ACTUARIAL MATHEMATICS

By
NEWTON L. BOWERS, JR.
HANS U. GERBER
JAMES C. HICKMAN
DONALD A. JONES
CECIL J. NESBITT

Second Edition

Published by
THE SOCIETY OF ACTUARIES
1997

Н. Бауэрс, Х. Гербер,
Д. Джонс, С. Несбитт,
Дж. Хикман

АКТУАРНАЯ МАТЕМАТИКА

Перевод с английского
под редакцией
В. К. Малиновского

Москва
«Янус-К»
2001

УДК 519.22+368
Б29
ББК 22.17

Бауэрс Н., Гербер Х., Джонс Д., Несбитт С., Хикман Дж.

Б29 Актуарная математика. Перев. с англ. / Под ред. В. К. Малиновского. — М.: Янус-К, 2001. — 656 с., илл.

ISBN 5-8037-0065-7

В книге, являющейся базовым учебным пособием Общества актуариев США, содержится изложение основ математики страхования. Начиная с фундаментальных моделей, лежащих в основе страхования жизни, авторы переходят к моделям теории риска и к более сложным моделям страхования жизни и пенсионных схем. При анализе этих моделей существенно используются вероятностные методы.

Книга рассчитана на актуариев, на экономистов и на математиков, интересующихся актуарными расчетами, а также на аспирантов и студентов экономических специальностей. Она используется в учебном процессе Финансовой академии при Правительстве РФ.

Издание подготовлено Амосовым Б. А., Кудрявцевым А. А., Малиновским В. К., Цукерман Г. М.

Издание осуществлено при финансовой поддержке
ОСАО «Ингосстрах»,
СГ «Мегарусс»,
ЗАО «Городская страховая компания»,
ООО СФ «Согласие».

Translation and adaptation of the second English language edition with the Society of Actuaries' permission,

ISBN 5-8037-0065-7 (русск.)
ISBN 0-938959-46-8 (англ.)

Предисловие редактора перевода

Предмет этой книги — актуарная математика, моментом зарождения которой принято считать разработку и использование первых таблиц смертности[1]. Наряду с теорией вероятностей, которая является одной из основ современной актуарной и финансовой математики, со статистикой и эконометрикой, это — одна из составляющих профессии актуария, которая предполагает также знание экономики и страхового дела, умение работать с информационными системами и наличие известного практического опыта.

Актуарная профессия, которая во многих странах имеет четкое юридическое и организационное оформление, насчитывает более 150 лет. Долгое время существом деятельности актуария считалась экспертиза рисков и неопределенностей, прежде всего — в страховании жизни[2], но вследствие глубокого взаимопроникновения страхования и финансовых операций она все чаще понимается более широко, а именно как экспертиза финансовой безопасности в страховании и социальном обеспечении. Используя математические методы для постановки, анализа и решения сложных задач в области бизнеса, финансов и социальной сферы, актуарий оценивает риски и вырабатывает обоснованные расчетами страховые и пенсионные схемы.

Перевод книги «Актуарная математика», которая является базовым учебным пособием Общества актуариев США и в 1997 г. выдержала второе, переработанное, издание, осуществлен в связи со все большей потребностью во внедрении актуарных методов для стабилизации российской системы страхования, финансов и пенсионного обеспечения. Издание, с которого был сделан настоящий перевод, существенно отличается от первого (см. далее предисловие авторов ко второму изданию) издания 1986 г.

Одна из задач, которая стоит перед актуарной математикой как прикладной дисциплиной, — это разработка математических моделей, соответствующих национальным и международным юридическим нормам и договорной практике. Это связано с развитием специальной терминологической базы. В русском языке отсутствует значительная часть специальных терминов, используемых в настоящей книге, или единообразие в их употреблении. Поэтому нам приходится иногда брать на себя смелость вводить в употребление тот русский термин, который, по нашему мнению, наилучшим образом соответствует своему английскому прообразу.

Следует отметить, что мы исходим из того, что основная цель книги — изложение актуарных моделей и методов их анализа, а не реальной страховой практики, вариации которой в зависимости от национальных традиций, особенностей законодательства и бухгалтерского учета значительны. Поэтому некоторые из используемых нами терминов могут показаться экономисту-практику не вполне точно отражающими отдельные нюансы лексикона страховщиков, бухгалтеров, андеррайтеров и финансовых аналитиков, хотя мы надеемся, что явных противоречий здесь удалось избежать. Мы рассчитываем, что предметный указатель, приведенный в конце книги, поможет снять терминологические проблемы, если таковые у читателя все же возникнут.

---

[1] Эдмундом Галлеем в 1693 г.

[2] «Актуарий — лицо, профессионально обученное математическим аспектам страхования, таким, как расчет премий, обязательств по договору страхования и других величин» (Бланд Д. Страхование: принципы и практика. — М.: Финансы и статистика, 1998, с. 369.)

Являясь учебным пособием для тех, кто желает сдать установленные Обществом актуариев США квалификационные экзамены, американское издание этой книги имеет ясно очерченный круг читателей. На какого русскоязычного читателя рассчитан ее перевод? Вероятно, некоторые экономисты обнаружат, что в книге используется слишком сложный для них математический аппарат. Некоторые математики заметят, что используемые в книге модели могут быть усложнены, а степень общности приводимых в ней математических утверждений повышена. Однако поскольку книга адресована именно актуариям или тем, кто, имея базовое экономическое или математическое образование, хочет получить прочный фундамент знаний, признанных основой актуарной профессии, это нисколько не умаляет ее ценности. Актуарии могут и должны в своей профессиональной подготовке избегать как огрубления, так и излишней детализации используемого математического фундамента и настраивать на это систему профессионального образования.

Несомненно, книга принесет пользу лицам, углубленно изучающим теорию вероятностей, поскольку, освоив ее, они получат опору в прикладной области. Она будет полезна страховщикам-практикам, поскольку, исходя из своих запросов и описанных в книге объективных закономерностей, лежащих в основе актуарных расчетов, они смогут уточнять постановки интересующих их управленческих задач.

Авторы книги проявили большое внимание к переводу, предоставив список исправлений к оригинальному изданию и снабдив русский перевод специально написанным предисловием. Профессор Хикман любезно согласился ответить на многие вопросы, возникавшие в ходе работы. Я пользуюсь случаем поблагодарить их за это, а также за высокую оценку русской вероятностной школы, которую они дали в своем предисловии к русскому изданию. Я также благодарен обществу актуариев США за то, что оно любезно разрешило издать книгу на русском языке.

Российские страховщики-практики, как и ведущие специалисты в области экономического образования, давно признали необходимость перевода книги «Актуарная математика» на русский язык. Мне особенно приятно отметить ведущую роль Финансовой академии при Правительстве РФ, в учебном процессе которой части американского издания книги уже используются, а настоящий перевод планируется использовать в дальнейшем, и ее ректора А. Г. Грязновой, без активной поддержки которой настоящее издание не увидело бы свет. Издание настоящего перевода также было бы невозможно без финансовой и моральной поддержки со стороны следующих российских страховых компаний: ОСАО «Ингосстрах», СГ «Мегарусс», ЗАО «Городская страховая компания» и ООО СФ «Согласие».

Наконец, как руководитель проекта по подготовке перевода, я пользуюсь случаем подчеркнуть значительный вклад Б. А. Амосова и Г. М. Цукерман, самоотверженная работа которых способствовала успешному завершению этого проекта. Я пользуюсь случаем от своего имени искренне поблагодарить всех тех российских и зарубежных коллег, беседы с которыми убедили меня в целесообразности осуществления этого издания, и особенно В. Н. Баскакова, Д. Б. Гнеденко, К. Дейкина, А. Л. Лельчука, Р. Норберга, Г. С. Панову, Ю. В. Прохорова, К. Е. Турбину, О. В. Федосееву. Я также благодарен О. Н. Семеновой, ознакомившейся с рукописью перевода и предложившей ряд исправлений, а также всем тем, кто в той или иной мере оказывал помощь и содействие при подготовке этого издания.

В. К. Малиновский

Предисловие авторов к русскому изданию

Актуарная наука — это собрание понятий и идей из различных областей знаний, объединенных тем, что они оказываются полезными в разработке страховых систем и управлении ими. Одним из таких основополагающих понятий является вероятность. Принимая во внимание роль русских математиков в развитии теории вероятностей, мы считаем естественным и желательным появление перевода книги «Актуарная математика» на русском языке. Значительные достижения в теории вероятностей на ранних этапах ее развития принадлежат Чебышёву и его ученикам Маркову и Ляпунову. Вслед за ними С. Бернштейн, А. Хинчин и А. Колмогоров продолжили эту славную традицию. Книга «Актуарная математика» основана на вероятностных идеях, и авторы с благодарностью признают большой вклад русской школы в эту область.

Однако, эта книга посвящена не развитию теории вероятностей. Она использует эту теорию, а также другие основополагающие идеи для построения моделей страховых систем. Критерием, согласно которому те или иные понятия или идеи включались в эту книгу, служило то, насколько они способствуют пониманию устройства страховой системы. Это понимание может оказаться особенно полезным российским студентам, поскольку они будут создавать системы, помогающие отдельным лицам и организациям контролировать финансовые риски, и управлять этими системами. Мы приветствуем их в международном сообществе актуариев.

Мы хотим выразить нашу искреннюю благодарность В. Малиновскому, который организовал перевод и способствовал его изданию.

Ньютон Л. Бауэрс
Ханс У. Гербер
Дональд А. Джонс
Сесил Дж. Несбитт
Джеймс Ч. Хикман

Предисловие Общества актуариев

Первое издание книги «Актуарная математика», опубликованное в 1986 г., оказалось весьма полезным для представителей нашей профессии, поскольку в ней были изложены современные математические основы актуарной науки и развивались мощные средства, которыми смогут пользоваться последующие поколения актуариев. В этой книге не только был введен стохастический подход, дополняющий излагавшийся в предшествующих монографиях детерминистический подход, но теория страхования жизни, теория риска и демографическая теория были объединены в ней в единое целое. В результате актуарии получили методы и возможности численно анализировать как математические ожидания, так и дисперсии случайных событий.

С момента выхода в свет первого издания книги методы анализа, имеющиеся в распоряжении актуариев, значительно усовершенствовались, и в их применении наблюдается заметный прогресс. Чтобы отразить эти перемены, трое из пяти авторов книги решили дополнить и пересмотреть текст первого издания.

Осуществление этого проекта контролировал Образовательный и экзаменационный комитет Общества. Ричард С. Маттисон оказывал помощь в организационных вопросах и в получении необходимого финансирования. Значительный вклад в реализацию этого проекта внесли Роберт К. Кемпбелл, Уоррен Лакнер, Роберт А. Коновер и Сандра Л. Розен.

Ричард Ламберт организовал рецензирование и просмотр книги специалистами. Ему помогали Бонни Авербак, Джеффри Бекли, Рой Голдман, Джефф Гроувс, Нэнси Дэвис, Джанис Коул, Андрэ Л'Эсперанс, Грэхем Лорд, Эстер Портноу, Дэвид Промислов, Мак-Кензи Смит, Джуди Стрэчен, Куртис Хантингтон, Кейт Чан и Элиас Шиу.

Образовательный и экзаменационный комитет, группа рецензирования и все, кто принимал участие в переработке этой монографии, искренне благодарны профессорам Бауэрсу, Джонсу и Хикману за их усилия, направленные на обучение актуариев.

Дэвид М. Холланд,
президент

Алан Д. Форд,
председатель Комитета по руководству и координации образовательной и экзаменационной политики

Биографии авторов

НЬЮТОН Л. БАУЭРС[1)] получил степень бакалавра (Bachelor of Science) в Йельском университете и степень доктора философии в Университете штата Миннесота. После занятий в аспирантуре он работал в Университете штата Мичиган и позже — в Университете Дрэйка. До выхода на пенсию он занимал пост профессора актуарных наук, учрежденный фондом Эллис и Нелли Левитт.

ХАНС У. ГЕРБЕР[2)] получил степень доктора философии в Швейцарском федеральном техническом институте. Он преподавал в Университете штата Мичиган и Университете Рочестера. С 1981 г. он работал в Школе бизнеса Университета Лозанны, где в настоящее время возглавляет Институт актуарных наук[3)].

ДОНАЛЬД А. ДЖОНС[4)] получил степень бакалавра (Bachelor of Science) в Государственном университете Айовы и степени магистра и доктора философии в Университете Айовы. Он работал на факультете актуарных наук Университета штата Мичиган и являлся сотрудником-партнером компании Энн Арбор Экчюриз (Ann Arbor Actuaries) до 1990 г., когда он занял пост Директора программы по актуарным наукам Государственного университета штата Орегон.

СЕСИЛ Дж. НЕСБИТТ[5)] получил математическое образование в Университете Торонто и в Институте высших исследований Принстонского университета. С 1938 г. по 1980 г. он преподавал актуарную математику в Университете штата Мичиган. С 1985 г. по 1987 г. он являлся вице-президентом по научно-исследовательской деятельности Общества актуариев[3)].

ДЖЕЙМС Ч. ХИКМАН[6)] получил степень бакалавра (Bachelor of Arts) в Симпсон-колледже и степень доктора философии в Университете Айовы. Он работал в Университете Айовы и в Университете штата Висконсин, Мэдисон, до выхода на пенсию в 1993 г. В течение пяти лет он являлся деканом Школы бизнеса в Университете штата Висконсин.

[1)] NEWTON L. BOWERS, JR., Ph.D., Fellow of the Society of Actuaries, Member of American Actuarial Association.

[2)] HANS U. GERBER, Ph.D., Associate of the Society of Actuaries.

[3)] Профессора Гербер и Несбитт участвовали в качестве консультантов в процессе переработки и отбора материала для второго издания.

[4)] DONALD A. JONES, Ph.D., Fellow of the Society of Actuaries, Enrolled Actuary, Member of American Actuarial Association.

[5)] CECIL J. NESBITT, Ph.D., Fellow of the Society of Actuaries, Member of American Actuarial Association.

[6)] JAMES C. HICKMAN, Ph.D., Fellow of the Society of Actuaries, Associate of Casualty Actuarial Society, Member of American Actuarial Association.

Предисловия авторов и путеводитель по книге

Предисловие к первому изданию[1)]

Предлагаемая книга является первым шагом в ознакомлении читателей с той революцией в профессии актуария, которая произошла в нашем веке быстродействующих компьютеров. За короткий отрезок времени с момента изобретения микропроцессора актуарии, занимающиеся разработкой и управлением страховыми системами, избавились от значительного ряда ограничений, связанных с использованием примитивных счетных устройств. Теперь они могут сосредоточиться на творческих решениях вопросов финансовой безопасности, которые ставит перед ними общество.

Необходимо привести образовательный уровень в соответствие с этими изменениями. Поэтому основные цели настоящей работы — интегрировать страхование жизни в общую теорию риска и продемонстрировать широкий спектр конструкций, которые можно после этого осуществить, исходя из базисных моделей, лежащих в основании актуарной науки. Актуарная наука постоянно развивается, и важнейшее место в ней занимают методы построения моделей, относящихся к теории риска. Поэтому прежде чем перейти к более подробному обсуждению текста книги, мы рассмотрим природу моделей.

Абстрактные и физические модели строятся либо для того, чтобы создать на базе наблюдений содержательную и логически последовательную теорию, либо для того, чтобы получить возможность в полном объеме имитировать в лаборатории или на компьютере реальные процессы и объекты. Модели абсолютно необходимы в науке, в инженерном деле и в деле управления большими организациями. Однако всегда необходимо помнить о существенных различиях между реальностью и моделями, которые эту реальность отражают. Удовлетворительная модель содержит столько информации о реальности, сколько нужно, чтобы дать возможность понять, что необходимо для успешного функционирования системы, которую эта модель отражает.

Модели страхования, предложенные в настоящей книге, доказали свою ценность и углубили наше понимание существа таких систем. Однако мы всегда должны помнить, что реальные страховые системы функционируют в среде, которая более сложна и динамична, чем те модели, которые здесь исследуются. Поскольку модели являются лишь приближением к реальности, работа по их построению бесконечна; приближения можно улучшать, реальность может меняться. Каждая научная дисциплина непрерывно пересматривает и модернизирует свои базовые модели. Актуарная наука не является исключением.

Актуарная наука развивалась в то время, когда разрабатывались математические средства (особенно математический анализ и теория вероятностей), накапливались необходимые данные (особенно данные о смертности в форме таблиц смертности), а также осознавались социальные нужды (защитить семьи и коммерческие предприятия от финансовых последствий безвременной смерти). Модели, предложенные в самый момент зарождения актуарной науки, по-прежнему остаются полезными. Однако среда, в которой существует актуарная наука, продолжает изменяться, и периодически в ответ на эти изменения необходимо пересматривать базовые положения этой науки.

Проиллюстрируем эти соображения тремя примерами:

[1)] Для согласования со вторым изданием нумерация глав и обзор их в тексте предисловия изменен. Эти изменения отмечены курсивом.

1. Требования, которые современное общество предъявляет к страховой системе, меняются, и в ответ на это разрабатываются новые системы выплат работникам и новые системы социального страхования. Для описания таких систем требуются новые модели, и эти новые модели строятся.
2. Математика также развивается, и некоторые понятия, которых не существовало в момент, когда закладывались основы актуарной науки, входят теперь в общематематическое образование. Если актуарная наука хочет остаться в основном русле прикладных наук, необходимо перестраивать базовые модели, используя язык современной математики.
3. Наконец, как уже отмечалось выше, с развитием быстродействующих компьютеров выросли возможности для работы со сложными моделями. Это приводит к далеко идущим последствиям в отношении уровня допустимой в актуарных моделях сложности.

В настоящей работе уделяется особое внимание тем моделям, которые являются базисными в современной практике актуарной науки. Они изучаются средствами, разработанными в математических исследованиях, особенно в области математического анализа и теории вероятностей. При знакомстве с гл. *1–14* читатель должен иметь в виду, что существует набор главных моделей, лежащих в основе актуарной науки, который необходимо освоить каждому, кто стремится к работе в любой из многочисленных специализаций актуарной профессии. При построении этих моделей используется лишь ограниченный набор соображений. Мы обнаружим многочисленные связи между этим моделями, которые демонстрируют единую основу актуарной науки. Вслед за этими моделями в гл. *15–21* излагаются некоторые более сложные модели, лучше отвечающие реалиям страхования жизни и пенсионных схем.

Хотя настоящая книга задумана как всестороннее исследование, это не означает, что оно должно быть исчерпывающим. Чтобы избежать недоразумений, очертим границы изложенного:

- Мы не используем те сведения из математики, которые не входят в типичные курсы для студентов, даже если они могли бы унифицировать, а в некоторых случаях и упростить представленные здесь соображения. Например, в изложении материала, относящегося к вероятностным распределениям, мы пользуемся производящей функцией моментов, но не используем характеристическую функцию. Из тех же соображений мы не применяем интеграл Стилтьеса, который можно было бы в некоторых случаях использовать для унификации изложения в дискретном и в непрерывном случаях.
- В главах, посвященных страхованию жизни, подчеркивается случайный характер момента времени, когда требуется производить страховые выплаты. В тех же самых главах процентные ставки, используемые для расчета настоящей стоимости будущих платежей, полагаются детерминированными и обычно считаются постоянными. Поскольку процентные ставки могут меняться значительно, естественно спросить, почему мы не рассматриваем для них вероятностные модели. Мы отвечаем: потому, что математика страхования жизни на вероятностной основе (за исключением процентных ставок) не требует никаких дополнительных знаний, кроме тех, которые содержатся в стандартном университетском курсе. С другой стороны, для моделирования процентных ставок необходимо привлекать сведения из экономики и статистики, которые выходят за рамки того набора предварительных математических сведений, о котором говорилось выше. Кроме того, при построении

моделей, в которых как процентные ставки, так и моменты возникновения страховых случаев, случайны, возникают определенные технические трудности, составляющие предмет современных исследований.

- Мы не излагаем методов оценивания параметров основных актуарных моделей, исходя из имеющихся наблюдений. Например, мы не обсуждаем построение таблиц смертности.
- Настоящая книга не является руководством по вычислениям. Здесь не обсуждаются вопросы, связанные с оптимизацией структуры входных данных, и вычислительные аспекты актуарных моделей. Это — быстро изменяющаяся сфера, и здесь, как нам представляется, лучше предоставить читателям самостоятельно решать, какие методы они изберут с учетом специфики их собственных ресурсов.
- Здесь не обсуждаются многие важные актуарные задачи, возникшие за долгие годы практической деятельности и страхового регулирования. Это замечание относится к разделам, в которых рассматриваются такие вопросы, как величина фактических премий в договорах страховании жизни, стоимостей в пенсионных схемах, ограничений, накладываемых на резервы выплат, а также составление отчетности в той форме, как этого требуют регулирующие органы.
- Мы избегали соображений, которые приводят к интересным проблемам, но не появляются в базовых актуарных моделях. По этой причине в книге отсутствует задача о среднем возрасте в момент смерти для стационарной популяции.

Настоящая книга имеет множество особенностей, которые выделяют ее из ряда замечательных книг по страхованию жизни, написанных нашими предшественниками. Многие из этих особенностей отражают принятое авторами решение о том, какой материал следует включать в изложение. Мы обсудим их далее, снабдив заголовками, указывающими обсуждаемую тему.

Вероятностный подход

Как указывалось ранее, наибольшее различие между подходом, принятым в настоящей книге, и подходами, принятыми в большинстве предшествующих англоязычных монографий по актуарной математике, состоит в существенно большем использовании вероятностного подхода при изложении математических аспектов страхования жизни. Актуарии обычно писали и говорили о применении теории вероятностей в своих моделях, но их результаты могли бы быть получены и часто действительно были получены детерминистическими методами. В этой книге рассмотрение задач страхования жизни основано на предположении, что продолжительность предстоящей жизни является случайной величиной с непрерывным распределением. Это позволяет привлекать множество понятий из теории случайных величин, таких, как функция распределения, функция плотности, математическое ожидание, дисперсия и производящая функция моментов. Этот подход соответствует духу времени, его применение основано на наличии быстродействующих компьютеров и отвечает имеющимся запросам. Он основан на наблюдении, что экономическая роль страхования жизни и пенсионного страхования наилучшим образом просматривается, когда подчеркивается случайная природа продолжительности предстоящей жизни. Помимо этого вероятностные идеи являются в настоящее время частью общематематического образования, и их более глубокая реализация в страховании жизни связывает последнее с другими разделами прикладной теории вероятностей, например, с теорией надежности в инженерном деле.

В дополнение для полноты изложения мы описываем детерминистический подход, который применяется в некоторых случаях. Однако результаты, полученные с применением детерминистических моделей, обычно можно получить, рассматривая математические ожидания в вероятностных моделях.

Связь с теорией риска

Теория риска определяется как исследование отклонений фактических финансовых результатов от ожидаемых и представляет собой совокупность методов предотвращения неблагоприятных последствий этих отклонений. Вероятностный подход к страхованию жизни позволяет встраивать долгосрочные страховые договоры в модели теории риска и по сути превращает теорию страхования жизни в составную часть (но очень важную составную часть) теории риска. Теория разорения, другой важный раздел теории риска, включается в нее как средство анализа одного из источников неблагоприятных долгосрочных финансовых отклонений — страховых случаев. Этот источник является главнейшим аспектом моделей страховых предприятий.

Теория полезности

Эта книга содержит материал, относящийся к экономике страхования. Его цель — предложить читателю обоснование необходимости изучения актуарных моделей, основанное на нормативной теории индивидуального поведения перед лицом неопределенности. Хотя использованные здесь модели значительно упрощены, они дают представление об экономической роли страхования и о некоторых из проблем, возникающих при принятии решений в вопросах страхования.

Стандартные предположения

Для вычисления актуарных функций для нецелых возрастов мы постоянно пользуемся предположением о равномерности распределения случаев смерти в каждом годичном возрастном интервале. Это устраняет некоторые аномалии, которые отмечались при принятии необоснованных предположениий в случае высоких процентных ставок.

Ньютон Л. Бауэрс
Ханс У. Гербер
Дональд А. Джонс
Сесил Дж. Несбитт
Джеймс Ч. Хикман

Предисловие ко второму изданию

Актуарная наука не стоит на месте. За время, прошедшее с момента опубликования первого издания книги «Актуарная математика», она вобрала в себя ряд новых идей из экономики и математики. В то же время вычисления и средства коммуникации стали дешевле и быстрее, что помогло сделать доступнее более сложные актуарные модели. За прошедшее время изменились также те финансовые риски,

8. Новые исследования в соединении с новыми вычислительными возможностями повысили интенсивность использования рекуррентных формул для вычисления распределений суммарных потерь, полученных в рамках моделей теории риска. Это повлияло на изложение в гл. 12.
9. Материал, относящийся к расчету тарифов для договоров страхования жизни с выплатами на случай смерти и досрочного прекращения действия договора, а также к бухгалтерскому учету в операциях страхования жизни, был реорганизован. То, что относится к ведению бизнеса и к регулированию, собрано в одной главе, а то, что относится к основам бухгалтерского учета и к резервам на ведение дел — в другой, предыдущей главе. Обсуждение страхового регулирования ограничивается общими положениями и тем, что к ним относится. Мы не делали попыток изложить положения страхового регулирования для какого-либо конкретного государства, провинции или штата.
10. Были опущены модели, относящиеся к ряду страховых продуктов, потерявших значение на рынке, и введены модели для новых продуктов, таких, как ускоренные выплаты в случае критических заболеваний или необходимости в длительном уходе.
11. Заключительная глава содержит краткое введение в простые модели, в которых процентная ставка является случайной величиной. Кроме того, обсуждаются соображения по поводу управления риском, связанным с процентной ставкой. Мы надеемся, что эта глава послужит мостом к последним достижениям в области соединения актуарной математики и финансовой экономики.

Завершая работу над вторым, переработанным, изданием, мы уже ясно видим, что грядут значительные новые продвижения. Усилия в этом направлении сосредоточены на создании общих моделей для управления рисками отдельных лиц и организаций, связанными с неопределенностью будущих финансовых потоков вследствие различных причин. Соединение актуарно-статистического подхода к построению моделей систем финансовой безопасности с подходом, принятым в финансовой экономике, является достойной задачей для будущего поколения исследователей-актуариев.

Ньютон Л. Бауэрс
Дональд А. Джонс
Джеймс Ч. Хикман

Путеводитель по книге

Читатель может считать, что настоящая книга излагает два направления теории риска. Теория индивидуальных рисков рассматривает каждый страховой договор как отдельную единицу, и построение модели для группы страховых договоров состоит в суммировании финансовых результатов по отдельным договорам из этой группы. Теория коллективных рисков использует вероятностную модель для суммарных страховых выплат; при этом шаг, состоящий в суммировании результатов по отдельным договорам, устраняется. Это различие иногда сложно проследить в практических задачах. Однако главы настоящей книги можно в связи с этим разделить на две группы, как показано ниже.

Классификация глав по двум направлениям в теории риска

Теория индивидуальных рисков	Теория коллективных рисков
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 15, 16, 17, 18, 21	12, 13, 14, 19, 20

Можно также разделить страховые модели на те, которые пригодны для страхования на коротком временном интервале, когда инвестиционный доход не является существенным фактором, и на те, которые относятся к долгосрочному страхованию, когда учет дохода от инвестирования необходим. На приведенной ниже схеме дана классификация глав по этому принципу с дополнительным разбиением моделей долгосрочного страхования на модели страхования жизни и модели пенсионного обеспечения.

Классификация глав по длительности временного периода и по области применений

	Долгосрочное страхование	
Краткосрочное страхование	Страхование жизни	Пенсии
1, 2, 12, 13, 14	3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 15, 16, 17, 18, 21	9, 10, 11, 19, 20, 21

Выбор тем и их организация не следуют традиционным схемам. Как отмечалось ранее, новая структура связана с задачей изложить сначала материал, который считается базовым для студентов-актуариев (гл. 1–14), а потом перейти к более углубленному изложению избранных разделов для студентов, специализирующихся на страховании жизни и на пенсионном обеспечении (гл. 15–21).

В гл. 1 обсуждаются следующие два соображения: случайные события могут нарушить планы лица, принимающего решения, а страховые системы создаются, чтобы уменьшить неблагоприятные финансовые последствия этих событий. Для иллюстрации последнего соображения рассматриваются отдельные договоры страхования и используются удобные, хотя не всегда реалистичные, распределения случайных величин ущерба. В последующих главах для страховых систем строятся более подробно разработанные модели.

В гл. 2 вводится модель индивидуальных рисков, сначала для отдельных договоров, а затем для портфеля страховых договоров. В этой модели случайная величина S, суммарная величина страховых выплат за отдельный период определяется как сумма фиксированного числа независимых случайных величин, каждая из которых связана с отдельным договором. Каждое слагаемое суммы S может принимать два значения: 0 и случайное значение, равное величине выплаты за рассматриваемый период.

С точки зрения теории риска идеи, развиваемые в гл. с 3 по 11, можно рассматривать как развитие соображений гл. 2. Вместо того, чтобы рассматривать потенциальные выплаты за короткий временной период по каждому отдельному страховому договору, мы рассматриваем случайные величины потерь, которые принимают в расчет финансовые результаты за несколько периодов. Поскольку такие случайные величины более не ограничены коротким временным интервалом, они отражают стоимость денег в рассматриваемый момент времени. Для групп лиц мы можем действовать, как в гл. 2, а именно, использовать приближения, например нормальное приближение, чтобы сформулировать вероятностные утверждения о сумме случайных величин, связанных с отдельными членами этой группы.

В гл. 3 продолжительность предстоящей жизни рассматривается как непрерывная случайная величина, и после определения функции плотности вводится и исследуется ряд свойств распределений вероятностей. В гл. 4 и 5 рассматриваются договоры страхования жизни и аннуитеты, и настоящие стоимости страховых выплат выражаются как функции продолжительности предстоящей жизни. Исследуется ряд характеристик распределений настоящей стоимости будущих страховых выплат. В гл. 6 вводится принцип эквивалентности, который используется для определения и вычисления величины периодически выплачиваемых нетто-премий. В гл. 7 и 8 исследуется перспективные будущие потери по уже действующим договорам. Рассматривается распределение будущих потерь, и определяется нетто-резерв как математическое ожидание этих потерь. В гл. 9 исследуются аннуитеты и договоры страхования для двух лиц. (Обсуждение более развитой теории страхования жизни для нескольких лиц отложено до гл. 18.) В гл. 10 и 11 рассматривается более реалистическая модель, в которой возможны несколько причин выбытия. Глава 10 посвящена общей теории, а в гл. 11 эта теория применяется к вычислению актуарных настоящих стоимостей различных страховых и пенсионных выплат.

В гл. 12, в контексте короткого временного интервала, развивается модель коллективных рисков для страхового портфеля. Распределение величины суммарных страховых выплат за этот период анализируется на основе предположений о портфеле как едином целом, а не как о сумме индивидуальных договоров. В гл. 13 эти идеи распространяются на модель с непрерывным временем, которую можно применять при исследовании требований к платежеспособности на длительном временном периоде. Обзор применений теории риска к страховым моделям дается в гл. 14.

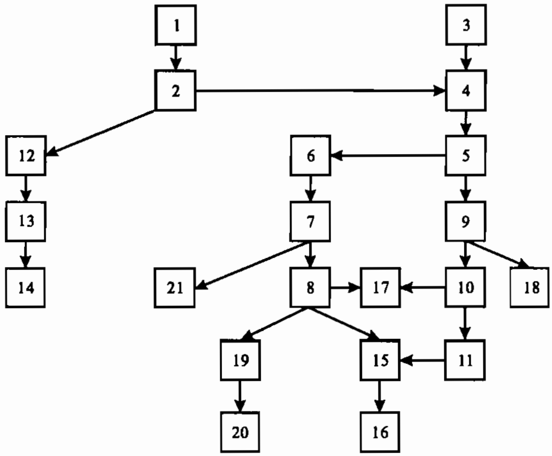
Развитие индивидуальной модели, позволяющее вводить в рассмотрение операционные ограничения, такие, как расходы на заключение новых договоров страхования и административные расходы, требования бухгалтерского учета и влияние досрочного прекращения действия договора, рассматривается в гл. 15 и 16. В гл. 17 модели индивидуальных рисков используются для нахождения актуарных настоящих стоимостей нетто- и брутто-премий, а также нетто-резервов для выбранных специальных схем, включая страховые аннуитеты с гарантированным периодом выплат, который зависит от брутто-премий, переменные и гибкие продукты и ускоренные выплаты. В гл. 18 элементарные модели страхования для двух лиц обобщаются на случай большего числа лиц и более сложных систем выплат.

В гл. 19 вводятся понятия математической демографии. Эти понятия затем применяются для отслеживания динамики выплат по страховым договорам на групповой, или популяционной, основе. В гл. 20 средства демографии применяются для изучения динамики пенсионных выплат для некоторой группы лиц.

Глава 21 представляет собой шаг в будущее. В ней предполагается, что процентные ставки являются случайными величинами. Вводится ряд стохастических моделей, которые затем интегрируются в модели для базовых страховых договоров и аннуитетов.

Следующая диаграмма показывает структуру связей между главами. Стрелками показаны цепочки, определяющие порядок изучения материала. Главы книги, которые находятся в цепочке выше, содержат необходимые предварительные сведения. Например, для чтения гл. 6 необходимо ознакомиться с гл. 1, 2, 3, 4 и 5.

Дадим несколько указаний читателям, особенно тем, для которых материал книги является новым. Упражнения составляют важную часть текста и включают материал, который отсутствует в основном изложении. В некоторых случаях для облегчения их решения мы даем указания. Для всех упражнений приводятся ответы, за исключением тех, которые содержат ответы в самой формулировке задач. Отличным способом повышать степень понимания материала является составление



Взаимозависимость глав

программ для компьютера и использование электронных таблиц или математических пакетов для проверка основных формул. Приведенные в книге упражнения с использованием компьютера должны этому способствовать.

Мы завершим этот вводный раздел рядом разноплановых замечаний об устройстве книги. Во-первых, каждая глава заканчивается разделом «Замечания и литература», который послужит руководством для тех, кто хотел бы углубиться в тематику настоящей главы. В этих разделах приведены также комментарии, которые связывают идеи, используемые в страховых моделях, с аналогичными идеями, применяющимися в прочих областях.

Во-вторых, гл. 1, 12, 13, 14 и 18 содержат некоторые теоремы, доказательства которых вынесены в приложения. Эти доказательства приведены для полноты изложения, но не очень существенны для понимания материала. При желании читатель может опустить эти доказательства. Упражнения, относящиеся к приложениям, также следует рассматривать как необязательные.

В-третьих, после основного текста книги приводятся общие приложения. Они содержат числовые таблицы, применяющиеся для вычислений в упражнениях и примерах, указатель обозначений, обсуждение общих правил составления актуарных символов, список цитируемой литературы, ответы к упражнениям, предметный указатель, а также необходимые математические формулы, которые не входят в набор предварительных сведений по математике, знание которых читателем изначально предполагается.

В-четвертых, отметим два соглашения об обозначениях. Для рассматриваемых в тексте случайных величин зарезервированы заглавные буквы, скажем, X. Такого соглашения не придерживались в предшествующих книгах по теории вероятностей. Мы будем также использовать символ соответствующей случайной величины в индексах функций и операторов, зависящих от этой случайной величины, чтобы указать на их связь. Мы будем использовать стандартное сокращение ln для натуральных (с основанием e) логарифмов и в проводимых вычислениях пользоваться натуральным логарифмом, однако разница между натуральным логарифмом и логарифмом по другому основанию в упражнениях и задачах несущественна.

В-пятых, проводимые вычисления не учитывают национальной специфики, и в упражнениях и примерах не играет роли, какая именно имеется в виду валюта, доллар, фунт, лира или иена.

Наконец, поскольку мы уже обсуждали предварительные требования, необходимые для понимания материала настоящей книги, мы будем использовать в основном изложении и в упражнениях некоторые общие теоремы из стандартных курсов анализа и теории вероятностей, не приводя их формулировки.

1

ЭКОНОМИКА СТРАХОВАНИЯ

1.1. Введение

У каждого из нас есть планы на будущее и некоторые предположения о том, что его или ее в будущем ожидает. Однако опыт учит, что планы не всегда осуществляются, а ожидания подчас не оправдываются. Иногда планы нарушаются из-за того, что были основаны на нереалистических предположениях. В других случаях вмешиваются случайные обстоятельства. Страхование предназначено для того, чтобы защищать от серьезных финансовых изменений, возникающих в результате случайных событий, вмешивающихся в планы отдельных лиц.

Нам следует осознать определенные основополагающие ограничения страховой защиты. Во-первых, она ограничена тем, что уменьшает последствия только тех проявлений случайных событий, которые могут измеряться в денежных единицах. Другие виды ущерба могут быть очень важными, однако их нельзя уменьшить с помощью страхования.

Например, событие, природа которого случайна, может причинить боль и страдания. Однако страховое покрытие за боль и страдания сложно определить, так как такие потери нелегко выразить в денежных единицах. С другой стороны, причиной экономических потерь может оказаться такое событие, как поджог собственности ее хозяином. Хотя величину нанесенного ущерба в денежном выражении вычислить несложно, такие события не страхуются, поскольку неслучайна природа возникновения ущерба.

Вторым основным ограничением является то, что непосредственно страхование не влечет за собой уменьшения вероятности потерь. Существование страхования от бурь никак не изменит вероятность разрушительной бури. Однако хорошо организованная страховая система часто способствует проведению мероприятий, которые предотвращают потери. Существование страхового продукта, который стимулировал бы уничтожение собственности или увольнение трудоспособных лиц, повлияло бы на вероятность этих вредных с точки зрения экономики событий. Такое страхование не принесло бы пользы обществу.

Вот несколько примеров ситуаций, когда случайные события могут причинять финансовые потери:

- Уничтожение собственности огнем или бурей обычно рассматривается как случайное событие, при котором ущерб может быть измерен в денежных единицах.
- Ущерб, причиненный в результате неосторожности, что признано решением суда, часто рассматривается как случайное событие с соответствующими денежными потерями.

- Неожиданно начавшаяся продолжительная болезнь может привести к финансовым потерям. Эти потери состоят как из дополнительных расходов на лечение, так и из сокращения заработка.
- Смерть молодого совершеннолетнего человека может наступить тогда, когда его долгосрочные деловые и семейные обязательства еще не выполнены. Или же средства некоторого лица, дожившего до преклонного возраста, могут оказаться недостаточными для обеспечения ему прожиточного минимума.

Эти примеры призваны проиллюстрировать следующее определение.

Институт страхования (*система страхования*) — это механизм сокращения неблагоприятного финансового влияния случайных событий, которые препятствуют исполнению разумных ожиданий.

Полезно различать институт страхования и близкие к нему системы. Банковские учреждения были созданы для получения, инвестирования и распределения сбережений отдельных физических и юридических лиц. Входящие и исходящие денежные потоки сберегательного учреждения не являются детерминированными. Однако в отличие от систем страхования сберегательные учреждения не производят платежей, основанных на величине финансовых потерь, которые происходят вследствие события, на которое не могут влиять те, кто страдает от его последствий.

Другой системой, которая производит выплаты, основанные на наступлении случайного события, является азартная игра. Однако азартные игры или пари отличаются от страхования тем, что система страхования предназначена для защиты от негативного экономического влияния рисков, которые существуют независимо от застрахованного и контролировать которые он, как правило, не может. Типичная схема азартной игры определяется правилами выплат в связи с реализацией преднамеренно вызываемого события, и игроки добровольно идут на риск. Как и в страховании, при азартной игре обычно перераспределяются денежные средства, но на этом сходство и заканчивается.

Наше определение института страхования намеренно широко. Оно включает в себя системы, которые покрывают как ущерб, связанный с собственностью, так и ущерб, связанный с человеческой жизнью. Мы намереваемся рассматривать как системы страхования, основанные на индивидуальном решении участвовать в них, так и системы, где участие является условием получения работы или права на жительство. Эти темы обсуждаются в разд. 1.4.

Экономическое обоснование института страхования состоит в том, что он способствует общему благосостоянию, увеличивая уверенность в том, что намеченные планы не будут разрушены случайными событиями. Такие системы также могут повышать совокупное производство, поскольку стимулируют отдельных людей и корпорации браться за такие предприятия, в которых имеется риск больших потерь и за которые они не взялись бы при отсутствии страховой защиты. Пример такого типа дает развитие морского страхования, поскольку оно уменьшает финансовые последствия гибели судов на море. Международная торговля способствует процессу специализации и повышению эффективности производства. Но взаимовыгодная торговля была бы чревата слишком большим риском для некоторых потенциальных торговых партнеров, если бы не существовало системы страхования, которая покрывает возможные убытки при морских перевозках.

1.2. Теория полезности

Если бы люди могли предсказать заранее последствия своих решений, их жизнь была бы более простой, но менее интересной. Мы все принимаем решения, основываясь на предпочтениях, которые отдаем некоторым последствиям. Однако мы не обладаем даром абсолютного предвидения. При самом лучшем исходе мы можем выбрать действие, которое приведет нас к одному множеству неопределенностей, а не к другому. Подробно разработана теория, которая помогает принять правильное решение перед лицом неопределенности. Эта область знаний называется *теорией полезности*. В силу большой значимости этой теории для страховых систем мы дадим здесь обзор основных ее положений.

Один из подходов к решению задачи принятия решения перед лицом неопределенности состоит в том, чтобы определить ценность экономического проекта со случайным исходом как его среднее, ожидаемое, значение. Согласно этому *принципу ожидаемого значения*, распределение возможных исходов можно заменить в целях принятия решения одним единственным числом, ожидаемым значением случайного исхода, выраженным в денежной форме. Согласно этому принципу, лицу, принимающему решения, должно быть безразлично, принять на себя случайные потери X или выплатить величину $\mathbf{E}[X]$ с тем, чтобы обезопасить себя от возможных потерь. Аналогично, лицо, принимающее решения, должно быть согласно выплатить сумму, не превышающую величины $\mathbf{E}[Y]$, для того чтобы принять участие в рискованном предприятии со случайными выплатами Y. В экономике ожидаемое значение случайных событий, которые сопряжены с денежными выплатами, часто называется *честной* или *актуарной стоимостью* этого события.

Многие из лиц, принимающих решения, не признают принцип ожидаемого значения. Они считают, что на принимаемое ими решение оказывают влияние размер их капитала и другие характеристики распределения исходов.

Ниже приводится пример, цель которого — продемонстрировать неадекватность принципа ожидаемого значения с точки зрения лица, принимающего решения в страховании от несчастных случаев. Во всех случаях предполагается, что вероятность наступления несчастного случая равна 0,01, а вероятность ненаступления несчастного случая равна 0,99. В зависимости от величины ущерба в результате наступления несчастного случая рассматриваются три варианта; ожидаемый ущерб для каждого из них приведен в следующей таблице:

Случай	Возможный ущерб		Ожидаемый ущерб
1	0	1	0,01
2	0	1 000	10,00
3	0	1 000 000	10 000,00

Возможно, ущерб размера 1 мало волнует человека, принимающего решения, а значит, он может не пожелать платить сумму, большую, чем величина ожидаемого ущерба, за приобретение страхового покрытия. Однако ущерб в размере 1 000 000, который может превышать имеющиеся у него средства, оказался бы катастрофическим. В этом случае человек, принимающий решения, мог бы согласиться заплатить за страхование больше, чем сумма ожидаемых потерь, которая составляет 10 000. Тот факт, что сумма, которую принимающее решения лицо готово заплатить за страховое покрытие, может отличаться от ожидаемого значения, наводит на мысль, что для модели поведения принцип ожидаемого значения не подходит.

Для того чтобы объяснить, почему лицо, принимающее решения, может согласиться платить больше, чем ожидаемое значение, мы исследуем другой подход. Сначала мы просто предположим, что то значение полезности, которое рассматриваемое лицо связывает с капиталом величины w, измеренной в долларах, может быть выражено в виде некоторой функции $u(w)$, называемой *функцией полезности* (*капитала*). Мы проведем процедуру, которая позволяет определить ряд значений такой функции. Для этого мы предположим, что лицо, принимающее решения, имеет капитал 20 000. Линейное преобразование

$$u^*(w) = au(w) + b, \qquad a > 0,$$

определяет функцию $u^*(w)$, которая по существу эквивалентна функции $u(w)$. Тогда с помощью выбора чисел a и b мы можем произвольным образом определить значение функции полезности, соответствующей предпочтениям лица, принимающего решения, в точке 0 и еще в одной точке. Итак, мы полагаем $u(0) = -1$ и $u(20\,000) = 0$. Эти значения отмечены на сплошной линии, изображенной на рис. 1.2.1.

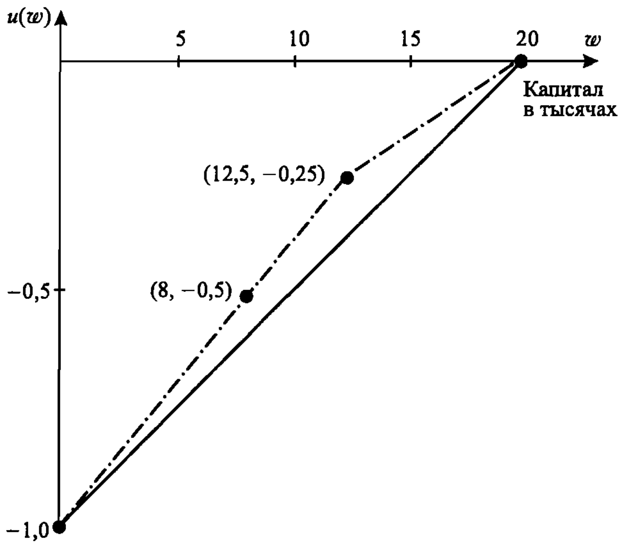


Рис. 1.2.1. Определение функции полезности

Рассмотрим теперь вопрос, волнующий лицо, принимающее решения, о котором шла речь выше: предположим, оно понесет потери величины 20 000 с вероятностью 0,5, с одной стороны, и останется со своим исходным капиталом с вероятностью 0,5, с другой стороны. Какова максимальная сумма G [1], которую это лицо согласилось бы заплатить за полное страховое покрытие случайных потерь? Мы можем формализовать этот вопрос следующим образом: для какого значения G

$$u(20\,000 - G) = 0{,}5\,u(20\,000) + 0{,}5\,u(0) = (0{,}5)(0) + (0{,}5)(-1) = -0{,}5?$$

[1] Размер премии в страховой литературе принято обозначать заглавной буквой, хотя это не случайная величина.

Если выплачивается сумма G, капитал, безусловно, сократится до величины $20\,000 - G$. Знак равенства здесь говорит о том, что лицо, принимающее решения, одинаково относится к тому, чтобы заведомо выплатить сумму G, и к тому, что ожидаемая полезность капитала будет такой, как в правой части выписанного выше соотношения.

Предположим, что ответ лица, принимающего решения, будет $G = 12\,000$. Тогда

$$u(20\,000 - 12\,000) = u(8000) = -0{,}5.$$

Этот результат изображен на пунктирной линии на рис. 1.2.1. Возможно, наиболее важный аспект такого ответа состоит в том, что лицо, принимающее решения, согласно заплатить за страхование сумму, которая превосходит

$$(0{,}5)(0) + (0{,}5)(20\,000) = 10\,000,$$

ожидаемую величину потерь.

Эту процедуру можно использовать для добавления стольких точек $(w, u(w))$ при $0 \leqslant w \leqslant 20\,000$, сколько необходимо для получения удовлетворительного приближения к функции полезности капитала. Если установлены значения функции полезности для двух величин капитала w_1 и w_2, где $0 \leqslant w_1 \leqslant w_2 \leqslant 20\,000$, то можно определить дополнительную точку, задав принимающему решения следующий вопрос: какую максимальную сумму он готов платить за полное страховое покрытие риска, что он останется с капиталом w_2 с некоторой вероятностью p, или с меньшим капиталом w_1 с вероятностью $1-p$? Мы просим принимающего решения определить такое значение G, что

$$u(w_2 - G) = (1-p)u(w_1) + p\,u(w_2). \tag{1.2.1}$$

Если его устраивает значение $w_2 - G = w_3$, то точка $(w_3, (1-p)u(w_1) + p\,u(w_2))$ принимается в качестве еще одной точки графика функции полезности. Этот процесс используется для нахождения четвертой точки $(12\,500, -0{,}25)$ на графике, изображенном на рис. 1.2.1. Такое выяснение предпочтений дает множество точек на графике функции полезности лица, принимающего решения. По этим точкам можно построить гладкую функцию, которая имеет вторую производную, и принять ее в качестве функции полезности в каждой точке.

После того как принимающий решения определил свою функцию полезности, применяя описанный выше метод, эта функция может применяться для сравнения двух случайных экономических исходов. Эти исходы будут обозначаться случайными величинами[1)] X и Y. Мы ищем такое правило принятия решения, которое будет согласовано с предпочтениями, уже выявленными при определении функции полезности капитала. Так, если принимающий решения имеет капитал w и должен сравнить случайные исходы X и Y, то он выберет X, если

$$\mathbf{E}[u(w + X)] > \mathbf{E}[u(w + Y)],$$

и ему будет безразлично, какой из исходов X и Y осуществится, если

$$\mathbf{E}[u(w + X)] = \mathbf{E}[u(w + Y)].$$

Хотя метод опроса и использования функции полезности может показаться разумным, ясно, что наши неформальные построения должны быть подкреплены более

[1)] Часто для термина «случайная величина» мы будем использовать сокращение с.в. — *Прим. ред.*

строгой цепочкой рассуждений, если мы хотим, чтобы теория полезности составила логически последовательную и исчерпывающую основу для принятия решений перед лицом неопределенности. Если мы хотим понять экономическую роль страхования, такая основа необходима. Ниже приводится описание такой более строгой теории.

Отправной точкой теории является предположение о том, что разумный человек, сталкиваясь с двумя распределениями исходов, влияющих на капитал, сумеет выразить либо предпочтение по отношению к одному из этих распределений, либо одинаковое отношение к обоим. Далее, предпочтения должны удовлетворять некоторым требованиям согласованности. Наивысшей точкой теории является теорема, утверждающая, что если предпочтения удовлетворяют требованиям согласованности, то существует функция полезности $u(w)$, такая, что если распределение X предпочтительнее, чем распределение Y, то $\mathbf{E}[u(X)] > \mathbf{E}[u(Y)]$, а если принимающий решения не отдает предпочтение ни одному из этих распределений, то $\mathbf{E}[u(X)] = \mathbf{E}[u(Y)]$. Таким образом, качественное предпочтение или отсутствие такового можно заменить сравнением чисел. В разд. 1.6 даны ссылки на публикации, содержащие подробное изложение этой теории.

Перед тем как переходить к приложениям теории полезности в страховании, выпишем ряд утверждений, касающихся полезности.

Утверждения. 1. Теория полезности основана на предположении о существовании и согласованности предпочтений относительно распределений вероятностей возможных исходов. Функция полезности не должна отражать никаких неожиданностей. Она является численным описанием имеющихся предпочтений.

2. Функция полезности не должна, а на самом деле не может, определяться единственным образом. Например, если

$$u^*(w) = au(w) + b, \qquad a > 0,$$

то соотношение

$$\mathbf{E}[u(X)] > \mathbf{E}[u(Y)]$$

эквивалентно соотношению

$$\mathbf{E}[u^*(X)] > \mathbf{E}[u^*(Y)].$$

Таким образом, предпочтения сохраняются, если функция полезности является линейным преобразованием исходной с положительными коэффициентами. Этот факт использовался в примере, который иллюстрировался рис. 1.2.1, где две точки выбирались произвольным образом.

3. Предположим, что функция полезности линейна и ее угол наклона положителен, т. е.

$$u(w) = aw + b, \qquad a > 0.$$

Тогда если $\mathbf{E}[X] = \mu_X$ и $\mathbf{E}[Y] = \mu_Y$, то

$$\mathbf{E}[u(X)] = a\mu_X + b > \mathbf{E}[u(Y)] = a\mu_Y + b$$

в том и только том случае, когда $\mu_X > \mu_Y$. Таким образом, для возрастающей линейной функции полезности предпочтения относительно распределений исходов упорядочены так же, как математические ожидания этих распределений. Следовательно, если функция полезности является линейной и возрастающей, то принцип ожидаемого значения для рационального экономического поведения перед лицом неопределенности не противоречит правилу ожидаемой полезности.

1.3. Страхование и полезность

В разд. 1.2, чтобы лучше понять экономическую роль страхования, мы описали теорию полезности. Начнем анализ этой роли с одного примера. Предположим, что лицо, принимающее решения, владеет собственностью, которая может быть повреждена или уничтожена в течение следующего отчетного периода. Величина ущерба, которая может равняться 0, — это случайная величина, которая будет обозначаться через X. Мы будем предполагать, что ее распределение известно. Тогда величина $\mathbf{E}[X]$, ожидаемая величина ущерба в следующий отчетный период, может рассматриваться как долговременные средние потери, если эксперимент, состоящий в том, что собственность подвергается опасности ущерба, может многократно проводиться при неизменных условиях. Ясно, что одно лицо, принимающее решения, не может осуществить такую длительную последовательность экспериментов.

Предположим, что создается страховая организация (*страховщик*), цель которой — уменьшить финансовые последствия повреждения или уничтожения собственности. Страховщик выпускает контракты (*договоры*), которые являются обязательствами выплатить владельцу собственности определенную сумму (*страховую сумму*), равную или меньшую, чем понесенные финансовые потери, если собственность повреждена или уничтожена в течение периода действия договора. Платежи, обусловленные этими обстоятельствами и связанные с размером ущерба, называются *страховыми выплатами*. В обмен на обязательства, закрепленные в договоре, владелец собственности (*страхователь*) выплачивает страховщику вознаграждение (*премию*).

Величина премиальных выплат определяется принципом экономических решений, которые принимаются как страховщиком, так и страхователем. Существует возможность взаимовыгодного страхового договора, когда величина премии по договору, определяемая страховщиком, меньше, чем максимальная сумма, которую владелец собственности готов платить за страхование.

При целом ряде финансовых обстоятельств для отдельно взятого договора страхования функция полезности страховщика может приближаться прямой линией. В этом случае при определении размера премии страховщик должен руководствоваться принципом ожидаемого значения, как указано в утверждении 3 разд. 1.2. Другими словами, страховщик должен назначить в качестве базовой премии при полном страховом покрытии величину, равную ожидаемому ущербу, $\mathbf{E}[X] = \mu$. В этом контексте μ называется *нетто-премией* для страхового договора, заключенного на один срок. Для того чтобы обеспечить себе средства на покрытие расходов и уплату налогов, а также некоторую прибыль и чтобы до некоторой степени обезопасить себя от неблагоприятной динамики потерь, страховая система должна при определении премии по договору установить *надбавку*, которая прибавляется к нетто-премии. Например, премия с надбавкой, обозначаемая через H, может задаваться равенством

$$H = (1 + a)\mu + c, \qquad a > 0,\ c > 0.$$

Можно считать, что величина $a\mu$ в этом соотношении связана с теми расходами, которые изменяются с изменением ожидаемого ущерба, и с риском того, что реальные страховые выплаты будут отличаться от ожидаемых. Константа c соответствует ожидаемым расходам, которые не зависят от величины ущерба. Ниже мы рассмотрим другие экономические принципы, лежащие в основе определения премий, которые могут быть приемлемыми для страховщика.

Применим теорию полезности к проблеме принятия решений, с которой сталкивается лицо, собственность которого подвергается риску. Такой владелец собственности обладает функцией полезности капитала $u(w)$, где капитал w измерен в денежных единицах. Он может понести потери из-за наступления случайных событий, которые нанесут вред его собственности. Распределение случайных потерь X предполагается известным. Как и в (1.2.1), владельцу собственности безразлично, платить ли сумму G страховщику, перекладывая на него случайные финансовые потери, или принимать риск на себя. Это положение может быть формализовано соотношением

$$u(w - G) = \mathbf{E}[u(w - X)]. \tag{1.3.1}$$

Правая часть формулы (1.3.1) представляет собой ожидаемую полезность при отказе от покупки страхового договора, если текущая величина капитала владельца собственности равна w. Левая часть представляет собой ожидаемую полезность при выплате суммы G за полное финансовое покрытие.

Если функция полезности владельца является возрастающей и линейной, т.е. $u(w) = bw + d$, $b > 0$, то он примет принцип ожидаемого значения. В этом случае владелец собственности или не отдает предпочтение ни одной из возможностей, или отдает предпочтение страхованию, если

$$\begin{gathered} u(w - G) = b(w - G) + d \geqslant \mathbf{E}[u(w - X)] = \mathbf{E}[b(w - X) + d], \\ b(w - G) + d \geqslant b(w - \mu) + d, \\ G \leqslant \mu. \end{gathered}$$

Таким образом, если функция полезности владельца собственности возрастает и линейна, величина премии, при которой он не отдает предпочтения ни одной из возможностей или предпочитает приобрести полное страховое покрытие, не превосходит величины ожидаемых потерь. При отсутствии дотаций при долгосрочном планировании страховщик должен позаботиться о том, чтобы полученные премии превысили его ожидаемые потери. Поэтому в рассматриваемом случае заключение взаимовыгодного страхового договора маловероятно. При заключении страхового договора страховщик, для того чтобы избежать недостаточности поступлений, должен назначить премию, размер которой превышает ожидаемый ущерб и расходы. Таким образом, функция полезности владельца собственности не может быть линейной.

В разд. 1.2 отмечалось, что для существования функции полезности необходимо, чтобы предпочтения лица, принимающего решения, обладали определенными свойствами согласованности. Хотя эти требования и не были перечислены, отметим, что они не содержат никаких положений, в силу которых функция полезности оказывалась бы линейной, квадратичной, показательной, логарифмической или имела какую-либо другую определенную форму. На самом деле каждая из перечисленных выше функций может служить функцией полезности для некоторого лица, принимающего решения, а функция, составленная из их сегментов, может отражать предпочтения еще какого-то лица.

Все же кажется естественным предполагать, что $u(w)$ является возрастающей функцией, «больше — лучше». Кроме того, было замечено, что для многих лиц, принимающих решения, при увеличении капитала равными долями полезность увеличивается уменьшающимися долями. Это отражается в известном экономическом положении об убывающей предельной полезности.

Приближение функции полезности на рис. 1.2.1 состоит из сегментов прямых с положительными коэффициентами наклона. Это дает соотношение $\Delta^2 u(w) \leqslant 0$. (По поводу конечных разностей см. приложение 5.) Если это наблюдение распространить на более гладкие функции, то мы придем к следующим двум свойствам: $u'(w) > 0$ и $u''(w) < 0$. Из второго неравенства следует, что $u(w)$ является строго выпуклой вверх функцией.

В обсуждении решений, принимаемых в страховании на основе строго выпуклой вверх функции полезности, мы будем пользоваться ***неравенством Иенсена***. Это неравенство утверждает, что для с. в. X и функции $u(w)$

$$\text{если } u'' < 0, \text{ то } \mathbf{E}[u(X)] \leqslant u(\mathbf{E}[X]), \tag{1.3.2}$$

$$\text{если } u'' > 0, \text{ то } \mathbf{E}[u(X)] \geqslant u(\mathbf{E}[X]). \tag{1.3.3}$$

Неравенство Иенсена предполагает существование обоих математических ожиданий. Одно из доказательств этого неравенства составляет упр. 1.3. Другое доказательство неравенства (1.3.2) почти сразу следует из анализа приведенного ниже рис. 1.3.1.

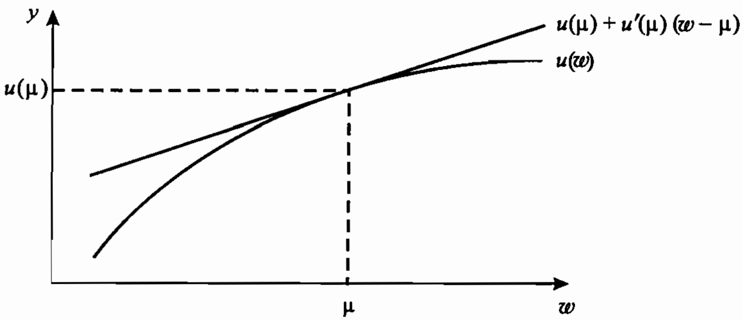


Рис. 1.3.1. Доказательство неравенства Иенсена в случае $u'(w) > 0$ и $u''(w) < 0$

Если $\mathbf{E}[X] = \mu$ существует, рассмотрим касательную к $u(w)$ в точке $(\mu, u(\mu))$,

$$y = u(\mu) + u'(\mu)(w - \mu).$$

Из-за строгой выпуклости вверх функции $u(w)$ ее график будет лежать ниже касательной. Другими словами,

$$u(w) \leqslant u(\mu) + u'(\mu)(w - \mu) \tag{1.3.4}$$

для всех значений w. Если вместо w подставить случайную величину X и взять математическое ожидание от обеих частей неравенства (1.3.4), то мы получим $\mathbf{E}[u(X)] \leqslant u(\mu)$.

Это основное неравенство имеет ряд применений в актуарной математике. Применим неравенство Иенсена (1.3.2) к задаче принятия решения о страховании, сформулированной в виде формулы (1.3.1). Мы будем предполагать, что предпочтения лица, принимающего решения, таковы, что $u'(w) > 0$ и $u''(w) < 0$. Применяя неравенство Иенсена к формуле (1.3.1), мы имеем

$$u(w - G) = \mathbf{E}[u(w - X)] \leqslant u(w - \mu). \tag{1.3.5}$$

Поскольку $u'(w) > 0$, $u(w)$ является возрастающей функцией. Поэтому из неравенства (1.3.5) следует, что $w - G \leqslant w - \mu$, или $G \geqslant \mu$, причем $G > \mu$, если только с.в. X не является константой. В экономических терминах, мы установили, что если $u'(w) > 0$ и $u''(w) < 0$, то принимающий решения будет платить за страхование сумму, превосходящую ожидаемые потери. Если величина G не меньше премии, назначенной страховщиком, то возможен взаимовыгодный страховой договор.

Формально, будем говорить, что лицо, принимающее решения на основе функции полезности $u(w)$, *не склонно к риску*, тогда и только тогда, когда $u''(w) < 0$.

Займемся теперь общей функцией полезности для страховщика. Обозначим через $u_I(w)$ функцию полезности страховщика и через w_I текущий капитал страховщика в денежных единицах. Тогда минимальная допустимая премия H за взятый на себя риск X с точки зрения страховщика может быть определена из формулы

$$u_I(w_I) = \mathbf{E}[u_I(w_I + H - X)]. \tag{1.3.6}$$

Ее левая часть является полезностью, соответствующей текущему положению страховщика. Правая часть является ожидаемой полезностью, соответствующей получению премии H и выплате случайных потерь X. Другими словами, для страховщика нет различия между его текущим положением и предоставлением страхового покрытия от риска X при условии получения премии H. Если функция полезности страховщика такова, что $u_I'(w) > 0$ и $u_I''(w) < 0$, то, воспользовавшись неравенством Иенсена (1.3.2) и соотношением (1.3.6), мы можем получить

$$u_I(w_I) = \mathbf{E}[u_I(w_I + H - X)] \leqslant u_I(w_I + H - \mu).$$

Применяя те же рассуждения, что и для формулы (1.3.5), мы видим, что $H \geqslant \mu$. Если величина G, определяемая лицом, принимающим решения, исходя из соотношения (1.3.5), такова, что $G \geqslant H \geqslant \mu$, страховой договор может быть заключен. Это означает, что ожидаемая полезность ни для одной из сторон не убывает.

Функция полезности основана на предпочтениях лица, принимающего решения, при различных распределениях исходов. Страховщик — это не обязательно отдельное физическое лицо. Это может быть товарищество, акционерное общество или государственная организация. В этом случае определение $u_I(w)$, функции полезности страховщика, может оказаться довольно тяжелой задачей. Например, если страховщик является акционерным обществом, одной из обязанностей правления является выработка логически последовательного множества предпочтений относительно ряда рискованных предприятий. Эти предпочтения могут включать компромиссы между не совпадающими позициями по отношению к риску разных групп акционеров.

Для иллюстрации свойств функций полезности используется ряд элементарных функций. Мы рассмотрим сейчас показательную, степенную с дробным показателем и квадратичную функции. Примеры 1.6, 1.8, 1.9, 1.10(b) и 1.13 относятся к логарифмической функции полезности.

Показательная (или, иначе, *экспоненциальная*) *функция полезности* имеет вид

$$u(w) = -e^{-\alpha w} \quad \text{для всех } w \text{ и для некоторого фиксированного } \alpha > 0$$

и обладает рядом привлекательных свойств. Во-первых,

$$u'(w) = \alpha e^{-\alpha w} > 0.$$

Во-вторых,

$$u''(w) = -\alpha^2 e^{-\alpha w} < 0.$$

Поэтому $u(w)$ может использоваться в качестве функции полезности для лица, не склонного к риску. В третьих, заметив, что

$$\mathbf{E}[-e^{-\alpha X}] = -\mathbf{E}[e^{-\alpha X}] = -M_X(-\alpha),$$

мы, по сути дела, нашли производящую функцию моментов с.в. X. В предыдущей формуле

$$M_X(t) = \mathbf{E}[e^{tX}]$$

обозначает производящую функцию моментов с.в. X. В четвертых, страховые премии не зависят от капитала лица, принимающего решения. Для проверки этого утверждения следует подставить показательную функцию полезности в формулу (1.3.1). Тогда

$$-e^{-\alpha(w-G)} = \mathbf{E}[-e^{-\alpha(w-X)}], \qquad e^{\alpha G} = M_X(\alpha), \qquad G = \frac{\ln M_X(\alpha)}{\alpha}$$

и G не зависит от w.

Проверка для страховщика осуществляется подстановкой показательной функции полезности с параметром α_I в (1.3.6):

$$-e^{-\alpha_I w_I} = \mathbf{E}[-e^{-\alpha_I(w_I+H-X)}], \qquad e^{\alpha_I w_I} = -e^{-\alpha_I(w_I+H)} M_X(\alpha_I), \qquad H = \frac{\ln M_X(\alpha_I)}{\alpha_I}.$$

Пример 1.3.1. Функция полезности лица, принимающего решения, имеет вид $u(w) = -e^{-5w}$. Для принимающего решения имеется две случайные экономические возможности. Первая из них, обозначаемая через X, имеет нормальное распределение со средним 5 и дисперсией 2. Впредь, говоря о нормальном распределении со средним μ и с дисперсией σ^2, мы будем пользоваться сокращенной записью $N(\mu, \sigma^2)$. Другая возможность, обозначаемая через Y, имеет распределение $N(6,\ 2{,}5)$. Какую возможность следует предпочесть?

Решение. Имеем

$$\mathbf{E}[u(X)] = \mathbf{E}[-e^{-5X}] = -M_X(-5) = -e^{[-5(5)+(5^2)(2)/2]} = -1,$$

$$\mathbf{E}[u(Y)] = \mathbf{E}[-e^{-5Y}] = -M_Y(-5) = -e^{[-5(6)+(5^2)(2{,}5)/2]} = -e^{1{,}25}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{E}[u(X)] = -1 > \mathbf{E}[u(Y)] = -e^{1{,}25},$$

и распределение с.в. X предпочтительнее распределения с.в. Y. ▼

В примере 1.3.1 с.в. X предпочтительнее, чем Y, несмотря на то, что $\mu_X = 5 < \mu_Y = 6$. Поскольку принимающий решения не склонен к риску, тот факт, что распределение с.в. Y более «размазано», чем распределение с.в. X, свидетельствует против распределения с.в. Y при оценке его желательности. Если с.в. Y имеет распределение $N(6,\ 2{,}4)$, то $\mathbf{E}[u(Y)] = -1$ и для принимающего решения будет безразлично, выбрать распределение X или распределение Y.

Семейство *степенных с дробным показателем функций полезности* задается соотношением

$$u(w) = w^{\gamma}, \qquad w > 0,\ 0 < \gamma < 1.$$

Элемент этого семейства может представлять предпочтение лица, не склонного к риску, поскольку

$$u'(w) = \gamma w^{\gamma-1} > 0 \qquad \text{и} \qquad u''(w) = \gamma(\gamma-1)w^{\gamma-2} < 0.$$

Для этого семейства размер премии зависит от капитала лица, принимающего решения, достаточно реалистичным во многих ситуациях образом.

Пример 1.3.2. Функция полезности лица, принимающего решения, задается выражением $u(w) = \sqrt{w}$. Принимающий решения имеет капитал $w = 10$ и может понести случайные потери X, которые распределены равномерно на интервале $(0, 10)$. Какую максимальную сумму он готов заплатить за полное страховое покрытие против указанных случайных потерь?

Решение. Подставляя указанное выражение для функции полезности в (1.3.1), мы получим

$$\sqrt{10-G} = \mathbf{E}[\sqrt{10-X}] = \int_0^{10} \frac{\sqrt{10-x}}{10}\,dx = \left.\frac{-2(10-x)^{3/2}}{3(10)}\right|_0^{10} = \frac{3}{2}\sqrt{10}, \quad G = 5{,}5556.$$

Принимающий решения не склонен к риску и $u'(w) > 0$. Согласно обсуждению формулы (1.3.5), следует ожидать, что $G > \mathbf{E}[X]$, и в нашем примере $G = 5{,}5556 > \mathbf{E}[X] = 5$. ▼

Семейство *квадратичных функций полезности* задается соотношением

$$u(w) = w - \alpha w^2, \qquad w < (2\alpha)^{-1},\ \alpha > 0.$$

Элемент этого семейства может представлять предпочтение лица, не склонного к риску, поскольку $u''(w) = -2\alpha$. Хотя квадратичная функция полезности удобна тем, что зависит только от первых двух моментов распределений рассматриваемых исходов, ряд последствий ее использования некоторым лицам кажется неразумным. Пример 1.3.3 иллюстрирует одно из таких последствий.

Пример 1.3.3. Функция полезности лица, принимающего решения, задается выражением

$$u(w) = w - 0{,}01w^2, \qquad w < 50.$$

Принимающий решения сохранит капитал w с вероятностью p и будет нести финансовые потери величины c с вероятностью $1-p$. Для значений w, c и p, указанных в приведенной ниже таблице, найдем максимальную страховую премию, которую принимающий решения готов заплатить за полное страховое покрытие. Предположим, что $c \leqslant w < 50$.

Решение. Для нашей задачи формула (1.3.1) приобретает вид

$$u(w-G) = pu(w) + (1-p)u(w-c),$$

$$(w-G) - 0{,}01(w-G)^2 = p(w - 0{,}01w^2) + (1-p)[(w-c) - 0{,}001(w-c)^2].$$

Для заданных значений w, p и c эта формула становится квадратным уравнением. Ниже приведены два его решения.

Капитал w	Потери c	Вероятность p	Страховая премия G
10	10	0,5	5,28
20	10	0,5	5,37

▼

В примере 1.3.3, как и ожидалось, G превосходит величину ожидаемых потерь, 5. Однако максимальная страховая премия за потери с одним и тем же распределением растет с ростом капитала лица, принимающего решения. Этот результат кажется неестественным тем, кто считает, что более типичным поведением было бы уменьшение суммы, которую принимающий решения готов выплачивать за страхование, поскольку при увеличении капитала он мог бы позволить себе больший риск. К сожалению, рост максимальной страховой премии с ростом капитала является характеристической чертой квадратичной функции полезности. Поэтому тем из принимающих решения лиц, которые полагают, что их способность брать на себя случайные потери растет с ростом капитала, не следует выбирать такие функции полезности.

Если мы рассмотрим пример 1.3.3, используя показательную функцию полезности, то, как мы знаем, премия G не будет зависеть от w, величины капитала. Так, если $u(w) = -e^{-0,01w}$, то можно показать, что $G = 5{,}12$ как при $w = 10$, так и при $w = 20$.

Пример 1.3.4. Вероятность того, что собственности не будет нанесен ущерб за следующий период времени, равняется 0,75. Функция плотности возможных положительных потерь задается соотношением

$$f(x) = 0{,}25(0{,}01e^{-0{,}01x}), \qquad x > 0.$$

Функция полезности владельца собственности имеет вид

$$u(w) = -e^{-0{,}005w}.$$

Вычислим ожидаемые потери и максимальный размер страховой премии, которую владелец собственности готов заплатить за полное страховое покрытие.

Решение. Ожидаемые потери задаются формулой

$$\mathbf{E}[X] = 0{,}75(0) + 0{,}25\int_0^\infty x(0{,}01e^{-0{,}01x})\,dx = 25.$$

Применяем формулу (1.3.1) для определения максимальной премии, которую владелец собственности готов заплатить за полное страховое покрытие. Эта премия будет согласована с предпочтениями владельца собственности, выраженными такой функцией полезности:

$$u(w-G) = 0{,}75u(w) + \int_0^\infty u(w-x)f(x)\,dx,$$

$$-e^{-0{,}005(w-G)} = -0{,}75e^{-0{,}005w} - 0{,}25\int_0^\infty e^{-0{,}005(w-x)}(0{,}01e^{-0{,}01x})\,dx,$$

$$e^{0{,}005G} = 0{,}75 + (0{,}25)(2) = 1{,}25, \qquad G = 200\ln 1{,}25 = 44{,}63.$$

Таким образом, в соответствии с предпочтениями владельца собственности для покупки страхового договора, покрывающего все потери следующего временно́го периода, он готов выплатить сумму, превышающую ожидаемые потери, самое большее, на $44{,}63 - 25 = 19{,}63$. ▼

В примере 1.3.5 мы вводим понятие страхования, при котором сумма покрытия меньше, чем величина полных потерь. Формулу (1.3.1) можно модифицировать так, чтобы она годилась для случая, когда потери делятся между лицом, принимающим решения, и системой страхования.

Пример 1.3.5. Владельцу собственности из примера 1.3.4 предлагается договор страхования, по которому будет выплачиваться 1/2 от любых потерь, понесенных им в следующем временно́м периоде. Ожидаемое значение частичных выплат в связи с потерями составляет $\mathbf{E}[X/2] = 12{,}50$. Рассчитаем максимальную премию, которую владелец собственности выплатит за такой страховой договор.

Решение. Как показывает функция полезности, премия, согласованная с отношением владельца собственности к риску, определяется из соотношения

$$0{,}75u(w-G) + \int_0^\infty u\left(w - G - \frac{x}{2}\right) f(x)\,dx = 0{,}75u(w) + \int_0^\infty u(w-x)f(x)\,dx.$$

Левая часть этого равенства представляет ожидаемую полезность с частичным страховым покрытием. Правая представляет ожидаемую полезность при полном отсутствии страхования. Для показательной функции полезности и для функции плотности потерь из примера 1.3.4 можно показать, что $G = 28{,}62$. При частичном страховом возмещении владелец собственности готов заплатить сумму, превышающую ожидаемые частичные потери, самое большее, на величину $G - \mu = 28{,}62 - 25{,}50 = 16{,}12$. ▼

1.4. Элементы страхования

Как отдельным лицам, так и организациям угрожают финансовые потери вследствие случайных событий. В разд. 1.3 мы видели, как страхование может увеличить ожидаемую полезность для лица, принимающего решения, когда существует возможность таких случайных потерь. Уникальность страховых систем состоит в том, что смягчение финансовых потерь, число, размер или время наступления которых являются случайными, — это важнейшая причина их существования. В этом разделе мы рассмотрим некоторые из факторов, влияющих на организацию и управление страховой системой.

Страховая система может быть построена только после того, как очерчена группа ситуаций, в которых могут возникнуть случайные потери. Слово «случайные» означает, в частности, что предполагаемый страхователь не может контролировать частоту, размер и время наступления потерь. Если же он может их контролировать, или если размер страховых выплат превышает размер действительных финансовых потерь, то существует побудительная причина подвергать себя риску. В этом случае не соблюдаются предположения, при которых была построена страховая система. Реальные условия, при которых будут собираться страховые премии и производиться страховые выплаты, окажутся иными, чем те, которые были заложены при организации системы. Система не будет отвечать поставленной перед ней цели, чтобы ожидаемая полезность не убывала ни для страховщика, ни для страхователя.

Как только класс страхуемых событий определен, можно получить информацию об ожидаемых полезностях и о процессе, порождающем потери. Исследование рынка в страховании можно рассматривать как попытку выяснить как можно больше о функциях полезности, т. е. о рисковых предпочтениях клиентов.

Процессы, определяющие размер и время наступления потерь, могут быть достаточно стабильными во времени, так что при планировании системы можно использовать информацию за предыдущий период. При организации новой системы часто не имеется статистики, относящейся к ней непосредственно. Однако можно получить достаточно много дополнительной информации относительно аналогичных рисковых ситуаций, чтобы определить риски и дать предварительные оценки вероятностных распределений, необходимых для установления премий. Поскольку большинство страховых систем работают в динамических условиях, для того чтобы система в дальнейшем успешно адаптировалась, необходимо иметь план сбора и анализа текущей статистической информации. Адаптация в этом контексте может означать изменение премий, выплату дивидендов или возврат премии, а также изменение будущих договоров.

В конкурентной экономике рыночные силы вынуждают страховщиков вырабатывать такие тарифы для краткосрочных страховых контрактов, при которых отклонения значений, наблюдаемых на практике, от среднего значения ведут себя как независимые случайные величины. Эти отклонения не должны складываться в структуру, которую страховщик или страхователь мог бы использовать для получения устойчивой прибыли. Наличие таких устойчивых отклонений указывало бы на неэффективность страхового рынка.

Все это показывает, что распределение рисков по однородным группам является важной функцией рыночной страховой системы. Случайный характер отклонений в опытных данных указывает на эффективность, или справедливость, классификации. На конкурентном страховом рынке постоянные взаимодействия многочисленных покупателей и продавцов приводят к экспериментированию с системами классификации, поскольку участники рынка пытаются извлечь преимущество из знания структуры этих отклонений. Так как страховые потери могут быть достаточно редкими событиями, бывает довольно трудно выявить неслучайные структуры. Стоимость информации, необходимой для уточнения системы классификации, также ограничивает возможности экспериментирования.

В страховых системах, предназначенных для обслуживания групп, а не отдельных лиц, вопрос о том, случайны ли имеющиеся отклонения от страховой практики для каждого лица, не так актуален. Вместо него на первое место выходит вопрос, случайны ли отклонения от групповой практики. Постоянные расхождения между опытными и ожидаемыми результатами указывали бы на необходимость пересмотра системы.

Групповые страховые решения основаны не на сравнениях индивидуальной ожидаемой полезности; напротив, схемы группового страхования основываются на коллективном решении вопроса, увеличивает ли система совокупный капитал всей группы. Примером служит коллективное страхование на случай болезни, предусматривающее выплату пособий служащим некоторой компании.

1.5. Оптимальное страхование

Соображения, описанные в разд. 1.2, 1.3 и 1.4, были использованы в качестве основы для построения тщательно продуманной теории, которая призвана помочь лицам, принимающим решения в страховой сфере, действовать в соответствии с их предпочтениями. В этом разделе мы представим один из основных результатов этой теории и еще раз остановимся на описанных выше соображениях.

Лицо, принимающее решения, располагает капиталом величины w, и ему в следующем временно́м интервале грозят потери. Потери представляются случайной величиной X. Принимающий решения может купить страховой договор, согласно которому ему будет выплачена сумма $I(x)$ при потерях x. Для того чтобы у него не было побудительной причины стремиться к потерям, предположим, что все *допустимые* страховые договоры таковы, что $0 \leqslant I(x) \leqslant x$. Мы делаем упрощающее предположение, что все допустимые договоры, для которых $\mathbf{E}[I(X)] = \beta$, могут быть приобретены за одну и ту же сумму P.

Лицо, принимающее решения, определило функцию полезности $u(w)$, которая согласована с его предпочтениями для распределений исходов. Мы предположим, что принимающий решения не склонен к риску, $u''(u) < 0$. Далее, мы предположим, что он уже определил сумму, обозначим ее через P, которую он согласен заплатить за страхование. Вопрос состоит в следующем: какой из договоров страхования, принадлежащих классу допустимых договоров с ожидаемыми страховыми выплатами β и премией P следует приобрести, чтобы максимизировать ожидаемую полезность для лица, принимающего решения?

Один из подклассов класса допустимых страховых договоров определяется следующим образом:

$$I_d(x) = \begin{cases} 0, & x < d, \\ x - d, & x \geqslant d. \end{cases} \tag{1.5.1}$$

Этот класс договоров характеризуется тем, что страховые выплаты не производятся, пока потери не превосходят *безусловную франшизу* d. По условиям договора для потерь, превышающих безусловную франшизу, выплачивается разница между потерями и безусловной франшизой. Такой тип страхования иногда называется страхованием *эксцедента убытка*, или *эксцедента убыточности*, в зависимости от приложений.

В обсуждавшейся в этом разделе задаче ожидаемые страховые выплаты обозначались через β. В формулах (1.5.2) ниже символ $f(x)$ обозначает функцию плотности, а $F(x)$ — функцию распределения, соответствующие случайным потерям X:

$$\beta = \int_d^\infty (x - d) f(x)\, dx, \tag{1.5.2A}$$

или

$$\beta = \int_d^\infty [1 - F(x)]\, dx. \tag{1.5.2B}$$

Формула (1.5.2B) получена из (1.5.2A) интегрированием по частям. Когда величина β задана, формулы (1.5.2) дают явные уравнения для соответствующей безусловной франшизы, обозначаемой через d^*. В упр. 1.17 показано, что d^* существует и единственна.

Основной результат настоящего раздела можно сформулировать в виде теоремы:

Теорема 1.5.1. *Если лицо, принимающее решения,*

- *имеет капитал* w,
- *не склонно к риску, другими словами, его функция полезности* $u(w)$ *такова, что* $u''(w) < 0$,
- *подвергается риску случайных потерь* X,
- *согласно выплатить сумму* P *за страховое покрытие,*

и если страховой рынок предоставляет все допустимые договоры страхования стоимости P и вида $I(x)$, $0 \leqslant I(x) \leqslant x$, где $\mathbf{E}[I(X)] = \beta$, то ожидаемая полезность для лица, принимающего решения, максимизируется приобретением договора страхования

$$I_{d^*}(x) = \begin{cases} 0, & x < d^*, \\ x - d^*, & x \geqslant d^*, \end{cases}$$

где d^* является решением уравнения

$$\beta - \int_d^\infty (x - d) f(x)\, dx = 0.$$

Доказательство теоремы содержится в приложении к этой главе.

Теорема 1.5.1 является важным результатом и иллюстрирует многие идеи, развитые в этой главе. Однако полезно рассмотреть ряд ограничений ее применимости. Во-первых, отношение премий к ожидаемым страховым выплатам одно и то же для всех имеющихся договоров. На самом деле распределения случайных величин $I(X)$ могут быть весьма различными, и рисковая надбавка, включающаяся в премию, обычно зависит от характеристик распределения $I(X)$. Во-вторых, в теореме 1.5.1 предполагается, что премия P зафиксирована бюджетными ограничениями, и другие значения для величины P не рассматриваются. В упр. 1.22 рассматривается ослабление бюджетных ограничений. В-третьих, хотя в теореме указан вид страхования, это не помогает определить сумму P, которую надо потратить. В теореме величина P фиксирована.

1.6. Замечания и литература

Определения и принципы актуарной науки можно найти в «Principles of Actuarial Science» (Society of Actuaries Committee on Actuarial Principles, 1992).

Роль риска в деловой практике изучалась в диссертации Уиллетта [Willett 1951], проложившей путь для дальнейших исследований. Борх опубликовал серию статей [Borch 1974], применяя теорию полезности к вопросам страхования. Де Гроот в книге [De Groot 1970] дал полное изложение теории полезности, начиная с базовых аксиом согласованности предпочтений для различных распределений исходов. И Де Гроот, и Борх обсуждали важный с исторической точки зрения Петербургский парадокс, описанный в упр. 1.2. Статья Фридмана и Сэвиджа [Friedman, Savage 1948] внесла существенный вклад в теорию полезности и поведения человека.

Пратт [Pratt 1964] изучал формулу (1.3.1) и получил несколько теорем о премиях и функциях полезности. Упражнение 1.10, в котором используются два грубых приближения, связано с одним из результатов Пратта.

Теорема 1.5.1 об оптимальном страховании была доказана Эрроу [Arrow 1963] в контексте страхования на случай болезни. Теорема в упр. 1.21, в которой целью страхования является минимизация дисперсии удержанных потерь, была темой работ Борха [Borch 1960] и Хана [Kahn 1961]. Использование дисперсии потерь в качестве меры стабильности обсуждалось Бёрдом, Пентикайненом и Песоненом [Beard, Pentikäinen, Pesonen 1984]. Упражнение 1.32 основано на их обсуждении.

Приложение

Лемма. *Если $u''(w) < 0$ для всех w из $[a,b]$, то для w и z из $[a,b]$*
$$u(w) - u(z) \leqslant (w-z)u'(z). \tag{1.A.1}$$

Доказательство. Лемму можно доказать с помощью графика на рис. 1.3.1. Воспользовавшись выпуклостью, заметим, что прямая, касательная к $u(w)$ в точке $(z, u(z))$, задается уравнением $y - u(z) = u'(z)(w-z)$ и лежит выше графика функции $u(w)$ всюду, кроме точки $(z, u(z))$. Таким образом,
$$u(w) - u(z) \leqslant u'(z)(w-z).$$
На рис. 1.3.1 показан случай $u'(w) > 0$. Аналогичные аргументы справедливы и в случае $u'(w) < 0$. ■

В упр. 1.20 требуется найти другое доказательство этой леммы.

Доказательство теоремы 1.5.1. Пусть $I(x)$ относится к договору страхования, удовлетворяющему условиям теоремы. Тогда, согласно лемме,
$$u(w-x+I(x)-P) - u(w-x+I_{d^*}(x)-P) \leqslant [I(x) - I_{d^*}(x)]\,u'(w-x+I_{d^*}(x)-P). \tag{1.A.2}$$
Кроме того, мы утверждаем, что
$$[I(x) - I_{d^*}(x)]\,u'(w-x+I_{d^*}(x)-P) \leqslant [I(x) - I_{d^*}(x)]\,u'(w-d^*-P). \tag{1.A.3}$$
Для доказательства неравенства (1.A.3) мы должны рассмотреть три случая:

Случай I. $I_{d^*}(x) = I(x)$.

В этом случае выполняется равенство: в (1.A.3) равны нулю как правая, так и левая части.

Случай II. $I_{d^*}(x) > I(x)$.

В этом случае $I_{d^*}(x) > 0$ и из формулы (1.5.1) следует, что $x - I_{d^*}(x) = d^*$. Поэтому имеет место равенство, причем как правая, так и левая части в формуле (1.A.3) равны $[I(x) - I_{d^*}(x)]\,u'(w-d^*-P)$.

Случай III. $I_{d^*}(x) < I(x)$.

В этом случае $I(x) - I_{d^*}(x) > 0$. Из формулы (1.5.1) следует, что $I_{d^*}(x) - x \geqslant -d^*$ и $I_{d^*}(x) - x - P \geqslant -d^* - P$. Поэтому
$$u'(w-x+I_{d^*}(x)-P) \leqslant u'(w-d^*-P),$$
поскольку вторая производная функции $u(x)$ отрицательна и $u'(x)$ является убывающей функцией.

Итак, в каждом из рассматривавшихся случаев
$$[I(x) - I_{d^*}(x)]u'(w-x+I_{d^*}(x)-P) \leqslant [I(x) - I_{d^*}(x)]u'(w-P-d^*),$$
что доказывает неравенство (1.A.3).

Используя неравенства (1.A.2) и (1.A.3) и беря математические ожидания, получаем
$$\begin{aligned}\mathbf{E}[u(w-X+I(X)-P)] - \mathbf{E}[u(w-X+I_{d^*}(X)-P)] &\leqslant \mathbf{E}[I(X) - I_{d^*}(X)]u'(w-d^*-P) \\ &= (\beta-\beta)u'(w-d^*-P) = 0.\end{aligned}$$
Поэтому $\mathbf{E}[u(w-X+I(X)-P)] \leqslant \mathbf{E}[u(w-X+I_{d^*}(X)-P)]$, и ожидаемая полезность будет максимизирована выбором $I_{d^*}(x)$, т. е. договором эксцедента убыточности. ■

Упражнения

К разделу 1.2

1.1. Предположим, что текущий капитал лица, принимающего решения, равен 10 000. Положим $u(0) = -1$ и $u(10\,000) = 0$.

(а) При возможных потерях X, случающихся с вероятностью 0,5, и при вероятности 0,5 сохранить текущий капитал лицо, принимающее решения, согласно выплатить за полное страховое покрытие сумму, не превышающую G. Ниже приведены значения величин X и G в трех случаях.

X	G
10 000	6 000
6 000	3 300
3 300	1 700

Определите три значения функции полезности u лица, принимающего решения.

(b) Вычислите наклон четырех прямолинейных отрезков, соединяющих пять точек, определенных на графике функции $u(w)$. Определите скорость изменения наклона от сегмента к сегменту (которая определяется конечной разностью второго порядка).

(c) Представьте себя в роли принимающего решения лица, располагающего капиталом 10 000. Помимо заданных значений $u(0)$ и $u(10\,000)$ найдите три дополнительных значения вашей функции полезности u.

(d) На основе пяти значений вашей функции полезности найдите углы наклона и скорость их изменения, как в п. (b)

1.2. Петербургский парадокс. Рассмотрим игру, состоящую в подбрасывании монеты до тех пор, пока не выпадет орел. Вероятность выпадения орла равна 0,5 и испытания независимы. Пусть случайная величина N является количеством испытаний до первого выпадения орла.

(a) Покажите, что функция вероятностей с. в. N задается выражениями

$$f(n) = (1/2)^n, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

(b) Найдите $\mathbf{E}[N]$ и $\mathbf{D}[N]$.

(c) Докажите, что если выплачивается вознаграждение вида $X = 2^N$, то математическое ожидание вознаграждения бесконечно.

(d) Найдите $\mathbf{E}[u(X)]$ при условии, что выплачиваемое вознаграждение имеет функцию полезности $u(w) = \ln w$.

К разделу 1.3

1.3. Неравенство Иенсена.

(a) Предположим, что $u''(w) < 0$, $\mathbf{E}[X] = \mu$ и $\mathbf{E}[u(X)]$ конечно. Докажите, что $\mathbf{E}[u(X)] \leqslant u(\mu)$. [Указание. Разложите $u(w)$ в ряд в окрестности точки $w = \mu$ с остаточным членом, включающим вторую производную. Обратите внимание на то, что для справедливости неравенства Иенсена не требуется, чтобы $u'(w) > 0$.]

(b) Если $u''(w) > 0$, докажите, что $\mathbf{E}[u(X)] \geqslant u(\mu)$.

(c) Рассмотрите неравенство Иенсена для частного случая $u(w) = w^2$. Чему равно выражение

$$\mathbf{E}[u(X)] - u(\mathbf{E}[X])?$$

1.4. Если функция полезности такова, что $u'(w) > 0$ и $u''(w) > 0$, воспользуйтесь формулой (1.3.1) для того, чтобы показать, что $G \leqslant \mu$. Лицо, принимающее решения, предпочтения которого таковы, что $u''(w) > 0$, является *любителем риска*.

1.5. Предъявите геометрическое доказательство, основанное на графике, аналогичном тому, который приведен на рис. 1.3.1, того факта, что если $u'(w) < 0$ и $u''(w) < 0$, то имеет место (1.3.4).

1.6. Покажите, что функция полезности $u(w) = \ln w$, $w > 0$, является функцией полезности не склонного к риску лица, принимающего решения, при $w > 0$.

1.7. Пусть функция полезности задается соотношением

$$u(w) = \begin{cases} e^{-(w-100)^2/200}, & w < 100, \\ 2 - e^{-(w-100)^2/200}, & w \geqslant 100. \end{cases}$$

(a) Верно ли, что $u'(w) \geqslant 0$?

(b) Для каких w верно неравенство $u''(w) < 0$?

1.8. Докажите такое утверждение: если предположить, как это сделал Даниил Бернулли, комментируя Петербургский парадокс, что функция полезности капитала удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{du(w)}{dw} = \frac{k}{w}, \qquad w > 0,\ k > 0,$$

то $u(w) = k \ln w + c$.

1.9. Пусть лицо, принимающее решения, имеет функцию полезности $u(w) = k \ln w$. Оно располагает капиталом w, $w > 1$, и подвергается риску X, который равномерно распределен на интервале $(0, 1)$. Воспользуйтесь соотношением (1.3.1) для того, чтобы доказать, что максимальная страховая премия, которую принимающий решения готов выплатить за полное страховое покрытие, равна

$$G = w - \frac{w^w}{e(w-1)^{w-1}}.$$

1.10. (a) В (1.3.1) воспользуйтесь приближениями

$$u(w - G) \cong u(w - \mu) + (\mu - G)u'(w - \mu),$$

$$u(w - x) \cong u(w - \mu) + (\mu - x)u'(w - \mu) + \frac{1}{2}(\mu - x)^2 u''(w - \mu)$$

и выведите следующее приближение для G:

$$G \cong \mu - \frac{1}{2}\frac{u''(w-\mu)}{u'(w-\mu)}\,\sigma^2.$$

(b) Пусть $u(w) = k \ln w$. Воспользуйтесь приближением из п. (a) для доказательства соотношения

$$G \cong \mu + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{|w-\mu|}.$$

1.11. Функция полезности принимающего решения лица имеет вид $u(w) = -e^{-\alpha w}$. Оно подвергается риску, который имеет распределение χ^2 с n степенями свободы. Если $0 < \alpha < 1/2$, воспользуйтесь соотношением (1.3.1), чтобы получить выражение для максимальной страховой премии G, которую лицо, принимающее решения, готово выплатить, и докажите, что $G > n = \mu$.

1.12. Повторите решение задачи из примера 1.3.4 для
(a) $u(w) = -e^{-w/400}$, (b) $u(w) = -e^{-w/150}$.

1.13. (a) Страховщик, имеющий капитал 100, принял на себя риск X, распределенный согласно следующему закону:

$$\mathbf{P}(X=0) = \mathbf{P}(X=51) = 1/2.$$

Какова максимальная сумма G, которую он должен выплатить другому страховщику для того, чтобы он принял 100% соответствующих потерь? Предположим, что функция полезности первого страховщика имеет вид $u(w) = \ln w$.

(b) Страховщик, имеющий капитал 650 и такую же функцию полезности, $u(w) = \ln w$, рассматривает возможность принять на себя риск, указанный выше. Какова минимальная величина H, которую этот страховщик примет в качестве премии для покрытия 100% указанных выше потерь?

1.14. Пусть полное страховое покрытие из примера 1.3.4 можно приобрести за сумму 40, а 50% от страхового покрытия из примера 1.3.5 можно приобрести за сумму 25. Приобретение какого страхового покрытия максимизирует ожидаемую полезность для владельца собственности?

К разделу 1.4

1.15. Группе, состоящей из n лиц, предоставлен договор страхования, покрывающий расходы на лечение в стационаре. Согласно этому договору, каждый раз, когда какой-либо член этой группы попадает в стационар, выплачивается B долларов. Предполагается, что группа неоднородна по отношению к ожидаемому количеству попаданий в стационар на протяжении года. Вся группа может быть разбита на r подгрупп. В подгруппе с номером i содержится n_i лиц и $\sum_1^r n_i = n$. Для каждого из членов подгруппы с номером i число попаданий в стационар в течение года имеет пуассоновское распределение с параметром λ_i, $i = 1, 2, \ldots, r$. Числа попаданий в стационар в течение года для членов группы взаимно независимы.

(a) Покажите, что ожидаемые страховые выплаты за один год составят

$$B\sum_1^r n_i\lambda_i = Bn\bar{\lambda}, \quad \text{где } \bar{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_1^r n_i\lambda_i.$$

(b) Покажите, что число попаданий в стационар за один год для всей группы имеет пуассоновское распределение с параметром $n\bar{\lambda}$.

К разделу 1.5

1.16. Выполните интегрирование по частям, указанное для формул (1.5.2). Воспользуйтесь тем фактом, что $\mathbf{E}[X]$ существует тогда и только тогда, когда $\lim_{x\to\infty} x[1-F(x)] = 0$.

1.17. (a) Продифференцируйте правую часть формулы (1.5.2B) по d.

(b) Пусть β — такое число, что $0 < \beta < \mathbf{E}[X]$. Покажите, что (1.5.2) имеет единственное решение d^*.

1.18. Пусть функция плотности случайной величины X, описывающей потери, задана формулой

$$f(x) = 0{,}1e^{-0{,}1x}, \qquad x > 0.$$

(a) Вычислите $\mathbf{E}[X]$ и $\mathbf{D}[X]$.

(b) Покажите, что если при приобретении страхового покрытия в качестве нетто-премии будет заплачено $P = 5$, то

$$I(x) = \frac{x}{2} \qquad \text{и} \qquad I_d(x) = \begin{cases} 0, & x < d, \\ x - d, & x \geqslant d, \end{cases} \qquad \text{где } d = 10\ln 2.$$

Оба эти выражения представляют допустимые страховые договоры с нетто-премией $P = 5$. При этом $I(x)$ называется *пропорциональным страхованием*.

1.19. Случайная величина X, описывающая потери, имеет плотность вида

$$f(x) = 1/100, \qquad 0 < x < 100.$$

(a) Вычислите $\mathbf{E}[X]$ и $\mathbf{D}[X]$.

(b) Рассмотрите договор пропорционального страхования, где

$$I(x) = kx, \qquad 0 < k < 1,$$

и договор эксцедента убыточности, где

$$I_d(x) = \begin{cases} 0, & x < d, \\ x - d, & x \geqslant d. \end{cases}$$

Определите k и d, такие, что размер нетто-премии в каждом случае составит $P = 12{,}5$.

(c) Покажите, что $\mathbf{D}[X - I(X)] > \mathbf{D}[X - I_d(X)]$.

К приложению

1.20. Докажите лемму, используя не геометрический, а аналитический подход. [Указание. Разложите $u(w)$ в ряд с остаточным членом, содержащим вторую производную, в окрестности точки z и вычтите $u(z)$.]

1.21. Пусть выполнены предположения теоремы 1.5.1 относительно β и страхового договора $I(x)$, и пусть $\mathbf{E}[X] = \mu$. Докажите, что

$$\mathbf{D}[X - I(X)] = \mathbf{E}[(X - I(X) - \mu + \beta)^2]$$

является минимальной, если $I(x) = I_{d^*}(x)$. Вам придется доказать, что при фиксированной нетто-премии страховой договор эксцедента убыточности будет минимизировать дисперсию удержанных страховых выплат. [Указание. Можно следовать доказательству теоремы

1.5.1, показав сначала, что $x^2 - z^2 \geqslant (x - z)(2z)$, а затем проверив, что

$$[x - I(x)]^2 - [x - I_{d^*}(x)]^2 \geqslant [I_{d^*}(x) - I(x)][2x - 2I_{d^*}(x)] \geqslant 2[I_{d^*}(x) - I(x)]d^*.$$

Искомое неравенство можно проверить, разбивая доказательство на три случая. Чтобы дать еще одно доказательство, заметим, что при соответствующем выборе размера капитала и функции полезности результат настоящего упражнения является частным случаем теоремы 1.5.1.]

1.22. Пусть выполнены предположения теоремы 1.5.1, за исключением бюджетного ограничения. То есть принимающее решения лицо готово выплатить премию P, $0 < P \leqslant \mathbf{E}[X] = \mu$, которая максимизирует ожидаемую полезность. Кроме того, предположим, что любое допустимое страхование может быть приобретено за сумму, равную его ожидаемой стоимости. Докажите, что оптимальным страхованием будет $I_0(x)$. Этот результат может быть сформулирован так: полное страховое покрытие оптимально в случае отсутствия бюджетных ограничений, если страхование может быть приобретено по цене его нетто-премии. [Указание. Воспользуйтесь леммой, в которой роль w играет $w - x + I(x) - P$, а роль z играет $w - x + I_0(x) - \mathbf{E}[X] = w - \mu$. Возьмите математические ожидания и проверьте, что $\mathbf{E}[u(w - X) + I(X) - P] \leqslant u(w - \mu)$.]

1.23. В теореме 1.5.1 и в упр. 1.21 были установлены свойства оптимальности страхования эксцедента убыточности. Эти свойства зависят от критерия, согласно которому принимается решение, от ограничений, а также от наличия других страховых возможностей. В каждом из указанных рассуждений имелись бюджетные ограничения. Рассмотрим ситуацию, когда имеются ограничения на риск и когда цена страхования зависит от страхового риска, измеренного с помощью дисперсии.

(i) Страховая премия равна $\mathbf{E}[I(X)] + f(\mathbf{D}[I(X)])$, где $f(w)$ является возрастающей функцией. Величину $f(\mathbf{D}[I(X)])$ можно интерпретировать как *рисковую надбавку*.

(ii) Лицо, принимающее решения, решает удержать потери $X - I(X)$, такие, что $\mathbf{D}[X - I(X)] = V \geqslant 0$. Это требование налагает не бюджетные, а рисковые ограничения. Константа определяется степенью несклонности к риску, свойственной принимающему решения. Критерий принятия решений в теории портфельного инвестирования состоит в том, чтобы фиксировать допустимую дисперсию, а затем оптимизировать ожидаемые результаты.

(iii) Лицо, принимающее решения, выбирает функцию $I(x)$, которая минимизирует $f(\mathbf{D}[I(X)])$. Целью является минимизация рисковой надбавки, которая равна выплаченной премии минус ожидаемые страховые выплаты. Выполним следующие шаги:

(a) $\mathbf{E}[I(X)] = V + \mathbf{E}(X) - 2\,\mathbf{Cov}[X, X - I(X)]$.

(b) Величина $I(x)$, которая минимизирует $\mathbf{D}[I(X)]$, а следовательно, и $f(\mathbf{D}[I(X)])$, такова, что коэффициент корреляции между X и $X - I(X)$ равен 1.

(c) Известно, что если две случайные величины W и Z имеют коэффициент корреляции, равный 1, то $\mathbf{P}\{W = aZ + b,\ \text{где } a > 0\} = 1$. Иначе говоря, вероятность того, что их совместное распределение сосредоточено на прямой, имеющей положительный наклон, равна 1. В п. (b) было показано, что коэффициент корреляции между X и $X - I(X)$ равен 1. Таким образом, $X - I(X) = aX + b$, откуда следует, что $I(X) = (1 - a)X - b$. Для допустимого страхования $0 \leqslant I(x) \leqslant x$ или $0 \leqslant (1-a)x - b \leqslant x$. Из этих неравенств следует, что $b = 0$ и $0 \leqslant 1 - a \leqslant 1$ и $0 \leqslant a \leqslant 1$.

(d) Для определения a будем считать, что коэффициент корреляции между X и $X - I(X)$ равен 1, или, что то же самое, их ковариация равна произведению их стандартных отклонений. Покажите, что в этом случае $a = \sqrt{V/\mathbf{D}[X]}$ и страхование, которое минимизирует $f(\mathbf{D}[X])$, соответствует $I(X) = [1 - \sqrt{V/\mathbf{D}[X]}]X$.

2

МОДЕЛИ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ РИСКОВ НА КОРОТКОМ ИНТЕРВАЛЕ ВРЕМЕНИ

2.1. Введение

В гл. 1 мы рассматривали вопрос, как лицо, принимающее решения, может использовать страхование для уменьшения неблагоприятного финансового воздействия некоторых типов случайных событий. Это рассмотрение было весьма общим. Под лицом, принимающим решения, мог подразумеваться как отдельный человек, ищущий защиту от ущерба, причиняемого собственности, сбережениям или доходам, так и организация, ищущая защиту от того же рода ущерба. На самом деле такой организацией может оказаться страховая компания, которая ищет способы защитить себя от финансовых потерь из-за слишком большого числа страховых случаев, произошедших с отдельным ее клиентом или с ее страховым портфелем. Такая защита называется *перестрахованием* и будет введена в следующей главе.

Теория, изложенная в гл. 1, требует введения вероятностной модели для потенциальных потерь. Сейчас мы рассмотрим одну из двух моделей, широко используемых в определении страховых тарифов и резервов, а также в перестраховании.

Обозначим через S величину случайных потерь страховой компании по некоторой части ее рисков. В этом случае S является случайной величиной, для которой мы должны определить распределение вероятностей. Исторически для распределений с.в. S имелось два набора постулатов. *Модель индивидуальных рисков* определяет S следующим образом:

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n, \tag{2.1.1}$$

где с.в. X_i обозначает потери, причиненные объектом страхования с номером i, а n обозначает общее количество объектов страхования. Обычно предполагается, что X_i являются независимыми случайными величинами, поскольку в этом случае проще математические расчеты и не требуется сведений о характере зависимости между ними. Второй моделью является модель коллективных рисков, описанная в гл. 12.

Модель индивидуальных рисков, рассматриваемая в этой главе, не отражает изменения ценности денег с течением времени. Это делается для упрощения модели, и именно поэтому в заглавии говорится о коротком интервале времени. В гл. 4–11 рассматриваются модели на протяженных интервалах времени.

В этой главе мы будем рассматривать только *замкнутые модели*, т. е. те, в которых число объектов страхования n в формуле (2.1.1) известно и зафиксировано в самом начале рассматриваемого интервала времени. Если мы вводим предположения о наличии миграции из или в страховую систему, то получаем *открытую модель*.

2.2. Случайные величины, описывающие индивидуальные выплаты

Сначала напомним основные положения, касающиеся страхования жизни. При *страховании на случай смерти на срок один год* страховщик обязуется выплатить величину b, если страхователь умрет в течение года с момента заключения договора страхования, и не выплачивает ничего, если страхователь проживет этот год. Вероятность наступления страхового случая в течение указанного года обозначается через q. Случайная величина X, описывающая страховые выплаты, имеет распределение, которое может задаваться либо функцией вероятностей

$$f_X(x) = \mathbf{P}(X=x) = \begin{cases} 1-q, & x=0, \\ q, & x=b, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \tag{2.2.1}$$

либо соответствующей функцией распределения

$$F_X(x) = \mathbf{P}(X \leqslant x) = \begin{cases} 0, & x<0, \\ 1-q, & 0 \leqslant x < b, \\ 1, & x \geqslant b. \end{cases} \tag{2.2.2}$$

Из формулы (2.2.1) и из определения моментов получаем

$$\mathbf{E}[X] = bq, \qquad \mathbf{E}[X^2] = b^2 q, \tag{2.2.3}$$

$$\mathbf{D}[X] = b^2 q(1-q). \tag{2.2.4}$$

Эти формулы можно также получить, записав X в виде

$$X = Ib, \tag{2.2.5}$$

где b — постоянная величина, выплачиваемая на случай смерти, а I — случайная величина, принимающая значение 1 при наступлении смерти и 0 в противном случае. Таким образом, $\mathbf{P}(I=0) = 1-q$ и $\mathbf{P}(I=1) = q$, и среднее значение и дисперсия с.в. I равны q и $q(1-q)$ соответственно, а среднее значение и дисперсия с.в. X равны bq и $b^2q(1-q)$, что совпадает с выписанными выше формулами.

Случайная величина I с областью значений $\{0,1\}$ широко применяется в актуарных моделях. В учебниках по теории вероятностей она называется *индикатором, бернуллиевской случайной величиной* или *биномиальной случайной величиной* в схеме единственного испытания. Мы будем называть ее индикатором из соображений краткости, а также потому, что она указывает наступление, $I=1$, или ненаступление, $I=0$, рассматриваемого события.

Перейдем к поиску более общих моделей, в которых величина страховой выплаты также является случайной величиной и в рассматриваемом интервале времени может произойти несколько страховых случаев. Страхование на случай болезни, страхование автомобилей и прочих видов собственности, а также страхование гражданской ответственности сразу же предоставляют множество примеров. Обобщая формулу (2.2.5), положим

$$X = IB, \tag{2.2.6}$$

где X — случайная величина, описывающая страховые выплаты в рассматриваемом интервале времени, с.в. B обозначает общую величину выплат в этом интервале и с.в. I является индикатором для события, состоящего в том, что произошел по меньшей мере один страховой случай. Являясь индикатором такого события, с.в. I фиксирует наличие ($I = 1$) или отсутствие ($I = 0$) страховых случаев в этом интервале времени, но не количество страховых случаев в нем. Вероятность $\mathbf{P}(I=1)$ по-прежнему будет обозначаться через q.

Обсудим несколько примеров и определим распределение случайных величин I и B в некоторой модели. Рассмотрим сначала страхование на случай смерти на срок один год с дополнительной выплатой, если смерть наступила в результате несчастного случая. Для определенности предположим, что если смерть произошла в результате несчастного случая, то величина выплаты составит 50 000. При наступлении смерти по прочим причинам величина выплаты составит 25 000. Предположим, что для лица данного возраста, состояния здоровья и профессии вероятность смерти в результате несчастного случая в течение года равна 0,0005, а вероятность смерти по прочим причинам равна 0,0020. В виде формулы это выглядит так:

$$\mathbf{P}(I=1, B=50\,000) = 0{,}0005 \quad \text{и} \quad \mathbf{P}(I=1, B=25\,000) = 0{,}0020.$$

Суммируя по всем возможным значениям B, получим

$$\mathbf{P}(I=1) = 0{,}0025,$$

так что

$$\mathbf{P}(I=0) = 1 - \mathbf{P}(I=1) = 0{,}9975.$$

Условное распределение с.в. B при условии $I = 1$ имеет вид

$$\mathbf{P}(B=25\,000 \,|\, I=1) = \frac{\mathbf{P}(B=25\,000, I=1)}{\mathbf{P}(I=1)} = \frac{0{,}0020}{0{,}0025} = 0{,}8,$$

$$\mathbf{P}(B=50\,000 \,|\, I=1) = \frac{\mathbf{P}(B=50\,000, I=1)}{\mathbf{P}(I=1)} = \frac{0{,}0005}{0{,}0025} = 0{,}2.$$

Рассмотрим теперь страхование автомобилей от столкновений (возмещение выплачивается собственнику автомобиля за ущерб, нанесенный его автомобилю) с величиной безусловной франшизы 250 и с максимальным размером выплаты 2000. Для наглядности предположим, что вероятность наступления одного страхового случая в рассматриваемый период времени для отдельного лица составляет 0,15, а вероятность наступления более чем одного столкновения равна нулю:

$$\mathbf{P}(I=0) = 0{,}85, \qquad \mathbf{P}(I=1) = 0{,}15.$$

Нереалистическое предположение о том, что в течение одного периода может произойти не более одного страхового случая, делается для того, чтобы упростить распределение с.в. B. Мы откажемся от этого предположения в следующем разделе после того, как рассмотрим распределение суммы нескольких страховых случаев. Поскольку B является величиной выплат страховщика, а не ущербом, нанесенным автомобилю, мы можем рассматривать две характеристики, I и B. Во-первых, событие $I = 0$ включает в себя те столкновения, в которых ущерб меньше, чем безусловная франшиза, которая равна 250. Во-вторых, распределение с.в. B будет иметь «сгусток» вероятностной массы в точке максимального размера страховых выплат, который равен 2000. Предположим, что вероятностная масса, сосредоточенная в этой точке, равна 0,1. Далее, предположим, что величину страховых выплат в интервале от 0 до 2000 можно моделировать непрерывным распределением с функцией плотности, пропорциональной $1 - x/2000$ для $0 < x < 2000$. (На практике непрерывная кривая, которая выбирается для представления распределения страховых выплат, является результатом исследований размеров выплат в предыдущем периоде.) Суммируя эти предположения об условном распределении с.в. B при условии $I = 1$, мы приходим к распределению смешанного типа, имеющему положительную плотность в интервале от 0 до 2000 и некоторый «сгусток» вероятностной массы в точке 2000. Это иллюстрируется графиком на рис. 2.2.1. Функция распределения этого условного распределения выглядит так:

$$\mathbf{P}(B \leqslant x \mid I=1) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ 0{,}9[1-(1-x/2000)^2], & 0 < x < 2000, \\ 1, & x \geqslant 2000. \end{cases}$$

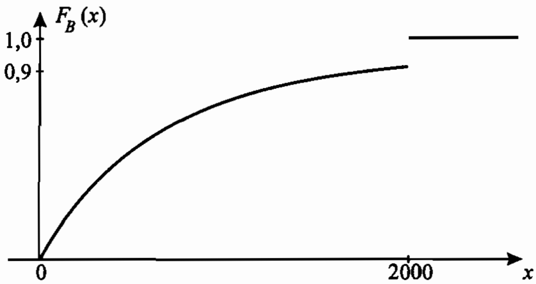


Рис. 2.2.1. Функция распределения с.в. B при условии $I = 1$

В разд. 2.4 мы увидим, что часто используются моменты случайной величины X, описывающей страховые выплаты, в частности, ее математическое ожидание и дисперсия. Вычислим математическое ожидание и дисперсию в рассматриваемом примере с автомобильным страхованием двумя способами. Во-первых, выпишем распределение с.в. X и воспользуемся им для расчета $\mathbf{E}[X]$ и $\mathbf{D}[X]$. Обозначая через $F_X(x)$ функцию распределения с.в. X, имеем

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbf{P}(X \leqslant x) = \mathbf{P}(IB \leqslant x) \\ &= \mathbf{P}(IB \leqslant x \mid I=0)\,\mathbf{P}(I=0) + \mathbf{P}(IB \leqslant x \mid I=1)\,\mathbf{P}(I=1). \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

Для $x < 0$

$$F_X(x) = 0(0{,}85) + 0(0{,}15) = 0.$$

Для $0 \leqslant x < 2000$

$$F_X(x) = 1(0{,}85) + 0{,}9\left[1 - \left(1 - \frac{x}{2000}\right)^2\right](0{,}15).$$

Для $x \geqslant 2000$

$$F_X(x) = 1(0{,}85) + 1(0{,}15) = 1.$$

Это распределение смешанного типа. Как показано на рис. 2.2.2, оно имеет как дискретную («сгусток» вероятностной массы в точке 2000), так и непрерывную часть.

