}(\omega) \rightarrow 0$ при $\omega \rightarrow \infty$ или $-\infty$.

Доказательство. Утверждение (а) очевидно. Для доказательства (б) возьмем произвольное δ и рассмотрим

$$\begin{aligned} \sup_{\omega} |\hat{f}(\omega + \delta) - \hat{f}(\omega)| &= \sup_{\omega} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} (e^{-i\delta x} - 1) f(x) dx \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-i\delta x} - 1| |f(x)| dx. \end{aligned}$$

Так как $|e^{-i\delta x} - 1||f(x)| \leq 2|f(x)| \in L^1(\mathbf{R})$ и $|e^{-i\delta x} - 1| \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$, то по теореме Лебега о переходе к пределу под знаком интеграла имеем, что величина, стоящая справа, стремится к нулю при $\delta \rightarrow 0$.

Для доказательства (в) мы применяем стандартную теорему интегрирования по частям в (2.1.6), используя тот факт, что $f(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$.

В завершение, утверждение (г) часто называют *леммой Римана—Лебега*. Для ее доказательства заметим сначала, что если f' существует и принадлежит $L^1(\mathbf{R})$, то из (в) и (а) мы имеем

$$|\hat{f}(\omega)| = \frac{1}{|\omega|} |\hat{f}'(\omega)| \leq \frac{1}{|\omega|} \|f'\|_1 \rightarrow 0$$

при $\omega \rightarrow \pm\infty$. В общем случае для любого $\varepsilon > 0$ можно найти функцию g такую, что $g, g' \in L^1(\mathbf{R})$ и $\|f - g\|_1 < \varepsilon$. Тогда из утверждения (а) мы имеем

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\omega)| &\leq |\hat{f}(\omega) - \hat{g}(\omega)| + |\hat{g}(\omega)| \\ &\leq \|f - g\|_1 + |\hat{g}(\omega)| < \varepsilon + |\hat{g}(\omega)|, \end{aligned}$$

завершающее доказательство (г). □

Хотя $\hat{f}(\omega) \rightarrow 0$ при $\omega \rightarrow \pm\infty$ для любой $f \in L^1(\mathbf{R})$, это не означает, что $\hat{f}$ обязательно принадлежит $L^1(\mathbf{R})$. Чтобы построить контрпример для демонстрации этого замечания, будем использовать понятие так называемой «ступеньки Хэвисайда»

$$u_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{для } x \geq a, \\ 0 & \text{для } x < a, \end{cases} \quad (2.1.8)$$

где $a \in \mathbf{R}$.

Пример 2.3. Функция

$$f(x) = e^{-x} u_0(x)$$

принадлежит $L^1(\mathbf{R})$, но ее преобразование Фурье

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{1 + i\omega}$$

не принадлежит $L^1(\mathbf{R})$.

Доказательство. Из равенства $e^{-i\omega x} = \cos \omega x - i \sin \omega x$ имеем:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \int_0^\infty e^{-x} \cos \omega x dx - i \int_0^\infty e^{-x} \sin \omega x dx \\ &= \frac{1}{1 + \omega^2} - \frac{i\omega}{1 + \omega^2} = \frac{1}{1 + i\omega}, \end{aligned}$$

которая убывает на бесконечности как $\frac{1}{i\omega}$ и, следовательно, не принадлежит $L^1(\mathbf{R})$. $\square$

Если $\hat{f}$ принадлежит $L^1(\mathbf{R})$, то мы можем «восстановить» f по $\hat{f}$, используя «обратное преобразование Фурье», определенное следующим образом.

Определение 2.4. Пусть $\hat{f} \in L^1(\mathbf{R})$ – преобразование Фурье некоторой функции $f \in L^1(\mathbf{R})$. Тогда обратное преобразование Фурье от $\hat{f}$ определяется как

$$(\mathcal{F}^{-1}\hat{f})(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\omega} \hat{f}(\omega) d\omega. \quad (2.1.9)$$

Поставим следующий важный вопрос: когда f может быть восстановлена по $\hat{f}$ с использованием оператора $\mathcal{F}^{-1}$, т. е. когда $(\mathcal{F}^{-1}\hat{f})(x) = f(x)$? Ответ следующий: в любой точке x , где f непрерывна. Этот ответ является содержанием следующей теоремы.

Теорема 2.5. Пусть $f \in L^1(\mathbf{R})$ такая, что ее преобразование Фурье $\hat{f}$ также принадлежит $L^1(\mathbf{R})$. Тогда

$$f(x) = (\mathcal{F}^{-1}\hat{f})(x) \quad (2.1.10)$$

в любой точке x , где f непрерывна.

Мы отложим доказательство этой теоремы до следующего параграфа. Вместо этого мы закончим параграф выводом формулы преобразования Фурье для «функции Гаусса».

Пример 2.6. Пусть $a > 0$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}. \quad (2.1.11)$$

В частности, преобразование Фурье функции Гаусса e^{-x^2} равняется $\sqrt{\pi} e^{-\omega^2/4}$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f(y) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2 + xy} dx, \quad y \in \mathbf{R}. \quad (2.1.12)$$

Дополняя до квадрата, получим

$$\begin{aligned} f(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x - \frac{y}{2a})^2 + \frac{y^2}{4a}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} e^{y^2/4a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{y^2/4a}. \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

Так как обе функции: $f(y)$, определенная (2.1.12), и функция

$$g(y) := \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{y^2/4a}$$

могут рассматриваться как целые (аналитические) функции, равные друг другу на $\mathbf{R}$, как это показано в (2.1.13), они должны совпадать на всей комплексной плоскости $\mathbf{C}$. В частности, положив y равным $-i\omega$, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}. \quad \square$$

2.2. Непрерывно-временная свертка и дельта-функция

Пусть f и g принадлежат $L^1(\mathbf{R})$. Тогда h – (непрерывно-временная) *свертка* функций f и g – также является функцией из $L^1(\mathbf{R})$ и определена формулой

$$h(x) = (f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy. \quad (2.2.1)$$

Ясно, что $h \in L^1(\mathbf{R})$; действительно,

$$\|h\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1, \quad (2.2.2)$$

так как

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |h(x)|dx &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)||g(y)|dydx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |g(y)| \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)|dx \right] dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |g(y)| \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx \right] dy. \end{aligned}$$

Замена переменных интегрирования в (2.2.1) дает равенство:

$$f * g = g * f, \quad f, g \in L^1(\mathbf{R}). \quad (2.2.3)$$

Это означает, что оператор свертки *коммутативен*. Так как $f * g$ принадлежит $L^1(\mathbf{R})$, мы можем снова свернуть $f * g$ с другой функцией $u \in L^1(\mathbf{R})$ и рассматривать $(f * g) * u$. Легко видеть, что

$$(f * g) * u = f * (g * u), \quad f, g, u \in L^1(\mathbf{R}). \quad (2.2.4)$$

Следовательно, оператор свертки *ассоциативен*.

Поставим следующий вопрос: существует ли некоторая функция, назовем ее $d \in L^1(\mathbf{R})$, такая, что

$$f * d = f, \quad f \in L^1(\mathbf{R})? \quad (2.2.5)$$

Ответ отрицательный, и это может быть показано с использованием методов преобразования Фурье. Сначала сформулируем следующее важное свойство оператора преобразования Фурье.

Теорема 2.7. Пусть f и g принадлежат $L^1(\mathbf{R})$. Тогда

$$(f * g)^\wedge(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega). \quad (2.2.6)$$

Так как доказательство тривиально следует из теоремы Фубини, то оно здесь опущено. $\square$

Теперь, если существует функция $d \in L^1(\mathbf{R})$ такая, что имеет место равенство (2.2.5), то, применяя теорему 2.7, мы имеем

$$\hat{f}(\omega)\hat{d}(\omega) = \hat{f}(\omega), \quad f \in L^1(\mathbf{R}).$$

Это означает, что мы должны иметь $\hat{d}(\omega) = 1$, что противоречит лемме Римана — Лебега и утверждению (г) теоремы 2.2.

Однако мы все-таки хотим «приблизить» d в (2.2.5), так как даже *приближение тождественности свертки* (или просто *приближенная тождественность*) является очень важным инструментом в анализе Фурье.

Из предыдущих рассуждений мы видим, что первым ограничением на семейство функций $\{d_\alpha\} \subset L^1(\mathbf{R})$, которые позволяют приблизить тождественность, есть условие

$$\hat{d}_\alpha(\omega) \approx 1, \quad \omega \in \mathbf{R}, \quad (2.2.7)$$

где, например, $\alpha \rightarrow 0$. В частности, можно пронормировать эти функции, положив $\hat{d}_\alpha(0) = 1$ или, что то же самое,

$$\int_{-\infty}^{\infty} d_\alpha(x) dx = 1. \quad (2.2.8)$$

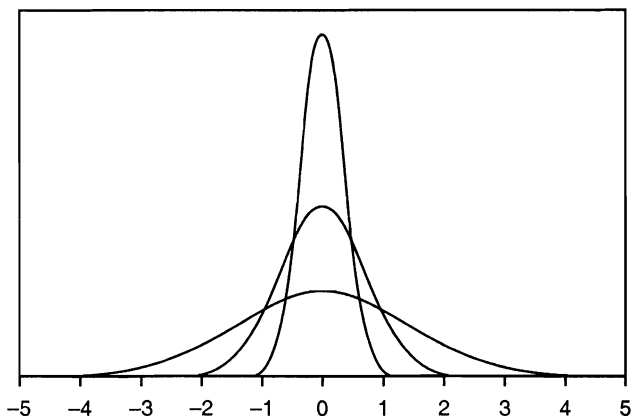


Рис. 2.2.1. Функции Гаусса g_α , $\alpha = 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}$.

Отличным кандидатом для такого семейства является семейство функций Гаусса

$$g_\alpha(x) := \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha}}, \quad \alpha > 0. \quad (2.2.9)$$

Действительно, применяя (2.1.11) в примере 2.6 с $a = 1/(4\alpha)$, мы имеем

$$\hat{g}_\alpha(\omega) = e^{-\alpha\omega^2}, \quad (2.2.10)$$

которое очевидно удовлетворяет (2.2.7) и (2.2.8). Графики g_α для последовательности убывающих значений $\alpha > 0$ приведены на рис. 2.2.1.

Заметим, что если g_α используется в качестве «весовой» функции для непрерывной функции f из $L^1(\mathbf{R})$, то вес все более сосредоточивается в окрестности начала координат при $\alpha \rightarrow 0^+$; таким образом,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g_\alpha(y)dy \sim f(x-0) = f(x), \quad \alpha \rightarrow 0^+;$$

что то же самое, что

$$(f * g_\alpha)(x) \sim f(x), \quad \alpha \rightarrow 0^+.$$

Более точно, мы имеем следующую теорему.

Теорема 2.8. Пусть $f \in L^1(\mathbf{R})$. Тогда

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (f * g_\alpha)(x) = f(x) \quad (2.2.11)$$

в любой точке x , где f непрерывна.

Доказательство. Пусть f непрерывна в точке x и $\varepsilon > 0$ произвольно заданное число. Выберем $\eta > 0$ такое, что

$$|f(x - y) - f(x)| < \varepsilon$$

для всех $y \in \mathbf{R}$, $|y| < \eta$. Тогда, используя (2.2.8) с $d_\alpha = g_\alpha$, мы имеем

$$\begin{aligned} |(f * g_\alpha)(x) - f(x)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} [f(x - y) - f(x)] g_\alpha(y) dy \right| \\ &\leq \int_{-\eta}^{\eta} |f(x - y) - f(x)| g_\alpha(y) dy \\ &\quad + \int_{|y| \geq \eta} |f(x - y) - f(x)| g_\alpha(y) dy \\ &\leq \varepsilon \int_{-\eta}^{\eta} g_\alpha(y) dy + \|f\|_1 \max_{|y| \geq \eta} g_\alpha(y) + |f(x)| \int_{|y| \geq \eta} g_\alpha(y) dy \\ &\leq \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} g_\alpha(y) dy + \|f\|_1 g_\alpha(\eta) + |f(x)| \int_{|y| \geq \eta/\sqrt{\alpha}} g_1(y) dy \\ &= \varepsilon + \|f\|_1 g_\alpha(\eta) + |f(x)| \int_{|y| \geq \eta/\sqrt{\alpha}} g_1(y) dy. \end{aligned}$$

Так как $g_\alpha(\eta)$ и последнее слагаемое стремятся к нулю при $\alpha \rightarrow 0^+$, то теорема доказана. $\square$

Теперь рассмотрим $\mathcal{C}$ — множество непрерывных функций из $L^1(\mathbf{R})$. Тогда для любого $x \in \mathbf{R}$ каждая g_α может быть рассмотрена как *линейный функционал* в $\mathcal{C}$, определенный формулой

$$g_\alpha \circ f(x - \cdot) := (f * g_\alpha)(x).$$

Одновременно мы рассматриваем линейный функционал δ в $\mathcal{C}$, определенный как

$$\delta \circ f(x - \cdot) := f(x). \quad (2.2.12)$$

Тогда (2.2.11) в теореме 2.8 утверждает, что

$$g_\alpha \rightarrow \delta \text{ в } \mathcal{C}, \quad \alpha \rightarrow 0^+. \quad (2.2.13)$$

Так как $\delta * f = f$, то δ — «тождественная свертка» и, следовательно, $\{g_\alpha\}$ — аппроксимация тождественной свертки. Напомним, что δ не является функцией из $L^1(\mathbf{R})$, фактически это вообще не функция, так как удовлетворяет равенствам

$$\begin{cases} \delta(x) = 0 & \text{для всех } x \neq 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1. \end{cases} \quad (2.2.14)$$

Хотя этот линейный функционал δ часто называют «дельта-функцией», на самом деле это «обобщенная функция» или «распределение». Как мы отметили ранее, так как $\delta * f = f$ для всех $f \in \mathcal{C}$, то мы должны определить преобразование Фурье от δ равным константе 1, а именно:

$$\hat{\delta}(\omega) = 1. \quad (2.2.15)$$

В завершение этого параграфа продемонстрируем возможности приближенной тождественности $\{g_\alpha\}$ для доказательства теоремы 2.5 из предыдущего параграфа. Сначала установим равенство:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \hat{g}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) g(x) dx, \quad f, g \in L^1(\mathbf{R}). \quad (2.2.16)$$

Заметим, что так как $\hat{f}$ и $\hat{g}$ принадлежат $L^\infty(\mathbf{R})$, как это показано в теореме 2.2 (а), оба интеграла в (2.2.16) конечны вследствие неравенства Гельдера (2.1.2) при $p = 1$. Простое применение теоремы Фубини приводит к равенству (2.2.16).

Доказательство Теоремы 2.5. Пусть $x \in \mathbf{R}$ — фиксировано, положим

$$g(y) := \frac{1}{2\pi} e^{iyx} e^{-\alpha y^2}. \quad (2.2.17)$$

Тогда, применяя (2.1.11) из примера 2.6, имеем

$$\begin{aligned} \hat{g}(y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyt} e^{itx} e^{-\alpha t^2} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(y-x)t} e^{-\alpha t^2} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{(y-x)^2}{4\alpha}} = g_\alpha(x-y), \end{aligned}$$

где g_α определено формулой (2.2.9). Итак, из (2.2.16) и (2.2.17) следует, что

$$\begin{aligned} (f * g_\alpha)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g_\alpha(x-y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \hat{g}(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) g(y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iyx} \hat{f}(y) e^{-\alpha y^2} dy. \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

Если теперь f — непрерывная функция x , то по теореме 2.8 выражение в левой части формулы (2.2.18) сходится к $f(x)$ при $\alpha \rightarrow 0^+$. Поэтому, так как выраже-

ние в правой части (2.2.18) стремится к $(\mathcal{F}^{-1}\hat{f})(x)$, мы имеем

$$f(x) = (\mathcal{F}^{-1}\hat{f})(x). \quad \square$$

2.3. Преобразование Фурье функций, интегрируемых с квадратом

В этом параграфе мы вводим определение преобразования Фурье для функций из $L^2(\mathbf{R})$. Для этого нам необходимо понятие «автокорреляции».

Определение 2.9. Автокорреляционная функция от $f \in L^2(\mathbf{R})$ определяется как

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+y) \overline{f(y)} dy. \quad (2.3.1)$$

Заметим, что ввиду неравенства Шварца (2.1.3) подынтегральная функция в (2.3.1) принадлежит $L^1(\mathbf{R})$, поэтому $F(x)$ имеет конечное значение при любом $x \in \mathbf{R}$. Как следует далее, фактически мы можем сказать немного больше.

Лемма 2.10. Пусть F — автокорреляционная функция от $f \in L^2(\mathbf{R})$. Тогда:

- (а) $|F(x)| \leq \|f\|_2^2$ для всех $x \in \mathbf{R}$ и
- (б) F — равномерно непрерывна на $\mathbf{R}$.

Доказательство. Как указано выше, (а) является следствием неравенства Шварца

$$\begin{aligned} |F(x)| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+y)| |\overline{f(y)}| dy \\ &\leq \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+y)|^2 dy \right\}^{1/2} \|f\|_2 \\ &= \|f\|_2^2. \end{aligned}$$

Для доказательства (б) мы рассмотрим произвольное вещественное число η и снова применим неравенство Шварца

$$\begin{aligned} |F(x+\eta) - F(x)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \{f(x+\eta+y) - f(x+y)\} \overline{f(y)} dy \right| \\ &\leq \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+\eta+y) - f(x+y)|^2 dy \right\}^{1/2} \|f\|_2 \\ &= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |f(\eta+y) - f(y)|^2 dy \right\}^{1/2} \|f\|_2. \end{aligned}$$

Так как $f \in L^2(\mathbf{R})$, то по теореме Лебега интеграл внутри фигурных скобок, который не зависит от x , стремится к нулю при $\eta \rightarrow 0$. $\square$

Следующий результат позволяет распространить понятие преобразования Фурье на функции из $L^2(\mathbf{R})$.

Теорема 2.11. Пусть $f \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$. Тогда преобразование Фурье $\hat{f}$ от f принадлежит $L^2(\mathbf{R})$ и удовлетворяет следующему «равенству Парсеваля»:

$$\|\hat{f}\|_2^2 = 2\pi \|f\|_2^2. \quad (2.3.2)$$

Доказательство. Так как $\hat{f}$ — непрерывная функция, стремящаяся к нулю на бесконечности, что вытекает из теоремы 2.2, то семейство $\{\hat{g}_\alpha\}$, определенное в (2.2.10), может быть использовано как весовая функция, так что $\hat{g}_\alpha |\hat{f}|^2 \in L^1(\mathbf{R})$. Заметим, что

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}_\alpha(x) |\hat{f}(x)|^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}_\alpha(x) \hat{f}(x) \overline{\hat{f}(x)} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(u)} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix(y-u)} \hat{g}_\alpha(x) dx \right] du dy, \end{aligned}$$

где, с точностью до множителя $(2\pi)^{-1}$, выражение внутри квадратных скобок есть обратное преобразование Фурье от $\hat{g}_\alpha$. Следовательно, по теореме 2.5 мы имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}_\alpha(x) |\hat{f}(x)|^2 dx = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(u)} g_\alpha(y-u) dy du,$$

где g_α определено в (2.2.9). Итак, используя понятие автокорреляции, введенное в (2.3.1), мы приходим к равенству

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}_\alpha(x) |\hat{f}(x)|^2 dx = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} F(x) g_\alpha(x) dx.$$

Так как F — непрерывная функция и $\{g_\alpha\}$ — приближение δ -распределения, имеем

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}_\alpha(x) |\hat{f}(x)|^2 dx = 2\pi F(0). \quad (2.3.3)$$

Теперь по теореме Фату получаем, что $\hat{f} \in L^2(\mathbf{R})$; и так как $0 \leq \hat{g}_\alpha |\hat{f}|^2 \leq |\hat{f}|^2$, теорема Лебега позволяет перейти к пределу под знаком интеграла в (2.3.3), что дает

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(x)|^2 dx = 2\pi F(0) = 2\pi \|f\|_2^2.$$

Этим завершается доказательство теоремы 2.11. □

Как следствие из теоремы 2.11 мы видим, что преобразование Фурье $\mathcal{F}$ может рассматриваться как *ограниченный линейный оператор* в $L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$ со значениями в $L^2(\mathbf{R})$; таким образом

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R}) \rightarrow L^2(\mathbf{R})$$

и $\|\mathcal{F}\| = \sqrt{2\pi}$. Так как $L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$ плотно в $L^2(\mathbf{R})$, $\mathcal{F}$ может быть распространено на все $L^2(\mathbf{R})$ с сохранением нормы. Более точно, если $f \in L^2(\mathbf{R})$, то усеченные функции

$$f_N(x) := \begin{cases} f(x) & \text{для } |x| \leq N, \\ 0 & \text{в остальных точках,} \end{cases} \quad (2.3.4)$$

где $N = 1, 2, \dots$ принадлежат $L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$, так что $\hat{f}_N \in L^2(\mathbf{R})$. Легко видеть, что $\{\hat{f}_N\}$ удовлетворяет критерию

Коши в $L^2(\mathbf{R})$, и ввиду полноты $L^2(\mathbf{R})$ существует функция $\hat{f}_\infty \in L^2(\mathbf{R})$ такая, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|\hat{f}_N - \hat{f}_\infty\|_2 = 0.$$

Определение 2.12. Преобразование Фурье $\hat{f}$ функции $f \in L^2(\mathbf{R})$ определяется как предел $\hat{f}_\infty$ последовательности $\{\hat{f}_N\}$ и обозначение

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= l.i.m._{N \rightarrow \infty} \hat{f}_N(\omega) \\ &= l.i.m._{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N e^{-i\omega x} f(x) dx \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

будет использоваться в смысле «предела в среднем».

Конечно, определение $\hat{f}$ для $f \in L^2(\mathbf{R})$ не должно зависеть от выбора $f_N \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$. Другими словами, любая другая последовательность Коши из $L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$, которая приближает f в $L^2(\mathbf{R})$, может быть использована для определения $\hat{f}$. Но ввиду его простоты усечение f , как это сделано в (2.3.4), часто используется на практике, в частности в анализе сигналов. Заметим также, что продолжение $\mathcal{F}$ из $L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$ на $L^2(\mathbf{R})$ находится в соответствии с исходным определением $\mathcal{F}$ на $L^1(\mathbf{R})$. Это легко проверить, используя основы теории Лебега. Особое внимание следует уделить тому факту, что равенство Парсеваля (2.3.2) распространяется на все $L^2(\mathbf{R})$. На самом деле несколько больше дает следующая теорема.

Теорема 2.13. Для любых $f, g \in L^2(\mathbf{R})$ справедливо следующее равенство

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle. \quad (2.3.6)$$

В частности, $\|f\|_2 = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \|\hat{f}\|_2$.

Равенство (2.3.6) также называют равенством Парсеваля.

Доказательство. Из вышеприведенных рассуждений следует, что

$$\|\hat{h}\|_2^2 = 2\pi\|h\|_2^2, \quad h \in L^2(\mathbf{R}).$$

Если положить h равным каждой из четырех функций

$$f + g, \quad f - g, \quad f - ig, \quad f + ig,$$

то, используя формулу для скалярного произведения

$$\langle f, g \rangle = \frac{\|f + g\|_2^2 - \|f - g\|_2^2}{4} + \frac{\|f - ig\|_2^2 - \|f + ig\|_2^2}{4i}, \quad (2.3.7)$$

мы приходим к равенству (2.3.6). □

Напомним, что когда в определении 2.4 было введено обратное преобразование Фурье $\mathcal{F}^{-1}$, мы должны были ограничить область определения $\mathcal{F}^{-1}$ пересечением $L^1(\mathbf{R})$ с образом $\mathcal{F}$, потому что $\mathcal{F}$ не отображает $L^1(\mathbf{R})$ в $L^1(\mathbf{R})$. Кроме того, мы даже не можем писать

$$f(x) = (\mathcal{F}^{-1}\hat{f})(x),$$

если f не является непрерывной функцией в точке x . С другой стороны, теория $L^2(\mathbf{R})$ гораздо более элегантна. Мы видим, что $\mathcal{F}$ отображает $L^2(\mathbf{R})$ в себя. Мы покажем, что это отображение является взаимно однозначным отображением не «в», а «на», так что обратное преобразование Фурье $\mathcal{F}^{-1}$ может быть легко определено.

Чтобы продолжить наши рассуждения, потребуются предварительная лемма и обозначение.

Лемма 2.14. Пусть $f, g \in L^2(\mathbf{R})$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\hat{g}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x)g(x)dx. \quad (2.3.8)$$

Доказательство. Как показано в (2.2.16), равенство (2.3.8) справедливо для $f, g \in L^1(\mathbf{R})$; так как $L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$ плотно в $L^2(\mathbf{R})$, то легко видеть, что (2.3.8) справедливо также для $f, g \in L^2(\mathbf{R})$. $\square$

Определение 2.15. Для любой f , определенной на $\mathbf{R}$, функция f^- определяется как

$$f^-(x) := f(-x). \quad (2.3.9)$$

Мы называем f^- «отражением» f (относительно исходной функции).

Очевидно следующее замечание.

Лемма 2.16. Пусть $f \in L^2(\mathbf{R})$. Тогда

$$\widehat{\widehat{f}}(x) = \widehat{(\widehat{f}^-)}(x); \quad \widehat{(f^-)}(x) = (\widehat{f})^-(x). \quad (2.3.10)$$

Теперь мы можем установить обратимость оператора преобразования Фурье на $L^2(\mathbf{R})$.

Теорема 2.17. Преобразование Фурье $\mathcal{F}$ осуществляет взаимно однозначное отображение $L^2(\mathbf{R})$ на себя. Другими словами, любой $g \in L^2(\mathbf{R})$ соответствует одна и только одна $f \in L^2(\mathbf{R})$ такая, что $\widehat{f} = g$; таким образом

$$f(x) := (\mathcal{F}^{-1}g)(x) =: \check{g}(x) \quad (2.3.11)$$

есть обратное преобразование Фурье от g .

Доказательство. Пусть $g \in L^2(\mathbf{R})$. Тогда ее отражение g^- , как определено в (2.3.9), также принадлежит $L^2(\mathbf{R})$. Сначала покажем, что функция

$$f(x) := \frac{1}{2\pi} \widehat{(g^-)}(x) \quad (2.3.12)$$

удовлетворяет равенству $\widehat{f} = g$ п.в.

Действительно, применяя последовательно (2.3.10), лемму 2.14, (2.3.12), снова (2.3.10) и равенство Парсеваля, получим

$$\begin{aligned}
 \|g - \hat{f}\|_2^2 &= \|g\|_2^2 - 2\operatorname{Re}\langle g, \hat{f} \rangle + \|\hat{f}\|_2^2 \\
 &= \|g\|_2^2 - 2\operatorname{Re}\langle g, \widehat{f^-} \rangle + \|\hat{f}\|_2^2 \\
 &= \|g\|_2^2 - 2\operatorname{Re}\langle \hat{g}, \overline{(\hat{f})^-} \rangle + \|\hat{f}\|_2^2 \\
 &= \|g\|_2^2 - 2\operatorname{Re}\langle \hat{g}, f^- \rangle + \|\hat{f}\|_2^2 \\
 &= \|g\|_2^2 - 2\operatorname{Re}\left\langle \hat{g}, \frac{1}{2\pi}\hat{g} \right\rangle + \|\hat{f}\|_2^2 \\
 &= \frac{1}{2\pi}\|\hat{g}\|_2^2 - \frac{2}{2\pi}\|\hat{g}\|_2^2 + 2\pi\|f\|_2^2 \\
 &= -\frac{1}{2\pi}\|\hat{g}\|_2^2 + \frac{1}{2\pi}\|\widehat{g^-}\|_2^2 = 0,
 \end{aligned}$$

откуда $\hat{f} = g$ п.в.

Демонстрация того, что f , определенная формулой (2.3.12), единственная функция в $L^2(\mathbf{R})$ такая, что $\hat{f} = g$, эквивалентна доказательству того факта, что $\hat{f} = 0$ влечет $f = 0$ п.в. Это является непосредственным следствием равенства Парсеваля в теореме 2.13. $\square$

$L^2(\mathbf{R})$ теория преобразования Фурье, рассмотренная выше, часто носит название теории Планшереля.

2.4. Ряды Фурье

Обратимся теперь к изучению 2π -периодических функций. При любом p , $1 \leq p \leq \infty$, будет использоваться следующее обозначение:

$$\|f\|_{L^p(0,2\pi)} := \begin{cases} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right]^{1/p} & \text{для } 1 \leq p < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq x \leq 2\pi} |f(x)| & \text{для } p = \infty. \end{cases} \quad (2.4.1)$$

Для любого p , $L^p(0, 2\pi)$ определяет банахово пространство функций f , удовлетворяющих равенству $f(x+2\pi) = f(x)$ п.в. на $\mathbf{R}$ таких, что $\|f\|_{L^p(0, 2\pi)} < \infty$. Иногда целесообразнее использовать подпространство непрерывных функций $C^*[0, 2\pi]$ пространства $L^\infty(0, 2\pi)$ вместо всего $L^\infty(0, 2\pi)$. Здесь * используется для напоминания того, что $f(0) = f(2\pi)$, если $f \in C^*[0, 2\pi]$.

Неравенства Минковского, Гельдера и Шварца для $L^p(\mathbf{R})$ в (2.1.1), (2.1.2) и (2.1.3) справедливы также для $L^p(0, 2\pi)$. В частности, для $p = 2$ мы можем снова определить «скалярное произведение»

$$\langle f, g \rangle^* = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx, \quad f, g \in L^2(0, 2\pi), \quad (2.4.2)$$

где звездочка используется, чтобы отличить это скалярное произведение от скалярного произведения в $L^2(\mathbf{R})$. Позже нам понадобится также следующее обобщенное неравенство Минковского:

$$\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \int_a^b g(t, x) dt \right|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \int_a^b \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(t, x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} dt, \quad (2.4.3)$$

здесь обобщение состоит в простой замене конечной суммы интегралом (Лебега) в конечных пределах. Заметим также, что в противоположность пространствам $L^p(\mathbf{R})$, которые не вложены друг в друга, мы имеем

$$L^p(0, 2\pi) \subseteq L^q(0, 2\pi), \quad p \geq q.$$

Это может быть легко проверено с помощью неравенства Гельдера.

Сопутствующими пространствам $L^p(0, 2\pi)$ являются пространства (последовательностей) $\ell^p = \ell^p(\mathbf{Z})$ бесконечных по-

последовательностей $\{a_k\}$, $k \in \mathbf{Z}$, которые удовлетворяют неравенству: $\|\{a_k\}\|_{\ell^p} < \infty$, где

$$\|\{a_k\}\|_{\ell^p} := \begin{cases} \left\{ \sum_{k \in \mathbf{Z}} |a_k|^p \right\}^{\frac{1}{p}}, & \text{для } 1 \leq p < \infty, \\ \sup_k |a_k|, & \text{для } p = \infty. \end{cases} \quad (2.4.4)$$

И снова, неравенства Минковского, Гельдера и Шварца выполняются для пространств последовательностей. Аналогично пространствам Гильберта $L^2(\mathbf{R})$ и $L^2(0, 2\pi)$, пространство $\ell^2 = \ell^2(\mathbf{Z})$ также является пространством Гильберта со скалярным произведением:

$$\langle \{a_k\}, \{b_k\} \rangle_{\ell^2} := \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k \bar{b}_k. \quad (2.4.5)$$

Напомним, что интегральное преобразование Фурье используется для описания спектрального поведения аналогового сигнала f , имеющего конечную энергию (то есть $f \in L^2(\mathbf{R})$). Здесь мы вводим *дискретное преобразование Фурье* $\mathcal{F}^*$ *цифрового сигнала* $\{c_k\} \in \ell^p$ для описания его спектрального поведения следующим образом:

$$(\mathcal{F}^*\{c_k\})(x) := \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k e^{ikx}. \quad (2.4.6)$$

Таким образом, дискретное преобразование Фурье $\{c_k\}$ является «рядом Фурье» с «коэффициентами Фурье», равными $\{c_k\}$. Мы не обсуждаем вопрос о сходимости рядов Фурье в (2.4.6), но для $\{c_k\} \in \ell^1$ ясно, что эти ряды сходятся абсолютно и равномерно для всех $x \in \mathbf{R}$. В общем случае, формальный ряд (2.4.6) может быть рассмотрен просто как «символ» последовательности $\{c_k\}$.

Так как $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, ряд Фурье в (2.4.6) может быть записан как

$$f(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx, \quad (2.4.7)$$

где

$$\begin{cases} a_k = c_k + c_{-k}, \\ b_k = i(c_k - c_{-k}). \end{cases} \quad (2.4.8)$$

Формулы (2.4.8) могут быть легко выведены с помощью равенств:

$$\begin{cases} \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}; \\ \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}. \end{cases}$$

Обозначение функции $f(x)$ в (2.4.7) используется только как обозначение ряда Фурье. Это может и не быть функцией. В любом случае мы всегда можем рассматривать тригонометрические полиномы

$$(S_N f)(x) := \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N \{a_k \cos kx + b_k \sin kx\}, \quad (2.4.9)$$

где N — положительное целое. Они называются *частными суммами* рядов Фурье функции f .

Особую важность представляет тригонометрический многочлен степени N

$$D_N(x) := \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^N \cos kx = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}}, \quad (2.4.10)$$

который называется *ядром Дирихле* степени N . Заметим, что по крайней мере *формально* N -я частная сумма $S_N f$ ряда Фурье f может быть получена как «свертка» f с ядром Дирихле степени N , а именно:

$$(S_N f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t) D_N(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) D_N(x-t) dt. \quad (2.4.11)$$

Конечно, интегрирование в (2.4.11) допустимо, если $f \in L^1(0, 2\pi)$.

С другой стороны, если f — любая функция из $L^p(0, 2\pi)$, $1 \leq p \leq \infty$, мы можем определить «обратное дискретное преобразование» $\mathcal{F}^{*-1}$ от f формулой:

$$(\mathcal{F}^{*-1}f)(k) = c_k(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (2.4.12)$$

Таким образом, $\mathcal{F}^{*-1}$ переводит $f \in L^p(0, 2\pi)$ в бесконечную последовательность $\{c_k(f)\}$, $k \in \mathbf{Z}$. Эта последовательность, конечно, определяет ряд Фурье

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k(f) e^{ikx} \quad (2.4.13)$$

и называется последовательностью «коэффициентов Фурье» ряда Фурье. Фундаментальным является вопрос: «сходится» ли этот ряд к исходной функции f . Обсуждение этой темы откладывается до следующего параграфа. Сейчас мы займемся только изучением $L^2(0, 2\pi)$ теории.

Теорема 2.18. Пусть $f \in L^2(0, 2\pi)$. Тогда последовательность $\{c_k(f)\}$ коэффициентов Фурье функции f принадлежит ℓ^2 и удовлетворяет неравенству Бесселя:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2 \leq \|f\|_{L^2(0, 2\pi)}^2. \quad (2.4.14)$$

Доказательство. Пусть $S_N(f)$ обозначает N -ю частную сумму ряда Фурье (2.4.13). Тогда мы имеем

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|f - S_N(f)\|_{L^2(0, 2\pi)}^2 \\ &= \|f\|_{L^2(0, 2\pi)}^2 - 2\operatorname{Re}\langle f, S_N(f) \rangle^* + \|S_N(f)\|_{L^2(0, 2\pi)}^2. \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

Легко проверить, что

$$\langle f, S_N(f) \rangle^* = \sum_{k=-N}^N |c_k(f)|^2 \quad (2.4.16)$$

и

$$\|S_N(f)\|_{L^2(0,2\pi)}^2 = \sum_{k=-N}^N |c_k(f)|^2. \quad (2.4.17)$$

Отсюда, подставив (2.4.16) и (2.4.17) в (2.4.15), мы получим

$$\sum_{k=-N}^N |c_k(f)|^2 \leq \|f\|_{L^2(0,2\pi)}^2.$$

Так как это неравенство справедливо при любом N , то мы установили (2.4.14). $\square$

Обратной к теореме 2.18 является следующая, так называемая теорема Рисса—Фишера.

Теорема 2.19. Пусть $\{c_k\} \in \ell^2$. Тогда существует некоторая $f \in L^2(0, 2\pi)$ такая, что c_k является k -м коэффициентом Фурье функции f . Кроме того,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \|f\|_{L^2(0,2\pi)}^2. \quad (2.4.18)$$

Эта теорема утверждает, что дискретное преобразование Фурье $\mathcal{F}^*$ отображает ℓ^2 в $L^2(0, 2\pi)$, и равенство (2.4.18) выполняется для всех f из области значений оператора $\mathcal{F}^*$ на ℓ^2 .

Доказательство. Для любого положительного N рассмотрим тригонометрический многочлен

$$S_N(x) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx}. \quad (2.4.19)$$

Так как $\{c_k\}$ принадлежит ℓ^2 , последовательность

$$\sum_{k=-N}^N |c_k|^2$$

является последовательностью Коши вещественных чисел. Откуда, рассматривая равенство, аналогичное (2.4.17) для $\|S_N - S_M\|_{L^2(0,2\pi)}^2$, приходим к тому, что $\{S_N\}$ является последовательностью Коши в $L^2(0,2\pi)$. Пусть $f \in L^2(0,2\pi)$ – предел этой последовательности. Тогда, в силу неравенства Бесселя (2.4.14), коэффициенты Фурье $c_k(f)$ функции f удовлетворяют неравенству

$$\sum_{k=-N}^N |c_k(f) - c_k|^2 \leq \|f - S_N\|_{L^2(0,2\pi)}^2.$$

Устремив $N \rightarrow \infty$, получаем

$$c_k(f) = c_k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Более того, ввиду (2.4.16) и (2.4.17), имеем

$$\begin{aligned} \|f - S_N\|_{L^2(0,2\pi)}^2 &= \|f\|_{L^2(0,2\pi)}^2 - 2\operatorname{Re}\langle f, S_N \rangle^* + \|S_N\|_{L^2(0,2\pi)}^2 \\ &= \|f\|_{L^2(0,2\pi)}^2 - \sum_{k=-N}^N |c_k|^2, \end{aligned}$$

что при $N \rightarrow \infty$ дает (2.4.18). □

Мы обращаем особое внимание на то, что теорема 2.19 только утверждает, что равенство (2.4.18) справедливо для всех функций f из области значений оператора дискретного преобразования Фурье, действующего на пространство ℓ^2 . То, что (2.4.18) может быть распространено на все $L^2(0,2\pi)$, является следствием теоремы Вейерштрасса, которая утверждает, что множество всех тригонометрических многочленов плотно

в $L^2(0, 2\pi)$. Равенство (2.4.18), распространенное таким образом на все $L^2(0, 2\pi)$, называется *равенством Парсеваля* для $L^2(0, 2\pi)$. Простой способ установить справедливость теоремы Вейерштрасса — это рассмотреть чезаровы средние последовательности частных сумм ряда Фурье функции $f \in L^2(0, 2\pi)$.

Пусть $f \in L^2(0, 2\pi)$ и обозначим через $S_n f$ n -ю частную сумму ряда Фурье (2.4.7), как она определена в (2.4.9). Тогда N -е чезарово среднее от $\{S_n f\}$ дается формулой

$$\sigma_N f := \frac{S_0 f + \cdots + S_N f}{N+1}. \quad (2.4.20)$$

Так как $S_n f$ есть свертка f с ядром Дирихле D_n , как это определено в (2.4.11) (для $f \in L^2(0, 2\pi) \subset L^1(0, 2\pi)$), то из этого следует, что $\sigma_N f$ есть свертка f с так называемым *ядром Фейера*, определенным формулой

$$K_N(x) := \frac{D_0(x) + \cdots + D_N(x)}{N+1} = \frac{1}{N+1} \frac{\sin^2(\frac{N+1}{2}x)}{2\sin^2(\frac{x}{2})}, \quad (2.4.21)$$

а именно:

$$(\sigma_N f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t) K_N(t) dt. \quad (2.4.22)$$

Заметим, что тригонометрический многочлен K_N отличается от $D_N(x)$ тем, что $K_N(x) \geq 0$ для всех x . Это свойство является решающим при доказательстве следующего результата о плотности тригонометрических многочленов.

Теорема 2.20. Пусть $f \in L^2(0, 2\pi)$. Тогда

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - \sigma_N f\|_{L^2(0, 2\pi)} = 0.$$

Перед доказательством этой теоремы самое время ввести обозначение « $L^p(0, 2\pi)$ модуля непрерывности»:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_p(f; \eta) := \sup_{0 < h \leq \eta} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x+h) - f(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \\ \text{для } f \in L^p(0, 2\pi), \\ \text{где } 1 \leq p < \infty; \text{ и если } p = \infty, \text{ то} \\ \omega(f; \eta) := \omega_\infty(f; \eta) := \sup_{0 < h \leq \eta} \max_x |f(x+h) - f(x)| \\ \text{для } f \in C^*[0, 2\pi]. \end{array} \right. \quad (2.4.23)$$

Заметим, что $L^\infty(0, 2\pi)$ заменено своим подпространством $C^*[0, 2\pi]$. Отметим также, что $\omega_p(f; \eta)$ и $\omega(f; \eta)$ — неубывающие функции аргумента η и что

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_p(f; \eta) \rightarrow 0 \text{ при } \eta \rightarrow 0^+ \text{ для } f \in L^p(0, 2\pi), \\ \omega(f; \eta) \rightarrow 0 \text{ при } \eta \rightarrow 0^+ \text{ для } f \in C^*[0, 2\pi]. \end{array} \right. \quad (2.4.24)$$

Вернемся теперь к доказательству теоремы 2.20.

Доказательство. Так как

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} K_N(x) dx = 1,$$

то, используя обобщенное неравенство Минковского (2.4.3) и определение $\omega_2(f; |t|)$, мы последовательно получаем, что

$$\begin{aligned} \|f - \sigma_N f\|_{L^2(0, 2\pi)} &= \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{2\pi(N+1)} \int_0^{2\pi} \{f(x) - f(x-t)\} \right. \right. \\ &\quad \times \left. \left(\frac{\sin \frac{(N+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt \right|^2 dx \Bigg\}^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{2\pi(N+1)} \int_0^{2\pi} \left\{ \left(\frac{\sin \frac{(N+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x) - f(x-t)|^2 dx \right]^{1/2} \Bigg\} dt \\
& \leq \frac{1}{2\pi(N+1)} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin \frac{(N+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 \omega_2(f; |t|) dt \\
& \leq \frac{\pi}{N+1} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 \frac{(N+1)t}{2}}{t^2} \omega_2(f; t) dt \\
& = \frac{\pi}{2} \int_0^{(N+1)\pi/2} \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 \omega_2 \left(f; \frac{2u}{N+1} \right) du.
\end{aligned}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное заданное число. Выберем $M > 0$ так, что

$$\pi \|f\|_{L^2(0,2\pi)} \int_M^{\infty} \frac{du}{u^2} < \varepsilon.$$

Так как $\omega_2(f; \cdot) \leq 2\|f\|_{L^2(0,2\pi)}$ и $\omega_2(f; \cdot)$ — неубывающая функция, то для $(N+1)\pi \geq 2M$ имеем

$$\begin{aligned}
\|f - \sigma_N f\|_{L^2(0,2\pi)} & < \varepsilon + \frac{\pi}{2} \int_0^M \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 \omega_2 \left(f; \frac{2u}{N+1} \right) du \\
& < \varepsilon + \frac{M\pi}{2} \omega_2 \left(f; \frac{2M}{N+1} \right) \rightarrow \varepsilon + 0,
\end{aligned}$$

при $N \rightarrow \infty$. Этим завершается доказательство теоремы 2.20. $\square$

Используя полученный результат о плотности тригонометрических многочленов в $L^2(0, 2\pi)$, мы можем установить следующий основной результат этого параграфа.

Теорема 2.21. *Дискретное преобразование Фурье $\mathcal{F}^*$, определенное в (2.4.6), есть изометрический изоморфизм ℓ^2 на $L^2(0, 2\pi)$. Другими словами, $\mathcal{F}^*$ отображает ℓ^2 взаимно*

однозначно на $L^2(0, 2\pi)$, так что имеет место равенство Парсеваля

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx, \quad f \in L^2(0, 2\pi), \quad (2.4.25)$$

где $c_k = c_k(f)$ — k -й коэффициент Фурье функции f .

Доказательство. Из теоремы 2.19 следует, что $\mathcal{F}^*$ отображает ℓ^2 в $L^2(0, 2\pi)$. Для доказательства того, что это — отображение на $L^2(0, 2\pi)$, возьмем произвольную функцию $f \in L^2(0, 2\pi)$ и обозначим через $\{c_k\}$ последовательность коэффициентов Фурье функции f . Тогда, в силу неравенства Бесселя из теоремы 2.18, мы имеем

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|f\|_{L^2(0, 2\pi)}^2.$$

С другой стороны, по определению $\sigma_N f$ в (2.4.20) и, обращаясь к $S_n f$ в (2.4.9), получаем

$$(\sigma_N f)(x) = \sum_{k=-N}^N \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right) c_k e^{ikx},$$

так что

$$\begin{aligned} \|\sigma_N f\|_{L^2(0, 2\pi)}^2 &= \sum_{k=-N}^N \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right)^2 |c_k|^2 \\ &\leq \sum_{k=-N}^N |c_k|^2 \leq \|f\|_{L^2(0, 2\pi)}^2. \end{aligned}$$

Таким образом, мы имеем

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^2(0, 2\pi)}^2 &\geq \left\{ \sum_{k=-N}^N |c_k|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \geq \|\sigma_N f\|_{L^2(0, 2\pi)} \\ &\geq \|f\|_{L^2(0, 2\pi)} - \|f - \sigma_N f\|_{L^2(0, 2\pi)}. \end{aligned}$$

Следовательно, в результате применения теоремы 2.20 установлено равенство Парсеваля (2.4.25). Это равенство, конечно, гарантирует, что преобразование $\mathcal{F}^*$ взаимно однозначно, так как, если все коэффициенты Фурье f равны нулю, то $\|f\|_{L^2(0,2\pi)} = 0$, или $f = 0$ п.в.. $\square$

2.5. Основы теории сходимости и формула суммирования Пуассона

Хотя теория сходимости рядов Фурье — весьма увлекательная тема, детальное ее изучение выходит за рамки этой книги. Мы обсудим только два основных условия сходимости, опустив при этом их доказательство.

Во-первых, напомним, что существует 2π -периодическая непрерывная функция, ряд Фурье которой расходится во всех рациональных точках. Кроме того, существует функция из $L^1(0, 2\pi)$, ряд Фурье которой расходится всюду. Встает вопрос о наложении на функцию некоторых условий, гарантирующих сходимость ее ряда Фурье. Один из результатов о сходимости, который требует наиболее слабых предположений и является в то же время весьма глубоким, состоит в том, что ряд Фурье любой функции f из $L^p(0, 2\pi)$, где $1 < p \leq \infty$, сходится к f почти всюду. В дальнейшем нас будет интересовать равномерная сходимость или, по крайней мере, сходимость в некоторых специфических точках.

Следующий результат носит название условия сходимости *Дини—Липшица*. Здесь будет использоваться обозначение $\omega(f; \eta)$ для равномерного модуля непрерывности, введенное в (2.4.23).

Теорема 2.22. Пусть $f \in C^*[0, 2\pi]$ такая, что

$$\int_0^a \frac{\omega(f; t)}{t} dt < \infty \quad (2.5.1)$$

для некоторого $a > 0$. Тогда ряд Фурье функции f сходится равномерно к f ; таким образом

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - S_N f\|_{L^\infty[0, 2\pi]} = 0.$$

Например, если $\omega(f; \eta) = O(\eta^\alpha)$ для некоторого $\alpha > 0$, то, конечно, условие (2.5.1) выполняется.

Второе условие сходимости, которое будет установлено ниже, называется условием *Дурихле—Жордана*. Оно применимо для функций, которые не осциллируют очень сильно. Такие функции называют функциями с *ограниченной вариацией*. Хорошо известно (и не так трудно вывести это из определения), что любая функция с ограниченной вариацией на отрезке $[a, b]$ может быть представлена как разность двух неубывающих функций. Следовательно, если f — функция с ограниченной вариацией на $[a, b]$, то оба односторонних предела

$$\begin{cases} f(x^+) := \lim_{h \rightarrow 0^+} f(x + h); \\ f(x^-) := \lim_{h \rightarrow 0^+} f(x - h) \end{cases} \quad (2.5.2)$$

существуют в каждой точке x , $a < x < b$.

Теорема 2.23. Пусть f — 2π -периодическая функция с ограниченной вариацией на $[0, 2\pi]$. Тогда ряд Фурье функции f сходится к $(f(x^+) + f(x^-))/2$ всюду; таким образом

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (S_N f)(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \quad (2.5.3)$$

для любого $x \in \mathbb{R}$. Кроме того, если f непрерывна на любом отрезке $[a, b]$, то ряд Фурье функции f сходится равномерно к f на $[a, b]$.

В то время как (интегральное) преобразование Фурье, изученное нами в первых трех параграфах этой главы, опре-

делено на $L^p(R)$, ряды Фурье представляют только периодические функции. Простейший способ периодизации функции $f \in L^p(\mathbf{R})$ состоит в рассмотрении

$$\Phi_f(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x + 2\pi k). \quad (2.5.4)$$

Первый вопрос, который здесь возникает, является ли Φ_f функцией. Как видно из следующей леммы, ответ положительный при $p = 1$.

Лемма 2.24. Пусть $f \in L^1(\mathbf{R})$. Тогда ряд, определенный формулой (2.5.4), сходится п.в. к некоторой 2π -периодической функции Φ_f . Кроме того, сходимостъ п.в. является абсолютной, $\Phi_f \in L^1(0, 2\pi)$, и

$$\|\Phi_f\|_{L^1(0, 2\pi)} \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|_1. \quad (2.5.5)$$

Доказательство. Абсолютная сходимостъ почти всюду будет установлена, если мы докажем неравенство

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} |f(x + 2\pi k)| dx < \infty.$$

Но справедливостъ этого неравенства, вместе с неравенством (2.5.5), непосредственно следует из простого наблюдения, что

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |\Phi_f(x)| dx &\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} |f(x + 2\pi k)| dx \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} |f(x)| dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty. \end{aligned}$$

□

Исходя из этой леммы, мы можем рассматривать ряд Фурье функции $\Phi_f(x)$, а именно:

$$\Phi_f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(\Phi_f) e^{ikx},$$

где

$$\begin{aligned} c_k(\Phi_f) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} \Phi_f(x) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} f(x + 2\pi j) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{2\pi j}^{2\pi(j+1)} e^{-ikx} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \hat{f}(k). \end{aligned}$$

Следовательно, если ряд Фурье функции $\Phi_f(x)$ сходится к Φ_f , то две величины

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x + 2\pi k) \quad (2.5.6)$$

и

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} \quad (2.5.7)$$

могут быть равны друг другу. К несчастью, так как Φ_f есть только функция из $L^1(0, 2\pi)$, то ее ряд Фурье может всюду расходиться. Таким образом, на Φ_f или f должны быть наложены некоторые условия, которые бы обеспечили равенство величин (2.5.6) и (2.5.7). Сначала мы обратимся к одному весьма общему положению.

Теорема 2.25. Пусть $f \in L^1(\mathbf{R})$ удовлетворяет следующим двум условиям:

- (а) ряд (2.5.6) сходится всюду к некоторой непрерывной функции u
- (б) ряд Фурье (2.5.7) сходится всюду.

Тогда имеет место следующая «формула суммирования Пуассона»:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x + 2\pi k) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx}, \quad x \in \mathbf{R}. \quad (2.5.8)$$

В частности,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(2\pi k) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k). \quad (2.5.9)$$

Перед тем как мы наложим на f некоторые достаточные условия, гарантирующие выполнение пунктов (а) и (б), заметим, что формула суммирования Пуассона (2.5.8) или (2.5.9) может быть сформулирована в несколько ином виде. Для этого мы просто заметим, что если $f_a(x) := f(ax)$, где $a > 0$, то $\hat{f}_a(x) = a^{-1} \hat{f}(\frac{x}{a})$. Откуда (2.5.8) и (2.5.9) принимают вид:

$$\begin{cases} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x + 2\pi ak) = \frac{1}{2\pi a} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}\left(\frac{k}{a}\right) e^{i\frac{k}{a}x}, \\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(2\pi ak) = \frac{1}{2\pi a} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}\left(\frac{k}{a}\right). \end{cases} \quad (2.5.10)$$

В частности, положив $a = (2\pi)^{-1}$, имеем

$$\begin{cases} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x + k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(2\pi k) e^{i2\pi kx}, \\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(2\pi k). \end{cases} \quad (2.5.11)$$

Перечислим теперь некоторые условия, при которых выполняются пункты (а) и (б) в теореме 2.25.

Следствие 2.26. Пусть f — измеримая функция, удовлетворяющая равенству:

$$f(x), \hat{f}(x) = O\left(\frac{1}{1 + |x|^\alpha}\right) \quad (2.5.12)$$

для некоторого $\alpha > 1$. Тогда формула суммирования Пуассона (2.5.8) справедлива для всех $x \in \mathbf{R}$.

Заметим, что так как $\hat{f}$ удовлетворяет (2.5.12), то f обязательно непрерывна, откуда следует, что оба условия (а) и (б) выполняются.

Следствие 2.27. Пусть $f \in L^1(\mathbf{R})$, и предположим, что ряд в (2.5.4) сходится всюду к непрерывной функции с ограниченной вариацией на $[0, 2\pi]$. Тогда формула суммирования Пуассона (2.5.8) справедлива для всех $x \in \mathbf{R}$.

Если Φ_f — непрерывная функция с ограниченной вариацией на $[0, 2\pi]$, тогда по теореме 2.23 ее ряд Фурье, определяемый формулой (2.5.7), сходится всюду к Φ_f . Таким образом, (2.5.6) и (2.5.7) равны друг другу.

В качестве важного примера можно рассмотреть любую непрерывную функцию f с ограниченной вариацией и компактным носителем. Для такой f ряд (2.5.4) — это только конечная сумма и, следовательно, Φ_f — непрерывная функция с ограниченной вариацией на $[0, 2\pi]$. В качестве типичного примера в главе 4 будут детально изучены B -сплайны порядка не меньше второго.

Мы завершим эту главу применением формулы суммирования Пуассона к изучению преобразования Фурье автокорреляционной функции F (определенной формулой (2.3.1)) от функции $f \in L^2(\mathbf{R})$. Это лучше подготовит нас к построению полуортogonalных вейвлетов в главе 5. Используя обозначение f^- для отражения f , определенного в (2.3.9), мы можем переопределить F как

$$F(x) = (f * (\bar{f})^-)(x).$$

Откуда, применяя лемму 2.16, мы получаем

$$\widehat{F}(x) = |\hat{f}(x)|^2. \quad (2.5.13)$$

Теперь, так как f принадлежит $L^2(\mathbf{R})$, то в силу равенства Парсеваля этому пространству принадлежит и $\hat{f}$. Поэтому, $\hat{F} \in L^1(\mathbf{R})$ и по лемме 2.24

$$\Phi_{\hat{F}}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{F}(x + 2\pi k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(x + 2\pi k)|^2 \quad (2.5.14)$$

сходится п.в. и $\Phi_{\hat{F}} \in L^1(0, 2\pi)$.

Для изучения ряда Фурье функции $\Phi_{\hat{F}}$ наложим одно дополнительное условие. Потребуем, чтобы $f \in L^1(\mathbf{R})$. Тогда $(\hat{f})^-$ также принадлежит $L^1(\mathbf{R})$, что имеет место и для свертки $F = f * (\hat{f})^-$. Следовательно, по теореме 2.5, мы имеем

$$\begin{aligned} F(x) &= (\mathcal{F}^{-1}\hat{F})(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} \hat{F}(y) dy \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \hat{F} \right)^{\wedge}(-x), \end{aligned} \quad (2.5.15)$$

откуда коэффициенты Фурье функции $\Phi_{\hat{F}}$ даются формулой

$$c_k = c_k(\Phi_{\hat{F}}) = \left(\frac{1}{2\pi} \hat{F} \right)^{\wedge}(k) = F(-k).$$

Таким образом, ряд Фурье $\Phi_{\hat{F}}$ может быть записан как

$$\Phi_{\hat{F}}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(-k) e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k) e^{-ikx}. \quad (2.5.16)$$

Итак, мы имеем:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(x + 2\pi k)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k) z^k \quad \text{п.в.,} \quad (2.5.17)$$

где $z = e^{-ix}$ и правая часть формулы (2.5.17) называется *символом* последовательности $\{F(k)\}$. Если случится так, что f

имеет компактный носитель, то таким же свойством обладает и автокорреляционная функция F ; и символ $\{F(k)\}$ есть *полином Лорана*. Этот полином Лорана называют также *полиномом Эйлера—Фробениуса*, порожденным f . Следовательно, (2.5.17) устанавливает очень важную связь между полиномом Эйлера—Фробениуса, порожденным функцией f с компактным носителем, и неотрицательной функцией $\Phi_{\hat{f}}$ в (2.5.14), что будет способствовать изучению безусловных базисов, ортогонализации и двойственности. Подробности по этим темам будут обсуждаться в последующих главах, в частности, в главе 5.

Возвращаясь к (2.5.17) без предположения о том, что f имеет компактный носитель, мы имеем только равенство п.в. для $f \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$. Ниже мы даем три различных набора условий, которые обеспечивают справедливость (2.5.17) для всех $x \in \mathbf{R}$.

Теорема 2.28. Пусть $f \in L^2(\mathbf{R})$ удовлетворяет одному из следующих трех условий:

- (а) $f(x) = O(|x|^{-\beta})$, $\beta > 1$ и $\hat{f}(x) = O(|x|^{-\alpha})$, $\alpha > \frac{1}{2}$, при $|x| \rightarrow \infty$.
- (б) $\hat{f}$ имеет компактный носитель и принадлежит классу $\text{Lip}(\gamma)$ для некоторого $\gamma > 0$, то есть

$$\sup_x \sup_{0 < t \leq h} |\hat{f}(x+t) - \hat{f}(x)| = O(h^\gamma), \text{ при } h \rightarrow 0^+. \quad (2.5.18)$$

- (в) $\hat{f}$ — непрерывная функция с компактным носителем и имеет ограниченную вариацию на этом носителе.

Отсюда следует, что

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(x + 2\pi k)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(y+k) \overline{f(y)} dy \right\} e^{-ikx} \quad (2.5.19)$$

для всех $x \in \mathbf{R}$.

Заметим, что каждое из условий (а)–(в) обеспечивает, что левая часть формулы (2.5.19) есть 2π -периодическая функция, ряд Фурье которой дается выражением в правой части этой формулы. Это очевидно для условия (а), но требует немного больше труда при доказательстве для условий (б) и (в). Сходимость ряда Фурье в любой точке $x \in \mathbf{R}$ для условий (а), (б) и (в) выводится из следствия 2.26, теоремы 2.22 и теоремы 2.23 в указанном порядке. $\square$

Глава 3

Вэйвлет-преобразования и частотно-временной анализ

Для изучения спектрального поведения аналогового сигнала необходимо полное знание сигнала во временной области, включая и будущую информацию. Вдобавок, если сигнал меняется в малой окрестности некоторого момента времени, то это влияет на весь спектр. Действительно, в крайнем случае преобразование Фурье от дельта-распределения $\delta(t - t_0)$ с носителем в единственной точке t_0 есть $e^{-it_0\omega}$, которое покрывает всю частотную область. Следовательно, во многих приложениях, таких как анализ нестационарных сигналов и обработка сигнала в реальном времени, применение одной формулы преобразования Фурье весьма неадекватно. Недостаток формулы преобразования Фурье в частотно-временном анализе был замечен уже Д. Габором, который в своей работе 1946 года ввел «функцию-окно» временной локализации $g(t - b)$, где параметр b используется для перемещения окна с целью покрыть всю временную область для получения локальной информации о преобразовании Фурье сигнала. Фактически Габор использовал функцию Гаусса в качестве функции окна g . Так как преобразование Фурье функции Гаусса также является функцией Гаусса, то одновремен-

но оказывается локализованным и обратное преобразование Фурье.

Первый параграф этой главы посвящен изучению преобразования Габора. Обсуждение этого так называемого «кратковременного преобразования Фурье» (КВПФ) в общем случае и принципа неопределенности, который определяет величину (размер) окна, является содержанием второго параграфа. В частности, здесь будет замечено, что частотно-временное окно любого КВПФ определено весьма жестко и, следовательно, применение этого преобразования не эффективно для детекции сигналов высокой частоты и исследования сигналов низкой частоты. Это служит причиной введения интегрального вэйвлет-преобразования (ИВП) в § 3.3. Вместо того чтобы применять окна для прямого и обратного преобразования Фурье, как это делается в КВПФ, ИВП непосредственно выделяет часть функции (сигнала) и ее преобразования Фурье. Это происходит за счет параметра растяжения (масштабного параметра), который позволяет сужать или расширять частотно-временное окно в зависимости от частоты. Обращение ИВП означает восстановление сигнала по его локальной спектральной информации. Будет рассмотрена информация, полученная в результате непрерывных и дискретных наблюдений. Это приводит к изучению каркасов и вэйвлет-рядов в последних двух параграфах этой главы.

3.1. Преобразование Габора

Функция f из $L^2(\mathbf{R})$ используется для представления аналогового сигнала конечной энергии, и ее преобразование Фурье

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt \quad (3.1.1)$$

дает спектральную информацию о сигнале. Всюду в этой главе t и ω предназначены для обозначения, соответственно, временной и частотной переменных. К сожалению, одна формула (3.1.1) не очень удобна для получения информации о спектре $\hat{f}$ по локальным наблюдениям сигнала f . Для этого необходимо «хорошее» временное окно.

«Оптимальное» окно для временной локализации достигается в результате использования некоторой гауссовой функции

$$g_{\alpha}(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-\frac{t^2}{4\alpha}}, \quad (3.1.2)$$

где $\alpha > 0$ фиксировано, в качестве функции-окна (см. рис. 2.2.1). Здесь оптимальность определяется принципом неопределенности, который будет рассмотрен в следующем параграфе. Для любого фиксированного значения $\alpha > 0$, преобразование Габора функции $f \in L^2(\mathbf{R})$ определяется как

$$(\mathcal{G}_b^{\alpha} f)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-i\omega t} f(t)) g_{\alpha}(t - b) dt; \quad (3.1.3)$$

таким образом, $(\mathcal{G}_b^{\alpha} f)(\omega)$ локализует преобразование Фурье функции f в окрестности $t = b$. «Ширина» окна определяется (фиксированной) положительной константой α ; это будет обсуждено ниже. Заметим, что из формулы (2.1.11) в примере 2.6 при $\omega = 0$ и $a = (4\alpha)^{-1}$, мы имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_{\alpha}(t - b) db = \int_{-\infty}^{\infty} g_{\alpha}(x) dx = 1, \quad (3.1.4)$$

откуда

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{G}_b^\alpha f)(\omega) db = \hat{f}(\omega), \quad \omega \in \mathbf{R}.$$

Таким образом, множество

$$\{\mathcal{G}_b^\alpha f : b \in \mathbf{R}\}$$

преобразований Габора функции f точно разбивает преобразование Фурье $\hat{f}$ функции f и дает о ней локальную спектральную информацию. Для измерения ширины функции-окна мы используем понятие стандартного отклонения, или среднеквадратичной (СК) длительности, определяемой формулой

$$\Delta_{g_\alpha} := \frac{1}{\|g_\alpha\|_2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x^2 g_\alpha^2(x) dx \right\}^{1/2}. \quad (3.1.5)$$

Заметим, так как g_α — четная функция, ее центр, определенный формулой (1.2.5), равняется 0, и, следовательно, Δ_{g_α} совпадает с общим понятием «радиуса», введенным в определении 1.2. В частности, ширина функции-окна g_α равняется $2\Delta_{g_\alpha}$.

Теорема 3.1 Для любого $\alpha > 0$

$$\Delta_{g_\alpha} = \sqrt{\alpha}. \quad (3.1.6)$$

Таким образом, ширина функции-окна g_α равняется $2\sqrt{\alpha}$.

Доказательство. Положив в формуле (2.1.11) $\omega = 0$, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\pi} a^{-1/2}, \quad (3.1.7)$$

продифференцировав это равенство по параметру a , получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} a^{-3/2}. \quad (3.1.8)$$

Откуда, подставив $a = (2\alpha)^{-1}$ в формулы (3.1.7) и (3.1.8), имеем

$$\|g_\alpha\|_2 = (8\pi\alpha)^{-1/4} \quad (3.1.9)$$

и в результате

$$\Delta_{g_\alpha} = (8\pi\alpha)^{1/4} \left\{ \frac{1}{4\pi\alpha} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} (2\alpha)^{3/2} \right\}^{1/2} = \sqrt{\alpha}. \quad \square$$

Можно интерпретировать преобразование Габора $\mathcal{G}_b^\alpha f$ в (3.1.3) несколько иначе, а именно: положив

$$G_{b,\omega}^\alpha(t) := e^{i\omega t} g_\alpha(t - b), \quad (3.1.10)$$

мы имеем

$$(\mathcal{G}_b^\alpha f)(\omega) = \langle f, G_{b,\omega}^\alpha \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{G_{b,\omega}^\alpha(t)} dt. \quad (3.1.11)$$

Другими словами, вместо рассмотрения $(\mathcal{G}_b^\alpha f)$ как локализации преобразования Фурье f мы можем истолковать его как выделение части функции (или сигнала) f с помощью функции-окна $G_{b,\omega}^\alpha$ в (3.1.10). Мы будем следовать этой точке зрения позднее при его сравнении с «интегральным вейвлет-преобразованием». График вещественной и мнимой частей $G_{b,\omega}^\alpha$ для $b = 0$, $\omega = 2\pi$ и указанных значений α приводится на рис. 3.1.1–3.1.2.

Одно преимущество формулировки (3.1.11) состоит в том, что равенство Парсеваля в формуле (2.3.6) может быть применено для установления связи преобразования Габора от функции f с преобразованием Габора от $\hat{f}$. Действительно, т. к.

$$\widehat{G}_{b,\omega}^\alpha(\eta) = e^{-ib(\eta-\omega)} e^{-\alpha(\eta-\omega)^2}, \quad (3.1.12)$$

которое следует из (2.2.10), мы имеем

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}_b^\alpha f)(\omega) &= \langle f, G_{b,\omega}^\alpha \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \widehat{G}_{b,\omega}^\alpha \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\eta) e^{ib(\eta-\omega)} e^{-\alpha(\eta-\omega)^2} d\eta \\ &= \frac{e^{-ib\omega}}{2\sqrt{\pi\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{ib\eta} \hat{f}(\eta)) g_{1/4\alpha}(\eta - \omega) d\eta \\ &= \frac{e^{-ib\omega}}{2\sqrt{\pi\alpha}} (\mathcal{G}_\omega^{1/4\alpha} \hat{f})(-b). \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

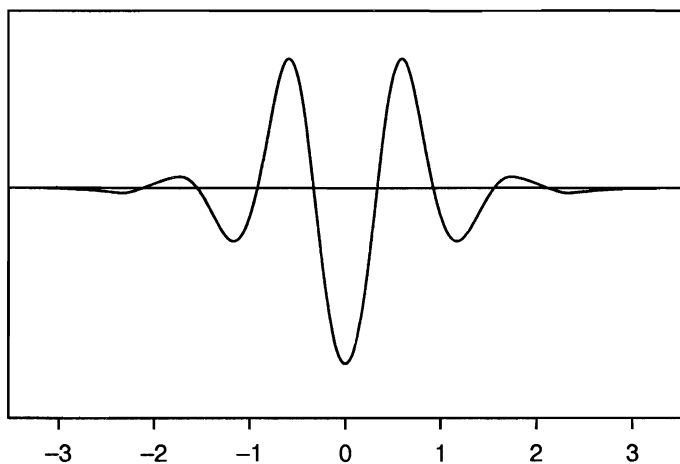


Рис. 3.1.1. $Re G_{0,2\pi}^\alpha$, $\alpha = 0.2925$.

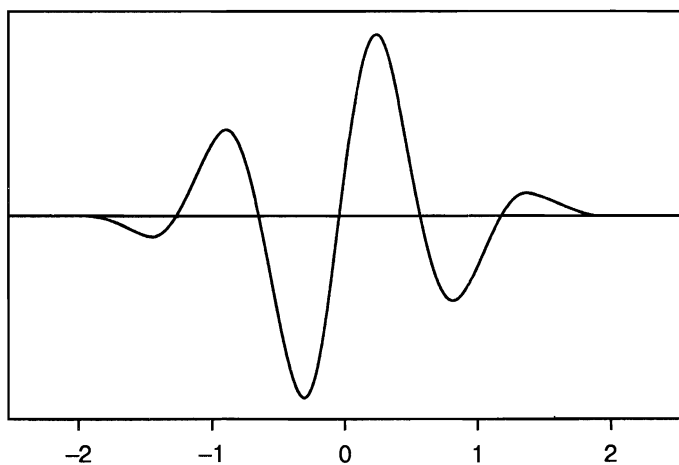


Рис. 3.1.2. $Im G_{0,2\pi}^\alpha$, $\alpha = 0.2300$.

Давайте обсудим (3.1.13) с двух различных точек зрения. В первых, мы рассматриваем

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-i\omega t} f(t)) g_{\alpha}(t - b) dt \quad (3.1.14) \\ &= \left(\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{ib\omega} \right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (e^{ib\eta} \hat{f}(\eta)) g_{1/4\alpha}(\eta - \omega) d\eta, \end{aligned}$$

которое говорит, что с точностью до множителя $\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{ib\omega}$ преобразование Фурье с окном от f с функцией-окном g_{α} в окрестности $t = b$ равняется обратному преобразованию Фурье с окном от $\hat{f}$ с функцией-окном $g_{1/4\alpha}$ в окрестности $\eta = \omega$. По теореме 3.1 произведение ширин этих двух окон есть

$$(2\Delta_{g_{\alpha}})(2\Delta_{g_{1/4\alpha}}) = 2. \quad (3.1.15)$$

С другой стороны, рассматривая

$$H_{b,\omega}^{\alpha}(\eta) := \frac{1}{2\pi} \widehat{G_{b,\omega}^{\alpha}}(\eta) = \left(\frac{e^{ib\omega}}{2\sqrt{\pi\alpha}} \right) e^{-ib\eta} g_{1/4\alpha}(\eta - \omega), \quad (3.1.16)$$

мы имеем

$$\langle f, G_{b,\omega}^{\alpha} \rangle = \langle \hat{f}, H_{b,\omega}^{\alpha} \rangle. \quad (3.1.17)$$

Это равенство говорит о том, что информация, полученная при рассмотрении аналогового сигнала $f(t)$ в окрестности $t = b$ с использованием функции-окна $G_{b,\omega}^{\alpha}$, как это определено в (3.1.10), может быть также получена при наблюдении спектра $\hat{f}(\eta)$ сигнала в окрестности частоты $\eta = \omega$ с помощью функции-окна $H_{b,\omega}^{\alpha}$, как определено в (3.1.16). И опять произведение ширин временного окна $G_{b,\omega}^{\alpha}$ и частотного окна $H_{b,\omega}^{\alpha}$ есть

$$(2\Delta_{G_{b,\omega}^{\alpha}})(2\Delta_{H_{b,\omega}^{\alpha}}) = (2\Delta_{g_{\alpha}})(2\Delta_{g_{1/4\alpha}}) = 2. \quad (3.1.18)$$

Декартово произведение

$$[b - \sqrt{\alpha}, b + \sqrt{\alpha}] \times \left[\omega - \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}, \omega + \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \right] \quad (3.1.19)$$

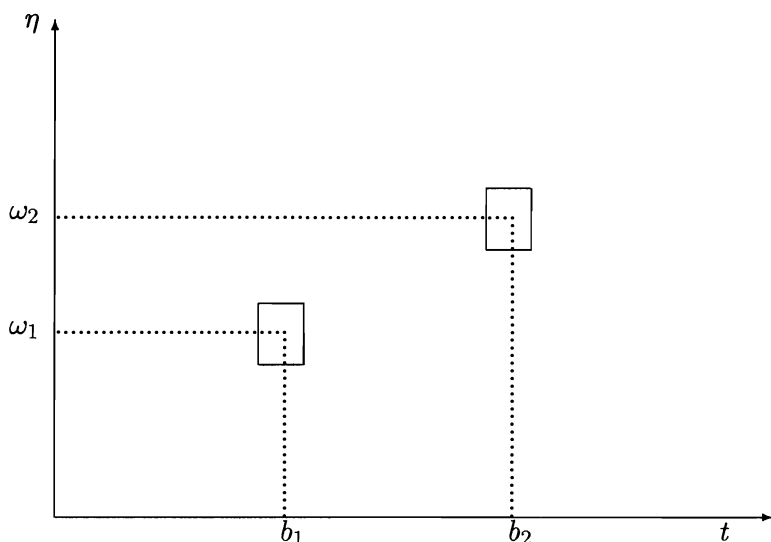


Рис. 3.1.3. Окно Габора.

этих двух окон называется прямоугольным частотно-временным окном. Оно часто рисуется в частотно-временной области для того, чтобы показать, как локализуется сигнал. Ширина $2\sqrt{\alpha}$ временного окна называется *шириной частотно-временного окна*, и ширина $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ частотного окна называется *высотой частотно-временного окна*. Изображение этого окна дано на рис. 3.1.3. Заметим, что ширина частотно-временного окна не меняется при рассмотрении спектра на любых частотах. То, что это ограничивает использование преобразования Габора для изучения сигналов очень высокой или низкой частоты, будет обсуждено в § 3.3 этой главы.

3.2. Кратковременные преобразования Фурье и принцип неопределенности

Преобразование Габора — это преобразование Фурье с окном, использующее некоторую гауссову функцию g_α в качестве функции-окна. По различным причинам, таким как вычислительная эффективность или удобства при выполнении, другие функции также могут быть использованы в качестве функций-окон. Чтобы непрерывная функция $w \in L^2(\mathbf{R})$ была функцией-окном, она должна удовлетворять требованию, что

$$tw(t) \in L^2(\mathbf{R}), \quad (3.2.1)$$

откуда и $|t|^{1/2}w(t) \in L^2(\mathbf{R})$. Из формулы (3.2.1), применяя неравенство Шварца к произведению $(1+|t|)^{-1}$ на $(1+|t|)w(t)$, получаем, что $w \in L^1(\mathbf{R})$. Следовательно, по теореме 2.2, ее преобразование Фурье $\hat{w}$ является непрерывной функцией. Однако, хотя $\hat{w}$ принадлежит также $L^2(\mathbf{R})$, как это следует из равенства Парсеваля, она не обязательно удовлетворяет (3.2.1), и, следовательно, может и не быть (частотной) функцией-окном. Напомним, что в предыдущем параграфе важность функции Гаусса g_α определялась тем, что ее преобразование Фурье также является гауссовой функцией, так что g_α и $\hat{g}_\alpha$ могут быть использованы для частотно-временной локализации.

Пример 3.2. Обе функции первого порядка: В-сплайн

$$N_1(t) := \begin{cases} 1 & \text{для } 0 \leq t < 1, \\ 0 & \text{в других точках,} \end{cases} \quad (3.2.2)$$

и функция Хаара

$$\psi_1(t) = \psi_H(t) := \begin{cases} 1 & \text{для } 0 \leq t < 1/2, \\ -1 & \text{для } 1/2 \leq t < 1, \\ 0 & \text{в других точках,} \end{cases} \quad (3.2.3)$$

как это было определено в (1.5.7) и (1.1.16), являются функциями-окнами, но их преобразования Фурье $\hat{N}_1$ и $\hat{\psi}_1$ не удовлетворяют (3.2.1) и, следовательно, N_1 и ψ_1 не могут быть использованы для частотно-временной локализации.

Доказательство. Так как N_1 и ψ_1 имеют компактный носитель, они, конечно, удовлетворяют (3.2.1). С другой стороны, в силу теоремы 2.5 и теоремы 2.2(6), так как N_1 и ψ_1 не являются непрерывными функциями, то $\hat{N}_1$ и $\hat{\psi}_1$ не могут принадлежать $L^1(\mathbf{R})$. Следовательно, они не удовлетворяют (3.2.1). $\square$

В общем случае для любой $w \in L^2(\mathbf{R})$, удовлетворяющей (3.2.1), мы определяем центр и радиус w , как в определении 1.2, формулами

$$x^* := \frac{1}{\|w\|_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} t |w(t)|^2 dt \quad (3.2.4)$$

и

$$\Delta_w := \frac{1}{\|w\|_2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (t - x^*)^2 |w(t)|^2 dt \right\}^{1/2}. \quad (3.2.5)$$

Мы используем также величину $2\Delta_w$ для измерения ширины функции-окна w . В анализе сигналов, если w рассматривается как аналоговый сигнал, то Δ_w называется среднеквадратичной (СК) длительностью аналогового сигнала, и $\Delta_{\hat{w}}$ называется ее СК шириной диапазона, если только $\hat{w}$ также удовлетворяет (3.2.1). Преобразование Габора (3.1.3) может быть обобщено на любое «преобразование Фурье с окном» функции $f \in L^2(\mathbf{R})$, использующее функцию w , которая удовлетворяет (3.2.1), в качестве функции-окна, следующим образом

$$(\tilde{\mathcal{G}}_b f)(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-i\omega t} f(t)) \overline{w(t-b)} dt. \quad (3.2.6)$$

Откуда, положив

$$W_{b,\omega}(t) := e^{i\omega t} w(t-b), \quad (3.2.7)$$

мы имеем

$$(\tilde{\mathcal{G}}_b f)(\omega) = \langle f, W_{b,\omega} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{W_{b,\omega}(t)} dt, \quad (3.2.8)$$

таким образом $(\tilde{\mathcal{G}}_b f)(\omega)$ дает локальную информацию об f во временном окне

$$[x^* + b - \Delta_w, x^* + b + \Delta_w]. \quad (3.2.9)$$

Теперь предположим, что преобразование Фурье $\widehat{w}$ функции w также удовлетворяет (3.2.1). Тогда мы можем определить центр w^* и радиус $\Delta_{\widehat{w}}$ функции-окна $\widehat{w}$, используя формулы, аналогичные (3.2.4) и (3.2.5). Положив

$$V_{b,\omega}(\eta) := \frac{1}{2\pi} \widehat{W}_{b,\omega}(\eta) = \left(\frac{e^{ib\omega}}{2\pi} \right) e^{-ib\eta} \widehat{w}(\eta - \omega), \quad (3.2.10)$$

которая также является функцией-окном с центром в $\omega^* + \omega$ и радиусом, равным $\Delta_{\widehat{w}}$, мы имеем по равенству Парсеваля

$$(\tilde{\mathcal{G}}_b f)(\omega) = \langle f, W_{b,\omega} \rangle = \langle \hat{f}, V_{b,\omega} \rangle. \quad (3.2.11)$$

Следовательно, $(\tilde{\mathcal{G}}_b f)(\omega)$ также дает спектральную информацию об f в частотном окне

$$[\omega^* + \omega - \Delta_{\widehat{w}}, \omega^* + \omega + \Delta_{\widehat{w}}]. \quad (3.2.12)$$

В результате, выбрав некоторую $w \in L^2(\mathbf{R})$ такую, что w и $\widehat{w}$ удовлетворяют (3.2.1), для определения преобразования Фурье с окном в (3.2.6) мы имеем частотно-временное окно

$$[x^* + b - \Delta_w, x^* + b + \Delta_w] \times [\omega^* + \omega - \Delta_{\widehat{w}}, \omega^* + \omega + \Delta_{\widehat{w}}] \quad (3.2.13)$$

с шириной $2\Delta_w$ (определенной шириной временного окна) и постоянной площадью окна

$$4\Delta_w \Delta_{\widehat{w}}. \quad (3.2.14)$$

Снова ширина частотно-временного окна остается неизменной для локализации сигналов высокой и низкой частоты.

Определение 3.3. Если $w \in L^2(\mathbb{R})$ выбрана так, что w и ее преобразование Фурье $\hat{w}$ удовлетворяют (3.2.1), то преобразование Фурье с окном, введенное в (3.2.6) с использованием функции-окна w , называется «кратковременным преобразованием Фурье» (КВПФ).

Как было замечено ранее, так как обе функции w и $\hat{w}$ удовлетворяют (3.2.1), они должны быть непрерывными. В добавление к функциям Гаусса, любой B -сплайн порядка выше первого может быть использован для определения КВПФ.

Пример 3.4. Базисный B -сплайн m -го порядка

$$N_m(t) := \int_0^1 N_{m-1}(t-x)dx, \quad (3.2.15)$$

где $m \geq 2$, определенный рекурсивно в (1.5.7) с N_1 , заданным формулой (3.2.2), является функцией-окном, определяющим КВПФ. Более того,

$$\hat{N}_m(\omega) = \left(\frac{1 - e^{i\omega}}{i\omega} \right)^m = e^{-im\omega/2} \left(\frac{\sin \omega/2}{\omega/2} \right)^m. \quad (3.2.16)$$

Доказательство. Так как N_m есть m -кратная свертка N_1 и $\hat{N}_1(\omega) = (1 - e^{-i\omega})/i\omega$, утверждение (3.2.16) следует из применения теоремы 2.7. Отсюда ясно, что $\hat{N}_m$ удовлетворяет (3.2.1). Очевидно, само N_m удовлетворяет (3.2.1), так как имеет компактный носитель. $\square$

Для точной частотно-временной локализации выбирают функцию-окно w так, чтобы частотно-временное окно имело достаточно малую площадь $4\Delta_w\Delta_{\hat{w}}$. Мы уже видели в (3.1.18), что если w – некоторая функция Гаусса $g_\alpha, \alpha > 0$, то площадь окна равняется 2. Итак, первый вопрос, на который следует ответить: может ли быть доступна меньшая

площадь окна. В следующей теореме, известной как «принцип неопределенности», мы увидим, что невозможно найти окно размером меньшим или равным, чем у функции Гаусса.

Теорема 3.5. Пусть $w \in L^2(\mathbf{R})$ выбрана так, что сама w и ее преобразование Фурье $\hat{w}$ удовлетворяют (3.2.1). Тогда

$$\Delta_w \Delta_{\hat{w}} \geq \frac{1}{2}. \quad (3.2.17)$$

Более того, равенство достигается тогда и только тогда, когда

$$w(t) = ce^{iat} g_\alpha(t - b),$$

где $c \neq 0, \alpha > 0$ и $a, b \in \mathbf{R}$.

Замечание. В инженерной литературе, если w рассматривается как аналоговый сигнал с t в качестве переменной во временной области, то область определения ее спектра выражается в терминах (переменных) частоты $f = \omega/2\pi$ (в герцах). Откуда, если мы заменим ω на $2\pi f$ в определении $\Delta_{\hat{w}}$, то появится множитель 2π . Более точно, положив

$$\begin{cases} \Delta_t = \Delta_w, \\ \Delta_f = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\hat{w}}, \end{cases} \quad (3.2.18)$$

как обычно пишут в инженерной литературе, принцип неопределенности утверждает, что

$$\Delta_t \Delta_f \geq \frac{1}{4\pi}, \quad (3.2.19)$$

где равенство имеет место тогда и только тогда, когда сигнал w есть функция Гаусса.