Такой функции распределения соответствует комбинация функции вероятностей

$$\mathbf{P}(X=0) = 0{,}85, \qquad \mathbf{P}(X=2000) = 0{,}015, \tag{2.2.8}$$

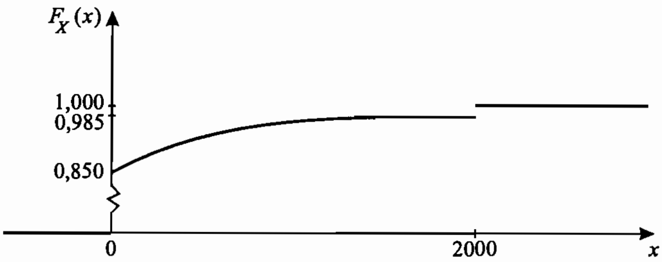


Рис. 2.2.2. Функция распределения с.в. $X = IB$

и функции плотности

$$f_X(x) = \begin{cases} F'_X(x) = 0{,}000135(1 - x/2000), & 0 < x < 2000, \\ 0 & \text{для остальных } x. \end{cases}$$

Моменты с.в. X можно подсчитать следующим образом:

$$\mathbf{E}[X^k] = 0 \cdot \mathbf{P}(X=0) + (2000)^k \cdot \mathbf{P}(X=2000) + \int_0^{2000} x^k f_X(x)\, dx. \tag{2.2.9}$$

В частности,

$$\mathbf{E}[X] = 120 \quad \text{и} \quad \mathbf{E}[X^2] = 150\,000.$$

Поэтому

$$\mathbf{D}[X] = 135\,600.$$

Имеется ряд формул, связывающих моменты случайных величин с условными математическими ожиданиями. Для математического ожидания и для дисперсии эти формулы имеют вид

$$\mathbf{E}[W] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[W\,|\,V]], \tag{2.2.10}$$

$$\mathbf{D}[W] = \mathbf{D}[\mathbf{E}[W\,|\,V]] + \mathbf{E}[\mathbf{D}[W\,|\,V]]. \tag{2.2.11}$$

Подразумевается, что выражения в левых частях этих равенств вычисляются непосредственно по распределению с.в. W. При вычислении выражений в правых частях, а именно $\mathbf{E}[W\,|\,V]$ и $\mathbf{D}[W\,|\,V]$, используется условное распределение с.в. W при фиксированном значении с.в. V. Эти выражения являются, таким образом, функциями с.в. V, и мы можем вычислить их моменты, используя распределение с.в. V.

Условные распределения используются во многих актуарных моделях, и это позволяет непосредственно применять выписанные выше формулы. В нашей модели $X = IB$. Рассматривая с.в. X в качестве W и с.в. I в качестве V, получаем

$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[X\,|\,I]], \tag{2.2.12}$$

$$\mathbf{D}[X] = \mathbf{D}[\mathbf{E}[X\,|\,I]] + \mathbf{E}[\mathbf{D}[X\,|\,I]]. \tag{2.2.13}$$

Запишем

$$\mu = \mathbf{E}[B\,|\,I=1], \tag{2.2.14}$$

$$\sigma^2 = \mathbf{D}[B\,|\,I=1] \tag{2.2.15}$$

и рассмотрим условные математические ожидания

$$\mathbf{E}[X \mid I=0] = 0, \tag{2.2.16}$$

$$\mathbf{E}[X \mid I=1] = \mathbf{E}[B \mid I=1] = \mu. \tag{2.2.17}$$

Формулы (2.2.16) и (2.2.17) определяют $\mathbf{E}[X \mid I]$ как функцию от с.в. I, что может быть записано в виде следующей формулы:

$$\mathbf{E}[X \mid I] = \mu I. \tag{2.2.18}$$

Значит,

$$\mathbf{E}[\mathbf{E}[X \mid I]] = \mu \mathbf{E}[I] = \mu q, \tag{2.2.19}$$

$$\mathbf{D}[\mathbf{E}[X \mid I]] = \mu^2 \mathbf{D}[I] = \mu^2 q(1-q). \tag{2.2.20}$$

Так как $X = 0$ при $I = 0$, то

$$\mathbf{D}[X \mid I=0] = 0. \tag{2.2.21}$$

Для $I = 1$ мы имеем $X = B$ и

$$\mathbf{D}[X \mid I=1] = \mathbf{D}[B \mid I=1] = \sigma^2. \tag{2.2.22}$$

Формулы (2.2.21) и (2.2.22) можно объединить:

$$\mathbf{D}[X \mid I] = \sigma^2 I. \tag{2.2.23}$$

Таким образом,

$$\mathbf{E}[\mathbf{D}[X \mid I]] = \sigma^2 \mathbf{E}[I] = \sigma^2 q. \tag{2.2.24}$$

Подставляя (2.2.21), (2.2.20) и (2.2.24) в (2.2.12) и (2.2.13), мы получаем

$$\mathbf{E}[X] = \mu q, \tag{2.2.25}$$

$$\mathbf{D}[X] = \mu^2 q(1-q) + \sigma^2 q. \tag{2.2.26}$$

Применим полученные формулы для вычисления $\mathbf{E}[X]$ и $\mathbf{D}[X]$ в примере автомобильного страхования (рис. 2.2.2). Поскольку функция плотности с.в. B при условии $I = 1$ выражается формулой

$$f_{B \mid I}(x \mid 1) = \begin{cases} 0{,}0009(1 - x/2000), & 0 < x < 2000, \\ 0 & \text{для остальных } x, \end{cases}$$

причем $\mathbf{P}(B=2000 \mid I=1) = 0{,}1$, мы имеем

$$\mu = \int_0^{2000} 0{,}0009\, x\left(1 - \frac{x}{2000}\right) dx + (0{,}1)(2000) = 800,$$

$$\mathbf{E}[B^2 \mid I=1] = \int_0^{2000} 0{,}0009\, x^2\left(1 - \frac{x}{2000}\right) dx + (0{,}1)(2000)^2 = 1\,000\,000,$$

$$\sigma^2 = 1\,000\,000 - (800)^2 = 360\,000.$$

Наконец, полагая $q = 0{,}15$, из формул (2.2.25) и (2.2.26) мы получим следующие равенства:

$$\mathbf{E}[X] = 800(0{,}15) = 120,$$

$$\mathbf{D}[X] = (800)^2(0{,}15)(0{,}85) + (360\,000)(0{,}15) = 135\,600.$$

Для описания другой страховой ситуации можно предложить другие модели для с.в. B. В качестве примера рассмотрим модель для числа смертей, произошедших в результате авиационных катастроф за годичный период деятельности авиакомпании. Мы можем начать со случайной величины X, описывающей число смертей для одного рейса, а потом просуммировать такие случайные величины по всем рейсам за год. Для одного рейса событие $I = 1$ будет обозначать наступление авиакатастрофы. Число B смертей, которое повлекла за собой эта катастрофа, будет представляться произведением двух случайных величин L и Q, где L — коэффициент загруженности самолета, т. е. число лиц, находившихся на борту в момент авиакатастрофы, и Q — доля смертельных исходов среди лиц, находившихся на борту. Число смертей B представляется именно таким образом, поскольку раздельная статистика для величин L и Q бывает более доступной, чем статистика для с.в. B. Итак, $X = ILQ$. Хотя доля смертельных исходов среди лиц, находившихся на борту, и число лиц, находившихся на борту, вероятно, связаны между собой, в качестве первого приближения можно предположить, что с.в. L и Q независимы.

2.3. Суммы независимых случайных величин

В модели индивидуальных рисков страховые выплаты, производимые страховой компанией, представляются как сумма выплат многим отдельным лицам.

В большинстве приложений страховые выплаты отдельным лицам предполагаются независимыми. В этом разделе мы напомним два метода определения распределения суммы независимых случайных величин. Рассмотрим сначала сумму двух случайных величин, $S = X + Y$, выборочное пространство которых изображено на рис. 2.3.1.

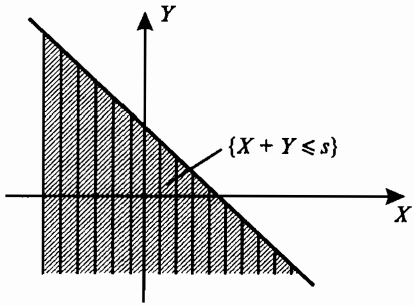


Рис. 2.3.1. Событие $\{X + Y \leqslant s\}$

Прямая $X+Y = s$ и область, находящаяся под этой прямой, представляют собой событие $\{S = X + Y \leqslant s\}$. Поэтому функция распределения с.в. S имеет вид

$$F_S(s) = \mathbf{P}(S \leqslant s) = \mathbf{P}(X + Y \leqslant s). \tag{2.3.1}$$

Для двух дискретных неотрицательных случайных величин мы можем воспользоваться формулой полной вероятности и записать (2.3.1) в виде

$$\begin{aligned} F_S(s) &= \sum_{\text{по всем } y \leqslant s} \mathbf{P}(X + Y \leqslant s \mid Y = y)\, \mathbf{P}(Y = y) \\ &= \sum_{\text{по всем } y \leqslant s} \mathbf{P}(X \leqslant s - y \mid Y = y)\, \mathbf{P}(Y = y). \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

Если X и Y независимы, последняя сумма может быть переписана в виде

$$F_S(s) = \sum_{\text{по всем } y \leqslant s} F_X(s-y) f_Y(y). \tag{2.3.3}$$

Функция вероятностей, соответствующая этой функции распределения, может быть найдена по формуле

$$f_S(s) = \sum_{\text{по всем } y \leqslant s} f_X(s-y) f_Y(y). \tag{2.3.4}$$

Для непрерывных неотрицательных случайных величин формулы, соответствующие формулам (2.3.2), (2.3.3) и (2.3.4), имеют вид

$$F_S(s) = \int_0^s \mathbf{P}(X \leqslant s-y \,|\, Y=y) f_Y(y)\, dy, \tag{2.3.5}$$

$$F_S(s) = \int_0^s F_X(s-y) f_Y(y)\, dy, \tag{2.3.6}$$

$$f_S(s) = \int_0^s f_X(s-y) f_Y(y)\, dy. \tag{2.3.7}$$

Когда либо одна, либо обе случайные величины X и Y имеют распределение смешанного типа (что характерно для моделей индивидуальных рисков), формулы аналогичны, но более громоздки. Для случайных величин, которые могут принимать также отрицательные значения, суммы и интегралы в приведенных формулах берутся по всем значениям y от $-\infty$ до $+\infty$.

В теории вероятностей операция в формулах (2.3.3) и (2.3.6) называется *сверткой* двух функций распределения $F_X(x)$ и $F_Y(y)$ и обозначается через $F_X * F_Y$. Операция свертки может также быть определена для пары функций вероятностей или функций плотности с помощью формул (2.3.4) и (2.3.7).

Для определения распределения суммы более чем двух случайных величин мы можем использовать итерации процесса взятия свертки. Для $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, где X_i являются независимыми случайными величинами, F_i обозначает функцию распределения с.в. X_i, а $F^{(k)}$ является функцией распределения с.в. $X_1 + X_2 + \dots + X_k$, мы получим

$$\begin{aligned}
F^{(2)} &= F_2 * F^{(1)} = F_2 * F_1, \\
F^{(3)} &= F_3 * F^{(2)}, \\
F^{(4)} &= F_4 * F^{(3)}, \\
&\dots\dots\dots\dots \\
F^{(n)} &= F_n * F^{(n-1)}.
\end{aligned}$$

Пример 2.3.1 иллюстрирует эту процедуру для трех дискретных случайных величин.

Пример 2.3.1. Случайные величины X_1, X_2 и X_3 независимы и имеют распределения, которые определяются столбцами (1), (2) и (3) приведенной ниже таблицы. Выпишем функцию вероятностей и функцию распределения с.в. $S = X_1 + X_2 + X_3$.

Решение. В таблице используются обозначения, введенные перед примером:

- В столбцах (1)–(3) содержится имеющаяся информация.

- Столбец (4) получен из столбцов (1) и (2) с применением (2.3.4).
- Столбец (5) получен из столбцов (3) и (4) с применением (2.3.4).

Определение столбца (5) завершает нахождение функции вероятностей для с.в. S. Ее функция распределения в столбце (8) является набором частичных сумм

x	(1) $f_1(x)$	(2) $f_2(x)$	(3) $f_3(x)$	(4) $f^{(2)}(x)$	(5) $f^{(3)}(x)$	(6) $F_1(x)$	(7) $F^{(2)}(x)$	(8) $F^{(3)}(x)$
0	0,4	0,5	0,6	0,20	0,120	0,4	0,20	0,120
1	0,3	0,2	0,0	0,23	0,138	0,7	0,43	0,258
2	0,2	0,1	0,1	0,20	0,140	0,9	0,63	0,398
3	0,1	0,1	0,1	0,16	0,139	1,0	0,79	0,537
4	0,0	0,1	0,1	0,11	0,129	1,0	0,90	0,666
5	0,0	0,0	0,1	0,06	0,115	1,0	0,96	0,781
6	0,0	0,0	0,0	0,03	0,088	1,0	0,99	0,869
7	0,0	0,0	0,0	0,01	0,059	1,0	1,00	0,928
8	0,0	0,0	0,0	0,00	0,036	1,0	1,00	0,964
9	0,0	0,0	0,0	0,00	0,021	1,0	1,00	0,985
10	0,0	0,0	0,0	0,00	0,010	1,0	1,00	0,995
11	0,0	0,0	0,0	0,00	0,004	1,0	1,00	0,999
12	0,0	0,0	0,0	0,00	0,001	1,0	1,00	1,000

столбца (5), начиная сверху. Для наглядности мы включили столбец (6), функцию распределения для столбца (1), столбец (7), который можно получить непосредственно из столбцов (1) и (6), применяя (2.3.3), и столбец (8), определяемый аналогично по столбцам (3) и (7). Столбец (5) можно определить из столбца (8) последовательным вычитанием. ▼

Перейдем к рассмотрению двух примеров с непрерывными случайными величинами.

Пример 2.3.2. Пусть с.в. X имеет равномерное распределение на интервале $(0,2)$, и пусть с.в. Y не зависит от с.в. X и имеет равномерное распределение на интервале $(0,3)$. Определим функцию распределения с.в. $S = X + Y$.

Решение. Поскольку распределения с.в. X и Y непрерывны, воспользуемся формулой (2.3.6):

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x/2, & 0 \leqslant x < 2, \\ 1, & x \geqslant 2, \end{cases} \qquad \text{и} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} 1/3, & 0 < y < 3, \\ 0 & \text{для остальных } y. \end{cases}$$

Тогда

$$F_S(s) = \int_0^s F_X(s-y) f_Y(y)\, dy.$$

Выборочное пространство с.в. X и Y иллюстрируется рис. 2.3.2. Прямоугольная область содержит все возможные значения пары X и Y. Интересующее нас событие, $X + Y \leqslant s$, изображается на рисунке для пяти значений s. Для каждого значения прямая пересекает ось Y в точке s и прямую $X = 2$ в точке $s-2$. Значения функции

F_S для этих пяти случаев описываются следующей формулой:

$$F_S(s) = \begin{cases} 0, & s < 0, \quad \text{прямая } A, \\ \int_0^s \frac{s-y}{2}\,\frac{1}{3}\,dy = \frac{s^2}{12}, & 0 \leqslant s < 2, \quad \text{прямая } B, \\ \int_0^{s-2} 1\,\frac{1}{3}\,dy + \int_{s-2}^{s} \frac{s-y}{s}\,\frac{1}{3}\,dy = \frac{s-1}{3}, & 2 \leqslant s < 3, \quad \text{прямая } C, \\ \int_0^{s-2} 1\,\frac{1}{3}\,dy + \int_{s-2}^{3} \frac{s-y}{2}\,\frac{1}{3}\,dy = 1 - \frac{(5-s)^2}{12}, & 3 \leqslant s < 5, \quad \text{прямая } D, \\ 1, & s \geqslant 5, \quad \text{прямая } E. \end{cases}$$

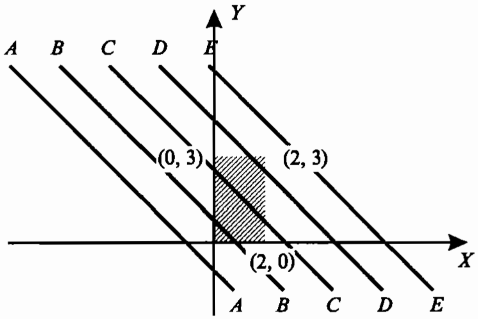


Рис. 2.3.2. Свертка двух равномерных распределений

▼

Пример 2.3.3. Рассмотрим три независимые с.в. X_1, X_2, X_3. Для $i = 1, 2, 3$ с.в. X_i имеет показательное распределение и $\mathbf{E}[X_i] = 1/i$. Найдем функцию плотности с.в. $S = X_1 + X_2 + X_3$, применяя операцию свертки.

Решение. Имеем

$$f_1(x) = e^{-x}, \quad f_2(x) = 2e^{-2x}, \quad f_3(x) = 3e^{-3x}, \qquad x > 0.$$

Воспользовавшись формулой (2.3.7) трижды, мы получим

$$\begin{aligned} f^{(2)}(x) &= \int_0^x f_1(x-y) f_2(y)\,dy = \int_0^x e^{-(x-y)} 2e^{-2y}\,dy \\ &= 2e^{-x} \int_0^x e^{-y}\,dy = 2e^{-x} - 2e^{-2x}, \qquad x > 0, \\ f_S(x) = f^{(3)}(x) &= \int_0^x f^{(2)}(x-y) f_3(y)\,dy = \int_0^x (2e^{-(x-y)} - 2e^{-2(x-y)}) 3e^{-3y}\,dy \\ &= 6e^{-x} \int_0^x e^{-2y} dy - 6e^{-2x} \int_0^x e^{-y} dy = (3e^{-x} - 3e^{-3x}) - (6e^{-2x} - 6e^{-3x}) \\ &= 3e^{-x} - 6e^{-2x} + 3e^{-3x}, \qquad x > 0. \end{aligned}$$

▼

Другой метод определения распределения суммы независимых случайных величин основан на единственности *производящей функции моментов*, которая для с.в. X определяется соотношением $M_X(t) = \mathbf{E}[e^{tX}]$. Если это математическое ожидание конечно для всех t из некоторого открытого интервала, содержащего начало координат, то $M_X(t)$ является единственной производящей функцией моментов распределения с.в. X в том смысле, что не существует другой функции, отличной от $M_X(t)$, которая была бы производящей функцией моментов распределения с.в. X. Эту единственность можно использовать следующим образом: для суммы $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$

$$M_S(t) = \mathbf{E}[e^{tS}] = \mathbf{E}[e^{t(X_1+X_2+\cdots+X_n)}] = \mathbf{E}[e^{tX_1}e^{tX_2}\ldots e^{tX_n}]. \tag{2.3.8}$$

Если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимы, то математическое ожидание произведения в формуле (2.3.8) равно $\mathbf{E}[e^{tX_1}]\mathbf{E}[e^{tX_2}]\ldots\mathbf{E}[e^{tX_n}]$, так что

$$M_S(t) = M_{X_1}(t)M_{X_2}(t)\ldots M_{X_n}(t). \tag{2.3.9}$$

Нахождение явного выражения для того единственного распределения, которое соответствует производящей функции моментов (2.3.9), завершило бы нахождение распределения с.в. S. Если указать его в явном виде не удается, то можно проводить его поиск численными методами (см. разд. 2.6).

Пример 2.3.4. Рассмотрим случайные величины из примера 2.3.3. Определим функцию плотности с.в. $S = X_1 + X_2 + X_3$, пользуясь производящей функцией моментов с.в. S.

Решение. Согласно равенству (2.3.9),

$$M_S(t) = \frac{1}{1-t}\,\frac{2}{2-t}\,\frac{3}{3-t},$$

что можно записать в виде

$$M_S(t) = \frac{A}{1-t} + \frac{2B}{2-t} + \frac{3C}{3-t}$$

с помощью метода разложения на простейшие дроби. Решением является $A = 3$, $B = -3$, $C = 1$. Но $\beta/(\beta - t)$ является производящей функцией моментов показательного распределения с параметром β, так что функция плотности с.в. S имеет вид

$$f_S(x) = 3e^{-x} - 3(2e^{-2x}) + 3e^{-3x}. \qquad \blacktriangledown$$

Пример 2.3.5. При исследовании случайных процессов было введено *обратное гауссовское распределение*. В этом контексте оно используется в качестве распределения с.в. B, величины страховых выплат. Это распределение будет играть аналогичную роль и в теории риска в гл. 12–14. Функция плотности и производящая функция моментов обратного гауссовского распределения задаются формулами

$$f_X(x) = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi\beta}}x^{-3/2}\exp\left[-\frac{(\beta x - \alpha)^2}{2\beta x}\right], \qquad x > 0,$$

$$M_X(t) = \exp\left[\alpha\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2t}{\beta}}\right)\right].$$

Найдем распределение с.в. $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, где с.в. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимы и имеют одинаковые обратные гауссовские распределения.

Решение. Воспользовавшись формулой (2.3.9), получим следующее выражение для производящей функции моментов с.в. S:

$$M_S(t) = [M_X(t)]^n = \exp\left[n\alpha\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2t}{\beta}}\right)\right].$$

Производящей функции моментов $M_S(t)$ соответствует единственное распределение, и можно убедиться, что S имеет обратное гауссовское распределение с параметрами $n\alpha$ и β. ▼

2.4. Приближения для распределения суммы

Центральная предельная теорема дает метод нахождения численных значений для распределения суммы независимых случайных величин. Обычно эта теорема формулируется для суммы независимых и одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2, \ldots$, где $\mathbf{E}[X_i] = \mu$ и $\mathbf{D}[X_i] = \sigma^2$. Для любого n распределение с.в. $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)/\sigma$, где $\bar{X}_n = (X_1 + X_2 + \cdots + X_n)/n$, имеет математическое ожидание 0 и дисперсию 1. Как известно, последовательность таких распределений (при $n = 1, 2, \ldots$) стремится к стандартному нормальному распределению. Когда n велико, эта теорема применяется, чтобы приблизить распределение с.в. $\bar{X}_n$ нормальным распределением со средним μ и дисперсией σ^2/n. Аналогично, распределение суммы n случайных величин приближается нормальным распределением со средним $n\mu$ и дисперсией $n\sigma^2$. Эффективность такой аппроксимации зависит не только от числа слагаемых, но и от близости распределения слагаемых к нормальному. Во многих элементарных курсах статистики указывается, что n должно быть не меньше 30 для того, чтобы аппроксимация была разумной. Однако одна из программ для генерации нормально распределенных случайных величин, используемых в имитационном моделировании, реализует нормальную случайную величину в виде среднего 12 независимых равномерно распределенных на интервале $(0, 1)$ случайных величин.

Во многих моделях индивидуальных рисков случайные величины, входящие в суммы, не являются одинаково распределенными. Это будет проиллюстрировано примерами в следующем разделе. Центральная предельная теорема распространяется и на последовательности неодинаково распределенных случайных величин.

Для иллюстрации некоторых приложений модели индивидуальных рисков мы воспользуемся нормальной аппроксимацией распределения суммы независимых случайных величин, чтобы получить численные решения. Если $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, то

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}[X_k]$$

и, далее, если с.в. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимы, то

$$\mathbf{D}[X] = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{D}[X_k].$$

Для рассматриваемого приложения нам нужно лишь

- найти средние и дисперсии случайных величин, моделирующих индивидуальные потери,
- просуммировать их для того, чтобы получить среднее и дисперсию потерь страховой компании в целом,

- воспользоваться нормальным приближением.

Ниже мы проиллюстрируем эту последовательность действий.

2.5. Приложения к страхованию

В этом разделе на четырех примерах иллюстрируются результаты разд. 2.2 и использование нормального приближения.

Пример 2.5.1. Компания, занимающаяся страхованием жизни, предлагает договор страхования на случай смерти на срок один год с выплатами размера 1 и 2 единиц лицам, вероятности смерти которых составляют 0,02 или 0,01. Приводимая ниже таблица показывает число лиц n_k в каждом из четырех классов, образованных в соответствии с выплатой b_k и вероятностью наступления страхового случая q_k:

k	q_k	b_k	n_k
1	0,02	1	500
2	0,02	2	500
3	0,10	1	300
4	0,10	2	500

Страховая компания хочет собрать с этой группы из 1800 лиц сумму, равную 95-й процентили распределения общей величины страховых выплат по этой группе. Кроме того, она хочет, чтобы доля каждого лица в этой сумме была пропорциональна ожидаемому размеру страховой выплаты для данного лица. Доля лица с номером j, средняя выплата которому равна $\mathbf{E}[X_j]$, должна составить $(1+\theta)\mathbf{E}[X_j]$. Из требования 95-й процентили следует, что $\theta > 0$. Величина превышения, $\theta\mathbf{E}[X_j]$, является *рисковой надбавкой*, а θ называется *относительной рисковой надбавкой*. Подсчитаем θ.

Решение. Величина θ определяется соотношением $\mathbf{P}(S \leqslant (1+\theta)\mathbf{E}[S]) = 0{,}95$, где $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_{1800}$. Это утверждение о вероятности эквивалентно следующему:

$$\mathbf{P}\left(\frac{S - \mathbf{E}[S]}{\sqrt{\mathbf{D}[S]}} \leqslant \frac{\theta\mathbf{E}[S]}{\sqrt{\mathbf{D}[S]}}\right) = 0{,}95.$$

В соответствии с тем, что говорилось о центральной предельной теореме в разд. 2.4, мы аппроксимируем распределение с.в. $(S - \mathbf{E}[S])/\sqrt{\mathbf{D}[S]}$ стандартным нормальным распределением и воспользуемся его 95-й процентилью, откуда получаем

$$\frac{\theta\mathbf{E}[S]}{\sqrt{\mathbf{D}[S]}} = 1{,}645.$$

Нам остается лишь подсчитать математическое ожидание и дисперсию с.в. S и найти θ из этого уравнения.

Для четырех классов, на которые разбиты страхователи, мы получаем приведенные ниже результаты:

k	q_k	b_k	Среднее $b_k q_k$	Дисперсия $b_k^2 q_k(1-q_k)$	n_k
1	0,02	1	0,02	0,0196	500
2	0,02	2	0,04	0,0784	500
3	0,10	1	0,10	0,0900	300
4	0,10	2	0,20	0,3600	500

Таким образом,

$$\mathbf{E}[S] = \sum_{j=1}^{1800} \mathbf{E}[X_j] = \sum_{j=1}^{4} n_k \mu_k = 160, \qquad \mathbf{D}[S] = \sum_{j=1}^{1800} \mathbf{D}[X_j] = \sum_{j=1}^{4} n_k b_k^2 q_k (1 - q_k) = 256.$$

Поэтому относительная рисковая надбавка равна

$$\theta = 1{,}645 \frac{\sqrt{\mathbf{D}[S]}}{\mathbf{E}[S]} = 1{,}645 \, \frac{16}{160} = 0{,}1645. \qquad \blacktriangledown$$

Пример 2.5.2. Клиенты компании, занимающейся страхованием автомобилей, распределены по двум классам:

Класс	Число в классе	Вероятность наступления страхового случая	Распределение страховых выплат B_k, параметры усеченного показательного распределения	
k	n_k	q_k	λ	L
1	500	0,10	1	2,5
2	2000	0,05	2	5,0

Усеченное показательное распределение определяется посредством функции распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & 0 \leqslant x < L, \\ 1, & x \geqslant L. \end{cases}$$

Это распределение смешанного типа с функцией плотности $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $0 < x < L$, и «сгустком» вероятностной массы $e^{-\lambda L}$ в точке L. График этой функции распределения показан на рис. 2.5.1.

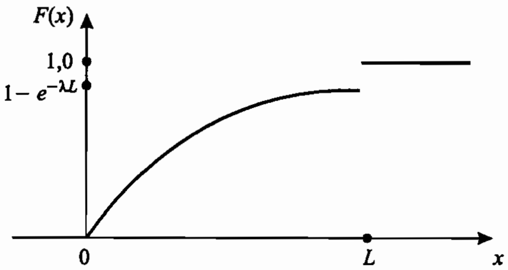


Рис. 2.5.1. Усеченное показательное распределение

Как и ранее, вероятность того, что общая величина страховых выплат превосходит сумму, собранную со страхователей, должна быть равной 0,05. Мы предположим, что относительная рисковая надбавка θ должна быть одинаковой в каждом из двух рассматриваемых классов. Вычислим θ.

Решение. Этот пример очень похож на предыдущий. Разница состоит лишь в том, что величины страховых выплат являются теперь случайными величинами.

Сначала мы получим выражения для моментов усеченного показательного распределения. Это будет подготовительный шаг для применения формул (2.2.25) и (2.2.26):

$$\mu = \mathbf{E}[B \mid I=1] = \int_0^L x\lambda e^{-\lambda x}dx + Le^{-\lambda L} = \frac{1-e^{-\lambda L}}{\lambda},$$

$$\mathbf{E}[B^2 \mid I=1] = \int_0^L x^2\lambda e^{-\lambda x}dx + L^2e^{-\lambda L} = \frac{2}{\lambda^2}(1-e^{-\lambda L}) - \frac{2L}{\lambda}e^{-\lambda L},$$

$$\sigma^2 = \mathbf{E}[B^2 \mid I=1] - (\mathbf{E}[B \mid I=1])^2 = \frac{1-2\lambda Le^{-\lambda L} - e^{-2\lambda L}}{\lambda^2}.$$

Воспользовавшись значениями параметров, данными в условии, и применяя формулы (2.2.25) и (2.2.26), мы получаем следующие результаты:

k	q_k	μ_k	σ_k^2	Среднее $q_k\mu_k$	Дисперсия $\mu_k^2 q_k(1-q_k)+\sigma_k^2 q_k$	n_k
1	0,10	0,9179	0,5828	0,09179	0,13411	500
2	0,05	0,5000	0,2498	0,02500	0,02436	2000

Итак, S, общая сумма страховых выплат, имеет моменты

$$\mathbf{E}[S] = 500(0{,}09179) + 2000(0{,}02500) = 95{,}89,$$

$$\mathbf{D}[S] = 500(0{,}13411) + 2000(0{,}02436) = 115{,}78.$$

Условие для определения θ остается тем же, что и в примере 2.5.1, а именно,

$$\mathbf{P}(S \leqslant (1+\theta)\mathbf{E}[S]) = 0{,}95.$$

Воспользовавшись снова аппроксимацией нормальным распределением, получаем

$$\frac{\theta\mathbf{E}[S]}{\sqrt{\mathbf{D}[S]}} = 1{,}645 \quad \text{и} \quad \theta = \frac{1{,}645\sqrt{115{,}78}}{95{,}89} = 0{,}1846. \qquad \blacktriangledown$$

Пример 2.5.3. В портфель страховой компании входит 16 000 договоров страхования на случай смерти на срок один год согласно следующей таблице:

Величина выплат b_k	Число страхователей n_k
10 000	8000
20 000	3500
30 000	2500
50 000	1500
100 000	500

Вероятность наступления страхового случая q для каждого из 16 000 клиентов (эти события предполагается взаимно независимыми) равна 0,02. Компания хочет установить *уровень собственного удержания*. Для каждого страхователя уровень собственного удержания является величиной, выплаты ниже которой эта компания (*компания-цедент*) осуществляет самостоятельно, а выплаты, превосходящие эту величину, покрываются по договору *перестрахования* другой компанией (*перестраховщиком*). Например, если уровень собственного удержания равен 20 000, то компания оставляет за собой покрытие суммы до 20 000 для каждого страхователя и покупает перестрахование для покрытия разницы между страховой выплатой и суммой 20 000 для каждого из 4500 страхователей, страховые выплаты для которых превосходят сумму 20 000. В качестве критерия для принятия решения компания выбирает минимизацию вероятности того, что страховые выплаты, оставленные на собственном удержании, плюс та сумма, которая платится за перестрахование, превзойдет сумму 8 250 000. Перестрахование стоит 0,025 на единицу покрытия (т. е. 125% от ожидаемой величины страховых выплат за единицу, 0,02).

Мы считаем, что рассматриваемый портфель замкнут: новые страховые договоры, заключенные в течение текущего года, не будут учитываться в описанном процессе принятия решения. Требуется рассчитать уровень собственного удержания, который минимизирует вероятность того, что оставленные на собственном удержании страховые выплаты плюс стоимость перестрахования превысят сумму в 8 250 000.

Частичное решение. Проведем сначала все вычисления, выбрав за единицу выплат 10 000. В качестве иллюстрации предположим, что с.в. S является величиной выплат, оставленных на собственном удержании, в случае, когда уровень собственного удержания равен 2 (т. е. 20 000 в исходных единицах). Наш портфель после учета величин, оставленных на собственном удержании, имеет следующий вид:

Величина на собственном удержании b_k	Число страхователей n_k
1	8000
2	8000

Тогда

$$\mathbf{E}[S] = \sum_{k=1}^{2} n_k b_k q_k = 8000(1)(0{,}02) + 8000(2)(0{,}02) = 480,$$

$$\mathbf{D}[S] = \sum_{k=1}^{2} n_k b_k^2 q_k (1 - q_k) = 8000(1)(0{,}02)(0{,}98) + 8000(4)(0{,}02)(0{,}98) = 784.$$

К этим страховым выплатам, оставленным на собственном удержании, S, прибавляется сумма перестраховочных премий. Итого, общая величина покрытия по такой схеме составляет

$$8000(1) + 3500(2) + 2500(3) + 1500(5) + 500(10) = 35\,000.$$

Сумма, оставленная на собственном удержании, равна

$$8000(1) + 8000(2) = 24\,000.$$

Таким образом, общая перестрахованная величина составляет $35\,000 - 24\,000 = 11\,000$ и стоимость перестрахования составляет $11\,000(0{,}025) = 275$. Значит, при уровне собственного удержания, равном 2, оставленные на собственном удержании страховые выплаты плюс стоимость перестрахования составляют $S + 275$. Критерий для принятия решения основан на вероятности того, что эта общая сумма превзойдет 825,

$$\mathbf{P}(S + 275 > 825) = \mathbf{P}(S > 550) = \mathbf{P}\left(\frac{S - \mathbf{E}[S]}{\sqrt{\mathbf{D}[S]}} > \frac{550 - \mathbf{E}[S]}{\sqrt{\mathbf{D}[S]}}\right) = \mathbf{P}\left(\frac{S - \mathbf{E}[S]}{\sqrt{\mathbf{D}[S]}} > 2{,}5\right).$$

Используя нормальное распределение, мы получаем, что эта величина приблизительно равна 0,0062. Решение завершено в упр. 2.13 и 2.14. ▼

В разд. 1.5 мы обсуждали страхование эксцедента убыточности, одного из видов перестрахования. Средние значения страховых выплат при страховании эксцедента убыточности можно аппроксимировать, пользуясь нормальным распределением в качестве распределения общих страховых выплат.

Пусть общие страховые выплаты X имеют нормальное распределение со средним μ и дисперсией σ^2, и пусть d обозначает безусловную франшизу в договоре страхования эксцедента убыточности. Тогда, согласно формуле (1.5.2А), средняя величина страховых выплат равна

$$\mathbf{E}[I_d(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_d^{\infty} (x-d) \exp\left[\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx. \tag{2.5.1}$$

Делая замену переменных $z = (x-\mu)/\sigma$ и определяя β из соотношения $d = \mu + \beta\sigma$, мы получаем следующее общее выражение для среднего значения величины страховых выплат по договору страхования эксцедента убыточности в предположении, что распределение нормально:

$$\mathbf{E}[I_d(x)] = \sigma\left\{\frac{\exp(-\beta^2/2)}{(2\pi)^{1/2}} - \beta[1-\Phi(\beta)]\right\}. \tag{2.5.2}$$

Здесь через $\Phi(x)$ обозначена функция распределения случайной величины со стандартным нормальным распределением.

Пример 2.5.4. Рассмотрим страховой портфель, как в примере 2.5.3. Найдем математическое ожидание величины страховых выплат при договоре страхования эксцедента убыточности, если

(a) индивидуальное перестрахование отсутствует и безусловная франшиза установлена равной 7 500 000;

(b) установлено собственное удержание в размере 20 000 по индивидуальным страховым договорам и величина безусловной франшизы по портфелю составляет 5 300 000.

Решение. (a) При отсутствии индивидуального перестрахования и при переходе к 10 000 в качестве денежной единицы

$$\mathbf{E}[S] = 0{,}02[8000(1) + 3500(2) + 2500(3) + 1500(5) + 500(10)] = 700,$$

$$\mathbf{D}[S] = (0{,}02)(0{,}98)[8000(1) + 3500(4) + 2500(9) + 1500(25) + 500(100)] = 2587{,}2;$$

таким образом,

$$\sigma(S) = 50{,}86.$$

Далее, поскольку

$$\beta = (d-\mu)/\sigma = (750-700)/50{,}86 = 0{,}983,$$

применение формулы (2.5.2) дает

$$P = 50{,}86[0{,}24608 - (0{,}983)(0{,}16280)] = 4{,}377,$$

что составляет сумму 43 770 в исходных единицах.

(b) В примере 2.5.3 мы получили среднее и дисперсию суммарной величины страховых выплат при индивидуальном уровне собственного удержания 20 000, равные 480 и 784 соответственно, если рассматривать 10 000 в качестве единицы. Таким образом, $\sigma(S) = 28$.

Так как

$$\beta = (d-\mu)/\sigma = (530-480)/28 = 1{,}786,$$

применение формулы (2.5.2) дает

$$P = 28[0{,}08100 - (1{,}786)(0{,}03707)] = 0{,}414,$$

что составляет сумму 4140 в исходных единицах. ▼

2.6. Замечания и литература

Основы материала, изложенного в разд. 2.2, 2.3 и 2.4, можно найти в целом ряде учебников по теории вероятностей и статистике[1]. В работе [Moode et al. 1974] доказаны результаты, представленные формулами (2.2.10) и (2.2.11). В этой работе содержится подробное обсуждение свойств производящей функции моментов. Читатель, который хочет ознакомиться с современными математическими методами нахождения функции распределения, отвечающей заданной производящей функции моментов, может обратиться к книге [Bellman et al. 1966]. Имеются также методы получения функций вероятностей дискретного распределения из его *производящей функции*; см. [Kornya 1983].

Де Гроот [De Groot 1986] обсуждает ряд условий, при которых справедлива центральная предельная теорема. В книге [Kendall, Stuart 1977] излагается материал, относящийся к *асимптотическим разложениям в ряд Крамера*, которые можно рассматривать как модификацию нормальной аппроксимации, улучшающую численную аппроксимацию. Бауэрс [Bowers 1967] также описывает использование ряда Крамера и приводит приложения к задаче аппроксимации распределения настоящих стоимостей портфеля аннуитетов.

Упражнения

К разделу 2.2

2.1. Воспользуйтесь формулами (2.2.3) и (2.2.4) для расчета математического ожидания и дисперсии с.в. X, описывающей страховые выплаты, если $q = 0{,}05$ и величина страховых выплат постоянна и равна 10.

2.2. Найдите среднее и дисперсию с.в. X, описывающей страховые выплаты, если $q = 0{,}05$ и если с.в. B, описывающая размеры страховых выплат, равномерно распределена в интервале между 0 и 20.

2.3. Пусть с.в. X обозначает число орлов, выпавших при пятикратном бросании правильной монеты. Пусть, далее, X раз бросается правильная игральная кость. Пусть Y обозначает сумму очков, выпавших при этих бросаниях кости. Определите среднее и дисперсию случайной величины Y. [Указание. Примените равенства (2.2.10) и (2.2.11).]

2.4. Пусть с.в. X обозначает число очков, выпавшее при однократном бросании правильной игральной кости. Пусть с.в. Y — число орлов, выпавших при бросании X правильных монет. Подсчитайте $\mathbf{E}[Y]$ и $\mathbf{D}[Y]$.

2.5. Пусть с.в. X обозначает число очков, выпавшее при однократном бросании правильной игральной кости. Пусть с.в. Y — сумма очков, выпавших при бросании X правильных игральных костей. Подсчитайте $\mathbf{E}[Y]$ и $\mathbf{D}[Y]$.

2.6. Вероятность пожара на некотором объекте в заданный период времени равна 0,02. Если пожар произошел, то ущерб, нанесенный объекту, распределен равномерно на интервале от 0 до a, полной стоимости объекта. Вычислите среднее и дисперсию ущерба, нанесенного пожаром рассматриваемому объекту в данный период времени.

[1] Русскому читателю можно порекомендовать пользоваться книгами [Feller 66] и [Feller 68], которые переведены на русский язык. — *Прим. ред.*

К разделу 2.3

2.7. Независимые случайные величины X_k, $k = 1, 2, 3, 4$, имеют дискретные функции вероятностей, заданные следующей таблицей:

x	$\mathbf{P}(X_1 = x)$	$\mathbf{P}(X_2 = x)$	$\mathbf{P}(X_3 = x)$	$\mathbf{P}(X_4 = x)$
0	0,6	0,7	0,6	0,9
1	0,0	0,2	0,0	0,0
2	0,3	0,1	0,0	0,0
3	0,0	0,0	0,4	0,0
4	0,1	0,0	0,0	0,1

Воспользовавшись операцией свертки на неотрицательных целых значениях аргумента x, найдите значения $F_S(x)$ для $x = 0, 1, 2, \ldots, 13$, где $S = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$.

2.8. Пусть X_i, $i = 1, 2, 3$, являются независимыми и одинаково распределенными случайными величинами с общей функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & 0 \leqslant x < 1, \\ 1, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

Положим $S = X_1 + X_2 + X_3$.

(a) Покажите, что $F_S(x)$ задается формулой

$$F_S(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^3/6, & 0 \leqslant x < 1, \\ [x^3 - 3(x-1)^3]/6, & 1 \leqslant x < 2, \\ [x^3 - 3(x-1)^3 + 3(x-2)^3]/6, & 2 \leqslant x < 3, \\ 1, & x \geqslant 3. \end{cases}$$

(b) Покажите, что $\mathbf{E}[S] = 1{,}5$ и $\mathbf{D}[S] = 0{,}25$.

(c) Найдите следующие вероятности, используя функцию распределения п. (a):

(i) $\mathbf{P}(S \leqslant 0{,}5)$, (ii) $\mathbf{P}(S \leqslant 1{,}0)$, (iii) $\mathbf{P}(S \leqslant 1{,}5)$.

2.9. Найдите среднее и дисперсию обратного гауссовского распределения, используя производящую функцию моментов, определенную в упр. 2.3.5.

К разделу 2.4

2.10. Найдите среднее и дисперсию с.в. X и Y из примера 2.3.2. Воспользуйтесь нормальным распределением, чтобы аппроксимировать вероятность $\mathbf{P}(X+Y > 4)$. Сравните полученное значение с точным результатом.

2.11. (a) Воспользуйтесь центральной предельной теоремой для вычисления b, c и d при заданном a в соотношении

$$\mathbf{P}\left[\sum_1^n X_i \geqslant n\mu + a\sqrt{n}\sigma\right] \cong c + b\Phi(d),$$

где X_i — независимые и одинаково распределенные случайные величины со средним μ и дисперсией σ^2, а $\Phi(z)$ — функция распределения стандартной нормальной случайной величины.

(b) Вычислите вероятности в упр. 2.8(c), используя нормальную аппроксимацию из п. (a).

2.12. Случайная величина U имеет производящую функцию моментов

$$\mathbf{M}_U(t) = (1 - 2t)^{-9}, \qquad t < 1/2.$$

(a) Воспользуйтесь производящей функцией моментов для вычисления среднего и дисперсии с.в. U.

(b) Воспользуйтесь нормальной аппроксимацией для вычисления точек $y_{0,05}$ и $y_{0,01}$, таких, что $\mathbf{P}(U > y_\varepsilon) = \varepsilon$.

Обратите внимание на то, что случайная величина U имеет гамма-распределение с параметрами $\alpha = 9$ и $\beta = 1/2$. Гамма-распределение с $\alpha = n/2$ и $\beta = 1/2$ является χ^2-распределением с n степенями свободы. Таким образом, с.в. U имеет χ^2-распределение с 18 степенями свободы. Из таблиц χ^2-распределений мы получаем $y_{0,05} = 28{,}869$ и $y_{0,01} = 34{,}805$.

К разделу 2.5

2.13. Вычислите вероятность того, что общие затраты в примере 2.5.3 будут превышать 8 250 000 при условии, что уровень собственного удержания равен

(a) 30 000, (b) 50 000.

2.14. Вычислите уровень собственного удержания, который минимизирует вероятность того, что общие затраты в примере 2.5 будут превышать 8 250 000. Предположите, что этот уровень находится между 30 000 и 50 000.

2.15. Страховая компания, занимающаяся страхованием от огня, приняла на страхование 160 объектов. Договор предусматривает покрытие потерь в результате пожара до предела, обусловленного договором. Распределение числа контрактов в зависимости от договорной суммы приведено в следующей таблице:

Договорная сумма	Количества договоров
10 000	80
20 000	35
30 000	25
50 000	15
100 000	5

Предположим, что для каждого объекта вероятность наступления одного страхового случая в течение года равна 0,04, а вероятность наступления более чем одного страхового случая в течение года равна нулю. Предположим, что пожары в объектах, принятых на страхование, являются взаимно независимыми событиями. Далее, предположим, что условное распределение величины страховых выплат при условии, что страховой случай произошел, является равномерным на интервале от 0 до максимальной суммы, обусловленной договором. Пусть N — число страховых случаев и S — величина страховых выплат за период в один год.

(a) Подсчитайте среднее и дисперсию с.в. N.

(b) Подсчитайте среднее и дисперсию с.в. S.

(c) Какую относительную рисковую надбавку θ следует использовать, чтобы компания могла собрать сумму, равную 99-й персентили распределения общей суммы страховых выплат? (Воспользуйтесь нормальным распределением.)

2.16. Рассмотрим портфель, содержащий 32 договора страхования. Для каждого договора вероятность q наступления страхового случая равна 1/6 и B, величина страховой выплаты при условии, что страховой случай произошел, имеет функцию плотности

$$f(y) = \begin{cases} 2(1-y), & 0 < y < 1, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть S является общей суммой страховых выплат по портфелю. Воспользовавшись нормальной аппроксимацией, оцените $\mathbf{P}(S > 4)$.

3

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ ЖИЗНИ И ТАБЛИЦЫ СМЕРТНОСТИ

3.1. Введение

В гл. 1 было показано, как страхование может увеличивать ожидаемую полезность для лица, подвергающегося риску случайных потерь. В гл. 2 были разработаны простые модели для страховых договоров, заключенных на один временной период. Основой этих моделей были бернуллиевские случайные величины, отражающие наступление или ненаступление страхового случая. Наступление страхового случая в некоторых примерах приводит к другому случайному процессу, определяющему величину потерь. В гл. с 4 по 8 мы будем в основном рассматривать модели страховых систем, предназначенных для работы со случайными потерями, в которых случайность связана с тем, насколько долго будет жить некое лицо. Основным структурным элементом в этих главах является случайная величина, называемая *продолжительностью предстоящей жизни* (*временем дожития*) и обозначаемая через $T(x)$. В настоящей главе мы изложим ряд идей, которые позволят описывать и использовать распределение как этой случайной величины, так и соответствующего ей *возраста в момент смерти* X.

Мы покажем, как распределение случайной величины «возраст в момент смерти» можно представить посредством *таблицы смертности*. Эти таблицы полезны во многих областях знания. Поэтому в каждой из этих разнообразных областей, где используются таблицы смертности, была разработана свои терминология и обозначения. Например, инженеры используют таблицы смертности для изучения надежности сложных механических и электронных систем. В биостатистике таблицы смертности используются для сравнения эффективности различных методов лечения серьезных заболеваний. Демографы используют таблицы смертности как средство популяционного проектирования. В этой книге таблицы смертности будут использоваться для построения моделей страховых систем, призванных содействовать людям, находящимся перед лицом неопределенности, связанной с моментом наступления их смерти. Это приложение определяет принятую нами точку зрения. Однако в тех случаях, когда это позволяет прояснить связь с другими дисциплинами, мы обсудим иные приложения таблиц смертности.

Таблица смертности является незаменимой компонентой многих моделей актуарной науки. Некоторые исследователи считают датой рождения актуарной науки 1693 г. В этом году Эдмунд Галлей (E. Halley) опубликовал труд «An Estimate of the Degrees of the Mortality of Mankind, Drawn from Various Tables of Births and Funerals at the City of Breslau» («Оценка степени смертности человечества, выведенная из различных таблиц рождения и погребения в городе Бреславле»). Таблицы смертности, названные Бреславльскими, которые содержатся в статье Галлея, по-прежнему представляют интерес из-за удивительно современной системы обозначений и понятий.

3.2. Вероятности, относящиеся к возрасту в момент смерти

В этом разделе мы опишем неопределенность, связанную с возрастом в момент наступления смерти, в вероятностных терминах.

3.2.1. Функция дожития

Рассмотрим новорожденного. Возраст в момент смерти X для этого новорожденного является случайной величиной непрерывного типа. Обозначим через $F_X(x)$ функцию распределения этой случайной величины,

$$F_X(x) = \mathbf{P}(X \leqslant x), \qquad x \geqslant 0, \tag{3.2.1}$$

и положим

$$s(x) = 1 - F_X(x) = \mathbf{P}(X > x), \qquad x \geqslant 0. \tag{3.2.2}$$

Мы будем всегда предполагать, что $F_X(0) = 0$, откуда следует, что $s(0) = 1$. Функция $s(x)$ называется *функцией дожития*. Для любого положительного x величина $s(x)$ является вероятностью того, что новорожденный достигнет возраста x. Распределение с.в. X может определяться либо заданием функции распределения $F_X(x)$, либо функции $s(x)$. В актуарной науке и в демографии функция дожития традиционно использовалась как исходная точка для дальнейших исследований. В теории вероятностей и в статистике такую роль играет функция распределения. Однако из свойств функции распределения мы можем вывести соответствующие свойства функции дожития.

Опираясь на вероятностные законы, мы можем формулировать вероятностные утверждения о возрасте в момент смерти в терминах либо функции дожития, либо функции распределения. Например, вероятность того, что новорожденный умрет в возрасте между x и z ($x < z$), равна

$$\mathbf{P}(x < X \leqslant z) = F_X(z) - F_X(x) = s(x) - s(z).$$

3.2.2. Продолжительность предстоящей жизни для лица в возрасте x

Условная вероятность того, что новорожденный умрет в возрасте между x и z при условии, что он доживет до возраста x, равна

$$\mathbf{P}(x < X \leqslant z \,|\, X > x) = \frac{F_X(z) - F_X(x)}{1 - F_X(x)} = \frac{s(x) - s(z)}{s(x)}. \tag{3.2.3}$$

Символ (x) используется для обозначения *лица возраста x*. Продолжительность предстоящей жизни этого лица (x), $X - x$, обозначается через $T(x)$.

В актуарной науке часто необходимо формулировать вероятностные утверждения о $T(x)$. Для этого, а также для содействия исследованиям и научным контактам на Международном конгрессе актуариев 1898 г. была впервые принята система символов, которая составила часть Международной системы актуарных обозначений. Были разработаны символы для общеупотребительных актуарных функций и принципы принятия новых обозначений. Эта система подвергалась постоянным пересмотрам и по мере необходимости обновлялась и дополнялась Постоянным комитетом по обозначениям Международной актуарной ассоциации (International Actuarial

Association). В настоящей книге всюду, где только возможно, мы будем придерживаться этих соглашений об обозначениях.

Актуарные символы отличаются от обозначений, принятых в теории вероятностей, и читатель, возможно, с ними незнаком. Например, функция одного переменного, которая записывается в виде $q(x)$ в вероятностных обозначениях, в этой системе будет записываться в виде q_x. Аналогично, функция многих переменных записывается в актуарных обозначениях при помощи комбинации верхних и нижних индексов и иных символов. Общие правила для определения функции в актуарных обозначениях приведены в приложении 4. Читатель может ознакомиться с ними перед тем, как переходить к обсуждению случайной величины продолжительности предстоящей жизни.

Для формулировки вероятностных утверждений о $T(x)$ мы будем пользоваться обозначениями

$$ {}_tq_x = \mathbf{P}[T(x) \leqslant t], \qquad t \geqslant 0, \tag{3.2.4} $$

$$ {}_tp_x = 1 - {}_tq_x = \mathbf{P}[T(x) > t], \qquad t \geqslant 0. \tag{3.2.5} $$

Символ ${}_tq_x$ можно интерпретировать как вероятность того, что (x) умрет в течение ближайших t лет. Другими словами, ${}_tq_x$ является функцией распределения с.в. $T(x)$. С другой стороны, ${}_tp_x$ может интерпретироваться как вероятность того, что (x) достигнет возраста $x+t$. Другими словами, ${}_tp_x$ является функцией дожития для (x). В частном случае лица в возрасте 0 мы имеем $T(0) = X$ и

$$ {}_xp_0 = s(x), \qquad x \geqslant 0. \tag{3.2.6} $$

Если $t = 1$, то по соглашению мы можем опускать первый индекс в обозначениях, введенных формулами (3.2.4) и (3.2.5), получая

$$ q_x = \mathbf{P}[(x) \text{ умрет в течение одного года}], $$

$$ p_x = \mathbf{P}[(x) \text{ доживет до возраста } x+1 \text{ лет}]. $$

Существует специальный символ для более общего события, состоящего в том, что (x) проживет t лет и умрет в течение последующих u лет, т.е. что (x) умрет в возрасте между $x+t$ и $x+t+u$, а именно

$$ {}_{t|u}q_x = \mathbf{P}[t < T(x) \leqslant t+u] = {}_{t+u}q_x - {}_tq_x = {}_tp_x - {}_{t+u}p_x \tag{3.2.7} $$

Как и ранее, если $u = 1$, то соответствующий нижний индекс в обозначении ${}_{t|u}q_x$ опускается, и мы получаем символ ${}_{t|}q_x$.

Сейчас у нас есть два выражения для вероятности того, что (x) умрет в возрасте между x и $x+u$. Формула (3.2.7) при $t = 0$ дает первое из этих выражений, а формула (3.2.3) с $z = x+u$ — второе выражение. Будут ли эти две вероятности различными? Формула (3.2.3) может интерпретироваться как условная вероятность того, что новорожденный умрет в возрасте между x и $z = x+u$ при условии, что он доживет до возраста x. Единственная информация о новорожденном, к настоящему моменту достигшем возраста x, состоит в том, что он дожил до этого возраста. Поэтому рассматриваемое вероятностное утверждение основано на условном распределении при условии дожития для новорожденных.

С другой стороны, формула (3.2.7) при $t = 0$ определяет вероятность того, что лицо, наблюдаемое в возрасте x, умрет в возрасте между x и $x+u$. Данные о лице в возрасте x могут содержать не только информацию о том, что оно дожило до этого возраста. Это может быть информация о том, что рассматриваемое лицо прошло медицинское обследование перед заключением договора о страховании, или же о том, что это лицо только что начало курс лечения от серьезного заболевания. Таблицы смертности в том случае, когда данные о лице в возрасте x содержат не только информацию, что новорожденный дожил до возраста x, обсуждаются в разд. 3.8, где для этих таблиц вводятся дополнительные обозначения. Мы будем продолжать развивать теорию, предполагая, что формулы (3.2.3) и (3.2.7) не содержат смысловых различий, т. е. будем до разд. 3.8 считать, что информация о лице, дожившем до возраста x, дает то же условное распределение продолжительности предстоящей жизни, что и информация о дожитии новорожденного до возраста x, а именно

$$ {}_tp_x = \frac{{}_{x+t}p_0}{{}_xp_0} = \frac{s(x+t)}{s(x)}, \tag{3.2.8} $$

$$ {}_tq_x = 1 - \frac{s(x+t)}{s(x)}. \tag{3.2.9} $$

При таком подходе формула (3.2.7) и многие ее частные случаи могут быть выражены в виде

$$ {}_{t|u}q_x = \frac{s(x+t) - s(x+t+u)}{s(x)} = \frac{s(x+t)}{s(x)}\,\frac{s(x+t) - s(x+t+u)}{s(x+t)} = {}_tp_x\;{}_uq_{x+t}. \tag{3.2.10} $$

3.2.3. Пошаговая продолжительность предстоящей жизни

С продолжительностью предстоящей жизни связана дискретная случайная величина, определяющая число полных будущих лет, прожитых лицом (x) до смерти. Она называется *пошаговой продолжительностью предстоящей жизни*[1] лица (x) и обозначается через $K(x)$. Поскольку с.в. $K(x)$ является наибольшим целым числом, не превосходящим $T(x)$, ее функция вероятностей задается выражением

$$ \begin{aligned} \mathbf{P}[K(x)=k] &= \mathbf{P}[k \leqslant T(x) < k+1] = \mathbf{P}[k < T(x) \leqslant k+1] \\ &= {}_kp_x - {}_{k+1}p_x = {}_kp_x\, q_{x+k} = {}_{k|}q_x, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots . \end{aligned} \tag{3.2.11} $$

Перемена неравенств местами здесь возможна, поскольку при наших предположениях о том, что распределение $T(x)$ непрерывно, $\mathbf{P}[T(x)=k] = \mathbf{P}[T(x)=k+1] = 0$. Формула (3.2.11) является частным случаем формулы (3.2.7), где $u = 1$ и k является неотрицательным целым числом. Из соотношения (3.2.11) следует, что функция распределения с.в. $K(x)$ является ступенчатой функцией и

$$ F_{K(x)}(y) = \sum_{h=0}^{k} {}_{h|}q_x = {}_{k+1}q_x, \qquad y \geqslant 0 \text{ и } k \text{ является целой частью числа } y. $$

Часто из контекста ясно, что $T(x)$ является продолжительностью предстоящей жизни лица (x). В этом случае мы будем писать T вместо $T(x)$. Аналогично, мы будем писать K вместо $K(x)$.

---

[1] В оригинале «curtate-future-lifetime». Иногда эту величину называют *усеченной* (*урезанной*) *продолжительностью предстоящей жизни*. Эти два термина отражают разные аспекты данного понятия. Мы будем придерживаться термина «пошаговая», чтобы подчеркнуть дискретный характер с.в. $K(x)$. — *Прим. ред.*

3.2.4. Интенсивность смертности

Формула (3.2.3) выражает в терминах функции распределения и в терминах функции дожития условную вероятность того, что лицо (0) умрет в возрасте между x и z при условии, что оно доживет до возраста x. Если разность $z - x$ постоянна и равна, скажем, c, то, рассматриваемая как функция от x, эта условная вероятность описывает распределение вероятности смерти в ближайшем будущем (между моментами времени 0 и c) для лица, достигшего возраста x. Аналог этой функции, рассматривающий смерть в определенный момент, можно получить, используя плотность вероятности смерти по достижении возраста x, т. е. формулу (3.2.3) с $z = x + \Delta x$,

$$\mathbf{P}(x < X \leqslant x + \Delta x \,|\, X > x) = \frac{F_X(x + \Delta x) - F_X(x)}{1 - F_X(x)} \cong \frac{f_X(x)\Delta x}{1 - F_X(x)}. \tag{3.2.12}$$

В этом выражении $F'_X(x) = f_X(x)$ является функцией плотности непрерывной случайной величины «возраст в момент смерти». Функция $f_X(x)/(1 - F_X(x))$ в формуле (3.2.12) может интерпретироваться в терминах условных плотностей. Для каждого возраста x она дает значение в точке x условной функции плотности с.в. X при условии дожития до возраста x и обозначается через $\mu(x)$.

Мы получаем

$$\mu(x) = \frac{f_X(x)}{1 - F_X(x)} = \frac{-s'(x)}{s(x)}. \tag{3.2.13}$$

Из свойств функций $f_X(x)$ и $1 - F_X(x)$ следует, что $\mu(x) \geqslant 0$.

В актуарной науке и в демографии $\mu(x)$ называется *интенсивностью смертности*. В теории надежности, которая занимается исследованием вероятностей безотказной работы механизмов и систем, эта величина называется *интенсивностью отказов*.

Как и функция дожития, интенсивность смертности может использоваться для определения распределения с.в. X. Чтобы это сделать, заменим в формуле (3.2.13) x на y и после некоторых преобразований получим

$$-\mu(y)\,dy = d\ln s(y).$$

Интегрируя это выражение от x до $x + n$, получим

$$-\int_x^{x+n} \mu(y)\,dy = \ln\frac{s(x+n)}{s(x)} = \ln {}_np_x.$$

Потенцируя, получаем

$${}_np_x = \exp\left[-\int_x^{x+n} \mu(y)\,dy\right]. \tag{3.2.14}$$

Иногда удобно переписать формулу (3.2.14), сделав замену $s = y - x$:

$${}_np_x = \exp\left[-\int_0^{n} \mu(x+s)\,ds\right]. \tag{3.2.15}$$

В частности, мы изменим обозначения с тем, чтобы они соответствовали использованным в формуле (3.2.6), положив возраст уже живших лиц равным 0 и обозначив возраст дожития через x. Тогда мы получим

$${}_xp_0 = s(x) = \exp\left[-\int_0^{x} \mu(s)\,ds\right]. \tag{3.2.16}$$

Кроме того,

$$F_X(x) = 1 - s(x) = 1 - \exp\left[-\int_0^x \mu(s)\,ds\right] \tag{3.2.17}$$

и

$$F'_X(x) = f_X(x) = \exp\left[-\int_0^x \mu(s)\,ds\right]\mu(x) = {}_xp_0\,\mu(x). \tag{3.2.18}$$

Пусть $F_{T(x)}(t)$ и $f_{T(x)}(t)$ обозначают соответственно функцию распределения и функцию плотности с.в. $T(x)$, продолжительности предстоящей жизни лица (x). Заметим, что $F_{T(x)}(t) = {}_tq_x$ (см. обозначение (3.2.4)). Таким образом,

$$\begin{aligned} f_{T(x)}(t) &= \frac{d}{dt}\,{}_tq_x = \frac{d}{dt}\left[1 - \frac{s(x+t)}{s(x)}\right] \\ &= \frac{s(x+t)}{s(x)}\left[-\frac{s'(x+t)}{s(x+t)}\right] = {}_tp_x\,\mu(x+t), \qquad t \geqslant 0. \end{aligned} \tag{3.2.19}$$

Значит, ${}_tp_x\,\mu(x+t)\,dt$ является вероятностью того, что лицо (x) умрет в возрасте между t и $t+dt$, и

$$\int_0^\infty {}_tp_x\,\mu(x+t)\,dt = 1,$$

где в качестве верхнего предела интегрирования записана «плюс бесконечность» (это сокращенная запись интегрирования по всей области изменения функции плотности, лежащей на положительной полуоси).

Из формулы (3.2.19) следует, что

$$\frac{d}{dt}(1 - {}_tp_x) = -\frac{d}{dt}\,{}_tp_x = {}_tp_x\,\mu(x+t). \tag{3.2.20}$$

Эта эквивалентная форма бывает полезной в некоторых рассуждениях актуарной математики.

Поскольку $\lim_{n\to\infty} {}_np_x = 0$, мы имеем $\lim_{n\to\infty}(-\ln {}_np_x) = \infty$. Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty}\int_x^{x+n} \mu(y)\,dy = \infty.$$

Факты, изложенные в настоящем разделе, собраны воедино в табл. 1.3.1.

В нижней половине табл. 3.2.1 собраны некоторые соотношения между стандартными функциями теории вероятностей и функциями, характерными для приложений, связанных с возрастом в момент смерти. Можно привести много примеров, когда соотношения, связанные с возрастом в момент смерти, можно переформулировать в более общих вероятностных терминах. Следующий пример это иллюстрирует.

Пример 3.2.1. Если $\bar{A}$ обозначает дополнение события A в некотором выборочном пространстве и если $\mathbf{P}(\bar{A}) \neq 0$, то следующее соотношение является вероятностным тождеством:

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(\bar{A})\mathbf{P}(B\,|\,\bar{A}).$$

Перепишем это тождество в актуарных обозначениях для событий $A = [T(x) \leqslant t]$ и $B = [t < T(x) \leqslant 1]$, $0 < t < 1$.

Решение. Вероятность $\mathbf{P}(A \cup B)$ переписывается в виде $\mathbf{P}[T(x) \leqslant 1] = q_x$, $\mathbf{P}(A)$ превращается в ${}_tq_x$, а $\mathbf{P}(B\,|\,\bar{A})$ — в ${}_{1-t}q_{x+t}$. Таким образом, мы получаем

$$q_x = {}_tq_x + {}_tp_x\,{}_{1-t}q_{x+t}.$$

▼

Таблица 3.2.1. Некоторые функции для с.в. X, возраста в момент смерти

	Функция распределения $F_X(x)$	Функция дожития $s(x)$		Функция плотности $f_X(x)$	Интенсивность смертности $\mu(x)$
Для	**Свойства**		**Для**	**Свойства**	
$x<0$	$F_X(x)=0$	$s(x)=1$	$x<0$	$f_X(x)=0$	$\mu(x)=0$
$x=0$	$F_X(0)=0$	$s(0)=1$	$x=0$	не определена	не определена
$x\geqslant 0$	не убывает	не возрастает	$x>0$	$f_X(x)\geqslant 0$	$\mu(x)\geqslant 0$
$\lim\limits_{x\to\infty}$	$F_X(\infty)=1$	$s(\infty)=0$	$\lim\limits_{x\to\infty}$	$\int_0^\infty f_X(x)\,dx=1$	$\int_0^\infty \mu(x)\,dx=\infty$
Функции в терминах	**Соотношения**				
$F_X(x)$	$F_X(x)$	$1-F_X(x)$		$F'_X(x)$	$\dfrac{F'_X(x)}{[1-F_X(x)]}$
$s(x)$	$1-s(x)$	$s(x)$		$-s'(x)$	$-s'(x)/s(x)$
$f_X(x)$	$\int_0^x f_X(u)\,du$	$\int_x^\infty f_X(u)\,du$		$f_X(x)$	$\dfrac{f_X(x)}{\int_x^\infty f_X(u)\,du}$
$\mu(x)$	$1-e^{-\int_0^x \mu(t)\,dt}$	$e^{-\int_0^x \mu(t)\,dt}$		$\mu(x)\,e^{-\int_0^x \mu(t)\,dt}$	$\mu(x)$

3.3. Таблицы смертности

Публикуемая таблица смертности обычно содержит расположенные по возрастам индивидуумов значения основных функций q_x, l_x, d_x и, возможно, дополнительных функций, получаемых из них. Перед тем как представить такую таблицу, рассмотрим интерпретацию таких функций, которая непосредственно связана с вероятностными функциями, обсуждавшимися в предыдущем разделе.

3.3.1. Связь функций, содержащихся в таблице смертности, с функцией дожития

В формуле (3.2.9) мы выразили условную вероятность того, что лицо (x) умрет в течение t лет, следующим образом:

$$ {}_tq_x = 1-\frac{s(x+t)}{s(x)}, $$

и, в частности,

$$ q_x = 1-\frac{s(x+1)}{s(x)}. $$

Рассмотрим теперь группу из l_0 новорожденных, положив, например, $l_0=100\,000$. Для каждого новорожденного случайная величина «возраст в момент смерти» имеет распределение, заданное функцией дожития $s(x)$. Будем обозначать через $\mathcal{L}(x)$ число лиц в группе, доживших до возраста x. Припишем всем лицам в группе номера $j=1,2,\ldots,l_0$ и заметим, что

$$ \mathcal{L}(x)=\sum_{j=1}^{l_0} I_j, $$

где I_j является индикатором дожития лица с номером j, т. е.

$$ I_j=\begin{cases} 1, & \text{если лицо с номером } j \text{ доживет до возраста } x,\\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} $$

Так как $\mathbf{E}[I_j] = s(x)$, то

$$\mathbf{E}[\mathcal{L}(x)] = \sum_{j=1}^{l_0} \mathbf{E}[I_j] = l_0 s(x).$$

Мы обозначим $\mathbf{E}[\mathcal{L}(x)]$ через l_x; это означает, что l_x — математическое ожидание числа доживших до возраста x из l_0 новорожденных, и мы имеем

$$l_x = l_0 s(x). \tag{3.3.1}$$

Далее, в предположении, что индикаторы I_j взаимно независимы, $\mathcal{L}(x)$ имеет биномиальное распределение с параметрами $n = l_0$ и $p = s(x)$. Отметим, однако, что в равенстве (3.3.1) не требуется предположения о независимости.

Аналогично, обозначим через ${}_n\mathcal{D}_x$ число умерших в возрасте между x и $x+n$ из начальной совокупности, состоящей из l_0 лиц. Мы обозначаем $\mathbf{E}[{}_n\mathcal{D}_x]$ через ${}_nd_x$. Поскольку для новорожденного вероятность смерти в возрасте между x и $x+n$ равна $s(x) - s(x+n)$, используя рассуждения, приводившиеся выше относительно l_x, получим

$${}_nd_x = \mathbf{E}[{}_n\mathcal{D}_x] = l_0[s(x) - s(x+n)] = l_x - l_{x+n}. \tag{3.3.2}$$

Если $n = 1$, мы опускаем левый нижний индекс в выражениях ${}_n\mathcal{D}_x$ и ${}_nd_x$.

Из формулы (3.3.1) видно, что

$$-\frac{1}{l_x}\frac{dl_x}{dx} = -\frac{1}{s(x)}\frac{ds(x)}{dx} = \mu(x) \tag{3.3.3}$$

и

$$-dl_x = l_x \mu(x)\, dx. \tag{3.3.4}$$

Поскольку

$$l_x\, \mu(x) = l_0\, {}_xp_0\, \mu(x) = l_0 f_X(x),$$

сомножитель $l_x\,\mu(x)$ в (3.3.4) можно интерпретировать как ожидаемую плотность смертей в возрастном интервале $(x, x+dx)$. Заметим, далее, что

$$l_x = l_0 \exp\left[-\int_0^x \mu(y)\, dy\right], \tag{3.3.5}$$

$$l_{x+n} = l_x \exp\left[-\int_x^{x+n} \mu(y)\, dy\right], \tag{3.3.6}$$

$$l_x - l_{x+n} = \int_x^{x+n} l_y\, \mu(y)\, dy. \tag{3.3.7}$$

Для удобства ссылок мы будем называть группу из l_0 новорожденных, каждый из которых имеет функцию дожития $s(x)$, *совокупностью случайного дожития*.

3.3.2. Пример таблицы смертности

В приводимой ниже табл. 3.3.1, которая называется «Таблица смертности населения: США, 1979–1981», функции ${}_tq_x$, l_x, ${}_td_x$ представлены для $l_0 = 100\,000$. За исключением первого года жизни, значение t в табулируемых функциях ${}_tq_x$ и ${}_td_x$ равно 1. Другие функции, содержащиеся в этой таблице, рассматриваются в разд. 3.5.

Эта таблица создавалась не на основе наблюдений за 100 000 новорожденными вплоть до смерти последнего из них. Она была основана на оценках вероятностей смерти при условии дожития до различных возрастов, полученных из данных о

Табл. 3.3.1. Таблица смертности населения: США, 1979–1981

(1) Возрастной интервал	(2) Доля умерших	(3) Из 100 000 новорожденных	(4)	(5) Стационарное население[1]	(6)	(7) Средняя продолжительность предстоящей жизни на начало возрастного интервала
Период между возрастами x и $x+t$	Доля людей, доживших до начала возрастного интервала и умерших в течение этого интервала, ${}_tq_x$	Число доживших до начала возрастного интервала, l_x	Число умерших в течение возрастного интервала, ${}_td_x$	Число лет, прожитых в возрастном интервале, ${}_tL_x$	Число лет, прожитых в этом и во всех последующих возрастных интервалах, T_x	Среднее число лет, прожитых от начала возрастного интервала, $\overset{\circ}{e}_x$
Дни						
0–1	0,00463	100 000	463	273	7 387 758	73,88
1–7	0,00246	99 537	245	1 635	7 387 485	74,22
7–28	0,00139	99 292	138	5 708	7 385 850	74,38
28–365	0,00418	99 154	414	91 357	7 380 142	74,43
Годы						
0–1	0,01260	100 000	1260	98 973	7 387 758	73,88
1–2	0,00093	98 740	92	98 694	7 288 785	73,82
2–3	0,00065	98 648	64	98 617	7 190 091	72,89
3–4	0,00050	98 584	49	98 560	7 091 474	71,93
4–5	0,00040	98 535	40	98 515	6 992 914	70,97
5–6	0,00037	98 495	36	98 477	6 894 399	70,00
6–7	0,00033	98 459	33	98 442	6 795 922	69,02
7–8	0,00030	98 426	30	98 412	6 697 480	68,05
8–9	0,00027	98 396	26	98 383	6 599 068	67,07
9–10	0,00023	98 370	23	98 358	6 500 685	66,08
10–11	0,00020	98 347	19	98 338	6 402 327	65,10
11–12	0,00019	98 328	19	98 319	6 303 989	64,11
12–13	0,00025	98 309	24	98 297	6 205 670	63,12
13–14	0,00037	98 285	37	98 266	6 107 373	62,14
14–15	0,00053	98 248	52	98 222	6 009 107	61,16
15–16	0,00069	98 196	67	98 163	5 910 885	60,19
16–17	0,00083	98 129	82	98 087	5 812 722	59,24
17–18	0,00095	98 047	94	98 000	5 714 635	58,28
18–19	0,00105	97 953	102	97 902	5 616 635	57,34
19–20	0,00112	97 851	110	97 796	5 518 733	56,40
20–21	0,00120	97 741	118	97 682	5 420 937	55,46
21–22	0,00127	97 623	124	97 561	5 323 255	54,53
22–23	0,00132	97 499	129	97 435	5 225 694	53,60
23–24	0,00134	97 370	130	97 306	5 128 259	52,67
24–25	0,00133	97 240	130	97 175	5 030 953	51,74
25–26	0,00132	97 110	128	97 046	4 933 778	50,81
26–27	0,00131	96 982	126	96 919	4 836 732	49,87
27–28	0,00130	96 856	126	96 793	4 739 813	48,94

[1] Стационарное население — демографическое понятие, которое будет рассматриваться в гл. 19.

28–29	0,00130	96 730	126	96 667	4 643 020	48,00
29–30	0,00131	96 604	127	96 541	4 546 353	47,06
30–31	0,00133	96 477	127	96 414	4 449 812	46,12
31–32	0,00134	96 350	130	96 284	4 353 398	45,18
32–33	0,00137	96 220	132	96 155	4 257 114	44,24
33–34	0,00142	96 088	137	96 019	4 160 959	43,30
34–35	0,00150	95 951	143	95 880	4 064 940	42,36
35–36	0,00159	95 808	153	95 731	3 969 060	41,43
36–37	0,00170	95 655	163	95 574	3 837 329	40,49
37–38	0,00183	95 492	175	95 404	3 777 755	39,56
38–39	0,00197	95 317	188	95 224	3 682 351	38,63
39–40	0,00213	95 129	203	95 027	3 587 127	37,71
40–41	0,00232	94 926	220	94 817	3 492 100	36,79
41–42	0,00254	94 706	241	94 585	3 397 283	35,87
42–43	0,00279	94 465	264	94 334	3 302 698	34,96
43–44	0,00306	94 201	288	94 057	3 208 364	34,06
44–45	0,00335	93 913	314	93 756	3 114 307	33,16
45–46	0,00366	93 599	343	93 427	3 020 551	32,27
46–47	0,00401	93 256	374	93 069	2 927 124	31,39
47–48	0,00442	92 882	410	92 677	2 834 055	30,51
48–49	0,00488	92 472	451	92 246	2 741 378	29,65
49–50	0,00538	92 021	495	91 773	2 649 132	28,79
50–51	0,00589	91 526	540	91 256	2 557 359	27,94
51–52	0,00642	90 986	584	90 695	2 466 103	27,10
52–53	0,00699	90 402	631	90 086	2 375 408	26,28
53–54	0,00761	89 771	684	89 430	2 285 322	25,46
54–55	0,00830	89 087	739	88 717	2 195 892	24,65
55–56	0,00902	88 348	797	87 950	2 107 175	23,85
56–57	0,00978	87 551	856	87 122	2 019 225	23,06
57–58	0,01059	86 695	919	86 236	1 932 103	22,29
58–59	0,01151	85 776	987	85 283	1 845 867	21,52
59–60	0,01254	84 789	1063	84 258	1 760 584	20,76
60–61	0,01368	83 726	1145	83 153	1 676 326	20,02
61–62	0,01493	82 581	1233	81 965	1 593 173	19,29
62–63	0,01628	81 348	1324	80 686	1 511 208	18,58
63–64	0,01767	80 024	1415	79 316	1 430 522	17,88
64–65	0,01911	78 609	1502	77 859	1 351 206	17,19
65–66	0,02059	77 107	1587	76 314	1 273 347	16,51
66–67	0,02216	75 520	1674	74 683	1 197 033	15,85
67–68	0,02389	73 846	1764	72 964	1 122 350	15,20
68–69	0,02585	72 082	1864	71 150	1 049 386	14,56
69–70	0,02806	70 218	1970	69 233	978 236	13,93
70–71	0,03052	68 248	2083	67 206	909 003	13,32
71–72	0,03315	66 165	2193	65 069	841 797	12,72
72–73	0,03593	63 972	2299	62 823	776 728	12,14
73–74	0,03882	61 673	2394	60 476	713 905	11,58
74–75	0,04184	59 279	2480	58 039	653 429	11,02
75–76	0,04507	56 799	2560	55 520	595 390	10,48
76–77	0,04867	54 239	2640	52 919	539 870	9,95
77–78	0,05274	51 599	2721	50 238	486 951	9,44

78–79	0,05742	48 878	2807	47 475	436 713	8,93
79–80	0,06277	46 071	2891	44 626	389 238	8,45
80–81	0,06882	43 180	2972	41 694	344 612	7,98
81–82	0,07552	40 208	3036	38 689	302 918	7,53
82–83	0,08278	37 172	3077	35 634	264 229	7,11
83–84	0,09041	34 095	3083	32 553	228 595	6,70
84–85	0,09842	31 012	3052	29 486	196 042	6,32
85–86	0,10725	27 960	2999	26 461	166 556	5,96
86–87	0,11712	24 961	2932	23 500	140 095	5,61
87–88	0,12717	22 038	2803	20 636	116 595	5,29
88–89	0,13708	19 235	2637	17 917	95 959	4,99
89–90	0,14728	16 598	2444	15 376	78 042	4,70
90–91	0,15868	14 154	2246	13 031	62 666	4,43
91–92	0,17169	11 908	2045	10 886	49 635	4,17
92–93	0,18570	9 863	1831	8 948	38 749	3,93
93–94	0,20023	8 032	1608	7 228	29 801	3,71
94–95	0,21495	6 424	1381	5 733	22 573	3,51
95–96	0,22976	5 043	1159	4 463	16 840	3,34
96–97	0,24338	3 884	945	3 412	12 377	3,19
97–98	0,25637	2 939	754	2 562	8 965	3,05
98–99	0,26868	2 185	587	1 892	6 403	2,93
99–100	0,28030	1 598	448	1 374	4 511	2,82
100–101	0,29120	1 150	335	983	3 137	2,73
101–102	0,30139	815	245	692	2 154	2,64
102–103	0,31089	570	177	481	1 462	2,57
103–104	0,31970	393	126	330	981	2,50
104–105	0,32786	267	88	223	651	2,44
105–106	0,33539	179	60	150	428	2,38
106–107	0,34233	119	41	99	278	2,33
107–108	0,34870	78	27	64	179	2,29
108–109	0,35453	51	18	42	115	2,24
109–110	0,35988	33	12	27	73	2,20

народонаселении США в годы, близкие к 1980-му году, году переписи населения. Используя понятие совокупности случайного дожития, мы должны сделать предположение, что вероятности, полученные на основе этой таблицы, будут соответствовать продолжительности жизни тех, кто принадлежит к этой совокупности дожития.

Полезно сделать ряд замечаний относительно приведенной таблицы.

Замечания. 1. Ожидается, что примерно 1% новорожденных, входящих в совокупность дожития, умрет на первом году жизни.

2. Следует ожидать, что примерно 77% из группы новорожденных доживет до возраста 65 лет.

3. Максимальное число смертей в группе ожидается в возрасте между 83 и 84 годами.

4. Известно мало случаев, когда смерть наступает в возрасте свыше 110 лет. Поэтому часто предполагается, что существует такой возраст ω, что $s(x) > 0$ для $x < \omega$ и $s(x) = 0$ для $x \geqslant \omega$. Если существование такого возраста ω предполагается, то он называется *предельным возрастом*. Для приведенной таблицы предельный

возраст не определен. Очевидно, имеется положительная вероятность дожить до 110 лет, но таблица не содержит указаний на возраст ω.

5. Локальные минимумы для ожидаемого числа смертей расположены в районе 11 и 27 лет, а локальный максимум — в районе 24 лет.

6. Хотя значения l_x были округлены до целых чисел, в соответствии с формулой (3.3.1) делать это не обязательно.

Такое представление информации, как табл. 3.3.1, является стандартным методом описания распределения возраста в момент смерти. Другим способом является представление функции дожития в аналитической форме, такой, как $s(x) = e^{-cx}$, $c > 0$, $x \geqslant 0$. Однако большинство исследований смертности среди людей для нужд страхования использует представление $s(x) = l_x/l_0$, что иллюстрируется табл. 3.3.1. Поскольку величина $100\,000\,s(x)$ представлена только для целых значений x, при вычислении $s(x)$ для нецелых значений аргумента необходимо прибегать к интерполяции. Этот вопрос обсуждается в разд. 3.6.

Пример 3.3.1. Используя табл. 3.3.1, вычислим вероятность того, что лицо (20)
(a) доживет до возраста 100,
(b) умрет, не доживя до 70 лет,
(c) умрет в десятой декаде своей жизни.

Решение.

(a) $$\frac{s(100)}{s(20)} = \frac{l_{100}}{l_{20}} = \frac{1150}{97\,741} = 0{,}0118.$$

(b) $$\frac{s(20) - s(70)}{s(20)} = 1 - \frac{l_{70}}{l_{20}} = 1 - \frac{68\,284}{97\,741} = 0{,}3017.$$

(c) $$\frac{s(90) - s(100)}{s(20)} = \frac{l_{90} - l_{100}}{l_{20}} = \frac{14\,154 - 1150}{97\,741} = 0{,}1330.$$ ▼

Чтобы оценить роль таблиц смертности, рассмотрим рис. 3.3.1, 3.3.2 и 3.3.3. Они отражают текущую смертность народонаселения, а не данные, приведенные в табл. 3.3.1.

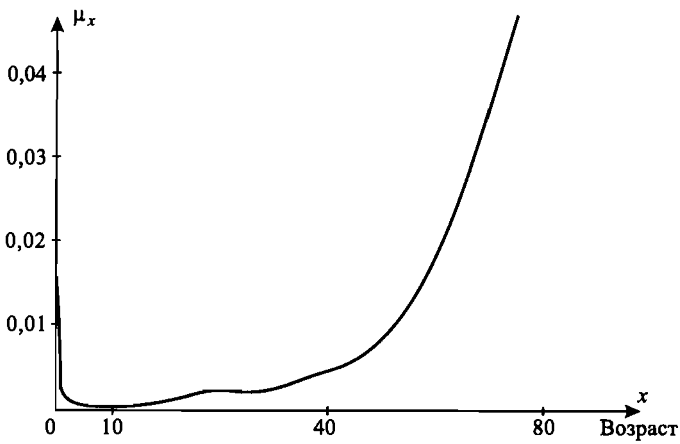


Рис. 3.3.1. График функции $\mu(x)$

На рис. 3.3.1 надо обратить внимание на следующее:

- Интенсивность смертности положительна, и требование
$$\int_0^\infty \mu(x)\,dx = \infty,$$
очевидно, выполнено (см. табл. 3.2.1).
- Интенсивность смертности довольно высока на начальном этапе, а затем резко снижается до минимума в окрестности возраста 10 лет.

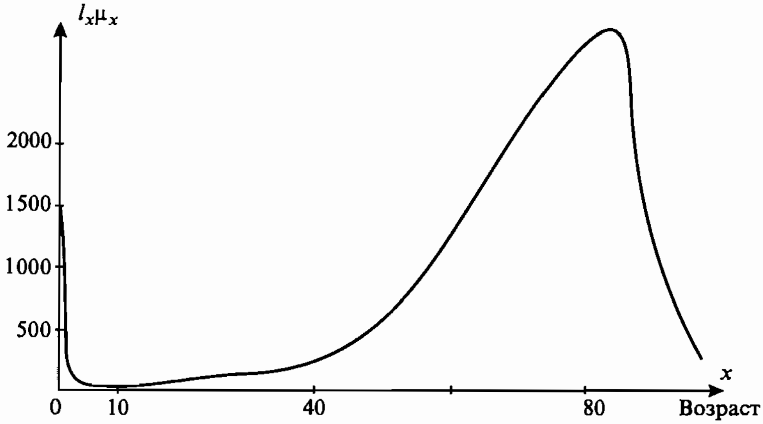


Рис. 3.3.2. График функции $l_x\, \mu(x)$

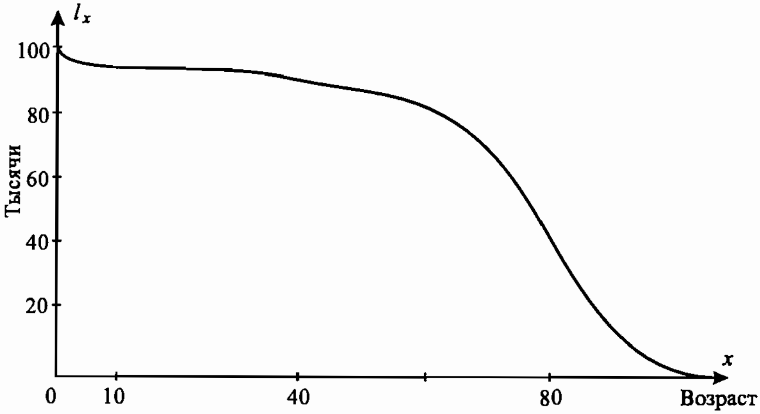


Рис. 3.3.3. График функции l_x

На рис. 3.3.2 и 3.3.3 надо обратить внимание на следующее:

- Функция $l_x\, \mu(x)$ пропорциональна функции плотности с.в. «возраст в момент смерти» для новорожденного. Поскольку $l_x\, \mu(x)$ является ожидаемой плотностью смертей в возрасте x, когда речь идет о совокупности случайного дожития, график функции $l_x\, \mu(x)$ называется *кривой смертности*.

- Функция $l_x\,\mu(x)$ имеет локальный минимум в окрестности возраста 10 лет. Мода распределения смертей, т. е. возраст, в котором реализуется максимум кривой смертности, находится в районе 80 лет.
- Функция l_x пропорциональна функции дожития $s(x)$. Ее также можно интерпретировать как ожидаемое число доживших до возраста x из всей исходной группы, состоявшей из l_0 лиц.
- Точки локального экстремума функции $l_x\,\mu(x)$ соответствуют точкам перегиба функции l_x, поскольку
$$\frac{d}{dx}\,l_x\mu(x) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{d}{dx}\,l_x\right) = -\frac{d^2}{dx^2}\,l_x.$$

3.4. Совокупность детерминированного дожития

Мы переходим ко второй, невероятностной, интерпретации таблиц смертности. С точки зрения математики она восходит к понятию коэффициента выбытия (отрицательного роста) и потому связана с приложениями к задачам о скорости роста в биологии и в экономике. Она по природе детерминистическая и приводит к понятию *совокупности детерминированного дожития*, или *когорты*.

Совокупность детерминированного дожития, как вытекает из таблицы смертности, имеет следующие характеристики:

- Изначально она состоит из l_0 лиц возраста 0.
- Для членов совокупности в любом возрасте действуют фактические годовые коэффициенты смертности (выбытия), которые определяются величинами q_x в таблице смертности.
- Совокупность является замкнутой. В нее не может входить никто, кроме тех l_0 лиц, которые находились в ней в самом начале. Выход из этой совокупности обусловлен фактическими годовыми коэффициентами смертности (выбытия) и только ими.

Из приведенных характеристик вытекает, что
$$\begin{aligned}
l_1 &= l_0(1-q_0) = l_0 - d_0,\\
l_2 &= l_1(1-q_1) = l_1 - d_1 = l_0 - (d_0+d_1),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
l_x &= l_{x-1}(1-q_{x-1}) = l_{x-1} - d_{x-1}\\
&= l_0 - \sum_{y=0}^{x-1} d_y = l_0\left(1 - \frac{1}{l_0}\sum_{y=0}^{x-1} d_y\right) = l_0(1 - {}_xq_0),
\end{aligned} \tag{3.4.1}$$
где l_x обозначает число лиц, доживших до возраста x в совокупности дожития. Эта цепочка равенств, порожденная числом l_0, называемым *корнем таблицы смертности*, и множеством значений q_x, может быть переписана в виде
$$\begin{aligned}
l_1 &= l_0p_0,\\
l_2 &= l_1p_1 = (l_0p_0)p_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
l_x &= l_{x-1}p_{x-1} = l_0\left(\prod_{y=0}^{x-1} p_y\right) = l_0\,{}_xp_0.
\end{aligned} \tag{3.4.2}$$

Между совокупностью детерминированного дожития и моделью сложных процентов имеется аналогия, некоторые положения которой суммируются в табл. 3.4.1.

Таблица 3.4.1. Понятия теории сложных процентов и соответствующие им понятия в теории совокупностей детерминированного дожития

Сложные проценты	Совокупность дожития
$A(t)$ = Величина капитала в момент времени t, время измеряется в годах	l_x = Размер группы возраста x, возраст измеряется в годах
Эффективная годовая процентная ставка (приращения) $i_t = \dfrac{A(t+1)-A(t)}{A(t)}$	Фактический годовой коэффициент смертности (выбытия) $q_x = \dfrac{l_x - l_{x+1}}{l_x}$
Эффективная n-летняя процентная ставка[1], начиная с времени t ${}_ni_t = \dfrac{A(t+n)-A(t)}{A(t)}$	Фактический n-летний коэффициент смертности, начиная с возраста x ${}_nq_x = \dfrac{l_x - l_{x+n}}{l_x}$
Интенсивность начисления процента в момент времени t $\delta_t = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{A(t+\Delta t)-A(t)}{A(t)\Delta t} = \dfrac{1}{A(t)}\dfrac{dA(t)}{dt}$	Интенсивность смертности в возрасте x $\mu(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{l_x - l_{x+\Delta x}}{l_x\Delta x} = -\dfrac{1}{l_x}\dfrac{dl_x}{dx}$

Заголовки к столбцам табл. 3.3.1 для ${}_tq_x$, l_x, ${}_td_x$ относятся к совокупности детерминированного дожития. Хотя математические основы для совокупностей случайного и детерминированного дожития различны, функции ${}_tq_x$, l_x, ${}_td_x$ имеют одинаковые математические свойства и анализируются одинаково. Понятие совокупности случайного дожития имеет то преимущество, что позволяет пользоваться всем аппаратом теории вероятностей. Совокупность детерминированного дожития концептуально проще и ее легче использовать, но она не отражает случайных колебаний числа доживших до определенного возраста.

3.5. Другие характеристики, связанные с таблицами смертности

В этом разделе мы выведем выражения для некоторых общеупотребительных характеристик распределений с.в. $T(x)$ и $K(x)$ и введем общий метод вычислений некоторых из этих характеристик.

3.5.1. Характеристики

Математическое ожидание с.в. $T(x)$, обозначаемое через $\mathring{e}_x$, называется *полной ожидаемой продолжительностью жизни*. Используя интегрирование по частям, мы получим

$$\mathring{e}_x = \mathrm{E}[T(x)] = \int_0^\infty t\,{}_tp_x\,\mu(x+t)\,dt = \int_0^\infty t\,d_t(-{}_tp_x) = t(-{}_tp_x)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty {}_tp_x\,dt. \quad (3.5.1)$$

Из существования $\mathrm{E}[T(x)]$ следует соотношение $\lim\limits_{t\to\infty} t(-{}_tp_x) = 0$. Таким образом,

$$\mathring{e}_x = \int_0^\infty {}_tp_x\,dt. \quad (3.5.2)$$

[1] Для эффективной n-летней процентной ставки нет общепринятого обозначения.

Полная ожидаемая продолжительность жизни в различных возрастах часто используется для сравнения уровней общественного здравоохранения различных стран.

Аналогичное интегрирование по частям дает эквивалентное выражение для $\mathbf{E}[T(x)^2]$:

$$\mathbf{E}[T(x)^2] = \int_0^\infty t^2 \, {}_tp_x \, \mu(x+t)\, dt = 2\int_0^\infty t \, {}_tp_x \, dt. \tag{3.5.3}$$

Этот результат полезен для вычисления $\mathbf{D}[T(x)]$ по формуле

$$\mathbf{D}[T(x)] = \mathbf{E}[T(x)^2] - (\mathbf{E}[T(x)])^2 = 2\int_0^\infty t \, {}_tp_x \, dt - \mathring{e}_x^2. \tag{3.5.4}$$

Во всех приведенных выкладках мы предполагали, что $\mathbf{E}[T(x)]$ и $\mathbf{E}[T(x)^2]$ существуют. Можно построить функцию дожития $s(x) = (1+x)^{-1}$, для которой это будет не так.

Можно определить другие характеристики распределения с.в. $T(x)$. *Медиану продолжительности предстоящей жизни* лица (x), которая обозначается через $m(x)$, можно найти как решение уравнения

$$\mathbf{P}[T(x) > m(x)] = \frac{1}{2},$$

или

$$\frac{s[x+m(x)]}{s(x)} = \frac{1}{2}, \tag{3.5.5}$$

относительно $m(x)$. В частности, $m(0)$ является решением уравнения $s[m(0)] = 1/2$. Мы также можем найти *моду* распределения с.в. $T(x)$, указав значение t, которое доставляет максимальное значение функции ${}_tp_x \, \mu(x+t)$.

Математическое ожидание с.в. $K(x)$ обозначается через e_x. Эта величина называется *пошаговой ожидаемой продолжительностью жизни*[1]. Применяя определение и описанное в приложении 5 суммирование по частям, мы получаем

$$e_x = \mathbf{E}[K] = \sum_{k=0}^\infty k \, {}_kp_x \, q_{x+k} = \sum_{k=0}^\infty k \, \Delta(-{}_kp_x) = k(-{}_kp_x)\Big|_0^\infty + \sum_{k=0}^\infty {}_{k+1}p_x. \tag{3.5.6}$$

Снова из существования $\mathbf{E}[K(x)]$ следует соотношение $\lim_{k\to\infty} k(-{}_kp_x) = 0$. Таким образом, проведя замену переменной, по которой проводится суммирование, имеем

$$e_x = \sum_{k=1}^\infty {}_kp_x. \tag{3.5.7}$$

Повторяя рассуждения, проведенные для непрерывной модели, и пользуясь формулой суммирования по частям, получаем

$$\mathbf{E}[K(x)^2] = \sum_{k=0}^\infty k^2 \, {}_kp_x \, q_{x+k} = \sum_{k=0}^\infty k^2 \Delta(-{}_kp_x) = k^2(-{}_kp_x)\Big|_0^\infty + \sum_{k=0}^\infty (\Delta k)^2 ({}_{k+1}p_x). \tag{3.5.8}$$

Из существования $\mathbf{E}[K(x)^2]$ вытекает соотношение $\lim_{k\to\infty} k^2(-{}_kp_x) = 0$. Проведя замену переменной, по которой производится суммирование, получаем

$$\mathbf{E}[K(x)^2] = \sum_{k=0}^\infty (2k+1)\, {}_{k+1}p_x = \sum_{k=1}^\infty (2k-1)\, {}_kp_x. \tag{3.5.9}$$

---

[1] В оригинале «curtate-expectation-of-life». См. примечание редактора в разд. 3.2.3. — *Прим. ред.*

Далее,

$$\mathbf{D}[K] = \mathbf{E}[K^2] - (\mathbf{E}[K])^2 = \sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)\, {}_kp_x - e_x^2. \tag{3.5.10}$$

Для завершения обсуждения некоторых компонент табл. 3.3.1 мы должны ввести дополнительные функции. Символ L_x обозначает общее ожидаемое число лет, прожитых между возрастами x и $x+1$ дожившими до возраста x лицами из исходной группы, содержавшей l_0 новорожденных. Мы имеем

$$L_x = \int_0^1 t\, l_{x+t}\, \mu_{x+t}\, dt + l_{x+1}, \tag{3.5.11}$$

где интеграл в правой части равен числу лет, прожитых теми, кто умер в возрастном интервале между x и $x+1$, а l_{x+1} равно числу лет, прожитых в возрастном интервале между x и $x+1$ теми, кто дожил до возраста $x+1$. Интегрирование по частям дает

$$L_x = -\int_0^1 t\, dl_{x+t} + l_{x+1} = -t\, l_{x+t}\Big|_0^1 + \int_0^1 l_{x+t}\, dt + l_{x+1} = \int_0^1 l_{x+t}\, dt. \tag{3.5.12}$$

Функция L_x также используется в определении *повозрастного коэффициента смертности* в интервале между x и $x+1$, который обозначается через m_x, где

$$m_x = \frac{\int_0^1 l_{x+t}\, \mu(x+t)\, dt}{\int_0^1 l_{x+t}\, dt} = \frac{l_x - l_{x+1}}{L_x}. \tag{3.5.13}$$

Приложение этой функции описывается в гл. 10.

Приведенные выше определения для m_x и L_x можно распространить на возрастные интервалы длины, отличной от единицы:

$${}_nL_x = -\int_0^n t\, l_{x+t}\, \mu(x+t)\, dt + n\, l_{x+n} = \int_0^n l_{x+t}\, dt, \tag{3.5.14}$$

$${}_nm_x = \frac{\int_0^n l_{x+t}\, \mu(x+t)\, dt}{\int_0^n l_{x+t}\, dt} = \frac{l_x - l_{x+n}}{{}_nL_x}\,. \tag{3.5.15}$$

Для совокупности случайного дожития ${}_nL_x$ является общим ожидаемым числом лет, которые прожиты в возрастном интервале между x и $x+n$ дожившими до возраста x лицами из исходной группы, содержавшей l_0 новорожденных, а ${}_nm_x$ является повозрастным коэффициентом смертности, наблюдавшимся в этой группе на интервале $(x, x+n)$.

Символ T_x обозначает общее число лет, прожитых после достижения возраста x лицами, дожившими до этого возраста, из исходной группы, содержавшей l_0 новорожденных. Мы имеем

$$T_x = \int_0^{\infty} t\, l_{x+t}\, \mu(x+t)\, dt = -\int_0^{\infty} t\, dl_{x+t} = \int_0^{\infty} l_{x+t}\, dt. \tag{3.5.16}$$

Последнее выражение можно интерпретировать как интеграл от общего времени, прожитого между возрастами $x+t$ и $x+t+dt$ группой из l_{x+t} лиц, которые дожили до этого возрастного интервала. Обратим также внимание, что T_x является пределом величины ${}_nL_x$, когда n стремится к бесконечности.

Среднее число лет предстоящей жизни для l_x лиц из группы, доживших до возраста x, определяется выражением

$$\frac{T_x}{l_x} = \frac{\int_0^\infty l_{x+t}\,dt}{l_x} = \int_0^\infty {}_tp_x\,dt = \overset{\circ}{e}_x$$

в соответствии с формулами (3.5.1) и (3.5.2).

Мы можем найти выражение для среднего числа лет, прожитых между возрастами x и $x+n$ группой из l_x лиц, доживших до возраста x:

$$\frac{{}_nL_x}{l_x} = \frac{\int_0^n l_{x+t}\,dt}{l_x} = \frac{T_x - T_{x+n}}{l_x} = \int_0^n {}_tp_x\,dt. \tag{3.5.17}$$

Эта функция является *усеченной (на n-летнем интервале) полной ожидаемой продолжительностью жизни* для лиц (x) и обозначается через $\overset{\circ}{e}_{x:\overline{n}|}$. (См. упр. 3.16.)

Последней функцией, связанной с описанной в этом разделе интерпретацией таблицы смертности, является среднее число лет, прожитых между возрастами x и $x+1$ теми лицами в группе доживших до возраста x, которые умирают в некоторый момент между этими возрастами. Эта функция обозначается через $a(x)$ и определяется соотношением

$$a(x) = \frac{\int_0^1 t\,l_{x+t}\,\mu(x+t)\,dt}{\int_0^1 l_{x+t}\,\mu(x+t)\,dt}. \tag{3.5.18}$$

При вероятностном взгляде на таблицы смертности мы получили бы

$$a(x) = \frac{\int_0^1 t\,{}_tp_x\,\mu(x+t)\,dt}{\int_0^1 {}_tp_x\,\mu(x+t)\,dt} = \mathbf{E}[T\,|\,T<1].$$

Если мы предполагаем, что

$$l_{x+t}\,\mu(x+t)\,dt = d_x\,dt, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

т. е. если моменты смерти равномерно распределены внутри годичного возрастного интервала, то мы получим

$$a(x) = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}.$$

Это обычное приближение функции $a(x)$, пригодное для лиц всех возрастов, кроме совсем юных и очень старых, где, как показывает рис. 3.3.2, это предположение может не соответствовать действительности.

Пример 3.5.1. Покажем, что

$$L_x = a(x)\,l_x + [1-a(x)]l_{x+1} \quad \text{и} \quad L_x \cong (l_x + l_{x+1})/2.$$

Решение. Из (3.5.11), (3.5.12) и (3.5.18) мы получаем

$$a(x) = \frac{L_x - l_{x+1}}{l_x - l_{x+1}},$$

или

$$L_x = a(x)\,l_x + [1-a(x)]l_{x+1}.$$

Формулу

$$L_x \cong (l_x + l_{x+1})/2$$

можно обосновать, приближая интеграл в (3.5.12) с помощью формулы трапеций. ▼

Основная терминология, относящаяся к таблицам смертности и определенная в разд. 3.3–3.5, суммируется в табл. 3.9.1 разд. 3.9.

3.5.2. Рекуррентные формулы

Пример 3.5.1 иллюстрирует применение численного анализа для нахождения характеристик таблиц смертности. Для приближенного интегрирования используется формула трапеций. Для иллюстрации другого вычислительного метода, который использует *рекуррентные формулы*, рассмотрим вычисление полных и пошаговых ожидаемых продолжительностей жизни. В этой книге при применении рекуррентных формул, как правило, используется одна из двух следующих форм:

обратная рекуррентная формула

$$u(x) = c(x) + d(x)u(x+1) \tag{3.5.19}$$

или

прямая рекуррентная формула

$$u(x+1) = -\frac{c(x)}{d(x)} + \frac{1}{d(x)}u(x). \tag{3.5.20}$$

Переменная x обычно принимает целые неотрицательные значения.

Таблица 3.5.1. Обратные рекуррентные формулы для e_x и $\overset{\circ}{e}_x$

Шаг	e_x	$\overset{\circ}{e}_x$
1. Основное уравнение	$e_x = \sum_{k=1}^{\infty} {}_kp_x$	$\overset{\circ}{e}_x = \int_0^{\infty} {}_sp_x\,ds$
2. Выделение слагаемого	$e_x = p_x + \sum_{k=2}^{\infty} {}_kp_x$	$\overset{\circ}{e}_x = \int_0^1 {}_sp_x\,ds + \int_1^{\infty} {}_sp_x\,ds$
3. Вынесение множителя p_x и замена переменной	$e_x = p_x + p_x \sum_{k=1}^{\infty} {}_kp_x$ $= p_x + p_x\, e_{x+1}$	$\overset{\circ}{e}_x = \int_0^1 {}_sp_x\,ds + p_x \int_0^{\infty} {}_tp_{x+1}\,dt$ $= \int_0^1 {}_sp_x\,ds + p_x\, \overset{\circ}{e}_{x+1}$
4. Рекуррентная формула[1)]	$u_x = e_x$, $c(x) = p_x$, $d(x) = p_x$	$u(x) = \overset{\circ}{e}_x$, $c(x) = \int_0^1 {}_sp_x\,ds$, $d(x) = p_x$
5. Начальное значение[2)]	$e_\omega = u(\omega) = 0$	$\overset{\circ}{e}_x = u(x) = 0$

Для вычисления функции $u(x)$ при целых неотрицательных значениях x нам нужно знать соответствующие значения функций $c(x)$ и $d(x)$ и начальное значение функции $u(x)$. Эта процедура используется в последующих главах и иллюстрируется в табл. 3.5.1, где для вычисления e_x и $\overset{\circ}{e}_x$ применяются обратные рекуррентные формулы.

3.6. Предположения для дробных возрастов

В этой главе мы обсуждали непрерывную случайную величину T, продолжительность предстоящей жизни, и дискретную случайную величину K, пошаговую

[1)] Интеграл $c(x) = \int_0^1 {}_sp_x\,ds$ может быть подсчитан с использованием формулы трапеций, согласно которой $c(x) = (1+p_x)/2$.

[2)] Из разд. 3.3.1 мы знаем, что $s(x) = 0$, $x \geqslant \omega$, $x < \omega$. В нашем контексте мы будем предполагать, что ω является целым числом.

продолжительность предстоящей жизни. Таблица смертности, представленная в разд. 3.3, полностью определяет распределение вероятностей с.в. K. Для определения распределения с.в. T мы должны постулировать некоторую аналитическую форму или основываться на таблице смертности, приняв некоторое предположение о структуре распределения между целыми точками.

Мы рассмотрим три широко используемых в актуарной науке предположения. Они будут сформулированы в терминах функции дожития и в такой форме, которая позволяет показать природу интерполяции на интервале $(x, x+1)$, вытекающую из каждого из этих предположений. В каждом утверждении x является целым и $0 \leqslant t \leqslant 1$. Сформулируем предположения:

- **Линейная интерполяция:** $s(x+t) = (1-t)s(x) + t\,s(x+1)$. Это приводит к *равномерному распределению* или, точнее, к равномерному распределению моментов смерти внутри каждого годичного возрастного интервала. При этом предположении ${}_tp_x$ является линейной функцией.
- **Показательная интерполяция**, или линейная интерполяция для $\ln s(x+t)$: $\ln s(x+t) = (1-t)\ln s(x) + t\ln s(x+1)$. Это согласуется с предположением о *постоянной интенсивности* смертности внутри каждого годичного возрастного интервала. При этом предположении ${}_tp_x$ является показательной функцией.
- **Гармоническая интерполяция:** $1/s(x+t) = (1-t)/s(x) + t/s(x+1)$. Это то, что называется предположением о *гиперболичности* (исторически, предположением *Бальдуччи*[1)]), поскольку в этом случае ${}_tp_x$ является гиперболической кривой.

Опираясь на эти основные определения, для остальных стандартных вероятностных функций можно вывести формулы в терминах вероятностей, указанных в таблице смертности. Такие результаты представлены в табл. 3.6.1. Заметим, что мы с тем же успехом могли бы сформулировать эквивалентные определения в терминах функции плотности, функции распределения или интенсивности смертности.

Вывод выражений, входящих в табл. 3.6.1, является просто упражнением, заключающимся в подстановке сформулированных выше предположений о $s(x+t)$ в соответствующие формулы разд. 3.2 и 3.3. Мы продемонстрируем этот процесс для равномерного распределения смертей; предположение о равномерности распределения будет часто использоваться на всем протяжении настоящей книги.

Для определения первого выражения в столбце, относящемся к равномерному распределению, начнем с соотношения

$$ {}_tq_x = \frac{s(x) - s(x+t)}{s(x)}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1, $$

а затем подставим соответствующее выражение для $s(x+t)$ и получим

$$ {}_tq_x = \frac{s(x) - [(1-t)s(x) + ts(x+1)]}{s(x)} = \frac{t[s(x) - s(x+1)]}{s(x)} = tq_x. $$

Для второго выражения воспользуемся формулой (3.2.13) и

$$ \mu(x+t) = -\frac{s'(x+t)}{s(x+t)}; $$

[1)] Это предположение названо по имени Дж. Бальдуччи, итальянского актуария, который указал роль этого предположения в традиционном актуарном методе построения таблиц смертности.

далее, подставляя соответствующее выражение для $s(x+t)$, получаем

$$\mu(x+t) = \frac{s(x) - s(x+1)}{(1-t)s(x) + ts(x+1)}.$$

Деление числителя и знаменателя в правой части на $s(x)$ приводит к формуле

$$\mu(x+t) = \frac{q_x}{1 - tq_x}.$$

Третье выражение является частным случаем четвертого при $y = 1 - t$.

Рассматривая четвертое выражение, начнем с равенства

$${}_yq_{x+t} = \frac{s(x+t) - s(x+t+y)}{s(x+t)},$$

а затем, подставив соответствующее выражение для $s(x+t)$ и $s(x+t+y)$, получим

$$\begin{aligned} {}_yq_{x+t} &= \frac{[(1-t)s(x) + ts(x+1)] - [(1-t-y)s(x) + (t+y)s(x+1)]}{(1-t)s(x) + ts(x+1)} \\ &= \frac{y[s(x) - s(x+1)]/s(x)}{\{s(x) - t[s(x) - s(x+1)]\}/s(x)} = \frac{yq_x}{1 - tq_x}. \end{aligned}$$

Пятое выражение является дополнением первого, и последнее выражение в столбце, относящемся к равномерному распределению, является произведением второго и пятого выражений.

Таблица 3.6.1. Вероятностные функции для дробных возрастов[1)]

Функция	Предположения		
	Равномерное распределение	Постоянная интенсивность	Гиперболичность
${}_tq_x$	tq_x	$1 - p_x^t$	$\dfrac{tq_x}{1-(1-t)q_x}$
$\mu(x+t)$	$\dfrac{q_x}{1-tq_x}$	$-\ln p_x$	$\dfrac{q_x}{1-(1-t)q_x}$
${}_{1-t}q_{x+t}$	$\dfrac{(1-t)q_x}{1-tq_x}$	$1 - p_x^{1-t}$	$(1-t)q_x$
${}_yq_{x+t}$	$\dfrac{yq_x}{1-tq_x}$	$1 - p_x^y$	$\dfrac{yq_x}{1-(1-y-t)q_x}$
${}_tp_x$	$1 - tq_x$	p_x^t	$\dfrac{p_x}{1-(1-t)q_x}$
${}_tp_x\,\mu(x+t)$	q_x	$-p_x^t \ln p_x$	$\dfrac{q_xp_x}{[1-(1-t)q_x]^2}$

Если, как и ранее, x является целым числом, то анализ можно провести, введя случайную величину $S = S(x)$, такую, что

$$T = K + S, \tag{3.6.1}$$

где T является продолжительностью предстоящей жизни, K — пошаговой продолжительностью предстоящей жизни, а S — случайной величиной, представляющей прожитую дробную часть года, в котором наступила смерть. Поскольку K является неотрицательной целочисленной случайной величиной, а S — случайной величиной

[1)]Заметим, что в этой таблице x целое, $0 < t < 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $y + t \leqslant 1$. В первой, третьей, четвертой и пятой строках соотношения справедливы также для $t = 0$ и $t = 1$.

непрерывного типа, вся масса которой сосредоточена на интервале $(0,1)$, мы можем исследовать их совместное распределение, записав

$$\mathbf{P}[(K=k)\cap(S\leqslant s)] = \mathbf{P}(k<T\leqslant k+s) = {}_kp_x\,{}_sq_{x+k}.$$

Теперь, воспользовавшись выражением для ${}_sq_{x+k}$ в предположении равномерности распределения, как показано в табл. 3.6.1, получим

$$\mathbf{P}[(K=k)\cap(S\leqslant s)] = {}_kp_x\;s\,q_{x+k} = {}_{k|}q_x\;s = \mathbf{P}(K=k)\,\mathbf{P}(S\leqslant s). \tag{3.6.2}$$

Таким образом, совместное распределение с.в. K и S может быть разложено на произведение маргинальных распределений с.в. K и S. Поэтому в предположении равномерности распределения моментов смерти с.в. K и S оказываются независимыми. Поскольку распределение $\mathbf{P}(S\leqslant s) = s$ является равномерным на $(0,1)$, с.в. S имеет именно такое равномерное распределение.

Пример 3.6.1. Будут ли с.в. K и S независимыми в предположении постоянной интенсивности смертности?

Решение. Воспользовавшись информацией из табл. 3.6.1, относящейся к предположению о постоянной интенсивности смертности, мы получаем

$$\mathbf{P}[(K=k)\cap(S\leqslant s)] = {}_kp_x\,{}_sq_{x+k} = {}_kp_x[1-(p_{x+k})^s].$$

Для обсуждения этого результата будем различать два случая:

- Если в выражение для p_{x+k} входит k, то мы не можем представить совместное распределение с.в. K и S в виде произведения маргинальных распределений. Отсюда мы делаем вывод, что с.в. K и S не являются независимыми.
- В частном случае, когда $p_{x+k} = p_x$ — константа,

$$\mathbf{P}[(K=k)\cap(S\leqslant s)] = p_x^k(1-p_x^s) = \frac{(1-p_x)p_x^k(1-p_x^s)}{1-p_x} = \mathbf{P}(K=k)\,\mathbf{P}(S\leqslant s).$$

Для этого частного случая мы получаем, что с.в. K и S оказываются независимыми в предположении постоянной интенсивности смертности. ▼

Пример 3.6.2. Покажем, что в предположении равномерности распределения смертей

(a) $\overset{\circ}{e}_x = e_x + 1/2$, (b) $\mathbf{D}[T] = \mathbf{D}[K] + 1/12$.

Решение. (a) $\overset{\circ}{e}_x = \mathbf{E}[T] = \mathbf{E}[K+S] = \mathbf{E}[K] + \mathbf{E}[S] = e_x + 1/2$.

(b) $\mathbf{D}[T] = \mathbf{D}[K+S]$. Из независимости с.в. K и S в предположении равномерности распределения смертей получаем $\mathbf{D}[T] = \mathbf{D}[K] + \mathbf{D}[S]$. Далее, поскольку с.в. S равномерно распределена на $(0,1)$, $\mathbf{D}[T] = \mathbf{D}[K] + 1/12$. ▼

3.7. Некоторые аналитические законы смертности

Имеется три основных аргумента в пользу принятия аналитического выражения для функции смертности или для функции дожития. Первый — философский. Многие явления, изучавшиеся в физике, можно эффективно объяснить с помощью простых формул. Поэтому, основываясь на биологических соображениях, некоторые авторы предположили, что дожитие в человеческом сообществе управляется такими же простыми законами. Второй аргумент — практический. Функция с несколькими параметрами легче воспринимается, чем таблица смертности с, возможно, 100 параметрами или вероятностями смерти. Кроме того, некоторые из аналитических выражений обладают простыми свойствами, которые удобны при выводе вероятностных утверждений, касающихся более чем одного лица. Третий аргумент для простых аналитических функций дожития — легкость оценивания параметров этой функции на основе данных о смертности.

В последние годы энтузиазм в отношении простых аналитических функций дожития существенно уменьшился. Многие полагают, что вера в универсальные законы смертности наивна. При все увеличивающемся быстродействии и объеме памяти компьютеров преимущества некоторых аналитических выражений при проведении вычислений, касающихся более чем одного лица, уже не играют значительной роли. Однако в результате некоторых недавних исследований оживились биологические аргументы в поддержку аналитических законов смертности.

В табл. 3.7.1 приводятся несколько семейств простых аналитических функций смертности и дожития, соответствующих различным известным законам. Для удобства ссылок указаны названия законов, лежащих в их основе, и даты публикации.