Для упрощения доказательства теоремы 3.5 нам необходимы следующие результаты.

Лемма 3.6. Пусть f нетривиальная и почти всюду дифференцируемая функция такая, что $(1 + |x|)f$ и $f'(x)$ принадлежат $L^2(\mathbf{R})$. Тогда

$$\left| \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \overline{f'}(x) dx \right|^2 \leq \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |x f(x)|^2 dx \right\} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|^2 dx \right\}. \quad (3.2.20)$$

Более того, равенство имеет место тогда и только тогда, когда $f(x)$ есть функция Гаусса.

Доказательство. Неравенство (3.2.20) с очевидностью вытекает из применения неравенства Шварца. Теперь, если в (3.2.20) имеет место равенство, то из этого следует, что

$$\begin{cases} -\operatorname{Re} x f(x) \overline{f'}(x) = |x f(x) f'(x)| & \text{и} \\ |x f(x)| = 2\alpha |f'(x)| \end{cases} \quad (3.2.21)$$

для некоторой положительной константы α . (Здесь, как мы увидим позже, другая возможность $-\operatorname{Re} x f(x) \overline{f'}(x) = |x f(x) f'(x)|$ отбрасывается, так как f должна принадлежать $L^2(\mathbf{R})$. Тот факт, что $\alpha \neq 0$ следует из предположения, что f — нетривиальная функция из $L^2(\mathbf{R})$). Из второго тождества в (3.2.21) мы имеем

$$x f(x) = 2\alpha f'(x) e^{i\theta(x)}$$

при некоторой вещественной функции $\theta(x)$. Тогда первое тождество в (3.2.21) означает, что

$$-x f(x) \overline{f'}(x) \geq 0,$$

так что

$$-2\alpha |f'(x)|^2 e^{i\theta(x)} \geq 0,$$

которое в свою очередь означает, что $e^{i\theta(x)} = -1$. Откуда мы заключаем, что

$$x f(x) = -2\alpha f'(x),$$

и так как f' непрерывна, то

$$f(x) = c e^{-x^2/4\alpha}$$

при некоторой константе $c \neq 0$. Таким образом, f является функцией Гаусса g_α , определенной в (2.2.9), умноженной на постоянный множитель. $\square$

Прежде чем обратиться к доказательству теоремы 3.5, мы сначала заметим, что

$$\operatorname{Re} x f(x) \overline{f'}(x) = \frac{1}{2} x \frac{d}{dx} |f(x)|^2 \quad (3.2.22)$$

и что если каждая из функций $f(x)$, $f'(x)$ и $xf(x)$ принадлежит $L^2(\mathbf{R})$, то

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} x |f(x)|^2 = 0. \quad (3.2.23)$$

Соображение, по которому (3.2.23) имеет место, состоит в том, что при наших предположениях мы имеем

$$\frac{d}{dx} (x |f(x)|^2) \in L^1(\mathbf{R}).$$

Доказательство теоремы 3.5.

Предположим сначала, что центры w и $\widehat{w}$ равны нулю. Тогда, применяя теорему 2.2(в), равенство Парсеваля, (3.2.20), (3.2.22) и (3.2.23) последовательно, мы имеем

$$\begin{aligned} (\Delta_w \Delta_{\widehat{w}})^2 &= \frac{(\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |w(t)|^2 dt) (\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |\widehat{w}(\omega)|^2 d\omega)}{\|w\|_2^2 \|\widehat{w}\|_2^2} \\ &= \frac{(\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |w(t)|^2 dt) (\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{w}'(\omega)|^2 d\omega)}{\|w\|_2^2 \|\widehat{w}\|_2^2} \\ &= \frac{2\pi \|xw(x)\|_2^2 \|w'\|_2^2}{2\pi \|w\|_2^4} \\ &\geq \frac{1}{\|w\|_2^4} \left| \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} xw(x) \overline{w'}(x) dx \right|^2 \\ &= \frac{1}{\|w\|_2^4} \left| \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{d}{dx} |w(x)|^2 dx \right|^2 \\ &= \frac{1}{\|w\|_2^4} \left(\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |w(x)|^2 dx \right)^2 = \frac{1}{4}. \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

Более того, по лемме 3.6 неравенство в этой формуле переходит в равенство тогда и только тогда, когда w есть функция Гаусса.

В общем случае, если центрами w и $\hat{w}$ соответственно являются $t = b$ и $\omega = a$, то после простой замены переменных из вышеприведенных рассуждений следует, что $\Delta_w \Delta_{\hat{w}} = \frac{1}{2}$ только, если

$$w(t) = ce^{iat} g_{\alpha}(t - b),$$

где $\alpha > 0$ и $c \neq 0$. □

Отсюда преобразование Габора, введенное в предыдущем параграфе, есть КВПФ с наименьшим частотно-временным окном. В приложениях следует выбирать большее окно для получения некоторых желательных свойств преобразования. Например, B -сплайны второго и более высокого порядка, введенные в примере 3.4, повышают эффективность вычислений и выполнения алгоритма. Наиболее важное свойство, которым не обладает преобразование Габора, это дополнительное условие:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0, \quad (3.2.25)$$

где ψ — функция-окно. Это свойство дает нам большую степень свободы для введения параметра растяжения (или масштабного параметра) с тем, чтобы сделать частотно-временное окно гибким. Локально-временное интегральное преобразование с таким параметром растяжения, которое мы рассмотрим в следующем параграфе, будет называться *интегральным вэйвлет-преобразованием* (ИВП), и любая функция-окно для определения ИВП будет называться «базисным вэйвлетом».

Перед тем как закончить этот параграф, выведем формулу восстановления любого сигнала с конечной энергией по значениям его КВПФ.

Теорема 3.7. Пусть $w \in L^2(\mathbf{R})$ выбрано так, что $\|w\|_2 = 1$, w и $\hat{w}$ удовлетворяют (3.2.1). Пусть также $W_{b,\omega}(t)$ определено формулой (3.2.7). Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle f, W_{b,\omega} \rangle \overline{\langle g, W_{b,\omega} \rangle} db d\omega = 2\pi \langle f, g \rangle \quad (3.2.26)$$

для любых $f, g \in L^2(\mathbf{R})$.

Доказательство. Для любой $f \in L^2(\mathbf{R})$, обозначим через $f^\vee$ обратное преобразование Фурье от f ; таким образом, $f^\vee(x) = \frac{1}{2\pi} \hat{f}(-x)$. Тогда по равенству Парсеваля и формуле (3.2.6) мы имеем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{\mathcal{G}}_b f)(\omega) \overline{(\tilde{\mathcal{G}}_b g)(\omega)} d\omega &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{\mathcal{G}}_b f)^\vee(x) \overline{(\tilde{\mathcal{G}}_b g)^\vee(x)} dx \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{w(t-b)} \overline{g(t)} w(t-b) dt \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} |w(t-b)|^2 dt. \end{aligned}$$

Поэтому из предположения $\|w\|_2 = 1$ следует, что

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle f, W_{b,\omega} \rangle \overline{\langle g, W_{b,\omega} \rangle} db d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{\mathcal{G}}_b f)(\omega) \overline{(\tilde{\mathcal{G}}_b g)(\omega)} db d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} |w(t-b)|^2 db dt \\ &= 2\pi \langle f, g \rangle. \end{aligned}$$

□

Взяв в качестве функции g функцию Гаусса $g_\alpha(\cdot - x)$ и устремив $\alpha \rightarrow 0^+$, мы приходим к следующему утверждению.

Следствие 3.8. Пусть w удовлетворяет условиям теоремы 3.7 и пусть $f \in L^2(\mathbf{R})$. Тогда в каждой точке x , где f непрерывна,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{i\omega x} (\tilde{\mathcal{G}}_b f)(\omega)] w(x - b) d\omega db. \quad (3.2.27)$$

3.3. Интегральное вэйвлет-преобразование

Мы видели, что при анализе сигнала с помощью КВПФ частотно-временное окно остается фиксированным в том смысле, что его ширина не меняется при рассмотрении любого диапазона частот (или октавы)

$$[\omega^* + \omega - \Delta_{\tilde{w}}, \omega^* + \omega - \Delta_{\tilde{w}}]$$

с частотным центром $\omega^* + \omega$. Так как частота прямо пропорциональна числу периодов на единицу времени, то требуется более узкое временное окно для более точной локализации высокочастотных явлений и широкое временное окно для полного анализа низкочастотных свойств сигнала. Следовательно, КВПФ не подходит для анализа сигналов одновременно с очень низкой и очень высокой частотами. С другой стороны, интегральное вэйвлет-преобразование (ИВП), использующее некоторый базисный вэйвлет, который будет определен ниже, имеет гибкое частотно-временное окно, которое автоматически сужается при рассмотрении высокочастотных явлений и расширяется при изучении низкочастотных областей.

Определение 3.9. Если $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ удовлетворяет условию «допустимости»:

$$C_\psi := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty, \quad (3.3.1)$$

то ψ называется «базисным вэйвлетом». Относительно каждого базисного вэйвлета ψ интегральное преобразование (ИВП) на $L^2(\mathbf{R})$ определяется формулой

$$(W_\psi f)(b, a) := |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt, \quad f \in L^2(\mathbf{R}), \quad (3.3.2)$$

где $a, b \in \mathbf{R}$ и $a \neq 0$.

Замечание. Если, кроме того, обе функции ψ и $\widehat{\psi}$ удовлетворяют (3.2.1), то базисный вэйвлет ψ обеспечивает частотно-временное окно конечной площади, равной $4\Delta_\psi\Delta_{\widehat{\psi}}$. Более того, из этого дополнительного предположения следует, что $\widehat{\psi}$ — непрерывная функция, так что конечность C_ψ в (3.3.1) влечет $\widehat{\psi}(0) = 0$, или, что эквивалентно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0. \quad (3.3.3)$$

По этой причине ψ называют «вэйвлетом». Мы увидим позже в этом параграфе, что условие допустимости (3.3.1) необходимо для обращения ИВП.

Положив

$$\psi_{b;a}(t) := |a|^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad (3.3.4)$$

ИВП, определенное формулой (3.3.2), может быть записано как

$$(W_\psi f)(b, a) = \langle f, \psi_{b;a} \rangle. \quad (3.3.5)$$

В последующих рассуждениях мы будем полагать, что обе функции — ψ и $\widehat{\psi}$ — удовлетворяют (3.2.1). Тогда, если центр

и радиус функции-окна ψ , соответственно, равны t^* и Δ_ψ , то $\psi_{b;a}$ есть функция-окно с центром в $b + at^*$ и радиусом, равным $a\Delta_\psi$. Следовательно, ИВП, как это определено в (3.3.5), дает локальную информацию об аналоговом сигнале f с временным окном

$$[b + at^* - a\Delta_\psi, b + at^* + a\Delta_\psi]. \quad (3.3.6)$$

Это окно сужается для малых значений a и расширяется для больших a .

Рассмотрим затем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \widehat{\psi}_{b;a}(\omega) &= \frac{|a|^{-\frac{1}{2}}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \\ &= \frac{a|a|^{-\frac{1}{2}}}{2\pi} e^{-ib\omega} \widehat{\psi}(a\omega) \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

и предположим, что центр и радиус функции-окна $\widehat{\psi}$ равны, соответственно, ω^* и $\Delta_{\widehat{\psi}}$. Тогда, положив

$$\eta(\omega) := \widehat{\psi}(\omega + \omega^*), \quad (3.3.8)$$

мы имеем функцию-окно η с центром в нуле и радиусом, равным $\Delta_{\widehat{\psi}}$. Теперь из (3.3.5) и (3.3.7), применяя равенство Парсеваля, получаем

$$(W_\psi f)(b, a) = \frac{a|a|^{-\frac{1}{2}}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{ib\omega} \overline{\eta\left(a\left(\omega - \frac{\omega^*}{a}\right)\right)} d\omega. \quad (3.3.9)$$

Откуда ясно, что функция-окно $\eta\left(a\left(\omega - \frac{\omega^*}{a}\right)\right) = \eta(a\omega - \omega^*) = \widehat{\psi}(a\omega)$ имеет радиус, равный $\frac{1}{a}\Delta_{\widehat{\psi}}$, выражение в (3.3.9) показывает, что за исключением множителя $a|a|^{-1/2}/2\pi$ и линейного сдвига по фазе $e^{ib\omega}$, ИВП $W_\psi f$ также дает локальную информацию об $\widehat{f}$ с частотным окном

$$\left[\frac{\omega^*}{a} - \frac{1}{a}\Delta_{\widehat{\psi}}, \frac{\omega^*}{a} + \frac{1}{a}\Delta_{\widehat{\psi}}\right]. \quad (3.3.10)$$

В последующих рассуждениях предполагается, что центр ω^* функции $\hat{\psi}$ положителен. Сделав так, мы можем считать это окно диапазоном частот (или октавой) с частотным центром ω^*/a и шириной полосы $2\Delta_{\hat{\psi}}/a$. Важность такого отождествления состоит в том, что отношение

$$\frac{\text{частотный центр}}{\text{ширина диапазона}} = \frac{\omega^*/a}{2\Delta_{\hat{\psi}}/a} = \frac{\omega^*}{2\Delta_{\hat{\psi}}} \quad (3.3.11)$$

не зависит от масштабного параметра a . Следовательно, если частотная переменная идентифицируется с постоянной величиной, умноженной на a^{-1} , то соответствующий диапазонный фильтр с полосой пропускания (3.3.10) обладает тем свойством, что отношение частотного центра к ширине диапазона не зависит от расположения частотного центра. Это называется « Q -постоянной фильтрацией».

Если теперь ω^*/a рассматривается как частотная переменная ω , то мы можем рассматривать плоскость t - ω как частотно-временную плоскость. Откуда мы имеем прямоугольное частотно-временное окно с временным окном (3.3.6) и частотным окном (3.3.10)

$$[b+at^*-a\Delta_{\psi}, b+at^*+a\Delta_{\psi}] \times \left[\frac{\omega^*}{a} - \frac{1}{a}\Delta_{\hat{\psi}}, \frac{\omega^*}{a} + \frac{1}{a}\Delta_{\hat{\psi}} \right] \quad (3.3.12)$$

на t - ω плоскости с шириной $2a\Delta_{\psi}$ (определенной шириной временного окна). Следовательно, это окно автоматически сужается в случае высокочастотных явлений (то есть при малых $a > 0$) и расширяется при исследовании низкочастотных свойств сигнала (то есть при больших $a > 0$). (См. рис. 1.2.1.)

Далее мы выведем формулу для восстановления любого сигнала конечной энергии по его значениям ИВП. Для полноты мы сначала допустим отрицательное значение масштабного параметра a , затем сосредоточим наше внимание на положительных a с тем, чтобы применить ИВП для частотно-временного анализа.

Теорема 3.10. Пусть ψ — базисный вэйвлет, определяющий ИВП W_ψ . Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[(W_\psi f)(b, a) \overline{(W_\psi g)(b, a)} \right] \frac{da}{a^2} db = C_\psi \langle f, g \rangle \quad (3.3.13)$$

для всех $f, g \in L^2(\mathbf{R})$. Более того, для любой $f \in L^2(\mathbf{R})$ и $x \in \mathbf{R}$, в которой f непрерывна,

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [(W_\psi f)(b, a)] \psi_{b;a}(x) \frac{da}{a^2} db, \quad (3.3.14)$$

где $\psi_{b;a}$ определяется формулой (3.3.4).

Доказательство. Применяя равенство Парсеваля и (3.3.7) и введя обозначения

$$\begin{cases} F(x) := \hat{f}(x) \hat{\psi}(ax), \\ G(x) := \hat{g}(x) \hat{\psi}(ax), \end{cases} \quad (3.3.15)$$

мы имеем

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \left[(W_\psi f)(b, a) \overline{(W_\psi g)(b, a)} \right] db \\ &= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(s)} \psi\left(\frac{s-b}{a}\right) ds \right\} db \\ &= \frac{a^2}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\bar{F}(x) e^{-ibx}} dx \right\} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{G}(y) e^{-iby} dy \right\} db \\ &= \frac{a^2}{2\pi|a|} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\bar{G}}(b) \overline{\hat{F}(b)} db \right\} \\ &= \frac{a^2}{2\pi|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{G}(x) F(x) dx, \end{aligned}$$

где равенство Парсеваля применено снова для получения последнего равенства. Откуда, подставляя (3.3.15) в выше полученное выражение, умножая на da/a^2 и интегрируя по интер-

валу $(-\infty, \infty)$, вспомним определение C_ψ из формулы (3.3.1) и получим

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [(W_\psi f)(b, a) \overline{(W_\psi g)(b, a)}] db \right\} \frac{da}{a^2} \quad (3.3.16) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \hat{f}(x) \overline{\hat{g}(x)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(ax)|^2}{|a|} da \right\} dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \hat{f}(x) \overline{\hat{g}(x)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(y)|^2}{|y|} dy \right\} dx \\
 &= C_\psi \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = C_\psi \langle f, g \rangle.
 \end{aligned}$$

Более того, если f непрерывна в точке x , то, используя функцию Гаусса $g_\alpha(\cdot - x)$ в качестве функции g и устремляя α к нулю, мы приходим к равенству

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{C_\psi} \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [(W_\psi f)(b, a) \overline{(g_\alpha(\cdot - x), \psi_{b;a})}] \frac{da}{a^2} db \\
 &= \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [(W_\psi f)(b, a)] \psi_{b;a}(x) \frac{da}{a^2} db.
 \end{aligned}$$

Это и завершает доказательство теоремы. $\square$

В анализе сигналов мы рассматриваем только положительные частоты ω . Следовательно, если частотная переменная ω идентифицирована с положительной константой, умноженной на обратную величину параметра растяжения a , в виде $\omega = \omega^*/a$ (где ω^* — центр $\hat{\psi}$ — всегда предполагается положительным), то мы должны рассматривать только положительные значения a . Поэтому, восстанавливая f по ИВП от $\hat{f}$, мы можем использовать только значения $(W_\psi f)(b, a)$, $a > 0$. В этом случае, как и следует ожидать, на базисный вэйвлет ψ должны быть наложены дополнительные ограничения. Таким дополнительным условием является

$$\int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega = \int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}(-\omega)|^2}{\omega} d\omega = \frac{1}{2} C_\psi < \infty. \quad (3.3.17)$$

Теорема 3.11. Пусть ψ — базисный вэйвлет, удовлетворяющий (3.3.17). Тогда

$$\int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty (W_\psi f)(b, a) \overline{(W_\psi g)(b, a)} db \right] \frac{da}{a^2} = \frac{1}{2} C_\psi \langle f, g \rangle \quad (3.3.18)$$

для всех $f, g \in L^2(\mathbf{R})$. Более того, для любой $f \in L^2(\mathbf{R})$ и $x \in \mathbf{R}$, в которой f непрерывна,

$$f(x) = \frac{2}{C_\psi} \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty (W_\psi f)(b, a) \psi_{b,a}(x) db \right] \frac{da}{a^2}, \quad (3.3.19)$$

где $\psi_{b,a}$ определяется формулой (3.3.4).

Заметим, что для того, чтобы левая часть (3.3.18) равнялась $C \langle f, g \rangle$ для всех $f, g \in L^2(\mathbf{R})$, необходимо предположение (3.3.17), а также необходимо, чтобы $C = \frac{1}{2} C_\psi$.

Доказательство теоремы 3.11.

Из предположения (3.3.17) легко следует, что

$$\int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}(ax)|^2}{a} da = \int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}(y)|^2}{y} dy, \quad x \neq 0. \quad (3.3.20)$$

Откуда, проводя те же преобразования, что и в (3.3.16) (с той только разницей, что интеграл по da/a^2 берется по интервалу $(0, \infty)$ вместо $(-\infty, \infty)$), мы получаем (3.3.18). Доказательство (3.3.19) проводится так же, как и доказательство (3.3.14) в теореме 3.10. $\square$

3.4. Двухпараметрические вэйвлеты и формулы обращения

В анализе сигналов иногда необходимо разбить (положительную) ось частот на непересекающиеся частотные диапазоны (или октавы). Для численной эффективности мы будем рас-

смаатривать только *двоичные разбиения*, а именно:

$$(0, \infty) = \bigcup_{j=-\infty}^{\infty} (2^j \Delta_{\hat{\psi}}, 2^{j+1} \Delta_{\hat{\psi}}], \quad (3.4.1)$$

где $\Delta_{\hat{\psi}} > 0$ — радиус преобразования Фурье $\hat{\psi}$ базисного вэйвлета ψ . Здесь мы требуем также, чтобы $\hat{\psi}$ удовлетворяла (3.2.1). Заметим, что для любого базисного вэйвлета ψ фазовый сдвиг ψ на α эквивалентен сдвигу $\hat{\psi}$ в положительном направлении оси ω на эту же величину α ; таким образом

$$\psi^\circ(t) = e^{i\alpha t} \psi(t) \Leftrightarrow \hat{\psi}^\circ(\omega) = \hat{\psi}(\omega - \alpha). \quad (3.4.2)$$

Откуда, так как $\Delta_{\psi^\circ} = \Delta_\psi$ и $\Delta_{\hat{\psi}^\circ} = \Delta_{\hat{\psi}}$, мы всегда без потери общности можем потребовать, чтобы центр $\hat{\psi}$ был в точке $\omega^* = 3\Delta_{\hat{\psi}}$. Поступив таким образом, мы имеем

$$\left(\frac{\omega^*}{a_j} - \frac{1}{a_j} \Delta_{\hat{\psi}}, \frac{\omega^*}{a_j} + \frac{1}{a_j} \Delta_{\hat{\psi}} \right] = (2^{j+1} \Delta_{\hat{\psi}}, 2^{j+2} \Delta_{\hat{\psi}}] \quad (3.4.3)$$

при условии, что

$$a_j = \frac{1}{2^j}, \quad j \in \mathbf{Z}. \quad (3.4.4)$$

Частотный центр диапазона частот, описанный в (3.4.3), дается формулой

$$\omega_j := \frac{\omega^*}{a_j} = \frac{3\Delta_{\hat{\psi}}}{a_j} = 3 \times 2^j \Delta_{\hat{\psi}}. \quad (3.4.5)$$

Итак, используя ω^*/a в качестве частотной переменной ω , где $a > 0$ — параметр растяжения (или масштабный параметр), объединение непересекающихся множеств в (3.4.1) в самом деле дает разбиение (положительной) частотной области $(0, \infty)$.

В этом параграфе мы изучаем задачу восстановления любого сигнала с ограниченной энергией f (то есть любой

$f \in L^2(\mathbf{R})$) по его интегральному вэйвлет-преобразованию $(W_\psi f)(b, a)$, известному только в дискретном множестве частот:

$$\{\omega_j = 3 \times 2^j \Delta_{\hat{\psi}} : j \in \mathbf{Z}\},$$

(или используя только масштабные параметры $a = a_j := 1/2^j, j \in \mathbf{Z}$). Для разрешимости этой задачи естественно ожидать от базисного вэйвлета ψ удовлетворения дополнительным ограничением по сравнению с условием допустимости (3.3.1).

Определение 3.12. Функция $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ называется *двухпараметрическим вэйвлетом*, если существуют две положительные константы A и B , $0 < A \leq B < \infty$ такие, что

$$A \leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(2^{-j}\omega)|^2 \leq B, \quad \text{п.в.} \quad (3.4.6)$$

Условие (3.4.6) называется условием «устойчивости», налагаемым на ψ . Для объяснения этой терминологии воспользуемся обозначением (2.3.9) для отражения функции и введем следующее «нормированное» ИВП:

$$(W_j^\psi f)(b) := 2^{j/2} (W_\psi f) \left(b, \frac{1}{2^j} \right) = 2^j (f * \overline{\psi^-(2^j \cdot)})(b). \quad (3.4.7)$$

Тогда мы видим, что (3.4.6) эквивалентно соотношению

$$A \|f\|_2^2 \leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} \|W_j^\psi f\|_2^2 \leq B \|f\|_2^2, \quad f \in L^2(\mathbf{R}), \quad (3.4.8)$$

с теми же константами A и B . Действительно, по равенству Парсеваля и первому равенству в (2.3.10) леммы 2.16, неравенства в (3.4.8) могут быть записаны как

$$A \|\hat{f}\|_2^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega) \overline{\hat{\psi}(2^{-j}\omega)}|^2 d\omega \leq B \|\hat{f}\|_2^2,$$

что эквивалентно

$$A \leq \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left| \frac{g(x)}{\|g\|_2} \widehat{\psi}(2^{-j}x) \right|^2 \leq B, \quad g \in L^2(\mathbf{R}). \quad (3.4.9)$$

Взяв в качестве $g/\|g\|_2$ функцию Гаусса $g_\alpha(\cdot - \omega)$ и устремив $\alpha \rightarrow 0^+$, мы видим, что из (3.4.9) следует (3.4.6). Так как очевидно, что из (3.4.6) следует (3.4.9), то эти неравенства эквивалентны.

В дальнейшем мы увидим, что условие устойчивости на ψ означает, что любой двухпараметрический вэйвлет ψ должен быть базисным вэйвлетом.

Теорема 3.13. Пусть ψ удовлетворяет условию устойчивости (3.4.6). Тогда ψ является базисным вэйвлетом, удовлетворяющим неравенствам

$$A \ln 2 \leq \int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega, \int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(-\omega)|^2}{\omega} d\omega \leq B \ln 2. \quad (3.4.10)$$

Более того, если A и B — соответствующие параметры неравенств (3.4.6), то

$$C_\psi := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega = 2A \ln 2. \quad (3.4.11)$$

Доказательство. Заметим сначала, что

$$\int_1^2 \frac{|\widehat{\psi}(2^{-j}\omega)|^2}{\omega} d\omega = \int_{2^{-j}}^{2^{-j+1}} \frac{|\widehat{\psi}(x)|^2}{x} dx.$$

Откуда, разделив каждый член в (3.4.6) на ω и проинтегрировав по интервалу $(1, 2)$, мы имеем

$$A \ln 2 \leq \int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega \leq B \ln 2.$$

Подобным образом, разделив на $-\omega$ и проинтегрировав по $(-2, -1)$, получим

$$A \ln 2 \leq \int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}(-\omega)|^2}{\omega} d\omega \leq B \ln 2. \quad \square$$

Условие устойчивости способствует восстановлению любой $f \in L^2(\mathbf{R})$ по ее ИВП-значениям $(W_\psi f)(b, 2^{-j})$, $j \in \mathbf{Z}$. Подход, который мы выбираем, состоит в рассмотрении другого двухпараметрического вэйвлета ψ^* , который мы определяем через его преобразование Фурье:

$$\hat{\psi}^*(\omega) := \frac{\hat{\psi}(\omega)}{\sum_{k=-\infty}^\infty |\hat{\psi}(2^{-k}\omega)|^2}. \quad (3.4.12)$$

Из вида функции ψ^* и из формулы (3.4.7) следует, что для любой $f \in L^2(\mathbf{R})$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty (W_j^\psi f)(b) \{2^j \psi^*(2^j(x-b))\} db \\ &= \sum_{j=-\infty}^\infty \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty (W_j^\psi f)^\wedge(\omega) \hat{\psi}^*(2^{-j}\omega) e^{ix\omega} d\omega \\ &= \sum_{j=-\infty}^\infty \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \hat{f}(\omega) \bar{\hat{\psi}}(2^{-j}\omega) \hat{\psi}^*(2^{-j}\omega) e^{ix\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \hat{f}(\omega) e^{ix\omega} d\omega = f(x), \end{aligned} \quad (3.4.13)$$

где мы применили формулу $h_1 * h_2 = \mathcal{F}^{-1}(\hat{h}_1 \hat{h}_2)$, (3.4.7), лемму 2.16 и (3.4.12). Это приводит к следующему понятию *двухпараметрических двойственных*.

Определение 3.14. Функция $\tilde{\psi} \in L^2(\mathbf{R})$ называется *двухпараметрическим двойственным двухпараметри-*

ческого вэйвлета ψ , если каждая $f \in L^2(\mathbf{R})$ может быть представлена как

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (W_j^\psi f)(b) \{2^j \tilde{\psi}(2^j(x-b))\} db \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^{3j/2} \int_{-\infty}^{\infty} (W_\psi f) \left(b, \frac{1}{2^j}\right) \tilde{\psi}(2^j(x-b)) db. \end{aligned} \quad (3.4.14)$$

Откуда в (3.4.13) мы установили следующий результат.

Теорема 3.15. Пусть ψ — двухпараметрический вэйвлет. Тогда функция ψ^* , преобразование Фурье которой дается формулой (3.4.12), является двухпараметрическим двойственным ψ . Более того, ψ^* есть также двухпараметрический вэйвлет и

$$\frac{1}{B} \leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\widehat{\psi^*}(2^{-j}\omega)|^2 \leq \frac{1}{A}, \quad \text{п.в.} \quad (3.4.15)$$

Заметим, что двухпараметрические двойственные заданного двухпараметрического вэйвлета ψ могут быть не единственными. Обсуждение неединственности этих функций откладывается до § 3.6. Оно будет зависеть от следующего характеризующего результата.

Теорема 3.16. Пусть ψ — двухпараметрический вэйвлет и $\tilde{\psi}$ — любая функция из $L^2(\mathbf{R})$, которая удовлетворяет условию

$$\text{ess sup}_{-\infty < x < \infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\widehat{\tilde{\psi}}(2^{-j}x)|^2 < \infty; \quad (3.4.16)$$

$\tilde{\psi}$ — двухпараметрическое двойственное ψ тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{\tilde{\psi}}(2^{-j}\omega)} \widehat{\tilde{\psi}}(2^{-j}\omega) = 1 \quad \text{п.в.} \quad (3.4.17)$$

Доказательство. Проводя те же преобразования, что и в (3.4.13), заметим, что $\tilde{\psi}$ является двухпараметрическим двойственным ψ тогда и только тогда, когда для любой $f \in L^2(\mathbf{R})$ мы имеем

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \overline{\widehat{\psi}(2^{-j}\omega)} \widehat{\psi}(2^{-j}\omega) \text{ п.в.}, \quad (3.4.18)$$

где сходимость п.в. бесконечного ряда обеспечивается предположением (3.4.16) и определением двухпараметрического вэйвлета ψ . Очевидно, что (3.4.17) и (3.4.18) эквивалентны. $\square$

3.5. Каркасы

В предыдущем параграфе мы разбили (положительную) частотную ось на непересекающиеся частотные диапазоны $(2^j \Delta_{\widehat{\psi}}, 2^{j+1} \Delta_{\widehat{\psi}}]$, $j \in \mathbf{Z}$, выбрав параметр растяжения a равным $a_j := 2^{-j}$, $j \in \mathbf{Z}$, в то время как параметр сдвига мог принимать любое значение из $\mathbf{R}$. Поступив таким образом, мы рассмотрели полудискретную информацию об ИВП для $f \in L^2(\mathbf{R})$, а именно

$$(W_{\psi} f) \left(b, \frac{1}{2^j} \right), \quad b \in \mathbf{R}, \quad j \in \mathbf{Z}.$$

Для вычислительной эффективности будем брать дискретным также параметр b , ограничив b дискретным множеством точек выборки

$$b_{j,k} := \frac{k}{2^j} b_0, \quad j, k \in \mathbf{Z}, \quad (3.5.1)$$

где $b_0 > 0$ фиксированная константа, называемая *нормой выборки*. Отсюда, введя обозначение

$$\psi_{b_0;j,k}(t) := \psi_{j,k;a_j}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k b_0), \quad (3.5.2)$$

(см. (3.3.4) для определения $\psi_{b;a}$), будем считать значения ИВП для любой $f \in L^2(\mathbf{R})$ заданными формулой

$$(W_\psi f)(b_{j,k}, a_j) = \langle f, \psi_{b_0;j,k} \rangle, \quad j, k \in \mathbf{Z}. \quad (3.5.3)$$

Аналогично случаю полудискретного множества в предыдущем параграфе, поставим вопрос о восстановлении $f \in L^2(\mathbf{R})$ по ее значениям ИВП, определенным (3.5.3). Условие «устойчивости» для такого восстановления состоит в существовании двух положительных констант A и B , $0 < A \leq B < \infty$, таких, что

$$A\|f\|_2^2 \leq \sum_{j,k \in \mathbf{Z}} |\langle f, \psi_{b_0;j,k} \rangle|^2 \leq B\|f\|_2^2, \quad f \in L^2(\mathbf{R}). \quad (3.5.4)$$

Другими словами, условие устойчивости, наложенное на ψ , означает требование того, чтобы ψ порождала «каркас» $L^2(\mathbf{R})$ с нормой выборки b_0 .

Определение 3.17. *Говорят, что функция $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ порождает каркас $\{\psi_{b_0;j,k}\} L^2(\mathbf{R})$ с нормой выборки $b_0 > 0$, если (3.5.4) выполняется для положительных констант A и B , которые называются границами каркаса. Если $A = B$, то каркас называется жестким каркасом.*

При условии устойчивости (3.5.4), то есть при условии, что ψ порождает каркас, любая функция $f \in L^2(\mathbf{R})$ может быть восстановлена по значениям ее ИВП в формуле (3.5.3). Чтобы это увидеть, рассмотрим оператор T на $L^2(\mathbf{R})$, определенный как

$$Tf := \sum_{j,k \in \mathbf{Z}} \langle f, \psi_{b_0;j,k} \rangle \psi_{b_0;j,k}, \quad f \in L^2(\mathbf{R}). \quad (3.5.5)$$

Из условия устойчивости (3.5.4) ясно, что T — однозначный ограниченный линейный оператор. Действительно, ввиду ограничения снизу в (3.5.4), T отображает $L^2(\mathbf{R})$ на свою область значений, и по теореме Банаха об обратном операторе

его обратный оператор T^{-1} ограничен. В наших рассуждениях мы можем использовать следующий простой довод. Для любой $g = Tf$, где $f \in L^2(\mathbf{R})$, так как

$$\langle Tf, f \rangle = \sum_{j,k \in \mathbf{Z}} |\langle f, \psi_{b_0;j,k} \rangle|^2, \quad (3.5.6)$$

мы имеем

$$\begin{aligned} A\|T^{-1}g\|_2^2 &= A\|f\|_2^2 \leq \langle Tf, f \rangle \\ &= \langle g, T^{-1}g \rangle \leq \|g\|_2 \|T^{-1}g\|_2, \end{aligned}$$

таким образом

$$\|T^{-1}g\|_2 \leq \frac{1}{A}\|g\|_2,$$

или $\|T^{-1}\| \leq A^{-1}$. Следовательно, любая $f \in L^2(\mathbf{R})$ может быть восстановлена по ее значениям ИВП (3.5.3) с помощью формулы

$$f = T^{-1}Tf := \sum_{j,k \in \mathbf{Z}} \langle f, \psi_{b_0;j,k} \rangle T^{-1}\psi_{b_0;j,k}. \quad (3.5.7)$$

Положив

$$\psi_{b_0}^{j,k} := T^{-1}\psi_{b_0;j,k}, \quad j, k \in \mathbf{Z} \quad (3.5.8)$$

формулу восстановления (3.5.7) можно записать в виде

$$\begin{cases} \langle f, g \rangle = \sum_{j,k \in \mathbf{Z}} \langle f, \psi_{b_0;j,k} \rangle \langle \psi_{b_0}^{j,k}, g \rangle, \\ f = \sum_{j,k \in \mathbf{Z}} \langle f, \psi_{b_0;j,k} \rangle \psi_{b_0}^{j,k} \end{cases} \quad (3.5.9)$$

для всех $f, g \in L^2(\mathbf{R})$. Мы можем назвать $\{\psi_{b_0}^{j,k}\}$ *двойственным* каркасу $\{\psi_{b_0;j,k}\}$. Однако формулы восстановления (3.5.7) или (3.5.9) не пригодны для использования до тех пор, пока мы не обладаем некоторыми знаниями о двойственном. К сожалению, в общем случае двойственное $\{\psi_{b_0}^{j,k}\}$ не может быть порождено некоторой $\tilde{\psi} \in L^2(\mathbf{R})$ таким же образом, как $\{\psi_{b_0;j,k}\}$ порождается ψ . Мы вернемся к обсуждению этой темы в следующем параграфе.

В дальнейшем мы увидим, что каркас может и не образовывать линейно независимого семейства.

Пример 3.18. Пусть ψ_1 — функция Хаара, определенная формулой (3.2.3), и рассмотрим норму выборки $b_0 = 1/3$. Тогда семейство линейно зависимых функций $S := \{\psi_{1,1/3;j,k} : j, k \in \mathbf{Z}\}$ является каркасом $L^2(\mathbf{R})$.

Доказательство. Будем использовать обозначение

$$\gamma_j = \begin{cases} 1 & \text{для четных } j \in \mathbf{Z}, \\ 2 & \text{для нечетных } j \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

и представим семейство S в виде объединения трех непересекающихся подсемейств:

$$S_1 = \{\psi_{1;j,k}(x) = 2^{j/2}\psi_1(2^j x - k) : j, k \in \mathbf{Z}\},$$

$$S_2 = \{2^{j/2}\psi_1(2^j x - k + \frac{\gamma_j}{3}) : j, k \in \mathbf{Z}\},$$

и

$$S_3 = \{2^{j/2}\psi_1(2^j x - k - \frac{\gamma_j}{3}) : j, k \in \mathbf{Z}\}.$$

Так как ψ_1 — функция Хаара, то S_1 — это уже о.н. базис в $L^2(\mathbf{R})$ (см. §1.5, а также главы 5 и 6 для более детального рассмотрения). Следовательно, S — линейно зависимое семейство. Легко также убедиться в том, что S_2 и S_3 являются о.н. семействами, так что можно применить (обобщенное) неравенство Бесселя (см. (2.4.14), неравенство Бесселя для тригонометрических многочленов). Действуя последовательно, мы имеем

$$\begin{aligned} \|f\|_2^2 &= \sum_{j,k \in \mathbf{Z}} |\langle f, \psi_{1;j,k} \rangle|^2 \\ &\leq \sum_{j,k \in \mathbf{Z}} |\langle f, \psi_{1,1/3;j,k} \rangle|^2 \\ &= \|f\|_2^2 + \sum_{s \in S_2} |\langle f, s \rangle|^2 + \sum_{s \in S_3} |\langle f, s \rangle|^2 \\ &\leq 3\|f\|_2^2. \end{aligned}$$

□

Следовательно, условие устойчивости (3.5.4) слабее требования, чтобы ψ порождала базис Рисса, которое определяется следующим образом.

Определение 3.19. Говорят, что функция $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ порождает базис Рисса (или безусловный базис) $\{\psi_{b_0;j,k}\}$ с нормой выборки b_0 , если удовлетворяются следующие два условия:

(а) линейная оболочка

$$\{\psi_{b_0;j,k} \mid j, k \in \mathbf{Z}\} \quad (3.5.10)$$

плотна в $L^2(\mathbf{R})$ и

(б) существуют положительные константы A и B , $0 < A \leq B < \infty$ такие, что

$$A \|\{c_{j,k}\}\|_{\ell^2}^2 \leq \left\| \sum_{j,k \in \mathbf{Z}} c_{j,k} \psi_{b_0;j,k} \right\|_2^2 \leq B \|\{c_{j,k}\}\|_{\ell^2}^2 \quad (3.5.11)$$

для всех $\{c_{j,k}\} \in \ell^2(\mathbf{Z}^2)$. Здесь A и B называются границами Рисса для $\{\psi_{b_0;j,k}\}$.

Если ψ порождает базис Рисса с нормой выборки $b_0 = 1$, то ψ называют $\mathcal{R}$ -функцией (см. определение 1.4).

Замечание. Всюду в этой книге мы будем использовать обозначение

$$\psi_{j,k}(x) := \psi_{1;j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k). \quad (3.5.12)$$

Это обозначение нельзя смешивать с обозначением $\psi_{b;a}$, введенным с помощью формулы (3.3.4).

Следующий результат проясняет различие между каркасом и базисом Рисса.

Теорема 3.20. Пусть $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ и $b_0 > 0$. Тогда следующие два утверждения эквивалентны.

(а) $\{\psi_{b_0;j,k}\}$ является базисом Рисса в $L^2(\mathbf{R})$.

(б) $\{\psi_{b_0;j,k}\}$ является каркасом $L^2(\mathbf{R})$ и образует также ℓ^2 -линейно независимое семейство в том смысле, что если $\sum c_{j,k}\psi_{b_0;j,k} = 0$ и $\{c_{j,k}\} \in \ell^2$, то $c_{j,k} = 0$. Более того, границы Рисса и границы каркаса совпадают.

Доказательство. Из (3.5.11) очевидно, что любой базис Рисса ℓ^2 -линейно независим. Пусть $\{\psi_{b_0;j,k}\}$ есть базис Рисса с границами Рисса A и B , и рассмотрим «матричный оператор»

$$M := [\gamma_{\ell,m;j,k}]_{(\ell,m),(j,k) \in \mathbf{Z}^2},$$

где элементы матрицы определяются формулой

$$\gamma_{\ell,m;j,k} := \langle \psi_{b_0;\ell,m}, \psi_{b_0;j,k} \rangle. \quad (3.5.13)$$

Из (3.5.11) мы имеем

$$A \|\{c_{j,k}\}\|_{\ell^2}^2 \leq \sum_{\ell,m,j,k} c_{\ell,m} \gamma_{\ell,m;j,k} \bar{c}_{j,k} \leq B \|\{c_{j,k}\}\|_{\ell^2}^2,$$

таким образом, M — положительно определенный оператор. Мы обозначим оператор, обратный M , выражением

$$M^{-1} := [\mu_{\ell,m;j,k}]_{(\ell,m),(j,k) \in \mathbf{Z}^2},$$

которое означает, что выполняются оба соотношения

$$\sum_{r,s} \mu_{\ell,m;r,s} \gamma_{r,s;j,k} = \delta_{\ell,j} \delta_{m,k}, \quad \ell, m, j, k \in \mathbf{Z} \quad (3.5.14)$$

и

$$\begin{aligned} B^{-1} \|\{c_{j,k}\}\|_{\ell^2}^2 &\leq \sum_{\ell,m,j,k} c_{\ell,m} \mu_{\ell,m;j,k} \bar{c}_{j,k} \leq \\ &\leq A^{-1} \|\{c_{j,k}\}\|_{\ell^2}^2, \quad \{c_{j,k}\} \in \ell^2. \end{aligned} \quad (3.5.15)$$

Это позволяет нам ввести

$$\psi^{\ell,m}(x) := \sum_{j,k} \mu_{\ell,m;j,k} \psi_{b_0;j,k}(x). \quad (3.5.16)$$

Ясно, что $\psi^{\ell,m} \in L^2(\mathbf{R})$ и из (3.5.13) и (3.5.14) следует, что

$$\langle \psi^{\ell,m}, \psi_{b_0;j,k} \rangle = \delta_{\ell,j} \delta_{m,k}, \quad \ell, m, j, k \in \mathbf{Z},$$

это значит, что $\{\psi^{\ell,m}\}$ является базисом в $L^2(\mathbf{R})$, двойственным $\{\psi_{b_0;j,k}\}$. Более того, из (3.5.14) и (3.5.15) мы заключаем, что

$$\langle \psi^{\ell,m}, \psi^{j,k} \rangle = \mu_{\ell,m;j,k}$$

и что границы Рисса $\{\psi^{\ell,m}\}$ равны B^{-1} и A^{-1} . В частности, для любой $f \in L^2(\mathbf{R})$ мы можем написать

$$f(x) = \sum_{j,k} \langle f, \psi_{b_0;j,k} \rangle \psi^{j,k}(x)$$

и

$$B^{-1} \sum_{j,k} |\langle f, \psi_{b_0;j,k} \rangle|^2 \leq \|f\|_2^2 \leq A^{-1} \sum_{j,k} |\langle f, \psi_{b_0;j,k} \rangle|^2. \quad (3.5.17)$$

Так как очевидно, что (3.5.17) эквивалентно (3.5.14), то мы установили, что из справедливости (а) следует справедливость (б).

Чтобы доказать обратное утверждение, мы должны использовать две основные теоремы функционального анализа, а именно: теорему Банаха—Штейнгуаза и теорему об открытости отображения, которые, к несчастью, выходят за рамки этой книги. Мы даем только очень краткое описание доказательства, не приводя его подробностей. Используя (3.5.5), видим, что если $\{\psi_{b_0;j,k}\}$ есть каркас $L^2(\mathbf{R})$, то для любой $g \in L^2(\mathbf{R})$ и $f = T^{-1}g$ мы имеем

$$g(x) = \sum_{j,k} \langle f, \psi_{b_0;j,k} \rangle \psi_{b_0;j,k}(x).$$

Также из ℓ^2 -независимости $\{\psi_{b_0;j,k}\}$ следует, что это представление единственно. Может быть также показано, что при использовании этого «базиса» $\{\psi_{b_0;j,k}\}$ для представления функ-

ций из $L^2(\mathbf{R})$ ряды

$$\sum_{j,k} c_{j,k} \psi_{b_0;j,k}(x)$$

сходятся в $L^2(\mathbf{R})$ тогда и только тогда, когда последовательность $\{c_{j,k}\}$ принадлежит ℓ^2 . Тогда, как это было сказано выше, теорема Банаха—Штейнгуаза и теорема об открытости отображения позволяют сделать вывод о том, что $\{\psi_{b_0;j,k}\}$ является базисом Рисса в $L^2(\mathbf{R})$.

В завершение этого параграфа покажем, что если $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ порождает каркас $L^2(\mathbf{R})$, то он должен быть двухпараметрическим вэйвлетом.

Теорема 3.21. Пусть $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ порождает каркас $\{\psi_{b_0;j,k}\}$ $L^2(\mathbf{R})$ с границами каркаса A и B и нормой выборки $b_0 > 0$. Тогда его преобразование Фурье $\hat{\psi}$ удовлетворяет неравенствам:

$$b_0 A \leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(2^{-j}\omega)|^2 \leq b_0 B \quad \text{п.в.} \quad (3.5.18)$$

Неполное доказательство. Пусть $f \in L^2(\mathbf{R})$. Вводя обозначение

$$\tau := \frac{2\pi}{b_0}$$

и применяя равенство Парсеваля для $\langle f, \psi_{b_0;j,k} \rangle$ и для интеграла в бесконечных пределах в виде циклической суммы, мы имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j,k \in \mathbf{Z}} |\langle f, \psi_{b_0;j,k} \rangle|^2 &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{2^j}{4\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(2^j\omega) \overline{\hat{\psi}(\omega)} e^{ikb_0\omega} d\omega \right|^2 \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{2^j \tau^2}{4\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \left[\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \hat{f}(2^j(\omega + \ell\tau)) \right. \right. \\ &\quad \times \left. \overline{\hat{\psi}(\omega + \ell\tau)} \right] e^{i\frac{k2\pi\omega}{\tau}} d\omega \Big|^2 \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{2^j}{2\pi b_0} \int_0^\tau \left| \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \hat{f}(2^j(\omega + \ell\tau)) \overline{\hat{\psi}(\omega + \ell\tau)} \right|^2 d\omega. \end{aligned}$$

Откуда условие каркаса (или устойчивости) (3.5.4) принимает вид

$$\begin{aligned} A \|\hat{f}\|_2^2 &\leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{2^j}{b_0} \int_0^\tau \left| \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \hat{f}(2^j(x + \ell\tau)) \overline{\widehat{\psi}(x + \ell\tau)} \right|^2 dx \\ &\leq B \|\hat{f}\|_2^2. \end{aligned}$$

Пусть теперь мы имеем по j конечную сумму, например $-M \leq j \leq M$, тогда для любого $\omega \in \mathbf{R}$ и достаточно малого $\varepsilon > 0$ выбор

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \chi_{[\omega-\varepsilon, \omega+\varepsilon]}(x)$$

($\chi_{[\alpha, \beta]}$ — характеристическая функция отрезка $[\alpha, \beta]$), в выше-приведенных неравенствах легко дает нам

$$A \leq \sum_j \frac{1}{b_0} \cdot \frac{2^j}{2\varepsilon} \int_{2^{-j}(\omega-\varepsilon)}^{2^{-j}(\omega+\varepsilon)} |\widehat{\psi}(x)|^2 dx \leq B$$

и, следовательно, неравенства в (3.5.18) могут быть получены при стремлении $\varepsilon \rightarrow 0^+$. К сожалению, сумма по j — бесконечна. Тем не менее, так как любое конечное усечение оставляет неизменной верхнюю границу, то второе неравенство в (3.5.18), естественно, имеет место. Чтобы получить первое неравенство в (3.5.18), «хвосты» суммы по j должны быть оценены очень аккуратно для того, чтобы были применены предыдущие рассуждения с конечными суммами. Мы опускаем здесь технические детали доказательства. $\square$

3.6. Вэйвлет-ряды

Мы продолжаем наше обсуждение частотно-временного анализа, рассматривая, так же как и в предыдущем параграфе, дискретные масштабно-временные выборки ИВП. Для упрощения наших рассуждений мы будем рассматривать только норму выборки $b_0 = 1$ и использовать обозначения $\psi_{j,k} = \psi_{1;j,k}$, как это было введено в (3.5.12). Кроме того, мы сосредоточим наше внимание на $\mathcal{R}$ -функциях ψ в том смысле, что $\{\psi_{j,k}\}$ является базисом Рисса в $L^2(\mathbf{R})$, согласно определению 3.19. Следовательно, по теоремам 3.20 и 3.21, соответственно, $\{\psi_{j,k}\}$ образует каркас пространства $L^2(\mathbf{R})$ и ψ является двухпараметрическим вэйвлетом. Пусть $\{\psi^{j,k}\}$ — двойственный базис относительно базиса Рисса $\{\psi_{j,k}\}$, как это определено в (3.5.13). Когда $\{\psi_{j,k}\}$ рассматривается в качестве каркаса $L^2(\mathbf{R})$, мы можем считать $\psi^{j,k} = \psi_1^{j,k} = T^{-1}\psi_{1;j,k}$ двойственным этого каркаса, согласно рассуждениям в (3.5.7) — (3.5.8).

Существует два очень важных подкласса $\mathcal{R}$ -функций, которые составляют главную тему нашего изучения. Ими являются *полуортогональные вэйвлеты* и более узкий подкласс ортогональных вэйвлетов, которые будут определены ниже. Для этих двух классов функций весьма легко описать их *двойственные*.

Определение 3.22. Пусть $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ является $\mathcal{R}$ -функцией, которая порождает $\{\psi_{j,k}\}$, согласно (3.5.12). Тогда

(а) ψ называется *ортогональным вэйвлетом* (или *о.н. вэйвлетом*), если $\{\psi_{j,k}\}$ удовлетворяет условию ортогональности:

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{\ell,m} \rangle = \delta_{j,\ell} \delta_{k,m}, \quad j, k, \ell, m \in \mathbf{Z}; \quad (3.6.1)$$

(б) ψ называется *полуортогональным вэйвлетом* (или *п.о. вэйвлетом*), если $\{\psi_{j,k}\}$ удовлетворяет условию:

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{\ell,m} \rangle = 0, \quad j \neq \ell; \quad j, k, \ell, m \in \mathbf{Z}. \quad (3.6.2)$$

Очевидно, что о.н. вэйвлет является *двойственным самому себе* в том смысле, что

$$\psi^{j,k} = \psi_{j,k}, \quad j, k \in \mathbf{Z}.$$

Чтобы определить двойственное п.о. вэйвлета, рассмотрим сначала следующие эквивалентные определения ортогональности.

Теорема 3.23. *Для любой функции $\phi \in L^2(\mathbf{R})$ эквивалентны следующие утверждения:*

(а) $\{\phi(x - k) : k \in \mathbf{Z}\}$ является ортонормированным семейством в том смысле, что

$$\langle \phi(\cdot - k), \phi(\cdot - \ell) \rangle = \delta_{k,\ell}, \quad k, \ell \in \mathbf{Z}. \quad (3.6.3)$$

(б) Преобразование Фурье $\hat{\phi}$ функции ϕ удовлетворяет равенству

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ijx} |\hat{\phi}(x)|^2 dx = \delta_{j,0}, \quad j \in \mathbf{Z}. \quad (3.6.4)$$

(в) Равенство

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}(x + 2\pi k)|^2 = 1 \quad (3.6.5)$$

справедливо для почти всех x .

Доказательство. Так как $|\hat{\phi}(x)|^2$ принадлежит $L^1(\mathbf{R})$, из леммы 2.24 следует, что бесконечный ряд

$$G(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}(x + 2\pi k)|^2, \quad (3.6.6)$$

который определяет функцию G , сходится п.в. к G и что $G \in L^1(0, 2\pi)$. Теперь для любого $j \in \mathbf{Z}$ j -й коэффициент

Фурье G есть

$$\begin{aligned}
 c_j(G) &:= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ijx} G(x) dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-ijx} |\hat{\phi}(x + 2\pi k)|^2 dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} e^{-ijy} |\hat{\phi}(y)|^2 dy \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ijx} |\hat{\phi}(x)|^2 dx.
 \end{aligned}$$

Эти формулы устанавливают эквивалентность (б) и (в). Эквивалентность (а) и (б) следует из непосредственного применения равенства Парсеваля с $j = k - \ell$, а именно:

$$\begin{aligned}
 \langle \phi(\cdot - k), \phi(\cdot - \ell) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x - j) \overline{\phi(x)} dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(x) e^{-ijx} \overline{\hat{\phi}(x)} dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ijx} |\hat{\phi}(x)|^2 dx. \quad \square
 \end{aligned}$$

Несколько более слабым свойством, чем свойство ортогональности в этой теореме, является *условие Рисса* (или *безусловности*), которое мы рассмотрим в следующей теореме.

Теорема 3.24. Для любой $\phi \in L^2(\mathbf{R})$ и констант $0 < A \leq B < \infty$ следующие два утверждения эквивалентны:

(а) $\{\phi(\cdot - k) : k \in \mathbf{Z}\}$ удовлетворяет условию Рисса с границами Рисса A и B ; это означает, что для любой $\{c_k\} \in \ell^2$

$$A \|\{c_k\}\|_{\ell^2}^2 \leq \left\| \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \phi(\cdot - k) \right\|_2^2 \leq B \|\{c_k\}\|_{\ell^2}^2. \quad (3.6.7)$$

(б) Преобразование Фурье $\hat{\phi}$ от ϕ удовлетворяет неравенствам

$$A \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}(x + 2\pi k)|^2 \leq B \quad \text{н.в.} \quad (3.6.8)$$

Доказательство. Пусть для любой последовательности $\{c_k\} \in \ell^2$ $C(\omega)$ обозначает ее символ, т.е.

$$C(\omega) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ik\omega}. \quad (3.6.9)$$

Тогда, используя равенство Парсеваля, мы можем записать

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \phi(\cdot - k) \right\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |C(\omega) \hat{\phi}(\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} |C(\omega) \hat{\phi}(\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} |C(x) \hat{\phi}(x + 2\pi k)|^2 dx. \end{aligned} \quad (3.6.10)$$

Будем использовать обозначение

$$\Phi_{|\hat{\phi}|^2}(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}(x + 2\pi k)|^2, \quad (3.6.11)$$

введенное в (2.5.4). Тогда, рассматривая

$$g(\omega) = |C(\omega)|^2 / \|C\|_{L^2(0, 2\pi)}$$

и обращаясь к равенству Парсеваля (1.1.7)

$$\|\{c_k\}\|_{\ell^2}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |C(\omega)|^2 d\omega = \|C\|_{L^2(0, 2\pi)}^2,$$

получим: из (3.6.10) следует, что (3.6.7) может быть сформулировано как

$$A \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x) \Phi_{|\hat{\phi}|^2}(x) dx \leq B. \quad (3.6.12)$$

Ясно, что из (3.6.8) следует (3.6.12). Для доказательства того, что из (3.6.12) вытекает (3.6.8), мы будем снова использовать функцию Гаусса $g_\alpha(x - \omega)$ вместо $g(x)$ и устремим α к 0. $\square$

С помощью двух доказанных выше теорем мы можем теперь сформулировать теорему о двойственном п.о. вэйвлета.

Теорема 3.25. Пусть $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ является п.о. вэйвлетом, определим $\tilde{\psi}$ с помощью преобразования Фурье

$$\tilde{\psi}(\omega) := \frac{\widehat{\psi}(\omega)}{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{\psi}(\omega + 2\pi k)|^2}. \quad (3.6.13)$$

Тогда $\tilde{\psi}$ является двойственным ψ в том смысле, что

$$\langle \psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{\ell,m} \rangle = \delta_{j,\ell} \delta_{k,m}, \quad j, k, \ell, m \in \mathbf{Z}, \quad (3.6.14)$$

где

$$\tilde{\psi}_{\ell,m}(x) := 2^{\ell/2} \tilde{\psi}(2^\ell x - m). \quad (3.6.15)$$

Другими словами, двойственный базис $\{\psi^{j,k}\}$ относительно $\{\psi_{j,k}\}$ определяется как $\psi^{j,k} = \tilde{\psi}_{j,k}$.

Доказательство. Так как ψ — п.о. вэйвлет, то $\{\psi_{j,k}\}$ является базисом Рисса в $L^2(\mathbf{R})$ с границами Рисса A и B . Следовательно, рассматривая последовательности $\{c_{j,k}\} \in \ell^2(\mathbf{Z}^2)$, где $c_{j,k} = c_k \delta_{j,0}$, $\{c_k\} \in \ell^2$ в (3.5.11), мы видим, что (3.6.7) выполняется, если вместо ϕ подставить ψ . По теореме 3.24 знаменатель в (3.6.13) ограничен п.в. вследствие (3.6.8). Из этого следует, что $\tilde{\psi}$, определенная формулой (3.6.13), принадлежит $L^2(\mathbf{R})$ и удовлетворяет равенству

$$\tilde{\psi}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \psi(x - k), \quad \{a_k\} \in \ell^2, \quad (3.6.16)$$

где

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} \frac{1}{\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\widehat{\psi}(x + 2\pi j)|^2} dx. \quad (3.6.17)$$

Так как ψ — п.о. вэйвлет, то предположение (3.6.2) с использованием обозначения (3.6.15) непосредственно приводит нас к равенству

$$\langle \psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{\ell,m} \rangle = 0, \quad j \neq \ell; \quad j, k, \ell, m \in \mathbf{Z}.$$

Для $j = \ell$ из формулы (3.6.13) при $p = k - m$ следует, что

$$\begin{aligned} \langle \psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{j,m} \rangle &= 2^j \int_{-\infty}^{\infty} \psi(2^j x - k) \overline{\tilde{\psi}(2^j x - m)} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(y - p) \overline{\tilde{\psi}(y)} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ip\omega} \widehat{\psi}(\omega) \overline{\widehat{\tilde{\psi}}(\omega)} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ip\omega} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}(\omega + 2\pi k) \overline{\widehat{\tilde{\psi}}(\omega + 2\pi k)} \right] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ip\omega} d\omega = \delta_{p,0} = \delta_{k,m}. \end{aligned}$$

Это завершает доказательство теоремы. $\square$

Вышеприведенный результат указывает, как п.о. вэйвлет переходит в о.н. вэйвлет. Действительно, положим

$$\widehat{\psi}^{\perp}(\omega) = \frac{\widehat{\psi}(\omega)}{\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{\psi}(\omega + 2\pi k)|^2 \right)^{1/2}}, \quad (3.6.18)$$

тогда двойственное $\tilde{\psi}^{\perp}$ для $\psi^{\perp}$ дается выражением

$$\widehat{\tilde{\psi}^{\perp}}(\omega) = \frac{\widehat{\psi}^{\perp}(\omega)}{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{\psi}^{\perp}(\omega + 2\pi k)|^2} = \widehat{\psi}^{\perp}(\omega);$$

таким образом, $\tilde{\psi}^{\perp} = \psi^{\perp}$, или $\psi^{\perp}$ является двойственным самому себе.

Формула в (3.6.18) обычно называется *процедурой ортонормализации*. Однако, если ψ — любая $\mathcal{R}$ -функция, которая не является п.о. вэйвлетом, эта процедура ортонормализации не эффективна для построения о.н. вэйвлета. Действительно, как уже говорилось в § 1.4, существуют $\mathcal{R}$ -функции, которые не имеют двойственных в том смысле, что двойственный базис $\{\psi^{j,k}\}$ относительно базиса Рисса $\{\psi_{j,k}\}$ не задается $\{\tilde{\psi}_{j,k}\}$ для некоторой $\tilde{\psi} \in L^2(\mathbf{R})$, где использовано обозначение (3.6.15). Так как каждый базис Рисса является каркасом, двойственное для каркаса может не быть порождено какой-либо одной функцией из $L^2(\mathbf{R})$. Это приводит к следующему определению вэйвлетов.

Определение 3.26. $\mathcal{R}$ -функция $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ называется $\mathcal{R}$ -вэйвлетом (или вэйвлетом), если она имеет двойственное $\tilde{\psi} \in L^2(\mathbf{R})$, в том смысле, что $\{\psi_{j,k}\}$ и $\{\tilde{\psi}_{j,k}\}$, как это определено в (3.5.12) и (3.6.15), удовлетворяют соотношению двойственности (3.6.14).

Так как соотношение двойственности (3.6.14) коммутативно, то $\tilde{\tilde{\psi}}$, двойственное вэйвлета ψ , само является вэйвлетом с двойственным ψ . Таким образом, за исключением о.н. вэйвлетов, которые двойственны самим себе, когда мы рассматриваем вэйвлеты, то всегда рассматриваем пары вэйвлетов.

Если ψ — вэйвлет с двойственным $\tilde{\psi}$, то по определению базиса Рисса, каждая $f \in L^2(\mathbf{R})$ может быть записана как

$$f(x) = \sum_{j,k \in \mathbf{Z}} c_{j,k} \psi_{j,k}(x) = \sum_{j,k \in \mathbf{Z}} d_{j,k} \tilde{\psi}_{j,k}(x). \quad (3.6.19)$$

Эти бесконечные ряды называются *вэйвлет-рядами* и сходятся в $L^2(\mathbf{R})$ (см. определение 3.19). Из соотношения двойственности (3.6.14) следует, что

$$\begin{cases} c_{j,k} = \langle f, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle, \\ d_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle. \end{cases}$$

Поэтому мы имеем следующую схему для восстановления сигналов конечной энергии по дискретной выборке их интегральных вэйвлет-преобразований.

Теорема 3.27. Пусть ψ — вэйвлет с двойственным $\tilde{\psi}$. Для любой $f \in L^2(\mathbf{R})$ рассмотрим ее ИВП, использующее ψ и $\tilde{\psi}$ в качестве базисных вэйвлетов, вычисленное при значениях $(b, a) = (\frac{k}{2^j}, \frac{1}{2^j})$, $j, k \in \mathbf{Z}$, а именно:

$$\begin{cases} d_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle = (W_\psi f) \left(\frac{k}{2^j}, \frac{1}{2^j} \right), \\ c_{j,k} = \langle f, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle = (W_{\tilde{\psi}} f) \left(\frac{k}{2^j}, \frac{1}{2^j} \right). \end{cases} \quad (3.6.20)$$

Тогда f может быть восстановлена по значениям $\{d_{j,k}\}$ или $\{c_{j,k}\}$ с использованием одного из двух вэйвлет-рядов (3.6.19). Более того, скалярное произведение любых двух функций из $L^2(\mathbf{R})$ может быть восстановлено из аналогичных дискретных выборок их ИВП с использованием формулы:

$$\langle f, g \rangle = \sum_{j,k \in \mathbf{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \langle \tilde{\psi}_{j,k}, g \rangle. \quad (3.6.21)$$

Сейчас мы вернемся к рассмотрению двухпараметрических двойственных для двухпараметрических вэйвлетов, введенных в § 3.4. Во-первых, мы должны придать особое значение тому факту, что двухпараметрические вэйвлеты не обязательно являются вэйвлетами в смысле $\mathcal{R}$ -вэйвлетов, и двухпараметрические двойственные обычно не являются двойственными для вэйвлетов.

Пусть ψ — п.о. вэйвлет с границами Рисса A и B . Мы видели при доказательстве теоремы 3.25, что $\hat{\psi}$ удовлетворяет неравенствам

$$A \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(x + 2\pi k)|^2 \leq B \quad \text{п.в.} \quad (3.6.22)$$

с теми же границами A и B . Когда $\{\psi_{j,k}\}$ рассматривается как каркас $L^2(\mathbf{R})$ с нормой выборки $b_0 = 1$, из теорем 3.20 и 3.21 следует, что $\hat{\psi}$ также удовлетворяет условию

$$A \leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(2^{-j}\omega)|^2 \leq B \quad \text{п.в.} \quad (3.6.23)$$

снова при тех же константах A и B . Неравенства (3.6.22) и (3.6.23) дают нам возможность ввести две функции из $L^2(\mathbf{R})$: ψ^* и ψ° , с преобразованиями Фурье

$$\begin{cases} \hat{\psi}^*(\omega) := \frac{\hat{\psi}(\omega)}{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(2^{-k}\omega)|^2}, \\ \hat{\psi}^\circ(\omega) := \frac{\hat{\psi}(\omega)}{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(\omega + 2\pi k)|^2}. \end{cases} \quad (3.6.24)$$

Пусть $\psi^\perp$ — о.н. вэйвлет, полученный с помощью ортонормализации ψ с использованием (3.6.18). Тогда $\psi^\perp$ является $\mathcal{R}$ -функцией с границами Рисса $A = B = 1$. Поэтому из теорем 3.20 и 3.21 следует, что

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}^\perp(2^{-j}\omega)|^2 = 1 \quad \text{п.в.} \quad (3.6.25)$$

Так как $\overline{\hat{\psi}^\perp} \hat{\psi}^\circ = |\hat{\psi}^\perp|^2$, мы также имеем

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \overline{\hat{\psi}(2^{-j}\omega)} \hat{\psi}^\circ(2^{-j}\omega) = 1 \quad \text{п.в.} \quad (3.6.26)$$

Таким образом, учитывая тот факт, что

$$\text{ess} \sup_{-\infty < x < \infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}^\circ(2^{-j}x)|^2 < \infty, \quad (3.6.27)$$

который является следствием взаимной ортогональности всех $\psi^\circ(2^j x)$, $j \in \mathbf{Z}$, из теоремы 3.16 следует, что ψ° является двухпараметрическим двойственным ψ . Поэтому, обращаясь к теореме 3.15, мы заключаем, что обе функции ψ^* и ψ° являются двухпараметрическими двойственными ψ . Так как два знаменателя в (3.6.24) совершенно различны, нельзя ожидать, что эти двухпараметрические двойственные будут одинаковыми, если только, конечно, ψ не является о.н. вэйвлетом.

Глава 4

Базисный сплайн-анализ

При использовании базисных вэйвлетов, таких как двухпараметрические вэйвлеты, двухпараметрические двойственные, каркасы и $\mathcal{R}$ -вэйвлеты (которые просто называются вэйвлетами), для частотно-временного анализа и других применений следует учесть ряд важнейших моментов. Среди них размеры частотно-временного окна, вычислительная сложность и эффективность, простота в использовании, гладкость и симметрия базисного вэйвлета, порядок аппроксимации. Один из основных методов построения вэйвлетов включает в себя использование *B -сплайн-функций*. Возможно, это самые простые функции с малым носителем, которые наиболее эффективны как при их программной, так и технической реализации. Вдобавок они обладают очень выгодным свойством, называемым *вполне положительностью*, которое позволяет контролировать пересечения нулей и очертания *сплайн-кривых*. Эта тема будет обсуждена в главе 6, где мы даже увидим, что вэйвлеты с минимальным носителем, которые построены с использованием (конечной) линейной комбинации сдвигов B -сплайнов, имеют частотно-временные окна с «почти минимальными» размерами в соответствии с принципом неопределенности. Эта глава посвящена изучению сплайн-функций,

при этом особое внимание будет уделяться их базисным свойствам, что является решающим при вычислениях, графическом изображении, обработке дискретных данных в режиме реального времени (или «он лайн») и при построении вэйвлетов.

4.1. Пространства сплайнов

Когда мы говорим о «сплайнах», мы имеем в виду «полиномиальные сплайн-функции с простыми узлами, расположенными на равном расстоянии». Для удобства будем сначала рассматривать множество $\mathbf{Z}$ всех целых чисел как «последовательность узлов». Как и в (1.5.8), π_n обозначает совокупность всех алгебраических многочленов степени не выше n и $C^n = C^n(\mathbf{R})$ — совокупность всех функций f таких, что $f, f', \dots, f^{(n)}$ всюду непрерывны, будем подразумевать, что $C = C^0$ и C^{-1} является пространством кусочно-непрерывных функций, как это было определено в начале § 2.1.

Определение 4.1. Для каждого положительного целого m пространство S_m сплайнов порядка m с последовательностью узлов $\mathbf{Z}$ состоит из совокупности всех функций $f \in C^{m-2}$ таких, что сужение f на любой интервал $[k, k+1], k \in \mathbf{Z}$ принадлежит π_{m-1} ; таким образом,

$$f|_{[k, k+1)} \in \pi_{m-1}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Легко понять, что S_1 — это пространство кусочно-постоянных функций. Наиболее подходящим базисом для использования является $\{N_1(x - k) : k \in \mathbf{Z}\}$, где N_1 — характеристическая функция $[0, 1)$, определенная в (3.2.2). Чтобы задать базис $S_m, m \geq 2$, рассмотрим сначала пространство $S_{m;N}$, состоящее из сужения функций $f \in S_m$ на интервал $[-N, N]$, где N — положительное целое число. Другими словами, мы

можем рассматривать $S_{m;N}$ как подпространство функций $f \in S_m$ таких, что сужения

$$f|_{(-\infty, -N+1)} \quad \text{и} \quad f|_{[N-1, \infty)}$$

функции f являются многочленами из π_{m-1} . Это подпространство легко описать. В самом деле, для произвольной функции f из $S_{m;N}$, положив $p_{m,j} := f|_{[j, j+1)} \in \pi_{m-1}$, $j = -N, -N+1, \dots, N-1$, мы имеем, ввиду того что $f \in C^{m-2}$,

$$\left(p_{m,j}^{(\ell)} - p_{m,j-1}^{(\ell)} \right) (j) = 0, \quad \ell = 0, \dots, m-2; \quad m \geq 2.$$

Таким образом, рассматривая «скачки» $f^{(m-1)}$ в узлах последовательности $\mathbf{Z}$, а именно:

$$\begin{aligned} c_j &= p_{m,j}^{(m-1)}(j+0) - p_{m,j-1}^{(m-1)}(j-0) \\ &:= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} [f^{(m-1)}(j+\varepsilon) - f^{(m-1)}(j-\varepsilon)], \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

получаем, что прилежащие куски многочленов функции f связаны тождеством

$$p_{m,j}(x) = p_{m,j-1}(x) + \frac{c_j}{(m-1)!} (x-j)^{m-1}. \quad (4.1.2)$$

Откуда, если ввести обозначения

$$\begin{cases} x_+ := \max(0, x), \\ x_+^{m-1} := (x_+)^{m-1}, \quad m \geq 2, \end{cases} \quad (4.1.3)$$

то из (4.1.2) следует, что для всех $x \in [-N, N]$

$$f(x) = f|_{[-N, -N+1)}(x) + \sum_{j=-N+1}^{N-1} \frac{c_j}{(m-1)!} (x-j)_+^{m-1}. \quad (4.1.4)$$

Это имеет место для любой $f \in S_{m;N}$ с константами c_j , задаваемыми (4.1.1). Следовательно, совокупность $m+2N-1$ функций

$$\{1, \dots, x^{m-1}, (x+N-1)_+^{m-1}, \dots, (x-N+1)_+^{m-1}\} \quad (4.1.5)$$

является базисом $S_{m,N}$. Эта совокупность состоит из одночленов и *усеченных степеней*. Так как мы сосредоточили наше внимание на интервале $[-N, N]$, можно заменить одночлены $1, \dots, x^{m-1}$ в (4.1.5) усеченными степенями:

$$(x + N + m - 1)_+^{m-1}, \dots, (x + N)_+^{m-1}. \quad (4.1.6)$$

Таким образом, следующая последовательность усеченных степеней, которая порождена целочисленными сдвигами единственной функции x_+^{m-1} , также является базисом $S_{m,N}$:

$$\{(x - k)_+^{m-1} : k = -N - m + 1, \dots, N - 1\}. \quad (4.1.7)$$

Этот базис более предпочтителен, чем в (4.1.5), по следующим причинам. Во-первых, каждая функция $(x - j)_+^{m-1}$ обращается в ноль слева от j ; во-вторых, все базисные функции в (4.1.7) порождены единственной функцией x_+^{m-1} , которая не зависит от N . Сверх того, так как

$$S_m = \bigcup_{N=1}^{\infty} S_{m,N},$$

то базис (4.1.7) может быть обобщен на «базис» $\mathcal{T}$ бесконечномерного пространства S_m простым объединением элементов в (4.1.7); таким образом, мы имеем:

$$\mathcal{T} := \{(x - k)_+^{m-1} : k \in \mathbf{Z}\}. \quad (4.1.8)$$

Однако следует быть более аккуратным, когда мы имеем дело с бесконечномерными пространствами. В этой книге, так как мы в основном имеем дело с пространством Гильберта $L^2(\mathbf{R})$, мы заинтересованы в изучении сплайнов в $L^2(\mathbf{R})$. К несчастью, не существует функции из $\mathcal{T}$, которая принадлежала бы $L^2(\mathbf{R})$; действительно, любая $(x - k)_+^{m-1}$ стремится к бесконечности при $x \rightarrow +\infty$. Чтобы с помощью функций из $\mathcal{T}_N$ получить пространство $L^2(\mathbf{R})$, мы должны убрать полиномиальный рост $(x - k)_+^{m-1}$. Единственная операция, которая до-

пустима при работе с векторными пространствами — это взятие (конечных) линейных комбинаций. Например, взятие производных недопустимо, но можно взять «разности». Так как для уменьшения полиномиального роста эффект от разностей тот же самый, что и при взятии производных, мы будем рассматривать разности. Более точно, мы будем использовать *разности назад*, определяемые рекуррентно равенствами

$$\begin{cases} (\Delta f)(x) := f(x) - f(x-1); \\ (\Delta^n f)(x) := (\Delta^{n-1}(\Delta f))(x), \quad n = 2, 3, \dots \end{cases} \quad (4.1.9)$$

Заметим, что так же, как в случае дифференциального оператора m -го порядка, разности m -го порядка от многочленов степени меньшей или равной $m-1$ равняются нулю, таким образом

$$\Delta^m f = 0, \quad f \in \pi_{m-1}. \quad (4.1.10)$$

Это приводит к следующему определению.

Определение 4.2. Пусть $M_1 := N_1$ — характеристическая функция $[0, 1)$, как это определено в (3.2.3), и пусть для $m \geq 2$

$$M_m(x) = \frac{1}{(m-1)!} \Delta^m x_+^{m-1}. \quad (4.1.11)$$

Из определения ясно, что M_m — линейная комбинация базисных функций из (4.1.8). Действительно, легко проверить, что

$$M_m(x) = \frac{1}{(m-1)!} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} (x-k)_+^{m-1}. \quad (4.1.12)$$

Из (4.1.10) следует, что $M_m(x) = 0$ для всех $x \geq m$. Так как $M_m(x)$, очевидно, обращается в нуль при $x < 0$, мы имеем

$$\text{supp } M_m \subseteq [0, m].$$

В результате более аккуратного рассмотрения мы можем даже заключить, что

$$\operatorname{supp} M_m = [0, m]. \quad (4.1.13)$$

Итак, M_m принадлежит $L^2(\mathbf{R})$. Но является ли совокупность

$$\mathcal{B} := \{M_m(x - k) : k \in \mathbf{Z}\} \quad (4.1.14)$$

целочисленных сдвигов M_m «базисом» S_m ? Вернемся снова к пространствам $S_{m,N}$, которые, согласно (4.1.5) и (4.1.7), имеют размерность $m + 2N - 1$. Используя теперь свойство носителя (4.1.13), каждая функция в совокупности

$$\{M_m(x - k) : k = -N - m + 1, \dots, N - 1\} \quad (4.1.15)$$

отлична от нуля на интервале $[-N, N]$ и $M_m(x - k)$ обращается в нуль на $[-N, N]$ для $k < -N - m + 1$ или $k > N - 1$. Так как можно показать, что (4.1.15) линейно независимы, то мы получили другой базис $S_{m,N}$. Итак, аналогично (4.1.8), если мы возьмем объединение элементов в (4.1.15) при $N = 1, 2, \dots$, мы приходим к $\mathcal{B}$ в (4.1.14). Одно преимущество $\mathcal{B}$ перед $\mathcal{T}$ в (4.1.8) состоит в том, что мы можем теперь говорить о сплайн-рядах

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k M_m(x - k), \quad (4.1.16)$$

не беспокоясь об их сходимости. Действительно, для любого фиксированного $x \in \mathbf{R}$, так как M_m имеет компактный носитель, все члены в бесконечном ряде (4.1.16), за исключением конечного числа, обращаются в нуль.

Как упоминалось ранее, мы главным образом заинтересованы в тех сплайнах, которые принадлежат $L^2(\mathbf{R})$, а именно: $S_m \cap L^2(\mathbf{R})$. Пусть V_0^m обозначает их $L^2(\mathbf{R})$ -замыкание. Таким образом, V_0^m — наименьшее замкнутое подпространство $L^2(\mathbf{R})$, которое содержит $S_m \cap L^2(\mathbf{R})$. Так как M_m имеет компактный носитель, мы видим, что $\mathcal{B} \subset V_0^m$. В следующем параграфе мы даже покажем, что $\mathcal{B}$ — базис Рисса (или безусловный базис) V_0^m .

Пока мы рассматривали только сплайны с последовательностью узлов $\mathbf{Z}$. В более общем случае мы будем также рассматривать пространства S_m^j сплайнов с последовательностями узлов $2^{-j}\mathbf{Z}$, $j \in \mathbf{Z}$. Так как сплайн-функция с последовательностью узлов $2^{-j_1}\mathbf{Z}$ является также сплайн-функцией с последовательностью узлов $2^{-j_2}\mathbf{Z}$ тогда, когда $j_1 < j_2$, мы имеем (бесконечную) последовательность вложенных друг в друга подпространств

$$\dots \subset S_m^{-1} \subset S_m^0 \subset S_m^1 \subset \dots$$

сплайнов, где $S_m^0 := S_m$. Аналогично определению V_0^m мы введем обозначения V_j^m для $L^2(\mathbf{R})$ -замыкания $S_m^j \cap L^2(\mathbf{R})$. Откуда мы имеем последовательность вложенных

$$\dots \subset V_{-1}^m \subset V_0^m \subset V_1^m \subset \dots \quad (4.1.17)$$

замкнутых сплайн-подпространств $L^2(\mathbf{R})$. Будет ясно, что эта последовательность вложенных подпространств удовлетворяет соотношениям

$$\begin{cases} \text{clos}_{L^2(\mathbf{R})} \left(\bigcup_{j \in \mathbf{Z}} V_j^m \right) = L^2(\mathbf{R}), \\ \bigcap_{j \in \mathbf{Z}} V_j^m = \{0\}. \end{cases} \quad (4.1.18)$$

Кроме того, ясно, что если мы показали, что $\mathcal{B}$ является базисом Рисса V_0^m , то для любого $j \in \mathbf{Z}$ совокупность

$$\{2^{j/2} M_m(2^j x - k) : k \in \mathbf{Z}\} \quad (4.1.19)$$

также является базисом Рисса V_j^m с такими же границами Рисса как, и в случае $\mathcal{B}$.

4.2. В-сплайны и их основные свойства

Вернемся к определению

$$N_m(x) := (N_{m-1} * N_1)(x) = \int_0^1 N_{m-1}(x-t) dt, \quad m \geq 2, \quad (4.2.1)$$

B -сплайна m -го порядка, введенного в (1.5.7), где N_1 — характеристическая функция интервала $[0, 1]$. В определении 4.2 мы положили $M_1 = N_1$; и в дальнейшем мы также увидим, что $M_m = N_m$ для всех $m \geq 2$. Поэтому N_m — базисная сплайн-функция порядка m в $V_0^m \subset S_m$. Хотя определение M_m в (4.1.11) является явным, преимущества определения N_m в (4.2.1) таковы, что многие важные свойства N_m могут быть легко из него выведены. Среди них — семь из приведенных ниже восьми свойств.

Теорема 4.3. B -сплайн m -го порядка N_m обладает следующими свойствами:

(а) Для любой $f \in C$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) N_m(x) dx = \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1 + \cdots + x_m) dx_1 \cdots dx_m \quad (4.2.2)$$

(б) Для любой $g \in C^m$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g^{(m)}(x) N_m(x) dx = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} g(k). \quad (4.2.3)$$

(в) $N_m(x) = M_m(x)$ для всех x .

(г) $\text{supp } N_m = [0, m]$.

(д) $N_m(x) > 0$ для всех $0 < x < m$.

(е) $\sum_{k=-\infty}^{\infty} N_m(x - k) = 1$ для всех x .

(ж) $N'_m(x) = (\Delta N_{m-1})(x) = N_{m-1}(x) - N_{m-1}(x - 1)$.

(з) B -сплайны N_m и N_{m-1} связаны тождеством:

$$N_m(x) = \frac{x}{m-1} N_{m-1}(x) + \frac{m-x}{m-1} N_{m-1}(x-1). \quad (4.2.4)$$

(и) N_m симметричен относительно центра своего носителя, а именно:

$$N_m\left(\frac{m}{2} + x\right) = N_m\left(\frac{m}{2} - x\right), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Доказательство. (а) Утверждение (4.2.2), конечно, справедливо для $m = 1$. Предположим, что оно также справедливо для $m - 1$, тогда из определения N_m в (4.2.1) и индукционно-го предположения мы имеем:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) N_m(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left\{ \int_0^1 N_{m-1}(x-t) dt \right\} dx \\ &= \int_0^1 \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) N_{m-1}(x-t) dx \right\} dt \\ &= \int_0^1 \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(y+t) N_{m-1}(y) dy \right\} dt \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1 + \cdots + x_{m-1} + t) dx_1 \cdots dx_{m-1} dt \\ &= \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1 + \cdots + x_m) dx_1 \cdots dx_m. \end{aligned}$$

(б) Утверждение (4.2.3) следует из (4.2.2), так как в результате прямого интегрирования

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 g^{(m)}(x_1 + \cdots + x_m) dx_1 \cdots dx_m = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} g(k).$$

(в) Зафиксируем $x \in \mathbb{R}$. Выберем

$$g(t) = \frac{(-1)^m}{(m-1)!} (x-t)_+^{m-1},$$

правая часть формулы (4.2.3) совпадает с формулой для $M_m(x)$ в (4.1.12). Так как

$$g^{(m)}(t) = \delta(x-t),$$

где δ — дельта-распределение (см. (2.2.12) и (2.2.14)), левая часть (4.2.3) равна $N_m(x)$. Таким образом, $N_m(x) = M_m(x)$ для любого (фиксированного) $x \in \mathbb{R}$. Конечно, можно вывести (в) и не используя дельта-распределение и формулу (4.2.3), а применяя метод индукции.

Утверждения (г), (д), (е) и (и) можно легко вывести по индукции, используя определение N_m из (4.2.1).