Таблица 3.7.1. Функции смертности и дожития для различных распределений

Исходное распределение	$\mu(x)$	$s(x)$	Ограничения
Де Муавр (1729)	$(\omega - x)^{-1}$	$1 - x/\omega$	$0 \leqslant x < \omega$
Гомперц (1825)	Bc^x	$\exp[-m(c^x - 1)]$	$B > 0,\ c > 1,\ x \geqslant 0$
Мейкем (1860)	$A + Bc^x$	$\exp[-Ax - m(c^x - 1)]$	$B > 0,\ A \geqslant -B,\ c > 1,\ x \geqslant 0$
Вейбулл (1939)	kx^n	$\exp(-ux^{n+1})$	$k > 0,\ n > 0,\ x \geqslant 0$

Отметим следующие факты:

- Специальные символы определяются формулами $m = B/\ln c$, $u = k/(n+1)$.
- Закон Гомперца является частным случаем закона Мейкема при $A = 0$.
- Если $c = 1$ в законах Гомперца и Мейкема, то мы приходим к показательному (постоянная интенсивность смертности) распределению.
- При рассмотрении закона Мейкема считалось, что константа A отвечает несчастному случаю, а выражение Bc^x — старению.

Выражения в столбце $s(x)$ табл. 3.7.1 были получены подстановкой в (3.2.16). Например, для закона Мейкема

$$s(x) = \exp\left[-\int_0^x (A + Bc^s)\,ds\right] = \exp\left[-Ax - B\,\frac{c^x - 1}{\ln c}\right] = \exp[-Ax - m(c^x - 1)],$$

где $m = B/\ln c$.

В примерах и в упражнениях этой книги разработка таблицы смертности подчинялась двум целям. Одна цель состояла в том, чтобы выбирать коэффициент смертности из середины диапазона его изменения для всей группы. Разброс здесь возникает в силу таких факторов, как место жительства, пол, статус страхователя, статус аннуитета, семейное положение, занятость. Вторая цель — определить параметры закона Мейкема так, чтобы он подходил для большинства возрастов, с тем, чтобы показать, как можно проводить вычисления, относящиеся к многим лицам.

Иллюстративная таблица смертности из приложения 2А основана на законе Мейкема для возрастов 13 лет и выше,

$$1000\,\mu(x) = 0{,}7 + 0{,}05(10^{0{,}04})^x. \qquad (3.7.1)$$

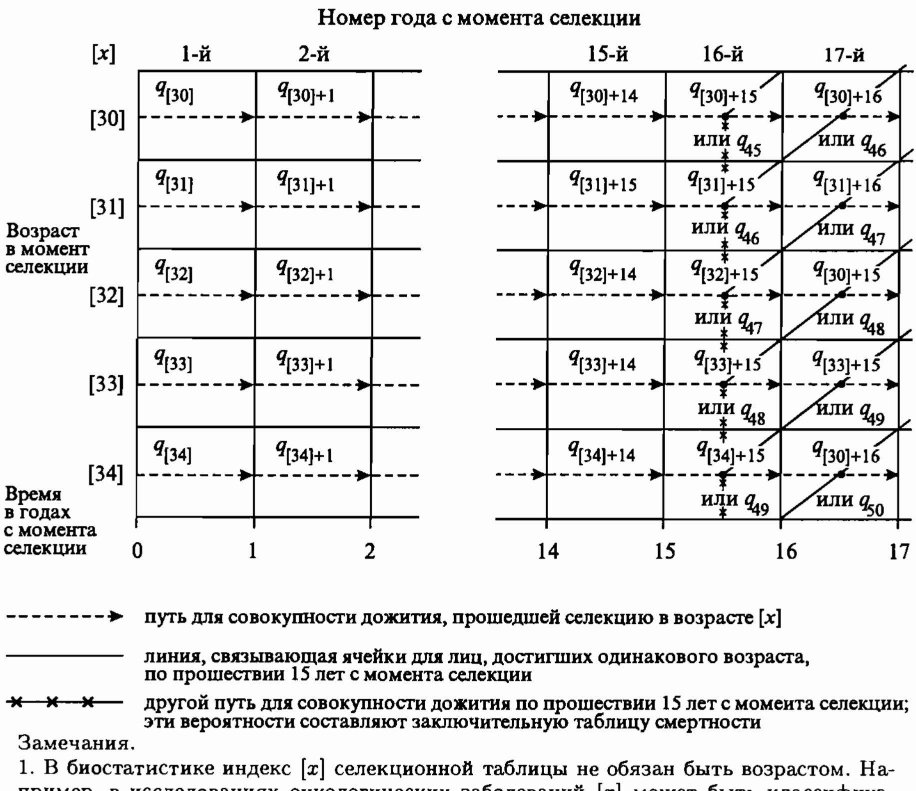
Все вычисления основных функций q_x, l_x и d_x по формуле (3.7.1) мы производили непосредственно по ней, а не вычисляя l_x и d_x, исходя из усеченных q_x. Было обнаружено, что выбор последнего способа в приложениях дает близкие результаты. Следует помнить, что Иллюстративная таблица смертности, как следует из ее названия, предназначена только для иллюстрации.

3.8. Селекционные и заключительные таблицы[1)]

В разд. 3.2 мы обсуждали, как можно двумя способами интерпретировать величину ${}_tp_x$, вероятность того, что лицо (x) доживет до возраста $x+t$. Первая интерпретация состояла в том, что эту вероятность можно вычислить на основе функции дожития для новорожденных при единственном предположении, что новорожденный доживет до возраста x. Эта интерпретация стала основой для обозначений и для выведения формул. Вторая интерпретация состояла в том, что дополнительная информация о лице возраста x может сделать исходную функцию дожития непригодной для вычисления вероятностных утверждений о продолжительности предстоящей жизни лица (x). Например, некоторое лицо может пройти обследование и быть принятым на страхование в возрасте x. Наличие этой информации позволило бы считать, что распределение продолжительности предстоящей жизни лица (x) отличается от того, которое мы считали бы подходящим для лица возраста x, если бы не располагали этой информацией. Второй пример: некоторое лицо может стать инвалидом в возрасте x. Эта информация позволяет нам предполагать, что распределение продолжительности предстоящей жизни лица (x) отлично от соответствующего распределения для лица, не ставшего инвалидом в возрасте x. В этих двух примерах следует отдать предпочтение специальной интенсивности смертности, учитывающей конкретную информацию, которая становится известной в возрасте x. Без этой конкретной информации об (x) интенсивность смертности по прошествии времени t будет функцией только достигнутого возраста $x+t$, что в предыдущем разделе обозначалось через $\mu(x+t)$. Если известна дополнительная информация в момент x, то интенсивность смертности в момент $x+t$ является функцией этой информации в момент x и величины t. Мы будем обозначать ее через $\mu_x(t)$, где отдельно указывается возраст x, в котором была доступна дополнительная информация, и величина t. Сама дополнительная информация в явной форме в это обозначение не входит, но ясна из контекста. Другими словами, полная модель для таких лиц является набором функций дожития, по одной для каждого возраста, в котором имеется информация о принятии на страхование, об инвалидности и т. п. Это множество функций дожития можно воспринимать как функцию двух переменных. Одна переменная — возраст в момент *селекции* (например, в момент выдачи страхового договора или наступления инвалидности) $[x]$ и вторая переменная — время, прошедшее с момента выдачи договора или с момента селекции t. Тогда каждая из обычных функций таблицы смертности, отвечающая такой функции от двух переменных, является двумерным массивом по $[x]$ и t. Мы используем здесь квадратные скобки, чтобы отметить переменную, относящуюся к возрасту, в котором проводилась селекция. Когда наличие селекции явствует из интенсивности смертности, мы будем опускать квадратные скобки, чтобы не усложнять обозначения.

[1)] Иногда селекционные таблицы называют избирательными, а заключительные — окончательными. — *Прим. ред.*

Схематическая диаграмма на рис. 3.8.1 иллюстрирует эти соображения. Например, предположим, что имеется некоторая специальная информация о группе лиц возраста 30 лет. Может быть, они были приняты на страхование, а может быть, стали инвалидами. Для этих лиц можно построить специальную таблицу смертности. Условная вероятность смерти в каждый год с момента селекции будет обозначаться через $q_{[30]+i}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, и будет входить в первую строку на рис. 3.8.1. Индекс отражает двумерную природу этой функции, где в квадратные скобки заключен возраст тридцать лет, [30], т. е. функция дожития в первой строке опирается на специфическую информацию, имеющуюся в возрасте 30 лет. Вторая строка на рис. 3.8.1 будет содержать вероятности смерти для лиц, относительно которых специфическая информация стала известной к возрасту 31. В актуарной науке такая двумерная таблица смертности называется *селекционной таблицей* смертности.



Замечания.

1. В биостатистике индекс $[x]$ селекционной таблицы не обязан быть возрастом. Например, в исследованиях онкологических заболеваний $[x]$ может быть классификационным индексом, который зависит от размера и местоположения опухоли, и время после селекции будет отсчитываться от момента постановки диагноза.
2. Заключительную смертность, после 15-летнего периода селекции, для возраста $[x] + 15$ следует оценивать, используя наблюдения из всех ячеек, вида $[x - j] + 15 + j$, $j = 0, 1, 2, \ldots$. Поэтому $q_{[x]+15} = q_{x+15}$ оценивается взвешенным средним оценок смертности по различным группам селекции. Если эффект селекции достаточно велик, то на получаемую оценку будут влиять данные из различных ячеек.

Рис. 3.8.1. Селекционная, заключительная и агрегативная смертность, 15-летний период селекции

Влияние селекции на распределение продолжительности предстоящей жизни T может уменьшаться по мере удаления от момента селекции. Вне некоторого временного интервала величины q для лиц одинакового возраста будут по существу равны вне зависимости от возраста в момент селекции. Точнее, если имеется наименьшее целое число r, такое, что $|q_{[x]+r} - q_{[x-j]+r+j}|$ меньше, чем некоторая маленькая положительная постоянная, для всех возрастов селекции $[x]$ и для всех $j > 0$, то было бы экономично построить множество *селекционных и заключительных* таблиц, срезая двумерный массив после колонки $r + 1$. Для временных интервалов, превосходящих r, мы можем использовать соотношение

$$q_{[x-j]+15+j} \cong q_{[x]+15}, \qquad j > 0.$$

Первые r лет после момента селекции составляют *период селекции*.

Получающийся массив содержит некоторое множество таблиц смертности, по одной на каждый возраст селекции, причем для одного возраста селекции элементы таблицы смертности расположены по горизонтали в течение периода селекции, а затем по вертикали в заключительный период. Это показано на рис. 3.8.1 стрелками.

В исследованиях смертности, проводившихся Обществом актуариев для лиц, которые были застрахованы по стандартному договору индивидуального страхования жизни, использовался 15-летний период селекции (см. рис. 3.8.1), т. е. считается, что

$$q_{[x-j]+15+j} \cong q_{[x]+15}, \qquad j > 0.$$

За пределами периода селекции вероятности смерти снабжаются одним индексом, достигнутым возрастом, т.е. вместо $q_{[x-j]+r+j}$ пишется q_{x+r}. Например, при $r = 15$ и вместо $q_{[30]+15}$, и вместо $q_{[25]+20}$ пишется q_{45}.

Таблица смертности, в которой функции даются только для достигнутых возрастов, называется *агрегативной* таблицей. Такой, например, является табл. 3.3.1. Последний столбец в селекционной и заключительной таблице является специальной агрегативной таблицей, которая обычно называется *заключительной таблицей*, что отражает использование селекции.

Таблица 3.8.1 содержит вероятности смерти и соответствующие значения функций $l_{[x]+k}$ из издания «Permanent Assurances, Females, 1979–82, Tables», опубликованного Институтом и факультетом актуариев Великобритании. Ее называют таблицей AF80. У этой таблицы двухлетний период селекции, и ее проще использовать для иллюстраций, чем таблицы с 15-летним периодом, такие, как «Основные таблицы», опубликованные Обществом актуариев США.

Таблица 3.8.1. Выдержка из селекционной и заключительной таблицы AF80

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
$[x]$	$1000q_{[x]}$	$1000q_{[x]+1}$	$1000q_{x+2}$	$l_{[x]}$	$l_{[x]+1}$	l_{x+2}	$x+2$
30	0,222	0,330	0,422	9906,7380	9904,5387	9901,2702	32
31	0,234	0,352	0,459	9902,8941	9900,5769	9897,0919	33
32	0,250	0,377	0,500	9898,7547	9896,2800	9892,5491	34
33	0,269	0,407	0,545	9894,2903	9891,6287	9887,6028	35
34	0,291	0,441	0,596	9889,4519	9886,5741	9882,2141	36

В табл. 3.8.1 мы имеем три вероятности смертности для возраста 32, а именно

$$q_{[32]} = 0{,}000250 < q_{[31]+1} = 0{,}000352 < q_{32} = 0{,}000422.$$

Упорядочение этих вероятностей понятно, поскольку смертность для лиц, только что принятых на страхование на случай смерти, должна быть ниже. Можно считать, что столбец (3) предоставляет информацию о заключительных вероятностях смертности.

Если заданы одногодичные коэффициенты смертности в селекционной и заключительной таблице, то построение соответствующей селекционной и заключительной таблицы смертности (функций дожития) начинается с заключительной части. Далее могут использоваться такие формулы, как (3.4.1), которые дадут множество величин $l_{x+r} = l_{[x]+r}$, где r является длиной периода селекции. Мы завершим рассмотрение селекционных частей, воспользовавшись соотношениями

$$l_{[x]+r-k-1} = \frac{l_{[x]+r-k}}{p_{[x]+r-k-1}}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, r-1,$$

двигаясь от $r-1$ к 0.

Пример 3.8.1. Воспользовавшись табл. 3.8.1, вычислим:
(a) ${}_2p_{[30]}$, (b) ${}_5p_{[30]}$, (c) ${}_{1|}q_{[31]}$, (d) ${}_3q_{[31]+1}$.

Решение. Формулы, полученные ранее в этой главе, можно приспособить к селекционным и заключительным таблицам, получив

(a) $${}_2p_{[30]} = \frac{l_{[30]+2}}{l_{[30]}} = \frac{9901{,}2702}{9906{,}7380} = 0{,}99945,$$

(b) $${}_5p_{[30]} = \frac{l_{35}}{l_{[30]}} = \frac{9887{,}6028}{9906{,}7380} = 0{,}99807,$$

(c) $${}_{1|}q_{[31]} = \frac{l_{[31]+1} - l_{33}}{l_{[31]}} = \frac{9900{,}5769 - 9897{,}0919}{9902{,}8941} = 0{,}00035,$$

(d) $${}_3q_{[31]+1} = \frac{l_{[31]+1} - l_{35}}{l_{[31]+1}} = \frac{9900{,}5769 - 9887{,}6028}{9900{,}5769} = 0{,}00131.$$ ▼

3.9. Замечания и литература

В табл. 3.9.1 сведены новые понятия, введенные в этой главе, соответствующие термины, обозначения и описания. Таблицы смертности являются краеугольным камнем актуарной науки. Поэтому они интенсивно обсуждаются в ряде англоязычных учебников, посвященных страхованию жизни. См., например, [King 1887], [Spurgeon 1922], [Jordan 1952], [Hooker, Longley-Cook 1953], [Neill 1977]. Эти книги используются для обучения актуариев. Помимо этого, таблицами смертности пользуются биостатистики. Изложение соответствующих вопросов см. в [Chiang 1968] и [Elandt-Johnson, Johnson 1980]. Интерпретация с привлечением детерминистического коэффициента смертности обсуждалось в книге [Allen 1907]. Лондон [London 1988] суммировал ряд методов оценивания таблиц смертности, исходя из имеющихся данных.

Исторически важные аналитические формы функций дожития упомянуты в табл. 3.6.1. Бриллинджер [Brillinger 1961] обосновывал некоторые аналитические формы с точки зрения статистического анализа продолжительности жизни. Тененбейн и Вандерхоф [Tenenbein, Vanderhoof 1980] возвращаются к аналитическим законам смертности и предлагают формулы для селекционной смертности. Работе Бальдуччи [Balducci 1921] предшествовал ряд замечательных статей Виттштейна

[Wittstein 1873]. Статьи Виттштейна были сначала опубликованы по-немецки и переведены на английский язык Т. Б. Шпраге. Обзоры некоторых методов исчисления вероятностей для дробных возрастов привели Мерё [Mereu 1961] и Баттен в книге об оценках смертности [Batten 1978] (см. также исторический обзор Сила [Seal 1977]). Обсуждения длины периода селекции для различных типов селекционных процедур, применяемых в страховании, имеют долгую историю; см., например, [Williamson 1942], [Thompson 1934] и [Jenkins 1943]. Базовые таблицы Общества актуариев США 1975–80 гг. используют 15-летний период селекции и опубликованы в: Transactions of the American Society of Actuaries 1982 Reports of Mortality and Morbidity Experience, 55–82. Международная система актуарных обозначений опубликована в: Transactions of the American Society of Actuaries, Vol. 48 (1947), 166–176.

Таблица 3.9.1. Понятия, введенные в гл. 3

Обозначение	Название или описание понятия
(x)	Обозначение лица возраста x
$[x]$	Возраст или другой статус в момент селекции
X	Возраст в момент смерти, случайная величина
$T(x)$	Продолжительность предстоящей жизни лица (x), равная $X - x$
$K(x)$	Пошаговая продолжительность предстоящей жизни лица (x), равная целой части от $T(x)$
$S(x)$	Продолжительность предстоящей жизни лица (x) в течение года смерти, равная $T(x) - K(x)$
$s(x)$	Функция дожития, равная вероятности того, что новорожденный доживет, по крайней мере, до возраста x
$\mu(x)$	Интенсивность смертности в возрасте x для агрегативной таблицы смертности
$\mu_x(t)$	Интенсивность смертности по достижении возраста $x+t$ при условии селекции в возрасте x
${}_tq_x$	Вероятность того, что лицо (x) умрет в течение t лет
${}_tp_x$	Вероятность того, что лицо (x) проживет, по крайней мере, t лет
${}_{t\|u}q_x$	Вероятность того, что лицо (x) умрет между возрастами t и $t+u$
$\mathring{e}_x$	Полная ожидаемая продолжительность жизни лица (x), равная $\mathbf{E}[T(x)]$
e_x	Пошаговая ожидаемая продолжительность жизни лица (x), равная $\mathbf{E}[K(x)]$
$\mathcal{L}(x)$	Число доживших до возраста x в когорте, случайная величина
${}_n\mathcal{D}_x$	Число умерших между возрастами x и $x+n$ в когорте
l_x	Ожидаемое число доживших до возраста x, равное $\mathbf{E}[\mathcal{L}(x)]$
${}_nd_x$	Ожидаемое число смертей между возрастами x и $x+n$, равное $\mathbf{E}[{}_n\mathcal{D}_x]$
${}_nL_x$	Ожидаемое количество лет, прожитых между возрастами x и $x+n$ лицами, дожившими до возраста x, из исходной группы l_0 лиц
T_x	Ожидаемое количество лет, прожитых после возраста x лицами, дожившими до возраста x, из исходной группы l_0 лиц
m_x	Повозрастной коэффициент смертности на интервале $(x, x+1)$
ω	Омега, предельный возраст в таблице смертности

Для иллюстрации в табл 3.2.1 мы планировали использовать «Таблицу смертности: США, 1989–1991», но этого сделать не удалось, поскольку таблицы, основанные на переписи населения США 1990 г., не были завершены к тому моменту, когда перерабатывалась эта глава.

Упражнения

К разделу 3.2

3.1. Воспользовавшись соображениями, суммированными в табл. 3.2.1, восполните пробелы в следующей таблице:

$s(x)$	$F_X(x)$	$f_X(x)$	$\mu(x)$
			$\operatorname{tg} x,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi/2$
$e^{-x},\ x \geqslant 0$			
	$1 - \dfrac{1}{1+x},\ x \geqslant 0$		

3.2. Докажите, что каждая из приведенных ниже функций может выступать в качестве интенсивности смертности:

(a) $Bc^x,\ B > 0,\ c > 1$ (Гомперц),

(b) $kx^n,\ n > 0,\ k > 0$ (Вейбулл),

(c) $a(b+x)^{-1},\ a > 0,\ b > 0$ (Парето).

3.3. Докажите, что приведенная ниже функция может быть функцией дожития, и укажите соответствующие $\mu(x)$, $f_X(x)$ и $F_X(x)$:

$$s(x) = e^{-x^3/12}, \qquad x \geqslant 0.$$

3.4. Покажите, почему ни одна из функций, приведенных в правой части следующих равенств, не может соответствовать обозначению, использованному в левой части:

(a) $\mu(x) = (1+x)^{-3},\ x \geqslant 0$,

(b) $s(x) = 1 - 22x/12 + 11x^2/8 - 7x^3/24,\ 0 \leqslant x \leqslant 3$,

(c) $f_X(x) = x^{n-1}e^{-x/2},\ x \geqslant 0,\ n \geqslant 1$.

3.5. При $s(x) = 1 - x/100,\ 0 \leqslant x \leqslant 100$, найдите

(a) $\mu(x)$, (b) $F_X(x)$, (c) $f_X(x)$, (d) $\mathbf{P}(10 < X < 40)$.

3.6. Используя функцию дожития из примера 3.5, определите функцию дожития, интенсивность смертности и плотность распределения продолжительности предстоящей жизни для лица (40).

3.7. При $s(x) = [1 - (x/100)]^{1/2},\ 0 \leqslant x \leqslant 100$, найдите

(a) ${}_{17}p_{19}$, (b) ${}_{15}q_{36}$, (c) ${}_{15|13}q_{36}$, (d) $\mu(36)$, (e) $\mathbf{E}[T(36)]$.

3.8. Докажите, что ${}_{k|}q_0 = -\Delta s(k)$ и что $\sum_{k=0}^{\infty} {}_{k|}q_0 = 1$.

3.9. Найдите ${}_{2|2}q_{20}$, если $\mu(x) = 0{,}001$ для $20 \leqslant x \leqslant 25$.

К разделам 3.3, 3.4

3.10. В предположении, что продолжительности предстоящей жизни 10 лиц в совокупности дожития независимы и определены согласно табл. 3.3.1, найдите для с.в. $\mathcal{L}(65)$ функцию вероятностей, среднее и дисперсию.

3.11. Если $s(x) = 1 - x/12,\ 0 \leqslant x \leqslant 12,\ l_0 = 9$ и продолжительности предстоящей жизни независимы, то, как известно, случайный вектор $({}_3\mathcal{D}_0, {}_3\mathcal{D}_3, {}_3\mathcal{D}_6, {}_3\mathcal{D}_9)$ имеет мультиномиальное распределение. Подсчитайте

(a) среднее значение каждой случайной величины,

(b) дисперсию каждой случайной величины,

(c) коэффициент корреляции между каждой парой случайных величин.

3.12. На основе табл. 3.3.1

(a) сравните величины ${}_5q_0$ и ${}_5q_5$,

(b) вычислите вероятность того, что лицо (25) умрет между возрастами 80 и 85.

3.13. Пусть l_{x+t} строго убывает на интервале $0 \leqslant t \leqslant 1$. Покажите, что

(a) если функция l_{x+1} выпукла вверх, то $q_x > \mu(x)$,

(b) если функция l_{x+1} выпукла вниз, то $q_x < \mu(x)$.

3.14. Покажите, что

(a) $\dfrac{d}{dx} l_x\mu(x) < 0$, если $\dfrac{d}{dx}\mu(x) < \mu^2(x)$,

(b) $\dfrac{d}{dx} l_x\mu(x) = 0$, если $\dfrac{d}{dx}\mu(x) = \mu^2(x)$,

(c) $\dfrac{d}{dx} l_x\mu(x) > 0$, если $\dfrac{d}{dx}\mu(x) > \mu^2(x)$.

3.15. Рассмотрим случайную совокупность дожития, состоящую из двух подгрупп: (1) лица в количестве 1600, вошедшие в совокупность в момент их рождения, (2) лица в количестве 540, вошедшие в совокупность в возрасте 10 лет. Ниже приводится выдержка из соответствующей таблицы смертности для обеих подгрупп:

x	$l(x)$
0	40
10	39
70	26

Пусть Y_1 и Y_2 — количества доживших до возраста 70 лет в подгруппе (1) и (2) соответственно. Оцените число c, такое, что $\mathbf{P}(Y_1 + Y_2 > c) = 0{,}05$. Пренебрегайте половинными коррекциями и предполагайте, что продолжительности жизни являются независимыми случайными величинами.

К разделу 3.5

3.16. Определим случайную величину $T^*(x)$ соотношением

$$T^*(x) = \begin{cases} T(x), & 0 < T(x) \leqslant n, \\ n, & n < T(x), \end{cases}$$

и обозначим $\mathbf{E}[T^*(x)]$ через $\mathring{e}_{x:\overline{n}|}$. Это математическое ожидание называется *усеченной полной ожидаемой продолжительностью жизни*. Эта величина используется в планировании здравоохранения. То же самое математическое ожидание, называемое *функцией усеченного математического ожидания*, используется для анализа распределений величины потерь. Покажите, что

(a) $\mathring{e}_{x:\overline{n}|} = \displaystyle\int_0^n t\,{}_tp_x\,\mu(x+t)\,dt + n\,{}_np_x = \int_0^n {}_tp_x\,dt = \frac{T_x - T_{x+n}}{l_x}$,

(b) $\mathbf{D}[T^*] = \displaystyle\int_0^n t^2\,{}_tp_x\,\mu(x+t)\,dt + n^2\,{}_np_x - (\mathring{e}_{x:\overline{n}|})^2 = 2\int_0^n t\,{}_tp_x\,dt - (\mathring{e}_{x:\overline{n}|})^2$.

3.17. Определим случайную величину соотношением

$$K^*(x) = \begin{cases} K(x), & K(x) = 0, 1, 2, \ldots, n-1, \\ n, & K(x) = n, n+1, \ldots, \end{cases}$$

и обозначим $\mathbf{E}[K^*(x)]$ через $e_{x:\overline{n}|}$. Это математическое ожидание называется *усеченной пошаговой ожидаемой продолжительностью жизни*. Покажите, что

(a) $e_{x:\overline{n}|} = \displaystyle\sum_0^{n-1} k\,{}_{k|}q_k + n\,{}_np_x = \sum_1^n {}_kp_x$,

(b) $\mathbf{D}[K^*(x)] = \displaystyle\sum_0^{n-1} k^2\,{}_{k|}q_x + n^2\,{}_np_x - (e_{x:\overline{n}|})^2 = \sum_1^n (2k+1)\,{}_kp_x - (e_{x:\overline{n}|})^2$.

3.18. Пусть функция плотности с.в. T задается соотношением $f_T(t) = ce^{-ct}$ для $t \geqslant 0$, $c > 0$. Подсчитайте

(a) $\overset{\circ}{e}_x = \mathbf{E}[T]$, (b) $\mathbf{D}[T]$, (c) медиану с.в. T, (d) моду распределения с.в. T.

3.19. Если $\mu(x+t) = t$, $t \geqslant 0$, то подсчитайте

(a) ${}_tp_x\,\mu(x+t)$, (b) $\overset{\circ}{e}_x$.

[Указание. Вспомните известный факт из теории вероятностей, что $e^{-t^2/2}/\sqrt{2\pi}$ является функцией плотности стандартного нормального распределения.]

3.20. Пусть функция распределения с.в. $T(x)$ имеет вид

$$F_{T(x)}(t) = \begin{cases} t/(100-x), & 0 \leqslant t < 100-x, \\ 1, & t \geqslant 100-x. \end{cases}$$

Подсчитайте

(a) $\overset{\circ}{e}_x$, (b) $\mathbf{D}[T(x)]$, (c) медиану с.в. $T(x)$.

3.21. Покажите, что

(a) $\dfrac{\partial}{\partial x}\,{}_tp_x = {}_tp_x\,[\mu(x) - \mu(x+1)]$, (b) $\dfrac{d}{dx}\,\overset{\circ}{e}_x = \overset{\circ}{e}_x\,\mu(x) - 1$, (c) $\Delta e_x = q_x\, e_{x+1} - p_x$.

3.22. Проверьте следующие утверждения:

(a) $a(x)\,d_x = L_x - l_{x+1}$,

(b) аппроксимация, полученная в примере 3.5.1, не применялась для расчета L_0 в табл. 3.3.1, но применялась для расчета L_1,

(c) $T_x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} L_{x+k}$.

3.23. Функция дожития задается соотношением

$$s(x) = \begin{cases} 1 - x/10, & 0 \leqslant x \leqslant 10, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Подсчитайте значения $\overset{\circ}{e}_x$ и e_x, $x = 0, 1, 2, \ldots, 9$, используя

(a) формулы (3.5.2) и (3.5.7),

(b) формулы, полученные в табл. 3.5.1.

3.24. Найдите $u(0)$, $-c(x)/d(x)$ и $d(x)$, если $u(x) = \mathbf{P}(X = x)$ и если для построения таблицы функции вероятностей с.в. X используется формула (3.5.20) и X имеет

(a) пуассоновское распределение с параметром λ,

(b) биномиальное распределение с параметрами n и p.

3.25. Пусть для построения таблиц функций сложных процентов используется формула (3.5.20). Найдите $u(1)$, $-c(x)/d(x)$ и $1/d(x)$, если[1)]

(a) $u(x) = \ddot{a}_{\overline{x}|}$, (b) $u(x) = \ddot{s}_{\overline{x}|}$.

К разделу 3.6

3.26. Проверьте элементы табл. 3.6.1 при постоянной интенсивности смертности и при предположении о гиперболичности. Обратите внимание на то, что значения ${}_sp_x$ в соответствующем столбце обосновывают само это название.

3.27. Постройте график функции $\mu(x+t)$, $0 < t < 1$, при каждом из трех предположений табл. 3.6.1. Постройте также график функции дожития при каждом из этих трех предположений.

3.28. Воспользовавшись столбцом, соответствующим l_x в табл. 3.3.1, вычислите ${}_{1/2}p_{65}$ при каждом из трех предположений табл. 3.6.1.

3.29. Воспользуйтесь табл. 3.3.1 и предположением о равномерности распределения смертей внутри каждого годичного возрастного интервала для нахождения медианы продолжительности предстоящей жизни лица

(a) возраста 0, (b) возраста 50.

[1)] Соответствующие обозначения см. в начале разд. 5.3. — ***Прим. ред.***

3.30. Для $q_{70} = 0{,}04$ и $q_{71} = 0{,}05$ вычислите вероятность того, что лицо (70) умрет между возрастами $70\frac{1}{2}$ и $71\frac{1}{2}$ в предположении о

(a) равномерности распределения смертей внутри каждого года возраста;

(b) гиперболичности для каждого годичного возрастного интервала.

3.31. Воспользовавшись столбцом, соответствующим l_x в табл. 3.3.1, и каждым из предположений табл. 3.6.1, вычислите

(a) $\lim_{h\to 0-} \mu(60+h)$, (b) $\lim_{h\to 0+} \mu(60+h)$, (c) $\mu(60+1/2)$.

3.32. В предположении постоянства интенсивности смертности покажите, что

(a) $a(x) = -\dfrac{[(1-e^{-\mu})/\mu] - e^{-\mu}}{1-e^{-\mu}}$, (b) $a(x) \cong \dfrac{1}{2} - \dfrac{q_x}{12}$.

3.33. Если принято предположение о гиперболичности, покажите, что

(a) $a(x) = -\dfrac{p_x}{q_x^2}(q_x + \ln p_x)$, (b) $a(x) \cong \dfrac{1}{2} - \dfrac{q_x}{6}$.

К разделу 3.7

3.34. Проверьте элементы табл. 3.7.1 для законов Муавра и Вейбулла.

3.35. Рассмотрите модификацию закона Муавра, которая задается соотношениями

$$s(x) = \left(1 - \frac{x}{\omega}\right)^{\alpha}, \qquad 0 \leqslant x < \omega,\ \alpha > 0.$$

Подсчитайте

(a) $\mu(x)$, (b) $\mathring{e}_x$.

К разделу 3.8

3.36. Воспользовавшись табл. 3.8.1, вычислите

(a) ${}_2q_{[32]+1}$, (b) ${}_2p_{[31]+1}$.

3.37. Величина $1 - q_{[x]+k}/q_{x+k} = I(x,k)$ называется *индексом селекции*. Когда она близка к нулю, это показывает, что результат селекции исчезает. Пользуясь табл. 3.8.1, вычислите этот индекс для $x = 32$, $k = 0, 1$.

3.38. Интенсивность смертности для лица, прошедшего селекцию в возрасте x, задается выражением $\mu_{\mathbf{x}}(t) = \Psi(\mathbf{x})\mu(t)$, $t > 0$. В этой формуле $\mu(t)$ является стандартной интенсивностью смертности. Символ $\mathbf{x}$ обозначает вектор численной информации о рассматриваемом лице в момент селекции. Эта информация содержит возраст и прочую классификационную информацию. Требуется, чтобы $\Psi(\mathbf{x}) > 0$ и $\Psi(\mathbf{x}_0) = 1$, где $\mathbf{x}_0$ обозначает стандартную информацию. Покажите, что селекционная функция дожития имеет вид

$${}_tp_{[\mathbf{x}]} = ({}_tp_{[\mathbf{x}_0]})^{\Psi(\mathbf{x})}$$

и функция плотности с.в. $T(\mathbf{x})$ продолжительности предстоящей жизни при условии, что известна информация $\mathbf{x}$, имеет вид $-\Psi(\mathbf{x})\,{}_tp'_{[\mathbf{x}_0]}({}_tp_{[\mathbf{x}_0]})^{\Psi(\mathbf{x})-1}$, где ${}_tp'_{[\mathbf{x}_0]}$ является производной по t функции ${}_tp_{[\mathbf{x}_0]}$. Такая ситуация называется моделью *пропорциональной интенсивности риска*.

К различным темам главы

3.39. Лицо возраста 50 лет подвержено дополнительному случайному риску в возрасте от 50 до 51 года. Пусть стандартная вероятность смерти в возрасте от 50 до 51 года равна 0,006, и пусть дополнительный риск может быть выражен в виде добавки к стандартной интенсивности смертности, которая равномерно убывает с 0,03 в начале года до 0 в конце года. Вычислите вероятность того, что это лицо доживет до 51 года.

3.40. Пусть интенсивность смертности $\mu_x(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, заменяется на $\mu_x(t) - c$, где c — положительная константа. Найдите значение c, при котором вероятность того, что лицо (x) умрет в течение года, станет вдвое меньше. Выразите ответ через $q_{[x]}$.

3.41. На базе стандартной таблицы смертности с помощью удвоения интенсивности смертности из этой таблицы построена вторая таблица смертности. Будет ли коэффициент смертности q'_x при любом заданном возрасте в новой таблице более чем в два раза выше, в точности в два раза выше или менее чем в два раза выше коэффициента смертности q_x стандартной таблицы?

3.42. Пусть $\mu(x) = Bc^x$, $c > 1$. Покажите, что функция $l_x\,\mu(x)$ имеет минимум в возрасте x_0, где $\mu(x_0) = \ln c$. [Указание. В этом упражнении используется результат упр. 3.14.]

3.43. Пусть $\mu(x) = Ac^x/(1 + Bc^x)$ для $x > 0$.

(a) Определите функцию дожития $s(x)$.

(b) Проверьте, что мода распределения с.в. X, возраста в момент смерти, задается соотношением $x_0 = [\ln(\ln c) - \ln A]/\ln c$.

3.44. Пусть $\mu(x) = 3/(100 - x) - 10/(250 - x)$ для $40 < x < 100$. Подсчитайте (a) ${}_{40}t_{50}$, (b) моду распределения с.в. X, возраста в момент смерти.

3.45. (a) Покажите, что в предположении равномерности распределения смертей

$$m_x = \frac{q_x}{1 - (1/2)q_x} \qquad \text{и} \qquad q_x = \frac{m_x}{1 - (1/2)m_x}.$$

(b) Выразите m_x через q_x в предположении, что интенсивность смертности постоянна.

(c) Выразите m_x через q_x в предположении гиперболичности.

(d) Пусть $l_x = 100 - x$ для $0 \leqslant x \leqslant 100$. Подсчитайте ${}_{10}m_{50}$, где

$${}_nm_x = \frac{\int_0^n l_{x+t}\,\mu(x+t)\,dt}{\int_0^n l_{x+t}\,dt}.$$

3.46. Покажите, что с.в. K и S независимы тогда и только тогда, когда выражение ${}_sq_{[x]+k}/q_{[x]+k}$ не зависит от k для $0 \leqslant s \leqslant 1$.

Упражнения с использованием компьютера

Предлагаемые ниже упражнения — первые в серии упражнений, которые требуют такого объема вычислений, когда имеет смысл использовать компьютер. Такие упражнения будут предлагаться и в последующих главах. В каждом упражнении предполагается, что предыдущие упражнения уже выполнены. Например, в упр. 3.47 требуется построить таблицу смертности, которая будет использована при анализе риска в гл. 4 и 5.

3.47. Воспользовавшись любым программным пакетом для математических вычислений, постройте процедуру, на вход которой подаются параметры закона Мейкема и которая вычисляет значения p_x и q_x для возрастов от 0 до 140. В качестве проверки правильности полученных результатов введите значения параметров, найденные по формуле (3.7.1), и сравните полученные вами значения q_x со значениями для $x = 13, 14, \ldots$ из Иллюстративной таблицы смертности, приведенной в приложении 2А. Мы будем называть полученный вами результат вашей Иллюстративной таблицей смертности. В том случае, когда значения параметров закона Мейкема не указаны, мы будем подразумевать значения, полученные по формуле (3.7.1). [Замечание. Для таблицы Мейкема $s(x) > 0$ при $x > 0$, так что конечного возраста ω, определенного в разд. 3.3.1, не существует. При значениях параметров из Иллюстративной таблицы q_{140} равно нулю с точностью до восьми десятичных знаков. Поэтому мы выбираем $\omega = 140$ для нашей Иллюстративной таблицы смертности, т. е. табл. 2А.]

3.48. Для расчета значений l_x из табл. 2А воспользуйтесь в вашей Иллюстративной таблице смертности прямой рекуррентной формулой $l_{x+1} = (p_x)(l_x)$ и начальным значением $l_{13} = 96\,807{,}88$. [Замечание. Закон Мейкема не отражает действительности для возрастов, меньших 13 лет, так что Иллюстративная таблица смертности является комбинацией некоторых эмпирических значений в интервале от 0 до 12 лет и значений, построенных по закону Мейкема, для возрастов старше 13 лет.]

3.49. Проиллюстрируйте результат упр. 3.41, удвоив значения параметров A и B в вашей Иллюстративной таблице смертности.

3.50. Воспользуйтесь обратной рекуррентной формулой табл. 3.5.1 для подсчета величин e_x в вашей Иллюстративной таблице смертности для возрастов от 13 до 140.

3.51. Сравните значения e_x при $x = 20, 40, 60, 80$ и 100 в вашей Иллюстративной таблице смертности с теми, которые были получены при увеличении в два раза интенсивности смертности.

3.52. Воспользуйтесь обратной рекуррентной формулой табл. 3.5.1 и правилом трапеции для подсчета величин $\mathring{e}_x$ в вашей Иллюстративной таблице смертности для возрастов от 13 до 110.

3.53. Проверьте следующую обратную рекуррентную формулу для усеченной до возраста y пошаговой ожидаемой продолжительности жизни:

$$e_{x:\overline{y-x}|} = p_x + p_x\, e_{x+1:\overline{y-(x+1)}|} \quad \text{для } x = 0, 1, \ldots, y-1.$$

Определите подходящее для использования этой формулы начальное значение. Для вашей Иллюстративной таблицы смертности подсчитайте усеченную до возраста 45 лет пошаговую ожидаемую продолжительность жизни для лиц возрастов с 13 до 44.

3.54. Проверьте следующую обратную рекуррентную формулу для усеченной на n-летнем интервале пошаговой ожидаемой продолжительности жизни:

$$e_{x:\overline{n}|} = p_x(1 - {}_np_{x+1}) + p_x\, e_{x+1:\overline{n}|} \quad \text{для } x = 0, 1, \ldots, \omega - 1.$$

Определите подходящее начальное значение для использования этой формулы. Для вашей Иллюстративной таблицы смертности найдите усеченную на 10-летнем интервале пошаговую ожидаемую продолжительность жизни для возрастов от 13 до 139.

3.55. Определите величину $e_{15:\overline{25}|}$ из вашей Иллюстративной таблицы смертности. [Указание. Поскольку первый член в соотношении из упр. 3.53 не зависит от n, может быть, эффективнее рассматривать величину $e_{15:\overline{25}|}$ как усеченную до возраста 40 лет пошаговую ожидаемую продолжительность жизни лица (15).]

4

СТРАХОВАНИЕ ЖИЗНИ

4.1. Введение

Мы уже говорили, что страховые системы предназначены для уменьшения неблагоприятных финансовых последствий случайных событий определенного вида. Лица или организации, включенные в эти системы, руководствуются моделями полезности для выражения своих предпочтений, стохастическими моделями для выражения неопределенности финансовых последствий и экономическими принципами при ценообразовании. Соглашения достигаются после проведения анализа этих моделей.

В гл. 2 мы разработали элементарную модель финансовых последствий случайных событий, в которой заранее не известны ни тот факт, что событие непременно наступит, ни размер последствий такого события. В этой модели время действия страхового договора предполагалось достаточно коротким, вследствие чего неопределенность инвестиционного дохода можно игнорировать.

В настоящей главе мы будем развивать модели страхования жизни, предназначенные для уменьшения финансовых последствий такого случайного события, как безвременная смерть. Из-за долгосрочного характера этого вида страхования величина инвестиционного дохода, получаемого вплоть до момента выплаты, привносит значительный элемент неопределенности. Эта неопределенность имеет две причины: неизвестная доходность и неизвестная продолжительность инвестиционного периода. На протяжении всего изложения в настоящей книге для моделирования неопределенности, связанной с инвестиционным периодом, будет использоваться некоторое распределение вероятностей. В настоящей главе для неопределенных инвестиционных доходов рассматривается детерминистическая модель. В гл. 21 для такого рода неопределенности вводятся стохастические модели. Другими словами, наша модель будет построена в терминах функции T, случайной величины, называемой продолжительностью предстоящей жизни.

Хотя в этой главе все рассуждения будут проводиться применительно к страхованию человеческих жизней, используемые идеи без изменения можно применять к другим объектам, таким, как оборудование, станки, кредиты и коммерческие предприятия. На самом деле рассматриваемая общая модель полезна в любой ситуации, где величину и время финансовых последствий можно выразить лишь в терминах времени наступления случайного события.

4.2. Страховые договоры с выплатами в момент смерти

В этой главе предполагается, что величина и время выплаты по договору страхования на случай смерти зависят только от длины интервала с момента заключения договора страхования до момента смерти страхователя. В описании модели будут использоваться *функция страховых выплат* b_t и *функция дисконтирования* v_t. В рамках нашей модели v_t является коэффициентом дисконтирования от момента выплаты к моменту заключения страхового договора (т.е. назад), причем t является длиной интервала времени от момента заключения договора до момента смерти страхователя. Если речь идет о смешанном страховании, которое рассматривается ниже в этой главе, то t может быть больше или равно длине интервала времени от заключения договора до момента выплаты.

При такой функции дисконтирования мы будем предполагать, что соответствующая интенсивность начисления процента является детерминированной. Это означает, что модель не предусматривает вероятностного распределения для интенсивности начисления процента. Обычно мы будем выписывать простые формулы, вытекающие из предположения о том, что интенсивность начисления процента не только детерминирована, но и постоянна.

Определим *функцию настоящей* (или *текущей*) *стоимости* z_t формулой

$$z_t = b_t v_t. \tag{4.2.1}$$

Таким образом, z_t обозначает настоящую стоимость страховой выплаты на момент заключения договора. Время, прошедшее с момента заключения договора до момента смерти страхователя, является продолжительностью предстоящей жизни страхователя. Эта случайная величина обозначается через $T = T(x)$. Она была определена в разд. 3.2.2. Настоящая стоимость страховой выплаты на момент заключения договора является случайной величиной z_T. Если ситуация не требует введения более сложных обозначений, мы обозначаем эту случайную величину через Z и в качестве основы для страховой модели принимаем соотношение

$$Z = b_T v_T. \tag{4.2.2}$$

Случайная величина Z — пример случайной величины, описывающей страховые выплаты, и, в частности, слагаемого X_i в сумме, описывающей модель индивидуальных рисков, определенную равенством (2.1.1). Эта модель используется в дальнейшем при рассмотрении приложений к страховым портфелям. Сейчас мы займемся вероятностной моделью для с.в. Z.

Первый этап нашего анализа страхования жизни состоит в определении величин b_t и v_t. Следующим этапом будет определение некоторых характеристик вероятностного распределения с.в. Z, которые будут вытекать из предположений о распределении с.в. T. Мы проанализируем эти этапы применительно к нескольким стандартным видам страхования. Сводка результатов будет дана в табл. 4.2.1.

4.2.1. Страховые договоры с постоянными страховыми выплатами

Страхование на случай смерти на срок n лет[1] предполагает, что страховая выплата осуществляется только в случае, если страхователь умрет в течение n лет с момента заключения договора страхования. Если в момент смерти лица (x) производится выплата размера единица, то

$$b_t = \begin{cases} 1, & t \leqslant n, \\ 0, & t > n, \end{cases} \qquad v_t = v^t, \quad t \geqslant 0, \qquad Z = \begin{cases} v^T, & T \leqslant n, \\ 0, & T > n. \end{cases}$$

[1] В отличие от бессрочного страхования (см. далее) страхование такого типа называют *срочным*. — *Прим. ред.*

В этих определениях используются три соглашения. Во-первых, поскольку продолжительность предстоящей жизни — неотрицательная величина, мы определяем b_t, v_t и Z только на множестве неотрицательных чисел. Во-вторых, для значения t, при котором функция b_t равна нулю, значение v_t не существенно. Для таких t мы задаем значения v_t из соображений удобства. В-третьих, если не оговорено противное, интенсивность начисления процента предполагается постоянной.

Математическое ожидание случайной величины Z, обозначающей настоящую стоимость, называется *актуарной настоящей стоимостью* страхования. Читатель обнаружит, что математическое ожидание настоящей стоимости множества выплат, обусловленных наступлением ряда событий, в разных ситуациях называется поразному. В гл. 1 ожидаемые потери назывались нетто-премией. Это словоупотребление типично для страхования собственности и гражданской ответственности. Более точный, но и более громоздкий термин — *математическое ожидание настоящей стоимости выплат*. Для актуарных настоящих стоимостей мы используем обозначения, принятые в Международной системе актуарных обозначений (см. приложение 4).

Актуарная настоящая стоимость страхования, при котором производится выплата размера единица, чаще всего обозначается через A. Возраст страхователя на момент вычисления указывается в индексе. То, в какой форме этот возраст указывается, зависит от предположений о смертности. Для актуарной настоящей стоимости для лица (40) возраст может быть представлен, например, в виде $[40]$, 40 или $[20]+20$. Как и в разд. 3.8, квадратные скобки показывают наличие селекции в этом возрасте и, следовательно, необходимость использовать, начиная с этого возраста, селекционные таблицы смертности. Возраст, не заключенный в квадратные скобки, указывает на использование агрегативных или заключительных таблиц. Поэтому запись $[20]+20$ означает вычисление для лица 40 лет на основе селекционной таблицы, начиная с возраста 20.

Актуарная настоящая стоимость $\mathbf{E}[Z]$ для страхования на срок n лет с выплатой размера единица в момент смерти лица (x) обозначается через $\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}$. Эта величина может быть вычислена, если заметить, что с.в. Z является функцией от T, а именно $\mathbf{E}[Z] = \mathbf{E}[z_T]$. Тогда мы воспользуемся функцией плотности с.в. T и получим

$$\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = \mathbf{E}[Z] = \mathbf{E}[z_T] = \int_0^\infty z_t\, f_T(t)\, dt = \int_0^n v^t\, {}_tp_x\, \mu_x(t)\, dt. \tag{4.2.3}$$

Момент j-го порядка распределения с.в. Z можно найти следующим образом:

$$\mathbf{E}[Z^j] = \int_0^n (v^t)^j\, {}_tp_x\, \mu_x(t)\, dt = \int_0^n e^{-(\delta j)t}\, {}_tp_x\, \mu_x(t)\, dt.$$

Второй интеграл показывает, что момент j-го порядка с.в. Z равен актуарной настоящей стоимости страхования на срок n лет с выплатой величины единица в момент смерти лица (x), рассчитанной, исходя из интенсивности начисления процента, равной заданной интенсивности начисления процента, умноженной на j, т.е. $j\delta$.

Это свойство, которое мы называем *правилом моментов*, в общем случае справедливо для страховых договоров, согласно которым выплачивается сумма размера 1 при неслучайной интенсивности начисления процента, постоянной или нет. Точнее[1],

$$\mathbf{E}[Z^j]@\delta_t = \mathbf{E}[Z]@j\delta_t. \tag{4.2.4}$$

[1] Здесь и далее символ @ эквивалентен выражению «вычисленное при». — *Прим. ред.*

В дополнение к существованию моментов достаточным условием выполнения правила моментов является соотношение $b_t^j = b_t$ для всех $t \geqslant 0$, т.е. для каждого t величина выплаты равна 0 или 1. Проверка того, что это соотношение является достаточным, мы оставляем в качестве упр. 4.30.

Из правила моментов следует, что

$$\mathbf{D}[Z] = {}^2\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} - (\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|})^2, \tag{4.2.5}$$

где ${}^2\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}$ является актуарной настоящей стоимостью страхования на срок n лет с выплатой размера 1 при интенсивности начисления процента 2δ.

Бессрочное страхование на случай смерти предполагает выплату по смерти страхователя, в какой бы момент в будущем она бы ни произошла. Если величина выплаты составляет единицу и выплата производится в момент смерти лица (x), то

$$b_t = 1, \quad t \geqslant 0, \qquad v_t = v^t, \quad t \geqslant 0, \qquad Z = v^T, \quad T \geqslant 0.$$

Актуарная настоящая стоимость равна

$$\bar{A}_x = \mathbf{E}[Z] = \int_0^\infty v^t \, {}_tp_x \, \mu_x(t)\, dt. \tag{4.2.6}$$

Для лица, прошедшего селекцию в возрасте x, возраст которого в настоящий момент равен $x+h$, соответствующее выражение имеет вид

$$\bar{A}_{[x]+h} = \int_0^\infty v^t \, {}_tp_{[x]+h} \, \mu_x(h+t)\, dt.$$

Бессрочное страхование на случай смерти является предельным случаем для страхования на случай смерти на срок n лет при $n \to \infty$.

Пример 4.2.1. Пусть функция плотности продолжительности предстоящей жизни T для лица (x) имеет вид

$$f_T(t) = \begin{cases} 1/80, & 0 \leqslant t \leqslant 80,\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Для с.в. Z, обозначающей настоящую стоимость бессрочного страхования на случай смерти с выплатой размера единица, заключенного с лицом (x), при интенсивности начисления процента δ, вычислим

(a) актуарную настоящую стоимость,

(b) дисперсию,

(c) девяностую персентиль, $\xi_Z^{0,9}$.

Решение.

(a) $\bar{A}_x = \mathbf{E}[Z] = \displaystyle\int_0^\infty v^t f_T(t)\, dt = \int_0^{80} e^{-\delta t}\frac{1}{80}\, dt = \frac{1-e^{-80\,\delta}}{80\delta}, \qquad \delta \neq 0.$

(b) По правилу моментов

$$\mathbf{D}[Z] = \frac{1-e^{-160\,\delta}}{160\,\delta} - \left(\frac{1-e^{-80\,\delta}}{80\,\delta}\right)^2, \qquad \delta \neq 0.$$

(c) Для непрерывной случайной величины Z мы имеем $\mathbf{P}(Z \leqslant \xi_Z^{0,9}) = 0{,}9$.

Поскольку мы располагаем функцией плотности с.в. T, а не с.в. Z, мы должны определить событие для с.в. T, которое соответствует событию $Z \leqslant \xi_Z^{0,9}$. Из рис. 4.2.1, который показывает связь между выборочным пространством с.в. T (по горизонтальной оси) и выборочным пространством с.в. Z (по вертикальной оси), мы видим, что $\xi_Z^{0,9} = v^{\xi_T^{0,1}}$. Поскольку в случае бессрочного страхования на случай смерти с.в. Z является строго убывающей функцией от T, персентиль распределения с.в. T, отвечающая девяностой персентили распределения с.в. Z, соответствует дополнительному уровню 0,1. В этом примере с.в. T равномерно распределена на интервале (0, 80), так что $\xi_T^{0,1} = 8{,}0$ и потому $\xi_Z^{0,9} = v^{8,0}$. ▼

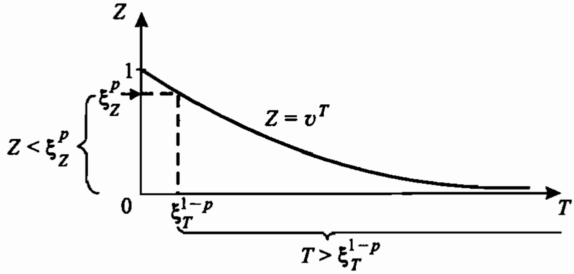


Рис. 4.2.1. Связь между с.в. Z и T для бессрочного страхования на случай смерти

График на рис. 4.2.1 можно использовать для установления связей между функциями распределения и плотности с.в. Z и T:

для $z \leqslant 0$ множество $\{Z \leqslant z\}$ является множеством вероятности нуль;

для $0 < z < 1$ имеет место равенство $\{Z \leqslant z\} = \{T \geqslant \ln z / \ln v\}$;

для $z \geqslant 1$ множество $\{Z \leqslant z\}$ является множеством вероятности единица.

Таким образом,

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \leqslant 0, \\ 1 - F_Z(\ln z/\ln v), & 0 < z < 1, \\ 1, & 1 \leqslant z. \end{cases} \tag{4.2.7}$$

Дифференцируя формулу (4.2.7), получаем

$$f_Z(z) = \begin{cases} f_T(\ln z/\ln v)[1/(\delta z)], & 0 < z < 1, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{4.2.8}$$

Пример 4.2.2. В предположениях примера 4.2.1 определим
(a) функцию распределения с.в. Z, (b) функцию плотности с.в. Z.

Решение. (a) Из соотношения

$$F_T(t) = \begin{cases} t/80, & 0 \leqslant t \leqslant 80, \\ 1, & t \geqslant 80, \end{cases}$$

мы видим, что $\mathbf{P}(T > 80) = 0$, так что $\mathbf{P}(0 < Z < v^{80}) = 0$. Поэтому в силу формулы (4.2.7)

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < v^{80}, \\ 1 - [(\ln z)/(\ln v)]/80, & v^{80} < z < 1, \\ 1, & z \geqslant 1. \end{cases}$$

(b) дифференцируя функцию распределения из п. (a), получим

$$f_Z(z) = \begin{cases} (1/80)/(1/\delta z), & v^{80} < z < 1, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$ ▼

Теперь мы обращаем внимание на одно стандартное приложение, касающееся портфеля рисков: определение величины начального инвестиционного фонда для портфеля страховых договоров. Мы будем использовать модель индивидуальных рисков и нормальную аппроксимацию (см. обсуждение в разд. 2.4).

Пример 4.2.3. Предположим, что каждое из 100 независимых лиц

- имеет возраст x,
- подвержено постоянной интенсивности смертности, $\mu = 0{,}04$,
- заключило договор страхования с выплатой 10 единиц в момент смерти.

Страховые выплаты производятся из средств инвестиционного фонда, причем $\delta = 0{,}06$. Рассчитаем минимальную величину фонда h в момент $t = 0$, чтобы средств для страховых выплат на случай смерти каждого из страхователей оказалось достаточно с вероятностью приблизительно 0,95.

Решение. Для каждого лица

$$b_t = 10, \quad t \geqslant 0, \qquad v_t = v^t, \quad t \geqslant 0, \qquad Z = 10v^T, \quad T \geqslant 0.$$

Будем считать, что страхователи каким-либо образом перенумерованы, например, номерами заключенных с ними договоров. Тогда в момент $t = 0$ настоящая стоимость всех предстоящих выплат равна

$$S = \sum_{1}^{100} Z_j,$$

где Z_j является настоящей стоимостью в момент времени $t = 0$ той выплаты, которую придется произвести в момент смерти лица с номером j.

Для того чтобы подсчитать среднее и дисперсию, заметим, что с.в. Z равна случайной величине, являющейся умноженной на 10 настоящей стоимостью бессрочного страхования на случай смерти с выплатой размера единица. Для постоянной интенсивности начисления процента δ и постоянной интенсивности смертности μ актуарная настоящая стоимость бессрочного страхования жизни с выплатой величины единица равна

$$\bar{A}_x = \int_0^\infty e^{-\delta t} e^{-\mu t} \mu \, dt = \frac{\mu}{\mu + \delta}.$$

Таким образом, для нашего примера

$$\mathbf{E}[Z] = 10\bar{A}_x = 10\,\frac{0{,}04}{0{,}1} = 4, \qquad \mathbf{E}[Z^2] = 10^2\,{}^2\bar{A}_x = 100\,\frac{0{,}04}{0{,}04 + 2(0{,}06)} = 25$$

и $\mathbf{D}[Z] = 9$.

Используя эти значения среднего и дисперсии каждого из слагаемых в сумме S, мы получим

$$\mathbf{E}[S] = 100(4) = 400, \qquad \mathbf{D}[S] = 100(9) = 900.$$

Необходимая минимальная величина h фонда определяется из соотношения

$$\mathbf{P}(S \leqslant h) = 0{,}95$$

или, что эквивалентно,

$$\mathbf{P}\left[\frac{S - \mathbf{E}[S]}{\sqrt{\mathbf{D}[S]}} \leqslant \frac{h - 400}{30}\right] = 0{,}95.$$

Применяя нормальную аппроксимацию[1], мы получаем[2]

$$\frac{h-400}{30} = 1{,}645, \qquad h = 449{,}35. \qquad \blacktriangledown$$

Замечания. 1. Разница между начальным капиталом, равным 449,35, и математическим ожиданием настоящей стоимости всех платежей, равным 400, составляющая 49,35, является рисковой надбавкой из гл. 1. Надбавка на одно лицо составляет 0,4935, или 4,935% на выплату размера 1, или 12,34% актуарной настоящей стоимости.

2. Этот пример, так же как примеры 2.5.2 и 2.5.3, использует модель индивидуальных рисков и нормальную аппроксимацию распределения с.в. S. В примерах, относящихся к коротким временным интервалам, полные поступления, равные ожидаемым выплатам плюс рисковая надбавка, определялись так, чтобы с большой вероятностью превосходить сумму выплат. В рассмотренном примере с большим интервалом времени полные поступления плюс проценты на них при заданной процентной ставке определялись так, чтобы их хватало для покрытия выплат по договорам. Начальный капитал в размере 449,35 покроет менее чем 45% ожидаемых в конце концов выплат, равных 1000.

3. На рис. 4.2.2 показан график величины фонда за первые 2 года при такой схеме выплат, что в каждый из моментов времени 1/8, 7/8, 9/8, 13/8 и 15/8 происходит одна смерть, а в момент 10/8 происходят две смерти. В промежутках между страховыми выплатами, которые на графике соответствуют разрывам, график показательный. Он представляет рост фонда, соответствующий $\delta = 0{,}06$.

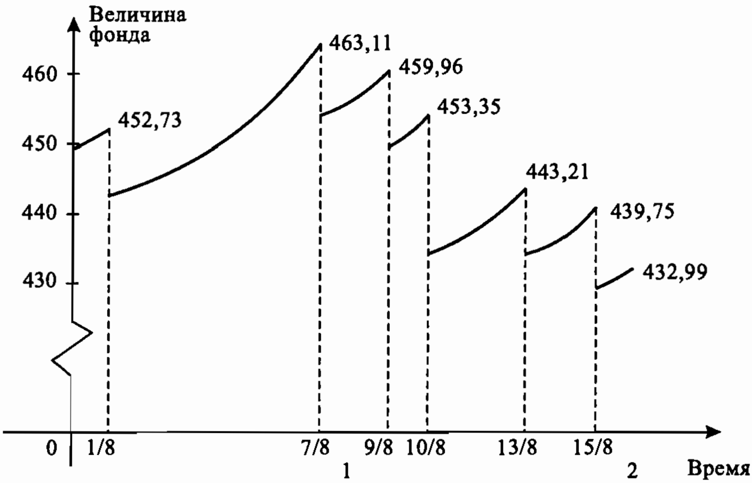


Рис. 4.2.2. График динамики величины фонда

4. Подобных схем выплат бесконечно много, и у каждой свой график. Как число страховых выплат, так и моменты времени, когда эти выплаты происходят, влияют

---

[1] То есть полагая $\Phi((h-400)/30) = 0{,}95$, где Φ — функция стандартного нормального распределения. — *Прим. ред.*

[2] В качестве приближенного к искомому значению h. — *Прим. ред.*

на фонд. Например, если вместо схемы, изображенной на рис. 4.2.2, семь выплат произойдут одновременно в самый первый момент, размер фонда сразу же сократится до 379,35 и затем возрастет до 427,72 к концу второго года.

Приведенные примеры иллюстрируют три различные случайные составляющие конструкции модели рисков, а именно, произойдет или нет страховая выплата, каков будет ее размер и в какое время будет произведена выплата, если она произойдет. В примере 2.5.2 имелась лишь неопределенность, произойдет выплата, или нет. В примере 4.2.2 имелась неопределенность лишь относительно времени выплаты. В этих моделях иные неопределенности не рассматривались. В примерах 4.2.1, 4.2.2 и 4.2.3 мы не рассматривали возможность того, что увеличение капитала может происходить за счет начисления процентов с недетерминированной процентной ставкой.

4.2.2. Смешанное страхование

Страхование на дожитие на срок n лет предполагает выплату по истечении n лет в том и только в том случае, когда страхователь будет жив по прошествии n лет с момента заключения страхового договора. Если выплачиваемая сумма составляет единицу, то

$$b_t = \begin{cases} 0, & t \leqslant n, \\ 1, & t > n, \end{cases} \qquad v_t = v^n, \quad t \geqslant 0, \qquad Z = \begin{cases} 0, & T \leqslant n, \\ v^n, & T > n. \end{cases}$$

Единственным элементом неопределенности в страховании на дожитие является факт, произойдет или не произойдет страховая выплата. Размер и время произведения выплаты при условии, что выплата произойдет, определены заранее. В выражении $Z = v^n Y$ величина Y является индикатором события «дожитие до возраста $x+n$». Эта величина принимает значение 1, если страхователь доживет до возраста $x+n$, и значение 0 в противном случае. Для обозначения актуарной настоящей стоимости страхования на дожитие на срок n лет имеется два символа. В страховом контексте это величина $A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}$. Мы увидим в следующей главе, что в контексте аннуитетов та же величина обозначается через ${}_nE_x$. Это разграничение выполняется не слишком строго. Читатель должен быть готов к любой из форм записи,

$$A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} = \mathbf{E}[Z] = v^n\,\mathbf{E}[Y] = v^n\,{}_np_x$$

и

$$\mathbf{D}[Z] = v^{2n}\mathbf{D}[Y] = v^{2n}\,{}_np_x\,{}_nq_x = {}^2A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} - (A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}})^2. \tag{4.2.9}$$

Смешанное страхование на срок n лет предполагает выплату либо по смерти страхователя, либо по дожитии им до истечения n-летнего срока, в зависимости от того, что случится раньше. Если размер выплаты — единица и если выплаты на случай смерти производятся в момент смерти, то

$$b_t = 1, \quad t \geqslant 0, \qquad v_t = \begin{cases} v^t, & t \leqslant n, \\ v^n, & t > n, \end{cases} \qquad Z = \begin{cases} v^T, & T \leqslant n, \\ v^n, & T > n. \end{cases}$$

Актуарная настоящая стоимость обозначается через $\bar{A}_{x:\overline{n|}}$. Поскольку для смешанного страхования $b_t = 1$, по правилу моментов мы имеем

$$\mathbf{E}[Z^j]@\delta = \mathbf{E}[Z]@j\delta.$$

Кроме того,

$$\mathbf{D}[Z] = {}^2\bar{A}_{x:\overline{n|}} - (\bar{A}_{x:\overline{n|}})^2. \tag{4.2.10}$$

Такое страхование можно рассматривать как комбинацию страхования на случай смерти на срок n лет и страхования на дожитие на срок n лет — в каждом случае с выплатой размера 1. Пусть Z_1, Z_2 и Z_3 — случайные величины, обозначающие настоящую стоимость договора срочного страхования, страхования на дожитие и смешанного страхования соответственно, в каждом из которых страховая выплата производится в момент смерти лица (x). Из предыдущих определений мы имеем

$$Z_1 = \begin{cases} v^T, & T \leqslant n, \\ 0, & T > n, \end{cases} \qquad Z_2 = \begin{cases} 0, & T \leqslant n, \\ v^n, & T > n, \end{cases} \qquad Z_3 = \begin{cases} v^T, & T \leqslant n, \\ v^n, & T > n. \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$Z_3 = Z_1 + Z_2, \tag{4.2.11}$$

и, беря математические ожидания от обеих частей, мы получаем

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = \bar{A}^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}. \tag{4.2.12}$$

С помощью равенства (4.2.11) мы можем также найти $\mathbf{D}[Z_3]$:

$$\mathbf{D}[Z_3] = \mathbf{D}[Z_1] + \mathbf{D}[Z_2] + 2\,\mathbf{Cov}(Z_1, Z_2). \tag{4.2.13}$$

Воспользовавшись формулой

$$\mathbf{Cov}(Z_1, Z_2) = \mathbf{E}[Z_1 Z_2] - \mathbf{E}[Z_1]\mathbf{E}[Z_2] \tag{4.2.14}$$

и заметив, что $Z_1 Z_2 = 0$ для всех T, мы получим

$$\mathbf{Cov}(Z_1, Z_2) = -\mathbf{E}[Z_1]\,\mathbf{E}[Z_2] = -\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}\,A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}. \tag{4.2.15}$$

Подстановка формул (4.2.5), (4.2.9) и (4.2.15) в (4.2.13) приводит к формуле для $\mathbf{D}[Z_3]$ в терминах актуарной настоящей стоимости для страхования на случай смерти на срок n лет и для страхования на дожитие.

Поскольку актуарные настоящие стоимости положительны, величина $\mathbf{Cov}(Z_1, Z_2)$ отрицательна. Это можно было понять заранее, поскольку одна величина из пары Z_1 и Z_2 всегда нулевая, а другая положительная. С другой стороны, коэффициент корреляции между с.в. Z_1 и Z_2 не равен -1, поскольку эти величины не связаны линейной зависимостью. Вспомним упр. 1.23(c).

4.2.3. Отсроченное страхование

Страхование, отсроченное на m лет, предполагает выплату сразу после смерти страхователя только в том случае, если он умрет не раньше, чем через m лет после заключения страхового договора. Выплачиваемая сумма и срок, на который заключен договор, могут быть любыми из обсуждавшихся выше. Например, бессрочное страхование на случай смерти, отсроченное на m лет, с выплатой в момент смерти страхователя суммы, равной единице, определяется соотношениями

$$b_t = \begin{cases} 1, & t > m, \\ 0, & t \leqslant m, \end{cases} \qquad v_t = v^t, \quad t > 0, \qquad Z = \begin{cases} v^T, & T > m, \\ 0, & T \leqslant m. \end{cases}$$

Актуарная настоящая стоимость такого страхования обозначается через ${}_{m|}\bar{A}_x$ и равна

$$\int_0^\infty v^t\,{}_tp_x\,\mu_x(t)\,dt. \tag{4.2.16}$$

Пример 4.2.4. Рассмотрим бессрочное страхование на случай смерти, отсроченное на 5 лет, с выплатой в момент смерти лица (x). Интенсивность смерти μ

для этого лица равна 0,04. При $\delta = 0{,}10$ для распределения настоящей стоимости выплаты

(a) подсчитаем математическое ожидание, (b) подсчитаем дисперсию,

(c) выпишем функцию распределения, (d) подсчитаем медиану $\xi_Z^{0,5}$.

Решение.

(a) Для произвольных μ и δ

$$_{5|}\bar{A}_x = \int_5^\infty e^{-\delta t} e^{-\mu t} \mu\, dt = \frac{\mu}{\mu+\delta}\, e^{-5(\mu+\delta)}.$$

Поэтому для $\mu = 0{,}04$ и $\delta = 0{,}10$

$$_{5|}\bar{A}_x = (2/7)\, e^{-0,7} = 0{,}1419.$$

(b) По правилу моментов

$$\mathbf{D}[Z] = \frac{0{,}04}{0{,}04 + 0{,}20}\, e^{-5(0,04+0,20)} - \frac{4}{49}\, e^{-1,4} = 0{,}0301.$$

(c) Как и в случае бессрочного страхования на случай смерти, решение вытекает из графика связи между с.в. Z и T. Для отсроченного на m лет договора страхования этот график приведен на рис. 4.2.3.

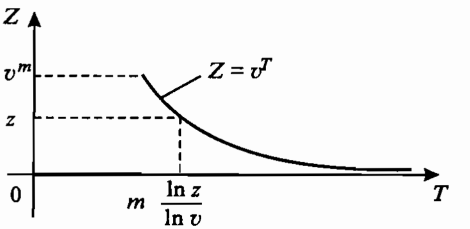


Рис. 4.2.3. Связь между с.в. Z и T для отсроченного бессрочного страхования на случай смерти

Хотя T — непрерывная случайная величина, Z является случайной величиной смешанного типа со «сгустком» вероятностной массы в точке 0, поскольку событие $Z = 0$ соответствует событию $T \leqslant m$.

При общих предположениях о смертности и при постоянной интенсивности начисления процента мы имеем:

- для события $Z = 0$

$$F_Z(0) = \mathbf{P}(T \leqslant m) = F_T(m); \tag{4.2.17}$$

- для $0 < z < v^m$

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \mathbf{P}(Z \leqslant z) = \mathbf{P}(Z=0) + \mathbf{P}(0 < Z \leqslant z) = \mathbf{P}(T \leqslant m) + \mathbf{P}(0 < v^T \leqslant z) \\ &= \mathbf{P}(T \leqslant m) + \mathbf{P}(T > \ln z / \ln v) = F_T(m) + 1 - F_T(\ln z / \ln v); \end{aligned} \tag{4.2.18}$$

- для $z > v^m$

$$F_Z(z) = 1. \tag{4.2.19}$$

В этом примере отсроченного на 5 лет бессрочного страхования на случай смерти с $\mu = 0{,}04$ и $\delta = 0{,}10$

- в силу формулы (4.2.17)

$$F_Z(0) = F_T(5) = 1 - e^{-0,2} = 0{,}1813;$$

- согласно формуле (4.2.18) для $0 < z < v^5$

$$F_Z(0) = F_T(5) + 1 - F_T\left(\frac{\ln z}{-0{,}1}\right) = 1 - e^{-0,2} + z^{0,04/0,10} = 0{,}1813 + z^{0,4}; \qquad (4.2.20)$$

- по формуле (4.2.19) для $z > v^5$

$$F_Z(z) = 1.$$

График этой функции распределения приведен на рис. 4.2.4.

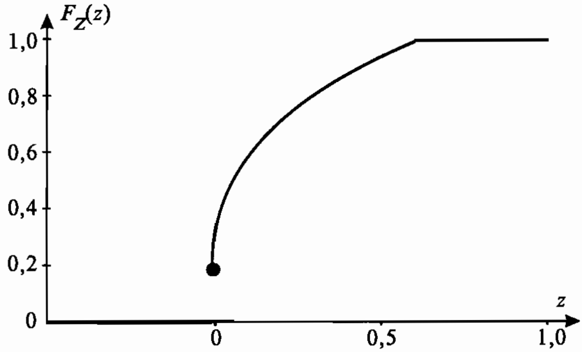


Рис. 4.2.4. Функция распределения с.в. Z

(d) Из рис. 4.2.4 или из формулы (4.2.20) мы получаем, что медиана является решением уравнения

$$0{,}5 = 0{,}1813 + z^{0,4}.$$

Таким образом, $\xi_Z^{0,5} = 0{,}0573$. ▼

Замечания. 1. В этом примере наибольшее значение с.в. Z, при котором плотность распределения с.в. Z ненулевая, равно $e^{-0,1(5)} = 0{,}6065$, что соответствует значению $T = 5$.

2. Распределение с.в. Z в этом примере асимметрично и сильно смещено вправо. Его полная масса сосредоточена в интервале $[0,\ 0{,}6065]$, его среднее равно $0{,}1419$, но его медиана равна всего лишь $0{,}0573$. Эта асимметрия со смещением в сторону больших положительных значений является типичной для многих распределений величин страховых выплат во всех областях страхования.

4.2.4. Страхование с изменяющимися выплатами

Общую модель, определяемую формулой (4.2.1), можно использовать в большинстве приложений. Мы использовали ее применительно к договорам страхования жизни с постоянными выплатами. Она может также применяться к договорам страхования, в которых величина выплат на случай смерти либо возрастает, либо убывает в арифметической прогрессии в течение всего срока действия страхового договора или части этого срока. Такой страховой продукт часто предлагается в качестве дополнительного покрытия, когда основной страховой договор обеспечивает возврат периодически выплачиваемых премий в момент смерти или когда аннуитет содержит гарантию того, что выплаты будут соответствовать оговоренной в нем начальной премии.

Бессрочное страхование на случай смерти с ежегодно увеличивающейся страховой выплатой, согласно которому выплачивается 1 в момент смерти в течение первого года, 2 в момент смерти в течение второго года и так далее, характеризуется следующими функциями:

$$b_t = \lfloor t+1 \rfloor, \quad t \geqslant 0, \qquad v_t = v^t, \quad t \geqslant 0, \qquad Z = \lfloor T+1 \rfloor v^T, \quad T \geqslant 0,$$

где $\lfloor \ \rfloor$ обозначает целую часть числа.

Актуарная настоящая стоимость для такого страхования обозначается через $(I\bar{A})_x$ и равна

$$\mathbf{E}[Z] = \int_0^\infty \lfloor t+1 \rfloor v^t {}_tp_x \, \mu_x(t) \, dt.$$

В отличие от случая страхования со страховыми выплатами, равными 0 и 1, при скорректированной интенсивности начисления процента моменты высшего порядка не равны актуарной настоящей стоимости. Эти моменты могут быть вычислены непосредственно с помощью их определений.

Увеличения страховой выплаты, оговоренные в страховом договоре, могут происходить чаще или реже, чем один раз в год. Для *бессрочного страхования на случай смерти со страховой выплатой, увеличивающейся m раз в год*, выплаты составляют $1/m$ в момент смерти в течение первого из m интервалов, на которые разбит год, $2/m$ в момент смерти в течение второго такого интервала и т. д., увеличиваясь на $1/m$ в каждый последующий интервал. Для такого страхования жизни

$$b_t = \frac{\lfloor tm+1 \rfloor}{m}, \quad t \geqslant 0, \qquad v_t = v^t, \quad t \geqslant 0, \qquad Z = \frac{v^T \lfloor Tm+1 \rfloor}{m}, \quad T \geqslant 0.$$

Актуарная настоящая стоимость — это

$$(I^{(m)}\bar{A})_x = \mathbf{E}[Z].$$

Предельный случай при $m \to \infty$ для бессрочного страхования на случай смерти со страховой выплатой, увеличивающейся m раз в год, является страхованием с выплатой суммы t в момент смерти t. Соответствующие функции имеют вид

$$b_t = t, \quad t \geqslant 0, \qquad v_t = v^t, \quad t \geqslant 0, \qquad Z = Tv^T, \quad T \geqslant 0.$$

В этом случае актуарная настоящая стоимость обозначается через $(\bar{I}\bar{A})_x$.

Такое бессрочное страхование на случай смерти с непрерывным увеличением размера выплаты эквивалентно множеству договоров бессрочного отсроченного страхования на случай смерти с постоянными выплатами. Эта эквивалентность показана графически на рис. 4.2.5, где область между прямой $b_t = t$ и осью t представляет договоры страхования по всему времени предстоящей жизни. Если объединить инфинитезимальные области[1] по вертикали для фиксированного t, получается выплата в момент t. Если объединить их по горизонтали для фиксированного s, то получится бессрочное страхование на случай смерти, отсроченное на s лет, при размере выплаты ds.

---

[1] Области «бесконечно малой» ширины. — *Прим. ред.*

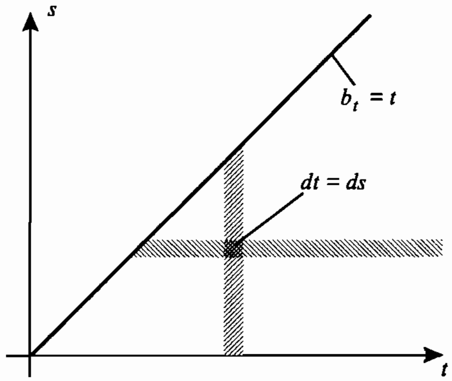


Рис. 4.2.5. Страхование с непрерывно увеличивающейся выплатой

Из этой эквивалентности следует, что актуарные настоящие стоимости для указанных страхований равны. Их равенство может быть доказано также следующим образом.

По определению

$$(\bar{I}\bar{A})_x = \int_0^\infty t\, v^t\, {}_tp_x\, \mu_x(t)\, dt,$$

и, интерпретируя t под знаком интеграла как интеграл от нуля до t на рис. 4.2.5, мы имеем

$$(\bar{I}\bar{A})_x = \int_0^\infty \left(\int_0^t ds\right) v^t\, {}_tp_x\, \mu_x(t)\, dt.$$

Если мы изменим порядок интегрирования и для каждого значения s проинтегрируем по t от s до x, то получим, согласно формуле (4.2.16),

$$(\bar{I}\bar{A})_x = \int_0^\infty \int_s^\infty v^t\, {}_tp_x\, \mu_x(t)\, dt\, ds = \int_0^\infty {}_{s|}\bar{A}_x\, ds.$$

Если по такому договору с увеличением размера выплаты m раз в год выплата на случай смерти производится только в случае, если смерть наступила не позднее, чем через n лет с момента заключения договора, то этот договор называется договором *страхования на случай смерти на срок n лет со страховой выплатой, увеличивающейся m раз в год*.

В некотором смысле противоположными к договорам страхования на случай смерти сроком на n лет с ежегодно увеличивающейся выплатой являются договоры *страхования на случай смерти на срок n лет с ежегодно уменьшающейся страховой выплатой*, согласно которым в момент смерти, произошедшей в первый год, выплачивается сумма n, в момент смерти, произошедшей во второй год — сумма $n-1$ и т.д., так что выплата становится нулевой по окончании n-го года. Такому договору соответствуют функции

$$b_t = \begin{cases} n - \lfloor t \rfloor, & t \geqslant n, \\ 0, & t > n, \end{cases} \qquad v_t = v^t, \quad t \geqslant 0, \qquad Z = \begin{cases} v^T(n - \lfloor T \rfloor), & T \leqslant n, \\ 0, & T > n. \end{cases}$$

Таблица 4.2.1. Страховые договоры с выплатой в момент смерти

(1) Вид страхования	(2) Функция выплат b_t	(3) Функция дисконтирования v_t	(4) Функция настоящей стоимости z_t	(5) Актуарная настоящая стоимость	(6) Моменты высших порядков
Бессрочное страхование на случай смерти	1	v^t	v^t	$\bar{A}_x$	*
Страхование на случай смерти на срок n лет	$1,\ t \leqslant n$ $0,\ t > n$	v^t	$v^t,\ t \leqslant n$ $0,\ t > n$	$\bar{A}^1_{x:\overline{n}\rceil}$	*
Страхование на дожитие на срок n лет	$0,\ t \leqslant n$ $1,\ t > n$	v^n	$0,\ t \leqslant n$ $v^n,\ t > n$	$\bar{A}_{x:\overset{1}{\overline{n}\rceil}}$, ${}_nE_x$	*
Смешанное страхование на срок n лет	1	$v^t,\ t \leqslant n$ $v^n,\ t > n$	$v^t,\ t \leqslant n$ $v^n,\ t > n$	$\bar{A}_{x:\overline{n}\rceil}$	*
Страхование на срок n лет, отсроченное на m лет	$1,\ m < t \leqslant n+m$ $0,\ t \leqslant m, t > n+m$	v^t	$v^t,\ m < t \leqslant n+m$ $v^n,\ t \leqslant m,\ t > n+m$	${}_{m\vert n}\bar{A}_x$	*
Страхование на срок n лет с ежегодно увеличивающейся выплатой	$\lfloor t+1 \rfloor,\ t \leqslant n$ $0,\ t > n$	v^t	$\lfloor t+1 \rfloor v^t,\ t \leqslant n$ $0,\ t > n$	$(I\bar{A})^1_{x:\overline{n}\rceil}$	†
Страхование на срок n лет с ежегодно уменьшающейся выплатой	$n - \lfloor t \rfloor,\ t \leqslant n$ $0,\ t > n$	v^t	$(n - \lfloor t \rfloor)v^t,\ t \leqslant n$ $0,\ t > n$	$(D\bar{A})^1_{x:\overline{n}\rceil}$	†
Бессрочное страхование с выплатой, увеличивающейся m раз в год	$\lfloor tm+1 \rfloor$	v^t	$v^t \lfloor tm+1 \rfloor)/m$	$(I^{(m)}\bar{A})_x$	†

Замечание. b_t, v_t и z_t определены только для $t \geqslant 0$.

*j-й момент равен актуарной настоящей стоимости при интенсивности начисления процента, равной исходной интенсивности начисления процента, умноженной на j. Эта величина обозначается через ${}^jA$ для $j > 1$. В этом случае дисперсия обозначается через ${}^2A - A^2$.

†Вычисляется непосредственно из определения, $\mathbf{E}[Z^j]$.

Актуарная настоящая стоимость такого договора страхования — это

$$(D\bar{A})^{1}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t(n - \lfloor t \rfloor)\, {}_tp_x\, \mu_x(t)\, dt.$$

Этот договор является противоположным к договору страхования на случай смерти сроком на n лет с ежегодно увеличивающейся выплатой в том смысле, что сумма их функций выплат является постоянной и равной $n + 1$ для срока в n лет.

В табл. 4.2.1 приводится сводка результатов настоящего раздела. В первом столбце содержится название страхового плана, далее даются функции выплат и дисконтирования, которые определяются в терминах продолжительности предстоящей жизни страхователя на момент заключения договора страхования. Затем указывается функция настоящей стоимости, которая всегда получается как произведение двух предыдущих функций. В пятом столбце представлено обозначение для актуарной настоящей стоимости, принятое в Международной системе актуарных обозначений. Символ в последнем столбце, отсылающий к подстрочному примечанию к этой таблице, указывает, может ли для вычисления моментов высших порядков применяться правило моментов.

4.3. Страховые выплаты, производимые в конце года смерти

В предыдущем разделе мы рассматривали модели страхования жизни, в которых выплаты производились в момент смерти. На практике большинство выплат производится в момент смерти, так что проценты начисляются до того момента, как выплаты будут реально произведены. Эти модели формулировались в терминах с.в. T, продолжительности предстоящей жизни страхователя на момент заключения страхового договора. Но в большинстве практических приложений страхования жизни самой точной информацией о распределении с.в. T является таблица смертности, в которой информация дискретизирована. На самом деле это — информация о с.в. K, пошаговой продолжительности предстоящей жизни страхователя в момент заключения договора страхования, которая является функцией от с.в. T. В этом и в следующем разделе мы устраняем этот недочет, строя модели страхования жизни, в которых величина и время выплат на случай смерти зависят только от числа полных лет, прожитых страхователем с момента заключения договора до момента его смерти. Мы будем называть такие договоры страхования договорами с *выплатами, осуществляемыми в конце года смерти*.

Наша модель формулируется в терминах пошаговой продолжительности предстоящей жизни страхователя. Функция выплат b_{k+1} и функция дисконтирования v_{k+1} соответственно являются величиной выплаты и коэффициентом дисконтирования, относящимися к периоду от момента произведения выплаты назад до момента заключения договора, если пошаговая продолжительность жизни страхователя равна k, т.е. он умирает на $k+1$-м году с момента заключения страхового договора. Настоящая, на момент заключения договора, стоимость этой страховой выплаты, обозначаемая через z_{k+1}, определяется формулой

$$z_{k+1} = b_{k+1} v_{k+1}. \tag{4.3.1}$$

Если исходить из момента заключения договора, то номер страхового года, когда происходит смерть, равен 1 плюс пошаговая продолжительность предстоящей жизни страхователя K. Это случайная величина, определенная в разд. 3.2.3. Как и в предыдущем разделе, мы употребляем для случайной величины, означающей настоящую стоимость z_{k+1}, символ Z.

Для страхования сроком на n лет при выплате размера 1 в конце года смерти

$$
\begin{aligned}
b_{k+1} &= \begin{cases} 1, & k = 0, 1, \ldots, n-1, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \\
v_{k+1} &= v^{k+1}, \\
Z &= \begin{cases} v^{K+1}, & K = 0, 1, \ldots, n-1, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Актуарная настоящая стоимость для такого страхования задается формулой

$$
A^{1}_{x:\overline{n}|} = \mathbf{E}[Z] = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\, {}_k p_x\, q_{x+k}. \tag{4.3.2}
$$

Заметим, что символ для актуарной настоящей стоимости страховой выплаты, производимой в конце года смерти, принятый в Международной системе актуарных обозначений, совпадает с соответствующим символом для случая страховой выплаты в момент смерти за исключением того, что убирается черта сверху.

Правило моментов, с соответствующими изменениями в обозначениях, также выполняется для страховых выплат, осуществляемых в конце года смерти. Например, для страхового договора на срок n лет, рассматривавшегося выше,

$$
\mathbf{D}[Z] = {}^2A^{1}_{x:\overline{n}|} - (A^{1}_{x:\overline{n}|})^2, \quad \text{где } {}^2A^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-2\delta(k+1)}\, {}_k p_x\, q_{x+k}.
$$

В разд. 3.5 выводятся рекуррентные соотношения для ожидаемых продолжительностей жизни, которые далее используются для вычисления их значений. Рекуррентные соотношения для актуарных настоящих стоимостей страхования на фиксированный срок можно вывести алгебраически из соотношения (4.3.2):

$$
\begin{aligned}
A^{1}_{x:\overline{n}|} &= \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\, {}_k p_x\, q_{x+k} = vq_x + \sum_{k=1}^{n-1} v^{k+1}\, {}_k p_x\, q_{x+k} = vq_x + vp_x \sum_{k=1}^{n-1} v^{k}\, {}_{k-1} p_{x+1}\, q_{x+k} \\
&= vq_x + vp_x \sum_{j=0}^{n-2} v^{j+1}\, {}_j p_{x+1}\, q_{x+1+j} = vq_x + vp_x\, A^{1}_{x+1:\overline{n-1}|}.
\end{aligned} \tag{4.3.3}
$$

Чтобы равенства (4.3.3) выполнялись при $n = 1$, мы положим $A^{1}_{x:\overline{0}|} = 0$ для всех x.

Замечание. Если проводилась селекция, то в формуле (4.3.3) все x в индексах должны быть заключены в квадратные скобки.

Пример 4.3.1. На основе Иллюстративной таблицы смертности при $i = 0{,}04$ определим математическое ожидание и дисперсию случайной величины, равной настоящей стоимости страхования на срок 10 лет с выплатой размера 1, производимой в конце года смерти страхователя, который заключил договор страхования в возрасте 30 лет.

Решение. Отправляясь от начального значения $A^{\;1}_{40:\overline{0}|} = 0$ и используя формулу (4.3.3), принимающую для нашего случая вид

$$A^{\;\;1}_{30+k:\overline{10-k}|} = vq_{30+k} + vp_{30+k}\, A^{\;\;\;\;1}_{30+k+1:\overline{10-(k+1)}|}, \qquad k = 0, 1, \ldots, 8, 9,$$

мы получаем, двигаясь от возраста 40 к возрасту 30 лет,

$$A^{\;1}_{30:\overline{10}|} = 0{,}01577285 \quad \text{и} \quad \mathbf{D}[Z] = 0{,}01271978 - (0{,}01577285)^2 = 0{,}1247099.$$

Эти значения были получены с использованием таблицы, построенной в разделе «Упражнения с использованием компьютера» гл. 3. ▼

Модель для договора бессрочного страхования, заключенного с лицом (x), можно построить, устремив n к бесконечности в модели страхования на срок n лет. Для актуарной настоящей стоимости мы получим формулу

$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\, {}_kp_x\, q_{x+k}. \tag{4.3.4}$$

Умножая обе части формулы (4.3.4) на l_x, получим

$$l_x A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\, d_{x+k}. \tag{4.3.5}$$

Формула (4.3.5) отражает равенство в момент заключения договора страхования выражений для суммы этих актуарных настоящих стоимостей для l_x лиц, застрахованных в возрасте x, и для величины, на которую уменьшается фонд в результате ожидаемых смертей l_x лиц.

Выражение

$$\sum_{k=r}^{\infty} v^{k+1} d_{x+k} \tag{4.3.6}$$

соответствует той части фонда в момент заключения договора страхования, которая вместе с процентами, полученными при предполагаемой процентной ставке, обеспечит страховые выплаты в связи с ожидаемыми смертями после r-го страхового года.

Величина (4.3.6) при предполагаемой процентной ставке в течение r лет дает

$$\sum_{k=r}^{\infty} v^{k-r+1} d_{x+k}, \tag{4.3.7}$$

ожидаемую величину средств по истечении r страховых лет. Сравнение выражений (4.3.7) и (4.3.5) показывает, что эта величина равна $l_{x+r}A_{x+r}$. Разница между этой величиной и фактическим размером фонда объясняется отклонениями числа произошедших смертей от числа ожидаемых смертей (в соответствии с принятой таблицей смертности) и отклонениями реального процентного дохода от процентного дохода при предполагаемой процентной ставке.

Пример 4.3.2. Группа из 100 лиц в возрасте 30 лет учреждает фонд для выплаты в конце года смерти любого из участников суммы 1000 выбранному участнику из числа оставшихся в живых. Они приходят к взаимному соглашению внести в фонд сумму, равную актуарной настоящей стоимости бессрочного страхования, вычисленную на основе Иллюстративной таблицы смертности с процентной ставкой 6%.

Участники, для которых никакая страховая компания не проводила селекцию, решают использовать эту таблицу в качестве основы своего плана. Фактический опыт этого фонда показывает, что происходит одна смерть в каждый второй и каждый пятый годы. Процентный доход составляет в первый год 6%, во второй и в третий годы 6,5%, в четвертый и в пятый годы 7%. Какова разница между ожидаемым размером фонда, определяемым в начале его деятельности, и его реальным значением к концу первых 5 лет?

Решение. Согласно договоренности, $1000A_{30} = 102{,}4835$, так что при 100 участниках фонд имеет в начале своей деятельности сумму 10 248,35. Далее, $A_{35} = 0{,}1287194$ и $l_{35}/l_{30} = 0{,}9915040$.

Для 100 лиц возраста 30 ожидаемая величина фонда по прошествии 5 лет составит

$$(1000)(100)\,\frac{l_{35}}{l_{30}} = 12\,762{,}58.$$

Обозначим через F_k величину фонда к концу страхового года с номером k. Динамика реального фонда будет следующей:

$$\begin{aligned}
F_0 &= 10\,248{,}35,\\
F_1 &= (10\,248{,}35)(1{,}06) = 10\,863{,}25,\\
F_2 &= (10\,863{,}25)(1{,}065) - 1000 = 10\,569{,}36,\\
F_3 &= (10\,569{,}36)(1{,}065) = 11\,256{,}37,\\
F_4 &= (11\,256{,}37)(1{,}07) = 12\,044{,}32,\\
F_5 &= (12\,044{,}32)(1{,}07) - 1000 = 11\,887{,}42.
\end{aligned}$$

Таким образом, искомая разница составит $12\,762{,}58 - 11\,887{,}42 = 875{,}16$. Этот результат объединяет опыт инвестирования и смертности за 5-летний период. При инвестировании доходы превысили запланированные на уровне 6%. С другой стороны, потери за счет смертности оказались больше: две смерти по сравнению с числом 0,8496. Интерпретация этих результатов в терминах взаимного влияния различных факторов, таких, как инвестиционный доход и уровень смертности, является профессиональной обязанностью актуария. ▼

Мы вывели рекуррентные соотношения (4.3.3) для актуарной настоящей стоимости страхования на случай смерти сроком на n лет алгебраическими методами. Хотя эти соотношения будут справедливы для актуарной настоящей стоимости бессрочного страхования на случай смерти, поскольку это предельный случай страхования на n лет при $n \to \infty$, мы установим их независимым образом, чтобы проиллюстрировать вероятностные методы доказательства.

Рассмотрим выражение A_x, обращаясь к его определению $\mathbf{E}[Z] = \mathbf{E}[v^{K(x)+1}]$. Для удобства читателя перепишем его в виде

$$A_x = \mathbf{E}[Z] = \mathbf{E}[v^{K(x)+1} \,|\, K(x) \geqslant 0],$$

хотя эта запись избыточна, поскольку вся вероятностная масса распределения с.в. $K(x)$ сосредоточена на множестве неотрицательных целых чисел.

Величину $\mathbf{E}[Z]$ можно вычислить, рассматривая событие, что лицо (x) умрет в первый год, т. е. $K(x) = 0$, и его дополнение, событие, что лицо (x) переживет первый год, т. е. $K(x) \geqslant 1$. Мы можем записать

$$\mathbf{E}[Z] = \mathbf{E}[v^{K(x)+1} \,|\, K(x)=0]\,\mathbf{P}[K(x)=0] + \mathbf{E}[v^{K(x)+1} \,|\, K(x) \geqslant 1]\,\mathbf{P}[K(x) \geqslant 1]. \quad (4.3.8)$$

В этом выражении мы можем сделать следующие очевидные замены:

$$\mathbf{E}[v^{K(x)+1} \,|\, K(x)=0] = v, \quad \mathbf{P}[K(x)=0] = q_x \quad \text{и} \quad \mathbf{P}[K(x) \geqslant 1] = p_x.$$

Для того чтобы найти выражение для оставшегося сомножителя, перепишем его в виде

$$\mathbf{E}[v^{K(x)+1} \,|\, K(x) \geqslant 1] = v\mathbf{E}[v^{(K(x)+1)+1} \,|\, K(x) - 1 \geqslant 0].$$

Так как с.в. $K(x)$ является пошаговой продолжительностью предстоящей жизни лица (x) при условии $K(x) \geqslant 1$, то с.в. $K(x) - 1$ должна быть пошаговой продолжительностью предстоящей жизни лица $(x+1)$.

Если мы хотим использовать те же вероятности для условного распределения с.в. $K(x) - 1$ при условии $K(x) \geqslant 1$, как если бы с самого начала рассматривалось лицо возраста $x+1$, мы можем написать

$$\mathbf{E}[v^{(K(x)+1)+1} \,|\, K(x) - 1 \geqslant 0] = A_{x+1} \tag{4.3.9}$$

и, подставив эту величину в (4.3.8), получить

$$A_x = vq_x + vA_{x+1}p_x. \tag{4.3.10}$$

Предложение

(распределение продолжительности предстоящей жизни лица возраста $x+1$, с которым заключен договор страхования в настоящий момент)

= (распределение продолжительности предстоящей жизни лица возраста $x+1$ в настоящий момент, с которым заключен договор страхования 1 год тому назад)

обсуждалось в разд. 3.8. В терминах селекционных таблиц правая часть равенства (4.3.9) будет иметь вид $A_{[x]+1}$. В соотношении (4.3.10) каждый символ x должен быть заменен на $[x]$.

Заметим, что (4.3.10) является такой же обратной рекуррентной формулой, что и (4.3.3), а именно формулой вида

$$u(x) = vq_x + vp_x\, u(x+1).$$

Именно начальное значение определяет, будет ли ее решение актуарной настоящей стоимостью бессрочного страхования на случай смерти или актуарной настоящей стоимостью страхования на срок n лет. Та же рекуррентная формула получается и для актуарных настоящих стоимостей смешанного страхования сроком на n лет, где начальными значениями является стоимость в момент n.

Анализ соотношения (4.3.10) способствует пониманию природы величины A_x. После замены p_x на $1 - q_x$ и умножения обеих частей на $(1+i)l_x$ соотношение (4.3.10) можно переписать в виде

$$l_x(1+i)A_x = l_xA_{x+1} + d_x(1 - A_{x+1}). \tag{4.3.11}$$

Для совокупности случайного дожития это соотношение имеет следующую интерпретацию. Вместе с процентами за первый год величина A_x, умноженная на l_x, среднее число лиц, доживших до возраста x, дает величину A_{x+1}, умноженную на l_x и, кроме того, величину $1 - A_{x+1}$, умноженную на число d_x лиц, смерть которых ожидается в течение этого года. Такая величина для каждой ожидаемой смерти,

$q_x(1 - A_{x+1})$, называется *годовой стоимостью страхования*. Величина A_{x+1} касается доживших и умерших, в то время как величина $1 - A_{x+1}$ касается только умерших.

Деля на l_x и затем вычитая $A_x + q_x(1 - A_{x+1})$ из обеих частей формулы (4.3.11), мы получаем

$$A_{x+1} - A_x = iA_x - q_x(1 - A_{x+1}). \tag{4.3.12}$$

Иначе говоря, разница между актуарными настоящими стоимостями для лиц возраста x лет и возраста $x + 1$ лет равна процентам, начисленным на актуарную настоящую стоимость в возрасте x минус годичная стоимость страхования в этот год.

Другое выражение для A_x можно получить из формулы (4.3.10), заменив p_x на $1 - q_x$, умножив обе части на v^x и перегруппировав ее члены. В результате мы получаем

$$v^{x+1}A_{x+1} - v^x A_x = -v^{x+1}q_x(1 - A_{x+1}),$$

или

$$\Delta v^x A_x = -v^{x+1}q_x(1 - A_{x+1}).$$

Суммируя от $x = y$ до ∞ (см. приложение 5), мы получим

$$-v^y A_y = -\sum_{x=y}^{\infty} v^{x+1}q_x(1 - A_{x+1})$$

и, таким образом,

$$A_y = \sum_{x=y}^{\infty} v^{x+1-y}q_x(1 - A_{x+1}).$$

Это выражение показывает, что актуарная настоящая стоимость для возраста y равна сумме настоящих стоимостей в момент y годовых стоимостей страхования по всему времени предстоящей жизни страхователя.

Смешанное страхование на срок n лет с выплатой размера единица в конце года смерти является комбинацией рассмотренного в этом разделе страхования на срок n лет и страхования на дожитие на срок n лет с выплатой размера единица, которое обсуждалось в предыдущем разделе. Такому договору соответствуют функции

$$b_{k+1} = 1, \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

$$v_{k+1} = \begin{cases} v^{k+1}, & k = 0, 1, \ldots, n-1, \\ v^n, & k = n, n+1, \ldots, \end{cases}$$

$$Z = \begin{cases} v^{K+1}, & K = 0, 1, \ldots, n-1, \\ v^n, & K = n, n+1, \ldots. \end{cases}$$

Актуарная настоящая стоимость равна

$$A_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}{}_k p_x\, q_{x+k} + v^n{}_n p_x. \tag{4.3.13}$$

Бессрочное страхование на случай смерти с ежегодно увеличивающейся выплатой, когда выплачивается $k + 1$ единиц в конце $k + 1$-го года действия договора, если страхователь умрет в этом страховом году, имеет следующие функции выплат и дисконтирования и случайную величину настоящей стоимости:

$$b_{k+1} = k+1, \qquad k = 0,1,2,\ldots,$$
$$v_{k+1} = v^{k+1}, \qquad k = 0,1,2,\ldots,$$
$$Z = (K+1)v^{K+1}, \qquad K = 0,1,2,\ldots.$$

Его актуарная настоящая стоимость обозначается через $(IA)_x$.

Страхование на срок n лет с ежегодно уменьшающейся выплатой в течение n-летнего периода предусматривает выплату в конце года смерти, равную $n-k$, где k — число полных лет, прожитых страхователем с момента заключения договора. Соответствующие функции имеют вид

$$b_{k+1} = \begin{cases} n-k, & k = 0,1,\ldots,n-1, \\ 0, & k = n, n+1,\ldots, \end{cases}$$
$$v_{k+1} = v^{k+1}, \qquad k = 0,1,\ldots,$$
$$Z = \begin{cases} (n-K)v^{K+1}, & K = 0,1,\ldots,n-1, \\ v^n, & K = n, n+1,\ldots. \end{cases}$$

Актуарная настоящая стоимость для этого страхования обозначается символом $(DA)^1_{x:\overline{n}|}$.

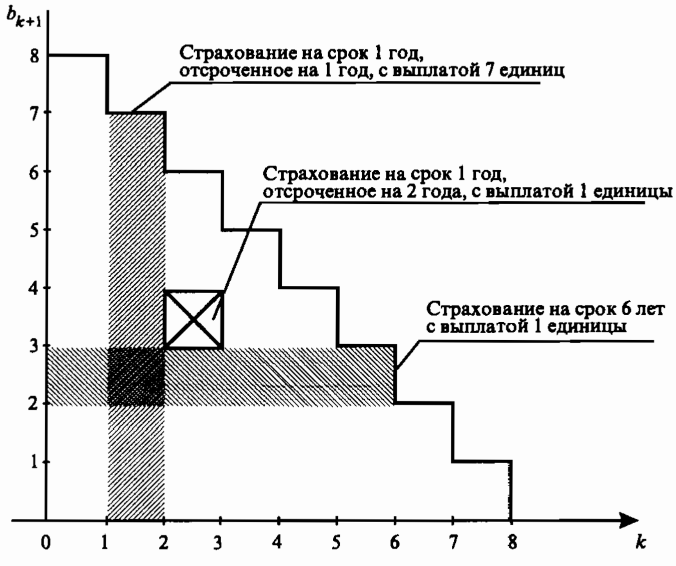


Рис. 4.3.1. Страховой договор сроком на 8 лет с ежегодно уменьшающейся выплатой

Как и для договоров, в которых выплаты производятся в момент смерти (см. рис. 4.2.5), страхование с ежегодно увеличивающейся выплатой, производимой в конце года смерти, эквивалентно комбинации договоров отсроченного страхования на случай смерти с постоянными выплатами размера единица. Аналогично, срочное страхование с ежегодно уменьшающейся выплатой эквивалентно комбинации страховых договоров с постоянными выплатами и разными сроками действия. Рисунок 4.3.1 иллюстрирует сказанное для страхования на 8 лет с ежегодно уменьшающейся выплатой.

На рис. 4.3.1 изображен график функции выплат b_{k+1}. Каждый единичный квадрат представляет договор отсроченного страхования сроком на 1 год. Когда они объединяются по вертикали, получаются договоры отсроченного страхования сроком на 1 год и с уменьшающимися выплатами. Когда квадраты объединяются по горизонтали, получаются срочные договоры страхования с постоянными выплатами разной длительности. Такие вертикальные и горизонтальные способы объединения также показаны на рис. 4.3.1.

Тот факт, что актуарные настоящие стоимости комбинации договоров срочного страхования с постоянными выплатами и актуарные настоящие стоимости комбинации договоров срочного отсроченного страхования равны, можно выразить аналитически. Так, согласно определению,

$$(DA)^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)v^{k+1}{}_kp_x\, q_{x+k} = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)(v^k{}_kp_x)(vq_{x+k}) = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\,{}_{k|1}A_x, \tag{4.3.14}$$

что соответствует суммированию по вертикали.

Произведя подстановку $n-k=\sum_{j=0}^{n-k-1}(1)$ в формулу (4.3.14), мы получим

$$(DA)^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-k-1}(1)\,v^{k+1}{}_kp_x\, q_{x+k}\,.$$

Меняя порядок суммирования, мы получим

$$\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-j-1}(1)\,v^{k+1}{}_kp_x\, q_{x+k}$$

и, сравнивая сумму по k с (4.3.2), можем записать

$$(DA)^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{j=0}^{n-1} A^1_{x:\overline{n-j}|}\,.$$

В табл. 4.3.1 приведена сводка функций и обозначений для элементарных договоров страхования, в которых выплаты производятся в конце года смерти.

Мы завершаем этот раздел сводкой рекуррентных соотношений для актуарных настоящих стоимостей страхования для случая, когда выплаты производятся в конце года смерти. Рассмотрим приведенные ниже соотношения (a)–(g), расположенные в том порядке, в каком соответствующие виды страхования входят в табл. 4.3.1. Для каждого из перечисленных в таблице видов страхования приводится рекуррентное соотношение, область изменения переменной и начальное условие. Значения актуарных настоящих стоимостей следует вычислять, начиная с наименьшего возраста, приведенного в таблице смертности, и до возраста y или ω.

Таблица 4.3.1. Страховые договоры с выплатой в конце года смерти

(1) Вид страхования	(2) Функция выплат b_{k+1}	(3) Функция дисконтирования v_{k+1}	(4) Функция настоящей стоимости z_{k+1}	(5) Актуарная настоящая стоимость	(6) Моменты высших порядков
(a) Бессрочное страхование на случай смерти	1	v^{k+1}	v^{k+1}	A_x	*
(b) Страхование на случай смерти на срок n лет	$1,\ k=0,1,\dots,n-1,$ $0,\ k=n,n+1,\dots$	v^{k+1}	$v^{k+1},\ k=0,1,\dots,n-1,$ $0,\ k=n,n+1,\dots$	$A^{1}_{x:\overline{n}\rceil}$	*
(c) Смешанное страхование на срок n лет	1	$v^{k+1},\ k=0,1,\dots,n-1,$ $v^{n},\ k=n,n+1,\dots$	$v^{k+1},\ k=0,1,\dots,n-1,$ $v^{n},\ k=n,n+1,\dots$	$A_{x:\overline{n}\rceil}$	*
(d) Страхование на срок n лет, отсроченное на m лет	$1,\ k=m,m+1,\dots,m+n-1,$ $0,\ k=0,\dots,m-1,$ $k=m+n,\dots$	v^{k+1}	$v^{k+1},\ k=m,m+1,\dots,m+n-1,$ $0,\ k=0,\dots,m-1,$ $k=m+n,\dots$	${}_{m\mid n}A_x$	*
(e) Страхование на срок n лет с ежегодно увеличивающейся выплатой	$k+1,\ k=0,1,\dots,n-1,$ $0,\ k=n,n+1,\dots$	v^{k+1}	$(k+1)v^{k+1},$ $k=0,1,\dots,n-1,$ $0,\ k=n,n+1,\dots$	$(IA)^{1}_{x:\overline{n}\rceil}$	†
(f) Страхование на срок n лет с ежегодно уменьшающейся выплатой	$n-k,\ k=0,1,\dots,n-1,$ $0,\ k=n,n+1,\dots$	v^{k+1}	$(n-k)v^{k+1},$ $k=0,1,\dots,n-1,$ $0,\ k=n,n+1,\dots$	$(DA)^{1}_{x:\overline{n}\rceil}$	†
(g) Бессрочное страхование с ежегодно увеличивающейся выплатой	$k+1,\ k=0,1,\dots$	v^{k+1}	$(k+1)v^{k+1},\ k=0,1,\dots$	$(IA)_x$	†

Замечание. Величины b_{k+1}, v_{k+1} и z_{k+1} определяются только для неотрицательных целых значений k.

*Справедливо правило моментов и $\mathbf{D}[Z]$ обозначается через ${}^2A - A^2$.

†Правило моментов не выполняется.

(a) $A_x = vq_x + vp_x\, A_{x+1}$, $x = 0, 1, \ldots, \omega - 1$, и $A_\omega = 0$.

(b) $A^1_{x:\overline{y-x}|} = vq_x + vp_x\, A^1_{x+1:\overline{y-(x+1)}|}$, $x = 0, 1, \ldots, y-1$, и $A^1_{y:\overline{0}|} = 0$.

(c) $A_{x:\overline{y-x}|} = vq_x + vp_x\, A_{x+1:\overline{y-(x+1)}|}$, $x = 0, 1, \ldots, y-1$, и $A_{y:\overline{0}|} = 0$.

(d) ${}_{y-x|n}A_x = 0 + vp_x\; {}_{y-(x+1)|n}A_{x+1}$, $x = 0, 1, \ldots, y-1$, и ${}_{0|n}A_y = A^1_{y:\overline{n}|}$.

(e) $(IA)^1_{x:\overline{y-x}|} = [vq_x + vp_x\, A^{\;1}_{x+1:\overline{y-(x+1)}|}] + vp_x\, (IA)^{\;1}_{x+1:\overline{y-(x+1)}|}$, $x = 0, 1, \ldots, y-1$, и $(IA)^1_{y:\overline{0}|} = 0$.

(f) $(DA)^1_{x:\overline{y-x}|} = (y-x)vq_x + vp_x\, (DA)^{\;1}_{x+1:\overline{y-(x+1)}|}$, $x = 0, 1, \ldots, y-1$, и $(DA)^1_{y:\overline{0}|} = 0$.

(g) $(IA)_x = [vq_x + vp_x A_{x+1}] + vp_x\, (IA)_{x+1}$, $x = 0, 1, \ldots, \omega - 1$, и $(IA)_\omega = 0$.

Замечания. 1. В этом разделе обоснованы только соотношения (a) и (b). Соотношения пп. от (c) до (g) обосновываются аналогичным образом.

2. Все семь соотношений имеют вид

$$u(x) = c(x) + vp_x\, u(x+1),$$

где $c(x)$ — заданная функция, определенная в области определения соответствующего соотношения. На языке дифференциальных уравнений всем семи формулам соответствует одно и то же однородное уравнение $u(x) = vp_x\, u(x+1)$. Оно является линейным, но его коэффициенты непостоянны.

3. Поскольку $c(x) = vq_x$ для (a), (b) и (c), соответствующие актуарные настоящие стоимости получаются из одних и тех же рекуррентных формул, различающихся только начальными значениями.

4.4. Соотношения между страховыми договорами с выплатами в момент смерти и в конце года смерти

Мы начнем изучение этих соотношений с анализа актуарной настоящей стоимости для договора бессрочного страхования на случай смерти, по которому производится выплата размера единица в момент смерти. В силу формулы (4.2.6)

$$\bar{A}_x = \int_0^\infty v^t\, {}_tp_x\, \mu_x(t)\, dt = \int_0^1 v^t\, {}_tp_x\, \mu_x(t)\, dt + \int_1^\infty v^t\, {}_tp_x\, \mu_x(t)\, dt.$$

Замена переменных $s = t - 1$ во втором интеграле дает

$$\bar{A}_x = \int_0^1 v^t\, {}_tp_x\, \mu_x(t)\, dt + v \int_0^\infty v^s\, {}_{s+1}p_x\, \mu_x(s+1)\, ds. \tag{4.4.1}$$

На основе данных агрегативной таблицы смертности

$${}_{s+1}p_x\, \mu_x(s+1) = p_x\; {}_sp_{x+1}\, \mu(x+s+1),$$

и второе слагаемое в формуле (4.4.1) есть $vp_x\, \bar{A}_{x+1}$. На основе данных селекционной таблицы смертности второе слагаемое в формуле (4.4.1) есть $vp_{[x]}\, \bar{A}_{[x]+1}$. Возвращаясь к (4.4.1) и пользуясь обозначениями из агрегативных таблиц смертности, получаем

$$\bar{A}_x = \int_0^1 v^t\, {}_tp_x\, \mu_x(t)\, dt + vp_x\, \bar{A}_{x+1} = \bar{A}^1_{x:\overline{1}|} + vp_x\, \bar{A}_{x+1}. \tag{4.4.2}$$

Принимая одно из соглашений о форме функции смертности в промежутках между целыми точками, которые обсуждались в разд. 3.6, интеграл в (4.4.2) можно выразить через значения функций из дискретной таблицы смертности.

В предположении равномерности распределения моментов смерти внутри каждого годичного возрастного интервала имеем

$$ {}_tp_y\,\mu_y(t) = q_y, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1 \text{ и } y = 0, 1, \ldots, $$

что можно подставить в формулу (4.4.2), получив

$$ \bar{A}_x = q_x \int_0^1 v^t\,dt + vp_x\,\bar{A}_{x+1} = \frac{i}{\delta}\,vq_x + vp_x\,\bar{A}_{x+1}. \tag{4.4.3} $$

Величина x в этом соотношении принимает значения $0, 1, \ldots, \omega - 1$, а начальное значение $\bar{A}_\omega$ равно 0.

Если мы умножим обе части рекуррентной формулы (a) на i/δ, то получим

$$ \frac{i}{\delta}\,A_x = \frac{i}{\delta}\,vq_x + vp_x\left(\frac{i}{\delta}\,A_{x+1}\right). $$

Поскольку формулы (a) и (4.4.3) выражают одну и ту же рекуррентную формулу, имеют одинаковую область изменения x и одинаковые начальные значения 0 в точке ω, величина $(i/\omega)A_x$ является решением для (4.4.3) и

$$ \bar{A}_x = \frac{i}{\delta}\,A_x. \tag{4.4.4} $$

В предположении равномерности распределения моментов смерти внутри годичных возрастных интервалов формулу (4.4.4) можно было бы угадать. Воздействие предположения о равномерности состоит в том, что выплаты размера 1, производимые в момент смерти, эквивалентны выплатам размера 1 в год, производимым непрерывно в течение всего года, в котором произошла смерть. Если учитывать проценты, то выплаты размера 1 в год, производимые непрерывно в течение всего года, в котором произошла смерть, эквивалентны выплате суммы i/δ в конце этого года.

Тождество (4.4.4) можно получить, используя свойства случайной величины «продолжительность предстоящей жизни» в предположении равномерности распределения смертей в годичных возрастных интервалах, как это делалось в разд. 3.6. Воспользовавшись формулой (3.6.1), мы запишем $T = K + S$. Мы отмечали, что в предположении равномерности распределения смертей в годичных возрастных интервалах с.в. K и S независимы и с.в. S имеет равномерное распределение на единичном интервале. В качестве следствий из этих наблюдений получаем, что с.в. $K+1$ и $1-S$ также независимы и с.в. $1-S$ имеет равномерное распределение на единичном интервале. В тождестве

$$ \bar{A}_x = \mathbf{E}[v^T] = \mathbf{E}[v^{K+1}(1+i)^{1-S}] $$

мы можем воспользоваться независимостью с.в. $K+1$ и $1-S$ для вычисления математического ожидания произведения как произведения математических ожиданий,

$$ \mathbf{E}[v^{K+1}(1+i)^{1-S}] = \mathbf{E}[v^{K+1}]\,\mathbf{E}[(1+i)^{1-S}]. \tag{4.4.5} $$

Первый сомножитель в правой части равен A_x. Поскольку с.в. $1-S$ имеет равномерное распределение на единичном интервале, для второго сомножителя справедливо равенство

$$ \mathbf{E}[(1+i)^{1-S}] = \int_0^1 (1+i)^t 1\,dt = \frac{i}{\delta}. $$

Таким образом, в предположении равномерности распределения смертей в годичных интервалах мы снова имеем $\bar{A}_x = (i/\delta)A_x$.

Пусть годичные интервалы разбиты на m подынтервалов равной длины. Аналогичные рассуждения, основанные также на предположении о равномерности распределения смертей в годичных возрастных интервалах, можно применить для доказательства того, что актуарная настоящая стоимость бессрочного страхования на случай смерти с выплатой размера единица в конце того из этих m подынтервалов года, в котором произошла смерть, равна

$$A_x^{(m)} = \frac{i}{i^{(m)}}\, A_x. \tag{4.4.6}$$

Эти соображения вкратце изложены в упр. 4.19.