(ж) Снова используя (4.2.1), имеем

$$N'_m(x) = \int_0^1 N'_{m-1}(x-t)dt = -N_{m-1}(x-1) + N_{m-1}(x) = (\Delta N_{m-1})(x).$$

(з) Для доказательства равенства в (з) мы используем определение M_m в (4.1.11). Тем более что в (в) мы уже доказали, что $N_m = M_m$. Идея состоит в представлении x_+^{m-1} как произведения одночлена и усеченной степени, а именно:

$$x_+^{m-1} = x \cdot x_+^{m-2},$$

и в последующем применении «формулы Лейбница» для разностей:

$$(\Delta^n f g)(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\Delta^k f)(x) (\Delta^{n-k} g)(x-k). \quad (4.2.5)$$

Это тождество для разностей может быть легко установлено по индукции. Оно почти такое же, как формула Лейбница для производных. Теперь, если мы положим в (4.2.5) $f(x) = x$ и $g(x) = x_+^{m-2}$ и напомним, что из (4.1.10) $\Delta^k f = 0$ для $k \geq 2$, то

$$\begin{aligned} N_m(x) &= M_m(x) = \frac{1}{(m-1)!} \Delta^m x_+^{m-1} \\ &= \frac{1}{(m-1)!} \{x \Delta^m x_+^{m-2} + m \Delta^{m-1} (x-1)_+^{m-2}\} \\ &= \frac{1}{(m-1)!} \{x [\Delta^{m-1} x_+^{m-2} - \Delta^{m-1} (x-1)_+^{m-2}] + m \Delta^{m-1} (x-1)_+^{m-2}\} \\ &= \frac{x}{m-1} M_{m-1}(x) + \frac{m-x}{m-1} M_{m-1}(x-1) \\ &= \frac{x}{m-1} N_{m-1}(x) + \frac{m-x}{m-1} N_{m-1}(x-1). \end{aligned}$$

Это завершает доказательство теоремы 4.3. □

Далее покажем, что B -сплайн-базис

$$B = \{N_m(x-k) : k \in \mathbf{Z}\}, \quad (4.2.6)$$

тот же самый, что и введенный в (4.1.14), является базисом Рисса (или безусловным базисом) V_0^m в смысле (3.6.7). По теореме 3.24 это эквивалентно доказательству существования нижней и верхней границ A, B в (3.6.8). Из (4.2.1) мы видим, что $\hat{N}_m = (\hat{N}_1)^m$, откуда

$$|\hat{N}_m(\omega)|^2 = \left| \frac{1 - e^{-i\omega}}{i\omega} \right|^{2m}$$

(см. (3.2.16)). Заменяя ω на $2x + 2\pi k$, мы имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{N}_m(2x + 2\pi k)|^2 &= 2^{2m} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^{2m}(x + \pi k)}{(2x + 2\pi k)^{2m}} \quad (4.2.7) \\ &= (\sin^{2m} x) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x + \pi k)^{2m}}. \end{aligned}$$

Напомним из комплексного анализа, что

$$\operatorname{ctg} x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \frac{1}{x + \pi k}, \quad (4.2.8)$$

что сразу же приводит к равенству

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x + \pi k)^{2m}} = -\frac{1}{(2m-1)!} \frac{d^{2m-1}}{dx^{2m-1}} \operatorname{ctg} x. \quad (4.2.9)$$

Поэтому, подставляя (4.2.9) в (4.2.7), мы получаем

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{N}_m(2x + 2\pi k)|^2 = \frac{-\sin^{2m} x}{(2m-1)!} \frac{d^{2m-1}}{dx^{2m-1}} \operatorname{ctg} x. \quad (4.2.10)$$

Пример 4.4. Для В-сплайнов первого и второго порядков N_1 и N_2 из (4.2.10) следует, что

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{N}_1(\omega + 2\pi k)|^2 = 1 \quad (4.2.11)$$

и

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{N}_2(\omega + 2\pi k)|^2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right). \quad (4.2.12)$$

Откуда последовательность $\{N_1(\cdot - k)\}$ ортонормирована (см. теорему 3.23) и

$$\frac{1}{3} \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{N}_2(\omega + 2\pi k)|^2 \leq 1, \quad (4.2.13)$$

где обе границы Рисса, нижняя и верхняя, выбраны наилучшим образом.

Хотя формула (4.2.10) — явная и служит инструментом для нахождения оптимальных границ Рисса, применение алгебры для тригонометрических (синус и косинус) многочленов является сложным при больших значениях порядков сплайнов m . Другой подход состоит в применении теоремы 2.28 к $f(x) = N_m(x)$. Это требует знания значений

$$\int_{-\infty}^{\infty} N_m(y + k) \overline{N_m(y)} dy = N_{2m}(m + k). \quad (4.2.14)$$

Равенство в (4.2.14) — простое следствие определения (4.2.1), в то время как значения N_{2m} в узлах последовательности Z могут быть легко определены рекуррентно с помощью (4.2.4) в теореме 4.3, а именно:

$$\begin{cases} N_2(k) = \delta_{k,1}, & k \in \mathbf{Z} \text{ и} \\ N_{n+1}(k) = \frac{k}{n} N_n(k) + \frac{n-k+1}{n} N_n(k-1), & k = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (4.2.15)$$

Заметим, что $N_{n+1}(k) = 0$ для $k \leq 0$ или $k \geq n+1$. Откуда, применяя (2.5.19) в теореме 2.28, мы имеем:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{N}_m(\omega + 2\pi k)|^2 = \sum_{k=-m+1}^{m-1} N_{2m}(m+k) e^{-ik\omega}. \quad (4.2.16)$$

Применение (д) и (е) из теоремы 4.3 теперь дает

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{N}_m(\omega + 2\pi k)|^2 \leq 1, \quad (4.2.17)$$

и граница Рисса $B = 1$ является здесь наименьшей.

Чтобы определить наибольшую нижнюю границу выражения в (4.2.16), мы рассмотрим так называемые *многочлены Эйлера—Фробениуса*

$$E_{2m-1}(z) := (2m-1)! z^{m-1} \sum_{k=-m+1}^{m-1} N_{2m}(m+k) z^k \quad (4.2.18)$$

порядка $2m-1$ (или степени $2m-2$).

В главе 6 мы покажем, что все $2m-2$ корней $\lambda_1, \dots, \lambda_{2m-2}$ многочлена E_{2m-1} — простые, вещественные и отрицательные; более того, когда они упорядочены в порядке убывания

$$0 > \lambda_1 > \dots > \lambda_{2m-2}, \quad (4.2.19)$$

эти простые корни являются попарно обратными величинами, то есть

$$\lambda_1 \lambda_{2m-2} = \dots = \lambda_{m-1} \lambda_m = 1. \quad (4.2.20)$$

Следовательно, мы имеем

$$A_m := \frac{1}{(2m-1)!} \prod_{k=1}^{m-1} \frac{(1 + \lambda_k)^2}{|\lambda_k|} > 0. \quad (4.2.21)$$

Теперь из (4.2.16) и (4.2.18) можно написать

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{N}_m(\omega + 2\pi k)|^2 &= \frac{1}{(2m-1)!} \prod_{k=1}^{2m-2} |e^{i\omega} - \lambda_k| \\ &= \frac{1}{(2m-1)!} \prod_{k=1}^{m-1} \frac{|1 - \lambda_k e^{i\omega}| |1 - \lambda_k e^{-i\omega}|}{|\lambda_k|} \\ &= \frac{1}{(2m-1)!} \prod_{k=1}^{m-1} \frac{1 - 2\lambda_k \cos \omega + \lambda_k^2}{|\lambda_k|}, \end{aligned}$$

откуда ясно, что

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{N}_m(\omega + 2\pi k)|^2 \geq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{N}_m(\pi + 2\pi k)|^2 = A_m.$$

Таким образом, мы получили следующий результат.

Теорема 4.5. Пусть для любого целого $m \geq 2$ A_m — положительное число, определенное в (4.2.21). Тогда B -сплайн-базис B в (4.2.6) является базисом Рисса V_0^m с границами Рисса $A = A_m$ и $B = 1$. Более того, эти границы — наилучшие.

4.3. Двухмасштабное соотношение и интерполяционный графически-изобразительный алгоритм

Вернемся сначала к первому параграфу этой главы и изучим соотношение между любыми двумя последовательными подпространствами из последовательности вложенных друг в друга замкнутых подпространств $L^2(\mathbf{R}) - \{V_j^m : j \in \mathbf{Z}\}$, как это было рассмотрено в (4.1.17)–(4.1.19). Ввиду того что $M_m = N_m$, мы можем и будем всюду использовать обозначения N_m вместо M_m . Заметим, что следующий результат после простой замены переменных становится тривиальным следствием теоремы 4.5.

Следствие 4.6. Для любой пары целых чисел m и j , где $m \geq 2$, семейство

$$\mathcal{B}_j := \{2^{j/2} N_m(2^j x - k) : k \in \mathbf{Z}\}$$

является базисом Рисса V_j^m с границами Рисса $A = A_m$ и $B = 1$. Более того, эти границы наилучшие.

Заметим, что базис $\mathcal{B}_j$, определенный выше, переходит в $\mathcal{B}$ при $j = 0$, и при построении вычислительных алгоритмов удобно опустить нормировочную константу $2^{j/2}$ в $\mathcal{B}_j$. Это только изменяет границы Рисса на множитель 2^{-j} . Отсюда для любого j , так как $N_m(2^j x) \in V_j^m$ и $V_j^m \in V_{j+1}^m$, мы имеем из следствия 4.6, что

$$N_m(2^j x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_{m,k} N_m(2^{j+1} x - k), \quad (4.3.1)$$

где $\{p_{m,k} : k \in \mathbf{Z}\}$ — некоторая последовательность из ℓ^2 . Теперь, обозначив $2^j x$ через y и взяв преобразование Фурье от обеих частей (4.3.1), мы получаем следующее эквивалентное выражение для (4.3.1):

$$\hat{N}_m(\omega) = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} p_{m,k} e^{-ik\omega/2} \right) \hat{N}_m \left(\frac{\omega}{2} \right). \quad (4.3.2)$$

Эта формула может быть применена для определения последовательности $\{p_{m,k}\}$ в (4.3.1). Действительно, так как

$$\hat{N}_m(\omega) = \left(\frac{1 - e^{-i\omega}}{i\omega} \right)^m$$

(см. (3.2.16)), мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_{m,k} e^{-ik\omega/2} &= \left(\frac{1 - e^{-i\omega}}{i\omega} \right)^m \left(\frac{i\omega/2}{1 - e^{-i\omega/2}} \right)^m \\ &= \left(\frac{1 + e^{-i\omega/2}}{2} \right)^m = 2^{-m} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} e^{-ik\omega/2}, \end{aligned}$$

и это дает

$$p_{m,k} = \begin{cases} 2^{-m+1} \binom{m}{k} & \text{для } 0 \leq k \leq m, \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (4.3.3)$$

Следовательно, точная формулировка (4.3.1) принимает вид

$$N_m(x) = \sum_{k=0}^m 2^{-m+1} \binom{m}{k} N_m(2x - k), \quad (4.3.4)$$

который называется *двухмасштабным соотношением* для B -сплайнов порядка m .

Как уже обсуждалось в § 1.6, это двухмасштабное соотношение для B -сплайнов (и в более общем случае, в (1.6.2), для любой масштабирующей функции ϕ) является одним из двух двухмасштабных соотношений, которые приводят к так называемому алгоритму (вэйвлет-) восстановления, описываемому (1.6.10) и рис. 1.6.2. (Другая формула описывает соотношение между вэйвлетом $\psi(x)$ и $\phi(2x - k)$, $k \in \mathbb{Z}$, как в формуле (1.6.3).) Заметим, что в вэйвлет-разложении (1.6.1), если все вэйвлет-компоненты $g_{N-M}, \dots, g_{N-1}$ функции f_N равны нулю, нам не нужна формула (1.6.3) для записи любой $f_{N-M} \in V_{N-M}$, как для $f_N \in V_N$. Другими словами, «половина» алгоритма восстановления в (1.6.10) может быть использована для выражения любой функции f_{N-M} на $(N-M)$ -м уровне разрешения (с 2^{N-M} пикселями на единицу длины), как и для функции f_N на (высшем) N -м уровне разрешения (с 2^N пикселями на единицу длины). Конечно, $f_{N-M} = f_N$ тождественно, но мы получаем «лучшую картину» той же функции при высоком разрешении.

Теперь мы сосредоточим внимание на сплайнах и объединим эту процедуру с алгоритмом в (4.2.15) для вычисления в узлах значений B -сплайнов с тем, чтобы получить очень эффективный алгоритм изображения графиков любой сплайн-функции на любом желаемом уровне разрешения *точно*. Давайте сначала сформулируем цель этого «интерполяционного графически-изобразительного алгоритма» более четко следующим образом.

Рассмотрим сплайн-функцию

$$f_{j_0}(x) = \sum_n a_\ell^{(j_0)} N_m(2^{j_0} x - \ell) \quad (4.3.5)$$

порядка m с последовательностью узлов $2^{-j_0}\mathbf{Z}$, где j_0 — любое (фиксированное) целое число. Предположим, что $\{a_\ell^{(j_0)}\}$ является *причинной* последовательностью (известных) вещественных чисел, где причинность означает, что $a_\ell^{(j_0)} = 0$ для всех $\ell < \ell_0$. Целью является вычисление *точно всех* значений последовательности

$$f_{j_0} \left(\frac{k}{2^{j_1}} \right), \quad k \in \mathbf{Z}, \quad (4.3.6)$$

для любого заданного целого $j_1 \geq j_0$ в *реальное время*, означающее, что последовательность в (4.3.6) вычисляется для возрастающих значений k так же быстро, как может быть записана последовательность «данных», коэффициентов $\{a_\ell^{(j_0)}\}$, для возрастающих значений ℓ . Заметим, что изображать график $f(x)$ эквивалентно изображению последовательности $f(k/2^{j_1})$, $k \in \mathbf{Z}$ при условии, что (фиксированное) число j_1 достаточно велико. Конечно, величина j_1 ограничена совершенством используемого оборудования.

Для каждого $j \geq j_0$ будем использовать обозначения

$$\begin{cases} f_j(x) = \sum_{\ell} a_\ell^{(j)} N_m(2^j x - \ell), \\ \mathbf{a}^j := \{a_\ell^{(j)}\}, \quad \ell \in \mathbf{Z}. \end{cases} \quad (4.3.7)$$

Применяя двухмасштабное соотношение (4.3.1), мы видим, что тождество $f_{j+1}(x) = f_j(x)$ эквивалентно тождеству

$$\begin{aligned} \sum_{\ell} a_\ell^{(j+1)} N_m(2^{j+1}x - \ell) &= \sum_{\ell} a_\ell^{(j)} N_m(2^j x - \ell) \\ &= \sum_{\ell} a_\ell^{(j)} \sum_k p_{m,k} N_m(2^{j+1}x - 2\ell - k) \\ &= \sum_{\ell} \left\{ \sum_k p_{m,\ell-2k} a_k^{(j)} \right\} N_m(2^{j+1}x - \ell). \end{aligned}$$

Откуда, так как совокупность $N_m(2^{j+1}x - \ell)$, $\ell \in \mathbf{Z}$, является базисом Рисса V_{j+1}^m , тождество $f_{j+1}(x) = f_j(x)$ в точности

описывается формулой

$$a_\ell^{(j+1)} = \sum_k p_{m,\ell-2k} a_k^{(j)}, \quad \ell \in \mathbf{Z}, \quad (4.3.8)$$

где $\mathbf{a}^j = \{a_k^{(j)}\}$ и $\mathbf{a}^{j+1} = \{a_\ell^{(j+1)}\}$ — это последовательности коэффициентов $f_j(x)$ и $f_{j+1}(x)$ в (4.3.7), соответственно. Теперь по последовательности $\mathbf{a}^{j_1} = \{a_k^{(j_1)}\}$ мы по-прежнему должны вычислить значения $f_{j_0}(k/2^{j_1})$, $k \in \mathbf{Z}$. Это возможно в результате свертки последовательности $\mathbf{a}^{j_1}$ с последовательностью $\{N_m(k)\}$, $k \in \mathbf{Z}$. Напомним, что значения $N_m(k)$ могут быть вычислены с помощью алгоритма в (4.2.15). Действительно, для любого $k \in \mathbf{Z}$ мы имеем

$$\begin{aligned} f_{j_0}\left(\frac{k}{2^{j_1}}\right) &= \sum_\ell a_\ell^{(j_1)} N_m\left(2^{j_1} \frac{k}{2^{j_1}} - \ell\right) \\ &= \sum_\ell a_\ell^{(j_1)} N_m(k - \ell) = \sum_\ell w_{m,k-\ell} a_\ell^{j_1}, \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

где

$$w_{m,k} := N_m(k), \quad k \in \mathbf{Z}. \quad (4.3.10)$$

Отметим, что обе формулы (4.3.8) и (4.3.9) используют только формулу *скользящего среднего* (СС), за исключением того, что последовательность $\mathbf{a}^j$ в (4.3.8) нуждается в *разрежающей выборке*. Это означает, что нулевое значение должно быть поставлено между любыми двумя последовательными значениями последовательности $\mathbf{a}^j$. Для большей точности положим

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{a}}^j = \{\tilde{a}_\ell^{(j)}\}, & \ell \in \mathbf{Z} \text{ с} \\ \tilde{a}_{2k}^{(j)} := a_k^{(j)} & \text{и} \\ \tilde{a}_{2k+1}^{(j)} := 0, & k \in \mathbf{Z}. \end{cases} \quad (4.3.11)$$

Тогда формула (4.3.8) становится формулой СС:

$$a_\ell^{(j+1)} = \sum_k p_{m,\ell-k} \tilde{a}_k^{(j)}, \quad \ell \in \mathbf{Z}. \quad (4.3.12)$$

Подведем итог вышеприведенным рассуждениям следующим образом.

Алгоритм 4.7 (Интерполяционный графически-изобразительный алгоритм).

Пусть f_{j_0} — сплайн-функция с причинной последовательностью коэффициентов

$$\mathbf{a}^{j_0} = \{a_\ell^{(j_0)} : \ell = \ell_0, \ell_0 + 1, \dots\},$$

как в формуле (4.3.5). Выберем некоторое $j_1 \geq j_0$. Тогда для $j = j_0, \dots, j_1 - 1$ вычислим

(1°) $\tilde{\mathbf{a}}^j$, используя (4.3.11), и

(2°) $\mathbf{a}^{j+1}$, используя (1°) и (4.3.12).

В завершение вычислим

(3°) $\{f_{j_0}(\frac{k}{2^{j_1}}) : k \in \mathbf{Z}\}$, используя (4.3.9) и (2°) для $j = j_1 - 1$. (Перескакивая (1°) и (2°), если $j_1 = j_0$.)

Этот алгоритм может быть описан следующим схематическим рисунком, где $\uparrow$ означает разрезающую выборку с применением (4.3.11), $\searrow$ означает СС с весовой последовательностью $\{p_{m,k}\}$, и $\rightarrow$ означает СС с весовой последовательностью $\{w_{m,k}\}$. Так как весовые последовательности $\{p_{m,k}\}$ и $\{w_{m,k}\}$ очень простые, симметричные, конечные последовательности с целыми членами, умноженными, соответственно, на 2^{-m+1} и $1/(m-1)!$, то реализация этих алгоритмов на самом деле очень проста.

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{\mathbf{a}}^{j_0} & & \tilde{\mathbf{a}}^{j_0+1} & & \tilde{\mathbf{a}}^{j_1-1} & & \\ \uparrow & \searrow & \uparrow & \searrow \cdots & \uparrow & \searrow & \\ \mathbf{a}^{j_0} & & \mathbf{a}^{j_0+1} & & \mathbf{a}^{j_1-1} & & \mathbf{a}^{j_1} \rightarrow \{f_{j_0}(k/2^{j_1})\} \end{array}$$

Рис. 4.3.1. Интерполяционное графическое изображение.

Пример 4.8. Для графического изображения кривой, задаваемой кубическим сплайном

$$f_0(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell N_4(x - \ell) \quad (4.3.13)$$

на уровне разрешения в 1024 пикселей на единицу длины без каких-либо ошибок, мы используем $m = 4$, $j_0 = 0$, $a_\ell^{(0)} = a_\ell$, $j_1 = 10$ (так как $2^{10} = 1024$) в алгоритме 4.7. Кроме того, последовательности весов $\{p_{4,k}\}$ и $\{w_{4,k}\}$ могут быть легко вычислены по формулам (4.3.3) и (4.2.15). Отличные от нуля значения членов этих последовательностей даются формулами:

$$\{p_{4,0}, \dots, p_{4,4}\} = \left\{ \frac{1}{8}, \frac{4}{8}, \frac{6}{8}, \frac{4}{8}, \frac{1}{8} \right\} \quad (4.3.14)$$

и

$$\{w_{4,1}, w_{4,2}, w_{4,3}\} = \left\{ \frac{1}{6}, \frac{4}{6}, \frac{1}{6} \right\}. \quad (4.3.15)$$

(Заметим, что сумма членов последовательности $\{p_{4,k}\}$ равна 2 вместо 1, так как к последовательности данных $\{a_\ell^0\}$ должна быть применена разрежающая выборка. Конечно, сумма членов другой весовой последовательности $\{w_{4,k}\}$ равна 1.) Применяя (4.3.12) и (4.3.9) в (2°) и (3°) в алгоритме 4.7, общие знаменатели 8 и 6 в (4.3.14) и (4.3.15), соответственно, следует опустить для того, чтобы выполнять операции над целыми числами. Конечно, при выходе из программы результат должен быть разделен на

$$8^{j_1-j_0} \times 6 = 8^{10} \times 6 = 3 \times 2^{31}.$$

Симметрия последовательностей (4.3.14) и (4.3.15) должна быть также использована при реализации алгоритма, чтобы сэкономить время работы процессора.

4.4. Представления с помощью B -сети и вычисление сплайнов

Интерполяционный графически-изобразительный алгоритм, описанный в предыдущем параграфе, может быть применен также для точного определения всех полиномиальных частей сплайн-функции. Для этого требуется одна дополнительная

операция типа обращения матриц. В этом параграфе мы вводим более прямую схему для вычисления этих аналитических выражений, используя представление для многочленов Бернштейна. Значения коэффициентов Бернштейна (больше известных как « B -сети») не меняются от положения и длины интервала, на котором определен многочлен. Это очень важная особенность при работе со сплайн-функциями, так как часто необходимо сдвигать ряды B -сплайнов и масштабировать их для получения различных уровней разрешения.

Пусть n — любое неотрицательное целое число. Заметим сначала, что совокупность многочленов

$$\phi_k^n := \binom{n}{k} (1-x)^{n-k} x^k, \quad 0 \leq k \leq n, \quad (4.4.1)$$

является базисом пространства многочленов π_n . Этот базис используется для определения n -й степени полиномиального оператора Бернштейна:

$$(B_n f)(x) := \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \phi_k^n(x). \quad (4.4.2)$$

Если f — непрерывная функция на интервале $[0, 1]$, то ясно, что $B_n f$ интерполирует f в конечных точках интервала, а именно:

$$\begin{cases} (B_n f)(0) = f(0), \\ (B_n f)(1) = f(1). \end{cases} \quad (4.4.3)$$

Однако, в общем случае $B_n f$ не интерполирует f во внутренних точках $\frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}$ интервала. Вместо этого график полиномиальной кривой $y = (B_n f)(x)$ лежит на выпуклой оболочке множества

$$\left\{ \left(\frac{k}{n}, f\left(\frac{k}{n}\right) \right) : k = 0, \dots, n \right\}. \quad (4.4.4)$$

Более точно, это множество «контролирует» график $y = (B_n f)(x)$. Мы не намерены углубляться в детали в этом на-

правления, но хотим только указать на то, что «очертание» графика $y = (B_n f)(x)$ управляется «контролирующей сетью» (4.4.4), которая в свою очередь управляется графиком $y = f(x)$. В частности, мы имеем:

- (а) если $f \geq 0$ на $[0, 1]$, то $B_n f \geq 0$ на $[0, 1]$;
- (б) если $f \uparrow$ на $[0, 1]$, то $B_n f \uparrow$ на $[0, 1]$ и
- (в) если f выгнута вверх на $[0, 1]$, то $B_n f$ выгнута вверх на $[0, 1]$.

Две главные причины, по которым имеют место (а)–(в), состоят в том, что

(1°) $B_n f$ — линейный положительный оператор, который сохраняет все линейные многочлены в том смысле, что

$$B_n f = f, \quad f \in \pi_1 \quad \text{и}$$

(2°) «Декартово правило знаков» применяется к одночленному базису $\{1, x, \dots, x^n\}$ на интервале $(0, \infty)$.

В общем случае полиномиальный оператор Бернштейна (4.4.2) может быть заменен некоторым многочленом Бернштейна

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k^n \phi_k^n(x) \quad (4.4.5)$$

с последовательностью коэффициентов

$$\mathbf{a}^n := \{a_k^n : k = 0, \dots, n\} \quad (4.4.6)$$

без потери каких-либо хороших геометрических свойств $B_n f$, просто рассмотрением f как кусочно-линейного (или сплайна второго порядка) интерполянта

$$f_{\mathbf{a}^n}(x) = \sum_{k=0}^n a_k^n N_2(nx - k + 1) \quad (4.4.7)$$

исходных данных в (4.4.6) в точках $\{k/n\}$. График $y = f_{\mathbf{a}^n}(x)$ (или, для простоты, сама последовательность коэффициентов

$\mathbf{a}^n = \{a_n^k\}$) называется *представлением B -сетью* многочлена Бернштейна P_n в (4.4.5).

В дальнейшем мы будем использовать операции

$$\begin{cases} \partial a_k^n := a_{k+1}^n - a_k^n & \text{и} \\ \sigma a_k^n := \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{k-1} a_j^n \end{cases} \quad (4.4.8)$$

для дифференцирования и интегрирования многочленов Бернштейна. Здесь и всюду в дальнейшем пустая сумма всегда означает нуль.

Теорема 4.9. Пусть для каждого $n \in \mathbf{Z}$, $n \geq 0$ P_n — многочлен Бернштейна n -й степени с B -сетью $\mathbf{a}^n$, как это определено в (4.4.5) и (4.4.6). Тогда производная P_n дается формулой

$$P'_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (n \partial a_k^n) \phi_k^{n-1}(x), \quad (4.4.9)$$

и если $P'_{n+1}(x) = P_n(x)$, то интеграл от P_n дается формулой

$$\int_0^x P_n(t) dt = \sum_{k=0}^{n+1} (a_0^{n+1} + \sigma a_k^n) \phi_k^{n+1}(x) - a_0^{n+1}. \quad (4.4.10)$$

Доказательство. Используя обозначения

$$\phi_{-1}^{n-1} := 0 \quad \text{и} \quad \phi_n^{n-1} := 0,$$

мы имеем из (4.4.1)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \phi_k^n(x) &= \binom{n}{k} \{-(n-k)x + k(1-x)\} (1-x)^{n-k-1} x^{k-1} \\ &= n \left\{ -\binom{n-1}{k} x + \binom{n-1}{k-1} (1-x) \right\} (1-x)^{n-k-1} x^{k-1} \\ &= n \{ \phi_{k-1}^{n-1}(x) - \phi_k^{n-1}(x) \} \end{aligned}$$

для $k = 0, \dots, n$. Откуда

$$\begin{aligned} P'_n(x) &= \sum_{k=0}^n n a_k^n \{ \phi_{k-1}^{n-1}(x) - \phi_k^{n-1}(x) \} \\ &= \sum_{k=0}^n n (a_{k+1}^n - a_k^n) \phi_k^{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (n \partial a_k^n) \phi_k^{n-1}(x). \end{aligned}$$

Это доказывает (4.4.9). Применяя эту формулу к P_{n+1} и используя предположение $P'_{n+1} = P_n$, мы имеем

$$a_0^{n+1} + \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{k-1} a_j^n = a_k^{n+1}.$$

Отсюда утверждение (4.4.10) следует из интегральной формулы

$$\int_0^x P_n(t) dt = P_{n+1}(x) - P_{n+1}(0) = P_{n+1}(x) - a_0^{n+1}, \quad (4.4.11)$$

что и завершает доказательство теоремы. $\square$

Мы обратимся теперь к изучению представления B -сетью B -сплайна m -го порядка N_m . Напомним, что N_m состоит из m нетривиальных кусочных многочленов степени $m-1$, которые мы определим формулой

$$P_{m-1,k} := N_m |_{[k-1,k]}, \quad k = 1, \dots, m. \quad (4.4.12)$$

Заметим также, что сужением $N_m(x-1)$ на тот же интервал $[k-1, k)$ является многочлен $P_{m-1,k-1}(x)$. Итак, если мы предположим, что $\mathbf{a}^{m-1}(k) = \{a_\ell^{m-1}(k)\}, 0 \leq \ell \leq m-1$ обозначает B -сеть $P_{m-1,k}$, то сужение $N_m(x) - N_m(x-1)$ на интервал $[k-1, k)$ дается многочленом Бернштейна

$$P_{m-1,k}(x) - P_{m-1,k-1}(x) = \sum_{\ell=0}^{m-1} \{a_\ell^{m-1}(k) - a_\ell^{m-1}(k-1)\} \phi_\ell^{m-1}(x-k+1). \quad (4.4.13)$$

Поэтому, применяя тождество в (ж) теоремы 4.3 или эквивалентное ему

$$P'_{m,k}(x) = P_{m-1,k}(x) - P_{m-1,k-1}(x), \quad x \in [k-1, k), \quad (4.4.14)$$

мы имеем

$$\sum_{\ell=0}^{m-1} \{a_{\ell}^{m-1}(k) - a_{\ell}^{m-1}(k-1)\} \phi_{\ell}^{m-1}(x-k+1) = \frac{d}{dx} \left\{ \sum_{\ell=0}^m a_{\ell}^m(k) \phi_{\ell}^m(x-k+1) \right\}.$$

Теперь, если мы проинтегрируем обе части тождества по интервалу $[0, x]$, применим (4.4.11) и (4.4.10), то мы получим следующее соотношение между B -сетями N_m и N_{m+1} , а именно:

$$\begin{aligned} a_{\ell}^m(k) &= a_0^m(k) + \sigma \{a_{\ell}^{m-1}(k) - a_{\ell}^{m-1}(k-1)\} \quad (4.4.15) \\ &= a_0^m(k) + \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{\ell-1} \{a_j^{m-1}(k) - a_j^{m-1}(k-1)\}, \end{aligned}$$

$\ell = 0, \dots, m$. Для $m \geq 2$, так как N_m непрерывна, мы даже имеем $a_0^m(k) = P_{m,k}(k-1) = P_{m,k-1}(k-1) = a_0^m(k-1)$. Таким образом, мы вывели следующую схему вычисления B -сетей для всех кусочных многочленов N_m для любого целого $m \geq 2$.

Алгоритм 4.10. (Алгоритм построения B -сети для B -сплайна.)

Пусть $m \geq 2$ — некоторое целое число и пусть

$$P_{m-1,k}(x) = N_m|_{[k-1,k)}(x) = \sum_{\ell=0}^{m-1} a_{\ell}^{m-1}(k) \phi_{\ell}^{m-1}(x-k+1), \quad (4.4.16)$$

$k = 1, \dots, m$. Положим также

$$a_j^{m-1}(0) = 0 \quad \text{и} \quad a_j^{m-1}(m+1) = 0, \quad j = 0, \dots, m-1 \quad (4.4.17)$$

и рассмотрим начальные условия

$$a_0^1(1) = 0, \quad a_1^1(1) = 1 = a_0^1(2), \quad a_1^1(2) = 0. \quad (4.4.18)$$

Вычислим (1°) и (2°), приведенные ниже, используя (4.4.17) и (4.4.18) для $m = 2$, и затем повторим тот же процесс, используя (4.4.17) и предыдущий результат для $m = 3, 4, \dots$, где

$$(1^\circ) \quad b_j^{m-1}(k) := a_j^{m-1}(k) - a_j^{m-1}(k-1)$$

для $j = 0, \dots, m-1$ и $k = 1, \dots, m+1$ и

$$(2^\circ) \quad a_\ell^m(k) = a_m^m(k-1) + \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{\ell-1} b_j^{m-1}(k)$$

для $\ell = 0, \dots, m$ и $k = 1, \dots, m+1$.

Схематический рисунок для алгоритма 4.10 изображен на рис. 4.4.1, где условие (4.4.17) используется на каждом шаге для вычисления значений $b_j^\ell(k)$.

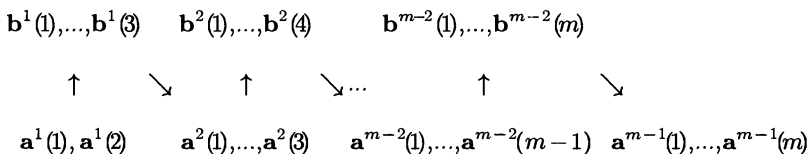


Рис. 4.4.1. Вычисление B -сетей для N_m .

Пример 4.11. B -сети для квадратичных ($m = 3$), кубических ($m = 4$), четвертого порядка ($m = 5$) B -сплайнов даются ниже.

(а) Для $m = 3$, $\mathbf{a}^2(1), \dots, \mathbf{a}^2(3)$

$$= \left\{ 0, 0, \frac{1}{2} \right\}, \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{2} \right\}, \left\{ \frac{1}{2}, 0, 0 \right\}$$

(б) Для $m = 4$, $\mathbf{a}^3(1), \dots, \mathbf{a}^3(4)$

$$= \left\{ 0, 0, 0, \frac{1}{6} \right\}, \left\{ \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{4}{6}, \frac{4}{6} \right\}, \left\{ \frac{4}{6}, \frac{4}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6} \right\}, \left\{ \frac{1}{6}, 0, 0, 0 \right\}$$

$$\begin{aligned}
& \text{(в) Для } m = 5, \mathbf{a}^4(1), \dots, \mathbf{a}^4(5) \\
& = \left\{ 0, 0, 0, 0, \frac{1}{24} \right\}, \left\{ \frac{1}{24}, \frac{2}{24}, \frac{4}{24}, \frac{8}{24}, \frac{11}{24} \right\}, \left\{ \frac{11}{24}, \frac{14}{24}, \frac{16}{24}, \frac{14}{24}, \frac{11}{24} \right\}, \\
& \quad \left\{ \frac{11}{24}, \frac{8}{24}, \frac{4}{24}, \frac{2}{24}, \frac{1}{24} \right\}, \left\{ \frac{1}{24}, 0, 0, 0, 0 \right\}.
\end{aligned}$$

Если известны B -сети для N_m , то легко определить B -сети для любой сплайн-функции f_j , как это показано в (4.3.7). В результате замены переменных мы можем сосредоточить внимание на сплайн-функциях

$$f_0(x) = \sum_j c_j N_m(x - j) \quad (4.4.19)$$

с последовательностью узлов $\mathbf{Z}$. Пусть $k \in \mathbf{Z}$ и рассмотрим сужение

$$f_0|_{[k-1, k)}(x) =: \sum_{\ell=0}^{m-1} d_\ell(k) \phi_\ell^{m-1}(x - k + 1) \quad (4.4.20)$$

функции f_0 на интервал $[k-1, k)$. Применяя (4.4.16) и (4.4.19), мы также имеем

$$\begin{aligned}
f_0|_{[k-1, k)}(x) &= \sum_j c_j N_m(\cdot - j)|_{[k-1, k)}(x) \\
&= \sum_j c_j P_{m-1, k-j}|_{[k-1, k)}(x) \\
&= \sum_j c_j \sum_\ell a_\ell^{m-1}(k-j) \phi_\ell^{m-1}(x - k + 1).
\end{aligned} \quad (4.4.21)$$

Поэтому приравнивание (4.4.20) и (4.4.21) дает

$$d_\ell(k) = \sum_{j=k-m}^k a_\ell^{m-1}(k-j) c_j, \quad \ell = 0, \dots, m-1 \text{ и } k \in \mathbf{Z}, \quad (4.4.22)$$

так как $a_\ell^{m-1}(k-j) = 0$ для $j > k$ или $j < k - m$. Подведем итог предыдущим рассуждениям, констатируя, что для любого фиксированного $k \in \mathbf{Z}$ и $\ell = 0, \dots, m-1$ формула скользящего среднего (СС) в (4.4.22) с последовательностью весов

$$\{a_\ell^{m-1}(j) : j = 0, \dots, m\}$$

(значения которых могут быть вычислены в результате применения алгоритма 4.10 и даются в примере 4.11 для $m = 3, 4, 5$) может быть использована для вычисления B -сети

$$\mathbf{d}(k) = \{d_0(k), \dots, d_{m-1}(k)\}$$

при сужении на интервал $[k-1, k]$ сплайн-ряда f_0 с последовательностью коэффициентов $\{c_j\}$.

4.5. Построение сплайн-аппроксимационных формул

Мы начнем, выписав полезную формулу для преобразования Фурье, которая может быть легко проверена путем взятия j -й производной от обеих частей формулы (2.1.6), а именно:

$$(\mathcal{F}[t^j f(t)])(\omega) = i^j D^j \hat{f}(\omega), \quad j = 0, 1, \dots, \quad (4.5.1)$$

где использовано обозначение

$$D^j g(x) := g^{(j)}(x). \quad (4.5.2)$$

Применение этой формулы к одночлену, умноженному на B -сплайн m -го порядка N_m и на сдвиг его отражения N_m^- на некоторое $x \in \mathbf{R}$, дает

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} [(x-t)^j N_m(t)] dt = (x-iD)^j \hat{N}_m(\omega) \quad (4.5.3)$$

и

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} [t^j N_m(x-t)] dt \\
&= e^{-ix\omega} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} [(x-t)^j N_m(t)] dt \\
&= e^{-ix\omega} ((x-iD)^j \hat{N}_m)(-\omega).
\end{aligned} \tag{4.5.4}$$

С другой стороны, из формулы

$$\hat{N}_m(\omega) = \left(\frac{1 - e^{-i\omega}}{i\omega} \right)^m$$

ясно, что $\hat{N}_m$ удовлетворяет равенствам

$$\begin{cases} \hat{N}_m(0) = 1, \\ (D^j \hat{N}_m)(2\pi k) = 0, \quad j = 0, \dots, m-1, \quad 0 \neq k \in \mathbf{Z}. \end{cases} \tag{4.5.5}$$

Так как (4.5.3) и (4.5.4) совпадают друг с другом при $\omega = 0$, применение (4.5.5) к этим двум формулам дает:

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi kt} [(x-t)^j N_m(t)] dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi kt} [t^j N_m(x-t)] dt, \quad 0 \leq j \leq m-1, k \in \mathbf{Z} \text{ и } x \in R.
\end{aligned} \tag{4.5.6}$$

Как следствие (4.5.6) нижеприведенный результат может быть легко выведен с помощью варианта формулы суммирования Пуассона (2.5.11).

Теорема 4.12. Пусть $m \geq 1$ — любое целое число. Тогда

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} p(k) N_m(x-k) = \sum_{k=0}^{m-1} N_m(k) p(x-k), \quad p \in \pi_{m-1}. \tag{4.5.7}$$

Тождество в (4.5.7) говорит, что если последовательность коэффициентов $\{c_k\}$ ряда B -сплайнов порядка m является *полиномиальной последовательностью* степени $m - 1$ в том смысле, что $c_k = p(k)$ для некоторого $p \in \pi_{m-1}$, то сплайн-функция сама является многочленом из π_{m-1} . Мы замечаем, что нижнее значение индекса в правой части (4.5.7) может быть заменено на 1 для $m \geq 2$.

Отвлечемся на некоторое время от этих рассуждений и рассмотрим следующую проблему «сплайн-интерполяции», использующей «центрированные» B -сплайны $N_m(x + \frac{m}{2})$, а именно: для любой «допустимой» последовательности данных $\{f_j\}$ найдем $\{c_k\}$ — решения уравнений

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k N_m \left(x + \frac{m}{2} - k \right) \Big|_{x=j} = f_j, \quad j \in \mathbf{Z}. \quad (4.5.8)$$

Здесь понятие допустимости $\{f_j\}$ означает, что она может иметь не более чем полиномиальный рост. Используя *символьное* обозначение

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{N}_m(z) := \sum_k N_m \left(k + \frac{m}{2} \right) z^k, \\ \tilde{C}(z) := \sum_k c_k z^k, \\ \tilde{F}(z) := \sum_k f_k z^k, \end{array} \right. \quad (4.5.9)$$

мы можем записать (4.5.8), по крайней мере формально, как

$$\tilde{C} \tilde{N}_m = \tilde{F}. \quad (4.5.10)$$

Заметим, что $\tilde{N}_m$ — симметричный многочлен Лорана. Также заметим, что, как следствие теоремы 4.3 (е), многочлен по степеням косинусов

$$D(\omega) := \tilde{D}(z) := 1 - \tilde{N}_m(z), \quad z = e^{-i\omega}, \quad (4.5.11)$$

неотрицателен для всех ω . Введение $\tilde{D}$ позволяет нам переписать (4.5.10) как

$$\tilde{C} = \frac{1}{1 - \tilde{D}} \tilde{F}. \quad (4.5.12)$$

Итак, по крайней мере формально, мы имеем

$$\tilde{C} = (1 + \tilde{D} + \tilde{D}^2 + \dots) \tilde{F}. \quad (4.5.13)$$

(Мы заметим здесь без доказательства, что так как мы имеем $0 \leq D(\omega) < 1$, то «ряд Неймана» в (4.5.13) действительно сходится. Более подробно мы обсудим это в § 4.6.) Так или иначе, формальное выражение в (4.5.13) побуждает нас рассмотреть конечные последовательности $\Lambda_k = \{\lambda_j^{(k)}\}$, определенные формулой:

$$\tilde{\Lambda}_k(z) := \sum_j \lambda_j^{(k)} z^j := 1 + \tilde{D} + \dots + \tilde{D}^k. \quad (4.5.14)$$

Каждая из этих последовательностей по очереди определяет оператор свертки на последовательности данных $\{f_j\}$, а именно:

$$(\Lambda_k * \{f_j\})(\ell) := \sum_j \lambda_{\ell-j}^{(k)} f_j, \quad (4.5.15)$$

символ которого равняется $\tilde{\Lambda}_k \tilde{F}$.

Теперь предположим, что последовательность данных $\{f_j\}$ получена в результате измерения некоторой непрерывной функции f ; так что $f_j = f(j)$. Тогда, чтобы упростить обозначение в (4.5.15), удобнее записать

$$(\Lambda_k f)(\ell) := (\Lambda_k * \{f(j)\})(\ell) = \sum_j \lambda_{\ell-j}^{(k)} f(j). \quad (4.5.16)$$

Эта последовательность определяет линейный сплайн-оператор

$$(Q_k f)(x) := \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} (\Lambda_k f)(\ell) N_m \left(x + \frac{m}{2} - \ell \right), \quad f \in C, \quad (4.5.17)$$

который отображает $C = C(\mathbf{R})$ на пространство сплайнов S_m . Мы должны обратить особое внимание на то, что так как $\Lambda_k = \{\lambda_j^{(k)}\}$ — конечная последовательность, то каждый $(\Lambda_k f)(\ell)$ зависит только от значений $f(j)$ в окрестности $j = \ell$, и эта окрестность не зависит от ℓ . Другими словами, Q_k — *ограниченный, линейный, локальный сплайн-оператор*, определенный на C . Важность Q_k состоит в том, что он сохраняет все многочлены в π_{m-1} для любого достаточно большого k . Точнее, мы имеем следующий результат.

Теорема 4.13. *Пусть $m \geq 1$ — любое целое число. Тогда для любого $k > \frac{m-3}{2}$ и линейного оператора Q_k , определенного в (4.5.17), справедливо равенство*

$$(Q_k p)(x) = p(x), \quad p \in \pi_{m-1}. \quad (4.5.18)$$

Доказательство. Пусть $p \in \pi_{m-1}$. Так как $\{\lambda_j^{(k)}\}$ — конечная последовательность, $\Lambda_k p$ — полиномиальная последовательность степени $m-1$. Более точно, $(\Lambda_k p)(\ell) = q(\ell)$, где q — многочлен

$$q(x) = \sum_j \lambda_j^{(k)} p(x-j).$$

Кроме того, для каждого $j \in \mathbf{Z}$, мы имеем

$$(Q_k p)(j) := \sum_{\ell} (\Lambda_k p)(\ell) N_m \left(j - \ell + \frac{m}{2} \right); \quad (4.5.19)$$

в результате использования символьных обозначений из (4.5.14) и (4.5.11) следует, что

$$\begin{aligned} \widetilde{(Q_k p)} &= \widetilde{(\Lambda_k p)} \tilde{N}_m \\ &= (1 + \tilde{D} + \cdots + \tilde{D}^k) \tilde{P} \tilde{N}_m \\ &= (1 + \tilde{D} + \cdots + \tilde{D}^k) \tilde{N}_m \tilde{P} \\ &= (1 + \tilde{D} + \cdots + \tilde{D}^k) (1 - \tilde{D}) \tilde{P} \\ &= (1 - \tilde{D}^{k+1}) \tilde{P}, \end{aligned} \quad (4.5.20)$$

где $\tilde{P}$ — символ $\{p(j)\}$. Теперь напомним из (4.5.11) и (4.5.9), что $\tilde{D}$ есть символ последовательности $\{d_j\}$, где

$$d_j = \delta_{j,0} - N_m \left(\frac{m}{2} - j \right), \quad j \in \mathbf{Z}, \quad (4.5.21)$$

и $\tilde{D}^{k+1}$ есть символ $(k+1)$ -кратной свертки $\{d_j\}$. Так как $N_m \left(\frac{m}{2} + \ell \right) = N_m \left(\frac{m}{2} - \ell \right)$ для всех $\ell \in \mathbf{Z}$, мы имеем

$$\begin{aligned} (\{d_j\} * \{p(j)\})(\ell) &= \sum_j d_{\ell-j} p(j) \\ &= \left(1 - N_m \left(\frac{m}{2} \right) \right) p(\ell) - N_m \left(\frac{m}{2} - 1 \right) (p(\ell+1) + p(\ell-1)) \\ &\quad - \dots - N_m \left(\frac{m}{2} - \left[\frac{m}{2} \right] \right) \left(p \left(\ell + \left[\frac{m}{2} \right] \right) + p \left(\ell - \left[\frac{m}{2} \right] \right) \right) \\ &= - \sum_{j=1}^{[m/2]} N_m \left(\frac{m}{2} - j \right) [p(\ell+j) - 2p(\ell) + p(\ell-j)], \end{aligned} \quad (4.5.22)$$

где $[x]$ обозначает наибольшее целое, не превосходящее x , и используется свойство $\sum N_m \left(\frac{m}{2} + j \right) = 1$. Важность формулы (4.5.22) состоит в том, что свертка $\{d_j\}$ с $\{p(j)\}$ записывается как (конечная) линейная комбинация центральных конечных разностей второго порядка $p(j)$. Следовательно, $\tilde{D}^{k+1} \tilde{P}$ — символ (конечной) линейной комбинации разностей $2(k+1)$ -го порядка $\{p(j)\}$, таким образом, для любого $p \in \pi_{m-1}$, мы имеем

$$\tilde{D}^{k+1} \tilde{P} = 0, \quad k > \frac{m-3}{2}. \quad (4.5.23)$$

Подставив (4.5.23) в (4.5.20), мы получим

$$(Q_k p)(\ell) = p(\ell), \quad \ell \in \mathbf{Z}, \quad k > \frac{m-3}{2}, \quad p \in \pi_{m-1}. \quad (4.5.24)$$

Следовательно, так как $\Lambda_k p$ в (4.5.19) является полиномиальной последовательностью степени $m-1$, из теоремы 4.12

следует, что $(Q_k p)(x)$ является многочленом из π_{m-1} . Отсюда (4.5.18) сразу же следует из (4.5.24). $\square$

Пример 4.14. Для $m = 4$ можно взять $k = 1$. Тогда линейный локальный кубический сплайн-оператор Q_1 дается формулой

$$(Q_1 f)(x) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \frac{1}{6} (-f(\ell+1) + 8f(\ell) - f(\ell-1)) N_4(x+2-\ell). \quad (4.5.25)$$

По теореме 4.13 мы имеем

$$(Q_1 p)(x) = p(x), \quad p(x) = 1, x, x^2, x^3.$$

Доказательство. Из (4.5.14) и (4.5.11) следует, что $\tilde{\Lambda}_1 = 2 - \tilde{N}_4$, таким образом

$$\lambda_j^{(1)} = 2\delta_{j,0} - N_4(2+j).$$

Так как $N_4(2) = \frac{2}{3}$, $N_4(1) = N_4(3) = \frac{1}{6}$ и $N_4(\ell) = 0$ для всех других целых ℓ , мы имеем из (4.5.16)

$$(\Lambda_1 f)(\ell) = \sum_j \lambda_{\ell-j}^{(1)} f(j) = -\frac{1}{6} f(\ell+1) + \left(2 - \frac{2}{3}\right) f(\ell) - \frac{1}{6} f(\ell-1).$$

Это дает (4.5.25). $\square$

Операторы Q_k называются «квази-интерполяционными» операторами. В более общем случае мы будем применять нижеприведенное определение. Повсюду в последующих рассуждениях будет рассматриваться пространство

$$C_b(\mathbf{R}) = \{f \in C(\mathbf{R}) : \sup_{-\infty < x < \infty} |f(x)| < \infty\}. \quad (4.5.26)$$

Определение 4.15. *Ограниченный линейный оператор Q , который отображает $C_b(\mathbf{R})$ в сплайн-пространство S_m , называется квази-интерполяционным оператором, если, с одной стороны, он сохраняет все π_{m-1} в том смысле, что $(Qp)(x) = p(x)$ для всех $p \in \pi_{m-1}$ и, с другой стороны, он локален в том смысле, что существует такое компактное множество J , что для любых $f \in C$ и $x \in \mathbf{R}$ $(Qf)(x)$ зависит только от $f(y)$, где y принадлежит*

$$J + x := \{y + x : y \in J\}. \quad (4.5.27)$$

Замечание. В вышеприведенном определении, где Q является линейным ограниченным оператором на $C_b(\mathbf{R})$, подразумевается, что рассматриваются только данные — значения функций. При работе с данными, состоящими из значений некоторых производных, мы должны рассматривать ограниченный линейный оператор Q в соответствующем подклассе гладких функций, таком, как некоторое «пространство Соболева».

В теореме 4.13 мы имели дело с последовательностью квази-интерполяционных операторов Q_k , локальные носители которых J увеличиваются с ростом k . Мы укажем, не останавливаясь на деталях, что $\{Q_k\}$ действительно сходится к сплайн-интерполяционному оператору Q_∞ , который определяется единственным образом интерполяционным свойством:

$$(Q_\infty f - f)(\ell) = 0, \quad \ell \in \mathbf{Z}, \quad (4.5.28)$$

для любой $f \in C$ (см. рассуждения в следующем параграфе о базисной сплайн-интерполяции). Смысл изучения квази-интерполяционных операторов состоит в том, что они приводят к простым и вычислительно эффективным схемам построения базисных сплайн-приближений с наивысшим порядком аппроксимации, а именно: достигается порядок m , когда используются сплайны m -го порядка. Сверх того, локальная структура квази-интерполяционных операторов делает

их удобными для использования в режиме реального времени (или «он лайн»).

Чтобы увидеть, как используется квази-интерполяционный оператор для получения оптимального порядка аппроксимации, мы просто пересчитаем B -сплайны с «нулевого уровня разрешения» (т.е. $x = k$, $k \in \mathbf{Z}$) на « j -й уровень разрешения» (т.е. $x = k/2^j$, $k \in \mathbf{Z}$). В пространстве $L^2(\mathbf{R})$ это означает, что мы обрабатываем дискретные данные в сплайн-пространстве V_j^m с высоким разрешением, где период выборки может быть таким же малым, как $h = 2^{-j}$. В общем случае мы можем рассматривать любой малый масштабный параметр $h > 0$ и измерять порядок аппроксимации как m -ю степень h , т.е. $O(h^m)$; это означает, что погрешность приближения ограничена константой, умноженной на h^m при $h \rightarrow 0^+$, когда данные выборки представляют достаточно гладкую функцию. Будем использовать обозначение

$$(s_h f)(x) := f\left(\frac{1}{h}x\right) \quad (4.5.29)$$

для описания процесса масштабирования. Тогда любой квази-интерполяционный оператор Q , как описано в определении 4.15, порождает аппроксимационную формулу, состоящую из масштабирования и квази-интерполяции, именно:

$$Q^h := s_h \circ Q \circ s_{h^{-1}}. \quad (4.5.30)$$

Теорема 4.16. *Предположим, что Q — квази-интерполяционный оператор из $C_b(\mathbf{R})$ в S_m , K — некоторое компактное множество в $\mathbf{R}$ и Ω — любое открытое множество, содержащее K . Тогда для любой $f \in C_b(\mathbf{R}) \cap \mathbf{C}^m(\Omega)$ существует положительная константа C , зависящая только от f и K , такая, что*

$$\max_{x \in K} |(Q^h f - f)(x)| \leq Ch^m \quad (4.5.31)$$

для всех достаточно малых $h > 0$.

Доказательство. Из определения Q легко видеть, что $Q^h p = p$ для всех $p \in \pi_{m-1}$ и $\|Q^h\| = \|Q\|$, $h > 0$. Пусть

$$\rho := m + \max_{x \in J} |x|$$

и предположим, что

$$\max_{x \in K} |(Q^h f - f)(x)| = |(Q^h f - f)(x_0)|, \quad x_0 \in K,$$

так что

$$\max_{x \in K} |(Q^h f - f)(x)| = \max_{|x - x_0| \leq h\rho} |(Q^h f - f)(x)|.$$

Тогда, ввиду локального характера Q и N_m , мы имеем

$$\begin{aligned} \max_{x \in K} |(Q^h f - f)(x)| &= \max_{|x - x_0| \leq h\rho} |(Q^h(f - p) + (p - f))(x)| \\ &\leq \max_{|x - x_0| \leq h\rho} |f(x) - p(x)|(1 + \|Q\|), \end{aligned}$$

где p — некоторый многочлен из π_{m-1} . Заметив, что $f \in C^m(\Omega)$ и Ω — открытое множество, содержащее $x_0 \in K$, и выбирая многочлен Тейлора степени $m - 1$ для f в точке x_0 в качестве многочлена p в вышеприведенной оценке, мы получим (4.5.31) с

$$C = \frac{\rho^m}{m!} \sup_{x \in \Omega^0} |f^{(m)}(x)|,$$

где Ω^0 — некоторое открытое множество, содержащее K такое, что замыкание Ω^0 лежит в Ω . $\square$

Чтобы дать более общую схему построения квази-интерполяционной формулы, вернемся к теореме 4.13, где Q_k , определенное в (4.5.17), дается сверткой конечной последовательности $\Lambda_k = \{\lambda_j^k\}$ с последовательностью данных $\{f_j\}$. Пусть k фиксировано, и рассмотрим линейный ограниченный функционал λ^* , определенный на C формулой

$$\lambda^* f := (\Lambda_k f)(0) = \sum_j \lambda_j^{(k)} f(-j).$$

Для любого фиксированного $\ell \in \mathbf{Z}$, если $f(\cdot + \ell)$ рассматривается как функция переменной, представленной в виде точки, ясно, что

$$\lambda^* f(\cdot + \ell) = (\Lambda_k f)(\ell) = \sum_j \lambda_j^{(k)} f(\ell - j).$$

Таким образом, квази-интерполяционная формула (4.5.17) определена единственным линейным функционалом λ^* на C , именно:

$$(Q_k f)(x) = \sum_{\ell} \lambda^* f(\cdot + \ell) N_m \left(x + \frac{m}{2} - \ell \right). \quad (4.5.32)$$

Для обобщения этой формулы посмотрим, можем ли мы использовать семейство линейных ограниченных функционалов λ^ℓ , $\ell \in \mathbf{Z}$, на C для замены λ^* , например, мы постараемся заменить $\lambda^* f(\cdot + \ell)$ на $\lambda^\ell f(\cdot + \ell)$ в (4.5.32). Таким образом, интересно изучить условия, накладываемые на семейство $\{\lambda^\ell\}$, при которых линейный сплайн-оператор Q^0 , определенный формулой

$$(Q^0 f)(x) = \sum_{\ell} \lambda^\ell f(\cdot + \ell) N_m \left(x + \frac{m}{2} - \ell \right) \quad (4.5.33)$$

является квази-интерполяционным оператором. Чтобы Q^0 был ограниченным оператором, достаточно предположить, что нормы $\|\lambda^\ell\|$ этих линейных функционалов удовлетворяют неравенству

$$\sup_j \sum_{\ell=j}^{m+j} \|\lambda^\ell\| < \infty. \quad (4.5.34)$$

Например, если $\{\lambda^\ell\}$ — конечное семейство, то (4.5.34), без сомнения, выполняется. С другой стороны, гораздо труднее продемонстрировать локальную природу для общего оператора Q^0 . Так как для приложений представляют интерес только

инвариантные относительно сдвигов ограниченные линейные функционалы, то мы будем рассматривать только λ^ℓ вида

$$\lambda^\ell f(\cdot + \ell) = \sum_j c_j^{(\ell)} f(\ell - j), \quad (4.5.35)$$

в которых $\{c_j^{(\ell)}\}$, $\ell \in \mathbf{Z}$ — конечные последовательности. Отсюда, если объединение носителей этих последовательностей — конечное множество, то Q^0 также обладает локальными свойствами. Также ясно, что этими свойствами обладает любое конечное семейство $\{\lambda^\ell\}$. Наконец, как достигается полиномиальное воспроизведение оператором Q^0 ? Очень простым предположением о λ^ℓ для обеспечения этого свойства является требование, чтобы каждое λ^ℓ удовлетворяло равенству

$$\lambda^\ell p = \lambda^* p, \quad p \in \pi_{m-1}. \quad (4.5.36)$$

Заметим, что (4.5.35) может быть заменено более общей формулой, включающей производные информационных данных в том случае, если мы хотим рассматривать линейные ограниченные операторы Q^0 на соответствующем пространстве дифференцируемых функций. Мы окончим этот параграф рассмотрением примера, демонстрирующего эффективность степени свободы, достигнутой возможностью использовать более чем одно λ^ℓ .

Пример 4.17. Заметим, что любой квази-интерполяционный оператор Q_k в (4.5.17) требует информационных данные об $f(\ell)$ для всех $\ell \in \mathbf{Z}$. Мы уже определили кубический сплайн-оператор Q_1 в примере 4.14, где

$$\lambda^* f = -\frac{1}{6}f(1) + \frac{8}{6}f(0) - \frac{1}{6}f(-1).$$

Выведем кубический квази-интерполяционный оператор Q^0 , который требует только информационных данных $f(2\ell)$, $\ell \in \mathbf{Z}$.

Решение. Мы рассматриваем два линейных ограниченных функционала λ_e и λ_o , определенных формулами

$$\begin{cases} \lambda_e f := \sum_j c_j^{(1)} f(2j), \\ \lambda_o f := \sum_j c_j^{(2)} f(2j+1). \end{cases} \quad (4.5.37)$$

Затем, положив

$$\lambda^{2\ell} := \lambda_e \text{ и } \lambda^{2\ell-1} := \lambda_o, \quad \ell \in \mathbf{Z},$$

мы имеем

$$\begin{cases} \lambda^{2\ell} f(\cdot + 2\ell) = \sum_j c_j^{(1)} f(2j + 2\ell), \\ \lambda^{2\ell-1} f(\cdot + 2\ell - 1) = \sum_j c_j^{(2)} f(2j + 2\ell). \end{cases} \quad (4.5.38)$$

Следовательно, требуемыми значениями f в квази-интерполяционной формуле

$$(Q^0 F)(x) = \sum_k \lambda^k f(\cdot + k) N_4(x + 2 - k) \quad (4.5.39)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{\ell} \left[\sum_j c_j^{(1)} f(2j + 2\ell) \right] N_4(x - 2\ell + 2) \\ &+ \sum_{\ell} \left[\sum_j c_j^{(2)} f(2j + 2\ell) \right] N_4(x - 2\ell + 3) \end{aligned}$$

являются только $f(2\ell)$, $\ell \in \mathbf{Z}$. Для определения $\{c_j^{(1)}\}$ и $\{c_j^{(2)}\}$ мы применяем (4.5.36). Сначала мы должны вычислить $\lambda^* p_n$, где $p_n(x) = x^n$, $n = 0, \dots, 3$. Эти значения равняются

$$(\lambda^* p_0, \dots, \lambda^* p_3) = \left(1, 0, -\frac{1}{3}, 0 \right).$$

Отсюда, чтобы удовлетворить (4.5.36), мы должны решить две системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} \sum_j c_j^{(1)} = 1, & \sum_j 2j c_j^{(1)} = 0, \\ \sum_j (2j)^2 c_j^{(1)} = -\frac{1}{3}, & \sum_j (2j)^3 c_j^{(1)} = 0 \end{cases} \quad (4.5.40)$$

и

$$\begin{cases} \sum_j c_j^{(2)} = 1, & \sum_j (2j+1) c_j^{(2)} = 0, \\ \sum_j (2j+1)^2 c_j^{(2)} = -\frac{1}{3}, & \sum_j (2j+1)^3 c_j^{(2)} = 0. \end{cases} \quad (4.5.41)$$

Конечно, здесь нет единственного решения, но решения (4.5.40) и (4.5.41) с наименьшими носителями даются формулами:

$$c_0^{(1)} = \frac{26}{24}; \quad c_{-1}^{(1)} = c_1^{(1)} = -\frac{1}{24}; \quad c_\ell^{(1)} = 0 \quad \text{для } \ell \neq -1, 0, 1, \quad (4.5.42)$$

и

$$c_0^{(2)} = c_{-1}^{(2)} = \frac{7}{12}; \quad c_1^{(2)} = c_{-2}^{(2)} = -\frac{1}{12}; \quad c_\ell^{(2)} = 0 \quad \text{для } \ell \neq -2, -1, 0, 1. \quad (4.5.43)$$

Это и есть коэффициенты в (4.5.39). $\square$

4.6. Построение сплайн-интерполяционных формул

Общая схема для построения аппроксимационных формул, введенная в предыдущем параграфе, не дает возможности получить сплайн-функции, которые в общем случае интерполируют заданные дискретные данные. При построении сплайн-интерполяционного оператора также очень важно, чтобы этот оператор воспроизводил многочлены, по крайней мере до некоторой нужной степени. Это требование не только помогает

в достижении требуемого порядка аппроксимации, но также является критическим при сохранении определенных очертаний заданных значений. В конце концов, чтобы проинтерполировать множество постоянных данных, надо использовать (горизонтальную) прямую линию.

Мы, во-первых, коротко обсудим проблему базисной сплайн-интерполяции, поставленную в (4.5.8), и укажем, что если бы даже наивысший порядок аппроксимации достигался в этом случае, то соответствующий сплайн-интерполяционный оператор не мог бы быть локальным. Это ограничивает их применение во многих инженерных проблемах таких, как интерполяция в режиме реального времени (или «он лайн»). Главной целью этого параграфа является рассмотрение конструктивной схемы получения квази-интерполяционных операторов, которые имеют дополнительные интерполяционные свойства.

Центром наших дискуссий является построение так называемых *фундаментальных сплайнов*, которые интерполируют данные $\{\delta_{j,0}\}$. Обладая фундаментальным сплайном, интерполяционный оператор может быть легко получен путем использования любой последовательности данных в качестве последовательности коэффициентов сплайн-рядов, образованных целочисленными сдвигами фундаментальных сплайнов.

Давайте сначала исследуем проблему базисной сплайн-интерполяции, поставленную в (4.5.8), для последовательности данных $\{\delta_{j,0}\}$. Решив бесконечную систему

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^{(m)} N_m \left(\frac{m}{2} + j - k \right) = \delta_{j,0}, \quad j \in \mathbf{Z}, \quad (4.6.1)$$

для $\{c_k^{(m)}\}$, мы имеем «фундаментальную сплайн-функцию»

$$L_m(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^{(m)} N_m \left(x + \frac{m}{2} - k \right), \quad (4.6.2)$$

которая обладает интерполяционными свойствами

$$L_m(j) = \delta_{j,0}, \quad (4.6.3)$$

как это дается формулой (4.6.1). В отличие от B -сплайна N_m , который имеет компактный носитель, мы увидим, что последовательность коэффициентов $\{c_k^{(m)}\}$ не является конечной при любом $m \geq 3$, так что фундаментальный сплайн L_m не обращается тождественно в нуль вне некоторого компактного множества. Следовательно, если он применяется для интерполяции последовательности данных $\{f_j\}$, где $f_j = f(j)$ для некоторой $f \in C$, то надо быть аккуратным в вопросе о сходимости бесконечных сплайн-рядов

$$(J_m f)(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) L_m(x - k). \quad (4.6.4)$$

К счастью, как мы увидим немного позже, $\{c_k^{(m)}\}$ убывают до нуля экспоненциально быстро при $k \rightarrow \pm\infty$. Это значит, что фундаментальная сплайн-функция $L_m(x)$ также стремится к нулю с той же скоростью при $x \rightarrow \pm\infty$. Так, если $\{f(k)\}$ имеет не более чем полиномиальный рост, то сплайн-ряды в (4.6.4), конечно, сходятся в любой точке $x \in \mathbf{R}$ и, ввиду интерполяционных свойств (4.6.3), мы имеем

$$(J_m f - f)(j) = 0, \quad j \in \mathbf{Z}. \quad (4.6.5)$$

Таким образом, интерполяционный сплайн-оператор J_m задает сплайн-функцию $J_m f$, которая интерполирует функцию данных f в каждой точке $x = j$, $j \in \mathbf{Z}$.

Для изучения фундаментальных сплайн-функций $L_m(x)$ мы должны вернуться к системе (4.6.1) линейных уравнений, коэффициенты которой даются значениями B -сплайнов $N_m(\frac{m}{2} + k)$. Так же как в (4.5.9), мы рассматриваем символ

$$\tilde{N}_m(z) = \sum_k N_m\left(\frac{m}{2} + k\right) z^k$$

и замечаем, что этот симметричный многочлен Лорана может быть легко преобразован в алгебраический многочлен с целыми коэффициентами путем рассмотрения

$$E_{m-1}(z) := (m-1)!z^{[(m-1)/2]}\tilde{N}_m(z), \quad (4.6.6)$$

где, как и раньше, $[x]$ обозначает наибольшее целое, не превосходящее x . Это понятие обобщает определение многочленов Эйлера—Фробениуса через B -сплайны четного порядка. (См. (4.2.18) и следующие две главы для более подробного и общего рассмотрения.) Наиболее важным свойством многочлена Эйлера—Фробениуса E_{m-1} в (4.6.6) является для нас то, что он не обращается в нуль на единичной окружности $|z| = 1$ (см. теорему 5.10 в следующей главе как более общий результат). Отсюда следует, что $\tilde{N}_m(z) \neq 0$ для всех $z = e^{-i\omega}$, $\omega \in \mathbf{R}$. Теперь, как и в (4.5.10), система линейных уравнений (4.6.1) может быть записана в виде

$$\tilde{C}_m(z) = \frac{1}{\tilde{N}_m(z)}, \quad (4.6.7)$$

где $\tilde{C}_m(z)$ — символ $\{c_k^{(m)}\}$. Используя элементарные дроби, легко видеть, что последовательность $\{c_k^{(m)}\}$ экспоненциально убывает при $k \rightarrow \pm\infty$, и скорость убывания определяется модулем корня E_{m-1} в круге $|z| < 1$, ближайшего к единичной окружности $|z| = 1$.

Применяя формулу суммирования Пуассона (2.5.8), мы можем также написать

$$\tilde{N}_m(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\hat{N}_m \left(\cdot + \frac{m}{2} \right) \right) (\omega + 2\pi k), \quad z = e^{-i\omega}, \quad (4.6.8)$$

где $\hat{N}_m \left(\cdot + \frac{m}{2} \right)$ обозначает преобразование Фурье $N_m \left(x + \frac{m}{2} \right)$, которое в (4.6.8) вычисляется в точках $\omega + 2\pi k$. Отсюда, беря преобразование Фурье от обеих частей (4.6.2) и применяя

(4.6.7) и (4.6.8), мы получаем две формулы для (преобразования Фурье) фундаментальной сплайн-функции, а именно:

$$\begin{aligned}\hat{L}_m(\omega) &= \frac{\left(\hat{N}_m\left(\cdot + \frac{m}{2}\right)\right)(\omega)}{\tilde{N}_m(e^{-i\omega})} \\ &= \frac{\left(\hat{N}_m\left(\cdot + \frac{m}{2}\right)\right)(\omega)}{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\hat{N}_m\left(\cdot + \frac{m}{2}\right)\right)(\omega + 2\pi k)}.\end{aligned}\quad (4.6.9)$$

Каждая из этих двух формул может быть использована для вычисления $L_m(x)$.

Пример 4.18. Определим кубический фундаментальный сплайн $L_4(x)$.

Решение. Применяя рекуррентный алгоритм, описанный в (4.2.15), получим, что отличные от нуля значения $N_4(k)$, $k \in \mathbf{Z}$, равняются

$$\{N_4(1), N_4(2), N_4(3)\} = \left\{\frac{1}{6}, \frac{4}{6}, \frac{1}{6}\right\},$$

как это уже было замечено в (4.3.15). Отсюда соответствующий многочлен Эйлера—Фробениуса дается формулой

$$E_3(z) = 1 + 4z + z^2 = (z + 2 - \sqrt{3})(z + 2 + \sqrt{3}).$$

Следовательно, мы имеем

$$\begin{aligned}\tilde{C}_4(z) &= \frac{(4-1)!z^{[(4-1)/2]}}{E_3(z)} = \frac{6z}{(z + 2 - \sqrt{3})(z + 2 + \sqrt{3})} \quad (4.6.10) \\ &= \frac{6}{(-2 + \sqrt{3}) - (-2 - \sqrt{3})} \left(\frac{-2 + \sqrt{3}}{z + 2 - \sqrt{3}} - \frac{-2 - \sqrt{3}}{z + 2 + \sqrt{3}} \right) \\ &= \sqrt{3} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-2 + \sqrt{3})^{n+1} z^{-n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-2 - \sqrt{3})^{-n} z^n \right) \\ &= \sqrt{3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-2 + \sqrt{3})^{|n|} z^n,\end{aligned}$$

так что последовательность $\{c_k^{(4)}\}$ определяется формулой

$$c_k^{(4)} = (-1)^k \sqrt{3}(2 - \sqrt{3})^{|k|}, \quad k \in \mathbf{Z}. \quad (4.6.11)$$

Это дает нам кубический фундаментальный сплайн

$$L_4(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \sqrt{3}(2 - \sqrt{3})^{|k|} N_4(x + 2 - k). \quad (4.6.12)$$

Заметим, что скорость убывания $L_4(x)$ равняется

$$O((2 - \sqrt{3})^{|x|}) \quad \text{при } x \rightarrow \pm\infty \quad (4.6.13)$$

ввиду того, что $\text{supp } N_4(\cdot + 2 - k) = [k - 2, k + 2]$. $\square$

Что касается вычисления сплайн-интерполянта $J_m f$ в (4.6.4), вместо того чтобы вычислять его непосредственно, представляется более эффективным приблизить $J_m f$ с помощью $Q_k f$ для больших значений k , где Q_k — квази-интерполяционный оператор, введенный в (4.5.17). Чтобы проанализировать результирующую погрешность, вернемся сначала к (4.5.11) и (4.5.21) и рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} |(\underbrace{\{d_j\} * \cdots * \{d_j\}}_k)(\ell)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} [\tilde{D}(e^{-i\omega})]^k e^{i\ell\omega} d\omega \right| \quad (4.6.14) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} (1 - \tilde{N}_m(e^{-i\omega}))^k e^{i\ell\omega} d\omega \right| \\ &\leq r_m^k, \end{aligned}$$

где

$$r_m = 1 - \min_{\omega} \tilde{N}_m(e^{-i\omega}). \quad (4.6.15)$$

Следовательно, повторяя рассуждения в (4.5.20), мы имеем для каждого $\ell \in \mathbf{Z}$ и $p \in \pi_{m-1}$:

$$\begin{aligned} |(Q_k f - J_m f)(\ell)| &= |(Q_k f - f)(\ell)| \\ &= |(Q_k(f - p))(\ell) - (f - p)(\ell)| \\ &= |(\underbrace{\{d_j\} * \cdots * \{d_j\}}_{k+1} * \{f(j) - p(j)\})(\ell)| \\ &\leq r_m^{k+1} \max_{j \in \mathbf{Z}} |f(j) - p(j)|. \end{aligned}$$

Это дает

$$|(Q_k f - J_m f)(\ell)| \leq r_m^{k+1} \text{dist}_{\ell^\infty}(f, \pi_{m-1}), \quad \ell \in \mathbf{Z}, \quad (4.6.16)$$

где

$$\text{dist}_{\ell^\infty}(f, \pi_{m-1}) := \min_{p \in \pi_{m-1}} \max_{k \in \mathbf{Z}} |f(k) - p(k)|.$$

Пример 4.19. Оценим разность между $(Q_k f)(\ell)$ и $(J_4 f)(\ell)$, $\ell \in \mathbf{Z}$, кубической сплайн-интерполяцией (то есть $m = 4$).

Решение. Легко видеть, что

$$\tilde{N}_4(e^{-i\omega}) = \frac{e^{i\omega} + 4 + e^{-i\omega}}{6} = \frac{2 + \cos \omega}{3},$$

и это дает

$$r_4 = 1 - \min_{\omega} \left(\frac{2 + \cos \omega}{3} \right) = \frac{2}{3}.$$

Отсюда, ввиду (4.6.16), мы имеем

$$|(Q_k f - J_4 f)(\ell)| \leq \left(\frac{2}{3} \right)^{k+1} \text{dist}_{\ell^\infty}(f, \pi_3), \quad \ell \in \mathbf{Z}. \quad (4.6.17)$$

Если, например, $\{f(k)\}$ — ограниченная последовательность, то учитывая, что $\text{dist}_{\ell^\infty}(f, \pi_3) \leq \text{dist}_{\ell^\infty}(f, \pi_0)$, из (4.6.17) следует неравенство

$$\sup_{\ell \in \mathbf{Z}} |(Q_k f - J_4 f)(\ell)| \leq \left(\sup_{\ell \in \mathbf{Z}} f(\ell) + \inf_{\ell \in \mathbf{Z}} f(\ell) \right) \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \right)^{k+1}. \quad \square$$

Заменяя $J_m f$ квази-интерполянт $Q_k f$, мы в общем случае не имеем точной интерполяции, хотя хорошая оценка и дается в (4.6.16). Однако одним из главных соображений, которое заставляет выбрать $Q_k f$ для $J_m f$, является локальная природа квази-интерполяционного оператора, которая дает

возможность использовать его для приложений в режиме реального времени. Если мы настаиваем на точной интерполяции, то существует один путь построить локальную интерполяционную формулу, который состоит в использовании сплайн-пространства на мелкой сетке, такого как S_m^j для некоторого $j > 0$, вместо S_m (где S_m^j — пространство сплайнов m -го порядка, узлами которого является последовательность $2^{-j}\mathbf{Z}$, как это обсуждалось в § 4.1). Например ясно, что при интерполяции последовательности данных $\{f(j) : j \in \mathbf{Z}\}$ с

$$\delta_m := \text{наименьшее целое, ограниченное снизу величиной } \log_2 m - 1, \quad (4.6.18)$$

сплайн-функция

$$\xi_m(x) := \frac{1}{N_m(m/2)} N_m \left(2^{\delta_m} x + \frac{m}{2} \right) \quad (4.6.19)$$

удовлетворяет требованию

$$\xi_m(j) = \delta_{j,0}, \quad j \in \mathbf{Z}. \quad (4.6.20)$$

Отсюда сплайн-оператор

$$(R_m f)(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) \xi_m(x - k) \quad (4.6.21)$$

является одновременно локальным и интерполяционным. К сожалению, $R_m f$ — *очень плохое* представление f , так как даже постоянная функция им не воспроизводится. Например, когда мы используем кубический сплайн, мы имеем $\delta_4 = 1$ и

$$\xi_4(x) = \frac{3}{2} N_4(2x + 2), \quad (4.6.22)$$

так что для функции $f(x) = 1$, $x \in \mathbf{R}$ мы имеем $(R_4 f)(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2} N_4(3) + \frac{3}{2} N_4(1) = \frac{1}{2}$, но не 1.

Мы теперь имеем два локальных метода: метод построения квази-интерполяционных операторов Q , как это было рассмотрено в предыдущем параграфе, и локальную интерполяционную формулу (4.6.21). Первый метод воспроизводит все многочлены в соответствующем сплайн-пространстве и, следовательно, обеспечивает оптимальный порядок аппроксимации (см. теорему 4.16), в то время как второй метод дает интерполяционный сплайн. Для построения ограниченного линейного *локального оператора* P , который бы обладал полиномиально-воспроизводящими свойствами Q и интерполяционным свойством R_m , мы рассматриваем следующую «смешанную» операцию:

$$P := R_m + Q - R_m Q. \quad (4.6.23)$$

Так как Q и R_m — ограниченные линейные операторы в C , то таким же является и P . Теперь, для любого $x \in \mathbf{R}$ и $p \in \pi_{m-1}$ ввиду того, что $(Qp)(x) = p(x)$, мы имеем

$$\begin{aligned} (Pp)(x) &= (R_m p)(x) + (Qp)(x) - (R_m Qp)(x) \\ &= (R_m p)(x) + p(x) - (R_m p)(x) = p(x), \end{aligned}$$

так что P также сохраняет все π_{m-1} . С другой стороны, для любой $f \in C$ и $j \in \mathbf{Z}$, так как $(R_m f)(j) = f(j)$, мы имеем

$$\begin{aligned} (Pf)(j) &= (R_m f)(j) + (Qf)(j) - (R_m(Qf))(j) \\ &= f(j) + (Qf)(j) - (Qf)(j) = f(j). \end{aligned}$$

Следовательно, мы доказали, что действительно P — квази-интерполяционный оператор, который является интерполяционным на множестве $\mathbf{Z}$. Должны быть рассмотрены еще два важных момента. Во-первых, так как мы заинтересованы в интерполяции данных $f(j)$, $j \in \mathbf{Z}$, то локальный оператор P должен зависеть только от этого множества данных и не от чего больше. Это, конечно, верно для R_m в (4.6.21), но квази-интерполяционный оператор Q также должен обладать этими свойствами. К счастью, общая формулировка Q^0 в (4.5.33)

с наложением условия (4.5.36) на определяемые линейные функционалы, как было введено в предыдущем параграфе, может быть применена для изменения множества данных. Во-вторых, так как множество R_m — это сплайн-пространство $S_m^{\delta_m}$, мы должны также ограничить множество $Q = Q^0$ множеством $S_m^{\delta_m}$. Таким образом, мы установили следующий результат.

Теорема 4.20. Пусть Q^0 — квази-интерполяционный оператор из $C_b(\mathbf{R})$ в $S_m^{\delta_m}$ в смысле последовательностей данных $f(j)$, $j \in \mathbf{Z}$, $f \in C_b(\mathbf{R})$. Тогда оператор P , определенный в (4.6.23), с R_m , заданным формулой (4.6.21), также является квази-интерполяционным оператором на $C_b(\mathbf{R})$ со значениями в $S_m^{\delta_m}$ в смысле последовательностей данных $f(j)$, $j \in \mathbf{Z}$, и обладает дополнительным свойством

$$(Pf - f)(\ell) = 0, \quad \ell \in \mathbf{Z}.$$

Конечно, квази-интерполяционный оператор P может быть «масштабирован», что приведет нас к операторам

$$P^h := s_h \circ P \circ s_{h^{-1}}, \quad h > 0, \quad (4.6.24)$$

выбором $h = 2^{-j}a$ (при любой фиксированной положительной константе a и большом положительном целом j), рассмотрению другой последовательности данных

$$f(2^{-j}a\ell), \quad \ell \in \mathbf{Z}, \quad (4.6.25)$$

и к достижению оптимального порядка аппроксимации $O(h^m)$ (см. теорему 4.16). Мы кончаем эту главу рассмотрением примера кубического интерполяционного сплайна и квази-интерполяционных операторов.

Пример 4.21. Построим локальный кубический сплайн-интерполяционный оператор P_4^0 , который зависит только от множества данных $f(j)$, $j \in \mathbf{Z}$ и сохраняет все кубические многочлены.

Решение. Масштабируя квази-интерполяционный оператор Q^0 в (4.5.39) примера 4.17 на $1/2$, мы получаем квази-интерполяционную формулу

$$\begin{aligned} (Q_4^0 f)(x) = & \sum_{\ell} \left\{ \sum_j c_j^{(1)} f(j + \ell) \right\} N_4(2x - 2\ell + 2) \quad (4.6.26) \\ & + \sum_{\ell} \left\{ \sum_j c_j^{(2)} f(j + \ell) \right\} N_4(2x - 2\ell + 3), \end{aligned}$$

которая воспроизводит все π_3 , где $\{c_j^{(1)}\}$ и $\{c_j^{(2)}\}$ даются формулами (4.5.42) и (4.5.43). Откуда, применяя (4.6.23) с $Q = Q_4^0$ и $R_m = R_4$ и используя формулы (4.6.21) и (4.6.22), мы имеем

$$\begin{aligned} (P_4^0 f)(x) = & \sum_k \frac{3}{2} f(k) N_4(2x + 2 - 2k) + (Q_4^0 f)(x) \quad (4.6.27) \\ & - \sum_k \frac{3}{2} \left\{ \sum_{j, \ell} c_j^{(1)} f(j + \ell) N_4(2k - 2\ell + 2) \right. \\ & \left. + \sum_{j, \ell} c_j^{(2)} f(j + \ell) N_4(2k - 2\ell + 3) \right\} N_4(2x + 2 - 2k) \\ = & \sum_{\ell} \left\{ \sum_j c_j^{(2)} f(j + \ell) \right\} N_4(2x + 2 - (2\ell - 1)) \\ & + \sum_k \left\{ \frac{3}{2} f(k) - \sum_j \frac{1}{4} c_j^{(2)} (f(j + k) + f(j + k + 1)) \right\} \\ & \times N_4(2x + 2 - 2k) = \sum_{\ell} \left\{ \sum_n v_{\ell-2n}^{(4)} f(n) \right\} N_4(2x + 2 - \ell), \end{aligned}$$

где

$$v_n^{(4)} := \begin{cases} \frac{29}{24} & \text{для} & n = 0 \\ \frac{7}{24} & \text{для} & n = \pm 1 \\ -\frac{1}{8} & \text{для} & n = \pm 2 \\ -\frac{1}{12} & \text{для} & n = \pm 3 \\ \frac{1}{48} & \text{для} & n = \pm 4 \\ 0 & \text{для других } n. \end{cases} \quad (4.6.28)$$

Заметим, что для определения B -сплайн ряда

$$(P_4^0 f)(x) = \sum_{\ell} \gamma_{\ell}(f) N_4(2x + 2 - \ell), \quad (4.6.29)$$

мы просто можем применить формулу СС

$$\gamma_{\ell}(f) = \sum_{n=\ell-4}^{\ell+4} v_{\ell-n}^{(4)} \tilde{f}(n), \quad (4.6.30)$$

где $\{\tilde{f}(n)\}$ получена из последовательности данных $\{f(n)\}$ в результате разрежающей выборки, а именно: $\tilde{f}(2n) = f(n)$ и $\tilde{f}(2n+1) = 0$, $n \in \mathbf{Z}$. (См. (4.3.11).) $\square$

Глава 5

Масштабирующие функции и вэйвлеты

Любой $\mathcal{R}$ -вэйвлет (или просто вэйвлет) дает возможность разложить пространство Гильберта $L^2(\mathbf{R})$ в прямую сумму замкнутых подпространств W_j , $j \in \mathbf{Z}$ в том смысле, что каждое подпространство W_j является замыканием в $L^2(\mathbf{R})$ линейной оболочки совокупности функций

$$\psi_{j,k} = 2^{j/2} \psi(2^j x - k), \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Поэтому соответствующие подпространства

$$V_j := \dots \dot{+} W_{j-2} \dot{+} W_{j-1}, \quad j \in \mathbf{Z},$$

образуют вложенную последовательность подпространств $L^2(\mathbf{R})$, объединение которых плотно в $L^2(\mathbf{R})$ и пересечение которых является множеством $\{0\}$, состоящим из одного нулевого элемента.