В разд. 3.6 мы также обсуждали предположение о постоянстве интенсивности смертности на разных годичных возрастных интервалах. Соотношение между актуарными настоящими стоимостями для бессрочных договоров страхования на случай смерти с выплатами в момент смерти и в конце года смерти при таком предположении являются предметом упр. 4.19. Поскольку из предположения о гиперболичности функции дожития следует, что интенсивность смертности на годичном возрастном интервале убывает (см. упр. 3.27), это предположение не часто оказывается реалистичным применительно к человеческим жизням. Кроме того, оно приводит к более сложным соотношениям, на которых мы не будем останавливаться.

Перейдем к анализу договора страхования на случай смерти на срок n лет с ежегодно увеличивающейся выплатой, причем выплата производится в момент смерти. Для такого договора настоящая стоимость страховой выплаты имеет вид

$$Z = \begin{cases} \lfloor T+1 \rfloor v^T, & T < n, \\ 0, & T \geqslant n. \end{cases}$$

Поскольку $\lfloor T+1 \rfloor = K+1$, мы можем воспользоваться соотношением $T = K + S$ и получить

$$Z = \begin{cases} (K+1) v^{K+1} v^{S-1}, & T < n, \\ 0, & T \geqslant n. \end{cases}$$

Если W — настоящая стоимость страховой выплаты для договора страхования на случай смерти сроком на n лет с ежегодно увеличивающейся выплатой, причем выплата производится в конце года смерти, то

$$W = \begin{cases} (K+1) v^{K+1} v^{S-1}, & K = 0, 1, \ldots, n-1, \\ 0, & K = n, n+1, \ldots. \end{cases}$$

Имеем

$$Z = W(1+i)^{1-S} \qquad \text{и} \qquad \mathbf{E}[Z] = \mathbf{E}[W(1+i)^{1-S}].$$

Поскольку с.в. W является функцией только от с.в. $K+1$ и с.в. $K+1$ и $1-S$ независимы,

$$\mathbf{E}[Z] = \mathbf{E}[W]\,\mathbf{E}[(1+i)^{1-S}] = (IA)^1_{x:\overline{n}|}\,\frac{i}{\delta}\,.$$

Результаты для бессрочного страхования на случай смерти и для срочного страхования на случай смерти с увеличивающейся выплатой, в которых выплаты производятся в момент смерти, полученные в предположении равномерности распределения смертей в годичных возрастных интервалах, весьма похожи,

$$\bar{A}_x = \frac{i}{\delta}\, A_x \qquad \text{и} \qquad (I\bar{A})^1_{x:\overline{n}|} = \frac{i}{\delta}\,(IA)^1_{x:\overline{n}|}\,.$$

Для того чтобы обнаружить причины этого сходства, рассмотрим общую модель. В силу формулы (4.2.2)

$$Z = b_T v_T. \tag{4.4.7}$$

Для двух указанных выше типов страховых договоров были использованы следующие условия:

- $v_T = v^T$,
- величина b_T является функцией только лишь целой части с.в. T, пошаговой продолжительности предстоящей жизни K.

Выписывая последнее свойство в виде $b_T = b^*_{K+1}$, мы можем записать формулу (4.4.7) для этих договоров в виде

$$Z = b^*_{K+1} v^T = b^*_{K+1} v^{K+1} (1+i)^{1-S},$$

и

$$\mathbf{E}[Z] = \mathbf{E}[b^*_{K+1} v^{K+1} (1+i)^{1-S}]. \tag{4.4.8}$$

В предположении равномерности распределения смертей в годичных возрастных интервалах мы приходим к независимости с.в. K и S и к тому, что с.в. $1-S$ также имеет равномерное распределение. Поэтому мы можем переписать равенство (4.4.8) следующим образом:

$$\mathbf{E}[Z] = \mathbf{E}[b^*_{K+1} v^{K+1}]\,\mathbf{E}[(1+i)^{1-S}] = \mathbf{E}[b^*_{K+1} v^{K+1}]\,\frac{i}{\delta}. \tag{4.4.9}$$

Пример 4.4.1. Найдем актуарную настоящую стоимость и дисперсию для смешанного страхования на 30 лет с выплатой размера 10 000, согласно которому выплата на случай смерти производится в момент смерти, причем договор заключен с 35-летним мужчиной. Воспользуемся Иллюстративной таблицей смертности и предположением о равномерности распределения смертей в годичных возрастных интервалах и будем считать, что $i = 0{,}06$.

Решение. Для договора смешанного страхования $v_T \neq v^T$. Поэтому мы не можем сразу воспользоваться формулой (4.4.9). Вспоминая формулу (4.2.11), которая представляет смешанное страхование в виде суммы срочного страхования на случай смерти и страхования на дожитие, мы применим формулу (4.4.9) к компоненте, относящейся к срочному страхованию на случай смерти, а затем рассчитаем часть, относящуюся к страхованию на дожитие. Воспользовавшись формулами (4.2.12) и (4.2.10), мы найдем актуарную настоящую стоимость

$$\bar{A}_{35:\overline{30}|} = \frac{i}{\delta} A^{1}_{35:\overline{30}|} + A_{35:\overset{1}{\overline{30}|}} = (1{,}0297087)[0{,}06748179] + 0{,}1392408 = 0{,}208727$$

и дисперсию

$$\mathbf{D}[Z] = {}^2\bar{A}_{35:\overline{30}|} - (\bar{A}_{35:\overline{30}|})^2 = 0{,}0309294 + 0{,}0242432 - (0{,}208727)^2 = 0{,}011606.$$

Для выплаты размера 10 000 имеем $10\,000\,\bar{A}_{35:\overline{30}|} = 2087{,}27$ и $(10\,000)^2\mathbf{D}[Z] = 1\,160\,600$. ▼

Пример 4.4.2. Для 50-летнего страхователя найдем актуарную настоящую стоимость договора с уменьшающейся выплатой сроком на 5 лет, а именно с выплатой 5000 в момент смерти, если смерть произойдет в первый год, 4000, если смерть произойдет во второй год, и так далее. Воспользуемся Иллюстративной таблицей смертности и предположением о равномерности распределения смертей в годичных возрастных интервалах и будем считать, что $i = 0{,}06$.

Решение. Обращаясь к табл. 4.2.1, мы видим, что

$$b_t = \begin{cases} 5 - \lfloor t \rfloor, & t \leqslant 5, \\ 0, & t > 5, \end{cases}$$

является функцией только от k, целой части t, и, значит, мы можем переписать это выражение в виде

$$b_t = \begin{cases} 5 - k, & k = 0, 1, 2, 3, 4, \\ 0, & k > 4. \end{cases}$$

Функция дисконтирования есть v^t. Поэтому

$$(D\bar{A})^1_{50:\overline{5}|} = \frac{i}{\delta}(DA)^1_{50:\overline{5}|} = (1{,}0297087) \sum_{k=0}^{4} (5 - k) v^{k+1} {}_k p_{50}\, q_{50+k}$$

$$= (1{,}0297087) \frac{1}{l_{50}} \sum_{k=0}^{4} (5 - k) v^{k+1} d_{50+k} = 0{,}088307.$$

Таким образом, $1000(D\bar{A})^1_{50:\overline{5}|} = 88{,}307$. ▼

Для того чтобы выразить стоимости для договоров страхования, согласно которым выплата производится в момент смерти и не является функцией от K, через стоимости для договоров, согласно которым выплаты производятся в конце года смерти, необходим дополнительный анализ. Рассмотрим договор бессрочного страхования с непрерывно увеличивающейся выплатой, причем выплата производится в момент смерти. Такие договоры подробно обсуждались в разд. 4.2 и анализ их функции выплат проводится на рис. 4.2.5. Соответствующие функции имеют вид

$$b_t = t, \quad t > 0, \qquad v_t = v^t, \quad t > 0, \qquad z_t = t v^t, \quad t > 0.$$

Для того чтобы найти $(\bar{I}\bar{A})_x$, запишем

$$Z = (K + S) v^{K+S} = (K + 1) v^{K+S} - (1 - S) v^{K+1} (1 + i)^{1-S}$$

$$= (K + 1) v^{K+1} (1 + i)^{1-S} - v^{K+1} (1 - S)(1 + i)^{1-S}.$$

Беря математические ожидания, в предположении равномерности распределения смертей в годичных возрастных интервалах получаем

$$\mathbf{E}[Z] = \mathbf{E}[(K + 1) v^{K+1}] \mathbf{E}[(1 + i)^{1-S}] - \mathbf{E}[v^{K+1}] \mathbf{E}[(1 - S)(1 + i)^{1-S}]$$

$$= (IA)_x \frac{i}{\delta} - A_x \mathbf{E}[(1 - S)(1 + i)^{1-S}].$$

Мы можем упростить последний сомножитель непосредственными вычислениями, поскольку с.в. $1 - S$ распределена равномерно,

$$\mathbf{E}[(1 - S)(1 + i)^{1-S}] = \int_0^1 u (1 + i)^u du = (\bar{D}\bar{s})_{\overline{1}|} = \frac{1 + i}{\delta} - \frac{i}{\delta^2}.$$

Таким образом, мы получаем[1)]

$$(\bar{I}\bar{A})_x = \frac{i}{\delta} \left[(IA)_x - \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{\delta} \right) A_x \right].$$

[1)] В следующей формуле (и далее) d — ставка дисконта. — *Прим. ред.*

4.5. Дифференциальные уравнения для страхования с выплатами в момент смерти

В случае страхования с выплатами, производимыми в момент смерти, можно вывести соотношения, аналогичные рекуррентным. Опираясь на них и применяя методы математического анализа, мы придем к дифференциальным уравнениям.

Для договора бессрочного страхования на случай смерти с лицом (x) имеем

$$\frac{d}{dx}\bar{A}_x = -\mu(x) + \bar{A}_x[\delta + \mu(x)] = \delta\bar{A}_x - \mu(x)(1 - \bar{A}_x), \tag{4.5.1}$$

что является непрерывным аналогом формулы (4.3.12). Используемые здесь обозначения подразумевают применение данных из агрегативных таблиц смертности. Доказательства вынесены в упр. 4.21.

С другой стороны, уравнение (4.5.1) можно получить из определения величины $\bar{A}_x$, пользуясь условными математическими ожиданиями, как это делалось ранее для A_x:

$$\bar{A}_x = \mathbf{E}[v^T] = \mathbf{E}[v^T\,|\,T \leqslant h]\,\mathbf{P}(T \leqslant h) + \mathbf{E}[v^T\,|\,T > h]\,\mathbf{P}(T > h). \tag{4.5.2}$$

Далее,

$$\mathbf{P}(T \leqslant h) = {}_hq_x \quad \text{и} \quad \mathbf{P}(T > h) = {}_hp_x \tag{4.5.3}$$

и условная функция плотности с.в. T при условии $T \leqslant h$ имеет вид

$$f_T(t\,|\,T \leqslant h) = \begin{cases} \dfrac{f_T(h)}{F_T(h)} = \dfrac{{}_tp_x\,\mu(x+t)}{{}_hq_x}, & 0 \leqslant t \leqslant h, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Таким образом,

$$\mathbf{E}[v^T\,|\,T \leqslant h] = \int_0^h v^t\,\frac{{}_tp_x\,\mu(x+t)}{{}_hq_x}\,dt. \tag{4.5.4}$$

Как это делалось ранее для A_x, запишем

$$\mathbf{E}[v^T\,|\,T > h] = v^h\,\mathbf{E}[v^{T-h}\,|\,T - h > 0] = v^h\bar{A}_{x+h}. \tag{4.5.5}$$

Подстановка формул (4.5.3), (4.5.4) и (4.5.5) в (4.5.2) дает

$$\bar{A}_x = \int_0^h v^t\,\frac{{}_tp_x\,\mu(x+t)}{{}_hq_x}\,dt\,{}_hq_x + v^h\bar{A}_{x+h}\,{}_hp_x. \tag{4.5.6}$$

Умножая обе части формулы (4.5.6) на -1, прибавляя к ним $\bar{A}_{x+h}$ и деля на h, мы получаем

$$\frac{\bar{A}_{x+h} - \bar{A}_x}{h} = -\frac{1}{h}\int_0^h v^t\,{}_tp_x\,\mu(x+t)\,dt + \bar{A}_{x+h}\frac{1 - v^h\,{}_hp_x}{h}. \tag{4.5.7}$$

Далее,

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h v^t\,{}_tp_x\,\mu(x+t)\,dt = \frac{d}{ds}\int_0^s v^t\,{}_tp_x\,\mu(x+t)\,dt\bigg|_{s=0} = \mu(x)$$

и

$$\lim_{h\to 0}\frac{1 - v^h\,{}_hp_x}{h} = -\frac{d}{dt}(v^t\,{}_tp_x)\bigg|_{t=0} = \mu(x) + \delta.$$

Переходя к пределу при $h \to 0$ в (4.5.7) и воспользовавшись этими двумя предельными соотношениями, мы получим уравнение (4.5.1),

$$\frac{d}{dx}\bar{A}_x = -\mu(x) + \bar{A}_x[\mu(x) + \delta].$$

Решения этого дифференциального уравнения описаны в упр. 4.22.

4.6. Замечания и литература

В монографиях по страхованию жизни, указанных в приложении 6, содержатся другие способы вывода формул для актуарной настоящей стоимости договоров страхования жизни. В книге [Jordan 1952] интенсивно используются коммутационные функции, которые составляли основу актуарных вычислений до последней четверти 20 в.

В этих монографиях уделялось мало внимания понятию «продолжительность предстоящей жизни» страхователя как случайной величине. До недавнего времени исследование и изложение этого понятия называлось *теорией индивидуальных рисков*. В книге [Cramér 1930] содержится детальное изложение идей, известных к моменту ее написания. В книгах [Kahn 1962] и [Seal 1969] приводится исчерпывающая библиография как исследований, так и обзорных работ за столетний период.

С 1970-х гг. проявлялся интерес к актуарным моделям, в которых как продолжительность предстоящей жизни, так и процентная ставка считались случайными величинами. Эти вопросы изучаются в гл. 21.

Упражнения

Мы будем предполагать, если не оговорено противное, что страховые выплаты производятся в момент смерти и что как интенсивность начисления процента δ, так и эквивалентные ей процентная ставка i и ставка дисконта d, постоянны.

К разделу 4.2

4.1. Покажите, что $\bar{A}_x = \mu/(\mu+\delta)$, если $\mu(x) = \mu$ для всех x, где μ — положительная константа.

4.2. Пусть $\mu(x) = 1/(1+x)$ для всех $x > 0$.

(a) Проведите интегрирование по частям и покажите, что

$$\bar{A}_x = 1 - \delta \int_0^\infty e^{-\delta t} \frac{1+x}{1+x+t}\, dt.$$

(b) Воспользуйтесь выражением п. (a) и покажите, что $d\bar{A}_x/dx < 0$ для всех $x > 0$.

4.3. Покажите, что $d\bar{A}_x/di = -v(\bar{I}\bar{A})_x$.

4.4. Покажите, что выражения для дисперсии настоящей стоимости смешанного страхования на срок n лет с выплатой размера единица, определенные в формулах (4.2.10) и (4.2.13), тождественны.

4.5. Пусть Z_1 и Z_2 — случайные величины, введенные в формуле (4.2.11).

(a) Покажите, что $\lim_{n\to 0} \mathbf{Cov}(Z_1, Z_2) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{Cov}(Z_1, Z_2) = 0$.

(b) Выведите неявное уравнение для срока n, при котором минимизируется $\mathbf{Cov}(Z_1,Z_2)$.

(c) Выведите формулу для минимума в п. (b).

(d) Упростите формулы в п.п. (b) и (c) для случая, когда интенсивность смертности является постоянной μ.

4.6. Предположим, что смертность описывается формулой $l_x = 100 - x$ для $0 \leqslant x \leqslant 100$ и что интенсивность начисления процента равна $\delta = 0{,}05$.

(a) Вычислите $\bar{A}^{1}_{40:\overline{25|}}$.

(b) Определите актуарную настоящую стоимость страхования сроком на 25 лет с выплатой в случае смерти в момент t, равной $b_t = e^{0{,}05t}$, для лица, возраст которого в момент заключения договора равен 40 лет.

4.7. Рассматривая функцию дожития Муавра с $\omega = 100$ и $i = 0{,}10$, вычислите

(a) $\bar{A}^{1}_{30:\overline{10|}}$,

(b) дисперсию актуарной настоящей стоимости выплат в момент заключения договора из п. (a).

4.8. Если $\delta_t = 0{,}2/(1+0{,}05t)$ и $l_x = 100 - x$ для $0 \leqslant x \leqslant 100$, то вычислите

(a) актуарную настоящую стоимость и дисперсию настоящей стоимости выплат для договора бессрочного страхования на случай смерти, заключенного в возрасте x лет,

(b) $(\bar{I}\bar{A})_x$.

4.9. (a) Покажите, что $\bar{A}_x$ является производящей функцией моментов с.в. T, продолжительности предстоящей жизни лица (x), вычисленной при интенсивности начисления процента $-\delta$.

(b) Покажите, что если с.в. T имеет гамма-распределение с параметрами α и β, то $\bar{A}_x = (1+\delta/\beta)^{-\alpha}$.

4.10. Пусть $b_t = t$, $\mu_x(t) = \mu$ и $\delta_t = \delta$ для всех $t > 0$. Выведите выражения для

(a) $(\bar{I}\bar{A})_x = \mathbf{E}[b_T v^T]$, (b) $\mathbf{D}[b_T v^T]$.

4.11. Пусть с.в. Z является настоящей стоимостью страхования на случай смерти с выплатой размера единица в момент смерти для лица (x). Если $\delta = 0{,}05$ и $\mu_x(t) = 0{,}01$, то

(a) найдите выражение для функции плотности с.в. Z,

(b) постройте график функции плотности с.в. Z,

(c) вычислите величины $\bar{A}_x = \mathbf{E}[Z]$ и $\mathbf{D}[Z]$.

4.12. Пусть с.в. Z является настоящей стоимостью смешанного страхования на срок n лет (см. разд. 4.2.2). Выразите функцию распределения с.в. Z в терминах функции распределения с.в. T.

4.13. Пусть с.в. Z определена, как в упр. 4.12. Если $\delta = 0{,}05$, $\mu_x(t) = 0{,}01$ и $n = 20$, то

(a) найдите функцию распределения с.в. Z,

(b) постройте график функции распределения с.в. Z,

(c) вычислите $\bar{A}_{x:\overline{n}|} = \mathbf{E}[Z]$, используя распределение с.в. Z [указание: воспользуйтесь дополнением к функции распределения].

К разделу 4.3

4.14. Для $l_x = 100 - x$ при $0 \leqslant x \leqslant 100$ и $i = 0{,}05$ вычислите

(a) $A_{40:\overline{25}|}$, (b) $(IA)_{40}$.

4.15. Покажите, что $A_{x:\overline{n}|} = A^{1}_{x:\overline{m}|} + v^m\, {}_m p_x\, A_{x+m:\overline{n-m}|}$ при $m < n$, и дайте словесную интерпретацию этого результата.

4.16. Если $A_x = 0{,}25$, $A_{x+20} = 0{,}40$ и $A_{x:\overline{20}|} = 0{,}55$, то вычислите

(a) $A_{x:\overset{1}{\overline{20}|}}$, (b) $A^{1}_{x:\overline{20}|}$.

4.17. (a) Опишите выплаты по договору страхования, актуарная настоящая стоимость которого выражается символом $(IA)_{x:\overline{m}|}$.

(b) Выразите актуарную настоящую стоимость из п. (a) с помощью символов, приведенных в табл. 4.2.1 и 4.3.1.

4.18. В условиях примера 4.3.2 пусть E_k обозначает ожидаемый размер фонда через k лет после его учреждения и сразу же после выплаты в связи со смертью участника, причем $E_0 = (100)(1000A_{30}) = 10248{,}35$.

(a) Начиная с формулы (4.3.10), выведите прямое рекуррентное уравнение

$$E_k = 1{,}06E_{k-1} - 100\,000\, {}_{k-1|}q_{30}.$$

(b) Используйте рекуррентную формулу из п. (a), чтобы проверить, что $E_5 = 12\,762{,}58$.

К разделу 4.4

4.19. Рассмотрим временну́ю шкалу, разбитую на интервалы длины $1/m$, единицей в которой является один год. Рассматривается договор бессрочного страхования на случай смерти с выплатой суммы размера 1 в конце того из указанных интервалов, в котором произошла смерть. Пусть k обозначает число полных страховых лет, прожитых до момента смерти, и пусть j — число полных интервалов длины $1/m$, прожитых в том году, в котором наступила смерть.

(a) Какова функция настоящей стоимости для такого страхового договора?

(b) Выведите формулу, аналогичную формуле (4.4.2), для актуарной настоящей стоимости $A_x^{(m)}$ такого страхования.

(c) Покажите с помощью алгебраических выкладок, что в предположении равномерности распределения смертей в годичных возрастных интервалах $A_x^{(m)} = (i/i^{(m)})A_x$.

4.20. Покажите, что в предположении неизменности интенсивности смертности в промежутке между целыми возрастами

$$\bar{A}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}{}_k p_x\, \mu_x(k)\, \frac{i + q_{x+k}}{\delta + \mu_x(k)},$$

где $\mu_x(k) = -\ln p_{x+k}$.

К разделу 4.5

4.21. (a) Покажите, что соотношение (4.2.6), выписанное на основе агрегативных таблиц смертности, можно переписать в виде

$$\bar{A}_x = \frac{1}{{}_x p_0\, v^x} \int_x^{\infty} v^y\, {}_y p_0\, \mu(y)\, dy, \qquad x \geqslant 0.$$

(b) Продифференцируйте формулу п. (a), чтобы получить формулу (4.5.1),

$$\frac{d\bar{A}_x}{dx} = [\mu(x) + \delta]\bar{A}_x - \mu(x), \qquad x \geqslant 0.$$

(c) Воспользовавшись той же техникой, покажите, что

$$\frac{d\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}}{dx} = [\mu(x) + \delta]\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} + \mu(x+n)A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} - \mu(x), \qquad x \geqslant 0.$$

4.22. Решите дифференциальное уравнение (4.5.1) следующими способами:
(a) используйте интегрирующий множитель $\exp[-\int_y^x [\delta + \mu(z)]\, dz]$, чтобы получить

$$\bar{A}_y = \int_y^{\infty} \mu(x) \exp\left\{ -\int_y^x [\delta + \mu(z)]\, dz \right\} dx,$$

(b) используйте интегрирующий множитель $e^{-\delta x}$, чтобы получить

$$\bar{A}_y = \int_y^{\infty} \mu(x) v^{x-y} (1 - \bar{A}_x)\, dx.$$

К различным темам главы

4.23. Найдите актуарную настоящую стоимость для договора двойной страховой защиты до возраста 65 лет, который предусматривает выплату в размере двух единиц в случае смерти до 65 лет и выплату одной единицы после 65 лет, пользуясь обозначениями табл. 4.3.1. Мы предполагаем, что выплаты производятся в конце года, в котором произошла смерть.

4.24. Страховой договор заключен в возрасте 20 лет со следующей схемой выплат на случай смерти, производимых в момент смерти:

Возраст	Выплаты на случай смерти
20	1 000
21	2 000
22	4 000
23	6 000
24	8 000
25–40	10 000
41 и более	50 000

Вычислите актуарную настоящую стоимость, опираясь на Иллюстративную таблицу смертности, в предположении равномерности распределения смертей на каждом годичном возрастном интервале и при $i = 0{,}05$. [Указание. Обратная рекуррентная формула для актуарной настоящей стоимости будет включать функцию $c(x)$, которая строится, исходя из приведенной выше таблицы.]

4.25. (a) Определите, будет ли постоянный рост интенсивности смертности влиять на A_x так же, как такой же рост интенсивности начисления процента.

(b) Покажите, что если вероятность смерти q_{x+n} увеличивается и становится равной $q_{x+n} + c$, то величина A_x также увеличивается на $cv^{n+1}{}_np_x(1 - A_{x+n+1})$.

4.26. Актуарная настоящая стоимость для модифицированного договора страхования на дожитие с выплатой размера 1000, заключенного с лицом в возрасте x лет сроком на n лет, равна 700, если в случае смерти в течение первых n лет предусмотрена выплата, равная этой актуарной настоящей стоимости, или 650, если выплаты не предусмотрено.

(a) Вычислите актуарную настоящую стоимость для модифицированного договора страхования на дожитие с выплатой размера 1000, заключенного с лицом в возрасте x лет сроком на n лет, если в случае смерти, наступившей в этот период, необходимо выплатить $100\,k\%$ актуарной настоящей стоимости.

(b) Для договора страхования на дожитие из п. (a) найдите дисперсию настоящей стоимости в момент заключения договора в терминах актуарных настоящих стоимостей для договоров страхования на дожитие и договоров срочного страхования на случай смерти.

4.27. Производитель оборудования продает свою продукцию с пятилетней гарантией, согласно которой покупателю возвращается сумма, пропорциональная первоначальной продажной цене, если оборудование выйдет из строя в течение 5 лет. Например, если поломка происходит через $3\frac{3}{4}$ лет после приобретения, то возвращается 25% продажной цены. Изучение статистики показывает, что вероятность поломки нового оборудования в течение первого года равна 0,2, в течение второго, третьего и четвертого годов — 0,1 в каждый и в течение пятого года — 0,2.

(a) Предполагая, что моменты поломки равномерно распределены в каждом годичном интервале, считая с момента покупки, определите долю продажной цены, которая равна актуарной настоящей стоимости такой гарантии. Считайте, что $i = 0{,}10$.

(b) Если бы оговоренный в гарантии возврат денег осуществлялся в виде скидки на продажную цену нового оборудования с пятилетней гарантией, изменился ли бы ответ на вопрос п. (a)?

4.28. Предположим, что с.в. $T(x)$ имеет плотность

$$f_{T(x)}(t) = \frac{2}{10\sqrt{2\pi}}\, e^{-t^2/200}, \qquad t > 0,$$

и $\delta = 0{,}05$. Покажите, что

(a) $\bar{A}_x = 2e^{0{,}125}[1 - \Phi(0{,}5)] = 0{,}6992$,

(b) ${}^2\bar{A}_x = 2e^{-0{,}5}[1 - \Phi(1)] = 0{,}5232$,

(c) $\mathbf{D}[Z] = 0{,}0343$, где $Z = v^T$,

(d) $\xi_Z^{0{,}5} = 0{,}7076$ [указание: воспользуйтесь рис. 4.2.1],

(e) $v^{\mathring{e}_x} = 0{,}6710 < 0{,}6992 = \bar{A}_x$.

4.29. Обобщите вывод упр. 4.28(e), проверив, что если $\delta > 0$, то $v^{\mathring{e}_x} \leqslant \bar{A}_x$. [Указание. Воспользуйтесь неравенством Иенсена из разд. 1.3 при $u'' > 0$.]

4.30. Для бессрочного страхования на случай смерти выплата b_t равна 0 или 1 для каждого $t \geqslant 0$. Проводя вычисления для интенсивности начисления процента δ_t

(a) выразите функцию дисконтирования в терминах δ_t,

(b) выразите с.в. настоящей стоимости Z в терминах с.в. T,

(c) покажите, что Z^j при интенсивности начисления процента δ_t равна Z при интенсивности начисления процента $j\delta_t$.

Упражнения с использованием компьютера

4.31. Расширьте вашу Иллюстративную таблицу смертности, введя в нее постоянную процентную ставку i и частоту страховых выплат m. Было бы полезно включить в нее также рассчитанные при этих данных δ, $d^{(m)}$, $i^{(m)}$, d и v.

4.32. Вычислите набор величин $\ddot{a}_{\overline{n|}}$, $n = 1, 2, \ldots, 100$, при $i = 0{,}06$, воспользовавшись прямой рекуррентной формулой (3.5.20). [Указание. Обратитесь к упр. 3.25 или воспользуйтесь соотношением $\ddot{a}_{\overline{n+1|}} = 1 + v\ddot{a}_{\overline{n|}}$.]

4.33. (a) Подставляя данные из вашей Иллюстративной таблицы смертности в обратную рекуррентную формулу (4.3.10) при подходящем начальном значении, вычислите $1000A_x$ для x от 13 до 140 при процентной ставке 0,06.

(b) Сравните полученные вами значения со значениями, приведенными в приложении 2А.

4.34. (a) Воспользуйтесь формулой (4.3.3) и вашей Иллюстративной таблицей смертности для определения величин $A^1_{20:\overline{20|}}$ и ${}^2A^1_{20:\overline{20|}}$ при $i = 0{,}06$.

(b) Какова дисперсия случайной величины настоящей стоимости для страхового договора на срок 20 лет с выплатой размера 100 000, заключенного с лицом (20)?

4.35. (a) Используя алгебраические или вероятностные соображения, проверьте следующую обратную рекуррентную формулу для страхового договора сроком на n лет с выплатой размера 1:

$$A^1_{x:\overline{n|}} = vq_x - v^{n+1}{}_np_x\, q_{x+n} + vp_x\, A^1_{x+1:\overline{n|}}.$$

(b) Определите подходящее для использования в этой формуле начальное значение.

(c) Используя вашу Иллюстративную таблицу смертности при $i = 0{,}06$, вычислите актуарную настоящую стоимость для страхового договора, заключенного сроком на 10 лет с лицами возрастов $x = 13, \ldots, 130$ лет.

4.36. (a) Воспользуйтесь рекуррентным соотношением п. (g) из заключительной части разд. 4.3 и вашей Иллюстративной таблицей смертности для вычисления $(IA)_{28}$ при $i = 0{,}06$.

(b) Измените рекуррентную формулу из п. (a) так, чтобы получить рекуррентную формулу для $(I\bar{A})_x$, и определите для нее начальное значение.

(c) Измените рекуррентную формулу из п. (b) так, чтобы получить рекуррентную формулу для $(\bar{I}\bar{A})_x$, и определите для нее начальное значение.

(d) Выведите частные случаи формул пп. (b) и (c) в предположении равномерной распределенности смертей на годичном возрастном интервале.

4.37. Воспользуйтесь вашей Иллюстративной таблицей смертности для проверки численных решений пп. (a) и (b) примера 4.2.4. [Указание. Выберите в распределении Мейкема значения параметров $b = 0{,}00$ и $A = 0{,}04$, возьмите $i = e^{0{,}10} - 1$ и примените рекуррентную формулу п. (d) из заключительной части разд. 4.3. Помните, что страховая выплата в примере 4.2.4 производится в момент смерти.]

4.38. (a) Применяя алгебраические или вероятностные соображения, проверьте следующую обратную рекуррентную формулу для актуарной настоящей стоимости смешанного страхования до возраста y с выплатами размера 1, в котором выплата на случай смерти осуществляется в момент смерти:

$$\bar{A}_{x:\overline{y-x|}} = \bar{A}_{x:\overline{1|}} + vp_x\bar{A}_{x+1:\overline{y-(x+1)|}}, \qquad x = 0, 1, \ldots, y-1.$$

(b) Определите подходящее для использования в этой формуле начальное значение.

(c) Воспользуйтесь вашей Иллюстративной таблицей смертности и предположениями, что распределение смертей в каждом годичном возрастном интервале равномерно и $i = 0{,}06$, для вычисления актуарной настоящей стоимости смешанного страхования до возраста 65 с выплатами размера 1, в котором выплата на случай смерти осуществляется в момент смерти, если договор заключается с лицом возраста $x = 13, \ldots, 64$ лет.

(d) Применяя алгебраические или вероятностные соображения, проверьте следующую обратную рекуррентную формулу для актуарной настоящей стоимости смешанного страхования на срок n лет с выплатами размера 1, по которому выплата на случай смерти осуществляется в момент смерти:

$$\bar{A}_{x:\overline{n|}} = \bar{A}_{x:\overline{1|}} + v^n{}_np_x(1 - vp_{x+n} - \bar{A}^1_{x+1:\overline{n|}}) + vp_x\,\bar{A}_{x+1:\overline{n|}}, \qquad x = 0, 1, \ldots, \omega - 1.$$

4.39. Пусть с.в. Z является настоящей стоимостью смешанного страхования сроком на 20 лет с размером выплат 100 000, по которому выплата на случай смерти производится в момент смерти. Рассчитайте среднее и дисперсию с.в. Z на основе закона Мейкема с параметрами $A = 0{,}001$, $B = 0{,}00001$, $c = 1{,}10$ и $\delta = 0{,}05$ из вашей Иллюстративной таблицы смертности.

5

СТРАХОВЫЕ АННУИТЕТЫ

5.1. Введение

В предыдущей главе мы рассматривали выплаты, обусловленные наступлением смерти, что предусматривается различными видами страхования жизни. В настоящей главе мы будем изучать выплаты, обусловленные дожитием, что предусматривается различными видами страховых аннуитетов. *Страховым аннуитетом* называется серия выплат, производимых непрерывно или через равные промежутки времени (такие, как месяц, квартал, год), пока данное лицо живо[1]. Выплаты могут быть временными, т. е. производиться определенное количество лет, или пожизненными. Выплаты могут начинаться сразу или, напротив, аннуитет может быть отсроченным. Выплаты могут производиться в начале (*аннуитеты пренумерандо*) или в конце (*аннуитеты постнумерандо*) упомянутых выше промежутков.

Поскольку в теории процента исследуются *финансовые аннуитеты*, читатель должен быть до некоторой степени знаком с терминологией, обозначениями и теорией аннуитетов. Теория страховых аннуитетов похожа на теорию финансовых аннуитетов, но в ней условием выплаты выступает дожитие до определенного срока. Это условие встречалось в гл. 4 в связи со страхованием на дожитие и выплатой на случай дожития.

Страховые аннуитеты играют важную роль в операциях страхования жизни. Как мы увидим в следующей главе, приобретение договора страхования жизни происходит обычно на условиях выплаты страховщику аннуитета премий, а не одной единственной премии. Сумма, выплачиваемая в момент наступления страхового случая, может быть преобразована с помощью специального соглашения в некоторый страховой аннуитет для выгодоприобретателя. Некоторые виды страхования жизни существенно развивают это соображение и вместо крупной единовременной суммы, выплачиваемой на случай смерти, предусматривают определенные виды периодических выплат. Это могут быть, например, ежемесячные выплаты тому из супругов, который пережил другого, или страхователям, вышедшим на пенсию.

Аннуитеты играют еще более важную роль в пенсионных системах. Так, пенсионная схема может рассматриваться как система приобретения отсроченных страховых аннуитетов (выплачиваемых после выхода на пенсию), платой за которые является определенный вид срочного аннуитета, образованного взносами в пенсионную систему в течение периода трудовой деятельности. Этот срочный аннуитет может состоять из взносов переменной величины и их размер может зависеть не только от того, какой начисляется процент, или от динамики смертности, но и от

---

[1] В дальнейшем под аннуитетом понимается как серия выплат, так и договор, согласно которому эта серия выплат осуществляется. — *Прим. ред.*

разных других факторов, таких, как увеличение заработной платы или выход из пенсионной схемы по иным причинам, чем смерть.

Страховые аннуитеты играют важную роль также в страховании на случай потери трудоспособности в связи с производственной травмой или профессиональным заболеванием. При страховании на случай потери трудоспособности следует рассматривать возможность прекращения выплат при восстановлении трудоспособности. При выплатах тому из супругов, который пережил другого, выплаты могут прекратиться по заключении нового брака.

В настоящей главе мы поступаем так же, как в гл. 4, и выражаем настоящую стоимость аннуитетных выплат как функцию с.в. T, которая обозначает продолжительность предстоящей жизни лица, получающего аннуитет. Мы сможем изучать свойства распределения случайной величины этой настоящей стоимости. Ее математическое ожидание, по-прежнему называемое актуарной настоящей стоимостью, можно вычислять разными способами, используя либо интегрирование по частям, либо суммирование по частям в зависимости от того, какое множество выплат рассматривается — непрерывное или дискретное. Результат этих вычислений допускает полезную интерпретацию и приводит к иному методу расчета актуарных настоящих стоимостей, который называется *методом текущих платежей*.

Как и в предыдущих главах, посвященных страхованию жизни, если не оговорено противное, мы будем предполагать, что эффективная годовая процентная ставка i (или соответствующая ей интенсивность начисления процента δ) постоянна. В большей части настоящей главы мы будем опираться на данные из агрегативных таблиц смертности и будем специально отмечать те ситуации, где использование селекционных таблиц смертности приводит к другим результатам.

В большинстве приложений, развиваемых в настоящей главе, выплаты по аннуитетам продолжаются, пока лицо сохраняет определенный статус. Однако потенциальные приложения рассматриваемой теории существенно шире. Она может применяться к любому множеству периодических выплат, осуществление или неосуществление которых обусловлено случайностью. Примеры некоторых таких приложений содержатся в последующих главах, в которых рассматриваются модели для групп лиц или модели выбытия по многим причинам.

5.2. Непрерывно выплачиваемые страховые аннуитеты

Мы начнем рассмотрение с аннуитетов с непрерывными выплатами (*непрерывных аннуитетов*) размера (интенсивности) 1 в год[1]. Конечно, это абстрактная модель, но она познакомит нас с математическими методами, а с практической точки зрения будет хорошим приближением для аннуитетов с ежемесячными выплатами. *Бессрочный* (*пожизненный*) *страховой аннуитет* предусматривает выплаты до момента смерти. Поэтому настоящая стоимость всех выплат равна $Y = \bar{a}_{\overline{T|}}$ для $T \geqslant 0$, где с.в. T обозначает продолжительность предстоящей жизни лица (x). Функция распределения с.в. Y может быть получена из функции распределения с.в. T следующим образом:

---

[1]Применительно к непрерывным выплатам мы будем употреблять термин «интенсивность», чтобы подчеркнуть, что речь идет о линейной функции роста (см., например, пояснение после формулы (5.2.4), а также разд. 13.1 и 13.4). — *Прим. ред.*

$$F_Y(y) = \mathbf{P}(Y \leqslant y) = \mathbf{P}(\bar{a}_{\overline{T|}} \leqslant y) = \mathbf{P}(1 - v^T Y \leqslant \delta y) = \mathbf{P}(v^T \geqslant 1 - \delta y)$$
$$= \mathbf{P}\left[T \geqslant \frac{-\ln(1-\delta y)}{\delta}\right] = F_T\left(\frac{-\ln(1-\delta y)}{\delta}\right) \quad \text{для} \quad 0 < y < \frac{1}{\delta}. \qquad (5.2.1)$$

Отсюда мы получаем следующее выражение для функции плотности с.в. Y:

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} F_T\left(\frac{-\ln(1-\delta y)}{\delta}\right)$$
$$= \frac{f_T([-\ln(1-\delta y)]/\delta)}{1-\delta y} \quad \text{при} \quad 0 < y < \frac{1}{\delta}. \qquad (5.2.2)$$

Функция распределения с.в. Y зависит от распределения с.в. T, но должна быть похожа на функцию распределения, показанную на рис. 5.2.1(a) в конце этого раздела.

Актуарная настоящая стоимость бессрочного страхового аннуитета с непрерывными выплатами обозначается через $\bar{a}_x$, где индекс x справа указывает, что действие аннуитета прекращается в момент смерти лица (x) и что распределение с.в. $T(x)$ может зависеть от информации, доступной в возрасте x. При использовании агрегативных таблиц смертности функция плотности с.в. T имеет вид ${}_tp_x\, \mu(x+t)$, и актуарную настоящую стоимость можно рассчитывать по формуле

$$\bar{a}_x = \mathbf{E}[Y] = \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{t|}}\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt. \qquad (5.2.3)$$

Интегрируя по частям и полагая $f(t) = \bar{a}_{\overline{t|}}$, $dg(t) = {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt$, $g(t) = -{}_tp_x$ и $df(t) = v^t\, dt$, мы получаем

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty v^t\, {}_tp_x\, dt = \int_0^\infty {}_tE_x\, dt. \qquad (5.2.4)$$

Можно считать, что этот интеграл описывает мгновенные выплаты размера $1\,dt$, производимые в момент времени t, дисконтированные в соответствии с начисляемыми процентами к моменту времени 0 с помощью умножения на величину v^t, а затем умноженные на величину ${}_tp_x$, чтобы учесть вероятность того случайного события, что выплата производится в момент времени t. Это актуарная настоящая стоимость бессрочного страхового аннуитета в форме текущих платежей. В общем случае техника текущих платежей для определения актуарной настоящей стоимости (АНС) аннуитета дает формулу

$$\text{АНС} = \int_0^\infty v^t\, \mathbf{P}[\text{выплата производится в момент времени } t]$$
$$\times\, [\text{интенсивность выплат в момент времени } t]\, dt. \qquad (5.2.5)$$

Перепишем формулу (5.2.4), выделяя ту часть интеграла, которая относится к изменению t от 0 до 1. Мы получим

$$\bar{a}_x = \int_0^1 v^t\, {}_tp_x\, dt + \int_1^\infty v^t\, {}_tp_x\, dt = \bar{a}_{x:\overline{1|}} + vp_x \int_0^\infty v^s\, {}_sp_{x+1}\, ds = \bar{a}_{x:\overline{1|}} + vp_x\, \bar{a}_{x+1}. \qquad (5.2.6)$$

Использованное здесь обозначение $\bar{a}_{x:\overline{1|}}$ для актуарной настоящей стоимости вводится ниже в формуле (5.2.11). Выражение (5.2.6) является примером обратной рекуррентной формулы, впервые появившейся в разд. 3.5 и более подробно исследованной в разд. 4.3. Здесь $u(x) = \bar{a}_x$, $c(x) = \bar{a}_{x:\overline{1}|}$ и $d(x) = vp_x$. Начальным значением, которое используется в случае бессрочного страхового аннуитета, является $\bar{a}_\omega = 0$. Для вычисления величины $c(x)$ имеется несколько способов. Простой способ — использовать формулу трапеции для вычисления интеграла

$$\bar{a}_{x:\overline{1}|} = \int_0^1 v^t\,{}_tp_x\,dt = \int_0^1 v^t\,{}_tp_x\,dt = \frac{1 + vp_x}{2}.$$

Другой подход, основанный на предположении о равномерности распределения моментов смерти в каждом годичном возрастном интервале, рассматривается в разд. 5.4.

Из теории сложных процентов известно, что

$$1 = \delta \bar{a}_{\overline{t}|} + v^t.$$

Это соотношение интерпретируется следующим образом: единичный капитал, инвестированный в настоящий момент, приводит к годовым процентным выплатам величины δ, осуществляемым непрерывно в течение t лет, после чего они прекращаются, а инвестированная сумма возвращается инвестору. Это соотношение справедливо для всех значений t и поэтому выполняется для случайной величины T:

$$1 = \delta\, \bar{a}_{\overline{T}|} + v^T. \tag{5.2.7}$$

Беря математические ожидания, мы получим

$$1 = \delta\, \bar{a}_x + \bar{A}_x. \tag{5.2.8}$$

Эту формулу можно интерпретировать так же, как приведенную выше. Капитал размера 1, инвестированный в настоящий момент, дает годовые процентные выплаты, величина которых равна δ, осуществляемые непрерывно, пока лицо (x) живо, а в момент смерти этого лица они прекращаются и выплачивается сумма величины 1.

Для того чтобы, рассматривая страховой аннуитет с непрерывными выплатами в условиях нашей модели, измерить риск, связанный с отклонениями в смертности, мы должны рассмотреть $\mathbf{D}[\bar{a}_{\overline{T}|}]$. В этом случае

$$\mathbf{D}[\bar{a}_{\overline{T}|}] = \mathbf{D}\left[\frac{1 - v^T}{\delta}\right] = \mathbf{D}\left[\frac{v^T}{\delta^2}\right] = \frac{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}{\delta^2}. \tag{5.2.9}$$

Нетрудно заметить, что, так как $1 = \delta\bar{a}_{\overline{T}|} + v^T$, то $\mathbf{D}[\delta\bar{a}_{\overline{T}|} + v^T] = 0$. Таким образом, для комбинации непрерывного страхового аннуитета с годовыми выплатами δ и страхования на случай смерти с выплатой величины 1 в момент смерти указанный выше риск отсутствует.

Пример 5.2.1. В предположении, что интенсивность смертности μ и интенсивность начисления процента δ постоянны, вычислим

(a) $\bar{a}_x = \mathbf{E}[\bar{a}_{\overline{T}|}]$, (b) $\mathbf{D}[\bar{a}_{\overline{T}|}]$, (c) вероятность того, что $\bar{a}_{\overline{T}|}$ превзойдет $\bar{a}_x$.

Решение. (a) $\bar{a}_x = \displaystyle\int_0^\infty v^t\,{}_tp_x\,dt = \int_0^\infty e^{-\delta t}\,e^{-\mu t}\,dt = \frac{1}{\delta + \mu}$.

(b) $\bar{A}_x = 1 - \delta\bar{a}_x = \dfrac{\mu}{\delta + \mu}$, ${}^2\bar{A}_x = \dfrac{\mu}{2\delta + \mu}$ по правилу моментов и

$$\mathbf{D}[\bar{a}_{\overline{T}|}] = \frac{1}{\delta^2}\left[\frac{\mu}{2\delta + \mu} - \left(\frac{\mu}{\delta + \mu}\right)^2\right] = \frac{\mu}{(2\delta + \mu)(\delta + \mu)^2}.$$

(c) $\mathbf{P}(\bar{a}_{\overline{T}|} > \bar{a}_x) = \mathbf{P}\left(\frac{1-v^T}{\delta} > \bar{a}_x\right) = \mathbf{P}\left(T > -\frac{1}{\delta}\ln\frac{\mu}{\delta+\mu}\right) = {}_{t_0}p_x = \left(\frac{\mu}{\delta+\mu}\right)^{\mu/\delta}$,

где $t_0 = -\dfrac{1}{\delta}\ln\dfrac{\mu}{\delta+\mu}$. ▼

Перейдем к рассмотрению срочных и отсроченных страховых аннуитетов. Настоящая стоимость случайной величины, выражающей выплаты по *страховому аннуитету со сроком выплат n лет* (*срочному аннуитету*) с ежегодными выплатами размера 1, осуществляемыми непрерывно, пока лицо (x) живо,но не более n лет, имеет вид

$$Y = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T}|}, & 0 \leqslant T < n, \\ \bar{a}_{\overline{n}|}, & T \geqslant n. \end{cases} \tag{5.2.10}$$

Распределение с.в. Y в этом случае является распределением смешанного типа. В частности, максимальное значение с.в. Y не превосходит величины $\bar{a}_{\overline{n}|}$ и вероятность события $\{T \geqslant n\}$, когда с.в. Y равна $\bar{a}_{\overline{n}|}$, $\mathbf{P}(T \geqslant n) = {}_np_x$, положительна. Типичная функция распределения такой случайной величины показана на рис. 5.2.1(b).

Актуарная настоящая стоимость страхового аннуитета со сроком выплат n лет обозначается через $\bar{a}_{x:\overline{n}|}$ и равняется

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \mathbf{E}[Y] = \int_0^n \bar{a}_{\overline{t}|}\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt + \bar{a}_{\overline{n}|}\, {}_np_x. \tag{5.2.11}$$

Интегрирование по частям дает

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t\, {}_tp_x\, dt. \tag{5.2.12}$$

Это актуарная настоящая стоимость страхового аннуитета со сроком выплат n лет. В нее входят мгновенная выплата размера $1\,dt$, производимая в момент времени t, дисконтированная в соответствии с начисляемым процентом к моменту времени 0 посредством умножения на величину v^t, а затем умноженная на ${}_tp_x$, чтобы учесть вероятность того, что выплата производится в момент t, причем t изменяется от 0 до n. После момента n выплаты не производятся, так что вероятность этих выплат равна нулю.

Здесь применяется такая же рекуррентная формула, как в (5.2.6), с $u(x) = \bar{a}_{x:\overline{y-x}|}$ и с такой же функцией $c(x)$, которая, как теперь видно, есть $\bar{a}_{x:\overline{1}|}$. Здесь $n = y - x$. Единственное, что нам надо изменить, — начальное значение: в качестве него мы используем $u(y) = \bar{a}_{y:\overline{0}|} = 0$. Другая форма рекуррентной формулы для страхового аннуитета со сроком выплат n лет рассматривается в упр. 5.7.

Возвращаясь к формуле (5.2.10), заметим, что

$$Y = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T}|} = (1-Z)/\delta, & 0 \leqslant T < n, \\ \bar{a}_{\overline{n}|} = (1-Z)/\delta, & T \geqslant n, \end{cases} \tag{5.2.13}$$

где

$$Z = \begin{cases} v^T, & 0 \leqslant T < n, \\ v^n, & T \geqslant n. \end{cases} \tag{5.2.14}$$

В формуле (5.2.14) с.в. Z является настоящей стоимостью смешанного страхования сроком на n лет. Поэтому

$$\mathbf{E}[Y] = \bar{a}_{x:\overline{n}|} = \mathbf{E}\left[\frac{1-Z}{\delta}\right] = \frac{1-\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\delta}, \tag{5.2.15}$$

$$\mathbf{D}[Y] = \frac{\mathbf{D}[Z]}{\delta^2} = \frac{{}^2\bar{A}_{x:\overline{n}|} - (A_{x:\overline{n}|})^2}{\delta^2}. \tag{5.2.16}$$

В терминах настоящих стоимостей аннуитетов формула (5.2.16) имеет вид

$$\mathbf{D}[Y] = \frac{1-2\delta\,{}^2\bar{a}_{x:\overline{n}|} - (1-\delta\bar{a}_{x:\overline{n}|})^2}{\delta^2} = \frac{2}{\delta}(\bar{a}_{x:\overline{n}|} - {}^2\bar{a}_{x:\overline{n}|}) - (\bar{a}_{x:\overline{n}|})^2.$$

Анализ в случае *бессрочного страхового аннуитета, отсроченного на n лет*, аналогичен. Случайная величина Y, равная его настоящей стоимости, определяется формулой

$$Y = \begin{cases} 0 = \bar{a}_{\overline{T}|} - \bar{a}_{\overline{T}|}, & 0 \leqslant T < n, \\ v^n\,\bar{a}_{\overline{T-n}|} = \bar{a}_{\overline{T}|} - \bar{a}_{\overline{n}|}, & T \geqslant n. \end{cases} \tag{5.2.17}$$

Здесь с.в. Y может принимать значения, не превосходящие $(1/\delta) - \bar{a}_{\overline{n}|} = v^n/\delta$, а вероятность того, что она принимает значение, равное нулю, равна $\mathbf{P}(T \leqslant n) = {}_nq_x$. Типичная функция распределения изображена на рис. 5.2.1(c).

Тогда

$$\begin{aligned} {}_{n|}\bar{a}_x = \mathbf{E}[Y] &= \int_n^\infty v^n\,\bar{a}_{\overline{t-n}|}\,{}_tp_x\,\mu(x+t)\,dt \\ &= \int_n^\infty v^n\,\bar{a}_{\overline{s}|}\,{}_{n+s}p_x\,\mu(x+n+s)\,ds = v^n\,{}_np_x\int_0^\infty \bar{a}_{\overline{s}|}\,{}_sp_{x+n}\,\mu(x+n+s)\,ds, \end{aligned}$$

откуда

$${}_{n|}\bar{a}_x = {}_nE_x\bar{a}_{x+n}. \tag{5.2.18}$$

Можно применить другой подход, заметив, что по определению с.в. Y

(Y для бессрочного страхового аннуитета, отсроченного на n лет)
= (Y для бессрочного страхового аннуитета)
− (Y для страхового аннуитета со сроком выплат n лет).

Взяв математические ожидания, мы получим

$${}_{n|}\bar{a}_x = \bar{a}_x - \bar{a}_{x:\overline{n}|}. \tag{5.2.19}$$

Для того чтобы проверить результат, полученный методом текущих платежей, можно применить интегрирование по частям. Поскольку аннуитет будет выплачиваться с момента n при условии, что лицо (x) доживет до этого момента, его актуарную настоящую стоимость можно записать в виде

$${}_{n|}\bar{a}_x = \int_n^\infty v^t\,{}_tp_x\,dt = \int_n^\infty {}_tE_x\,dt. \tag{5.2.20}$$

Чтобы получить обратную рекуррентную формулу для отсроченных аннуитетов с $n = y - x > 1$, заметим, что у нас отсутствует член, соответствующий интегралу по t от 0 до 1. Таким образом, для $u(x) = {}_{y-x|}\bar{a}_x$ при возрастах, меньших чем y, мы имеем $c(x) = 0$ и $d(x) = vp_x$. В качестве начального значения мы возьмем $u(y) = \bar{a}_y$.

Дисперсию с.в. Y для отсроченного аннуитета можно вычислить, например, таким способом:

$$\mathbf{D}[Y] = \int_n^\infty v^{2n}(\bar{a}_{\overline{t-n}|})^2\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt - ({}_{n|}\bar{a}_x)^2$$
$$= v^{2n}\, {}_np_x \int_0^\infty (\bar{a}_{\overline{s}|})^2\, {}_sp_{x+n}\, \mu(x+n+s)\, ds - ({}_{n|}\bar{a}_x)^2$$

(применяем интегрирование по частям)

$$= v^{2n}\, {}_np_x \int_0^\infty 2\bar{a}_{\overline{s}|}\, {}_sp_{x+n}\, ds - ({}_{n|}\bar{a}_x)^2 = \frac{2}{\delta} v^{2n}\, {}_np_x \int_0^\infty (v^s - v^{2s})\, {}_sp_{x+n}\, ds - ({}_{n|}\bar{a}_x)^2$$
$$= \frac{2}{\delta} v^{2n}\, {}_np_x (\bar{a}_{x+n} - {}^2\bar{a}_{x+n}) - ({}_{n|}\bar{a}_x)^2. \tag{5.2.21}$$

Другой вывод этой формулы составляет упр. 5.37.

Перейдем к анализу *страховых аннуитетов с гарантированным периодом выплат n лет*. Это бессрочный страховой аннуитет с гарантией выплат в течение первых n лет, настоящая стоимость выплат по которому имеет вид

$$Y = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{n}|}, & T \leqslant n, \\ \bar{a}_{\overline{T}|}, & T > n. \end{cases} \tag{5.2.22}$$

Типичная функция распределения такой случайной величины изображена на рис. 5.2.1(d), который отражает смешанную природу этого распределения и показывает минимальное значение и верхнюю грань с.в. Y, которые равны соответственно $\bar{a}_{\overline{n}|}$ и $1/\delta$.

Актуарная настоящая стоимость такого аннуитета обозначается через $\bar{a}_{\overline{x:\overline{n}|}}$. Этот символ выбран для того, чтобы подчеркнуть, что выплаты продолжаются до момента $\max[T(x), n]$:

$$\bar{a}_{\overline{x:\overline{n}|}} = \mathbf{E}[Y] = \int_0^n \bar{a}_{\overline{n}|}\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt + \int_n^\infty \bar{a}_{\overline{t}|}\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt$$
$$= {}_nq_x\, \bar{a}_{\overline{n}|} + \int_n^\infty \bar{a}_{\overline{t}|}\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt. \tag{5.2.23}$$

Проведя интегрирование по частям, мы получим

$$\bar{a}_{\overline{x:\overline{n}|}} = \bar{a}_{\overline{n}|} + \int_n^\infty v^t\, {}_tp_x\, dt. \tag{5.2.24}$$

Это — актуарная настоящая стоимость в форме текущих платежей, поскольку в моменты времени от 0 до n выплаты гарантированы, а в более поздние моменты времени выплаты производятся при условии, что лицо (x) дожило до этого момента.

Далее, перепишем Y в виде

$$Y = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{n}|} + 0, & T \leqslant n, \\ \bar{a}_{\overline{n}|} + (\bar{a}_{\overline{T}|} - \bar{a}_{\overline{n}|}), & T > n. \end{cases}$$

В этой записи Y является суммой постоянной $\bar{a}_{\overline{n}|}$ и случайной величины, соответствующей аннуитету, отсроченному на n лет. Таким образом,

$$\begin{aligned}\bar{a}_{\overline{x:\overline{n}|}} &= \bar{a}_{\overline{n}|} + {}_{n|}\bar{a}_x \\ &= \bar{a}_{\overline{n}|} + {}_nE_x\,\bar{a}_{x+n} \qquad [\text{согласно (5.2.18)}] \\ &= \bar{a}_{\overline{n}|} + (\bar{a}_x - \bar{a}_{x:\overline{n}|}) \quad [\text{согласно (5.2.19)}].\end{aligned} \tag{5.2.25}$$

Далее, поскольку $\mathbf{D}[Y - \bar{a}_{\overline{n}|}] = \mathbf{D}[Y]$, дисперсия для страхового аннуитета с гарантированным периодом выплат n лет равна дисперсии аннуитета, отсроченного на n лет, выписанной в формуле (5.2.21).

Обратная рекуррентная формула для $\bar{a}_{\overline{x:\overline{n}|}}$ с фиксированным n-летним периодом гарантированных выплат рассматривается в упр. 5.9.

Аналогом функции

$$\bar{s}_{\overline{n}|} = \int_0^n (1+i)^{n-t}\,dt$$

из теории процента в теории страховых аннуитетов является функция

$$\bar{s}_{x:\overline{n}|} = \frac{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}{{}_nE_x} = \int_0^n \frac{1}{{}_{n-t}E_{x+t}}\,dt, \tag{5.2.26}$$

которая выражает актуарную накопленную стоимость к концу периода действия страхового аннуитета со сроком выплат n лет и с ежегодными выплатами величины 1, которые осуществляются непрерывно до тех пор, пока лицо (x) живо. Такая накопленная (часто говорят, что она накоплена благодаря процентам и дожитию) стоимость имеется к моменту достижения возраста $x+n$ при условии, что лицо (x) доживет до этого возраста.

Мы получаем выражение для $d\bar{a}_x/dx$, дифференцируя интеграл в соотношении (5.2.4) и предполагая, что соответствующие вероятности взяты из агрегативных таблиц смертности:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\,\bar{a}_x &= \int_0^\infty v^t\left(\frac{\partial}{\partial x}\,{}_tp_x\right)dt = \int_0^\infty v^t\,{}_tp_x[\mu(x) - \mu(x+t)]\,dt \\ &= \mu(x)\bar{a}_x - \bar{A}_x = \mu(x)\bar{a}_x - (1 - \delta\bar{a}_x).\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dx}\,\bar{a}_x = [\mu(x) + \delta]\,\bar{a}_x - 1. \tag{5.2.27}$$

Интерпретация формулы (5.2.27) такова: скорость изменения актуарной настоящей стоимости с возрастом равна компоненте $\mu(x)\bar{a}_x$, связанной со смертностью, плюс компонента $\delta\bar{a}_x$, связанная с начислением процента, минус 1.

Пример 5.2.2. Предположив, что вероятности берутся из агрегативной таблицы смертности, найдем формулы для

(a) $\dfrac{\partial}{\partial x}\,\bar{a}_{x:\overline{n}|}$, (b) $\dfrac{\partial}{\partial x}\,{}_{n|}\bar{a}_x$.

Решение. (a) Рассуждая так же, как при выводе формулы (5.2.27), мы получаем

$$\frac{\partial}{\partial x}\,\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \mu(x)\bar{a}_{x:\overline{n}|} - \bar{A}^1_{x:\overline{n}|} = \mu(x)\bar{a}_{x:\overline{n}|} - (1 - \delta\bar{a}_{x:\overline{n}|} - {}_nE_x) = [\mu(x)+\delta]\bar{a}_{x:\overline{n}|} - (1 - {}_nE_x).$$

(b) $$\frac{\partial}{\partial n}\,{}_{n|}\bar{a}_x = \frac{\partial}{\partial n}\int_n^\infty v^t\,{}_tp_x\,dt = -v^n\,{}_tp_x.$$ ▼

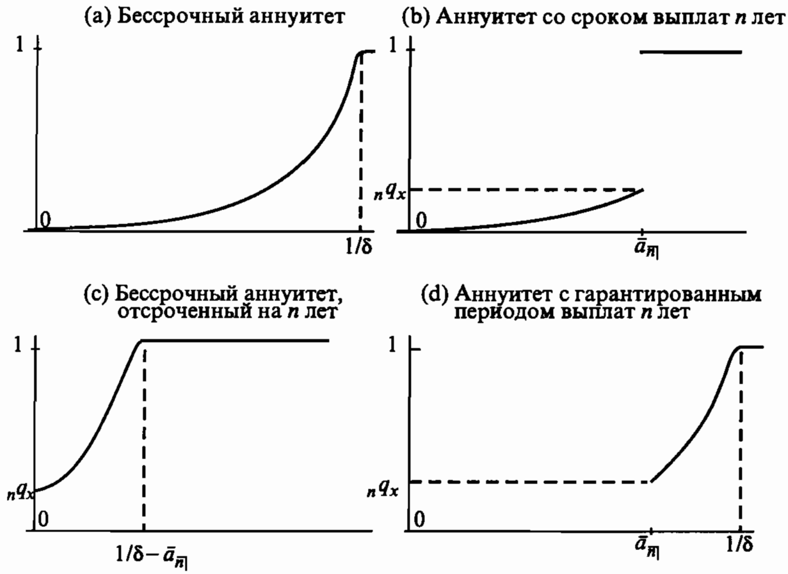


Рис. 5.2.1. Типичные функции распределения случайных величин настоящих стоимостей Y

Таблица 5.2.1. Сводка результатов для непрерывных страховых аннуитетов с интенсивностью выплат 1 в год

Вид аннуитета	Случайная величина настоящей стоимости Y	Актуарная настоящая стоимость $\mathbf{E}[Y]$ равняется величине
Бессрочный страховой аннуитет	$\bar{a}_{\overline{T}\vert}, \quad T \geqslant 0$	$\bar{a}_x = \int_0^\infty v^t\,{}_tp_x\,dt$
Страховой аннуитет со сроком выплат n лет	$\begin{cases}\bar{a}_{\overline{T}\vert}, & 0 \leqslant T < n\\ \bar{a}_{\overline{n}\vert}, & T \geqslant n\end{cases}$	$\bar{a}_{x:\overline{n}\vert} = \int_0^n v^t\,{}_tp_x\,dt$
Бессрочный страховой аннуитет, отсроченный на n лет	$\begin{cases}0, & 0 \leqslant T < n\\ \bar{a}_{\overline{T}\vert} - \bar{a}_{\overline{n}\vert}, & T \geqslant n\end{cases}$	${}_{n\vert}\bar{a}_{x:\overline{n}\vert} = \int_n^\infty v^t\,{}_tp_x\,dt$
Страховой аннуитет с гарантированным периодом выплат n лет	$\begin{cases}\bar{a}_{\overline{n}\vert}, & 0 \leqslant T < n\\ \bar{a}_{\overline{T}\vert}, & T \geqslant n\end{cases}$	$\bar{a}_{\overline{x:\overline{n}\vert}} = a_{\overline{n}\vert} + \int_n^\infty v^t\,{}_tp_x\,dt$

Дополнительные соотношения

$1 = \delta\bar{a}_x + \bar{A}_x$

$1 = \delta\bar{a}_{x:\overline{n}|} + \bar{A}_{x:\overline{n}|}$

${}_{n|}\bar{a}_x = \bar{a}_x - \bar{a}_{x:\overline{n}|}$

$\bar{s}_{x:\overline{n}|} = \dfrac{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}{{}_nE_x} = \int_0^n (1+i)^{n-t}\dfrac{l_{x+t}}{l_{x+n}}\,dt$

В табл. 5.2.1 приведена сводка результатов для непрерывных страховых аннуитетов.

На рис. 5.2.1 изображены типичные функции распределения для нескольких видов непрерывных страховых аннуитетов, которые исследовались в настоящем разделе. Предельные значения и точки разрыва показаны либо на одной, либо на обеих осях.

При $F_Y(0) = 0$, $\mathbf{E}[Y] = \int_0^\infty [1 - F_Y(y)]\,dy$ актуарную настоящую стоимость с.в. Y можно наглядно представить как область, расположенную выше графика функции $z = F_Y(y)$, ниже прямой $z = 1$ и правее прямой $y = 0$. Эта интерпретация демонстрирует связь между актуарной настоящей стоимостью, полученной исходя из определения этой случайной величины, и актуарной настоящей стоимостью в форме текущих платежей.

5.3. Страховые аннуитеты с дискретными выплатами

Теория страховых аннуитетов с дискретными выплатами (*дискретных аннуитетов*) похожа на теорию страховых аннуитетов с непрерывными выплатами, только интегралы заменяются суммами, подынтегральные выражения — слагаемыми, а дифференциалы — разностями. Для непрерывных аннуитетов не существовало различий между выплатами в начале и в конце платежных периодов, т. е. между аннуитетами пренумерандо и постнумерандо. Для аннуитетов с дискретными выплатами это различие существенно, и мы начнем изложение с аннуитетов пренумерандо, поскольку они играют более важную роль в актуарных приложениях. Например, большинство индивидуальных договоров страхования жизни покупаются за счет аннуитета пренумерандо, образованного периодически выплачиваемыми премиями.

Рассмотрим аннуитет, согласно которому в начале каждого года, пока лицо (x) живо, выплачивается сумма размера 1. Его обычно называют *бессрочным страховым аннуитетом пренумерандо*. Случайная величина настоящей стоимости Y для такого аннуитета задается формулой $Y = \ddot{a}_{\overline{K+1}|}$, где случайная величина K является пошаговой продолжительностью предстоящей жизни лица (x). Значения, которые принимает случайная величина Y, дискретны и изменяются от $\ddot{a}_{\overline{1}|} = 1$ до $\ddot{a}_{\overline{\omega-x}|}$, величины, которая меньше $1/d$. С величиной $\ddot{a}_{\overline{k+1}|}$ связана вероятность $\mathbf{P}(K=k) = {}_kp_x\, q_{x+k}$.

Рассмотрим теперь $\ddot{a}_x$, актуарную настоящую стоимость этого аннуитета:

$$\ddot{a}_x = \mathbf{E}[Y] = \mathbf{E}[\ddot{a}_{\overline{K+1}|}] = \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{K+1}|}\, {}_kp_x\, q_{x+k}, \tag{5.3.1}$$

поскольку $\mathbf{P}(K=k) = {}_kp_x\, q_{x+k}$. Применяя суммирование по частям (см. приложение 5), где $\Delta f(k) = {}_kp_x\, q_{x+k} = {}_kp_x - {}_{k+1}p_x$ и $g(k) = \ddot{a}_{\overline{k+1}|}$, и используя соотношения $\Delta g(k) = \Delta \ddot{a}_{\overline{K+1}|} = v^{k+1}$ и $f(k) = -{}_kp_x$, преобразуем формулу (5.3.1) к виду

$$\ddot{a}_x = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\, {}_{k+1}p_x \tag{5.3.2}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} v^k\, {}_kp_x. \tag{5.3.3}$$

Выражение (5.3.3) является актуарной настоящей стоимостью в форме текущих платежей бессрочного страхового аннуитета пренумерандо, где ${}_kp_x$ является вероятностью выплаты размера 1 в момент k.

Начиная с суммы из формулы (5.3.2), мы получаем

$$\ddot{a}_x = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}{}_{k+1}p_x = 1 + vp_x \sum_{k=0}^{\infty} v^k{}_kp_{x+1} = 1 + vp_x\, \ddot{a}_{x+1}. \tag{5.3.4}$$

Это пример обратной рекуррентной формулы, впервые упомянутой в разд. 3.5 и подробнее рассматривавшейся в разд. 4.3 и 5.2. Здесь $u(x) = \ddot{a}_x$, $c(x) = 1$ и $d(x) = vp_x$. Начальным значением, которое должно применяться в случае бессрочного страхового аннуитета, является $\ddot{a}_\omega = 0$.

Из соотношения (5.3.1) мы получаем последовательно

$$\ddot{a}_x = \mathbf{E}[(1 - v^{K+1})/d] = (1 - A_x)/d \tag{5.3.5}$$

и

$$\ddot{a}_x = \ddot{a}_{\overline{\infty}|} - \ddot{a}_{\overline{\infty}|}A_x, \tag{5.3.6}$$

$$1 = d\ddot{a}_x + A_x. \tag{5.3.7}$$

Эту формулу следует сравнить с ее непрерывным аналогом (5.2.8). Формула (5.3.7) показывает, что сумма размера 1, инвестированная в настоящий момент, обеспечивает выплаты размера d единиц в начале каждого года, пока лицо (x) живо, плюс возврат суммы размера 1 в момент смерти лица (x).

Формула для дисперсии выглядит так:

$$\mathbf{D}[\ddot{a}_{\overline{K+1}|}] = \mathbf{D}\left[\frac{1 - v^{K+1}}{d}\right] = \frac{\mathbf{D}[v^{K+1}]}{d^2} = \frac{{}^2A_x - (A_x)^2}{d^2} \tag{5.3.8}$$

(ср. с (5.2.9)).

Случайная величина, равная настоящей стоимости (*срочного*) *страхового аннуитета пренумерандо со сроком выплат n лет* с ежегодной выплатой размера 1, выражается формулой

$$Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{K+1}|}, & 0 \leqslant K < n, \\ \ddot{a}_{\overline{n}|}, & K \geqslant n. \end{cases}$$

Ее актуарной настоящей стоимостью является

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \mathbf{E}[Y] = \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{k+1}|}\, {}_kp_x\, q_{x+k} + \ddot{a}_{\overline{n}|}\, {}_np_x. \tag{5.3.9}$$

Применяя суммирование по частям, соотношение (5.3.9) можно преобразовать к виду

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k{}_kp_x, \tag{5.3.10}$$

что является актуарной настоящей стоимостью в форме текущих платежей.

Отделяя первое слагаемое и вынося сомножитель vp_x, мы получаем обратную рекуррентную формулу для срочного аннуитета пренумерандо, выплачиваемого до возраста $y = x + n$:

$$\ddot{a}_{x:\overline{y-x}|} = 1 + vp_x\ddot{a}_{x+1:\overline{y-(x+1)}|}. \tag{5.3.11}$$

Эта рекуррентная формула для актуарных настоящих стоимостей совпадает с формулой (5.3.4), за исключением того, что здесь мы используем в качестве начального значения $\ddot{a}_{y:\overline{0}|} = 0$.

Поскольку $Y = (1 - Z)/d$, где

$$Z = \begin{cases} v^{K+1}, & 0 \leqslant K < n, \\ v^n, & K \geqslant n, \end{cases}$$

является случайной величиной настоящей стоимости смешанного страхования с выплатой размера 1 в конце года смерти страхователя или по истечении срока действия договора, имеем

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1 - \mathbf{E}[Z]}{d} = \frac{1 - A_{x:\overline{n}|}}{d} \tag{5.3.12}$$

(ср. с (5.2.15)).

Это соотношение переписывается в виде

$$1 = d\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}\,. \tag{5.3.13}$$

Для вычисления дисперсии мы можем воспользоваться соотношением

$$\mathbf{D}[Y] = \frac{\mathbf{D}[Z]}{d^2} = \frac{{}^2A_{x:\overline{n}|} - (A_{x:\overline{n}|})^2}{d^2}\,. \tag{5.3.14}$$

Для бессрочного страхового аннуитета пренумерандо, отсроченного на n лет, с выплатой размера 1 в начале каждого года, пока лицо (x) живо, начиная с возраста $x + n$ и далее, случайная величина настоящей стоимости Y выражается формулой

$$Y = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant K < n, \\ {}_{n|}\ddot{a}_{\overline{K+1-n}|}, & K \geqslant n, \end{cases}$$

и актуарная настоящая стоимость имеет вид

$$\mathbf{E}[Y] = {}_{n|}\ddot{a}_x = {}_nE_x\, \ddot{a}_{x+n} \tag{5.3.15}$$

$$= \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{n}|} \tag{5.3.16}$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} v^k\, {}_kp_x \tag{5.3.17}$$

(ср. с (5.2.18)–(5.2.20)).

Обратная рекуррентная формула для отсроченного аннуитета пренумерандо с $n = y - x > 1$ совпадает с соответствующей формулой для непрерывного случая, где $c(x) = 0$ и $d(x) = vp_x$. Изменение состоит в том, что в качестве начального значения мы используем актуарную настоящую стоимость аннуитета пренумерандо $u(y) = \ddot{a}_y$.

Дисперсию с.в. Y можно вычислять так же, как это делалось в формуле (5.2.21), и мы приходим к выражению

$$\mathbf{D}[Y] = (2/d)\, v^{2n}{}_np_x(\ddot{a}_{x+n} - {}^2\ddot{a}_{x+n}) + {}_{n|}{}^2\ddot{a}_x - ({}_{n|}\ddot{a}_x)^2. \tag{5.3.18}$$

Перейдем к рассмотрению *страховых аннуитетов пренумерандо с гарантированным периодом выплат n лет.* Это страховой аннуитет, по которому гарантируются выплаты по меньшей мере в течение n лет. Настоящей стоимостью выплат по этому аннуитету является случайная величина

$$Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{n}|}, & 0 \leqslant K < n, \\ \ddot{a}_{\overline{K+1}|}, & K \geqslant n. \end{cases} \tag{5.3.19}$$

В этом случае

$$\ddot{a}_{\overline{x:\overline{n|}}} = \mathbf{E}[Y] = \ddot{a}_{\overline{n|}}\, {}_nq_x + \sum_{k=n}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1|}}\, {}_kp_x\, q_{x+k}, \tag{5.3.20}$$

и это выражение можно переписать, воспользовавшись суммированием по частям, как актуарную настоящую стоимость в форме текущих платежей

$$\ddot{a}_{\overline{x:\overline{n|}}} = \ddot{a}_{\overline{n|}} + \sum_{k=n}^{\infty} v^k\, {}_kp_x. \tag{5.3.21}$$

Это можно переписать в виде

$$\ddot{a}_{\overline{x:\overline{n|}}} = \ddot{a}_{\overline{n|}} + \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{n|}}.$$

Актуарная накопленная стоимость к концу срока действия страхового аннуитета пренумерандо со сроком выплаты n лет и с ежегодными выплатами размера 1, которые производятся, пока лицо (x) живо, обозначается через $\ddot{s}_{x:\overline{n|}}$. Эта величина выражается следующей формулой:

$$\ddot{s}_{x:\overline{n|}} = \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}{{}_nE_x} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{{}_{n-k}E_{x+k}}, \tag{5.3.22}$$

которая аналогична формулам для $\ddot{s}_{\overline{n|}}$ в теории процента.

Соображения, изложенные выше для аннуитетов пренумерандо, можно использовать для аннуитетов постнумерандо, когда выплаты производятся в конце платежных периодов. Например, для *бессрочных страховых аннуитетов постнумерандо* случайная величина настоящей стоимости равна $Y = a_{\overline{K|}}$. В этом случае

$$a_x = \mathbf{E}[Y] = \sum_{k=0}^{\infty} {}_kp_x\, q_{x+k}\, a_{\overline{n|}} \tag{5.3.23}$$

и, применяя суммирование по частям, мы получим актуарную настоящую стоимость в форме текущих платежей:

$$a_x = \sum_{k=1}^{\infty} v^k\, {}_kp_x. \tag{5.3.24}$$

Поскольку с.в. Y равняется $(1 - v^K)/i = [1 - (1+i)v^{K+1}]/i$, взяв математические ожидания, мы получим

$$a_x = \mathbf{E}[Y] = \frac{1 - (1+i)A_x}{i}. \tag{5.3.25}$$

Эту формулу можно переписать в виде $1 = ia_x + (1+i)A_x$. Ее сравнение с формулой (5.3.7) показывает, что процентные выплаты величины i производятся в конце каждого года, пока лицо (x) живо, и что в конце года смерти должны быть выплачены проценты величины i вместе с основной суммой, равной 1. Эта формула важна для налогообложения имущества. Для каждой единицы имущества определим ia_x как *имущество в пожизненном владении* и $(1+i)A_x = 1 - ia_x$ как *остаток*, который, если он предназначен для благотворительной организации, выводится из-под налогообложения.

Анализ прочих видов аннуитетов постнумерандо проводится аналогично. Так же, как это делалось в случае аннуитетов пренумерандо, определяется случайная величина настоящей стоимости. Формулы для актуарной настоящей стоимости выводятся из ее определения и с помощью суммирования по частям. Кроме того, можно получить формулы для дисперсий аннуитетов постнумерандо.

Таблица 5.3.1. Сводка результатов для дискретных страховых аннуитетов с выплатами размера 1 в начале каждого года (аннуитеты-пренумерандо) и в конце каждого года (аннуитеты постнумерандо)

Вид аннуитета	Случайная величина настоящей стоимости Y	Актуарная настоящая стоимость $\mathbf{E}[Y]$ равняется величине
Бессрочный страховой аннуитет		
Пренумерандо	$\ddot{a}_{\overline{K+1}\rceil}, \quad K \geqslant 0$	$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_kp_x$
Постнумерандо	$a_{\overline{K}\rceil}, \quad K \geqslant 0$	$a_x = \sum_{k=1}^{\infty} v^k {}_kp_x$
Страховой аннуитет со сроком выплат n лет		
Пренумерандо	$\begin{cases} \ddot{a}_{\overline{K+1}\rceil}, & 0 \leqslant K < n \\ \ddot{a}_{\overline{n}\rceil}, & K \geqslant n \end{cases}$	$\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k {}_kp_x$
Постнумерандо	$\begin{cases} a_{\overline{K}\rceil}, & 0 \leqslant K < n \\ a_{\overline{n}\rceil}, & K \geqslant n \end{cases}$	$a_{x:\overline{n}\rceil} = \sum_{k=1}^{n} v^k {}_kp_x$
Бессрочный страховой аннуитет, отсроченный на n лет		
Пренумерандо	$\begin{cases} 0, & 0 \leqslant K < n \\ \ddot{a}_{\overline{K+1}\rceil} - \ddot{a}_{\overline{n}\rceil}, & K \geqslant n \end{cases}$	${}_{n\vert}\ddot{a}_x = \sum_{k=n}^{\infty} v^k {}_kp_x$
Постнумерандо	$\begin{cases} 0, & 0 \leqslant K < n \\ a_{\overline{K}\rceil} - a_{\overline{n}\rceil}, & K \geqslant n \end{cases}$	${}_{n\vert}a_x = \sum_{k=n+1}^{\infty} v^k {}_kp_x$
Бессрочный страховой аннуитет с гарантированным периодом выплат n лет		
Пренумерандо	$\begin{cases} \ddot{a}_{\overline{n}\rceil}, & 0 \leqslant K < n \\ \ddot{a}_{\overline{K+1}\rceil}, & K \geqslant n \end{cases}$	$\ddot{a}_{\overline{x:\overline{n}\rceil}} = \ddot{a}_{\overline{n}\rceil} + \sum_{k=n}^{\infty} v^k {}_kp_x$
Постнумерандо	$\begin{cases} a_{\overline{n}\rceil}, & 0 \leqslant K < n \\ a_{\overline{K}\rceil}, & K \geqslant n \end{cases}$	$a_{\overline{x:\overline{n}\rceil}} = a_{\overline{n}\rceil} + \sum_{k=n+1}^{\infty} v^k {}_kp_x$
Дополнительные соотношения		
$1 = d\ddot{a}_x + A_x$,	$A_{x:\overline{n}\rceil} = v\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil} - \ddot{a}_{x:\overline{n-1}\rceil}$,	
$A_x = v\ddot{a}_x - a_x$,	${}_{n\vert}\ddot{a}_x = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil}$,	
$1 = d\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil} + A_{x:\overline{n}\rceil}$,	$\ddot{a}_{\overline{x:\overline{n}\rceil}} = \ddot{a}_{\overline{n}\rceil} + \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil}$,	
$\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil} = 1 + a_{x:\overline{n-1}\rceil}$,	$\ddot{s}_{x:\overline{n}\rceil} = \dfrac{\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil}}{{}_nE_x} = \sum_{k=0}^{n-1}(1+i)^{n-k}\dfrac{l_{x+k}}{l_{x+n}}$.	
$A^1_{x:\overline{n}\rceil} = v\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil} - a_{x:\overline{n}\rceil}$,		

Пример 5.3.1. Выпишем формулы для математического ожидания и дисперсии случайной величины настоящей стоимости срочного страхового аннуитета постнумерандо.

Решение. Начнем с определения случайной величины настоящей стоимости для страхового аннуитета постнумерандо со сроком выплат n лет:

$$Y = \begin{cases} a_{\overline{K}\rceil} = (1 - v^K)/i, & 0 \leqslant K < n, \\ a_{\overline{n}\rceil} = (1 - v^n)/i, & K \geqslant n. \end{cases}$$

Введем две новые случайные величины

$$Z_1 = \begin{cases} (1+i)v^{K+1}, & 0 \leqslant K < n, \\ 0, & K \geqslant n, \end{cases} \quad \text{и} \quad Z_2 = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant K < n, \\ v^n, & K \geqslant n. \end{cases}$$

Заметим, что $Y = (1 - Z_1 - Z_2)/i$ для всех K. Взяв математические ожидания, мы получим

$$\mathbf{E}[Y] = a_{x:\overline{n}|} = \frac{1 - (1+i)A^1_{x:\overline{n}|} - A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}}{i}.$$

Это можно переписать, как мы уже делали при выводе формулы (5.3.13), в виде $1 = ia_{x:\overline{n}|} + iA^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}$. Вычисление дисперсии проводится следующим образом:

$$\mathbf{D}[Y] = \frac{\mathbf{D}[Z_1 + Z_2]}{i^2} = \frac{\mathbf{D}[Z_1] + 2\,\mathbf{Cov}(Z_1, Z_2) + \mathbf{D}[Z_2]}{i^2}.$$

Напомним, что $\mathbf{D}[Z_1] = (1+i)^2[{}^2A^1_{x:\overline{n}|} - (A^1_{x:\overline{n}|})^2]$ и $\mathbf{D}[Z_2] = v^{2n}{}_np_x(1 - {}_np_x)$. Так как $Z_1Z_2 = 0$ для всех K, то $\mathbf{Cov}(Z_1, Z_2) = -(1+i)A^1_{x:\overline{n}|}v^n{}_np_x$. Объединяя эти формулы, получаем

$$\mathbf{D}[Y] = \frac{(1+i)^2[{}^2A^1_{x:\overline{n}|} - (A^1_{x:\overline{n}|})^2] - 2(i+1)A^1_{x:\overline{n}|}v^n{}_np_x + v^{2n}{}_np_x(1 - {}_np_x)}{i^2}. \qquad \blacktriangledown$$

5.4. Страховые аннуитеты с выплатами m раз в год

Выплаты страховых аннуитетов на практике часто осуществляются ежемесячно, ежеквартально или каждые полгода. Согласно Международной системе актуарных обозначений, актуарная настоящая стоимость страхового аннуитета с ежегодными выплатами размера 1, осуществляемыми очередными взносами размера $1/m$ в начале каждой m-й части года, пока лицо (x) живо, обозначается символом $\ddot{a}_x^{(m)}$.

Мы начнем анализ распределения с.в. Y, настоящей стоимости страхового аннуитета пренумерандо, когда выплаты производятся m раз в год, выразив Y в терминах процентной ставки и случайных величин K и $J = \lfloor (T-K)m \rfloor$. Символ «$\lfloor\ \rfloor$» в выражении для J обозначает наибольшее целое число, не превосходящее указанного, так что J является числом целых прожитых m-х частей года, в котором произошла смерть. Для аннуитета пренумерандо в течение каждого из K полных прошлых лет произведено m выплат, а затем $J + 1$ выплат размера $1/m$ в год, когда произошла смерть. Таким образом,

$$Y = \sum_{j=0}^{mK+J} \frac{1}{m} v^{j/m} = \ddot{a}^{(m)}_{\overline{K+(J+1)/m}|} = \frac{1 - v^{K+(J+1)/m}}{d^{(m)}}. \tag{5.4.1}$$

Актуарная настоящая стоимость $\mathbf{E}[Y]$, которую можно определить, пользуясь упр. 4.19, имеет вид

$$\mathbf{E}[Y] = \ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1 - A_x^{(m)}}{d^{(m)}}. \tag{5.4.2}$$

Выражение в форме текущих платежей, которое имеет вид суммы актуарных настоящих стоимостей указанного выше множества выплат имеет вид

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{h=0}^{\infty} v^{h/m}{}_{h/m}p_x. \tag{5.4.3}$$

Снова пользуясь формулой (5.4.1), мы получаем

$$\mathbf{D}[Y] = \frac{\mathbf{D}[v^{K+(J+1)/m}]}{(d^{(m)})^2} = \frac{{}^2A_x^{(m)} - (A_x^{(m)})^2}{(d^{(m)})^2}. \tag{5.4.4}$$

Для того чтобы получить различные соотношения между актуарными настоящими стоимостями для страховых аннуитетов с выплатами m раз в год и с ежегодными выплатами, удобно пользоваться соотношениями (5.3.7) и (5.4.2):

$$1 = d\ddot{a}_x + A_x = d^{(m)}\ddot{a}_x^{(m)} + A_x^{(m)}. \tag{5.4.5}$$

Эти соотношения показывают, что инвестирование суммы размера 1 обеспечивает процентную выплату в начале каждого периода начисления процента плюс возврат суммы размера 1 в конце того периода, когда происходит смерть.

Из двух слагаемых в правой части формулы (5.4.5) мы получаем

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{d}{d^{(m)}}\,\ddot{a}_x - \frac{1}{d^{(m)}}(A_x^{(m)} - A_x) = \ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)}\ddot{a}_x - \ddot{a}_{\overline{\infty}|}^{(m)}(A_x^{(m)} - A_x). \tag{5.4.6}$$

Полученные соотношения можно интерпретировать следующим образом: такой страховой аннуитет с выплатами m раз в год эквивалентен ряду выплат величины, равной настоящей стоимости финансового аннуитета на срок один год, по одному в начале каждого года, пока лицо живо, с возвратом суммы, выплаченной за остаток года смерти после того интервала длины $1/m$ (месячного, квартального или полугодового), в котором смерть произошла. Этот возврат равен разности между стоимостями бессрочного финансового аннуитета[1)] с выплатами m раз в год, начинающегося в конце интервала длины $1/m$, в котором произошла смерть, и аналогичного аннуитета, начинающегося в конце года смерти. С другой стороны, мы можем в силу формулы (5.4.2) выписать соотношение

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1 - A_x^{(m)}}{d^{(m)}} = \ddot{a}_{\overline{\infty}|}^{(m)} - \ddot{a}_{\overline{\infty}|}^{(m)}A_x^{(m)}, \tag{5.4.7}$$

интерпретацию которого мы оставляем читателю.

Замечание. В теории процента вычисления настоящей стоимости аннуитета, у которого периоды между выплатами и периоды фактического начисления процента имеют разную длину, сводятся к вычислению настоящей стоимости аннуитета с платежными периодами и периодами фактического начисления процента одинаковой длины следующими двумя способами. Первый состоит в замене выплат, соответствующих некоторому периоду начисления процента, разовой эквивалентной выплатой (при заданной процентной ставке) в начале или в конце рассматриваемого периода. Выражение для актуарной настоящей стоимости бессрочного страхового аннуитета с выплатами m раз в год, приведенное в формуле (5.4.6), является распространением этого метода на множество выплат, обусловленных случайными событиями. С тех пор, как калькуляторы, где показательная функция вычисляется простым нажатием клавиши, заменили таблицы процентов, для согласования периодов выплат и периодов начисления процента стал предпочтительным второй метод, который использует эквивалентную эффективную процентную ставку в каждый период выплат. Распространение этого второго метода на бессрочные страховые аннуитеты с выплатами m раз в год опирается на таблицы смертности для периодов длины $1/m$ и на эквивалентную эффективную процентную ставку для периода длины $1/m$. Исходя из этого, для расчета актуарной настоящей стоимости бессрочного страхового аннуитета с выплатами m раз в год можно применять рекуррентные соотношения разд. 5.3. Достоинство этого второго подхода состоит в том, что, наряду

[1)] По поводу определения бессрочных финансовых аннуитетов (рент) см. книгу: Гербер Х. Математика страхования жизни. — М.: Мир, 1995, разд. 1.6. — *Прим. ред.*

с предположением о равномерности, которое будет в дальнейшем центральным для нашего изложения, он позволяет использовать другие предположения относительно распределения смертей в каждом годичном возрастном интервале, такие, как предположение о постоянной интенсивности или закон смертности Мейкема.

Предположим теперь, что распределение моментов смерти в течение каждого годичного возрастного интервала равномерно. Это означает, что с.в. S имеет равномерное распределение на отрезке $(0,1)$ и, таким образом, с.в. J равномерно распределена на множестве целых чисел $\{0,1,\ldots,m-1\}$. В упр. 4.19 показано, что тогда

$$A_x^{(m)} = \frac{i}{i^{(m)}} A_x = s_{\overline{1|}}^{(m)} A_x,$$

и в силу формулы (5.4.6) мы имеем

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \ddot{a}_{\overline{1|}}^{(m)} \ddot{a}_x - \frac{s_{\overline{1|}}^{(m)} - 1}{d^{(m)}} A_x. \tag{5.4.8}$$

Формула (5.4.8) показывает, что актуарная настоящая стоимость страхового аннуитета пренумерандо с выплатами m раз в год является разницей между

(a) актуарной настоящей стоимостью страхового аннуитета пренумерандо, выплачиваемого один раз в год, каждой годовой выплаты которого достаточно для оплаты финансового аннуитета на срок 1 год с выплатами размера $1/m$ в начале каждого периода длины $1/m$, и

(b) актуарной настоящей стоимостью страхования с выплатой в конце года смерти, равной коэффициенту при A_x. Можно показать, что в предположении равномерности распределения смертей в каждом годичном возрастном интервале этот коэффициент является актуарной накопленной стоимостью указанных выплат величины $1/m$ для интервалов длины $1/m$ после момента смерти. См. выражение в квадратных скобках в упр. 5.15.

Подставляя $1-d\,\ddot{a}_x$ вместо A_x в (5.4.8) и замечая, что $d^{(m)}\ddot{a}_{\overline{1|}}^{(m)} = d$, мы получим формулу, в которую будут входить только функции, связанные с аннуитетами, а именно,

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1 - s_{\overline{1|}}^{(m)}(1-d\ddot{a}_x)}{d^{(m)}} = s_{\overline{1|}}^{(m)} \ddot{a}_{\overline{1|}}^{(m)} \ddot{a}_x - \frac{s_{\overline{1|}}^{(m)} - 1}{d^{(m)}}. \tag{5.4.9}$$

Другой широко применяемой формулой является

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}. \tag{5.4.10}$$

Этот результат можно получить, предполагая, что функция $v^{k+(j/m)}\,{}_{k+(j/m)}p_x$ является линейной по j для $j = 0,1,2,\ldots,m-1$. В этом случае

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{m} v^{k+(j/m)}\,{}_{k+(j/m)}p_x &= \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{m}\left[\left(1-\frac{j}{m}\right) v^k\,{}_kp_x + \frac{j}{m} v^{k+1}\,{}_{k+1}p_x\right] \\ &= v^k\,{}_kp_x - (v^k\,{}_kp_x - v^{k+1}\,{}_{k+1}p_x)\sum_{j=0}^{m-1}\frac{j}{m^2} \\ &= v^k\,{}_kp_x - \frac{m-1}{2m}(v^k\,{}_kp_x - v^{k+1}\,{}_{k+1}p_x).\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-1}\frac{1}{m}v^{k+(j/m)}{}_{k+(j/m)}p_x$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} v^k{}_kp_x - \frac{m-1}{2m}\sum_{k=0}^{\infty}(v^k{}_kp_x - v^{k+1}{}_{k+1}p_x) = \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}.$$

Заметим, что это предположение не совпадает с предположением линейности функции ${}_tp_x$, которое вытекало бы из равномерности распределения смертей в каждом годичном возрастном интервале. Последовательное применение предположения о равномерности распределения смертей в каждом годичном возрастном интервале приводит именно к таким соотношениям, как (5.4.5). Известно также, что формулы, полученные из (5.4.10), при высокой процентной ставке и низком коэффициенте смертности могут давать искаженные значения стоимостей аннуитетов, например, такие, что $a_{x:\overline{1}|}^{(m)} > a_{\overline{1}|}^{(m)}$ (см. упр. 5.50). По этим причинам соотношения (5.4.8) и (5.4.9) предлагаются в качестве замены широко используемой формулы (5.4.10).

Для удобства записи будем представлять формулу (5.4.9) в виде

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \alpha(m)\ddot{a}_x - \beta(m), \tag{5.4.11}$$

где

$$\alpha(m) = s_{\overline{1}|}^{(m)}\ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)} = \frac{id}{i^{(m)}d^{(m)}} \tag{5.4.12}$$

и

$$\beta(m) = \frac{s_{\overline{1}|}^{(m)} - 1}{d^{(m)}} = \frac{i - i^{(m)}}{i^{(m)}d^{(m)}}. \tag{5.4.13}$$

Заметим, что $\alpha(m)$ и $\beta(m)$ зависят только от m и от процентной ставки и не зависят от возраста. Далее, для $m = 1$ соотношение (5.4.11) является тождеством, в котором $\alpha(1) = 1$ и $\beta(1) = 0$. Кроме того, $\beta(m)$ является коэффициентом при слагаемом, ответственном за прекращение выплат, в формуле (5.4.8). Поэтому последнюю можно записать в виде

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)}\ddot{a}_x - \beta(m)A_x. \tag{5.4.14}$$

Разложение в ряд величин $\alpha(m)$ и $\beta(m)$ рассматривается в упр. 5.41.

Пример 5.4.1. На основе Иллюстративных таблиц смертности с эффективной процентной ставкой в 6% вычислим актуарную настоящую стоимость бессрочного страхового аннуитета пренумерандо с выплатой размера 1000 в месяц для лица, выходящего на пенсию в 65 лет, пользуясь соотношениями (5.4.9) и (5.4.10), а также стандартное отклонение, пользуясь соотношением (5.4.4).

Решение. Имеем

$$\alpha(12) = s_{\overline{1}|}^{(12)}\ddot{a}_{\overline{1}|}^{(12)} = (1{,}02721070)(0{,}97378368) = 1{,}0002810,$$

$$\beta(12) = \frac{s_{\overline{1}|}^{(12)} - 1}{d^{(12)}} = 0{,}46811951,$$

$$\frac{11}{24} = 0{,}45833333.$$

Заметим, что $\alpha(12) \cong 1$, а величина $\beta(12)$ очень близка к числу $11/24$, которое возникает при традиционном приближении.

Пользуясь Иллюстративной таблицей смертности, основанной на формуле (3.7.1), при эффективной процентной ставке 6%, мы получаем

$$\ddot{a}_{65} = 9{,}89693, \qquad A_{65} = 1 - d\ddot{a}_{65} = 0{,}4397965.$$

Далее, $12\,000\ddot{a}_{65}^{(12)}$ можно вычислить следующим образом: исходя из формулы (5.4.11), мы имеем

$$12\,000[\alpha(12)\ddot{a}_{65} - \beta(12)] = 12\,000[(1{,}0002810)(9{,}89693) - 0{,}46811951] = 113\,179,$$

а исходя из формулы (5.4.10) —

$$12\,000\left(\ddot{a}_{65} - \frac{11}{24}\right) = 113\,263.$$

Дисперсия с.в. $12\,000Y = 12\,000(1 - v^{K+(J+1)/12})/d^{(12)}$ равна

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{12\,000}{d^{(12)}}\right)^2 \mathbf{D}[v^{K+1}(1+i)^{1-(J+1)/12}] \\
&\quad= \left(\frac{12\,000}{d^{(12)}}\right)^2 \{\mathbf{E}[v^{2(K+1)}(1+i)^{2(1-(J+1)/12)}] - (\mathbf{E}[v^{(K+1)}(1+i)^{(1-(J+1)/12)}])^2\} \\
&\quad= \left(\frac{12\,000}{d^{(12)}}\right)^2 \left\{{}^2A_{65}\mathbf{E}[(1+i)^{2(1-(J+1)/12)} - \left(\frac{A_{65}i}{i^{(12)}}\right)^2\right\} \\
&\quad= (206\,442{,}14)^2[(0{,}2360299 \times 1{,}055458268) - (0{,}4397965 \times 1{,}02721069)^2] \\
&\quad= 1\,919\,074\,762.
\end{aligned}$$

Это означает, что стандартное отклонение от настоящей стоимости выплат отдельному лицу составляет 43 807, что следует сравнивать с актуарной настоящей стоимостью, равной 113 179. ▼

Для срочных и отсроченных аннуитетов пренумерандо с выплатами m раз в год также можно провести все рассуждения, начиная с анализа случайных величин. Однако если мы хотим лишь найти формулы для актуарных настоящих стоимостей таких аннуитетов, мы можем начать с соотношения (5.4.14), откуда следует, что

$$\begin{aligned}
\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \ddot{a}_x^{(m)} - {}_nE_x\ddot{a}_{x+n}^{(m)} &= \ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)}\ddot{a}_x - \beta(m)A_x - {}_nE_x[\ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)}\ddot{a}_{x+n} - \beta(m)A_{x+n}] \\
&= \ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \beta(m)A^{1}_{x:\overline{n}|}
\end{aligned} \tag{5.4.15}$$

и аналогично

$${}_{n|}\ddot{a}_x^{(m)} = \ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)}\,{}_{n|}\ddot{a}_x - \beta(m)_{n|}A_x. \tag{5.4.16}$$

Если же исходить из (5.4.11), то

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \alpha(m)\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} - \beta(m)(1 - {}_nE_x), \tag{5.4.17}$$

$${}_{n|}\ddot{a}_x^{(m)} = \alpha(m)_{n|}\ddot{a}_x - \beta(m)_nE_x. \tag{5.4.18}$$

Обратные рекуррентные формулы для аннуитетов с выплатами m раз в год можно получить непосредственно, и читателю предлагается сделать это в упр. 5.16 для аннуитета пренумерандо с выплатами m раз в год. Однако более прямым подходом было бы использование рекуррентных соотношений разд. 5.3 и переход от которыми современное общество стремится управлять. Это произошло в результате глобализации экономики, технологических достижений и политических перемен, которые изменили политику государств.

При переработке базового учебника невозможно реализовать всю совокупность этих изменений. Наши цели значительно скромнее, но, как мы надеемся, они реалистичны. Настоящее издание является некоторым шагом непрерывного процесса приведения фундаментальных положений актуарной науки в соответствие с изменяющимися реалиями.

Во втором издании почти в каждом разделе произошли изменения в обозначениях и в подборе излагаемого материала. Имеется также ряд важных изменений по сравнению с первым изданием, которые необходимо перечислить.

1. Мы не используем коммутационные функции, классическое орудие актуарных вычислений. Это решение принято в связи со все уменьшающимися преимуществами этих функций во времена, когда процентные ставки часто рассматриваются как случайные величины или как детерминированные переменные, и распределение случайной величины продолжительности периода до момента выбытия может зависеть не только от достигнутого возраста. Начиная с гл. 3, мы снабжаем текст упражнениями, иллюстрирующими актуарные вычисления, в которых используются рекуррентные формулы; эти вычисления могут быть реализованы в виде программного продукта. Однако работу по применению будущих программных продуктов мы, естественно, оставляем читателю.
2. Изложение теории полезности теперь не ограничивается первой главой. Мы приводим примеры, которые показывают, как можно использовать теорию полезности для построения адекватных моделей для премий и резервов, отличных от обычных моделей, в которых неявно предполагается линейность функции полезности.
3. В первом издании книги мы, как правило, при рассмотрении случайных величин потерь ограничиваемся их первыми двумя моментами. В настоящем издании, следуя достижениям, реализованным ранее применительно к физике и к статистике, мы рассматриваем функции распределения и функции плотности этих случайных величин.
4. Основной материал, касающийся резервов, представлен теперь в двух главах. Это позволяет дать более полное изложение теории резервов в страховании жизни общего вида с переменными премиями и выплатами.
5. В последние годы проводились существенные актуарные исследования совместных распределений нескольких случайных величин продолжительности предстоящей жизни, которые не предполагались независимыми. Эти исследования оказали влияние на главы, посвященные актуарным функциям для групп лиц и теории выбытия по нескольким причинам.
6. Если случайные величины, описывающие продолжительность периода до момента выбытия по различным причинам, не являются независимыми, то в теории выбытия по нескольким причинам потенциально присутствуют серьезные проблемы оценки и интерпретации. Во втором издании эти проблемы поясняются.
7. В настоящем издании более компактно изложены приложения теории выбытия по нескольким причинам. В этом базовом учебнике мы не пытаемся показать те изменения в формулах для выплат, которые связаны с быстро меняющейся пенсионной практикой и с государственным регулированием.

аннуитетов с ежегодными выплатами к аннуитетам с выплатами m раз в год посредством соотношений (5.4.11), (5.4.17) и (5.4.18) или эквивалентных соотношений (5.4.14), (5.4.15) и (5.4.16).

Распределение настоящей стоимости выплат страхового аннуитета постнумерандо с выплатами m раз в год можно исследовать по аналогии с тем, как это делается для аннуитетов пренумерандо. Например, случайная величина настоящей стоимости Y для бессрочного страхового аннуитета постнумерандо с выплатами m раз в год будет иметь вид

$$Y = a^{(m)}_{\overline{K+(J/m)}|} = \frac{1 - v^{K+(J/m)}}{i^{(m)}}. \tag{5.4.19}$$

Это приводит к следующей формуле, аналогичной формуле (5.4.5):

$$1 = ia_x + (1+i)A_x = i^{(m)}a^{(m)}_x + \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)A^{(m)}_x. \tag{5.4.20}$$

Смысл этого соотношения состоит в том, что инвестированная сумма размера 1 дает проценты в конце каждого периода начисления процента, а также возврат этой суммы размера 1 с причитающимися процентами в конце того периода начисления процента, в котором произошла смерть.

Для вычисления актуарных настоящих стоимостей аннуитетов постнумерандо можно приспособить формулы актуарных настоящих стоимостей соответствующих страховых аннуитетов пренумерандо. Например,

$$a^{(m)}_x = \ddot{a}^{(m)}_x - \frac{1}{m}, \qquad a^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} - \frac{1}{m}(1 - {}_nE_x). \tag{5.4.21}$$

5.5. Аннуитеты пренумерандо и аннуитеты постнумерандо с корректирующим платежом

В дискретных аннуитетах каждая выплата производится либо за последующий временной период (аннуитет пренумерандо), либо за предыдущий (аннуитет постнумерандо). В связи с этим может возникнуть вопрос корректировки выплат, относящихся к периоду, в течение которого происходит смерть. Например, предположим, что покупка договора страхования на случай смерти осуществляется посредством ежегодных выплат премии, которые производятся в начале каждого страхового года. Если страхователь умирает через один месяц после осуществления ежегодной выплаты премии, может представляться правильным возвратить выплаченную премию за 11 месяцев, которые страхователь не прожил в том страховом году, в котором он умер. Вот другой пример, связанный с пенсионным аннуитетом постнумерандо, предполагающим ежегодные выплаты. Если лицо, получающее аннуитет, умирает за один месяц до даты очередного платежа, может предусматриваться заключительный платеж за одиннадцатимесячный период, который лицо прожило с момента последней выплаты. Определим сначала подходящий размер корректирующего платежа в таких случаях.

Рассмотрим первый из упомянутых выше случаев. Страхователь умирает в момент времени T после выплаты в момент K полной суммы ежегодной премии размера 1. Предположим, что премия «зарабатывается» страховщиком с постоянной интенсивностью в течение года с момента ее выплаты. В этом случае интенсивность зарабатывания премии c определяется из соотношения $c\bar{a}_{\overline{1}|} = 1$. Если зарабатывание прекращается в момент смерти, то к этому моменту заработана сумма $c\bar{s}_{\overline{T-K}|}$, а сумма

$$(1+i)^{T-K} - c\bar{s}_{\overline{T-K}|} = 1 \times (1+i)^{T-K} - \frac{\bar{s}_{\overline{T-K}|}}{\bar{a}_{\overline{1}|}} = \frac{\bar{a}_{\overline{K+1-T}|}}{\bar{a}_{\overline{1}|}}$$

не заработана и должна быть возвращена. Случайная величина настоящей стоимости в момент 0 всех платежей за вычетом возвращенной суммы имеет вид

$$Y = \ddot{a}_{\overline{K+1}|} - v^T \frac{\bar{a}_{\overline{K+1-T}|}}{\bar{a}_{\overline{1}|}} = \ddot{a}_{\overline{K+1}|} - \frac{v^T - v^{K+1}}{d} = \frac{1-v^T}{d} = \ddot{a}_{\overline{T}|}. \tag{5.5.1}$$

В том случае, когда ежегодная выплата равна 1, актуарная настоящая стоимость выплат в момент 0 обозначается символом $\ddot{a}_x^{\{1\}}$:

$$\ddot{a}_x^{\{1\}} = \mathbf{E}[\ddot{a}_{\overline{T}|}] = \mathbf{E}\left[\frac{\delta}{d}\,\bar{a}_{\overline{T}|}\right] = \frac{\delta}{d}\,\bar{a}_x. \tag{5.5.2}$$

Такой страховой аннуитет пренумерандо, предусматривающий возврат части премии за период времени между моментом смерти и концом периода, к которому относится последняя полная обычная выплата, называется *аннуитетом пренумерандо с корректирующим платежом.*

Мы можем распространить приведенные выше соображения на аннуитеты, в которых выплаты осуществляются чаще, чем один раз в год. Как и в разд. 5.4, введем величину $J = \lfloor (T-K)m \rfloor$, которая равна числу полных прожитых периодов длины $1/m$ года в последний год жизни, так что $K+(J+1)/m-T$ является длиной периода, за который будет произведен возврат. Интенсивность зарабатывания определяется из соотношения $c\bar{a}_{\overline{1/m}|} = 1/m$. Рассуждая, как и выше, получаем

$$\begin{aligned} Y &= \ddot{a}^{(m)}_{\overline{K+(J+1)/m}|} - v^T\left(\frac{\bar{a}_{\overline{K+(J+1)/m-T}|}}{m\bar{a}_{\overline{1/m}|}}\right) \\ &= \ddot{a}^{(m)}_{\overline{K+(J+1)/m}|} - \frac{v^T - v^{K+(J+1)/m}}{d^{(m)}} = \frac{1-v^T}{d^{(m)}} = \ddot{a}^{(m)}_{\overline{T}|}. \end{aligned} \tag{5.5.3}$$

В случае когда ежегодные выплаты составляют 1, актуарная настоящая стоимость выплат за вычетом возврата составит

$$\ddot{a}_x^{\{m\}} = \mathbf{E}\left[\frac{1-v^T}{d^{(m)}}\right] = \frac{\delta}{d^{(m)}}\bar{a}_x. \tag{5.5.4}$$

Пользуясь средним членом формулы (5.5.3), мы получаем для нее другое выражение:

$$\begin{aligned} \ddot{a}_x^{\{m\}} &= \mathbf{E}\left[\frac{1-v^{K+(J+1)/m}}{d^{(m)}}\right] - \mathbf{E}\left[\frac{v^T - v^{K+(J+1)/m}}{d^{(m)}}\right] \\ &= \ddot{a}_x^{(m)} - \mathbf{E}\left[\frac{v^T - v^{K+(J+1)/m}}{d^{(m)}}\right]. \end{aligned} \tag{5.5.5}$$

Второе слагаемое в правой части этой формулы — актуарная настоящая стоимость возврата. Применяя соображения, изложенные в упр. 4.19, мы имеем

$$\mathbf{E}\left[\frac{v^T - v^{K+(J+1)/m}}{d^{(m)}}\right] = \frac{\bar{A}_x - A_x^{(m)}}{d^{(m)}}. \tag{5.5.6}$$

В предположении равномерности распределения моментов смерти в каждом годичном возрастном интервале это выражение принимает вид

$$\frac{i}{d^{(m)}}\left(\frac{1}{\delta}-\frac{1}{i^{(m)}}\right)A_x$$

и

$$\ddot{a}_x^{\{m\}}=\ddot{a}_x^{(m)}-\frac{i}{d^{(m)}}\left(\frac{1}{\delta}-\frac{1}{i^{(m)}}\right)A_x. \tag{5.5.7}$$

Перейдем к изложению параллельной теории для аннуитетов постнумерандо. Предположим, что лицо, получающее аннуитет, умирает в момент T после получения последнего обычного платежа величины $1/m$ в момент времени $K+J/m$, где $J=\lfloor (T-K)m\rfloor$. Величина $T-K-(J/m)$ является длиной периода, за который требуется компенсация в виде дополнительного платежа. Предположим, что каждый платеж зарабатывается страхователем с постоянной интенсивностью в течение периода длины $1/m$ года, предшествующего этому платежу. В этом случае интенсивность зарабатывания платежа c задается соотношением $c\,\bar{s}_{1/m}=1/m$. Если зарабатывание прекращается в момент смерти, соответствующей выплатой в момент смерти является та часть следующего платежа, которая была заработана к этому моменту и которая определяется соотношением $c\bar{s}_{\overline{T-K-(J/m)}|}=\bar{s}_{\overline{T-K-(J/m)}|}/(m\bar{s}_{\overline{1/m}|})$. Настоящая стоимость в момент 0 всех платежей равна

$$Y=\ddot{a}^{(m)}_{\overline{K+J/m}|}-v^T\,\frac{\bar{s}_{\overline{T-K-(J/m)}|}}{m\bar{s}_{\overline{1/m}|}}=\ddot{a}^{(m)}_{\overline{K+J/m}|}-\frac{v^{K+J/m}-v^T}{i^{(m)}}=\frac{1-v^T}{i^{(m)}}=\ddot{a}^{(m)}_{\overline{T}|}. \tag{5.5.8}$$

В случае, когда ежегодно выплачивается сумма 1, актуарная настоящая стоимость на момент 0 всех платежей обозначается символом $\mathring{a}_x^{(m)}$. При $m=1$ верхний индекс в этом обозначении опускается. Таким образом,

$$\mathring{a}_x^{(m)}=\mathbf{E}\left[\frac{1-v^T}{i^{(m)}}\right]=\frac{\delta}{i^{(m)}}\,\bar{a}_x. \tag{5.5.9}$$

Пользуясь средним членом формулы (5.5.8), мы получаем для этой актуарной настоящей стоимости другое выражение:

$$\mathring{a}_x^{(m)}=\mathbf{E}[a^{(m)}_{\overline{K+J/m}|}]+\mathbf{E}\left[\frac{v^{K+J/m}-v^T}{i^{(m)}}\right]=a_x^{(m)}+\mathbf{E}\left[\frac{v^{K+J/m}-v^T}{i^{(m)}}\right]. \tag{5.5.10}$$

Второе слагаемое в правой части формулы (5.5.10) является актуарной настоящей стоимостью заключительного частичного платежа. Пользуясь соображениями, изложенными в упр. 4.19, мы имеем

$$\mathbf{E}\left[\frac{v^{K+J/m}-v^T}{i^{(m)}}\right]=\frac{(1+i)^{1/m}A_x^{(m)}-\bar{A}_x}{i^{(m)}}. \tag{5.5.11}$$

В предположении равномерности распределения смертей в каждом годичном возрастном интервале это выражение принимает вид

$$\frac{i}{i^{(m)}}\left(\frac{1}{d^{(m)}}-\frac{1}{\delta}\right)A_x \quad\text{и}\quad \mathring{a}_x^{(m)}=a_x^{(m)}+\frac{i}{i^{(m)}}\left(\frac{1}{d^{(m)}}-\frac{1}{\delta}\right)A_x. \tag{5.5.12}$$

Такой страховой аннуитет постнумерандо, предусматривающий частичные выплаты за период времени между последней полной выплатой и моментом смерти, называется *аннуитетом постнумерандо с корректирующим платежом.*

Формулы (5.5.3) и (5.5.8) представляются наиболее удобными для последующего изложения. Проиллюстрируем это следующим примером.

Пример 5.5.1. Сравним дисперсии случайных величин настоящих стоимостей аннуитетов постнумерандо и пренумерандо с корректирующим платежом.

Решение. Для аннуитетов пренумерандо с корректирующим платежом имеем

$$\mathbf{D}[\ddot{a}^{(m)}_{\overline{T}|}] = \mathbf{D}\left[\frac{1-v^T}{d^{(m)}}\right] = \frac{\mathbf{D}[v^T]}{(d^{(m)})^2} = \frac{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}{(d^{(m)})^2}$$

в силу формулы (5.5.3). Для аннуитетов постнумерандо с корректирующим платежом имеем

$$\mathbf{D}[a^{(m)}_{\overline{T}|}] = \mathbf{D}\left[\frac{1-v^T}{i^{(m)}}\right] = \frac{\mathbf{D}[v^T]}{(i^{(m)})^2} = \frac{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}{(i^{(m)})^2}$$

в силу формулы (5.5.8). Поскольку $i^{(m)}$ больше, чем $d^{(m)}$ или, точнее, $i^{(m)} = d^{(m)}(1+i)^{1/m}$, дисперсия аннуитета постнумерандо с корректирующим платежом оказывается меньше. ▼

5.6. Замечания и литература

В работе Р. Тейлора [Taylor 1952] предложены новые формулы, аналогичные формуле (5.4.6). Анализ распределений стоимостей аннуитетов проводился в работах [Boermeester 1956], [Fretwell, Hickman 1964] и [Bowers 1967]. Обзор этих исследований содержится в статье [McCrory 1984]. Мерё [1962] предложил методы расчета стоимости аннуитетов, исходя непосредственно из параметров в условии Мейкема. По поводу применения в актуарной науке, в частности в контексте актуарной настоящей стоимости страховых аннуитетов, функции целой части числа $\lfloor t \rfloor$ см. статью [Shiu 1982] и обсуждение этой статьи. Аннуитеты с корректирующим платежом возникали, явно или неявно, в работах [Rasor, Greville 1952], [Lauer 1967] и [Scher 1974], а также при обсуждении этих работ.

Упражнения

К разделу 5.2

5.1. Пользуясь предположением о равномерности распределения смертей в каждом годичном возрастном интервале и Иллюстративной таблицей смертности при эффективной годовой процентной ставке 6%, вычислите

(a) $\bar{a}_{20}$, $\bar{a}_{50}$, $\bar{a}_{80}$, (b) $\mathbf{D}[\bar{a}_{\overline{T}|}]$ для $x = 20, 50, 80$.

[Указание. Воспользуйтесь соотношениями (5.2.8), (5.2.9) и (4.4.4).]

5.2. Используя значения, полученные в упр. 5.1, вычислите стандартное отклонение и коэффициент вариации σ/μ следующих случайных величин настоящих стоимостей:

(a) индивидуальных аннуитетов, заключенных лицами возраста 20, 50, 80 лет, с непрерывными выплатами размера 1000 в год,

(b) группы из 100 аннуитетов, заключенных лицами возраста 50 лет, с непрерывными выплатами размера 1000 в год.

5.3. Покажите, что величину $\mathbf{D}[\bar{a}_{\overline{T}|}]$ можно выразить в виде $(2/\delta)(\bar{a}_x - {}^2\bar{a}_x) - \bar{a}_x^2$, где актуарная настоящая стоимость ${}^2\bar{a}_x$ соответствует интенсивности начисления процента 2δ.

5.4. Вычислите $\mathbf{Cov}(\delta\bar{a}_{\overline{T}|}, v^T)$.

5.5. Если применяется детерминистический подход, то соотношение (5.2.27) можно рассматривать в качестве исходной точки для развития теории страховых аннуитетов с непрерывными выплатами. При таком подходе мы начинаем с соотношений

$$\frac{d\bar{a}_y}{dy} = [\mu(y) + \delta]\bar{a}_y - 1, \quad x \leqslant y < \omega, \qquad \bar{a}_y = 0, \quad \omega \leqslant y.$$

(a) Воспользуйтесь интегрирующим множителем $\exp\{-\int_0^y [\mu(z)+\delta]\,dz\}$ для того, чтобы решить это дифференциальное уравнение и получить формулу (5.2.3).

(b) Воспользуйтесь интегрирующим множителем $e^{-\delta y}$, чтобы получить соотношение

$$\bar{a}_x = \bar{a}_{\overline{\omega-x}|} - \int_x^\omega e^{-\delta(y-x)}\bar{a}_y\,\mu(y)\,dy,$$

и дайте этому соотношению словесную интерпретацию.

5.6. Предположим, что $\mu(x+t) = \mu$ и что интенсивность начисления процента равна δ для всех $t \geqslant 0$.

(a) Предполагая, что $Y = \bar{a}_{\overline{T}|}$, $0 \leqslant T$, выведите формулу для функции распределения с.в. Y.

(b) Предполагая, что

$$Y = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T}|}, & 0 \leqslant T < n, \\ \bar{a}_{\overline{n}|}, & T \geqslant n, \end{cases}$$

выведите формулу для функции распределения этой случайной величины.

(c) Предполагая, что

$$Y = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant T < n, \\ \bar{a}_{\overline{T}|} - \bar{a}_{\overline{n}|}, & T \geqslant n, \end{cases}$$

выведите формулу для функции распределения этой случайной величины.

(d) Предполагая, что

$$Y = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{n}|}, & 0 \leqslant T < n, \\ \bar{a}_{\overline{T}|}, & T \geqslant n, \end{cases}$$

выведите формулу для функции распределения этой случайной величины.

5.7. Рассматривая интеграл $\int_0^{n+1} v^t\,{}_tp_x\,dt$ и разбивая его область интегрирования двумя различными способами (сначала на интервалы от 0 до 1 и от 1 до $n+1$, а затем на интервалы от 0 до n и от n до $n+1$), выведите обратную рекуррентную формулу для аннуитета с фиксированным n-летним сроком выплат. Какое начальное значение подходит для этой формулы?

5.8. Рассматривая интеграл $\int_n^\infty v^t\,{}_tp_x\,dt$ и разбивая его область интегрирования на интервалы от n до $n+1$ и от $n+1$ до ∞, выведите обратную рекуррентную формулу для бессрочного страхового аннуитета с фиксированным n-летним периодом отсрочки. Какое начальное значение подходит для этой формулы?

5.9. Объедините результат упр. 5.8 с соотношением в первой строке формулы (5.2.25) и выведите обратную рекуррентную формулу для $u(x) = \bar{a}_{\overline{x:\overline{n}|}}$. Какое начальное значение подходит для этой формулы?

5.10. Пусть используется агрегативная таблица смертности. Проверьте формулу (5.2.6) вероятностными методами, для начала переписав формулу (5.2.3) в виде

$$\bar{a}_x = \mathbf{E}[\bar{a}_{\overline{T}|}] = \mathbf{E}[\bar{a}_{\overline{T}|}\,|\,0 \leqslant T < 1]\,\mathbf{P}(0 \leqslant T < 1) + \mathbf{E}[\bar{a}_{\overline{T}|}\,|\,1 \leqslant T]\,\mathbf{P}(1 \leqslant T).$$

К разделу 5.3

5.11. Покажите, что

$$\mathbf{D}[a_{\overline{K}|}] = \mathbf{D}[\ddot{a}_{\overline{K+1}|}] = \mathbf{D}[v^{K+1}]/d^2\,.$$

5.12. Докажите следующие соотношения и дайте их интерпретацию:
(a) $a_{x:\overline{n}|} = {}_1E_x\ddot{a}_{x+1:\overline{n}|}$, (b) ${}_{n|}a_x = (A_{x:\overline{n}|} - A_x)/d - {}_nE_x$.

5.13. Воспользовавшись соотношением (5.3.13), докажите следующее соотношение и дайте его словесную интерпретацию:

$$A_{x:\overline{n}|} = v\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - a_{x:\overline{n-1}|}.$$

5.14. Выведите другое выражение для дисперсии из примера 5.3.1, начиная с представления

$$Y^2 = \begin{cases} \dfrac{1-2v^K+v^{2K}}{i^2} = \dfrac{2(1-v^K)-(1-v^{2K})}{i^2}, & K=0,1,n-1, \\ (a_{\overline{n}|})^2, & K=n,n+1,\ldots. \end{cases}$$

К разделу 5.4

5.15. В предположении равномерности распределения смертей в каждом годичном возрастном интервале упростите выражение

$$\sum_{k=0}^{\infty} {}_kp_x\, v^{k+1}\left[\sum_{j=0}^{m-1}\left({}_{j/m}p_{x+k}\ {}_{1/m}q_{x+k+j/m}\right)\ddot{s}^{(m)}_{\overline{1-(j+1)/m}|}\right],$$

чтобы использовать его при интерпретации формулы (5.4.8).

5.16. Рассмотрим срочный страховой аннуитет пренумерандо с выплатами m раз в год и размером ежегодных выплат 1. Пусть возраст лица, получающего аннуитет, равен x и срок действия аннуитета $y-x$ лет.

(a) Выразите актуарную настоящую стоимость такого аннуитета в форме текущих платежей в виде суммы актуарных настоящих стоимостей выплат за первый год и за оставшиеся $y-x-1$ лет.

(b) Выразите актуарную настоящую стоимость выплат за первый год в терминах $\alpha(m)$ и $\beta(m)$ в предположении равномерности распределения смертей в каждом годичном возрастном интервале.

(c) Найдите вид функций $c(x)$ и $d(x)$ в рекуррентном соотношении для такого аннуитета и укажите начальное значение.

5.17. Воспользовавшись соотношением (5.4.10), выведите другие варианты формул (5.4.17) и (5.4.18).

5.18. Покажите, что аналогом формулы (5.4.6) для аннуитетов постнумерандо будет соотношение

$$a_x^{(m)} = s_{\overline{1}|}^{(m)} a_x + \frac{1}{i^{(m)}}\left[(1+i)A_x - \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}A_x^{(m)}\right)\right]$$

и что в предположении равномерности распределения смертей в каждом годичном возрастном интервале оно примет вид

$$a_x^{(m)} = s_{\overline{1}|}^{(m)} + (1+i)\frac{1-\ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)}}{i^{(m)}}A_x.$$

5.19. Покажите, что аналогом формулы (5.4.7) для аннуитетов постнумерандо будет соотношение

$$a_x^{(m)} = \frac{1-(1+i^{(m)}/m)A_x^{(m)}}{i^{(m)}} = a_{\overline{\infty}|}^{(m)} - a_{\overline{\infty}|}^{(m)}A_x^{(m)}$$

и что в предположении равномерности распределения смертей в каждом годичном возрастном интервале оно примет вид

$$a_x^{(m)} = \alpha(m)a_x + \frac{1-\ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)}}{i^{(m)}}.$$

5.20. (a) Воспользуйтесь соотношением (5.4.3) как исходной точкой доказательства того, что $\lim_{m\to\infty}\ddot{a}_x^{(m)} = \bar{a}_x$.

(b) Воспользуйтесь соотношением (5.4.10) и соотношением из п.(a) для доказательства того, что $\bar{a}_x \cong a_x + 1/2$.

5.21. Воспользовавшись традиционным приближением, заданным формулой (5.4.10), проверьте следующие соотношения:

(a) $a_x^{(m)} \cong a_x + \dfrac{m-1}{2m}$, (b) $a_{x:\overline{n}|}^{(m)} \cong a_{x:\overline{n}|} + \dfrac{m-1}{2m}(1-{}_nE_x)$, (c) ${}_{n|}a_x^{(m)} \cong {}_{n|}a_x + \dfrac{m-1}{2m}\,{}_nE_x$.

5.22. (a) Выведите выражение для $\ddot{s}^{(m)}_{25:\overline{40}|}$ в терминах $\ddot{s}_{25:\overline{40}|}$.

(b) На основе Иллюстративных таблиц смертности с эффективной годовой процентной ставкой 6% вычислите

(i) $\ddot{a}^{(12)}_{25:\overline{40}|}$, (ii) $\ddot{s}^{(12)}_{25:\overline{40}|}$.

5.23. Актуарная настоящая стоимость стандартного срочного страхового аннуитета с увеличивающимся размером выплат для лица (x), такого, что

- годовая выплата в первый год равна 1, во второй год равна 2 и т. д. до завершающей выплаты размера n в n-й год,
- выплаты, производятся m раз в год пренумерандо,

обозначается символом $(I\ddot{a})^{(m)}_{x:\overline{n}|}$.

(a) Выпишите случайную величину настоящей стоимости Y для такого аннуитета как функцию случайных величин K и J.

(b) Покажите, что соответствующую актуарную настоящую стоимость можно представить в виде

$$\sum_{k=0}^{n-1} {}_{k|}\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n-k}|}.$$

5.24. Актуарная настоящая стоимость стандартного срочного страхового аннуитета с уменьшающимися выплатами для лица (x), такого, что

- годовая выплата в первый год равна n, во второй год равна $n-1$ и т.д. до 1 в n-й год,
- выплаты производятся m раз в год пренумерандо,

обозначается символом $(D\ddot{a})^{(m)}_{x:\overline{n}|}$.

(a) Выпишите случайную величину настоящей стоимости Y для такого аннуитета как функцию случайных величин K и J.

(b) Покажите, что соответствующую актуарную настоящую стоимость можно представить в виде

$$\sum_{k=1}^{n} \ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{k}|}.$$

5.25. Пусть в упр. 5.23 увеличение годовых выплат не прекращается в возрасте $n+x$, но продолжается на уровне n до тех пор, пока лицо (x) живо. В этом случае актуарная настоящая стоимость обозначается символом $(I_{\overline{n}|}\ddot{a})^{(m)}_x$.

(a) Выпишите случайную величину настоящей стоимости Y для такого аннуитета как функцию случайных величин K и J.

(b) Покажите, что соответствующую актуарную настоящую стоимость можно представить в виде

$$\sum_{k=0}^{n-1} {}_{k|}\ddot{a}^{(m)}_x.$$

5.26. Проверьте равенство $\delta(\bar{I}\bar{a})_{\overline{T}|} + Tv^T = \bar{a}_{\overline{T}|}$, где T обозначает продолжительность предстоящей жизни лица (x). Воспользуйтесь этим равенством для доказательства того, что $\delta(\bar{I}\bar{a})_x + (\bar{I}\bar{A})_x = \bar{a}_x$, где $(\bar{I}\bar{a})_x$ является актуарной настоящей стоимостью страхового аннуитета для лица (x), при котором выплаты производятся непрерывно с интенсивностью t в год в момент времени t.

5.27. Пользуясь равенством $\bar{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} = a^{(m)}_x + a^{(m)}_{\overline{n}|} - a^{(m)}_{x:\overline{n}|}$, покажите, что в предположении равномерного распределения смертей в каждом годичном возрастном интервале

$$\bar{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \frac{i}{i^{(m)}}\left[a_{\overline{n}|} + v^n {}_np_x\, a_{x+n} + \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d^{(m)}}\right)v^n {}_np_x\, A_{x+n}\right].$$

К разделу 5.5

5.28. Выведите следующие формулы и дайте их словесную интерпретацию:

(a) $1 = i^{(m)}\mathring{a}^{(m)}_x + \bar{A}_x$, (b) $1 = d^{(m)}\ddot{a}^{\{m\}}_x + \bar{A}_x$, (c) $\mathring{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} = (\delta/i^{(m)})\bar{a}_{x:\overline{n}|}$,

(d) $\ddot{a}^{\{m\}}_{x:\overline{n}|} = (\delta/d^{(m)})\bar{a}_{x:\overline{n}|}$, (e) $\ddot{a}^{\{m\}}_{x:\overline{n}|} = (1+i)^{1/m}\mathring{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|}$.

5.29. Пусть $H(m) = \ddot{a}^{\{m\}}_x - \mathring{a}^{(m)}_x$. Докажите, что $H(m) \geqslant 0$ и $\lim\limits_{m\to\infty} H(m) = 0$.

Ко всем темам главы

5.30. Для $0 \leqslant t \leqslant 1$ в предположении равномерного распределения смертей в каждом годичном возрастном интервале покажите, что

(a) $\ddot{a}_{x+t} = \dfrac{(1+it)\ddot{a}_x - t(1+i)}{1-tq_x}$, (b) ${}_{t|}\ddot{a}_x = v^t[(1+it)\ddot{a}_x - t(1+i)]$,

(c) ${}_{1-t|}\ddot{a}_{x+t} = \dfrac{(1+i)^t}{1-tq_x}(\ddot{a}_x - 1)$, (d) $A_{x+t} = \dfrac{1+it}{1-tq_x}A_x - \dfrac{tq_x}{1-tq_x}$.

5.31. Выведите формулы для страхового аннуитета пренумерандо для лица (x) с начальной выплатой размера 1 и с ежегодными выплатами, увеличивающимися

(a) на 3% от первоначальной годовой выплаты,

(b) на 3% от выплаты за предыдущий год.

5.32. Выразите величину $(\bar{D}\bar{a})_{x:\overline{n}|}$ в виде интеграла и докажите формулу

$$\frac{\partial}{\partial n}(\bar{D}\bar{a})_{x:\overline{n}|} = \bar{a}_{x:\overline{n}|}.$$

5.33. Выведите выражение для актуарной накопленной стоимости к возрасту 70 лет для аннуитета со следующими помесячными выплатами:

- 100 в конце каждого месяца в возрасте от 30 до 40 лет,
- 200 в конце каждого месяца в возрасте от 40 до 50 лет,
- 500 в конце каждого месяца в возрасте от 50 до 60 лет,
- 1000 в конце каждого месяца в возрасте от 60 до 70 лет.

5.34. Выведите упрощенное выражение для актуарной настоящей стоимости договора страхования на случай смерти на срок 25 лет, заключенного с лицом (35), выплата по которому производится непосредственно в момент смерти и равна $\bar{s}_{\overline{t}|}$, если смерть наступает в возрасте $35+t$, $0 \leqslant t \leqslant 25$. Дайте словесную интерпретацию полученного результата.

5.35. Выведите упрощенное выражение для актуарной настоящей стоимости договора страхования на случай смерти на срок n лет, заключенного с лицом (x), выплата по которому производится в конце года смерти и равна $\ddot{s}_{\overline{k+1}|}$, если смерть наступает в год $k+1$, $0 \leqslant k < n$. Дайте словесную интерпретацию полученного результата.

5.36. Выведите упрощенное выражение для $(I\ddot{a})^{(12)}_{x:\overline{25}|} - (Ia)^{(12)}_{x:\overline{25}|}$.

5.37. Рассмотрим отсроченный на n лет страховой аннуитет с непрерывными выплатами, составляющими за год сумму 1, как страховой договор с вероятностью страхового случая ${}_np_x$ и со случайной величиной потерь $v^n\bar{a}_{\overline{T}|}$. Случайная величина T имеет функцию плотности ${}_tp_{x+n}\,\mu_x(n+t)$. Воспользуйтесь соотношением (2.2.13), чтобы показать, что дисперсия выплат по такому договору равна

$$v^{2n}{}_np_x\,(1-{}_np_x)\,\bar{a}^2_{x+n} + v^{2n}{}_np_x\,\frac{{}^2\bar{A}_{x+n} - (\bar{A}_{x+n})^2}{\delta^2},$$

и проверьте, что это выражение сводится к полученному в формуле (5.2.21).

5.38. Выпишите дискретный аналог формулы для дисперсии из упр. 5.37.

5.39. Рассмотрим индикаторную случайную величину I_k, которая определена следующим образом:

$$I_k = \begin{cases} 1, & T(x) \geqslant k, \\ 0, & T(x) < k. \end{cases}$$

Покажите, что

(a) настоящая стоимость страхового аннуитета для лица (x) с ежегодными выплатами b_k на дожитие до возраста $x+k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, может быть представлена в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} v^k\, b_k\, I_k,$$

(b) $\mathbf{E}[I_j I_k] = {}_k p_x$, $j \leqslant k$, $\mathbf{Cov}(I_j, I_k) = {}_k p_x \, {}_j q_x$, $j \leqslant k$,

(c) $\mathbf{D}\left[\sum_{k=0}^{\infty} v^k b_k I_k\right] = \sum_{k=0}^{\infty} v^{2k} b_k^2 \, {}_k p_x \, {}_k q_x + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j<k} v^{j+k} b_j b_k \, {}_k p_x \, {}_j q_x$.

5.40. Докажите следующие соотношения, где левый верхний индекс 2 указывает на то, что интенсивность начисления процента равна 2δ:

(a) ${}^2A_x = 1 - (2d - d^2)\, {}^2\ddot{a}_x$, (b) $\mathbf{D}[v^{K+1}] = 2d(\ddot{a}_x - {}^2\ddot{a}_x) - d^2(\ddot{a}_x^2 - {}^2\ddot{a}_x)$,

(c) $\mathbf{D}[\ddot{a}_{\overline{K+1}|}] = \dfrac{2}{d}(\ddot{a}_x - {}^2\ddot{a}_x) - (\ddot{a}_x^2 - {}^2\ddot{a}_x)$.

5.41. (a) Разложите в ряд по степеням δ коэффициенты $\alpha(m)$ и $\beta(m)$.

(b) Какой вид приобретают разложения п. (a) при $m = \infty$?

5.42. Воспользовавшись неравенством Иенсена, покажите, что

(a) $\bar{a}_x < \bar{a}_{\overline{\mathring{e}_x}|}$, (b) $a_x < a_{\overline{e_x}|}$, $x < \omega - 1$.

5.43. Пусть $g(x)$ является неотрицательной функцией, а X — случайной величиной с функцией плотности $f(x)$. Обоснуйте неравенство

$$\mathbf{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx \geqslant k\mathbf{P}[g(X) \geqslant k], \qquad k > 0,$$

и воспользуйтесь этим неравенством для доказательства соотношений

$$\bar{a}_x \geqslant \bar{a}_{\overline{\mathring{e}_x}|} \mathbf{P}(\bar{a}_{\overline{T}|} \geqslant \bar{a}_{\overline{\mathring{e}_x}|}) = \bar{a}_{\overline{\mathring{e}_x}|} \mathbf{P}(T \geqslant \mathring{e}_x).$$

5.44. Сумма размера 1 использована на приобретение комбинированных выплат, состоящих из ежегодных выплат размера I, производящихся непрерывно, пока лицо (x) живо, и страховой выплаты размера J непосредственно в момент смерти этого лица. Выпишите случайную величину настоящей стоимости таких комбинированных выплат и выражение для ее математического ожидания и дисперсии.

5.45. В предположении равномерности распределения смертей в каждом годичном возрастном интервале, воспользовавшись Иллюстративной таблицей смертности и предположив, что эффективная годовая процентная ставка составляет 6%, вычислите

(a) $\ddot{a}_{40}^{(12)}$, (b) $\ddot{a}_{40:\overline{30}|}^{(12)}$, (c) ${}_{30|}\ddot{a}_{40}^{(12)}$.

5.46. Пусть $A''_{x:\overline{m}|}$ и $\ddot{a}''_{x:\overline{m}|}$ — актуарные настоящие стоимости, вычисленные при

- процентной ставке i для первых n лет, $n < m$, и
- процентной ставке i' для оставшихся $m - n$ лет.

Докажите следующие соотношения с помощью алгебраических выкладок и дайте их словесную интерпретацию:

(a) $A''_{x:\overline{m}|} = 1 - d\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - v^n \, {}_n p_x \, d' \, \ddot{a}'_{x+n:\overline{m-n}|}$, (b) $A''_{x:\overline{m}|} = 1 - d' \, \ddot{a}''_{x:\overline{m}|} + (d' - d)\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$.

5.47. Покажите, что

$$\frac{d\,\ddot{a}_x}{di} = -v(Ia)_x, \quad \text{где } (Ia)_x = \sum_{t=1}^{\infty} t\, v^t \, {}_t p_x,$$

и дайте словесную интерпретацию этого соотношения.

5.48. Покажите, что постоянное увеличение интенсивности смертности оказывает такое же влияние на величину $\ddot{a}_x$, как и постоянное увеличение интенсивности начисления процента, но это не верно для величины $\ddot{a}_x^{(m)}$, которая вычисляется по формуле $\alpha(m)\ddot{a}_x - \beta(m)$.

5.49. Покажите, что $\alpha(m) - \beta(m)d = \ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)}$.

5.50. Покажите, что если $q_x < (i^{(2)}/2)^2$, то приближение

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{m-1}{2m}(1 - {}_n E_x)$$

в частном случае $n = 1$, $m = 2$ приводит к неравенству $\ddot{a}_{x:\overline{1}|}^{(2)} > \ddot{a}_{\overline{1}|}^{(2)}$.

5.51. Рассмотрим следующий портфель аннуитетов пренумерандо, которые выплачиваются из средств пенсионного фонда:

Возраст	Число лиц, которым выплачиваются аннуитеты
65	30
75	20
85	10

В каждом аннуитете ежегодные выплаты составляют величину 1 и производятся до тех пор, пока лицо, получающее выплаты, живо. При процентной ставке 6% и коэффициенте смертности, определенном в Иллюстративной таблице смертности, для настоящей стоимости обязательств пенсионного фонда найдите

(a) математическое ожидание, (b) дисперсию, (c) 95-ю персентиль распределения.

В п. (b) и п. (c) предполагается взаимная независимость лиц из рассматриваемого портфеля.

Упражнения с использованием компьютера

5.52. (a) Для вашей Иллюстративной таблицы смертности при $i = 0{,}06$ вычислите актуарную настоящую стоимость страхового аннуитета пренумерандо с ежегодной выплатой размера 1 для возрастов с 13 до 140 лет.

(b) Сравните полученные значения со значениями, приведенными в таблице 2A.

5.53. Для вашей Иллюстративной таблицы смертности при $i = 0{,}06$ вычислите актуарную настоящую стоимость срочного страхового аннуитета пренумерандо с ежегодной выплатой размера 1 до возраста 65 лет для возрастов с 13 до 64 лет.

5.54. Пользуясь вашей Иллюстративной таблицей смертности и предположением о равномерности распределения смертей в каждом годичном возрастном интервале, при $i = 0{,}06$ вычислите, применяя результаты упр. 5.7, актуарную настоящую стоимость страхового аннуитета со сроком выплат 10 лет с ежегодной непрерывной выплатой размера 1 для возрастов с 13 до 99 лет.

5.55. (a) К функциям, в определение которых входят проценты, вычисленным и сохраненным в вашей Иллюстративной таблице смертности, добавьте $\alpha(m)$ и $\beta(m)$. Обратитесь к упр. 4.31.

(b) Определите $\alpha(12)$ и $\beta(12)$ при $i = 0{,}06$ и сравните ваши результаты с результатами, приведенными в примере 5.4.1.

[Замечание. Для получения точных результатов при малых процентных ставках мы предлагаем использовать ряды из упр. 5.41.]

5.56. Пользуясь вашей Иллюстративной таблицей смертности и предположением о равномерности распределения смертей в каждом годичном возрастном интервале, при $i = 0{,}06$ вычислите актуарную настоящую стоимость срочного страхового аннуитета с ежегодной выплатой размера 1, производимой непрерывно, для возрастов с 13 до 64 лет.

5.57. Пусть Y является случайной величиной настоящей стоимости страхового аннуитета со сроком выплат 10 лет с ежегодной выплатой размера 1, производимой непрерывно, начиная с возраста 60 лет. Пользуясь вашей Иллюстративной таблицей смертности и предположением о равномерности распределения смертей в каждом годичном возрастном интервале, при $i = 0{,}08$ вычислите математическое ожидание и дисперсию с.в. Y.

5.58. Пусть Y является случайной величиной настоящей стоимости страхового аннуитета пренумерандо с ежегодной выплатой размера 1, производимой помесячно до возраста 65. На основе вашей Иллюстративной таблицы смертности в предположении равномерности распределения смертей в каждом годичном возрастном интервале при $i = 0{,}05$ вычислите математическое ожидание и дисперсию с.в. Y.

5.59. Воспользовавшись Иллюстративной таблицей смертности, в предположении равномерности распределения смертей в каждом годичном возрастном интервале при $i = 0{,}07$ определите $\mathring{a}_{30:\overline{20|}}$.

6

НЕТТО-ПРЕМИИ

6.1. Введение

В гл. 4 и 5 мы обсуждали актуарные настоящие стоимости выплат по различным договорам страхования жизни и аннуитетам. В настоящей главе эти соображения объединяются для определения размера выплат страхового аннуитета, достаточного для приобретения или финансирования страховых выплат по страховому договору или аннуитету. На практике договоры индивидуального страхования жизни обычно оплачиваются страховым аннуитетом премий, размер которых указан в страховом договоре, *брутто-премиями*. Брутто-премии обеспечивают страховые выплаты, расходы по заключению и обслуживанию страхового договора, а также прибыль и средства на компенсацию в случае возможного неблагоприятного развития событий. В настоящей главе в расчет будут приниматься только выплаты и премии, а издержки, доходы или резервы на покрытие неблагоприятных случайностей рассматриваться не будут.

Согласно гл. 1, определение страховой премии требует принятия *принципа расчета премий*. Пример 6.1.1 иллюстрирует применение трех таких принципов. Все они основаны на влиянии, которое оказывает страхование на капитал компании-страховщика. Ключевым пунктом в моделировании этих принципов является случайная величина, равная настоящей стоимости потерь страховщика на момент заключения договора, если размер премий фиксирован в договоре. Принцип I требует, чтобы вероятность положительности случайной величины, описывающей потери, не превосходила заранее оговоренной величины. Принципы II и III основаны на ожидаемой полезности капитала страховщика, которая обсуждалась в разд. 1.3. Мы увидим, что принцип II, который опирается на линейную функцию полезности, может быть переформулирован как требование равенства нулю математического ожидания величины потерь.

Пример 6.1.1. Страховщик собирается заключить договор с лицом возраста 0, пошаговая продолжительность предстоящей жизни K которого определяется функцией вероятностей ${}_{k|}q_0 = 0{,}2$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Согласно договору, страховщиком будет выплачена сумма размера 1 в конце года смерти, а страхователь будет выплачивать страховую премию P в начале каждого года при условии его дожития до этого момента. Найдем размер ежегодной премии P, который определяется согласно следующим принципам:

(a) Принцип I. P является наименьшей ежегодной премией, такой, что вероятность положительных финансовых потерь страховщика не превосходит 0,25.

(b) Принцип II. P является такой ежегодной премией, что страховщику, применяющему функцию полезности $u(x) = x$, будет безразлично, принять или не принять соответствующий риск на страхование.

(c) Принцип III. P является такой ежегодной премией, что страховщику, применяющему функцию полезности $u(x) = -e^{-0{,}1x}$, будет безразлично, принять или не принять соответствующий риск на страхование.

Для каждого из этих трех случаев мы будем предполагать, что страховщик работает с эффективной годовой процентной ставкой $i = 0{,}06$.

Решение. Для $K = k$ и для произвольной премии P настоящая стоимость финансовых потерь на момент заключения договора равна $l(k) = v^{k+1} - P\ddot{a}_{\overline{k+1}|} = (1 + P/d)v^{k+1} - P/d$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Соответствующая случайная величина потерь — это $L = v^{K+1} - P\ddot{a}_{\overline{K+1}|}$.

(a) Поскольку $l(k)$ убывает с ростом k, требование принципа I будет выполняться, если премия P такова, что $v^2 - P\ddot{a}_{\overline{2}|} = 0$. В этом случае финансовые потери положительны только при $K = 0$, что имеет вероятность $0{,}2 < 0{,}25$. Таким образом, для этого принципа $P = 1/\ddot{s}_{\overline{2}|} = 0{,}45796$.

(b) Следуя формуле (1.3.6), мы ищем премию P, такую, что $u(w) = \mathbf{E}[u(w - L)]$. Согласно принципу II, $u(x) = x$, и мы имеем $w = \mathbf{E}[w - L] = w - \mathbf{E}[L]$. Таким образом, принцип II эквивалентен следующему требованию: премия P должна выбираться так, чтобы выполнялось равенство $\mathbf{E}[L] = 0$. В рассматриваемом примере мы требуем, чтобы

$$\sum_{k=0}^{4}(v^{k+1} - P\ddot{a}_{\overline{k+1}|})\,\mathbf{P}(K = k) = 0, \tag{6.1.1}$$

откуда вытекает, что $P = 0{,}30272$.

(c) Снова используя формулу (1.3.6) и функцию полезности из принципа III, получаем

$$-e^{-0{,}1w} = \mathbf{E}[-e^{-0{,}1(w-L)}] = -e^{-0{,}1w}\mathbf{E}[e^{0{,}1L}].$$

Таким образом, принцип III эквивалентен следующему требованию: премия P должна выбираться так, чтобы $\mathbf{E}[e^{0{,}1L}] = 1$. В рассматриваемом примере мы требуем, чтобы

$$\sum_{k=0}^{4}\exp[0{,}1(v^{k+1} - P\ddot{a}_{\overline{k+1}|})]\,\mathbf{P}(K = k) = 1, \tag{6.1.2}$$

откуда вытекает, что $P = 0{,}30628$.

Эти результаты сведены в следующей таблице:

			Настоящая стоимость финансовых потерь, если премии рассчитываются согласно принципу			$e^{0,1L}$
k	Вероятность $_{k\|}q_0$	Общая формула	I	II	III	III
0	0,2	$v^1 - P\ddot{a}_{\overline{1}\|}$	0,48544	0,64067	0,63712	1,06579
1	0,2	$v^2 - P\ddot{a}_{\overline{2}\|}$	0	0,30169	0,29477	1,02992
2	0,2	$v^3 - P\ddot{a}_{\overline{3}\|}$	−0,45796	−0,01811	−0,02819	0,99718
3	0,2	$v^4 - P\ddot{a}_{\overline{4}\|}$	−0,89000	−0,31981	−0,33287	0,96726
4	0,2	$v^5 - P\ddot{a}_{\overline{5}\|}$	−1,29758	−0,60443	−0,62031	0,93985
	Премия		0,45796	0,30272	0,30628	
	Математическое ожидание		−0,43202	0,00000	−0,12020	1,00000

Эта таблица показывает, что в данном примере лица, принимающие решения на основе принципов I и III, уменьшают свой риск в том смысле, что они требуют отрицательности математического ожидания настоящей стоимости потерь. ▼

Премии, определяемые согласно принципу I, мы будем называть *персентильными премиями*. Хотя этот принцип на первый взгляд выглядит привлекательно, легко показать, что его использование может привести к весьма неудовлетворительным премиям. Такие случаи рассматриваются в примере 6.2.3.

Принцип II имеет много практических применений. Для формального изложения определим потери страховщика L как случайную величину, равную настоящей стоимости выплат, которые должен произвести страховщик, минус аннуитет премий, которые должен выплатить страхователь. Принцип II называется *принципом эквивалентности*, и определяющее его требование состоит в том, чтобы

$$\mathbf{E}[L] = 0. \tag{6.1.3}$$

Мы будем называть премии, удовлетворяющие условию (6.1.3), *нетто-премиями*[1]. Их можно также определить условием

$$\mathbf{E}[\text{настоящая стоимость страховых выплат}]$$
$$= \mathbf{E}[\text{настоящая стоимость нетто-премий}].$$

С помощью методов, разработанных в гл. 4 и 5 для расчета таких актуарных настоящих стоимостей, это уравнение можно привести к виду, который допускает решение относительно премий. Скажем, в примере 6.1.1, в котором нетто-премии постоянны и выплаты имеют величину 1, уравнение (6.1.1) можно записать в виде $A_0 = P\ddot{a}_0$ и получить для $\ddot{a}_0$ выражение $\sum_{k=0}^{4} v^k {}_kp_0$. Когда принцип эквивалентности применяется для определения величины единовременной премии в момент заключения договора страхования жизни или страхового аннуитета, эта премия приравнивается к актуарной настоящей стоимости страховых выплат и называется *единовременной нетто-премией*.

Премии, расчет которых основан на принципе III с показательной функцией полезности, называются *показательными премиями*. Такие премии являются непропорциональными в том смысле, что премии по договору с выплатой размера 10 единиц более, чем в 10 раз, превосходят премии по договору с выплатой размера 1 (см. упр. 6.2). Это согласуется с функциями полезности лиц, не склонных к риску.

6.2. Непрерывная модель

Основные понятия, используемые при определении премий на основе принципа эквивалентности, мы проиллюстрируем сначала на примере непрерывной выплаты постоянных годовых премий при бессрочном страховании на случай смерти с

---

[1] В оригинале «benefit premium». В переводе мы используем термин «нетто-премия» (и в дальнейшем «нетто-резерв»), поскольку расчет этой премии в рассматриваемой модели основан на выплатах без учета расходов страховщика, описанных в гл. 15. Следуя этой логике, «нетто-премиями» могут называться и другие, например персентильные, премии, но мы резервируем этот термин за премиями, рассчитанными на основе принципа эквивалентности, так как в дальнейшем в основном рассматриваются именно они. Обращаем внимание читателя на следующие два момента: во-первых, в гл. 1, разд. 1.3 (и только там), уже встречался термин «нетто-премия» (в оригинале «net premium» и «pure premium»), понимаемый в несколько ином смысле, что не приведет к недоразумениям; во-вторых, экономист не должен воспринимать введенный здесь термин как привычный ему термин из бухгалтерского учета. — *Прим. ред.*

выплатой суммы размера 1 в момент смерти[1)] лица (x). Для любой непрерывно выплачиваемой премии $\bar{P}$ рассмотрим

$$l(t) = v^t - \bar{P}\bar{a}_{\overline{t}|}, \tag{6.2.1}$$

настоящую стоимость потерь страховщика, если смерть произошла в момент времени t.

Заметим, что $l(t)$ является убывающей функцией аргумента t (*функцией потерь*), для которой $l(0) = 1$, и $l(t)$ стремится к $-\bar{P}/\delta$ при $t \to \infty$. Если t_0 является моментом, когда $l(t_0) = 0$, то смерть до момента t_0 приводит к положительным потерям, а смерть после момента t_0 — к отрицательным потерям, т. е. к прибыли. Эти соображения иллюстрируются на рис. 6.2.1, приведенном далее.

Рассмотрим случайную величину потерь

$$L = l(T) = v^T - \bar{P}\bar{a}_{\overline{T}|}, \tag{6.2.2}$$

отвечающую функции потерь $l(t)$. Если страховщик определяет величину премии, исходя из принципа эквивалентности, то она обозначается через $\bar{P}(\bar{A}_x)$ и удовлетворяет условию

$$\mathbf{E}[L] = 0. \tag{6.2.3}$$

Из формул (4.2.6) и (5.2.3) вытекает, что

$$\bar{A}_x - \bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_x = 0,$$

или

$$\bar{P}(\bar{A}_x) = \bar{A}_x/\bar{a}_x\,. \tag{6.2.4}$$

Замечание. В настоящей главе для упрощения изложения мы, как правило, не пользуемся селекцией, а когда она будет использоваться, будем оговаривать это специально.

Дисперсию с.в. L можно использовать как меру изменчивости величины потерь по отдельному договору бессрочного страхования на случай смерти вследствие случайной природы продолжительности предстоящей жизни. Когда $\mathbf{E}[L] = 0$,

$$\mathbf{D}[L] = \mathbf{E}[L^2]. \tag{6.2.5}$$

Для случайной величины потерь из формулы (6.2.2) имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{D}[v^T - \bar{P}\bar{a}_{\overline{T}|}] &= \mathbf{D}\left[v^T - \frac{\bar{P}(1-v^T)}{\delta}\right] = \mathbf{D}\left[v^T\left(1+\frac{\bar{P}}{\delta}\right) - \frac{\bar{P}}{\delta}\right] = \mathbf{D}\left[v^T\left(1+\frac{\bar{P}}{\delta}\right)\right] \\ &= \mathbf{D}[v^T]\left(1+\frac{\bar{P}}{\delta}\right)^2 = [{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2]\left(1+\frac{\bar{P}}{\delta}\right)^2.\end{aligned} \tag{6.2.6}$$

Если премия определяется с помощью принципа эквивалентности, мы можем использовать формулы (6.2.4) и (5.2.8), $\delta\bar{a}_x + \bar{A}_x = 1$, и переписать соотношение (6.2.6) в виде

$$\mathbf{D}[L] = \frac{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}{(\delta\bar{a}_x)^2}\,. \tag{6.2.7}$$

[1)] В дальнейшем, если выплаты премий производятся непрерывно, а выплаты на случай смерти производится в момент смерти, то мы будем говорить о *непрерывной модели*. Если премии выплачиваются дискретно (1 раз в год, см. разд. 6.3, или несколько раз в год), а выплата на случай смерти производится в конце года смерти, то мы говорим о *дискретной модели*. Если же премии выплачиваются дискретно, а выплата на случай смерти производится в момент смерти, то мы говорим о *полунепрерывной модели*. — *Прим. ред.*

Пример 6.2.1. Вычислим $\bar{P}(\bar{A}_x)$ и $\mathbf{D}[L]$ в предположении, что интенсивность смертности является постоянной, $\mu = 0{,}04$, а интенсивность начисления процента δ равна 0,06.

Решение. В силу этих предположений $\bar{a}_x = 10$, $\bar{A}_x = 0{,}4$ и ${}^2\bar{A}_x = 0{,}25$. Применяя формулу (6.2.4), получаем $\bar{P}(\bar{A}_x) = \bar{A}_x/\bar{a}_x = 0{,}04$, и в силу (6.2.7)

$$\mathbf{D}[L] = \frac{0{,}25 - 0{,}16}{(0{,}6)^2} = 0{,}25. \qquad \blacktriangledown$$

Учитывая соотношение (6.2.7), мы можем рассматривать числитель последнего соотношения как дисперсию потерь $v^T - \bar{A}_x$ по договору бессрочного страхования на случай смерти с единовременной премией. Эта дисперсия равна 0,09, и потому стандартное отклонение величины потерь для страхового договора с такой непрерывной выплатой премий будет равно $\sqrt{0{,}25/0{,}09} = 5/3$ от стандартного отклонения величины потерь в случае единовременной премии. Дополнительная неопределенность относительно настоящей стоимости премиальных поступлений увеличивает изменчивость потерь, связанную со случайной природой продолжительности предстоящей жизни.

В примере 6.2.1 $\bar{P}\bar{A}_x = 0{,}04$, т. е. величина $\bar{P}\bar{A}_x$ равна постоянной интенсивности смертности. Мы можем доказать, что это — общий результат, применяя соображения из примеров 4.2.3 и 5.2.1. В предположении, что интенсивность смертности постоянна,

$$\bar{A}_x = \frac{\mu}{\mu + \delta} \qquad \text{и} \qquad \bar{a}_x = \frac{1}{\mu + \delta},$$

так что

$$\bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{\mu(\mu + \delta)^{-1}}{(\mu + \delta)^{-1}} = \mu;$$

последняя величина не зависит от интенсивности начисления процента или от возраста в момент заключения договора.

Используя принцип эквивалентности в форме соотношения (6.1.3), мы можем вывести формулы для ежегодных премий для целого ряда страховых договоров в непрерывной модели. Величина общих потерь равна

$$b_T v_T - \bar{P}Y = Z - \bar{P}Y, \tag{6.2.8}$$

где

- b_t и v_t являются соответственно функцией выплат и функцией дисконтирования, определенными перед формулой (4.2.1),
- $\bar{P}$ является общим символом для годовой нетто-премии в непрерывной модели,
- Y является случайной величиной настоящей стоимости непрерывного аннуитета, определенной, например, формулой (5.2.13),
- Z определяется формулой (4.2.2).

Применение принципа эквивалентности приводит к равенству

$$\mathbf{E}[b_T v_T - \bar{P}Y] = 0,$$

или

$$\bar{P} = \frac{\mathbf{E}[b_T v_T]}{\mathbf{E}[Y]}.$$

Эти соображения используются, чтобы вывести формулы для величины годовых премий, собранные в табл. 6.2.1.

Интересно посмотреть, как эти рассуждения могут применяться к непрерывным бессрочным страховым аннуитетам, отсроченным на n лет, с выплатой размера 1 в год. В этом случае $b_T v_T = 0$, $T \leqslant n$, и $b_T v_T = \bar{a}_{\overline{T-n}|} v^n$, $T > n$. Тогда

$$\mathbf{E}[b_T v_T] = {}_n p_x \, \mathbf{E}[\bar{a}_{\overline{T-n}|} v^n \,|\, T > n] = v^n {}_n p_x \, \bar{a}_{x+n} = A_{x:\overset{\;1}{\overline{n}|}} \, \bar{a}_{x+n}.$$

Однако на практике отсроченные страховые аннуитеты обычно предусматривают определенный тип выплат на случай смерти, если она произошла в период отсрочки. Один такой договор рассматривается в примере 6.6.2.

Пример 6.2.2. Выразим дисперсию потерь L, связанных со смешанным страхованием на срок n лет, в терминах актуарных настоящих стоимостей (см. третью строчку в табл. 6.2.1).

Таблица 6.2.1. Нетто-премии в непрерывной модели

Вид страхового покрытия	Компоненты потерь $b_T v_T$	Компоненты потерь $\bar{P}Y$, где Y есть	Формула для премии $\bar{P} = \mathbf{E}[b_T v_T]/\mathbf{E}[Y]$
Бессрочное страхование на случай смерти	$1\,v^T$	$\bar{a}_{\overline{T}|}$	$\bar{P}(\bar{A}_x) = \dfrac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x}$
Страхование на случай смерти на срок n лет	$1\,v^T$ 0	$\bar{a}_{\overline{T}|}$, $T \leqslant n$ $\bar{a}_{\overline{n}|}$, $T > n$	$\bar{P}(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}) = \dfrac{\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}$
Смешанное страхование на срок n лет	$1\,v^T$ $1\,v^n$	$\bar{a}_{\overline{T}|}$, $T \leqslant n$ $\bar{a}_{\overline{n}|}$, $T > n$	$\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \dfrac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}$
Бессрочное страхование на случай смерти с h-летним сроком выплаты премий[1)]	$1\,v^T$ $1\,v^T$	$\bar{a}_{\overline{T}|}$, $T \leqslant h$ $\bar{a}_{\overline{h}|}$, $T > h$	${}_h\bar{P}(\bar{A}_x) = \dfrac{\bar{A}_x}{\bar{a}_{x:\overline{h}|}}$
Смешанное страхование на срок n лет с h-летним сроком выплаты премий	$1\,v^T$ $1\,v^T$ $1\,v^n$	$\bar{a}_{\overline{T}|}$, $T \leqslant h$ $\bar{a}_{\overline{h}|}$, $h < T \leqslant n$ $\bar{a}_{\overline{h}|}$, $T > n$	${}_h\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \dfrac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\bar{a}_{x:\overline{h}|}}$
Страхование на дожитие на срок n лет	0 $1\,v^n$	$\bar{a}_{\overline{T}|}$, $T \leqslant n$ $\bar{a}_{\overline{n}|}$, $T > n$	$\bar{P}(A_{x:\overset{\;1}{\overline{n}|}}) = \dfrac{A_{x:\overset{\;1}{\overline{n}|}}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}$
Бессрочный страховой аннуитет, отсроченный на n лет[2)]	0 $\bar{a}_{\overline{T-n}|} v^n$	$\bar{a}_{\overline{T}|}$, $T \leqslant n$ $\bar{a}_{\overline{n}|}$, $T > n$	$\bar{P}({}_{n|}\bar{a}_x) = \dfrac{A_{x:\overset{\;1}{\overline{n}|}} \, \bar{a}_{x+n}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}$

Решение. Используя обозначение из формулы (4.2.11), мы имеем

$$\mathbf{D}[L] = \mathbf{D}\left[Z_3\left\{1 + \frac{\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})}{\delta}\right\} - \frac{\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})}{\delta}\right].$$

Используя теперь формулу (4.2.10), мы получаем

$$\mathbf{D}[L] = \left[1 + \frac{\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})}{\delta}\right]^2 [{}^2\bar{A}_{x:\overline{n}|} - (\bar{A}_{x:\overline{n}|})^2].$$

1) Страховые договоры, описанные в четвертой и в пятой строках, предусматривают период выплаты премий, который короче, чем период, в котором предусмотрены выплаты на случай смерти.

2) Указанный аннуитет не предусматривает выплат на случай смерти, а выплата постоянных премий по его условиям осуществляется n лет. Другой, возможно более реалистичный, вид аннуитета с постоянными премиями, отсроченными на n лет, описан в примере 6.6.2.

Формулу (5.2.15) можно переписать в виде

$$(\delta\bar{a}_{x:\overline{n}|})^{-1} = 1 + \frac{\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})}{\delta},$$

откуда следует, что

$$\mathbf{D}[L] = \frac{{}^2\bar{A}_{x:\overline{n}|} - (\bar{A}_{x:\overline{n}|})^2}{(\delta\bar{a}_{x:\overline{n}|})^2}\,. \qquad ▼$$

Два тождества, (5.2.8) и (5.2.15), можно использовать для обнаружения связи между непрерывно выплачиваемыми нетто-премиями. Например, исходя из (5.2.8), имеем

$$\delta\bar{a}_x + \bar{A}_x = 1, \qquad \delta + \bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{1}{\bar{a}_x},$$

$$\bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{1}{\bar{a}_x} - \delta = \frac{1-\delta\bar{a}_x}{\bar{a}_x} = \frac{\delta\bar{A}_x}{1-\bar{A}_x}. \tag{6.2.9}$$

Исходя из (5.2.15), получаем

$$\delta\bar{a}_{x:\overline{n}|} + \bar{A}_{x:\overline{n}|} = 1, \qquad \delta + \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \frac{1}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}},$$

$$\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \frac{1}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}} - \delta = \frac{1-\delta\bar{a}_{x:\overline{n}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{\delta\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{1-\bar{A}_{x:\overline{n}|}}\,. \tag{6.2.10}$$

Словесная интерпретация дискретных аналогов формул (6.2.9) и (6.2.10) дается в примере 6.3.4.

Премии, которые обсуждались нами до сих пор, были нетто-премиями; они определялись, исходя из принципа эквивалентности. Перейдем к примеру, в котором описываются два рассуждения, при которых персентильные премии дают неудовлетворительные результаты.

Пример 6.2.3. Вычислим персентильную премию, выбирая 25-ю персентиль, для страхователя возраста 55 лет и для следующих страховых планов:

(a) смешанное страхование на срок 20 лет,

(b) страхование на случай смерти на срок 20 лет,

(c) страхование на случай смерти на срок 10 лет.

Пусть расчеты производятся в непрерывной модели, интенсивность начисления процента δ равна 0,06 и данные о смертности берутся из Иллюстративной таблицы смертности.

Решение. (a) Величина потерь для смешанного страхования на срок 20 лет имеет вид

$$L = \begin{cases} v^T - \bar{P}\bar{a}_{\overline{T}|}, & T < 20, \\ v^{20} - \bar{P}\bar{a}_{\overline{20}|}, & T \geqslant 20. \end{cases}$$

Она является невозрастающей функцией от T. Поэтому те значения T, при которых потери L должны быть положительными и множество которых имеет вероятность 0,25, — это значения, которые лежат ниже числа $\xi_T^{0,25}$. Поскольку $l_{55} = 86\,408{,}60$ и $l_{70,617} = 64\,806{,}45$ (что получается линейным интерполированием), $\mathbf{P}(T < 15{,}617) = 0{,}25$. Поэтому персентильная премия для 25-й персентили такова, что при ней потери при $T = 15{,}617$ равны нулю, а сама она равна $v^{15,617}/\bar{a}_{\overline{15,617}|} = 0{,}03865$.

(b) Величина потерь для страхования на случай смерти на срок 20 лет имеет вид

$$L = \begin{cases} v^T - \bar{P}\bar{a}_{\overline{T}|}, & T < 20, \\ -\bar{P}\bar{a}_{\overline{20}|}, & T \geqslant 20. \end{cases}$$

Это по-прежнему невозрастающая функция от T, и поскольку $\mathbf{P}(T < 15{,}617) = 0{,}25$, величина персентильной премии для 25-й персентили снова равняется $v^{15{,}617}/\bar{a}_{\overline{15{,}617}|} = 0{,}03865$. Конечно, не годится, чтобы одна и та же величина премии соответствовала двум различным страховым планам, особенно если учесть, что нетто-премия для лиц рассматриваемого возраста по договору смешанного страхования на срок 20 лет почти в два раза выше, чем по договору страхования на случай смерти на срок 20 лет.

(c) Величина потерь для страхования на случай смерти на срок 10 лет имеет вид

$$L = \begin{cases} v^T - \bar{P}\bar{a}_{\overline{T}|}, & T < 10, \\ -\bar{P}\bar{a}_{\overline{10}|}, & T \geqslant 10. \end{cases}$$

Если назначается нулевая премия, то $\mathbf{P}(L > 0) = \mathbf{P}(T < 10)$, и эта вероятность равна в соответствии с Иллюстративной таблицей смертности

$$\frac{l_{55} - l_{65}}{l_{55}} = 0{,}1281.$$

Поэтому нулевая премия является наименьшей неотрицательной ежегодной премией, такой, что вероятность финансовых потерь страховщика не выше 0,25. В этом случае $\mathbf{P}(L > 0) = 0{,}1281$ и $\bar{P} = 0$ оказывается персентильной премией для 25-й персентили. Нетто-премия в этом случае равна 70% от нетто-премии для договора страхования на срок 20 лет. ▼

В качестве вывода из рассмотренного примера заметим, что принцип расчета премий, основанный на персентилях, применительно к индивидуальному страхованию приводит к противоречивым результатам. В дальнейшем изложении его использование будет сведено к минимуму.

Для бессрочного страхования на случай смерти, согласно определению, содержащемуся в первой строке табл. 6.2.1,

$$L = v^T - \bar{P}\bar{a}_{\overline{T}|}, \qquad T \geqslant 0.$$

Функцию распределения с.в. L можно найти следующим образом:

$$\begin{aligned} F_L(u) = \mathbf{P}(L \leqslant u) &= \mathbf{P}\left[v^T - \bar{P}\left(\frac{1 - v^T}{\delta}\right) \leqslant u\right] \\ &= \mathbf{P}\left(v^T \leqslant \frac{\delta u + \bar{P}}{\delta + \bar{P}}\right) = \mathbf{P}\left[T \geqslant -\frac{1}{\delta}\ln\left(\frac{\delta u + \bar{P}}{\delta + \bar{P}}\right)\right] \\ &= 1 - F_T\left(-\frac{1}{\delta}\ln\left[\frac{\delta u + \bar{P}}{\delta + \bar{P}}\right]\right), \qquad -\frac{\bar{P}}{\delta} < u, \end{aligned} \tag{6.2.11}$$

причем функция плотности этой случайной величины имеет вид

$$\frac{d}{du}F_L(u) = f_L(u) = f_T\left(-\frac{1}{\delta}\ln\left[\frac{\delta u + \bar{P}}{\delta + \bar{P}}\right]\right)\left(\frac{1}{\delta u + \bar{P}}\right), \qquad -\frac{\bar{P}}{\delta} < u. \tag{6.2.12}$$

Можно считать, что эти функции распределения индексированы параметром $\bar{P}$. Используя терминологию теории принятия решений, мы можем сказать, что определение премии $\bar{P}$ эквивалентно выбору распределения с.в. L, задаваемого формулой (6.2.11), который будет оптимальным согласно тому принципу расчета премий, которым руководствуется лицо, принимающее решения. Этот принцип отражает предпочтение лица, принимающего решения.

Схематическое изображение функции $l(t)$, функции плотности с.в. $T(x)$ и соответствующей функции плотности с.в. L приведены на рис. 6.2.1.

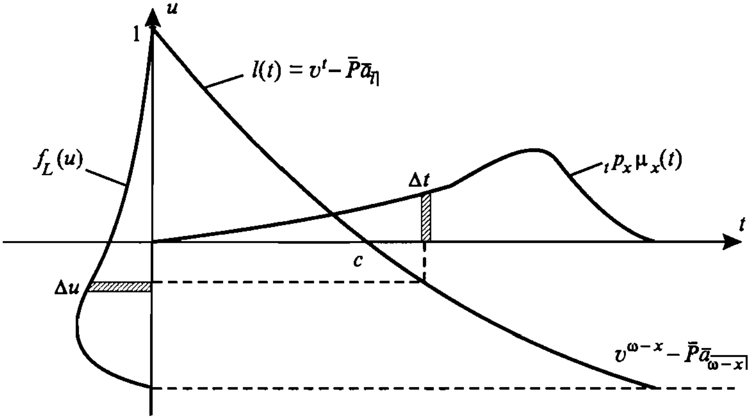


Рис. 6.2.1. Схематическое изображение функции $l(t)$ и функций плотности с.в. $T(x)$ и L

В качестве иллюстрации рассмотрим рис. 6.2.1, где $\mathbf{P}(T \leqslant c) = \mathbf{P}(L > 0)$ и эта вероятность взята равной 0,25. Предположим, что значение $\bar{P}$ будет определено решением уравнения $F_L(0) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$. Эта иллюстрация использует принцип расчета премий, основанный на персентилях, где вероятность положительности значения с.в. L выбрана равной 0,25.

Из рис. 6.2.1 видно, что события $(T \leqslant c)$ и $(L > 0)$ эквивалентны в том смысле, что наступление одного из них влечет за собой наступление другого. Далее, заметим, что если лицо, принимающее решения, руководствуется персентильным принципом с $\mathbf{P}(L > 0) = p$, то $\mathbf{P}(T \leqslant c) = p$, где c равно ξ_T^p, $100p$-й персентили распределения с.в. T. Кроме того, в силу эквивалентности этих двух событий премию можно определить из уравнения, в которое входит функция потерь, т.е. из уравнения $v^{\xi_T^p} - \bar{P}\bar{a}_{\overline{\xi_T^p}|} = 0$, или

$$\bar{P} = \frac{v^{\xi_T^p}}{\bar{a}_{\overline{\xi_T^p}|}} = \frac{1}{\bar{s}_{\overline{\xi_T^p}|}}. \tag{6.2.13}$$

Поскольку $\bar{P}$ является премией, которая обеспечивает выплату размера 1 в момент ξ_T^p, этот результат интуитивно понятен. Отношение $\bar{s}_{\overline{t}|}/\bar{s}_{\overline{\xi_T^p}|}$ будет меньше 1 с вероятностью p и больше 1 с вероятностью $1 - p$.

Пример 6.2.4. Этот пример продолжает пример 6.2.3. Дополнительно предполагается, что случайная величина $T(55)$ имеет распределение Муавра, плотность которого равна

$${}_tp_{55}\,\mu_{55}(t) = 1/45, \qquad 0 < t < 45.$$

Для трех рассматривавшихся случайных величин потерь выпишем функции распределения с.в. L и определим значение параметра $\bar{P}$ как наименьшее неотрицательное число, такое, что $\mathbf{P}(L>0) \leqslant 0{,}25$.

Решение. (a) Используя формулу (6.2.11) и учитывая, что функция распределения имеет скачок в точке $u = v^{20} - \bar{P}\bar{a}_{\overline{20}|}$, связанный с ограничением на L при $T \geqslant 20$, мы приходим к следующему семейству функций распределения, индексированных параметром $\bar{P}$:

$$F_L(u) = \begin{cases} 0, & u < v^{20} - \bar{P}\bar{a}_{\overline{20}|}, \\ 1 + \dfrac{1}{0{,}06}\dfrac{\ln[(0{,}06u + \bar{P})/(0{,}06 + \bar{P})]}{45}, & v^{20} - \bar{P}\bar{a}_{\overline{20}|} \leqslant u \leqslant 1, \\ 1, & 1 < u. \end{cases}$$

На рис. 6.2.2(a) изображена функция распределения, которая соответствует смешанному страхованию на срок 20 лет. Этот рисунок позволяет увидеть графически процесс определения премий с использованием персентильного принципа. Мы ищем ту функцию распределения из семейства распределений, индексированного параметром $\bar{P}$, которая пересекает вертикальную ось в точке 0,75. Аналитически это значит, что для определения премии мы решаем относительно $\bar{P}$ уравнение

$$F_L(0) = 0{,}75, \quad \text{или} \quad 1 + \frac{1}{0{,}06}\frac{\ln[\bar{P}/(0{,}06 + \bar{P})]}{45} = 0{,}75, \quad \text{т.е.} \quad \ln\left(\frac{\bar{P}}{0{,}06 + \bar{P}}\right) = -0{,}675,$$

откуда

$$\bar{P} = \frac{0{,}06e^{-0{,}675}}{1 - e^{-0{,}675}} = \frac{1}{\bar{s}_{\overline{11{,}25}|}} = 0{,}06224.$$

В свете сказанного по поводу соотношения (6.2.11) этот результат не вызывает удивления. Если в качестве распределения с.в. T выбирается распределение Муавра, то его 25-й персентилью будет $\xi_T^{0{,}25} = 11{,}25$.

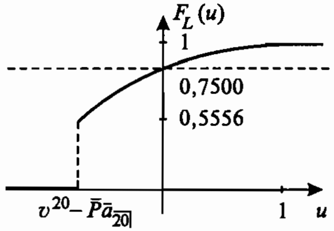
Для сравнения, нетто-премия, или премия, рассчитанная по принципу эквивалентности, равна в этом примере

$$\bar{P}(\bar{A}_{55:\overline{20}|}) = \frac{\int_0^{20} (v^t/45)\,dt + (25/45)\,v^{20}}{\int_0^{20} v^t(1 - t/45)\,dt} = 0{,}04456.$$

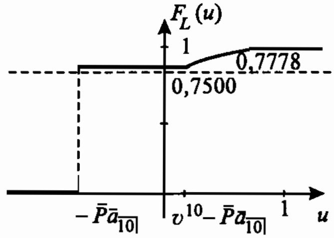
(b) Используя формулу (6.2.11) и учитывая, что функция распределения имеет скачок в точке $u = -\bar{P}\bar{a}_{\overline{20}|}$, связанный с ограничением на переменную потерь при страховании на случай смерти на срок 20 лет, мы приходим к следующему семейству функций распределения, индексированных параметром $\bar{P}$:

$$F_L(u) = \begin{cases} 0, & u < -\bar{P}\bar{a}_{\overline{20}|}, \\ 25/45, & -\bar{P}\bar{a}_{\overline{20}|} \leqslant u \leqslant v^{20} - \bar{P}\bar{a}_{\overline{20}|}, \\ 1 + \dfrac{1}{0{,}06}\dfrac{\ln[(0{,}06u + \bar{P})/(0{,}06 + \bar{P})]}{45}, & v^{20} - \bar{P}\bar{a}_{\overline{20}|} < u \leqslant 1, \\ 1, & 1 < u. \end{cases}$$

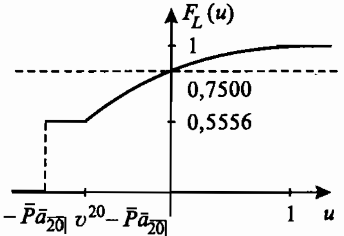
График функции распределения, соответствующей такому страхованию на срок 20 лет, показан на рис. 6.2.2(b). Величина премии определяется решением уравнения $F_L(0) = 0{,}75$ относительно $\bar{P}$. Пользуясь п. (a), мы снова получаем $\bar{P} = 0{,}06224$.



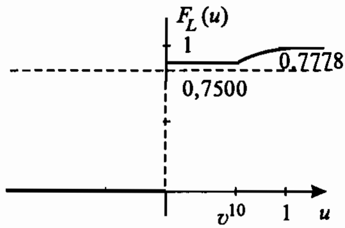
(a) Функция распределения с.в. L для смешанного страхования на срок 20 лет, $\bar{P} = 0{,}06244$



(c) Функция распределения с.в. L для страхования на срок 10 лет, $\bar{P} = 0{,}06244$



(b) Функция распределения с.в. L для страхования на срок 20 лет, $\bar{P} = 0{,}06244$



(d) Функция распределения с.в. L для страхования на срок 10 лет, $\bar{P} = 0$

Рис. 6.2.2. Функции распределения с.в. L из примера 6.2.4

(c) Используя формулу (6.2.11) и учитывая, что функция распределения имеет скачок в точке $u = -\bar{P}\bar{a}_{\overline{10}|}$, связанный с ограничением на L при страховании на срок 10 лет, мы приходим к следующему семейству функций распределения, индексированных параметром $\bar{P}$:

$$F_L(u) = \begin{cases} 0, & u < -\bar{P}\bar{a}_{\overline{10}|}, \\ 35/45, & -\bar{P}\bar{a}_{\overline{10}|} \leqslant u \leqslant v^{10} - \bar{P}\bar{a}_{\overline{10}|}, \\ 1 + \dfrac{1}{0{,}06}\dfrac{\ln[(0{,}06u + \bar{P})/(0{,}06 + \bar{P})]}{45}, & v^{10} - \bar{P}\bar{a}_{\overline{10}|} < u \leqslant 1, \\ 1, & 1 < u. \end{cases}$$

Поскольку значения функций распределения, которые отличны от констант, совпадают во всех трех частях примера, напрашивается предположение, что $\bar{P} = 0{,}06224$, как это было в пп. (a) и (b). Но заметив, что $F_L(u) = 35/45 > 0{,}75$ для любого u из интервала $(-\bar{P}\bar{a}_{\overline{10}|}, v^{10} - \bar{P}\bar{a}_{\overline{10}|})$, мы понимаем, что это предположение неверно. Показанная на рис. 6.2.2(c) функция распределения с.в. L при $\bar{P} = 0{,}06224$ подтверждает этот вывод. Обратимся к значению $\bar{P} = 0$, как в примере 6.2.3. Соответствующая функция распределения с.в. L — это

$$F_L(u) = \begin{cases} 0, & u \leqslant 0, \\ 35/45, & 0 < u \leqslant v^{10}, \\ 1 + \dfrac{1}{0{,}06}\dfrac{\ln u}{45}, & v^{10} < u \leqslant 1, \\ 1, & 1 < u, \end{cases}$$

и вероятность того, что с.в. L положительна, имеет вид

$$\mathbf{P}(L>0) = 10/45 < 0{,}25.$$

Это иллюстрируется графиком 6.2.2(d).

Как и в примере 6.2.3(c), применение принципа расчета премий, основанного на персентилях, приводит к $\bar{P} = 0$, т.е. к аномальному с практической точки зрения результату. ▼

6.3. Дискретная модель

В разд. 6.2 мы обсуждали теорию для случая непрерывной модели. В настоящем разделе мы рассмотрим страховые договоры с выплатой премий раз в год, как в примере 6.1.1, где страховая сумма выплачивается в конце того года действия договора, в котором произошла смерть, а первая премия выплачивается в момент заключения страхового договора. Последующие премии выплачиваются в годовщины заключения страхового договора, если страхователь доживает до конца того периода, к которому относится предыдущая выплата премии. Множество ежегодных премий образует страховой аннуитет пренумерандо. Эта модель не соответствует реальной практике, но она представляет исторический интерес в русле развития актуарной науки.

При этих предположениях постоянная ежегодная нетто-премия, предназначенная на покрытие выплаты размера 1 по бессрочному договору страхования на случай смерти обозначается через P_x, где отсутствие символа $(\bar{A}_x)$ означает, что страховая сумма выплачивается в конце того года действия договора, в котором произошла смерть. Величина потерь в этом договоре страхования равна

$$L = v^{K+1} - P_x\, \ddot{a}_{\overline{K+1}|}, \qquad K = 0, 1, 2, \ldots. \tag{6.3.1}$$

Согласно принципу эквивалентности, $\mathbf{E}[L] = 0$, или $\mathbf{E}[v^{K+1}] - P_x\, \mathbf{E}[\ddot{a}_{\overline{K+1}|}] = 0$, откуда

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}. \tag{6.3.2}$$

Это — дискретный аналог формулы (6.2.4).

Воспользовавшись формулой (5.3.7) вместо (5.2.8) и рассуждая аналогично тому, как мы это делали при доказательстве соотношения (6.2.7), получаем

$$\mathbf{D}[L] = \frac{{}^2A_x - (A_x)^2}{(d\ddot{a}_x)^2}. \tag{6.3.3}$$

Пример 6.3.1. Вычислим P_x и $\mathbf{D}[L]$, если

$$_{k|}q_x = c(0{,}96)^{k+1}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $c = 0{,}04/0{,}96$ и $i = 0{,}06$.

Решение. Сначала вычислим компоненты правой части равенства (6.3.2):

$$A_x = c\sum_{k=0}^{\infty}(1{,}06)^{-k-1}(0{,}96)^{k+1} = 0{,}40, \qquad \ddot{a}_x = \frac{1 - A_x}{d} = 10{,}60.$$

Далее, используя это равенство, получим

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} = 0{,}0377.$$

Что касается $\mathbf{D}[L]$, то вычислим

$$^2A_x = c\sum_{k=0}^{\infty}[(1{,}06)^2]^{-k-1}(0{,}96)^{k+1} = 0{,}2445.$$

Тогда

$$\mathbf{D}[L] = \frac{0{,}2445 - 0{,}1600}{[(0{,}06)(10{,}60)/(1{,}06)]^2} = 0{,}2347.$$

▼

Между примерами 6.2.1 и 6.3.1 имеется определенная связь. Поскольку для случая, описанного в примере 6.3.1,

$$_{k|}q_x = \int_k^{k+1} {}_tp_x\,\mu_x(t)\,dt, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{6.3.4}$$

мы имеем

$$\frac{0{,}04}{0{,}96}(0{,}96)^{k+1} = \int_k^{k+1} {}_tp_x\,\mu_x(t)\,dt.$$

Если интенсивность смертности постоянна и равна μ, то

$$\frac{0{,}04}{0{,}96}(0{,}96)^{k+1} = e^{-(k+1)\mu}(e^{\mu} - 1)$$

и $e^{-\mu} = 0{,}96$, а $\mu = 0{,}0408$. Геометрическое распределение с вероятностями, заданными соотношениями

$$_{k|}q_x = \frac{0{,}04}{0{,}96}(0{,}96)^{k+1},$$

является дискретным вариантом показательного распределения с параметром $\mu = 0{,}0408$. Формула (6.3.4) является мостом между дискретным и непрерывным случаями. Ежегодная нетто-премия в непрерывной модели, соответствующая величине $P_x = 0{,}0377$ из примера 6.3.1, будет равна $\bar{P}(\bar{A}_x) = \mu = 0{,}0408$.

Продолжая использовать принцип эквивалентности, мы можем вывести формулы для ежегодных нетто-премий для целого ряда страховых планов в дискретной модели. Общая формула для потерь будет иметь вид

$$b_{K+1}\,v_{K+1} - PY,$$

где

- b_{k+1} и v_{k+1} являются соответственно функцией выплат и функцией дисконтирования, определенными в соотношении (4.3.1),
- P является общим обозначением для ежегодной премии, выплачиваемой в начале каждого года действия договора в течение периода выплаты премий, пока застрахованный жив,
- Y является такой случайной величиной стоимости дискретного аннуитета, которая рассматривается, например, в контексте формулы (5.3.9).

Применение принципа эквивалентности приводит к соотношению

$$\mathbf{E}[b_{K+1}v_{K+1} - PY] = 0, \quad \text{или} \quad P = \mathbf{E}[b_{K+1}v_{K+1}]/\mathbf{E}[Y].$$

Эти соображения используются при составлении таблицы 6.3.1, в которой представлены формулы для премий в случае страховых договоров в дискретной модели.

Пример 6.3.2. Выведем в терминах актуарных настоящих стоимостей выражения для дисперсии потерь L в случае смешанного страхования на срок n лет (см. третью строку таблицы 6.3.1).

Решение. Начнем с обозначений таблицы 6.3.1. Пусть

$$Z = \begin{cases} v^{K+1}, & K = 0, 1, \ldots, n-1, \\ v^n, & K = n, n+1, \ldots . \end{cases}$$

Мы можем, ссылаясь на третью стоку таблицы 6.3.1, записать

$$L = Z - P_{x:\overline{n}|}(1 - Z)/d.$$

Таким образом,

$$\mathbf{D}[L] = \mathbf{D}[Z(1 + P_{x:\overline{n}|}/d) - P_{x:\overline{n}|}/d].$$

Для нахождения $\mathbf{D}[Z]$ мы можем воспользоваться правилом моментов, как указано в таблице 4.3.1, и получить

$$\mathbf{D}[L] = (1 + P_{x:\overline{n}|}/d)^2[{}^2A_{x:\overline{n}|} - (A_{x:\overline{n}|})^2].$$

Из формулы (5.3.15) и из выражений в третьей строке таблицы 6.3.1 можно получить следующие равенства:

$$d\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|} = 1, \qquad 1 + P_{x:\overline{n}|}/d = 1/d\ddot{a}_{x:\overline{n}|}.$$

Таким образом, дисперсия, которую мы ищем, имеет вид

$$\frac{{}^2A_{x:\overline{n}|} - (A_{x:\overline{n}|})^2}{(d\ddot{a}_{x:\overline{n}|})^2}. \tag{6.3.5}$$

▼

Таблица 6.3.1. Ежегодные нетто-премии в дискретной модели

Вид страхового покрытия	Компоненты потерь: $b_{K+1}v_{K+1}$	Компоненты потерь: PY, где Y есть	Формулы для премии $P = \mathbf{E}[b_{K+1}v_{K+1}]/\mathbf{E}[Y]$
Бессрочное страхование на случай смерти	$1\,v^{K+1}$	$\ddot{a}_{\overline{K+1}|}$, $K = 0, 1, 2, \ldots$	$P = \dfrac{A_x}{\ddot{a}_x}$
Страхование на случай смерти на срок n лет	$1\,v^{K+1}$ 0	$\ddot{a}_{\overline{K+1}|}$, $K = 0, 1, \ldots, n-1$ $\ddot{a}_{\overline{n}|}$, $K = n, n+1, \ldots$	$P^1_{x:\overline{n}|} = \dfrac{A^1_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$
Смешанное страхование на срок n лет	$1\,v^{K+1}$ $1\,v^n$	$\ddot{a}_{\overline{K+1}|}$, $K = 0, 1, \ldots, n-1$ $\ddot{a}_{\overline{n}|}$, $K = n, n+1, \ldots$	$P_{x:\overline{n}|} = \dfrac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$
Бессрочное страхование на случай смерти с h-летним сроком выплаты премий	$1\,v^{K+1}$ $1\,v^{K+1}$	$\ddot{a}_{\overline{K+1}|}$, $K = 0, 1, \ldots, h-1$ $\ddot{a}_{\overline{h}|}$, $K = h, h+1, \ldots$	${}_hP_x = \dfrac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}$
Смешанное страхование на срок n лет с h-летним сроком выплаты премий	$1\,v^{K+1}$ $1\,v^{K+1}$ $1\,v^n$	$\ddot{a}_{\overline{K+1}|}$, $K = 0, 1, \ldots, h-1$ $\ddot{a}_{\overline{h}|}$, $K = h, \ldots, n-1$ $\ddot{a}_{\overline{h}|}$, $K = n, n+1, \ldots$	${}_hP_{x:\overline{n}|} = \dfrac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}$
Страхование на дожитие на срок n лет	0 $1\,v^n$	$\ddot{a}_{\overline{K+1}|}$, $K = 0, 1, \ldots, n-1$ $\ddot{a}_{\overline{n}|}$, $K = n, n+1, \ldots$	$P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = \dfrac{A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$
Бессрочный страховой аннуитет, отсроченный на n лет	0 $\ddot{a}_{\overline{K+1-n}|}v^n$	$\ddot{a}_{\overline{K+1}|}$, $K = 0, 1, \ldots, n-1$ $\ddot{a}_{\overline{n}|}$, $K = n, n+1, \ldots$	$P({}_{n|}\ddot{a}_x) = \dfrac{A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}\,\ddot{a}_{x+n}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$

Пример 6.3.3. Рассмотрим 10 000 договоров бессрочного страхования на случай смерти в дискретной модели. Пусть π обозначает величину ежегодной премии по такому договору, а $L(\pi)$ — случайная величина потерь по одному такому договору, рассчитанная на момент его заключения на основе Иллюстративной таблицы смертности при процентной ставке 6% и при возрасте страхователя в момент заключения договора 35 лет.

(a) Определим величину премии π_a, такую, что распределение с.в. $L(\pi_a)$ имеет нулевое математическое ожидание. Вычислим дисперсию с.в. $L(\pi_a)$.

(b) Найдем приближенное значение наименьшей неотрицательной премии π_b, при котором вероятность того, что потери $L(\pi_b)$ положительны, меньше 0,5. Найдем дисперсию величины $L(\pi_b)$.

(c) Используя нормальное приближение, найдем величину премии π_c, при которой вероятность того, что суммарные потери по 100 рассматриваемым независимым договорам положительны, равна 0,05.

Решение. (a) Согласно принципу эквивалентности (6.1.3),

$$\pi_a = 10\,000 P_{35} = 10\,000\,\frac{A_{35}}{\ddot{a}_{35}} = \frac{1287{,}194}{15{,}39262} = 83{,}62.$$

Из формулы (6.3.3) следует, что

$$\begin{aligned}\mathbf{D}[L(\pi_a)] = (10\,000)^2\,\frac{{}^2A_{35} - (A_{35})^2}{(d\ddot{a}_{35})^2} &= 10^8\,\frac{0{,}0348843 - (0{,}1287194)^2}{[(0{,}06/1{,}06)(15{,}39262)]^2} \\ &= \frac{1\,831\,562}{0{,}7591295} = 2\,412\,713.\end{aligned}$$

(b) Мы ищем величину премии π_b, такую, чтобы $\mathbf{P}[L(\pi_b) > 0] < 0{,}5$, или, в терминах пошаговой продолжительности предстоящей жизни K,

$$\mathbf{P}(10\,000 v^{K+1} - \pi_b\,\ddot{a}_{\overline{K+1|}} > 0) < 0{,}5.$$

Из Иллюстративной таблицы смертности следует, что ${}_{42}p_{35} = 0{,}5125101$ и ${}_{43}p_{35} = 0{,}4808964$. Таким образом, если π_b выбирается так, чтобы $10\,000 v^{43} - \pi_b\,\ddot{a}_{\overline{43|}} = 0$, то $\mathbf{P}[L(\pi_b) > 0] = \mathbf{P}(K < 42) < 0{,}5$. Поэтому

$$\pi_b = 10\,000\,\ddot{s}_{\overline{43|}} = 50{,}31.$$

Воспользовавшись дискретным аналогом формулы (6.2.6), мы получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{D}[L(\pi_b)] &= (10\,000)^2[{}^2A_{35} - (A_{35})^2]\left(1 + \frac{\pi_b}{10\,000}\,\frac{1}{d}\right)^2 \\ &= (1\,831\,562)(1{,}18567) = 2\,171\,630.\end{aligned}$$

(c) Если премия равна π_c, потери по одному договору будут равны

$$L(\pi_c) = 10\,000 v^{K+1} - \pi_c\,\ddot{a}_{\overline{K+1|}} = \left(10\,000 + \frac{\pi_c}{d}\right) v^{K+1} - \frac{\pi_c}{d},$$

а их математическое ожидание и дисперсия вычисляются следующим образом:

$$\mathbf{E}[L(\pi_c)] = \left(10\,000 + \frac{\pi_c}{d}\right)A_{35} - \frac{\pi_c}{d} = (0{,}1287194)\left(10\,000 + \frac{\pi_c}{d}\right) - \frac{\pi_c}{d},$$

$$\mathbf{D}[L(\pi_c)] = \left(10\,000 + \frac{\pi_c}{d}\right)^2 [{}^2A_{35} - (A_{35})^2] = \left(10\,000 + \frac{\pi_c}{d}\right)^2 (0{,}01831562).$$

Для каждого из 100 договоров потери $L_i(\pi_c)$ распределены так же, как и с.в. $L(\pi_c)$, $i = 1, 2, \ldots, 100$, и величина

$$S = \sum_{i=1}^{100} L_i(\pi_c)$$

является суммарными потерями по портфелю. В этом случае

$$\mathbf{E}[S] = 100\,\mathbf{E}[L(\pi_c)].$$

Пользуясь предположением о независимости договоров, получаем

$$\mathbf{D}[S] = 100\,\mathbf{D}[L(\pi_c)].$$

Для того чтобы, используя нормальное приближение, найти величину π_c, при которой $\mathbf{P}(S > 0) = 0{,}05$, мы должны найти решение уравнения

$$\frac{0 - \mathbf{E}[S]}{\sqrt{\mathbf{D}[S]}} = 1{,}645,$$

или

$$10\,\frac{-\mathbf{E}[L(\pi_c)]}{\sqrt{\mathbf{D}[L(\pi_c)]}} = 1{,}645,$$

или

$$10\left[\frac{-A_{35}[10\,000 + \pi_c/d] + \pi_c/d}{[10\,000 + \pi_c/d]\sqrt{{}^2A_{35} - (A_{35})^2}}\right] = 1{,}645.$$

Таким образом,

$$\pi_c = 10\,000d\left[\frac{(0{,}1645)\sqrt{{}^2A_{35} - (A_{35})^2} + A_{35}}{1 - (A_{35} + 0{,}1645\sqrt{{}^2A_{35} - (A_{35})^2})}\right] = 100{,}66.$$ ▼

Два тождества (5.3.7) и (5.3.13) можно использовать для выведения соотношений между дискретно выплачиваемыми премиями. Например, исходя из (5.3.7), для договора бессрочного страхования на случай смерти мы имеем

$$d\ddot{a}_x + A_x = 1, \qquad d + P_x = \frac{1}{\ddot{a}_x},$$
$$P_x = \frac{1}{\ddot{a}_x} - d = \frac{1 - d\ddot{a}_x}{\ddot{a}_x} = \frac{dA_x}{1 - A_x}. \tag{6.3.6}$$

Исходя из формулы (5.3.13), мы получаем аналогичную цепочку равенств для договора смешанного страхования на срок n лет:

$$d\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|} = 1, \qquad d + P_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}},$$
$$P_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} - d = \frac{1 - d\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{dA_{x:\overline{n}|}}{1 - A_{x:\overline{n}|}}. \tag{6.3.7}$$

Пример 6.3.4. Дадим словесную интерпретацию следующих равенств из (6.3.6):

$$\frac{1}{\ddot{a}_x} = d + P_x, \tag{6.3.8}$$

$$P_x = \frac{dA_x}{1 - A_x}. \tag{6.3.9}$$

Решение. Мы будем использовать термин «эквивалентность» в смысле равенства актуарных настоящих стоимостей. Рассматривая формулу (6.3.8), заметим сначала, что сумма 1 в настоящий момент эквивалентна страховому аннуитету с выплатой величины $\ddot{a}_x^{-1}$ в начале каждого года, пока лицо (x) живо. Единичная сумма в настоящий момент также эквивалентна выплате в размере ставки дисконта d в начале каждого года до тех пор, пока лицо (x) живо, с возвращением суммы размера 1 в конце года смерти лица (x), т. е. $1 = \ddot{a}_x/\ddot{a}_x = d\ddot{a}_x + A_x$. Возвращение суммы размера 1 в конце года смерти в свою очередь эквивалентно страховому аннуитету пренумерандо P_x, выплачиваемому до тех пор, пока лицо (x) живо. Поэтому сумма размера 1 в настоящий момент эквивалентна выплатам величины $P_x + d$ в начале каждого года, пока лицо (x) живо. Следовательно, $\ddot{a}_x^{-1} = P_x + d$, где обе части равенства представляют собой ежегодные выплаты страхового аннуитета, оплаченного внесением суммы размера 1 в настоящий момент.

Что касается формулы (6.3.9), рассмотрим страхователя (x), который одалживает сумму единовременной нетто-премии, равную A_x, для приобретения договора бессрочного страхования на случай смерти с единовременной премией и страховой выплатой размера 1. Страхователь согласен выплачивать проценты по этому займу вперед в размере dA_x в начале каждого года, пока он жив, при условии возврата суммы A_x из выплаты размера 1 на случай смерти в конце года смерти. По существу страхователь выплачивает ежегодную нетто-премию размера dA_x за страховой договор с суммой страховой выплаты $1 - A_x$. Таким образом, при выплате суммы размера 1 без изъятий по договору страхования размер годовой нетто-премии должен составлять $d\,A_x/(1 - A_x)$. ▼

Аналогичную интерпретацию можно предложить для соответствующих соотношений, относящихся к смешанному страхованию, для второго и пятого равенств из соотношений (6.3.7). Имеется аналогия между равенством (6.3.8), соответствующей формулой для смешанного страхования

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{-1} = P_{x:\overline{n}|} + d$$

и формулой

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{-1} = \ddot{s}_{\overline{n}|} + d$$

из теории финансовых аннуитетов.

Пример 6.3.5. Докажем формулу

$$P_{x:\overline{n}|} = {}_nP_x + P_{x:\overset{\,1}{\overline{n}|}}(1 - A_{x+n}) \tag{6.3.10}$$

и дадим ее интерпретацию.

Решение. Доказательство проведем с использованием табл. 6.3.1:

$$P_{x:\overline{n}|}\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|} = A^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{\,1}{\overline{n}|}}, \qquad {}_nP_x\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = A_x = A^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{\,1}{\overline{n}|}}A_{x+n}.$$

Вычитая, получим

$$(P_{x:\overline{n}|} - {}_nP_x)\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overset{\,1}{\overline{n}|}}(1 - A_{x+n}),$$

откуда следует формула (6.3.10).

Интерпретация заключается в том, что как премия $P_{x:\overline{n}|}$, так и премия ${}_nP_x$ выплачиваются в период жизни лица (x), но не более чем n лет. В течение этих лет по обоим договорам страхования предусмотрена выплата на случай смерти размера 1 в конце года смерти лица (x). Если (x) проживет дольше, чем n лет, то договор с премией $P_{x:\overline{n}|}$ предусматривает выплату размера 1 по истечении этого срока, а договор с ${}_nP_x$ обеспечивает бессрочное страхование на случай смерти без выплаты каких-либо дополнительных премий, т. е. страхование с актуарной настоящей стоимостью A_{x+n}. Таким образом, разность $P_{x:\overline{n}|} - {}_nP_x$ является величиной постоянной ежегодной премии для страхования на дожитие с актуарной настоящей стоимостью $1 - A_{x+n}$. ▼

На практике выплаты по договорам страхования чаще осуществляются вскоре после момента смерти, чем в конце страхового года, в котором произошла смерть, и необходимо рассматривать постоянную ежегодную премию в полунепрерывной модели. Такие премии, перечисленные в порядке, используемом в табл. 6.2.1 и 6.3.1, обозначаются через $P(\bar{A}_x)$, $P(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|})$, $P(\bar{A}_{x:\overline{n}|})$, ${}_hP(\bar{A}_x)$ и ${}_hP(\bar{A}_{x:\overline{n}|})$. Полунепрерывные модели не нужны при рассмотрении договора страхования на дожитие на срок n лет, поскольку в них не предусматриваются выплаты на случай смерти. Применение принципа эквивалентности приводит к формулам, аналогичным тем, которые приведены в табл. 6.3.1, но в которых символ A заменен на $\bar{A}$. Например,

$$P(\bar{A}_x) = \bar{A}_x / \ddot{a}_x \,. \tag{6.3.11}$$

Заметим, что обозначение для такой премии — не $\bar{P}_x$; последнее соответствует ежегодной премии, выплачиваемой непрерывно по договору бессрочного страхования с выплатой размера 1 в конце года смерти и равной $A_x/\bar{a}_x$. Если в каждом годичном возрастном интервале распределение моментов смерти предполагается равномерным, мы можем воспользоваться обозначениями разд. 4.4 и записать

$$P(\bar{A}_x) = \frac{i}{\delta}\,\frac{A_x}{\ddot{a}_x} = \frac{i}{\delta}\,P_x, \quad P(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}) = \frac{i}{\delta}\,P^1_{x:\overline{n}|}, \quad P(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \frac{i}{\delta}\,P^1_{x:\overline{n}|} + P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} \,. \tag{6.3.12}$$

6.4. Премии, выплачиваемые m раз в год

Если премии выплачиваются не один, а m раз в течение года действия договора, и при этом никакой корректировки размера выплаты на случай смерти не производится, то такие премии называются *истинными долевыми премиями*. Через $P_x^{(m)}$ обозначается *истинная постоянная годовая премия*, выплачиваемая через интервалы длины $1/m$ в начале каждого такого интервала по договору бессрочного страхования на случай смерти с выплатой размера 1 в конце года смерти. Символ $P^{(m)}(\bar{A}_x)$ интерпретируется таким же образом, за исключением того, что страховая выплата производится в момент смерти. Обычно m равно 2, 4 или 12.

В настоящем разделе акцент будет сделан на выплате страхового возмещения в конце страхового года, в котором произошла смерть. В табл. 6.4.1 приведены обозначения и формулы для истинных долевых премий по стандартным договорам страхования жизни. Формулы для премий могут быть получены применением принципа эквивалентности.

В некоторых приложениях полезно представлять премии, выплачиваемые m раз в течение страхового года, как ежегодные премии, умноженные на некоторый коэффициент. Мы проиллюстрируем это для ${}_hP^{(m)}_{x:\overline{n}|}$, премии при довольно общем виде страхования. Полученную формулу можно преобразовывать так, чтобы получались формулы для премий по другим широко распространенным видам страхования. Из последней строки табл. 6.4.1 имеем

$$ {}_hP^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{h}|}}. \tag{6.4.1} $$

Поскольку $A_{x:\overline{n}|} = {}_hP^{(m)}_{x:\overline{n}|}\,\ddot{a}_{x:\overline{h}|}$, формулу (6.4.1) можно преобразовать к виду

$$ {}_hP^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \frac{{}_hP_{x:\overline{n}|}\,\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{h}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}. \tag{6.4.2} $$

Формула (6.4.2) используется в следующей главе. Она выражает равенство между премиями, выплачиваемыми m раз в течение страхового года, и соответствующими ежегодными премиями, умноженными на отношение стоимостей аннуитетов. Это отношение можно записывать различными способами, каждый из которых отвечает различным формулам, используемым для выражения связи между $\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{h}|}$ и $\ddot{a}_{x:\overline{h}|}$ (см. упр. 6.14).

Таблица 6.4.1. Истинные долевые премии[1)]

Вид страхового покрытия	Выплата премий: В конце года смерти	Выплата премий: В момент смерти
Бессрочное страхование на случай смерти	$P^{(m)}_x = \dfrac{A_x}{\ddot{a}^{(m)}_x}$	$P^{(m)}(\bar{A}_x) = \dfrac{\bar{A}_x}{\ddot{a}^{(m)}_x}$
Страхование на случай смерти на срок n лет	$P^{1\,(m)}_{x:\overline{n}|} = \dfrac{A^1_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|}}$	$P^{(m)}(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}) = \dfrac{\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|}}$
Смешанное страхование на срок n лет	$P^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \dfrac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|}}$	$P^{(m)}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \dfrac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|}}$
Бессрочное страхование на случай смерти с h-летним сроком выплаты премий	${}_hP^{(m)}_x = \dfrac{A_x}{\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{h}|}}$	${}_hP^{(m)}(\bar{A}_x) = \dfrac{\bar{A}_x}{\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{h}|}}$
Смешанное страхование на срок n лет с h-летним сроком выплаты премий	${}_hP^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \dfrac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{h}|}}$	${}_hP^{(m)}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \dfrac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{h}|}}$

Пример 6.4.1. (a) Пользуясь Иллюстративной таблицей смертности с эффективной годовой процентной ставкой 6%, рассчитаем постоянную ежегодную нетто-премию, выплачиваемую с полугодовой периодичностью, для 10 000 договоров смешанного страхования сроком на 20 лет, заключенных с лицами возраста 50 лет, по которым выплаты осуществляются в конце страхового года смерти (дискретная модель).

(b) Определим величину нетто-премии при выплатах, производящихся в момент смерти (полунепрерывная модель).

В обоих пунктах мы предполагаем, что в каждом годичном возрастном интервале моменты смерти распределены равномерно.

---

1) Фактическая величина каждой долевой премии, выплачиваемой m раз в течение страхового года, пока страхователь (x) жив, равна $P^{(m)}/m$. Обратите внимание, что h относится к числу лет, в течение которых производится выплата премии, а не к тому, сколько раз премия выплачивалась.

Решение. (a) Нам требуется найти величину $10\,000P^{(2)}_{50:\overline{20}|}$. В качестве предварительных шагов подсчитаем

$$d = 0{,}056603774, \quad i^{(2)} = 0{,}059126028, \quad d^{(2)} = 0{,}057428275, \quad \ddot{a}^{(2)}_{\overline{1}|} = 0{,}98564294,$$

$$s^{(2)}_{\overline{1}|} = 1{,}01478151, \quad \alpha(2) = s^{(2)}_{\overline{1}|}\ddot{a}^{(2)}_{\overline{1}|} = 1{,}0002122, \quad \beta(2) = \frac{s^{(2)}_{\overline{1}|} - 1}{d^{(2)}} = 0{,}25739081,$$

а также следующие актуарные настоящие стоимости:

$$\begin{aligned} &\ddot{a}_{50:\overline{20}|} = 11{,}291832, && A^1_{50:\overline{20}|} = 0{,}13036536, && P^1_{50:\overline{20}|} = 0{,}01154510,\\ &{}_{20}E_{50} = 0{,}23047353, && A_{50:\overline{20}|} = 0{,}36083889, && P_{50:\overline{20}|} = 0{,}03195574. \end{aligned}$$

В предположении, что в каждом годичном возрастном интервале моменты смерти распределены равномерно, требуемая премия может быть вычислена с использованием формулы (6.4.1) при $x = 50$, $n = 20$, $h = 20$ и $m = 2$. Для этого подсчитаем

$$\ddot{a}^{(2)}_{50:\overline{20}|} = \alpha(2)\ddot{a}_{50:\overline{20}|} - \beta(2)(1 - {}_{20}E_{50}) = 11{,}096159 \quad \text{и} \quad 10\,000P^{(2)}_{50:\overline{20}|} = 325{,}19.$$

(b) Величину соответствующей премии в полунепрерывной модели можно получить, умножая значение, полученное в п. (a), на отношение

$$\frac{P(\bar{A}_{50:\overline{20}|})}{P_{50:\overline{20}|}} = \frac{\bar{A}_{50:\overline{20}|}}{A_{50:\overline{20}|}}.$$

В предположении о равномерной распределенности смертей это отношение приобретает вид

$$\frac{(i/\delta)P^1_{50:\overline{20}|} + P_{50:\overset{1}{\overline{20}|}}}{P_{50:\overline{20}|}}, \tag{6.4.3}$$

что окончательно приводит к значению

$$10\,000P^{(2)}(\bar{A}_{50:\overline{20}|}) = 328{,}68. \qquad \blacktriangledown$$

6.5. Премии с корректирующим платежом

Вторым типом долевых премий являются *премии с корректирующим платежом*[1]. В этом случае при наступлении смерти возвращается та доля премии, которая относится к временно́му интервалу между моментом смерти и моментом следующей запланированной выплаты премии. На практике это возмещение может осуществляться на пропорциональной основе без учета процента. В настоящем разделе мы учитываем проценты и рассматриваем последовательность выплат премий, производящихся m раз в течение года действия страхового договора, как страховой аннуитет пренумерандо с корректирующим платежом в смысле разд. 5.5. Для обозначения этих постоянных ежегодных нетто-премий с корректирующим платежом, выплата которых происходит m раз в течение страхового года, используются почти такие же символы, как и для истинных долевых премий в полунепрерывных моделях. Они отличаются тем, что верхний индекс m заключен в фигурные, а не в круглые скобки, например, $P^{\{m\}}(\bar{A}_x)$. В контексте возмещения премий естественно предположить, что выплаты на случай смерти производятся в момент смерти.

---

[1]Из приведенного ниже текста читатель увидит, что более точным является более длинный термин «премии в модели с корректирующим платежом». — *Прим. ред.*

Для иллюстрации вывода формул для премий с корректирующим платежом, выплата которых производится m раз в течение страхового года, мы рассматриваем смешанное страхование на срок n лет с h-летним сроком выплаты премий. В силу принципа эквивалентности

$$ {}_hP^{\{m\}}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\ddot{a}^{\{m\}}_{x:\overline{h}|} = \bar{A}_{x:\overline{n}|} \qquad \text{и} \qquad {}_hP^{\{m\}}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}^{\{m\}}_{x:\overline{h}|}}. \tag{6.5.1}$$

Воспользовавшись вариантом формулы (5.5.4) для срочного аннуитета, мы получаем

$$ {}_hP^{\{m\}}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{(\delta/d^{(m)})\bar{a}_{x:\overline{h}|}} = \frac{d^{(m)}}{\delta}\, {}_h\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}). \tag{6.5.2}$$

Отсюда следует, что величина очередного платежа при выплате премий m раз в год равна

$$ \frac{1}{m}{}_hP^{\{m\}}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = {}_h\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\frac{1-v^{1/m}}{\delta} = {}_h\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\bar{a}_{\overline{1/m}|} \tag{6.5.3}$$

и в частном случае $m = 1$

$$ {}_hP^{\{1\}}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = {}_h\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\bar{a}_{\overline{1}|}. \tag{6.5.4}$$

Формулы (6.5.3) и (6.5.4) показывают, что эти премии с корректирующим платежом эквивалентны премиям, рассчитанным в непрерывной модели, дисконтированным с учетом процента к началу каждого интервала выплат. Аналогичные формулы имеются для других типов страховых договоров. Например, при h и n, стремящихся к бесконечности, формула (6.5.4) превращается в такую:

$$ P^{\{1\}}(\bar{A}_x) = \bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{\overline{1}|}. \tag{6.5.5}$$

Как нетто-премия с корректирующим платежом $P^{\{1\}}(\bar{A}_x)$, так и нетто-премия в полунепрерывной модели $P(\bar{A}_x)$ выплачиваются один раз в год в начале каждого года, пока лицо (x) живо. Каждый из этих договоров предусматривает выплаты размера 1 на случай смерти лица (x). Эти два договора различаются только возвратом, предусмотренным в случае $P^{\{1\}}(\bar{A}_x)$. Таким образом, разность

$$ P^{\{1\}}(\bar{A}_x) - P(\bar{A}_x) \tag{6.5.6}$$

является постоянной ежегодной нетто-премией, выплачиваемой в начале каждого года, на покрытие указанного возврата. Далее мы докажем это утверждение относительно разности (6.5.6).

Рассматривая формулу (5.5.1), заметим, что случайная величина настоящей стоимости возвращаемой части премии равна

$$ \frac{P^{\{1\}}(\bar{A}_x)v^T\bar{a}_{\overline{K+1-T}|}}{\bar{a}_{\overline{1}|}}, $$

где случайные величины K и T определялись в гл. 3. Актуарной настоящей стоимостью этой величины является

$$ \bar{A}_x^{\text{ВП}} = P^{\{1\}}(\bar{A}_x)\mathbf{E}\left[v^T\frac{\bar{a}_{\overline{K+1-T}|}}{\bar{a}_{\overline{1}|}}\right]. $$

Воспользовавшись формулой (6.5.5), мы получаем

$$\bar{A}_x^{\text{ВП}} = \bar{P}(\bar{A}_x)\mathbf{E}\left[\frac{v^T - v^{K+1}}{\delta}\right] = \bar{P}(\bar{A}_x)\left(\frac{\bar{A}_x - A_x}{\delta}\right). \qquad (6.5.7)$$

Постоянная ежегодная нетто-премия составит, согласно принципу эквивалентности, величину

$$P(\bar{A}_x^{\text{ВП}}) = \frac{\bar{P}(\bar{A}_x)(\bar{A}_x - A_x)}{\delta \ddot{a}_x}. \qquad (6.5.8)$$

Формула (6.5.7) допускает следующую интерпретацию: актуарная настоящая стоимость возврата является разностью между стоимостью непрерывного бессрочного финансового аннуитета[1)] с годовой выплатой размера $\bar{P}(\bar{A}_x)$, начинающегося с момента смерти лица (x), и стоимостью непрерывного бессрочного финансового аннуитета с годовой выплатой размера $\bar{P}(\bar{A}_x)$, начинающегося с конца года смерти лица (x).

Теперь мы возвращаемся к соотношению (6.5.6), где, согласно (6.5.5),

$$\begin{aligned} P^{\{1\}}(\bar{A}_x) - P(\bar{A}_x) &= \bar{P}(\bar{A}_x)\,\frac{d}{\delta} - \frac{\bar{A}_x}{\ddot{a}_x} = \bar{P}(\bar{A}_x)\left(\frac{d}{\delta} - \frac{\bar{a}_x}{\ddot{a}_x}\right) \\ &= \bar{P}(\bar{A}_x)\frac{d\,\ddot{a}_x - \delta\bar{a}_x}{\delta\ddot{a}_x} = \bar{P}(\bar{A}_x)\frac{\bar{A}_x - A_x}{\delta\ddot{a}_x} = P(\bar{A}_x^{\text{ВП}}). \qquad (6.5.9)\end{aligned}$$

Здесь мы использовали равенство (6.5.8). Это доказывает наше утверждение относительно разности (6.5.6).

Проведенный анализ можно распространить на выплаты премий, производящиеся m раз в течение страхового года, и на иные договоры страхования жизни, не только бессрочные. В общем случае

$$P^{\{m\}}(\bar{A}) - P^{(m)}(\bar{A})$$

является величиной премии, выплачиваемой m раз в год, на покрытие возврата.

Пример 6.5.1. Предположим, что договор из примера 6.4.1(b) должен предусматривать корректирующий платеж. Насколько в этом случае увеличится ежегодная нетто-премия?

Решение. Ежегодная нетто-премия с корректирующим платежом за единицу страхового покрытия задается формулой (6.5.2),

$$P^{\{2\}}(\bar{A}_{50:\overline{20}|}) = \bar{P}(\bar{A}_{50:\overline{20}|})\,\frac{d^{(2)}}{\delta} = \frac{\bar{A}_{50:\overline{20}|}}{\bar{a}_{50:\overline{20}|}}\,\frac{d^{(2)}}{\delta}.$$

В предположении равномерности распределения смертей в каждом годичном возрастном интервале это выражение приобретает вид

$$\frac{(i/\delta)A^1_{50:\overline{20}|} + A_{50:\overset{1}{\overline{20}|}}}{\alpha(\infty)\ddot{a}_{50:\overline{20}|} - \beta(\infty)(1 - {}_{20}E_{50})}\,\frac{d^{(2)}}{\delta} = \frac{(i/\delta)P^1_{50:\overline{20}|} + P_{50:\overset{1}{\overline{20}|}}}{\alpha(\infty) - \beta(\infty)(P^1_{50:\overline{20}|} + d)}\,\frac{d^{(2)}}{\delta}.$$

Здесь $\alpha(\infty) = \bar{s}_{\overline{1}|}\bar{a}_{\overline{1}|} = i\,d/\delta^2 = 1{,}00028$, $\beta(\infty) = (\bar{s}_{\overline{1}|} - 1)/\delta^2 = 0{,}50985$. Пользуясь другими значениями, приведенными в примере 6.4.1, мы находим

$$10\,000\,P^{\{2\}}(\bar{A}_{50:\overline{20}|}) = 329{,}69.$$

[1)]Непрерывные бессрочные финансовые аннуитеты (ренты) определены в книге: Гербер Х. Математика страхования жизни. — М.: Мир, 1995, разд. 1.6. Рекомендуем читателю обратить внимание на формулу (1.6.5) для настоящей (текущей) стоимости этого аннуитета. — *Прим. ред.*

Таким образом, увеличение годовой премии составит

$$10\,000[P^{\{2\}}(\bar{A}_{50:\overline{20}|}) - P^{(2)}(\bar{A}_{50:\overline{20}|})] = 1{,}01,$$

что является величиной годовой нетто-премии, выплачиваемой дважды в год, на покрытие возврата. ▼

6.6. Выплаты накопительного типа

Анализ в этом разделе будет проводиться в терминах ежегодных премий и страховых выплат, производящихся в конце года смерти. Аналогичный анализ может быть проведен для непрерывных моделей и, с определенными коррективами, для полунепрерывных моделей. Прежде всего, мы ищем актуарную настоящую стоимость договора страхования на случай смерти на срок n лет, заключенного с лицом (x), по которому страховая сумма равна $\ddot{s}_{\overline{k+1}|j}$, если смерть произойдет в год с номером $k+1$. Случайная величина настоящей стоимости такой выплаты на момент заключения страхового договора равна

$$W = \begin{cases} v^{K+1}\ddot{s}_{\overline{k+1}|j} = [v^{K+1}(1+j)^{K+1} - v^{K+1}]/d_{(j)}, & 0 \leqslant K < n, \\ 0, & K \geqslant n, \end{cases}$$

где настоящие стоимости для страховщика вычислены при процентной ставке i, а $d_{(j)}$ является ставкой дисконта, эквивалентной процентной ставке j. Актуарная настоящая стоимость равна

$$\mathbf{E}[W] = ({A'}^{1}_{x:\overline{n}|} - A^{1}_{x:\overline{n}|})/d_{(j)}, \tag{6.6.1}$$

где величина ${A'}^{1}_{x:\overline{n}|}$ вычисляется при процентной ставке $i' = (i-j)/(1+j)$.

Если $i = j$, то $i' = 0$ и актуарная настоящая стоимость равна

$$\frac{{}_nq_x - A^{1}_{x:\overline{n}|}}{d} = \frac{1 - {}_np_x - A_{x:\overline{n}|} + v^n{}_np_x}{d} = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - {}_np_x\,\ddot{a}_{\overline{n}|} = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - {}_nE_x\,\ddot{s}_{\overline{n}|}. \tag{6.6.2}$$

Формула (6.6.2) показывает, что при $j = i$ этот специальный договор срочного страхования эквивалентен страховому аннуитету пренумерандо сроком на n лет до того момента, пока (x) не проживет n лет. После этого договор срочного страхования предусматривает нулевые выплаты, в то время как выплаты по страховому аннуитету при условии дожития до n лет будут равны $\ddot{s}_{\overline{n}|}$ в момент времени n.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда лицо (x) может выбирать между приобретением договора смешанного страхования на срок n лет с выплатами размера 1 и с ежегодной премией $P_{x:\overline{n}|}$ или созданием сберегательного вклада со взносами величины $1/\ddot{s}_{\overline{n}|}$ в начале каждого из n лет и приобретением специального срочного договора страхования с уменьшающимися выплатами. Согласно этому специальному договору страхования в случае смерти в году с номером $k+1$ будет выплачена разность

$$1 - \ddot{s}_{\overline{k+1}|}/\ddot{s}_{\overline{n}|}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

между страховой выплатой размера 1 при смешанном страховании и суммой, накопленной на сберегательном вкладе. Предположим далее, что при проведении этих операций используется одна и та же процентная ставка i. По смешанному страхованию и по комбинации специального договора страхования и сберегательного вклада предусматриваются одинаковые выплаты. Поэтому можно ожидать, что

(ежегодная нетто-премия $P_{x:\overline{n}|}$ по смешанному страхованию)
= (ежегодная нетто-премия по специальному договору страхования)
+ (ежегодный взнос в сберегательный вклад $1/\ddot{s}_{\overline{n}|}$).

Для проверки этого предположения рассмотрим случайную величину настоящей стоимости для специального срочного страхования с уменьшающейся выплатой,

$$\widetilde{W} = \begin{cases} v^{K+1}\left(1 - \dfrac{\ddot{s}_{\overline{K+1}|}}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}\right) = v^{K+1} - \dfrac{\ddot{a}_{\overline{K+1}|}}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}, & 0 \leqslant K < n, \\ 0, & K \geqslant n. \end{cases} \tag{6.6.3}$$

Актуарная настоящая стоимость с.в. $\widetilde{W}$ обозначается через $\tilde{A}^1_{x:\overline{n}|}$ и задается соотношениями

$$\tilde{A}^1_{x:\overline{n}|} = \mathbf{E}[\widetilde{W}] = A^1_{x:\overline{n}|} - \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - {}_np_x\ddot{a}_{\overline{n}|}}{\ddot{s}_{\overline{n}|}} = A^1_{x:\overline{n}|} - \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - {}_nE_x\ddot{s}_{\overline{n}|}}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}$$

[см. (6.6.2)].

Ежегодная нетто-премия для специального срочного страхования равна поэтому

$$\tilde{P}^1_{x:\overline{n}|} = \frac{\tilde{A}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = P^1_{x:\overline{n}|} - \frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}|}} + P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = P_{x:\overline{n}|} - \frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}|}},$$

и, значит,

$$P_{x:\overline{n}|} = \tilde{P}^1_{x:\overline{n}|} + \frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}. \tag{6.6.4}$$

Мы уже видели, что

$$P_{x:\overline{n}|} = P^1_{x:\overline{n}|} + P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}},$$

а теперь равенство (6.6.4) дает другое разложение для $P_{x:\overline{n}|}$. Компонентами в нем являются ежегодные премии для специального срочного страхования и ежегодные взносы в сберегательный вклад $1/\ddot{s}_{\overline{n}|}$, которые накапливаются, давая в сумме единицу по истечении n лет.

Пример 6.6.1. Выведем формулы для ежегодной нетто-премии по страховому договору на срок 20 лет, заключенному с лицом (x), согласно которому, если смерть наступает в течение 20 лет, происходит возврат годовой нетто-премии

(a) без учета процента,

(b) накопленной при процентной ставке, которая используется в определении величины премий.

В каждом случае возврат премии осуществляется в дополнение к страховой выплате размера 5000 и выплаты осуществляются в конце того года, когда произошла смерть.

Решение. (a) Пусть π_a обозначает нетто-премию. Тогда

$$\pi_a\,\ddot{a}_{x:\overline{20}|} = 5000A^1_{x:\overline{20}|} + \pi_a(IA)^1_{x:\overline{20}|} \qquad \text{и} \qquad \pi_a\,\ddot{a}_{x:\overline{20}|} = 5000\,\frac{A^1_{x:\overline{20}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{20}|} - (IA)^1_{x:\overline{20}|}}.$$

(b) Пусть π_b обозначает нетто-премию. Пользуясь формулой (6.6.2), мы получаем

$$\pi_b\, \ddot{a}_{x:\overline{20}|} = 5000 A^{\,1}_{x:\overline{20}|} + \pi_b(\ddot{a}_{x:\overline{20}|} - {}_{20}E_x\, \ddot{s}_{\overline{20}|}), \qquad \pi_b\, {}_{20}E_x\, \ddot{s}_{\overline{20}|} = 5000 A^{\,1}_{x:\overline{20}|},$$

$$\pi_b = 5000\,\frac{A^{\,1}_{x:\overline{20}|}}{{}_{20}E_x\, \ddot{s}_{\overline{20}|}} = 5000\,\frac{A^{\,1}_{x:\overline{20}|}}{{}_{20}p_x\, \ddot{a}_{\overline{20}|}}\,.$$

На практике должны возвращаться ежегодные брутто-премии, и в формулах это должно учитываться. ▼

Пример 6.6.2. Отсроченный аннуитет для лица (x) с ежегодными выплатами размера 1, которые начинаются в возрасте $x+n$, должен оплачиваться постоянными ежегодными нетто-премиями в течение периода отсрочки. Выплата на случай смерти, наступившей в течение периода выплаты премий, состоит в возврате ежегодных нетто-премий, накопленных с учетом процента, при той же процентной ставке, которая применялась для расчета премии. Предполагая, что выплаты на случай смерти производятся в конце года смерти, определим величину ежегодной нетто-премии.

Решение. Приравнивая актуарную настоящую стоимость ежегодной нетто-премии π к актуарной настоящей стоимости выплат аннуитета, мы имеем

$$\pi\, \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = {}_nE_x\, \ddot{a}_{x+n} + \pi(\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - {}_nE_x\, \ddot{s}_{\overline{n}|}),$$

причем второе слагаемое в правой части возникает из формулы (6.6.2). Разрешая относительно π, получаем

$$\pi = \ddot{a}_{x+n}/\ddot{s}_{\overline{n}|}\,.$$ ▼

6.7. Замечания и литература

В статье [Lukacs 1948] содержится обзор того, как развивался принцип эквивалентности. В литературе, посвященной экономике неопределенностей, премии, рассчитанные с использованием принципа эквивалентности, часто называют актуарными премиями. В работах Гербера [Gerber 1976, 1979] обсуждались показательные премии и резервы. Они иллюстрируются примером 6.1.1, в котором используется принцип III. Долевые премии различных видов имеют важное практическое значение. Шер [Scher 1974] обсуждал ряд тем в этой области, а именно, связи между премиями в непрерывной модели, премиями с корректирующим платежом и премиями в полунепрерывной модели. Разложение премии в смешанном страховании было введено в работе [Linton 1919].

Упражнения

К разделу 6.1

6.1. Подсчитайте математическое ожидание и дисперсию настоящей стоимости финансовых потерь для страхового договора из примера 6.1.1, если премии определяются, исходя из принципа I.

6.2. Проверьте, что показательная премия (с $\alpha = 0{,}1$) для договора страхования из примера 6.1.1, измененного так, чтобы сумма страховой выплаты была равна 10, равняется 3,45917. (Обратите внимание, что это значение приблизительно в 11,3 раз больше, чем показательная премия для договора со страховой выплатой 1, рассчитанная в примере 6.1.1.)

6.3. Воспользовавшись предположениями из примера 6.1.1, определите размер ежегодной премии, которая максимизирует ожидаемую полезность для страховщика с начальным капиталом $w = 10$ и функцией полезности $u(x) = x - 0{,}01x^2$, $x < 50$. [Указание. Воспользуйтесь соотношением (1.3.6), $w - 0{,}01w^2 = \mathbf{E}[(w - L) - 0{,}01(w - L)^2]$.]

К разделу 6.2

6.4. Рассмотрим бессрочное страхование на случай смерти со страховой выплатой размера 1 и постоянной премией в непрерывной модели. Случайная величина $T(x)$, продолжительность предстоящей жизни, имеет показательное распределение с $\mathbf{E}[T(x)] = 50$, и интенсивность начисления процента δ равна 0,06.

(a) Найдите ежегодную нетто-премию, если используется принцип эквивалентности.

(b) Найдите ежегодную нетто-премию, расчет которой основан на требовании $\mathbf{P}(L > 0) = 0{,}50$.

(c) Повторите задачу п. (b), предполагая, что интенсивность начисления процента δ равна 0.

6.5. Пусть интенсивность смертности строго возрастает с возрастом. Покажите, что $\bar{P}(\bar{A}_x) > \mu_x(0)$. [Указание. Покажите, что $\bar{P}(\bar{A}_x)$ является взвешенным средним величин $\mu_x(t)$, $t > 0$.]

6.6. Следуя рассуждениям примера 6.2.1, найдите общее выражение для

$$\frac{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}{(\delta\bar{a}_x)^2},$$

где $\mu_x(t) = \mu$ и δ является интенсивностью начисления процента для $t > 0$.

6.7. Если $\delta = 0$, покажите, что

$$\bar{P}(\bar{A}_x) = 1/\mathring{e}_x\,.$$

6.8. Докажите, что дисперсия потерь по договору бессрочного страхования на случай смерти с единовременной премией меньше дисперсии потерь по договору бессрочного страхования на случай смерти с ежегодной выплатой премий. Считайте, что страховые выплаты осуществляются в момент смерти и что нетто-премии выплачиваются непрерывно.

6.9. Покажите, что

$$\left(1 + \frac{d\bar{a}_x}{dx}\right)\bar{P}(\bar{A}_x) - \frac{d\bar{A}_x}{dx} = \mu(x).$$

К разделу 6.3

6.10. На основе Иллюстративной таблицы смертности и процентной ставки 6% вычислите величину ежегодных премий в следующей таблице. Отметьте все возможные неравенства, которые возникают в матрице результатов.

Непрерывная модель	Полунепрерывная модель	Дискретная модель
$\bar{P}(\bar{A}_{35:\overline{10}\rceil})$	$P(\bar{A}_{35:\overline{10}\rceil})$	$P_{35:\overline{10}\rceil}$
$\bar{P}(\bar{A}_{35:\overline{30}\rceil})$	$P(\bar{A}_{35:\overline{30}\rceil})$	$P_{35:\overline{30}\rceil}$
$\bar{P}(\bar{A}_{35:\overline{60}\rceil})$	$P(\bar{A}_{35:\overline{60}\rceil})$	$P_{35:\overline{60}\rceil}$
$\bar{P}(\bar{A}_{35})$	$P(\bar{A}_{35})$	P_{35}
$\bar{P}(\bar{A}^1_{35:\overline{30}\rceil})$	$P(\bar{A}^1_{35:\overline{30}\rceil})$	$P^1_{35:\overline{30}\rceil}$
$\bar{P}(\bar{A}^1_{35:\overline{10}\rceil})$	$P(\bar{A}^1_{35:\overline{10}\rceil})$	$P^1_{35:\overline{10}\rceil}$

6.11. Покажите, что

$${}_{20}P^1_{x:\overline{30}\rceil} - P^1_{x:\overline{20}\rceil} = {}_{20}P({}_{20|10}A_x).$$

6.12. Обобщите пример 6.3.1, где ${}_{k|}q_x = (1 - r)r^k$, $k = 0, 1, 2\ldots$; другими словами, найдите выражения в терминах r и i для A_x, $\ddot{a}_x$, P_x и $[{}^2A_x - (A_x)^2]/(d\ddot{a}_x)^2$.

К разделу 6.4

6.13. Пользуясь информацией, приведенной в примере 6.4.1, вычислите значение $P^{(2)}_{50}$.

6.14. Пользуясь различными формулами для $\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|}$ и либо предположением о равномерности распределения моментов смерти в каждом годичном возрастном интервале, либо формулой (5.4.10), покажите, что отношение $\ddot{a}_{x:\overline{h}|}/\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{h}|}$ в соотношении (6.4.2) можно представить как величину, обратную к

(a) $\ddot{a}^{(m)}_{\overline{1}|} - \beta(m)P^{1}_{x:\overline{h}|}$, (b) $\alpha(m) - \beta(m)(P^{1}_{x:\overline{h}|} + d)$, (c) $1 - \dfrac{m-1}{2m}(P^{1}_{x:\overline{h}|} + d)$.

6.15. Вычислите двумя способами, ссылаясь на пример 6.4.1(b) и непосредственно, величину $P^{(2)}(\bar{A}_{50:\overline{20}|}) = \bar{A}_{50:\overline{20}|}/\ddot{a}^{(2)}_{50:\overline{20}|}$. При этом используйте Иллюстративную таблицу смертности для актуарных настоящих стоимостей как в числителе, так и в знаменателе.