Это наблюдение приводит к последующему введению очень полезной техники построения вэйвлета ψ и соответствующего ему двойственного $\tilde{\psi}$, а именно: исследованию существования и изучению структуры некоторой *масштабирующей функции* ϕ , которая порождает пространства V_j , $j \in \mathbf{Z}$ таким же обра-

зом, как ψ порождает пространства W_j , $j \in \mathbf{Z}$. В частности, совокупность функций

$$\phi(x - k), \quad k \in \mathbf{Z},$$

образует базис Рисса (или безусловный базис) V_0 и ϕ порождает кратномасштабный анализ (КМА) $\{V_j\}$ в $L^2(\mathbf{R})$. Так как $\phi \in V_0 \subset V_1$, то существует единственная последовательность $\{p_n\} \in \ell^2$, которая связывает $\phi(x)$ с функциями $\phi(2x - k)$, $k \in \mathbf{Z}$; и структура ϕ определяется структурой этой «двухмасштабной последовательности» $\{p_n\}$. Например, конечная двухмасштабная последовательность характеризует масштабирующую функцию ϕ с компактным носителем. Ввиду этого соображения ϕ имеет наименьший носитель, если длина этой последовательности является самой короткой.

Мы увидим, что существует много свободы в выборе соответствующего вэйвлета ψ и его двойственного $\tilde{\psi}$, поэтому другой целью этой главы является исследование структуры дополнительных пространств W_j (в смысле, что $V_{j+1} = V_j + W_j$, $j \in \mathbf{Z}$) и соответствующих «двухмасштабных последовательностей», связывающих W_j с V_{j+1} , что описывает эту свободу. Обладая полным знанием того, в чем состоит эта свобода, можно построить вэйвлет ψ и его двойственное $\tilde{\psi}$, удовлетворяющие некоторым особенностям. Этими особенностями, представляющими специальный интерес, в частности, для инженеров, являются: разложение пространства $L^2(\mathbf{R})$ в ортогональную сумму подпространств W_j , ортонормированный базис в $L^2(\mathbf{R})$, порожденный ψ , конечные последовательности восстановления и разложения как результат компактности носителя ψ и $\tilde{\psi}$ и симметрия или анти-симметрия ψ и $\tilde{\psi}$. В добавление к изучению этих особенностей мы будем также изучать связь между симметричными вэйвлетами и линейно-фазовой фильтрацией.

5.1. Кратномасштабный анализ

Если должен быть построен некоторый вэйвлет $\psi \in L^2(\mathbf{R})$, целесообразно изучить структуру порожденного им разложения $L^2(\mathbf{R})$. Обычно $\psi_{j,k} := 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$ и

$$W_j := \text{clos}_{L^2(\mathbf{R})}(\psi_{j,k} : k \in \mathbf{Z}). \quad (5.1.1)$$

Тогда это семейство подпространств $L^2(\mathbf{R})$ дает разложение $L^2(\mathbf{R})$ в прямую сумму в том смысле, что каждая $f \in L^2(\mathbf{R})$ имеет *единственное* разложение

$$f(x) = \dots + g_{-1}(x) + g_0(x) + g_1(x) + \dots, \quad (5.1.2)$$

где $g_j \in W_j$ для всех $j \in \mathbf{Z}$, и мы будем это описывать с помощью формулы

$$L^2(\mathbf{R}) = \sum_{j \in \mathbf{Z}}^{\cdot} W_j := \dots \dot{+} W_{-1} \dot{+} W_0 \dot{+} W_1 \dot{+} \dots \quad (5.1.3)$$

(см. (1.4.3)–(1.4.5)). Будучи в W_j , g_j -компонента f имеет единственное представление в виде вэйвлет-ряда, последовательность коэффициентов которого дает локализованную спектральную информацию об f в j -й октаве (или частотном диапазоне) в терминах интегрального вэйвлет-преобразования $\tilde{f}$ с $\tilde{\psi}$ — двойственным ψ в качестве базисного вэйвлета (см. теорему 3.27). Мы вернемся к этой теме в § 5.4. Используя разложение $L^2(\mathbf{R})$ в (5.1.3), мы имеем также последовательность вложенных друг в друга замкнутых подпространств V_j , $j \in \mathbf{Z}$ из $L^2(\mathbf{R})$, определенных формулой

$$V_j := \dots \dot{+} W_{j-2} \dot{+} W_{j-1}. \quad (5.1.4)$$

Обобщим свойства $\{V_j\}$, которые являются простым следствием (5.1.1), (5.1.3) и (5.1.4), в следующей лемме (см. § 1.5).

Лемма 5.1. *Подпространства V_j , определенные в (5.1.4), удовлетворяют следующим условиям:*

- (1°) $\dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \dots$;
- (2°) $\text{clos}_{L^2} (\cup_{j \in \mathbf{Z}} V_j) = L^2(\mathbf{R})$;
- (3°) $\cap_{j \in \mathbf{Z}} V_j = \{0\}$;
- (4°) $V_{j+1} = V_j \dot{+} W_j$, $j \in \mathbf{Z}$ и
- (5°) $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}$, $j \in \mathbf{Z}$.

Теперь предположим, что существует такая функция $\phi \in V_0$, что

$$\{\phi(\cdot - k) : k \in \mathbf{Z}\} \quad (5.1.5)$$

является базисом Рисса V_0 с границами Рисса A и B (см. (3.6.7)). Тогда, положив

$$\phi_{j,k}(x) := 2^{j/2} \phi(2^j x - k), \quad (5.1.6)$$

из формул (5.1.4), (5.1.1) и вышеприведенного условия (5°) следует, что для каждого $j \in \mathbf{Z}$ семейство

$$\{\phi_{j,k} : k \in \mathbf{Z}\}$$

также является базисом Рисса V_j с теми же самыми границами Рисса A и B . Как следствие, подпространства V_j также обладают свойством: (6°) $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(x + \frac{1}{2^j}) \in V_j$, $j \in \mathbf{Z}$.

Мы видим, что для построения вэйвлета ψ мы все время приходим к заключению о существовании вложенных последовательностей $\{V_j\}$ подпространств $L^2(\mathbf{R})$, удовлетворяющих условиям (1°)–(5°). Итак, эти свойства могут быть рассмотрены как необходимые условия для существования вэйвлета ψ . Техника, которую мы будем изучать, в первую очередь, состоит в построении так называемой *масштабирующей функции* $\phi \in L^2(\mathbf{R})$, которая «порождает» последовательность замкнутых подпространств $L^2(\mathbf{R})$ (которые мы также будем называть V_j , подразумевая, что эти подпространства *больше не определяются* (5.1.4) с помощью некоторой ψ ,

существование которой еще предстоит исследовать). Дадим следующее, более точное определение.

Определение 5.2. Функция $\phi \in L^2(\mathbf{R})$ называется масштабирующей функцией, если подпространства V_j из $L^2(\mathbf{R})$, определенные формулой

$$V_j := \text{clos}_{L^2(\mathbf{R})}(\phi_{j,k} : k \in \mathbf{Z}), \quad j \in \mathbf{Z}, \quad (5.1.7)$$

(где использовано обозначение (5.1.6)) удовлетворяют условиям (1°), (2°), (5°) и (6°), установленным выше в этом параграфе, и если $\{\phi(\cdot - k) : k \in \mathbf{Z}\}$ является базисом Рисса V_0 . Мы также говорим, что масштабирующая функция ϕ порождает кратномасштабный анализ $\{V_j\}$ пространства $L^2(\mathbf{R})$.

Замечание. Если $\phi \in L^2(\mathbf{R})$ — масштабирующая функция, которая порождает КМА $\{V_j\}$ пространства $L^2(\mathbf{R})$, то последовательность вложенных подпространств $\{V_j\}$ из КМА с необходимостью удовлетворяет условию (3°). Доказательство этого факта требует некоторого труда и не будет здесь обсуждаться. (См. (7.2.29) в доказательстве леммы 7.13 главы 7). Кроме того, всегда можно ввести дополняющие подпространства W_j , как в (4°). Однако мы будем всегда предполагать, что эти подпространства выбраны «соответствующим образом» для всех $j \in \mathbf{Z}$. Например, если $W_0 \perp V_0$, то мы требуем, чтобы $W_j \perp V_j$, $j \in \mathbf{Z}$. В общем случае, если W_0 порождено некоторым ψ в смысле (5.1.1) для $j = 0$, то мы предполагаем, что все другие подпространства W_j порождены аналогичным образом тем же ψ . В итоге мы будем предполагать выполнение всех условий (1°)–(6°) для любого КМА $\{V_j\}$ пространства $L^2(\mathbf{R})$.

Если ϕ порождает КМА, то так как $\phi \in V_0$ принадлежит также V_1 и так как $\{\phi_{1,k} : k \in \mathbf{Z}\}$ является базисом Рисса V_1 , существует единственная ℓ^2 -последовательность $\{p_k\}$,

которая описывает *двухмасштабное соотношение*

$$\phi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k \phi(2x - k) \quad (5.1.8)$$

для масштабирующей функции ϕ . (См. (4.3.1) и (4.3.3)–(4.3.4) о двухмасштабном соотношении для базисного B -сплайна m -го порядка.) Эта последовательность называется *двухмасштабной последовательностью* для ϕ . В соответствие с этой ℓ^2 -последовательностью введем обозначение

$$P(z) = P_\phi(z) := \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k z^k, \quad (5.1.9)$$

которое тем отличается от обозначения символа в (4.5.9), что здесь при определении P используется нормирующая константа $\frac{1}{2}$. Эта нормировка упрощает следующую формулировку в терминах преобразования Фурье:

$$\hat{\phi}(\omega) = P(z) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad z = e^{-i\omega/2}, \quad (5.1.10)$$

тождества (5.1.8). Мы будем называть $P = P_\phi$ *двухмасштабным символом* масштабирующей функции ϕ .

Для того чтобы иметь возможность вывести некоторые желательные свойства масштабирующей функции ϕ пространства $L^2(\mathbf{R})$, и позже — соответствующего вэйвлета ψ и двойственного вэйвлета $\tilde{\psi}$, мы сделаем следующие предположения о ϕ и его двухмасштабной последовательности:

$$(A1) \quad \phi \in L^1(\mathbf{R});$$

$$(A2) \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi(x - k) = 1, \quad \text{п.в.};$$

$$(A3) \quad \{p_k\} \in \ell^1.$$

Предположение (A2) называется свойством «разбиения единицы» для ϕ . Это стандартная (хотя и не необходимая) гипотеза для вывода свойства плотности подпространств V_j в

(2°). (См. доказательство теоремы 4.16.) Заметим, что любой B -сплайн удовлетворяет (A2). Предположение (A1) означает, что $\hat{\phi}$ – непрерывная функция в $\mathbf{R}$, как это гарантировано теоремой 2.2 (б). Из следствия 2.27 и формулы суммирования Пуассона в (2.5.11) вытекает, что (A2) является результатом следующих условий на $\hat{\phi}$:

$$\begin{cases} \hat{\phi}(0) = 1, \\ \hat{\phi}(2\pi k) = 0, \quad 0 \neq k \in \mathbf{Z}. \end{cases} \quad (5.1.11)$$

(См. (4.5.5) для описания с более качественной стороны B -сплайнов m -го порядка.) В общем случае, так как ϕ порождает базис Рисса V_0 , то из (5.1.8) и нормировки $\hat{\phi}(0) = 1$, (A2) уже имеет место. В заключение предположение (A3) гарантирует, что $P = P_\phi$ есть непрерывная функция на единичной окружности $|z| = 1$. Это очень слабое предположение; и в применениях нас будут интересовать конечные последовательности так, что соответствующие $P = P_\phi$ будут многочленами Лорана. Добавочное предположение будет сделано в следующем параграфе.

Из непрерывности $P = P_\phi$ при $|z| = 1$, первого условия в (5.1.11), применяя (5.1.10), мы имеем

$$P(1) = \frac{1}{2} \sum_k p_k = 1. \quad (5.1.12)$$

С другой стороны, из предположения, что $\{\phi(\cdot - k) : k \in \mathbf{Z}\}$ является базисом Рисса V_0 , и из второго условия в (5.1.11) следует, что $P(z)$ удовлетворяет также равенству

$$P(-1) = \frac{1}{2} \sum_k (-1)^k p_k = 0. \quad (5.1.13)$$

Действительно, по теореме 3.24 и из непрерывности $\hat{\phi}$ мы имеем

$$\sum_i |\hat{\phi}(x + 2\pi k)|^2 \geq A > 0, \quad x \in \mathbf{R},$$

так что $\hat{\phi}((2k_0 + 1)\pi) \neq 0$ для некоторого $k_0 \in \mathbf{Z}$; и, следовательно, вычисление обеих частей (5.1.10) при $\omega = 2(2k_0 + 1)\pi$ дает (5.1.13). Конечно, утверждением, эквивалентным (5.1.12) и (5.1.13), является

$$\sum_k p_{2k} = \sum_k p_{2k+1} = 1. \quad (5.1.14)$$

Мы замечаем, что при повторном применении (5.1.10) другим следствием непрерывности $\hat{\phi}$ и условия $\hat{\phi}(0) = 1$ является утверждение, что при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(\omega) &= \left(\prod_{k=1}^n P(e^{-i\omega/2^k}) \right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2^n}\right) \\ &\rightarrow \prod_{k=1}^{\infty} P(e^{-i\omega/2^k}), \quad \omega \in \mathbf{R}, \end{aligned} \quad (5.1.15)$$

в каждой точке при условии сходимости бесконечного произведения. Мы вернемся к доказательству этой сходимости после рассмотрения следующего примера.

Пример 5.3. Для B -сплайна m -го порядка N_m мы имеем

$$P(z) = P_{N_m}(z) = \left(\frac{1+z}{2} \right)^m \quad (5.1.16)$$

(см. (4.3.3)), так что

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n P(e^{-i\omega/2^k}) &= \prod_{k=1}^n \left(\frac{1 + e^{-i\omega/2^k}}{2} \right)^m \\ &= \prod_{k=1}^n \left(\frac{1 + e^{-i\omega/2^k}}{2} \cdot \frac{1 - e^{-i\omega/2^k}}{1 - e^{-i\omega/2^k}} \right)^m \\ &= \prod_{k=1}^n \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1 - e^{-i\omega/2^{k-1}}}{1 - e^{-i\omega/2^k}} \right)^m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2^{mn}} \left(\frac{1 - e^{-i\omega}}{1 - e^{-i\omega/2}} \cdot \frac{1 - e^{-i\omega/2}}{1 - e^{-i\omega/2^2}} \cdots \frac{1 - e^{-i\omega/2^{n-1}}}{1 - e^{-i\omega/2^n}} \right)^m \\
&= \frac{1}{2^{mn}} \left(\frac{1 - e^{-i\omega}}{1 - e^{-i\omega/2^n}} \right)^m \rightarrow \left(\frac{1 - e^{-i\omega}}{i\omega} \right)^m
\end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$, и этот предел соответствует определению $\hat{N}_m(\omega)$ в (3.2.16). $\square$

Ввиду предыдущего сплайн-примера мы сосредоточим наше внимание на двухмасштабных уравнениях с управляющими последовательностями $\{p_k\}$, заданными формулой

$$P(z) = \frac{1}{2} \sum_k p_k z^k = \left(\frac{1+z}{2} \right)^N S(z), \quad (5.1.17)$$

где N — некоторое положительное целое, $S(1) = 1$ и $S(z)$ — достаточно гладкая функция на единичной окружности $|z| = 1$. Точнее, мы рассматриваем следующее определение.

Определение 5.4. Ряд Лорана $P(z)$ вида (5.1.17) называется «допустимым двухмасштабным символом», если S является непрерывной функцией на единичной окружности, удовлетворяющей условиям:

(а) $S(1) = 1$ и

(б) $L^\infty(0, 2\pi)$ -модуль непрерывности $S(e^{-i\omega})$ как функции ω , в соответствии с формулой (2.4.23), имеет порядок $O(\eta^\alpha)$ для некоторого α , $0 < \alpha \leq 1$, при $\eta \rightarrow 0^+$.

Для любого допустимого двухмасштабного символа P с множителем S , как в (5.1.17), рассмотрим границы $B_j = B_j(S)$ и $b_j = b_j(S)$, определенные формулами

$$\begin{cases} B_j = B_j(S) := \sup_{\omega \in \mathbf{R}} \left| \prod_{k=1}^j S(e^{-i\omega/2^k}) \right|, \\ b_j = b_j(S) := \frac{1}{j} \log_2 B_j = \frac{1}{j \log 2} \ln B_j. \end{cases} \quad (5.1.18)$$

Мы имеем следующий результат о сходимости бесконечного произведения.

Теорема 5.5. Пусть P — допустимый двухмасштабный символ вида (5.1.17). Тогда бесконечное произведение

$$g(\omega) := \prod_{k=1}^{\infty} P(e^{-i\omega/2^k}) \quad (5.1.19)$$

сходится в каждой точке к некоторой функции g . Более того, для любого положительного целого n_0 существует положительная константа C_{n_0} такая, что предельная функция g удовлетворяет неравенству

$$|g(\omega)| \leq C_{n_0}(1 + |\omega|)^{-N+b_{n_0}}, \quad \omega \in \mathbf{R}, \quad (5.1.20)$$

где b_{n_0} определено в (5.1.18). В частности, если существует некоторое n_0 такое, что $b_{n_0} < N - \frac{1}{2}$, то существует функция $\phi \in L^2(\mathbf{R})$ такая, что $\hat{\phi} = g$, $\hat{\phi}(0) = 1$, и $\hat{\phi}$ удовлетворяет двухмасштабному соотношению (5.1.10).

Доказательство. Для любого фиксированного ω , так как $S(1) = 1$ и $L^\infty(0, 2\pi)$, модуль непрерывности $S(e^{-i\omega})$ есть величина порядка $O(\eta^\alpha)$, $0 < \alpha \leq 1$, мы имеем

$$|1 - S(e^{-i\omega/2^k})| = O\left(\frac{|\omega|^\alpha}{2^{k\alpha}}\right), \quad k \rightarrow \infty.$$

Отсюда, так как $\sum (|\omega|^\alpha/2^{k\alpha}) < \infty$ и

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^K |S(e^{-i\omega/2^k})| &= \exp \left\{ \sum_{k=1}^K \log |1 - (1 - S(e^{-i\omega/2^k}))| \right\} \\ &= \exp \left\{ O\left(\sum_{k=1}^K \frac{|\omega|^\alpha}{2^{k\alpha}}\right) \right\}, \end{aligned} \quad (5.1.21)$$

следует, что бесконечное произведение

$$\prod_{k=1}^{\infty} S(e^{-i\omega/2^k})$$

сходится. Поэтому, ввиду примера 5.3, бесконечное произведение в (5.1.19) сходится для любого ω .

Для получения оценки (5.1.20) мы сначала заметим, снова из примера 5.3, что

$$\left| \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1 + e^{-i\omega/2^k}}{2} \right)^N \right| = \left(\frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\omega/2} \right)^N \leq C' (1 + |\omega|)^{-N}. \quad (5.1.22)$$

Затем, любому фиксированному ω соответствует единственное $n \in \mathbf{Z}$ такое, что $2^{n-1} < 1 + |\omega| \leq 2^n$. Итак, с одной стороны, так как $|\omega/2^k| \leq 1$ для всех $k \geq n$, вышеприведенная оценка дает

$$\left| \prod_{k=n+1}^{\infty} S(e^{-i\omega/2^k}) \right| \leq C'',$$

где C'' зависит от ω . Отсюда, с $C''' := C' C''$, мы заключаем, используя (5.1.22), что

$$|g(\omega)| \leq C''' (1 + |\omega|)^{-N} \prod_{k=1}^n |S(e^{-i\omega/2^k})|. \quad (5.1.23)$$

С другой стороны, используя (5.1.18), мы имеем для любого положительного целого n_0 и для всех больших $n > 0$

$$\prod_{k=1}^n |S(e^{-i\omega/2^k})| = \quad (5.1.24)$$

$$\prod_{k=1}^{n_0} |S(e^{-i\omega/2^k})| \prod_{k=n_0+1}^{2n_0} |S(e^{-i\omega/2^k})| \cdots \prod_{k=\left[\frac{n}{n_0}\right]n_0+1}^n |S(e^{-i\omega/2^k})|$$

$$\leq C'_{n_0} B_{n_0}^{\left[\frac{n}{n_0}\right]} \leq C''_{n_0} B_{n_0}^{n/n_0}.$$

Так как

$$n - 1 < \log_2(1 + |\omega|) \leq n,$$

то

$$B_{n_0}^{n/n_0} \leq C_{n_0}''' B_{n_0}^{\log_2(1+|\omega|)^{1/n_0}} = C_{n_0}''' (1 + |\omega|)^{b_{n_0}}.$$

Отсюда при $C_{n_0} = C''' C_{n_0}'' C_{n_0}'''$ утверждение в (5.1.20) является следствием (5.1.22) и (5.1.24).

Если $b_{n_0} < N - \frac{1}{2}$, то из (5.1.20) мы видим, что $g \in L^2(\mathbf{R})$; и ввиду $L^2(\mathbf{R})$ -изометрии преобразования Фурье, установленной в теореме 2.17, мы имеем $g = \hat{\phi}$ для некоторой $\phi \in L^2(\mathbf{R})$. Сверх того, ясно из оценок (5.1.21) и (5.1.22), что $\hat{\phi} \in C$, так что $\hat{\phi}(0) = g(0) = P(1) = 1$, и

$$\begin{aligned} P(e^{-i\omega/2}) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) &= P(e^{-i\omega/2}) \prod_{k=1}^{\infty} P(e^{-i\omega/2^{k+1}}) \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} P(e^{-i\omega/2^k}) \\ &= \hat{\phi}(\omega). \end{aligned}$$

Это завершает доказательство теоремы. □

Заметим, что вышеприведенная теорема не дает никакой информации о гладкости ϕ и о том, порождает ли она или нет базис Рисса V_0 . Действительно, не накладывая дополнительных условий на двухмасштабный символ P , очень трудно сделать заключение относительно того, порождает ли масштабирующая функция ϕ базис Рисса V_0 . Обсуждение этой проблемы откладывается до главы 7, где требуется, чтобы $\{\phi(\cdot - k) : k \in \mathbf{Z}\}$ было ортонормированным семейством. Ниже нас будет интересовать только гладкость масштабирующей функции ϕ .

Теорема 5.6. В предположениях теоремы 5.5, если

$$b := \inf\{b_j : j \geq 1\} \quad (5.1.25)$$

удовлетворяют неравенству $b < N - 1$, то предельная функция g в (5.1.19) принадлежит $L^2(\mathbf{R}) \cap L^1(\mathbf{R})$, и функция $\phi \in L^2(\mathbf{R})$, удовлетворяющая равенству $\hat{\phi} = g$, как это установлено в теореме 5.5, принадлежит $C^\beta(\mathbf{R})$, где β — наибольшее целое, строго меньшее, чем $N - b - 1$. Более того, для любого $\alpha > 0$ такого, что $0 < \beta + \alpha < N - b - 1$, $\phi^{(\beta)}$ удовлетворяет равенству:

$$\sup_{0 < h \leq \eta} \sup_{x \in \mathbf{R}} |\phi^\beta(x+h) - \phi^\beta(x)| = O(\eta^\alpha), \quad \eta \rightarrow 0^+.$$

Определение 5.7. Класс всех функций $f \in C = C(\mathbf{R})$, удовлетворяющих равенству

$$\sup_{0 < h \leq \eta} \sup_{x \in \mathbf{R}} |f(x+h) - f(x)| = O(\eta^\alpha), \quad \eta \rightarrow 0^+, \quad (5.1.26)$$

где $0 < \alpha \leq 1$, обозначается $\text{Lip } \alpha$; и класс функций $f \in C^m = C^m(\mathbf{R})$, где m — положительное целое такое, что $f^{(m)} \in \text{Lip } \alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, будет обозначаться как $\text{Lip}^m \alpha$.

Доказательство теоремы 5.6. Выберем положительное целое n_0 такое, что

$$0 < \beta + \alpha < N - b_{n_0} - 1.$$

Заметим, что по определению β мы имеем $0 < \alpha < 1$, и, ввиду (5.1.20) в теореме 5.5 мы видим, что

$$(1 + |\omega|)^\beta |\hat{\phi}(\omega)| \leq C_{n_0} (1 + |\omega|)^{-1-\alpha}. \quad (5.1.27)$$

В результате теорема Лебега о сходимости позволяет нам продифференцировать под знаком интеграла формулу

$$\phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\omega} \hat{\phi}(\omega) d\omega$$

β раз, откуда $\phi \in C^\beta$ и

$$\phi^{(\beta)}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (i\omega)^\beta e^{ix\omega} \hat{\phi}(\omega) d\omega. \quad (5.1.28)$$

Теперь из оценки

$$\begin{aligned} |e^{i(x+h)\omega} - e^{ix\omega}| &\leq \min(2, |h\omega|) \\ &\leq 2^{1-\alpha} |h\omega|^\alpha \leq 2|h|^\alpha (1 + |\omega|)^\alpha, \end{aligned}$$

вместе с (5.1.27) и (5.1.28) следует, что

$$\begin{aligned} |\phi^{(\beta)}(x+h) - \phi^{(\beta)}(x)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega|^\beta |e^{i(x+h)\omega} - e^{ix\omega}| |\hat{\phi}(\omega)| d\omega \\ &\leq C_{n_0} \frac{|h|^\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\omega|)^{\beta+\alpha-N+b_0} d\omega, \end{aligned}$$

где интеграл конечен, так как $\beta + \alpha - N + b_0 < -1$. Следовательно, мы доказали, что $\phi \in \text{Lip}^\beta \alpha$. $\square$

5.2. Масштабирующие функции с конечными двухмасштабными соотношениями

В этом параграфе мы ограничиваем наше внимание двухмасштабными соотношениями (5.1.8), описанными конечными суммами. Очень важным следствием такого ограничения является тот факт, что соответствующие масштабирующие функции с необходимостью имеют компактные носители. Поэтому, как мы увидим в этом параграфе, графически-изобразительный алгоритм для B -сплайнов в параграфе 4.3 также может быть применен для рисования графика любого причинного ряда

$$f(x) = \sum_n a_n \phi(x - \ell), \quad (5.2.1)$$

где ϕ — любая из таких масштабирующих функций, в реальном времени. Мы также будем изучать класс всех масштабирующих функций с конечными двухмасштабными соотношениями, которые порождают тот же кратномасштабный анализ, и исследовать функции с наименьшим носителем. Это важно при показе базисной структуры исследуемого КМА, и масштабирующие функции с наименьшим носителем будут инструментом для построения вэйвлетов, обладающих таким же свойством. Будет ясно, что масштабирующие функции ϕ с наименьшим носителем и соответствующие им вэйвлеты ψ имеют самые короткие последовательности восстановления, используемые в алгоритмах вэйвлет-восстановления. (Более подробно см. § 5.4.)

Пусть ϕ — масштабирующая функция, описываемая двухмасштабным соотношением

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^{N_\phi} p_k^\phi \phi(2x - k), \quad p_0^\phi, p_{N_\phi}^\phi \neq 0. \quad (5.2.2)$$

Когда не возникает возможных недоразумений, мы будем опускать индексы ϕ вниз и вверх, а именно:

$$\begin{cases} p_k := p_k^\phi; \\ N := N_\phi. \end{cases} \quad (5.2.3)$$

Мы замечаем, что, изменяя индекс в p_k , любое конечное двухмасштабное соотношение может быть записано в виде (5.2.2). Конечно, масштабирующая функция также должна быть сдвинута соответствующим образом.

Остановимся сначала на случаях $N_\phi = 0, 1$ в (5.2.2).

(а) Для $N_\phi = 0$ мы имеем, учитывая (5.1.12):

$$\phi(x) = 2\phi(2x),$$

так что двухмасштабный символ есть $P(z) = 1$, и бесконечное произведение в (5.1.19) есть $g(\omega) = 1$ для всех ω . Итак, если $g = \hat{\phi}$, то ϕ должна быть дельта-распределением.

(б) Для $N_\phi = 1$, используя (5.1.14), мы имеем:

$$\phi(x) = \phi(2x) + \phi(2x - 1),$$

то же самое двухмасштабное соотношение, что и для B -сплайна первого порядка N_1 в (4.3.4). Итак, $\phi = N_1$.

Поэтому мы всегда будем предполагать, что $N_\phi \geq 2$. В последующем будет введена итерационная процедура для построения масштабирующих функций ϕ . Для этой цели мы будем иметь дело только со всюду непрерывными масштабирующими функциями. Можно показать, что при этом добавочном предположении двухмасштабное соотношение для $N_\phi = 2$ должно иметь вид

$$\phi(x) = \frac{1}{2}\phi(2x) + \phi(2x - 1) + \frac{1}{2}\phi(2x - 2), \quad (5.2.4)$$

которое совпадает с двухмасштабными соотношениями для B -сплайна N_2 , как в (4.3.4) при $m = 2$, и, следовательно, $\phi = N_2$. Для $N_\phi \geq 3$, однако в главе 7 мы будем иметь некоторые очень интересные разновидности. Например, когда $N_\phi = 3$, мы, конечно, будем иметь квадратичный B -сплайн N_3 с двухмасштабным соотношением

$$N_3(x) = \frac{1}{4}N_3(2x) + \frac{3}{4}N_3(2x - 1) + \frac{3}{4}N_3(2x - 2) + \frac{1}{4}N_3(2x - 3). \quad (5.2.5)$$

Однако существует другая альтернатива, а именно: масштабирующая функция Добеши ϕ_3^D , определенная соотношением

$$\begin{aligned} \phi_3^D(x) = & \frac{1 + \sqrt{3}}{4}\phi_3^D(2x) + \frac{3 + \sqrt{3}}{4}\phi_3^D(2x - 1) \\ & + \frac{3 - \sqrt{3}}{4}\phi_3^D(2x - 2) + \frac{1 - \sqrt{3}}{4}\phi_3^D(2x - 3). \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

Более подробно ϕ_3^D будет рассмотрена в главе 7. Здесь мы только укажем две важные особенности двухмасштабной по-

следовательности в (5.2.6). Во-первых, как требует (5.1.14), мы имеем

$$\begin{cases} p_0 + p_2 = \frac{1 + \sqrt{3}}{4} + \frac{3 - \sqrt{3}}{4} = 1, \\ p_1 + p_3 = \frac{3 + \sqrt{3}}{4} + \frac{1 - \sqrt{3}}{4} = 1, \end{cases} \quad (5.2.7)$$

и, во-вторых,

$$\begin{aligned} P(z) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^3 p_k z_k \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1 + \sqrt{3}}{4} + \frac{3 + \sqrt{3}}{4} z + \frac{3 - \sqrt{3}}{4} z^2 + \frac{1 - \sqrt{3}}{4} z^3 \right\} \\ &= \left(\frac{1 + z}{2} \right)^2 \left(\frac{(1 + \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3})z}{2} \right), \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

которое удовлетворяет условию допустимости в определении 5.4 с $N = 2$ и $S(z)$ — тригонометрическим многочленом по ω таким, что $S(0) = 1$.

Чтобы лучше понять свойства масштабирующей функции ϕ , мы рассмотрим рекуррентную схему

$$\phi_n(x) = \sum_k p_k \phi_{n-1}(2x - k), \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.2.9)$$

для некоторой подходящей начальной функции ϕ_0 . Рассматривая трактовку (5.2.9) в виде преобразования Фурье (см. (5.1.10)) и повторяя тот же процесс, что и в (5.1.15), мы имеем

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_n(\omega) &= P(e^{-i\omega/2}) \hat{\phi}_{n-1} \left(\frac{\omega}{2} \right) = \dots \\ &= \left\{ \prod_{k=1}^n P(e^{-i\omega/2^k}) \right\} \hat{\phi}_0 \left(\frac{\omega}{2^n} \right). \end{aligned} \quad (5.2.10)$$

Следовательно, если P — допустимый двухмасштабный символ и если преобразование Фурье $\hat{\phi}_0$ начальной функции ϕ_0 — непрерывная функция, при $\omega = 0$ удовлетворяющая равенству $\hat{\phi}_0(0) = 1$, то по теореме 5.5 левая и правая части (5.2.10) сходятся при любом $\omega \in \mathbf{R}$, и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\phi}_n(\omega) = g(\omega),$$

где g — бесконечное произведение из (5.1.19). Кроме того, если двухмасштабный символ P удовлетворяет неравенству $b < N - 1$, где b и N даны, соответственно, в (5.1.25) и (5.1.17), то по теоремам 5.5 и 5.6 мы имеем $g = \hat{\phi}$, где $\phi \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$ принадлежит $\text{Lip}^\beta \alpha$, $0 < \alpha < 1$ и β — наибольшее целое, удовлетворяющее неравенствам $0 < \beta + \alpha < N - b - 1$ (см. определение 5.7). Поэтому при этих условиях масштабирующая функция ϕ может быть получена как предел ϕ_n в рекуррентной схеме (5.2.9). Ниже мы дадим набросок доказательства этого утверждения. Ввиду вышеприведенных рассуждений в случаях (а) и (б) мы видим, что для двухмасштабной последовательности, по крайней мере, с тремя отличными от нуля членами B -сплайн второго порядка N_2 , будучи непрерывной сплайн-функцией наименьшего порядка, обеспечивает хороший выбор начальной функции в (5.2.9) для получения масштабирующей функции ϕ . Так что мы рекомендуем следующую рекуррентную схему:

$$\begin{cases} \phi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x), \text{ где} \\ \phi_n(x) = \sum_{k=0}^{N_\phi} p_k^\phi \phi_{n-1}(x - k), \quad n = 1, 2, \dots, \text{ и} \\ \phi_0(x) = N_2(x). \end{cases} \quad (5.2.11)$$

В сущности, при выполнении вышеприведенных предположений о двухмасштабном символе P эта рекуррентная схема равномерно сходится.

Набросок доказательства. Пусть $\varepsilon > 0$. Так как $\hat{\phi} \in L^1(\mathbf{R})$, мы имеем

$$\int_{|\omega| \geq M} |\hat{\phi}(\omega)| d\omega < \varepsilon$$

для всех достаточно больших значений $M > 0$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\chi_{[-M, M]}(\hat{\phi}_n - g)\|_{L^1(\mathbf{R})} = 0$$

для фиксированного значения M . С другой стороны, так как

$$\hat{\phi}_n(\omega) = \left\{ \prod_{k=1}^n P(e^{-i\omega/2^k}) \right\} \left(\frac{\sin(\omega/2^{n+1})}{\omega/2^{n+1}} \right)^2 e^{-i\omega/2^n},$$

мы имеем, применяя ту же оценку, что и в (5.1.24),

$$\int_{M \leq |\omega| \leq 2^n \pi} |\hat{\phi}_n(\omega)| d\omega \geq C \int_{|\omega| \geq M} \frac{d\omega}{(1 + |\omega|)^{1+\eta}} \leq \frac{C'}{M^\eta} < \varepsilon,$$

где $0 < \eta < N - b - 1$ и M достаточно велико. Окончательно, периодичность

$$\prod_{k=1}^n P(e^{-i\omega/2^k})$$

может быть использована для получения формулы

$$\int_{|\omega| > 2^n \pi} |\hat{\phi}(\omega)| d\omega = \sum_{k \neq 0} \int_{|\omega| \leq 2^n \pi} \left| \prod_{k=1}^n P(e^{-i\omega/2^k}) \right| \left(\frac{\sin(\omega/2^{n+1})}{2^{-n-1}\omega + k\pi} \right)^2 d\omega \rightarrow 0,$$

и равномерная сходимость следует из того, что $|\phi_n(x) - \phi(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \|\hat{\phi}_n - \hat{\phi}\|_{L^1(\mathbf{R})}$. $\square$

Как следствие процесса (5.2.11) мы видим, что ϕ имеет компактный носитель, и, в сущности, мы можем найти ее носитель точно при условии, что ϕ непрерывна. Интересно заметить, что на самом деле $\supp \phi_n$ монотонно возрастает с

ростом n . Более точно, в результате простых вычислений мы имеем

$$\begin{cases} \text{supp } \phi_0 = [0, 2], \\ \text{supp } \phi_1 = [0, \frac{1}{2}(2 + N_\phi)] = [0, \frac{2+N_\phi}{2}], \\ \text{supp } \phi_2 = [0, \frac{1}{2}(\frac{2+N_\phi}{2} + N_\phi)] = [0, \frac{2+(2^2-1)N_\phi}{2^2}], \\ \dots\dots\dots \\ \text{supp } \phi_n = [0, \frac{2+(2^n-1)N_\phi}{2^n}], \end{cases} \quad (5.2.12)$$

и отсюда, так как $N_\phi \geq 2$,

$$\text{supp } \phi_n \subseteq [0, N_\phi], \quad n = 1, 2, \dots,$$

а из (5.2.11) и (5.2.12) следует, что

$$\text{supp } \phi = [0, N_\phi]. \quad (5.2.13)$$

Знание того, что носителем ϕ является $[0, N_\phi]$, согласно (5.2.13), оказывает огромную помощь при вычислении $\phi(x)$, по крайней мере во всех двоичных точках $x = k/2^j$, где $j, k \in \mathbf{Z}$. Это очевидно, если мы обратимся к двухмасштабному соотношению (5.2.2). Действительно, если известны значения $\phi(1), \dots, \phi(N_\phi - 1)$, то, так как $\phi(k) = 0$ для всех $k \leq 0$ или $k \geq N_\phi$, соотношения

$$\begin{cases} \phi\left(\frac{k}{2}\right) = \sum_{\ell} p_{\ell}^{\phi} \phi(k - \ell), \\ \phi\left(\frac{k}{2^2}\right) = \sum_{\ell} p_{\ell}^{\phi} \phi\left(\frac{k}{2} - \ell\right), \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

единственным образом определяют все значения $\phi(x)$ при $x = k/2^j$, $j, k \in \mathbf{Z}$.

Для определения значений $\phi(k)$, $k \in \mathbf{Z}$ мы снова используем двухмасштабное соотношение (5.2.2) с целыми x . Таким

образом, в матричном обозначении мы имеем

$$\mathbf{m} = M\mathbf{m}, \quad (5.2.14)$$

где $\mathbf{m}$ — вектор-столбец

$$\mathbf{m} := [\phi(1), \dots, \phi(N_\phi - 1)]^T \quad (5.2.15)$$

и M — матрица размерности $(N_\phi - 1) \times (N_\phi - 1)$

$$M := [p_{2j-k}^\phi]_{1 \leq j, k \leq N_\phi - 1}, \quad (5.2.16)$$

где j — индекс строки, а k — индекс столбца. Напоминая, что ϕ порождает разбиение единицы (см. (A2) в § 5.1), мы можем определить значения $\phi(k)$, $k \in \mathbf{Z}$, просто находя собственный вектор $\mathbf{m}$ в (5.2.14), соответствующий собственному значению 1 и удовлетворяющий условию нормировки

$$\phi(1) + \dots + \phi(N_\phi - 1) = 1. \quad (5.2.17)$$

Пример 5.8. Определим значения $\phi_3^D(k)$, $k \in \mathbf{Z}$, где двухмасштабное соотношение для ϕ_3^D дается формулой (5.2.6).

Решение. Из (5.2.6) мы имеем $N_\phi = 3$, и матрица M в (5.2.16) принимает вид

$$M = \begin{bmatrix} p_1^\phi & p_0^\phi \\ p_3^\phi & p_2^\phi \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 + \sqrt{3} & 1 + \sqrt{3} \\ 1 - \sqrt{3} & 3 - \sqrt{3} \end{bmatrix}. \quad (5.2.18)$$

Легко видеть, что пространство решений (5.2.14) состоит из векторов

$$\mathbf{m} = a[1 + \sqrt{3} \quad 1 - \sqrt{3}]^T, \quad a \in \mathbf{R}.$$

Итак, из условия нормировки мы имеем $a = \frac{1}{2}$ и

$$\begin{cases} \phi_3^D(1) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}, \\ \phi_3^D(2) = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}. \end{cases} \quad (5.2.19) \quad \square$$

Вычислив значения $\phi(k)$, $k \in \mathbf{Z}$, легко вычислить

$$\phi\left(\frac{k}{2^j}\right), \quad j, k \in \mathbf{Z}. \quad (5.2.20)$$

Действительно, интерполяционный графически-изобразительный алгоритм (см. алгоритм 4.7) может быть применен без изменения для вычисления любого причинного ряда

$$f_{j_0}(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell}^{j_0} \phi(2^{j_0}x - \ell) \quad (5.2.21)$$

за реальное время при любом фиксированном $j_0 \in \mathbf{Z}$ в точках $x = k/2^{j_1}$ для любого $k \in \mathbf{Z}$ и $j_1 \geq j_0$. Отсюда, чтобы вычислить $\phi(k/2^{j_1})$ в (5.2.20), мы просто применим этот алгоритм при $j_0 = 0$ и $a_{\ell}^{(0)} = \delta_{\ell,0}$. Конечно, надо положить

$$\begin{cases} p_{m,k} = p_k, \\ w_{m,k} = \phi(k) \end{cases} \quad (5.2.22)$$

в алгоритме 4.7 для вычисления (или рисования графика) f_{j_0} в (5.2.21).

Теперь мы обращаемся к изучению класса Φ всех масштабирующих функций ϕ с конечными двухмасштабными соотношениями, которые порождают тот же самый КМА $\{V_j\}$ пространства $L^2(\mathbf{R})$. Снова без потери общности мы можем предположить, что двухмасштабное соотношение для любой $\phi \in \Phi$ берется в виде (5.2.2), и, следовательно, по (5.2.13), носителем ϕ в точности является интервал $[0, N_{\phi}]$. Итак, $\phi^* \in \Phi$ имеет наименьший носитель тогда и только тогда, когда

$$N_{\phi^*} \leq N_{\phi}, \quad \phi \in \Phi. \quad (5.2.23)$$

В соответствии с каждой $\phi \in \Phi$ будем рассматривать автокорреляционную функцию

$$F_{\phi}(x) := \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x+y) \overline{\phi(y)} dy, \quad (5.2.24)$$

введенную в определении 2.9, и символ последовательности $\{F_\phi(k)\}$, а именно:

$$E_\phi(z) := \sum_{k \in \mathbf{Z}} F_\phi(k) z^k. \quad (5.2.25)$$

Очевидно, что F_ϕ удовлетворяет соотношениям

$$\begin{cases} F_\phi(-x) = \overline{F_\phi(x)}, & x \in \mathbf{R}, \\ \text{supp } F_\phi \subseteq [-N_\phi, N_\phi], \end{cases} \quad (5.2.26)$$

откуда следует, что E_ϕ является многочленом Лорана. Пусть k_ϕ обозначает *одностороннюю степень* E_ϕ , то есть k_ϕ — наибольшее целое, для которого $F_\phi(k_\phi) \neq 0$. Тогда

$$\Pi_\phi(z) := z^{k_\phi} E_\phi(z) \quad (5.2.27)$$

есть (алгебраический) многочлен от z степени $2k_\phi$, и *обратный многочлен* для Π_ϕ дается формулой

$$\Pi_\phi^r(z) := z^{2k_\phi} \overline{\Pi_\phi\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}. \quad (5.2.28)$$

Ввиду первого свойства в (5.2.26) ясно, что

$$\Pi_\phi^r(z) = \Pi_\phi(z) \quad \text{при всех } z. \quad (5.2.29)$$

Мы называем Π_ϕ *обобщенным многочленом Эйлера—Фробениуса* и E_ϕ — *обобщенным многочленом Эйлера—Фробениуса Лорана* относительно ϕ . (Напомним, что умножение на константу нормировки используется для перехода к целым коэффициентам в обычных многочленах Эйлера—Фробениуса для V -сплайнов в (4.2.18) и в более общем случае (4.6.6).)

Мы нуждаемся в следующем определении.

Определение 5.9. Пусть z_0 — нуль (корень) алгебраического многочлена $p(z)$. Мы называем z_0 *симметричным нулем*

(симметричным корнем) $p(z)$, если (а) $z_0 \neq 0$ и (б) $p(-z_0) = p(z_0) = 0$.

Следующая теорема касается масштабирующих функций ϕ с конечными двухмасштабными последовательностями; напомним, что $P_\phi(z)$ обозначает двухмасштабный символ ϕ .

Теорема 5.10. Пусть $\phi \in \Phi$ — некоторая масштабирующая функция, определяемая (5.2.2). Тогда

(а) обе функции $E_\phi(z)$ и $\Pi_\phi(z)$ не обращаются в нуль при $|z| = 1$;

(б) для всех $\omega \in \mathbf{R}$

$$E_\phi(e^{-i\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi k)|^2; \quad (5.2.30)$$

(в) для всех $\omega \in \mathbf{R}$

$$|P_\phi(e^{-i\omega/2})|^2 E_\phi(e^{-i\omega/2}) + |P_\phi(-e^{-i\omega/2})|^2 E_\phi(-e^{-i\omega/2}) = E_\phi(e^{-i\omega}); \quad (5.2.31)$$

(г) для всех комплексных чисел z

$$\begin{aligned} P_\phi(z)P_\phi^r(z)\Pi_\phi(z) + (-1)^{N_\phi-k_\phi}P_\phi(-z)P_\phi^r(-z)\Pi_\phi(-z) \\ = z^{N_\phi-k_\phi}\Pi_\phi(z^2) \quad \text{и} \end{aligned} \quad (5.2.32)$$

(д) P_ϕ не имеет симметричных нулей, лежащих на окружности $|z| = 1$.

Доказательство. Тождество в (5.2.30) следует из формулы суммирования Пуассона (2.5.19). Откуда, применяя теорему 3.24, так как $\{\phi(\cdot - k) : k \in \mathbf{Z}\}$ — базис Рисса V_0 , мы имеем $E_\phi(e^{-i\omega}) \neq 0$ для всех $\omega \in \mathbf{R}$. В частности, утверждение (а) следует из (5.2.27). Для вывода (5.2.31) мы начнем с (5.2.30) и, применяя формулировку преобразования Фурье

двухмасштабного соотношения (5.2.2), получим

$$\begin{aligned}
 E_\phi(e^{-i\omega}) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| P_\phi(e^{-i\frac{\omega+2\pi k}{2}}) \hat{\phi}\left(\frac{\omega+2\pi k}{2}\right) \right|^2 \\
 &= |P_\phi(e^{-i\omega/2})|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \hat{\phi}\left(\frac{\omega+4\pi k}{2}\right) \right|^2 \\
 &\quad + |P_\phi(-e^{-i\omega/2})|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \hat{\phi}\left(\frac{\omega+2\pi(2k+1)}{2}\right) \right|^2 \\
 &= |P_\phi(e^{-i\omega/2})|^2 E_\phi(e^{-i\omega/2}) + |P_\phi(-e^{-i\omega/2})|^2 E_\phi(e^{-i\omega/2}).
 \end{aligned}$$

Это устанавливает (в). Для доказательства (г) мы обращаемся к формулам

$$\overline{P_\phi(z)} = z^{-N_\phi} P_\phi^r(z) \quad \text{и} \quad E_\phi(z) = z^{-k_\phi} \Pi_\phi(z)$$

при $|z| = 1$ и проверяем, что (5.2.31) эквивалентно (5.2.32) для $z = e^{-i\omega/2}$. Теперь, так как обе части (5.2.32) являются целыми функциями (будучи алгебраическими многочленами от z), то они должны быть тождественно равны при всех z .

В заключение, если $z_0 \neq 0$ — симметричный нуль P_ϕ , то из (5.2.32) мы имеем $\Pi_\phi(z_0^2) = 0$, так что $|z_0| \neq 1$ из утверждения (а). $\square$

Теперь мы готовы охарактеризовать те $\phi \in \Phi$, которые имеют наименьший носитель.

Теорема 5.11. *Масштабирующая функция $\phi^* \in \Phi$ имеет наименьший носитель тогда и только тогда, когда ее двухмасштабный символ P_{ϕ^*} не имеет симметричных нулей.*

Доказательство. Пусть задана произвольная $\phi^* \in \Phi$, и рассмотрим факторизацию ее двухмасштабного символа P_{ϕ^*} в виде

$$P_{\phi^*}(z) = m_{\phi^*}(z) n_{\phi^*}(z^2), \quad (5.2.33)$$

где m_{ϕ^*} и n_{ϕ^*} — многочлены, удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} m_{\phi^*}(1) = n_{\phi^*}(1) = 1 \\ n_{\phi^*}(0) \neq 0 \\ m_{\phi^*} \text{ не имеет симметричных нулей.} \end{cases} \quad (5.2.34)$$

Напомним, что $\text{supp } \phi^* = [0, N_{\phi^*}]$ и $N_{\phi^*} = \deg P_{\phi^*}$ (здесь и в дальнейшем $\deg P$ означает степень многочлена $P(z)$). Также заметим, что из (5.2.33) и (5.2.34) следует, что P_{ϕ^*} не имеет симметричных нулей тогда и только тогда, когда

$$\deg n_{\phi^*} = 0.$$

Теперь по теореме 5.10 (д), так как P_{ϕ^*} не имеет симметричных нулей, которые лежат на окружности $|z| = 1$, многочлен n_{ϕ^*} не имеет нулей на этой окружности, так что $n_{\phi^*}^{-1}$ — аналитическая функция на окружности $|z| = 1$ и имеет разложение Лорана

$$\frac{1}{n_{\phi^*}(z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_n z^n, \quad \{r_n\} \in \ell^1.$$

Определим функцию $\phi^{**} \in V_0$:

$$\phi^{**}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_n \phi^*(x - n). \quad (5.2.35)$$

Тогда, используя обозначение $z = e^{-i\omega/2}$, мы можем сформулировать (5.2.35) как

$$\hat{\phi}^{**}(\omega) = \frac{1}{n_{\phi^*}(z^2)} \hat{\phi}^*(\omega) \quad (5.2.36)$$

или

$$\hat{\phi}^*\left(\frac{\omega}{2}\right) = n_{\phi^*}(z) \hat{\phi}^{**}\left(\frac{\omega}{2}\right). \quad (5.2.37)$$

Теперь, применяя оба эти равенства — (5.2.36) и (5.2.37) — и используя двухмасштабное соотношение для ϕ^* , мы получим

$$\begin{aligned} \hat{\phi}^{**}(\omega) &= \frac{1}{n_{\phi^*}(z^2)} P_{\phi^*}(z) \hat{\phi}^*\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ &= \frac{1}{n_{\phi^*}(z^2)} m_{\phi^*}(z) n_{\phi^*}(z^2) \hat{\phi}^*\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ &= m_{\phi^*}(z) \hat{\phi}^*\left(\frac{\omega}{2}\right) = m_{\phi^*}(z) n_{\phi^*}(z) \hat{\phi}^{**}\left(\frac{\omega}{2}\right). \end{aligned}$$

Это показывает, что $\phi^{**} \in \Phi$ и ее двухмасштабный символ дается формулой

$$P_{\phi^{**}}(z) = m_{\phi^*}(z)n_{\phi^*}(z).$$

Итак, ввиду (5.2.33), мы имеем

$$\begin{aligned} \deg P_{\phi^{**}} &= \deg m_{\phi^*} + \deg n_{\phi^*} \\ &\leq \deg m_{\phi^*} + 2\deg n_{\phi^*} \\ &= \deg P_{\phi^*} \end{aligned}$$

Отсюда, если ϕ^* имеет наименьший носитель, то должны выполняться следующие условия: $\deg P_{\phi^{**}} = \deg P_{\phi^*}$ или $\deg n_{\phi^*} = 0$, или, что эквивалентно, P_{ϕ^*} не имеет симметричных нулей.

Чтобы доказать обратное утверждение, предположим, что $\phi^* \in \Phi$ и что P_{ϕ^*} не имеет симметричных нулей. Тогда, ввиду (5.2.13), для того чтобы доказать, что ϕ^* имеет наименьший носитель, достаточно показать, что

$$\deg P_{\phi} \geq \deg P_{\phi^*} \quad (5.2.38)$$

для любой $\phi \in \Phi$. Так как $\phi^* \in \Phi$, мы можем записать, что для некоторой последовательности $\{s_n\} \in \ell^2$

$$\phi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n \phi^*(x - n). \quad (5.2.39)$$

Формулировка (5.2.39) в терминах преобразования Фурье имеет вид:

$$\begin{cases} \hat{\phi}(\omega) = C(z^2)\hat{\phi}^*(\omega), \\ C(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n z^n, \quad z = e^{-i\omega/2}. \end{cases} \quad (5.2.40)$$

Вычисляя дискретное преобразование Фурье от обеих частей (5.2.39), мы видим, что $C(z)$ является рациональной функцией, которая есть отношение (многочленов) символов $\{\phi(k)\}$ и

$\{\phi^*(k)\}$. Кроме этого, так как из (5.2.40) следует, что

$$|C(z^2)|^2 = \frac{E_\phi(z^2)}{E_{\phi^*}(z^2)},$$

мы видим, применяя теорему 5.10 (а), что рациональная функция $C(z)$ не имеет нулей и полюсов на окружности $|z| = 1$. Теперь давайте напомним

$$\begin{cases} \sum_n \phi(n)z^n = \sum_{n=0}^{N_\phi} \phi(n)z^n = q_\phi(z)d(z), \\ \sum_n \phi^*(n)z^n = \sum_{n=0}^{N_{\phi^*}} \phi^*(n)z^n = q_{\phi^*}(z)d(z), \end{cases} \quad (5.2.41)$$

где d, q_ϕ, q_{ϕ^*} — такие многочлены, что $q_\phi(0) \neq 0, q_{\phi^*}(0) \neq 0$ и q_ϕ, q_{ϕ^*} не имеют общих нулей. Тогда из двухмасштабных соотношений для ϕ и ϕ^* , а также из (5.2.40) следует, что для $z = e^{-i\omega/2}$

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(\omega) &= P_\phi(z)\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = C(z)P_\phi(z)\hat{\phi}^*\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ &= C(z)P_\phi(z)\frac{1}{P_{\phi^*}(z)}\hat{\phi}^*(\omega) \\ &= \frac{C(z)}{C(z^2)}\frac{P_\phi(z)}{P_{\phi^*}(z)}\hat{\phi}(\omega), \end{aligned}$$

откуда

$$P_\phi(z) = \frac{C(z^2)}{C(z)}P_{\phi^*}(z). \quad (5.2.42)$$

С другой стороны, из (5.2.41) и нашего предыдущего замечания относительно $C(z)$ мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{C(z^2)}{C(z)} &= \frac{\left(\sum_n \phi(n)z^{2n}\right) / \left(\sum_n \phi^*(n)z^{2n}\right)}{\left(\sum_n \phi(n)z^n\right) / \left(\sum_n \phi^*(n)z^n\right)} \\ &= \frac{q_\phi(z^2)q_{\phi^*}(z)}{q_\phi(z)q_{\phi^*}(z^2)}. \end{aligned} \quad (5.2.43)$$

Так как $q_\phi(z^2)$ и $q_{\phi^*}(z^2)$ взаимно просты и $P_\phi(z)$ в (5.2.42) — многочлен, мы можем заключить, что многочлен $q_{\phi^*}(z)P_{\phi^*}(z)$ делится на $q_{\phi^*}(z^2)$, так что

$$q_{\phi^*}(z)P_{\phi^*}(z) = r(z)q_{\phi^*}(z^2), \quad (5.2.44)$$

где $r(z)$ — некоторый многочлен.

Предположим, что $\deg q_{\phi^*} \geq 1$, и пусть $\{z_1, \dots, z_p\}$ — нули q_{ϕ^*} . Так как $q_{\phi^*}(0) \neq 0$, то $z_1, \dots, z_p \neq 0$. Кроме этого, так как

$$C(z) = \frac{\sum_n \phi(n)z^n}{\sum_n \phi^*(n)z^n} = \frac{q_\phi(z)}{q_{\phi^*}(z)}, \quad (5.2.45)$$

где q_ϕ и q_{ϕ^*} взаимно просты и $C(z)$ не имеет нулей и полюсов на окружности $|z| = 1$, мы замечаем, что ни один из $z_j, j = 1, \dots, p$ не лежит на $|z| = 1$. Отсюда существует некоторое $j_0, 1 \leq j_0 \leq p$ такое, что ни одно значение $\pm z'_{j_0}$ квадратного корня от z_{j_0} не принадлежит множеству $\{z_1, \dots, z_p\}$. Таким образом, несмотря на то, что каждый из одночленов $(z - z'_{j_0})$ и $(z + z'_{j_0})$ не является делителем $q_{\phi^*}(z)$, их произведение $(z - z'_{j_0})(z + z'_{j_0}) = (z^2 - z_{j_0})$ — делитель $q_{\phi^*}(z^2)$. Поэтому из (5.2.44) следует, что $(z^2 - z_{j_0})$ является делителем $P_{\phi^*}(z)$. Так как $z_{j_0} \neq 0$, то P_{ϕ^*} теперь имеет симметричный корень, а это противоречит нашему предположению. Откуда q_{ϕ^*} должен быть константой. Следовательно, мы имеем из (5.2.42) и (5.2.43), что

$$P_\phi(z) = \frac{q_\phi(z^2)}{q_\phi(z)} P_{\phi^*}(z),$$

а это значит, что $P_\phi \geq \deg P_{\phi^*}$. □

В нашем доказательстве теоремы 5.11 мы вывели несколько полезных свойств любой $\phi \in \Phi$, два из которых приводятся в следующей теореме.

Теорема 5.12. Для любых $\phi_1, \phi_2 \in \Phi$ символ $C(z)$ последовательности $\{s_n\}$, связывающей ϕ_1 и ϕ_2 в том смысле, что

$$\phi_2(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n \phi_1(x - n),$$

есть рациональная функция, которая не имеет нулей и полюсов на единичной окружности $|z| = 1$. Кроме этого, если $\phi_1 \in \Phi$ имеет наименьший носитель, то $C(z)$ — многочлен; таким образом, любая $\phi_2 \in \Phi$ есть линейная комбинация целочисленных сдвигов $\phi_1 \in \Phi$ с наименьшим носителем. В частности, $\phi_1 \in \Phi$ с наименьшим носителем — единственна.

Доказательство. Первое утверждение было доказано раньше. Если ϕ_1 имеет наименьший носитель, то по предыдущей теореме двухмасштабный символ P_{ϕ_1} функции ϕ_1 не имеет симметричных корней. Поэтому из вышеприведенных рассуждений мы замечаем, что q_{ϕ_1} — константа, другими словами, $q_{\phi_1}(z) = q_{\phi_1}(0) \neq 0$; итак, ввиду (5.2.45) с $\phi^* = \phi_1$, $C(z)$ является многочленом, и это устанавливает второе утверждение теоремы. В заключение предположим, что обе функции ϕ_1 и ϕ_2 имеют наименьшие носители. Тогда по определению Φ и по формуле (5.2.13) мы имеем

$$\text{supp } \phi_1 = \text{supp } \phi_2 = [0, N_{\phi_1}]$$

и

$$\phi_2(x) = \sum_{j=0}^p c_j \phi_1(x - j), \quad c_p \neq 0. \quad (5.2.46)$$

Предположим, что $p \geq 1$. Тогда для $x \in [N_{\phi_1} + p - 1, N_{\phi_1} + p]$ мы имеем

$$0 = \phi_2(x) = \sum_{j=0}^p c_j \phi_1(x - j) = c_p \phi_1(x - p).$$

Так как ϕ_1 не равна тождественно нулю на $[N_{\phi_1} - 1, N_{\phi_1}]$, то это справедливо и для $\phi_1(\cdot - p)$ на $[N_{\phi_1} + p - 1, N_{\phi_1} + p]$. Следовательно, $c_p = 0$, что находится в противоречии с (5.2.46);

а это значит, что

$$\phi_2(x) = c_0 \phi_1(x).$$

То есть $c_0 = 1$ есть следствие равенств $\hat{\phi}_2(0) = \hat{\phi}_1(0) = 1$. $\square$

Закончим этот параграф следующим примером.

Пример 5.13. Для любого положительного целого m B -сплайн m -го порядка N_m является масштабирующей функцией, которая порождает КМА $\{V_j^m : j \in \mathbf{Z}\}$ пространства $L^2(\mathbf{R})$, как это определено в § 4.1. Двухмасштабное соотношение для N_m дается формулой (4.3.4), и границами Рисса для N_m являются $A = A_m$ и $B = 1$, где A_m определена в (4.2.21). Пусть Φ_m обозначает класс всех $\phi \in V_0^m$ с компактными носителями, которые порождают тот же самый КМА $\{V_j^m\}$. Тогда, так как двухмасштабным символом P_{N_m} для N_m является многочлен $(1+z)^m/2^m$, который не имеет симметричных нулей, то N_m — единственная функция в Φ_m , имеющая наименьший носитель.

Не вдаваясь в подробности, заметим, что N_m — единственная функция класса Φ_m , хотя в общем случае количество элементов Φ может быть бесконечным.

5.3. Разложение $L^2(\mathbf{R})$ в прямую сумму

В последнем параграфе мы только рассмотрели масштабирующие функции с конечными двухмасштабными последовательностями. Для развития более общей теории мы допустим, что двухмасштабные последовательности принадлежат ℓ^1 (см. предположение (A3) в § 5.1), так что соответствующие двухмасштабные символы принадлежат так называемому классу Винера.

Определение 5.14. Говорят, что ряд Лорана принадлежит классу Винера $\mathcal{W}$, если последовательность его коэффициентов принадлежит ℓ^1 .

Так как дискретная свертка двух ℓ^1 -последовательностей снова является последовательностью из ℓ^1 , то ясно, что $\mathcal{W}$ образует алгебру. Истина состоит в том, что $\mathcal{W}$ даже больше чем алгебра, как это видно из следующей хорошо известной теоремы Н. Винера.

Теорема 5.15. Пусть $f \in \mathcal{W}$ и предположим, что $f(z) \neq 0$ для всех z на единичной окружности $|z| = 1$. Тогда $\frac{1}{f}$ также принадлежит $\mathcal{W}$: $\frac{1}{f} \in \mathcal{W}$.

Доказательство этой теоремы, к несчастью, выходит за рамки этой книги. Читатель, который не хочет пользоваться этой теоремой, вполне может ограничиться рассмотрением подкласса рядов Лорана рациональных функций, которые не имеют полюсов на окружности $|z| = 1$, так как интересующие нас ряды Лорана являются конечными или, по крайней мере, имеют экспоненциальное убывание.

Пусть ϕ — масштабирующая функция, двухмасштабный символ которой

$$P_\phi(z) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k z^k \quad (5.3.1)$$

принадлежит $\mathcal{W}$. Напомним, что P_ϕ управляет связью $V_0 \subset V_1$ в том смысле, что

$$\phi(x) = \sum_k p_k \phi(2x - k) \quad (5.3.2)$$

и ϕ «порождает» V_0 . Рассмотрим теперь любую другую ℓ^1 -последовательность $\{q_k\}$ и ее «символ»

$$Q(z) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} q_k z^k, \quad (5.3.3)$$

(который делится пополам так же, как и символ P). Тогда Q тоже принадлежит $\mathcal{W}$ и определяет функцию

$$\psi(x) := \sum_k q_k \phi(2x - k) \quad (5.3.4)$$

из V_1 . Эта функция также порождает замкнутое подпространство W_0 таким же образом, как ϕ порождает V_0 , а именно:

$$W_0 := \text{clos}_{L^2(\mathbf{R})}(\psi(\cdot - k) : k \in \mathbf{Z}). \quad (5.3.5)$$

Аналогично тому, как это делает

$$P := P_\phi \quad (5.3.6)$$

символ Q управляет связью $W_0 \subset V_1$ в том смысле, что выполняются (5.3.4) и (5.3.5).

Конечно, связь между двумя подпространствами V_0 и W_0 из V_1 должна зависеть от связи между двумя символами P и Q . Наша главная задача при построении вэйвлетов состоит, по крайней мере, в том, чтобы убедиться, что V_0 и W_0 являются дополняющими подпространствами V_1 в том смысле, что

$$V_0 \cap W_0 = \{0\} \quad \text{и} \quad V_1 = V_0 + W_0. \quad (5.3.7)$$

Как и в (1.4.4), два свойства в (5.3.7) вместе объединяются в высказывание, что V_1 является *прямой суммой* V_0 и W_0 , и обозначение

$$V_1 = V_0 \dot{+} W_0 \quad (5.3.8)$$

используется вместо (5.3.7). В последующем мы увидим, что матрица

$$M_{P,Q}(z) := \begin{bmatrix} P(z) & Q(z) \\ P(-z) & Q(-z) \end{bmatrix} \quad (5.3.9)$$

играет существенную роль при характеристике (5.3.8). Поэтому мы должны рассмотреть детерминант

$$\Delta_{P,Q}(z) := \det M_{P,Q}(z) \quad (5.3.10)$$

матрицы (5.3.9). Так как P и Q принадлежат $\mathcal{W}$ и $\mathcal{W}$ — алгебра, то мы имеем также, что

$$\Delta_{P,Q} \in \mathcal{W}.$$

Кроме этого, если $\Delta_{P,Q}(z) \neq 0$ при $|z| = 1$, то по теореме 5.15 мы также имеем

$$\frac{1}{\Delta_{P,Q}} \in \mathcal{W}.$$

Итак, при условии $\Delta_{P,Q} \neq 0$ при $|z| = 1$ обе функции

$$\begin{cases} G(z) &:= \frac{Q(-z)}{\Delta_{P,Q}(z)}, \\ H(z) &:= \frac{-P(-z)}{\Delta_{P,Q}(z)} \end{cases} \quad (5.3.11)$$

принадлежат классу Винера $\mathcal{W}$. Соображение, по которому рассматриваются функции G и H в (5.3.11), состоит в том, что матрица $M_{G,H}^T$, транспонированная к $M_{G,H}$, является обратной для $M_{P,Q}$, а именно:

$$\begin{cases} M_{P,Q}(z) M_{G,H}^T(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ M_{G,H}^T(z) M_{P,Q}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad |z| = 1. \end{cases} \quad (5.3.12)$$

Первое тождество в (5.3.12) эквивалентно двум тождествам

$$\begin{cases} P(z)G(z) + Q(z)H(z) = 1, \\ P(z)G(-z) + Q(z)H(-z) = 0, \quad |z| = 1, \end{cases} \quad (5.3.13)$$

в то время как второе тождество в (5.3.12) эквивалентно следующему набору из четырех тождеств

$$\begin{cases} P(z)G(z) + P(-z)G(-z) = 1, \\ P(z)H(z) + P(-z)H(-z) = 0, \\ G(z)Q(z) + G(-z)Q(-z) = 0, \\ Q(z)H(z) + Q(-z)H(-z) = 1, \quad |z| = 1. \end{cases} \quad (5.3.14)$$

Для разложения $L^2(\mathbf{R})$ мы не нуждаемся в тождествах (5.3.14). Однако этот набор тождеств будет решающим при нашем обсуждении «двойственности» в следующем параграфе.

Так как $G, H \in \mathcal{W}$, мы можем записать

$$\begin{cases} G(z) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n z^n, \\ H(z) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n z^n, \end{cases} \quad (5.3.15)$$

где $\{g_n\}, \{h_n\} \in \ell^1$ всякий раз, когда $\Delta_{P,Q}(z) \neq 0$ на единичной окружности. Теперь мы готовы сформулировать следующий результат о разложении в прямую сумму.

Теорема 5.16. *Необходимое и достаточное условие разложимости в прямую сумму (5.3.8) состоит в том, что (непрерывная) функция $\Delta_{P,Q}$ нигде не обращается в нуль на единичной окружности $|z| = 1$. Кроме того, если $\Delta_{P,Q} \neq 0$ для всех точек единичной окружности $|z| = 1$, то семейство $\{\psi(\cdot - k) : k \in \mathbf{Z}\}$, определенное через $Q(z)$ согласно (5.3.4), является базисом Рисса W_0 , и «соотношение разложения»*

$$\phi(2x - \ell) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{g_{2k-\ell} \phi(x - k) + h_{2k-\ell} \psi(x - k)\}, \quad \ell \in \mathbf{Z}, \quad (5.3.16)$$

справедливо для всех $x \in \mathbf{R}$.

Доказательство в одном направлении. Мы рассмотрим только наиболее важную часть доказательства. Будем предполагать, что $\Delta_{P,Q}(z) \neq 0$ для всех z , удовлетворяющих равенству $|z| = 1$. Как следствие, все рассматриваемые последовательности принадлежат ℓ^1 , поэтому не стоит беспокоиться при изменении порядка суммирования.

Заметим, что в качестве эквивалентной формулировке (5.3.13) можно взять тождества

$$\begin{cases} P(z)(G(z) + G(-z)) + Q(z)(H(z) + H(-z)) = 1, \\ P(z)(G(z) - G(-z)) + Q(z)(H(z) - H(-z)) = 1, \quad |z| = 1, \end{cases} \quad (5.3.17)$$

которые, ввиду (5.3.15), могут быть записаны как

$$\begin{cases} P(z) \sum_k g_{2k} z^{2k} + Q(z) \sum_k h_{2k} z^{2k} = 1, \\ P(z) \sum_k g_{2k-1} z^{2k-1} + Q(z) \sum_k h_{2k-1} z^{2k-1} = 1, \quad |z| = 1. \end{cases} \quad (5.3.18)$$

Поэтому, положив $z = e^{-i\omega/2}$ и умножая тождества в (5.3.18), соответственно, на $\hat{\phi}(\frac{\omega}{2})$ и $z\hat{\phi}(\frac{\omega}{2})$, мы имеем

$$\begin{cases} \hat{\phi}(\frac{\omega}{2}) = \sum_k \left(g_{2k} z^{2k} P(z) \hat{\phi}(\frac{\omega}{2}) + h_{2k} z^{2k} Q(z) \hat{\phi}(\frac{\omega}{2}) \right), \\ \hat{\phi}(\frac{\omega}{2}) e^{-i\omega/2} = \sum_k \left(g_{2k-1} z^{2k} P(z) \hat{\phi}(\frac{\omega}{2}) + h_{2k-1} z^{2k} Q(z) \hat{\phi}(\frac{\omega}{2}) \right), \end{cases}$$

которые эквивалентны

$$\begin{cases} \hat{\phi}(\frac{\omega}{2}) = \sum_k \left(g_{2k} z^{2k} \hat{\phi}(\omega) + h_{2k} z^{2k} \hat{\psi}(\omega) \right), \\ \hat{\phi}(\frac{\omega}{2}) e^{-i\omega/2} = \sum_k \left(g_{2k-1} z^{2k} \hat{\phi}(\omega) + h_{2k-1} z^{2k} \hat{\psi}(\omega) \right), \end{cases} \quad (5.3.19)$$

где использована формулировка преобразования Фурье (5.3.2) и (5.3.4). Следовательно, взяв обратное преобразование Фурье от обеих частей в (5.3.19), мы имеем

$$\begin{cases} 2\phi(2x) = \sum_k (g_{2k} \phi(x-k) + h_{2k} \psi(x-k)), \\ 2\phi(2x-1) = \sum_k (g_{2k-1} \phi(x-k) + h_{2k-1} \psi(x-k)). \end{cases} \quad (5.3.20)$$

Ясно, что (5.3.20) эквивалентно (5.3.16). Как следствие: так как $\{g_k\}$ и $\{h_k\}$ принадлежат ℓ^1 и так как

$$V_1 = \text{clos}_{L^2(\mathbf{R})}(\phi(2 \cdot -k) : k \in \mathbf{Z}),$$

мы теперь показали, что $V_1 \subset V_0 + W_0$, так что

$$V_1 = V_0 + W_0.$$

Чтобы доказать, что это прямая сумма, мы рассмотрим

$$\sum_k a_k \phi(x - k) + \sum_k b_k \psi(x - k) = 0, \quad (5.3.21)$$

где $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$ принадлежат ℓ^2 . Тогда, применяя двухмасштабные соотношения (5.3.2) и (5.3.4), мы получаем

$$\sum_{\ell} \left(\sum_k a_k p_{\ell-2k} + \sum_k b_k q_{\ell-2k} \right) \phi(2x - \ell) = 0,$$

так что

$$\sum_k a_k p_{\ell-2k} + \sum_k b_k q_{\ell-2k} = 0, \quad \ell \in \mathbf{Z}, \quad (5.3.22)$$

ссылаясь на тот факт, что $\{\phi(2 \cdot - \ell) : \ell \in \mathbf{Z}\}$ является базисом Рисса V_1 . Теперь, взяв символы (или « z -преобразования») от обеих частей (5.3.22), мы имеем

$$A(z^2)P(z) + B(z^2)Q(z) = 0, \quad (5.3.23)$$

где A и B обозначают, соответственно, символы $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$. Итак, если также заменить z на $-z$, то, используя (5.3.23), мы приходим к линейным уравнениям

$$\begin{cases} P(z)A(z^2) + Q(z)B(z^2) = 0, \\ P(-z)A(z^2) + Q(-z)B(z^2) = 0 \end{cases}$$

с двумя неизвестными $A(z^2)$ и $B(z^2)$, где матрицей коэффициентов является $M_{P,Q}(z)$, неособенная при всех z на единичной окружности $|z| = 1$. Отсюда, $A(z^2)$ и $B(z^2)$ должны равняться нулю, и ℓ^2 -последовательности $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$ в (5.3.21) должны быть тривиальными. Это доказывает, что $V_0 \cap W_0 = \{0\}$.

Для доказательства того, что $\{\psi(\cdot - k) : k \in \mathbf{Z}\}$ является базисом Рисса W_0 , мы будем использовать теорему 3.24. В частности, так как $\{\phi(\cdot - k) : k \in \mathbf{Z}\}$ — базис Рисса V_0 , мы имеем

$$0 < A \leq \sum_k |\hat{\phi}(\omega + 2\pi k)|^2 \leq B < \infty, \quad \omega \in \mathbf{R}. \quad (5.3.24)$$

Из (5.3.4), сформулированной в терминах преобразования Фурье, следует, что

$$\begin{aligned} \sum_k |\hat{\psi}(\omega + 2\pi k)|^2 &= \sum_k \left| Q(e^{-i(\frac{\omega}{2} + \pi k)}) \right|^2 \left| \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2} + \pi k\right) \right|^2 \\ &= |Q(z)|^2 \sum_k \left| \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2} + 2\pi k\right) \right|^2 \\ &\quad + |Q(-z)|^2 \sum_k \left| \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2} + \pi + 2\pi k\right) \right|^2, \end{aligned}$$

где $z = e^{-i\omega/2}$, так что применение (5.3.24) дает

$$\begin{aligned} A\{|Q(z)|^2 + |Q(-z)|^2\} &\leq \sum_k |\hat{\psi}(\omega + 2\pi k)|^2 \\ &\leq B\{|Q(z)|^2 + |Q(-z)|^2\}. \end{aligned} \quad (5.3.25)$$

Так как $Q \in \mathcal{W}$ и он непрерывен на окружности $|z| = 1$, мы имеем

$$B' := 2 \max_{|z|=1} |Q(z)| < \infty. \quad (5.3.26)$$

С другой стороны, ввиду того что

$$\Delta_{P,Q}(z) = \det \begin{bmatrix} P(z) & Q(z) \\ P(-z) & Q(-z) \end{bmatrix} \neq 0, \quad |z| = 1,$$

мы видим, что обе функции $Q(z)$ и $Q(-z)$ не могут обращаться в нуль при одном z на единичной окружности и, следовательно, снова из непрерывности Q на окружности $|z| = 1$, мы имеем

$$A' := \min_{|z|=1} (|Q(z)|^2 + |Q(-z)|^2) > 0. \quad (5.3.27)$$

Поэтому из (5.3.25), (5.3.26) и (5.3.27) следует, что

$$AA' \leq \sum_k |\hat{\psi}(\omega + 2\pi k)|^2 \leq BB', \quad \omega \in \mathbf{R}, \quad (5.3.28)$$

или $\{\psi(\cdot - k) : k \in \mathbf{Z}\}$ является базисом Рисса W_0 . $\square$

Мы теперь должны немного остановиться и прокомментировать разложение $L^2(\mathbf{R})$ в свете теоремы 5.16.

Замечание 5.17. Пусть $\Delta_{P,Q} \neq 0$ для всех z единичной окружности, определим

$$W_j := \text{clos}_{L^2(\mathbf{R})}(\psi(2^j \cdot - k) : k \in \mathbf{Z}), \quad j \in \mathbf{Z}. \quad (5.3.29)$$

Тогда, ввиду определения V_j , $j \in \mathbf{Z}$ и утверждения $V_1 = V_0 \dot{+} W_0$ в теореме 5.16, мы имеем

$$V_{j+1} = V_j \dot{+} W_j \quad j \in \mathbf{Z}. \quad (5.3.30)$$

Отсюда, так как $\{V_j\}$ — КМА $L^2(\mathbf{R})$, следует, что семейство $\{W_j\}$ образует разложение $L^2(\mathbf{R})$ в прямую сумму, а именно:

$$L^2(\mathbf{R}) = \dots \dot{+} W_{-1} \dot{+} W_0 \dot{+} \dots \quad (5.3.31)$$

Кроме того, соотношение разложения (5.3.16) приводит нас к алгоритму разложения, писанному (1.6.9) с $a_k = g_{-k}$ и $b_k = h_{-k}$, и пара двухмасштабных соотношений (5.3.2) и (5.3.4) — к алгоритму восстановления, описанному формулой (1.6.10). (Вывод этих подробностей относительно алгоритмов разложения и восстановления будет дан в следующем параграфе.) Однако из самого скромного предположения, что $\Delta_{P,Q} \neq 0$ при $|z| = 1$, невозможно сделать никаких заключений для частотно-временного анализа.

(а) Из (5.3.3) следует, что

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} q_k \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2x - k) dx \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} q_k \hat{\phi}(0) = Q(1). \end{aligned} \quad (5.3.32)$$

Как обычно, пусть

$$\psi_{j,k}(x) := 2^{j/2} \psi(2^j x - k).$$

Тогда теорема 5.16 говорит, что для каждого $j \in \mathbf{Z}$ семейство $\{\psi_{j,k} : k \in \mathbf{Z}\}$ является базисом Рисса W_j . Однако все семейство $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbf{Z}\}$ не обязательно является базисом Рисса $L^2(\mathbf{R})$. Действительно, как показано в главе 3, для функции ψ , которая порождает базис Рисса в $L^2(\mathbf{R})$ такой, что $\hat{\psi}$ — непрерывна, ее интеграл по $(-\infty, \infty)$ должен быть равен нулю, и, ввиду (5.3.32), необходимым условием является

$$Q(1) = 0. \quad (5.3.33)$$

(б) Даже если ψ будет порождать базис Рисса $L^2(\mathbf{R})$, ψ может и не быть вэйвлетом (или, более точно, $\mathcal{R}$ -вэйвлетом), так как должен быть еще исследован вопрос о существовании двойственного $\tilde{\psi}$ для ψ . (См. определение 1.5 и пример в (1.4.1) $\mathcal{R}$ -функции, которая не имеет двойственного.) Напомним, что в любом представлении в виде ряда

$$f(x) = \sum_{j,k} c_{j,k} \psi_{j,k}(x), \quad f \in L^2(\mathbf{R}),$$

требуется двойственное $\tilde{\psi}$ функции ψ для извлечения частотно-временной информации об f из значений коэффициентов $c_{j,k}$ (см. § 1.4 и теорему 3.27).

5.4. Вэйвлеты и их двойственные

Мы продолжим наши рассуждения о разложении $L^2(\mathbf{R})$, и распространим наши усилия с тем, чтобы убедиться, что эти разложения являются *вэйвлет-разложениями*. Как указано в замечании 5.17, для этого функция ψ , управляемая рядом

Лорана $Q \in \mathcal{W}$, согласно (5.3.4), должна быть вэйвлетом с некоторым двойственным вэйвлетом $\tilde{\psi}$. В частности, Q должен удовлетворять (5.3.33). Напомним, что двухмасштабный символ $P = P_\phi \in \mathcal{W}$ также должен удовлетворять условиям (5.1.12) и (5.1.13). Отсюда P и Q с необходимостью удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} P(1) = 1 & \text{и} & P(-1) = 0, \\ Q(1) = 0. \end{cases} \quad (5.4.1)$$

Пусть G и H — ряды Лорана, определенные формулой (5.3.11). Тогда мы имеем $G, H \in \mathcal{W}$ и четыре ряда Лорана P, Q, G, H удовлетворяют тождествам в (5.3.13). Поэтому из этих тождеств и из (5.4.1) вытекает, что G также должен удовлетворять условиям

$$G^*(1) = 1 \quad \text{и} \quad G^*(-1) = 0, \quad (5.4.2)$$

где обозначение

$$G^*(z) := \overline{G(z)} = \overline{G}\left(\frac{1}{z}\right), \quad |z| = 1, \quad (5.4.3)$$

используется для наших ближайших представлений. Сходство между P и G^* , как это отмечено в (5.4.1) и (5.4.2), наводит на мысль, что

$$G^*(z) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{g}_{-n} z^n, \quad |z| = 1, \quad (5.4.4)$$

(см. (5.3.15)) также должен быть выбран как двухмасштабный символ некоторой масштабирующей функции, которая порождает по возможности отличный КМА пространства $L^2(\mathbf{R})$.

Это побуждает к следующей стратегии построения вэйвлетов и их двойственных. Мы начнем с двух допустимых двухмасштабных символов $P = P_\phi$ и $G^* = G_\phi^*$ таких, что обе

функции

$$\begin{cases} \hat{\phi}(\omega) = \prod_{k=1}^{\infty} P(e^{-i\omega/2^k}) & \text{и} \\ \hat{\tilde{\phi}}(\omega) = \prod_{k=1}^{\infty} G^*(e^{-i\omega/2^k}) \end{cases} \quad (5.4.5)$$

принадлежат $L^2(\mathbf{R})$ (см. определение 5.4 и теорему 5.5). Кроме этого, мы требуем, чтобы ϕ порождала КМА $\{V_j\}$ и $\tilde{\phi}$ порождала КМА $\{\tilde{V}_j\}$ пространства $L^2(\mathbf{R})$. Тогда, согласно теореме 5.16, выбор двух произвольных рядов Лорана Q и H , удовлетворяющих неравенствам

$$\Delta_{P,Q}(z) \neq 0 \text{ и } \Delta_{G,H}(z) \neq 0, \quad |z| = 1, \quad (5.4.6)$$

даст в результате два совершенно не связанных разложения $L^2(\mathbf{R})$ в прямую сумму. Ввиду рассуждений предыдущего параграфа мы будем использовать первое тождество в (5.3.14), чтобы установить связь между этими двумя разложениями.