6.16. Если $P^{1\,(12)}_{x:\overline{20}|}/P^{1}_{x:\overline{20}|} = 1{,}032$ и $P_{x:\overline{20}|} = 0{,}040$, то каково значение $P^{(12)}_{x:\overline{20}|}$?

К разделу 6.5

6.17. Упорядочите по возрастанию величины $P^{(2)}(\bar{A}_{40:\overline{25}|})$, $\bar{P}(\bar{A}_{40:\overline{25}|})$, $P^{\{4\}}(\bar{A}_{40:\overline{25}|})$, $P(\bar{A}_{40:\overline{25}|})$ и $P^{\{12\}}(\bar{A}_{40:\overline{25}|})$ и обоснуйте свой вывод.

6.18. При условии, что $d/d^{(12)} = 99/100$, вычислите $P^{\{12\}}(\bar{A}_x)/P^{\{1\}}(\bar{A}_x)$.

6.19. Пусть $\bar{P}(\bar{A}_x) = 0{,}03$, и пусть эффективная годовая процентная ставка составляет 5%. Вычислите величину полугодовой нетто-премии для 50 000 договоров бессрочного страхования на случай смерти для лиц возраста (x) в случае премий с корректирующим платежом.

6.20. Покажите, что

$$P^{\{m\}}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) - P^{(m)}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\,\frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|} - A^{(m)}_{x:\overline{n}|}}{\delta \ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|}} = \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\,\frac{\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} - A^{1\,(m)}_{x:\overline{n}|}}{\delta \ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|}}.$$

К разделу 6.6

6.21. Выразите величину $1-\ddot{s}_{\overline{20}|}/\ddot{s}_{45:\overline{20}|}$ в виде ежегодной премии. Дайте интерпретацию полученного результата.

6.22. На основе Иллюстративной таблицы смертности и процентной ставки 6% вычислите компоненты следующих двух разложений:

(a) $1000P_{50:\overline{20}|} = 1000(P^{1}_{50:\overline{20}|} + P_{50:\overset{\ 1}{\overline{20}|}})$, (b) $1000P_{50:\overline{20}|} = 1000(\tilde{P}^{1}_{50:\overline{20}|} + 1/\ddot{s}_{\overline{20}|})$.

6.23. Рассмотрим аналог формулы (6.6.3) для непрерывной случайной величины

$$\widetilde{\widetilde{W}} = \begin{cases} v^T(1 - \bar{s}_{\overline{T}|}/\bar{s}_{\overline{n}|}), & 0 \leqslant T < n, \\ 0, & T \geqslant n. \end{cases}$$

Основываясь на принципе эквивалентности, потери

$$L = \widetilde{\widetilde{W}} - \bar{\bar{A}}^{1}_{x:\overline{n}|}$$

можно использовать для определения единовременной нетто-премии $\bar{\bar{A}}^{1}_{x:\overline{n}|}$ для такого специального договора. Покажите, что

(a) $\bar{\bar{A}}^{1}_{x:\overline{n}|} = \bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} - \dfrac{\bar{a}_{x:\overline{n}|} - {}_np_x\,\bar{a}_{\overline{n}|}}{\bar{s}_{\overline{n}|}}$, (b) $\mathbf{E}[\widetilde{\widetilde{W}}^2] = \dfrac{(1+i)^{2n}\,{}^2\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} - 2(1+i)^n \bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} + (1 - {}_np_x)}{[(1+i)^n - 1]^2}$.

Ко всем темам главы

6.24. Выразите $A_{40}\,P_{40:\overline{25}|} + (1 - A_{40})P_{40}$ в виде ежегодной нетто-премии. Дайте интерпретацию полученного результата.

6.25. (a) Покажите, что

$$\frac{1}{\ddot{a}_{65:\overline{10}|}} - \frac{1}{\ddot{s}_{65:\overline{10}|}} = P^{1}_{65:\overline{10}|} + d.$$

(b) Каков вид соответствующей формулы для

$$\frac{1}{\ddot{a}^{(12)}_{65:\overline{10}|}} - \frac{1}{\ddot{s}^{(12)}_{65:\overline{10}|}}?$$

(c) Покажите, что величина годовых поступлений, обеспеченных единовременной нетто-премией размера 10 000, при условии, что

- выплаты производятся в начале каждого месяца, пока лицо (65) живо, в течение последующих 10 лет,
- единовременная премия возвращается по прошествии 10 лет, если лицо (65) доживет до возраста 75 лет,

задается выражением

$$100\,000\left(\frac{1}{\ddot{a}^{(12)}_{65:\overline{10}|}} - \frac{1}{\ddot{s}^{(12)}_{65:\overline{10}|}}\right) = 100\,000(\beta),$$

где через (β) обозначается ответ на п. (b) настоящего упражнения.

6.26. По страховому договору, заключенному с лицом (35), с постоянными премиями, выплачиваемыми до возраста 65 лет, предусмотрены

- выплата величины 100 000, если страхователь доживет до возраста 65 лет, и
- возврат ежегодных брутто-премий с процентами, рассчитанными по процентной ставке на конец того года, когда произошла смерть, если страхователь не доживет до 65 лет.

Полагая, что величина ежегодной брутто-премии G равна $1{,}1\,\pi$, где π является ежегодной нетто-премией, выпишите выражение для π.

6.27. Вычислите $P^{1}_{45:\overline{15}|}$, если ${}_{15}P_{45} = 0{,}038$, $P_{45:\overline{15}|} = 0{,}056$ и $A_{60} = 0{,}625$.

6.28. Договор страхования на случай смерти с выплатами премий в течение 20 лет устроен так, что в случае смерти страхователю выплачивается 10 000 плюс все брутто-премии без учета процентов. Положение о возврате премий применяется как в период выплаты премий, так и после него. Премии выплачиваются ежегодно, а выплата на случай смерти производится в конце того года, когда наступает смерть. По договору, заключенному с лицом (x), величина ежегодной брутто-премии составляет 110% от нетто-премии плюс 25. Выразите в терминах актуарных настоящих стоимостей и запишите в соответствующих обозначениях величину ежегодной брутто-премии.

6.29. Выразите в терминах актуарных настоящих стоимостей и запишите в соответствующих обозначениях величину ежегодной нетто-премии в начальный момент для договора бессрочного страхования на случай смерти, заключенного с лицом (25) на следующих условиях:

- страховая сумма, указанная в договоре, должна быть равна 1 для первых 10 лет и 2 для всех последующих лет,
- каждая премия в течение первых 10 лет равна 1/2 каждой премии, выплачиваемой впоследствии,
- премии выплачиваются ежегодно вплоть до возраста 65 лет,
- страховые выплаты осуществляются в конце года смерти.

6.30. Пусть с.в. L_1 обозначает потери страховщика на единицу страховых выплат договора бессрочного страхования на случай смерти, заключенного с лицом (x), в непрерывной модели. Пусть с.в. L_2 обозначает потери лица (x) по страховому аннуитету с непрерывными выплатами, приобретенному ценой выплаты единовременной премии величины 1. Покажите, что $L_1 \equiv L_2$ и дайте словесное пояснение этого тождества.

6.31. Рассмотрим стандартный договор страхования на случай смерти со страховой выплатой размера 1, заключенный с лицом возраста x, выплачивающим ежегодную премию размера 0,048, в дискретной модели. Предположим, что $d = 0{,}06$, $A_x = 0{,}4$ и ${}^2A_x = 0{,}2$. Пусть L является функцией потерь страховщика в момент заключения договора.

(a) Вычислите $\mathbf{E}[L]$.

(b) Вычислите $\mathbf{D}[L]$.

(c) Рассмотрите портфель, состоящий из 100 договоров указанного типа со страховыми суммами, указанными ниже:

Страховая сумма	Число договоров
1	80
4	20

Предположив, что потери происходят независимо друг от друга и воспользовавшись нормальным приближением, вычислите вероятность того, что настоящая стоимость дохода по портфелю превзойдет величину 20.

6.32. Выразите в терминах актуарных настоящих стоимостей величину начальной годовой нетто-премии для договора бессрочного страхования на случай смерти с выплатой размера 1 для страхователя (x), если после 5 лет годовая нетто-премия удваивается по сравнению с премией, выплачивавшейся первые пять лет. Считайте, что выплаты на случай смерти производятся в момент смерти.

6.33. Решите упр. 6.20 повторно для договора бессрочного страхования на случай смерти с h-летним сроком выплаты премий.

6.34. Функция $l(t)$ задается соотношением (6.2.1).

(a) Докажите, что $l''(t) \geqslant 0$.

(b) Воспользуйтесь неравенством Иенсена из разд. 1.3 для доказательства того, что если $\bar{P} = \bar{P}(\bar{A}_x)$, то $\bar{P}(\bar{A}_x) \geqslant v^{\mathring{e}_x}/\bar{a}_{\overline{\mathring{e}_x}|}$.

6.35. Пусть случайная величина $T(x)$ имеет показательное распределение с параметром μ.

(a) Найдите функцию плотности с.в. L, общая формула для которой приведена в (6.2.12).

(b) Покажите, что $\mathbf{E}[L] = (\mu - \bar{P})/(\mu + \delta)$.

(c) Воспользовавшись п. (b), докажите, что $\mathbf{E}[L] = 0$ при $\bar{P} = \bar{P}(\bar{A}_x)$.

6.36. Используя предположения упр. 6.35 при $\mu = 0{,}03$ и $\delta = 0{,}06$,

(a) вычислите $\mathbf{P}(L \leqslant 0)$ при $\bar{P} = \bar{P}(\bar{A}_x)$,

(b) определите $\bar{P}$ так, чтобы $\mathbf{P}(L > 0) = 0{,}5$.

7

НЕТТО-РЕЗЕРВЫ

7.1. Введение

В гл. 6 мы изложили несколько принципов, которые могут быть использованы для определения нетто-премии. В обсуждениях гл. 6 широко используется принцип эквивалентности. Согласно этому принципу, отношение эквивалентности устанавливается на дату, когда вступает в силу долгосрочный договор между двумя сторонами, договорившимися об обмене серией платежей. Например, при долгосрочной ссуде заемщик может производить серию равных ежемесячных платежей, эквивалентных единовременной сумме, выплаченной кредитором в момент выдачи ссуды. Страхователь может выплачивать страховщику серию нетто-премий, на дату заключения договора эквивалентную сумме, выплачиваемой страховщиком либо в связи со смертью страхователя, либо в случае его дожития до даты завершения договора. Физическое лицо может купить отсроченный аннуитет у компании за счет выплаты ей постоянных премий, эквивалентных на дату заключения договора тем ежемесячным аннуитетным выплатам, которые это лицо будет получать от данной компании с момента, когда достигнет определенного в договоре возраста. Эквивалентность в примере с ссудой сформулирована в терминах настоящей стоимости, а в примерах со страхованием и аннуитетами это — эквивалентность между двумя актуарными настоящими стоимостями.

Тем не менее по прошествии некоторого периода времени эквивалентность между будущими финансовыми обязательствами двух сторон окажется нарушенной. Может случиться так, что заемщик должен будет продолжать платежи для покрытия остатка долга, в то время как кредитор уже выполнил свои обязательства. В другой ситуации обязательства могут оставаться у обеих сторон. Страхователь, возможно, должен будет продолжать выплату нетто-премий, в то время как у страховщика останется обязательство выплатить страховую сумму по окончании срока договора или в случае смерти страхователя. В нашем примере с отсроченным аннуитетом физическое лицо может завершить свои платежи, в то время как компания еще должна продолжать ежемесячные выплаты.

В этой главе мы исследуем платежи в периоды времени после даты вступления договора в силу. Для этого требуется балансирующая статья, и эта статья будет пассивом для одной из сторон и активом для другой. В случае ссуды балансирующая статья является непогашенной суммой долга, активом для кредитора и пассивом для заемщика. В двух других случаях, если лицо еще живо, балансирующая статья будет называться резервом. Этот резерв обычно является обязательствами, которые должны быть отражены в любой финансовой отчетности страховщика или компании, выплачивающей аннуитеты. Он также обычно является активом для страхователя или лица, которому выплачивается аннуитет.

Проиллюстрируем расчет размера балансирующей статьи, о которой говорилось выше, продолжив пример 6.1.1 в двух случаях, в которых при определении принципа расчета премии использовалась функция полезности.

Пример 7.1.1. Страховщик заключает договор страхования с выплатой размера 1 в конце года смерти в обмен на выплату премии P в начале каждого года, пока страхователь жив. Предположим, что страхователь жив спустя год после заключения договора страхования. Далее, предположим, что страховщик использует процентную ставку $i = 0{,}06$ и следующее предположение о смертности в терминах случайной величины K:

$$_{k|}q_0 = 0{,}2, \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Найдем резерв ${}_1V$, определенный согласно

(a) принципу II: страховщику, использующему функцию полезности $u(x) = x$, безразлично, оставлять ли риск на собственном удержании, получая премии размера 0,30272 (из примера 6.1.1), или выплатить перестраховщику сумму ${}_1V$ для передачи риска;

(b) принципу III: страховщику, использующему функцию полезности $u(x) = -e^{-0{,}1x}$, безразлично, оставлять ли риск на собственном удержании, получая премии размера 0,30628 (из примера 6.1.1), или выплатить перестраховщику сумму ${}_1V$ для передачи риска.

Решение. Условная функция вероятностей для с.в. K пошаговой продолжительности предстоящей жизни при условии $K \geqslant 1$ записывается следующим образом:

$$\mathbf{P}(K = k \,|\, K \geqslant 1) = \frac{\mathbf{P}(K = k)}{\mathbf{P}(K \geqslant 1)} = \frac{0{,}2}{0{,}8} = 0{,}25, \qquad k = 1, 2, 3, 4.$$

Настоящая стоимость будущих финансовых потерь страховщика через один год после заключения договора составляет ${}_1L = v^{(K-1)+1} - P\ddot{a}_{\overline{(K-1)+1|}}$, где P — премия, определенная в примере 6.1.1.

(a) Согласно формуле (1.3.1), найдем такую величину ${}_1V$, что

$$u(w - {}_1V) = \mathbf{E}[u(w - {}_1L) \,|\, K \geqslant 1].$$

Согласно принципу II, $u(x) = x$, так что

$$w - {}_1V = \mathbf{E}[w - {}_1L \,|\, K \geqslant 1] = w - \mathbf{E}[{}_1L \,|\, K \geqslant 1].$$

Иными словами, принцип II эквивалентен требованию, чтобы величина ${}_1V$ удовлетворяла условию ${}_1V = \mathbf{E}[{}_1L \,|\, K \geqslant 1]$. Для этого примера данное требование можно представить в виде

$$\begin{aligned} {}_1V &= \sum_{k=1}^{4} \left(v^{(k-1)+1} - 0{,}30272\ddot{a}_{\overline{(k-1)+1|}}\right) \mathbf{P}(K = k \,|\, K \geqslant 1) \\ &= \sum_{k=1}^{4} v^{(k-1)+1} \mathbf{P}(K = k \,|\, K \geqslant 1) - 0{,}30272 \sum_{k=1}^{4} \ddot{a}_{\overline{(k-1)+1|}} \mathbf{P}(K = k \,|\, K \geqslant 1), \end{aligned} \qquad (7.1.1)$$

и это дает ${}_1V = 0{,}15111$, как показано в следующей таблице.

k	Условная вероятность	Настоящая стоимость (год спустя после заключения договора) будущих обязательств		Перспективные[1] потери страховщика
		страховщика	страхователя	
1	0,25	$v = 0{,}94340$	$P\ddot{a}_{\overline{1}\vert} = 0{,}30272$	0,64067
2	0,25	$v^2 = 0{,}89000$	$P\ddot{a}_{\overline{2}\vert} = 0{,}58831$	0,30169
3	0,25	$v^3 = 0{,}83962$	$P\ddot{a}_{\overline{3}\vert} = 0{,}85773$	−0,01811
4	0,25	$v^4 = 0{,}79209$	$P\ddot{a}_{\overline{2}\vert} = 1{,}11191$	−0,31981
Математическое ожидание		0,86628	0,71517	0,15111

Актуарная настоящая стоимость перспективных потерь страховщика равна

$$0{,}86628 - 0{,}71517 = 0{,}15111.$$

(b) Вновь используя формулу (1.3.1) и принцип III, получаем

$$-e^{-0,1(w-{}_1V)} = \mathbf{E}[-e^{-0,1(w-{}_1L)} \,|\, K \geqslant 1] = -e^{-0,1w}\mathbf{E}[e^{0,1\,{}_1L} \,|\, K \geqslant 1].$$

Следовательно, принцип III эквивалентен требованию, чтобы величина ${}_1V$ удовлетворяла условию $e^{0,1\,{}_1V} = \mathbf{E}[e^{0,1\,{}_1L} \,|\, K \geqslant 1]$ или ${}_1V = 10 \ln \mathbf{E}[e^{0,1\,{}_1L} \,|\, K \geqslant 1]$.

В следующей таблице сведены расчеты резерва ${}_1V$, использующие премию размера 0,30628 из п. (c) примера 6.1.1.

k	Условная вероятность	Перспективные потери страховщика ${}_1L$	$e^{(0,1\,{}_1L)}$
1	0,25	0,63712	1,06579
2	0,25	0,29477	1,02992
3	0,25	−0,02819	0,99718
4	0,25	−0,33287	0,96726

Таким образом, $\mathbf{E}[e^{0,1\,{}_1L} \,|\, K \geqslant 1] = (1{,}06579 + 1{,}02992 + 0{,}99718 + 0{,}96726)(0{,}25) = 1{,}01504$ и ${}_1V = (\ln 1{,}01504)/0{,}1 = 0{,}14925$. ▼

В дальнейшем нетто-резервы будут основываться на нетто-премиях, определенных согласно принципу эквивалентности, как в п. (a) примера 7.1.1. Таким образом, *нетто-резерв*[2] *в момент времени* t — это условное математическое ожидание разности между настоящей стоимостью будущих выплат и настоящей стоимостью будущих нетто-премий при условии дожития страхователя до момента времени t. Тип резерва, найденный в п. (b) примера 7.1.1, называется *экспоненциальным резервом*.

Разделы гл. 7 будут параллельны разделам гл. 6 о нетто-премиях. Мы предполагаем, что смертность и процентная ставка, выбранные в момент заключения договора для определения размера нетто-премии, в дальнейшем не меняются и используются для определения нетто-резерва, как это было сделано в примере 7.1.1.

7.2. Нетто-резервы в непрерывной модели

Определим нетто-резервы в непрерывной модели, обсуждавшейся в разд. 6.2, с помощью принципа эквивалентности.

Рассмотрим резервы в такой модели для договора бессрочного страхования на случай смерти со страховой выплатой размера 1 и ежегодными нетто-премиями

[1] См. разд. 7.3. — *Прим. ред.*

[2] В оригинале «benefit reserve». См. подстрочное примечание в гл. 6, разд. 6.1. — *Прим. ред.*

$\bar{P}(\bar{A}_{[x]})$, заключенного с лицом (x). Соответствующий резерв для страхователя, прожившего еще t лет, определяется, согласно принципу эквивалентности, как условное математическое ожидание перспективных потерь в момент времени t при условии, что лицо (x) доживет до этого момента. Более формально, при $T(x) > t$ перспективные потери составят

$$_tL = v^{T(x)-t} - \bar{P}(\bar{A}_{[x]})\bar{a}_{\overline{T(x)-t|}}. \tag{7.2.1}$$

Резерв как условное математическое ожидание рассчитывается на основе условного распределения продолжительности предстоящей жизни в момент t лица, которое прошло селекцию в возрасте x лет, при условии, что оно дожило до момента времени t. Согласно Международной системе актуарных обозначений, это можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} {}_t\bar{V}(\bar{A}_{[x]}) &= \mathbf{E}[{}_tL\,|\,T(x)>t] = \mathbf{E}[v^{T(x)-t}\,|\,T(x)>t] - \bar{P}(\bar{A}_{[x]})\mathbf{E}[\bar{a}_{\overline{T(x)-t|}}\,|\,T(x)>t] \\ &= \bar{A}_{[x]+t} - \bar{P}(\bar{A}_{[x]})\bar{a}_{[x]+t}. \end{aligned} \tag{7.2.2}$$

Если в силу того, что на момент заключения страхового договора доступна только информация о достигнутом возрасте x, или по каким-либо другим причинам для моделирования распределения продолжительности предстоящей жизни используется агрегативная таблица смертности, то условное распределение с.в. $T(x)-t$ совпадает с распределением с.в. $T(x+t)$ и равенство (7.2.2) можно переписать в виде

$$_t\bar{V}(\bar{A}_x) = \bar{A}_{x+t} - \bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{x+t}. \tag{7.2.3}$$

Формулы (7.2.2) и (7.2.3) показывают, что

(Нетто-резерв) = (актуарная настоящая стоимость бессрочного страхования на случай смерти для лица в возрасте $x+t$ лет)
− (актуарная настоящая стоимость будущих нетто-премий, выплачиваемых с интенсивностью $\bar{P}(\bar{A}_x)$ в год).

Выражения для $\bar{P}(\bar{A}_x)$ и $_t\bar{V}(\bar{A}_x)$ связаны между собой. Если $t=0$, формула (7.2.3) дает $_0\bar{V}(\bar{A}_x) = 0$. Это — следствие применения принципа эквивалентности в момент заключения договора.

Замечания об обозначениях. В этой книге мы будем упрощать вид формул за счет исключения обозначений, связанных с селекцией, кроме тех случаев, когда их использование является необходимым или полезным в конкретных ситуациях. При рассмотрении нетто-резервов мы будем использовать символ $\mu_x(t)$ для обозначения интенсивности смертности, чтобы подчеркнуть, что условные распределения, используемые при расчете резервов, получены из распределения с.в. $T(x)$.

Нетто-резерв определен в разд. 7.1 как условное математическое ожидание случайной величины потерь. В этом разделе при нахождении выражений для таких условных математических ожиданий использовалось распределение с.в. $T(x)-t$ при условии $T(x) > t$ и такая же процентная ставка и такое же распределение с.в. $T(x)$, как и при определении нетто-премий согласно принципу эквивалентности в момент времени $t=0$. Новым в расчетах математического ожидания являлось только использование информации о дожитии лица (x) до момента времени t. Исчерпывающий принцип расчета резервов потребовал бы учета всей новой информации, касающейся случайных величин потерь и их распределений, чтобы оценить обязательства, относящиеся к моменту времени, для которого рассчитывается резерв. В гл. 7 и 8 «процесс обучения» на основе накапливающихся наблюдений, состоящий в модификации предположений, при которых оценивается нетто-резерв, исследоваться не будет.

По аналогии с тем, как мы выводили формулу (6.2.6), можно определить дисперсию с.в. ${}_tL$ следующим образом:

$$ {}_tL = v^{T(x)-t}\left[1+\frac{\bar P(\bar A_x)}{\delta}\right]-\frac{\bar P(\bar A_x)}{\delta}, \tag{7.2.4}$$

а значит,

$$\begin{aligned}\mathbf{D}[{}_tL\,|\,T(x)>t] &= \left[1+\frac{\bar P(\bar A_x)}{\delta}\right]^2\mathbf{D}[v^{T(x)-t}\,|\,T(x)>t]\\ &= \left[1+\frac{\bar P(\bar A_x)}{\delta}\right]^2[{}^2\bar A_{x+t}-(\bar A_{x+t})^2].\end{aligned}\tag{7.2.5}$$

Отметим связь с формулой (6.2.6) и тот факт, что этот результат справедлив для всех величин премий. Он не зависит от принципа эквивалентности.

Пример 7.2.1. Продолжая пример 6.2.1, вычислим ${}_t\bar V(\bar A_x)$ и $\mathbf{D}[{}_tL\,|\,T(x)>t]$.

Решение. Так как $\bar A_x$, $\bar a_x$ и $\bar P(\bar A_x)$ не зависят от возраста x, формула (7.2.3) приобретает вид

$${}_t\bar V(\bar A_x) = \bar A_x - \bar P(\bar A_x)\bar a_x = 0, \qquad t \geqslant 0.$$

В этом случае будущие премии уже эквивалентны будущим страховым выплатам, и не требуется никакого резерва.

Кроме того, в этом случае формула (7.2.5) сводится к равенству

$$\mathbf{D}[{}_tL\,|\,T(x)>t] = \left[1+\frac{\bar P(\bar A_x)}{\delta}\right]^2[{}^2\bar A_x-(\bar A_x)^2] = \mathbf{D}[L] = 0{,}25,$$

как и в примере 6.2.1. Здесь дисперсия с.в. ${}_tL$ не зависит ни от возраста x, ни от периода t. ▼

Пример 7.2.2. Пусть смертность подчиняется закону Муавра, причем $l_x = 100-x$, а процентная ставка составляет 6%. Подсчитаем

(a) $\bar P(\bar A_{35})$, (b) ${}_t\bar V(\bar A_{35})$ и $\mathbf{D}[{}_tL\,|\,T(x)>t]$ при $t=0,10,20,\ldots,60$.

Решение. (a) Так как $l_x = 100-x$, то ${}_tp_{35} = 1-t/65$ и ${}_tp_{35}\,\mu(35+t) = 1/65$ для $0 \leqslant t < 65$. Отсюда следует, что

$$\bar A_{35} = \int_0^{65} v^t\,\frac{1}{65}\,dt = \frac{\bar a_{\overline{65}|0,06}}{65} = 0{,}258047.$$

Таким образом,

$$\bar P(\bar A_{35}) = \frac{\delta\bar A_{35}}{1-\bar A_{35}} = 0{,}020266.$$

(b) В возрасте $35+t$ имеем $\bar A_{35+t} = \bar a_{\overline{65-t}|}/(65-t)$ и

$${}_t\bar V(\bar A_{35}) = \bar A_{35+t} - 0{,}020266\,\frac{1-\bar A_{35+t}}{\ln(1{,}06)}.$$

Далее,

$${}^2\bar A_{35+t} = \int_0^{65-t} v^{2u}\,\frac{1}{65-t}\,du = \frac{{}^2\bar a_{\overline{65-t}|}}{65-t}$$

и в силу равенства (7.2.5)

$$\mathbf{D}[{}_tL\,|\,T(x) > t] = \left[1 + \frac{0{,}020266}{\ln(1{,}06)}\right]^2 [{}^2\bar{A}_{35+t} - (\bar{A}_{35+t})^2].$$

Применяя эту формулу, мы получим следующие результаты:

t	${}_t\bar{V}(\bar{A}_{35})$	$\mathbf{D}[{}_tL\,|\,T(35) > t]$
0	0,0000	0,1187
10	0,0557	0,1201
20	0,1289	0,1173
30	0,2271	0,1073
40	0,3619	0,0861
50	0,5508	0,0508
60	0,8214	0,0097

Заметим, что $\mathbf{D}[{}_tL\,|\,T(35) > t]$ сходится к нулю. Это — следствие того, что ситуация становится более определенной. ▼

В таблице из примера 7.2.2 вычисляются математическое ожидание и дисперсия условных распределений с.в. ${}_tL$ для некоторых значений t. Для более глубокого понимания природы резервов исследуем эти распределения подробнее. Ранее мы исследовали случай $t = 0$ в равенстве (6.2.11), следующем за примером 6.2.3. Из формулы (7.2.1) вытекает, что

$${}_tL = v^{T(x)-t} - \bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{\overline{T(x)-t|}} = v^{T(x)-t}\left[\frac{\delta + \bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta}\right] - \frac{\bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta}. \tag{7.2.6}$$

Если $\delta > 0$, то ${}_tL$ является убывающей функцией от $T(x) - t$ и удовлетворяет условию

$$-\bar{P}(\bar{A}_x)/\delta < {}_tL \leqslant 1. \tag{7.2.7}$$

Используя рис. 6.2.1 в качестве руководства, можно последовательно повторить шаги вывода формулы (6.2.11), чтобы установить следующее соотношение между $F_{T(x)}(u)$ и функцией распределения с.в. ${}_tL$ при условии $T(x) > t$, которую мы обозначим $F_{{}_tL}(y)$. Для некоторого значения y из интервала, указанного в (7.2.7), имеем

$$\begin{aligned}
F_{{}_tL}(y) &= \mathbf{P}[\,{}_tL \leqslant y\,|\,T(x) > t] \\
&= \mathbf{P}\left[v^{T(x)-t}\left[\frac{\delta + \bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta}\right] - \frac{\bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta} \leqslant y \,\middle|\, T(x) > t\right] \\
&= \mathbf{P}\left[v^{T(x)-t} \leqslant \frac{\delta y + \bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta + \bar{P}(\bar{A}_x)} \,\middle|\, T(x) > t\right] \\
&= \mathbf{P}\left[T(x) \geqslant t - \frac{1}{\delta}\ln\left[\frac{\delta y + \bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta + \bar{P}(\bar{A}_x)}\right] \,\middle|\, T(x) > t\right] \\
&= \frac{\mathbf{P}[T(x) \geqslant t - (1/\delta)\{\ln[\delta y + \bar{P}(\bar{A}_x)]/[\delta + \bar{P}(\bar{A}_x)]\}]}{\mathbf{P}[T(x) > t]} && (7.2.8) \\
&= \frac{1 - F_{T(x)}[t - (1/\delta)\ln\{[\delta y + \bar{P}(\bar{A}_x)]/[\delta + \bar{P}(\bar{A}_x)]\}]}{1 - F_{T(x)}(t)}. && (7.2.9)
\end{aligned}$$

Дифференцирование этой формулы по y дает функцию плотности с.в. ${}_tL$ при условии $T(x) > t$:

$$f_{{}_tL}(y) = \frac{1}{[\delta y + \bar{P}(\bar{A}_x)][1 - F_{T(x)}(t)]}\, f_{T(x)}\left(1 - \frac{1}{\delta}\ln\left[\frac{\delta y + \bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta + \bar{P}(\bar{A}_x)}\right]\right). \tag{7.2.10}$$

Для агрегативной модели смертности условное распределение с.в. $T(x)-t$ при условии $T(x)>t$ совпадает с распределением с.в. $T(x+t)$, так что формулы (7.2.8), (7.2.9) и (7.2.10) сводятся соответственно к равенствам

$$F_{{}_tL}(y) = \mathbf{P}\left[T(x+t) \geqslant -\frac{1}{\delta}\ln\left[\frac{\delta y+\bar P(\bar A_x)}{\delta+\bar P(\bar A_x)}\right]\right] \tag{7.2.11}$$

$$= 1 - F_{T(x+t)}\left(-\frac{1}{\delta}\ln\left[\frac{\delta y+\bar P(\bar A_x)}{\delta+\bar P(\bar A_x)}\right]\right), \tag{7.2.12}$$

$$f_{{}_tL}(y) = \frac{1}{[\delta y+\bar P(\bar A_x)]} f_{T(x+t)}\left(-\frac{1}{\delta}\ln\left[\frac{\delta y+\bar P(\bar A_x)}{\delta+\bar P(\bar A_x)}\right]\right). \tag{7.2.13}$$

Для иллюстрации этих понятий продолжим пример 7.2.2.

Пример 7.2.3. Для страхового договора и для предположений из примера 7.2.2

(a) выведем выражения для функции распределения и функции плотности с.в. ${}_tL$ при условии $T(x)>t$.

(b) нарисуем графики этих условных функций плотности при $t=0,20,40$ и 60.

Решение. (a) Поскольку в примере 7.2.2 использована агрегативная модель смертности, воспользуемся формулами (7.2.12) и (7.2.13). В примере 7.2.2

$$F_{T(35+t)}(u) = \begin{cases} u/(65-t) & \text{при } 0\leqslant u\leqslant 65-t,\\ 1 & \text{при } 65-t<u,\end{cases}$$

$$f_{T(35+t)}(u) = \begin{cases} 1/(65-t) & \text{при } 0\leqslant u\leqslant 65-t,\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Рис. 7.2.1 является модификацией рис. 6.2.1 для этого примера. На этом рисунке область значений с.в. $T(35+t)$ расположена на оси u, а область значений с.в. ${}_tL$ — на оси y. Соотношение между исходами случайных величин $T(35+t)$ и ${}_tL$ задается функцией потерь $y=l_t(u)$ и указывается пунктирными линиями, соединяющими на рисунке значения u и y. Область определения функции плотности $f_{T(35+t)}(u)$ лежит на оси u, а область значений — на оси y. Область определения функции плотности $f_{{}_tL}(y)$ расположена на оси y, а область ее значений можно представлять себе лежащей на оси, перпендикулярной плоскости (u,y), но для простоты она изображена прямой, перпендикулярной оси y, на плоскости (u,y).

Для определения функции распределения с.в. ${}_tL$ начнем со значения y, соответствующего значению u из интервала $(0,65-t)$. Для таких значений y, согласно (7.2.12),

$$F_{{}_tL}(y) = 1 - \frac{(-1/\delta)\ln\{[\delta y+\bar P(\bar A_{35})]/[\delta+\bar P(\bar A_{35})\bar P(\bar A_{35})]\}}{65-t}, \qquad 0\leqslant y\leqslant 1.$$

Если $y>1$, то $F_{{}_tL}=1$.

Далее, для значений y, соответствующих значениям u из интервала $(0,65-t)$, согласно формуле (7.2.13),

$$f_{{}_tL}(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{65-t}\,\dfrac{1}{\delta y+\bar P(\bar A_{35})}, & -\dfrac{\bar P(\bar A_{35})}{\delta}\leqslant y\leqslant 1,\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

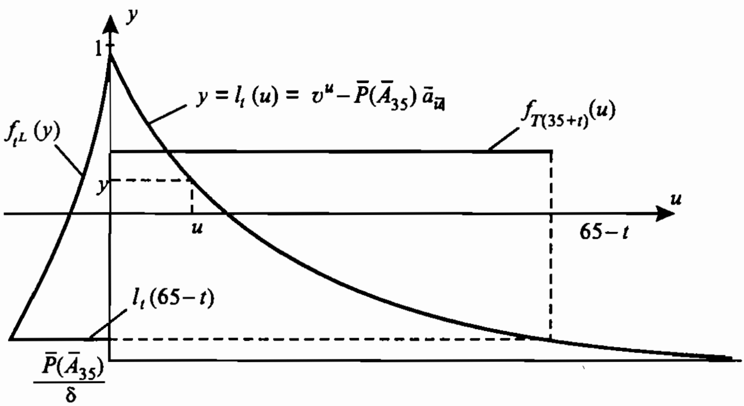


Рис. 7.2.1. Схематическое изображение функций $l_t(u)$, $f_{T(35+t)}(u)$ и $f_{tL}(y)$

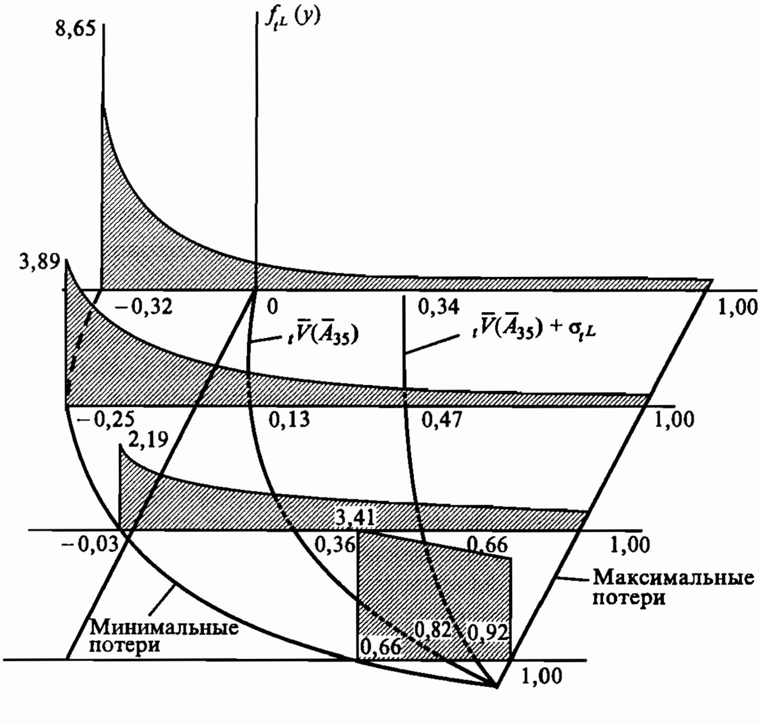


Рис. 7.2.2. $f_{tL}(y)$ для $t = 0, 20, 40$ и 60

(b) Требуемые графики функции плотности $f_{tL}(y)$ для $t = 0, 20, 40$ и 60 составляют рис. 7.2.2. На рис. 7.2.1 изображен график для одного значения t. Рисунки 7.2.1 и 7.2.2 связаны следующим образом: вертикальная ось y на рис. 7.2.1 является горизонтальной осью на рис. 7.2.2. Та ось, которую на рис. 7.2.1 следовало представлять себе перпендикулярной плоскости (u, y), является вертикальной осью на рис. 7.2.2. Обратите внимание на кривые на плоскости (y,t), обозначающие минимальные и максимальные возможные потери, ожидаемые потери (нетто-резерв) и ожидаемые потери плюс стандартное отклонение потерь. ▼

Таблице 6.2.1 соответствует табл. 7.2.1 для нетто-резервов. Мы не включаем в нее случайной величины будущих потерь ${}_tL$ и явных формул для $\mathbf{D}[{}_tL\,|\,T(x)>t]$, соответствующих различным нетто-резервам.

Таблица 7.2.1. Нетто-резервы в непрерывной модели для возраста на момент заключения договора x, момента t и страховой суммы размера 1

Вид страхового покрытия	Международное актуарное обозначение	Формула расчета по перспективному методу
Бессрочное страхование на случай смерти	${}_t\bar{V}(\bar{A}_x)$	$\bar{A}_{x+t} - \bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{x+t}$
Страхование на случай смерти на срок n лет	${}_t\bar{V}(\bar{A}^{\,1}_{x:\overline{n}\rvert})$	$\begin{cases} \bar{A}^{\,1}_{x+t:\overline{n-t}\rvert} - \bar{P}(\bar{A}^{\,1}_{x:\overline{n}\rvert})\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}\rvert}, & t<n, \\ 0, & t=n \end{cases}$
Смешанное страхование на срок n лет	${}_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}\rvert})$	$\begin{cases} \bar{A}_{x+t:\overline{n-t}\rvert} - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}\rvert})\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}\rvert}, & t<n, \\ 1, & t=n \end{cases}$
Бессрочное страхование на случай смерти с h-летним сроком выплаты премий	${}^h_t\bar{V}(\bar{A}_x)$	$\begin{cases} \bar{A}_{x+t} - {}_h\bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{x+t:\overline{h-t}\rvert}, & t\leqslant h, \\ \bar{A}_{x+t}, & t>h \end{cases}$
Смешанное страхование на срок n лет с h-летним сроком выплаты премий	${}^h_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}\rvert})$	$\begin{cases} \bar{A}_{x+t:\overline{n-t}\rvert} - {}_h\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}\rvert})\bar{a}_{x+t:\overline{h-t}\rvert}, & t\leqslant h<n, \\ \bar{A}_{x+t:\overline{n-t}\rvert}, & h<t<n, \\ 1, & t=n \end{cases}$
Страхование на дожитие на срок n лет	${}_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}\rvert}^{\;\;1})$	$\begin{cases} \bar{A}_{x+t:\overline{n-t}\rvert}^{\;\;1} - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}\rvert}^{\;\;1})\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}\rvert}, & t<n, \\ 1, & t=n \end{cases}$
Бессрочный страховой аннуитет, отсроченный на n лет	${}_t\bar{V}({}_{n\rvert}\bar{a}_x)$	$\begin{cases} {}_{n-t\rvert}\bar{a}_{x+t} - \bar{P}({}_{n\rvert}\bar{a}_x)\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}\rvert}, & t\leqslant n, \\ \bar{a}_{x+t}, & t>n \end{cases}$

7.3. Другие формулы для нетто-резервов в непрерывной модели

До сих пор нетто-резерв определялся как условное математическое ожидание случайной величины будущих потерь и рассматривался лишь один метод выражения формул для резервов в непрерывной модели, а именно *перспективный*, согласно которому нетто-резерв является разностью между актуарными настоящими стоимостями будущих выплат и будущих нетто-премий. На основе перспективного метода мы можем легко вывести другие три общие формулы для договоров с постоянными размерами страховых выплат и нетто-премий. Мы приведем их для случая смешанного страхования на срок n лет.

Формула разности премий для ${}_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}\rvert})$ получается из перспективной формулы для ${}_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}\rvert})$ вынесением за скобки $\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}\rvert}$:

$$ {}_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}\rvert}) = \left[\frac{\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}\rvert}}{\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}\rvert}} - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}\rvert})\right]\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}\rvert} = [\bar{P}(\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}\rvert}) - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}\rvert})]\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}\rvert}. \quad (7.3.1) $$

Формула (7.3.1) выражает нетто-резерв как актуарную настоящую стоимость разности премий, выплачиваемой в течение оставшегося срока выплаты. Эта разность получается путем вычитания исходной ежегодной нетто-премии из нетто-премии по договору страхования, заключенному с лицом $(x+t)$ с теми же выплатами.

Вторая формула получается вынесением за скобки в перспективной формуле актуарной настоящей стоимости будущих страховых выплат. Таким образом,

$$
{}_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \left[1 - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) \frac{\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|}}\right] \bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|} = \left[1 - \frac{\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})}{\bar{P}(\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|})}\right] \bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|}. \tag{7.3.2}
$$

Она выражает нетто-резерв как актуарную настоящую стоимость той части предстоящих страховых выплат, которая не покрывается будущими нетто-премиями, которые еще предстоит собрать. Заметим, что $\bar{P}(\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|})$ — нетто-премия в ситуации, когда будущие выплаты покрываются только за счет премий, которые будут собраны, а $\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})$ является фактически выплачиваемой нетто-премией. Таким образом, $\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})/\bar{P}(\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|})$ является частью будущих страховых выплат, покрываемой будущими нетто-премиями. Эта формула называется *формулой оплаченной страховой суммы* по аналогии с обсуждаемым в гл. 16 страховым покрытием, обеспеченным сохраненными выплатами. Формулы, аналогичные формулам (7.3.1) и (7.3.2), существуют для многих видов нетто-резервов.

Третьим выражением является *ретроспективная формула*. Мы выведем ее из более общего соотношения. Из упр. 4.12 и из формул (5.2.18) и (5.2.19) для $t < n-s$ имеем

$$
\begin{aligned}
\bar{A}_{x+s:\overline{n-s}|} &= \bar{A}^{\;1}_{x+s:\overline{t}|} + {}_tE_{x+s}\, \bar{A}_{x+s+t:\overline{n-s-t}|},\\
\bar{a}_{x+s:\overline{n-s}|} &= \bar{a}_{x+s:\overline{t}|} + {}_tE_{x+s}\, \bar{a}_{x+s+t:\overline{n-s-t}|}.
\end{aligned}
$$

Подставляя эти выражения в перспективную формулу для ${}_s\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})$, получим

$$
\begin{aligned}
{}_s\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) &= \bar{A}^{\;1}_{x+s:\overline{t}|} - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\bar{a}_{x+s:\overline{t}|}\\
&\qquad + {}_tE_{x+s}[\bar{A}_{x+s+t:\overline{n-t-s}|} - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\bar{a}_{x+s+t:\overline{n-t-s}|}]\\
&= \bar{A}^{\;1}_{x+s:\overline{t}|} + {}_tE_{x+s}\; {}_{s+t}\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\bar{a}_{x+s:\overline{t}|}.
\end{aligned} \tag{7.3.3}
$$

Таким образом, нетто-резервы в начале и в конце интервала длины t лет связываются следующим соотношением

(нетто-резерв в начале интервала)
= (актуарная настоящая стоимость в начале интервала
страховых выплат, которые производятся в течение этого интервала)
+ (актуарная настоящая стоимость в начале
интервала страховых выплат при страховании
на дожитие, равных нетто-резерву в конце интервала)
− (актуарная настоящая стоимость нетто-премий,
выплачиваемых в течение интервала).

Это соотношение, переписанное в виде

$$
{}_s\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) + \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\bar{a}_{x+s:\overline{n-t}|} = \bar{A}_{x+s:\overline{t}|} + {}_tE_{x+s}\; {}_{s+t}\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}), \tag{7.3.4}
$$

показывает, что актуарные настоящие стоимости финансовых ресурсов и обязательств страховщика равны.

Ретроспективная формула получается из формулы (7.3.4), если положить $s = 0$, заметить, что, согласно принципу эквивалентности, ${}_0\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = 0$, и разрешить полученное равенство относительно ${}_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})$. Таким образом,

$$
{}_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \frac{1}{{}_tE_x}[\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\bar{a}_{x:\overline{t}|} - \bar{A}^{1}_{x:\overline{t}|}].
$$

Далее, $\bar{s}_{x:\overline{t}|} = \bar{a}_{x:\overline{t}|}/{}_tE_x$, так что эта формула сводится к равенству

$$
{}_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\bar{s}_{x:\overline{t}|} - {}_t\bar{k}_x. \tag{7.3.5}
$$

Здесь

$$
{}_t\bar{k}_x = \bar{A}^{1}_{x:\overline{t}|}/{}_tE_x \tag{7.3.6}
$$

называется *накопленной стоимостью страхования*. Заметим, что

$$
{}_t\bar{k}_x = \int_0^t \frac{v^s\,{}_sp_x\,\mu_x(s)\,ds}{v^t\,{}_tp_x} = \int_0^t \frac{(1+i)^{t-s}l_{x+s}\,\mu_x(s)\,ds}{l_{x+t}}. \tag{7.3.7}
$$

Это можно интерпретировать как разложенную на каждое из l_{x+t} доживших лиц сумму выплат на случай смерти в совокупности дожития между возрастами x и $x+t$ лет. Таким образом, резерв можно рассматривать как разность между нетто-премиями, накопленными с учетом процента и распределенными лишь среди доживших до возраста $x+t$, и накопленной стоимостью страхования.

Мы заключаем этот раздел некоторыми специальными формулами, выражающими нетто-резерв по договору бессрочного страхования на случай смерти в терминах одной актуарной функции. Аналогичные формулы имеют место для нетто-резервов по договору смешанного страхования на срок n лет, если нетто-премии выплачиваются непрерывно в течение n лет. Так как мы использовали формулу (5.2.8), чтобы выразить $\bar{P}(\bar{A}_x)$ в терминах δ и $\bar{a}_x$ или $\bar{A}_x$, мы можем воспользоваться теми же соображениями, чтобы выразить ${}_t\bar{V}(\bar{A}_x)$ в терминах одной из таких актуарных функций $\bar{a}_x$, $\bar{A}_x$, $\bar{P}(\bar{A}_x)$ и величины δ.

Чтобы выразить нетто-резерв через актуарную функцию для аннуитетов, подставим (6.2.9) и (5.2.8) в перспективную формулу (7.2.3) и получим

$$
{}_t\bar{V}(\bar{A}_x) = 1 - \delta\bar{a}_{x+t} - \left(\frac{1}{\bar{a}_x} - \delta\right)\bar{a}_{x+t} = 1 - \frac{\bar{a}_{x+t}}{\bar{a}_x}. \tag{7.3.8}
$$

Далее, подставив (6.2.9) в формулу разности премий, получим

$$
{}_t\bar{V}(\bar{A}_x) = [\bar{P}(\bar{A}_{x+t}) - \bar{P}(\bar{A}_x)]\bar{a}_{x+t} = \frac{\bar{P}(\bar{A}_{x+t}) - \bar{P}(\bar{A}_x)}{\bar{P}(\bar{A}_{x+t}) + \delta}. \tag{7.3.9}
$$

Наконец, можно переписать формулу (7.3.8), используя равенство $\bar{A}_{x+t} = 1 - \delta\bar{a}_{x+t}$, и получить

$$
{}_t\bar{V}(\bar{A}_x) = 1 - \frac{1 - \bar{A}_{x+t}}{1 - \bar{A}_x} = \frac{\bar{A}_{x+t} - \bar{A}_x}{1 - \bar{A}_x}. \tag{7.3.10}
$$

При выводе трех последних формул использовалось соотношение (5.2.8), связывающее аннуитет в период выплаты премий и страховые обязательства в течение срока страхования. Таким образом, эти формулы годятся только для бессрочного страхования на случай смерти и бессрочного смешанного страхования, для которых период выплаты премий совпадает со сроком страхования. Кроме того, частота выплаты премий должна совпадать с «частотой» страховых выплат. Мы увидим, что премии с корректирующим платежом некоторым специальным образом удовлетворяют этим требованиям.

Замечание. Хотя в большинстве приложений нетто-резервы неотрицательны, не существует математических теорем, гарантирующих это свойство. На самом деле читатель может объединить упр. 4.2 и формулу (7.3.10), чтобы быстро убедиться, что отрицательные нетто-резервы действительно возможны.

7.4. Нетто-резервы в дискретной модели

Обсуждаемые в этом разделе нетто-резервы относятся к видам страхования из разд. 6.3 с ежегодной выплатой премии и страховой выплатой в конце года смерти. Как и в разд. 7.2, можно предполагать, что смертность описывается агрегативной или селекционной таблицей. Мы будем выводить формулы для агрегативного случая, в котором обозначения проще. Рассмотрим бессрочное страхование лица (x) на случай смерти с выплатой размера 1 и нетто-премией P_x. Следуя изложению разд. 7.2, определим нетто-резерв ${}_kV_x$ для страхователя, прожившего k лет с момента заключения договора, как условное математическое ожидание будущих потерь ${}_kL$ в момент времени k. Более точно,

$$ {}_kL = v^{[K(x)-k]+1} - P_x \ddot{a}_{\overline{[K(x)-k]+1|}}, \tag{7.4.1} $$

$$ {}_kV_x = \mathbf{E}[{}_kL \,|\, K(x)=k, k+1, \ldots]. \tag{7.4.2} $$

Перспективная формула для нетто-резерва имеет вид

$$ {}_kV_x = A_{x+k} - P_x\, \ddot{a}_{x+k}. \tag{7.4.3} $$

Как и в разд. 7.2, эта формула является разностью между актуарной настоящей стоимостью будущих страховых выплат и актуарной настоящей стоимостью будущих нетто-премий.

По аналогии с формулой (7.2.4) имеем

$$ \begin{aligned} \mathbf{D}[{}_kL \,|\, K(x)=k, k+1, \ldots] &= \mathbf{D}\left[v^{[K(x)-k]+1}\left(1+\frac{P_x}{d}\right) \,\middle|\, K(x)=k, k+1, \ldots\right] \\ &= \left(1+\frac{P_x}{d}\right)^2 \mathbf{D}[v^{[K(x)-k]+1} \,|\, K(x)=k, k+1, \ldots] \\ &= \left(1+\frac{P_x}{d}\right)^2 [{}^2A_{x+k} - (A_{x+k})^2]. \end{aligned} \tag{7.4.4} $$

Пример 7.4.1. В продолжение примера 6.3.1 рассчитаем ${}_kV_x$ и $\mathbf{D}[{}_kL \,|\, K(x)=k, k+1, \ldots]$.

Решение. Здесь A_x, $\ddot{a}_x$ и P_x не зависят от возраста x, так что $A_{x+k} = A_x$ и

$$ {}_kV_x = A_x - P_x\, \ddot{a}_x = 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots. $$

Кроме того, из формулы (7.4.4) также следует, что $\mathbf{D}[{}_kL \,|\, K(x)=k, k+1, \ldots] = \mathbf{D}[L] = 0{,}2347$. ▼

Формулы нетто-резервов, сведенные в табл. 7.4.1, соответствуют нетто-премиям из табл. 6.3.1 и аналогичны формулам нетто-резервов из табл. 7.2.1.

Таблица 7.4.1. Нетто-резервы в дискретной модели для возраста на момент заключения договора x, момента k и страховой выплаты размера 1

Вид страхового договора	Международное актуарное обозначение	Перспективная формула
Бессрочное страхование на случай смерти	${}_kV_x$	$A_{x+k} - P_x\,\ddot{a}_{x+k}$
Страхование на случай смерти на срок n лет	${}_kV^1_{x:\overline{n}\rvert}$	$\begin{cases} A^{\,1}_{x+k:\overline{n-k}\rvert} - P^1_{x:\overline{n}\rvert}\,\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}\rvert}, & k<n,\\ 0, & k=n \end{cases}$
Смешанное страхование на срок n лет	${}_kV_{x:\overline{n}\rvert}$	$\begin{cases} A_{x+k:\overline{n-k}\rvert} - P_{x:\overline{n}\rvert}\,\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}\rvert}, & k<n,\\ 1, & k=n \end{cases}$
Бессрочное страхование на случай смерти с h-летним сроком выплаты премий	${}^h_kV_x$	$\begin{cases} A_{x+k} - {}_hP_x\,\ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}\rvert}, & k<h,\\ A_{x+k}, & k\geqslant h \end{cases}$
Смешанное страхование на срок n лет с h-летним сроком выплаты премий	${}^h_kV_{x:\overline{n}\rvert}$	$\begin{cases} A_{x+k:\overline{n-k}\rvert} - {}_hP_{x:\overline{n}\rvert}\,\ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}\rvert}, & k<h<n,\\ A_{x+k:\overline{n-k}\rvert}, & h\leqslant k<n,\\ 1, & k=n \end{cases}$
Страхование на дожитие на срок n лет	${}_kV_{x:\overline{n}\rvert}^{\ \ 1}$	$\begin{cases} A_{x+k:\overline{n-k}\rvert}^{\qquad 1} - P_{x:\overline{n}\rvert}^{\ \ 1}\,\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}\rvert}, & k<n,\\ 1, & k=n \end{cases}$
Бессрочный страховой аннуитет, отсроченный на n лет	${}_kV({}_{n\rvert}\ddot{a}_x)$	$\begin{cases} {}_{n-k\rvert}\ddot{a}_{x+k} - P({}_{n\rvert}\ddot{a}_x)\,\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}\rvert}, & k<n,\\ \ddot{a}_{x+k}, & k\geqslant n \end{cases}$

Пример 7.4.2. Выразим $\mathbf{D}[{}_kL\,|\,K(x)=k,k+1,\ldots]$ в терминах актуарных настоящих стоимостей и нетто-премий для смешанного страхования на срок n лет со страховой выплатой размера 1 в дискретной модели.

Решение.

$$
{}_kL = \begin{cases} v^{K(x)-k+1}\left(1+\dfrac{P_{x:\overline{n}\rvert}}{d}\right) - \dfrac{P_{x:\overline{n}\rvert}}{d}, & K(x)=k,k+1,\ldots,n-1,\\[2ex] v^{n-k}\left(1+\dfrac{P_{x:\overline{n}\rvert}}{d}\right) - \dfrac{P_{x:\overline{n}\rvert}}{d}, & K(x)=n,n+1,\ldots, \end{cases}
$$

$$
\mathbf{D}[{}_kL\,|\,K(x)=k,k+1,\ldots] = \left(1+\frac{P_{x:\overline{n}\rvert}}{d}\right)^2[{}^2A_{x+k:\overline{n-k}\rvert} - (A_{x+k:\overline{n-k}\rvert})^2]. \qquad \blacktriangledown
$$

Когда речь идет не о бессрочном страховании на случай смерти или о смешанном страховании с премиями, выплачиваемыми в течение всего срока страхования, дисперсию потерь бывает сложно выразить в общепринятых актуарных обозначениях.

Формулы, подобные тем, которые получены в разд. 7.3, можно получить для нетто-резервов в дискретной модели. Мы проиллюстрируем это, выписав формулу для величины ${}_kV_{\overline{x:\overline{n}\rvert}}$ с минимумом обсуждений. Словесные интерпретации и алгебраические преобразования аналогичны тем, которые были проведены для нетто-резервов в случае непрерывной модели.

Формула разности премий — это

$$
{}_kV_{x:\overline{n}\rvert} = (P_{x+k:\overline{n-k}\rvert} - P_{x:\overline{n}\rvert})\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}\rvert}. \qquad (7.4.5)
$$

Формула оплаченной страховой суммы имеет вид

$$ {}_kV_{x:\overline{n}|} = \left(1 - \frac{P_{x:\overline{n}|}}{P_{x+k:\overline{n-k}|}}\right) A_{x+k:\overline{n-k}|}. \tag{7.4.6} $$

Для ретроспективной формулы сначала получим результат, аналогичный равенству (7.3.3), а именно, для $h < n - j$

$$ {}_jV_{x:\overline{n}|} = A_{x+j:\overline{h}|} - P_{x:\overline{n}|}\,\ddot{a}_{x+j:\overline{h}|} + {}_hE_{x+j}\;{}_{j+h}V_{x:\overline{n}|}. \tag{7.4.7} $$

Если $j = 0$, то поскольку ${}_0V_{x:\overline{n}|} = 0$, имеем

$$ {}_hV_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{{}_hE_x}\left(P_{x:\overline{n}|}\,\ddot{a}_{x:\overline{h}|} - A^1_{x:\overline{h}|}\right) = P_{x:\overline{n}|}\,\ddot{s}_{x:\overline{h}|} - {}_hk_x. \tag{7.4.8} $$

Здесь накопленная стоимость страхования составит ${}_hk_x = A^1_{x:\overline{h}|}/{}_hE_x$ и возможна интерпретация в терминах совокупности дожития.

Ретроспективная формула нетто-резерва позволяет сделать интересное наблюдение. Рассмотрим два различных договора, заключенных с лицом (x), каждый со страховой суммой размера 1 в течение первых h лет. Здесь h не превосходит меньшего из двух периодов выплаты премий по этим договорам. Выпишем ретроспективные формулы нетто-резерва для первого и второго договоров соответственно:

$$ {}_vV_{(1)} = P_{(1)}\,\ddot{s}_{x:\overline{h}|} - {}_hk_x, \qquad {}_vV_{(2)} = P_{(2)}\,\ddot{s}_{x:\overline{h}|} - {}_hk_x. $$

Тогда

$$ {}_vV_{(1)} - {}_vV_{(2)} = (P_{(1)} - P_{(2)})\ddot{s}_{x:\overline{h}|}, \tag{7.4.9} $$

и эта формула показывает, что разность двух нетто-резервов эквивалентна актуарной накопленной стоимости разности нетто-премий $P_{(1)} - P_{(2)}$. Поскольку $1/\ddot{s}_{x:\overline{h}|} = P_{x:\overline{h}|}^{\;\;1}$, формула (7.4.9) может быть переписана в виде

$$ P_{(1)} - P_{(2)} = P_{x:\overline{h}|}^{\;\;1}({}_hV_{(1)} - {}_hV_{(2)}). \tag{7.4.10} $$

Теперь разность нетто-премий выражена как нетто-премия по страхованию на дожитие на срок h лет со страховой суммой, равной разности нетто-резервов на конец года h. Формула (6.3.10) является частным случаем формулы (7.4.10) при ${}_nV_{x:\overline{n}|} = 1$ и ${}^n_nV_x = A_{x+n}$. Другой иллюстрацией формулы (7.4.10) является равенство

$$ P_x = P^1_{x:\overline{n}|} + P_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}\,{}_nV_x, \tag{7.4.11} $$

так как ${}_nV^1_{x:\overline{n}|} = 0$.

Как и в случае непрерывной модели, в дискретной модели существуют специальные формулы для резервов по договорам бессрочного страхования на случай смерти и бессрочного смешанного страхования. Используя соотношения $A_y = 1 - d\,\ddot{a}_y$ и $1/\ddot{a}_y = P_y + d$, мы получаем формулы

$$ {}_kV_x = 1 - d\,\ddot{a}_{x+k} - \left(\frac{1}{\ddot{a}_x} - d\right)\ddot{a}_{x+k} = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+k}}{\ddot{a}_x}, \tag{7.4.12} $$

$$ {}_kV_x = 1 - \frac{P_x + d}{P_{x+k} + d} = \frac{P_{x+k} - P_x}{P_{x+k} + d}, \tag{7.4.13} $$

$$ {}_kV_x = 1 - \frac{1 - A_{x+k}}{1 - A_x} = \frac{A_{x+k} - A_x}{1 - A_x}, \tag{7.4.14} $$

аналогичные формулам (7.3.8)–(7.3.10). Похожая специальная формула также имеет место для нетто-резервов по договору смешанного страхования на срок n лет, но не по произвольному договору.

Страхование в дискретной модели дает полезные примеры для детерминистических или ожидаемых денежных потоков, моделирующих операции с нетто-резервами. Это показано в примерах 7.4.3 и 7.4.4.

Пример 7.4.3. Предположим, что с каждым членом совокупности из l_{50} лиц в возрасте 50 лет заключен договор страхования на случай смерти на срок 5 лет со страховой выплатой размера 1000 в дискретной модели. Проследим ожидаемые денежные потоки для этой группы на базе Иллюстративной таблицы смертности с процентной ставкой 6% и в качестве побочного результата получим нетто-резервы.

Решение. Сначала рассчитаем ежегодную нетто-премию $\pi = 1000\,P^{1}_{50:\overline{5}|}$ $= 6{,}55692$. Величина ожидаемых накоплений фонда для рассматриваемой группы, определяющаяся собранными премиями, начисленными процентами и страховыми выплатами, указана в следующей таблице:

(1) год h	(2) ожидаемые нетто-премии на начало года $l_{50+h-1}\pi$	(3) ожидаемый фонд на начало года $(2)_h + (6)_{h-1}$	(4) ожидаемый процент $(0{,}06)(3)_h$	(5) ожидаемые выплаты на случай смерти $1000d_{50+h-1}$	(6) ожидаемый фонд на конец года $(3)_h + (4)_h - (5)_h$	(7) ожидаемое число доживших на конец года l_{50+h}	(8) $1000{}_hV^{1}_{50:\overline{5}|}$ $(6)_h/(7)_h$
1	586 903	586 903	35 214	529 884	92 233	88 979,11	1,04
2	583 429	675 662	40 540	571 432	144 770	88 407,68	1,64
3	579 682	724 452	43 467	616 416	151 503	87 791,26	1,73
4	575 640	727 143	43 629	665 065	105 707	87 126,20	1,21
5	571 280	676 987	40 619	717 606	0	86 408,60	0,00

Заметим, что нетто-резервы, указанные в таблице, соответствуют резервам, рассчитанным по формуле. Например, по прошествии двух лет

$$1000A^{1}_{52:\overline{3}|} = 20{,}09 \quad \text{и} \quad \ddot{a}_{52:\overline{3}|} = 2{,}81391.$$

Тогда

$$1000\,{}_2V^{1}_{50:\overline{5}|} = 20{,}09 - (6{,}55692)(2{,}81391) = 1{,}54. \qquad \blacktriangledown$$

Пример 7.4.4. Предположим, что с каждым членом группы из l_{50} лиц возраста 50 лет заключены договоры смешанного страхования со страховой суммой размера 1000 на срок 5 лет в дискретной модели. Проследим ожидаемые денежные потоки для этой группы на основе Иллюстративной таблицы смертности с процентной ставкой 6% и в качестве побочного результата определим нетто-резервы.

Решение. Здесь ежегодная нетто-премия составляет $\pi = 1000\,P_{50:\overline{5}|} = 170{,}083$. Ожидаемые денежные потоки показаны в следующей таблице:

(1) год h	(2) ожидаемые нетто-премии на начало года $l_{50+h-1}\pi$	(3) ожидаемый фонд на начало года $(2)_h + (6)_{h-1}$	(4) ожидаемый процент $(0{,}06)(3)_h$	(5) ожидаемые выплаты на случай смерти $1000d_{50+h-1}$	(6) ожидаемый фонд на конец года $(3)_h + (4)_h - (5)_h$	(7) ожидаемое число доживших на конец года l_{50+h}	(8) $1000{}_hV^{1}_{50:\overline{5}\rvert}$ $(6)_h/(7)_h$
1	15 223 954	15 223 954	913 437	529 884	15 607 507	88 979,11	175,14
2	15 133 829	30 741 336	1 844 480	571 432	32 014 384	88 407,68	362,12
3	15 036 638	47 051 022	2 823 061	616 416	49 257 667	87 791,26	561,08
4	14 931 796	64 189 463	3 851 368	665 065	67 375 766	87 126,20	773,31
5	14 818 680	82 194 446	4 931 667	717 606	86 408 507	86 408,60	1000,00

▼

Рисунки 7.4.1 и 7.4.2 показывают ожидаемые нетто-премии и ожидаемые выплаты на случай смерти для двух предыдущих примеров. В примере 7.4.3 ожидаемые нетто-премии превосходят ожидаемые выплаты на случай смерти в течение двух лет, но затем становятся меньше них. Избыток премий аккумулируется в начальные годы в фонд с тем, чтобы использовать его в последующие годы, когда ожидаемые выплаты на случай смерти выше. Ожидается, что к концу пятого года фонд истощится.

Рис. 7.4.1. Ожидаемые нетто-премии и ожидаемые выплаты на случай смерти для примера 7.4.3

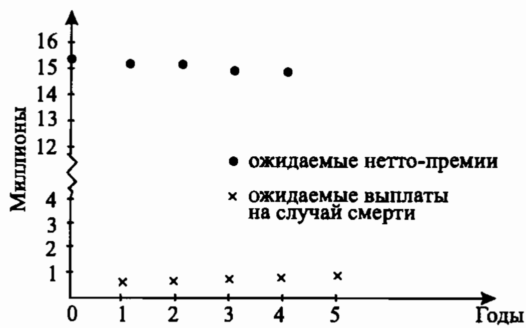


Рис. 7.4.2. Ожидаемые нетто-премии и ожидаемые выплаты на случай смерти для примера 7.4.4

Для случая смешанного страхования на срок 5 лет в примере 7.4.4 картина иная. Как показано на рис. 7.4.2, ожидаемые премии остаются намного больше ожидаемых выплат на случай смерти в течение всего срока. Ожидаемый фонд в конце пятого года достаточен для обеспечения выплат на дожитие по окончании срока страхования в размере 1000 каждому из ожидаемого числа доживших.

Первый из двух приведенных выше договоров, договор страхования на случай смерти на срок 5 лет, служит примером договора страхования с низкой премией и низкой накопительной компонентой, в то время как второй, смешанного страхования на срок 5 лет, служит примером страхования с высокой премией и высокой накопительной компонентой. Большинство видов страхования жизни находится между этими двумя предельными случаями.

7.5. Нетто-резервы в полунепрерывной модели

В конце разд. 6.3 было замечено, что на практике существует необходимость в полунепрерывной модели с ежегодными нетто-премиями $P(\bar{A}_x)$, $P(\bar{A}_{x:\overline{n}|})$, $P(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|})$, ${}_hP(\bar{A}_x)$ и ${}_hP(\bar{A}_{x:\overline{n}|})$, чтобы учесть ситуацию, когда страховая выплата производится непосредственно после смерти. В этом случае в формулах для нетто-резерва из табл. 7.4.1 необходимо заменить A на $\bar{A}$ и P на $P(\bar{A})$. Кроме того, главным символом для нетто-резерва теперь будет $V(\bar{A})$, а тип страхового покрытия будет указываться с помощью нижнего индекса при $\bar{A}$, как и при обозначении нетто-премии. Например, для смешанного страхования на срок n лет с h-летним периодом выплаты премий

$$
{}^h_kV(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \begin{cases} \bar{A}_{x+k:\overline{n-k}|} - {}_hP(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}|}, & k < h < n, \\ \bar{A}_{x+k:\overline{n-k}|}, & h \leqslant k < n, \\ 1, & k = n. \end{cases} \tag{7.5.1}
$$

Если предполагается равномерное распределение моментов смерти в течение каждого годичного возрастного интервала, то из формул (4.4.2) и (6.3.12) мы получаем

$$
{}^h_kV(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \frac{i}{\delta}\,{}^h_kV^1_{x:\overline{n}|} + {}^h_kV_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}. \tag{7.5.2}
$$

С учетом этого нетто-резервы в полунепрерывной модели легко рассчитать на основе соответствующих нетто-резервов в дискретной модели.

7.6. Нетто-резервы в случае нетто-премий, выплачиваемых m раз в год

В этом разделе мы выведем формулы для нетто-резервов, соответствующие формулам для рассмотренного в разд. 6.4 случая выплаты истинных премий m раз в год. Согласно перспективному методу, можно непосредственно записать формулу для ${}^h_kV^{(m)}_{x:\overline{n}|}$, а именно

$$
{}^h_kV^{(m)}_{x:\overline{n}|} = A_{x+k:\overline{n-k}|} - {}_hP^{(m)}_{x:\overline{n}|}\,\ddot{a}^{(m)}_{x+k:\overline{h-k}|}, \qquad k < h. \tag{7.6.1}
$$

Ее можно подсчитать после того, как мы вычислим ${}_hP^{(m)}_{x:\overline{n}|}$ по формуле (6.4.1) или (6.4.2) и $\ddot{a}^{(m)}_{x+k:\overline{h-k}|}$ по формуле (5.4.15) или (5.4.17).

Теперь рассмотрим разность между ${}^{h}_{k}V^{(m)}_{x:\overline{n}|}$ и ${}^{h}_{k}V_{x:\overline{n}|}$ в общем случае смешанного страхования с ограниченным периодом выплаты премий. Для $k < h$ имеем

$$
\begin{aligned}
{}^{h}_{k}V^{(m)}_{x:\overline{n}|} - {}^{h}_{k}V_{x:\overline{n}|} &= {}_{h}P_{x:\overline{n}|}\, \ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}|} - {}_{h}P^{(m)}_{x:\overline{n}|}\, \ddot{a}^{(m)}_{x+k:\overline{h-k}|} \\
&= {}_{h}P^{(m)}_{x:\overline{n}|} \frac{\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{h}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}\, \ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}|} - {}_{h}P^{(m)}_{x:\overline{n}|}\, \ddot{a}^{(m)}_{x+k:\overline{h-k}|}. \qquad (7.6.2)
\end{aligned}
$$

В предположении равномерности распределения моментов смерти в каждом годичном возрастном интервале равенство (7.6.2) принимает вид

$$
\begin{aligned}
{}^{h}_{k}V^{(m)}_{x:\overline{n}|} - {}^{h}_{k}V_{x:\overline{n}|} = {}_{h}P^{(m)}_{x:\overline{n}|} \Bigg\{ &\frac{\ddot{a}^{(m)}_{\overline{1}|}\, \ddot{a}_{x:\overline{h}|} - \beta(m) A^{1}_{x:\overline{h}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}\, \ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}|} \\
&- \left[\ddot{a}^{(m)}_{\overline{1}|}\, \ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}|} - \beta(m) A^{\;\;1}_{x+k:\overline{h-k}|} \right] \Bigg\}.
\end{aligned}
$$

Члены, содержащие $\ddot{a}^{(m)}_{\overline{1}|}$, взаимно уничтожаются, и мы получим

$$
{}^{h}_{k}V^{(m)}_{x:\overline{n}|} - {}^{h}_{k}V_{x:\overline{n}|} = \beta(m)\, {}_{h}P^{(m)}_{x:\overline{n}|}\, {}_{k}V^{1}_{x:\overline{h}|}. \qquad (7.6.3)
$$

Таким образом,

(нетто-резерв в случае истинных нетто-премий, выплачиваемых m раз в год)
= (соответствующий нетто-резерв в дискретной модели)
+ (нетто-резерв по договору срочного страхования в дискретной модели, заключенного на период выплаты премий, для $\beta(m)$-й доли от премии, выплачиваемой m раз в год, по исходному типу страхового покрытия в полунепрерывной модели).

Аналогичный результат имеет место для нетто-резервов в полунепрерывной модели для договора с выплатой премий m раз в год в предположении о равномерности распределения моментов смерти в каждом годичном возрастном интервале. Согласно перспективному методу, для $k < h$

$$
{}^{h}_{k}V^{(m)}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \bar{A}_{x+k:\overline{n-k}|} - {}_{h}P^{(m)}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\, \ddot{a}^{(m)}_{x+k:\overline{h-k}|}. \qquad (7.6.4)
$$

Используя те же рассуждения, что и при выводе формул (7.6.1) из (7.6.3), получим

$$
{}^{h}_{k}V^{(m)}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = {}^{h}_{k}V(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) + \beta(m)\, {}_{h}P^{(m)}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\, {}_{k}V^{1}_{x:\overline{h}|}. \qquad (7.6.5)
$$

Далее, устремляя в этой формуле m к ∞, получим для непрерывной модели

$$
{}^{h}_{k}\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = {}^{h}_{k}V(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) + \beta(\infty)\, {}_{h}\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\, {}_{k}V^{1}_{x:\overline{h}|}. \qquad (7.6.6)
$$

Вновь отметим, что нетто-резерв по срочному страхованию в этой формуле соответствует дискретной модели.

Пример 7.6.1. Для договора смешанного страхования на срок 20 лет со страховой выплатой размера 1 и истинной нетто-премией, выплачиваемой два раза в год, заключенного с лицом (50), на основе Иллюстративной таблицы смертности и $i = 0{,}06$ и в предположении равномерности распределения моментов смерти в течение каждого годичного возрастного интервала рассчитаем следующие величины:

(а) нетто-резерв на конец 10-го года, если выплаты на случай смерти осуществляются в конце года смерти;

(b) нетто-резерв на конец 10-го года, если выплаты на случай смерти осуществляются в момент смерти.

Проверим также формулу (7.6.5) для нетто-резерва из п. (b).

Решение. (a) В дополнение к величинам, подсчитанным в примере 6.4.1, нам нужны

$$A^{\;1}_{60:\overline{10}|} = 0{,}13678852, \quad A_{60:\overline{10}|} = 0{,}58798425, \quad \ddot{a}_{60:\overline{10}|} = 7{,}2789425,$$
$${}_{10}V^{1}_{50:\overline{20}|} = A^{\;1}_{60:\overline{10}|} - P^{1}_{50:\overline{20}|}\,\ddot{a}_{60:\overline{10}|} = 0{,}052752,$$
$${}_{10}V_{50:\overline{20}|} = A_{60:\overline{10}|} - P_{50:\overline{20}|}\,\ddot{a}_{60:\overline{10}|} = 0{,}355380.$$

Далее, в предположении равномерности распределения моментов смерти в каждом годичном возрастном интервале имеем

$$\ddot{a}^{(2)}_{60:\overline{10}|} = \alpha(2)\,\ddot{a}_{60:\overline{10}|} - \beta(2)(1 - {}_{10}E_{60}) = 7{,}1392299.$$

Нетто-резерв ${}_{10}V^{(2)}_{50:\overline{20}|}$ можно подсчитать с помощью формулы (7.6.1):

$$A_{60:\overline{10}|} - P^{(2)}_{50:\overline{10}|}\,\ddot{a}^{(2)}_{60:\overline{10}|} = 0{,}355822,$$

или формулы (7.6.3):

$${}_{10}V_{50:\overline{20}|} + \beta(2)P^{(2)}_{50:\overline{20}|}\,{}_{10}V^{1}_{50:\overline{20}|} = 0{,}355822.$$

(b) Нам нужны дополнительные величины:

$$\frac{i}{\delta}\,A^{\;1}_{50:\overline{20}|} = 0{,}13423835, \qquad P^{(2)}(\bar{A}_{50:\overline{20}|}) = \frac{\bar{A}_{50:\overline{20}|}}{\ddot{a}^{(2)}_{50:\overline{20}|}} = 0{,}03286830,$$
$$\frac{i}{\delta}\,A^{\;1}_{60:\overline{10}|} = 0{,}14085233, \qquad \bar{A}_{50:\overline{20}|} = 0{,}36471188,$$
$$P(\bar{A}_{50:\overline{20}|}) = \frac{\bar{A}_{50:\overline{20}|}}{\ddot{a}_{50:\overline{20}|}} = 0{,}03229873, \qquad \bar{A}_{60:\overline{10}|} = 0{,}59204806,$$
$${}_{10}V(\bar{A}_{50:\overline{20}|}) = \bar{A}_{60:\overline{10}|} - P(\bar{A}_{50:\overline{20}|})\,\ddot{a}_{60:\overline{10}|} = 0{,}3569475,$$
$${}_{10}V^{(2)}(\bar{A}_{50:\overline{20}|}) = \bar{A}_{60:\overline{10}|} - P^{(2)}(\bar{A}_{50:\overline{20}|})\,\ddot{a}^{(2)}_{60:\overline{10}|} = 0{,}3573937,$$
$$\beta(2)P^{(2)}(\bar{A}_{50:\overline{20}|})\,{}_{10}V^{1}_{50:\overline{20}|} = 0{,}000446.$$

Эта последняя величина является разностью между двумя величинами, выписанными непосредственно перед ней, как показывает формула (7.6.5). ▼

7.7. Нетто-резервы для премий с корректирующим платежом

В разд. 6.5 мы обсудили премии с корректирующим платежом, а теперь рассмотрим соответствующие нетто-резервы. Для целых k, согласно перспективному методу,

$${}^{h}_{k}V^{\{m\}}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \bar{A}_{x+k:\overline{n-k}|} - {}_{h}P^{\{m\}}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\,\ddot{a}^{\{m\}}_{x+k:\overline{h-k}|}, \qquad k < h. \tag{7.7.1}$$

Но, согласно (6.5.2),

$${}_{h}P^{\{m\}}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \frac{d^{(m)}}{\delta}\,{}_{h}\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})$$

и, согласно (5.5.4),

$$\ddot{a}^{\{m\}}_{x+k:\overline{h-k}|} = \frac{\delta}{d^{(m)}}\,\bar{a}_{x+k:\overline{h-k}|}.$$

Подставляя эти выражения в формулу (7.7.1), получим для целых k соотношение

$$ {}^{h}_{k}V^{\{m\}}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \bar{A}_{x+k:\overline{n-k}|} - {}_{h}\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\,\bar{a}_{x+k:\overline{h-k}|} = {}^{h}_{k}V(\bar{A}_{x:\overline{n}|}). \tag{7.7.2}$$

Это означает, что в годовщины заключения договора для всех вариантов корректирующих платежей, вне зависимости от характера выплаты премий, можно использовать резервы, рассчитанные в непрерывной модели. Условие, состоящее в том, что k должно быть целым, можно ослабить, беря в качестве k концы интервалов длины $1/m$, если премии выплачиваются m раз в год.

В разд. 6.5 было замечено, что нетто-премия с корректирующим платежом разбивается на две компоненты:

$$P^{\{1\}}(\bar{A}_x) = P(\bar{A}_x) + P(\bar{A}_x^{\text{ВП}}), \tag{7.7.3}$$

где верхний индекс ВП используется для обозначения премии на покрытие возврата. Аналогичное разложение имеет место для нетто-резервов. В этом можно убедиться с помощью перспективного метода и формулы (6.5.7). Доказательство проводится так:

$$\begin{aligned}{}_{k}V(\bar{A}_x^{\text{ВП}}) &= \bar{P}(\bar{A}_x)\,\frac{\bar{A}_{x+k} - A_{x+k}}{\delta} - P(\bar{A}_x^{\text{ВП}})\ddot{a}_{x+k}\\ &= \bar{P}(\bar{A}_x)\,\frac{d\ddot{a}_{x+k} - \delta\bar{a}_{x+k}}{\delta} - [P^{\{1\}}(\bar{A}_x) - P(\bar{A}_x)]\ddot{a}_{x+k}.\end{aligned}$$

Поскольку

$$\frac{d}{\delta}\,\bar{P}(\bar{A}_x) = P^{\{1\}}(\bar{A}_x),$$

это выражение может быть сведено к виду

$$\begin{aligned}{}_{k}V(\bar{A}_x^{\text{ВП}}) = -\bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{x+k} + P(\bar{A}_x)\ddot{a}_{x+k} &= \bar{A}_{x+k} - \bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{x+k} - [\bar{A}_{x+k} - P(\bar{A}_x)\ddot{a}_{x+k}]\\ &= {}_{k}\bar{V}(\bar{A}_x) - {}_{k}V(\bar{A}_x) = {}_{k}V^{\{1\}}(\bar{A}_x) - {}_{k}V(\bar{A}_x).\end{aligned}$$

Таким образом,

$${}_{k}V^{\{1\}}(\bar{A}_x) = {}_{k}V(\bar{A}_x) + {}_{k}V(\bar{A}_x^{\text{ВП}}). \tag{7.7.4}$$

7.8. Замечания и литература

В этой главе представлены способы определения резервов, соответствующие обсуждавшимся в гл. 6 способам расчета премий. Обсуждение рекуррентных формул для резервов будет проведено в гл. 8. Сначала использовались принципы расчета резервов, базирующиеся на функциях полезности и применявшиеся в гл. 6. Гербер [Gerber 1976, 1979] рассматривал эти резервы в более абстрактной постановке. Широко исследовались нетто-резервы, которые получаются при использовании линейной функции полезности. Шер [Scher 1974] изучал резервы, соответствующие нетто-премии с корректирующим платежом, как дисконтированные нетто-резервы в непрерывной модели.

Упражнения

К разделу 7.1

7.1. Определите нетто-резервы для $t = 2, 3, 4$ и 5 по договору страхования из примера 6.1.1.

7.2. Определите экспоненциальные резервы для $t = 2, 3, 4$ и 5 по договору страхования из примера 6.1.1.

7.3. Определите экспоненциальные резервы для $t = 1, 2, 3, 4$ и 5 по договору страхования из упр. 6.2.

7.4. Рассмотрите договор страхования из примера 7.1.1 и для страховщика из упр. 6.3 с функцией полезности $u(x) = x - 0{,}01\,x^2$, $0 < x < 50$, определите такой резерв ${}_kV$ в моменты времени $k = 1, 2, 3$ и 4, чтобы страховщику, имеющему капитал величины 10 в каждый период, было безразлично, оставлять ли риск на собственном удержании при премии величины 0,30360 (см. упр. 6.3) или передать риск перестраховщику, уплатив ${}_kV$ в качестве перестраховочной премии.

7.5. Рассмотрите договор страхования с выплатой размера 1 для страхователей возраста 0 в непрерывной модели, используя следующие предположения:

(i) закон смертности Муавра с $\omega = 5$, (ii) $i = 0{,}06$, (iii) принцип III примера 6.1.1 при $\alpha = 0{,}1$.

(a) Выведите уравнения, из которых можно определить величину экспоненциальных премий и экспоненциального резерва в момент времени $t = 1$.

(b) Решите уравнения из п. (a) для указанных численных значений, чтобы получить экспоненциальные премии и экспоненциальный резерв. Для получения этих решений можно использовать численные методы.

К разделу 7.2

7.6. Определите перспективные потери ${}_tL$ по прошествии t лет для договора смешанного страхования на срок n лет со страховой выплатой размера 1 для лица (x) в непрерывной модели. Покажите, что

$$\mathbf{D}[{}_tL\,|\,T > t] = \frac{{}^2\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|} - (\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|})^2}{(\delta \bar{a}_{x:\overline{n}|})^2}.$$

7.7. Перспективные потери по прошествии t лет по непрерывному аннуитету на срок n лет с годовой выплатой размера 1, выплачиваемому лицу (x), которое вносит за это единовременную нетто-премию, задаются формулой

$${}_tL = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T-t}|}, & t \leqslant T < n, \\ \bar{a}_{\overline{n-t}|}, & T \geqslant n. \end{cases}$$

Выразите $\mathbf{E}[{}_tL\,|\,T > t]$ и $\mathbf{D}[{}_tL\,|\,T > t]$ в терминах актуарных настоящих стоимостей.

7.8. Выведите перспективную формулу для

(a) ${}^{20}_{10}\bar{V}(\bar{A}_{35:\overline{30}|})$,

(b) нетто-резерва на конец 5-го года для договора страхования на срок 10 лет со страховой выплатой размера 1 и с единовременной премией, заключенного с лицом (45).

7.9. (a) Для договора бессрочного страхования на случай смерти в непрерывной модели с нетто-премией, определенной согласно принципу эквивалентности, найдите то значение $u_0 = T(x) - t$, когда потери равны нулю. [Предупреждение. Для больших значений t решения может не существовать.]

(b) Определите значение u_0 для $t = 20$ в примере 7.2.3 и воспользуйтесь рис. 7.2.1, чтобы оценить приемлемость такого выбора.

7.10. Пусть выполнены предположения примера 7.2.3. Найдите такие значения t, что минимальные потери равны нулю. Проверьте результат с помощью рис. 7.2.2.

7.11. (a) Повторите рассуждения, приведенные при выводе равенства (7.2.9), для определения функции распределения случайной величины потерь по договору смешанного страхования на срок n лет в непрерывной модели.

(b) Нарисуйте график для такого договора смешанного страхования, который соответствует рис. 7.2.1.

7.12. Проделайте упр. 7.11 для страхования на случай смерти на срок n лет в непрерывной модели.

7.13. Проверьте, что функция, заданная формулой (7.2.10), удовлетворяет условиям, налагаемым на функцию плотности.

К разделу 7.3

7.14. Выпишите четыре формулы для ${}^{20}_{10}\bar{V}(\bar{A}_{40})$.

7.15. Выпишите семь формул для ${}_{10}\bar{V}(\bar{A}_{40:\overline{20|}})$.

7.16. Приведите ретроспективную формулу для ${}^{30}_{20}\bar{V}({}_{30|}\bar{a}_{35})$.

7.17. Покажите, что для $0 < t \leqslant m$

(a) $\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{m+n|}}) = \bar{P}(\bar{A}^{1}_{x:\overline{m|}}) + \bar{P}_{x:\overline{m|}}^{\ \ 1}\, {}_m\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{m+n|}})$,

(b) ${}_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{m+n|}}) = {}_t\bar{V}(\bar{A}^{1}_{x:\overline{m|}}) + {}_t\bar{V}_{x:\overline{m|}}^{\ \ 1}\, {}_m\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{m+n|}})$,

и дайте словесную интерпретацию этих выражений.

7.18. Установите, с какой формулой из разд. 7.3 связано следующее равенство, и дайте его словесную интерпретацию:

$$ {}^{20}_{10}\bar{V}(\bar{A}_{30}) = \bar{A}^{\ \ 1}_{40:\overline{5|}} + {}_5E_{40}\, {}^{20}_{15}\bar{V}(\bar{A}_{30}) - {}_{20}\bar{P}(\bar{A}_{30})\, \bar{a}_{40:\overline{5|}}. $$

К разделу 7.4

7.19. Выпишите четыре формулы для ${}^{20}_{10}\bar{V}_{40}$.

7.20. Выпишите семь формул для ${}_{10}V_{40:\overline{20|}}$.

7.21. Покажите, что для $0 < k \leqslant m$

$$ {}_kV_{x:\overline{m+n|}} = {}_kV^{1}_{x:\overline{m|}} + {}_kV_{x:\overline{m|}}^{\ \ 1}\, {}_mV_{x:\overline{m+n|}}. $$

7.22. Вычислите ${}_kV_{x+k:\overline{n-k|}}$, если $k < n/2$, ${}_kV_{x:\overline{n|}} = 1/6$ и $\ddot{a}_{x:\overline{n|}} + \ddot{a}_{x+2k:\overline{n-2k|}} = 2\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k|}}$.

К разделу 7.5

7.23. На основе Иллюстративной таблицы смертности и процентной ставки 6% подсчитайте величину нетто-резервов из следующей таблицы (см. упр. 6.10).

Непрерывная модель	Полунепрерывная модель	Дискретная модель
${}_{10}\bar{V}(\bar{A}_{35:\overline{30|}})$	${}_{10}V(\bar{A}_{35:\overline{30|}})$	${}_{10}V_{35:\overline{30|}}$
${}_{10}\bar{V}(\bar{A}_{35})$	${}_{10}V(\bar{A}_{35})$	${}_{10}V_{35}$
${}_{10}\bar{V}(\bar{A}^{1}_{35:\overline{30|}})$	${}_{10}V(\bar{A}^{1}_{35:\overline{30|}})$	${}_{10}V^{1}_{35:\overline{30|}}$

7.24. В предположении равномерности распределения моментов смерти в течение каждого годичного возрастного интервала определите, какие из следующих равенств верны:

(a) ${}_kV(\bar{A}_{x:\overline{n|}}) = \dfrac{i}{\delta}\, {}_kV_{x:\overline{n|}}$, (b) ${}_kV(\bar{A}_x) = \dfrac{i}{\delta}\, {}_kV_x$, (c) ${}_kV(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n|}}) = \dfrac{i}{\delta}\, {}_kV^{1}_{x:\overline{n|}}$.

К разделу 7.6

7.25. Покажите, что в предположении равномерности распределения моментов смерти в течение каждого годичного возрастного интервала

$$ \frac{{}_5V^{(4)}_{30:\overline{20|}} - {}_5V_{30:\overline{20|}}}{{}^{20}_{5}V^{(4)}_{30} - {}^{20}_{5}V_{30}} = \frac{A_{30:\overline{20|}}}{A_{30}}. $$

(Указанное предположение достаточно, но не необходимо.)

7.26. Какие из следующих равенств являются верными для ${}_{15}V^{(m)}_{40}$?

(a) $(P^{(m)}_{55} - P^{(m)}_{40})\ddot{a}^{(m)}_{55}$, (b) $\left(1 - \dfrac{P^{(m)}_{40}}{P^{(m)}_{35}}\right)A_{55}$, (c) $P^{(m)}_{40}\ddot{s}^{(m)}_{40:\overline{15|}} - {}_{15}k_{40}$, (d) $1 - \dfrac{\ddot{a}^{(m)}_{55}}{\ddot{a}^{(m)}_{40}}$.

К разделу 7.7

7.27. Какие из следующих равенств являются верными для ${}_{15}V^{\{4\}}(\bar{A}_{40})$?

(a) ${}_{15}\bar{V}(\bar{A}_{40})$, (b) $[P^{\{4\}}(\bar{A}_{55}) - P^{\{4\}}(\bar{A}_{40})]\ddot{a}_{55}^{\{4\}}$, (c) $[\bar{P}(\bar{A}_{55}) - \bar{P}(\bar{A}_{40})]\bar{a}_{55}$,

(d) $\left[1 - \dfrac{\bar{P}(\bar{A}_{40})}{\bar{P}(\bar{A}_{55})}\right]\bar{A}_{55}$, (e) $1 - \dfrac{\bar{a}_{55}}{\bar{a}_{40}}$, (f) $\bar{P}(\bar{A}_{40})\bar{s}_{40:\overline{15}|} - {}_{15}\bar{k}_{40}$.

7.28. Покажите, что

(a) $P^{\{m\}}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = {}_{n}P^{\{m\}}(\bar{A}_x) + (1 - \bar{A}_{x+n})P^{\{m\}}_{\substack{1\\x:\overline{n}|}}$,

(b) ${}_{k}V^{\{m\}}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = {}^{n}_{k}V^{\{m\}}(\bar{A}_x) + (1 - \bar{A}_{x+n})V^{\{m\}}_{\substack{1\\x:\overline{n}|}}$.

Дайте словесную интерпретацию указанных выражений.

Ко всем темам главы

7.29. Подсчитайте значение $P^{1}_{x:\overline{n}|}$, если ${}_{n}V_x = 0{,}080$, $P_x = 0{,}024$ и $P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = 0{,}2$.

7.30. Подсчитайте значение ${}_{10}V_{45}$, если ${}_{10}V_{35} = 0{,}150$ и ${}_{20}V_{35} = 0{,}354$.

7.31. Договор бессрочного страхования на случай смерти с выплатой размера 1 в конце года смерти заключен лицом (25). Премии выплачиваются ежегодно до возраста 65 лет. Премии в течение первых 10 лет равны P_{25}, а в течение следующих 30 лет выплачиваются ежегодные постоянные, но бóльшие нетто-премии. Используйте Иллюстративную таблицу смертности и $i = 0{,}06$, чтобы найти следующие величины:

(a) годовую нетто-премию, выплачиваемую с возраста 35 лет до возраста 64 года,

(b) нетто-резерв 10-го года.

(c) В конце 10-го года страхователь может решить продолжить до возраста 65 лет выплату премий величины P_{25} в обмен на сокращение выплаты на случай смерти после достижения им 35 лет до величины B. Рассчитайте B.

(d) Рассчитайте резерв на 20-й год, если условия договора изменены, как указано в п. (c).

7.32. Предполагая, что $\delta = 0{,}05$, $q_x = 0{,}05$ и что моменты смерти равномерно распределены в течение каждого годичного возрастного интервала, рассчитайте

(a) $(\bar{I}\bar{A})^{1}_{x:\overline{1}|}$, (b) ${}_{1/2}V(\bar{I}\bar{A})^{1}_{x:\overline{1}|}$.

8

АНАЛИЗ НЕТТО-РЕЗЕРВОВ

8.1. Введение

В гл. 3 рассматривались распределения вероятностей случайных величин продолжительности предстоящей жизни. Главы 4 и 5 были посвящены случайным величинам настоящих стоимостей выплат по страховым договорам и аннуитетам. В гл. 6 было исследовано финансирование страховых договоров и аннуитетов посредством периодической выплаты премий, а в гл. 7 обсуждалось изменение во времени обязательств по страховым договорам и аннуитетам при периодически выплачиваемых премиях. В этих двух последних главах упор был сделан на *постоянные* страховые выплаты, финансирующиеся *постоянными* периодически выплачиваемыми премиями, величина которых обычно определялась на основе принципа эквивалентности.

Почему упор был сделан на постоянные выплаты? Во-первых, традиционные страховые продукты продаются при постоянных брутто-премиях. Естественно предположить, что на обеспечение страховых выплат идет фиксированная доля брутто-премии, откуда возникают постоянные нетто-премии. Во-вторых, из единственного уравнения, к которому сводится принцип эквивалентности, может быть найден только один параметр. Естественно взять в качестве такого параметра нетто-премию. В-третьих, пока в модели не учитываются расходы, которые составят предмет гл. 15, нет необходимости рассматривать нетто-премии различной величины. В-четвертых, исторически сложилось, что некоторые требования страхового надзора определены в терминах нетто-резервов при постоянных нетто-премиях.

В настоящей главе мы определяем нетто-резервы так же, как и в гл. 7, но рассматриваем их для договоров страхования общего вида, допускающих непостоянные, изменяющиеся, страховые выплаты и премии. Постоянные премии, конечно же, являются частным случаем изменяющихся, так что изложенные здесь идеи применимы к моделям из гл. 7. Однако обратное неверно. Специальные методы и соотношения из гл. 7 нельзя применить к более общим договорам из этой главы.

Мы начнем с договоров страхования общего вида в непрерывной и дискретной моделях и для этих договоров выведем рекуррентные формулы. Дискретная модель общего вида используется для получения нетто-резерва в моменты времени, не совпадающие с годовщинами заключения договора, чего в гл. 7 мы не делали. С помощью дискретной модели общего вида мы получаем распределение потерь и риска по различным периодам действия договора. Эти идеи также можно применять к договорам, рассмотренным в гл. 7, и читателю предлагается самостоятельно исследовать такие приложения.

8.2. Нетто-резервы для страховых договоров общего вида

Рассмотрим договор страхования общего вида для лица (x), при котором

- выплаты на случай смерти осуществляются в конце года действия договора, в котором произошла смерть;

- премии выплачиваются ежегодно в начале каждого года действия договора;
- выплаты на случай смерти в течение j-го года действия договора составляют b_j для $j = 1, 2, \ldots$;
- размер нетто-премий в j-м году действия договора равен π_{j-1} для $j = 1, 2, \ldots$. Заметим, что индексы при b и π обозначают момент платежа.

Перспективные потери ${}_hL$ для неотрицательного целого h представляют собой настоящую стоимость в момент времени h будущих страховых выплат за вычетом настоящей стоимости в момент времени h будущих нетто-премий. Как функция от с.в. $K(x)$ они представляются в виде

$$
{}_hL = \begin{cases} 0, & K(x) = 0, 1, \ldots, h-1, \\ b_{K(x)+1}\, v^{K(x)+1-h} - \sum\limits_{j=h}^{K(x)} \pi_j\, v^{j-h}, & K(x) = h, h+1, \ldots . \end{cases} \tag{8.2.1}
$$

Замечание. Это определение обобщает определение, данное формулой (7.4.1), так как в него включены нулевые значения с.в. ${}_hL$ для значений $K(x)$, меньших h. Это обобщение, конечно, не изменяет величины нетто-резерва, который определяется ниже как условное математическое ожидание при условии $K(x) \geqslant h$. Оно будет использовано при выводе рекуррентных уравнений.

Нетто-резерв в момент времени h, обозначаемый через ${}_hV$, определяется следующим образом:

$$
\begin{aligned}
{}_hV &= \mathbf{E}[{}_hL \mid K(x) \geqslant h] = \mathbf{E}\left[b_{K(x)+1}\, v^{K(x)+1-h} - \sum_{j=h}^{K(x)} \pi_j\, v^{j-h} \;\Big|\; K(x) \geqslant h\right] \\
&= \mathbf{E}\left[b_{(K(x)-h)+h+1}\, v^{(K(x)-h)+1} - \sum_{j=0}^{K(x)-h} \pi_{h+j}\, v^j \;\Big|\; K(x) \geqslant h\right].
\end{aligned} \tag{8.2.2}
$$

В предположении, что условное распределение с.в. $K(x) - h$ при условии $K(x) = h, h+1, \ldots$ совпадает с распределением с.в. $K(x+h)$, последнее выражение можно переписать в форме

$$
\begin{aligned}
{}_hV &= \mathbf{E}\left[b_{K(x+h)+h+1}\, v^{K(x+h)+1} - \sum_{j=0}^{K(x+h)} \pi_{h+j}\, v^j\right] \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \left(b_{h+j+1}\, v^{j+1} - \sum_{k=0}^{j} \pi_{h+k}\, v^k\right) {}_jp_{x+h}\, q_{x+h+j}.
\end{aligned} \tag{8.2.3}
$$

Заметим, что если это предположение не выполняется, то мы имеем дело с селекционной моделью смертности. Используя суммирование по частям (см. приложение 5) или изменение порядка суммирования, формулу (8.2.3) можно переписать в виде

$$
{}_hV = \sum_{j=0}^{\infty} b_{h+j+1}\, v^{j+1}\, {}_jp_{x+h}\, q_{x+h+j} - \sum_{j=0}^{\infty} \pi_{h+j}\, v^j\, {}_jp_{x+h}. \tag{8.2.4}
$$

Таким образом, формула (8.2.2), определяющая резерв ${}_hV$, сводится к перспективной формуле: актуарная настоящая стоимость будущих страховых выплат минус актуарная настоящая стоимость будущих нетто-премий.

В гл. 7 мы обсуждали четыре типа формул для нетто-резерва: перспективную, ретроспективную, разности премий и оплаченной страховой суммы. Они использовались для нетто-резерва по договорам с постоянными нетто-премиями и постоянными страховыми выплатами. Лишь перспективная и ретроспективная формулы естественным образом переносятся на случай дискретной модели общего вида. Ретроспективная формула будет выведена в следующем разделе.

Пример 8.2.1. Рассмотрим договор бессрочного страхования на случай смерти с выплатой размера 1, заключенный с лицом (x), по которому нетто-премия первого года равна актуарной настоящей стоимости страховой выплаты в первый год, а остальные нетто-премии постоянны и определяются согласно принципу эквивалентности. Выведем формулы для (a) нетто-премии первого года, (b) постоянных нетто-премий последующих лет и (c) нетто-резерва в конце первого года.

Решение. (a) Из результатов гл. 4 получим $\pi_0 = A^1_{x:\overline{1}|}$.

(b) Согласно принципу эквивалентности, $A^1_{x:\overline{1}|} + \pi a_x = A_x$, так что $\pi = (A_x - A^1_{x:\overline{1}|})/a_x = A_{x+1}/\ddot{a}_{x+1} = P_{x+1}$.

(c) Согласно перспективной формуле, ${}_1V = A_{x+1} - \pi\ddot{a}_{x+1} = 0$. ▼

Пример 8.2.1 иллюстрирует один из подходов к изменяющимся премиям. Другой возможный подход состоит в том, чтобы премии, фигурирующие в определении с.в. ${}_0L$ в формуле (8.2.1), определять на основе весовых коэффициентов w_j, $j = 0, 1, 2, \ldots$. Используя принцип эквивалентности, для этого частного случая формулы (8.2.1) мы получим

$$\mathbf{E}[{}_0L] = 0,$$

или

$$\sum_{j=0}^{\infty} b_{j+1}\, v^{j+1}\, {}_jp_x\, q_{x+j} = \pi \sum_{j=0}^{\infty} w_j\, v^j\, {}_jp_x, \tag{8.2.5}$$

и

$$\pi = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} b_{j+1}\, v^{j+1}\, {}_jp_x\, q_{x+j}}{\sum_{j=0}^{\infty} w_j\, v^j\, {}_jp_x}. \tag{8.2.6}$$

За счет выбора последовательностей $\{b_{j+1}; j = 0, 1, 2, \ldots\}$ и $\{w_j; j = 0, 1, 2, \ldots\}$ можно получить различные формулы для нетто-премий.

Если считать, что последовательность $\{b_{j+1}; j = 0, 1, 2, \ldots\}$ должна быть зафиксирована, то останется большая свобода выбора последовательности $\{w_j; j = 0, 1, 2, \ldots\}$, которая, в свою очередь, определяет последовательность $\{\pi_j; j = 0, 1, 2, \ldots\}$. По коммерческим соображениям может оказаться, что необходимо рассматривать $w_j \geqslant 0$ для всех j, но эти ограничения не следуют из принципа эквивалентности. В примере 8.2.1 $b_{j+1} = 1$ для всех j, но $\pi w_0 = A^1_{x:\overline{1}|}$ и $\pi w_j = (A_x - A^1_{x:\overline{1}|})/a_x$, $j = 1, 2, \ldots$, так что выполняется равенство (8.2.6). Другое приложение приведено в примере 8.2.2.

Пример 8.2.2. Для договора бессрочного страхования на случай смерти со страховой выплатой размера 1, заключенного с лицом (x), ежегодные нетто-премии в дискретной модели составляют $\pi_j = \pi w_j$, где $w_j = (1+r)^j$. Коэффициент r можно выбрать в виде оценки ожидаемой скорости роста доходов страхователя.

Выведем формулы для (a) π, (b) ${}_hV$ и (c) ${}_hV$ при $r = i$.

Решение. (a) Используя формулу (8.2.5), получим $\pi = A_x/\ddot{a}^*_x$, где $\ddot{a}^*_x$ соответствует процентной ставке $i^* = (i - r)/(1 + r)$. Если $r = i$, то $\pi = A_x/(e_x + 1)$.

(b) Используя формулу (8.2.4), получим

$$
\begin{aligned}
{}_hV &= A_{x+h} - \sum_{j=0}^{\infty} \pi_{j+h}\, v^j\, {}_jp_{x+h} \\
&= A_{x+h} - \frac{A_x}{\ddot{a}_x^*}(1+r)^h \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1+r}{1+i}\right)^j {}_jp_{x+h} = A_{x+h} - \frac{A_x}{\ddot{a}_x^*}(1+r)^h \ddot{a}_{x+h}^*.
\end{aligned}
$$

(c) ${}_hV = A_{x+h} - [A_x/(e_x+1)](1+r)^h(e_{x+h}+1)$. ▼

В примере 8.2.2 возможны отрицательные нетто-резервы при бóльших значениях r. В упр. 8.32 представлен вариант такого договора.

Теперь рассмотрим договор страхования общего вида, заключенный с лицом (x), в непрерывной модели, по которому

- выплаты на случай смерти, равные b_t, производятся непосредственно в момент смерти t,
- нетто-премии выплачиваются непрерывно по t с интенсивностью π_t в год.

Перспективные потери для лица, застрахованного в возрасте x и дожившего до момента времени t, представляет собой настоящую стоимость на момент времени t будущей страховой выплаты за вычетом настоящей стоимости на момент времени t будущих нетто-премий:

$$
{}_tL = \begin{cases} 0, & T(x) \leqslant t, \\ b_{T(x)}\, v^{T(x)-t} - \int_t^{T(x)} \pi_u\, v^{u-t}\, du, & T(x) > t. \end{cases} \tag{8.2.7}
$$

Нетто-резерв по такому договору общего вида, который мы обозначим через ${}_t\bar{V}$, определяется формулой

$$
\begin{aligned}
{}_t\bar{V} = \mathbf{E}[{}_tL \,|\, T(x) > t] &= \mathbf{E}\left[b_{T(x)}\, v^{T(x)-t} - \int_t^{T(x)} \pi_u\, v^{u-t}\, du \;\Big|\; T(x) > t\right] \\
&= \mathbf{E}\left[b_{(T(x)-t)+t}\, v^{T(x)-t} - \int_0^{T(x)-t} \pi_{t+r}\, v^r\, dr \;\Big|\; T(x) > t\right].
\end{aligned} \tag{8.2.8}
$$

Как и при получении формулы (8.2.3) в дискретной модели, предположим здесь, что условное распределение с.в. $T(x)-t$ при условии $T(x) > t$ совпадает с распределением с.в. $T(x+t)$, и получим

$$
\begin{aligned}
{}_t\bar{V} &= \mathbf{E}\left[b_{T(x+t)+t}\, v^{T(x+t)} - \int_0^{T(x+t)} \pi_{t+r}\, v^r\, dr\right] \\
&= \int_0^{\infty}\left(b_{t+u}\, v^u - \int_0^u \pi_{t+r}\, v^r\, dr\right) {}_up_{x+t}\, \mu_x(t+u)\, du \\
&= \int_0^{\infty} b_{t+u}\, v^u\, {}_up_{x+t}\, \mu_x(t+u)\, du - \int_0^{\infty} \pi_{t+r}\, v^r\, {}_rp_{x+t}\, dr.
\end{aligned} \tag{8.2.9}
$$

Второй интеграл в (8.2.9) получен либо интегрированием по частям, либо изменением порядка интегрирования. Другими словами, величина ${}_t\bar{V}$ является актуарной настоящей стоимостью будущей страховой выплаты за вычетом актуарной настоящей стоимости будущих нетто-премий. Если предположение об условном распределении с.в. $T(x) - t$ при условии $T(x) > t$ не выполнено, то мы имеем дело с селекционной моделью.

8.3. Рекуррентные формулы для нетто-резервов в дискретной модели

Одной из целей этой главы является исследование рекуррентных соотношений между случайными величинами потерь, их математическими ожиданиями и дисперсиями. Мы начнем с определения чистых денежных потерь страховщика (отрицательного денежного потока) по годам действия договора в дискретной модели, которые определены формулой (8.2.1). Рисунок 8.3.1 представляет собой временну́ю диаграмму, на которой изображены дискретные входящие и исходящие денежные потоки.

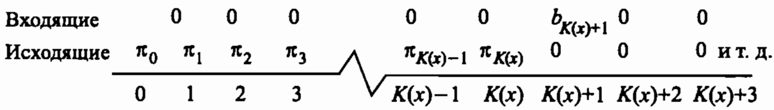


Рис. 8.3.1. Входящие и исходящие денежные потоки страховщика по договору страхования общего вида в дискретной модели

Обозначим через C_h настоящую стоимость на момент времени h чистых денежных потерь в течение года $(h, h+1)$. Если интервал $(h, h+1)$ предшествует году смерти, т. е. $h < K(x)$, то $C_h = -\pi_h$. Если $(h, h+1)$ является годом смерти, $h = K(x)$, то $C_h = v\,b_{h+1} - \pi_h$. Если интервал $(h, h+1)$ расположен после года смерти, то, естественно, $C_h = 0$. Выразив эти определения как явную функцию от с.в. $K(x)$, получим

$$C_h = \begin{cases} 0, & K(x) = 0, 1, \ldots, h-1, \\ v\,b_{h+1} - \pi_h, & K(x) = h, \\ -\pi_h, & K(x) = h+1, h+2, \ldots . \end{cases} \tag{8.3.1}$$

Для условного распределения с.в. C_h при условии $K(x) \geqslant h$ имеем $C_h = v\,b_{h+1} I - \pi_h$, где

$$I = \begin{cases} 1 & \text{с вероятностью } q_{x+h}, \\ 0 & \text{с вероятностью } p_{x+h}. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\mathbf{E}[C_h \,|\, K(x) \geqslant h] = v\,b_{h+1}\, q_{x+h} - \pi_h, \tag{8.3.2}$$

$$\mathbf{D}[C_h \,|\, K(x) \geqslant h] = (v\,b_{h+1})^2 q_{x+h}\, p_{x+h}. \tag{8.3.3}$$

Кроме того, используя формулы (2.2.10) и (2.2.11), а также (8.3.1)–(8.3.3), получим

$$\mathbf{E}[C_h] = (v\,b_{h+1}\, q_{x+h} - \pi_h)\, {}_hp_x, \tag{8.3.4}$$

$$\mathbf{D}[C_h] = (v\,b_{h+1}\, q_{x+h} - \pi_h)^2\, {}_hp_x\, {}_hq_x + (v b_{h+1})^2 q_{x+h}\, p_{x+h}\, {}_hp_x. \tag{8.3.5}$$

Наконец, для $j > h$ величины C_j и C_h коррелированы. Доказательство этого утверждения мы оставляем читателю в качестве упр. 8.5 и 8.6.

Как ранее было определено формулой (8.2.1), с.в. ${}_hL$ представляет собой настоящую стоимость на момент времени h будущих исходящих денежных потоков страховщика за вычетом настоящей стоимости на момент времени h его будущих входящих потоков. Изменив порядок суммирования в этой формуле, мы получим эквивалентное определение, состоящее в том, что величина ${}_hL$ равна сумме настоящих стоимостей на момент времени h будущих ежегодных чистых потерь страховщика, т. е.

$$ {}_hL = \sum_{j=h}^{\infty} v^{j-h}\, C_j. \tag{8.3.6}$$

Для $h < K(x)$ из формулы (8.3.1) получаем, как и ранее,

$$\begin{aligned} {}_hL = \sum_{j=h}^{K(x)} v^{j-h}\, C_j &= v^{K(x)-h}(v\, b_{K(x)+1} - \pi_{K(x)}) - \sum_{j=h}^{K(x)-1} v^{j-h}\pi_j \\ &= v^{K(x)+1-h}\, b_{K(x)+1} - \sum_{j=h}^{K(x)} v^{j-h}\, \pi_j. \end{aligned}$$

Если $h = K(x)$, то ${}_hL = C_{K(x)} = v\, b_{K(x)+1} - \pi_{K(x)}$. А для случая $h > K(x)$ обе части формулы (8.3.6) равны нулю.

Из равенства (8.3.6) следует рекуррентное соотношение для случайных величин потерь:

$$ {}_hL = C_h + v \sum_{j=h+1}^{\infty} v^{j-(h+1)} C_j = C_h + v\; {}_{h+1}L. \tag{8.3.7}$$

Рекуррентное соотношение для нетто-резервов можно получить из равенства (8.3.7) следующим образом:

$$\begin{aligned} {}_hV &= \mathbf{E}[{}_hL\,|\,K(x)\geqslant h] = \mathbf{E}[C_h + v\; {}_{h+1}L\,|\,K(x)\geqslant h] \\ &= v\, b_{h+1}\, q_{x+h} - \pi_h + v\,\mathbf{E}[{}_{h+1}L\,|\,K(x)\geqslant h]. \end{aligned} \tag{8.3.8}$$

Поскольку с.в. ${}_{h+1}L$ равна нулю, когда $K(x) = h$, имеем

$$\begin{aligned} {}_hV &= v\, b_{h+1}\, q_{x+h} - \pi_h + v\,\mathbf{E}[{}_{h+1}L\,|\,K(x)\geqslant h+1] p_{x+h} \\ &= v\, b_{h+1}\, q_{x+h} - \pi_h + v\; {}_{h+1}V p_{x+h}. \end{aligned} \tag{8.3.9}$$

Формула (8.3.9) является обратной рекуррентной формулой [формулой вида $u(h) = c(h) + d(h)\, u(h+1)$] для нетто-резерва по договору страхования общего вида в дискретной модели. Заметим, что вновь $d(h) = v\, p_{x+h}$ и $c(h) = v\, b_{h+1}\, q_{x+h} - \pi_h$. Прямая рекуррентная формула может быть получена из (8.3.9) разрешением этого соотношения относительно величины ${}_{h+1}V$ (см. упр. 8.7). Эта прямая формула была использована в примерах 7.4.3 и 7.4.4, где показатели смертности брались из агрегативной таблицы.

Для дальнейшего анализа изменения размера нетто-резервов можно преобразовать члены равенства (8.3.9) следующим образом. Сначала добавим π_h к обеим частям равенства и получим

$$ {}_hV + \pi_h = b_{h+1}\, v\, q_{x+h} + {}_{h+1}V\, v\, p_{x+h}. \tag{8.3.10}$$

В словесной форме: ресурсы, необходимые в начале $h+1$-го года действия договора, равны актуарной настоящей стоимости ресурсов, необходимых на конец года. Сумма ${}_hV + \pi_h$ называется *начальным нетто-резервом* для года действия договора $h+1$. Напротив, ${}_{h+1}V v p_{x+h} - {}_hV$ и ${}_hV$ называются *конечными нетто-резервами* для h-го и $h+1$-го годов действия договора. Последнее название отражает тот факт, что эти резервы отвечают концу соответствующего года.

Формулу (8.3.10) можно переписать с учетом разбиения нетто-премии π_h на компоненты для $(h+1)$-го года действия договора, а именно

$$\pi_h = b_{h+1}\, v\, q_{x+h} + ({}_{h+1}V\, v\, p_{x+h} - {}_hV). \tag{8.3.11}$$

Первая компонента в правой части представляет собой нетто-премию по договору страхования на срок 1 год со страховой выплатой b_{h+1}. Вторая компонента ${}_{h+1}V\, v\, p_{x+h} - {}_hV$ представляет сумму, которая, если ее прибавить к ${}_hV$ в начале года, при данных процентах и вероятностях дожития возрастает до величины ${}_{h+1}V$ в конце этого года.

Чтобы в дальнейшем сравнить ее с формулой для непрерывной модели, умножим обе части равенства (8.3.11) на $1+i$ и перепишем его в виде

$$\pi_h + ({}_hV + \pi_h)i + {}_{h+1}V\, q_{x+h} = b_{h+1}\, q_{x+h} + \Delta({}_hV). \tag{8.3.12}$$

Левая часть формулы (8.3.12) отвечает финансовым ресурсам на конец $h+1$-го года действия договора и состоит из нетто-премии, процента, начисленного за год на начальный нетто-резерв, и ожидаемого «освобожденного» в связи со смертью в конце $(h+1)$-го года нетто-резерва. Правая часть представляет ожидаемые выплаты на случай смерти в конце этого года и прирост нетто-резерва ${}_{h+1}V - {}_hV$.