Определение 5.18. Говорят, что двухмасштабные символы $P = P_\phi$ и $G^* = G_\phi^*$ «двойственные» друг другу, если они удовлетворяют тождеству

$$P(z)G(z) + P(-z)G(-z) = 1, \quad |z| = 1, \quad (5.4.7)$$

(см. (5.4.3) для установления связи между G^* и G).

Следовательно, если два ряда Лорана Q и H выбраны так, что две неособенные матрицы $M_{P,Q}(z)$ и $M_{G,H}^T(z)$ обратны друг другу на окружности $|z| = 1$, так что

$$M_{P,Q}(z) M_{G,H}^T(z) = M_{G,H}^T(z) M_{P,Q}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad |z| = 1, \quad (5.4.8)$$

то, ввиду (5.3.14) и эквивалентности частей этого тождества (см. также (5.3.12)), мы имеем

$$\begin{cases} P(z)H(z) + P(-z)H(-z) = 0, \\ G(z)Q(z) + G(-z)Q(-z) = 0, \\ Q(z)H(z) + Q(-z)H(-z) = 1, \quad |z| = 1. \end{cases} \quad (5.4.9)$$

Конечно, (5.4.8) также эквивалентно

$$\begin{cases} P(z)G(z) + Q(z)H(z) = 1, \\ P(-z)G(z) + Q(-z)H(z) = 0, \quad |z| = 1, \end{cases} \quad (5.4.10)$$

(см. (5.3.13)). В этом отношении мы имеем следующую теорему.

Теорема 5.19. Пусть P и G^* , согласно определению 5.18, — двойственные двухмасштабные символы. Тогда ряды Лорана Q и H из $\mathcal{W}$ удовлетворяют (5.4.8) тогда и только тогда, когда они выбраны из класса:

$$\begin{cases} Q(z) = z^{-1}G(-z)K(z^2) \quad \text{и} \quad H(z) = zP(-z)K^{-1}(z^2), \\ \text{где } K \in \mathcal{W}, \text{ с } K(z) \neq 0 \text{ при } |z| = 1. \end{cases} \quad (5.4.11)$$

Доказательство. Легко проверить, что любая пара Q и H из (5.4.11) удовлетворяет (5.4.8). Чтобы доказать обратное, мы будем использовать эквивалентность (5.4.8) и (5.4.10). Итак, применяя правило Крамера, мы можем выразить G и H через P и Q , а именно:

$$G(z) = \frac{Q(-z)}{\Delta_{P,Q}(z)} \quad \text{и} \quad H(z) = \frac{-P(-z)}{\Delta_{P,Q}(z)}, \quad |z| = 1 \quad (5.4.12)$$

(см. (5.3.11)), где $\Delta_{P,Q}(z) = P(z)Q(-z) - P(-z)Q(z) \neq 0$ при $|z| = 1$. Так как $\Delta_{P,Q}(z) = -\Delta_{P,Q}(-z)$, мы можем определить

$$K(z^2) := z\Delta_{P,Q}(-z), \quad |z| = 1, \quad (5.4.13)$$

так что $K \in \mathcal{W}$ по теореме 5.15 и $K(z) \neq 0$ при $|z| = 1$. Теперь (5.4.11) следует из (5.4.12) и (5.4.13). $\square$

Заметим, что по (5.4.2) и по первому тождеству в (5.4.9) пара (G^*, H^*) удовлетворяет условию

$$\begin{cases} G^*(1) = 1 & \text{и} & G^*(-1) = 0, \\ H^*(1) = 0, \end{cases} \quad (5.4.14)$$

которое является тем же самым набором условий, что и в (5.4.1) для пары (P, Q) . Кроме этого, в нашей стратегии построения вэйвлетов и двойственных вэйвлетов с помощью Q и H из класса, описываемого формулой (5.4.11), двухмасштабные символы $P = P_\phi$ и $G^* = G_\phi^*$ играют ту же ведущую роль. Следовательно, две пары (P, Q) и (G^*, H^*) являются взаимозаменяемыми. Это называется *принципом двойственности* и будет обсуждаться позже в этом параграфе весьма подробно.

Поэтому важно изучить во всех деталях два допустимых двухмасштабных символа P и G^* . Согласно определению 5.4, мы можем записать

$$\begin{cases} P(z) = \left(\frac{1+z}{2}\right)^N S(z), \\ G^*(z) = \left(\frac{1+z}{2}\right)^{\tilde{N}} \tilde{S}(z), \quad |z| = 1, \end{cases} \quad (5.4.15)$$

где N и $\tilde{N}$ — положительные целые, $S(1) = \tilde{S}(1) = 1$ и $L^\infty(0, 2\pi)$ -модули непрерывности функций $S(e^{-i\omega})$ и $\tilde{S}(e^{-i\omega})$ имеют, соответственно, порядок $O(\eta^\alpha)$ и $O(\eta^{\tilde{\alpha}})$, где $0 < \alpha, \tilde{\alpha} \leq 1$. В дальнейшем мы будем требовать, чтобы множители S и $\tilde{S}$ в (5.4.15), сверх того, удовлетворяли неравенствам

$$\begin{cases} B := \max_{|z|=1} |S(z)| < 2^{N-\frac{1}{2}}, \\ \tilde{B} := \max_{|z|=1} |\tilde{S}(z)| < 2^{\tilde{N}-\frac{1}{2}}, \end{cases} \quad (5.4.16)$$

и будем использовать стандартное обозначения χ_A для характеристической функции множества A .

Лемма 5.20. Пусть P и G^* — допустимые двумасштабные символы из (5.4.15), которые удовлетворяют (5.4.16). Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \chi_{[-2^n\pi, 2^n\pi]}(\omega) \prod_{k=1}^n P(e^{-i\omega/2^k}) G(e^{-i\omega/2^k}) \right. \quad (5.4.17)$$

$$\left. - \prod_{k=1}^{\infty} P(e^{-i\omega/2^k}) G(e^{-i\omega/2^k}) \right| d\omega = 0.$$

Доказательство. Так как многие из требуемых оценок похожи на оценки, полученные при доказательстве теоремы 5.5, мы не будем на них останавливаться. Сначала покажем, что

$$\left| \prod_{k=1}^{\infty} P(e^{-i\omega/2^k}) G(e^{-i\omega/2^k}) \right| \leq \frac{C}{(1 + |\omega|)^{1+\eta}}, \quad \omega \in \mathbf{R} \quad (5.4.18)$$

для некоторого $\eta > 0$. Получение этой оценки достаточно просто. Действительно, для любого положительного целого n_0 и всех ω таких, что $2^{n_0} < |\omega|/\pi \leq 2^{n_0+1}$, из первого предположения в (5.4.16) следует, что

$$\left| \prod_{k=1}^{n_0} S(e^{-i\omega/2^k}) \right| \leq B^{n_0} \leq C_1 \left(1 + \frac{|\omega|}{\pi} \right)^{\log_2 B}$$

$$\leq C'_1 (1 + |\omega|)^{\log_2 B} \leq C'_1 (1 + |\omega|)^{N - \frac{1}{2} - \eta_1}$$

для некоторого $\eta_1 > 0$. Кроме того, для любого $K > n_0$ мы имеем из условия допустимости

$$\left| \prod_{k=n_0+1}^K S(e^{-i\omega/2^k}) \right| = \prod_{k=n_0+1}^K |1 + (S(e^{-i\omega/2^k}) - 1)|$$

$$\leq \prod_{k=n_0+1}^K \left| 1 + O\left(\frac{|\omega|^\alpha}{2^{k\alpha}}\right) \right| \leq C_2.$$

Следовательно,

$$\left| \prod_{k=1}^{\infty} S(e^{-i\omega/2^k}) \right| \leq C_1 C_2 (1 + |\omega|)^{N - \frac{1}{2} - \eta_1},$$

так что

$$\begin{aligned} \left| \prod_{k=1}^{\infty} P(e^{-i\omega/2^k}) \right| &\leq C \left| \frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} \right|^N (1 + |\omega|)^{N - \frac{1}{2} - \eta_1} \\ &\leq C(1 + |\omega|)^{-\frac{1}{2} - \eta_1}. \end{aligned}$$

Так как такая же оценка с некоторым $\eta_2 > 0$ справедлива и для G , то мы получаем (5.4.18) с $\eta = \eta_1 + \eta_2$.

Далее мы покажем, что существуют такие $C > 0$ и $\eta > 0$, что для любого достаточно большого положительного целого n и $|\omega| \leq 2^n \pi$, мы имеем

$$\left| \prod_{k=1}^n P(e^{-i\omega/2^k}) G(e^{-i\omega/2^k}) \right| \leq \frac{C}{(1 + |\omega|)^{1+\eta}}. \quad (5.4.19)$$

Чтобы получить (5.4.19), мы применим те же аргументы, что и выше, для $|\omega| \leq 2^n \pi$:

$$\begin{aligned} \left| \prod_{k=1}^n P(e^{-i\omega/2^k}) \right| &= \left| \frac{2 \sin(\omega/2)}{2^{n+1} \sin(\omega/2^{n+1})} \right|^N \left| \prod_{k=1}^n S(e^{-i\omega/2^k}) \right| \\ &\leq C(1 + |\omega|)^{-\frac{1}{2} - \eta_1}, \end{aligned}$$

где используются неравенства $\frac{2}{\pi}|\omega| \leq |\sin \omega| \leq |\omega|$ при условии, что $|\omega| \leq \frac{\pi}{2}$. Такая же оценка может быть получена и для G .

Мы теперь перейдем к доказательству (5.4.17). Сначала заметим, что ввиду (5.4.18) функция

$$\prod_{k=1}^{\infty} P(e^{-i\omega/2^k}) G(e^{-i\omega/2^k})$$

принадлежит $L^1(\mathbf{R})$. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно заданное число. Возьмем $M > 0$ таким, что

$$\int_{|\omega|>M} (1 + |\omega|)^{-1-2\eta} d\omega < \varepsilon.$$

Тогда разобьем интеграл в (5.4.17) на сумму двух интегралов. В интеграле по области $|\omega| \leq M$ подынтегральная функция равномерно стремится к нулю, а интеграл по области $|\omega| > M$ мы ограничиваем суммой двух интегралов, один из которых может быть оценен по формуле (5.4.18), в то время как другой по формуле (5.4.19). Это завершает доказательство леммы. $\square$ Напомним, что два двухмасштабных символа P и G^* приводят нас к двум масштабирующим функциям ϕ и $\tilde{\phi}$, как в (5.4.5). Хотя ϕ и $\tilde{\phi}$ могут порождать два различных КМА пространства $L^2(\mathbf{R})$, они еще могут быть связаны в следующем смысле.

Определение 5.21. *Масштабирующие функции ϕ и $\tilde{\phi}$, порождающие, возможно, различные КМА $\{V_j\}$ и $\{\tilde{V}_j\}$ соответственно, пространства $L^2(\mathbf{R})$, называются «двойственными масштабирующими функциями», если они удовлетворяют условию*

$$\langle \phi(\cdot - j), \tilde{\phi}(\cdot - k) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x - j) \overline{\tilde{\phi}(x - k)} dx = \delta_{j,k}, \quad j, k \in \mathbf{Z}. \quad (5.4.20)$$

Далее мы определим соотношение между двойственными масштабирующими функциями и допустимыми двухмасштабными символами, которые двойственны друг другу.

Теорема 5.22. *Пусть $P = P_\phi$ и $G^* = G_\phi^*$ — два допустимых двухмасштабных символа, как определено в (5.4.15). Пусть также ϕ и $\tilde{\phi}$ — две соответствующие масштабирующие функции, преобразования Фурье которых даются формулой (5.4.5). Если ϕ и $\tilde{\phi}$ — двойственные масштабирующие функ-*

ции согласно определению 5.21, то P и G^* двойственны друг другу в смысле (5.4.7). Обратно, если P и G^* двойственны друг другу и удовлетворяют (5.4.16), то ϕ и $\tilde{\phi}$ — двойственные масштабирующие функции.

Доказательство. Пусть ϕ и $\tilde{\phi}$ — двойственные масштабирующие функции. Тогда для каждого $n \in \mathbf{Z}$ мы имеем

$$\begin{aligned} \delta_{n,0} &= \langle \phi, \tilde{\phi}(\cdot - n) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(\omega) \overline{\hat{\tilde{\phi}}(\omega)} e^{in\omega} d\omega \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} \hat{\phi}(\omega) \overline{\hat{\tilde{\phi}}(\omega)} e^{in\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(\omega + 2\pi k) \overline{\hat{\tilde{\phi}}(\omega + 2\pi k)} \right) e^{in\omega} d\omega, \end{aligned}$$

так что

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(\omega + 2\pi k) \overline{\hat{\tilde{\phi}}(\omega + 2\pi k)} = 1 \quad \text{п.в.} \quad (5.4.21)$$

Отсюда, положив $z = e^{-i\omega/2}$ и применяя (5.4.21), мы получаем

$$\begin{aligned} \delta_{n,0} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(z) \overline{G^*(z)} \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \overline{\hat{\tilde{\phi}}\left(\frac{\omega}{2}\right)} e^{in\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_k \left[P(z) G(z) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2} + 2\pi k\right) \overline{\hat{\tilde{\phi}}\left(\frac{\omega}{2} + 2\pi k\right)} \right. \\ &\quad \left. + P(-z) G(-z) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2} + \pi + 2\pi k\right) \overline{\hat{\tilde{\phi}}\left(\frac{\omega}{2} + \pi + 2\pi k\right)} \right] e^{in\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [P(z) G(z) + P(-z) G(-z)] e^{in\omega} d\omega, \end{aligned}$$

так что ввиду непрерывности P и G на окружности $|z| = 1$ мы имеем

$$P(z)G(z) + P(-z)G(-z) = 1, \quad |z| = 1.$$

Таким образом, P_ϕ и G_ϕ^* двойственны друг другу.

Чтобы доказать обратное утверждение, мы зафиксируем $j \in \mathbf{Z}$ и рассмотрим для любого положительного целого n

$$I_n := \frac{1}{2\pi} \int_{-2^n\pi}^{2^n\pi} \left(\prod_{k=1}^n P(e^{-i\omega/2^k}) G(e^{-i\omega/2^k}) \right) e^{ij\omega} d\omega. \quad (5.4.22)$$

Затем с помощью замены переменных $x = 2^{-n}\omega$ мы имеем

$$\begin{aligned} I_n &= 2^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\prod_{k=1}^n P(e^{-i2^{n-k}x}) G(e^{-i2^{n-k}x}) \right) e^{ij2^n x} dx \\ &= 2^n \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \left(\prod_{k=1}^{n-1} P(e^{-i2^{n-k}x}) G(e^{-i2^{n-k}x}) \right) \\ &\quad \times [P(e^{-ix})G(e^{-ix}) + P(-e^{-ix})G(-e^{-ix})] e^{ij2^n x} dx. \end{aligned} \quad (5.4.23)$$

Теперь, привлекая двойственность P и G^* и совершая замену переменных $y = 2x$, мы получаем

$$\begin{aligned} I_n &= 2^{n-1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\prod_{k=1}^{n-1} P(e^{-i2^{n-k-1}y}) G(e^{-i2^{n-k-1}y}) \right) e^{ij2^{n-1}y} dy \\ &= 2^{n-1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\prod_{k=1}^{n-1} P(e^{-i2^{(n-1)-k}y}) G(e^{-i2^{(n-1)-k}y}) \right) e^{ij2^{n-1}y} dy. \end{aligned} \quad (5.4.24)$$

Отсюда, сравнивая (5.4.24) и (5.4.23), мы имеем $I_n = I_{n-1}$. Так как это справедливо для любых целых положительных n , то

$$I_n = I_{n-1} = \cdots = I_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ij\omega} d\omega = \delta_{j,0}. \quad (5.4.25)$$

Окончательно, применяя лемму 5.20, результат формулы (5.4.25) дает

$$\begin{aligned}\langle \phi, \tilde{\phi}(\cdot - j) \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(\omega) \overline{\hat{\phi}(\omega)} e^{ij\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\prod_{k=1}^{\infty} P(e^{-i\omega/2^k}) G(e^{-i\omega/2^k}) \right) e^{ij\omega} d\omega \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = I_0 = \delta_{j,0}.\end{aligned}$$

Это завершает доказательство теоремы. $\square$

Давайте теперь выберем любые Q и H из класса функций в (5.4.11). По теореме 5.19 матрицы $M_{P,Q}$ и M_{G^*,H^*} обратимы на окружности $|z| = 1$ и, следовательно, применима теорема 5.16. В частности, рассматривая функции

$$\begin{cases} \psi(x) := \sum_k q_k \phi(2x - k), \\ \tilde{\psi}(x) := \sum_k \bar{h}_{-k} \tilde{\phi}(2x - k), \end{cases} \quad (5.4.26)$$

где

$$\begin{cases} Q(z) := \frac{1}{2} \sum_k q_k z^k, \\ H^*(z) := \frac{1}{2} \sum_k \bar{h}_{-k} z^k, \end{cases} \quad (5.4.27)$$

(см. (5.4.3) для аналогичного обозначения G^*) и, положив

$$\begin{cases} \psi_{j,k} := 2^{j/2} \psi(2^j \cdot - k), \\ \tilde{\psi}_{j,k} := 2^{j/2} \tilde{\psi}(2^j \cdot - k), \end{cases} \quad (5.4.28)$$

так же как

$$\begin{cases} W_j := \text{clos}_{L^2(\mathbf{R})}(\psi_{j,k} : k \in \mathbf{Z}), \\ \widetilde{W}_j := \text{clos}_{L^2(\mathbf{R})}(\tilde{\psi}_{j,k} : k \in \mathbf{Z}), \end{cases} \quad (5.4.29)$$

мы имеем

$$\begin{cases} V_{j+1} = V_j \dot{+} W_j, \\ \widetilde{V}_{j+1} = \widetilde{V}_j \dot{+} \widetilde{W}_j, \end{cases} \quad j \in \mathbf{Z}. \quad (5.4.30)$$

Здесь, как обычно,

$$\begin{cases} V_j := \text{clos}_{L^2(\mathbf{R})}(\phi_{j,k} : k \in \mathbf{Z}), \\ \widetilde{V}_j := \text{clos}_{L^2(\mathbf{R})}(\tilde{\phi}_{j,k} : k \in \mathbf{Z}), \end{cases} \quad (5.4.31)$$

где

$$\begin{cases} \phi_{j,k} := 2^{j/2} \phi(2^j \cdot -k), \\ \tilde{\phi}_{j,k} := 2^{j/2} \tilde{\phi}(2^j \cdot -k) \end{cases} \quad (5.4.32)$$

с ϕ и $\tilde{\phi}$ — масштабирующими функциями, двухмасштабными символами которых, соответственно, являются P и G^* .

Далее мы покажем, что если допустимые двухмасштабные символы P и G^* двойственны друг другу в том смысле, что удовлетворяется тождество

$$P(z)G(z) + P(-z)G(-z) = 1, \quad |z| = 1,$$

то $\{\psi_{j,k}\}$ и $\{\tilde{\psi}_{j,k}\}$ не только двойственны друг другу, но они также обладают свойством ортогональности.

Теорема 5.23. Пусть $P = P_\phi$ и $G^* = G_{\tilde{\phi}}^*$ — два допустимых двухмасштабных символа, которые удовлетворяют (5.4.16) и двойственны друг другу. Тогда для любых $Q, H \in \mathcal{W}$, выбранных из класса (5.4.11), функции $\phi, \tilde{\phi}, \psi$ и $\tilde{\psi}$, определенные формулами (5.4.5) и (5.4.26), удовлетворяют равенствам

$$\langle \psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{\ell,m} \rangle = \delta_{j,\ell} \delta_{k,m}, \quad j, k, \ell, m \in \mathbf{Z} \quad (5.4.33)$$

и

$$\begin{cases} \langle \phi_{j,k}, \tilde{\psi}_{j,\ell} \rangle = 0, \\ \langle \tilde{\phi}_{j,k}, \psi_{j,\ell} \rangle = 0, \quad j, k, \ell \in \mathbf{Z}, \end{cases} \quad (5.4.34)$$

таким образом $V_j \perp \widetilde{W}_j$ и $\widetilde{V}_j \perp W_j$ для всех $j \in \mathbf{Z}$.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $j = \ell$ в (5.4.33). В этом случае из третьего равенства в (5.4.9) и из (5.4.21), снова используя обозначение $z = e^{-i\omega/2}$, мы имеем

$$\begin{aligned} \langle \psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{j,m} \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}(\omega) \overline{\widehat{\tilde{\psi}}(\omega)} e^{-i(k-m)\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q(z) \overline{H^*(z)} \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \overline{\widehat{\tilde{\phi}}\left(\frac{\omega}{2}\right)} e^{-i(k-m)\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\ell} \int_0^{2\pi} \left[Q(e^{-i(\frac{\omega}{2} + \pi\ell)}) H(e^{-i(\frac{\omega}{2} + \pi\ell)}) \right. \\ &\quad \left. \times \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2} + \pi\ell\right) \overline{\widehat{\tilde{\phi}}\left(\frac{\omega}{2} + \pi\ell\right)} \right] e^{-i(k-m)\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{\ell} \left[Q(z) H(z) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2} + 2\pi\ell\right) \overline{\widehat{\tilde{\phi}}\left(\frac{\omega}{2} + 2\pi\ell\right)} \right. \\ &\quad \left. + Q(-z) H(-z) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2} + \pi + 2\pi\ell\right) \overline{\widehat{\tilde{\phi}}\left(\frac{\omega}{2} + \pi + 2\pi\ell\right)} \right] e^{-i(k-m)\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [Q(z) H(z) + Q(-z) H(-z)] e^{-i(k-m)\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i(k-m)\omega} d\omega = \delta_{k,m}. \end{aligned} \quad (5.4.35)$$

Обращаясь к общему случаю, мы видим, применяя первые два равенства в (5.4.9), что те же преобразования, что были проведены выше, дают также (5.4.34), так что

$$V_j \perp \widetilde{W}_j \quad \text{и} \quad \widetilde{V}_j \perp W_j, \quad j \in \mathbf{Z}. \quad (5.4.36)$$

Отсюда, если $j < \ell$, то

$$\psi_{j,k} \in W_j \subset V_{j+1} \subset V_\ell,$$

и по первому утверждению в (5.4.36) мы имеем

$$\langle \psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{\ell,m} \rangle = 0, \quad k, m \in \mathbf{Z}.$$

Для $j > \ell$ могут быть сделаны такие же заключения с использованием второго утверждения в (5.4.36). Это завершает доказательство теоремы. $\square$

Как следствие биортогонального свойства (5.4.33), оба семейства $\{\psi_{j,k}\}$ и $\{\tilde{\psi}_{j,k}\}$ ℓ^2 -линейно независимы. Кроме того, так как

$$\begin{aligned} L^2(\mathbf{R}) &= \cdots \dot{+} W_{-1} \dot{+} W_0 \dot{+} W_1 \dot{+} \cdots \\ &= \cdots \dot{+} \widetilde{W}_{-1} \dot{+} \widetilde{W}_0 \dot{+} \widetilde{W}_1 \dot{+} \cdots, \end{aligned} \quad (5.4.37)$$

оба семейства $\{\psi_{j,k}\}$ и $\{\tilde{\psi}_{j,k}\}$ — базисы $L^2(\mathbf{R})$. В сущности, из условий теоремы 5.23 следует, что оба семейства $\{\psi_{j,k}\}$ и $\{\tilde{\psi}_{j,k}\}$ являются также каркасами $L^2(\mathbf{R})$. Мы не собираемся давать доказательство этого факта, так как не имеем в своем распоряжении достаточно простых методов. Применяя теорему 3.20, мы можем теперь заключить, что $\{\psi_{j,k}\}$ и $\{\tilde{\psi}_{j,k}\}$ действительно базисы Рисса $L^2(\mathbf{R})$. Таким образом, мы имеем следующий результат.

Теорема 5.24. *Из условий теоремы 5.23 следует, что две функции $\psi \in W_0$ и $\tilde{\psi} \in \widetilde{W}_0$ — вэйвлеты, двойственные друг другу.*

Следовательно, в соответствии с теоремой 3.27 каждая функция $f \in L^2(\mathbf{R})$ имеет два (единственных) представления в виде вэйвлет-рядов:

$$\begin{cases} f(x) = \sum_{j,k} \langle f, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle \psi_{j,k}(x), \\ f(x) = \sum_{j,k} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \tilde{\psi}_{j,k}(x), \end{cases} \quad (5.4.38)$$

где коэффициенты — это значения ИВП функции f относительно базисных вэйвлетов $\tilde{\psi}$ и ψ соответственно, вычисленные в масштабно-временных точках

$$(b, a) = \left(\frac{k}{2^j}, \frac{1}{2^j} \right)$$

(см. § 1.4 и теорему 3.27).

Поэтому очень важно получить эффективные алгоритмы для нахождения этих значений ИВП от f и для восстановления f по этим значениям ИВП. Оказывается, что двухмасштабные последовательности $\{\bar{g}_{-n}\}$ и $\{\bar{h}_{-n}\}$ (двухмасштабные символы которых $G^* = G_\phi^*$ и H^* даются формулами (5.4.4) и (5.4.27)) могут быть использованы для получения ИВП значений $\langle f, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle$. Эта вычислительная схема, называемая *алгоритмом разложения*, есть следствие соотношения разложения (5.3.16) в теореме 5.16. С другой стороны, двухмасштабные последовательности $\{p_n\}$ и $\{q_n\}$ (двухмасштабные символы которых $P = P_\phi$ и Q даются формулами (5.3.1) и (5.3.3)) могут быть использованы для восстановления f по ее ИВП значениям $\langle f, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle$. Эта вычислительная схема, называемая *алгоритмом восстановления*, есть следствие двухмасштабных соотношений (5.3.2) и (5.3.4). Если мы хотим использовать ψ вместо $\tilde{\psi}$ в качестве базисного вэйвлета, то двухмасштабные последовательности $\{p_n\}$ и $\{q_n\}$ используются в алгоритме разложения, в то время как двухмасштабные последовательности $\{\bar{g}_{-n}\}$ и $\{\bar{h}_{-n}\}$ — в алгоритме восстановления.

Другими словами, роли пар

$$(\{\bar{g}_{-n}\}, \{\bar{h}_{-n}\}) \quad \text{и} \quad (\{p_n\}, \{q_n\})$$

меняются в целях разложения или восстановления, если ИВП информация

$$\left\{ (W_{\tilde{\psi}} f) \left(\frac{k}{2^j}, \frac{1}{2^j} \right) : j, k \in \mathbf{Z} \right\} \quad (5.4.39)$$

заменяется ИВП информацией

$$\left\{ (W_\psi f) \left(\frac{k}{2^j}, \frac{1}{2^j} \right) : j, k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Это называется *принципом двойственности* в вэйвлет-разложении-восстановлении. В результате нет необходимости описывать обе ситуации.

Из этого следует, что мы будем обсуждать только ИВП в (5.4.39), использующее $\tilde{\psi}$ как базисный вэйвлет. Пусть для любой $f \in L^2(\mathbf{R})$ f_N — некоторая проекция f на V_N для фиксированного $N \in \mathbf{Z}$. Заметим, что эта проекция не обязательно должна быть $L^2(\mathbf{R})$ ортогональной проекцией. Мы можем рассматривать V_N как *пространство выборки* и f_N как *данные* (или измерения) f в V_N . Так как

$$\begin{aligned} V_N &= W_{N-1} \dot{+} V_{N-1} \\ &= \dots = W_{N-1} \dot{+} \dots \dot{+} W_{N-M} \dot{+} V_{N-M} \end{aligned} \quad (5.4.40)$$

для любого положительного целого M , то f_N имеет *единственное* разложение:

$$f_N(x) = g_{N-1}(x) + g_{N-2}(x) + \dots + g_{N-M}(x) + f_{N-M}(x), \quad (5.4.41)$$

где

$$\begin{cases} g_j(x) \in W_j, & j = N-M, \dots, N-1, \\ f_{N-M}(x) \in V_{N-M}. \end{cases} \quad (5.4.42)$$

Давайте запишем

$$\begin{cases} f_j(x) = \sum_k c_k^j \phi(2^j x - k) \in V_j, & \text{с} \\ \mathbf{c}^j := \{c_k^j\}, & k \in \mathbf{Z} \end{cases} \quad (5.4.43)$$

и

$$\begin{cases} g_j(x) = \sum_k d_k^j \psi(2^j x - k), & \text{с} \\ \mathbf{d}^j := \{d_k^j\}, & k \in \mathbf{Z}. \end{cases} \quad (5.4.44)$$

Тогда разложение в (5.4.41) единственным образом определяется последовательностями $\mathbf{c}^j$ и $\mathbf{d}^j$ в (5.4.43) и (5.4.44). Важно отметить, что

$$d_k^j = (W_{\tilde{\psi}} f_N) \left(\frac{k}{2^j}, \frac{1}{2^j} \right), \quad j, k \in \mathbf{Z} \quad (5.4.45)$$

— это значения ИВП функции f_N , использующего $\tilde{\psi}$ в качестве базисного вэйвлета. Заметим также, что разложение в (5.4.41) зависит от данных. В схемах вэйвлет-разложения и вэйвлет-восстановления, которые будут рассмотрены ниже, мы будем использовать *цифровые представления* $\mathbf{c}^j, \mathbf{d}^j$ для $f_j(x)$ и $g_j(x)$ соответственно.

Для упрощения наших рассуждений (и чтобы избежать возможной путаницы) мы введем обозначения

$$\begin{cases} a_n := \frac{1}{2} g_{-n}, \\ b_n := \frac{1}{2} h_{-n}, \end{cases} \quad (5.4.46)$$

где $\{\bar{g}_{-n}\}$ и $\{\bar{h}_{-n}\}$ — двухмасштабные последовательности, соответствующие двухмасштабным символам $G^* = G_{\tilde{\phi}}^*$ и H^* , соответственно (см. (5.4.4) и (5.4.27)). Отсюда соотношение разложения (5.3.16) в теореме 5.16 теперь принимает вид

$$\phi(2x - \ell) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{a_{\ell-2k} \phi(x - k) + b_{\ell-2k} \psi(x - k)\}, \quad \ell \in \mathbf{Z}. \quad (5.4.47)$$

Теперь давайте построим алгоритмы разложения и восстановления, приведенные в (1.6.9) и (1.6.10) в главе 1.

(а) Алгоритм разложения

$$\begin{cases} c_k^{j-1} = \sum_{\ell} a_{\ell-2k} c_{\ell}^j, \\ d_k^{j-1} = \sum_{\ell} b_{\ell-2k} c_{\ell}^j. \end{cases} \quad (5.4.48)$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & \mathbf{d}^{N-1} & & \mathbf{d}^{N-2} & & \mathbf{d}^{N-M} \\ & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\ \mathbf{c}^N & \longrightarrow & \mathbf{c}^{N-1} & \longrightarrow & \mathbf{c}^{N-2} & \longrightarrow & \dots \longrightarrow \mathbf{c}^{N-M} \end{array}$$

Доказательство. Применяя соотношение разложения (5.4.47), мы имеем

$$\begin{aligned} f_j(x) &= \sum_{\ell} c_{\ell}^j \phi(2^j x - \ell) \\ &= \sum_{\ell} c_{\ell}^j \left[\sum_k \{a_{\ell-2k} \phi(2^{j-1} x - k) + b_{\ell-2k} \psi(2^{j-1} x - k)\} \right] \\ &= \sum_k \left\{ \sum_{\ell} a_{\ell-2k} c_{\ell}^j \right\} \phi(2^{j-1} x - k) \\ &\quad + \sum_k \left\{ \sum_{\ell} b_{\ell-2k} c_{\ell}^j \right\} \psi(2^{j-1} x - k). \end{aligned}$$

Следовательно, из разложения $f_j(x) = f_{j-1}(x) + g_{j-1}(x)$, где $f_{j-1}(x)$ и $g_{j-1}(x)$ заданы так же, как в (5.4.43) и (5.4.44), но с заменой j на $j-1$, вытекает, что

$$\begin{aligned} &\sum_k \left\{ \sum_{\ell} a_{\ell-2k} c_{\ell}^j - c_k^{j-1} \right\} \phi(2^{j-1} x - k) \\ &\quad + \sum_k \left\{ \sum_{\ell} b_{\ell-2k} c_{\ell}^j - d_k^{j-1} \right\} \psi(2^{j-1} x - k) = 0, \end{aligned}$$

так что (5.4.48) следует, если учесть ℓ^2 -линейную независимость $\{\phi_{j-1,k} : k \in \mathbf{Z}\}$ и $\{\psi_{j-1,k} : k \in \mathbf{Z}\}$ и тот факт, что $V_{j-1} \cap W_{j-1} = \{0\}$. $\square$

(6) Алгоритм восстановления

$$c_k^j = \sum_{\ell} [p_{k-2\ell} c_{\ell}^{j-1} + q_{k-2\ell} d_{\ell}^{j-1}]. \quad (5.4.49)$$

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{d}^{N-M} & & \mathbf{d}^{N-M+1} & & \mathbf{d}^{N-1} & & \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ \mathbf{c}^{N-M} & \longrightarrow & \mathbf{c}^{N-M+1} & \longrightarrow & \dots & \mathbf{c}^{N-1} & \longrightarrow & \mathbf{c}^N \end{array}$$

Доказательство. Применяя двухмасштабные соотношения (5.3.2) и (5.3.4), мы имеем

$$\begin{aligned} f_{j-1}(x) + g_{j-1}(x) &= \sum_{\ell} [c_{\ell}^{j-1} \phi(2^{j-1}x - \ell) + d_{\ell}^{j-1} \psi(2^{j-1}x - \ell)] \\ &= \sum_{\ell} \left[c_{\ell}^{j-1} \sum_k p_k \phi(2^j x - 2\ell - k) \right. \\ &\quad \left. + d_{\ell}^{j-1} \sum_k q_k \phi(2^j x - 2\ell - k) \right] \\ &= \sum_{\ell} \sum_k (c_{\ell}^{j-1} p_{k-2\ell} + d_{\ell}^{j-1} q_{k-2\ell}) \phi(2^j x - k) \\ &= \sum_k \left\{ \sum_{\ell} [p_{k-2\ell} c_{\ell}^{j-1} + q_{k-2\ell} d_{\ell}^{j-1}] \right\} \phi(2^j x - k). \end{aligned}$$

Так как $f_{j-1}(x) + g_{j-1}(x) = f_j(x)$, то мы получим (5.4.49), ссылаясь на формулу представления $f_j(x)$ (5.4.43) и l^2 -линейную независимость $\{\phi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$. $\square$

Заметим, что оба алгоритма — алгоритм разложения и алгоритм восстановления — используют схему скользящего среднего (СС) с той особенностью, что для разложения требуется «сгущающая выборка», а для восстановления — «разрезающая выборка». При сгущающей выборке мы просто сохраняем каждый второй член последовательности на выходе. Более точно, в (5.4.48) сохраняются только члены с

четными индексами и (четные) индексы последовательности на выходе делятся пополам. При разрежающей выборке перед применением схемы СС между каждыми двумя членами последовательностей на входе ставится нуль. Более точно, в (5.4.49) индексы последовательностей на входе $\{c_\ell^{j-1}\}$ и $\{d_\ell^{j-1}\}$ умножаются на 2, и на место членов с нечетными индексами ставятся нули; таким образом, получается новая последовательность на входе (см. (4.3.11), алгоритм 4.7 в главе 4).

5.5. Линейно-фазовая фильтрация

Масштабирующие функции и вэйвлеты могут рассматриваться как фильтрующие функции. Если пространство $L^2(\mathbf{R})$ представляет пространство всех аналоговых сигналов с конечной энергией и $\{V_j\}$ образует КМА в $L^2(\mathbf{R})$, то выборка аналогового сигнала $f \in L^2(\mathbf{R})$ осуществляется в виде аппроксимации (которая может быть или не быть интерполяцией) из некоторого *пространства выборки* V_N , где N должно быть выбрано достаточно большим, чтобы избежать неполноценной выборки. Особое значение следует придать тому, что если даже применяется процедура цифровой выборки, то сигнал $f_N \in V_N$ еще является аналоговым сигналом, хотя f_N имеет представление в виде ряда по масштабирующей функции, как это описано в формуле (5.4.43), где последовательность коэффициентов $\mathbf{c}^N = \{c_k^N\}$ определена в терминах цифровых выборок. Например, если пространство сплайнов m -го порядка V_N^m с последовательностью узлов $2^{-N}\mathbf{Z}$ используется в качестве пространства выборки V_N , то последовательность коэффициентов $\mathbf{c}^N$ может быть получена с помощью процедуры конечного скользящего среднего и даст нам квазиинтерполянт или интерполянт f_N функции f , как это было изучено в § 4.5 и § 4.6. В любом случае аналоговая модель $f_N \in V_N$ функции f может быть разложена как в (5.4.41), где для каждого $j = N - M, \dots, N - 1$ $g_j(x)$ дает локализованную частотно-временную информацию об f_N в

j -й октаве (или частотном диапазоне). Важность такого метода блока фильтров состоит в том, что детали сигнала f_N рассортировываются и хранятся в различных подпространствах W_j пространства V_N для лучшего анализа. Например, при сжатии информации простым переходом к каждой октаве мы можем достичь существенной экономии. Что мы действительно под этим понимаем — это то, что после стирания информации очень малой величины в каждом подпространстве W_j , гораздо меньше информации должно быть сохранено или передано, и при этом алгоритм восстановления, примененный позже, даст хорошее приближение исходного сигнала. Конечно, существует много и других важных применений такого рода. Однако, так как каждая компонента g_j должна вносить изменения, мы не будем иметь совершенного восстановления функции, поэтому особое внимание следует уделять возможным искажениям сигнала. Восстановленный сигнал — это не что иное, как вэйвлет-ряд, который в свою очередь означает, что он является результатом линейной фильтрации. Поэтому можно избежать искажений, если фильтр имеет линейную или, по крайней мере, обобщенную линейную фазу.

Определение 5.25. Пусть $f \in L^2(\mathbb{R})$. Тогда говорят, что f имеет «линейную фазу», если ее преобразование Фурье удовлетворяет равенству

$$\hat{f}(\omega) = \pm |\hat{f}(\omega)| e^{-ia\omega} \quad \text{п.в.}, \quad (5.5.1)$$

где a — некоторая вещественная константа и знак $+$ или $-$ не зависит от ω . Также говорят, что f имеет «обобщенную линейную фазу», если

$$\hat{f}(\omega) = F(\omega) e^{-i(a\omega+b)} \quad \text{п.в.}, \quad (5.5.2)$$

где $F(\omega)$ — вещественная функция, a и b — вещественные константы. Константа a в (5.5.1) и (5.5.2) называется фазой $\hat{f}$.

Пример 5.26. Преобразование Фурье B -сплайна m -го порядка дается формулой

$$\hat{N}_m(\omega) = \left(\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} \right)^m e^{-im\omega/2},$$

отсюда N_m имеет линейную фазу при четных m и обобщенную линейную фазу при всех m . Фаза $\hat{N}_m$ равняется $m/2$.

Определение 5.27. Пусть $\{a_n\} \in \ell^1$ и $A(e^{-i\omega})$ — его дискретное преобразование Фурье (или ряд Фурье). Тогда говорят, что $\{a_n\}$ имеет «линейную фазу», если

$$A(e^{-i\omega}) = \pm |A(e^{-i\omega})| e^{-in_0\omega}, \quad \omega \in \mathbf{R}, \quad (5.5.3)$$

где $n_0 \in \frac{1}{2}\mathbf{Z}$ и знаки $+$ или $-$ не зависят от ω . Также говорят, что $\{a_n\}$ имеет «обобщенную линейную фазу», если

$$A(e^{-i\omega}) = F(\omega) e^{-i(n_0\omega+b)}, \quad \omega \in \mathbf{R} \quad (5.5.4)$$

для некоторой вещественной функции $F(\omega)$, $n_0 \in \frac{1}{2}\mathbf{Z}$ и $b \in \mathbf{R}$. Значение n_0 в формулах (5.5.3) и (5.5.4) называется фазой имвола $\{a_n\}$.

Давайте сначала дадим характеристику функциям и последовательностям с обобщенными линейными фазами.

Лемма 5.28.

(а) Функция $f \in L^2(\mathbf{R})$ имеет обобщенную линейную фазу в смысле формулы (5.5.2), где $a, b \in \mathbf{R}$, тогда и только тогда, когда $e^{ib}f(x)$ является «кососимметричной» относительно a в том смысле, что

$$e^{ib}f(a+x) = \overline{e^{ib}f(a-x)}, \quad x \in \mathbf{R}. \quad (5.5.5)$$

(б) Последовательность $\{a_n\} \in \ell^1$ имеет обобщенную линейную фазу в смысле формулы (5.5.4), где $n_0 \in \frac{1}{2}\mathbf{Z}$ и $b \in \mathbf{R}$

тогда и только тогда, когда $\{e^{ib}a_n\}$ является «кососимметричной» относительно n_0 в том смысле, что

$$e^{ib}a_n = \overline{e^{ib}a_{2n_0-n}}, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad (5.5.6)$$

Доказательство. (а) Предположим, что $f \in L^2(\mathbf{R})$ удовлетворяет (5.5.2). Тогда

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i(a\omega+b)} e^{ix\omega} d\omega$$

или, что эквивалентно,

$$e^{ib}f(a-x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-ix\omega} d\omega. \quad (5.5.7)$$

Так как $F(\omega)$ — вещественная, утверждение (5.5.5) получится в результате приравнивания (5.5.7) своему комплексно-сопряженному значению.

Обратно, если справедливо (5.5.5), то, взяв преобразование Фурье от обеих частей (5.5.5), получим

$$\begin{aligned} e^{ib}\hat{f}(\omega)e^{ia\omega} &= e^{-ib} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(a-x)} e^{-i\omega x} dx \\ &= e^{-ib} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(a-x)} e^{i\omega x} dx = \overline{e^{ib}\hat{f}(\omega)e^{ia\omega}}. \end{aligned}$$

Отсюда эта величина — вещественная, и мы получаем (5.5.2), взяв эту вещественную функцию в качестве $F(\omega)$.

(б) Предположим, что $\{a_n\} \in \ell^1$ удовлетворяет (5.5.4). Тогда мы имеем

$$e^{i(n_0\omega+b)}A(e^{-i\omega}) = F(\omega) = \overline{F(\omega)} = e^{-i(n_0\omega+b)}\overline{A(e^{-i\omega})}$$

или, что эквивалентно,

$$e^{i2n_0\omega}e^{ib}A(e^{-i\omega}) = \overline{e^{ib}A(e^{-i\omega})}. \quad (5.5.8)$$

Следовательно, утверждение (5.5.6) следует из сравнения коэффициентов при $e^{in\omega}$ в (5.5.8).

Обратно, если выполняется (5.5.6), то мы имеем (5.5.8), и поэтому

$$e^{i(n_0\omega+b)}A(e^{-i\omega}) = \overline{e^{i(n_0\omega+b)}A(e^{-i\omega})},$$

и мы обозначаем это вещественное выражение через $F(\omega)$. Это дает (5.5.4). $\square$

Замечание. Обозначение «кососимметричности» в (5.5.5) и (5.5.6) не очень удовлетворительно ввиду необходимости использования комплексной сопряженности. Однако, когда $f(x)$ — вещественная, ясно, что для выполнения (5.5.5) e^{i2b} также должно быть вещественным, или $b = \frac{1}{2}\pi k$, где $k \in \mathbf{Z}$. Таким образом, (5.5.5) принимает вид

$$(1^\circ) \quad f(a+x) = f(a-x), \quad x \in \mathbf{R} \quad (\text{симметрия})$$

или

$$(2^\circ) \quad f(a+x) = -f(a-x), \quad x \in \mathbf{R} \quad (\text{антисимметрия}).$$

Конечно, аналогичное заключение может быть сделано и для вещественных ℓ^1 последовательностей.

Теорема 5.29.

(а) Вещественная функция $f \in L^2(\mathbf{R})$ имеет обобщенную линейную фазу тогда и только тогда, когда она является симметричной или антисимметричной (относительно фазы $\hat{f}$).

(б) Вещественная последовательность $\{a_n\} \in \ell^1$ имеет обобщенную линейную фазу тогда и только тогда, когда она является симметричной или антисимметричной (относительно фазы символа $\{a_n\}$).

Характеристика линейной фазы намного сложнее. Однако, ввиду предшествующих рассуждений (см., в частности, замечание), мы будем рассматривать только вещественные функции и последовательности. Так как фазовое свойство двухмасштабной последовательности непосредственно влияет на фазовое свойство соответствующей масштабирующей функции, мы даем следующую характеристику линейно-фазовых последовательностей.

Лемма 5.30. *Вещественная ℓ^1 -последовательность $\{a_n\}$ с символом $A(e^{-i\omega})$ имеет линейную фазу тогда и только тогда, когда существует некоторое $n_0 \in \frac{1}{2}\mathbf{Z}$ такое, что $A(e^{-i\omega})e^{in_0\omega}$ — вещественная четная функция, не имеющая смены знака.*

Легко доказать этот результат. Однако, если последовательность конечна, то можно сказать несколько больше.

Лемма 5.31. *Вещественная конечная последовательность $\{a_n\}$ с носителем $[0, N]$ имеет линейную фазу тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

- (а) $a_{N-n} = a_n$, $n \in \mathbf{Z}$ и
- (б) символ

$$A(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^n$$

имеет на единичной окружности только нули четного порядка.

Доказательство. По лемме 5.30 вещественная конечная последовательность $\{a_n\}$, $n = 0, \dots, N$ имеет линейную фазу тогда и только тогда, когда существует некоторое $n_0 \in \frac{1}{2}\mathbf{Z}$ такое, что функция

$$F(\omega) := A(e^{-i\omega})e^{in_0\omega}$$

— вещественная, четная и не имеет смены знака. С другой стороны ясно, что равенство $F(\omega) = F(-\omega)$ эквивалентно

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N a_n e^{in\omega} &= A(e^{i\omega}) = e^{i2n_0\omega} A(e^{i\omega}) \\ &= \sum_{n=0}^N a_n e^{i(2n_0-n)\omega} = \sum_{n=2n_0-N}^{2n_0} a_{2n_0-n} e^{in\omega}, \end{aligned}$$

что в свою очередь эквивалентно равенствам $n_0 = \frac{1}{2}N$ и $a_{N-n} = a_n$ для всех $n \in \mathbf{Z}$. Конечно, вещественная функция $F(\omega)$ не имеет смены знака тогда и только тогда, когда ее вещественные нули (если такие имеются) имеют четный порядок; это, в свою очередь, эквивалентно утверждению, что $A(z)$ имеет только нули четного порядка на единичной окружности. $\square$

Теперь мы обратимся к изучению фазовых свойств масштабирующих функций.

Теорема 5.32. Пусть ϕ масштабирующая функция с двухмасштабной последовательностью $\{p_n\} \in \ell^1$. Пусть также $P = P_\phi$ обозначает двухмасштабный символ ϕ . Тогда

(а) ϕ имеет обобщенную линейную фазу тогда и только тогда, когда

$$\overline{P(z)} = z^{-2n_0} P(z), \quad |z| = 1 \quad (5.5.9)$$

для некоторого $n_0 \in \frac{1}{2}\mathbf{Z}$, и

(б) ϕ имеет линейную фазу тогда и только тогда, когда

$$P(e^{-i\omega}) = |P(e^{-i\omega})| e^{-in_0\omega}, \quad (5.5.10)$$

где $n_0 \in \frac{1}{2}\mathbf{Z}$.

Доказательство. Если ϕ имеет обобщенную линейную фазу, то по определению 5.25 мы имеем

$$\hat{\phi}(\omega) = F(\omega) e^{-i(a\omega+b)} \quad \text{п.в.}$$

для некоторой вещественной функции $F(\omega)$ и некоторых $a, b \in \mathbf{R}$. Отсюда, $\overline{\hat{\phi}(\omega)} = F(\omega)e^{i(a\omega+b)}$ и поэтому

$$\begin{aligned}\overline{P(e^{-i\omega/2})} &= \frac{\overline{\hat{\phi}(\omega)}}{\hat{\phi}(\omega/2)} = e^{ia\omega/2} \frac{F(\omega)}{F(\omega/2)} \\ &= e^{ia\omega} \frac{\hat{\phi}(\omega)}{\hat{\phi}(\omega/2)} = e^{ia\omega} P(e^{-i\omega/2})\end{aligned}$$

для почти всех $\omega \in \mathbf{R}$. Это значит, что

$$n_0 := a \in \frac{1}{2}\mathbf{Z}$$

и выполняется (5.5.9). Если, кроме того, ϕ имеет линейную фазу, то по определению 5.25 мы имеем $b = 0$, и $F(\omega)$ не меняет знака. Следовательно,

$$\begin{aligned}P(e^{-i\omega/2}) &= \frac{\hat{\phi}(\omega)}{\hat{\phi}(\omega/2)} = e^{-ia\omega/2} \frac{F(\omega)}{F(\omega/2)} \\ &= e^{-ia\omega/2} \left| \frac{F(\omega)}{F(\omega/2)} \right| = e^{-in_0\omega/2} |P(e^{-i\omega/2})|,\end{aligned}$$

что совпадает с (5.5.10).

Обратно, если выполняется (5.5.9), то мы имеем

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(\omega) &= \prod_{k=1}^{\infty} P(e^{-i\omega/2^k}) \\ &= \left\{ \prod_{k=1}^{\infty} \overline{P(e^{-i\omega/2^k})} \right\} e^{-i2n_0\omega} \\ &= \overline{\hat{\phi}(\omega)} e^{-i2n_0\omega}.\end{aligned}\tag{5.5.11}$$

Отсюда функция

$$F(\omega) := e^{in_0\omega} \hat{\phi}(\omega)$$

вещественна и, так как

$$\hat{\phi}(\omega) = F(\omega)e^{-in_0\omega},$$

ϕ имеет обобщенную линейную фазу. Если предполагается справедливость гипотезы (5.5.10), то мы имеем

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(\omega) &= \prod_{k=1}^{\infty} P(e^{-i\omega/2^k}) = \left| \prod_{k=1}^{\infty} P(e^{-i\omega/2^k}) \right| e^{-in_0\omega} \quad (5.5.12) \\ &= |\hat{\phi}(\omega)| e^{-in_0\omega},\end{aligned}$$

так что ϕ имеет линейную фазу. □

Замечание. Как следует из леммы 5.28 (а) и из вышеприведенного рассуждения, для того чтобы масштабирующая функция ϕ имела обобщенную линейную фазу, необходимо и достаточно, чтобы ϕ была «кососимметричной» функцией относительно некоторого $n_0 \in \frac{1}{2}\mathbf{Z}$ в том смысле, что

$$\phi(n_0 + x) = \overline{\phi(n_0 - x)} \quad \text{п.в.} \quad (5.5.13)$$

Действительно, чтобы ϕ имела обобщенную фазу, должно быть выполнено (5.5.9) и, следовательно, (5.5.11), так что $\hat{\phi}(\omega) = F(\omega)e^{-in_0\omega}$ для некоторой вещественной функции $F(\omega)$ и некоторого $n_0 \in \frac{1}{2}\mathbf{Z}$. Следовательно, (5.5.13) следует из леммы 5.28 (а). Обратное утверждение тривиально. □

Если двухмасштабная последовательность $\{p_k\}$ — вещественна и конечна, то, применяя теорему 5.32 и лемму 5.31, мы можем сказать несколько больше, как в следующей теореме.

Теорема 5.33. Пусть ϕ — вещественная масштабирующая функция, двухмасштабная последовательность $\{p_n\}$ которой является конечной вещественной последовательностью с носителем $[0, N]$. Тогда

(а) ϕ имеет линейную обобщенную фазу тогда и только тогда, когда $p_{N-n} = p_n$ для всех $n \in \mathbf{Z}$ и

(б) ϕ имеет линейную фазу тогда и только тогда, когда $p_{N-n} = p_n$ для всех n , и все нули двухмасштабного символа P_ϕ на единичной окружности, если такие имеются, имеют четную кратность.

При исследовании фазовых свойств вэйвлетов следует использовать знания об их двухмасштабном символе Q . Например, если масштабирующая функция ϕ имеет обобщенную линейную фазу, то из двухмасштабного соотношения $\hat{\psi}(\omega) = Q(e^{-i\omega/2})\hat{\phi}(\omega)$ и определений 5.25 и 5.27 следует, что ψ также имеет обобщенную линейную фазу при условии, что последовательность $\{q_k\}$ имеет обобщенную линейную фазу; аналогичные заключения могут быть сделаны и относительно свойств линейной фазы. Конечно, больше может быть сказано при более тщательном анализе, как и при изучении ϕ .

Пример 5.34. Рассмотрим B -сплайн первого порядка N_1 и соответствующий ему вэйвлет Хаара $\psi_1(x) = \psi_H(x) := N_1(2x) - N_1(2x - 1)$ (см. (1.5.7), (1.1.16) и пример 3.2). Из примера 5.26 мы видим, что N_1 имеет обобщенную линейную фазу. Так как двухмасштабным символом Q для ψ_1 является

$$Q(z) = \frac{1}{2}(1 - z) = \left(\sin \frac{\omega}{4}\right) e^{-i(\frac{1}{4}\omega - \frac{\pi}{2})}, \quad (5.5.14)$$

где $z = e^{-i\omega/2}$, мы также видим, что

$$\hat{\psi}_1(\omega) = Q(z)\hat{N}_1\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{(\sin \frac{\omega}{4})^2}{\omega/4} e^{-i(\frac{1}{2}\omega - \frac{\pi}{2})} \quad (5.5.15)$$

имеет обобщенную линейную фазу, но не имеет линейной фазы.

Заметим, что вэйвлет Хаара $\psi_1 = \psi_H$ является ортогональным вэйвлетом с компактным носителем (см. (1.1.16)).

Из следующего результата мы можем заключить, что ψ_1 является *единственным* о.н. вэйвлетом с компактным носителем, таким, что соответствующая ему масштабирующая функция имеет линейную обобщенную фазу. (Соотношение между о.н. вэйвлетом ψ и соответствующей ему о.н. масштабирующей функцией ϕ в общем случае будет обсуждено в следующем параграфе, а также в главе 7.)

Теорема 5.35. Пусть ϕ — масштабирующая функция, управляемая конечным двумасштабным соотношением

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^N p_k \phi(2x - k), \quad p_0, p_N \neq 0, \quad (5.5.16)$$

как в (5.2.2) с $N = N_\phi$ и $p_k = p_k^\phi$. Предположим, что $\{\phi(\cdot - k) : k \in \mathbf{Z}\}$ является ортонормированным семейством, которое осуществляет разбиение единицы, и ϕ является кососимметричной в том смысле, что

$$\phi(a+x) = \overline{\phi(a-x)}, \quad x \in \mathbf{R} \quad (5.5.17)$$

для некоторого $a \in \mathbf{R}$ (см. (5.5.5) в лемме 5.28). Тогда ϕ должна быть В-сплайном первого порядка.

Доказательство. Как обычно, пусть

$$P(z) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N p_k z^k$$

и $z = e^{-i\omega/2}$. Тогда (5.5.16) эквивалентно

$$\hat{\phi}(\omega) = P(z) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad \omega \in \mathbf{R}. \quad (5.5.18)$$

С другой стороны, предположение (5.5.17) эквивалентно

$$\hat{\phi}(\omega) e^{i a \omega} = \overline{\hat{\phi}(\omega) e^{i a \omega}}, \quad \omega \in \mathbf{R}. \quad (5.5.19)$$

Следовательно, из (5.5.18) и (5.5.19) мы имеем

$$P(z) = \frac{\hat{\phi}(\omega)}{\hat{\phi}(\frac{\omega}{2})} = e^{-i a \omega} \frac{\overline{\hat{\phi}(\omega)}}{\hat{\phi}(\frac{\omega}{2})} = z^{2a} \overline{P(z)}$$

для $|z| = 1$. Так как $P(z)$ — многочлен степени N с отличными от нуля коэффициентами при старшей и нулевой степенях, то следует, что $2a = N$ и

$$\overline{P(z)} = z^{-N} P(z), \quad |z| = 1. \quad (5.5.20)$$

Давайте теперь рассмотрим гипотезу о том, что $\{\phi(\cdot - k) : k \in \mathbf{Z}\}$ — ортонормированное семейство. По теореме 3.23 это предложение эквивалентно тому, что

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi k)|^2 = 1, \quad (5.5.21)$$

так что применение (5.5.18) дает

$$|P(z)|^2 + |P(-z)|^2 = 1, \quad |z| = 1. \quad (5.5.22)$$

Итак, подставляя (5.5.20) в (5.5.22), мы имеем

$$(P(z))^2 + (-1)^N (P(-z))^2 = z^N, \quad |z| = 1. \quad (5.5.23)$$

Напомним из § 5.2 этой главы: необходимым условием того, чтобы ϕ была функцией является $N > 0$. Следовательно, из (5.5.23) и предположения $p_N \neq 0$ мы видим, что N должно быть нечетным целым числом. Теперь, положив

$$\begin{cases} P_e(z) = \frac{1}{2} \sum_k p_{2k} z^k, \\ P_o(z) = \frac{1}{2} \sum_k p_{2k+1} z^k, \end{cases} \quad (5.5.24)$$

мы можем написать

$$P(z) = P_e(z^2) + z P_o(z^2), \quad (5.5.25)$$

и (5.5.22) дает

$$|P_e(z)|^2 + |P_o(z)|^2 = \frac{1}{2}, \quad |z| = 1. \quad (5.5.26)$$

Отсюда, применяя (5.5.20) и (5.5.25), мы получаем

$$\begin{aligned} P_e(z^2) + zP_o(z^2) &= P(z) = z^N \overline{P(z)} \\ &= z^N \overline{P_e(z^2) + zP_o(z^2)} \\ &= z^N \overline{P_e(z^2)} + z^{N-1} \overline{P_o(z^2)}, \quad |z| = 1. \end{aligned}$$

Так как N нечетно, то приравнивание четных и нечетных частей дает

$$\begin{cases} P_e(z^2) = z^{N-1} \overline{P_o(z^2)}, \\ P_o(z^2) = z^{N-1} \overline{P_e(z^2)}, \end{cases} \quad |z| = 1,$$

так что

$$|P_e(z)|^2 = |P_o(z)|^2, \quad |z| = 1.$$

Применение этого тождества к (5.5.26) позволяет сделать вывод, что

$$|P_e(z)|^2 = |P_o(z)|^2 = \frac{1}{4}, \quad |z| = 1. \quad (5.5.27)$$

Это возможно только тогда, когда P_e и P_o являются одночленами или

$$P(z) = \frac{1}{2}(p_0 + p_N z^N), \quad N - \text{нечетное.}$$

(Чтобы проверить справедливость этого утверждения, можно просто перемножить многочлены в (5.5.27) и сравнить коэффициенты при одинаковых степенях z .) Так как $\{\phi(\cdot - k) : k \in \mathbf{Z}\}$ осуществляет разбиение единицы, мы имеем $P(1) = 1$ и $P(-1) = 0$ (см. (5.1.12) и (5.1.13)), так что

$$P(z) = \frac{1 + z^N}{2}$$

и, отсюда,

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1 + e^{-i\omega N/2^k}}{2} \right) = \frac{1 - e^{-i\omega N}}{i\omega N}$$

(см. пример 5.3). Следовательно, ввиду (4.2.9) мы получаем

$$\begin{aligned} \sum_k |\hat{\phi}(\omega + 2\pi k)|^2 &= \frac{4 \sin^2(\frac{\omega N}{2})}{N^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\omega + 2\pi k)^2} \\ &= \frac{\sin^2(\omega N/2)}{N^2 \sin^2(\omega/2)}. \end{aligned} \quad (5.5.28)$$

Теперь из (5.5.21) следует, что $N = 1$. Таким образом, $P_{\phi}(z) = P(z) = (1 + z)/2$, или ϕ есть B -сплайн первого порядка N_1 (см. § 5.2). $\square$

Замечание. Хотя мы предположили в (5.5.17), что ϕ только косо-симметрична, мы показали, что она вещественна и поэтому просто симметрична. Теорема 5.35 говорит о том, что любая масштабирующая функция ϕ с компактным носителем, которая порождает разбиение единицы и ортонормированное семейство $\{\phi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$, может иметь обобщенную линейную фазу только в том случае, если она почти всюду равняется характеристической функции интервала $[k, k + 1)$ для некоторого целого k .

5.6. Вэйвлеты с компактным носителем

Целью этого параграфа является исследование структуры вэйвлетов с компактным носителем. Ввиду необходимости в линейно-фазовой фильтрации при анализе сигналов, как это было рассмотрено в предыдущем параграфе, нас особо интересуют кососимметричные вэйвлеты. (Напомним из § 5.5,

что для любой вещественной функции f , $e^{ib}f(x)$ — кососимметрична для некоторого $b \in \mathbf{R}$ тогда и только тогда, когда f симметрична или антисимметрична.) Следуя стратегии построения вэйвлетов, развитой в § 5.5, мы рассмотрим пару допустимых двухмасштабных символов $P = P_\phi$ и $G^* = G_{\tilde{\phi}}^*$, которые двойственны друг другу в том смысле, что

$$P(z)G(z) + P(-z)G(-z) = 1, \quad |z| = 1, \quad (5.6.1)$$

где $G^*(z) = \overline{G(z)}$, $|z| = 1$ (см. определение 5.18, (5.4.3) и (5.4.4)). Тогда вэйвлет ψ и его двойственное $\tilde{\psi}$ имеют двухмасштабные символы в том смысле, что

$$\begin{cases} \hat{\psi}(\omega) = Q(e^{-i\omega/2}) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right), \\ \hat{\tilde{\psi}}(\omega) = H^*(e^{-i\omega/2}) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right), \end{cases} \quad (5.6.2)$$

где $H^*(z) = \overline{H(z)}$, $|z| = 1$, а Q и H произвольным образом, но обязательно выбраны из класса, определенного в (5.4.11), а именно:

$$\begin{cases} Q(z) = z^{-1}G(-z)K(z^2), \\ H(z) = zP(-z)K^{-1}(z^2), \quad |z| = 1, \end{cases} \quad (5.6.3)$$

где K принадлежит классу Винера $\mathcal{W}$ с $K(z) \neq 0$ при $|z| = 1$. Напомним также, что подпространства $\{V_j\}$, $\{W_j\}$, $\{V_j\}$ и $\{\tilde{W}_j\}$, порожденные, соответственно, ϕ , ψ , $\tilde{\phi}$ и $\tilde{\psi}$, удовлетворяют соотношениям

$$\begin{cases} \cdots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \cdots \\ V_{j+1} = V_j \dot{+} W_j, \quad j \in \mathbf{Z}, \end{cases} \quad (5.6.4)$$

$$\begin{cases} \cdots \subset \tilde{V}_{-1} \subset \tilde{V}_0 \subset \tilde{V}_1 \subset \cdots \\ \tilde{V}_{j+1} = \tilde{V}_j \dot{+} \tilde{W}_j, \quad j \in \mathbf{Z}, \end{cases} \quad (5.6.5)$$

и

$$\begin{cases} V_j \perp \widetilde{W}_j, & j \in \mathbf{Z}, \\ \widetilde{V}_j \perp W_j, & j \in \mathbf{Z}. \end{cases} \quad (5.6.6)$$

Кроме того, пары $(\phi, \tilde{\phi})$ и $(\psi, \tilde{\psi})$ — двойственные пары в том смысле, что

$$\begin{cases} \langle (\phi \cdot -k), \tilde{\phi}(\cdot - m) \rangle = \delta_{k,m}, & k, m \in \mathbf{Z}, \\ \langle \psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{\ell,m} \rangle = \delta_{j,\ell} \delta_{k,m}, & j, k, \ell, m \in \mathbf{Z}. \end{cases} \quad (5.6.7)$$

Подробнее это обсуждалось в § 5.4.

Давайте изучим сначала структуру полуортогональных (п.о.) вэйвлетов и, в частности, ортогональных (о.н.) вэйвлетов (см. определение 3.22). Из теоремы 3.25 ясно, что подпространства W_j и $\widetilde{W}_j$, $j \in \mathbf{Z}$, порожденные любым п.о. вэйвлетом ψ и его двойственным $\tilde{\psi}$, тождественны, а именно: $W_j = \widetilde{W}_j$ для всех $j \in \mathbf{Z}$. Следовательно, из (5.1.4) мы также имеем $V_j = \widetilde{V}_j$ для всех $j \in \mathbf{Z}$, так что масштабирующая функция ϕ и ее двойственное $\tilde{\phi}$ порождают тот же самый КМА. Действительно, возвращаясь назад к доказательству теоремы 5.22 (см. (5.4.21)), мы видим, что (единственное) двойственное $\tilde{\phi}$ для ϕ дается формулой

$$\hat{\tilde{\phi}}(\omega) = \frac{\hat{\phi}(\omega)}{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi k)|^2}, \quad (5.6.8)$$

(см. (3.6.13) для двойственных п.о. вэйвлетов). Теперь сосредоточим наше внимание на масштабирующих функциях ϕ с конечными двухмасштабными последовательностями $\{p_n\}$, а именно:

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^N p_n \phi(2x - n), \quad p_0, p_N \neq 0,$$

где $p_n = p_n^\phi$ и $N = N_\phi$, как было определено в § 5.2. Напомним из (5.2.24), (5.2.25) и (5.2.30), что обобщенный многочлен Эй-

лера—Фробениуса Лорана относительно ϕ

$$E(z)=E_{\phi}(z):=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\phi(k+y)\overline{\phi(y)}dy\right\}z^k \quad (5.6.9)$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}+2\pi k\right)\right|^2,$$

где $z = e^{-i\omega/2}$, не имеет нулей и полюсов на окружности $|z| = 1$. Поэтому из (5.6.8) следует, что

$$\hat{\tilde{\phi}}(\omega) = \frac{1}{E(z^2)}\hat{\phi}(\omega), \quad (5.6.10)$$

и, соответственно, двойственное $\tilde{\phi}$ масштабирующей функции ϕ с компактным носителем *не имеет* компактного носителя, если $E(z)$ не является положительной константой, даже если имеет экспоненциальное убывание. (Конечно, п.о. вэйвлет ψ относительно ϕ еще может иметь конечный носитель.) Сначала мы должны найти двухмасштабный символ $G^* = G_{\tilde{\phi}}^*$ для $\tilde{\phi}$. Это может быть легко сделано, применяя (5.6.10) и двухмасштабное соотношение для ϕ :

$$\begin{aligned}\hat{\tilde{\phi}}(\omega) &= \frac{1}{E(z^2)}\hat{\phi}(\omega) = \frac{1}{E(z^2)}P(z)\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ &= \frac{E(z)}{E(z^2)}P(z)\hat{\tilde{\phi}}\left(\frac{\omega}{2}\right),\end{aligned}$$

так что

$$G^*(z) = \frac{E(z)}{E(z^2)}P(z), \quad z = e^{-i\omega/2}. \quad (5.6.11)$$

Легко также проверить, что для этого G^* соотношение двойственности (5.6.1) эквивалентно тождеству (5.2.31) для обобщенных многочленов Эйлера—Фробениуса Лорана. Теперь по

теореме 5.19 и (5.6.11) двухмасштабный символ Q для любого вэйвлета ψ относительно масштабирующей функции ϕ дается формулой

$$\begin{aligned} Q(z) &= z^{-1} G(-z) K(z^2) \\ &= z^{-1} \frac{E(-z) \overline{P(-z)}}{E(z^2)} K(z^2), \end{aligned} \quad (5.6.12)$$

где $K \in \mathcal{W}$ с $K(z) \neq 0$ при $|z| = 1$ (см. (5.6.3)). Таким образом, у нас есть некоторая свобода в выборе ψ . В частности, вэйвлет ψ с наименьшим носителем получен выбором допустимого $K \in \mathcal{W}$ ($K(z) \neq 0$ при $|z| = 1$) так, что $Q(z)$ — многочлен наименьшей степени. Мы не собираемся продолжать более подробное рассмотрение этого вопроса в общей постановке, но только отметим, что результаты теорем 5.11 и 5.12 относительно двухмасштабных символов масштабирующих функций с минимальным носителем были бы полезны для нашего изучения. Подробное исследование масштабирующих функций, которые являются B -сплайнами, будет дано в § 6.2.

Так как E — многочлен Лорана, который не имеет нулей и полюсов на окружности $|z| = 1$, мы можем выбрать в (5.6.12) $K(z) = -zE(z)$ так, что двухмасштабные символы Q и H^* для п.о. вэйвлета ψ с компактным носителем и, соответственно, для его двойственного $\tilde{\psi}$ даются формулами

$$\begin{cases} Q(z) = -zE(-z)\overline{P(-z)}, \\ H(z) = -z^{-1} \frac{P(-z)}{E(z^2)}. \end{cases} \quad (5.6.13)$$

(См. (5.6.3). Соображение в пользу такого выбора K вместо простого $K = E$ состоит в том, что его нормировка соответствует определению функции Хаара.) Заметим, что если E не постоянен, то двойственный вэйвлет $\tilde{\psi}$ также не имеет компактного носителя, хотя и экспоненциально убывает. Одно преимущество в выборе Q в (5.6.13) состоит в том,

что очень легко определить, имеет или нет вэйвлет ψ обобщенную линейную фазу. Действительно, так как конечная последовательность коэффициентов многочлена Лорана $E(z)$ кососимметрична (см. (5.2.26) или (5.6.9)), ясно, что последовательность коэффициентов многочлена $Q(z)$ в (5.6.13) также кососимметрична при условии, что двухмасштабная последовательность $\{p_n\}$ обладает этим свойством. Кроме того, ввиду (5.6.11) и (5.6.13), такое же заключение справедливо для G^* и H^* . В частности, для вещественных последовательностей, применяя теоремы 5.32 (а) и 5.33, мы имеем следующий результат.

Теорема 5.36. Пусть $\{p_n\}$ — конечная, симметричная, вещественная двухмасштабная последовательность масштабирующей функции ϕ . Также пусть $\psi, \tilde{\phi}$ и $\tilde{\psi}$ — п.о. вэйвлет, двойственная масштабирующая функция и двойственный вэйвлет с двухмасштабными символами Q, G^* и H^* соответственно, как это дается формулами (5.6.13) и (5.6.11). Тогда ϕ и соответствующий ей п.о. вэйвлет ψ имеют компактные носители, $\tilde{\phi}$ и $\tilde{\psi}$ имеют экспоненциальное убывание, и все функции $\phi, \psi, \tilde{\phi}$ и $\tilde{\psi}$ имеют обобщенные линейные фазы.

Давайте рассмотрим ортогональные (о.н.) вэйвлеты ψ , относящиеся к масштабирующим функциям ϕ с компактным носителем. Основной подход состоит в построении ортонормированной (о.н.) ϕ в том смысле, что

$$\{\phi(\cdot - k) : k \in \mathbf{Z}\}$$

является ортонормированным семейством. Для такой ϕ из (5.6.9) следует, что обобщенный многочлен Эйлера—Фробениуса $E(z)$ постоянен и равен 1. Поэтому из (5.6.13) мы имеем

$$Q(z) = -z\overline{P(-z)}, \quad |z| = 1.$$

Следовательно, если двухмасштабное соотношение для ϕ дается формулой

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^N p_n \phi(2x - n), \quad p_0, p_N \neq 0,$$

то двухмасштабное соотношение для о.н. вэйвлета ψ имеет вид

$$\psi(x) = \sum_{n=-N+1}^1 (-1)^n \bar{p}_{1-n} \phi(2x - n). \quad (5.6.14)$$

Заметим, что так как последовательности коэффициентов $\{p_n\}$ и $\{(-1)^n \bar{p}_{1-n}\}$ для ϕ и ψ имеют одинаковые фазовые свойства, то можно ожидать, ввиду теоремы 5.35, что о.н. вэйвлеты с компактным носителем также могут не иметь обобщенных линейных фаз. Переформулируем теорему 5.35 следующим образом.

Теорема 5.37. Пусть ψ — о.н. вэйвлет с компактным носителем, определенный формулой (5.6.14), соответствующая которому о.н. масштабирующая функция ϕ порождает разбиение единицы. Предположим, что ϕ кососимметрична в смысле (5.5.17). Тогда ψ должна быть функцией Хаара ψ_H .

Поэтому, для того чтобы непрерывная вэйвлет-функция ψ с компактным носителем имела обобщенную линейную фазу, представляются возможными две альтернативы. Первая — мы можем остановиться на полуортогональности. Это, конечно, дает результаты при условии, что мы готовы согласиться на двойственные, которые имеют экспоненциальное убывание. В последующем мы полностью откажемся от ортогональности и будем рассматривать ψ и $\tilde{\psi}$ с компактными носителями и обобщенными линейными фазами. Следуя стратегии, сформулированной в § 5.4, мы начнем с двух допустимых двухмасштабных (полиномиальных) символов $P = P_\phi$

и $G^* = G_{\tilde{\phi}}^*$, которые двойственны друг другу. (Чтобы Q и H^* также были многочленами Лорана, достаточно выбрать одночлен K .)

Напомним из теоремы 5.32, что ϕ имеет обобщенную линейную фазу тогда и только тогда, когда ее двухмасштабный символ P удовлетворяет условию

$$P(z) = z^m \overline{P(z)}, \quad |z| = 1, \quad (5.6.15)$$

для некоторого целого m (см. (5.5.9) с $m = 2n_0$, $n_0 \in \frac{1}{2}\mathbf{Z}$). Для того чтобы иметь возможность построить двойственное $\tilde{\phi}$ для ϕ с компактным носителем, которое также имеет обобщенную линейную фазу, мы должны использовать допустимый двухмасштабный символ для $\tilde{\phi}$, который также удовлетворяет (5.6.15) для некоторого целого значения m . В этом направлении мы имеем следующий результат.

Теорема 5.38. Пусть $P = P_{\phi}$ и $G^* = G_{\tilde{\phi}}^*$ — допустимые двухмасштабные символы — многочлены Лорана, двойственные друг другу и такие, что P удовлетворяет (5.6.15). Тогда

$$G_1(z) := \frac{1}{2} \{G(z) + z^{-m} \overline{G^*(z)}\} \quad (5.6.16)$$

удовлетворяет тому же соотношению двойственности

$$P(z)G_1(z) + P(-z)G_1(-z) = 1, \quad |z| = 1, \quad (5.6.17)$$

что и $G(z)$ и, кроме этого,

$$G_1(z) = z^{-m} \overline{G_1(z)}, \quad |z| = 1, \quad (5.6.18)$$

или, что эквивалентно,

$$G_1^*(z) = z^m \overline{G_1^*(z)}, \quad |z| = 1. \quad (5.6.19)$$

Доказательство. Ясно, что G_1 удовлетворяет (5.6.18). Действительно, для $|z| = 1$ мы имеем

$$\begin{aligned} G_1^*(z) &= \overline{G_1(z)} = \frac{1}{2} \{ \overline{G(z)} + z^m \overline{G^*(z)} \} \\ &= \frac{1}{2} \{ G^*(z) + z^m G(z) \} = \frac{1}{2} \{ G(z) + z^{-m} G^*(z) \} z^m \\ &= z^m G_1(z) = z^m \overline{G_1^*(z)}. \end{aligned}$$

Чтобы проверить (5.6.17), мы просто применим (5.6.15) и (5.6.1) и получим

$$\begin{aligned} &P(z)G_1(z) + P(-z)G_1(-z) \\ &= \frac{1}{2} \{ P(z)[G(z) + z^{-m}G^*(z)] + P(-z)[G(-z) + (-z)^{-m}G^*(-z)] \} \\ &= \frac{1}{2} \{ [P(z)G(z) + P(-z)G(-z)] + [\overline{P(z)}G^*(z) + \overline{P(-z)}G^*(-z)] \} \\ &= \frac{1}{2} \{ [P(z)G(z) + P(-z)G(-z)] + [\overline{P(z)G(z) + P(-z)G(-z)}] \} \\ &= \frac{1}{2} (1 + 1) = 1, \quad |z| = 1. \end{aligned}$$

Это завершает доказательство теоремы. □

В дальнейшем мы будем рассматривать только конечные вещественные двухмасштабные последовательности. Для таких последовательностей свойство (5.6.15) обобщенной линейной фазы принимает вид

$$P(e^{-i\omega}) = e^{-im\omega} P(e^{i\omega}), \quad \omega \in \mathbf{R}. \quad (5.6.20)$$

Лемма 5.39. Пусть P — многочлен Лорана с вещественными коэффициентами, который удовлетворяет (5.6.20) для некоторого $m \in \mathbf{Z}$. Тогда существует другой многочлен P_1

(зависящий от m) с вещественными коэффициентами такой, что

$$P(e^{-i\omega}) = \begin{cases} e^{-im\omega/2} P_1(\cos \omega) & \text{для четных } m, \\ e^{-im\omega/2} \left(\cos \frac{\omega}{2}\right) P_1(\cos \omega) & \text{для нечетных } m. \end{cases} \quad (5.6.21)$$

Доказательство. Из предположения (5.6.20) мы видим, что $e^{im\omega/2} P(e^{-i\omega})$ есть четная функция ω . Таким образом, если m — четное целое, то $e^{im\omega/2} P(e^{-i\omega})$ — 2π -периодическая функция, и поэтому — вещественный многочлен от $\cos \omega$. Это дает (5.6.21) для четных m . С другой стороны, если m — нечетное целое, то, положив в (5.6.20) $\omega = \pi$, мы имеем $P(-1) = -P(-1)$, так что $P(-1) = 0$. Итак, мы можем написать

$$P(z) = \left(\frac{1+z}{2}\right) P_0(z) \quad (5.6.22)$$

для некоторого многочлена $P_0(z)$ с вещественными коэффициентами. Подстановка (5.6.22) в (5.6.20) дает

$$P_0(e^{-i\omega}) = e^{-i(m-1)\omega} P_0(e^{i\omega}).$$

Теперь, так как $m-1$ — четное, мы имеем

$$P_0(e^{-i\omega}) = e^{-i(m-1)\omega/2} P_1(\cos \omega) \quad (5.6.23)$$

для некоторого многочлена P_1 с вещественными коэффициентами. Отсюда, подставляя (5.6.23) в (5.6.22), мы получим (5.6.21) для нечетных m . $\square$

В добавление к результату леммы 5.39 мы напомним, что как двумасштабный символ P может быть записан в виде

$$P(z) = \left(\frac{1+z}{2}\right)^\ell P_2(z), \quad (5.6.24)$$

где P_2 — многочлен Лорана с вещественными коэффициентами, удовлетворяющий условиям

$$P_2(1) = 1 \quad \text{и} \quad P_2(-1) \neq 0, \quad (5.6.25)$$

и ℓ — некоторое положительное целое число.

Лемма 5.40. Пусть P — многочлен Лорана с вещественными коэффициентами, который удовлетворяет (5.6.20) и (5.6.24)–(5.6.25). Тогда $(m - \ell)$ должно быть четным целым числом, и

$$P(e^{-i\omega}) = e^{-im\omega/2} \left(\cos \frac{\omega}{2} \right)^\ell S(\cos \omega), \quad (5.6.26)$$

где S — многочлен с вещественными коэффициентами такой, что

$$S(1) = 1 \quad \text{и} \quad S(-1) \neq 0. \quad (5.6.27)$$

Доказательство. Из (5.6.24) мы имеем

$$P(e^{-i\omega}) = e^{-i\ell\omega/2} \left(\cos \frac{\omega}{2} \right)^\ell P_2(e^{-i\omega}). \quad (5.6.28)$$

Отсюда, ввиду (5.6.20), мы получаем

$$P_2(e^{-i\omega}) = e^{-i(m-\ell)\omega} P_2(e^{i\omega}). \quad (5.6.29)$$

Покажем сначала, что $(m - \ell)$ — четное целое число. Предположим противное, что $(m - \ell)$ — нечетное. Тогда, как и раньше, применяя (5.6.29) с $\omega = \pi$, мы видим, что $P_2(-1) = 0$. Это противоречит (5.6.25). Теперь, так как $(m - \ell)$ — четное, мы можем применить лемму 5.39 и записать

$$P_2(e^{-i\omega}) = e^{-i(m-\ell)\omega/2} S(\cos \omega) \quad (5.6.30)$$

для некоторого многочлена S с вещественными коэффициентами. Утверждение (5.6.26) получается в результате подстановки (5.6.30) в (5.6.28). Кроме того, ввиду (5.6.25) ясно, что многочлен S в (5.6.30) удовлетворяет (5.6.27). $\square$

Из леммы 5.40 мы видим, что любой двухмасштабный многочлен (Лорана), символ с вещественными коэффициентами и обобщенной линейной фазой (то есть удовлетворяющей (5.6.20)), имеет вид представления (5.6.26), где S — многочлен с вещественными коэффициентами, удовлетворяющий (5.6.27). Согласно теореме 5.38 и лемме 5.40 мы будем искать двойственный символ $G^*(z) = \overline{G}(z)$, $|z| = 1$ вида

$$G(e^{-i\omega}) = e^{im\omega/2} \left(\cos \frac{\omega}{2} \right)^{\tilde{\ell}} \tilde{S}(\cos \omega), \quad (5.6.31)$$

где $\tilde{S}$ — вещественный многочлен, удовлетворяющий условию $\tilde{S}(1) = 1$ и $\tilde{\ell}$ — некоторое положительное целое такое, что

$$N := (\tilde{\ell} + \ell)/2$$

— также положительное целое. Применяя (5.6.26) и (5.6.31), перепишем тождество двойственности в (5.6.1)

$$\left(\cos \frac{\omega}{2} \right)^{2N} S(\cos \omega) \tilde{S}(\cos \omega) + \left(\sin \frac{\omega}{2} \right)^{2N} S(-\cos \omega) \tilde{S}(-\cos \omega) = 1. \quad (5.6.32)$$

Положив $x = \sin^2(\omega/2)$, мы имеем $\cos \omega = 1 - 2x$. Отсюда, если мы определим

$$R(x) := S(1 - 2x) \tilde{S}(1 - 2x),$$

то (5.6.32) запишется в виде

$$(1 - x)^N R(x) + x^N R(1 - x) = 1. \quad (5.6.33)$$

Итак, наша задача теперь состоит в том, чтобы определить вещественный многочлен $R(x)$.