Анализ, отличный от проведенного с помощью соотношений (8.3.10)–(8.3.12), получается, если предположить, что резерв ${}_{h+1}V$ можно использовать для обеспечения выплат на случай смерти b_{h+1} и что для покрытия обязательств по страхованию на срок 1 год необходима лишь *чистая рисковая сумма* $b_{h+1} - {}_{h+1}V$. Для этого типа анализа, подставляя $1 - q_{x+h}$ вместо p_{x+h} в равенство (8.3.10) и умножая обе его части на $1+i$, получим

$${}_{h+1}V = ({}_hV + \pi_h)(1+i) - (b_{h+1} - {}_{h+1}V)q_{x+h}\,. \tag{8.3.13}$$

Вместо формулы (8.3.13) мы теперь имеем

$$\pi_h = (b_{h+1} - {}_{h+1}V)v\, q_{x+h} + (v\, {}_{h+1}V - {}_hV). \tag{8.3.14}$$

Первая компонента в правой части формулы (8.3.14) представляет собой нетто-премию для страхования на срок 1 год с выплатой величины чистой рисковой суммы. Вторая компонента $v\, {}_{h+1}V - {}_hV$ является величиной, которая, если ее прибавить к ${}_hV$ в начале года, накапливается с учетом процентов до величины ${}_{h+1}V$ в конце этого года. В этой формулировке величина ${}_{h+1}V$ предназначается для обеспечения выплат на случай смерти, если смерть произойдет. Следовательно, нетто-резерв аккумулируется как накопительный фонд. Это вновь показано формулой, соответствующей формуле (8.3.12), а именно

$$\pi_h + ({}_hV + \pi_h)i = (b_{h+1} - {}_{h+1}V)q_{x+h} + \Delta({}_hV). \tag{8.3.15}$$

Мы предоставляем читателю дать ее словесную интерпретацию.

При анализе с помощью формулы (8.3.11) нетто-резерв не используется для обеспечения выплат на случай смерти, и, следовательно, резерв накапливается при данных процентах и вероятностях дожития. В оба слагаемых в правой части формулы (8.3.11) входят вероятности дожития, в то время как в формуле (8.3.14) они содержатся только в первом слагаемом. В разд. 8.5 мы увидим, что формула (8.3.14) связана с гибкими методами расчета дисперсии потерь, которые соответствуют случайной природе продолжительности предстоящей жизни.

Все формулы (8.3.10)–(8.3.15) являются рекуррентными соотношениями для нетто-резерва в целочисленные моменты времени. Ни одно из этих шести соотношений не записано в виде явной обратной или прямой рекуррентной формулы; все они приводятся для того, чтобы лучше прояснить рассматриваемую ситуацию. В примере 8.3.1 рекуррентная формула (8.3.14) используется для получения явных формул для нетто-премий и нетто-резерва.

Пример 8.3.1. Отсроченный бессрочный аннуитет пренумерандо по договору, заключенному с лицом (x), по которому производятся ежегодные выплаты этому лицу размера 1, начиная с возраста $x+n$, оплачивается постоянными ежегодными нетто-премиями в течение периода отсрочки. Выплата на случай смерти до достижения возраста $x+n$ лет обеспечивается нетто-резервом. Предполагая, что выплата на случай смерти осуществляется в конце года смерти, определим ежегодную нетто-премию и нетто-резерв на конец года k при $k \leqslant n$.

Решение. Используя тот факт, что в формуле (8.3.14) $b_{h+1} = {}_{h+1}V$ для $h = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, мы имеем

$$\pi = v\,{}_{h+1}V - {}_hV.$$

Умножая на v^h, получаем

$$\pi v^k = v^{k+1}{}_{h+1}V - v^k{}_hV = \Delta(v^k{}_hV). \tag{8.3.16}$$

Суммируя по h от 0 до $n-1$, получим

$$v^n{}_nV - v^0{}_0V = \pi \sum_{h=0}^{n-1} v^h = \pi \ddot{a}_{\overline{n}|},$$

и так как ${}_0V = 0$ и ${}_nV = \ddot{a}_{x+n}$, отсюда следует, что

$$\pi = v^n \frac{\ddot{a}_{x+n}}{\ddot{a}_{\overline{n}|}} = v^n \frac{\ddot{a}_{x+n}}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}.$$

Таким образом, этот аннуитет идентичен аннуитету, описанному в примере 6.6.2. Нетто-резерв в конце k-го года может быть рассчитан суммированием равенств (8.3.16) по целым h от 0 до $k-1$, что дает $v^k{}_kV = \pi\ddot{a}_{\overline{k}|}$, откуда ${}_kV = \pi\ddot{s}_{\overline{k}|}$. ▼

Пример 8.3.2. Договор смешанного страхования на срок n лет в дискретной модели, заключенный с лицом (x), обеспечивает в случае смерти в течение n лет выплату размера 1 плюс нетто-резерв в конце года смерти. Найдем формулу постоянной ежегодной нетто-премии и нетто-резерва в конце k-го года при условии, что выплата на дожитие составляет единицу.

Решение. В этом случае $b_h = 1 + {}_hV$, а чистая рисковая сумма постоянна и равна 1. Обозначая постоянную ежегодную нетто-премию через π и используя формулу (8.3.14), получаем

$$v\,{}_{h+1}V - {}_hV = \pi - v\,q_{x+h}, \qquad h = 0, 1, \ldots, n-1.$$

При умножении на v^h это даст формулу

$$\Delta(v^h{}_hV) = \pi\, v^h - v^{h+1}\, q_{x+h}. \tag{8.3.17}$$

Суммируя ее по h от 0 до $n-1$, получим

$$v^n{}_nV = \pi\ddot{a}_{\overline{n}|} - \sum_{h=0}^{n-1} v^{h+1} q_{x+h},$$

так что при ${}_nV = 1$ (выплата на дожитие равна 1)

$$\pi = \frac{v^n + \sum\limits_{h=0}^{n-1} v^{h+1} q_{x+h}}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}.$$

Суммируя равенство (8.3.17) по h от 0 до $k-1$ и разрешая полученное равенство относительно ${}_kV$, получим

$$ {}_kV = \pi \ddot{s}_{\overline{k}|} - \sum_{h=0}^{k-1} (1+i)^{k-h-1} q_{x+h}. \qquad \blacktriangledown$$

Непосредственно перед примером 8.2.1 мы обещали вывести ретроспективную формулу для нетто-резерва по договору страхования общего вида в дискретной модели. Сначала перепишем рекуррентное соотношение (8.3.11) в виде

$$\pi_h - b_{h+1}\, v\, q_{x+h} = {}_{h+1}V\, v\, p_{x+h} - {}_hV,$$

а затем, умножая обе части на $v^h\,{}_hp_x$, получим соотношение

$$\pi_h^*\, v^h\,{}_hp_x - b_{h+1}\, v^{h+1}\,{}_hp_x\, q_{x+h} = {}_{h+1}V\, v^{h+1}\,{}_{h+1}p_x - {}_hV\, v^h\,{}_hp_x = \Delta({}_hV\, v^h\,{}_hp_x), \tag{8.3.18}$$

которое выполняется при $h = 0, 1, 2 \ldots$. Просуммировав обе части формулы (8.3.18) по целым h от 0 до $k-1$, мы имеем

$$\sum_{h=0}^{k-1} (\pi_h\, v^h\,{}_hp_x - b_{h+1}\, v^{h+1}\,{}_hp_x\, q_{x+h}) = {}_kV v^k\,{}_kp_x - {}_0V.$$

Согласно принципу эквивалентности, ${}_0V = 0$, так что мы можем переписать это последнее равенство для конечного нетто-резерва по договору страхования общего вида в дискретной модели в виде

$${}_kV = \sum_{h=0}^{k-1} \frac{\pi_h\, v^h\,{}_hp_x - b_{h+1}\, v^{h+1}\,{}_hp_x\, q_{x+h}}{v^k\,{}_kp_x},$$

а затем в виде

$${}_kV = \sum_{h=0}^{k-1} (\pi_h - v\, b_{h+1}\, q_{x+h})\, \frac{(1+i)^{k-h}}{{}_{k-h}p_{x+h}}. \tag{8.3.19}$$

Формула (8.3.19) представляет нетто-резерв в момент времени k в виде суммы ежегодных премий за первые k лет за вычетом ожидаемых выплат на случай смерти, накопленных к моменту времени k при заданных процентном доходе и вероятностях дожития.

8.4. Нетто-резервы в промежуточные моменты времени

Вернемся к рассматривавшемуся в формуле (8.2.1) договору страхования общего вида в дискретной модели, заключенному с лицом (x), согласно которому выплаты на случай смерти, равные b_{j+1}, производятся в конце $j+1$-го года действия договора, а ежегодные нетто-премии, равные π_j, $j = 0, 1, \ldots$, выплачиваются в начале этого года действия договора. Определим выражение для *промежуточного нетто-резерва* ${}_{h+s}V$ при $h = 0, 1, 2, \ldots$ и $0 < s < 1$, а также его приближенное значение.

Обобщая данное ранее в формулах (8.2.1) и (8.2.2) определение нетто-резерва, получим для нашего промежуточного случая

$$ {}_{h+s}L = \begin{cases} 0, & K(x) = 0, 1, \ldots, h-1, \\ v^{1-s} b_{K(x)+1}, & K(x) = h, \\ v^{K(x)+1-(h+s)} b_{K(x)+1} - \sum\limits_{j=h+1}^{K(x)} v^{j-(h+s)} \pi_j, & K(x) = h+1, h+2, \ldots, \end{cases} \tag{8.4.1} $$

и

$$ {}_{h+s}V = \mathbf{E}[{}_{h+s}L \,|\, T(x) > h+s]. \tag{8.4.2} $$

Согласно (8.4.2),

$$ {}_{h+s}V = v^{1-s}\, b_{h+1}\, {}_{1-s}q_{x+h+s} + v^{1-s}\, {}_{h+1}V\, {}_{1-s}p_{x+h+s}. \tag{8.4.3} $$

Теперь умножим обе части формулы (8.4.3) на $v^s\,{}_sp_{x+h}$ и получим

$$ v^s\,{}_sp_{x+h}\ {}_{h+s}V = v\, b_{h+1} ({}_{s|1-s}q_{x+h}) + v({}_{h+1}V) p_{x+h}. \tag{8.4.4} $$

Соотношение (8.3.9) дает выражение для $v\, b_{h+1}\, q_{x+h}$, и подстановка этого выражения в формулу (8.4.4) дает

$$ v^s\,{}_sp_{x+h}\ {}_{h+s}V = ({}_hV + \pi_h - {}_{h+1}V\, v\, p_{x+h}) \frac{{}_{s|1-s}q_{x+h}}{q_{x+h}} + v\, {}_{h+1}V p_{x+h}; $$

последнее равенство можно преобразовать к виду

$$ v^s\,{}_sp_{x+h}\ {}_{h+s}V = ({}_hV + \pi_h) \frac{{}_{s|1-s}q_{x+h}}{q_{x+h}} ({}_{h+1}V\, v\, p_{x+h}) \left(1 - \frac{{}_{s|1-s}q_{x+h}}{q_{x+h}}\right). \tag{8.4.5} $$

Это точное выражение показывает, что если промежуточный нетто-резерв в момент времени $h+s$ дисконтируется с учетом процента и вероятностей дожития к моменту времени h, то результатом будет значение, полученное интерполяцией величины начального нетто-резерва в момент времени h и величины конечного нетто-резерва в момент времени $h+1$, дисконтированным к моменту времени h.

Подчеркнем, что интерполяция в общем случае не является линейной; однако в предположении, что моменты смерти равномерно распределены на годичных возрастных интервалах, интерполяция будет линейной, а равенство (8.4.5) сводится к равенству

$$ v^s\ {}_sp_{x+h}\ {}_{h+s}V = ({}_hV + \pi_h)(1-s) + ({}_{h+1}V\, v\, p_{x+h})(s). \tag{8.4.6} $$

Заменяя в формуле (8.4.6) i и q_{x+h} нулями, в качестве приближения получим величину, образованную линейной интерполяцией начального нетто-резерва в момент времени h и конечного нетто-резерва. Результатом такого приближения будет равенство

$$ {}_{h+s}V = (1-s)({}_hV + \pi_h) + s({}_{h+1}V), \tag{8.4.7} $$

которое можно переписать в виде

$$ {}_{h+s}V = (1-s)({}_hV) + s({}_{h+1}V) + (1-s)\pi_h. \tag{8.4.8} $$

Здесь промежуточный нетто-резерв равен сумме значения, полученного интерполяцией конечных нетто-резервов,

$$ (1-s)({}_hV) + s({}_{h+1}V), $$

и *незаработанной нетто-премии* $(1-s)\pi_h$. Вообще,

(незаработанная нетто-премия в некоторый момент года)
= (нетто-премия для этого года)
× (разность между моментом времени, до которого премия выплачена, и рассматриваемым моментом времени).

Таким образом, если премии выплачиваются ежегодно, то вся нетто-премия становится заработанной к концу года, так что в момент s незаработанная нетто-премия равна $(1-s)\pi_h$. Понятие незаработанной нетто-премии будет также использовано нами при обсуждении аппроксимаций нетто-резервов и тогда, когда премии выплачиваются чаще, чем раз в год.

Рассмотрим один такой случай, когда истинные премии выплачиваются раз в полгода, а страховая выплата происходит в конце того страхового года, в котором произошла смерть. Для $0 < s \leqslant 1/2$ мы могли бы начать со случайной величины настоящей стоимости перспективных потерь в момент времени $h+s$ и затем рассчитать ее условное математическое ожидание при условии, что лицо (x) доживет до момента времени $h+s$. Эти расчеты несколько сложнее, чем те, которые привели нас к формуле (8.4.4), так что мы начнем с формулы, соответствующей равенству (8.4.3), заметив, что это перспективная формула,

$$\begin{aligned}{}_{h+s}V^{(2)} &= v^{1-s}b_{h+1}({}_{1-s}q_{x+h+s}) + v^{1-s}({}_{h+1}V^{(2)})_{1-s}p_{x+h+s} \\ &\quad - \frac{\pi_h}{2}(v^{0,5-s})({}_{0,5-s}p_{x+h+s}).\end{aligned} \tag{8.4.9}$$

Первые два слагаемых в (8.4.9) можно рассматривать как актуарные настоящие стоимости выплаты на случай смерти и выплаты на дожитие в размере, равном резерву, а третье слагаемое — как актуарную настоящую стоимость будущей нетто-премии по договору смешанного страхования на срок $1-s$. Умножая обе части формулы (8.4.9) на ${}_sp_{x+h}\,v^s$, получим

$${}_sp_{x+h}\,v^s\,{}_{h+s}V^{(2)} = vb_{h+1}({}_{s|1-s}q_{x+h}) + v({}_{h+1}V^{(2)})p_{x+h} - \frac{\pi_h}{2}(v^{0,5})({}_{0,5}p_{x+h}). \tag{8.4.10}$$

При выплате премий раз в полгода равенство, соответствующее формуле (8.3.10), также является перспективной формулой для нетто-резерва:

$${}_hV^{(2)} = b_{h+1}\,v\,q_{x+h} + {}_{h+1}V^{(2)}v\,p_{x+h} - \frac{\pi_h}{2}(1 + v^{0,5}{}_{0,5}p_{x+h}). \tag{8.4.11}$$

Из нее можно выразить vb_{h+1}, чтобы подставить в (8.4.10) и получить

$$\begin{aligned}{}_sp_{x+h}\,v^s\,{}_{h+s}V^{(2)} &= \left({}_hV^{(2)} + \frac{\pi_h}{2}\right)\frac{{}_{s|1-s}q_{x+h}}{q_{x+h}} \\ &\quad + \left[v({}_{h+1}V^{(2)})p_{x+h} - \frac{\pi_h}{2}\,(v^{0,5})({}_{0,5}p_{x+h})\right]\left(1 - \frac{{}_{s|1-s}q_{x+h}}{q_{x+h}}\right).\end{aligned} \tag{8.4.12}$$

Формула (8.4.12) соответствует формуле (8.4.5), которая показывает, что промежуточный нетто-резерв в момент $h+s$, дисконтированный к моменту времени h при данных процентах и вероятностях дожития, получается путем нелинейной интерполяции значений начального нетто-резерва в момент h и дисконтированного к моменту h значения конечного нетто-резерва в момент времени $h+1$. Для случая полугодовых премий этот конечный нетто-резерв уменьшается на величину дисконтированного значения нетто-премии, выплачиваемой в середине года. В предположении, что моменты смерти равномерно распределены на годичных возрастных интервалах, интерполяция в правой части линейная:

$$
{}_sp_{x+h}\, v^s\, {}_{h+s}V^{(2)} = \left({}_hV^{(2)} + \frac{\pi_h}{2}\right)(1-s) + \left[v({}_{h+1}V^{(2)})p_{x+h} - \frac{\pi_h}{2}\,(v^{0,5})({}_{0,5}p_{x+h})\right]s. \tag{8.4.13}
$$

Вновь положив значения i и q_{x+h} равными нулю, получаем в качестве аппроксимации результат простой линейной интерполяции значений начального нетто-резерва и конечного нетто-резерва, уменьшенного на величину нетто-премии, выплачиваемой в середине года:

$$
{}_{h+s}V^{(2)} = \left({}_hV^{(2)} + \frac{\pi_h}{2}\right)(1-s) + \left({}_{h+1}V^{(2)} - \frac{\pi_h}{2}\right)s.
$$

Эту формулу можно переписать в виде результата интерполяции конечных нетто-резервов, к которому прибавляется незаработанная нетто-премия $\pi_h(1/2-s)$:

$$
{}_{h+s}V^{(2)} = [(1-s)\,{}_hV^{(2)} + s\,{}_{h+1}V^{(2)}] + (1/2-s)\pi_h. \tag{8.4.14}
$$

Для второй половины года $(1/2 < s \leqslant 1)$ следующая точная формула для нетто-резерва в момент времени $h+s$, пересчитанного на момент h с учетом рассматриваемых процентов и вероятностей дожития,

$$
{}_sp_{x+h}\, v^s\, {}_{h+s}V^{(2)} = \left[{}_hV^{(2)} + \frac{\pi_h}{2}(1 + v^{0,5}\,{}_{0,5}p_{x+h})\right]\frac{{}_{s|1-s}q_{x+h}}{q_{x+h}} + [v({}_{h+1}V^{(2)})p_{x+h}]\left(1 - \frac{{}_{s|1-s}q_{x+h}}{q_{x+h}}\right), \tag{8.4.15}
$$

доказывается такими же рассуждениями. Вновь при равномерном распределении моментов смерти в годичном возрастном интервале имеем линейную интерполяцию:

$$
{}_sp_{x+h}\, v^s\, {}_{h+s}V^{(2)} = (1-s)\left[{}_hV^{(2)} + \frac{\pi_h}{2}(1 + v^{0,5}\,{}_{0,5}p_{x+h})\right] + s[v({}_{h+1}V^{(2)})p_{x+h}], \tag{8.4.16}
$$

а положив i и q_{x+h} равными нулю, в качестве аппроксимации получаем результат простой линейной интерполяции, к которому прибавляется незаработанная нетто-премия,

$$
{}_{h+s}V^{(2)} = {}_hV^{(2)}(1-s) + {}_{h+1}V^{(2)}s + \pi_h(1-s). \tag{8.4.17}
$$

(По поводу общего случая резервов при выплате премий m раз в год см. упр. 8.12.)

8.5. Распределение риска по годам действия договора страхования

В разд. 8.3 рекуррентные формулы для нетто-резервов были введены путем анализа ежегодных входящих и исходящих денежных потоков страховщика. Теперь проведем анализ распределения риска, измеренного как дисперсия случайной величины потерь, по годам действия договора. На рис. 8.5.1 показана временна́я диаграмма ежегодных входящих и исходящих денежных потоков и изменение обязательств по договору страхования общего вида в дискретной модели, рассматривавшемуся в формуле (8.2.1). Случайная величина C_h относится к денежному потоку в год $(h, h+1)$ действия договора. Введем случайную величину, связанную с совокупным изменением обязательств, денежных потоков и резервов.

Входящие		0	0	0	$b_{K(x)+1}$	0	
Исходящие	π_0	π_1	π_2	$\pi_{K(x)}$	0	0	
Δ[обязательства]		${}_1V$	${}_2V-(1+i)\,{}_1V$	${}_{K(x)}V-(1+i)\,{}_{K(x)-1}V$	$-(1+i)\,{}_{K(x)}V$	0	и т.д.
	0	1	2	$K(x)$	$K(x)+1$	$K(x)+2$	

Рис. 8.5.1. Входящий и исходящий денежные потоки страховщика и изменение его обязательств по договору страхования общего вида в дискретной модели

Обозначим через Λ_h настоящую стоимость на момент времени h (h — неотрицательное целое число) случайной величины денежных потерь страховщика плюс изменение его обязательств в течение года $(h, h+1)$. Если год $(h, h+1)$ предшествует году смерти (т.е. $h < K(x)$), то

$$\Lambda_h = C_h + v\Delta[\text{обязательства}] = -\pi_h + v\,{}_{h+1}V - {}_hV.$$

Если $(h, h+1)$ является годом смерти (т.е. $h = K(x)$), то

$$\Lambda_h = C_h + v\Delta[\text{обязательства}] = v\,b_{h+1} - \pi_h - {}_hV.$$

Если $(h, h+1)$ следует за годом смерти, то, естественно, $\Lambda_h = 0$. Представив эти определения в виде функции от с.в. $K(x)$ и перегруппировав слагаемые, получим

$$\Lambda_h = \begin{cases} 0, & K(x) = 0, 1, \ldots, h-1, \\ (vb_{h+1} - \pi_h) + (-{}_hV), & K(x) = h, \\ (-\pi_h) + (v\,{}_{h+1}V - {}_hV), & K(x) = h+1, h+2, \ldots . \end{cases} \tag{8.5.1}$$

Определение (8.5.1) величины Λ_h может быть переписано так, чтобы представить Λ_h как случайную величину потерь для страхования на срок 1 год со страховой выплатой, равной рисковой сумме по основному договору. По этому поводу см. упр. 8.31.

Из (8.5.1) следует, что

$$\mathbf{E}[\Lambda_h \,|\, K(x) \geqslant h] = vb_{h+1}\, q_{x+h} + v\,{}_{h+1}V p_{x+h} - (\pi_h + {}_hV). \tag{8.5.2}$$

Это выражение равно нулю согласно (8.3.10).

Поскольку условное распределение случайной величины Λ_h при условии $K(x) = h, h+1, \ldots$ принимает только два значения,

$$\mathbf{D}[\Lambda_h \,|\, K(x) \geqslant h] = [v(b_{h+1} - {}_{h+1}V)]^2 p_{x+h}\, q_{x+h}\,. \tag{8.5.3}$$

При $j \leqslant h$ мы можем воспользоваться формулами (2.2.10) и (2.2.11) и получить

$$\mathbf{E}[\Lambda_h \,|\, K(x) \geqslant j] = 0, \tag{8.5.4}$$

$$\mathbf{D}[\Lambda_h \,|\, K(x) \geqslant j] = \mathbf{D}[\Lambda_h \,|\, K(x) \geqslant h]\, {}_{h-j}p_{x+j}. \tag{8.5.5}$$

В отличие от величин C_h из разд. 8.3, случайные величины Λ_h некоррелированы, что доказывается в следующей лемме. Этот факт проясняет роль резервов в стабилизации финансовых показателей страховых операций.

Лемма 8.5.1. *Для неотрицательных значений* $g \leqslant h < j$
$$\mathbf{Cov}[\Lambda_h, \Lambda_j \,|\, K(x) \geqslant g] = 0. \tag{8.5.6}$$

Доказательство. В силу равенства (8.5.4) имеем $\mathbf{E}[\Lambda_h \,|\, K(x) \geqslant g] = 0$. Следовательно,
$$\mathbf{Cov}[\Lambda_h, \Lambda_j \,|\, K(x) \geqslant g] = \mathbf{E}[\Lambda_h \Lambda_j \,|\, K(x) \geqslant g].$$
Из определения (8.5.1) следует, что с.в. Λ_h равна константе $v\,{}_{h+1}V - {}_hV - \pi_h$, а с.в. Λ_j ненулевая. Таким образом,
$$\Lambda_h \Lambda_j = (v\,{}_{k+1}V - {}_hV - \pi_h)\Lambda_j \quad \text{для всех } K(x), \tag{8.5.7}$$
$$\mathbf{E}[\Lambda_h \Lambda_j \,|\, K(x) = g] = (v\,{}_{h+1}V - {}_hV - \pi_h)\,\mathbf{E}[\Lambda_j \,|\, K(x) \geqslant g] = 0,$$
$$\mathbf{Cov}[\Lambda_k, \Lambda_j \,|\, K(x) \geqslant g] = 0. \qquad \blacksquare$$

Выразим теперь случайную величину потерь ${}_hL$ в терминах случайных величин Λ_h. Из определения Λ_h и формулы (8.3.6) имеем
$$\sum_{j=h}^{\infty} v^{j-h}\Lambda_j = \sum_{j=h}^{\infty} v^{j-h}[C_j + v\Delta[\text{обязательства за период } (j, j+1)]$$
$$= {}_hL + \sum_{j=h}^{\infty} v^{j-h+1}\Delta[\text{обязательства за период } (j, j+1)]. \tag{8.5.8}$$

По сути, последнее слагаемое представляет собой настоящую стоимость заключительных обязательств минус обязательства в момент h, т.е. $0 - {}_hV$. Таким образом, имеет место соотношение
$${}_hL = \sum_{j=h}^{\infty} v^{j-h}\Lambda_j + {}_hV, \qquad K(x) \geqslant h. \tag{8.5.9}$$

Следующий результат, полученный Хаттендорфом, дает способ выразить дисперсию с.в. ${}_hL$ в терминах нетто-резервов. Тот факт, что дисперсия с.в. ${}_hL$ может быть распределена по годам действия договора, является также весьма существенным. Это упрощает управление риском, позволяя рассматривать ограниченное число будущих лет действия договора страхования, а не весь срок страхования, и делает возможным последовательное принятие решений при управлении риском.

Теорема 8.5.1.
$$\mathbf{D}[{}_hL \,|\, K(x) \geqslant h] = \sum_{j=h}^{\infty} v^{2(j-h)}\mathbf{D}[\Lambda_j \,|\, K(x) \geqslant h], \tag{8.5.10}$$

Доказательство следует из формулы (8.5.9) и леммы 8.5.1. $\blacksquare$

Из теоремы 8.5.1 вытекает такое

Следствие. *Величина* $\mathbf{D}[{}_hL \,|\, K(x) \geqslant h]$ *равна любому из приведенных выражений*:

(a) $$\sum_{j=h}^{\infty} v^{2(j-h)}\,{}_{j-h}p_{x+h}\,\mathbf{D}[\Lambda_j \,|\, K(x) \geqslant j], \tag{8.5.11}$$

(b) $$\mathbf{D}[\Lambda_h \,|\, K(x) \geqslant h] + v^2\, p_{x+h}\,\mathbf{D}[{}_{h+1}L \,|\, K(x) \geqslant h+1], \tag{8.5.12}$$

(c) $$\sum_{i=h}^{h+j-1} v^{2(i-h)}\,{}_{i-h}p_{x+h}\,\mathbf{D}[\Lambda_i \,|\, K(x) \geqslant i] + v^{2j}\,{}_jp_{x+h}\,\mathbf{D}[{}_{h+j}L \,|\, K(x) \geqslant h+j]. \tag{8.5.13}$$

Доказательство. Чтобы доказать п. (a), применим формулу (8.5.5) для каждого слагаемого в сумме из правой части формулы (8.5.10).

Пункты (b), (c) доказываются применением п. (a). ■

Мы будем называть эту теорему и следствие из нее теоремой Хаттендорфа и проиллюстрируем их использование следующими двумя примерами. Пункты (b) и (c) следствия можно использовать как обратные рекуррентные формулы, полезные для понимания распределения риска во времени и, возможно, для численных расчетов.

Пример 8.5.1. Рассмотрим страхователя из примера 7.4.3, который дожил до конца второго года действия договора. Оценим для него

(a) $\mathbf{D}[{}_2L \mid K(50) \geqslant 2]$ непосредственно,

(b) $\mathbf{D}[{}_2L \mid K(50) \geqslant 2]$ с помощью теоремы Хаттендорфа,

(c) $\mathbf{D}[{}_3L \mid K(50) \geqslant 3]$,

(d) $\mathbf{D}[{}_4L \mid K(50) \geqslant 4]$.

Решение. (a) Для непосредственного расчета используем таблицу значений с.в. ${}_2L$:

Событие $K(50) - 2 = j$	${}_2L$	Условная вероятность события
0	$1000v - 6{,}55692\,\ddot{a}_{\overline{1}\rceil} = 936{,}84$	${}_{0\mid}q_{52} = 0{,}0069724$
1	$1000v^2 - 6{,}55692\,\ddot{a}_{\overline{2}\rceil} = 877{,}25$	${}_{1\mid}q_{52} = 0{,}0075227$
2	$1000v^3 - 6{,}55692\,\ddot{a}_{\overline{3}\rceil} = 821{,}04$	${}_{2\mid}q_{52} = 0{,}0081170$
$\geqslant 3$	$0 - 6{,}55692\,\ddot{a}_{\overline{3}\rceil} = -18{,}58$	${}_3p_{52} = 0{,}9773879$

Тогда $\mathbf{E}[{}_2L \mid K(50) \geqslant 2] = 1{,}64$, что согласуется со значением, полученным в примере 7.4.3, и

$$\mathbf{D}[{}_2L \mid K(50) \geqslant 2] = \mathbf{E}[{}_2L^2 \mid K(50) \geqslant 2] - (\mathbf{E}[{}_2L \mid K(50) \geqslant 2])^2$$
$$= 17\,717{,}82 - (1{,}64)^2 = 17\,715{,}1.$$

(b) Чтобы применить теорему Хаттендорфа, мы можем использовать нетто-резервы из примера 7.4.3 для расчета дисперсии потерь, связанных с договорами страхования на срок 1 год:

j	q_{52+j}	$v^2(1000 - 1000\,{}_{2+j+1}V^1_{50:\overline{5}\rceil})^2 p_{52+j}\, q_{52+j}$
0	0,0069724	6 140,842
1	0,0075755	6 674,910
2	0,0082364	7 269,991

Тогда, согласно формуле (8.5.11),

$$\mathbf{D}[{}_2L \mid K(50) \geqslant 2] = 6140{,}842 + (1{,}06)^{-2}(6\,674{,}910)p_{52}$$
$$+ (1{,}06)^{-4}(7269{,}991)\,{}_2p_{52} = 17\,715{,}1,$$

что согласуется с величиной, найденной непосредственными вычислениями в п. (a).

Заметим, что при непосредственном вычислении было необходимо рассматривать доход в случае дожития до возраста 55 лет, но при применении теоремы Хаттендорфа надо рассматривать лишь потери, связанные со страховыми договорами на срок 1 год со страховыми суммами, равными размеру чистой рисковой суммы, в оставшиеся годы действия исходного договора. После этого чистая рисковая сумма становится равной 0, и соответствующие слагаемые в (8.5.11) обращаются в нуль.

Заметим также, что стандартное отклонение $\sqrt{17\,751{,}1} = 133{,}1$ для одного договора более, чем в 80 раз больше нетто-резерва $\mathbf{E}[{}_2L\,|\,K(50) = 2, 3, \ldots] = 1{,}64$.

Аналогично, мы используем формулу (8.5.11) для расчета

(c) $\mathbf{D}[{}_3L\,|\,K(50) \geqslant 3] = 6674{,}910 + (1{,}06)^{-2}(7269{,}991)p_{53} = 13\,096{,}2$,

(d) $\mathbf{D}[{}_4L\,|\,K(50) \geqslant 4] = 7269{,}991$ или, после округления, 7270,0. ▼

Пример 8.5.2. Рассмотрим портфель из 1500 договоров, описанных в примере 7.4.3 и обсуждавшихся в примере 8.5.1. Предположим, что по всем договорам премия выплачивается в начале каждого года. Далее, предположим, что по 750 договорам страховые случаи происходят в период 2, по 500 договорам в период 3 и по 250 договорам в период 4 и что договоры в каждой группе поровну поделены на договоры со страховой суммой размера 1000 и со страховой суммой размера 3000.

(a) Рассчитаем суммарный нетто-резерв.

(b) Рассчитаем дисперсию перспективных потерь в течение оставшихся периодов действия договоров, предполагая, что такие потери независимы. Воспользовавшись нормальной аппроксимацией, рассчитаем также сумму, гарантирующую страховщику, что с вероятностью 0,95 он выполнит свои обязательства по этому портфелю.

(c) Рассчитаем дисперсию потерь по договорам страхования на случай смерти на срок 1 год со страховой суммой, равной чистой рисковой сумме по этим договорам, и сумму, которую следует добавить к суммарному нетто-резерву, чтобы, производя расчеты на основе нормальной аппроксимации, гарантировать страховщику, что с вероятностью 0,95 в течение данного года он выполнит свои обязательства по этому портфелю.

(d) Выполним расчеты пп. (b) и (c), если число договоров в портфеле увеличено в 100 раз.

Решение. (a) Пусть Z — сумма перспективных потерь по 1500 договорам. Обозначения $\mathbf{E}[Z]$ и $\mathbf{D}[Z]$, используемые ниже для математического ожидания и дисперсии выплат по портфелю из 1500 договоров, являются упрощенными: при их расчете предполагаются выполненными приведенные выше наборы условий относительно страхователей. Используя результаты примера 7.4.3, для суммарного нетто-резерва получим

$$\mathbf{E}[Z] = [375(1) + 375(3)](1{,}64) + [250(1) + 250(3)](1{,}73) + [125(1) + 125(3)](1{,}21) = 4{,}795.$$

(b) Из примера 8.5.1 имеем

$$\mathbf{D}[Z] = [375(1) + 375(9)](17\,715{,}1) + [250(1) + 250(9)](13\,096{,}2) + [125(1) + 125(9)](7270{,}0) = (1{,}0825962) \times 10^8$$

и $\sigma_Z = 10\,404{,}8$. Тогда если

$$0{,}05 = \mathbf{P}(Z > c) = \mathbf{P}\left(\frac{Z - 4795{,}0}{10\,404{,}8} > \frac{c - 4795{,}0}{10\,404{,}8}\right),$$

то использование нормальной аппроксимации приводит к равенству

$$\frac{c - 4795{,}0}{10\,404{,}8} = 1{,}645, \quad \text{или} \quad c = 21\,911,$$

что в 4,6 раза превосходит суммарный нетто-резерв $\mathbf{E}[Z]$.

(c) Здесь мы принимаем во внимание лишь риск, относящийся к следующему году. Для каждого договора рассмотрим случайную величину, равную потерям, связанным со страхованием на срок 1 год с выплатой на случай смерти, равной чистой рисковой сумме. Пусть Z_1 является суммой таких случайных величин. Ожидаемые потери для каждого договора страхования на срок 1 год равны 0; следовательно, $\mathbf{E}[Z_1] = 0$.

Из таблицы в п. (b) примера 8.5.1 мы можем получить дисперсии потерь по договорам страхования на срок 1 год, и, следовательно,

$$\mathbf{D}[Z_1] = [375(1) + 375(9)](6140{,}8) + [250(1) + 250(9)](6674{,}9)$$
$$+ [125(1) + 125(9)](7270{,}0) = (4{,}880275) \times 10^7$$

и $\sigma_{Z_1} = 6985{,}9$.

Если искомую добавку к суммарному нетто-резерву мы обозначим через c_1, то

$$0{,}05 = \mathbf{P}(Z_1 > c_1) = \mathbf{P}\left(\frac{Z_1 - 0}{6985{,}9} > \frac{c_1 - 0}{6985{,}9}\right),$$

и, снова воспользовавшись нормальной аппроксимацией, мы получим

$$c_1 = (1{,}645)(6985{,}9) = 11\,492,$$

что в 2,4 раза больше суммарного нетто-резерва, равного 4795.

(d) В этом случае $\mathbf{E}[Z] = 479\,500$ и $\mathbf{D}[Z] = (1{,}0825962) \times 10^{10}$. Воспользовавшись нормальной аппроксимацией, получим, что величина c, необходимая для того, чтобы все будущие обязательства выполнялись с вероятностью 0,95, равна

$$479\,500 + 1{,}645\sqrt{1{,}0825962} \times 10^5 = 650\,659,$$

что в 1,36 раза больше суммарного нетто-резерва $\mathbf{E}[Z]$.

Величина $\mathbf{D}[Z_1]$ в этом случае равна $(4{,}880275) \times 10^9$. Величина c_1, которую надо добавить к суммарному нетто-резерву для того, чтобы страховщик смог выполнить свои обязательства по договорам на следующий год с вероятностью 0,95, составляет $1{,}645\sqrt{4{,}880275} \times 10^{4,5} = 114\,918$, или 24% от суммарного нетто-резерва. ▼

8.6. Дифференциальные уравнения для нетто-резервов в непрерывной модели

В разд. 8.2 был рассмотрен договор страхования общего вида в дискретной и непрерывной моделях. В разд. 8.3 приводились рекуррентные формулы для дискретной модели. В настоящем разделе приводятся аналогичные результаты для непрерывной модели.

Выражение для нетто-резерва в момент t, ${}_t\bar{V}$, задано формулой (8.2.9), которую мы перепишем еще раз,

$${}_t\bar{V} = \int_0^\infty b_{t+u}\, v^u\, {}_up_{x+t}\, \mu_x(t+u)\, du - \int_0^\infty \pi_{t+u}\, v^u\, {}_up_{x+t}\, du.$$

Для упрощения вычисления производной функции ${}_t\bar{V}$ по t объединим два интеграла, сделаем замену переменной интегрирования $s = t + u$, а затем домножим подынтегральное выражение и разделим весь интеграл на $v^t\, {}_tp_x$, чтобы получить выражение

$${}_t\bar{V} = \frac{\int_t^\infty [b_s\, \mu_x(s) - \pi_s] v^s\, {}_sp_x\, ds}{v^t\, {}_tp_x}. \tag{8.6.1}$$

Тогда

$$\frac{d_t\bar{V}}{dt} = (-1)[b_t\,\mu_x(t) - \pi_t] + \frac{\mu_x(t)+\delta}{v^t{}_tp_x}\int_t^\infty [b_s\,\mu_x(s) - \pi_s]v^s{}_sp_x\,ds,$$

$$\frac{d_t\bar{V}}{dt} = \pi_t + [\delta + \mu_x(t)]\,{}_t\bar{V} - b_t\,\mu_x(t). \tag{8.6.2}$$

В этом равенстве изменение нетто-резерва образуется тремя компонентами, в которые входят нетто-премии, резерв при данных процентах и вероятностях дожития, и страховые выплаты. Перегруппировка членов формулы (8.6.2) приводит к соотношению, соответствующему формуле (8.3.12):

$$\pi_t + \delta\,{}_t\bar{V} + {}_t\bar{V}\,\mu_x(t) = b_t\,\mu_x(t) + \frac{d_t\bar{V}}{dt}\,. \tag{8.6.3}$$

Это равенство устанавливает баланс между поступлением доходов, с одной стороны, и производимыми выплатами и изменениями величины нетто-резерва, с другой стороны.

Если нетто-резерв рассматривается как накопительный фонд, необходимый для обеспечения выплат на случай смерти, то

$$\pi_t + \delta\,{}_t\bar{V} = (b_t - {}_t\bar{V})\mu_x(t) + \frac{d_t\bar{V}}{dt}\,. \tag{8.6.4}$$

Здесь поступления доходов определяются нетто-премиями и процентом, начисляемым на нетто-резерв, что равно производимым выплатам $(b_t - {}_t\bar{V})\mu_x(t)$, основанным на чистой рисковой сумме, и изменениям нетто-резерва. Формула (8.6.4) соответствует формуле (8.3.15). Левая часть вновь представляет имеющиеся ресурсы, такие, как нетто-премии и инвестиционный доход, а правая часть — их распределение по выплатам и ресурсам выплат.

Пример 8.6.1. Воспользуемся формулой (8.6.2) для получения ретроспективной формулы для нетто-резерва по договору страхования общего вида в непрерывной модели.

Решение. Начнем с того, что перенесем все члены в равенстве (8.6.2), относящиеся к нетто-резервам, в его левую часть и умножим обе его части на $\exp[-\int_0^t[\delta + \mu_x(s)]\,ds]$. Таким образом,

$$v^t\,{}_tp_x\left\{\frac{d_t\bar{V}}{dt} - [\delta + \mu_x(t)]\,{}_t\bar{V}\right\} = [\pi_t - b_t\,\mu_x(t)]v^t{}_tp_x,$$

или

$$\frac{d}{dt}(v^t{}_tp_x\,{}_t\bar{V}) = [\pi_t - b_t\,\mu_x(t)]v^t{}_tp_x.$$

Интегрируя обе части последнего равенства по интервалу $(0, r)$, получим

$$v^r{}_rp_x\,{}_r\bar{V} - {}_0\bar{V} = \int_0^r [\pi_t - b_t\,\mu_x(t)]v^t{}_tp_x\,dt.$$

Для нетто-премий, полученных на основе принципа эквивалентности, ${}_0\bar{V} = 0$, так что

$${}_r\bar{V} = \frac{\int_0^r [\pi_t - b_t\,\mu_x(t)]v^t{}_tp_x\,dt}{v^r{}_rp_x}\,. \tag{8.6.5}$$

▼

8.7. Замечания и литература

Рекуррентные формулы и дифференциальные уравнения для случайных величин потерь, рассматриваемых как функции времени, а также математические ожидания и дисперсии этих случайных величин являются основой анализа долгосрочного страхования и аннуитетов. В частности, одна из этих рекуррентных формул используется при доказательстве теоремы Хаттендорфа [Hattendorf 1868]. Литература, относящаяся к этому вопросу, указана в работах [Steffensen 1929], [Hickman 1964], [Gerber 1976]. Эта формула распределяет дисперсию потерь по отдельным годам действия договора. Изложенное выше можно легко распространить на более общую модель страхования, используя понятие мартингала из теории вероятностей; см., например, [Gerber 1979]. Другое приложение рекуррентных формул — определение промежуточных резервов в моменты времени, выражающиеся дробными числами, которые обсуждались в разд. 8.4 в дискретной модели.

Упражнения

К разделу 8.2

8.1. Предположим, что ${}_jp_x = r^j$, $b_{j+1} = 1$, $j = 0, 1, 2, 3, \dots$, и $0 < r < 1$.

(a) Если $w_0 = w_1 = w_2 = \dots = 1$, то используйте формулу (8.2.6) для расчета π при процентной ставке i.

(b) Если $w_j = (-1)^j$, $j = 0, 1, 2, \dots$, то используйте формулу (8.2.6) для расчета π при процентной ставке i.

8.2. Выведите непрерывный аналог формулы (8.2.6) применением принципа эквивалентности к случайной величине потерь, заданной формулой (8.2.7), при $t = 0$ и $\pi_t = \pi w(t)$, где $w(t)$ задано.

8.3. Выразите (a) π и (b) ${}_t\bar{V}$ в терминах μ и δ, если ${}_0L = T(x)v^{T(x)} - \pi\bar{a}_{\overline{T(x)}|}$, а интенсивность смертности и процентная ставка постоянны.

8.4. Для договора страхования общего вида в дискретной модели покажите, что для $j < h$

$$\mathbf{Cov}(C_j, C_h) = (\pi_h - v\, b_{h+1}\, q_{x+h})\, {}_hp_x(\pi_j\, {}_jq_x + v\, b_{j+1}\, {}_jp_x\, q_{x+j}).$$

К разделу 8.3

8.5. Рассмотрим договор страхования жизни, описанный в примере 8.2.1. Для $0 < j < h$ найдите

(a) ковариацию с.в. C_0 и C_h,

(b) ковариацию с.в. C_j и C_h,

(c) правило определения такого h, что ковариация с.в. C_j и C_h будет отрицательной.

8.6. Рассмотрим отсроченный аннуитет, описанный в примере 8.3.1. Найдите $\mathbf{Cov}(C_j, C_h)$, $j < h \leqslant n$, и для фиксированного j определите такое условие на h, что $\mathbf{Cov}(C_j, C_h) < 0$. [Заметим, что это условие на h не зависит от j.]

8.7. Покажите, что формула (8.3.9) при замене h на $h + 1$ может быть переписана в виде

$${}_{n+1}V = ({}_hV + \pi_h)\frac{1+i}{p_{x+h}} - b_{h+1}\,\frac{q_{x+h}}{p_{x+h}}.$$

Дайте словесную интерпретацию этого равенства, которое называется *формулой накопления резерва Факлера* — по имени американского актуария Дэвида Факлера.

8.8. Для договора бессрочного страхования на случай смерти с выплатой размера 1, заключенного с лицом (x), в дискретной модели используйте рекуррентные соотношения [соотношение (8.3.11) для п. (a) и соотношение (8.3.14) для п. (b)] и докажите, что

$$\text{(a)}\ {}_kV_x = \sum_{h=0}^{k-1}\frac{P_x - vq_{x+h}}{{}_{k-h}E_{x+h}}, \quad \text{(b)}\ {}_kV_x = \sum_{h=0}^{k-1}[P_x - vq_{x+h}(1 - {}_{h+1}V_x)](1+i)^{k-h}.$$

Дайте словесную интерпретацию этих формул.

8.9. Покажите, что если $b_{h+1} = {}_{h+1}V$, ${}_0V = 0$ и $\pi_h = \pi$ при $h = 0, 1, \dots, k-1$, то ${}_kV = \pi \ddot{s}_{\overline{k|}}$. [Указание. Используйте формулу (8.3.14).]

8.10. Покажите, что если π — постоянная ежегодная нетто-премия по договору страхования на срок n лет из формулы (8.3.14) при $b_h = \ddot{a}_{\overline{n-h|}}$, $h = 1, 2, \dots, n$, и ${}_0V = {}_nV = 0$, то

(a) $\pi = \dfrac{\ddot{a}_{\overline{n|}} - \ddot{a}_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}$, (b) ${}_kV = \ddot{a}_{\overline{n-k|}} - \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k|}} - \pi \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k|}}$.

[Указание. Это можно показать непосредственно или вывести с помощью формулы (8.3.10).]

К разделу 8.4

8.11. Начав с формулы (8.4.3), докажите равенство

$$ {}_sp_{x+h}\,{}_{h+s}V + v^{1-s}\,{}_sq_{x+h}\,b_{h+1} = (1+i)^s({}_hV + \pi_h), \qquad 0 < s < 1. $$

Объясните этот результат с помощью общих соображений.

8.12. Дайте интерпретацию формул

(a) $_{k+(h/m)+r}V^{(m)} \cong \left(1 - \dfrac{h}{m} - r\right){}_kV^{(m)} + \left(\dfrac{h}{m} + r\right){}_{k+1}V^{(m)} + \left(\dfrac{1}{m} - r\right)P^{(m)}$,

(b) $_{k+(h/m)+r}V^{\{m\}} \cong \left(1 - \dfrac{h}{m} - r\right){}_kV^{\{m\}} + \left(\dfrac{h}{m} + r\right){}_{k+1}V^{\{m\}} + \left(\dfrac{1}{m} - r\right)P^{\{m\}}$,

где $0 < r < 1/m$.

8.13. Для каждого из следующих нетто-резервов найдите формулы, аналогичные одному или нескольким из равенств (8.4.8), (8.4.14) и (8.4.18):

(a) ${}_{20\frac{1}{2}}V(\bar{A}_{x:\overline{40|}})$, (b) ${}_{20\frac{1}{2}}V(\bar{A}_{x:\overline{40|}})$, (c) ${}_{20\frac{1}{2}}V^{(2)}(\bar{A}_{x:\overline{40|}})$,

(d) ${}_{20\frac{2}{3}}V^{(2)}(\bar{A}_{x:\overline{40|}})$, (e) ${}_{20\frac{1}{2}}V^{\{2\}}(\bar{A}_{x:\overline{40|}})$, (f) ${}_{20\frac{2}{3}}V^{\{2\}}(\bar{A}_{x:\overline{40|}})$.

8.14. Пользуясь Иллюстративной таблицей смертности и процентной ставкой 6%, получите аппроксимацию выражения ${}_{10\frac{1}{6}}V^{\{4\}}(\bar{A}_{25})$.

К разделу 8.5

8.15. Покажите, что для договора бессрочного страхования на случай смерти с выплатой размера 1 в дискретной модели и с премиями, выплачиваемыми пожизненно, заключенного с лицом (x),

(a) $\mathbf{D}[L] = \displaystyle\sum_{h=0}^{\infty} \left(\frac{\ddot{a}_{x+h+1}}{\ddot{a}_x}\right)^2 v^{2(h+1)}\,{}_hp_x\,p_{x+h}\,q_{x+h}$,

(b) $\mathbf{D}[{}_kL \,|\, K(x) \geqslant k] = \displaystyle\sum_{h=0}^{\infty} \left(\frac{\ddot{a}_{x+k+h+1}}{\ddot{a}_x}\right)^2 v^{2(h+1)}\,{}_hp_{x+k}\,p_{x+k+h}\,q_{x+k+h}$.

8.16. Для страхового аннуитета пренумерандо с ежегодными выплатами размера 1, производящимися до тех пор, пока лицо (x) живо, рассмотрите потери

$$ L = \ddot{a}_{\overline{K+1|}} - \ddot{a}_x, \qquad K = 0, 1, 2, \dots, $$

и потери Λ_h, вычисленные на момент времени h, которые соответствуют году h выплаты аннуитета, а именно

$$ \Lambda_h = \begin{cases} 0, & K \leqslant h-1, \\ -(\ddot{a}_{x+h} - 1) = -vp_{x+h}\,\ddot{a}_{x+h+1}, & K = h, \\ v\ddot{a}_{x+h+1} - (\ddot{a}_{x+h} - 1) = vq_{x+h}\,\ddot{a}_{x+h+1}, & K \geqslant h+1. \end{cases} $$

(a) Дайте интерпретацию формул для Λ_h.

(b) Покажите, что

(i) $L = \displaystyle\sum_{h=0}^{\infty} v^k \Lambda_h$, (ii) $\mathbf{E}[\Lambda_h] = 0$, (iii) $\mathbf{D}[\Lambda_h] = v^2(\ddot{a}_{x+h+1})^2\,{}_hp_x\,p_{x+h}\,q_{x+h}$.

8.17. (a) Для договора страхования из примера 8.3.2 покажите, что

$$\mathbf{D}[L] = \sum_{h=0}^{n-1} v^{2(h+1)}\, {}_hp_x\, p_{x+h}\, q_{x+h}.$$

(b) При $\delta = 0{,}05$, $n = 20$ и $\mu_x(t) = 0{,}01$, $t \geqslant 0$, вычислите величину $\mathbf{D}[L]$ для договора страхования из п. (a).

8.18. Договор бессрочного страхования на случай смерти с выплатой размера 1 и 20-летним периодом выплаты премий, заключенный с лицом 25 лет, рассматривается в дискретной модели. На основе Иллюстративной таблицы смертности и процентной ставки 6% рассчитайте

(a) ${}_{30}P_{25}$, (b) ${}^{20}_{19}V_{25}$, (c) ${}^{20}_{20}V_{25}$, (d) $\mathbf{D}[{}_{20}L\,|\,K(25)\geqslant 20]$, (e) $\mathbf{D}[{}_{18}L\,|\,K(25)\geqslant 18]$.

К разделу 8.6

8.19. Дайте интерпретацию дифференциальных уравнений

(a) $\dfrac{d}{dt}\,{}_t\bar{V} = \pi_t + [\delta + \mu_x(t)]\,{}_t\bar{V} - b_t\,\mu_x(t)$, (b) $\dfrac{d}{dt}\,{}_t\bar{V} = \pi_t + \delta\,{}_t\bar{V} - (b_t - {}_t\bar{V})\mu_x(t)$.

8.20. Покажите, что ${}_t\bar{V} = \pi\bar{s}_{\overline{t}|}$ для $b_t = {}_t\bar{V}$, ${}_0\bar{V} = 0$ и $\pi_t = \pi$, $t \geqslant 0$.

8.21. Вычислите $\dfrac{d}{dt}\left\{[1 - {}_t\bar{V}(\bar{A}_x)]\,{}_tp_x\right\}$.

8.22. Используя формулу (8.6.2), выразите

(a) $\dfrac{d}{dt}({}_tp_x\,{}_t\bar{V})$, (b) $\dfrac{d}{dt}(v^t\,{}_t\bar{V})$, (c) $\dfrac{d}{dt}(v^t\,{}_tp_x\,{}_t\bar{V})$

и дайте интерпретацию полученных результатов.

Ко всем темам главы

8.23. Покажите, что формула, эквивалентная формуле (8.4.6) в предположении о гиперболичности распределения смертей в течение годичных возрастных интервалов, — это

$${}_{k+s}V = v^{1-s}[(1-s)({}_kV + \pi_k)(1+i) + s\,{}_{k+1}V].$$

8.24. Покажите, что

$$\int_0^\infty [v^t - \bar{P}(\bar{A}_x)\ddot{a}_{\overline{t}|}]^2\,{}_tp_x\,\mu_x(t)\,dt = \int_0^\infty [1 - {}_t\bar{V}(\bar{A}_x)]^2 v^{2t}\,{}_tp_x\,\mu_x(t)\,dt$$

и дайте интерпретацию этого результата.

8.25. Для получения другой формы теоремы Хаттендорфа рассмотрим следующие случайные величины:

$${}_{k,m}L = \begin{cases} b_{K+1}\,v^{(K-k)+1} - {}_kV - \sum\limits_{h=0}^{K-k} \pi_{k+h}\,v^k, & K(x) = k, k+1, \ldots, k+m-1, \\ {}_{k+m}V\,v^m - {}_kV - \sum\limits_{h=0}^{m-1} \pi_{k+h}\,v^h, & K(x) = k+m, k+m+1, \ldots, \end{cases}$$

и для $h = 0, 1, \ldots, m-1$

$$\Lambda_{k+h} = \begin{cases} 0, & K(x) = k, k+1, \ldots, k+h-1, \\ v\,b_{k+h+1} - ({}_{k+h}V + \pi_{k+h}), & K(x) = k+h, \\ v\,{}_{k+h+1}V - ({}_{k+h}V + \pi_{k+h}), & K(x) = k+h+1, k+h+2, \ldots . \end{cases}$$

Покажите, что

(a) ${}_{k,m}L = \sum\limits_{h=0}^{m-1} v^h \Lambda_{k+h}$, (b) $\mathbf{D}[{}_{k.m}L\,|\,K(x)\geqslant k] = \sum\limits_{h=0}^{m-1} v^{2h}\mathbf{D}[\Lambda_{k+h}\,|\,K(x)\geqslant k]$.

8.26. Проведите рассуждения примера 8.5.1 для страхователя из примера 7.4.4, который дожил до конца второго года действия договора.

8.27. Проведите рассуждения примера 8.5.2 для портфеля из 1500 договоров того же типа, что описывались в примере 7.4.4 и обсуждались в упр. 8.26.

8.28. В упр. 8.27 отсутствовала неопределенность относительно суммы или времени выплаты для страхователей, которые дожили до конца четвертого года действия договора. Проделайте упр. 8.27 для доживших до конца 2-го и 3-го года.

8.29. Запишите в терминах нетто-премий и конечных нетто-резервов формулу нетто-резерва на середину 11-го страхового года для договора бессрочного страхования на случай смерти со страховой выплатой размера 10 000 и с ежегодными премиями с корректирующим платежом, заключенного с лицом (30).

8.30. По договору смешанного страхования на срок 3 года со страховой суммой размера 3 выплаты на случай смерти осуществляются в конце года смерти, а нетто-премии размера 0,94 выплачиваются ежегодно. При процентной ставке 20% были получены следующие резервы:

Конец года	Нетто-резерв
1	0,66
2	1,56
31	3,00

Подсчитайте
(a) q_x, (b) q_{x+1},
(c) дисперсию потерь ${}_0L$ на момент заключения договора,
(d) дисперсию потерь ${}_1L$ на конец первого года действия договора.

8.31. (a) Используйте формулу (8.3.10), чтобы преобразовать формулу (8.5.1) к виду

$$\Lambda_h = \begin{cases} 0, & K(x) \leqslant h-1, \\ (b_{h+1} - {}_{h+1}V)v - (b_{h+1} - {}_{h+1}V)vq_{x+h}, & K(x) = h, \\ 0 - (b_{h+1} - {}_{h+1}V)vq_{x+h}, & K(x) \geqslant h+1\,. \end{cases}$$

В этой интерпретации с.в. Λ_h представляет собой потери, связанные с обязательствами по страхованию сроком на 1 год и страховой выплатой размера рисковой суммы в году $(h, h+1)$.

(b) Используйте выражение из п. (a) для проверки равенства $\mathbf{E}[\Lambda_h] = 0$.

(c) Используйте результаты пп. (a) и (b) для вычисления величины $\mathbf{D}[\Lambda_h]$.

Упражнения с использованием компьютера

8.32. Рассмотрим дисперсию для договора бессрочного страхования на случай смерти из примера 8.2.2, заключенного с лицом (20), с выплатой на случай смерти, размер которой равен 1, и с возрастающими в геометрической прогрессии нетто-премиями, выплачиваемыми до возраста 65 лет. Воспользовавшись Иллюстративной таблицей смертности и полагая $i = 0{,}06$, определите такое максимальное значение r, чтобы нетто-резерв был неотрицательным для всех моментов времени.

8.33. Используйте обратную рекуррентную формулу (8.3.9) для расчета нетто-резервов в

(a) примере 7.4.3 [указание: ${}_5V = 0{,}0$], (b) примере 7.4.4 [указание: ${}_5V = 1{,}0$].

8.34. Договор страхования, заключенный с лицом (30) на срок до достижения им возраста 65 лет с уменьшающейся страховой выплатой, которая производится в момент смерти, предусматривает следующие страховые выплаты:

В случае смерти между возрастами	Выплата
30–50	100 000
50–55	90 000
55–60	80 000
60–65	60 000

На основе Иллюстративной таблицы смертности в предположении равномерности распределения моментов смерти в каждом годичном возрастном интервале и при $i = 0{,}06$ определите

(a) годовую нетто-премию с корректирующим платежом при выплате дважды в год в полунепрерывной модели,

(b) резерв на конец 30-го года для премии из п. (a).

8.35. Договор страхования с единовременной премией, заключенный с лицом (35), обеспечивает выплату размера 100 000, если страхователь доживет до возраста 65 лет, или возврат единовременной нетто-премии без начисления процента в конце года смерти, если он умрет до достижения им возраста 65 лет. Обозначив единовременную нетто-премию через S, выразите через актуарные функции

(a) S,

(b) перспективную формулу для нетто-резерва на конец k-го года,

(c) ретроспективную формулу для нетто-резерва на конец k-го года.

(d) Вычислите с.в. S и нетто-резерв ${}_{20}V$, применяя Иллюстративную таблицу смертности и полагая $d = 0{,}05$.

8.36. В терминах $P = {}_{20}P^{(12)}(\bar{A}_{30:\overline{35}|})$ и актуарных функций выведите перспективные и ретроспективные формулы для следующих резервов:

(a) ${}^{20}_{10}V^{(12)}(\bar{A}_{30:\overline{35}|})$, (b) ${}^{20}_{25}V^{(12)}(\bar{A}_{30:\overline{35}|})$.

(c) Вычислите P и нетто-резервы из пп. (a) и (b) на основе Иллюстративной таблицы смертности в предположении равномерности распределения моментов смерти в каждом годичном возрастном интервале и при $\delta = 0{,}05$.

9

АКТУАРНЫЕ ФУНКЦИИ ДЛЯ НЕСКОЛЬКИХ ЛИЦ

9.1. Введение

В гл. с 3 по 8 мы развивали теорию, позволяющую анализировать денежные выплаты, зависящие от момента смерти отдельного лица. Можно обобщить эту теорию на случай выплат, связанных с несколькими лицами. Одним из приложений такого обобщения, часто применяемым в пенсионных схемах, являются пожизненные аннуитеты в пользу двух и более лиц. Общеизвестны другие приложения актуарных расчетов для группы лиц. Например, они применяются при налогообложении имущества и дарений. Скажем, инвестиционный доход от имущества, переданного в доверительное управление, выплачивается группе наследников до тех пор, пока жив последний из них. После смерти последнего наследника капитал изымается из доверительного управления и передается в дар благотворительной организации. Величина налогового вычета, связанного с благотворительностью, при налогообложении этого дара будет определяться актуарными расчетами. Существуют договоры семейного страхования, в которых предусмотрены различные выплаты в зависимости от того, в какой последовательности умирают страхователь и его супруга. Существуют также договоры с выплатами на случай первой или последней смерти для возмещения взносов по оплате недвижимости.

В настоящей главе мы рассмотрим модель с двумя лицами. Актуарные настоящие стоимости основных видов выплат выводятся с помощью понятий и методов, изложенных в гл. 3–5. Бóльшая часть этой главы посвящена модели, основанной на предположении, что две рассматриваемые случайные величины продолжительности предстоящей жизни независимы. В разд. 9.6 исследуются специальные модели, в которых эти две случайные величины зависимы. Ежегодные премии, резервы и модели для трех и более лиц рассматриваются в гл. 18.

Полезной абстракцией теории страхования жизни, особенно при рассмотрении групп лиц, является понятие *статуса*, для которого введены понятия сохранения и потери. Для того чтобы ввести определение статуса, необходимо два элемента. Во-первых, это общий термин *объект*, который используется в силу разнообразия практических приложений:

• множество объектов должно быть конечным и для каждого из элементов этого множества необходимо уметь определять случайную величину продолжительности предстоящей жизни.

• должно существовать правило, позволяющее устанавливать факт сохранения статуса в любой момент времени в будущем.

Для того чтобы рассчитать вероятности или актуарные настоящие стоимости, связанные с сохранением некоторого статуса, необходимо иметь совместное распределение случайных величин продолжительности предстоящей жизни. Некоторые из этих случайных величин могут иметь маргинальное распределение, сосредоточенное в одной точке.

Полезно проиллюстрировать понятие «статус» несколькими примерами. Отдельное лицо возраста x лет определяет некоторый статус, который сохраняется, пока это лицо живо. Таким образом, случайную величину $T(x)$, использованную в гл. 3 для обозначения продолжительности предстоящей жизни лица (x), можно интерпретировать как продолжительность периода сохранения этого статуса, а также как продолжительность предстоящего периода до момента потери статуса. Срок до момента n, $\overline{n}|$, определяет некоторый статус, который сохраняется ровно n лет, а затем теряется. Для нескольких лиц различными способами можно определить более сложные статусы. Сохранение статуса можно понимать как дожитие всех лиц из группы или, напротив, как дожитие хотя бы одного лица из группы. Для группы, в которую входят два мужчины и две женщины, можно определять и более сложные статусы. Например, статус сохраняется лишь до тех пор, пока живы по крайней мере один мужчина и по крайней мере одна женщина.

После того как статус и критерий его сохранения определены, мы можем применить это определение к построению моделей аннуитетов и договоров страхования. Аннуитет выплачивается до тех пор, пока статус сохраняется, а выплаты по договору страхования производятся после потери статуса. В договорах страхования также могут быть оговорены условия, согласно которым выплаты производятся лишь тогда, когда лица, к которым относится договор, умирают в определенной последовательности.

9.2. Совместное распределение продолжительностей предстоящей жизни

Время до потери некоторого статуса является функцией продолжительностей предстоящей жизни рассматриваемых лиц. С теоретической точки зрения эти продолжительности будут зависимыми случайными величинами. Мы изучим последствия такой зависимости. Для удобства или из-за отсутствия данных о зависимости между лицами на практике обычно принимается предположение о независимости рассматриваемых продолжительностей предстоящей жизни. Принимая такое предположение, можно пользоваться численными значениями, полученными из маргинальных распределений (таблиц смертности) для отдельных лиц.

Пример 9.2.1. Хотя распределение, рассматриваемое в этом примере, не реалистично, оно приведено как средство исследования совместного распределения двух зависимых случайных величин продолжительности предстоящей жизни. Для двух лиц (x) и (y) совместная функция плотности с.в. $T(x)$ и $T(y)$ продолжительностей их предстоящей жизни имеет вид

$$f_{T(x)T(y)}(s,t) = \begin{cases} 0{,}0006(t-s)^2, & 0 < s < 10,\ 0 < t < 10, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Определим:

(a) совместную функцию распределения с.в. $T(x)$ и $T(y)$;

(b) функцию плотности, функцию распределения, ${}_sp_x$ и $\mu(x+s)$ для маргинального распределения с.в. $T(x)$. Обратим внимание на симметрию выписанного распределения относительно s и t, откуда следует, что с.в. $T(x)$ и $T(y)$ одинаково распределены;

(c) коэффициент корреляции между с.в. $T(x)$ и $T(y)$.

Решение. (a) Прежде чем проводить расчеты, проанализируем выборочное пространство с.в. $T(x)$ и $T(y)$, изображенное на рис. 9.2.1, и выделим область, где совместная функция плотности положительна. В точках вне первого квадранта функция плотности будет равна 0. Начнем с расчета функции распределения в точке из области I, когда как s, так и t лежат между 0 и 10:

$$\begin{aligned} F_{T(x)T(y)}(s,t) &= \mathbf{P}[T(x) \leqslant s \text{ и } T(y) \leqslant t] \\ &= \int_{-\infty}^{s}\int_{-\infty}^{t} f_{T(x)T(y)}(u,v)\,dv\,du = \int_0^s\int_0^t 0{,}0006(v-u)^2\,dv\,du \\ &= 0{,}00005[s^4+t^4-(t-s)^4], \qquad 0<s\leqslant 10,\ 0<t\leqslant 10. \end{aligned}$$

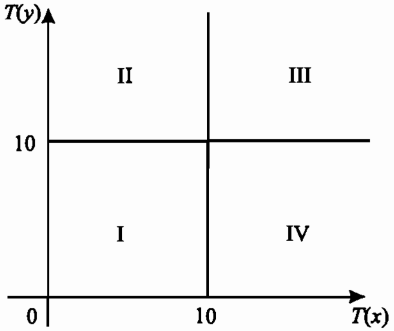


Рис. 9.2.1. Выборочное пространство с.в. $T(x)$ и $T(y)$

Так как совместная функция плотности равна 0 в областях II, III и IV, то

$$\begin{aligned} F_{T(x)T(y)}(s,t) &= F_{T(x)T(y)}(s,10) = F_{T(x)}(s) \\ &= 0{,}5 + 0{,}00005[s^4-(10-s)^4] \quad \text{в области II}, \\ F_{T(x)T(y)}(s,t) &= F_{T(x)T(y)}(10,t) = F_{T(x)}(t) \\ &= 0{,}5 + 0{,}00005[t^4-(10-t)^4] \quad \text{в области IV}, \\ F_{T(x)T(y)}(s,t) &= 1 \quad \text{в области III}. \end{aligned}$$

(b) Используя функцию распределения, полученную в п. (a), приходим к формулам

$$F_{T(x)T(y)}(s,10) = F_{T(x)}(s) = \begin{cases} 0, & s\leqslant 0, \\ 0{,}5+0{,}00005[s^4-(10-s)^4], & 0<s\leqslant 10, \\ 1, & s>10, \end{cases}$$

$$f_{T(x)}(s) = F'_{T(x)}(s) = \begin{cases} 0{,}0002[s^3+(10-s)^3], & 0<s\leqslant 10, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Вероятность дожития и интенсивность смертности задаются формулами

$${}_sp_x = 1 - F_{T(x)}(s) = \begin{cases} 0{,}5+0{,}00005[(10-s)^4-s^4], & 0<s\leqslant 10, \\ 0, & s>10, \end{cases}$$

$$\mu(x+y) = \frac{f_{T(x)}(t)}{1-F_{T(x)}(t)} = \frac{0{,}0002[s^3+(10-s)^3]}{0{,}5+0{,}00005[(10-s)^4-s^4]}, \qquad 0<s\leqslant 10.$$

(c) $$\mathbf{E}[T(x)] = \int_0^{10} s(0{,}0002)[s^3 + (10-s)^3]\,ds = 5 = \mathbf{E}[T(y)],$$

$$\mathbf{E}[T(x)^2] = \int_0^{10} s^2(0{,}0002)[s^3 + (10-s)^3]\,ds = \frac{110}{3} = \mathbf{E}[T(y)^2],$$

$$\mathbf{D}[T(x)] = \frac{35}{3} = \mathbf{D}[T(y)],$$

$$\mathbf{E}[T(x)T(y)] = \int_0^{10}\int_0^{10} st(0{,}0006)(t-s)^2\,ds\,dt = \frac{50}{3},$$

$$\mathbf{Cov}[T(x),T(y)] = \mathbf{E}[T(x)T(y)] - \mathbf{E}[T(x)]\mathbf{E}[T(y)] = -\frac{25}{3},$$

$$\rho_{T(x)T(y)} = \frac{\mathbf{Cov}[T(x),T(y)]}{\sigma_{T(x)}\sigma_{T(y)}} = \frac{-25/3}{35/3} = -\frac{5}{7}.$$ ▼

Исходя из совместного распределения с.в. $T(x)$ и $T(y)$, определим *совместную функцию дожития* следующим образом:

$$s_{T(x)T(y)}(s,t) = \mathbf{P}[T(x) > s \cap T(y) > t]. \tag{9.2.1}$$

В отличие от одномерного случая, сумма совместной функции распределения и совместной функции дожития не обязательно равна 1. Связь между ними можно проиллюстрировать, изобразив совместное выборочное пространство с.в. $T(x)$ и $T(y)$ на рис. 9.2.2. Функция распределения $F_{T(x)T(y)}(s,t)$ определяет вероятности для таких областей, как A, «юго-западнее» точки (s,t), а функция дожития $s_{T(x)T(y)}(s,t)$ — вероятности для таких областей, как B, «северо-восточнее» точки (s,t).

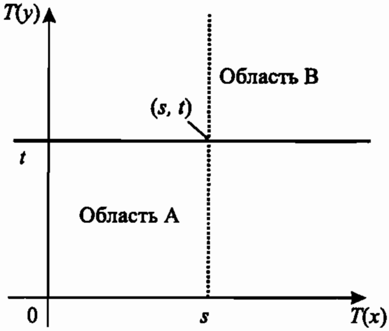


Рис. 9.2.2. Выборочное пространство с.в. $T(x)$ и $T(y)$, продолжительностей предстоящей жизни

Пример 9.2.2. Определим совместную функцию дожития для с.в. $T(x)$ и $T(y)$ из примера 9.2.1.

Решение. При $0 < s < 10$ и $0 < t < 10$

$$s_{T(x)T(y)}(s,t) = \mathbf{P}[T(x) > s \cap T(y) > t]$$
$$= \int_s^\infty\int_t^\infty f_{T(x)T(y)}(u,v)\,dv\,du = \int_s^{10}\int_t^{10} 0{,}0006(v-u)^2\,dv\,du$$
$$= 0{,}00005[(10-t)^4 + (10-s)^4 - (t-s)^4].$$

Для других точек из первого квадранта функция $s_{T(x)T(y)}(s,t)$ равна 0, а для всех точек из третьего квадранта она равна 1. Во втором квадранте, где $s<0$ и $t>0$,

$$s_{T(x)T(y)}(s,t) = s_{T(y)}(t) = {}_tp_y.$$

В четвертом квадранте, где $s>0$ и $t<0$,

$$s_{T(x)T(y)}(s,t) = s_{T(x)}(s) = {}_tp_x.$$

▼

В примере 9.2.1 было задано совместное распределение двух зависимых случайных величин продолжительности предстоящей жизни, а затем определены их маргинальные распределения и найден коэффициент корреляции между ними, являющийся мерой их зависимости. В практических приложениях может оказаться, что выразить зависимость между продолжительностями предстоящей жизни числом сложно. Поэтому такие случайные величины обычно предполагаются независимыми, а тогда их совместное распределение получается из соответствующих маргинальных распределений, которые мы обсуждали в гл. 3. Это иллюстрируется следующим примером.

Пример 9.2.3. Случайные величины продолжительности предстоящей жизни $T(x)$ и $T(y)$ независимы, и распределение каждой их них определено функцией плотности

$$f(t) = \begin{cases} 0{,}02(10-t), & 0<t<10, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(a) Определим функцию распределения, функцию дожития и интенсивность смертности в этом случае.

(b) Определим совместную функцию плотности, совместную функцию распределения и совместную функцию дожития для с.в. $T(x)$ и $T(y)$.

Решение.

(a) $$F_{T(x)}(t) = \int_{-\infty}^{t} f_{T(x)}(s)\,ds = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0, \\ 1-0{,}01(10-t)^2 = 0{,}2t - 0{,}01t^2, & 0<t\leqslant 10, \\ 1, & t>10, \end{cases}$$

$$s_{T(x)}(t) = 1 - F_{T(x)}(t) = \begin{cases} 1, & t<0, \\ 0{,}01(10-t)^2, & 0\leqslant t<10, \\ 0, & t\geqslant 10, \end{cases}$$

$$\mu(x+t) = \frac{f_{T(x)}(t)}{s_{T(x)}(t)} = \frac{2}{10-t}, \qquad 0<t<10.$$

(b) $$\begin{aligned} f_{T(x)T(y)}(s,t) &= f_{T(x)}(s)f_{T(y)}(t) \\ &= \begin{cases} (0{,}02)^2(10-s)(10-t), & 0<s<10,\ 0<t<10, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \\ F_{T(x)T(y)}(s,t) &= F_{T(x)}(s)F_{T(y)}(t) \\ &= (0{,}2)^2(t-0{,}05t^2)(s-0{,}05s^2), \qquad 0<s\leqslant 10,\ 0<t\leqslant 10, \\ &= F_{T(x)}(s) = (0{,}2)(s-0{,}05s^2), \qquad 0<s\leqslant 10,\ t>10, \\ &= F_{T(y)}(t) = (0{,}2)(t-0{,}05t^2), \qquad s>10,\ 0<t\leqslant 10, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{T(x)T(y)}(s,t) &= s_{T(x)}(s)s_{T(y)}(t) \\ &= (0{,}01)^2(10-s)^2(10-t)^2, && 0 \leqslant s < 10,\ 0 \leqslant t < 10, \\ &= s_{T(x)}(s) = (0{,}01)(10-s)^2, && 0 \leqslant s < 10,\ t < 0, \\ &= s_{T(y)}(t) = (0{,}01)(10-t)^2, && s < 0,\ 0 \leqslant t < 10, \\ &= 0, && s \geqslant 10,\ t \geqslant 10. \end{aligned}$$ ▼

9.3. Статус дожития всех лиц из группы

Статус, который сохраняется, пока все члены группы живы, и теряется после первой смерти, называется *статусом дожития всех лиц из группы*. Он обозначается символом $(x_1x_2\ldots x_m)$, где x_i — возраст i-го члена группы, а m — число членов. В этой ситуации используются обозначения, введенные в гл. 3–5, но вместо возраста одного страхователя в нижнем индексе стоит перечень возрастов членов группы. Например, A_{xy} и ${}_tp_{xy}$ имеют тот же смысл для статуса (xy) дожития двух лиц (x) и (y), что и A_x и ${}_tp_x$ — для одного лица (x).

Статус дожития всех лиц из группы является примером *статуса дожития*, т. е. статуса, для которого определена случайная величина продолжительности его сохранения и, следовательно, функция дожития. Для продолжительности предстоящего периода сохранения статуса дожития применимы понятия и соотношения, рассматривавшиеся в разд. с 3.2.2 по 3.5 (за исключением примера таблицы смертности в разд. 3.3.2), которые будут использоваться здесь без новых доказательств.

Теперь рассмотрим распределение случайной величины продолжительности предстоящего периода сохранения статуса дожития всех лиц из группы. Для m лиц имеет место равенство $T(x_1x_2\ldots x_m) = \min[T(x_1), T(x_2), \ldots, T(x_m)]$, где $T(x_i)$ — момент смерти лица с номером i. Для частного случая двух лиц, (x) и (y), имеем $T(xy) = \min[T(x), T(y)]$. Когда это не может вызывать недоразумений, будем обозначать эту случайную величину просто через T. Специалист может заметить, что продолжительность предстоящего периода сохранения статуса дожития всех лиц из группы является *наименьшей порядковой статистикой*, образованной m случайными величинами продолжительности предстоящей жизни лиц из группы. При исследовании порядковых статистик случайные величины в выборке обычно предполагаются независимыми и одинаково распределенными. В нашей же ситуации такие случайные величины, как правило, считаются независимыми, но редко бывают одинаково распределены.

Мы начнем с того, что выразим функцию распределения с.в. T для $t > 0$ в терминах совместного распределения пары с.в. $T(x)$ и $T(y)$ в общем (при наличии зависимости между ними) случае:

$$\begin{aligned} F_T(t) = {}_tq_{xy} &= \mathbf{P}(T \leqslant t) = \mathbf{P}\{\min[T(x), T(y)] \leqslant t\} \\ &= 1 - \mathbf{P}\{\min[T(x), T(y)] > t\} \\ &= 1 - \mathbf{P}\{T(x) > t \cap T(y) > t\} = 1 - s_{T(x)T(y)}(t,t). \end{aligned} \tag{9.3.1}$$

Другое равенство может быть получено из первой строки с учетом того, что событие $\{\min[T(x), T(y)] \leqslant t\}$ является объединением событий $\{T(x) \leqslant t\}$ и $\{T(x) \leqslant t\}$. Тогда

$$F_T(t) = \mathbf{P}\{\min[T(x), T(y)] \leqslant t\},$$

и, применяя известную в теории вероятностей формулу для вероятности объединения событий, получим

$$F_T(t) = \mathbf{P}[T(x) \leqslant t] + \mathbf{P}[T(y) \leqslant t] - \mathbf{P}[T(x) \leqslant t \cap T(y) \leqslant t]$$
$$= {}_tq_x + {}_tq_y - F_{T(x)T(y)}(t,t). \tag{9.3.2}$$

Тот факт, что в равенстве (9.3.2) используются как символы Международной системы актуарных обозначений, так и стандартные обозначения теории вероятностей и математической статистики, показывает, что, хотя Международная система актуарных обозначений содержит символы, относящиеся к статусам дожития, она не содержит таковых для совместного распределения нескольких статусов, за исключением того случая, когда предполагается независимость, сводящая все к обозначениям для статусов отдельных лиц.

Если с.в. $T(x)$ и $T(y)$ независимы, то функция распределения с.в. T может быть представлена через актуарные функции для одного лица в следующих двух формах:

$$F_T(t) = \mathbf{P}\{\min[T(x), T(y)] \leqslant t\} = 1 - s_{T(x)T(y)}(t,t) = 1 - {}_tp_x\, {}_tp_y \tag{9.3.3}$$

и

$$F_T(t) = {}_tq_x + {}_tq_y - F_{T(x)T(y)}(t,t) = {}_tq_x + {}_tq_y - {}_tq_x\, {}_tq_y. \tag{9.3.4}$$

Функция дожития ${}_tp_{xy}$ для статуса дожития всех лиц из группы получается вычитанием соответствующей функции распределения из 1.

Для общего случая, используя формулу (9.3.1), получаем ${}_tp_{xy} = s_{T(x)T(y)}(t,t)$. В случае независимости, согласно (9.3.3),

$${}_tp_{xy} = {}_tp_x\, {}_tp_y. \tag{9.3.5}$$

Выражение (9.3.5) является удобной отправной точкой в случае независимости, так как статус дожития всех лиц из группы сохраняется до момента времени t в том и только в том случае, если оба лица (x) и (y) доживут до момента времени t.

Пример 9.3.1. Определим функцию распределения, функцию дожития и математическое ожидание с.в. $T(xy)$ продолжительности периода сохранения статуса дожития всех лиц из группы из примера 9.2.1.

Решение. Для $t \leqslant 0$ и $t > 10$ значениями функции $F_{T(xy)}(t)$ будут 0 и 1 соответственно. При $0 < t \leqslant 10$, согласно результатам примера 9.2.1, пп. (a), (b), и равенству (9.3.2), имеем

$$F_{T(xy)}(t) = 2\{0{,}5 + 0{,}00005[t^4 - (10-t)^4]\} - 0{,}0001\, t^4 = 1 - 0{,}0001(10-t)^4.$$

Тогда

$${}_tp_{xy} = 1 - F_{T(xy)}(t) = 0{,}0001(10-t)^4, \qquad 0 \leqslant t < 10.$$

В силу формулы (3.5.2)

$$\mathring{e}_{xy} = \mathbf{E}[T(xy)] = \int_0^\infty {}_tp_{xy}\, dt = \int_0^{10} 0{,}0001(10-t)^4\, dt = 2. \qquad \blacktriangledown$$

Пример 9.3.2. Определим функцию распределения, функцию дожития и математическое ожидание с.в. $T(xy)$ продолжительности периода сохранения статуса дожития всех лиц из группы из примера 9.2.3.

Решение. В случае независимости, используя равенство (9.3.5) и результаты примера 9.2.3, приходим к формуле

$${}_tp_{xy} = [0{,}01(10-t)^2]^2 = 0{,}0001(10-t)^4 \quad \text{при } 0 \leqslant t < 10.$$

Тогда

$$F_{T(xy)}(t) = 1 - 0{,}0001\,(10-t)^4 \quad \text{при } 0 < t \leqslant 10$$

и

$$\mathring{e}_{xy} = \int_0^{10} 0{,}0001\,(10-t)^4\,dt = 2. \qquad ▼$$

Эти два примера приводят к интересному наблюдению. Хотя совместные распределения пар случайных величин продолжительности предстоящей жизни в этих примерах отличаются друг от друга, распределения соответствующих продолжительностей предстоящего периода до потери статуса дожития обоих лиц из группы одинаковы. Это замечание важно в тех случаях, когда можно наблюдать только момент первой смерти в группе, поскольку по этой информации нельзя однозначно определить совместное распределение. В математической статистике такое положение называется *неидентифицируемостью*, поскольку по имеющимся наблюдениям не удается выбрать одну из двух (или из многих) моделей.

Функция плотности с.в. T может быть получена дифференцированием ее функции распределения, выписанной в формуле (9.3.1) или (9.3.2). В случае формулы (9.3.1) необходимо взять производную по t от выражения

$$s_{T(x)T(y)}(t,t) = \int_t^\infty \int_t^\infty f_{T(x)T(y)}(u,v)\,du\,dv.$$

Используя формулы из математического анализа, приведенные в приложении 5, мы получим

$$\frac{d}{dt}\,s_{T(x)T(y)}(t,t) = -\left[\int_t^\infty f_{T(x)T(y)}(t,v)\,dv + \int_t^\infty f_{T(x)T(y)}(u,t)\,du\right].$$

Следовательно,

$$f_{T(xy)}(t) = \int_t^\infty f_{T(x)T(y)}(t,v)\,dv + \int_t^\infty f_{T(x)T(y)}(u,t)\,du. \tag{9.3.6}$$

Используя соотношение (9.3.2), читатель может показать, что функция плотности с.в. T может быть также выписана в виде

$$f_{T(xy)}(t) = f_{T(x)}(t) + f_{T(y)}(t) - \left[\int_0^t f_{T(x)T(y)}(t,v)\,dv + \int_0^t f_{T(x)T(y)}(u,t)\,du\right],$$

или, в актуарных обозначениях,

$$f_{T(xy)} = {}_tp_x\,\mu(x+t) + {}_tp_y\,\mu(y+t) - \left[\int_0^t f_{T(x)T(y)}(t,v)\,dv + \int_0^t f_{T(x)T(y)}(u,t)\,du\right]. \tag{9.3.7}$$

Если с.в. $T(x)$ и $T(y)$ независимы, то $f_{T(x)T(y)}(u,v) = {}_up_x\,\mu(x+u)\,{}_vp_y\,\mu(y+v)$ и правая часть формулы (9.3.6) сводится к выражению

$${}_tp_y\,{}_tp_y[\mu(x+t) + \mu(y+t)]. \tag{9.3.8}$$

Пример 9.3.3. Используя формулу (9.3.6), выпишем функцию плотности с.в. $T(xy)$ из примера 9.2.1. Проверим правильность полученного результата, рассматривая функцию распределения из примера 9.3.1.

Решение. Используя формулу (9.3.6), получим

$$f_T(t) = \begin{cases} \int_t^{10} 0{,}0006(t-v)^2\,dv + \int_t^{10} 0{,}0006(u-t)^2\,du & \\ \qquad\qquad = 0{,}0004(10-t)^3 & \text{при } 0 < t < 10, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Это выражение совпадает с производной функции распределения из примера 9.3.1. ▼

Мы видели, что с.в. $T(xy)$ из примеров 9.3.1 и 9.3.2 имеют одинаковые распределения. Если для нахождения функции плотности с.в. $T(xy)$ в примере 9.2.3 мы используем выражение (9.3.8), то снова убедимся в этом. Нахождение этой функции составляет упр. 9.8.

Как было объяснено в гл. 3, распределение $T = T(xy)$ можно определить и через интенсивность «смертности» или, более общим образом, через интенсивность «потери статуса». Сначала введем обозначение для интенсивности потери статуса в момент времени t. Традиционным обозначением для нее является[1] $\mu_{x+t:y+t}$ (по аналогии с μ_{x+t}), но, готовясь к обсуждению других статусов, где необходимо указывать продолжительность периода, прошедшего с момента заключения договора страхования, а также учитывая соглашение об обозначениях из гл. 3, мы будем пользоваться обозначением $\mu_{xy}(t)$. Это обозначение не обязательно означает, что (x) и (y) или статус дожития (xy) подвергается процессу селекции рисков, просто этот статус возникает в указанных возрастах.

По аналогии с первым равенством формулы (3.2.13) при замене $f_{T(x)}(x)$ и $F_{T(x)}(x)$ на $f_{T(xy)}(t)$ и $F_{T(xy)}(t)$ соответственно мы получим

$$\mu_{xy}(t) = \frac{f_{T(xy)}(t)}{1 - F_{T(xy)}(t)}\,. \tag{9.3.9}$$

Для зависимых с.в. $T(x)$ и $T(y)$ это выражение нельзя упростить. Однако для независимого случая, используя формулы (9.3.3) и (9.3.8), мы получаем $\mu_{xy}(t) = \mu(x+t) + \mu(y+t)$.

Иными словами, если продолжительности предстоящей жизни независимы, то интенсивность потери статуса дожития всех лиц из группы является суммой интенсивностей смертности для этих лиц. Как и в гл. 3 для случая одного лица, мы можем описать распределение с.в. $T(xy)$ функцией плотности, функцией распределения, функцией дожития или интенсивностью потери статуса.

Пример 9.3.4. Определим интенсивность потери статуса дожития обоих лиц (x) и (y) из примеров 9.2.1 и 9.2.3.

Решение. Поскольку совместные распределения из этих двух примеров приводят к одному и тому же распределению с.в. $T(xy)$, будем считать, что условие независимости выполнено. Из п. (а) примера 9.2.3 и формулы (9.3.9) получаем

$$\mu_{xy}(t) = 4/(10-t), \qquad 0 < t < 10. \qquad ▼$$

Теперь перейдем к пошаговой продолжительности предстоящего периода сохранения статуса дожития всех лиц из группы.

Вероятность того, что статус дожития всех лиц из группы теряется в течение периода времени с k по $k+1$, определяется формулой

$$\mathbf{P}(k < T \leqslant k+1) = \mathbf{P}(T \leqslant k+1) - \mathbf{P}(T \leqslant k) = {}_kp_{xy} - {}_{k+1}p_{xy} = {}_kp_{xy}\, q_{x+k:y+k}\,. \tag{9.3.10}$$

Если продолжительности предстоящей жизни лиц (x) и (y) независимы, то вероятность потери статуса $(x+k:y+k)$ дожития обоих лиц в течение следующего года

[1] Начиная с этой главы, символ «двоеточие», который раньше использовался как обязательный элемент обозначений типа $a_{x:\overline{n}|}$, будет использоваться и как необязательный разделительный символ, который может опускаться, если нет опасности неправильного понимания формулы. — *Прим. ред.*

можно выписать в терминах вероятностей независимых случаев смерти этих отдельных лиц следующим образом:

$$\begin{aligned} q_{x+k:y+k} &= 1 - p_{x+k:y+k} = 1 - p_{x+k}\, p_{y+k} = (1 - q_{x+k})(1 - q_{y+k}) \\ &= q_{x+k} + q_{y+k} - q_{x+k}\, q_{y+k} = q_{x+k} + (1 - q_{x+k}) q_{y+k}. \end{aligned} \tag{9.3.11}$$

Из обсуждения пошаговой продолжительности предстоящей жизни лица (x) в разд. 3.2.3 мы видим, что равенство (9.3.10) также дает функцию распределения с.в. K, числа полных лет, прошедших до момента потери статуса дожития всех лиц из группы, т. е. для $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\mathbf{P}(K = k) = \mathbf{P}(k \leqslant T < k+1) = \mathbf{P}(k < T \leqslant k+1) = {}_k p_{xy}\, q_{x+k:y+k} = {}_{k|}q_{xy}. \tag{9.3.12}$$

Пример 9.3.5. Определим функцию вероятностей и математическое ожидание с.в. $K(xy)$, используя функции распределения из примеров 9.3.1 и 9.3.2.

Решение. В силу примера 9.3.2

$${}_k p_{xy} = 0{,}0001(10 - k)^4.$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}[K(xy) = k] = 0{,}0001[(10 - k)^4 - (9 - k)^4], \qquad k = 0, 1, 2, 3, \ldots, 9.$$

Согласно формуле (3.5.5),

$$e_{xy} = \mathbf{E}[K(xy)] = \sum_{k=0}^{\infty} {}_{k+1}p_{xy} = \sum_{k=0}^{9} 0{,}0001(9 - k)^4 = 1{,}5333. \qquad \blacktriangledown$$

9.4. Статус дожития последнего лица в группе

В дополнение к страховым выплатам, определенным в терминах времени первой смерти, существуют выплаты, определенные в терминах момента последней смерти. В настоящем разделе мы рассмотрим ситуации, в которых рассматривается случайная величина момента последней смерти.

Статус, который сохраняется до тех пор, пока живо хотя бы одно лицо из некоторой группы, и теряется в момент смерти последнего из них, называется *статусом дожития последнего лица в группе*. Он обозначается через $(\overline{x_1 x_2 \cdots x_m})$, где x_i — возраст i-го члена группы, а m — число членов группы. Будем рассматривать распределение с.в. $T = \max[T(x_1), T(x_2), \ldots, T(x_m)]$, продолжительности периода до потери данного статуса, где $T(x_i)$ — случайная величина продолжительности предстоящей жизни лица с номером i. Случайную величину T можно интерпретировать как *наибольшую порядковую статистику*, образованную с.в. $T(x_1), T(x_2), \ldots, T(x_m)$. В отличие от ситуации, типичной для такой порядковой статистики, указанные m случайных величин не обязаны быть независимыми и одинаково распределенными.

Для случая двух лиц (x) и (y) имеет место равенство $T(\overline{xy}) = \max[T(x), T(y)]$. Между с.в. $T(xy)$, $T(\overline{xy})$, $T(x)$ и $T(y)$ существует связь. Так, если с.в. $T(xy)$ равна $T(x)$, то с.в. $T(\overline{xy})$ равна $T(y)$, и наоборот, если с.в. $T(xy)$ равна $T(y)$, то с.в. $T(\overline{xy})$ равна $T(x)$. Таким образом, для всевозможных совместных распределений с.в. $T(x)$

и $T(y)$ справедливы соотношения

$$T(xy) + T(\overline{xy}) = T(x) + T(y), \tag{9.4.1}$$

$$T(xy)T(\overline{xy}) = T(x)T(y), \tag{9.4.2}$$

$$a^{T(xy)} + a^{T(\overline{xy})} = a^{T(x)} + a^{T(y)} \quad \text{при} \ \ a > 0. \tag{9.4.3}$$

Можно также записать ряд соотношений, связывающих распределения этих четырех случайных величин, которые вытекают из следующей формулы включения и исключения:

$$\mathbf{P}(A \cup B) + \mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B). \tag{9.4.4}$$

Определяя событие A как $\{T(x) \leqslant t\}$, а B — как $\{T(y) \leqslant t\}$, получим $A \cap B = \{T(\overline{xy}) \leqslant t\}$ и $A \cup B = \{T(xy) \leqslant t\}$, что даст следующее равенство:

$$F_{T(xy)}(t) + F_{T(\overline{xy})}(t) = F_{T(x)}(t) + F_{T(y)}(t). \tag{9.4.5}$$

Отсюда следует, что

$${}_tp_{xy} + {}_tp_{\overline{xy}} = {}_tp_x + {}_tp_y, \tag{9.4.6}$$

$$f_{T(xy)}(t) + f_{T(\overline{xy})}(t) = f_{T(x)}(t) + f_{T(y)}(t). \tag{9.4.7}$$

Соотношение, полученное выше, позволяет исследовать распределение продолжительности предстоящего периода сохранения статуса дожития последнего лица в группе, используя распределение продолжительности предстоящего периода сохранения статуса дожития всех лиц из группы, полученное в предыдущем разделе. В качестве иллюстрации этого утверждения подставим формулу (9.3.2) в (9.4.5) и получим

$$F_{T(\overline{xy})}(t) = F_{T(x)}(t) + F_{T(y)}(t) - F_{T(xy)}(t) = F_{T(x)T(y)}(t, t);$$

это соотношение также следует из равенства $F_{T(\overline{xy})}(t) = \mathbf{P}[T(x) \leqslant t \cap T(y) \leqslant t]$.

Пример 9.4.1. Найдем функцию распределения, функцию дожития и функцию плотности с.в. $T(\overline{xy})$ для лиц из примера 9.2.1.

Решение. В силу формулы (9.4.5) и решения п. (b) примера 9.2.1 и примера 9.3.1 имеем

$$\begin{aligned} F_{T(\overline{xy})}(t) &= 2\{0{,}5 + 0{,}00005[t^4 - (10-t)^4]\} - [1 - 0{,}0001(10-t)^4] \\ &= 0{,}0001\,t^4 = F_{T(x)T(y)}(t,t), \qquad 0 \leqslant t < 10, \\ {}_tp_{\overline{xy}} &= 1 - F_{T(\overline{xy})}(t) = 1 - 0{,}0001\,t^4, \qquad 0 < t \leqslant 10. \end{aligned}$$

Дифференцируя, получим

$$f_{T(\overline{xy})}(t) = 0{,}0004\,t^3, \qquad 0 < t < 10. \qquad \blacktriangledown$$

Пример 9.4.2. Найдем функцию распределения, функцию дожития и функцию плотности с.в. $T(\overline{xy})$ для лиц из примера 9.2.3.

Решение. Из формулы (9.4.5) и решений примеров 9.2.3 и 9.3.2 имеем для $0 < t \leqslant 10$

$$\begin{aligned} F_{T(\overline{xy})}(t) &= 2[1 - 0{,}01(10-t)^2] - [1 - 0{,}0001(10-t)^4] \\ &= [1 - 0{,}01(10-t)^2]^2 = t^2(0{,}2 - 1{,}01t)^2 = F_{T(x)T(y)}(t,t), \\ {}_tp_{\overline{xy}} &= 1 - F_{T(\overline{xy})}(t) = 1 - t^2(0{,}2 - 0{,}01t)^2, \\ f_{T(\overline{xy})}(t) &= 0{,}04\,t(2 - 0{,}1t)(1 - 0{,}1t), \qquad 0 < t < 10. \qquad \blacktriangledown \end{aligned}$$

Сравнивая примеры 9.3.1 и 9.3.2 с примерами 9.4.1 и 9.4.2, получаем, что два различных совместных распределения могут приводить к одному и тому же распределению продолжительности предстоящего периода сохранения статуса дожития всех лиц из группы, но к разным распределениям продолжительности периода сохранения статуса дожития последнего лица в группе. Такая возможность могла быть предсказана заранее, исходя из общего характера равенства (9.4.5).

Для применения равенства (9.4.5) и (9.4.7) удобнее переписать в актуарных обозначениях:

$$ {}_tq_{\overline{xy}} = {}_tq_x + {}_tq_y - {}_tq_{xy}, \tag{9.4.5$'$}$$

$$ {}_tp_{\overline{xy}}\, \mu_{\overline{xy}}(t) = {}_tp_x\, \mu(x+t) + {}_tp_y\, \mu(y+t) - {}_tp_{xy}\, \mu_{xy}(t). \tag{9.4.7$'$}$$

Интенсивность потери статуса дожития последнего лица в группе неявно определена формулой (9.4.7$'$):

$$\mu_{\overline{xy}}(t) = \frac{f_{T(\overline{xy})}(t)}{1 - F_{T(\overline{xy})}(t)} = \frac{{}_tp_x\, \mu(x+t) + {}_tp_y\, \mu(y+t) - {}_tp_{xy}\, \mu_{xy}(t)}{{}_tp_{\overline{xy}}}. \tag{9.4.8}$$

Если с.в. $T(x)$ и $T(y)$ независимы, то $\mu_{xy}(t)$ в (9.4.7$'$) и (9.4.8) можно заменить на $\mu_x(t) + \mu_y(t)$, т.е. они примут вид

$$ {}_tp_{\overline{xy}}\, \mu_{\overline{xy}}(t) = {}_tq_y\, {}_tp_x\, \mu(x+t) + {}_tq_x\, {}_tp_y\, \mu(y+t), \tag{9.4.9}$$

$$\mu_{\overline{xy}}(t) = \frac{{}_tq_y\, {}_tp_x\, \mu(x+t) + {}_tq_x\, {}_tp_y\, \mu(y+t)}{{}_tq_y\, {}_tp_x + {}_tq_x\, {}_tp_y + {}_tp_x\, {}_tp_y}. \tag{9.4.10}$$

В такой форме интенсивность потери статуса дожития последнего лица в группе представляет собой взвешенное среднее интенсивностей смертности, которые являются функциями плотностей условных распределений, а вероятность того, что оба лица (x) и (y) умрут в момент времени t, равна 0. Таким образом, интенсивность, связанная с произведением ${}_tp_x\, {}_tp_y$ во взвешенном среднем, равна 0.

Пример 9.4.3. Найдем интенсивность потери статуса дожития последнего из двух лиц из

(a) примера 9.2.1, (b) примера 9.2.3.

Решение. (a) Используя результаты примера 9.4.1, получаем

$$\mu_{\overline{xy}}(t) = \frac{0{,}0004\, t^3}{1 - 0{,}0001\, t^4} = \frac{4\, t^3}{10\,000 - t^4}.$$

(b) Используя результаты примера 9.4.2, получаем

$$\mu_{\overline{xy}}(t) = \frac{0{,}04\, t(2 - 0{,}1\, t)(1 - 0{,}1\, t)}{1 - t^2(0{,}2 - 0{,}01\, t)^2} = \frac{4\, t(20-t)(10-t)}{10\,000 - t^2(20-t)^2}. \qquad \blacktriangledown$$

Для пошаговых продолжительностей предстоящего периода сохранения статуса дожития имеются дискретные аналоги соотношений (9.4.1)–(9.4.3) и (9.4.5)–(9.4.7), а именно

$$K(xy) + K(\overline{xy}) = K(x) + K(y), \tag{9.4.11}$$

$$K(xy)K(\overline{xy}) = K(x)K(y), \tag{9.4.12}$$

$$a^{K(xy)} + a^{K(\overline{xy})} = a^{K(x)} + a^{K(y)} \quad \text{при } a > 0, \tag{9.4.13}$$

$$F_{K(xy)}(k) + F_{K(\overline{xy})}(k) = F_{K(x)}(k) + F_{K(y)}(k). \tag{9.4.14}$$

Из формулы (9.4.14) следует, что

$$f_{K(xy)}(k) + f_{K(\overline{xy})}(k) = f_{K(x)}(k) + f_{K(y)}(k). \tag{9.4.15}$$

Из этих соотношений и результатов для пошаговой продолжительности предстоящего периода сохранения статуса дожития всех лиц из группы можно получить распределение с.в. $K(\overline{xy})$ числа полных лет до потери статуса дожития последнего лица в группе, т.е. числа полных лет до смерти последнего лица из группы. Из (9.4.15) следует, что

$$\mathbf{P}[K(\overline{xy})=k] = f_{K(\overline{xy})}(k) = {}_kp_x\, q_{x+k} + {}_kp_y\, q_{y+k} - {}_kp_{xy}\, q_{x+k:y+k}\,. \tag{9.4.16}$$

Для независимых лиц формулы (9.3.5) и (9.3.12) позволяют переписать (9.4.16) в виде

$$\begin{aligned}\mathbf{P}[K(\overline{xy})=k] &= {}_kp_x\, q_{x+k} + {}_kp_y\, q_{y+k} - {}_kp_x\, {}_kp_y(q_{x+k} + q_{y+k} - q_{x+k}\, q_{y+k}) \\ &= (1 - {}_kp_y){}_kp_x\, q_{x+k} + (1 - {}_kp_x){}_kp_y\, q_{y+k} + {}_kp_x\, {}_kp_y\, q_{x+k}\, q_{y+k}\,.\end{aligned}$$

В последнем выражении первые два слагаемых — это вероятность того, что только вторая смерть произойдет между моментами времени k и $k+1$. Третье слагаемое является вероятностью того, что обе смерти произойдут в течение указанного года. Это выражение для $\mathbf{P}[K(\overline{xy})=k]$ аналогично выражению (9.4.9) для плотности с.в. $T(\overline{xy})$, в котором имеются лишь два слагаемых, так как вероятность того, что обе смерти произойдут в одно и то же время, равна 0.

9.5. Вероятности и математические ожидания

В разд. 9.2 и 9.3 мы выразили функции плотности и функции распределения продолжительностей предстоящего периода до потери статуса дожития всех лиц из группы и статуса дожития последнего лица в группе в терминах функций распределения для отдельных лиц. В этом разделе мы используем эти выражения для решения вероятностных задач и для вывода формул для математических ожиданий, дисперсий и, если случайные величины продолжительности предстоящей жизни отдельных лиц независимы, ковариаций продолжительностей предстоящего периода сохранения статуса дожития всех лиц из группы и статуса дожития последнего лица в группе.

Пример 9.5.1. Предполагая, что продолжительности предстоящей жизни лиц (80) и (85) независимы, выразим в терминах актуарных функций для отдельных лиц вероятности того, что

(a) первая смерть произойдет не ранее 5, но не позднее 10 лет от настоящего момента времени,

(b) последняя смерть произойдет не ранее 5, но не позднее 10 лет от настоящего момента времени.

Решение. (a) Для $T = T(80{:}85)$ получим

$$\mathbf{P}(5 < T \leqslant 10) = \mathbf{P}(T > 5) - \mathbf{P}(T > 10) = {}_5p_{80:85} - {}_{10}p_{80:85} = {}_5p_{80}\, {}_5p_{85} - {}_{10}p_{80}\, {}_{10}p_{85}.$$

Заметим, что предположение о независимости использовано лишь на последнем шаге.

(b) Для $T = T(\overline{80{:}85})$

$$\mathbf{P}(5 < T \leqslant 10) = \mathbf{P}(T > 5) - \mathbf{P}(T > 10) = {}_5p_{\overline{80:85}} - {}_{10}p_{\overline{80:85}},$$

а, согласно равенству (9.4.6), последнее выражение равно

$$_5p_{80} - {_{10}p_{80}} + {_5p_{85}} - {_{10}p_{85}} - ({_5p_{80:85}} - {_{10}p_{80:85}}).$$

Используя предположение о независимости, можно заменить $_5p_{80:85}$ на $_5p_{80}\,{_5p_{85}}$ и $_{10}p_{80:85}$ на $_{10}p_{80}\,{_{10}p_{85}}$. ▼

Результаты разд. 3.5 о математических ожиданиях с.в. T, продолжительности предстоящей жизни лица (x), также справедливы, если $T = T(u)$ — продолжительность предстоящего периода сохранения статуса (u). Мы использовали некоторые из этих результатов в двух предыдущих разделах. Теперь сформулируем их в явном виде.

Согласно формуле (3.5.2), $\mathring{e}_u = \mathbf{E}[T(u)]$, что в случае статуса (u) можно получить из формулы

$$\mathring{e}_u = \int_0^\infty {_tp_u}\,dt. \tag{9.5.1}$$

Если (u) — статус (xy) дожития обоих лиц, то

$$\mathring{e}_{xy} = \int_0^\infty {_tp_{xy}}\,dt, \tag{9.5.2}$$

а если (u) — статус $(\overline{xy})$ дожития последнего из двух лиц, то

$$\mathring{e}_{\overline{xy}} = \int_0^\infty {_tp_{\overline{xy}}}\,dt. \tag{9.5.3}$$

Взяв математические ожидания от обеих частей равенства (9.4.1), получим

$$\mathring{e}_{\overline{xy}} = \mathring{e}_x + \mathring{e}_y - \mathring{e}_{xy}. \tag{9.5.4}$$

Согласно формуле (3.5.7), математическое ожидание с.в. $K = K(u)$ для статуса дожития (u) — это

$$e_u = \sum_{k=1}^\infty {_kp_u}.$$

В частности,

$$e_{xy} = \sum_{k=1}^\infty {_kp_{xy}} \quad \text{и} \quad e_{\overline{xy}} = \sum_{k=1}^\infty {_kp_{\overline{xy}}}.$$

В силу равенства (9.4.11)

$$e_{\overline{xy}} = e_x + e_y - e_{xy}. \tag{9.5.5}$$

Формулы для дисперсий, полученные в разд. 3.5, можно использовать для расчета дисперсий продолжительности предстоящего периода сохранения некоторого статуса дожития (u) или пошаговой продолжительности предстоящего периода сохранения этого статуса. Таким образом,

$$\mathbf{D}[T(xy)] = 2\int_0^\infty t\,{_tp_{xy}}\,dt - (\mathring{e}_{xy})^2, \tag{9.5.6}$$

$$\mathbf{D}[T(\overline{xy})] = 2\int_0^\infty t\,{_tp_{\overline{xy}}}\,dt - (\mathring{e}_{\overline{xy}})^2. \tag{9.5.7}$$

В примере 9.2.1 мы вычислили ковариацию для зависимых с.в. $T(x)$ и $T(y)$. Вернемся к случаю зависимых продолжительностей предстоящей жизни и исследуем ковариацию с.в. $T(xy)$ и $T(\overline{xy})$ в общем случае:

$$\mathbf{Cov}[T(xy), T(\overline{xy})] = \mathbf{E}[T(xy)T(\overline{xy})] - \mathbf{E}[T(xy)]\,\mathbf{E}[T(\overline{xy})]. \tag{9.5.8}$$

В силу формулы (9.4.2) имеем

$$\mathbf{E}[T(xy)T(\overline{xy})] = \mathbf{E}[T(x)T(y)].$$

Использовав этот результат и формулу (9.5.4), мы можем записать

$$\mathbf{Cov}[T(xy), T(\overline{xy})] = \mathbf{E}[T(x)T(y)] - \mathbf{E}[T(xy)]\{\mathbf{E}[T(x)] + \mathbf{E}[T(y)] - \mathbf{E}[T(xy)]\};$$

правую часть этого равенства можно переписать в виде

$$\mathbf{Cov}[T(x), T(y)] + \{\mathbf{E}[T(x)] - \mathbf{E}[T(xy)]\}\{\mathbf{E}[T(y)] - \mathbf{E}[T(xy)]\}. \tag{9.5.9}$$

Если с.в. $T(x)$ и $T(y)$ некоррелированы, то

$$\mathbf{Cov}[T(xy), T(\overline{xy})] = (\mathring{e}_x - \mathring{e}_{xy})(\mathring{e}_y - \mathring{e}_{xy}). \tag{9.5.10}$$

Поскольку оба сомножителя в (9.5.10) должны быть неотрицательными, ясно, что если $T(x)$ и $T(y)$ некоррелированы, то с.в. $T(xy)$ и $T(\overline{xy})$ положительно коррелированы, за исключением тривиальных случаев, когда одна из величин $\mathring{e}_x$ или $\mathring{e}_y$ равняется $\mathring{e}_{xy}$.

Пример 9.5.2. Для с.в. $T(x)$ и $T(y)$ из примеров 9.2.1 и 9.2.3 определим
(a) $\mathbf{Cov}[T(xy), T(\overline{xy})]$, (b) коэффициент корреляции между с.в. $T(xy)$ и $T(\overline{xy})$.

Решение. Бóльшая часть необходимых расчетов была проделана в предыдущих примерах. Оставшиеся вычисления можно легко завершить, используя вид функций плотности, приведенных в этих примерах. Для завершения расчетов сведем результаты в таблицу, указывая вид формулы и номер примера.

	Формула	Распределение: Примеры 9.2.1, 9.3.1, 9.4.1	Распределение: Примеры 9.2.3, 9.3.2, 9.4.2
(a)	$\mathring{e}_x = \mathring{e}_y = \mathbf{E}[T(x)] = \mathbf{E}[T(y)]$	5	10/3
	$\mathring{e}_{xy} = \mathbf{E}[T(xy)]$	2	2
	$\mathbf{Cov}[T(x), T(y)]$	−25/3	0
	$\mathbf{Cov}[T(xy), T(\overline{xy})]$	2/3	16/9
(b)	$\mathbf{E}[T(xy)^2]$	20/3	20/3
	$\mathbf{D}[T(xy)]$	8/3	8/3
	$\mathbf{E}[T(\overline{xy})]$	8	14/3
	$\mathbf{E}[T(\overline{xy})^2]$	200/3	80/3
	$\mathbf{D}[T(\overline{xy})]$	8/3	44/9
	$\rho_{T(xy)T(\overline{xy})}$	1/4	$\sqrt{8/33}$

▼

9.6. Модели зависимых продолжительностей предстоящей жизни

В разд. 9.2 рассматривалось совместное распределение с.в. $T(x)$ и $T(y)$. Для иллюстрации приводились два примера, которые не кажутся подходящими для моделирования совместного распределения продолжительностей предстоящей жизни. Пример 9.2.1 иллюстрирует случай, когда с.в. $T(x)$ и $T(y)$ зависимы, а пример 9.2.3 — когда они независимы.

В этом разделе будут изучены два общих подхода к построению совместного распределения с.в. $T(x)$ и $T(y)$. Удобный частный случай независимых случайных величин охватывается каждой из этих моделей.

9.6.1. Модель с возмущением

Пусть $T^*(x)$ и $T^*(y)$ — две случайные величины продолжительностей предстоящей жизни, которые при отсутствии возмущения являются независимыми, т. е.

$$S_{T^*(x)T^*(y)}(s,t) = \mathbf{P}[T^*(x) > s \cap T^*(y) > t] = s_{T^*(x)}(s)\, s_{T^*(y)}(t). \qquad (9.6.1)$$

Пусть имеется также случайная величина *возмущения*, обозначаемая через Z, которая может влиять на совместное распределение продолжительностей предстоящей жизни лиц (x) и (y). Эта случайная величина возмущения независима от пары $[T^*(x), T^*(y)]$ и имеет показательное распределение, т. е.

$$s_Z(z) = e^{-\lambda z}, \qquad z > 0,\ \lambda \geqslant 0.$$

Можно представлять себе, что с.в. Z связана с моментом катастрофы, например, с землетрясением или с авиационной катастрофой. Для построения моделей страхования жизни и аннуитетов для лиц (x) и (y) нам понадобятся с.в. $T(x) = \min[T^*(x), Z]$ и $T(y) = \min[T^*(y), Z]$. Совместная функция дожития с.в. $T(x)$ и $T(y)$ — это

$$\begin{aligned} s_{T(x)T(y)}(s,t) &= \mathbf{P}\{\min[T^*(x), Z] > s \cap \min[T^*(y), Z] > t\} \\ &= \mathbf{P}\{[T^*(x) > s \cap Z > s] \cap [T^*(y) > t \cap Z > t]\} \\ &= \mathbf{P}[T^*(x) > s \cap T^*(y) > t \cap Z > \max(s,t)] \\ &= s_{T^*(x)}(s)\, s_{T^*(y)}(t)\, e^{-\lambda[\max(s,t)]}. \end{aligned} \qquad (9.6.2)$$

Последнее равенство формулы (9.6.2) справедливо в силу независимости случайных величин $T^*(x)$, $T^*(y)$ и Z.

Используя совместную функцию дожития (9.6.2), можно определить функцию плотности совместного распределения пары $[T(x), T(y)]$. За исключением случая, когда $s = t$, эта функция плотности имеет вид

$$\begin{aligned} f_{T(x)T(y)}(s,t) &= \frac{\partial^2}{\partial s\, \partial t}\, s_{T^*(x)}(s) s_{T^*(y)}(t)\, e^{-\lambda[\max(s,t)]} \\ &= \begin{cases} [s'_{T^*(x)}(s)\, s'_{T^*(y)}(t)] - \lambda s_{T^*(x)}(s)\, s'_{T^*(y)}(t)]\, e^{-\lambda s}, & 0 < t < s, \quad (9.6.3a) \\ [s'_{T^*(x)}(s)\, s'_{T^*(y)}(t)] - \lambda s'_{T^*(x)}(s)\, s_{T^*(y)}(t)]\, e^{-\lambda t}, & 0 < s < t. \quad (9.6.3b) \end{cases} \end{aligned}$$

Этой формулы недостаточно, чтобы полностью определить рассматриваемую функцию плотности. Когда $s = t$, вклад возмущения в эту функцию равен

$$f_{T(x)T(y)}(t,t) = \lambda e^{-\lambda t} s_{T^*(x)}(t) s_{T^*(y)}(t). \qquad (9.6.3c)$$

Область определения этой смешанной плотности с гребнем на линии $s = t$ изображена на рис. 9.6.1.

Замечание. Интерпретация функции плотности, заданной формулами (9.6.3a), (9.6.3b) и (9.6.3c), требует тщательного анализа распределения пары $[T^*(x), T^*(y)]$ и пары $\{T(x) = \min[T^*(x), Z],\ T(y) = \min[T^*(y), Z]\}$. Таблица 9.6.1 помогает этому анализу. Из-за наличия возмущения Z реализации с.в. $T^*(x)$ и $T^*(y)$ не могут наблюдаться при условии предшествующей реализации с.в. Z. Случайная величина возмущения может маскировать или цензурировать наблюдения с.в. $T^*(x)$ и

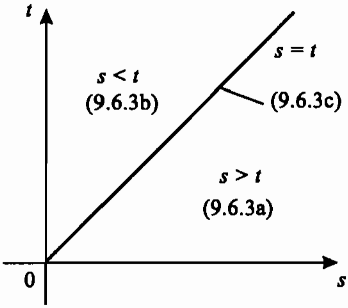


Рис. 9.6.1. Область определения плотности распределения в модели с возмущением

$T^*(y)$. Кроме того, в функцию плотности могут вносить вклад такие события, как $T^*(x) < Z < T^*(y)$ и $T^*(y) < Z < T^*(x)$.