По алгоритму Евклида существует два многочлена A и B таких, что

$$x^N A(x) + (1 - x)^N B(x) = 1. \quad (5.6.34)$$

Давайте запишем

$$A(x) = C(x)(1-x)^N + A_1(x),$$

где $\deg A_1 \leq N-1$, и положим

$$B_1(x) = B(x) + C(x)x^N.$$

Так как

$$x^N \{C(x)(1-x)^N + A_1(x)\} + (1-x)^N B(x) = 1,$$

мы имеем

$$x^N A_1(x) = 1 - (1-x)^N B_1(x).$$

Это значит, что также и $\deg B_1 \leq N-1$. Таким образом, существуют многочлены A_1 и B_1 такие, что

$$\begin{cases} x^N A_1(x) + (1-x)^N B_1(x) = 1, \\ \deg A_1 \leq N-1 \quad \text{и} \quad \deg B_1 \leq N-1. \end{cases} \quad (5.6.35)$$

Многочлены $A_1(x)$ и $B_1(x)$ в (5.6.35) — единственные. Действительно, если существует другое решение — пара $(\tilde{A}_1, \tilde{B}_1)$, то разность $(A - \tilde{A}_1, B - \tilde{B}_1)$ удовлетворяет тождеству

$$x^N (A_1(x) - \tilde{A}_1(x)) + (1-x)^N (B(x) - \tilde{B}_1(x)) = 0,$$

где $\deg (A_1 - \tilde{A}_1), \deg (B_1 - \tilde{B}_1) \leq N-1$ и, следовательно, $A_1 - \tilde{A}_1 = 0$ и $B_1 - \tilde{B}_1 = 0$ из того факта, что x^N и $(1-x)^N$ не имеют общих делителей. Теперь поменяем местами x и $(1-x)$ в (5.6.35); единственность A_1 и B_1 означает, что $A_1(x) = B_1(1-x)$. Таким образом, действительно существует единственный алгебраический многочлен R_0 с $\deg R_0 \leq N-1$, который является решением (5.6.33). Чтобы определить R_0 , мы умножим почленно (5.6.33) на $(1-x)^{-N}$ и разложим результат по x , что

дает

$$\begin{aligned} R_0(x) &= (1-x)^{-N} \{1 - x^N R_0(1-x)\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{N+k-1}{k} x^k \{1 - x^N R_0(1-x)\} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N+k-1}{k} x^k + \tilde{R}_0(x), \end{aligned}$$

где

$$\tilde{R}_0(x) = \sum_{k=N}^{\infty} \binom{N+k-1}{k} x^k - R_0(1-x) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{N+k-1}{k} x^{N+k}$$

Так как $\tilde{R}_0(x)$ состоит из степеней x порядка N и выше, в то время как $R_0(x)$ и конечная сумма по k являются полиномами степени $\leq N-1$, то мы имеем $\tilde{R}_0(x) \equiv 0$ или

$$R_0(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N+k-1}{k} x^k. \quad (5.6.36)$$

Это — «частное решение» (5.6.33). Общее решение должно быть суммой $R_0(x)$ и члена, который делится на x^N . Будем называть этот член $x^N T(x)$. Так как эта функция является решением «однородного уравнения» (1 заменена на 0 в (5.6.33)), то T удовлетворяет соотношению $T(1-x) = -T(x)$. Таким образом, положив

$$\begin{cases} T_0(y) := T\left(\frac{1-y}{2}\right), \\ y := 1 - 2x = \cos \omega, \end{cases} \quad (5.6.37)$$

мы имеем

$$R\left(\frac{1-y}{2}\right) = R_0\left(\frac{1-y}{2}\right) + \left(\frac{1-y}{2}\right)^N T_0(y), \quad (5.6.38)$$

где $T_0(-y) = -T_0(y)$. Возвращаясь теперь к (5.6.32), мы приходим к общему выражению для $S(y)\tilde{S}(y) = S(\cos \omega)\tilde{S}(\cos \omega)$,

а именно:

$$\begin{cases} S(y)\tilde{S}(y) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N+k-1}{k} \left(\frac{1-y}{2}\right)^N + \left(\frac{1-y}{2}\right)^N T_0(y), \\ T_0(-y) = -T_0(y). \end{cases} \quad (5.6.39)$$

Мы заканчиваем эту главу, записав кососимметричный двухмасштабный полиномиальный символ G_1^* двойственного (с компактным носителем) для B -сплайна ℓ -го порядка.

Пример 5.41. Кососимметричный двухмасштабный символ G_1^* , двойственный

$$P_\ell(z) = \left(\frac{1+z}{2}\right)^\ell,$$

дается выражением $G_{\ell,\bar{\ell}}^*(z) = \overline{G_{\ell,\bar{\ell}}(z)}$ при $|z| = 1$, где

$$\begin{aligned} G_{\ell,\bar{\ell}}(e^{-i\omega}) &= e^{i\ell\omega/2} \left(\cos \frac{\omega}{2}\right)^{\bar{\ell}} \tilde{S}(\cos \omega) = e^{i\ell\omega/2} \left(\cos \frac{\omega}{2}\right)^{\bar{\ell}} \\ &\times \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N+k-1}{k} \left(\sin \frac{\omega}{2}\right)^{2k} + \left(\sin \frac{\omega}{2}\right)^{2N} T\left(\sin^2 \frac{\omega}{2}\right) \right\} \end{aligned}$$

с $N := (\ell + \bar{\ell})/2$. Это получено в результате применения (5.6.39) и (5.6.26) с $S = 1$ и $m = \ell$. $\square$

Глава 6

Базисные сплайн-вэйвлеты

Самые общие основы для изучения масштабирующих функций и вэйвлетов вместе с их двойственными были установлены в предыдущей главе. Одним из главных составляющих в этом подходе является понятие кратномасштабного анализа (КМА), которое не только играет существенную роль в схемах построения, но и необходимо для формулировки алгоритмов вэйвлет-разложения и вэйвлет-восстановления. Например, в таких приложениях, как анализ сигнала в режиме реального времени, сигнал конечной энергии (то есть функция из $L^2(\mathbb{R})$) должен быть спроецирован на некоторое пространство выборки V_N , принадлежащее последовательности вложенных пространств $\{V_j\}$, которые составляют КМА перед тем, как он может быть разбит на вэйвлет-компоненты с помощью алгоритма разложения. Учитывая все вышесказанное, последовательность $\{V_j\}$, $j \in \mathbb{Z}$ сплайн-пространств произвольного порядка m — очень привлекательный КМА пространства $L^2(\mathbb{R})$, в котором методы конечных элементов и сплайн-методы могут быть применены для построения проекционных операторов. (Если нас удовлетворяет аппроксимация в реальном времени оптимального порядка, то легко применимы квазиинтерполяционные и интерполяционные алгоритмы, разобранные

ные в § 4.5 и § 4.6.) Кроме того, как это было изучено в § 4.2–§ 4.4, структура сплайнов очень простая и обладает многими удобными свойствами. Это позволяет выбрать их в качестве первого кандидата для (непараметрического) моделирования таких произвольных функций, как сигналы.

Цель этой главы состоит в определении вэйвлетов в терминах B -сплайнов и изучении структуры этих *сплайн-вэйвлетов*. Особое значение будет придаваться полуортогональным (п.о.) сплайн-вэйвлетам, так как их явное выражение облегчает не только наше изучение их характерных свойств, но также их программное и техническое внедрение.

6.1. Интерполяционные сплайн-вэйвлеты

Единственным до сих пор хорошо нам известным вэйвлетом, по крайней мере в явном виде, является вэйвлет Хаара $\psi_1 = \psi_H$. С одной стороны, сопутствующая ему масштабирующая функция — B -сплайн первого порядка N_1 , а именно

$$\psi_H(x) = N_1(2x) - N_1(2x - 1), \quad (6.1.1)$$

с другой стороны, интересно отметить, что ψ_H связан с производной базисного сплайна второго порядка N_2 в том смысле, что

$$\psi_H(x) = N'_2(2x). \quad (6.1.2)$$

Интересно выяснить, до какой степени можно обобщить замечание в (6.1.2). Чтобы ответить на этот вопрос, сначала заметим, что B -сплайн второго порядка можно рассматривать, как фундаментальный сплайн, введенный в § 4.6. Действительно, фундаментальная сплайн-функция L_2 , определенная согласно (4.6.2)–(4.6.3), дается формулой

$$L_2(x) = N_2(x + 1).$$

Следовательно, эквивалентная форма утверждения (6.1.12) имеет вид

$$\psi_H(x) = L'_2(2x - 1). \quad (6.1.3)$$

Если мы продолжим эту точку зрения, то сможем получить сплайн-вэйвлеты произвольного порядка. Более точно, пусть $\{V_j^m\}$ — КМА пространства $L^2(\mathbf{R})$, порожденный B -сплайном m -го порядка, как это было введено в § 4.1, и пусть $\{W_j^m\}, j \in \mathbf{Z}$ обозначает последовательность вэйвлет-пространств, являющихся ортогональными дополнениями в смысле

$$V_{j+1}^m = V_j^m \oplus W_j^m, \quad j \in \mathbf{Z}, \quad (6.1.4)$$

где следует напомнить, что окружность вокруг знака плюс обозначает ортогональное суммирование (см. (1.4.8) и (1.5.9)). В последующем для каждого положительного целого m L_m означает фундаментальную сплайн-функцию m -го порядка, введенную в (4.6.2)–(4.6.3).

Теорема 6.1. Пусть m — любое положительное целое; определим

$$\psi_{I,m} = L_{2m}^{(m)}(2x - 1), \quad (6.1.5)$$

где L_{2m} — фундаментальный сплайн $2m$ -го порядка. Тогда $\psi_{I,m}$ порождает (вэйвлет)-пространства $W_j^m, j \in \mathbf{Z}$ в том смысле, что

$$W_j^m = \text{clos}_{L^2(\mathbf{R})}(2^{j/2}\psi_{I,m}(2^j x - k) : k \in \mathbf{Z}), \quad j \in \mathbf{Z}. \quad (6.1.6)$$

Доказательство. Проверим сначала, что $\psi_{I,m}$ принадлежит W_0^m . Для каждого $n \in \mathbf{Z}$, применяя последовательное интегрирование по частям и замечая, что m -я производная от B -сплайна m -го порядка N_m есть линейная комбинация цело-

численных сдвигов дельта-распределения, мы имеем

$$\begin{aligned}
 \langle N_m(\cdot - n), \psi_{I,m} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} N_m(x - n) L_{2m}^{(m)}(2x - 1) dx \\
 &= \frac{(-1)^m}{2^m} \int_{-\infty}^{\infty} L_{2m}(2x - 1) N_m^{(m)}(x - n) dx \\
 &= \sum_{k=0}^m \frac{1}{2^m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} \int_{-\infty}^{\infty} L_{2m}(2x - 1) \delta(x - n - k) dx \\
 &= \sum_{k=0}^m \frac{1}{2^m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} L_{2m}(2n + 2k - 1) = 0,
 \end{aligned}$$

так как $L_{2m}(\ell) = \delta_{\ell,0}$, $\ell \in \mathbb{Z}$. Следовательно, $\psi_{I,m} \in W_0^m$.

Затем будем исследовать двухмасштабное соотношение для $\psi_{I,m}$ относительно $N_m(2x - k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Таким образом, нас интересует изучение ℓ^2 -последовательности $\{q_k\}$, для которой

$$\psi_{I,m}(x) = L_{2m}^{(m)}(2x - 1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q_k N_m(2x - k). \quad (6.1.7)$$

Сохраняя те же обозначения, что и в (4.6.2), мы запишем

$$L_{2m}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^{(2m)} N_{2m}(x + m - k). \quad (6.1.8)$$

С другой стороны, повторно применяя тождество (ж) в теореме 4.3 для B -сплайна, имеем

$$\begin{aligned}
 N_{2m}^{(m)} &= (\Delta N_{2m-1}^{(m-1)})(x) \\
 &= \dots = (\Delta^m N_m)(x) \\
 &= \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} N_m(x - k),
 \end{aligned} \quad (6.1.9)$$

где Δ обозначает оператор разности назад, введенный в (4.1.9). Далее, из (6.1.5), (6.1.8) и (6.1.9) мы получаем

$$\begin{aligned}
 \psi_{I,m} &= L_{2m}^{(m)}(2x-1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^{(2m)} N_{2m}^{(m)}(2x-1+m-k) \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^{(2m)} \sum_{\ell=0}^m (-1)^\ell \binom{m}{\ell} N_m(2x-1+m-k-\ell) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_n N_m(2x-n); \\
 q_n &:= \sum_{\ell=0}^m (-1)^\ell \binom{m}{\ell} c_{m+n-1-\ell}^{(2m)}. \tag{6.1.10}
 \end{aligned}$$

Двухмасштабный символ Q , соответствующий двухмасштабной последовательности $\{q_k\}$ в (6.1.7), как это дается формулой (6.1.10), равняется

$$\begin{aligned}
 Q(z) &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{\ell=0}^m (-1)^\ell \binom{m}{\ell} c_{m+n-1-\ell}^{(2m)} \right) z^n \tag{6.1.11} \\
 &= \frac{z^{-m+1}}{2} (1-z)^m \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^{(2m)} z^n,
 \end{aligned}$$

где из (6.1.8) и интерполяционного свойства $L_{2m}(\ell) = \delta_{\ell,0}$ следует, что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^{(2m)} z^n = \frac{1}{F_m(z)} \tag{6.1.12}$$

с

$$\begin{aligned}
 F_m(z) &:= E_{N_m}(z) = \sum_{k=-m+1}^{m-1} N_{2m}(m+k) z^k \tag{6.1.13} \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} N_m(k+x) N_m(x) dx \right\} z^k,
 \end{aligned}$$

обобщенным многочленом Эйлера—Фробениуса Лорана относительно B -сплайна m -го порядка N_m (см. (4.2.14), (5.2.24) и

(5.2.25)). В теории сплайнов, где очень желательны алгебраические многочлены с целыми коэффициентами, многочлены Эйлера—Фробениуса $(2m-1)$ -го порядка определяются, как в (4.2.18), формулой

$$E_{2m-1}(z) := (2m-1)!z^{m-1}F_m(z).$$

Тогда, подставляя (6.1.12) в (6.1.11), мы получим формулу для двухмасштабного символа Q , а именно

$$Q(z) = \frac{z^{-m+1}}{2}(1-z)^m \frac{1}{F_m(z)}. \quad (6.1.14)$$

Заметим, что, согласно теореме 5.10(а), F_m нигде на единичной окружности не обращается в нуль.

Теперь, так как двухмасштабный символ для N_m дается формулой

$$P(z) = P_{N_m}(z) = \left(\frac{1+z}{2} \right)^m,$$

(см. (4.3.3)), мы можем вычислить определитель $\Delta_{P,Q}$, описанный в (5.3.9) и (5.3.10), следующим образом.

$$\begin{aligned} \Delta_{P,Q}(z) &= \det \begin{bmatrix} P(z) & Q(z) \\ P(-z) & Q(-z) \end{bmatrix} \quad (6.1.15) \\ &= \frac{(-z)^{-m+1}(1+z)^{2m}}{2^{m+1}F_m(-z)} - \frac{z^{-m+1}(1-z)^{2m}}{2^{m+1}F_m(z)} \\ &= 2^{m-1} \left[\frac{(P(z))^2}{\Pi_m(-z)} - \frac{(P(-z))^2}{\Pi_m(z)} \right] \\ &= 2^{m-1} \frac{z\Pi_m(z^2)}{\Pi_m(-z)\Pi_m(z)} = (-2)^{m-1} \frac{zF_m(z^2)}{F_m(-z)F_m(z)}, \end{aligned}$$

где мы применили тождество (5.2.32) из теоремы 5.10 с $N_\phi = m, k_\phi = m-1, \Pi_\phi = \Pi_m(z) = z^{m-1}F_m(z)$ и $P_\phi^r = P_\phi = P$. Так как F_m нигде не обращается в нуль на окружности $|z| = 1$, мы показали, что

$$\Delta_{P,Q}(z) \neq 0, \quad |z| = 1.$$

Итак, обращение к теореме 5.16 показывает, что мы действительно доказали теорему 6.1. $\square$

Ввиду полученного результата давайте рассмотрим подпространство

$$V_1^{2m,0} := \{s \in V_1^{2m} : s(k) = 0, \quad k \in \mathbf{Z}\} \quad (6.1.16)$$

сплайнов порядка $2m$ с последовательностью узлов $\frac{1}{2}\mathbf{Z}$, обращающихся в нуль во всех целых точках. Ясно, что функция

$$\Psi_{2m}(x) := \frac{1}{2^m} L_{2m}(2x - 1) \quad (6.1.17)$$

принадлежит $V_1^{2m,0}$, как и все ее целочисленные сдвиги. Фактически мы имеем следующий результат.

Теорема 6.2. *Для каждого m семейство*

$$\{\Psi_{2m}(\cdot - k) : k \in \mathbf{Z}\} \quad (6.1.18)$$

есть базис Рисса $V_1^{2m,0}$.

Доказательство. Чтобы показать, что линейная оболочка семейства (6.1.18) плотна в $V_1^{2m,0}$, выберем произвольным образом $G \in V_1^{2m,0}$. Тогда, применяя теорему 4.3 (б), мы имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} G^{(m)}(x) N_m(x - \ell) dx = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} G(k + \ell) = 0 \quad (6.1.19)$$

для всех $\ell \in \mathbf{Z}$. Следовательно, так как ясно, что $G^{(m)}$ принадлежит V_1^m , (6.1.19) показывает, что $G^{(m)}$ ортогональна подпространству V_0^m пространства V_1^m , и, следовательно, принадлежит W_1^m . По теореме 6.1 мы имеем

$$G^{(m)}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \psi_{I,m}(x - n)$$

для некоторой последовательности $\{a_n\} \in \ell^2$. Заметим также, что из определения (6.1.17) для Ψ_{2m} мы имеем

$$\Psi_{2m}^{(m)}(x) = \psi_{I,m}(x), \quad (6.1.20)$$

так что

$$D^m \left\{ G(x) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \Psi_{2m}(x-n) \right\} = 0, \quad x \in \mathbf{R},$$

где D^m обозначает оператор дифференцирования m -го порядка, введенный в (4.5.2). Так как $V_1^{2m,0}$ состоит только из функций $L^2(\mathbf{R})$, обращающихся в нуль на $\mathbf{Z}$, мы имеем

$$G(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \Psi_{2m}(x-n), \quad \{a_n\} \in \ell^2.$$

Чтобы показать, что базис (6.1.18) — безусловный (или базис Рисса), мы просто замечаем, что, так как

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_{2m}(\omega) &= 2^{-m-1} \hat{L}_{2m} \left(\frac{\omega}{2} \right) e^{-i\omega/2} \\ &= 2^{-m-1} e^{i(m-1)\omega/2} \left(\sum_k c_k^{(2m)} e^{-ik\omega/2} \right) \hat{N}_{2m} \left(\frac{\omega}{2} \right), \end{aligned}$$

из (4.2.16) и (6.1.12) следует

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\Psi}_{2m}(\omega + 2\pi k)|^2 = 2^{-2m-2} \left\{ \frac{F_{2m}(z)}{(F_m(z))^2} + \frac{F_{2m}(-z)}{(F_m(-z))^2} \right\}, \quad (6.1.21)$$

где $z = e^{-i\omega/2}$ и

$$F_{2m}(z) = E_{N_{2m}}(z) = \frac{1}{(4m-1)!} z^{2m-1} E_{4m-1}(z) \quad (6.1.22)$$

с E_{4m-1} , многочленом Эйлера—Фробениуса порядка $4m-1$ (или степени $4m-2$). Отсюда применение теоремы 5.10 (а) завершает доказательство. $\square$

Как следствие теорем 6.1 и 6.2 мы имеем следующий результат.

Теорема 6.3. Для любого целого положительного m дифференциальный оператор m -го порядка D^m взаимно однозначно отображает сплайн-пространство $V_1^{2m,0}$ на вэйвлет-пространство W_0^m . Кроме того, базис Рунда $\{\Psi_{2m}(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ пространства $V_1^{2m,0}$ соответствует базису Рунда $\{\psi_{I,m}(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ пространства W_0^m через соотношение $\psi_{I,m} = D^m \Psi_{2m}$.

6.2. Сплайн-вэйвлеты с компактным носителем

Интерполяционные вэйвлеты $\psi_{I,m}$, введенные в (6.1.5), экспоненциально убывают, но не имеют компактного носителя. Однако из результатов главы 5 (см. § 5.6) мы уже знаем, что полуортогональные (п.о.) вэйвлеты с компактным носителем всегда существуют при условии, что двухмасштабная последовательность для соответствующей масштабирующей функции ϕ конечна. Действительно, если $P = P_\phi$ означает, как обычно, двухмасштабный символ ϕ , то, рассматривая двойственное $\tilde{\phi}$ для ϕ , принадлежащее тому же пространству V_0 , что и ϕ , получим, что двухмасштабный символ $G^* = G_\phi^*$ для $\tilde{\phi}$, где $G^*(z) = \overline{G(z)}$ при $|z| = 1$, дается формулой

$$G(z) = \frac{E_\phi(z)}{E_\phi(z^2)} \overline{P(z)}, \quad |z| = 1, \quad (6.2.1)$$

где E_ϕ — обобщенный многочлен Эйлера—Фробениуса Лорана относительно ϕ (см. (5.6.11)). В результате двухмасштаб-

ный символ Q любого п.о. вэйвлета ψ , соответствующего ϕ , имеет вид

$$\begin{aligned} Q(z) &= z^{-1}G(-z)K(z^2) \\ &= z^{-1}E_{\phi}(-z)\overline{P(-z)}\frac{K(z^2)}{E_{\phi}(z^2)}, \quad |z| = 1 \end{aligned} \quad (6.2.2)$$

для любого $K \in \mathcal{W}$ с $K(z) \neq 0$ при $|z| = 1$ (см. (5.6.12)), так что простым выбором $K(z) = -zE_{\phi}(z)$ мы получим двухмасштабный многочлен-символ для п.о. вэйвлета ψ с компактным носителем. В случае сплайнов из теоремы 5.19 следует, что общий вид двухмасштабных символов для класса всех возможных п.о. вэйвлетов относительно N_m дается формулой

$$\begin{cases} Q(z) = -z^2 \left(\frac{1-z}{2}\right)^m E_{2m-1}(-z) \frac{K(z^2)}{E_{2m-1}(z^2)}, \\ K \in \mathcal{W}, \text{ с } K(z) \neq 0 \text{ на } |z| = 1, \end{cases} \quad (6.2.3)$$

где E_{2m-1} — многочлен Эйлера—Фробениуса Лорана порядка $(2m-1)$ (или степени $2m-2$), как определено в (4.2.18). Итак, чтобы обеспечить компактность носителя вэйвлета ψ , ряд Лорана K в (6.2.3) должен быть выбран так, чтобы Q был многочленом. Теперь, так как E_{2m-1} не обращается в нуль при $|z| = 1$, единственный способ понизить порядок многочлена $(1-z)^m E_{2m-1}(-z)$ состоит в наличии у $E_{2m-1}(z^2)$ общих нулей с $E_{2m-1}(-z)$, хотя в то же самое время после сокращения общего множителя оставшийся сомножитель от $E_{2m-1}(z^2)$ должен зависеть от z^2 , чтобы сократиться с $K(z^2)$ в (6.2.3). Это невозможно, так как $E_{2m-1}(z)$ не имеет симметричных нулей и на самом деле, как мы увидим в § 6.4, все нули $E_{2m-1}(z)$ отрицательны (см. также (4.2.18) и (4.2.19)). Следовательно, для того чтобы Q в (6.2.3) был двухмасштабным символом п.о. базисного сплайн-вэйвлета ψ с наименьшим носителем, необходимо и достаточно, чтобы

$$K(z) = c_0 z^{n_0} E_{2m-1}(z), \quad (6.2.4)$$

где c_0 — некоторая отличная от нуля константа и n_0 — некоторое целое число. Другими словами, с точностью до умножения на отличную от нуля константу и до некоторого целочисленного сдвига, п.о. вэйвлет с минимальным компактным носителем, соответствующий B -сплайну m -го порядка N_m , — единственный и определен формулами

$$\begin{cases} \psi_m(x) := \sum_n q_n N_m(2x - n) \\ Q_m(z) = \frac{1}{2} \sum_n q_n z^n := \left(\frac{1-z}{2}\right)^m \sum_{k=0}^{2m-2} N_{2m}(k+1)(-z)^k, \end{cases} \quad (6.2.5)$$

где мы выбрали в (6.2.4) $c_0 = -[(2m-1)!]^{(-1)}$ и $n_0 = 1$ для того, чтобы иметь $q_0 \neq 0$ и $q_n = 0$ при $n < 0$. Ввиду того факта, что аналогично N_m ψ_m также имеет наименьший носитель, мы будем для удобства называть ψ_m B -вэйвлетом m -го порядка. Так как Q_m в (6.2.5) есть произведение двух полиномиальных символов, то последовательность $\{q_n\}$ есть свертка двух последовательностей коэффициентов многочленов. Таким образом

$$q_n = \frac{(-1)^n}{2^{m-1}} \sum_{\ell=0}^m \binom{m}{\ell} N_{2m}(n+1-\ell), \quad n = 0, \dots, 3m-2. \quad (6.2.6)$$

Подведем итог полученных результатов в следующей теореме.

Теорема 6.4. Пусть m — любое положительное целое число. Пусть также N_m — B -сплайн m -го порядка и ψ_m — B -вэйвлет, определенный в (6.2.5), с коэффициентами, заданными (6.2.6). Тогда

$$\{\psi_m(\cdot - k) : k \in \mathbf{Z}\} \quad (6.2.7)$$

есть базис Рунса W_0 . Кроме того, ψ_m имеет компактный носитель с

$$\text{supp } \psi_m = [0, 2m-1]. \quad (6.2.8)$$

Это — «единственный» вэйвлет в W_0 , имеющий наименьший носитель в том смысле, что если $\eta \in W_0$ порождает W_0 так же, как и ψ_m , и носителем η является интервал с длиной, не превосходящей $2m - 1$, то $\eta(x) = c_0 \psi_m(x - n_0)$ при некоторой константе $c_0 \neq 0$ и $n_0 \in \mathbf{Z}$.

Теперь мы обратимся к двойственному $\tilde{\psi}_m$ для ψ_m . По формуле (5.4.11) двухмасштабный символ H^* для $\tilde{\psi}$ относительно $\tilde{\phi}$ дается формулой $H(z) = zP(-z)k^{-1}(z^2)$, где $H(z) = \overline{H^*(z)}$ при $|z| = 1$. Отсюда, ввиду соотношения двойственности для $\tilde{\phi}$ и ϕ (см. (5.6.10)), мы имеем для $z = e^{-i\omega/2}$:

$$\widehat{\tilde{\psi}}_m(\omega) = H^*(z) \widehat{\tilde{N}}_m\left(\frac{\omega}{2}\right) = H^*(z) \frac{1}{E_{N_m}(z)} \widehat{N}_m\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

Поэтому, если мы захотим связать двойственный вэйвлет $\tilde{\psi}_m$ с интерполяционным вэйвлетом $\psi_{I,m}$, введенным в §6.1, то, используя двухмасштабный символ $Q(z)$ в (6.1.14) с $F_m(z) = E_{N_m}(z)$ (см. (6.1.13)), мы получим

$$\begin{aligned} \widehat{\tilde{\psi}}_m(\omega) &= H^*(z) \left(\frac{2}{z^{-m+1}(1-z)^m} \right) \widehat{\psi}_{I,m}(\omega) \\ &= \overline{(zP(-z)K^{-1}(z^2))} \frac{2z^{m-1}}{(1-z)^m} \widehat{\psi}_{I,m}(\omega) \\ &= \frac{z^{-1} \left(1 - \frac{1}{z}\right)^m}{2^m K(z^2)} \frac{2z^{m-1}}{(1-z)^m} \widehat{\psi}_{I,m}(\omega) \\ &= (-1)^m 2^{-m+1} z^{-2} \frac{1}{K(z^2)} \widehat{\psi}_{I,m}(\omega). \end{aligned}$$

Напомним, что в нашей нормировке ψ_m в (6.2.5) мы выбрали $c_0 = -[(2m-1)!]^{-1}$ и $n_0 = 1$ для $K(z)$ в (6.2.4). Это дает

$$\begin{aligned} \widehat{\tilde{\psi}}_m(\omega) &= (-1)^{m+1} 2^{-m+1} [(2m-1)!] z^{-4} \frac{1}{E_{2m-1}(z^2)} \widehat{\psi}_{I,m}(\omega) \\ &= \frac{(-1)^{m+1}}{2^{m-1}} z^{-2(m+1)} \frac{1}{F_m(z^2)} \widehat{\psi}_{I,m}(\omega), \end{aligned} \quad (6.2.9)$$

где F_m — обратная величина символа последовательности коэффициентов $\{c_k^{(2m)}\}$ в определении фундаментального сплайна L_{2m} (6.1.8). Отсюда, замечая, что в (6.2.9) $z^2 = e^{-i\omega}$, мы имеем

$$\tilde{\psi}_m(x) = \frac{(-1)^{m+1}}{2^{m-1}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^{(2m)} \psi_{I,m}(x + m + 1 - k). \quad (6.2.10)$$

Мы заканчиваем этот параграф обсуждением фазовых свойств и исследованием частотно-временных окон B -вэйвлетов

ψ_m и его двойственного $\tilde{\psi}_m$. Сначала заметим, что B -сплайн N_m и фундаментальный сплайн L_{2m} симметричны при любом m (см. теорему 4.3 (и)). Отсюда последовательность $\{c_k^{(2m)}\}$ также симметрична. Таким образом, из определения $\psi_{I,m}$ мы видим, что $\psi_{I,m}$ должен быть симметричным для четных m и антисимметричным для нечетных m , и ввиду (6.2.10) такое же заключение справедливо для $\tilde{\psi}_m$. Так как ясно, что последовательность $\{q_n\}$ симметрична для четных порядков m и антисимметрична для нечетных порядков m , из (6.2.6) мы можем сделать такое же заключение для B -вэйвлета ψ_m .

Теорема 6.5. *Все вэйвлеты ψ_m , $\tilde{\psi}_m$, и $\psi_{I,m}$ симметричны для четных m и антисимметричны для нечетных m . Следовательно, все они имеют обобщенные линейные фазы.*

Особенно интересны графики B -вэйвлетов ψ_m . При $m \geq 3$ ψ_m четного порядка почти точно совпадают с

$$\operatorname{Re} G_{b,\omega}^\alpha(t) = (\cos \omega t) g_\alpha(t - b) \quad (6.2.11)$$

и ψ_m нечетного порядка — с

$$\operatorname{Im} G_{b,\omega}^\alpha(t) = (\sin \omega t) g_\alpha(t - b) \quad (6.2.12)$$

при некоторых значениях α, b, ω , где g_α есть функция Гаусса с параметром α (см. (3.1.10)). На рис. 6.2.1 и 6.2.2 показаны графики ψ_4 и ψ_3 , соответственно. Заметим сходство между этими

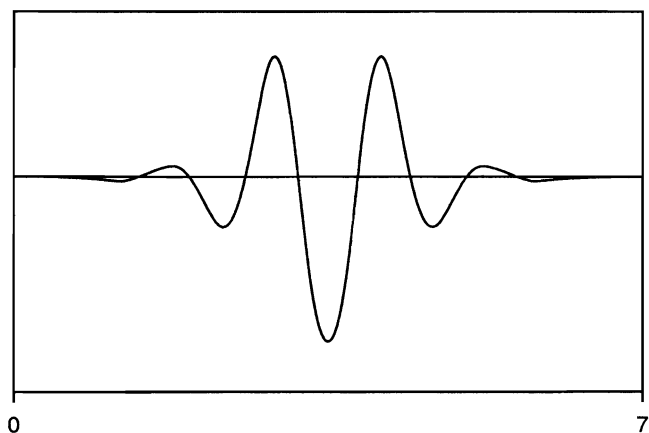


Рис. 6.2.1. Кубический сплайн-вэйвлет ψ_4 .

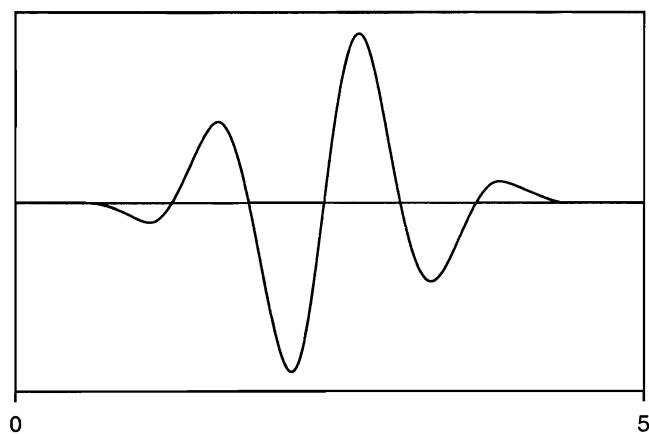


Рис. 6.2.2. Квадратичный сплайн-вэйвлет ψ_3 .

графиками и графиками соответствующих функций Гаусса на рис. 3.1.1 и 3.1.2. На рис. 6.2.3 и 6.2.4 даются кривые погрешностей.

Напомним из главы 3, что, когда вэйвлет ψ используется в качестве базисного вэйвлета в ИВП, площадь окна равняет-

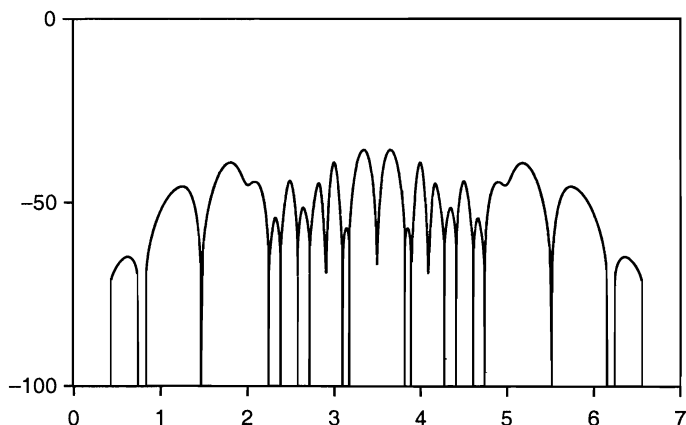


Рис. 6.2.3. $|\psi_4 - \text{Re}G_{3.5, 2\pi}^\alpha|^2$ в dB, $\alpha = 0.2925$.

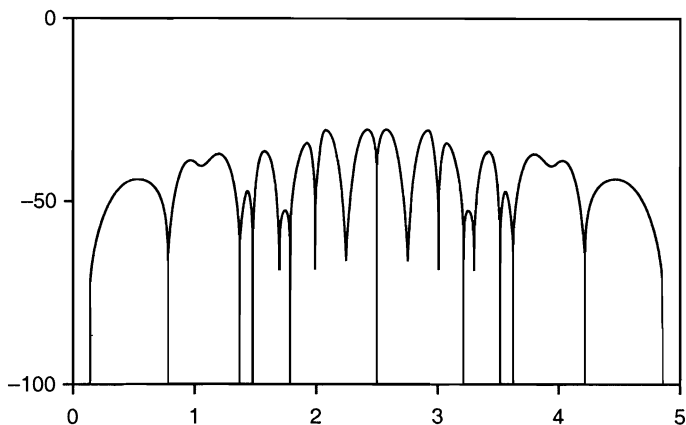


Рис. 6.2.4. $|\psi_3 - \text{Im}G_{2.5, 2\pi}^\alpha|^2$ в dB, $\alpha = 0.2300$.

ся $4\Delta_\psi\Delta_{\hat{\psi}}$, и чем меньше величина $\Delta_\psi\Delta_{\hat{\psi}}$, тем вэйвлет лучше для применения в частотно-временной локализации. Так как функция Гаусса g_α не может быть использована в качестве базисного вэйвлета, то по принципу неопределенности

Таблица 6.1. Значения $\Delta_{\psi_m} \Delta_{\hat{\psi}_m}$.

m	Произведения Δ_{ψ_m} и $\Delta_{\hat{\psi}_m}$
2	0.971715
3	0.535070
4	0.504839
5	0.500929
6	0.500367

для любого базисного вэйвлета $\Delta_{\psi} \Delta_{\hat{\psi}} > \frac{1}{2}$. В таблице 6.2.1 мы даем значения $\Delta_{\psi} \Delta_{\hat{\psi}}$ для $m = 2, 3, 4, 5, 6$. Заметим, как близки к оптимальному эти значения для B -вэйвлетов при больших значениях m .

6.3. Вычисление базисных сплайн-вэйвлетов

Этот параграф посвящен обсуждению некоторых вычислительных схем для базисных сплайн-вэйвлетов с компактным носителем (или B -вэйвлетов) ψ_m в формулах (6.2.5)–(6.2.6). В § 5.2 был предложен метод вычисления любой масштабирующей функции с компактным носителем. Он состоит из двух главных шагов: первый шаг — нахождение собственного вектора $[\phi(1), \dots, \phi(N_{\phi} - 1)]^T$ матрицы $[p_{2j-k}^{\phi}]$, $1 \leq j, k \leq N_{\phi} - 1$, соответствующего собственному числу $\lambda = 1$ и удовлетворяющего условию нормировки $\phi(1) + \dots + \phi(N_{\phi} - 1) = 1$, в то время как второй шаг — это применение интерполяционного графически-изобразительного алгоритма, описанного в § 4.3 с $j_0 = 0$, $a_{\ell}^{(0)} = \delta_{\ell,0}$, $w_{m,k} = \phi(k)$ и с заменой $p_{m,k}$ на p_k^{ϕ} . Этот метод дает значения

$$\phi\left(k + \frac{\ell}{2^{j-1}}\right), \quad k \in \mathbf{Z}, \quad \ell = 0, \dots, 2^{j-1} - 1 \quad (6.3.1)$$

для любого желаемого положительного целого j . Теперь из двухмасштабного соотношения

$$\psi(x) = \sum_k q_k \phi(2x - k)$$

для вэйвлета ψ мы можем легко построить следующую схему вычисления ψ в двоичных точках, а именно:

$$\begin{cases} \psi\left(n + \frac{\ell}{2^j}\right) = \sum_k q_{2n-k} \phi\left(k + \frac{\ell}{2^{j-1}}\right) \\ n \in \mathbf{Z}, \ell = 0, \dots, 2^j - 1 \text{ и } \phi\left(k + \frac{\ell}{2^{j-1}}\right) \end{cases} \text{ из (6.3.1).} \quad (6.3.2)$$

Заметим, что снова эта схема состоит из вычисления скользящих средних с разрежающей выборкой.

Обратим внимание на то, что если значения p_k^ϕ и q_k известны точно, то вычислительный алгоритм, описанный выше, дает точные значения ψ в двоичных точках. Напомним из (4.3.3) и (6.2.6), что для базисных сплайнов порядка m

$$p_k^\phi = p_{m,k} = \begin{cases} 2^{-m+1} \binom{m}{k}, & 0 \leq k \leq m, \\ 0 & \text{для других } k \end{cases} \quad (6.3.3)$$

и

$$q_{m,k} := q_k = \begin{cases} \frac{(-1)^k}{2^{m-1}} \sum_{\ell=0}^m \binom{m}{\ell} N_{2m}(k+1-\ell), & 0 \leq k \leq 3m-2 \\ 0 & \text{для других } k, \end{cases} \quad (6.3.4)$$

где значения $N_{2m}(k)$, $k \in \mathbf{Z}$ могут быть вычислены с помощью рекуррентной схемы

$$\begin{cases} N_2(k) = \delta_{k,1}, & k \in \mathbf{Z} \text{ и} \\ N_{n+1}(k) = \frac{k}{n} N_n(k) + \frac{n-k+1}{n} N_n(k-1), \\ \text{где } k = 1, \dots, n \text{ и } n = 2, \dots, 2m-1, \end{cases} \quad (6.3.5)$$

рассмотренной ранее в (4.2.15). Отметим, что процедура в (6.3.5) более эффективна, чем нахождение собственных векторов матриц $[p_{m,2j-k}]$, $1 \leq j, k \leq m-1$ и $[p_{2m,2j-k}]$, $1 \leq j, k \leq 2m-1$, соответствующих собственному числу $\lambda = 1$, как это было описано выше в (5.2.14)–(5.2.17).

Вычислительные преимущества B -сплайнов перед другими масштабирующими функциями — это больше, чем только преимущества рекуррентной схемы в (6.3.5). Первая цель этого параграфа — это введение треугольного алгоритма Паскаля (ТАП) для прямого вычисления двухмасштабных последовательностей $\{q_{m,k}\}$, $k \in \mathbf{Z}$, $m = 1, 2, \dots$. Как мы увидим, этот алгоритм дает возможность получить не только двухмасштабные последовательности, но также и последовательности коэффициентов $\{q_{m,k}^r\}$ для представления в виде рядов по B -сплайнам r -х производных

$$\psi_m^{(r)}(x) = \sum_{k=0}^{3m-2+r} q_{m,k}^r N_{m-r}(2x - k) \quad (6.3.6)$$

B -вэйвлетов с компактными носителями m -го порядка ψ_m . Структура этого ТАП будет рассмотрена в § 6.6 вместе с обсуждением «вполне положительности», «полной осцилляции», и «пересечения нулей». С этой целью мы описываем ТАП до некоторой степени в более общем виде.

В дальнейшем мы будем использовать обозначение

$$\mathbf{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\} \quad (6.3.7)$$

для множества неотрицательных целых чисел, и так же, как в (4.5.9), $\tilde{A}(z)$ будет обозначать символ последовательности $\{a_n\} \in \ell^2$. Чтобы облегчить изложение этого метода, нам будет нужно также обозначение

$$\mathcal{L}^n := \{\{a_k\} : a_k = 0 \text{ для } k < 0 \text{ или } k > n, \text{ и } a_0, a_n \neq 0\}, \quad (6.3.8)$$

для любого $n \in \mathbf{Z}_+$. Отсюда $\{\mathcal{L}^n\}$, $n \in \mathbf{Z}_+$ образует разбиение на взаимно непересекающиеся множества семейства

$$\mathcal{L} := \ell^2 \cap \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}^n \quad (6.3.9)$$

класса всех причинных ℓ^2 -последовательностей. Кроме того, пусть τ означает оператор сдвига в ℓ^2 , определенный формулой

$$(\tau \mathbf{a})_{n+1} := a_n, \quad n \in \mathbf{Z} \quad \mathbf{a} = \{a_n\} \in \ell^2. \quad (6.3.10)$$

Определение 6.6. Треугольный алгоритм Паскаля (ТАП) есть отображение $\mathcal{P} : \mathbf{Z}_+ \rightarrow \mathcal{L}$, которое может быть определено следующим образом:

$$\begin{cases} \mathcal{P}(0) = \{\delta_{j,0}\} \text{ и} \\ (\mathcal{P}(n+1))_j = L(n, j)(\mathcal{P}(n))_j + R(n, j-1)(\mathcal{P}(n))_{j-1}, j \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}_+, \\ \text{где } L(n, 0) \neq 0 \text{ и } R(n, n) \neq 0. \end{cases} \quad (6.3.11)$$

Определение 6.7. ТАП $\mathcal{P}$, описанный в (6.3.11), называется линейным треугольным алгоритмом Паскаля (ЛТАП), если $L(n, \cdot)$ и $R(n, \cdot)$ оба являются линейными (по второй «переменной»), а именно:

$$\begin{cases} L(n, j) = k_L(n)j + b_L(n), \\ R(n, j) = k_R(n)(n - j) + b_R(n), \quad j \in \mathbf{Z} \end{cases} \quad (6.3.12)$$

при некоторых $k_L(n)$, $k_R(n)$, $b_L(n)$ и $b_R(n)$.

Замечание. Для любого ТАП $\mathcal{P}$ ясно, что

$$\mathcal{P}(n) \in \mathcal{L}^n, \quad n \in \mathbf{Z}_+. \quad (6.3.13)$$

Если, кроме того, $\mathcal{P}$ есть ЛТАП, то необходимо, чтобы

$$b_L(n) \neq 0 \quad \text{и} \quad b_R(n) \neq 0, \quad n \in \mathbf{Z}_+, \quad (6.3.14)$$

так как $b_L(n) = L(n, 0) \neq 0$ и $b_R(n) = R(n, n) \neq 0$.

Ввиду начального условия $\mathcal{P}(0) = \{\delta_{j,0}\}$ в (6.3.11), ТАП может быть реализован как «дерево-алгоритм» вычисления последовательностей

$$s^n := \mathcal{P}(n) \in \mathcal{L}^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Более точно, если интерпретировать конфигурацию на рис. 6.3.1 как

$$\begin{cases} u = at_1 + bt_2 \\ u = bt_2 \text{ и} \\ u = at_1 \text{ соответственно,} \end{cases} \quad (6.3.15)$$

то дерево конфигурации ТАП может быть описано рис. 6.3.2, где мы использовали обозначение

$$L_{n,k} := L(n,k), \quad R_{n,k} := R(n,k), \quad s_k^n = (s^n)_k.$$

Пример 6.8. Рассмотрим ЛТАП $\mathcal{P}_b$, определенный значениями

$$L(n,j) = R(n,j) = 1, \quad n \in \mathbf{Z}_+, \quad j \in \mathbf{Z} \quad (6.3.16)$$

(таким образом, $k_L(n) = k_R(n) = 0$ и $b_L(n) = b_R(n) = 1$). Тогда треугольник Паскаля на рис. 6.3.2 есть хорошо известный алгоритм вычисления последовательности биномиальных коэффициентов

$$\left\{ \binom{n}{j} \right\} = \mathcal{P}_b(n), \quad n \in \mathbf{Z}_+. \quad (6.3.17)$$

Пример 6.9. Рассмотрим ЛТАП $\mathcal{P}_e$, определенный значениями

$$\begin{cases} L(n,j) = j+1 \text{ и} \\ R(n,j) = (n-j)+1 \end{cases} \quad (6.3.18)$$

(таким образом, $k_L(n) = k_R(n) = b_L(n) = b_R(n) = 1$). Тогда треугольник Паскаля на рис. 6.3.2 может быть использован

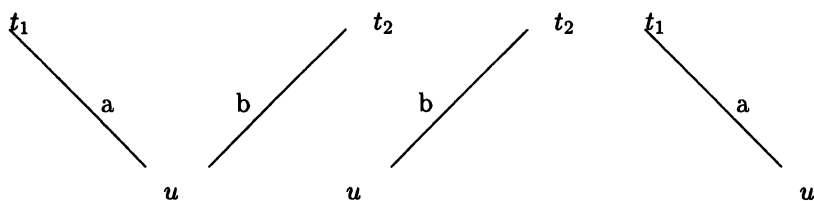


Рис. 6.3.1. Элементы ТАП

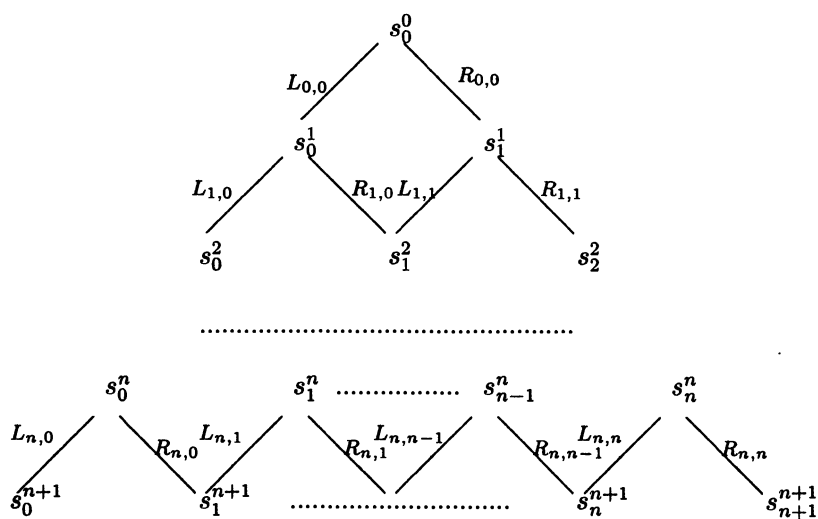


Рис. 6.3.2. Треугольник Паскаля

Таблица 6.1. Модифицированные многочлены Эйлера—Фробениуса

n	$\tilde{E}_n(z)$
1	1
2	$1+z$
3	$1+4z+z^2$
4	$1+11z+11z^2+z^3$
5	$1+26z+66z^2+26z^3+z^4$
6	$1+57z+302z^2+302z^3+57z^4+z^5$
7	$1+120z+1191z^2+2416z^3+1191z^4+120z^5+z^6$
8	$1+247z+4293z^2+15619z^3+15619z^4+4293z^5+247z^6+z^7$
9	$1+502z+14608z^2+88234z^3+156190z^4+88234z^5+14608z^6+502z^7+z^8$

для вычисления последовательности коэффициентов модифицированных многочленов Эйлера—Фробениуса $\tilde{E}_n$ порядка n (или степени $n-1$) (см. замечание после этого примера), определенных формулой

$$\tilde{E}_n(z) := n! \sum_{j=0}^{n-1} N_{n+1}(j+1)z^j \quad (6.3.19)$$

в том смысле, что

$$\mathcal{P}_e(n-1) = \{n!N_{n+1}(j+1)\}_{j=0}^{n-1} \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.3.20)$$

Это есть следствие рекуррентной схемы (4.2.15) или (6.3.5) для B -сплайнов. Можно показать, что этот ЛТАП дает

$$N_{n+1}(j+1) = \frac{1}{n!} \sum_{\nu=0}^j (-1)^\nu \binom{n+1}{\nu} (j+1-\nu)^n.$$

В частности, мы приводим первые девять модифицированных многочленов Эйлера—Фробениуса в таблице 6.3.1.

Замечание. Напомним из (4.6.6), что многочлены Эйлера—Фробениуса m -го порядка определяются формулой

$$E_m(z) = m! \sum_{k \in \mathbf{Z}} N_{m+1} \left(\frac{m+1}{2} + k \right) z^{k+m/2}.$$

Отсюда для нечетных m мы имеем

$$\begin{aligned} E_{2n-1}(z) &= (2n-1)! \sum_{k \in \mathbf{Z}} N_{2n}(n+k) z^{k+n-1} \\ &= (2n-1)! \sum_{k=0}^{2n-2} N_{2n}(k+1) z^k, \end{aligned}$$

что совпадает с (4.2.18). Однако для четных m коэффициенты $E_m(z)$ больше не являются значениями B -сплайна N_{m+1} в целых точках, и поэтому рекуррентная схема в (4.2.15) или (6.3.5) не применима. Ввиду этого вычислительного соображения в (6.3.19) вводятся модифицированные многочлены Эйлера—Фробениуса $\tilde{E}_n(z)$. Мы видели, что $\tilde{E}_{2m-1}(z) = E_{2m-1}(z)$. В других применениях использовать $\tilde{E}_{2m}(z)$ невыгодно, так как интерполяция сплайнами нечетного порядка (и с последовательностью узлов $\mathbf{Z}$) «неустойчива» в узлах $\mathbf{Z}$ (например, матрица коэффициентов необратима). Это следует из таблицы 6.3.1 с учетом того, что

$$\tilde{E}_{2m}(-1) = 0, \quad m = 1, 2, \dots$$

Другое соображение для введения $\tilde{E}_{2m}$ состоит в том, что, имея ввиду рекуррентную схему (6.3.5) для B -сплайнов в целых точках, существует прекрасная взаимосвязь между $\tilde{E}_n$ и $\tilde{E}_{n+1}$, а именно:

$$\tilde{E}_{n+1}(z) = (1+nz)\tilde{E}_n(z) + z(1-z)\tilde{E}'_n(z), \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.3.21)$$

Доказательство (6.3.21) получается в результате прямого применения (6.3.5). Это тождество будет использовано в § 6.5.

Мы обратимся теперь к формулировке ТАП для двухмаштабных последовательностей $\{q_{m,k}\}$ в (6.3.4) для B -сплайнов m -го порядка ψ_m . Как отмечалось ранее, при вычислении $\{q_{m,k}\}$, этот же самый ТАП может быть применен для получения последовательностей коэффициентов $\{q_{m,k}^{(r)}\}$ рядов по B -сплайнам для производных r -го порядка $\psi_m^{(r)}$ от ψ_m ,

$r = 0, 1, \dots, m - 1$. Для того чтобы избежать перемен знака, введем обозначения

$$\begin{cases} \tilde{q}_{m,k}^{(r)} := |q_{m,k}^{(r)}| = (-1)^k q_{m,k}^{(r)} \\ \tilde{q}_{m,k}^{(0)} := |q_{m,k}| = (-1)^k q_{m,k}. \end{cases} \quad (6.3.22)$$

Мы имеем следующий результат.

Теорема 6.10. Пусть для каждого положительного целого m $\mathcal{P}_m$ — ЛТАП с

$$L_{n,j} = \begin{cases} j+1 & \text{для } 0 \leq n < 2m-2, \\ 1 & \text{для } n \geq 2m-2 \end{cases} \quad (6.3.23)$$

и

$$R_{n,j} = \begin{cases} (n-j)+1 & \text{для } 0 \leq n < 2m-2, \\ 1 & \text{для } n \geq 2m-2. \end{cases} \quad (6.3.24)$$

Тогда

$$(\mathcal{P}_m(3m-2+r))_k = (2m-1)! 2^{m-r-1} \tilde{q}_{m,k}^{(r)}, \quad (6.3.25)$$

для $r = 0, \dots, m-1$.

Замечание. Отметим, что в (6.3.23) и (6.3.24) мы имеем в ЛТАП $b_L(n) = b_R(n) = 1$ для всех $n \in \mathbf{Z}_+$ и

$$k_L(n) = k_R(n) = \begin{cases} 1 & \text{для } 0 \leq n < 2m-2, \\ 0 & \text{для } n \geq 2m-2. \end{cases}$$

Доказательство. Будем снова использовать обозначения

$$\begin{cases} s^n := \mathcal{P}_m(n), \\ s_j^n := (s^n)_j, \\ \tilde{S}^n(z) := \sum_j s_j^n z^j. \end{cases} \quad (6.3.26)$$

Тогда ввиду (6.3.23) и (6.3.24), применяя последовательно результаты примеров 6.9 и 6.8, мы имеем

$$\tilde{S}^n(z) = \begin{cases} \tilde{E}_{n+1}(z) & \text{для } 0 \leq n < 2m - 2 \\ E_{2m-1}(z)(1+z)^{n-2m+2} & \text{для } n \geq 2m - 2. \end{cases}$$

(Заметим, что $\tilde{E}_{2m-1} = E_{2m-1}$.) Отсюда символ s^{3m-2+r} дается формулой

$$\tilde{S}^{3m-2+r}(z) = E_{2m-1}(z)(1+z)^{m+r}, \quad r = 0, \dots, m-1. \quad (6.3.27)$$

С другой стороны, применяя тождество (ж) в теореме 4.3, мы имеем

$$q_{m,k}^{(r)} = 2^r \sum_{\ell=0}^r (-1)^\ell \binom{r}{\ell} q_{m,k-\ell}. \quad (6.3.28)$$

Поэтому, так как символ $\{q_{m,k}\}$ (который равняется удвоенному двухмасштабному символу Q для B -вэйвлета ψ_m относительно масштабирующей функции N_m) есть

$$2Q_m(z) = 2^{-m+1} \frac{1}{(2m-1)!} E_{2m-1}(-z)(1-z)^m$$

(см. (6.2.5)), из (6.3.28) следует, что символ $\{q_{m,k}^{(r)}\}$ равняется

$$2^{-m+r+1} \frac{1}{(2m-1)!} E_{2m-1}(-z)(1-z)^{m+r}. \quad (6.3.29)$$

Итак, если мы умножим на $(2m-1)!2^{m-r-1}$ выражение в (6.3.29) и заменим $-z$ на z , то мы получим символ $\tilde{S}^{3m-2+r}$ в (6.3.27) для $\mathcal{P}_m(3m-2+r)$. Таким образом, мы действительно вывели (6.3.25). $\square$

Так как B -вэйвлет ψ_m является сплайном m -го порядка, то его $(m-1)$ -я производная есть кусочно-постоянная функция $\psi_m^{(m-1)}$ со скачками в точках $j/2$, $j = 0, \dots, 4m-2$. Отсюда, чтобы получить ψ_m , мы могли бы просто проинтегрировать

эту кусочно-постоянную функцию $(m-1)$ раз. В общем случае, чтобы получить любые B -вэйвлет ряды

$$g(x) = \sum_j d_j \psi_m(x-j), \quad (6.3.30)$$

можно проинтегрировать кусочно-постоянную функцию

$$g^{(m-1)}(x) = \sum_j d_j \psi_m^{(m-1)}(x-j).$$

Конечно, если инженер предпочитает работать с *импульсным рядом* (т.е. рядом из дельта-функций), то он или она могут использовать ряд

$$g^{(m)}(x) = \sum_j d_j \psi_m^{(m)}(x-j),$$

который нуждается в дополнительном интегрировании.

Теорема 6.11. Пусть для каждого целого положительного m

$$\mathcal{P}_m(4m-3) = s^{4m-3} = \{s_j^{4m-3}\}_{j=0}^{4m-3},$$

и пусть $\chi_{[0, \frac{1}{2})}$ обозначает характеристическую функцию интервала $[0, \frac{1}{2})$. Тогда B -вэйвлет m -го порядка ψ_m дается формулой

$$\begin{aligned} \psi_m(x) = \frac{1}{(2m-1)!} \sum_{j=0}^{4m-3} (-1)^j s_j^{4m-3} \\ \times \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \dots \int_0^{x_{m-2}} \chi_{[0, \frac{1}{2})} \left(x_{m-1} - \frac{j}{2} \right) dx_{m-1}. \end{aligned} \quad (6.3.31)$$

Другой способ вычисления B -вэйвлета ψ_m (и любого B -вэйвлет-ряда $g(x)$, как в (6.3.30)), состоит в вычислении представления B -сетью каждой из полиномиальных частей. Это дает значения $\psi_m(x)$ не только в двоичных точках $x = n + \ell/2^j$, как это дается общей вычислительной схемой (6.3.2), но также и в любой точке $x \in \mathbf{R}$. Эффективное вычисление может быть выполнено просто взятием скользяще-

го среднего последовательности $\mathcal{P}_m(3m-2)$ с последовательностью B -сети B -сплайна m -го порядка $N_m(2x)$, полученной применением B -сплайн- B -сеть алгоритма в § 4.4. (См. пример 4.11 для B -сетей квадратичного, кубического и четвертой степени B -сплайнов.)

6.4. Многочлены Эйлера—Фробениуса

Мы видим, что многочлены Эйлера—Фробениуса $E_m(z)$ играют очень важную роль в сплайн-интерполяции (см. § 4.6 и § 6.1), в построении и анализе базисных сплайн-вэйвлетов (см. § 6.1—§ 6.3). В этом параграфе мы будем детально исследовать эти многочлены, уделяя особое внимание структуре их нулей. Эти структуры были уже использованы в (4.2.18)–(4.2.21) для определения точных нижних границ Рисса для N_m и будут снова играть важную роль в следующем параграфе при анализе погрешности сплайн-вэйвлет разложения. Ввиду того что свойства многочленов Эйлера—Фробениуса E_m четных и нечетных порядков одинаковы и выводы этих свойств очень похожи, то для того, чтобы не повторять аналогичные рассуждения, мы будем рассматривать только многочлены нечетного порядка еще и потому, что многочлены четного порядка не используются в нашем изучении сплайн-вэйвлетов.

Аналогично (4.6.8), применяя формулы суммирования Пуассона (2.5.8), многочлен Эйлера—Фробениуса $E_{2m-1}(z)$ с $z = e^{-i\omega}$ может быть записан как

$$\begin{aligned} E_{2m-1}(z) &:= (2m-1)! \sum_{k=0}^{2m-2} N_{2m}(k+1)z^k \\ &= (2m-1)!e^{i\omega} \sum_k \hat{N}_{2m}(\omega + 2\pi k) \\ &= (2m-1)!e^{-i(m-1)\omega} \left(2 \sin \frac{\omega}{2}\right)^{2m} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\omega + 2\pi k)^{2m}} \end{aligned} \quad (6.4.1)$$

(см. (3.2.16)). Определяя

$$e_n(\omega) := \left(2 \sin \frac{\omega}{2}\right)^{n+2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\omega + 2\pi k)^{n+2}}, \quad (6.4.2)$$

из (6.4.1) получим, что

$$\begin{aligned} e_{2m-2}(\omega) &= \frac{1}{(2m-1)!} z^{-m+1} E_{2m-1}(z) \\ &= \sum_{k=-m+1}^{m-1} N_{2m}(m+k) z^k \\ &= N_{2m}(m) + 2 \sum_{k=1}^{m-1} N_{2m}(m+k) \cos k\omega. \end{aligned} \quad (6.4.3)$$

Как следует из (6.4.1) и (6.4.3), $e_n(\omega)$ полностью характеризуется рекуррентным соотношением

$$\begin{cases} e_{n+1}(\omega) = \left(\cos \frac{\omega}{2}\right) e_n(\omega) - \frac{2}{n+2} \left(\sin \frac{\omega}{2}\right) e'_n(\omega), \\ e_0(\omega) = 1. \end{cases} \quad (6.4.4)$$

Другое определение e_n дается формулой

$$e_n(\omega) = \left(\sin \frac{\omega}{2}\right)^{n+2} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} (D^{n+1} \operatorname{ctg}) \left(\frac{\omega}{2}\right), \quad (6.4.5)$$

которое следует из (4.2.9) и где D — оператор дифференцирования. Ввиду свойств формул (6.4.4) и (6.4.5), удобно ввести новую переменную

$$x = \cos \frac{\omega}{2}, \quad (6.4.6)$$

так что (6.4.4) принимает вид

$$\begin{cases} U_{n+1}(x) = xU_n(x) + \frac{1-x^2}{n+2} U'_n(x), \\ U_0(x) = 1, \end{cases} \quad (6.4.7)$$

где

$$U_n(x) := e_n(\omega). \quad (6.4.8)$$

Замечание. Из (6.4.7) очень легко вычислить U_n , $n \in \mathbf{Z}_+$. Например, мы имеем

$$U_1(x) = x,$$

$$U_2(x) = \frac{1}{3}(1 + 2x^2),$$

$$U_3(x) = \frac{1}{3}(2x + x^3),$$

$$U_4(x) = \frac{1}{15}(2 + 11x^2 + 2x^4).$$

Из этого замечания вытекает, что по крайней мере для $0 \leq n \leq 4$, $U_n(x)$ — многочлен точно степени n с положительным коэффициентом при старшей степени. Более того, $U_n(1) = 1$ и U_n — четная функция при четных n и нечетная функция при нечетных n . То, что эти свойства выполняются для всех $n \in \mathbf{Z}_+$, может быть установлено методом математической индукции. На самом деле можно сделать также следующие интересные заключения о нулях U_n .

Лемма 6.12. *Для каждого $n \in \mathbf{Z}_+$, $U_n(x)$ есть многочлен точно степени n , состоящий только из четных степеней, если n четно, и только из нечетных степеней, если n нечетно, такой что $U_n^{(n)} > 0$ и $U_n(1) = 1$. Кроме того, все нули U_n — простые и чисто мнимые.*

Доказательство. Мы приведем только доказательство последнего утверждения. Кроме того, так как легче рассматривать вещественные нули, мы будем изучать

$$u_n(x) = \frac{1}{i^n} U_n(ix), \quad n \in \mathbf{Z}_+ \quad (6.4.9)$$

вместо U_n . Достаточно показать, что все нули u_n простые и вещественные. Из (6.4.7) мы также имеем

$$\begin{cases} u_{n+1}(x) = xu_n(x) - \frac{1+x^2}{n+2}u'_n(x), \\ u_0(x) = 1, \end{cases} \quad (6.4.10)$$

и, следовательно, легко показать, что u_n — четный при четном n и нечетный при нечетном n . Кроме того, из (6.4.9) следует, что

$$u_n^{(n)}(x) = U_n^{(n)}(ix),$$

это означает, что коэффициент при старшей степени u_n также положительный. Теперь мы применим индукцию.

(а) Предположим, что u_{2k} имеет только простые и вещественные корни. Тогда, так как u_{2k} — четная функция, то 0 не может быть его нулем, и все корни разбиваются на симметричные пары, $\pm\xi_j$, где

$$0 < \xi_1 < \dots < \xi_k.$$

Далее, u'_{2k} не может обращаться в ноль в этих корнях, и, действительно, последовательность

$$\{u'_{2k}(-\xi_k), \dots, u'_{2k}(-\xi_1), u'_{2k}(\xi_1), \dots, u'_{2k}(\xi_k)\}$$

должна иметь (строго) чередующиеся знаки. Следовательно, так как (6.4.10) утверждает, что

$$u_{2k+1}(\pm\xi_j) = -\frac{1+\xi_j^2}{n+1}u'_{2k}(\pm\xi_j),$$

то последовательность

$$\{u_{2k+1}(-\xi_k), \dots, u_{2k+1}(-\xi_1), u_{2k+1}(\xi_1), \dots, u_{2k+1}(\xi_k)\} \quad (6.4.11)$$

также должна иметь строго чередующиеся знаки. Будучи нечетной функцией, u_{2k+1} должен обращаться в нуль при $\xi = 0$,

и из чередования знаков в (6.4.11) он имеет по крайней мере один нуль между ξ_j и ξ_{j+1} , $j = 1, \dots, k-1$. Итак, u_{2k+1} имеет по крайней мере $2(k-1) + 1 = 2k-1$ нулей в открытом интервале $(-\xi_k, \xi_k)$. Теперь из того факта, что u_{2k} имеет положительный коэффициент при старшей степени, следует, что $u'_{2k}(\xi_k) > 0$ (так как ξ_k — наибольший нуль). Следовательно, снова из (6.4.10) мы имеем

$$u_{2k+1}(\xi_k) = -\frac{1 + \xi_k^2}{n+1} u'_{2k}(\xi_k) < 0.$$

Поскольку коэффициент при старшей степени u_{2k+1} также положительный, u_{2k+1} должен иметь по крайней мере один нуль справа от ξ_k , и, будучи нечетным, он также имеет один нуль слева от $-\xi_k$. Это показывает, что u_{2k+1} имеет $2k+1$ простых вещественных нулей.

(б) Предположим, что u_{2k+1} имеет простые вещественные нули $\pm\eta_j$ и 0, где $0 < \eta_1 < \dots < \eta_k$. Тогда с помощью такого же рассуждения, что и в (а), мы можем сделать заключение, что u_{2k+2} имеет нули на каждом из интервалов $(0, \eta_1), \dots, (\eta_{k-1}, \eta_k), (\eta_k, \infty)$. Отсюда, будучи четным, u_{2k+2} имеет $2k+2$ простых вещественных нулей. $\square$

Применяя лемму 6.12, мы можем сделать вывод из сопоставления U_n с e_n :

$$\begin{cases} e_{2k}(\omega) = U_{2k}(x) = c_k \prod_{j=1}^k (x^2 + \alpha_j^2), & 0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_k, \quad c_k > 0, \\ e_{2k+1}(\omega) = U_{2k+1}(x) = d_k x \prod_{j=1}^k (x^2 + \beta_j^2), & 0 < \beta_1 < \dots < \beta_k, \quad d_k > 0. \end{cases} \quad (6.4.12)$$

Затем мы должны связать мнимые нули U_n с нулями многочленов Эйлера—Фробениуса. Так как $z = e^{-i\omega}$ и имеет место

соотношение (6.4.6), то для любого $\alpha > 0$

$$\begin{aligned} x^2 + \alpha^2 &= \left(\frac{e^{i\omega/2} + e^{-i\omega/2}}{2} \right)^2 + \alpha^2 \\ &= \frac{1}{4} \{ z + (2 + 4\alpha^2) + z^{-1} \} \\ &= \frac{z^{-1}}{4} \{ z^2 + (2 + 4\alpha^2)z + 1 \} \\ &= \frac{z^{-1}}{4} (z - a_1)(z - a_2), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} a_1, a_2 &= \frac{-(2 + 4\alpha^2) \pm \sqrt{(2 + 4\alpha^2)^2 - 4}}{2} \\ &= -(1 + 2\alpha^2) \pm 2\alpha\sqrt{1 + \alpha^2}. \end{aligned}$$

Итак, взяв

$$a_1 = -(1 + 2\alpha^2) - 2\alpha\sqrt{1 + \alpha^2},$$

мы имеем

$$a_2 = \frac{1}{a_1} \quad \text{и} \quad -1 < a_2 < 0.$$

Отсюда мы заключаем, что для любого $\alpha > 0$

$$\begin{cases} (x^2 + \alpha^2) = \frac{z^{-1}}{4} (z - \gamma) \left(z - \frac{1}{\gamma} \right), \\ \text{где} \quad -1 < \gamma < 0. \end{cases} \quad (6.4.13)$$

Чтобы применить этот результат к (6.4.12), положим

$$\lambda_j = -(1 + 2\alpha_j^2) + 2\alpha_j\sqrt{1 + \alpha_j^2}.$$

Тогда ясно, что $-1 < \lambda_j < 0$ и

$$e_{2k}(\omega) = c_k \frac{1}{4^k} z^{-k} \sum_{j=1}^k (z - \lambda_j) \left(z - \frac{1}{\lambda_j} \right), \quad (6.4.14)$$

где $z = e^{-i\omega}$. Подставив (6.4.14) в (6.4.3), мы приходим к следующему результату.

Теорема 6.13. Пусть m — любое целое положительное число. Тогда многочлен Эйлера—Фробениуса E_{2m-1} порядка $2m-1$ (или степени $2m-2$) может быть записан как

$$E_{2m-1}(z) = \prod_{j=1}^{2m-2} (z - \lambda_{m,j}), \quad (6.4.15)$$

где

$$\lambda_{m,2m-2} < \lambda_{m,2m-3} < \dots < \lambda_{m,m} < -1 < \lambda_{m,m-1} < \dots < \lambda_{m,1} < 0 \quad (6.4.16)$$

и

$$\lambda_{m,1} \lambda_{m,2m-2} = \dots = \lambda_{m,m-1} \lambda_{m,m} = 1. \quad (6.4.17)$$

6.5. Анализ погрешности сплайн-вэйвлет-разложения

В § 6.2, когда были введены в (6.2.5) сплайн-вэйвлеты (или B -вэйвлеты) с компактным носителем ψ_m , нормировочные параметры c_0 и n_0 для $K(z)$ в (6.2.4) были выбраны так: $c_0 = -\frac{1}{(2m-1)!}$ и $n_0 = 1$. Следовательно, символы $G(z)$ и $H(z)$ в (5.3.15), которые соответствуют соотношению разложения (5.3.16) в теореме 5.16, даются формулами

$$\begin{cases} G(z) = \frac{1}{2} \sum_n g_n z^n = z^{-1} \left(\frac{1+z}{2} \right)^m \frac{E_{2m-1}(z)}{E_{2m-1}(z^2)}, \\ H(z) = \frac{1}{2} \sum_n h_n z^n = -z^{-1} \left(\frac{1-z}{2} \right)^m \frac{(2m-1)!}{E_{2m-1}(z^2)} \end{cases} \quad (6.5.1)$$

(см. (6.2.1) и (5.4.11)). Теперь давайте напомним из (5.4.46), что последовательности для алгоритма разложения (5.4.48) выбраны следующим образом:

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{2} g_{-n}, \\ b_n = \frac{1}{2} h_{-n}. \end{cases} \quad (6.5.2)$$

Итак, для сплайн-вэйвлетов, которые не являются функциями Хаара (т.е. $m \geq 2$), «весовые» последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — это бесконечные последовательности, и они должны быть усечены, чтобы применить (конечную) схему скользящего среднего в (5.4.48).

Замечание. Весовые последовательности для алгоритма восстановления (5.4.49) — конечные последовательности

$$\begin{cases} p_n = 2^{-m+1} \binom{m}{n}, & n = 0, \dots, m, \\ q_n = (-1)^n 2^{-m+1} \sum_{\ell=0}^m \binom{m}{\ell} N_{2m}(n+1-\ell), & n = 0, \dots, 3m-2, \end{cases} \quad (6.5.3)$$

которые могут быть легко вычислены для любого порядка m с использованием линейных ТАП, как это было обсуждено в § 6.8 и § 6.9. Кроме этого, так как $G(z)$ и $H(z)$ — рациональные функции, можно придумать рекуррентный алгоритм для разложения без усечения. Однако мы не будем обсуждать здесь этот подход.

Заметим, что единственный множитель в (6.5.1), который приводит к бесконечным весовым последовательностям разложения $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ в (6.5.1)–(6.5.2), есть $1/E_{2m-1}(z^2)$. Мы проанализируем «погрешности», которые возникают в результате усечения этого множителя.

Начнем с рассмотрения фундаментального сплайна $2m$ -го порядка

$$L_{2m}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^{2m} N_{2m}(x+m-k), \quad (6.5.4)$$

который уже обсуждался в параграфах § 4.6 и § 6.1 (см. (6.1.8)). Напомним из (6.1.12) и (6.1.13), что символ последовательности коэффициентов $\{c_k^{2m}\}$ в (6.5.4) есть обратная

величина обобщенного многочлена Эйлера—Фробениуса Лорана $F_m := E_{N_m}$, а именно:

$$\tilde{C}^{2m}(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^{(2m)} z^n = \frac{1}{F_m(z)} = \frac{(2m-1)! z^{m-1}}{E_{2m-1}(z)}, \quad (6.5.5)$$

где E_{2m-1} — многочлен Эйлера—Фробениуса порядка $2m-1$ (или степени $2m-2$), изученный в предыдущем параграфе. Итак, усечение $1/E_{2m-1}(z^2)$ эквивалентно усечению ряда по B -сплайнам представления (6.5.4) фундаментального сплайна L_{2m} . Для удобства давайте объединим множитель $(2m-1)!$ с $\{c_n^{(2m)}\}$, положив

$$\alpha_n = \alpha_n^{(m)} := \frac{1}{(2m-1)!} c_n^{(2m)}, \quad (6.5.6)$$

так что (6.5.5) становится

$$\frac{z^{m-1}}{E_{2m-1}(z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n z^n. \quad (6.5.7)$$

Теперь мы усечем этот ряд Лорана, вводя для целого положительного N

$$T_m^N(z) := \sum_{n=-N}^N \alpha_n z^n. \quad (6.5.8)$$

Подставляя (6.5.7) и (6.5.8) в выражения (6.5.1) для G и H , мы получим

$$\begin{cases} G_N(z) = \frac{1}{2} \sum_n g_{N,n} z^n := \left(\frac{1+z}{2}\right)^m z^{-2m+1} E_{2m-1}(z) T_m^N(z^2), \\ H_N(z) = \frac{1}{2} \sum_n h_{N,n} z^n := -(2m-1)! \left(\frac{1+z}{2}\right)^m z^{-2m+1} T_m^N(z^2). \end{cases} \quad (6.5.9)$$

Конечные «усеченные» последовательности разложения — это

$$\begin{cases} a_{N,n} = g_{N,-n}, \\ b_{N,n} = h_{N,-n}. \end{cases} \quad (6.5.10)$$

Из (6.5.9) ясно, что носители усеченных последовательностей даются формулами

$$\begin{cases} \text{supp } \{a_{N,n}\} = [-2N - m + 1, 2N + 2m - 1] \cap \mathbf{Z}, \\ \text{supp } \{b_{N,n}\} = [-2N + m - 1, 2N + 2m + 1] \cap \mathbf{Z}. \end{cases} \quad (6.5.11)$$

Когда конечные последовательности $\{a_{N,n}\}$ и $\{b_{N,n}\}$ используются вместо истинных последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ в качестве весов в алгоритме разложения (5.4.48), то в результатах будет некоторое различие. Чтобы измерить эту погрешность, мы просто сравним точное восстановление по усеченным компонентам разложения с истинной последовательностью конечной энергии. Точнее, пусть

$$\begin{cases} f_j(x) = \sum_k c_k^j N_m(2^j x - k) \\ \mathbf{c}^j = \{c_k^j\} \end{cases} \quad (6.5.12)$$

— некоторый B -сплайн-ряд в V_j^m . Последовательность $\mathbf{c}^j$ — последовательность конечной энергии представления сигнала f_j . Если f_j разложен

$$f_j = f_{N,j-1} + g_{N,j-1}, \quad (6.5.13)$$

где $f_{N,j-1} \in V_{j-1}^m$ и $g_{N,j-1} \in W_{j-1}^m$ с использованием (конечного) алгоритма разложения

$$\begin{cases} c_{N,k}^{j-1} = \sum_{\ell} a_{N,\ell-2k} c_{\ell}^j, \\ d_{N,k}^{j-1} = \sum_{\ell} b_{N,\ell-2k} c_{\ell}^j, \end{cases} \quad (6.5.14)$$

то мы сравним точное восстановление $\mathbf{c}_N^j$ по его компонентам разложения

$$\begin{cases} \mathbf{c}_N^{j-1} := \{c_{N,k}^{j-1}\}, & k \in \mathbf{Z}, \\ \mathbf{d}_N^{j-1} := \{d_{N,k}^{j-1}\}, & k \in \mathbf{Z}, \end{cases}$$

то есть $\mathbf{c}_N^j = \{c_{N,k}^j\}$, $k \in \mathbf{Z}$, где

$$c_{N,k}^j = \sum_{\ell} [p_{k-2\ell} c_{N,\ell}^{j-1} + q_{k-2\ell} d_{N,\ell}^{j-1}], \quad (6.5.15)$$

с истинной последовательностью $\mathbf{c}^j$, где p_k и q_k даются в (6.5.3). В метрике ℓ^2 погрешность усечения — это величина

$$\mathcal{E}_N^{(m)}(\mathbf{c}^j) := \left\{ \sum_{\ell \in \mathbf{Z}} |c_{N,\ell}^j - c_{N,\ell}^j|^2 \right\}^{1/2}. \quad (6.5.16)$$

Так как B -сплайн N_m порождает базис Рисса пространства V_0^m , то погрешность в (6.5.16) эквивалентна величине

$$\tilde{\mathcal{E}}_N^{(m)}(f_j) := \|f_j - f_{N,j}\|_2, \quad (6.5.17)$$

где

$$f_{N,j} := \sum_k c_{N,k}^j N_m(2^j x - k), \quad (6.5.18)$$

с $\{c_{N,k}^j\}$, заданной формулой (6.5.15).

Для анализа погрешности нам требуется следующее выражение для коэффициентов разложения фундаментальных сплайнов в B -сплайн-ряды.

Лемма 6.14. Пусть $\lambda_{m,j}$ $j = 1, \dots, 2m - 2$ — нули многочлена Эйлера—Фробениуса $(2m - 1)$ -го порядка E_{2m-1} , как в теореме 6.13. Тогда коэффициенты ряда Лорана в (6.5.7) даются формулой

$$\alpha_j = \alpha_j^{(m)} = \sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{\lambda_{m,k}^{m-2}}{E'_{2m-1}(\lambda_{m,k})} \right) \lambda_{m,k}^{|j|} \quad (6.5.19)$$

для всех $j \in \mathbf{Z}$.

Доказательство. Чтобы установить (6.5.19), нам требуется тождество (6.3.21) для модифицированных многочленов

Эйлера—Фробениуса $\tilde{E}_n$, определенных в (6.3.19). Напомним, что

$$E_{2m-1}(z) = \tilde{E}_{2m-1}(z), \quad m = 1, 2, \dots,$$

но для всех m $\tilde{E}_{2m} \neq E_{2m}$. Теперь из (6.3.21) и (6.4.17) мы имеем

$$\begin{cases} \tilde{E}_{2m}(\lambda_{m,j}) = \lambda_{m,j}(1 - \lambda_{m,j})E'_{2m-1}(\lambda_{m,j}) \\ \tilde{E}_{2m}(\lambda_{m,j}^{-1}) = -\frac{1}{\lambda_{m,j}^2}(1 - \lambda_{m,j})E'_{2m-1}(\lambda_{m,j}^{-1}). \end{cases} \quad (6.5.20)$$

Из простого наблюдения, что

$$\tilde{E}_{2m}(\lambda_{m,j}) = \lambda_{m,j}^{2m-1} \tilde{E}_{2m}(\lambda_{m,j}^{-1}),$$

и из (6.5.20) следует

$$E'_{2m-1}(\lambda_{m,j}^{-1}) = -\lambda_{m,j}^{-2m+4} E'_{2m-1}(\lambda_{m,j}). \quad (6.5.21)$$

Прибегая к разложению на элементарные дроби и использованию последовательно соотношений (6.5.21) и (6.4.17), мы получим

$$\begin{aligned} \frac{z^{m-1}}{E_{2m-1}(z)} &= \sum_{j=1}^{2m-2} \frac{\lambda_{m,j}^{m-1}}{(z - \lambda_{m,j})E'_{2m-1}(\lambda_{m,j})} \\ &= \sum_{j=1}^{m-1} \left\{ \frac{\lambda_{m,j}^{m-1}}{E'_{2m-1}(\lambda_{m,j})z(1 - \frac{\lambda_{m,j}}{z})} + \frac{\lambda_{m,j}^{m-2}}{E'_{2m-1}(\lambda_{m,j})(1 - \lambda_{m,j}z)} \right\} \\ &= \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\lambda_{m,j}^{m-2}}{E'_{2m-1}(\lambda_{m,j})} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_{m,j}^{|n|} z^n, \quad |z| = 1. \end{aligned} \quad (6.5.22)$$

Это устанавливает (6.5.19). □

Замечание. Положив

$$\alpha_j = \alpha_j^{(m)} = \sum_{k=1}^{m-1} k_k^{(m)} \lambda_{m,k}^{|j|}, \quad j \in \mathbf{Z} \quad (6.5.23)$$

в (6.5.19) и применяя (6.3.21), мы имеем

$$k_k^{(m)} = \frac{\lambda_{m,k}^{m-2}}{E'_{2m-1}(\lambda_{m,k})} = \lambda_{m,k}^{m-1} (1 - \lambda_{m,k}) \tilde{E}_{2m}^{-1}(\lambda_{m,k}), \quad (6.5.24)$$

где $\tilde{E}_{2m}$ — модифицированный многочлен Эйлера—Фробениуса порядка $2m$. Таким образом, формула (6.5.24) облегчает вычисление $k_k^{(m)}$ и, следовательно, $\alpha_j^{(m)}$ в (6.5.23), так как $\tilde{E}_{2m}$ легко вычисляется (см. ЛТАП в примере 6.9 и (6.3.21)).

Для получения оценки величины погрешности в (6.5.16), напомним обозначение

$$F_m(z) = \frac{1}{(2m-1)!} \frac{E_{2m-1}(z)}{z^{m-1}}, \quad (6.5.25)$$

введенное в (6.1.13), и определим

$$R_m^N(z) := (2m-1)! F_m(z^2) \sum_{j=1}^{m-1} k_j^{(m)} \left\{ \frac{z^{-2N-2}}{1 - \lambda_{m,j} z^{-2}} + \frac{z^{2N+2}}{1 - \lambda_{m,j} z^2} \right\} \lambda_{m,j}^{N+1} \quad (6.5.26)$$

Мы имеем следующие результаты.

Теорема 6.15. Для любого положительного целого m и любой $\mathbf{c} \in \ell^2$

$$\mathcal{E}_N^{(m)} \leq \max_{|z|=1} |R_m^N(z)| \|\mathbf{c}\|_{\ell^2}. \quad (6.5.27)$$

Теорема 6.16. Для любого целого положительного m существует целое положительное число $N_0 = N_0(m)$ такое, что

$$\max_{|z|=1} |R_m^N(z)| = 2(2m-1)! \left| \sum_{j=1}^{m-1} \frac{k_j^m}{1 - \lambda_{m,j}} |\lambda_{m,j}|^{N+1} \right| \quad (6.5.28)$$

для всех $N \geq N_0$. Кроме того, $N_0(m)$ может быть выбрано равным нулю для $m = 2, 3, 4$.

Как результат двух приведенных выше теорем, учитывая, что члены под знаком суммы в (6.5.28) для $2 \leq m \leq 4$ имеют чередующиеся знаки и по модулю монотонно убывают, мы приходим к следующему утверждению.

Следствие 6.17. Для $m = 2, 3, 4$ и любого целого положительного N

$$\mathcal{E}_N^{(m)}(\mathbf{c}) \leq \sigma_{m-1}^{(m)} |\lambda_{m,m-1}|^{N+1} \|\mathbf{c}\|_{\ell^2}, \quad (6.5.29)$$

где

$$\sigma_j^{(m)} := 2(2m-1)! \frac{k_j^{(m)}}{1 - \lambda_{m,j}}. \quad (6.5.30)$$

Доказательство теоремы 6.15. Пусть $\mathbf{c} = \mathbf{c}^j$ и $\mathbf{c}_N = \mathbf{c}_N^j$ согласно (6.5.12) и (6.5.15); обозначим, соответственно, их символы $\tilde{C}$ и $\tilde{C}_N$. Тогда из (6.5.14), (6.5.15) и (6.5.9) мы имеем

$$\begin{aligned} \tilde{C}_N(z) &= \{P(z)G_N(z) + Q(z)H_N(z)\}\tilde{C}(z) \\ &\quad + \{P(z)G_N(-z) + Q(z)H_N(-z)\}\tilde{C}(-z), \end{aligned} \quad (6.5.31)$$

где P и Q — двухмасштабные символы B -сплайна m -го порядка N_m и B -вэйвлета ψ_m соответственно. Отсюда, применяя тождество (5.3.13), мы имеем

$$\begin{aligned} \tilde{C}(z) - \tilde{C}_N(z) &= \{P(z)[G(z) - G_N(z)] + Q(z)[H(z) - H_N(z)]\}\tilde{C}(z) \\ &\quad + \{P(z)[G(-z) - G_N(-z)] \\ &\quad + Q(z)[H(-z) - H_N(-z)]\}\tilde{C}(-z). \end{aligned} \quad (6.5.32)$$

С другой стороны, из (6.5.7), (6.5.8), (6.5.23), (6.5.25), (6.5.26) следует, что

$$R_m^N(z) = 1 - (2m-1)! F_m(z^2) T_m^N(z^2), \quad (6.5.33)$$

и тождество в теореме 5.10 (г) принимает вид

$$(1+z)^{2m} E_{2m-1}(z) - (1-z)^{2m} E_{2m-1}(-z) = 2^{2m} z E_{2m-1}(z^2). \quad (6.5.34)$$

Поэтому, применяя (6.5.33) и (6.5.34), величину в (6.5.32) можно упростить следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \tilde{C}(z) - \tilde{C}_N(z) &= \frac{z^{-2m+1}}{2^{2m}} \left\{ [(1+z)^{2m} E_{2m-1}(z) - (1-z)^{2m} E_{2m-1}(-z)] \right. \\
 &\quad \times \left[\frac{1}{(2m-1)!} \frac{1}{F_m(z^2)} - T_m^N(z^2) \right] \tilde{C}(z) \\
 &\quad - [(1+z)^m (1-z)^m E_{2m-1}(-z) \\
 &\quad \left. - (1-z)^m (1+z)^m E_{2m-1}(z)] \right. \\
 &\quad \times \left[\frac{1}{(2m-1)!} \frac{1}{F_m(z^2)} - T_m^N(z^2) \right] \tilde{C}(-z) \Big\} \\
 &= F_m(z^2) \left\{ \frac{1}{F_m(z^2)} - (2m-1)! T_m^N(z^2) \right\} \tilde{C}(z) \\
 &= R_m^N(z) \tilde{C}(z).
 \end{aligned} \tag{6.5.35}$$

Теперь утверждение (6.5.27) следует из (6.5.35) с помощью равенства Парсеваля (2.4.18). $\square$

Доказательство теоремы 6.16. Вводя обозначение

$$F_{m,j}(z) := \frac{F_m(z)}{(z + \frac{1}{z}) - (\lambda_{m,j} + \frac{1}{\lambda_{m,j}})} \tag{6.5.36}$$

и замечая, что

$$E'_{2m-1}(\lambda_{m,j}) = \prod_{k \neq j} (\lambda_{m,j} - \lambda_{m,k}),$$

мы имеем из (6.5.24)

$$\frac{1}{k_j^{(m)}} = (2m-1)! F_{m,j}(\lambda_{m,j}) \left(\lambda_{m,j} - \frac{1}{\lambda_{m,j}} \right). \tag{6.5.37}$$

Затем подстановка (6.5.37) в (6.5.26) дает

$$\begin{aligned}
 R_m^N(z) &= \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\lambda_{m,j}^{N+1} F_m(z^2)}{F_{m,j}(\lambda_{m,j})(\lambda_{m,j} - \frac{1}{\lambda_{m,j}})} \frac{1}{(z^2 + \frac{1}{z^2}) - (\lambda_{m,j} + \frac{1}{\lambda_{m,j}})} \\
 &\quad \times [(z^{2N} + z^{-2N}) - \lambda_{m,j}^{-1}(z^{2N+2} + z^{-2N-2})] \\
 &= \sum_{j=1}^{m-1} \frac{F_{m,j}(z^2)}{F_{m,j}(\lambda_{m,j})} \frac{\lambda_{m,j}^{N+1}}{\lambda_{m,j} - \frac{1}{\lambda_{m,j}}} [(z^{2N} + z^{-2N}) \\
 &\quad - \lambda_{m,j}^{-1}(z^{2N+2} + z^{-2N-2})]. \tag{6.5.38}
 \end{aligned}$$

С другой стороны, положив $z = e^{-i\omega/2}$, выражение $F_{m,j}$, определенное в (6.5.36), может быть записано как

$$F_{m,j}(z^2) = F_{m,j}(e^{-i\omega}) = \sum_{\ell=0}^{m-2} b_{m,j,\ell} \cos \ell\omega. \tag{6.5.39}$$

Отсюда формула (6.5.38) принимает вид

$$\begin{aligned}
 R_m^N(z) &= 2 \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{\ell=0}^{m-2} \frac{\lambda_{m,j}^{N+1} b_{m,j,\ell}}{F_{m,j}(\lambda_{m,j})(\lambda_{m,j} - \frac{1}{\lambda_{m,j}})} \\
 &\quad \times \cos \ell\omega \left[\cos N\omega + \frac{1}{|\lambda_{m,j}|} \cos(N+1)\omega \right]. \tag{6.5.40}
 \end{aligned}$$

Так как $0 < |\lambda_{m,1}| < \dots < |\lambda_{m,m-1}| < 1$, ясно, что

$$\lambda_{m,m-1} - \frac{1}{\lambda_{m,m-1}} = \frac{1}{|\lambda_{m,m-1}|} - |\lambda_{m,m-1}| > 0 \tag{6.5.41}$$

и

$$\begin{aligned}
 F_{m,m-1}(\lambda_{m,m-1}) &= \frac{1}{(2m-1)!} \prod_{j=1}^{m-2} \left[\left(\lambda_{m,m-1} + \frac{1}{\lambda_{m,m-1}} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \left(\lambda_{m,j} + \frac{1}{\lambda_{m,j}} \right) \right] > 0. \tag{6.5.42}
 \end{aligned}$$

Но так как $F_{m,j}(z)$ — симметричный многочлен Лорана только с отрицательными нулями, то коэффициенты $b_{m,j,\ell}$ в (6.5.39) должны быть строго положительны. Итак, из (6.5.41)

и (6.5.42) следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{|\lambda_{m,m-1}|^N} \sum_{j=1}^{m-1} \frac{b_{m,j,\ell} |\lambda_{m,j}|^N}{F_{m,j}(\lambda_{m,j}) (\lambda_{m,j} - \frac{1}{\lambda_{m,j}})} \\ = \frac{b_{m,m-1,\ell}}{F_{m,m-1}(\lambda_{m,m-1}) (\lambda_{m,m-1} - \frac{1}{\lambda_{m,m-1}})} > 0 \end{aligned}$$

для $\ell = 0, \dots, m-2$, и поэтому существует целое $N_0 = N_0(m)$ такое, что для всех $N \geq N_0$

$$\gamma_{m,\ell}^{(N)} := 2 \sum_{j=1}^{m-1} \frac{b_{m,j,\ell} |\lambda_{m,j}|^N}{F_{m,j}(\lambda_{m,j}) (\lambda_{m,j} - \frac{1}{\lambda_{m,j}})} > 0 \quad (6.5.43)$$

для $\ell = 0, \dots, m-2$. Как следствие, мы видим, что для всех $N \geq N_0$ многочлен по косинусам $R_m^N(z)$, который может быть записан в виде

$$R_m^N(z) = (-1)^{N+1} \sum_{\ell=0}^{m-2} \{ \gamma_{m,\ell}^{(N+1)} \cos N\omega + \gamma_{m,\ell}^{(N)} \cos(N+1)\omega \} \cos \ell\omega$$

имеет положительные коэффициенты (исключая множитель $(-1)^{(N+1)}$) и удовлетворяет равенству

$$\max_{|z|=1} |R_m^N(z)| = |R_m^N(1)|, \quad N \geq N_0. \quad (6.5.44)$$

Поэтому, так как $F_m(1) = \sum N_{2m}(j) = 1$, из (6.5.44) и (6.5.26) следует, что

$$\max_{|z|=1} |R_m^N(z)| = |R_m^N(1)| = 2(2m-1)! \left| \sum_{j=1}^{m-1} k_j^{(m)} \frac{\lambda_{m,j}^{N+1}}{1 - \lambda_{m,j}} \right| \quad (6.5.45)$$

для всех $N \geq N_0$. Заметим, что (6.5.45) совпадает с (6.5.28), так как члены последовательности $\{\lambda_{m,j}^{N+1}\}$ имеют один знак. Для $m = 2$ ясно, что (6.5.45) выполняется для всех $N \geq 0$, и немного больше работы требуется для доказательства того, что (6.5.28) также выполняется для всех $N \geq 0$, когда $m = 3$ и $m = 4$. $\square$

Мы заканчиваем этот параграф упоминанием, что для погрешности усечения линейных и кубических сплайн-вэйвлетов справедлива следующая оценка сверху:

$$\begin{cases} \mathcal{E}_N^{(2)}(\mathbf{c}) \leq 2.7320509 \times (0.26795)^{N+1} \|\mathbf{c}\|_{\ell^2}; \\ \mathcal{E}_N^{(4)}(\mathbf{c}) \leq 7.8373747 \times (0.5352805)^{N+1} \|\mathbf{c}\|_{\ell^2}. \end{cases} \quad (6.5.46)$$

Эти грубые оценки получены в результате применения следствия 6.17. Лучшие оценки, особенно для малых N и $m = 2, 3, 4$, могут быть получены в результате применения (6.5.28).

6.6. Вполне положительность, полная осцилляция и пересечения нулей

Как упоминалось в главе 4, B -сплайны обладают особым свойством, называемым «вполне положительностью». Это свойство является ключевой составляющей частью, которая ярко показывает, что B -сплайн-ряды

$$\sum_k c_k N_m(\cdot - k) \quad (6.6.1)$$

— это единственный наиболее подходящий инструмент, применяемый в целях «сглаживания». В этом параграфе мы покажем, что соответствующий B -вэйвлет ψ_m обладает свойством, которое в некотором смысле противоположно вполне положительности. В то время как B -сплайн-ряды «сглаживают» любые «неровные» данные, B -вэйвлет-ряды

$$\sum d_k \psi_m(\cdot - k) \quad (6.6.2)$$

«выделяют» («детектируют») такие данные. Важная разница между этими двумя рядами состоит в том, что ряды (6.6.1) никогда не осциллируют сильнее, чем их последовательность

коэффициентов $\{c_k\}$, в то время как ряды (6.6.2) осциллируют сильнее, чем $\{d_k\}$. Мы будем говорить, что ψ_m обладает особым свойством, называемым «полной осцилляцией», которое противоположно свойству вполне положительности сопутствующего ему N_m .

Определение 6.18.

(а) Матрица M (конечная или бесконечная) называется «вполне положительной» (ВП), если любой минор M конечной размерности имеет неотрицательный определитель.

(б) Функция двух переменных $F(x, y)$ называется ВП-ядром, если матрица $[F(x_j, y_k)]$, где $\{x_j\}$ и $\{y_k\}$ — возрастающие последовательности чисел, произвольно выбранные из области определения F , есть ВП-матрица.

(в) Последовательность $\{a_n\}$, $n = 0, 1, \dots$ (конечная или бесконечная), с $a_0 \neq 0$, называется ВП-последовательностью, или Пойя-частотной (ПЧ) последовательностью, если теплицева матрица $[a_{-j+k}]$ при условии, что $a_{-1} = a_{-2} = \dots = 0$, есть ВП-матрица.

В случае B -сплайна N_m мы будем рассматривать $N_m(x - k)$ как функцию двух переменных $x \in \mathbf{R}$ и $k \in \mathbf{Z}$. Следовательно, говоря, что N_m есть ВП-ядро, мы имеем в виду, что для любого положительного n и любых последовательностей $\{x_j\}$ и $\{\ell_j\}$ с

$$\begin{cases} x_1 < \dots < x_n, & x_j \in \mathbf{R}, \\ \ell_1 < \dots < \ell_n, & \ell_j \in \mathbf{Z} \end{cases} \quad (6.6.3)$$

выполняется неравенство

$$\det[N_m(x - \ell_k)] \geq 0. \quad (6.6.4)$$

Доказательство этого важного факта о B -сплайнах не включено в эту книгу, но мы покажем, что, как следствие (6.6.4), последовательность

$$\{N_{2m}(j + 1)\}, \quad j = 0, 1, \dots \quad (6.6.5)$$

есть ПЧ-последовательность. В самом деле, беря $x_j = j + 1$ и $\ell_k = k$, где $j, k \in \mathbf{Z}_+$, мы видим, что матрица, транспонированная матрице $[N_{2m}(x_j - \ell_k)] = [N_{2m}(j + 1 - k)]$, совпадает с верхней треугольной теплицевой матрицей, первой строкой которой является (6.6.5). Интересно отметить, что символ последовательности (6.6.5) есть умноженный на $1/(2m-1)!$ многочлен Эйлера—Фробениуса и может быть записан в виде

$$\sum_{j=0}^{\infty} N_{2m}(j+1)z^j = \frac{1}{(2m-1)!} \prod_{j=1}^{2m-2} (z + |\lambda_{m,j}|) \quad (6.6.6)$$

с $\lambda_{m,j} < 0$, $j = 1, \dots, 2m-2$ (см. (6.4.16)). Этот результат следующим образом может быть распространен на любую ВП-последовательность.

Лемма 6.19. Пусть $\{a_j\}$, $j \in \mathbf{Z}_+$, — последовательность из ℓ^2 , удовлетворяющая условию $a_0 \neq 0$. Тогда $\{a_j\}$ есть ПЧ-последовательность в том и только том случае, если ее символ может быть записан как

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j = a_0 e^{\gamma z} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1 + \alpha_j z}{1 - \beta_j z}, \quad (6.6.7)$$

где $\gamma, \alpha_j, \beta_j \geq 0$ и

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\alpha_j + \beta_j) < \infty.$$

Пример 6.20. Рассмотрим двухмасштабную последовательность $\{q_k\}$ В-вэйвлета m -го порядка ψ_m , как она дана в (6.2.6). В более общем виде, для каждого $r = 0, \dots, m-1$ рассмотрим последовательность $\{q_{m,k}^{(r)}\}$, которая управляет его r -ми производными $\psi_m^{(r)}$, как это определено формулой (6.3.6). В (6.3.29) было показано, что символ $\{q_{m,k}^{(r)}\}$ есть

$$\sum_k q_{m,k}^{(r)} z^k = \sum_{k=0}^{3m-2+r} q_{m,k}^{(r)} z^k = \frac{2^{-m+r+1}}{(2m-1)!} E_{2m-1}(-z)(1-z)^{m+r},$$

и, следовательно, $q_{m,k}^{(r)}$, $k = 0, \dots, 3m - 2 + r$, имеет чередующиеся знаки, и символ $\{\tilde{q}_{m,k}^{(r)}\}$, $\tilde{q}_{m,k}^{(r)} := (-1)^k q_{m,k}^{(r)} = |q_{m,k}^{(r)}|$, равняется

$$\sum_k \tilde{q}_{m,k}^{(r)} z^k = \frac{2^{-m+r+1}}{(2m-1)!} E_{2m-1}(z) (1+z)^{m+r},$$

что является многочленом только с отрицательными нулями.

Отсюда, по лемме 6.19, $\{\tilde{q}_{m,k}^{(r)}\}$ есть ПЧ-последовательность. $\square$

Напомним из теоремы 6.10, что $\{\tilde{q}_{m,k}^{(r)}\}$ может быть вычислена применяя ЛТАП. В общем случае мы имеем следующий результат.

Теорема 6.21. Пусть $\mathcal{P}$ — ЛТАП, определенный формулой (6.3.12) с $k_L(n)$, $k_R(n) \geq 0$ и $b_L(n)$, $b_R(n) > 0$ для всех $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда каждый $\mathcal{P}(n)$ есть ПЧ-последовательность.

Важной характерной чертой ПЧ-последовательностей и ВП-ядер в общем случае является их так называемое «уменьшающее вариацию» свойство. Это есть «сглаживающий» эффект в том смысле, что «колебания», такие как изменения знака последовательности или функции, постепенно уменьшаются, когда они «фильтруются» путем свертки с ПЧ-последовательностями или интегрируются с ВП-ядрами.

Определение 6.22. Число сильных (или настоящих) перемен знака конечной последовательности $\mathbf{a}$ вещественных чисел, обозначенное как $S^-(\mathbf{a})$, есть число перемен знака $\mathbf{a}$, после того как вычеркнуты все нулевые значения последовательности. Число совместных сильных и слабых перемен знака этой последовательности $\mathbf{a}$, обозначенное как $S^+(\mathbf{a})$, есть число перемен знака, когда каждое (внутреннее) нулевое значение последовательности считается за две переменные знака. (Примечание: Когда рассматривается конечная последовательность, первое и последнее значения последовательности предполагаются не равными нулю.) Число силь-

ных перемен знака непрерывной функции f с $\text{supp } f = [a, b]$ определяется как

$$\begin{aligned} S^-(f) \\ = \sup\{S^-(\{f(x_0), \dots, f(x_n)\}): a < x_0 < \dots < x_n < b, n \in \mathbf{Z}_+\}, \end{aligned} \quad (6.6.8)$$

и число совместных сильных и слабых перемен знака той же самой функции f определяется как

$$\begin{aligned} S^+(f) \\ = \sup\{S^+(\{f(x_0), \dots, f(x_n)\}): a < x_0 < \dots < x_n < b, n \in \mathbf{Z}_+\}. \end{aligned} \quad (6.6.9)$$

Замечание. При рассмотрении числа $S^+(f)$ нас интересуют только те f , носители которых не содержат нетривиальных интервалов, на которых $f = 0$; таким образом, мы предполагаем $\overline{Z^c(f)} = \text{supp } f$, где

$$\overline{Z^c(f)} = \text{clos}\{x : f(x) \neq 0\}. \quad (6.6.10)$$

В противном случае число $S^+(f)$ должно быть рассмотрено на каждой составляющей носителя f .

С помощью ВП-свойства может быть установлено следующее уменьшающее вариацию свойство B -сплайнов.

Теорема 6.23. Пусть $m \geq 2$ — целое положительное число. Тогда

$$S^-\left(\sum_{k=0}^n a_k N_m(\cdot - k)\right) \leq S^-(\{a_k\}), \quad a_0, a_n \neq 0. \quad (6.6.11)$$

Что касается соответствующих B -вэйвлетов ψ_m , мы увидим, что вместо возможного уменьшения числа перемен знаков B -вэйвлет-ряды всегда колеблются более часто, чем их

последовательность коэффициентов. Это свойство *полной осцилляции* ψ_m , которое противоположно ВП-свойству N_m , делает ψ_m полезными в приложениях по локализации и измерению таких нерегулярностей, как особенности функций.

Теорема 6.24. Пусть $m \geq 2$ и $d_0, d_n \neq 0$. Тогда

$$S^{-} \left(\sum_{k=0}^n d_k \psi_m(\cdot - k) \right) \geq n + 3m - 2 \geq S^{-}(\{d_k\}) + 3m - 2. \quad (6.6.12)$$

Если нули вэйвлет-рядов также считать за переменную знака, то можно ожидать завышенную нижнюю границу этой величины. В этом направлении мы имеем следующий результат, справедливый для линейных B -вэйвлет-рядов.

Теорема 6.25. Пусть $d_0, d_n \neq 0$. Тогда

$$S^{+} \left(\sum_{k=0}^n d_k \psi_2(\cdot - k) \right) \geq 2n + 4 - S^{-}(\{d_k\}). \quad (6.6.13)$$

Более того, если носитель этого B -вэйвлет-ряда — интервал и если $S^{-}(\{d_k\}) = 0$, то

$$S^{+} \left(\sum_{k=0}^n d_k \psi_2(\cdot - k) \right) = 2n + 4. \quad (6.6.14)$$

Замечание. Результат в формуле (6.6.14) оправдывает термин «полная осцилляция».

Доказательство теоремы 6.24. Напомним из теоремы 6.3 § 6.1, что (вэйвлет)-пространство W_0^m может быть отождествлено с кратномасштабным подпространством $V_1^{2m,0}$ пространства V_1^{2m} через дифференциальный оператор m -го порядка D^m .

Однако вместо того, чтобы рассматривать здесь соотношение $\psi_{I,m} = D^m \psi_{2m}$, давайте введем сплайн $2m$ -го порядка

$$\Psi_{2m}^* = \frac{1}{2^{2m-1}} \sum_{j=0}^{2m-2} (-1)^j N_{2m}(j+1) N_{2m}(2x-j), \quad (6.6.15)$$

который принадлежит $V_1^{2m,0}$. Легко проверить, что

$$\{\Psi_{2m}^*(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$$

есть базис Рисса $V_1^{2m,0}$. Более того, аналогично соотношению $D^m \Psi_{2m} = \psi_{I,m}$, мы также имеем

$$D\Psi_{2m}^* = \psi_m.$$

Действительно, m -кратное применение (ж) в теореме 4.3 дает

$$\begin{aligned} (D^m \Psi_{2m}^*)(x) &= \frac{1}{2^{m-1}} \sum_{j=0}^{2m-2} (-1)^j N_{2m}(j+1) N_{2m}^{(m)}(2x-j) \\ &= \frac{1}{2^{m-1}} \sum_{j=0}^{2m-2} (-1)^j N_{2m}(j+1) \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} N_m(2x-j-k) \\ &= \sum_{\ell=0}^{3m-2} \left(\frac{(-1)^\ell}{2^{m-1}} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} N_{2m}(\ell-k+1) \right) N_m(2x-\ell) \\ &= \sum_{\ell=0}^{3m-2} q_\ell N_m(2x-\ell) = \psi_m(x). \end{aligned}$$

Отсюда, мы можем использовать Ψ_{2m}^* вместо Ψ_{2m} в теореме 6.3. Рассмотрим теперь сплайн-ряд

$$G(x) = \sum_{k=0}^n d_k \Psi_{2m}^*(x-k).$$

Так как $d_0, d_n \neq 0$ и $\text{supp} \Psi_{2m}^* = [0, 2m-1]$, мы видим, что

$$\text{supp } G = [0, n+2m-1]. \quad (6.6.16)$$

Таким образом, из факта, что

$$\begin{cases} G(k) = 0, & k \in \mathbf{Z}, \\ G^{(\ell)}(0) = G^{(\ell)}(n + 2m - 1) = 0, & \ell = 0, \dots, 2m - 2 \end{cases} \quad (6.6.17)$$

следует, что существует семейство точек $\{x_j^{(\ell)}\}$, $j = 1, \dots, n + 2m + \ell - 2$ и $\ell = 1, \dots, t$, удовлетворяющих неравенствам

[illegible]

такое, что $G^{(\ell)}$ имеет (сильную) переменную знака в каждой точке $x_j^{(\ell)}$, $j = 1, \dots, n + 2m + \ell - 2$. В частности,

$$G^{(m)}(x) = \sum_{k=0}^n d_k \psi_m(x - k)$$

имеет (сильную) переменную знака в каждой точке $x_1^{(m)}, \dots, x_{n+3m-2}^{(m)}$. $\square$

Доказательство теоремы 6.25. Чтобы вычислить наиболее точно S^+ , нам требуется результат из теории ВП-матриц, а именно: если A — любая $p \times (n + 1)$ ВП-матрица с $p > n$, то

$$S^-(A\mathbf{v}) \leq \min(n, S^-(\mathbf{v})) = S^-(\mathbf{v}) \quad (6.6.19)$$

для любого вещественного $(n + 1)$ -мерного вектора $\mathbf{v}$. Этот факт, по сути дела, является ключевым моментом для установления теоремы 6.23. Вдобавок, если $\mathbf{v} = (v_0, \dots, v_n)$ и $\tilde{\mathbf{v}} := (v_0, -v_1, v_2, \dots, (-1)^n v_n)$, то легко проверить, что

$$S^+(\mathbf{v}) + S^-(\tilde{\mathbf{v}}) \geq n. \quad (6.6.20)$$

Чтобы доказать (6.6.13), нам нужна матрица

$$A := \left[(-1)^{j-2k+1} \psi_2 \left(\frac{j-2k+2}{2} \right) \right] \quad (6.6.21)$$

$$= \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ 6 & & & & & & & & \\ 10 & 1 & & & & & & & \\ 6 & 6 & & & & & & & \\ 1 & 10 & & & & & & & \\ & 6 & \dots & & & & & & \\ & 1 & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 6 & & \\ & & & & & & 10 & & \\ & & & & & & 6 & & \\ & & & & & & 1 & & \end{bmatrix}.$$

Легко также проверить, что $(2n+5) \times (n+1)$ матрица A является ВП-матрицей. Отсюда, применяя (6.6.19) и (6.6.20) к вектору $\mathbf{v} = (v_0, \dots, v_{2n+4})$ с

$$v_j := \sum_{k=0}^n d_k \psi_2 \left(\frac{j-1}{2} - k \right),$$

мы имеем

$$S^+(\mathbf{v}) \geq 2n+4 - S^-(\tilde{\mathbf{v}}) \geq 2n+4 - S^-(\{d_k\}).$$

Это устанавливает (6.6.13).

Затем, используя двухмасштабное соотношение для ψ_2 относительно N_2 , B -вэйвлет-ряд $\sum d_k \psi_2(\cdot - k)$ может быть записан как B -сплайн-ряд по $N_2(2 \cdot -k)$. Так как носителем этого ряда является интервал, мы имеем, применяя вдобавок результат о ВП B -сплайнов,

$$S^+ \left(\sum_{k=0}^n d_k \psi_2(\cdot - k) \right) \leq 2n+4. \quad (6.6.22)$$

Итак, (6.6.14) следует из (6.6.13) и (6.6.22) при $S^-(\{d_k\}) = 0$. $\square$

В приложениях очень важно оценить осцилляции B -вэйвлет-ряда. Например, распределение нулей диапазона пропускания частотно-ограниченного сигнала, определяемого «скоростью Найквиста», может быть полностью установлено по его изолированным нулям (называемым «пересечением нулей») в случае выполнения некоторых условий. Однако, когда B -вэйвлет-ряд интерпретируется как сигнал из некоторого диапазона, он не должен иметь ограниченный диапазон, так как он отличается от целых функций экспоненциального типа. Тем не менее, когда используются линейные B -вэйвлеты, мы имеем еще и следующую теорему. Аналогичные результаты для B -вэйвлетов более высоких порядков не приводятся в этой книге.

Теорема 6.26. *Пусть*

$$\begin{cases} f(x) = \sum_{j=0}^n d_j \psi_2(x-j), \\ g(x) = \sum_{j=0}^n c_j \psi_2(x-j) \end{cases}$$

— два линейных сплайн-вэйвлет-ряда с $\overline{Z^c}(f) = \overline{Z^c}(g) = [0, n+3]$, таких что $S^-(c) = 0$ и g имеет только простые нули. Тогда, если f и g имеют одни и те же нули, то f должна быть константой, умноженной на g .

Доказательство. Из наших предположений мы имеем $d_0 d_n \neq 0$ и $c_0 c_n \neq 0$. Выберем c так, что $c_0 = c d_0$. Тогда

$$(g - cf)(x) = \sum_{j=1}^n (c_j - c d_j) \psi_2(x-j).$$

Предположим, что разность $g - cf$ не равна тождественно нулю. Тогда без потери общности мы можем предположить, что $\overline{Z^c}(g - cf) = [1, n+3]$. Так как $(g - cf) \in V_1^2$, то по так называемой теореме Будана—Фурье число нулей $Z(g - cf)$ с

учетом их кратности функции $g - cf$ в открытом интервале $(1, n + 3)$ не превосходит $2n + 2$, то есть

$$Z(g - cf) \leq 2n + 2. \quad (6.6.23)$$

С другой стороны, так как g на $(0, 1]$ есть константа, умноженная на ψ_2 , то она имеет на $(0, 1]$ один простой ноль. Поэтому, из теоремы 6.25 следует, что

$$S^+(g)|_{(1, n+3)} = S^+(g)|_{(0, n+3)} - 1 \geq 2n + 4 - S^-(c) - 1 = 2n + 3. \quad (6.6.24)$$

Более того, так как g имеет только простые нули и f имеет те же нули, что и g , мы имеем

$$Z(g)|_{(1, n+3)} \leq Z(g - cf). \quad (6.6.25)$$

Поэтому из (6.6.23)–(6.6.25) мы получаем

$$2n + 3 \leq S^+(g)|_{(1, n+3)} \leq Z(g)|_{(1, n+3)} \leq Z(g - cf) \leq 2n + 2,$$

что абсурдно. Это и завершает доказательство теоремы. $\square$

Глава 7

Ортогональные вэйвлеты и вэйвлет-пакеты

Из очевидных соображений ортонормированные (о.н.) базисы — наиболее желательные базисы в гильбертовом пространстве. В частности, если о.н. базис в $L^2(\mathbf{R})$ порожден некоторой $\mathcal{R}$ -функцией ψ , то, будучи двойственной самой себе, ψ уже является вэйвлетом. Более того, двухмасштабная последовательность $\{q_n\}$ функции ψ относительно масштабирующей функции ϕ получается из двухмасштабной последовательности $\{p_n\}$ функции ϕ простым взятием комплексного сопряженного с последующим чередованием знаков и изменением направления на противоположное с единичным сдвигом. Например, как в (5.6.14), мы можем положить

$$q_n = (-1)^n \bar{p}_{-n+1}.$$

Другими словами, по существу только одна двухмасштабная последовательность управляет вместе кратномасштабным анализом (КМА) и соответствующим ему вэйвлет-разложением. Что наиболее интересно — это то, что после применения комбинации $\{p_n\}$ и $\{q_n\}$ для получения двухмасштабных соотношений с ψ , вэйвлет-пространства W_n могут допускать дальнейшие ортогональные разложения. Семейства новых ортогональных базисных функций, полученные таким образом, на-

зываются *вэйвлет-пакетами*. Эта глава посвящается анализу и построению о.н. вэйвлетов и их вэйвлет-пакетов. В частности, будет обсуждаться построение о.н. вэйвлетов с компактными носителями.

7.1. Примеры ортогональных вэйвлетов

Основная структура вэйвлетов и их двойственных была изучена в § 5.4, где предлагаемая стратегия состояла в том, что все начиналось с двух допустимых двухмасштабных символов $P = P_\phi$ и $G^* = G_\phi^*$, двойственных друг другу. Для построения о.н. вэйвлетов, как мы видели в § 5.6, ϕ также с необходимостью должна быть двойственной самой себе, так что $G^* = P$ и соотношение двойственности (5.4.7) принимает вид

$$|P(z)|^2 + |P(-z)|^2 = 1, \quad |z| = 1. \quad (7.1.1)$$

Кроме того, по теореме 5.19 основное определение двухмасштабного символа Q для о.н. вэйвлета ψ относительно масштабирующей функции ϕ дается через

$$c_0 z^{2n_0-1} \overline{P(-z)}, \quad |z| = 1, \quad (7.1.2)$$

где $c_0 = \pm 1$ и n_0 — произвольное целое число. Чтобы быть совместимым с выбором в (5.6.13) и (5.6.14), положим $c_0 = -1$ и $n_0 = 1$, так что

$$Q(z) = -z \overline{P(-z)}, \quad |z| = 1. \quad (7.1.3)$$

Следовательно, чтобы построить о.н. вэйвлет ψ , мы должны исследовать двухмасштабные соотношения

$$\begin{cases} \hat{\phi}(\omega) = P(e^{-i\omega/2}) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right), \\ \hat{\psi}(\omega) = Q(e^{-i\omega/2}) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right). \end{cases} \quad (7.1.4)$$

Конечно, если $\hat{\phi}$ или P известно, то $\hat{\psi}$ и, следовательно, ψ определяются с помощью применения второго соотношения в (7.1.4) с использованием (7.1.3).

Пример 7.1. Пусть m — любое положительное целое число, и N_m обозначает B -сплайн m -го порядка. Тогда по теореме 3.23 (см. также (3.6.18)) масштабирующая функция ϕ_m , преобразование Фурье которой дается формулой

$$\hat{\phi}_m(\omega) = \frac{\hat{N}_m(\omega)}{\left(\sum_k |\hat{N}_m(\omega + 2\pi k)|^2\right)^{1/2}} = \frac{e^{-im\omega/2} \left(\frac{\sin \omega/2}{\omega/2}\right)^m}{(F_m(e^{-i\omega}))^{1/2}}, \quad (7.1.5)$$

есть о.н. масштабирующая функция в том смысле, что $\{\phi_m(\cdot - k) : k \in \mathbf{Z}\}$ является о.н. базисом пространства V_0^m . Здесь F_m — обобщенный многочлен Эйлера—Фробениуса Лорана относительно N_m , как это определено в (6.1.13), и структура F_m обсуждалась в § 6.4 (см. (6.1.13) и теорему 6.13). Как следствие, применяя (7.1.3)–(7.1.5), преобразование Фурье $\hat{\psi}$ о.н. вэйвлета ψ , который порождает $\{W_j^m\}$ дается формулой

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(\omega) &= -e^{-i\omega/2} \overline{P(e^{-i(\omega+2\pi)/2})} \hat{\phi}_m\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ &= -e^{-i\omega/2} \overline{\hat{\phi}_m(\omega + 2\pi)} \hat{\phi}_m\left(\frac{\omega}{2}\right) / \overline{\hat{\phi}_m\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)} \\ &= -\left(\frac{4}{i\omega}\right)^m e^{-i\omega/2} \sin^{2m}\left(\frac{\omega}{4}\right) \left(\frac{F_m(-z)}{F_m(z^2)F_m(z)}\right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (7.1.6)$$

где $z = e^{-i\omega/2}$. При $m = 1$ легко видеть, что о.н. вэйвлет ψ , заданный (7.1.6), есть не что иное как функция Хаара ψ_H . $\square$

Конечно, если мы уже имеем п.о. вэйвлет, то процедура ортонормализации, сформулированная в (3.6.18), легко дает о.н. вэйвлет.

Пример 7.2. Пусть ψ — один из п.о. сплайн-вэйвлетов $\psi_{I,m}$, ψ_m или $\tilde{\psi}_m$, $m \geq 1$, введенных в предыдущей главе. Тогда $\psi^\perp$, преобразование Фурье которой дается формулой (3.6.18), есть о.н. вэйвлет. Для $\psi = \psi_{I,m}$, ψ_m или $\tilde{\psi}_m$ результаты, полученные в главе 6, легко могут быть применены для определения рядов Лорана

$$\sum_k |\hat{\psi}(\omega + 2\pi k)|^2.$$

(См. (6.1.11)–(6.1.13), (6.2.5) и (6.2.9).)

В общем случае, так как мы ничего не знаем о масштабирующей функции ϕ или ее двухмасштабном символе $P = P_\phi$, мы должны очень постараться, чтобы прийти к одному из них. Напомним, что наша стратегия состоит в построении P , и следующие два параграфа будут посвящены усилиям в этом направлении. В конце этого параграфа мы приводим пример, в котором вместо P первым построено $\hat{\phi}$.

Пример 7.3. Пусть $0 < \varepsilon \leq \pi/3$, $0 < A < 1 < B < \infty$ и N — произвольное положительное целое число. Выберем некоторую функцию $\hat{\eta} \in C^N(\mathbf{R})$, которая удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{cases} \text{supp } \hat{\eta} = [-\pi - \varepsilon, \pi + \varepsilon]; \\ \hat{\eta}(\omega) = 1 \quad \text{для } |\omega| \leq \pi - \varepsilon \quad \text{и} \\ A \leq \sum_k |\hat{\eta}(\omega + 2\pi k)|^2 \leq B, \quad \omega \in \mathbf{R}. \end{cases} \quad (7.1.7)$$

Тогда мы можем ввести функцию ϕ , преобразование Фурье которой дается формулой

$$\hat{\phi}(\omega) := \frac{\hat{\eta}(\omega)}{\left(\sum_k |\hat{\eta}(\omega + 2\pi k)|^2 \right)^{1/2}}. \quad (7.1.8)$$

Ясно, что $\hat{\phi}$ удовлетворяет условию

$$\text{supp } \hat{\phi} = [-\pi - \varepsilon, \pi + \varepsilon] \quad (7.1.9)$$

и что функция P , определенная на единичной окружности

$$P(e^{-i\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(2\omega + 4\pi k), \quad (7.1.10)$$

принадлежит C^N . Отсюда, интегрируя ряд Фурье

$$f(\omega) := P(e^{-i\omega}) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n e^{-in\omega} \quad (7.1.11)$$

по частям N раз, мы получаем

$$p_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega) e^{in\omega} d\omega = \frac{1}{\pi} \left(\frac{i}{n} \right)^N \int_0^{2\pi} f^{(N)}(\omega) e^{in\omega} d\omega,$$

так что

$$p_n = O(|n|^{-N}), \quad |n| \rightarrow \infty. \quad (7.1.12)$$

В частности, мы имеем $\{p_n\} \in \ell^2$. Затем, рассматривая два отдельных случая, мы покажем, что

$$\hat{\phi}(\omega) = P(e^{-i\omega/2}) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad \omega \in \mathbf{R}. \quad (7.1.13)$$

(а) Предположим, что $\omega \notin \text{supp } \hat{\phi}$. Тогда мы имеем

$$P(e^{-i\omega/2}) = \sum_{k \neq 0} \hat{\phi}(\omega + 4\pi k),$$

так что или $\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = 0$, или иначе $P(e^{-i\omega/2}) = 0$. Таким образом, в этом случае обе части (7.1.13) равны нулю.

(б) Предположим, что $\omega \in \text{supp } \hat{\phi}$. Тогда мы можем сделать следующие два заключения. Во-первых, так как $0 < \varepsilon \leq \pi/3$, то для всех неравных нулю k следует, что $\hat{\eta}\left(\frac{\omega}{2} + 2\pi k\right) = 0$, так что $\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \hat{\eta}\left(\frac{\omega}{2}\right) / \hat{\eta}\left(\frac{\omega}{2}\right) = 1$. Во-вторых, мы имеем $P(e^{-i\omega/2}) = \hat{\phi}(\omega)$. Поэтому обе части (7.1.13) равны $\hat{\phi}(\omega)$.

Из определения $\hat{\phi}(\omega)$ в (7.1.8) мы уже знаем, что

$$\{\phi(\cdot - k) : k \in \mathbf{Z}\} \quad (7.1.14)$$

является о.н. семейством (см. теорему 3.23) и что

$$\begin{cases} \hat{\phi}(0) = 1, \\ D^n \hat{\phi}(2\pi k) = 0, \quad 0 \neq k \in \mathbf{Z}, \quad n \in \mathbf{Z}_+. \end{cases} \quad (7.1.15)$$

Ввиду формулы суммирования Пуассона (см. (2.5.11)) это значит, что (7.1.14) обладает свойством разбиения единицы, а именно:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi(x - k) = 1, \quad x \in \mathbf{R}. \quad (7.1.16)$$

Следовательно, чтобы сделать вывод о том, что ϕ порождает КМА $\{V_n\}$ пространства $L^2(\mathbf{R})$, остается проверить, что для любой $f \in L^2(\mathbf{R})$

$$\|P_n(f) - f\|_2 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (7.1.17)$$

где $P_n(f)$ обозначает $L^2(\mathbf{R})$ проекцию f на V_n . С этой целью нам нужно знать скорость убывания ϕ . Это легко, так как N -кратное интегрирование по частям дает

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}^{(N)}(\omega) e^{ix\omega} d\omega = (-ix)^N \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(\omega) e^{ix\omega} d\omega = 2\pi(-ix)^N \phi(x)$$

из чего следует

$$\phi(x) = O\left(\frac{1}{1 + |x|^N}\right). \quad (7.1.18)$$

Теперь, используя ядро

$$K(x, y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi(x - k) \overline{\phi(y - k)}, \quad (7.1.19)$$

мы можем представить проекцию $P_n(f)$ от f как

$$(P_n f)(x) = 2^n \int_{-\infty}^{\infty} K(2^n x, 2^n y) f(y) dy.$$

Так как (7.1.16) означает, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x, y) dy = 1, \quad x \in \mathbf{R},$$

то мы можем сделать вывод, что

$$\begin{aligned} \|P_n f - f\|_2 &= 2^n \left\| \int_{-\infty}^{\infty} K(2^n \cdot, 2^n y) [f(y) - f(\cdot)] dy \right\|_2 \quad (7.1.20) \\ &\leq \left\| \int_{-\infty}^{\infty} K(2^n \cdot, y) [f(2^{-n} y) - f(\cdot)] dy \right\|_2 \\ &\leq C \left\| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + |2^n \cdot - y|^N} |f(2^{-n} y) - f(\cdot)| dy \right\|_2, \end{aligned}$$

где была использована оценка

$$K(x, y) \leq \frac{C}{1 + |x - y|^N}, \quad (7.1.21)$$

которая следует из (7.1.18). Применяя обобщенное неравенство Минковского (которое является $L^2(\mathbf{R})$ аналогом (2.4.3) и может быть легко выведено с использованием (2.1.1)), мы получаем из (7.1.20)

$$\|P_n f - f\|_2 \leq C \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + |y|^N} \|f(\cdot - 2^{-n} y) - f(\cdot)\|_2 dy. \quad (7.1.22)$$

Остальная часть доказательства проводится стандартным образом и состоит из разбиения интеграла на две части. Сначала для любого $\varepsilon > 0$ выберем такое большое $M > 0$, что

$$\int_{|y| \geq M} \frac{1}{1 + |y|^N} dy < \varepsilon.$$

Затем, так как $f \in L^2(\mathbf{R})$, мы имеем для $|y| \leq M$

$$\|f(\cdot - 2^{-n} y) - f(\cdot)\|_2 \rightarrow 0 \quad (7.1.23)$$

равномерно при $n \rightarrow \infty$. Это устанавливает (7.1.17). $\square$

7.2. Идентификация ортогональных двухмасштабных символов

Техническая проблема построения масштабирующих функций и вэйвлетов состоит в идентификации допустимых двухмасштабных символов $P = P_\phi$ (см. определение 5.4; напомним, что наша общая стратегия – это начать с пары двойственных двухмасштабных символов P_ϕ и G_ψ^*). После сплайн-вэйвлетов, изученных в главе 6, и трех примеров, касающихся о.н. вэйвлетов, обсужденных в предыдущем параграфе, кажется нет другой доступной процедуры построения $\hat{\phi}$ как бесконечного произведения

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{k=1}^{\infty} P(e^{-i\omega/2^k}). \quad (7.2.1)$$

Хотя некоторые условия, наложенные на предельные функции таких бесконечных произведений, были определены в теоремах 5.5 и 5.6, эти условия прямо не касаются двухмасштабных символов P и не обеспечивают всех требований на ϕ , необходимых для порождения КМА. Этот параграф посвящен изучению рядов Лорана $P \in \mathcal{W}$, которые являются двухмасштабным символом некоторой ϕ . Так как полная характеристика P не представляется возможной, мы будем удовлетворены достаточным условием, которое может быть легко применено. Это является продолжением наших усилий, начатых леммой 5.20. Здесь отличие состоит в том, что особое внимание уделяется ϕ , которые являются *о.н. масштабирующими функциями*, поэтому мы имеем в виду, что ϕ не только порождает КМА пространства $L^2(\mathbf{R})$, но также удовлетворяет требованию

$$\langle \phi(\cdot - j), \phi(\cdot - k) \rangle = \delta_{j,k}, \quad j, k \in \mathbf{Z}. \quad (7.2.2)$$

Давайте сначала напомним из (5.1.12) и (7.1.1) необходимые условия, которым должен удовлетворять двухмасштабный символ P некоторой масштабирующей функции ϕ .

Лемма 7.4. Пусть P — ряд Лорана в классе Винера $\mathcal{W}$. Если P — двухмасштабный символ некоторой масштабирующей функции ϕ , которая является о.н. в смысле (7.2.2), то P должен удовлетворять равенствам

$$P(1) = 1 \quad \text{и} \quad (7.2.3)$$

$$|P(z)|^2 + |P(-z)|^2 = 1, \quad |z| = 1. \quad (7.2.4)$$

Поэтому, ввиду (7.2.3), мы, как в (5.1.17), заинтересованы в тех P из $\mathcal{W}$, которые могут быть выражены как

$$\begin{cases} P(z) = \frac{1}{2} \sum_k p_k z^k = \left(\frac{1+z}{2} \right)^N S(z), \\ \text{где } N — \text{некоторое положительное целое число и} \\ S \in \mathcal{W} \text{ удовлетворяет условию } S(1) = 1. \end{cases} \quad (7.2.5)$$

Для любого S в (7.2.5) мы можем написать

$$\begin{cases} S(z) = \sum_k s_k z^k, \\ B := \max_{|z|=1} |S(z)|. \end{cases} \quad (7.2.6)$$

Целью этого параграфа является установление удобного условия для множителя S , который бы обеспечил, что P является двухмасштабным символом некоторой о.н. масштабирующей функции.

Теорема 7.5. Пусть $P \in \mathcal{W}$ удовлетворяет (7.2.4) и (7.2.5) для некоторого $N \geq 1$, так что

$$\sum_k |s_k| |k|^\varepsilon < \infty \quad (7.2.7)$$

для некоторого $\varepsilon > 0$ и

$$B < 2^{N-1}, \quad (7.2.8)$$

где используется обозначение из (7.2.6). Тогда бесконечное произведение

$$g(\omega) := \prod_{k=1}^{\infty} P(e^{-i\omega/2^k}) \quad (7.2.9)$$

сходится к $g \in C(\mathbf{R}) \cap L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$ всюду. Более того, функция $\phi \in L^2(\mathbf{R})$ с $\hat{\phi} = g$ есть о.н. масштабирующая функция, которая порождает КМА в $L^2(\mathbf{R})$.

Доказательство этой теоремы будет зависеть от последовательности лемм.

Лемма 7.6. В предположениях (7.2.7) и (7.2.5) для некоторого $N \geq 1$ бесконечное произведение в (7.2.9) сходится всюду к непрерывной функции g .

Замечание. Эта лемма отличается от теоремы 5.5 тем, что в ней предположение накладывается на S вместо конечного произведения в (5.1.18).

Доказательство. Из (7.2.7) и соотношения (7.2.5) легко видеть, что $\{p_k\}$ также удовлетворяет неравенству

$$\sum_k |p_k| |k|^\varepsilon < \infty; \quad (7.2.10)$$

и из (7.2.10) следует, что для любого $h > 0$

$$\begin{aligned} |P(e^{-i(\omega+h)}) - P(e^{-i\omega})| &\leq \frac{1}{2} \sum_k |p_k| |e^{-ikh} - 1| \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_k |p_k| \min(2, |k|h) \\ &\leq |h|^\varepsilon \sum_k |p_k| |k|^\varepsilon. \end{aligned}$$

(Здесь без потери общности мы рассматриваем $0 < \varepsilon \leq 1$.) Отсюда, поскольку $P(e^{-i\omega})$ есть функция от ω , то $P(e^{-i\omega})$ принадлежит классу $\text{Lip } \varepsilon$ (см. определение 5.7). Более того, из тех же выкладок, какие были проведены в (5.1.21), и вышеприведенного заключения (при условии, что S заменено на P и α на ε) мы можем сделать вывод, что бесконечное произведение в (7.2.9) сходится. Чтобы доказать непрерывность

предельной функции g при любом ω_0 , предположим сначала, что $g(\omega_0) \neq 0$. При этом предположении мы имеем

$$\begin{aligned} g(\omega) - g(\omega_0) &= g(\omega_0) \{g(\omega)/g(\omega_0) - 1\} \\ &= g(\omega_0) \left\{ \exp \left[\sum_{k=1}^{\infty} \ln[1 - (1 - P(e^{-i\omega/2^k})/P(e^{-i\omega_0/2^k}))] \right] - 1 \right\} \\ &= g(\omega_0) \left\{ \exp \left[O \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\omega - \omega_0|^\varepsilon}{2^{k\varepsilon}} \right) \right] - 1 \right\} \\ &= o(1), \quad \omega \rightarrow \omega_0. \end{aligned}$$

С другой стороны, если $g(\omega_0) = 0$, то так как $P(1) = 1$, то существует достаточно большое целое k_0 , зависящее от ω_0 , такое, что предельная функция

$$\tilde{g}(\omega) = \prod_{k=k_0}^{\infty} P(e^{-i\omega/2^k})$$

удовлетворяет неравенству $\tilde{g}(\omega_0) \neq 0$. Проведенные выше преобразования показывают, что $\tilde{g}$ непрерывна в точке ω_0 , так что

$$g(\omega) = \tilde{g}(\omega_0) \prod_{k=1}^{k_0-1} P(e^{-i\omega/2^k})$$

также непрерывна в этой точке. □

Лемма 7.7. В предположениях (7.2.8) и (7.2.5) для некоторого $N \geq 1$ предельная функция $g(\omega)$ в (7.2.9) удовлетворяет неравенству

$$|g(\omega)| \leq C \left(\frac{1}{1 + |\omega|} \right)^{1+\eta}, \quad \omega \in \mathbf{R} \quad (7.2.11)$$

для некоторого $\eta > 0$.

Доказательство. Вернемся к определению b_j в (5.1.18). Ввиду (7.2.8) мы имеем

$$b_1 = \log_2 B_1 = \log_2 B < N - 1.$$

Итак, выбрав $n_0 = 1$ в теореме 5.5, заключение в (5.1.20) теоремы 5.5 дает (7.2.11) с

$$\eta := N - b_1 - 1. \quad \square$$

Замечание. Остановимся на минуту, чтобы обобщить уже доказанное и дать основные принципы оставшейся части доказательства теоремы 7.5.

(а) Как следствие лемм 7.6 и 7.7 заключаем, что бесконечное произведение в (7.2.9) сходится к некоторой функции

$$g \in C(\mathbf{R}) \cap L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R}),$$

которой и будет называться это бесконечное произведение. Отсюда по теореме 2.17 существует единственная $\phi \in L^2(\mathbf{R})$, преобразование Фурье которой $\hat{\phi}$ есть это бесконечное произведение. Следовательно, $\hat{\phi}$ удовлетворяет равенствам:

$$\begin{cases} \hat{\phi}(\omega) = P(e^{-i\omega/2})\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) & \text{или} \\ \phi(x) = \sum_k p_k \phi(2x - k). \end{cases} \quad (7.2.12)$$

Таким образом, мы можем ввести

$$\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \phi(2^j x - k), \quad j, k \in \mathbf{Z} \quad (7.2.13)$$

и

$$V_j = \text{clos}_{L^2(\mathbf{R})} (\phi_{j,k} : k \in \mathbf{Z}). \quad (7.2.14)$$

Из (7.2.12) ясно, что $\{V_j\}$ — это последовательность вложенных замкнутых подпространств $L^2(\mathbf{R})$, и чтобы доказать, что это — КМА в $L^2(\mathbf{R})$, мы должны показать, что объединение V_j плотно в $L^2(\mathbf{R})$ и что ϕ порождает базис Рисса V_0 .

(б) Сначала мы докажем, что ϕ порождает о.н. базис V_0 . Чтобы доказать плотность объединения V_j , $j \in \mathbf{Z}$, мы должны в наших рассуждениях следовать подходу, обсужденному

в главах 1 и 3 при построении о.н. вэйвлет-базиса пространства $L^2(\mathbf{R})$. Это будет означать не только

$$\text{clos}_{L^2(\mathbf{R})} \left(\bigcup_{j \in \mathbf{Z}} V_j \right) = L^2(\mathbf{R}), \quad (7.2.15)$$

но также и

$$\bigcap_{j \in \mathbf{Z}} V_j = \{0\}. \quad (7.2.16)$$

(См. лемму 5.1.) Из исследований § 5.6 мы знаем, что хорошим кандидатом на о.н. вэйвлет является

$$\psi(x) := \sum_{k \in \mathbf{Z}} q_k \phi(2x - k), \quad (7.2.17)$$

где

$$q_k := (-1)^k \bar{p}_{-k+1}. \quad (7.2.18)$$

Так же, как обычно, мы положим

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k), \quad j, k \in \mathbf{Z}. \quad (7.2.19)$$

Тогда доказательство теоремы 7.5 будет завершено, если мы сможем показать, что семейство

$$\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbf{Z}\} \quad (7.2.20)$$

является базисом $L^2(\mathbf{R})$.

Для доказательства того факта, что ϕ порождает о.н. базис (и, следовательно, базис Рисса) V_0 , мы напомним из теоремы 3.23, что это эквивалентно доказательству того, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ij\omega} |\hat{\phi}(\omega)|^2 d\omega = \delta_{j,0}, \quad j \in \mathbf{Z}. \quad (7.2.21)$$

Лемма 7.8. В предположениях теоремы 7.5 бесконечное произведение $g = \hat{\phi}$ удовлетворяет (7.2.21).

Доказательство. Доказательство этой леммы подобно доказательству в одном направлении теоремы 5.22. Действительно, положив

$$g_n(\omega) := \left\{ \prod_{k=1}^n P(e^{-i\omega/2^k}) \right\} \chi_{[-2^n\pi, 2^n\pi]}(\omega), \quad (7.2.22)$$

мы имеем

$$I_n := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ij\omega} |g_n(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-2^n\pi}^{2^n\pi} \left(\prod_{k=1}^n |P(e^{-i\omega/2^k})|^2 \right) e^{ij\omega} d\omega,$$

которое совпадает с (5.4.22), где G заменено на $\bar{P}$. Следовательно, из (5.4.25) мы получаем

$$I_n := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ij\omega} |g_n(\omega)|^2 d\omega = \delta_{j,0}, \quad j \in \mathbf{Z}; \quad (7.2.23)$$

и, снова применяя лемму 5.20, мы имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ij\omega} |\hat{\phi}(\omega)|^2 d\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \delta_{j,0}$$

для всех $j \in \mathbf{Z}$. □

Для того чтобы показать, что семейство (7.2.20) является о.н. базисом $L^2(\mathbf{R})$, полезно знать свойства последовательностей $\{p_k\}$ и $\{q_k\}$, связь которых дается формулой (7.2.18).

Лемма 7.9. Пусть $\{p_k\}$ и $\{q_k\}$ определяются (7.2.5) и (7.2.18), где P удовлетворяет (7.2.3) и (7.2.4). Тогда эти две последовательности имеют следующие свойства:

- (а) $\sum_k p_k = 2$;
- (б) $\sum_k p_{k-2\ell} \bar{p}_{k-2m} = 2\delta_{\ell,m}$;
- (в) $\sum_k q_{k-2\ell} \bar{q}_{k-2m} = 2\delta_{\ell,m}$;

$$(г) \sum_k p_{k-2\ell} \bar{q}_{k-2m} = 0 \quad u$$

$$(д) \sum_k \{p_{\ell-2k} \bar{p}_{m-2k} + q_{\ell-2k} \bar{q}_{m-2k}\} = 2\delta_{\ell,m}$$

для всех $\ell, m \in \mathbf{Z}$.

Доказательство. Утверждение (а) эквивалентно (7.2.3), утверждение (б) — (7.2.4) и, ввиду (7.2.18), (в) есть очевидное следствие (б). Интересно видеть, что свойство «ортогональности» (г) может быть легко выведено простой заменой индексов. Действительно, мы имеем

$$\begin{aligned} \sum_k p_{k-2\ell} \bar{q}_{k-2m} &= \sum_k (-1)^k p_{k-2\ell} p_{-k+2m+1} \\ &= \sum_j (-1)^{j+1} p_{-j+2m+1} p_{j-2\ell} = - \sum_k p_{k-2\ell} \bar{q}_{k-2m}. \end{aligned}$$

Окончательно для проверки (д) мы видим после применения (7.2.18) для замены q на p , что две суммы в (д) просто образуют разбиение суммы в (б) на одну сумму по нечетным индексам и вторую сумму по четным индексам. $\square$

Как следствие тождества (д) в вышеприведенной лемме, мы имеем следующий результат.

Лемма 7.10. Для всех $x \in \mathbf{R}$

$$2\phi(2x - m) = \sum_k \{\bar{p}_{m-2k} \phi(x - k) + \bar{q}_{m-2k} \psi(x - k)\}, \quad m \in \mathbf{Z}. \quad (7.2.24)$$

Доказательство. Получается в результате применения (7.2.12), (7.2.17) и (д) в лемме 7.9. $\square$

В дальнейшем будет полезна следующая формула разложения.

Лемма 7.11. Для каждой $f \in L^2(\mathbf{R})$

$$\sum_k |\langle f, \phi_{j,k} \rangle|^2 = \sum_k \{|\langle f, \phi_{j-1,k} \rangle|^2 + |\langle f, \psi_{j-1,k} \rangle|^2\}, \quad j \in \mathbf{Z}. \quad (7.2.25)$$

Доказательство. Получается в результате применения леммы 7.10, свойств (б), (в) и (г) в лемме 7.9. $\square$

В добавление к их прекрасным свойствам «разложения», установленным в леммах 7.10 и 7.11, два семейства $\{\phi_{j,k}\}$ и $\{\psi_{j,k}\}$ обладают, как ожидалось, следующими свойствами ортогональности.

Лемма 7.12. *В предположениях теоремы 7.5 два семейства $\{\phi_{j,k}\}$ и $\{\psi_{j,k}\}$ удовлетворяют следующим равенствам:*

- (а) $\langle \phi_{j,k}, \phi_{j,\ell} \rangle = \delta_{k,\ell}, \quad j, k, \ell \in \mathbf{Z};$
- (б) $\langle \phi_{j,k}, \psi_{j,\ell} \rangle = 0, \quad j, k, \ell \in \mathbf{Z} \quad \text{и}$
- (в) $\langle \psi_{j,k}, \psi_{\ell,m} \rangle = \delta_{j,\ell} \delta_{k,m}, \quad j, k, \ell, m \in \mathbf{Z}.$

Доказательство. Утверждение (а) следует из леммы 7.8 в результате применения теоремы 3.23 и изменения масштаба. Чтобы проверить (б), мы просто применим (а), (7.2.12), (7.2.17) и лемму 7.9 (г). Такой же вывод, с тем исключением, что применяется (в) леммы 7.9 вместо (г), дает утверждение (в) для случая, когда $j = \ell$. Для $j \neq \ell$, пусть $j > \ell$, мы замечаем из (7.2.17), что $\psi_{\ell,m} \in V_{\ell+1}$. Так как $V_{\ell+1} \subset V_j$ и $\psi_{j,k}$ ортогональна V_j по (б), мы видим, что $\psi_{j,k}$ ортогональна $\psi_{\ell,m}$. $\square$

Следовательно, $\{\psi_{j,k}\}$ является о.н. семейством в $L^2(\mathbf{R})$. Как было упомянуто в предыдущем замечании, наш подход к доказательству плотности объединения V_j в $L^2(\mathbf{R})$ состоит в проверке того факта, что это семейство является о.н. базисом $L^2(\mathbf{R})$. Стандартная процедура в гармоническом анализе — это вывод «равенства Парсеваля» для $\{\psi_{j,k}\}$. Это и будет установлено в следующей лемме. Заметим сначала, что любое о.н. семейство удовлетворяет «неравенству Бесселя». Доказательство этого простого факта тождественно доказательству неравенства Бесселя для (тригонометрических) рядов Фурье (см. теорему 2.18).

Лемма 7.13. В предположениях теоремы 7.5. о.н. семейство $\{\psi_{j,k}\}$, $j, k \in \mathbf{Z}$, определенное формулами (7.2.17)–(7.2.19), удовлетворяет следующему «равенству Парсеваля»:

$$\sum_{j,k \in \mathbf{Z}} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2 = \|f\|_2^2, \quad f \in L^2(\mathbf{R}). \quad (7.2.26)$$

Доказательство. Пусть C_0^∞ обозначает класс всех бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем. Мы установим сначала (7.2.26) для всех $f \in C_0^\infty$. Как было упомянуто выше, так как $\{\phi_{j,k} : k \in \mathbf{Z}\}$ есть о.н. семейство для каждого j , мы имеем «неравенство Бесселя»:

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} |\langle f, \phi_{j,k} \rangle|^2 \leq \|f\|_2^2 < \infty, \quad j \in \mathbf{Z}.$$

Теперь для любой пары положительных целых чисел L и M , суммируя обе части (7.2.25) в лемме 7.11 по $j = -L+1, \dots, M$ и сокращая общие члены, мы имеем

$$\sum_{j=-L}^{M-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{|\langle f, \phi_{M,k} \rangle|^2 - |\langle f, \phi_{-L,k} \rangle|^2\}. \quad (7.2.27)$$

Давайте сначала рассмотрим второй член в правой части (7.2.27). Так как $f \in C_0^\infty$, то существует некоторое $K > 0$ такое, что $\text{supp } f \subset [-K, K]$. Теперь по неравенству Шварца мы имеем

$$\begin{aligned} |\langle f, \phi_{-L,k} \rangle|^2 &= \left| 2^{-L/2} \int_{-K}^K \phi(2^{-L}x - k) \overline{f(x)} dx \right|^2 \\ &\leq \left\{ 2^{-L} \int_{-K}^K |\phi(2^{-L}x - k)|^2 dx \right\} \|f\|_2^2 \\ &= \left\{ \int_{-K/2^L}^{K/2^L} |\phi(y - k)|^2 dy \right\} \|f\|_2^2, \end{aligned}$$

так что

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\langle f, \phi_{-L,k} \rangle|^2 \leq \|f\|_2^2 \int_{B_L} |\phi(y)|^2 dy \quad (7.2.28)$$

для всех достаточно больших L , где

$$B_L := \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [k - K/2^L, k + K/2^L].$$

Так как $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ и мера $B_L \cap [-N, N]$ стремится к нулю при L , стремящемся к бесконечности для любого $N > 0$, неравенство в (7.2.28) дает

$$\lim_{L \rightarrow +\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\langle f, \phi_{-L,k} \rangle|^2 = 0. \quad (7.2.29)$$

(Результат в (7.2.29) означает, что $\cap V_j = \{0\}$; см. замечание, сделанное после утверждения определения 5.2.) Итак, из (7.2.27) мы имеем

$$\sum_{j=-\infty}^{M-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\langle f, \phi_{M,k} \rangle|^2, \quad f \in C_0^\infty. \quad (7.2.30)$$

Для оценки величины в правой части (7.2.30) заметим сначала, применяя равенство Парсеваля для преобразования Фурье и ряда Фурье, что

$$\begin{aligned} \sum_k |\langle f, \phi_{M,k} \rangle|^2 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_k |\langle \hat{f}, \hat{\phi}_{M,k} \rangle|^2 \quad (7.2.31) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_k 2^M \left| \int_0^{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{f}(2^M(\omega + 2\pi m)) \overline{\hat{\phi}(\omega + 2\pi m)} e^{ik\omega} d\omega \right|^2 \\ &= \frac{2^M}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{f}(2^M(\omega + 2\pi m)) \overline{\hat{\phi}(\omega + 2\pi m)} \right|^2 d\omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2^M}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{m,\ell} \hat{f}(2^M(\omega + 2\pi m)) \overline{\hat{f}(2^M(\omega + 2\pi\ell))} \right. \\
&\quad \left. \times \overline{\hat{\phi}(\omega + 2\pi m)} \hat{\phi}(\omega + 2\pi\ell) \right\} d\omega \\
&= \frac{2^M}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(2^M(\omega + 2\pi n)) \overline{\hat{f}(2^M\omega)} \overline{\hat{\phi}(\omega + 2\pi n)} \hat{\phi}(\omega) \right\} d\omega \\
&= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{f}(\omega)} \hat{f}(\omega + 2\pi\ell 2^M) \overline{\hat{\phi}(2^{-M}\omega + 2\pi\ell)} \hat{\phi}(2^{-M}\omega) d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}(2^{-M}\omega)|^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega + R_M,
\end{aligned}$$

где R_M определяется как сумма по значениям $\ell \neq 0$. Теперь, из (7.2.4) и определения $\hat{\phi}$ как бесконечного произведения $P(e^{-i\omega/2^k})$, мы имеем

$$|\hat{\phi}(\omega)| \leq 1, \quad \omega \in \mathbf{R}. \quad (7.2.32)$$

Отсюда следует, что

$$|R_M| \leq \sum_{\ell \neq 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega) \hat{f}(\omega + 2\pi\ell 2^M)| d\omega. \quad (7.2.33)$$

Рассмотрим

$$F_M(\omega) := \sum_{\ell \neq 0} |\hat{f}(\omega + 2\pi\ell 2^M)|. \quad (7.2.34)$$

Так как $f \in C_0^\infty$, ясно, что $\{F_M(\omega)\}$ — равномерно ограничена на R и равномерно сходится к нулю на любом компактном множестве при M стремящемся к бесконечности. Отсюда, учитывая что $\hat{f} \in L^1(\mathbf{R})$, легко видеть, что $R_M \rightarrow 0$ при $M \rightarrow +\infty$.

Теперь мы возвращаемся к (7.2.31). Сначала напомним, что из лемм 7.6 и 7.7 следует, что $\hat{\phi} = g$ — непрерывная функция. Кроме этого, из (7.2.3) и (7.2.9) мы имеем $\hat{\phi}(0) = 1$. Рас-

суждая стандартным образом, мы можем сделать вывод, что

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}(2^{-M}\omega)|^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \|\hat{f}\|_2^2 = \|f\|_2^2. \quad (7.2.35)$$

Поэтому, полагая, что $R_M \rightarrow 0$ и справедливы заключения (7.2.35), (7.2.31) и (7.2.30), мы имеем

$$\sum_{j,k \in \mathbf{Z}} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2 = \|f\|_2^2, \quad f \in C_0^\infty. \quad (7.2.36)$$

Чтобы распространить (7.2.36) на все $L^2(\mathbf{R})$, мы используем тот факт, что C_0^∞ плотно в $L^2(\mathbf{R})$. Это означает, что для любой $f \in L^2(\mathbf{R})$ и произвольного $\varepsilon > 0$ существует некоторая $f_0 \in C_0^\infty$ такая, что $\|f - f_0\|_2 < \varepsilon$. Отсюда, по неравенству Бесселя

$$\|\{\langle f - f_0, \psi_{j,k} \rangle\}\|_{\ell^2} \leq \|f - f_0\|_2 < \varepsilon,$$

откуда

$$|\|\{\langle f, \psi_{j,k} \rangle\}\|_{\ell^2} - \|\{\langle f_0, \psi_{j,k} \rangle\}\|_{\ell^2}| \leq \|\{\langle f - f_0, \psi_{j,k} \rangle\}\|_{\ell^2} < \varepsilon. \quad (7.2.37)$$

Так как мы также имеем

$$|\|f\|_2 - \|f_0\|_2| \leq \|f - f_0\|_2 < \varepsilon, \quad (7.2.38)$$

то получаем (7.2.26) из (7.2.36)–(7.2.38). $\square$

Теперь легко доказать теорему 7.5.

Доказательство теоремы 7.5. Установив равенство Парсеваля (7.2.26) в лемме 7.13, мы теперь используем стандартный метод для показа того, что о.н. семейство $\{\psi_{j,k}\}$ (см. лемму 7.12 (в)) есть о.н. базис $L^2(\mathbf{R})$. Действительно, для любой $f \in L^2(\mathbf{R})$ и любой конечной последовательности $\{c_{j,k}\}$ мы имеем

$$\|f - \sum c_{j,k} \psi_{j,k}\|_2^2 = \|f\|_2^2 - 2\operatorname{Re} \sum \bar{c}_{j,k} \langle f, \psi_{j,k} \rangle + \sum |c_{j,k}|^2.$$

Следовательно, положив $c_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle$ для $|j| \leq N$ и $|k| \leq N$ и устремляя N к бесконечности, мы имеем

$$f = \sum_{j,k} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}, \quad f \in L^2(\mathbf{R}),$$

где речь идет о сходимости в $L^2(\mathbf{R})$. Таким образом, мы доказали, что ψ есть о.н. вэйвлет. Следовательно, применяя лемму 5.1, мы получаем (7.2.15), так что ϕ — масштабирующая функция. $\square$

7.3. Построение ортогональных вэйвлетов с компактным носителем

Ввиду соотношения между двухмасштабными последовательностями $\{p_k\}$ и $\{q_k\}$, приведенного в формуле (7.2.18), для построения о.н. вэйвлета ψ достаточно построить соответствующую ему масштабирующую функцию ϕ . Целью этого параграфа является описание общей процедуры построения о.н. масштабирующих функций и вэйвлетов с компактным носителем. Для простоты мы рассматриваем только вещественно-значные последовательности $\{p_k\}$. Согласно теореме 7.5 и (5.2.13), все, что нам нужно — это идентифицировать такие многочлены Лорана $S(z)$, соответствующие некоторому заданному положительному целому числу N , что выполнены условия (7.2.4)–(7.2.8).

Более точно, пусть N — положительное целое число, и рассмотрим

$$P(z) = \left(\frac{1+z}{2} \right)^N S(z), \quad (7.3.1)$$

где $S(z)$ — многочлен Лорана, удовлетворяющий условию $S(1) = 1$. Так как любой конечный ряд Лорана уже удовлетворяет (7.2.7), то достаточно идентифицировать такие S , которые удовлетворяют (7.2.4) и

$$B := \max_{|z|=1} |S(z)| < 2^{N-1}. \quad (7.3.2)$$

Для представления условия (7.2.4), налагаемого на $P(z)$, в такой форме, которая прямо определяет $S(z)$, мы заметим, что так как $S(z)$ — многочлен Лорана с вещественными коэффициентами, то $|S(e^{-i\omega})|^2$ есть многочлен по косинусам, и, следовательно, мы можем написать

$$|S(e^{-i\omega})|^2 = \tilde{R}(\cos \omega), \quad (7.3.3)$$

где $\tilde{R}$ — некоторый (алгебраический) многочлен с вещественными коэффициентами. Как в (5.6.37), замена переменных

$$\begin{cases} x = \frac{1 - \cos \omega}{2} = \sin^2 \left(\frac{\omega}{2} \right), \\ R(x) = \tilde{R}(\cos \omega) = \tilde{R}(1 - 2x) \end{cases} \quad (7.3.4)$$

переводит условие (7.2.4) в

$$\left| \frac{1 + e^{-i\omega}}{2} \right|^{2N} |S(e^{-i\omega})|^2 + \left| \frac{1 - e^{-i\omega}}{2} \right|^{2N} |S(-e^{-i\omega})|^2 = 1,$$

что эквивалентно

$$(1 - x)^N R(x) + x^N R(1 - x) = 1. \quad (7.3.5)$$

Согласно (5.6.33) и (5.6.38), общее решение (7.3.5) дается формулой

$$\begin{cases} R(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N+k-1}{k} x^k + x^N T(x), \\ \text{где } T - \text{многочлен, такой что } T(1-x) = -T(x). \end{cases} \quad (7.3.6)$$

Подведем итог вышеприведенным результатам в следующей лемме, где

$$T_0(x) := T\left(\frac{1-2x}{2}\right).$$

Лемма 7.14. Пусть S — некоторый многочлен Лорана, который удовлетворяет обоим условиям (7.3.2) и

$$|S(e^{-i\omega})|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N+k-1}{k} \left(\sin \frac{\omega}{2}\right)^{2k} + \left(\sin \frac{\omega}{2}\right)^{2N} T_0\left(\frac{\cos \omega}{2}\right) \quad (7.3.7)$$

для некоторого нечетного многочлена T_0 . Тогда многочлен Лорана

$$\left(\frac{1+z}{2}\right)^N S(z) = \frac{1}{2} \sum_k p_k z^k, \quad (7.3.8)$$

где $S(1)$ выбирается равным 1, есть двухмасштабный символ некоторой о.н. масштабирующей функции ϕ с компактным носителем, которая порождает КМА пространства $L^2(\mathbf{R})$. Соответственно

$$\psi(x) := \sum_k (-1)^k \bar{p}_{-k+1} \phi(2x - k) \quad (7.3.9)$$

является о.н. вэйвлетом с компактным носителем.

Замечание. Если S удовлетворяет (7.3.7), то, положив $\omega = 0$, мы имеем $|S(1)|^2 = 1$. Итак, выбор S , удовлетворяющего условию $S(1) = 1$, легко выполняется. Семейство всех нечетных многочленов $T_0(x)$, $|x| \leq \frac{1}{2}$, в (7.3.7) дает нам некоторую свободу в построении о.н. масштабирующей функции. Если выбор $T_0 = 0$ не нарушает (7.3.2), то соответствующая масштабирующая функция имеет наименьший носитель среди всех функций, определяемых формулой (7.3.7). Ниже мы увидим, что действительно условие в (7.3.2) удовлетворяется выбором $T_0 = 0$.

Нам нужно следующее тождество.

Лемма 7.15. Для всех $k, n \in \mathbb{Z}_+$

$$\sum_{j=0}^k \binom{n+j}{j} = \binom{n+k+1}{k}. \quad (7.3.10)$$

Доказательство. Эта лемма легко доказывается повторным применением тождества

$$\binom{n+j+1}{j} = \binom{n+j}{j} + \binom{n+j}{j-1}.$$

Действительно, мы имеем

$$\begin{aligned} \binom{n+k+1}{k} &= \binom{n+k}{k} + \binom{n+k}{k-1} \\ &= \binom{n+k}{k} + \left\{ \binom{n+k-1}{k-1} + \binom{n+k-1}{k-2} \right\} \\ &= \dots = \sum_{j=0}^k \binom{n+j}{j}. \quad \square \end{aligned}$$

Следующий результат есть следствие леммы 7.14.

Теорема 7.16. Пусть N — любое целое положительное число и $S(z)$ — любой многочлен Лорана с вещественными коэффициентами, удовлетворяющий тождеству

$$|S(e^{-i\omega})|^2 = \sum_{j=0}^{N-1} \binom{N+j-1}{j} \left(\sin \frac{\omega}{2} \right)^{2j}, \quad (7.3.11)$$

и такой, что $S(1) = 1$. Тогда многочлен Лорана в (7.3.8) есть двухмасштабный символ о.н. масштабирующей функции ϕ с компактным носителем и ψ , определенная формулой (7.3.9), — о.н. вэйвлет с компактным носителем.

Доказательство. Применяя (7.3.10) с $n = k = N - 1$, мы имеем

$$\begin{aligned} B^2 &:= \max_{|z|=1} |S(z)|^2 \leq \sum_{j=0}^{N-1} \binom{N+j-1}{j} \\ &= \binom{2N-1}{N-1} = \frac{1}{2} \left\{ \binom{2N-1}{N-1} + \binom{2N-1}{N} \right\} \\ &< \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2N-1} \binom{2N-1}{k} = \frac{1}{2} \cdot 2^{2N-1} = 2^{2N-2}, \end{aligned}$$

так что $B < 2^{N-1}$ и (7.3.2) выполнено. $\square$

Таким образом, единственная техническая проблема при построении о.н. вэйвлетов с компактным носителем — это решение (7.3.11) для $S(z)$. Следующий результат, известный как лемма Рисса, гарантирует нам, что $S(z)$ всегда существует. Мы дадим «конструктивное» доказательство этого результата с тем, чтобы показать, как может быть получен $S(z)$.

Теорема 7.17. Пусть $a_0, \dots, a_N \in \mathbf{R}$ с $a_N \neq 0$ такие, что

$$A(\omega) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N a_k \cos k\omega \geq 0, \quad \omega \in \mathbf{R}. \quad (7.3.12)$$

Тогда существует многочлен

$$B(z) = \sum_{k=0}^N b_k z^k \quad (7.3.13)$$

с вещественными коэффициентами и точной степени N , который удовлетворяет равенству

$$|B(z)|^2 = A(\omega), \quad z = e^{-i\omega}. \quad (7.3.14)$$

Доказательство. Рассмотрим алгебраический многочлен

$$P_A(z) = \frac{1}{2} \sum_{k=-N}^N a_{|k|} z^{N+k}. \quad (7.3.15)$$

соответствующий многочлену по косинусам $A(\omega)$. Ясно, что P_A удовлетворяет равенствам

$$P_A(z) = z^N A(\omega), \quad z = e^{-i\omega} \quad (7.3.16)$$

и

$$P_A(z) = z^{2N} P_A\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \in \mathbf{C}. \quad (7.3.17)$$

Теперь из предположения $a_N \neq 0$ мы видим, что $P_A(0) \neq 0$, и из (7.3.17) следует, что все нули P_A разбиваются на пары взаимно обратных чисел. В частности, каждый нуль на единичной окружности должен иметь четную кратность. Более того, так как коэффициенты P_A — вещественны, то все комплексные нули P_A также разбиваются на сопряженные пары. Таким образом, P_A может быть записан как

$$P_A(z) = \frac{1}{2} a_N \left\{ \prod_{k=1}^K (z - r_k)(z - r_k^{-1}) \right\} \times \left\{ \prod_{j=1}^J (z - z_j)(z - \bar{z}_j)(z - z_j^{-1})(z - \bar{z}_j^{-1}) \right\}, \quad (7.3.18)$$

где $r_1, \dots, r_K \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $z_1, \dots, z_J \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ и $K + 2J = N$. (Здесь знак $\setminus$ означает вычитание множеств.) Поэтому, ввиду того факта, что

$$|(z - z_j)(z - \bar{z}_j^{-1})| = |z_j|^{-1} |z - z_j|^2, \quad (7.3.19)$$

$$z = e^{-i\omega},$$

мы имеем, применяя (7.3.12), (7.3.16), (7.3.18) и (7.3.19),

$$\begin{aligned} A(\omega) &= |A(\omega)| = |P_A(z)| \\ &= \frac{1}{2} |a_N| \prod_{k=1}^K |r_k^{-1}| \prod_{j=1}^J |z_j|^{-2} \\ &\quad \times \left| \prod_{k=1}^K (z - r_k) \prod_{j=1}^J (z - z_j)(z - \bar{z}_j) \right|^2, \end{aligned}$$

где $z = e^{-i\omega}$. Итак, многочлен

$$B(z) := \left(\frac{1}{2} |a_N| \prod_{k=1}^K |r_k^{-1}| \prod_{j=1}^J |z_j|^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \times \left\{ \prod_{k=1}^K (z - r_k) \prod_{j=1}^J (z - z_j)(z - \bar{z}_j) \right\} \quad (7.3.20)$$

имеет точную степень $K + 2J = N$ и удовлетворяет (7.3.14). $\square$

Замечание. Заметим, что многочлен $B(z)$ не единственный, так как при определении $B(z)$ мы можем выбрать любой корень из каждой пары взаимно обратных нулей $P_A(z)$. Применяя теоремы 7.15 или 7.16, необходимо нормировать $B(z)$ так, чтобы было $S(1) = 1$. В следующем примере мы выберем такие нули, которые не лежат в открытом единичном круге, и отметим, что нормировочная константа должна быть равна -1 .

Пример 7.18. Применяя теоремы 7.16 и 7.17 с $N = 1$, мы имеем

$$A(\omega) = |S(e^{-i\omega})|^2 = 1 + 2 \sin^2 \left(\frac{\omega}{2} \right) = \frac{4}{2} - \cos \omega,$$

так что ненулевые коэффициенты в (7.3.12) — это $a_0 = 4$ и $a_1 = -1$. Теперь из (7.3.15) мы получаем

$$P_A(z) = \frac{1}{2} \{-1 + 4z - z^2\} = -\frac{1}{2}(z - (2 - \sqrt{3}))(z - (2 + \sqrt{3})).$$

Если мы выберем нуль вне единичного круга, то, применяя (7.3.20), мы имеем

$$\begin{aligned} S(z) &= -B(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{-1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} (z - (2 + \sqrt{3})) \quad (7.3.21) \\ &= \frac{-1}{\sqrt{2}} \sqrt{2 - \sqrt{3}} (z - (2 + \sqrt{3})) \\ &= -\frac{1}{2} \{(\sqrt{3} - 1)z - (\sqrt{3} + 1)\}. \end{aligned}$$

Поэтому вместе с множителем $S(z)$ в (7.3.21) двухмасштабный символ дается выражением

$$\begin{aligned} P(z) &= \left(\frac{1+z}{2}\right)^2 S(z) \quad (7.3.22) \\ &= \frac{1}{8} (1+z)^2 ((1-\sqrt{3})z + (1+\sqrt{3})) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1+\sqrt{3}}{4} + \frac{3+\sqrt{3}}{4}z + \frac{3-\sqrt{3}}{4}z^2 + \frac{1-\sqrt{3}}{4}z^3 \right\}. \end{aligned}$$

Масштабирующая функция с двухмасштабным символом, заданным формулой (7.3.22), называется масштабирующей функцией Добеши ϕ_3^D (см. (5.2.6)). $\square$

Чтобы облегчить наши рассуждения, введем следующее обозначение.

Определение 7.19. Пусть для каждого целого $N \geq 2$ $S_N(z)$ обозначает решение $B(z)$, данное формулой (7.3.20), уравнения (7.3.11), определенное выбором из каждой пары взаимно обратных нулей $P_A(z)$ нуля, имеющего наибольший модуль, и нормированное так, что $B(1) = 1$. Тогда масштабирующая функция с двухмасштабным символом

$$\left(\frac{1+z}{2}\right)^N S_N(z)$$

будет обозначаться ϕ_{N+1}^D и будет называться масштабирующей функцией Добеши порядка $N + 1$.

Сейчас мы будем изучать порядок гладкости о.н. вэйвлетов с компактными носителями Добеши ψ_m^D и соответствующих им масштабирующих функций ϕ_m^D .

Определение 7.20. Пусть $\gamma > 0$. Говорят, что функция $f \in L^2(\mathbf{R})$ принадлежит классу $\tilde{C}^\gamma$, если ее преобразование Фурье $\hat{f}$ удовлетворяет неравенству

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)| (1 + |\omega|)^\gamma d\omega < \infty. \quad (7.3.23)$$

Далее мы сравним класс $\tilde{C}^\gamma$ с классом $\text{Lip}^m \alpha$, где $m = [\gamma]$ — наибольшее целое, не превосходящее γ и $\alpha = \gamma - m$ (см. определение 5.7). Для удобства мы положим

$$\text{Lip}^m 0 := C^m(\mathbf{R}). \quad (7.3.24)$$

Лемма 7.21. Для любого $\gamma > 0$

$$\tilde{C}^\gamma \subseteq \text{Lip}^m \alpha \quad (7.3.25)$$

с $m = [\gamma]$ и $\alpha = \gamma - m$.

Доказательство. (а) Предположим $\gamma = 1$. Тогда для каждого $h > 0$ мы имеем

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{2\pi h} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \{e^{i(x+h)\omega} - e^{ix\omega}\} d\omega. \quad (7.3.26)$$

Так как

$$\left| \frac{e^{i(x+h)\omega} - e^{ix\omega}}{h} \right| \leq |\omega|, \quad (7.3.27)$$

мы можем, применяя теорему сходимости Лебега, получить

$$f'(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (i\omega) \hat{f}(\omega) e^{ix\omega} d\omega, \quad f \in \tilde{C}.$$

Теперь, так как $\omega \hat{f}(\omega) \in L^1(\mathbf{R})$, мы имеем $f' \in C(\mathbf{R})$.

(б) Если γ — положительное целое число, то (7.3.25) может быть доказано по индукции.

(в) Пусть $\alpha = \gamma - [\gamma] > 0$. Тогда для $f \in \tilde{C}^\gamma$ из (б) следует, что $f \in C^m(\mathbf{R})$, где $m = [\gamma]$. Аналогично (7.3.26) и (7.3.27) мы имеем

$$\begin{aligned} |f^{(m)}(x+h) - f^{(m)}(x)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega|^m |\hat{f}(\omega)| \min(|h\omega|, 2) d\omega \\ &\leq \frac{|h|^\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega|^\gamma |\hat{f}(\omega)| d\omega. \end{aligned}$$

А это значит, что $f^{(m)} \in \text{Lip } \alpha$ или $f \in \text{Lip}^m \alpha$. $\square$

Теперь мы готовы доказать следующую теорему.

Теорема 7.22. *Существует некоторое положительное число λ такое, что $\phi_{m+1}^D, \psi_{m+1}^D \in \text{Lip}^{[\lambda m]} \alpha_m$, $\alpha_m := \lambda m - [\lambda m]$ для всех целых $m \geq 2$.*

Доказательство. Для $S = S_m$ обозначим величину в (7.3.11) через T_m . Тогда мы имеем при $y = \sin^2(\frac{\omega}{4})$

$$\begin{aligned} B_2 &:= \max_{\omega \in \mathbf{R}} |S_m(e^{-i\omega}) S_m(e^{-i\omega/2})| \\ &= \max_{\omega \in \mathbf{R}} \left| T_m \left(\sin^2 \frac{\omega}{2} \right) T_m \left(\sin^2 \frac{\omega}{4} \right) \right|^{1/2} \\ &= \max_{0 \leq y \leq 1} |T_m(4y(1-y)) T_m(y)|^{1/2}. \end{aligned}$$

Заметим сначала, что

$$\max_{0 \leq y \leq 1} T_m(y) < 2^{2(m-1)}$$

и что

$$T_m(y) \leq \sum_{k=0}^{m-1} 2^{m+k-1} y^k \leq 2^{m-1} m \max(1, (2y)^m).$$

Отсюда для $0 \leq y \leq \frac{1}{2}$ мы имеем

$$T_m(y) T_m(4y(1-y)) \leq m 2^{m-1} 2^{2(m-1)} = m 2^{3(m-1)}.$$

Также для $y \geq \frac{1}{4}(2 + \sqrt{2})$ или $4y(1 - y) \leq \frac{1}{2}$ мы имеем

$$T_m(y) T_m(4y(1 - y)) \leq 2^{2(m-1)} m 2^{m-1} = m 2^{3(m-1)}.$$

Окончательно для $\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{4}(2 + \sqrt{2})$ мы имеем

$$\begin{aligned} T_m(y) T_m(4y(1 - y)) &\leq m^2 2^{4m-2} \left(\max_{0 \leq y \leq 1} [4y^2(1 - y)]^m \right) \\ &= m^2 2^{4m-2} \left(\frac{16}{27} \right)^m. \end{aligned}$$

Эта оценка дает

$$B_2 \leq m 2^{2m-1} \left(\frac{16}{27} \right)^{m/2}.$$

Таким образом, из (5.1.20) в теореме 5.5 следует, что

$$|\hat{\phi}_{m+1}(\omega)| = \left| \prod_{j=1}^{\infty} P_n(e^{-i\omega/2^j}) \right| \leq C(1 + |\omega|)^{[\ln m - m \ln(\frac{3\sqrt{3}}{4})]/2 \ln 2}.$$

Может быть доказано, что показатель степени в этой формуле меньше, чем -1 при $m \geq 16$. Для $m < 16$ можно оценить

$$B_1 := \max_{\omega \in \mathbf{R}} |S_m(e^{i\omega})| = \left[\binom{2m-1}{m} \right]^{1/2},$$

что непосредственно дает

$$|\hat{\phi}_{m+1}(\omega)| \leq C(1 + |\omega|)^{-1-\eta m}$$

при некотором $\eta > 0$. Теперь обращение к лемме 7.21 завершает доказательство теоремы. $\square$

Замечание. Пусть α_m — «наибольшее» число, для которого $\phi_{m+1}^D \in \tilde{C}^{\alpha_m}$. Тогда мы имеем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\alpha_m}{m} = 1 - \frac{1}{2} \log_2 3 \doteq 0.2075. \quad (7.3.28)$$

Доказательство этого результата выходит за рамки этой книги.

7.4. Ортогональные вэйвлет-пакеты

В то время как двухмасштабная последовательность $\{p_k\}$ о.н. масштабирующей функции ϕ содержит всю информацию о ϕ , последовательность $\{q_k\}$, определенная формулой

$$q_k = (-1)^k \bar{p}_{-k+1},$$

полностью характеризует соответствующий о.н. вэйвлет ψ . В дальнейшем мы будем использовать обозначения:

$$\begin{cases} \mu_0(x) := \phi(x), \\ \mu_1(x) := \psi(x), \end{cases} \quad (7.4.1)$$

и

$$\begin{cases} P_0(z) := P(z) = \frac{1}{2} \sum_k p_k z^k, \\ P_1(z) := Q(z) = \frac{1}{2} \sum_k q_k z^k = \frac{1}{2} \sum_k (-1)^k \bar{p}_{-k+1} z^k. \end{cases} \quad (7.4.2)$$

Отсюда двухмасштабные соотношения для масштабирующей функции ϕ и соответствующего ей вэйвлета ψ даются формулами

$$\begin{cases} \mu_0(x) = \sum_k p_k \mu_0(2x - k), \\ \mu_1(x) = \sum_k q_k \mu_0(2x - k), \end{cases} \quad (7.4.3)$$

или, что эквивалентно,

$$\begin{cases} \hat{\mu}_0(\omega) = P_0(e^{-i\omega/2}) \hat{\mu}_0\left(\frac{\omega}{2}\right), \\ \hat{\mu}_1(\omega) = P_1(e^{-i\omega/2}) \hat{\mu}_0\left(\frac{\omega}{2}\right). \end{cases} \quad (7.4.4)$$

Это новое обозначение предназначено для облегчения введения следующего семейства функций, называемого *вэйвлет-пакетами*. Эти функции позволяют создать о.н. базисы, которые могут быть использованы для улучшения применения вэйвлетов при частотно-временной локализации.

Определение 7.23. Функции μ_n , $n = 2\ell$ или $2\ell + 1$, $\ell = 0, 1, \dots$, определенные формулами

$$\begin{cases} \mu_{2\ell}(x) = \sum_k p_k \mu_\ell(2x - k), \\ \mu_{2\ell+1}(x) = \sum_k q_k \mu_\ell(2x - k), \end{cases} \quad (7.4.5)$$

называются «вэйвлет-пакетами» относительно о.н. масштабирующей функции $\mu_0 = \phi$.

Таким образом, семейство $\{\mu_n\}$ есть обобщение о.н. вэйвлета $\mu_1 = \psi$. Для описания μ_n , $n \in \mathbf{Z}_+$ через их преобразования Фурье нам потребуются двоичные разложения $n \in \mathbf{Z}_+$, а именно:

$$n = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j 2^{j-1}, \quad \varepsilon_j \in \{0, 1\}. \quad (7.4.6)$$

Заметим, что (7.4.6) всегда представляет собой конечную сумму и что такое разложение единственно. Действительно, если $2^{s_0-1} \leq n < 2^{s_0}$, то мы имеем $n = 2^{s_0-1} + n_1$, где $2^{s_1-1} \leq n_1 < 2^{s_1}$ и $s_1 < s_0$; тогда, итерируя эту процедуру, мы получим $n = 2^{s_0-1} + 2^{s_1-1} + \dots + 2^{s_k-1}$, где $1 \leq s_k < \dots < s_0$. Таким образом, $\varepsilon_j = 1$ для $j = s_k, \dots, s_0$ и $\varepsilon_j = 0$ для других значений j .

Теорема 7.24. Пусть n — любое неотрицательное целое число, и пусть двоичное разложение n дается формулой (7.4.6). Тогда преобразование Фурье вэйвлет-пакета μ_n дается выражением

$$\hat{\mu}_n(\omega) = \prod_{k=1}^{\infty} P_{\varepsilon_k}(e^{-i\omega/2^k}), \quad \omega \in \mathbf{R}. \quad (7.4.7)$$

Доказательство. Выражения в форме преобразований Фурье, эквивалентные двухмасштабным соотношениям (7.4.5)

для вэйвлет-пакетов, даются формулами

$$\begin{cases} \widehat{\mu}_{2\ell}(\omega) = P_0(e^{-i\omega/2})\widehat{\mu}_{\ell}\left(\frac{\omega}{2}\right), \\ \widehat{\mu}_{2\ell+1}(\omega) = P_1(e^{-i\omega/2})\widehat{\mu}_{\ell}\left(\frac{\omega}{2}\right). \end{cases} \quad (7.4.8)$$

Ввиду (7.4.4) мы можем провести доказательство (7.4.7), применяя индукцию по $n = 2\ell$ или $n = 2\ell + 1$. Предположим, что (7.4.7) выполняется для всех n таких, что $0 \leq n < 2^{s_0}$, и рассмотрим $2^{s_0} \leq n < 2^{s_0+1}$. Из вышеприведенных рассуждений мы имеем

$$\varepsilon_j = \begin{cases} 1 & \text{для } j = s_0 + 1 \\ 0 & \text{для } j > s_0 + 1, \end{cases}$$

так что

$$n = \sum_{j=1}^{s_0+1} \varepsilon_j 2^{j-1}$$

и

$$\frac{n}{2} = \frac{\varepsilon_1}{2} + \sum_{j=1}^{s_0} \varepsilon_{j+1} 2^{j-1}.$$

Пусть, как обычно, $[x]$ обозначает наибольшее целое, не превосходящее x , и заметим что

$$n = 2 \left[\frac{n}{2} \right] + \varepsilon_1. \quad (7.4.9)$$

Поэтому из (7.4.8) мы имеем

$$\widehat{\mu}_n(\omega) = P_{\varepsilon_1}(e^{-i\omega/2})\widehat{\mu}_{[n/2]}\left(\frac{\omega}{2}\right). \quad (7.4.10)$$

С другой стороны, так как

$$\left[\frac{n}{2} \right] = \sum_{j=1}^{s_0} \varepsilon_{j+1} 2^{j-1} < 2^{s_0},$$

из индукционного предположения следует, что

$$\widehat{\mu}_{[n/2]}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} P_{\varepsilon_{j+1}}(e^{-i\omega/2^j}). \quad (7.4.11)$$

Поэтому, объединяя (7.4.10) и (7.4.11), мы получим (7.4.7). $\square$

Далее мы докажем, что вэйвлет-пакеты сохраняют свойство ортогональности о.н. масштабирующей функции $\mu_0 = \phi$.

Теорема 7.25. Пусть ϕ — любая о.н. масштабирующая функция и $\{\mu_n\}$ — семейство соответствующих ей вэйвлет-пакетов. Тогда для каждого $n \in \mathbf{Z}$

$$\langle \mu_n(\cdot - j), \mu_n(\cdot - k) \rangle = \delta_{j,k}, \quad j, k \in \mathbf{Z}. \quad (7.4.12)$$

Доказательство. Так как $\mu_0 = \phi$ удовлетворяет (7.4.12), то можно провести доказательство (7.4.12) по индукции. Предположим, что (7.4.12) выполняется для всех n , где $0 \leq n < 2^{s_0}$, и рассмотрим $2^{s_0} \leq n < 2^{s_0+1}$. Тогда, так же как при доказательстве теоремы 7.24, применяя (7.4.8) и (7.4.9), мы имеем

$$\begin{aligned} & \langle \mu_n(\cdot - j), \mu_n(\cdot - k) \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\mu}_n(\omega)|^2 e^{i(k-j)\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |P_{\varepsilon_1}(e^{-i\omega/2})|^2 \left| \widehat{\mu}_{[n/2]} \left(\frac{\omega}{2} \right) \right|^2 e^{i(k-j)\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \int_{4\pi\ell}^{4\pi(\ell+1)} |P_{\varepsilon_1}(e^{-i\omega/2})|^2 \left| \widehat{\mu}_{[n/2]} \left(\frac{\omega}{2} \right) \right|^2 e^{i(k-j)\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{4\pi} e^{i(k-j)\omega} |P_{\varepsilon_1}(e^{-i\omega/2})|^2 \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \left| \widehat{\mu}_{[n/2]} \left(\frac{\omega}{2} + 2\pi\ell \right) \right|^2 d\omega. \end{aligned}$$

Следовательно, из индукционного предположения и теоремы 3.23 мы имеем

$$\begin{aligned}
 & \langle \mu_n(\cdot - j), \mu_n(\cdot - k) \rangle \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{4\pi} e^{i(k-j)\omega} |P_{\varepsilon_1}(e^{-i\omega/2})|^2 d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(k-j)\omega} \left\{ |P_{\varepsilon_1}(e^{-i\omega/2})|^2 + |P_{\varepsilon_1}(-e^{-i\omega/2})|^2 \right\} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(k-j)\omega} d\omega = \delta_{j,k},
 \end{aligned}$$

где применено одно из следующих двух тождеств

$$\begin{cases} |P(z)|^2 + |P(-z)|^2 = 1, \\ |Q(z)|^2 + |Q(-z)|^2 = 1, \quad |z| = 1, \end{cases} \quad (7.4.13)$$

(см. (7.2.4) и (7.1.3)). □

Свойство ортогональности о.н. масштабирующей функции $\mu_0 = \phi$ к соответствующему ей вэйвлету $\mu_1 = \psi$ распространяется также на вэйвлет-пакеты, как это утверждается в следующей теореме.

Теорема 7.26. Пусть ϕ — любая о.н. масштабирующая функция и $\{\mu_n\}$ — соответствующие ей вэйвлет-пакеты. Тогда

$$\langle \mu_{2\ell}(\cdot - j), \mu_{2\ell+1}(\cdot - k) \rangle = 0, \quad j, k \in \mathbf{Z}, \quad \ell \in \mathbf{Z}_+. \quad (7.4.14)$$

Доказательство. Перед тем как продолжить, выпишем сначала тождество

$$P_0(z)\overline{P_1(z)} + P_0(-z)\overline{P_1(-z)} = P(z)\overline{Q(z)} + P(-z)\overline{Q(-z)} = 0, \quad |z| = 1, \quad (7.4.15)$$

которое эквивалентно тождеству (г) в лемме 7.9. Отсюда, применяя (7.4.8), (7.4.15) и теоремы 7.25 и 3.23, мы получаем для

всех $j, k \in \mathbf{Z}$ и $\ell \in \mathbf{Z}_+$

$$\begin{aligned}
& \langle \mu_{2\ell}(\cdot - j), \mu_{2\ell+1}(\cdot - k) \rangle \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\mu}_{2\ell}(\omega) \overline{\widehat{\mu}_{2\ell+1}(\omega)} e^{i(k-j)\omega} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \widehat{\mu}_{\ell} \left(\frac{\omega}{2} \right) \right|^2 P_0(z) \overline{P_1(z)} e^{i(k-j)\omega} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{4\pi} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left| \widehat{\mu}_{\ell} \left(\frac{\omega}{2} + 2\pi m \right) \right|^2 \right\} P_0(z) \overline{P_1(z)} e^{i(k-j)\omega} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{4\pi} P_0(z) \overline{P_1(z)} e^{i(k-j)\omega} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{ P_0(z) \overline{P_1(z)} + P_0(-z) \overline{P_1(-z)} \} e^{i(k-j)\omega} d\omega \\
&= 0,
\end{aligned}$$

где $z = e^{-i\omega/2}$.

□

7.5. Ортогональное разложение вэйвлет-рядов

Пусть $\{\mu_n\}$ — семейство вэйвлет-пакетов, соответствующих некоторой масштабирующей функции $\mu_0 = \phi$. Для каждого $n \in \mathbf{Z}_+$ рассмотрим семейство подпространств

$$U_j^n := \text{clos}_{L^2(\mathbf{R})} (2^{j/2} \mu_n(2^j \cdot - k) : k \in \mathbf{Z}), \quad j \in \mathbf{Z}, \quad n \in \mathbf{Z}_+, \quad (7.5.1)$$

порожденных $\{\mu_n\}$. Напомним, что

$$\begin{cases} U_j^0 = V_j, & j \in \mathbf{Z}, \\ U_j^1 = W_j, & j \in \mathbf{Z}, \end{cases} \quad (7.5.2)$$

где $\{V_j\}$ — это КМА пространства $L^2(\mathbf{R})$, порожденный $\mu_0 = \phi$ и $\{W_j\}$ — последовательность ортогональных дополняющих (вэйвлет-) подпространств, порожденных вэйвлетом

$\mu_1 = \psi$. Тогда ортогональное разложение

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \quad j \in \mathbf{Z}$$

может быть записано как

$$U_{j+1}^0 = U_j^0 \oplus U_j^1, \quad j \in \mathbf{Z}. \quad (7.5.3)$$

В следующей теореме мы увидим, что это ортогональное разложение может быть обобщенно с $n = 0$ на любое $n \in \mathbf{Z}_+$.

Теорема 7.27. Пусть n — любое неотрицательное целое число. Тогда

$$U_{j+1}^n = U_j^{2n} \oplus U_j^{2n+1}, \quad j \in \mathbf{Z}. \quad (7.5.4)$$

Доказательство. Из (7.4.5) в определении 7.23 ясно, что U_j^{2n} и U_j^{2n+1} — подпространства U_{j+1}^n . Кроме этого, по теореме 7.26 мы видим, что эти два подпространства ортогональны друг другу. Поэтому достаточно показать, что

$$\mu_n(2^{j+1}x - m) = \frac{1}{2} \sum_k \{ \bar{p}_{m-2k} \mu_{2n}(2^j x - k) + \bar{q}_{m-2k} \mu_{2n+1}(2^j x - k) \} \quad (7.5.5)$$

выполняется при всех $m \in \mathbf{Z}$.

Для этого мы применим (7.4.5) к правой части (7.5.5) и упростим выражение, используя тождество (д) в лемме 7.9:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_k \{ \bar{p}_{m-2k} \mu_{2n}(2^j x - k) + \bar{q}_{m-2k} \mu_{2n+1}(2^j x - k) \} \\ &= \frac{1}{2} \sum_k \sum_\ell \{ \bar{p}_{m-2k} p_\ell + \bar{q}_{m-2k} q_\ell \} \mu_n(2^{j+1}x - 2k - \ell) \\ &= \frac{1}{2} \sum_k \sum_t \{ \bar{p}_{m-2k} p_{t-2k} + \bar{q}_{m-2k} q_{t-2k} \} \mu_n(2^{j+1}x - t) \\ &= \sum_t \left\{ \frac{1}{2} \sum_k [p_{t-2k} \bar{p}_{m-2k} + q_{t-2k} \bar{q}_{m-2k}] \right\} \mu_n(2^{j+1}x - t) \\ &= \sum_t \delta_{t,m} \mu_n(2^{j+1}x - t) = \mu_n(2^{j+1}x - m). \end{aligned}$$

Это завершает доказательство теоремы. □

Конечно, о.н. базис в (7.5.8) пространства $U_{j-k}^{2^k+m}$ обеспечивает временную локализацию внутри поддиапазона $H_j^{k,m}$, и объединение семейства

$$\{H_j^{k,m} : m = 0, \dots, 2^k - 1\}$$

представляет весь диапазон частот H_j .

Доказательство. Доказательство (7.5.7) — это простое повторение применения (7.5.4) в теореме 7.27, положив $n = 1$ и учитывая что $U_j^1 = W_j$. То, что семейство в (7.5.8) — о.н. базис $U_{j-k}^{2^k+m}$, — это следствие (7.5.1) и (7.4.12) в теореме 7.25. $\square$

Замечание. Ввиду формулы разложения (7.5.5) разложение любого вэйвлет-ряда

$$g_j(x) = \sum_n d_n^j \psi(2^j x - n) = \sum_n d_n^j \mu_1(2^j x - n) \quad (7.5.10)$$

в ортогональную сумму с членами из вэйвлет-пакетов

$$g_{j;k,m}(x) := \sum_n d_n^{j;k,m} \mu_{2^k+m}(2^{j-k}x - n), \quad m = 0, \dots, 2^k - 1 \quad (7.5.11)$$

(для любого фиксированного значения k , $1 \leq k \leq j$) может быть определено как *дерево*, где каждая ветвь дерева имеет два ответвления. Тот же алгоритм разложения, что дается формулой (5.4.48) с

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{2} \bar{p}_n, \\ b_n = \frac{1}{2} \bar{q}_n = \frac{1}{2} (-1)^n p_{-n+1}, \end{cases} \quad (7.5.12)$$

может быть использован для разложения каждой ветви. Конечно, этот дерево-алгоритм разложения должен быть задуман как адаптивный; в частности, если некоторые вэйвлет-компоненты не так существенны как другие, то они должны быть реализованы с меньшим количеством ветвей путем

выбора меньших значений k . Для восстановления дерево-алгоритм должен быть обратим путем применения алгоритма восстановления (5.4.49) с весовыми последовательностями p_n и $q_n = (-1)^n \bar{p}_{-n+1}$.

Для «наилучшего» ортогонального разложения каждое k выбирается по возможности наибольшим; таким образом, используется последняя формула в (7.5.7).

Следствие 7.29. Для каждого $j = 0, 1, 2, \dots$

$$L^2(\mathbf{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbf{Z}} W_j = \dots \oplus W_{-1} \oplus W_0 \oplus U_0^2 \oplus U_0^3 \oplus \dots. \quad (7.5.13)$$

Конечно, семейство

$$\{\psi_{j,k}, \mu_n(\cdot - k) : j = \dots, -1, 0; \quad n = 2, 3, \dots \text{ и } k \in \mathbf{Z}\} \quad (7.5.14)$$

является о.н. базисом пространства $L^2(\mathbf{R})$.

Приложение

Чтобы иметь возможность применить алгоритмы вэйвлет-разложения и вэйвлет-восстановления, как это описано в (5.4.48) и (5.4.49), нам необходимы последовательности весов $\{a_k\}$, $\{b_k\}$, $\{p_k\}$ и $\{q_k\}$. Кроме того, последовательности восстановления (или двухмасштабные последовательности) $\{p_k\}$ и $\{q_k\}$ могут быть использованы для изображения масштабирующей функции ϕ и вэйвлета ψ (см. (5.2.11), (5.2.14)–(5.2.17) и (5.3.4)). Ниже мы рассматриваем B -сплайны $\phi = N_m$ и B -вэйвлеты $\psi = \psi_m$ порядка m . Напомним, что их двухмасштабные последовательности

$$\begin{cases} p_k = p_{m,k}, \\ q_k = q_{m,k}, \end{cases}$$

приведенные в (6.3.3)–(6.3.4), особенно просты и их последовательности разложения

$$\begin{cases} a_k = a_{m,k}, \\ b_k = b_{m,k} \end{cases}$$

могут быть вычислены с использованием (6.5.1)–(6.5.2). Так как эти последовательности симметричны, достаточно вычислить половину значений. Более точно мы имеем

$$\begin{cases} a_{m,k} = a_{m,m-k}, \\ b_{m,k} = b_{m,3m-2-k} \end{cases} \quad (\text{П.1})$$

Таблица П.1. Последовательности сплайн-вэйвлет-разложения.

k	$m = 2$		$m = 4$	
	a_k	b_{k+1}	a_{k+1}	b_{k+4}
1	0.683012701892	0.866025403784	0.893162856314	-1.475394519892
2	0.316987298108	-0.316987298108	0.400680825467	0.468422596633
3	-0.116025403784	-0.232050807569	-0.282211870811	0.742097698477
4	-0.084936490539	0.084936490539	-0.232924626134	-0.345770890775
5	0.031088913246	0.062177826491	0.129083571218	-0.389745580800
6	0.022758664048	-0.022758664047	0.126457446356	0.196794277304
7	-0.008330249198	-0.016660498395	-0.066420837387	0.207690838380
8	-0.006098165652	0.006098165652	-0.067903608499	-0.106775803373
9	0.002232083545	0.004464167091	0.035226101674	-0.111058440711
10	0.001633998562	-0.001633998561	0.036373586989	0.057330952254
11	-0.000598084983	-0.001196169967	-0.018815686621	0.059433388390
12	-0.000437828595	0.000437828595	-0.019473269356	-0.030709700871
13	0.000160256388	0.000320512777	0.010066747520	-0.031811811318
14	0.000117315818	-0.000117315818	0.010424052187	0.016440944687
15	-0.000042940569	-0.000085881139	-0.005387929819	0.017028029466
16	-0.000031434679	0.000031434678	-0.005579839208	-0.008800839839
17	0.000011505891	0.000023011782	0.002883979478	-0.009114745138
18	0.000008422897	-0.000008422897	0.002986784625	0.004710957034
19	-0.000003082990	-0.000006165980	-0.001543728719	0.004878941541
20	-0.000002256905	0.0000022569054	-0.001598768083	-0.002521687975
21	0.000000826079	0.0000016521587	0.000826326663	-0.002611601542

Таблица П.2. Последовательности восстановления (двухмасштабные последовательности).

k	$m = 2$		$m = 4$	
	p_k	q_{k+1}	p_{k+1}	q_{k+4}
1	$\frac{2}{2}$	$\frac{20}{4!}$	$\frac{6}{8}$	$-\frac{24264}{8!}$
2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{12}{4!}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{18482}{8!}$
3		$\frac{2}{4!}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{7904}{8!}$
4				$\frac{1677}{8!}$
5				$-\frac{124}{8!}$
6				$\frac{1}{8!}$

и

$$\begin{cases} p_{m,k} = p_{m,m-k}, \\ q_{m,k} = q_{m,3m-2-k} \end{cases} \quad (\text{П.2})$$

для всех $k \in \mathbb{Z}$. На практике, особенно при сплайн-интерполяции, наиболее часто используются линейные и кубические сплайны. Поэтому в таблицах П.1 и П.2 мы даем значения $a_k = a_{m,k}$, $b_k = b_{m,k}$ и $p_k = p_{m,k}$, $q_k = q_{m,k}$ для $m = 2$ и 4 . Напомним, что для получения второй «половины» последовательностей следует обратиться к формулам (П.1) и (П.2).

Замечания

Глава 1.

Стандартная ссылка на тригонометрические ряды — это Зигмунд [9]. Другие книги по рядам Фурье, которые были нам полезны при подготовке глав 1 и 2, — это Бари [1], Хельсон [5], Катцнельсон [6], Штейн и Вайс [7].

Простейший ортогональный вэйвлет — это функция Хаара, изученная А.Хааром в [55]. Понятие интегрального вэйвлет-преобразования (ИВП), $(W_\psi f)(b, a)$ впервые было введено Гроссманом и Морлэ [54], хотя техника, которая основана на использовании сдвигов и растяжений, восходит к Кальдерону [30] при его изучении сингулярных интегральных операторов. Базисный вэйвлет, используемый для определения ИВП, в литературе о вэйвлетах называется также “материнским вэйвлетом”. Формула для восстановления любой $f \in L^2(\mathbf{R})$ по ее ИВП $(W_\psi f)(b, a)$, $a, b \in \mathbf{R}$ может быть найдена в [54].

На важность полудискретного ИВП $(W_\psi f)(b, a)$, где $b \in \mathbf{R}$ и $a = 2^{-j}$, $j \in \mathbf{Z}$ при сжатии изображения впервые было обращено внимание С.Малла́, и понятие двухпараметрического вэйвлета было также введено Малла в его совместной работе с В.Л.Хвонгом [60] и с С.Зонгом [61, 62]. Условие устойчивости для двухпараметрических вэйвлетов, изученное Малла и Хвонгом [60], может рассматриваться как обобщение тождества Литтлвуда—Пэли. Неравенства такого типа для карка-

сов и вэйвлетов были изучены Добеши [50], Чуи и Ши [37], и, в частности, такое тождество было использовано Чуи и Ши [38] для характеристики вэйвлетов.

Основная ссылка по обработке сигналов — это Оппенгейм и Шэйфер [25], математический анализ этого предмета дан Чуи и Ченом [24]. Другие ссылки на некоторые специальные, но близкие темы по обработке сигналов и изображений, — это Ауслендер, Кайлат и Миттер [22] и Розенфельд [26].

То что $\mathcal{R}$ -функция не всегда $\mathcal{R}$ -вэйвлет (или вэйвлет), было уже замечено И.Мейёром в первом томе [21] и с некоторыми подробностями обсуждено Добеши в [50], где были использованы результаты Чамичьяна [68, 69]. Доказательство в этой главе было дано Чуи и Ши в [37], следуя идеям Добеши и Мейера.

Понятие кратномасштабного анализа (КМА) было впервые введено Мейером [63] и Малла [58] и в дальнейшем развито Малла в [57, 59]. Также Малла [57–59] были построены алгоритмы вэйвлет-разложения и вэйвлет-восстановления, использующие пространства КМА. Представление этих алгоритмов в этой главе следует [40, 43] таким образом, что константа нормировки $\sqrt{2}$ включена в базисные функции для облегчения их выполнения. Заметим некоторое сходство КМА и алгоритма пирамиды Лапласа, принадлежащего Барту и Адельсону [29].

Наиболее обстоятельная работа по сплайнам принадлежит Шёнбегру [14], который и развил эту тему. Мейер [63] и Лемарье [56] заметили, что пространства сплайнов приводят к КМА, хотя специалисты в теории приближений также рассматривали схемы подразбиения пространств. (См. Чуи [11] и ссылки в этой работе.) Соответствующий B -сплайну m -го порядка N_m B -вэйвлет m -го порядка ψ_m был введен Чуи и Вонгом [43]. Двойственное $\tilde{\psi}_m$ вэйвлета ψ_m было также построено в [43] с точки зрения m -й производной сдвинутого и масштабированного фундаментального сплайна порядка $2m$, введенного Чуи и Вонгом в [40].

Алгоритм предиктор-корректор может быть использован для реализации БИО-фильтра и АРСС-фильтра с полюсами, лежащими оба внутри или вне единичной окружности. Такие алгоритмы могут быть оптимизированы путем их объединения с шумовыми процессами (см. Чуи и Чен [23]). Эта процедура может быть применена к разложениям по сплайн-вэйвлетам без усечения.

Глава 2.

Имеется обширная и хорошая литература о преобразовании Фурье. Наиболее полезными для нас при подготовке главы 2 были книги Гольдберг [4] и Титчмарш [8].

Так как функции из $L^p(\mathbf{R})$ или $L^p(0, 2\pi)$ рассматриваются как “эквивалентные классы” функций, то мы допускаем изменение функций на множестве меры нуль. В частности, в утверждениях о поточечной сходимости мы всегда имеем в виду сходимость к некоторому представителю рассматриваемого класса эквивалентных функций.

К тому же книги [1, 5, 6, 7, 9] по гармоническому анализу представляют собой хороший источник для дополнительного чтения. Этот предмет имеет очень богатую историю. Мы даем здесь только очень краткое обсуждение вопроса о поточечной сходимости. Еще в 1876 году Дю-Буа-Реймон показал существование 2π -периодической непрерывной функции, ряд Фурье которой расходится в некоторой точке. Из этого результата нетрудно доказать существование 2π -периодической непрерывной функции, ряд Фурье которой расходится на плотном подмножестве вещественной оси $\mathbf{R}$. В 1923 году Колмогоров доказал, что ряд Фурье некоторой функции $f \in L^1(0, 2\pi)$ может расходиться почти всюду. Через три года он (совместно с Зигмундом) развил этот результат и доказал существование $f \in L^1(0, 2\pi)$ с расходящимся всюду рядом Фурье. С другой стороны, Карлесон в 1966 году доказал, что если $f \in L^2(0, 2\pi)$, то ее ряд Фурье сходится почти всюду. Этот глубокий ре-

зультат был распространен Хантом в 1967 году на любую $f \in L^p(0, 2\pi)$, $p > 1$.

Довольно широкое обсуждение формулы суммирования Пуассона дается в этой главе по той причине, что несколько вариантов этой формулы используются на протяжении всей книги.

Глава 3.

Преобразование Фурье с помощью окон впервые было введено Габором [53], использующим функцию Гаусса в качестве функции-окна. Вот почему это также называется преобразованием Габора. В инженерной литературе такое применение окон, которое не ограничивается использованием функции Гаусса, называется также кратковременным преобразованием Фурье (КВПФ). Мы отсылаем читателей к работам Добеши [20, 50], Малла [57], отдельным главам в книгах [16, 17, 18, 19] и к перечню ссылок в них. Читатель отсылается также к тем же источникам за материалом, содержащим использование среднего квадратичного отклонения для определения радиуса и, отсюда, ширины функции-окна, а также для обсуждения принципа неопределенности. Как было отмечено ранее, когда мы имеем дело с функцией из $L^p(\mathbf{R})$, мы, по сути дела, имеем в виду представителя класса эквивалентных функций, который совпадает с этой функцией всюду, кроме множества меры нуль. В частности, мы всегда используем непрерывные функции-окна всякий раз, когда это возможно. Читатель также отсылается к работе Шампеньи [2] для дальнейших обсуждений и ссылок на литературу из области гармонического анализа.

Как упоминалось в замечаниях для главы 1, ИВП было введено Гроссманом и Морле [54], где было определено условие допустимости (3.3.1) на базисные вэйвлеты (называемые также материнскими вэйвлетами). Большая полезность полудискретных ИВП была доказана в работе Малла

по сжатию изображения сначала с использованием пересечения нулей, а затем используя максимум вэйвлета (или локальный экстремум) для ИВП на двухпараметрических масштабных уровнях. Это можно найти также в работах Малла и Зонга [61, 62] и Малла и Хвонга [60]. В этом направлении условие устойчивости (3.4.6) играет решающую роль в формуле обращения (3.4.14), введенной Малла и Хвонгом [60]. Характеристика двухпараметрических двойственных, использующая тождество Литтлвуда—Пэли, дана в работе Чуи и Ши [38].

Понятие каркасов было введено Даффином и Шэйфером [51] и с некоторыми подробностями изучено Добеши [20, 50]. Пример 3.18 также принадлежит Добеши. Принцип внутреннего отображения, использованный в наших рассуждениях об ограниченности обратного отображения, порожденного каркасом, является стандартным в теории операторов (см. т. 1, стр. 57, Данфорд и Шварц [3]). Свойство устойчивости (3.5.18) каркаса было выведено Чуи и Ши [37]. Заметим также, что Фрэйзер и Яверт [52] использовали растяжение и сдвиги в их работе по φ -преобразованиям.

Полуортогональные вэйвлеты были введены независимо Ошером [27] и Чуи и Вонгом [40, 41, 43], хотя полуортогональные базисные сплайн-вэйлеты были впервые построены Чуи и Вонгом в работах [40, 43]. Процедура ортонормализации (3.6.18) принадлежит Швейнлеру и Вигнеру [66] и поэтому называется о.н. процедурой Швейнлера—Вигнера.

Глава 4.

Сплайн-анализ — установившийся предмет. В случае одномерной теории читатель отсылается к де Бору [10], Нюрнбергеру [13], Шёнбергу [14], Шумакеру [15] и к Чуи [11] — для многомерного исследования. Сплайн-функция с эквидистантными (простыми) узлами называется просто сплайном, и для дальнейшего изучения читатель отсылает

ся к Шёнбергу [14, 65]. В частности, структура многочленов Эйлера—Фробениуса оформлена в [14, 65].

Графически изобразительный алгоритм (алгоритм 4.7), введенный в § 4.3, представляет собой итерацию стандартной схемы подразбиения. Он представлен здесь для того, чтобы побудить нас к введению алгоритма (вэйвлет-) восстановления в главе 5. *B*-сплайн — *B*-сетевой алгоритм (алгоритм 4.10) есть одномерная версия бокс-сплайн графически изобразительного алгоритма, развитого в работе Чуи и Лая [36].

Понятие квазиинтерполяции принадлежит де Бору и Фиксу (см. де Бор [10] и Шумакер [15]). Подход, связанный с рядами Неймана, был впервые предложен Чуи и Даймондом в работе [35], где была доказана теорема 4.13. Представленная в этой книге характеристика квазиинтерполянтов (см. (4.5.35)–(4.5.36)) была дана Чуи и Даймондом [33]. Теория интерполяции базисными сплайнами была развита Шёнбергом (см. Шёнберг [14, 65]). Построение локальной интерполяционной формулы, представленное в § 4.6 с помощью “булевских сумм” для полностью локального и квазиинтерполяционного операторов, было введено Чуи и Даймондом в работе [34]. Подробное изучение этой темы дано у Чуи [32] и в более общем виде в работе Чуи [31].

Глава 5.

Понятие кратномасштабного анализа было впервые введено Мейером [63] и Малла [58], а затем развито Малла в [57, 59]. теоремы 5.5 и 5.6 принадлежат Коэну [44]. Результат о величине носителя масштабирующей функции, выраженной через длину ее двухмасштабной последовательности, принадлежит Добеши [49], и масштабирующая функция в (5.2.6) была также дана в [49]. Характеристика масштабирующих функций с наименьшим носителем, использующая отсутствие симметричных нулей, была дана Чуи и Вонгом [41], где было введено понятие обобщенных многочленов Эйлера—Фробениуса

(Лорана) и были изучены их свойства такие же, как в теореме 5.10. Тот факт, что B -сплайн m -го порядка — единственная функция, которая порождает КМА $\{V_j^m\}$ и имеет конечную двухмасштабную последовательность, был также доказан в [41]. Представление разложения в прямую сумму в § 5.3 представляется новым, а подход в § 5.4 есть обобщение работы Коэна, Добеши и Фово [46]. В частности, является новым критерий (5.4.11) в теореме 5.19. Принцип двойственности для сплайн-вэйвлетов, и в более общем случае для полуортогональных вэйвлетов, был введен Чуи и Вонгом, соответственно, в работах [43] и [41]; неортогональный (биортогональный) вариант также может быть найден у Коэна, Добеши и Фово [46].

Как упоминалось ранее, алгоритмы вэйвлет-разложения и вэйвлет-восстановления были построены Малла в [58]. Формулировки в этой книге следуют работам [40, 43]. Важность линейной фазы при фильтрации и связь между линейной фазой и симметрией хорошо известны в инженерной литературе (см. Оппенгейм и Шэйфер [25]). Наше обсуждение в § 5.5 и § 5.6 является расширением результатов Чуи и Вонга [41].

Общее решение (5.6.39) для соотношения двойственности (5.6.17) было дано Добеши [49] в случае ортонормированного множества и в работе Коэна, Добеши и Фово [46] в общем случае. Вэйвлеты с компактными носителями, двойственные которых также имеют компактные носители и линейную фазу, были также построены Коэном, Добеши и Фово в [46]. Подход с точки зрения набора фильтров был рассмотрен Веттерли и Херли [70].

Глава 6.

Интерполяционные сплайн-вэйвлеты, данные в теореме 6.1, принадлежат Чуи и Вонгу [40], и сопоставление подпространств КМА $V_1^{2m,0}$ из V_1^{2m} с вэйвлет-пространствами W_0^m было проведено в работе Чуи и Вонга [39]. Базисные

сплайн-вэйвлеты (или B -вэйвлеты), данные в (6.2.5), вместе с их двойственными (6.2.10) были введены Чуи и Вонгом в [43]. Однако представление в § 6.2 совсем другое, так как оно использует более общий результат, теорему 5.19 из главы 5. Треугольный алгоритм Паскаля (ТАП) для вычисления B -вэйвлетов и их производных был введен в работе Чуи и Вонга [42].

Представление свойств многочленов Эйлера—Фробениуса соответствует работе Шёнберга [65], в то время как материалы по анализу погрешности сплайн-вэйвлет-разложения взяты из работы Чуи и Вонга [42]. Наиболее исчерпывающая ссылка на вполне положительность — это Карлин [12], и дополнительные сведения о Пойа-частотных (ПЧ) последовательностях могут быть найдены у Шёнберга [14]. Теорема 6.21 о некоторых линейных ТАП, приводящих к ПЧ-последовательностям, была доказана Чуи и Вонгом [39], где впервые было введено понятие полной осцилляции и исследована ее связь с пересечением нулей.

Глава 7.

Первый нетривиальный вэйвлет был построен Стрёмбергом [67] с использованием сплайн-функций. Вэйвлеты Мейера [64], как это показано в примере 7.3, — это о.н. вэйвлеты с преобразованием Фурье, имеющим компактный носитель. Ортонормированные (о.н.) сплайн-вэйвлеты, данные в примере 7.1, часто называют вэйвлетами Баттла—Лемарье, так как они были построены независимо Баттлом [28] и Лемарье [56] с использованием различных методов. Однако ни один из этих вэйвлетов не имеет компактного носителя. Основываясь на структуре КМА, Добеши [49] была первой, кто построил о.н. вэйвлеты с компактными носителями. Ее построение было основано на идентификации о.н. масштабирующих функций, как это обсуждалось в § 7.2, хотя представление здесь несколько отличается от работы [49]. Построение вэйвлетов Добеши зависит так-

же от леммы Рисса, как установлено в теореме 7.17. Теорема 7.22 была также доказана Добеши [49], в то время как результат в (7.3.28) был установлен Коэнном и Добеши в [45].

Вэйвлет-пакеты, называемые также Куафманом и Мейером “волновыми пакетами”, были введены Куафманом, Мейером, Куэйком и Викерхаузером в [47]. Для дальнейшей информации мы отсылаем читателя к работе Куафмана, Мейера и Викерхаузера [48].

Список литературы

Книги

Анализ Фурье и теория операторов

1. Bari N. K. *A Treatise on Trigonometric Series*, Macmillan, 1964. [Впервые опубликована на русском языке: Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.]
2. Champeney D. C. *A Handbook of Fourier Theorems*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
3. Dunford N. and Schwartz J. *Linear Operators*, Interscience, New York, 1958. [Имеется перевод: Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы, в двух томах. М.: ИЛ, 1962.]
4. Goldberg R. R. *Fourier Transforms*, Cambridge University Press, 1965.
5. Helson H. *Harmonic Analysis*, The Wadsworth & Brooks/
Cole Mathematics Series, Addison-Wesley, 1983, reprinted by Wadsworth, 1991.
6. Katznelson Y. *An Introduction to Harmonic Analysis*, John Wiley and Sons, 1968, reprinted by Dover, New York, 1976.
7. Stein E. M. and Weiss G. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton University Press, 1971. [Имеется перевод: Стейн И., Вейс Г. Вве-

дение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.]

8. Titchmarsh E. C. *Introduction to the Theory of Fourier Integrals* (Second Edition), Oxford University Press, 1948. [Имеется перевод с 1-го издания: Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. М.: ГИТТЛ, 1948.]
9. Zygmund A., *Trigonometric Series* (Second Edition), in two volumes, Cambridge University Press, 1959. [Имеется перевод: Зигмунд А. Тригонометрические ряды, в двух томах. М.: Мир, 1965.]

Сплайн-анализ

10. de Boor C., *A Practical Guide to Splines*, Applied Mathematical Sciences, Vol. 27, Springer-Verlag, 1978. [Имеется перевод: де Бор К. Практическое руководство по сплайнам. М.: Радио и связь, 1985.]
11. Chui C. K. *Multivariate Splines*, CBMS-NSF Series in Applied Math. #54, SIAM Publ., Philadelphia, 1988.
12. Karlin S. *Total Positivity*, Stanford University Press, Stanford, CA, 1968.
13. Nürnberger G. *Approximation by Spline Functions*, Springer-Verlag, New York, 1989.
14. Schoenberg I. J. *Cardinal Spline Interpolation*, CBMS-NSF Series in Applied Math. #12, SIAM Publ., Philadelphia, 1973.
15. Schumaker L. L. *Spline Functions: Basic Theory*, Wiley-Interscience, New York, 1981.

Вэйвлет-теория и применения

16. Beylkin G., Coifman R., Daubechies I., Mallat S., Meyer Y., Raphael L., and Ruskai B. (eds.), *Wavelets and Their Applications*, Jones and Bartlett, Cambridge, MA, 1992.

17. Chui C. K. (ed.), *Approximation Theory and Functional Analysis*, Academic Press, Boston, 1991.
18. Chui C. K., (ed.), *Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications*, Academic Press, Boston, 1992.
19. Combes J. M., Grossmann A., and Tchamitchian P. (eds.), *Wavelets: Time-Frequency Methods and Phase Space*, Springer-Verlag, New York, 1989; Second Edition, 1991.
20. Daubechies I. *Wavelets*, CBMS-NSF Series in Appl. Math., SIAM Publ., Philadelphia, 1992.
21. Meyer Y. *Ondelettes et Opérateurs*, in two volumes, Hermann, Paris, 1990.

Обработка сигналов и изображений

22. Auslander L., Kailath T., and Mitter S. (eds.), *Signal Processing I: Signal Processing Theory*, The IMA Volumes in Mathematics and Its Applications #22, Springer-Verlag, New York, 1990.
23. Chui C. K. and Chen G. *Kalman Filtering with Real-Time Applications*, Springer Series in Information Sciences #17, Springer-Verlag, New York, 1987; Second Edition 1991.
24. Chui C. K. and Chen G. *Signal Processing and Systems Theory — Selected Topics*, Springer Series in Information Sciences #26, Springer-Verlag, New York, 1991.
25. Oppenheim A. V. and Schafer R. W. *Discrete-Time Signal Processing*, Prentice Hall Signal Proc. Series, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1989.
26. Rosenfeld A. (ed.), *Multiresolution Image Processing and Analysis*, Springer Series in Information Sciences #12, Springer-Verlag, New York, 1984.

Статьи

27. Auscher P. Ondettes fractales et applications, Thèse de Doctorat, University Paris-Dauphine, 1989.
28. Battle G. A block spin construction of ondelettes, Part. I: Lemarié functions, *Comm. Math. Phys.* **110** (1987), 601–615.
29. Burt P. J. and Adelson E. H. The Laplacian pyramid as a compact image code, *IEEE Trans. Comm.* **31** (1983), 482–540.
30. Calderón A. P. Intermediate spaces and interpolation, the complex method, *Studia Math.* **24** (1964), 113–190.
31. Chui C. K. Construction and applications of interpolation formulas, in *Multivariate Approximation and Interpolation*, Haussmann W. and Jetter K. (eds.), ISNM Series Math., Birkhäuser Verlag, Basel, 1990, 11–23.
32. Chui C. K. Vertex splines and their applications to interpolation of discrete data, in *Computation of Curves and Surfaces*, Dahmen W., Gasca M., and Micchelli C. A. (eds.), Kluwer Academic Publishers, 1990, 137–181.
33. Chui C. K. and Diamond H. A characterization of multivariate quasiinterpolation formulas and applications, *Numer. Math.* **57** (1990), 105–121.
34. Chui C. K. and Diamond H. A general framework for local interpolation, *Numer. Math.* **58** (1991), 569–581.
35. Chui C. K. and Diamond H., A natural formulation of quasi-interpolation by multivariate splines, *Proc. Amer. Math. Soc.* **99** (1987), 643–646.
36. Chui C. K. and Lai M. J. Computation of box splines and B-splines on triangulations of nonuniform rectangular partitions, *Approx. Th. and Its Appl.* **3** (1987), 37–62.

37. Chui C. K. and Shi X. L. Inequalities of Littlewood-Paley type for frames and wavelets, CAT Report #249, Texas A&M University, 1991.
38. Chui C. K. and Shi X. L. On a Littlewood-Paley identity and characterization of wavelets, CAT Report #250, Texas A&M University, 1991.
39. Chui C. K. and Wang J. Z. An analysis of cardinal spline-wavelets, CAT Report #231, Texas A&M University, 1990.
40. Chui C. K. and Wang J. Z. A cardinal spline approach to wavelets, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1991, to appear.
41. Chui C. K. and Wang J. Z. A general framework of compactly supported splines and wavelets, CAT Report #219, Texas A&M University, 1990.
42. Chui C. K. and Wang J. Z. Computational and algorithmic aspects of cardinal spline-wavelets, CAT Report #235, Texas A&M University, 1990.
43. Chui C. K. and Wang J. Z. On compactly supported spline wavelets and a duality principle, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1991, to appear.
44. Cohen A., Ondelettes. Analyses multirésolutions et traitement numérique du signal, Doctoral Thesis, Univ. Paris-Dauphine, 1990.
45. Cohen A. and Daubechies I. Nonseparable bidimensional wavelet bases, AT&T Bell Laboratories, 1991, preprint.
46. Cohen A., Daubechies I., and Feauveau J. C. Bi-orthogonal bases of compactly supported wavelets, *Comm. Pure and Appl. Math.*, 1991, to appear.
47. Coifman R., Meyer Y., Quake S., and Wickerhauser M. V., Signal processing and compression with wave packets, in

- Proceedings of the Conference on Wavelets*, Marseilles, Spring 1989.
48. Coifman R., Meyer Y., and Wickerhauser M. V. Wavelet analysis and signal processing, 1991, preprint.
 49. Daubechies I. Orthonormal bases of compactly supported wavelets, *Comm. Pure and Appl. Math.* **41** (1988), 909–996.
 50. Daubechies I. The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis, *IEEE Trans. Inform. Theory* **36** (1990), 961–1005.
 51. Duffin R. J. and Schaeffer A. C. A class of nonharmonic Fourier series, *Trans. Amer. Math. Soc.* **72** (1952), 341–366.
 52. Frazier M. and Jawerth B. Decomposition of Besov spaces, *Indiana University Math. J.* **34** (1985), 777–799.
 53. Gabor D. Theory of communication, *J. IEE (London)* **93** (1946), 429–457.
 54. Grossmann A. and Morlet J. Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape, *SIAM J. Math. Anal.* **15** (1984), 723–736.
 55. Haar A. Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme, *Math. Ann.* **69** (1910), 331–371.
 56. Lemarié P. G. Ondelettes à localisation exponentielles, *J. Math. Pure et Appl.* **67** (1988), 227–236.
 57. Mallat S. A theory of multiresolution signal decomposition: the wavelet representation, *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.* **11** (1989), 674–693.
 58. Mallat S. Multiresolution representation and wavelets, Ph. D. Thesis, University of Pennsylvania, Philadelphia, PA, 1988.

59. Mallat S. Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbf{R})$, *Trans. Amer. Math. Soc.* **315** (1989), 69–87.
60. Mallat S. and Hwang W. L. Singularity detection and processing with wavelets, 1991, preprint.
61. Mallat S. and Zhong S. Reconstruction of functions from the wavelet transform local maxima, 1990, preprint.
62. Mallat S. and Zhong S. Wavelet transform maxima and multiscale edges, in *Wavelets and Their Applications*, Beylkin G., Coifman R., Daubechies I., Mallat S., Meyer Y., Raphael L., and Ruskai B. (eds.), Jones and Bartlett, Cambridge, MA, 1991.
63. Meyer Y. Ondelettes et fonctions splines, *Séminaire EDP*, École Polytechnique, Paris, December 1986.
64. Meyer Y. Principe d'incertitude, bases Hilbertiennes et algèbres d'opérateurs, *Séminaire Bourbaki* **662** (1985–1986).
65. Schoenberg I. J. Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions, *Quart. Appl. Math.* **4** (1946), 45–99, 112–141.
66. Schweinler H. C. and Wigner E. P. Orthogonalization methods, *J. Math. Phys.* **11** (1970), 1693–1694.
67. Strömberg J. O. A modified Franklin system and higher order spline systems on $\mathbf{R}^n$ as unconditional bases for Hardy spaces, in *Proc. Conf. in Honor of Antoni Zygmund*, Vol. II, Beckner W., Calderón A. P., Fefferman R., and Jones P. W. (eds.), Wadsworth, NY, 1981, 475–493.
68. Tchamitchian Ph. Biorthogonalité et théorie des opérateurs, *Rev. Math. Iberoamericana*, to appear.

69. Tchamitchian Ph. Calcul symbolique sur les opérateurs de Caldéron- Zygmund et bases inconditionnelles de $L^2(\mathbf{R}^n)$, *C. R. Acad. Sc. Paris* **303** (1986), 215–218.
70. Vetterli M. and Herley C. Wavelets and filter banks: theory and design, *IEEE ASSP*, 1992, to appear.

Хотя вэйвлет-анализ — относительно новый предмет, уже существует обширная литература, посвященная его теории и применениям, а также некоторым связанным с ним областям. Приведенный список литературы отражает только те области, которые затронуты в этой книге и обсуждаются в Замечаниях. Гораздо более обширная библиография включена во второй том книг этой серии «Вэйвлеты — руководство по теории и применениям».

Список дополнительной литературы по вэйвлетам

1. Астафьева Н. М. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения. Успехи физических наук. 1998. Т. 166. N. 11. с. 1145–1170.
2. Астафьева Н. М. Вейвлет-преобразования. Основные свойства и примеры применения. М.: ИКИ РАН, 1994. N. 1891. 56 с.
3. Бердышев В. И., Петрак Л. В. Аппроксимация функций. Сжатие численной информации. Приложения. Екатеринбург, 1999, с. 127–150.
4. Берколайко М. З., Новиков И. Я. Базисы всплесков в пространствах дифференцируемых функций анизотропной гладкости. Докл. РАН, 1992, Т. 323, N 4, с. 615–618.
5. Берколайко М. З., Новиков И. Я. Базисы всплесков и линейные операторы в анизотропных пространствах Лизоркина—Трибеля. Докл. РАН, 1995, т. 340, N 5, с. 583–586.
6. Берколайко М. З., Новиков И. Я. О бесконечно гладких почти-всплесках с компактным носителем. Матем. заметки, 1994, Т. 55, N 3, с. 3–12.
7. Берколайко М. З., Новиков И. Я., Образы всплесков при действии операторов свертки. Матем. заметки, 1994, Т. 55, N 5, с. 13–24.

8. Вайдьянатхан П. П. Цифровые фильтры, блоки фильтров и полифазные цепи с многочастотной дискретизацией. Методический обзор. ТИИЭР, 1990, N. 3, с. 77–120.
9. Воробьев В. И., Грибунин В. Г. Теория и практика вейвлет-преобразования. СПб.: Изд-во ВУС, 1999.
10. Желудев В. А. О вейвлетах на базе периодических сплайнов. Докл. РАН, 1994, N 1, с. 9–13.
11. Завадский В. Л. Аппроксимация функций нескольких переменных с ограниченной смешанной производной посредством вейвлетов. Препринт ИМ НАНБ, 1997, N 1/529.
12. Завадский В. Л. Нелинейная аппроксимация функций нескольких переменных с ограниченной смешанной производной посредством вейвлетов. Препринт ИМ НАНБ, 1997, N 15 (538).
13. Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. М.: АФЦ, 1999 с. 244–296.
14. Кирушев В. А. Быстрый алгоритм сжатия изображений. Вестник молодых ученых. Прикл. матем. и механика, 1997, N 1, с. 4–10.
15. Кравченко В. Ф., Рвачев В. А. «Wavelet»-системы и их применение в обработке сигналов. Зарубежная радиоэлектроника, 1996, N. 4, с. 3–20.
16. Кравченко В. Ф., Рвачев В. А., Пустовойт В. И. Ортонормированные системы типа «wavelet» на основе атомарных функций. Докл. РАН, 1996, N 1, с. 16–18.
17. Лукашенко Т. П. Всплески на топологических группах. ДАН, 1993, т. 332, N 1, с. 15–17.
18. Лукашенко Т. П. О свойствах систем разложения, подобных ортогональным. Изв. РАН, серия матем., 1998, т. 62, N 5, с. 187–206.

19. Малоземов В. П., Машарский С. М. Сравнительное изучение двух вейвлетных базисов. Проблемы передачи информации, 2000, т. 36, вып. 2, с. 27–37.
20. Малоземов В. Н., Машарский С. М. Хааровские спектры дискретных сверток. Ж. вычисл. мат. и матем. физ., 2000, т. 40, N 6, с. 954–960.
21. Малоземов В. Н., Певный А. Б., Третьяков А. А. Быстрое вейвлетное преобразование дискретных периодических сигналов и изображений. Проблемы передачи инф., 1998, т. 34, Вып. 2, с. 77–85.
22. Малоземов В. Н., Третьяков А. А. Алгоритм Кули-Тьюки и дискретное преобразование Хаара. Вестник СПбГУ, сер. 1, 1998, вып. 3 (N 15), с. 31–34.
23. Малоземов В. Н., Третьяков А. А. Новый подход к алгоритму Кули-Тьюки. Вестник СПбГУ, сер. 1, 1997, вып. 3 (N 15), с. 57–60.
24. Малоземов В. Н., Третьяков А. А. Секционирование, ортогональность и перестановки. Вестник СПбГУ, сер. 1, 1999, вып. 1 (N 1), с. 16–21.
25. Новиков И. Я. Онделетты И. Мейера — оптимальный базис в $C(0,1)$. Матем. заметки, 1992, т. 52, N 5, с. 88–92.
26. Новиков И. Я., Стечкин С. Б. Основные конструкции всплесков. Фундаментальная и прикладная математика, 1997, т. 3, N 4, с. 999–1028.
27. Новиков И. Я., Стечкин С. Б. Основы теории всплесков. Успехи математических наук, 1998, т. 53, N 6 (324), с. 53–128.
28. Новиков Л. В. Основы вейвлет-анализа сигналов. Учебное пособие. СПб.: Изд-во ООО «МОДУС+», 1999.

29. Новиков Л. В. Спектральный анализ сигналов в базисе вейвлетов. Научное приборостроение, 2000, т. 10, N 3, с. 57–64.
30. Петухов А. П. Введение в теорию базисов всплесков. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1999.
31. Петухов А. П. Кратномасштабный анализ и всплеск-разложения пространств периодических распределений. Доклады РАН, 1997, т. 356, N 2, с. 303–306.
32. Петухов А. П. Периодические всплески. Математический сборник, 1997, т. 188, N 10, с. 69–94.
33. Петухов А. П. Периодические дискретные всплески. Алгебра и анализ, 1996, т. 8, N 3, с. 151–183.
34. Скопина М. А. О нормах полиномов по системам периодических всплесков в пространствах L_p . Матем. заметки, 1996. т. 59, N 5, с. 780–783.
35. Харатишвили Н. Н. Пирамидальное кодирование. М.: Мысль, 1997.
36. Aboufadel E., Schlicker S., Discovering wavelets, J.Wiley & Sons Inc., 1999.
37. Alpert B., Wavelets and other bases for fast numerical linear algebra, in Chui C., ed., Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications, Academic Press, New York, 1992, p. 181–216.
38. Amaratunga K., and Williams J., Wavelet-Galerkin solutions for one-dimensional partial differential equations, International J. Num. Methods in Eng. 37 (1994), p. 2703–2716.
39. Auscher R., Solution of two problems on wavelets, J. Geometric Analysis 5 (1995), p. 181–236.
40. Auscher R., Weiss G., and Wickerhauser M., Local sine and cosine bases of Coifman and Meyer and the construction of smooth wavelets, in Chui C., ed.,

- Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications, Academic Press, New York, 1992, p. 237–256.
41. Benedetto J., and Frazier M., eds., Wavelets: Mathematics and Applications. CRC Press, Boca Raton, Fla., 1993.
 42. Benedetto J., and Teolis A., A wavelet auditory model and data compression. Appl. Comp. Harm. Anal. 1 (1993), p. 3–28.
 43. Beylkin G., On wavelet-based algorithms for solving differential equations, in Benedetto J. and Frazier M., eds., Wavelets: Mathematics and Applications, CRC Press, Boca Raton, Fla., 1993, p. 449–466.
 44. Beylkin G., Coifman R., and Rokhlin V., Fast wavelet transforms and numerical algorithms, Comm. Pure Appl. Math. 44 (1991), p. 141–183.
 45. Beylkin G., Coifman R., and Rokhiin V., Wavelets in numerical analysis, in Ruskai M. at al., eds., Wavelets and Their Applications, Jones and Bartlett, Boston, 1992, p. 181–210.
 46. Brislawn C., Fingerprints go digital, Notices of the Amer. Math. Soc. 42 (1995), p. 1278–1283.
 47. Burke–Hubbard B., The World According to Wavelets, A. K. Peters, Wellesley, Mass., 1996.
 48. Cohen A., Biorthogonal wavelets, in Chui C., ed., Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications, Academic Press, New York, 1992, p. 23–152.
 49. Cohen A., Daubechies I., and Vial P., Multiresolution analysis, wavelets and fast algorithms on an interval, Appl. Comp. Harm. Anal. 1 (1993), p. 54–81.
 50. Coifman R., and Meyer Y., Remarques sur l'analyse de Fourier a fenetre, C. R. Acad. Sci., ser 1 4312 (1991), p. 259–261.

51. Dahlke S. and Weinreich I., Wavelet–Galerkin methods: An adapted biorthogonal wavelet basis, *Constr. Approx.* 9 (1993), p. 237–262.
52. Daubechies I., *Ten Lectures on Wavelets*, CBMS–NSF Reg. Conf. Series in Appl. Math. 61, Soc. Ind. Appl. Math., Philadelphia, 1992.
53. Daubechies I., Jaffard S., and Journe J.–L., A simple Wilson orthonormal basis with exponential decay, *SIAM J. Math. Anal.* 22 (1991), p. 554–572.
54. Donoho D., *Interpolating wavelet transforms*, Department of Statistics, Stanford University, 1992, preprint.
55. Donoho D., and Johnstone I., Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage, *Biometrika* 81(1994), p. 425–455.
56. Folland G., *Fourier Analysis and Its Applications*, Wadsworth and Brooks/Cole, Belmont, CA, 1992.
57. Frazier M., and Kumar A., An introduction to the orthonormal wavelet transform on discrete sets, in Benedetto J. and Frazier M., eds., *Wavelets: Mathematics and Applications*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1993, p. 51–95.
58. Frazier M., *An introduction to wavelets through linear algebra*, Springer, 1999.
59. Geronimo J., Hardin D., and Massopust P., Fractal functions and wavelet expansions based on several scaling functions, *J. Approx. Theory* 78 (1994), p. 373–401.
60. Hernandez E., and Weiss G., *A First Course on Wavelets*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1996.
61. Hilton M., Jawerth B., and Sengupta A., Compressing still and moving images with wavelets, *Multimedia Systems* 2 (1994), p. 218–227.

62. Jaffard S., Wavelet methods for the fast resolution of elliptic problems, *SIAM J. Numer. Anal.* 29 (1992), p. 965–986.
63. Jawerth B., and Sweldens W., An overview of wavelet based multiresolution analyses, *SIAM Review* 36 (1994), p. 377–412.
64. Jawerth B., and Sweldens W., Wavelet multiresolution analyses adapted for the fast solution of boundary value ordinary differential equations, in Melson N., Manteuffel T., and McCormick S., eds., *Sixth Copper Mountain Conference on Multigrid Methods*, NASA Conference Publication 3224 (1993), p. 259–273.
65. Kaiser G., *A Friendly Guide to Wavelets*, Birkhäuser, Boston, 1995.
66. Koornwinder T., ed., *Wavelets: an elementary treatment of theory and applications*, Series in Approximations and Decompositions 1. World Scientific, Singapore, 1993.
67. Lu J., Healy D., and Weaver J., Contrast enhancement of medical images using multiscale edge representation, *Optical Engineering* 33 (1994), p. 2151–2161.
68. Mallat S., *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Sec. Ed., Academic Press, 1999.
69. Massopust P., *Fractal Functions, Fractal Surfaces, and Wavelets*, Academic Press, San Diego, CA, 1994.
70. Meyer Y., Ondelettes sur l'intervalle, *Rev. Mat. Ibero-americana* 7 (1992), p. 115–133.
71. Meyer Y., *Wavelets, Vibrations and Scalings*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
72. Meyer Y., and Roques, S., eds., *Progress in Wavelet Analysis and Applications: Proceedings of the International Conference «Wavelets and Applications»*

- (Toulouse, France–June 1992), Editions Frontières, Gif-sur-Yvette, France, 1993.
73. Ogden R. T., Essential Wavelets for Statistical Applications and Data Analysis, Birkhäuser, Boston, 1996.
 74. Paul T., and Seip K., Wavelets and quantum mechanics, in Ruskai M. et al., Wavelets and Their Applications, Jones and Bartlett, Boston, 1992, p. 302–322.
 75. Proakis J., and Manolakis D., Digital Signal Processing, 3rd ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1996.
 76. Qian S., and Weiss J., Wavelets and the numerical solution of partial differential equations, J. Comp. Phys. 106 (1993), p. 155–175.
 77. Richardson W. Jr., Longbotham H., and Gokhman D., Multiscale wavelet analysis of mammograms, in Meyer Y. and Roques S., eds., Progress in Wavelet Analysis and Applications: Proceedings of the International Conference «Wavelets and Applications» (Toulouse, France, June 1992), Editions Frontières, Gif-sur-Yvette, France, 1993, p. 599–608.
 78. Rioul O., and Vetterli M., Wavelets and signal processing, IEEE Signal Proc. Mag. (1991), p. 14–38.
 79. Royden H., Real Analysis, 3rd ed., Macmillan, New York, 1988.
 80. Rudin W., Real and Complex Analysis, 3rd ed., McGraw–Hill, New York, 1987. .
 81. Ruskai M., Beylkin G., Coifman R., Daubechies I., Mallat S., Meyer Y., and Raphael L., eds., Wavelets and Their Applications, Jones and Bartlett, Boston, 1992.
 82. Schumaker L., and Webb G., eds., Recent Advances in Wavelet Analysis, Academic Press, New York, 1993.

83. Skopina M. A., Multiresolution analysis of periodic functions, East J. on Approx., v. 3 (1997), p. 203–224.
84. Stollnitz E., De Rose A., and Salesin D., Wavelets For Computer Graphics; Theory and Applications, Morgan–Kaufmann, San Francisco, 1996.
85. Strang G., and Fix G., An Analysis of the Finite Element Method, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1973. [Имеется русский перевод: Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов.: М.: Мир, 1977.]
86. Strichartz R., How to make wavelets, Amer. Math. Monthly 100 (1993), p. 539–556.
87. Sweldens W., and Piessens R., Quadrature formulae and asymptotic error expansions for wavelet approximations of smooth functions, SIAM J. Numer. Anal. 31 (1994), p. 1240–1264.
88. Teolis A., Computational Signal Processing with Wavelets, Birkhäuser, Boston, 1998.
89. Vetterli M., and Herley C., Wavelets and filter banks: theory and design, IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process. 40 (1992), p. 2207–2232.
90. Wickerhauser M., Acoustic signal compression with wavelet packets, in Chui C., ed., Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications, Academic Press, New York, 1992, p. 679–700.
91. Wickerhauser M., Adapted Wavelet Analysis from Theory to Software, Peters A. K., Wellesley, MA, 1994.
92. Wojtaszczyk P., A Mathematical Introduction to Wavelets, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

93. Xu J.-C., and Shann W.-C., Galerkin-wavelet methods for two-point boundary value problems, Numer. Math. 63 (1992), p. 123–142.
94. Zheludev V. A., Periodic splines and wavelets. Mathematical Analysis, Wavelets and Signal Processing (Cairo, 1994), Contemporary Math., v. 190 (1995), p. 339–354.

Предметный указатель

B-вэйвлет (*B*-wavelet) 45,
287, 292, 328

B-сети, алгоритм
 построения (*B*-nets,
 algorithm cardinal) 163,
 302

B-сеть (*B*-net) 159, 161–163,
302, 269

B-сплайн (*B*-spline) 44,
145–152, 154, 158–166,
168, 251, 320, 324

Q-постоянная
 (*Q*-constant) 31

R-вэйвлет (*R*-wavelet) 39,
135, 139

R-функция (*R*-function) 36,
39, 124, 129, 135 112, 114,
200, 295

А

Автокорреляционная
 функция (autocorrelation
 function) 65, 212

Алгебра (algebra) 221

Алгоритм восстановления
 (algorithm reconstruction)
49, 154, 229, 244, 247,
248, 371

– разложения
 (decomposition) 48, 229,
244, 247, 370

Аналоговый сигнал (analog
signal) 27–29, 52, 91, 93,
110, 229

Ассоциативность
 (associativity) 59

Б

Банаха пространство
 (*Banach* space) 54, 72

Банаха—Штейнгауза
 теорема
 (*Banach—Steinhaus*
 theorem) 126

Бернштейна многочлен
 (*Bernstein* polynomial)
159–161

- полиномиальный оператор
(polynomial operator) 159, 160
- Бесселя* неравенство (*Bessel inequality*) 75, 123
- Биортогональность
(bi-orthogonality) 41
- В**
- Вейерштрасса* теорема
(*Weierstrass theorem*) 77
- Винера* класс (*Wiener class*) 221, 224, 263, 339
- теорема (theorem) 222
- Вполне положительная матрица (ВП-матрица)
(TP matrix) 321, 327
- – последовательность
(ВП-последовательность)
(TP sequence) 321, 322
- положительное ядро
(ВП-ядро) (TP kernel) 321, 323
- положительность
(positivity (TP)) 139, 320, 321, 328
- Временная локализация
(time localization) 91, 93, 370
- область (domain) 27, 52, 91
- Выборка разрежающая
(upsampling) 49, 156, 248, 293
- сгущающая
(downsampling) 49, 248
- , норма (sampling rate) 120
- Вэйвлет (wavelet) 23
- базисный (basic) 26, 35, 106, 109, 117
- двухпараметрический
(dyadic) 35, 116–119, 129, 136
- ортогональный
(orthogonal) 25, 38, 39, 41, 129, 137, 258, 264, 332–337, 351–361
- полуортогональный (п.о.)
(semi-orthogonal (s.o.)) 41, 129, 264, 285
- Вэйвлет-коэффициент
(wavelet coefficient) 25
- Вэйвлет-пакет (wavelet packet) 332, 362–367
- Вэйвлет-разложение
(wavelet decomposition) 47, 231
- Вэйвлет-ряд (wavelet series) 25, 26, 37, 135, 243, 320, 329
- Г**
- Габора* окно (*Gabor window*) 98
- преобразование (transform) 93–100, 106

Гаусса функция (*Gaussian function*) 58, 289, 290
 Гёльдера неравенство (*Hölder inequality*) 54, 64, 72, 73
 Гильберта пространство (*Hilbert space*) 55, 73, 142, 191, 331
 Группа окружности (circle group) 53

Д

Двоичное разбиение (binary partition) 115
 – разложение (decomposition) 363
 – растяжение (dilation) 24, 26
 Двойственный (dual) 32–37, 39, 129, 130

Двухмасштабная последовательность (two-scale sequence) 196, 254–257

Двухмасштабное соотношение (two-scale relation) 47, 154, 196, 204–221, 259, 280, 332, 362

Двухпараметрический двойственный (dyadic dual) 118, 119, 138
 – сдвиг (dyadic translation) 24, 26

Дельта-функция (delta function) 63

Дерево-алгоритм разложения (tree decomposition algorithm) 370

Диапазон частот (frequency band) 23, 28, 30, 42, 108, 369, 370

Дини–Липшица условие сходимости (*Dini–Lipschitz test of convergence*) 82

Дирихле ядро (*Dirichlet kernel*) 74, 78

Дирихле–Жордана условие (*Dirichlet–Jordan test*) 83

Дифференциальный оператор (differential operator) 143, 285, 325

Е

Единичная частота (single-frequency) 23

З

Замыкание (closure) 40, 144, 175, 191

И

Изометрия (isometry) 22, 80, 202

Импульсный отклик (impulse response) 49

– ряд (train) 302

Интегральное взвешивание (ИБП)

(integral wavelet transform (IWT)) 26–31, 106, 108–114

Интерполяционный

графически-изобразительный алгоритм (interpolatory graphical display algorithm) 157, 158, 212, 292

К

Каркас (frame) 36, 120–128

Квази-интерполяционная формула (quasi-interpolation formula) 176, 178, 189

Квази-интерполяционный оператор (quasi-interpolation operator) 172–178, 187, 188

Квантование (quantization) 50

Коммутативность (commutability) 59

Компактный носитель (compactly supported) 41, 50, 262–276, 285–289, 351–358

Конечная энергия (finite energy) 27, 73, 107, 136, 312

Кратномасштабный анализ (КМА) (multiresolution

analysis (MRA)) 43, 44, 193–204, 340

Кroneckera символ (*Kronecker symbol*) 24

Л

Лейбница формула (*Leibniz rule*) 148

Линейная фаза (linear phase) 250–258

– обобщенная (generalized) 250–262, 267, 270

Линейный функционал (linear functional) 63

– ограниченный (bounded) 176

Лорана полином (*Laurent polynomial*) 89, 168, 213, 222, 353, 354

– ряд (series) 199, 313, 334, 339

М

Малая волна (small wave) 23, 29, 33

Масштабирующая функция (scaling function) 44, 191, 194, 204–221, 255, 257, 259, 264–268, 294, 333, 338, 340, 353, 354, 365, 366

– двойственная (dual) 267

– Добеши (*Daubechies*) 206, 358

Матричный оператор
(matrix operator) 125
 Минковского неравенство
(*Minkowski inequality*) 54,
 72, 73
 — — обобщенное (generalized)
 72
 Модуль непрерывности
(modulus of continuity)
 79, 199, 200, 234

Н

Найквиста скорость
(*Nyquist rate*) 329
 Неймана ряд (*Neumann series*) 169

Носитель (supported) 45,
 215, 220, 254, 312, 325,
 353, 354

О

Обратная формула (inverse
 formula) 32
 Обратный многочлен
(reciprocal polynomial)
 213
 Ограниченный линейный
 оператор (bounded linear
 operator) 67, 121, 173
 — — локальный
 сплайн-оператор (local
 spline operator) 170
 Ортогональная сумма
(orthogonal sum) 40,
 370

Ортогональное разложение
(orthogonal
 decomposition) 41,
 367–370

Ортонормализации
 процедура
(orthonormalization
 procedure) 135, 333

Ортонормированное
 семейство (orthonormal
 family) 130, 259, 260

Ортонормированный базис
(orthonormal basis) 25,
 369

Отражение (reflection) 70,
 166

П

Парсеваля равенство
(*Parseval identity*) 21, 27,
 66, 68, 78, 81, 346,
 347

Планишереля теория
(*Plancherel theory*) 71

Полная осцилляция
(complete oscillation) 321,
 325

Принцип двойственности
(duality principle) 234,
 245

Пространство выборки
(sample space) 245, 249,
 277

Прямая сумма (direct sum)
 40, 42, 48, 193, 223,
 225

Пуассона формула
суммирования (*Poisson*
summator formula) 53, 85,
87

Р

Разность назад (backward
difference) 143

Рекуррентная схема
(recursive scheme) 207,
293

Римана—Лебега лемма
(*Riemann—Lebesgue*
lemma) 56, 60

Рисса базис (*Riesz* basis)
36–43, 124–127, 152, 195,
225, 283–285, 287

– границы (bounds) 145,
150–152

– лемма (lemma) 355

– условие (condition) 131

Рисса—Фишера теорема
(*Riesz—Fischer* theorem)
76

С

Свертка (convolution) 44, 49,
59, 63, 74, 78, 169,
222

Символ (symbol) 73, 88, 132,
169, 181, 196, 217, 221,
222, 251, 276

Симметричный нуль
(symmetric zero) 213

Синусоидальная волна
(sinusoidal wave) 22

Скалярное произведение
(inner product) 21, 24, 27,
54, 69, 72, 136

Соотношение разложения
(decomposition relation)
48, 225, 246, 247, 309

Спектр (spectrum) 27, 28, 30,
91, 93, 97

Спектральная информация
(spectral information) 27,
28, 52, 93, 94, 101,
193

Сплайн-кривая (spline curve)
139

Суперпозиция
(superposition) 21

Схема скользящего среднего
(moving average scheme)
49, 156, 166, 248

Т

Теорема об открытости
отображения (open
mapping theorem)
126

Тёплицева матрица (*Toeplitz*
matrix) 321

Треугольный алгоритм
Паскаля (ТАП) (*Pascal*
triangular algorithm
(РТА)) 294–296

– – – линейный (ЛТАП)
(linear (LPTA)) 295, 296,
198, 300, 323

У

Устойчивости условие
(stability condition) 35,
116, 118, 121, 124

Ф

Фату теорема (*Fatou's*
theorem) 67

Фейера ядро (*Fejér kernel*)
78

Фубини теорема (*Fubini*
theorem) 60, 64

Фундаментальная базисная
сплайн-функция
(fundamental cardinal
spline function) 180, 183,
184, 279

Фундаментальный сплайн
(fundamental
spline) 180

Функция с ограниченной
вариацией (function of
bounded variation) 83

Функция-окно (window
function) 28–30, 91, 93,
95, 97, 100–102, 106

Фурье коэффициенты
(*Fourier coefficients*) 20,
75, 76, 81, 88, 130

– ряд (series) 20–22,
71–85

Фурье преобразование
(*Fourier transform*) 26–29,
35, 53–58, 65–71, 73, 91,
93, 101, 127, 130, 132,
133, 137, 166, 250, 251,
359

– дискретное (discrete) 73,
76, 80, 251
– кратковременное
(КВПФ) (short-time) 102,
106
– обратное (inverse) 57, 66,
70

Х

Хаара вэйвлет (*Haar*
wavelet) 258, 278

– функция (function) 25, 99,
123

Хэвисайда ступенька
(*Heaviside unit step*)
56

Ц

Целочисленное растяжение
(integral dilation) 21

Целочисленный сдвиг
(integral shift) 23

Цифровой сигнал (digital
signal) 52, 73

Ч

Частная сумма (partial sum)
74, 75, 78

Частотная локализация
(frequency-localization)
30

– область (domain) 27,
52

Частотно-временной анализ
(time-frequency analysis)
19, 30, 32, 91, 111, 129,
139, 229

- — — , локализация
(localization) 34, 99, 100,
102
- — — , окно (window) 30, 31,
98, 102, 109, 111
- Частотное окно (frequency
window) 30, 97, 101,
110
- Частотный центр
(center-frequency) 28, 30,
108, 111, 115
- Чезарово среднее (Cesàro
mean) 78

III

- Шварца* неравенство
(*Schwarz inequality*) 54,
72, 73, 99

Э

- Эйлера—Фробениуса*
полином
(*Euler—Frobenius*
polynomial) 89,
151, 182, 183, 213,
282, 284, 298, 299,
303–309, 311, 314,
315, 322
- — — обобщенный
(generalized) 267
- Эйлера—Фробениуса Лорана*
полином
(*Euler—Frobenius Laurent*
polynomial) 213, 281,
286
- — — — обобщенный
(generalized) 264, 265,
333

Оглавление

Предисловие переводчика	5
Предисловие к русскому изданию	13
Предисловие	15
Глава 1. Обзор	19
1.1. От анализа Фурье к вэйвлет-анализу	20
1.2. Интегральное вэйвлет-преобразование и частотно-временной анализ	26
1.3. Формулы обращения и двойственные	32
1.4. Классификация вэйвлетов	38
1.5. Кратномасштабный анализ, сплайны и вэйвлеты	42
1.6. Вэйвлет-разложения и вэйвлет-восстановления	46
Глава 2. Анализ Фурье	52
2.1. Прямое и обратное преобразования Фурье	53
2.2. Непрерывно-временная свертка и дельта-функция	59
2.3. Преобразование Фурье функций, интегрируемых с квадратом	65
2.4. Ряды Фурье	71
2.5. Основы теории сходимости и формула суммирования Пуассона	82

Глава 3. Вэйвлет-преобразования и частотно-временной анализ	91
3.1. Преобразование Габора	93
3.2. Кратковременные преобразования Фурье и принцип неопределенности	99
3.3. Интегральное вэйвлет-преобразование	108
3.4. Двухпараметрические вэйвлеты и формулы обращения	114
3.5. Каркасы	120
3.6. Вэйвлет-ряды	129
Глава 4. Базисный сплайн-анализ	139
4.1. Пространства сплайнов	140
4.2. B -сплайны и их основные свойства	145
4.3. Двухмасштабное соотношение и интерполяционный графически-изобразительный алгоритм	152
4.4. Представления с помощью B -сети и вычисление сплайнов	158
4.5. Построение сплайн-аппроксимационных формул	166
4.6. Построение сплайн-интерполяционных формул	179
Глава 5. Масштабирующие функции и вэйвлеты	191
5.1. Кратномасштабный анализ	193
5.2. Масштабирующие функции с конечными двухмасштабными соотношениями	204
5.3. Разложение $L^2(\mathbf{R})$ в прямую сумму	221
5.4. Вэйвлеты и их двойственные	230
5.5. Линейно-фазовая фильтрация	249
5.6. Вэйвлеты с компактным носителем	262
Глава 6. Базисные сплайн-вэйвлеты	277
6.1. Интерполяционные сплайн-вэйвлеты	278
6.2. Сплайн-вэйвлеты с компактным носителем ...	285
6.3. Вычисление базисных сплайн-вэйвлетов	292

6.4. Многочлены Эйлера—Фробениуса	303
6.5. Анализ погрешности сплайн-вэйвлет-разложения	309
6.6. Вполне положительность, полная осцилляция и пересечения нулей	320
Глава 7. Ортогональные вэйвлеты и вэйвлет-пакеты	331
7.1. Примеры ортогональных вэйвлетов	332
7.2. Идентификация ортогональных двухмасштабных символов	338
7.3. Построение ортогональных вэйвлетов с компактным носителем	351
7.4. Ортогональные вэйвлет-пакеты	362
7.5. Ортогональное разложение вэйвлет-рядов	367
Приложение	372
Замечания	375
Список литературы	384
Список дополнительной литературы по вэйвлетам	392
Предметный указатель	402

Учебное издание

Чарльз К. Чуи

Введение в вэйвлеты

Зав. редакцией академик В. И. Арнольд

Зам. зав. редакцией А. С. Попов

Ведущий редактор Ю. И. Осипик

Художник И. И. Куликова

Художественный редактор Н. В. Зотова

Технический редактор О. Г. Лапко

Корректор Е. Н. Клитина

Оригинал-макет подготовлен

Ю. И. Осипик и Л. Г. Васильевой в пакете $\text{\LaTeX}$ 2 ϵ
с использованием семейства шрифтов Computer Modern
с кириллическим расширением LN

Лицензия ЛР № 010174 от 20.05.97 г.

Подписано к печати 08.05.2001 г. Формат 60 × 90/16.

Печать офсетная. Объем 13,00 бум. л.

Усл.-печ. л. 26,00. Уч.-изд. л. 19,82.

Изд. № 1/9731. Тираж 5000 экз. Заказ 3954.

Издательство «Мир»

Министерства РФ по делам печати,
телерадиовещания и средств массовых коммуникаций
107996, ГСП-6, Москва, 1-й Рижский пер., 2.

Диапозитивы изготовлены
в издательстве «Мир»

Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленных диапозитивов
в ОАО «Можайский полиграфический комбинат»
143200, г. Можайск, ул. Мира, 93.