Таблица 9.6.1. Интерпретация функции плотности пары с.в. $[T(x), T(y)]$ в модели с возмущением

Формула	Интерпретация	Область определения
9.6.3a	$\mathbf{P}\{[(s < T^*(x) \leqslant s + \Delta s) \cap (t < T^*(y) \leqslant t + \Delta t) \cap (Z > s)]$ $\cup [(T^*(x) > s) \cap (t < T^*(y) \leqslant t + \Delta t) \cap (s < Z \leqslant s + \Delta s)]\}$ $\approx [f_{T^*(x)}(s) f_{T^*(y)}(t) s_Z(s) + s_{T^*(x)}(s) f_{T^*(y)}(t) f_Z(s)]\, \Delta s\, \Delta t$	$0 < t < s$
9.6.3b	$\mathbf{P}\{[(s < T^*(x) \leqslant s + \Delta s) \cap (t < T^*(y) \leqslant t + \Delta t) \cap (Z > t)]$ $\cup [(s < T^*(x) \leqslant s + \Delta s) \cap (T^*(y) > t) \cap (t < Z \leqslant t + \Delta t)]\}$ $\approx [f_{T^*(x)}(s) f_{T^*(y)}(t) s_Z(t) + f_{T^*(x)}(s) s_{T^*(y)}(t) f_Z(t)]\, \Delta s\, \Delta t$	$0 < t < s$
9.6.3c	$\mathbf{P}\{[(T^*(x) > t) \cap (T^*(y) > t) \cap (t < Z \leqslant t + \Delta t)\}$ $\approx s_{T^*(x)}(t) s_{T^*(y)}(t) f_Z(t)\, \Delta t$	$s = t$

Маргинальные функции дожития задаются формулами

$$s_{T(x)}(s) = \mathbf{P}\{[T(x) > s] \cap [T(y) > 0]\} = s_{T^*(x)}(s)\, e^{-\lambda s}, \qquad (9.6.4a)$$

$$s_{T(y)}(t) = \mathbf{P}\{[T(x) > 0] \cap [T(y) > t]\} = s_{T^*(y)}(t)\, e^{-\lambda t}. \qquad (9.6.4b)$$

Если нас интересует распределение с.в. $T(xy) = \min[T(x), T(y)]$ продолжительности периода сохранения статуса дожития всех лиц из группы в модели с возмущением, то с помощью формул (9.3.1) и (9.6.3) соответствующую функцию дожития можно получить так:

$$s_{T(xy)}(t) = s_{T^*(x)}(t)\, s_{T^*(y)}(t)\, e^{-\lambda t}, \qquad 0 < t. \qquad (9.6.5)$$

Распределение с.в. $T(\overline{xy}) = \max[T(x), T(y)]$ продолжительности периода сохранения статуса дожития последнего лица в группе в модели с возмущением можно получить, используя формулы (9.4.5), (9.6.5), (9.6.4a) и (9.6.4b):

$$s_{T(\overline{xy})}(t) = [s_{T^*(x)}(t) + s_{T^*(y)}(t) - s_{T^*(x)T^*(y)}(t, t)]\, e^{-\lambda t}, \qquad 0 < t. \qquad (9.6.6)$$

Если параметр возмущения λ равен 0, то формулы (9.6.5) и (9.6.6) возвращаются к виду, который соответствует независимости с.в. $T(x)$ и $T(y)$. Если $\lambda > 0$, то функции дожития случайных величин продолжительности периодов сохранения статуса дожития обоих лиц и последнего лица меньше соответствующих функций дожития при $\lambda = 0$.

Пример 9.6.1. Выразим $\mu_{xy}(t)$, воспользовавшись формулой (9.6.5).

Решение. $\mu_{xy}(t) = -\dfrac{d}{dt}\ln[s_{T^*(x)}(t)s_{T^*(y)}(t)\,e^{-\lambda t}] = \mu(x+t) + \mu(y+t) + \lambda.$ ▼

Пример 9.6.2. Случайные величины $T^*(x)$, $T^*(y)$ и Z независимы и имеют показательные распределения с параметрами μ_1, μ_2 и λ соответственно. Эти три случайные величины являются компонентами модели с возмущением.

(a) Выразим функцию плотности маргинального распределения с.в. $T(y)$, найдя

$$f_{T(y)}(t) = \int_0^t f_{T(x)T(y)}(s,t)\,ds + f_{T(x)T(y)}(t,t) + \int_t^\infty f_{T(x)T(y)}(s,t)\,ds.$$

(b) Выразим маргинальную функцию дожития с.в. $T(y)$, найдя

$$s_{T(y)}(t) = \int_t^\infty f_{T(y)}(u)\,du.$$

(c) Вычислим

$$\mathbf{P}[T(x)=T(y)] = \int_0^\infty f_{T(x)T(y)}(t,t)\,dt.$$

Решение. (a) Используем три компоненты из формулы (9.6.3), записанные для показательных распределений, и получим

$$\begin{aligned}
f_{T(y)}(t) &= \int_0^t \mu_1(\mu_2+\lambda)\,e^{-\mu_1 s-(\mu_2+\lambda)t}\,ds + \lambda e^{-(\mu_1+\mu_2+\lambda)t} \\
&\quad + \int_t^\infty \mu_2(\mu_1+\lambda)\,e^{-(\mu_1+\lambda)s-\mu_2 t}\,ds \\
&= (\mu_2+\lambda)\,e^{-(\mu_2+\lambda)t}(1-e^{-\mu_1 t}) + \lambda e^{-(\mu_1+\mu_2+\lambda)t} + \mu_2 e^{-(\mu_1+\mu_2+\lambda)t} \\
&= (\mu_2+\lambda)\,e^{-(\mu_2+\lambda)t}, \qquad 0 < t.
\end{aligned}$$

(b) $s_{T(y)}(t) = \displaystyle\int_t^\infty f_{T(y)}(u)\,du = e^{-(\mu_2+\lambda)t} = s_{T^*(y)}(t)\,e^{-\lambda t}$, что согласуется с формулой (9.6.4b).

(c) $\mathbf{P}[T(x)=T(y)] = \int_0^\infty \lambda e^{-(\mu_1+\mu_2+\lambda)t}\,dt = \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu_1+\mu_2}.$ ▼

9.6.2. Связка

Понятие связки[1)] используется в многомерном статистическом анализе для определения класса двумерных распределений с заданными маргинальными распределениями.

В этом разделе мы проиллюстрируем актуарные приложения так называемых связок Фрэнка. Будут использоваться обозначения разд. 9.2. Мы утверждаем, что

$$F_{T(x)T(y)}(s,t) = \frac{1}{\alpha}\ln\left[1 + \frac{(e^{\alpha F_{T(x)}(s)}-1)(e^{\alpha F_{T(y)}(t)}-1)}{e^\alpha - 1}\right], \tag{9.6.7}$$

где $\alpha \neq 0$, является функцией совместного распределения с маргинальными распределениями $F_{T(x)}(s)$ и $F_{T(y)}(t)$. Это утверждение можно проверить, убедившись, что

[1)] В оригинале «copula». — *Прим. ред.*

$$F_{T(x)T(y)}(0,0) = 0, \tag{9.6.8}$$

$$F_{T(x)T(y)}(\infty,\infty) = 1, \tag{9.6.9}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F_{T(x)T(y)}(s,t)}{\partial s\,\partial t} &= f_{T(x)T(y)}(s,t) \\ &= \frac{\alpha f_{T(x)}(s) f_{T(y)}(t)[e^{\alpha[F_{T(x)}(s)+F_{T(y)}(t)]}]}{[(e^\alpha - 1) + (e^{\alpha F_{T(x)}(s)} - 1)(e^{\alpha F_{T(y)}(t)} - 1)]^2}\,(e^\alpha - 1) \geqslant 0, \end{aligned} \tag{9.6.10}$$

$$F_{T(x)T(y)}(s,\infty) = F_{T(x)}(s), \qquad F_{T(x)T(y)}(\infty,t) = F_{T(y)}(t).$$

Утверждения (9.6.8) и (9.6.9) необходимы для того, чтобы $F_{T(x)T(y)}(s,t)$ была функцией совместного распределения двух случайных величин продолжительностей предстоящей жизни. Формула (9.6.10) выражает функцию плотности совместного распределения и показывает, что она неотрицательна.

Параметр α в функции распределения (9.6.7) и в функции плотности (9.6.10) «управляет зависимостью» с.в. $T(x)$ и $T(y)$. Это можно понять, вычислив

$$\lim_{\alpha\to 0} f_{T(x)T(y)}(s,t) = f_{T(x)}(s) f_{T(y)}(t)\Big\{\lim_{\alpha\to 0}[A(\alpha)B(\alpha)C(\alpha)]\Big\},$$

где

$$A(\alpha) = e^{\alpha[F_{T(x)}(s)+F_{T(y)}(t)]}, \qquad B(\alpha) = \frac{(e^\alpha - 1)\alpha}{(e^\alpha - 1)^2},$$

$$C(\alpha) = \frac{1}{\{1 + [(e^{\alpha F_{T(x)}(s)} - 1)(e^{\alpha F_{T(y)}(t)} - 1)/(e^\alpha - 1)]\}^2}.$$

Тогда

$$\lim_{\alpha\to 0} A(\alpha) = 1, \qquad \lim_{\alpha\to 0} B(\alpha) = 1,$$

и $\lim_{\alpha\to 0} C(\alpha)$ зависит от выражения в знаменателе:

$$\begin{aligned} &\lim_{\alpha\to 0} \frac{(e^{\alpha F_{T(x)}(s)} - 1)(e^{\alpha F_{T(y)}(t)} - 1)}{e^\alpha - 1} \\ &\quad = \lim_{\alpha\to 0} \frac{F_{T(x)}(s) e^{\alpha F_{T(x)}(s)}(e^{\alpha F_{T(x)}(t)} - 1) + F_{T(y)}(t) e^{\alpha F_{T(t)}(t)}(e^{\alpha F_{T(y)}(s)} - 1)}{e^\alpha} = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $\lim_{\alpha\to 0} C(\alpha) = 1$ и $\lim_{\alpha\to 0} f_{T(x)T(y)}(s,t) = f_{T(x)}(s)\, f_{T(y)}(t)$. Это означает, что с.в. $T(x)$ и $T(y)$ в пределе при $\alpha \to 0$ независимы. Приведем аналогичную интерпретацию функций плотности совместного распределения при $\alpha = 0$.

Пример 9.6.3. Пусть $F_{T(x)}(s) = s$, $0 < s \leqslant 1$, и $F_{T(y)}(t) = t$, $0 < t \leqslant 1$, в формуле (9.6.7), и пусть $T(xy) = \min[T(x), T(y)]$.

(a) Найдем функцию распределения с.в. $T(xy)$.

(b) Найдем функцию плотности с.в. $T(xy)$.

Решение. (a) Используя (9.3.2), получим

$$\begin{aligned} F_{T(xy)}(t) &= F_{T(x)}(t) + F_{T(y)}(t) - F_{T(x)T(y)}(t,t) \\ &= 2t - \frac{1}{\alpha}\ln\left[1 + \frac{(e^{\alpha t} - 1)^2}{e^\alpha - 1}\right], \qquad 0 < t < 1. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} f_{T(xy)}(t) &= \frac{d}{dt} F_{T(xy)}(t) = 2 - \frac{2\alpha(e^{\alpha t} - 1)\, e^{\alpha t}/(e^\alpha - 1)}{\alpha[1 + (e^{\alpha t} - 1)^2/(e^\alpha - 1)]} \\ &= 2 - \frac{2(e^{\alpha t} - 1)\, e^{\alpha t}}{(e^\alpha - 1) + (e^{\alpha t} - 1)^2}, \qquad 0 < t < 1. \end{aligned}$$

▼

9.7. Выплаты по договорам страхования и по аннуитетам

Обязательства по договорам страхования и по аннуитетам, рассматривавшиеся ранее для отдельных лиц, можно определить для статуса дожития (u). Это будет сделано в настоящем разделе. Мы также рассмотрим более сложные примеры, в которых аннуитет, выплачиваемый до потери статуса (u), отсрочен на период, определяемый потерей другого статуса (v).

9.7.1. Статусы дожития

Модели и формулы гл. 4 и 5 сохраняются и при замене статуса дожития отдельного лица (x) на статус дожития (u). Выражения для актуарных настоящих стоимостей, дисперсий и персентилей сохраняются и когда речь идет о случайной величине продолжительности предстоящего периода до потери статуса (u). Соотношения разд. 9.3 и 9.4 тогда можно использовать для получения соответствующих выражений в терминах актуарных функций отдельных лиц, входящих в определение статуса дожития.

Для договоров страхования с выплатой суммы размера 1 в конце года, в котором был потерян статус дожития, применима модель и формулы разд. 4.3. Таким образом, если с.в. K означает пошаговую продолжительность предстоящего периода сохранения статуса (u), то

- момент выплаты — это $K + 1$;
- настоящая стоимость выплаты в начальный момент равна $Z = v^{K+1}$;
- актуарная настоящая стоимость A_u равна

$$\mathbf{E}[Z] = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\mathbf{P}(K=k); \tag{9.7.1}$$

- $\mathbf{D}[Z] = {}^2A_u - (A_u)^2.$ (9.7.2)

В качестве иллюстрации рассмотрим договор страхования с выплатой размера 1, производящейся в конце года смерти последнего лица из пары (x), (y). Из формул (9.4.16) и (9.7.1) следует, что

$$A_{\overline{xy}} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\left({}_kp_x\, q_{x+k} + {}_kp_y\, q_{y+k} - {}_kp_{xy}\, q_{x+k:y+k}\right),$$

и это выражение можно использовать при интенсивностях начисления процента δ и 2δ, откуда с помощью формулы (9.7.2) получаются дисперсии.

Многочисленные формулы для дискретных аннуитетов из разд. 5.3 пригодны для случая, когда аннуитетные платежи сопряжены с сохранением статуса дожития[1]. Например, если мы заменим x на u, чтобы подчеркнуть, что с.в. K является продолжительностью предстоящего периода сохранения статуса дожития (u), то мы можем вновь установить следующие формулы для страхового аннуитета на срок n лет, сопряженного с (u):

$$Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{K+1}|}, & K = 0, 1, \ldots, n-1, \\ \ddot{a}_{\overline{n}|}, & K = n, n+1, \ldots, \end{cases}$$

[1] Далее соотношения из предыдущих разделов, переформулированные для статусов, имеют те же номера, что и исходные, но со «штрихом». — *Прим. ред.*

$$\ddot{a}_{u:\overline{n}|} = \mathbf{E}[Y] = \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{k+1}|}\, {}_{k|}q_u + \ddot{a}_{\overline{n}|}\, {}_np_u, \tag{9.7.3}$$

$$\ddot{a}_{u:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_kE_u = \sum_{k=0}^{n-1} v^k\, {}_kp_u, \tag{5.3.9$'$}$$

$$\ddot{a}_{u:\overline{n}|} = \frac{1}{d}(1 - A_{u:\overline{n}|}), \tag{5.3.12$'$}$$

$$\mathbf{D}[Y] = \frac{1}{d^2}\left[{}^2A_{u:\overline{n}|} - (A_{u:\overline{n}|})^2\right]. \tag{5.3.14$'$}$$

В качестве иллюстрации рассмотрим аннуитет с выплатами размера 1 в начале каждого года до тех пор, пока оба лица (x) и (y) живы, в течение последующих n лет. Это — аннуитет со статусом (xy) дожития всех лиц из рассматриваемой пары. Подставляя ${}_tp_{xy}$ (или ${}_tp_x\, {}_tp_y$, если продолжительности предстоящей жизни независимы) вместо ${}_tp_u$ в приведенные выше формулы, можно получить актуарную настоящую стоимость этого аннуитета. Для вычисления дисперсии, заданной формулой (5.3.14), можно использовать равенства

$$A_{xy:\overline{n}|} = 1 - d\ddot{a}_{xy:\overline{n}|} \quad \text{и} \quad {}^2A_{xy:\overline{n}|} = 1 - (2d - d^2)^2\ddot{a}_{xy:\overline{n}|},$$

а можно вычислить актуарные настоящие стоимости непосредственно.

Кроме того, мы можем установить соотношения между случайными величинами настоящих стоимостей для аннуитетов и договоров страхования, сопряженных со статусом дожития последнего лица в группе и статусом дожития всех лиц из группы. Из соотношения (9.4.13) имеем

$$v^{K(\overline{xy})+1} + v^{K(xy)+1} = v^{K(x)+1} + v^{K(y)+1}, \tag{9.7.4}$$

$$\ddot{a}_{\overline{K(\overline{xy})+1}|} + \ddot{a}_{\overline{K(xy)+1}|} = \ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|} + \ddot{a}_{\overline{K(y)+1}|}. \tag{9.7.5}$$

Взяв математическое ожидание от левой и правой частей формул (9.7.4) и (9.7.5), получаем

$$A_{\overline{xy}} + A_{xy} = A_x + A_y \quad \text{и} \quad \ddot{a}_{\overline{xy}} + \ddot{a}_{xy} = \ddot{a}_x + \ddot{a}_y.$$

Эти формулы позволяют выразить актуарные настоящие стоимости аннуитетов и договоров страхования, сопряженных со статусом дожития последнего лица в группе, в терминах аннуитетов и договоров страхования для отдельных лиц и статуса дожития всех лиц из группы. Заметим, что эти формулы выполняются для всех совместных распределений; независимости не требуется.

Теперь рассмотрим договоры страхования и аннуитеты в непрерывной модели. Если с.в. T продолжительности предстоящей жизни из разд. 4.2 и 5.2 рассматривать как продолжительность предстоящего периода $T(u)$ до момента потери статуса дожития (u), то формулы этих разделов для настоящих стоимостей, актуарных настоящих стоимостей, персентилей и дисперсий сохраняют силу и для договоров страхования и аннуитетов, сопряженных со статусом (u).

Для договора страхования, предполагающего выплату суммы размера 1 в момент потери статуса (u), настоящая стоимость на момент заключения договора, актуарная настоящая стоимость и дисперсия задаются формулами

$$Z = v^T, \qquad \bar{A}_u = \int_0^\infty v^t\, {}_tp_u\, \mu_u(t)\, dt, \qquad \mathbf{D}[Z] = {}^2\bar{A}_u - (\bar{A}_u)^2. \tag{4.2.6$'$}$$

Например, в частном случае страхования на случай смерти последнего из двух лиц (x) и (y) формула $(4.2.6')$ приобретет вид

$$\bar{A}_{\overline{xy}} = \int_0^\infty v^t\,{}_tp_{\overline{xy}}\,\mu_{\overline{xy}}(t)\,dt.$$

Согласно (9.4.7), эта величина равна

$$\bar{A}_{\overline{xy}} = \int_0^\infty v^t\big[{}_tp_x\,\mu(x+t) + {}_tp_y\,\mu(y+t) - {}_tp_{xy}\,\mu_{xy}(t)\big]\,dt.$$

Для непрерывного аннуитета, с выплатой размера 1 в год вплоть до момента T потери статуса (u) имеем

$$Y = \bar{a}_{\overline{T}|},$$

$$\bar{a}_u = \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{t}|}\,{}_tp_u\,\mu_u(t)\,dt \tag{5.2.3'}$$

$$= \int_0^\infty v^t\,{}_tp_u\,dt, \tag{5.2.4'}$$

$$\mathbf{D}[Y] = \frac{{}^2\bar{A}_u - (\bar{A}_u)^2}{\delta^2}. \tag{5.2.9'}$$

Тождество из теории сложных процентов

$$\delta\bar{a}_{\overline{T}|} + v^T = 1 \tag{5.2.7'}$$

имеет силу для $T = T(u)$ и обеспечивает связь между моделями аннуитетов и договоров страхования.

В качестве приложения рассмотрим аннуитет, выплачиваемый непрерывно с интенсивностью 1 в год, пока по крайней мере одно лицо, (x) или (y), живо. Это — аннуитет, сопряженный со статусом $(\overline{xy})$; таким образом, из приведенных выше формул при $T = T(\overline{xy})$ имеем

$$Y = \bar{a}_{\overline{T}|},$$

$$\bar{a}_{\overline{xy}} = \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{t}|}\big[{}_tp_x\,\mu(x+t) + {}_tp_y\,\mu(y+t) - {}_tp_{xy}\,\mu_{xy}(t)\big]\,dt = \int_0^\infty v^t\,{}_tp_{\overline{xy}}\,dt,$$

$$\mathbf{D}[Y] = \frac{{}^2\bar{A}_{\overline{xy}} - (\bar{A}_{\overline{xy}})^2}{\delta^2}.$$

Из формулы (9.4.3) следует, что

$$v^{T(\overline{xy})} + v^{T(xy)} = v^{T(x)} + v^{T(y)}, \tag{9.7.6}$$

$$\bar{a}_{\overline{T(\overline{xy})}|} + \bar{a}_{\overline{T(xy)}|} = \bar{a}_{\overline{T(x)}|} + \bar{a}_{\overline{T(y)}|}, \tag{9.7.7}$$

а из равенства (9.4.1) — что

$$v^{T(\overline{xy})}v^{T(xy)} = v^{T(x)}v^{T(y)}. \tag{9.7.8}$$

Эти тождества можно использовать для получения соотношений между актуарными настоящими стоимостями, дисперсиями и ковариациями для аннуитетов и договоров страхования, сопряженных с различными статусами. Например, взяв математическое ожидание левой и правой частей в (9.7.6) и (9.7.7), получим

$$\bar{A}_{\overline{xy}} + \bar{A}_{xy} = \bar{A}_x + \bar{A}_y, \tag{9.7.9}$$

$$\bar{a}_{\overline{xy}} + \bar{a}_{xy} = \bar{a}_x + \bar{a}_y. \tag{9.7.10}$$

Таким же способом, как была выведена формула

$$\mathbf{Cov}[T(\overline{xy}), T(xy)] = \mathbf{Cov}[T(x), T(y)] + (\bar{e}_x - \bar{e}_{xy})(\bar{e}_y - \bar{e}_{xy}),$$

можно показать, что

$$\mathbf{Cov}(v^{T(\overline{xy})}, v^{T(xy)}) = \mathbf{Cov}(v^{T(x)}, v^{T(y)}) + (\bar{A}_x - \bar{A}_{xy})(\bar{A}_y - \bar{A}_{xy}). \tag{9.7.11}$$

Оба сомножителя во втором слагаемом в правой части равенства (9.7.11) неположительны, так что оно неотрицательно и равно 0 лишь в тривиальном случае, когда $\bar{A}_x$ или $\bar{A}_y$ равняется $\bar{A}_{xy}$.

Актуарная настоящая стоимость непрерывного аннуитета, сопряженного со статусом $(\overline{xy})$, где совместная функция дожития задана формулой (9.6.5), поскольку (x) и (y) подвержены возмущению, может быть переписана в форме текущих платежей:

$$\bar{a}_{xy} = \int_0^\infty e^{-(\delta+\lambda)t} s_{T^*(x)}(t)\,dt + \int_0^\infty e^{-(\delta+\lambda)t} s_{T^*(y)}(t)\,dt$$

$$- \int_0^\infty e^{-(\delta+\lambda)t} s_{T^*(x)}(t)\, s_{T^*(y)}(t)\,dt. \tag{9.7.12}$$

Формула (9.7.12) показывает, как параметр возмущения λ в некоторых расчетах может сочетаться с интенсивностью начисления процента.

Пример 9.7.1. (a) Перепишем формулу (9.7.9) для актуарной настоящей стоимости договора страхования на срок n лет с выплатой размера 1 в момент смерти последнего лица из пары (x) и (y), если эта смерть произойдет до момента времени n. Если хотя бы одно лицо из этой пары переживет момент n, то никаких выплат не производится.

(b) Используем эту формулу, чтобы вычислить актуарную настоящую стоимость страхования на срок 5 лет с выплатой на случай смерти последнего из двух лиц из примера 9.2.1 при $\delta = 0{,}05$.

Решение. (a) Переписав формулу (9.7.6) для случайных величин, описывающих договор страхования на срок n лет, а затем взяв математическое ожидание от обеих частей этого равенства, получим

$$\bar{A}^{\,1}_{\overline{xy}:\overline{n}|} = \bar{A}^{\,1}_{x:\overline{n}|} + \bar{A}^{\,1}_{y:\overline{n}|} - \bar{A}^{\,1}_{xy:\overline{n}|}.$$

Символ $\bar{A}^{\,1}_{xy:\overline{n}|}$ представляет актуарную настоящую стоимость страхования на срок n лет на случай потери статуса дожития обоих лиц из рассматриваемой пары, если она произошла в течение n лет.

(b) В примере 9.2.1 каждая из с.в. $T(x)$ и $T(y)$ имеет функцию плотности $f_T(t) = 0{,}0002\,[t^3 + (10-t)^3]$, $0 \leqslant t < 10$. Следовательно,

$$\bar{A}^{\,1}_{x:\overline{5}|} = \bar{A}^{\,1}_{y:\overline{5}|} = \int_0^5 e^{-0{,}05t}\{0{,}0002[t^3 + (10-t)^3]\}\,dt = 0{,}4563.$$

Из примера 9.3.3 мы знаем, что $f_{T(xy)}(t) = 0{,}0004(10-t)^3$, $0 < t < 10$, так что

$$\bar{A}_{\overline{xy}:\overline{5|}}^{\;1} = \int_0^5 e^{-0{,}05t}[0{,}0004(10-t)^3]\,dt = 0{,}8614.$$

Используя результат п. (a), получим

$$\bar{A}_{xy:\overline{5|}}^{\;1} = 2(0{,}4563) - 0{,}8614 = 0{,}0512.$$ ▼

9.7.2. Специальные аннуитеты для двух лиц

В этом разделе мы рассмотрим пример специальных аннуитетов, величина выплат которых зависит от дожития двух лиц.

Пример 9.7.2. Аннуитет выплачивается непрерывно с интенсивностью
- 1 в год, если оба лица (x) и (y) живы;
- 2/3 в год, если одно лицо живо, а другое умерло. Выразим

(a) случайную величину настоящей стоимости аннуитета,

(b) актуарную настоящую стоимость аннуитета,

(c) дисперсию случайной величины из п. (a) в предположении независимости с.в. $T(x)$ и $T(y)$.

Решение. (a) Этот аннуитет является комбинацией аннуитета, выплачиваемого с интенсивностью 2/3 в год, пока живо по крайней мере одно лицо (x) или (y) (до момента времени $T(\overline{xy})$), и аннуитета, выплачиваемого с интенсивностью 1/3 в год до тех пор, пока оба лица живы (до момента времени $T(xy)$). Настоящая стоимость выплат — это

$$Z = \frac{2}{3}\,\bar{a}_{\overline{T(\overline{xy})|}} + \frac{1}{3}\,\bar{a}_{\overline{T(xy)|}}.$$

(b) Актуарная настоящая стоимость равна

$$E[Z] = \frac{2}{3}\,\bar{a}_{\overline{xy}} + \frac{1}{3}\,\bar{a}_{xy}.$$

Подставляя в эту формулу выражение для $\bar{a}_{\overline{xy}}$, полученное из (9.7.10), приходим к равенству

$$E[Z] = \frac{2}{3}\,\bar{a}_x + \frac{2}{3}\,\bar{a}_y - \frac{1}{3}\,\bar{a}_{xy}.$$

С другой стороны, из (5.2.3′) следует, что

$$E[Z] = \frac{2}{3}\int_0^\infty v^t\,{}_tp_{\overline{xy}}\,dt + \frac{1}{3}\int_0^\infty v^t\,{}_tp_{xy}\,dt.$$

Тогда, рассматривая три взаимоисключающих сочетания дожития отдельных лиц, если статус $(\overline{xy})$ сохраняется до момента времени t, мы можем записать

$${}_tp_{\overline{xy}} = {}_tp_{xy} + ({}_tp_x - {}_tp_{xy}) + ({}_tp_y - {}_tp_{xy}).$$

Подставляя это выражение в первый интеграл и складывая полученный результат со вторым интегралом, получим

$$E[Z] = \int_0^\infty v^t\,{}_tp_{xy}\,dt + \frac{2}{3}\int_0^\infty v^t({}_tp_x - {}_tp_{xy})\,dt + \frac{2}{3}\int_0^\infty v^t({}_tp_y - {}_tp_{xy})\,dt.$$

Это выражение для $E[Z]$ можно получить, непосредственно рассматривая три указанных случая. Первое его слагаемое является актуарной настоящей стоимостью выплат с интенсивностью 1 в год до тех пор, пока оба лица (x) и (y) живы. Второе слагаемое является актуарной настоящей стоимостью выплат с интенсивностью 2/3 в год в те моменты времени t, в которые живо (с вероятностью ${}_tp_x$) лицо (x), но не оба лица (с вероятностью ${}_tp_{xy}$). Третье слагаемое имеет аналогичную интерпретацию, лишь x и y меняются местами.

(c)
$$\mathbf{D}[Z] = \mathbf{D}\left[\frac{2}{3}\,\bar{a}_{\overline{T(\overline{xy})}|} + \frac{1}{3}\,\bar{a}_{\overline{T(xy)}|}\right]$$
$$= \frac{4}{9}\,\mathbf{D}[\bar{a}_{\overline{T(\overline{xy})}|}] + \frac{1}{9}\,\mathbf{D}[\bar{a}_{\overline{T(xy)}|}] + \frac{4}{9}\,\mathbf{Cov}(\bar{a}_{\overline{T(\overline{xy})}|}, \bar{a}_{\overline{T(xy)}|}).$$

Но, согласно упр. 9.23, для независимых с.в. $T(x)$ и $T(y)$

$$\mathbf{Cov}(\bar{a}_{\overline{T(\overline{xy})}|}, \bar{a}_{\overline{T(xy)}|}) = \frac{\mathbf{Cov}(v^{T(\overline{xy})}, v^{T(xy)})}{\delta^2} = \frac{(\bar{A}_x - \bar{A}_{xy})(\bar{A}_y - \bar{A}_{xy})}{\delta^2}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{D}[Z] = \frac{\frac{4}{9}[\,{}^2\bar{A}_{\overline{xy}} - (\bar{A}_{\overline{xy}})^2] + \frac{1}{9}[\,{}^2\bar{A}_{xy} - (\bar{A}_{xy})^2] + \frac{4}{9}(\bar{A}_x - \bar{A}_{xy})(\bar{A}_y - \bar{A}_{xy})}{\delta^2}.$$ ▼

9.7.3. Реверсивные аннуитеты

Реверсивный аннуитет выплачивается в период, когда сохраняется статус (u), но лишь после потери второго статуса (v). По сути это — отсроченный страховой аннуитет со случайным периодом отсрочки, равным времени сохранения второго статуса. Это действительно обобщение отсроченного страхового аннуитета, так как если статус (v) представляет собой статус, сохраняющийся до истечения фиксированного срока n, то реверсивный аннуитет сводится к аннуитету с периодом отсрочки n лет. Если (u) сохраняется до истечения фиксированного срока, то реверсивный аннуитет сводится к одному из видов страхования — страхованию на случай потери кормильца, изучаемому в гл. 17. Стандартное обозначение для актуарной настоящей стоимости такого аннуитета — это $a_{v|u}$. Добавочные символы указывают частоту выплат и то, каким образом они выплачиваются. Это понятие полезно для выражения более сложных аннуитетов через аннуитеты для отдельных лиц и аннуитеты, сопряженные со статусом дожития всех лиц из группы (см. пример 9.7.3). В настоящем разделе мы будем изучать случайные величины настоящих стоимостей для реверсивных двусторонних аннуитетов.

Начнем с непрерывного аннуитета, выплачиваемого с интенсивностью 1 в год лицу (y) после смерти лица (x). Настоящая стоимость в момент времени 0, обозначаемая через Z, имеет вид

$$Z = \begin{cases} {}_{T(x)|}\bar{a}_{\overline{T(y)-T(x)}|}, & T(x) \leqslant T(y), \\ 0, & T(x) > T(y). \end{cases} \tag{9.7.13}$$

Это выражение можно переписать так:

$$Z = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T(y)}|} - \bar{a}_{\overline{T(x)}|}, & T(x) \leqslant T(y), \\ 0, & T(x) > T(y), \end{cases} \tag{9.7.14}$$

или так:

$$Z = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T(y)}|} - \bar{a}_{\overline{T(x)}|}, & T(x) \leqslant T(y), \\ \bar{a}_{\overline{T(y)}|} - \bar{a}_{\overline{T(y)}|}, & T(x) > T(y), \end{cases} \tag{9.7.15}$$

что приводит к

$$Z = \bar{a}_{\overline{T(y)}|} - \bar{a}_{\overline{T(xy)}|}, \tag{9.7.16}$$

т. е. к формуле

$$\bar{a}_{x|y} = \mathrm{E}[Z] = \mathrm{E}[\bar{a}_{\overline{T(y)}|}] - \mathrm{E}[\bar{a}_{\overline{T(xy)}|}] = \bar{a}_y - \bar{a}_{xy}. \tag{9.7.17}$$

Формулы (9.7.16) и (9.7.17) выполняются для произвольных статусов (u) и (v). Например,

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|\,|y} = \bar{a}_y - \bar{a}_{xy:\overline{n}|}, \qquad \bar{a}_{x|y:\overline{n}|} = \bar{a}_{y:\overline{n}|} - \bar{a}_{xy:\overline{n}|}.$$

Заметим, что формула (9.7.17) справедлива и для зависимых случайных величин продолжительности предстоящей жизни.

Пример 9.7.3. Рассчитаем актуарную настоящую стоимость аннуитета, выплачиваемого непрерывно на следующих условиях:

1. с интенсивностью 1 в год гарантированно до момента времени n,

2. с интенсивностью 1 в год после момента времени n, пока оба лица (x) и (y) живы,

3. с интенсивностью 3/4 в год после момента времени n, если лицо (x) живо, а лицо (y) умерло,

4. с интенсивностью 1/2 в год после момента времени n, если лицо (y) живо, а лицо (x) умерло.

Решение. Для того чтобы выписать актуарную настоящую стоимость выплат по этому аннуитету в терминах аннуитетов для отдельных лиц и аннуитетов, сопряженных со статусами дожития всех лиц из группы, используем понятие реверсивного аннуитета.

Условие 1 приводит к аннуитету с гарантированным сроком выплат n лет: $\bar{a}_{\overline{n}|}$.

Условие 2 приводит к отсроченному на n лет аннуитету, сопряженному со статусом дожития двух лиц (xy):

$${}_{n|}\bar{a}_{xy} = \bar{a}_{xy} - \bar{a}_{xy:\overline{n}|}.$$

Условие 3 приводит к реверсивному аннуитету, выплачиваемому лицу (x) с интенсивностью 3/4 в год, причем выплата начинается по истечении срока $\overline{y:\overline{n}|}$:

$$\frac{3}{4}\,\bar{a}_{\overline{y:\overline{n}|}|x} = \frac{3}{4}\left(\bar{a}_x - \bar{a}_{x:(\overline{y:\overline{n}|})}\right) = \frac{3}{4}\left(\bar{a}_x - \bar{a}_{xy} - \bar{a}_{x:\overline{n}|} + \bar{a}_{xy:\overline{n}|}\right).$$

Условие 4 приводит к реверсивному аннуитету с интенсивностью 1/2 в год, выплата которого лицу (y) начинается после момента $\overline{x:\overline{n}|}$:

$$\frac{1}{2}\,\bar{a}_{\overline{x:\overline{n}|}|y} = \frac{1}{2}\left(\bar{a}_y - \bar{a}_{xy} - \bar{a}_{y:\overline{n}|} + \bar{a}_{xy:\overline{n}|}\right).$$

Складывая результаты для этих четырех случаев, получаем искомую актуарную настоящую стоимость

$$\bar{a}_{\overline{n}|} + \frac{3}{4}\,\bar{a}_x + \frac{1}{2}\,\bar{a}_y - \frac{1}{4}\,\bar{a}_{xy} - \frac{3}{4}\,\bar{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{1}{2}\,\bar{a}_{y:\overline{n}|} + \frac{1}{4}\,\bar{a}_{xy:\overline{n}|}.$$ ▼

9.8. Вычисления: специальные предположения о смертности

В разд. 9.7 изучался ряд актуарных настоящих стоимостей договоров страхования и аннуитетов, связанных с двумя случайными величинами продолжительности предстоящей жизни. Такие исследования обычно приводят к интегралу или к сумме. В настоящем разделе мы рассмотрим ряд предположений о распределении с.в. $T(u)$, которые упрощают вычисление таких интегралов или сумм.

9.8.1. Законы Гомперца и Мейкема

Здесь мы рассмотрим предположение о том, что смертность подчиняется закону Мейкема или его важному частному случаю, закону Гомперца, а также следствия из этого предположения для расчетов актуарных настоящих стоимостей в контексте статусов для группы лиц. Мы будем считать, что случайные величины продолжительности предстоящей жизни независимы.

Начнем с предположения, что смертность для каждого лица подчиняется закону Гомперца $\mu(x) = Bc^x$. Мы ищем статус дожития (w) для отдельного лица, такой, что интенсивность потери этого статуса совпадает с интенсивностью потери статуса (xy) дожития обоих лиц для всех $t \geqslant 0$. Рассмотрим

$$\mu_{xy}(s) = \mu(w+s), \qquad s \geqslant 0, \tag{9.8.1}$$

т. е.

$$Bc^{x+s} + Bc^{y+s} = Bc^{w+s},$$

или

$$c^x + c^y = c^w, \tag{9.8.2}$$

что определяет искомый возраст w. Отсюда следует, что для $t > 0$

$${}_tp_w = \exp\left[-\int_0^t \mu(w+s)\,ds\right] = \exp\left[-\int_0^t \mu_{xy}(s)\,ds\right] = {}_tp_{xy}\,. \tag{9.8.3}$$

Таким образом, в случае возраста w, определенного формулой (9.8.2), все вероятности, математические ожидания и дисперсии для статуса дожития обоих лиц (xy) равны соответствующим величинам для одного лица (w). Таким образом, при задании величин в форме таблицы отпадает необходимость в двумерном массиве. В этом случае можно ограничиться одномерным массивом, но поскольку w обычно не целое число, для определения соответствующих значений к этому массиву применяется интерполяция.

Если предполагать, что смертность каждого лица следует закону Мейкема (см. табл. 3.6), то процедура становится более сложной. Интенсивность потери статуса дожития обоих лиц равна

$$\mu_{xy}(s) = \mu(x+s) + \mu(y+s) = 2A + Bc^s(c^x + c^y). \tag{9.8.4}$$

Мы не можем подобрать статус для одного лица, как выше, из-за слагаемого $2A$. Заменим (xy) другим статусом дожития обоих лиц в паре, (ww). Тогда

$$\mu_{ww}(s) = 2\mu(w+s) = 2(A + Bc^s c^w), \tag{9.8.5}$$

и мы выбираем такое w, что

$$2c^w = c^x + c^y. \tag{9.8.6}$$

В отличие от закона Гомперца, где одномерный массив основывается на актуарных функциях для одного лица, этот одномерный массив основывается на актуарных функциях для статуса дожития двух лиц одного возраста (ww).

Пример 9.8.1. Используя формулу (3.7.1) и значения величины $\ddot{a}_{xx}$, определяемые по Иллюстративной таблице смертности (приложение 2А) и считая процентную ставку равной 6%, вычислим значения величины $\ddot{a}_{60:70}$. Сравним полученный результат со значениями $\ddot{a}_{60:70}$ из таблицы для $\ddot{a}_{x:x+10}$.

Решение. Поскольку $c = 10^{0,04}$ и $c^{60} + c^{70} = 2c^w$, мы получаем $w = 66{,}11276$. Тогда линейная интерполяция дает $\ddot{a}_{60:70} = 0{,}88724\ddot{a}_{66:66} + 0{,}11276\ddot{a}_{67:67} = 7{,}55637$. Значение из таблицы для $\ddot{a}_{x:x+10}$ равно 7,55633. ▼

9.8.2. Равномерное распределение

Мы сохраняем предположение о независимости и дополнительно предполагаем, что моменты смерти в каждом годичном возрастном интервале и для каждого лица из группы равномерно распределены. При этом дополнительном предположении мы можем вычислить актуарные настоящие стоимости аннуитетов, выплачиваемых чаще, чем раз в год, и страховых выплат, осуществляемых в момент смерти.

Из табл. 3.6 следует, что в предположении равномерности распределения моментов смерти в каждом годичном возрастном интервале ${}_tp_x = 1 - tq_x$ и

$$ {}_tp_x\, \mu(x+t) = \frac{d}{dt}\,(1 - {}_tp_x) = q_x. \tag{9.8.7}$$

Если мы применим это предположение к статусу дожития обоих лиц (xy) при независимых с.в. $T(x)$ и $T(y)$, то получим для $0 \leqslant t \leqslant 1$

$$\begin{aligned} {}_tp_{xy}\, \mu_{xy}(t) &= {}_tp_x\, {}_tp_y[\mu(x+t) + \mu(y+t)] \\ &= {}_tp_y\, {}_tp_x\, \mu(x+t) + {}_tp_x\, {}_tp_y\, \mu(y+t) = (1 - tq_y)q_x + (1 - tq_x)q_y \\ &= q_x + q_y - q_xq_y + (1-2t)q_xq_y = q_{xy} + (1-2t)q_xq_y. \end{aligned} \tag{9.8.8}$$

Согласно формуле (4.4.1), актуарная настоящая стоимость страховой выплаты, сопряженной со статусом дожития (u), может быть записана в виде

$$\bar{A}_u = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\, {}_kp_u \int_0^1 (1+i)^{1-s} \frac{{}_{k+s}p_u}{{}_kp_u}\, \mu_u(k+s)\, ds.$$

Используя (9.8.8), можно переписать это равенство для статуса дожития обоих лиц (xy) в виде

$$\begin{aligned} \bar{A}_{xy} &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\, {}_kp_{xy} \left[q_{x+k:y+k} \int_0^1 (1+i)^{1-s}\, ds + q_{x+k}\, q_{y+k} \int_0^1 (1+i)^{1-s}(1-2s)\, ds \right] \\ &= \frac{i}{\delta} A_{xy} + \frac{i}{\delta}\left(1 - \frac{2}{\delta} + \frac{2}{i}\right) \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\, {}_kp_{xy}\, q_{x+k}\, q_{y+k}. \end{aligned} \tag{9.8.9}$$

Из формулы (4.4.2) следует, что первое слагаемое в правой части этого соотношения равно $\bar{A}_{xy}$, если продолжительность $T(xy)$ периода сохранения статуса (xy) равномерно распределена в каждом годичном интервале. Это не выполняется для $T(xy) = \{\min[T(x), T(y)]\}$, где с.в. $T(x)$ и $T(y)$ независимы и равномерно распределены в каждом таком интервале. В этом случае условное распределение с.в. $T(xy)$ при условии, что $T(x)$ и $T(y)$ лежат в различных годичных интервалах, также равномерно в каждом годичном интервале предстоящего периода сохранения статуса. Однако если $T(x)$ и $T(y)$ лежат внутри одного и того же интервала, то масса распределения их минимума смещена к началу этого интервала (см. упр. 9.38). Наличие такого смещения приводит к необходимости во втором слагаемом в правой части равенства (9.8.9) для покрытия дополнительных ожидаемых расходов по более ранним страховым случаям в эти годы. Это второе слагаемое, которое является произведением коэффициента, зависящего от процентной ставки и приблизительно равного

$i/6$ (см. упр. 9.39), и актуарной настоящей стоимости страховых выплат на случай смерти обоих лиц в одном и том же году, очень мало. Для актуарной настоящей стоимости $\bar{A}_{xy}$ обычно берут приближенное значение, пренебрегая малым корректирующим слагаемым и, тем самым, упрощая формулу (9.8.9) до приближенного равенства

$$\bar{A}_{xy} \cong \frac{i}{\delta} A_{xy}, \tag{9.8.10}$$

которое является точным, как отмечалось выше, если с.в. $T(xy)$ равномерно распределена в каждом годичном интервале предстоящего периода сохранения статуса.

Для вычисления $\bar{a}_{xy}$, заменяя статус (x) на (xy), мы получаем из формулы (5.2.8)

$$\bar{a}_{xy} = \frac{1}{\delta}(1 - \bar{A}_{xy}),$$

и, подставляя сюда выражение из (9.8.9), имеем

$$\bar{a}_{xy} = \frac{1}{\delta}\left\{1 - \frac{i}{\delta}\left[A_{xy} + \left(1 - \frac{2}{\delta} + \frac{2}{i}\right)\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\,{}_kp_{xy}\,q_{x+k}\,q_{y+k}\right]\right\}.$$

Теперь в силу формулы (5.3.7) для статуса (xy) мы заменим $\bar{A}_{xy}$ на $1 - d\ddot{a}_{xy}$ и используем (5.4.12) и (5.4.13), чтобы получить

$$\bar{a}_{xy} = [\alpha(\infty)\ddot{a}_{xy} - \beta(\infty)] - \frac{i}{\delta^2}\left(1 - \frac{2}{\delta} + \frac{2}{i}\right)\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\,{}_kp_{xy}\,q_{x+k}\,q_{y+k}. \tag{9.8.11}$$

Формула (9.8.11) следует из предположения, что с.в. $T(x)$ и $T(y)$ независимы и равномерно распределены в каждом будущем годичном интервале. Если мы предположим, что с.в. $T(xy)$ сама имеет равномерное распределение в каждом будущем годичном интервале, то для непрерывного аналога равенства (5.4.11) при $m = \infty$ мы сразу же получим

$$\bar{a}_{xy} = \alpha(\infty)\ddot{a}_{xy} - \beta(\infty). \tag{9.8.12}$$

Формула (9.8.12) отличается от (9.8.11) небольшой величиной, которая аппроксимирует произведение коэффициента $i/(6\delta)$ на актуарную настоящую стоимость страховых выплат, если оба лица умрут в одном и том же году.

Для того чтобы использовать тот же подход для вычисления актуарной настоящей стоимости аннуитета пренумерандо с выплатами m раз в год, нам нужно найти выражение для $\bar{A}_{xy}^{(m)}$ в предположении равномерности распределения моментов смерти для каждого лица в каждом годичном возрастном интервале. По аналогии с непрерывным случаем мы начнем с

$$A_{xy}^{(m)} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k\,{}_kp_{xy} \sum_{j=1}^{m} v^{j/m}\left({}_{(j-1)/m}p_{x+k:y+k} - {}_{j/m}p_{x+k:y+k}\right). \tag{9.8.13}$$

В упр. 9.40 это выражение в предположении, что с.в. $T(x)$ и $T(y)$ независимы и равномерно распределены в каждом годичном возрастном интервале, сводится к виду

$$A_{xy}^{(m)} = \frac{i}{i^{(m)}} A_{xy} + \frac{i}{i^{(m)}}\left(1 + \frac{1}{m} - \frac{2}{d^{(m)}} + \frac{2}{i}\right)\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\,{}_kp_{xy}\,q_{x+k}\,q_{y+k}\,. \tag{9.8.14}$$

При $m \to \infty$ члены правой части формулы (9.8.14) стремятся к соответствующим членам в (9.8.9). Для того чтобы интерпретировать эту правую часть, мы по аналогии с (9.8.9) замечаем, что первое слагаемое является обычной аппроксимацией для $A_{xy}^{(m)}$ и в точности равно этой величине, если $T(xy)$ равномерно распределена в каждом годичном интервале. Тогда

$$\frac{i}{i^{(m)}}\left(1+\frac{1}{m}-\frac{2}{d^{(m)}}+\frac{2}{i}\right) \cong \frac{m^2-1}{6m^2}\, i,$$

что меньше, чем $i/6$.

Подставляя (9.8.14) в формулу (5.4.4), переформулированную для статуса (xy), и заменяя $\bar{A}_{xy}$ на $1 - d\ddot{a}_{xy}$, получим формулу для $\ddot{a}_{xy}^{(m)}$, которая аналогична формуле (9.8.11). Если пренебречь вторым слагаемым в (9.8.14), то формула для $\ddot{a}_{xy}^{(m)}$ сведется к

$$\ddot{a}_{xy}^{(m)} = \alpha(m)\ddot{a}_{xy} - \beta(m). \tag{9.8.15}$$

Вновь согласно (5.4.11), это приближенное равенство является точным в предположении, что распределение с.в. $T(xy)$ равномерно в каждом годичном интервале предстоящего периода сохранения статуса.

9.9. Актуарные функции, в которых учитывается очередность наступления моментов смерти

В этом разделе мы изучим договоры страхования, выплаты по которым зависят не только от времени потери статуса, но и от очередности, в которой умирают лица, образующие рассматриваемую группу. В этом разделе будет предполагаться, что функция совместного распределения с.в. $T(x)$ и $T(y)$ непрерывна. Это предположение делается, чтобы исключить модель с возмущением, рассмотренную в разд. 9.6.1.

Мы начнем с вычисления вероятности того, что лицо (x) умрет прежде лица (y) и до истечения n лет с настоящего момента времени. В Международной системе актуарных обозначений эта вероятность обозначается через ${}_nq_{\overset{1}{x}y}$, где 1 над x указывает на то, что эта вероятность относится к событию «лицо (x) умрет прежде лица (y)», а n показывает, что это событие происходит не позже, чем через n лет. Тогда ${}_nq_{\overset{1}{x}y}$ равна двойному интегралу от функции плотности совместного распределения с.в. $T(x)$ и $T(y)$ по набору таких исходов, что $T(x) \leqslant T(y)$ и $T(x) \leqslant n$:

$$\begin{aligned}
{}_nq_{\overset{1}{x}y} &= \int_0^n \int_s^\infty f_{T(x)T(y)}(s,t)\,dt\,ds = \int_0^n \int_s^\infty f_{T(y)|T(x)}(t\,|\,s)\,dt\, f_{T(x)}(s)\,ds \\
&= \int_0^n \mathbf{P}[T(y) \geqslant s\,|\,T(x) = s] f_{T(x)}(s)\,ds \\
&= \int_0^n \mathbf{P}[T(y) \geqslant s\,|\,T(x) = s]\, {}_sp_x\, \mu(x+s)\,ds.
\end{aligned} \tag{9.9.1}$$

В случае независимости имеет место равенство $\mathbf{P}[T(y) \geqslant s\,|\,T(x) = s] = {}_sp_y$, так что

$${}_nq_{\overset{1}{x}y} = \int_0^n {}_sp_y\, {}_sp_x\, \mu(x+s)\,ds. \tag{9.9.2}$$

Интерпретация этого выражения состоит из трех моментов. Во-первых, так как s является моментом смерти лица (x), вероятность ${}_sp_x\,{}_sp_y$ показывает, что оба лица, (x) и (y), доживут до момента времени s. Во-вторых, $\mu(x+s)$ является вероятностью того, что лицо (x), которому сейчас $x+s$ лет, умрет в интервале $(s, s+ds)$. В-третьих, вероятности суммируются для всех моментов времени s между 0 и n.

Пример 9.9.1. Вычислим ${}_5q^{\,1}_{xy}$ для лиц из примера 9.2.1.

Решение. Из формулы (9.9.1) получаем

$$ {}_5q^{\,1}_{xy} = \int_0^5 \int_s^{10} 0{,}0006(t-s)^2\,dt\,ds = \int_0^5 0{,}0002(10-s)^3\,ds = 0{,}46875. \qquad \blacktriangledown $$

Теперь мы можем вычислить вероятность того, что лицо (y) умрет после лица (x), но до окончания n-летнего периода, начиная с нынешнего момента времени. Эта вероятность обозначается через ${}_nq_{xy}^{\;\;2}$, где 2 над y показывает, что лицо (y) умрет вторым, а n — то, что это произошло в течение n лет. Для того чтобы вычислить ${}_nq_{xy}^{\;\;2}$, проинтегрируем функцию плотности совместного распределения с.в. $T(x)$ и $T(y)$ для события $\{0 \leqslant T(x) \leqslant T(y) \leqslant n\}$:

$$ \begin{aligned} {}_nq_{xy}^{\;\;2} &= \int_0^n \int_0^t f_{T(x)T(y)}(s,t)\,ds\,dt = \int_0^n \int_0^t f_{T(y)|T(x)}(s\,|\,t)\,dt\, f_{T(y)}(t)\,dt \\ &= \int_0^n \mathbf{P}[T(x) \leqslant t\,|\,T(y) = t] f_{T(y)}(t)\,dt \\ &= \int_0^n \mathbf{P}[T(x) \leqslant t\,|\,T(y) = t]\,{}_tp_y\,\mu(y+t)\,dt. \end{aligned} \tag{9.9.3} $$

В предположении независимости вновь имеем

$$ {}_nq_{xy}^{\;\;2} = \int_0^n {}_tq_x\,{}_tp_y\,\mu(y+t)\,dt = {}_nq_y - {}_nq_{xy}^{\;\;1}. \tag{9.9.4} $$

Если изменить порядок интегрирования в (9.9.3), то получим

$$ \begin{aligned} {}_nq_{xy}^{\;\;2} &= \int_0^n \int_s^n f_{T(x)T(y)}(s,t)\,dt\,ds = \int_0^n \int_s^n f_{T(y)|T(x)}(t\,|\,s)\,dt\, f_{T(x)}(s)\,ds \\ &= \int_0^n \mathbf{P}[s \leqslant T(y) \leqslant n\,|\,T(x) = s]\,{}_sp_x\,\mu(x+s)\,ds. \end{aligned} $$

В предположении о независимости с.в. $T(x)$ и $T(y)$ последнее выражение можно переписать в виде

$$ {}_nq_{xy}^{\;\;2} = \int_0^n ({}_sp_y - {}_np_y)\,{}_sp_x\,\mu(x+s)\,ds = {}_nq^{\,1}_{xy} - {}_np_y\,{}_nq_x. \tag{9.9.5} $$

Здесь подынтегральное выражение интерпретируется как вероятность того, что лицо (x) умрет в момент времени s при $0 < s < n$, а лицо (y) доживет до момента времени s, но не до момента n. Теперь можно записать

$$ {}_nq^{\,1}_{xy} = {}_nq_{xy}^{\;\;2} + {}_np_y\,{}_nq_x. $$

Отсюда следует неравенство

$$ {}_nq^{\,1}_{xy} \geqslant {}_nq_{xy}^{\;\;2}. $$

Аналогичные интегралы могут быть записаны для актуарных настоящих стоимостей страховых выплат по договорам, учитывающим порядок наступления моментов смерти, но некоторые из них нельзя упростить до такой степени. Рассмотрим актуарную настоящую стоимость страховых выплат размера 1 в момент смерти лица (x) при условии, что лицо (y) еще живо. Эта актуарная настоящая стоимость, обозначаемая через $\bar{A}^{\,1}_{xy}$, есть $E[Z]$, где

$$Z = \begin{cases} v^{T(x)}, & T(x) \leqslant T(y), \\ 0, & T(x) > T(y). \end{cases}$$

Поскольку Z является функцией с.в. $T(x)$ и $T(y)$, ее математическое ожидание можно получить, используя функцию плотности совместного распределения с.в. $T(x)$ и $T(y)$:

$$\begin{aligned} \bar{A}^{\,1}_{xy} &= \int_0^\infty \int_s^\infty v^s f_{T(x)T(y)}(s,t)\,dt\,ds = \int_0^\infty \int_s^\infty v^s f_{T(x)|T(y)}(t\,|\,s)\,dt\,f_{T(x)}(s)\,ds \\ &= \int_0^\infty \left[\int_s^\infty f_{T(y)|T(x)}(t\,|\,s)\,dt\right] v^s\,{}_sp_x\,\mu(x+s)\,ds. \end{aligned} \tag{9.9.6}$$

При независимости с.в. $T(x)$ и $T(y)$ продолжительностей предстоящей жизни можно упростить формулу (9.9.6), записав ее с помощью Международной системы актуарных обозначений в виде

$$\bar{A}^{\,1}_{xy} = \int_0^\infty \left[\int_s^\infty {}_tp_y\,\mu(y+t)\,dt\right] v^s\,{}_sp_x\,\mu(x+s)\,ds = \int_0^\infty v^s\,{}_sp_y\,{}_sp_x\,\mu(x+s)\,ds. \tag{9.9.7}$$

Последнее выражение можно интерпретировать следующим образом: если лицо (x) умрет в какой-либо будущий момент времени s, а лицо (y) будет еще живо, то будет произведена выплата размера 1, имеющая настоящую стоимость v^s. Если $\delta = 0$, то $\bar{A}^{\,1}_{xy} = {}_\infty q^{\,1}_{xy}$.

Пример 9.9.2. Выведем формулу актуарной настоящей стоимости выплаты размера 1000 в момент смерти лица (x) при условии, что лицо (y) еще живо, для лиц из примера 9.2.3, если $\delta = 0{,}04$.

Решение. Поскольку с.в. $T(x)$ и $T(y)$ в примере 9.2.3 независимы, можно подставить полученные там результаты в формулу (9.9.7) и получить

$$\begin{aligned} 1000\,\bar{A}^{\,1}_{xy} &= 1000 \int_0^\infty e^{-0{,}04s}\,{}_sp_y\,{}_sp_x\,\mu(x+s)\,ds \\ &= 1000 \int_0^{10} e^{-0{,}04s} 0{,}01(10-s)^2 0{,}02(10-s)\,ds \\ &= 0{,}2 \int_0^{10} e^{-0{,}04s}(10-s)^3\,ds = 462{,}52. \end{aligned}$$ ▼

Пример 9.9.3. (a) Выведем простую интегральную формулу актуарной настоящей стоимости страховой выплаты размера 1 в момент смерти лица (y), если ей предшествовала смерть лица (x).

(b) Упростим этот интеграл в предположении о независимости продолжительностей предстоящей жизни.

(c) Изменим порядок интегрирования в решении п. (b) и получим другой вариант ответа.

Решение. (a) Актуарная настоящая стоимость, обозначаемая через $\bar{A}^{\,2}_{xy}$, — это $\mathbf{E}[Z]$, где

$$Z = \begin{cases} v^{T(y)}, & T(x) \leqslant T(y), \\ 0, & T(x) > T(y). \end{cases}$$

Снова Z является функцией от с.в. $T(x)$ и $T(y)$, так что можно записать интеграл для математического ожидания с.в. Z, используя функцию плотности совместного распределения с.в. $T(x)$ и $T(y)$:

$$\bar{A}_{xy}^{\;2} = \int_0^\infty \int_0^t v^t f_{T(x)T(y)}(s,t)\,ds\,dt = \int_0^\infty \int_0^t v^t f_{T(x)|T(y)}(s\,|\,t)\,ds\, f_{T(y)}(t)\,dt$$
$$= \int_0^\infty v^t\, \mathbf{P}[T(x) \leqslant t\,|\,T(y)=t]\, f_{T(y)}(t)\,dt.$$

(b) Применяя предположение о независимости и используя Международную систему актуарных обозначений, получаем

$$\bar{A}_{xy}^{\;2} = \int_0^\infty v^t\,{}_tq_x\,{}_tp_y\,\mu(y+t)\,dt = \int_0^\infty v^t(1-{}_tp_x)\,{}_tp_y\,\mu(y+t)\,dt = \bar{A}_y - \bar{A}_{xy}^{\;1}.$$

Заметим, что в случае независимых случайных величин можно выразить актуарную настоящую стоимость страховых выплат по договору, учитывающему очередность смертей, на случай смерти, не являющейся первой, в терминах актуарных настоящих стоимостей страховых выплат по договорам страхования на случай первой смерти. Это первый шаг в численных расчетах для страховых договоров, учитывающих очередность смертей для независимых лиц.

(c) Здесь

$$\bar{A}_{xy}^{\;2} = \int_0^\infty \int_s^\infty v^t\,{}_sp_x\,\mu(x+s)\,{}_tp_y\,\mu(y+t)\,dt\,ds.$$

Для упрощения заменим t на $r+s$ во внутреннем интеграле и перепишем это выражение следующим образом:

$$\bar{A}_{xy}^{\;2} = \int_0^\infty \int_0^\infty v^{r+s}\,{}_{r+s}p_y\,\mu(y+r+s)\,{}_sp_x\,\mu(x+s)\,dr\,ds$$
$$= \int_0^\infty v^s\,{}_sp_y\,{}_sp_x\,\mu(x+s)\left[\int_0^\infty v^r\,{}_rp_{y+s}\,\mu(y+s+r)\,dr\right]ds$$
$$= \int_0^\infty v^s\,\bar{A}_{y+s}\,{}_sp_y\,{}_sp_x\,\mu(x+s)\,ds.$$

Этот последний интеграл является приложением общего результата, выраженного формулой (2.2.10), а именно $\mathbf{E}[W] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[W\,|\,V]]$. Здесь $V = T(x)$ и $W = Z$, и мы видим, что условное математическое ожидание с.в. Z при условии $T(x) = s$ представляет собой актуарную настоящую стоимость $v^s\,{}_sp_y\,\bar{A}_{y+s}$ обязательств по страхованию на дожитие с настоящей стоимостью A_{y+s}, достаточной для обеспечения страховой выплаты размера 1 для лица $(y+s)$. ▼

9.10. Вычисления: актуарные функции, в которых учитывается очередность наступления моментов смерти

Перейдем к оценке вероятностей и актуарных настоящих стоимостей в предположениях Гомперца, Мейкема или в случае равномерного распределения моментов смерти. Мы также будем предполагать выполненным условие независимости.

Пример 9.10.1. Предполагая, что интенсивность смертности подчиняется закону Гомперца, рассчитаем:

(a) актуарную настоящую стоимость выплат по договору страхования на срок n лет, учитывающему очередность смертей, с выплатой суммы размера 1 в момент смерти лица (x), если оно умерло раньше лица (y);

(b) вероятность того, что лицо (x) умрет в течение n лет и раньше, чем лицо (y).

Решение.

(a) $$\bar{A}^{1}_{xy:\overline{n}|} = \int_0^n v^t\,{}_tp_{xy}\,\mu(x+t)\,dt.$$

Согласно закону Гомперца,

$$\bar{A}^{1}_{xy:\overline{n}|} = \int_0^n v^t\,{}_tp_{xy}\,Bc^xc^t\,dt = \frac{c^x}{c^x+c^y}\int_0^n v^t\,{}_tp_{xy}\,B(c^x+c^y)c^t\,dt$$
$$= \frac{c^x}{c^x+c^y}\int_0^n v^t\,{}_tp_{xy}\,\mu_{xy}(t)\,dt = \frac{c^x}{c^x+c^y}\,\bar{A}_{\overline{xy}:\overline{n}|}^{\;1}. \tag{9.10.1}$$

Кроме того, если выполняется (9.8.2), то

$$\bar{A}_{\overline{xy}:\overline{n}|}^{\;1} = \bar{A}^{1}_{w:\overline{n}|},$$
$$\bar{A}^{1}_{xy:\overline{n}|} = \frac{c^x}{c^w}\,\bar{A}^{1}_{w:\overline{n}|}. \tag{9.10.2}$$

(b) Обращаясь к формуле (9.9.2), мы видим, что величина ${}_nq^{1}_{xy}$ совпадает с $\bar{A}^{1}_{xy:\overline{n}|}$ при $v=1$. Таким образом, из равенства (9.10.2) следует, что если выполняется закон Гомперца, то

$${}_nq^{1}_{xy} = \frac{c^x}{c^w}\,{}_nq_w, \tag{9.10.3}$$

где $c^w = c^x + c^y$. ▼

Пример 9.10.2. Разберем пример 9.10.1, предполагая, что интенсивность смертности подчиняется закону Мейкема.

Решение.

(a) $$\bar{A}^{1}_{xy:\overline{n}|} = \int_0^n v^t\,{}_tp_{xy}(A + Bc^xc^t)\,dt$$
$$= A\int_0^n v^t\,{}_tp_{xy}\,dt + \frac{c^x}{c^x+c^y}\int_0^n v^t\,{}_tp_{xy}B(c^x+c^y)c^t\,dt$$
$$= A\left(1 - \frac{2c^x}{c^x+c^y}\right)\int_0^n v^t\,{}_tp_{xy}\,dt$$
$$+ \frac{c^x}{c^x+c^y}\int_0^n v^t\,{}_tp_{xy}[2A + B(c^x+c^y)c^t]\,dt$$
$$= A\left(1 - \frac{2c^x}{c^x+c^y}\right)\bar{a}_{xy:\overline{n}|} + \frac{c^x}{c^x+c^y}\,\bar{A}_{\overline{xy}:\overline{n}|}^{\;1}.$$

Тогда, используя (9.8.6), получим

$$\bar{A}^{1}_{xy:\overline{n}|} = A\left(1 - \frac{c^x}{c^w}\right)\bar{a}_{ww:\overline{n}|} + \frac{c^x}{2c^w}\,\bar{A}_{\overline{ww}:\overline{n}|}^{\;1}. \tag{9.10.4}$$

(b) Снова положим $v = 1$ в формуле, полученной в п. (a). Тогда

$${}_nq^{1}_{xy} = A\left(1 - \frac{c^x}{c^w}\right)\mathring{e}_{ww:\overline{n}|} + \frac{c^x}{2c^w}\,{}_nq_{ww}. \tag{9.10.5}$$

▼

Актуарная настоящая стоимость страховых выплат в конце года смерти по договору, учитывающему порядок наступления смертей, — это

$$A_{xy}^{1} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\, {}_kp_{xy}\, q_{\overset{1}{x+k}:y+k}. \tag{9.10.6}$$

При предположениях о равномерности распределения моментов смерти для каждого лица и о независимости соответствующих случайных величин

$$\begin{aligned} q_{\overset{1}{x+k}:y+k} &= \int_0^1 {}_sp_{x+k:y+k}\, \mu(x+k+s)\, ds \\ &= \int_0^1 q_{x+k}(1 - s q_{y+k})\, ds = q_{x+k}\left(1 - \frac{1}{2}\, q_{y+k}\right). \end{aligned} \tag{9.10.7}$$

Теперь можно выразить ${}_sp_{x+k:y+k}\, \mu(x+k+s)$ через $q_{\overset{1}{x+k}:y+k}$, а именно

$$\begin{aligned} {}_sp_{x+k:y+k}\, \mu(x+k+s) &= q_{x+k}(1 - s q_{y+k}) = q_{x+k}\left(1 - \frac{1}{2}\, q_{y+k}\right) + \left(\frac{1}{2} - s\right) q_{x+k}\, q_{y+k} \\ &= q_{\overset{1}{x+k}:y+k} + \left(\frac{1}{2} - s\right) q_{x+k}\, q_{y+k}. \end{aligned} \tag{9.10.8}$$

Если страховые выплаты осуществляются в момент смерти, то для актуарной настоящей стоимости выполнены следующие равенства:

$$\begin{aligned} \bar{A}_{xy}^{1} &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k}\, {}_kp_{xy} \int_0^1 v^{s}\, {}_sp_{x+k:y+k}\, \mu(x+k+s)\, ds \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\, {}_kp_{xy} \left[q_{\overset{1}{x+k}:y+k} \int_0^1 (1+i)^{1-s}\, ds + q_{x+k}\, q_{y+k} \int_0^1 (1+i)^{1-s} \left(\frac{1}{2} - s\right) ds \right] \\ &= \frac{i}{\delta}\, \bar{A}_{xy}^{1} + \frac{1}{2}\, \frac{i}{\delta} \left(1 - \frac{2}{\delta} + \frac{2}{i}\right) \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\, {}_kp_{xy}\, q_{x+k}\, q_{y+k}. \end{aligned} \tag{9.10.9}$$

Второе слагаемое в этой формуле очень мало́ по сравнению со всей суммой. Оно составляет $1/2$ от второго слагаемого в формуле (9.8.9).

9.11. Замечания и литература

Понятие случайной величины продолжительности предстоящей жизни, которое в предыдущих главах рассматривалось для отдельного лица, было распространено на статус дожития, частными случаями которого являются статусы, в определении которых фигурируют несколько лиц. Используя соответствующую теорию для одного лица, мы нашли вероятностные распределения, актуарные настоящие стоимости, дисперсии и ковариации, основанные на этих новых случайных величинах для статусов, связанных с двумя лицами. В гл. 18 эти вопросы будут излагаться для групп, состоящих из более, чем двух лиц.

Обсуждение материала этой главы без привлечения случайных величин можно найти в гл. 9–13 книги [Jordan 1952] и в гл. 7–8 книги [Neill 1977]. Общий анализ законов смертности, которые упрощают вид актуарных функций для нескольких лиц, приведены в статье [Greville 1956]. Упражнение 9.36 иллюстрирует указанный подход.

Работы [Marshall, Olkin 1967, 1988] посвящены семействам двумерных распределений. В частности, там рассматривалась модель с возмущением. Семейство двумерных распределений Фрэнка названо в честь М. Дж. Фрэнка, который его исследовал. Это семейство анализировалось и в работе [Genest 1987].

Фриз, Каррьер и Валдер [Frees, Carriere, Valder 1996] использовали связки Фрэнка для анализа статистики выплат аннуитетов до момента смерти последнего лица в группе. Они предполагали, что маргинальные распределения принадлежат семейству Гомперца. В результате для α было получено приближенное значение, равное $-3{,}4$. Сравнение этой оценки с ее приближенным стандартным уклонением приводит к выводу, что с.в. $T(x)$ и $T(y)$ в этом случае зависимы.

Параметр α не является стандартной мерой зависимости. Значение $-3{,}4$ указывает на положительную корреляцию между с.в. $T(x)$ и $T(y)$. Этого можно было ожидать, поскольку на практике лица, которым производятся выплаты до момента последней смерти, живут в одинаковых условиях.

В работе [Frees, Carriere, Valder 1996] также показано, что предположение о независимости с.в. $T(x)$ и $T(y)$ приводит к более высокой оценке актуарной настоящей стоимости аннуитета, выплачиваемого до момента последней смерти в группе лиц по сравнению со значением соответствующей актуарной стоимости в модели, допускающей зависимость этих величин. Различия лежат в интервале от 3% до 5%.

Упражнения

Если не оговорено противное, смертность всех лиц в упражнениях описывается одной и той же таблицей смертности, а продолжительности их предстоящей жизни являются независимыми случайными величинами.

К разделу 9.2

9.1. Функция плотности совместного распределения с.в. $T(x)$ и $T(y)$ задана формулой

$$f_{T(x)T(y)}(s,t) = \frac{(n-1)(n-2)}{(1+s+t)^n}, \qquad 0 < s,\ 0 < t,\ n > 2.$$

Найдите:

(a) совместную функцию распределения с.в. $T(x)$ и $T(y)$;

(b) функцию плотности маргинального распределения с.в. $T(x)$, функцию маргинального распределения и соответствующую интенсивность $\mu(x+s)$; заметим, что в силу симметрии относительно s и t случайные величины $T(x)$ и $T(y)$ распределены одинаково;

(c) ковариацию и коэффициент корреляции с.в. $T(x)$ и $T(y)$ при условии, что $n > 4$.

9.2. Найдите функцию совместного дожития с.в. $T(x)$, $T(y)$ из упр. 9.1.

9.3. Случайные величины $T(x)$ и $T(y)$ продолжительностей предстоящей жизни независимы и одинаково распределены, причем функция плотности этих случайных величин равна

$$f(t) = \frac{n-2}{(1+t)^{n-1}}, \qquad n > 3,\ t > 0.$$

Определите функцию совместного распределения и функцию совместного дожития.

К разделу 9.3

9.4. Выразите в терминах вероятностей для одного лица ${}_np_x$ и ${}_np_y$

(a) вероятность того, что статус (xy) сохранится в течение n лет;

(b) вероятность того, что в точности одно лицо из двух ((x) и (y)) проживет n лет;

(c) вероятность того, что по крайней мере одно лицо из двух ((x) и (y)) проживет n лет;

(d) вероятность того, что статус (xy) будет потерян в течение n лет;

(e) вероятность того, что по крайней мере одно из двух лиц умрет в течение n лет;

(f) вероятность того, оба лица умрут в течение n лет.

9.5. Покажите, что вероятность того, что лицо (x) проживет n лет, а лицо (y) проживет $n-1$ лет, может быть выражена как

$$ {}_np_{x:y-1}/p_{y-1} \quad \text{или} \quad p_x\, {}_{n-1}p_{x+1:y}. $$

9.6. Вычислите

$$ \int_0^n {}_tp_{xx}\, \mu_{xx}(t)\, dt. $$

9.7. Используя распределения с.в. $T(x)$ и $T(y)$ из упр. 9.1, найдите: (a) функцию распределения с.в. $T(xy)$, (b) функцию дожития с.в. $T(xy)$ и (c) $E[T(xy)]$. Предположите, что $n > 3$.

9.8. Используйте формулу (9.3.8), чтобы получить функцию плотности с.в. $T(xy)$, исходя из совместного распределения с.в. $T(x)$ и $T(y)$, заданного в примере 9.2.3.

К разделу 9.4

9.9. Покажите алгебраическими выкладками и из общих соображений, что

$$ {}_tp_{\overline{xy}} = {}_tp_{xy} + {}_tp_x(1 - {}_tp_x) + {}_tp_y(1 - {}_tp_x). $$

9.10. Найдите вероятность того, что по крайней мере одно из двух лиц (x) и (y) умрет в $(n+1)$-м году. Равна ли она величине ${}_{n|}q_{\overline{xy}}$? Приведите объяснения.

9.11. Функция плотности совместного распределения с.в. $T(x)$ и $T(y)$ задана в упр. 9.1. Найдите

(a) функцию распределения и функцию плотности с.в. $T(\overline{xy})$, (b) $E[T(\overline{xy})]$ для $n > 3$, (c) $\mu_{\overline{xy}}(t)$.

К разделу 9.5

9.12. Пусть ${}_{25}p_{25:50} = 0{,}2$ и ${}_{15}p_{25} = 0{,}9$. Рассчитайте вероятность того, что лицо (40) доживет до возраста 75 лет.

9.13. Пусть $\mu = 1/(100-x)$ для $0 \leqslant x < 100$. Рассчитайте

(a) ${}_{10}p_{40:50}$, (b) ${}_{10}p_{\overline{40:50}}$, (c) $\mathring{e}_{40:50}$, (d) $\mathring{e}_{\overline{40:50}}$, (e) $\mathbf{D}[T(40{:}50)]$, (f) $\mathbf{D}[T(\overline{40{:}50})]$, (g) $\mathbf{Cov}[T(40{:}50), T(\overline{40{:}50})]$, (h) коэффициент корреляции между $T(40{:}50)$ и $T(\overline{40{:}50})$.

9.14. Вычислите $d\mathring{e}_{xx}/dx$.

9.15. Покажите, что вероятность того, что два лица (30) и (40) умрут в одном и том же году, может быть записана следующим образом:

$$ 1 + e_{30:40} - p_{30}(1 + e_{31:40}) - p_{40}(1 + e_{30:41}) + p_{30:40}(1 + e_{31:41}). $$

9.16. Покажите, что вероятность того, что два лица (30) и (40) умрут в одном и том же возрасте, может быть выражена в виде

$$ {}_{10}p_{30}(1 + e_{40:40}) - 2\, {}_{11}p_{30}(1 + e_{40:41}) + p_{40}\, {}_{11}p_{30}(1 + e_{41:41}). $$

9.17. Предположим, что интенсивности смертности для лиц I и II составляют соответственно

$$ \mu^{\mathrm{I}}(x) = \ln(10/9) \quad \text{для всех } x, \qquad \mu^{\mathrm{II}}(x) = (10-x)^{-1} \quad \text{для } 0 \leqslant x < 10. $$

Вычислите вероятность того, что первая смерть произойдет в точности между возрастами 3 и 5 лет при условии, что возраст обоих лиц — в точности 1 год.

К разделу 9.6

9.18. Это продолжение примера 9.6.3. Выразите

(a) функцию распределения с.в. $T(\overline{xy})$, (b) функцию плотности с.в. $T(\overline{xy})$.

9.19. Вычислите значение функции $F_{T(x)T(y)}(5,5)$, используя (9.6.7), если ${}_5q_x = 0{,}05$ и ${}_5q_y = 0{,}03$. Ответ зависит от значения параметра α.

9.20. Используйте результат упр. 9.19, чтобы вычислить ${}_5q_{\overline{xy}}$ при (a) $\alpha = 0$, (b) $\alpha = 3$ и (c) $\alpha = -3$. [Указание. Используйте соотношения (9.4.5) и (9.3.2).]

К разделу 9.7

9.21. Покажите, что $a_{\overline{xy}:\overline{n}|} = a_{\overline{n}|} + {}_{n|}a_{xy}$. Опишите соответствующие выплаты.

9.22. Опишите актуарную настоящую стоимость, обозначаемую через $\bar{A}_{\overline{x:\overline{n}|}}$. Покажите, что $\bar{A}_{\overline{x:\overline{n}|}} = \bar{A}_x - \bar{A}_{x:\overline{n}|} + v^n$.

9.23. Покажите, что $\mathbf{Cov}(v^{T(\overline{xy})}, v^{T(xy)}) = (\bar{A}_x - \bar{A}_{xy})(\bar{A}_y - \bar{A}_{xy})$ для независимых продолжительностей предстоящей жизни $T(x)$ и $T(y)$.

9.24. Выразите актуарную настоящую стоимость непрерывного аннуитета с выплатой размера 1 в год до тех пор, пока по крайней мере одно из двух лиц (25) и (30) живо и не достигло 50-летнего возраста, в терминах аннуитетов, связанных с дожитием отдельного лица и всех лиц из группы.

9.25. Выразите актуарную настоящую стоимость отсроченного аннуитета с выплатой размера 1 в конце каждого года, когда живо хотя бы одно из лиц (25), (30), при условии, что оно достигло возраста 50 лет, в терминах аннуитетов, связанных с дожитием отдельного лица или всех лиц из группы.

9.26. Выразите актуарную настоящую стоимость аннуитета пренумерандо на срок n лет для статуса $(\overline{xy})$, обеспечивающего ежегодные выплаты размера 1 до тех пор, пока оба лица живы, сокращающиеся до 1/2 в случае смерти лица (x) или до 1/3 в случае смерти лица (y), в терминах аннуитетов, сопряженных со статусами дожития одного лица и обоих лиц.

9.27. Аннуитет постнумерандо обеспечивает выплату размера 1 лицу (x) до тех пор, пока живо оно и лицо (y), а также в течение n лет после смерти последнего, причем в любых обстоятельствах через m лет, $m > n$, считая с настоящего момента, выплаты прекращаются. Покажите, что его актуарная настоящая стоимость составит

$$a_{x:\overline{n}|} + {}_nE_x\, a_{x+n:y:\overline{m-n}|}.$$

9.28. Выразите актуарную настоящую стоимость непрерывного аннуитета с выплатой размера 1 в год, когда по крайней мере одно из лиц (40) и (55) живо и достигло 60 лет, за исключением периода, когда лицо (40) живо, но не достигло 55 лет.

9.29. Аннуитет в пользу двух лиц (x) и (y) выплачивается с некоторой начальной интенсивностью до тех пор, пока лицо (x) живо, а если лицо (y) переживает лицо (x), то выплаты продолжаются с интенсивностью, составляющей часть p, $1/2 \leqslant p \leqslant 1$, от начальной интенсивности.

(a) Выразите актуарную настоящую стоимость такого аннуитета пренумерандо с начальной интенсивностью 1 в год и с выплатами m раз в год в терминах актуарных настоящих стоимостей аннуитетов, сопряженных с дожитием одного лица и обоих лиц.

(b) Говорят, что бессрочный аннуитет в пользу двух лиц (x) и (y) и страховой аннуитет для лица (x) актуарно эквивалентны на основе сформулированных предположений, если при этих предположениях они имеют равные актуарные настоящие стоимости. Выразите отношение начальной интенсивности выплат пожизненного аннуитета в пользу двух лиц к интенсивности выплат актуарно эквивалентного аннуитета для одного лица (x).

9.30. Покажите, что

(a) $\bar{A}^{2}_{xy} = \bar{A}^{\;1}_{xy} - \delta \bar{a}_{y|x}$, (b) $\dfrac{\partial}{\partial x}\, \bar{a}_{y|x} = \mu(x)\, \bar{a}_{y|x} - \bar{A}^{2}_{xy}$.

[Указание. Пункт (a) опирается на материал разд. 9.9.]

К разделу 9.8

9.31. Покажите, что если в случае закона Мейкема статус (xy) заменяется на статус (ww), то

$$w - y = \frac{\ln(c^{\Delta} + 1) - \ln 2}{\ln c},$$

где $\Delta = x - y \geqslant 0$. (Это показывает, что w можно получить из более молодого возраста y прибавлением величины, являющейся функцией разности $\Delta = x - y$. Это свойство называют *законом равномерного старшинства*.

9.32. С помощью вашей Иллюстративной таблицы смертности и процентной ставки 6% рассчитайте $\ddot{a}_{50:60:\overline{10}|}$. Для решения используйте

(a) величины, полученные интерполяцией значений таблицы для $\ddot{a}_{xx}$,

(b) величины, заимствованные из таблицы для $\ddot{a}_{x:x+10}$.

9.33. Покажите, что для таблицы смертности, соответствующей закону Мейкема, и таких возрастов x и y лет, что статус (ww) является эквивалентным им статусом с одинаковыми возрастами,

(a) ${}_tp_w$ является средним геометрическим величин ${}_tp_x$ и ${}_tp_y$,

(b) ${}_tp_x + {}_tp_y > 2\,{}_tp_w$, если $x \neq y$,

(c) $a_{\overline{xy}} > a_{\overline{ww}}$, если $x \neq y$.

9.34. Покажите, что для таблицы смертности, соответствующей закону Мейкема, величина $\bar{a}_{xy}$ равна актуарной настоящей стоимости аннуитета для одного лица (w), где $c^w = c^x + c^y$ и интенсивность начисления процента δ' равна $\delta + A$. Затем покажите, что $\bar{A}_{xy} = \bar{A}'_w + A\bar{a}'_w$, где величины со штрихом вычислены при интенсивности начисления процента δ'.

9.35. Рассмотрим две таблицы смертности, одну — для мужчин (M), другую — для женщин (F), причем $\mu^M(z) = 3a + 3bz/2$ и $\mu^F(z) = a + bz$. Мы хотим использовать таблицу актуарных настоящих стоимостей для двух лиц возраста w каждое, мужчины и женщины, для вычисления актуарной настоящей стоимости аннуитета, сопряженного со статусом дожития двух лиц: мужчины возраста x лет и женщины возраста y лет. Выразите w через x и y.

9.36. Из разд. 9.5 известно, что если с.в. $T(x)$ и $T(y)$ независимы, то имеет место равенство

$$\bar{a}_{xy} = \int_0^\infty e^{-\int_0^t [\delta + \mu(x+s) + \mu(y+s)]ds}\, dt.$$

Если найдутся такие δ', k и w, что

$$\delta + \mu(x+t) + \mu(y+t) = \delta' + k\mu(w+t), \tag{$*$}$$

то

$$\bar{a}_{xy} = \int_0^\infty v^t ({}_tp_w)^k\, dt = \bar{a}'_{w(k)}.$$

Здесь штрих означает, что при вычислении используется интенсивность начисления процента δ', а $w(k)$ указывает на статус дожития группы k «лиц» (k не обязательно целое).

Покажите, что если $\mu(x+t) = a + b(x+t) + c(x+t)^2$, то $(*)$ выполняется при $k = 2$, $w = (x+y)/2$, $\delta' = \delta + c(x^2 + y^2 - 2w^2)$.

9.37. Найдите $\mathring{e}_{xy}$, если $q_x = q_y = 1$ и моменты смерти равномерно распределены в течение годичного возрастного интервала для каждого из двух лиц (x) и (y).

9.38. Пусть с.в. $T(x)$ и $T(y)$ независимы и равномерно распределены в следующем годичном возрастном интервале. При условии, что оба лица (x) и (y) умрут в следующем годичном интервале, покажите, что момент потери статуса (xy) не является равномерно распределенным в течение года. [Указание. Покажите, что $\mathbf{P}[T(xy) \leqslant t \,|\, (T(x) \leqslant 1) \cap (T(y) \leqslant 1)] = 2t - t^2$.]

9.39. Покажите, что

$$\frac{1}{\delta} = \frac{1}{i\,[1 - (i/2 - i^2/3 + i^3/4 - i^4/5 + \ldots)]} = \frac{1}{i}\left(1 + \frac{i}{2} - \frac{i^2}{12} + \frac{i^3}{24} - \frac{19i^4}{720} + \ldots\right),$$

а значит, что

$$\frac{i}{\delta}\left(1 - \frac{2}{\delta} + \frac{2}{i}\right) \cong \frac{i}{6} - \frac{i^3}{360} + \ldots .$$

9.40. Покажите, что если моменты смерти равномерно распределены в каждом годичном возрастном интервале, то

$${}_{(j-1)/m}p_{xy} - {}_{j/m}p_{xy} = \frac{1}{m}\, q_{xy} + \frac{m + 1 - 2j}{m^2}\, q_x\, q_y$$

для любых x и y, $j = 1, 2, 3, \ldots, m$, а тем самым проверьте формулу (9.8.14).

К разделу 9.9

9.41. Из общих соображений убедитесь, что ${}_nq^{\;1}_{xy} = {}_nq^{\;\;2}_{xy} + {}_nq_x\,{}_np_y$. Какой вид примет это равенство при $n \to \infty$?

9.42. Покажите, что актуарная настоящая стоимость страховых выплат размера 1 в конце года смерти лица (x) при условии, что лицо (y) доживет до времени выплаты, можно выразить в виде $vp_y\ddot{a}_{x:y+1} - a_{xy}$.

9.43. Покажите, что $A^{\;1}_{xy} - A^{\;\;2}_{xy} = A_{xy} - A_y$.

9.44. В терминах актуарных настоящих стоимостей выплат по договорам страхования на случай смерти отдельного лица и на случай первой смерти в группе выразите единовременную нетто-премию для выплаты размера 1, осуществляемой в момент смерти лица (50) при условии, что лицо (20) (в этот момент времени) уже умерло или достигло возраста 40 лет.

9.45. В терминах актуарной настоящей стоимости страхования на дожитие и на случай первой смерти в группе выразите актуарную настоящую стоимость страхования с выплатами размера 1, производимыми в момент смерти лица (x) после смерти лица (y) при условии, что (y) умрет в течение n-летнего интервала до момента смерти лица (x).

9.46. Вычислите ${}_{25}q^{\;\;\;\;2}_{25:50}$, если $\mu(x) = 1/(100 - x)$ для $0 \leqslant x < 100$.

К разделу 9.10

9.47. Известно, что в таблице смертности, соответствующей закону Мейкема, $A = 0{,}003$ и $c^{10} = 3$.

(a) вычислите ${}_\infty q^{\;1}_{40:50}$, если $\mathring{e}_{40:50} = 17$, (b) выразите $\bar{A}^{\;1}_{40:50}$ в терминах $\bar{A}_{40:50}$ и $\bar{a}_{40:50}$.

9.48. При условии, что смертность описывается законом Гомперца с $\mu(x) = 10^{-4}2^{x/8}$ для $x > 35$ и что, согласно (9.10.12), $\bar{A}^{\;\;\;\;1}_{40:48:\overline{10}|} = f\bar{A}^{\;1}_{w:\overline{10}|}$, рассчитайте f и w.

К различным темам главы

9.49. Статус дожития $(\overline{n}|)$ сохраняется ровно n лет. Он использовался вместе со статусами дожития лиц, например, в функциях $\bar{A}_{x:\overline{n}|}$, $\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}$, $\bar{A}_{x:\overset{\;1}{\overline{n}|}}$, $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$, $A_{xy:\overline{n}|}$. Упростите следующие выражения и дайте их словесную интерпретацию:

(a) $\bar{a}_{\overline{x:\overline{n}|}}$, (b) $\bar{A}_{x:\overset{\;2}{\overline{n}|}}$.

9.50. Докажите соотношение (9.4.6), применяя равенство $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$.

9.51. Вычислите величину $\dfrac{\partial}{\partial x}\,\mathring{e}_{xy}$.

9.52. Случайные величины $T^*(x)$, $T^*(y)$ и Z независимы и имеют показательное распределение с параметрами μ_1, μ_2, и λ соответственно. Эти три случайные величины входят в модель с возмущением.

(a) Найдите маргинальную функцию плотности с.в. $T(y)$, вычислив

$$f_{T(y)}(t) = \int_0^t f_{T(x)T(y)}(s,t)\,ds + f_{T(x)T(y)}(t,t) + \int_t^\infty f_{T(x)T(y)}(s,t)\,ds.$$

(b) Найдите маргинальную функцию дожития с.в. $T(y)$, вычислив

$$s_{T(y)}(t) = \int_t^\infty f_{T(y)}(u)\,du.$$

Сравните полученный результат с соотношением (9.6.4b).

(c) Вычислите

$$\mathbf{P}[T(x) = T(y)] = \int_0^\infty f_{T(x)T(y)}(t,t)\,dt.$$

10

МОДЕЛИ ВЫБЫТИЯ ПО НЕСКОЛЬКИМ ПРИЧИНАМ

10.1. Введение

В гл. 9 мы распространили теорию страхования отдельного лица, рассматривавшуюся в гл. 3–8, на страхование нескольких лиц, составляющих совокупность с единственной причиной выбытия — смертью. Теперь мы возвратимся к случаю отдельного лица, но причин выбытия может быть несколько. В качестве практического приложения отметим, что число работников одного работодателя сокращается, когда они увольняются, заболевают, умирают или выходят на пенсию. При анализе рынка рабочей силы иногда необходимо оценить лишь количество тех работающих в настоящее время, кто останется трудоспособным еще в течении некоторого периода в будущем. Для этой задачи подходит модель дожития, развитая в гл. 3, если интерпретировать основную случайную величину не как продолжительность предстоящей жизни, а как продолжительность периода трудовой деятельности. Однако пенсионные схемы для работающих предусматривают выплаты при прекращении ими работы, которые могут зависеть от причины прекращения. Например, выплаты при выходе на пенсию часто отличаются от выплат в случае смерти или утраты трудоспособности. Следовательно, модели дожития для пенсионных схем для работающих включают в себя случайные величины и для продолжительности периода до прекращения трудовой деятельности, и для причины прекращения. Структура выплат также часто зависит от размера заработной платы, являющейся неопределенностью совсем другого рода, которую мы будем обсуждать в гл. 11.

Другое практическое приложение связано с тем, что большинство индивидуальных договоров страхования жизни гарантирует некоторые выплаты, если выплата премий прекращается до окончания установленного периода их выплаты. Комбинированная модель для такого страхования рассматривает в качестве случайных величин продолжительность периода до момента прекращения выплаты премий и причины этого прекращения.

Страхование потери дохода страхователями вследствие утраты ими трудоспособности обеспечивает периодические выплаты страхователям, состояние которых удовлетворяет определению нетрудоспособности, содержащемуся в договоре страхования. В некоторых случаях сумма периодических выплат может зависеть от того, чем вызвана нетрудоспособность: болезнью или несчастным случаем. Лицо может выбыть из совокупности работающих застрахованных вследствие смерти, увольнения, утраты трудоспособности и окончания периода действия договора страхования. Полная модель страхования на случай утраты трудоспособности включает в себя как случайную величину продолжительности периода до момента выбытия, когда страхователь перестает быть членом совокупности работающих, так и случайную величину причины выбытия.

Органы управления общественным здравоохранением нуждаются в анализе смертности и дожития в терминах причин смерти. Цели общественного здравоохранения могут быть сформулированы, если исследовать совместное распределение продолжительности предстоящей жизни и причин смерти. На этом типе анализа основывалось заключение, что среди причин смерти на первом месте стоят заболевания сердечно-сосудистой системы и онкологические заболевания.

Главная цель этой главы — построить теорию для изучения распределения следующих двух случайных величин для отдельного лица: продолжительности периода до момента потери данного статуса и причины его потери. Полученная модель используется в каждом из приложений, описанных в этом разделе. В актуарной науке потеря статуса называется *выбытием*, а предмет этой главы — *теорией выбытия по нескольким причинам*. В биологической статистике ее называют *теорией конкурирующих рисков*.

Теорию выбытия по нескольким причинам возможно также развивать в терминах детерминированных коэффициентов. Краткое резюме рассматриваемой теории с этой точки зрения будет дано в разд. 10.4.

10.2. Две случайные величины

Глава 3 частично посвящена методам определения и использования распределения непрерывной случайной величины $T(x)$ продолжительности предстоящей жизни лица (x). При небольшом изменении терминологии те же методы можно использовать для изучения длительности периода времени до потери некоторого статуса, такого, например, как работа на определенного работодателя. Фактически мы будем пользоваться тем же самым обозначением $T(x)$, или просто T, для случайной величины длительности временного интервала в этом новом значении.

В этом разделе мы усложним основную модель, введя вторую случайную величину — причину выбытия, которую обозначим через $J(x) = J$. Мы будем предполагать, что J — дискретная случайная величина.

Приложения из разд. 10.1 дают примеры этих случайных величин. В приложениях к пенсионной схеме для работающих случайная величина J принимает значения 1, 2, 3 или 4 в зависимости от того, происходит выбытие вследствие увольнения, потери трудоспособности, смерти или выхода на пенсию соответственно. В приложении к страхованию жизни с.в. J может принимать значения 1 или 2 в зависимости от того, происходит выбытие вследствие смерти страхователя или вследствие прекращения выплаты им премий. Для приложения к страхованию на случай потери трудоспособности с.в. J может принимать значения 1, 2, 3 или 4 в зависимости от того, умер страхователь, уволен, потерял трудоспособность или у него окончился период страхования. Наконец, в приложениях к общественному здравоохранению существует много возможностей для задания причин выбытия. Например, в некотором исследовании с.в. J может принимать значения 1, 2, 3 или 4 в зависимости от того, произошла смерть вследствие сердечно-сосудистого заболевания, онкологического заболевания, несчастного случая или всех других причин.

Наша цель — описать совместное распределение с.в. T и J и соответствующие маргинальные и условные распределения. Обозначим функцию «плотности» совместного распределения с.в. T и J через $f_{T,J}(t,j)$[1], маргинальную функцию вероятностей с.в. J через $f_J(j)$ и маргинальную функцию плотности с.в. T через $f_T(t)$. Рисунок 10.2.1 иллюстрирует эти функции. Они могут показаться на первый взгляд непривычными, так как J — дискретная, а T — непрерывная случайные величины.

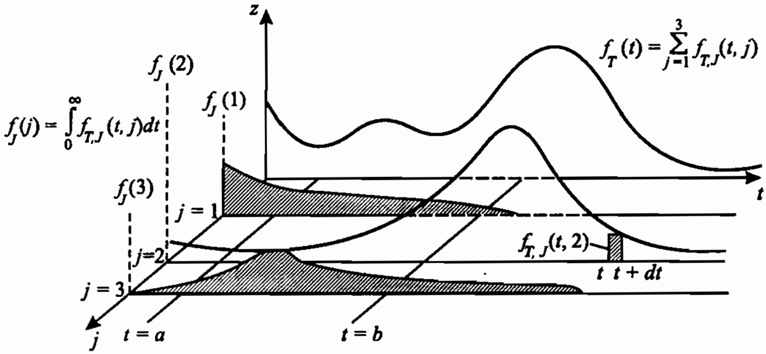


Рис. 10.2.1. График функции $f_{T,J}(t,j)$.

Функцию $f_{T,J}(t,j)$ «плотности» совместного распределения с.в. T и J можно представить разбитой на m параллельных листов, как показано на рис. 10.2.1 для трех случаев выбытия ($m = 3$). Существует отдельный лист для каждого из m случаев выбытия, рассматриваемых в данной модели. Для изображенных на рис. 10.2.1 функций имеют место следующие соотношения:

$$\sum_{j=1}^{3} f_J(j) = 1 \quad \text{и} \quad \int_0^\infty f_T(t)\,dt = 1.$$

Функцию «плотности» $f_{T,J}(t,j)$ можно использовать обычным образом для вычисления вероятностей событий, определенных с.в. T и J. Например,

$$f_{T,J}(t,j)\,dt = \mathbf{P}[(t < T \leqslant t + dt) \cap (J = j)] \tag{10.2.1}$$

— вероятность выбытия по причине j между моментами времени t и $t + dt$,

$$\int_0^t f_{T,J}(s,j)\,ds = \mathbf{P}[(0 < T \leqslant t) \cap (J = j)] \tag{10.2.2}$$

— вероятность выбытия по причине j до момента времени t, а

$$\sum_{j=1}^{m} \int_a^b f_{T,J}(t,j)\,dt = \mathbf{P}(a < T \leqslant b)$$

[1] В оригинале — «совместная функция плотности с.в. T и J» («the joint probability density function of T and J»). Функция $f_{T,J}(t,j)$ является «частной» плотностью по первому аргументу, такой, что $\int_0^\infty f_{T,J}(t,j)\,dt = f_J(j)$ для любого j, и «частной» функцией вероятностей по второму аргументу, такой, что $\sum_j f_{T,J}(t,j)\,dt = f_T(t)$ для любого t (см. ниже (10.2.4) и (10.2.5)). Поэтому, чтобы подчеркнуть нетрадиционность введенного термина, слово «плотность» нами будет ставиться в кавычки. — *Прим. ред.*

— вероятность выбытия по всем причинам между моментами времени a и b.

Вероятность выбытия до момента времени t по причине j, заданная равенством (10.2.2), имеет специальное обозначение

$$ {}_tq_x^{(j)} = \int_0^t f_{T,J}(s,j)\,ds, \qquad t \geqslant 0,\ j = 1,2,\ldots,m, \tag{10.2.3} $$

которое иллюстрирует использование верхнего индекса для обозначения причины выбытия в теории выбытия по нескольким причинам.

Информация, известная в возрасте x лет, используется для выбора распределения так же, как это делалось в гл. 3. Если известно только, что лицо возраста x живо, то следует пользоваться агрегативным распределением. С другой стороны, если имеется дополнительная информация, то следует использовать селекционное распределение, и возраст на момент селекции будет заключен в квадратные скобки.

Согласно определению маргинальной функции вероятностей с.в. J, изображенной на рис. 10.2.1 в плоскости (j,z) и обозначенной $f_J(j)$, вероятность выбытия по причине j в произвольный момент времени в будущем равна

$$ f_J(j) = \int_0^\infty f_{T,J}(s,j)\,ds = {}_\infty q_x^{(j)}, \qquad j = 1,2,\ldots,m. \tag{10.2.4} $$

Это — новое обозначение, не имеющее аналога в гл. 3, в отличие от маргинальной функции плотности $f_T(t)$ с.в. T, изображенной в плоскости (t,z) на рис. 10.2.1. Для $f_T(t)$ и функции распределения $F_T(t)$ имеем при $t \geqslant 0$

$$ f_T(t) = \sum_{j=1}^m f_{T,J}(t,j), \qquad F_T(t) = \int_0^t f_T(s)\,ds. \tag{10.2.5} $$

Обозначения, введенные в гл. 3, для функций распределения случайной величины продолжительности предстоящей жизни можно распространить на случайную величину продолжительности периода до потери статуса в модели выбытия по нескольким причинам. Используя верхний индекс (τ) для обозначения того, что функция относится ко всем причинам или общей интенсивности выбытия, получим

$$ {}_tq_x^{(\tau)} = \mathbf{P}(T \leqslant t) = F_T(t) = \int_0^t f_T(s)\,ds, \tag{10.2.6} $$

$$ {}_tp_x^{(\tau)} = \mathbf{P}(T > t) = 1 - {}_tq_x^{(\tau)}, \tag{10.2.7} $$

$$ \mu_x^{(\tau)}(t) = \frac{f_T(t)}{1 - F_T(t)} = \frac{1}{{}_tp_x^{(\tau)}}\frac{d}{dt}\,{}_tq_x^{(\tau)} = -\frac{1}{{}_tp_x^{(\tau)}}\frac{d}{dt}\,{}_tp_x^{(\tau)} = -\frac{d}{dt}\ln {}_tp_x^{(\tau)}, \tag{10.2.8} $$

$$ {}_tp_x^{(\tau)} = \exp\left[-\int_0^t \mu_x^{(\tau)}(s)\,ds\right]. \tag{10.2.9} $$

Математически эти функции для с.в. T из настоящей главы совпадают с соответствующими функциям для с.в. T из гл. 3; различие состоит в их интерпретации в приложениях. Выбор символа $\mu_x^{(\tau)}(t)$ для интенсивности выбытия по всем причинам обусловлен этими приложениями. Например, в пенсионных приложениях x — возраст вступления в пенсионную схему, и хотя никакой дополнительной информации для селекции может не быть, причины последующего выбытия могут зависеть от этого возраста.

Как и в приложениях из предыдущих глав, вероятность (10.2.1) можно анализировать при условии сохранения данного статуса до момента времени t. Тогда

$$f_{T,J}(t,j)\,dt = \mathbf{P}(T>t)\,\mathbf{P}([(t<T\leqslant t+dt)\cap(J=j)]\,|\,T>t). \tag{10.2.10}$$

По аналогии с формулой (3.2.12) это подсказывает следующее определение *интенсивности выбытия по причине j*:

$$\mu_x^{(j)}(t) = \frac{f_{T,J}(t,j)}{1-F_T(t)} = \frac{f_{T,J}(t,j)}{{}_tp_x^{(\tau)}}. \tag{10.2.11}$$

Интенсивность выбытия по причине j в возрасте $x+t$ имеет интерпретацию в терминах условных вероятностей. Это значение «плотности» совместного распределения с.в. T и J в точках $x+t$ и j при условии дожития до возраста $x+t$ лет. Тогда формула (10.2.10) может быть переписана в виде

$$f_{T,J}(t,j)\,dt = {}_tp_x^{(\tau)}\mu_x^{(j)}(t)\,dt, \qquad j=1,2,\ldots,m,\ t\geqslant 0. \tag{10.2.10$'$}$$

Иначе говоря:

(вероятность выбытия по причине j между моментами времени t и $t+dt$)

= вероятность ${}_tp_x^{(\tau)}$ того, что лицо (x) сохранит данный статус до момента времени t)

× (условная вероятность $\mu_x^{(j)}(t)$ того, что выбытие произойдет по причине j между моментами времени t и $t+dt$, при условии, что выбытие не произойдет раньше времени t).

Отсюда, дифференцируя формулу (10.2.3) и используя формулу (10.2.11), получим

$$\mu_x^{(j)}(t) = \frac{1}{{}_tp_x^{(\tau)}}\frac{d}{dt}\,{}_tq_x^{(j)}. \tag{10.2.12}$$

Далее, согласно (10.2.6), (10.2.5) и (10.2.3),

$${}_tq_x^{(\tau)} = \int_0^t f_T(s)\,ds = \int_0^t\sum_{j=1}^m f_{T,J}(s,j)\,ds = \sum_{j=1}^m\int_0^t f_{T,J}(s,j)\,ds = \sum_{j=1}^m {}_tq_x^{(j)}. \tag{10.2.13}$$

Тот факт, что первый и последний члены в (10.2.13) равны, допускает очевидную интерпретацию. Комбинируя формулы (10.2.8), (10.2.13) и (10.2.12), получаем

$$\mu_x^{(\tau)}(t) = \sum_{j=1}^m \mu_x^{(j)}(t), \tag{10.2.14}$$

т. е. *общая интенсивность выбытия* является суммой частных интенсивностей выбытия по каждой из m причин.

Мы можем свести здесь воедино введенные определения, выразив совместную «плотность», маргинальную функцию вероятностей и маргинальную плотность в актуарных обозначениях, причем мы сохраняем номера соответствующих формул, добавив к ним «штрих»:

$$f_{T,J}(t,j) = {}_tp_x^{(\tau)}\mu_x^{(j)}(t) \tag{10.2.11$'$}$$

$$f_J(j) = {}_\infty q_x^{(j)}, \tag{10.2.4$'$}$$

$$f_T(t) = {}_tp_x^{(\tau)}\mu_x^{(\tau)}(t). \tag{10.2.8$'$}$$

Условная функция вероятностей с.в. J при условии, что выбытие произошло в момент времени t, — это

$$f_{J\,|\,T}(j\,|\,t) = \frac{f_{T,J}(t,j)}{f_T(t)} = \frac{{}_tp_x^{(\tau)}\mu_x^{(j)}(t)}{{}_tp_x^{(\tau)}\mu_x^{(\tau)}(t)} = \frac{\mu_x^{(j)}(t)}{\mu_x^{(\tau)}(t)}. \tag{10.2.15}$$

Наконец, заметим, что вероятность, определенная формулой (10.2.3), может быть переписана в виде

$${}_tq_x^{(j)} = \int_0^t {}_sp_x^{(\tau)}\mu_x^{(j)}(s)\,ds. \tag{10.2.16}$$

Пример 10.2.1. Рассмотрим модель выбытия по двум причинам с интенсивностями выбытия

$$\mu_x^{(1)}(t) = t/100, \quad t \geqslant 0, \qquad \mu_x^{(2)}(t) = 1/100, \quad t \geqslant 0.$$

Вычислим для этой модели функции вероятностей (или функции плотности) совместных, маргинальных и условных распределений.

Решение. Поскольку

$$\mu_x^{(\tau)}(s) = \mu_x^{(1)}(s) + \mu_x^{(2)}(s) = (s+1)/100,$$

вероятность дожития ${}_tp_x^{(\tau)}$ представляется в виде

$${}_tp_x^{(\tau)} = \exp\left(-\int_0^t \frac{s+1}{100}\,ds\right) = \exp\left(-\frac{t^2+2t}{200}\right), \qquad t \geqslant 0,$$

а функция «плотности» совместного распределения с.в. T и J — в виде

$$f_{T,J}(t,j) = \begin{cases} \dfrac{t}{100}\exp\left(-\dfrac{t^2+2t}{200}\right), & t \geqslant 0,\ j=1,\\[2mm] \dfrac{1}{100}\exp\left(-\dfrac{t^2+2t}{200}\right), & t \geqslant 0,\ j=2. \end{cases}$$

Функцию плотности с.в. T можно записать в виде

$$f_T(t) = \sum_{j=1}^{2} f_{T,J}(t,j) = \frac{t+1}{100}\exp\left(-\frac{t^2+2t}{200}\right), \qquad t \geqslant 0,$$

а функцию вероятностей с.в. J — в виде

$$f_J(j) = \begin{cases} \int_0^\infty f_{T,J}(t,1)\,dt, & j=1,\\ \int_0^\infty f_{T,J}(t,2)\,dt, & j=2. \end{cases}$$

Функцию $f_J(2)$ вычислить легче. В дальнейшем изложении $\Phi(x)$ — функция распределения стандартного нормального закона $N(0,1)$. Дополняя до полного квадрата, получим

$$\begin{aligned} f_J(2) &= \frac{1}{100}\,e^{0{,}005}\int_0^\infty \exp\left[\frac{-(t+1)^2}{200}\right]dt \\ &= \frac{1}{100}\,e^{0{,}005}\sqrt{2\pi}\,10\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,10}\exp\left[\frac{-(t+1)^2}{200}\right]dt. \end{aligned}$$

Теперь сделаем замену переменных $z = (t+1)/10$ и получим

$$f_J(2) = \frac{1}{10}\,e^{0{,}005}\sqrt{2\pi}\int_{0{,}1}^{\infty}\frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dz = \frac{1}{10}\,e^{0{,}005}\sqrt{2\pi}\,[1-\Phi(0{,}1)] = 0{,}1159.$$

Следовательно, $f_J(1) = 0{,}8841$. Наконец, функция вероятностей с.в. J при условии выбытия в момент времени t получается из формулы (10.2.15):

$$f_{J\,|\,T}(1\,|\,t) = \frac{t}{t+1}, \qquad f_{J\,|\,T}(2\,|\,t) = \frac{1}{t+1}\,.$$ ▼

Пример 10.2.2. Для совместного распределения с.в. T и J, приведенного в примере 10.2.1, подсчитаем $\mathbf{E}[T]$ и $\mathbf{E}[T\,|\,J=2]$.

Решение. Используя маргинальную функцию плотности $f_T(t)$, имеем

$$\mathbf{E}[T] = \int_0^{\infty} t\,\frac{t+1}{100}\exp\left(-\frac{t^2+2t}{200}\right)dt.$$

Интегрируя по частям, как в (3.5.1), получим

$$\mathbf{E}[T] = -t\exp\left(-\frac{t^2+2t}{200}\right)\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{t^2+2t}{200}\right)dt = 0 + 100 f_J(2).$$

Следовательно,

$$\mathbf{E}[T] = 11{,}59.$$

Используя функцию плотности условного распределения $f_{T,J}(t,2)/f_J(2)$, приходим к равенству

$$\mathbf{E}[T\,|\,J=2] = \int_0^{\infty} t\,\frac{1}{100}\exp\left(-\frac{t^2+2t}{200}\right)\frac{1}{0{,}1159}\,dt.$$

Этот интеграл можно вычислить следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[T\,|\,J=2] = \mathbf{E}[(T+1)-1\,|\,J=2] &= \frac{1}{0{,}1159}\int_0^{\infty}\frac{t+1}{100}\exp\left(-\frac{t^2+2t}{200}\right)dt - 1\\ &= -\frac{1}{0{,}1159}\exp\left(-\frac{t^2+2t}{200}\right)\Big|_0^{\infty} - 1 = 7{,}63.\end{aligned}$$

Суть примеров 10.2.1 и 10.2.2 состоит в том, что, раз определено совместное распределение с.в. T и J, можно найти маргинальные и условные распределения и вычислить моменты этих распределений. ▼

В некоторых примерах конкретные приложения могут потребовать модификации приведенной выше модели. Непрерывное распределение с.в. T, времени до момента выбытия, не подходит для тех приложений, для которых вероятность выбытия в некоторый момент времени положительна. Одним таким примером является пенсионная схема с обязательным возрастом выхода на пенсию, т.е. возрастом, в котором все еще работающие лица обязаны выйти на пенсию. Вторым примером является срочный договор страхования жизни, в котором, как правило, выплаты в случае досрочного прекращения действия договора не производятся. В этом случае, после того, как премия выплачена, никто из доживших страхователей не станет прерывать договор до тех пор, пока не наступит дата следующей выплаты премий. Здесь мы не будем пытаться обобщить обозначения, чтобы включить в рассмотрение такие ситуации. Тем не менее, в дальнейшем мы опишем модели, пригодные для этих примеров.

Случайная величина K, пошаговое время до момента выбытия лица (x), определяется, как и в гл. 3, т. е. как наибольшее целое число, меньшее T. Используя формулы (10.2.1) и (10.2.11), мы можем записать совместное распределение с.в. K и J как

$$\mathbf{P}[(K=k)\cap(J=j)] = \mathbf{P}[(k<T\leqslant k+1)\cap(J=j)] = \int_k^{k+1} {}_tp_x^{(\tau)}\mu_x^{(j)}(t)\,dt. \qquad (10.2.17)$$

Переписав ${}_tp_x^{(\tau)}$ в подынтегральном выражении в экспоненциальной форме, согласно (10.2.9), и разбив его на два сомножителя, приведем правую часть формулы (10.2.17) к виду

$${}_kp_x^{(\tau)}\int_k^{k+1}\exp\left[-\int_k^t \mu_x^{(\tau)}(u)\,du\right]\mu_x^{(j)}(t)\,dt.$$

Сделав в ней замену переменных $r=u-k$ и $s=t-k$, получим

$${}_kp_x^{(\tau)}\int_0^{1}\exp\left[-\int_0^s \mu_x^{(\tau)}(k+r)\,dr\right]\mu_x^{(j)}(k+s)\,ds.$$

До сих пор мы проводили преобразования, которые справедливы для всех типов таблиц. Если мы используем агрегативную или заключительную (не селекционную) таблицу, где интенсивности выбытия зависят от исходного возраста и от продолжительности рассматриваемого периода только через сумму этих величин, т. е. от *достигнутого возраста*, то для τ и всех j имеет место равенство $\mu_x(k+s)=\mu_{x+k}(s)$ при всех x, k и $s\geqslant 0$, а формула (10.2.17) может быть переписана в виде

$${}_kp_x^{(\tau)}\int_0^1 {}_sp_{x+k}^{(\tau)}\,\mu_{x+k}^{(j)}(s)\,ds = {}_kp_x^{(\tau)}q_{x+k}^{(j)}. \qquad (10.2.18)$$

Вероятность выбытия по всем причинам между возрастами $x+k$ и $x+k+1$ при условии дожития до возраста $x+k$ обозначается через $q_{x+k}^{(\tau)}$, и, следовательно,

$$q_{x+k}^{(\tau)} = \int_0^1 {}_sp_{x+k}^{(\tau)}\,\mu_{x+k}^{(\tau)}(s)\,ds = \int_0^1 {}_sp_{x+k}^{(\tau)}\sum_{j=1}^m \mu_{x+k}^{(j)}(s)\,ds = \sum_{j=1}^m q_{x+k}^{(j)}. \qquad (10.2.19)$$

Анализ формул (10.2.18) и (10.2.19) показывает, почему теория выбытия по нескольким причинам также называется теорией конкурирующих рисков. Вероятность выбытия по причине j между возрастами $x+k$ и $x+k+1$ зависит от ${}_sp_{x+k}^{(\tau)}$, $0\leqslant s\leqslant 1$, и, таким образом, от всех компонент интенсивностей выбытия. Если интенсивности выбытия для всех других причин возрастают, вероятность ${}_sp_{x+k}^{(\tau)}$ уменьшается и, следовательно, вероятность $q_{x+k}^{(j)}$ также уменьшается.

10.3. Совокупность случайного дожития

Рассмотрим совокупность $l_a^{(\tau)}$ лиц возраста a лет. Предполагается, что распределение времени до момента выбытия и причины выбытия для каждого лица задано функцией

$$f_{T,J}(t,j) = {}_tp_a^{(\tau)}\mu_a^{(j)}(t), \qquad t\geqslant 0,\ j=1,2,\ldots,m.$$

Обозначим через ${}_n\mathcal{D}_x^{(j)}$ случайную величину, равную числу лиц, которые покидают совокупность по причине j между возрастами x и $x+n$, $x\geqslant a$. Обозначим $\mathbf{E}[{}_n\mathcal{D}_x^{(j)}]$

через ${}_nd_x^{(j)}$ и получим равенство

$$ {}_nd_x^{(j)} = \mathbf{E}[{}_n\mathcal{D}_x^{(j)}] = l_a^{(\tau)} \int_{x-a}^{x+n-a} {}_tp_a^{(\tau)} \mu_a^{(j)}(t)\,dt. \tag{10.3.1a} $$

Как обычно, если $n = 1$, нижний левый индекс в ${}_n\mathcal{D}_x^{(j)}$ и ${}_nd_x^{(j)}$ опускается. Заметим, что

$$ {}_n\mathcal{D}_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{m} {}_n\mathcal{D}_x^{(j)}, $$

и положим

$$ {}_nd_x^{(\tau)} = \mathbf{E}[{}_n\mathcal{D}_x^{(\tau)}] = \sum_{j=1}^{m} {}_nd_x^{(j)}. \tag{10.3.1b} $$

Тогда, используя формулу (10.3.1a), получаем

$$ {}_nd_x^{(\tau)} = l_a^{(\tau)} \sum_{j=1}^{m} \int_{x-a}^{x+n-a} {}_tp_a^{(\tau)} \mu_a^{(j)}(t)\,dt = l_a^{(\tau)} \int_{x-a}^{x+n-a} {}_tp_a^{(\tau)} \mu_a^{(\tau)}(t)\,dt. \tag{10.3.2} $$

Если определить $\mathcal{L}^{(\tau)}(x)$ как случайную величину, равную числу доживших до возраста x из $l_a^{(\tau)}$ лиц в первоначальной совокупности лиц возраста a лет, то по аналогии с формулой (3.3.1) можем записать

$$ l_x^{(\tau)} = \mathbf{E}[\mathcal{L}^{(\tau)}(x)] = l_a^{(\tau)}\, {}_{x-a}p_a^{(\tau)}. \tag{10.3.3} $$

Интеграл в (10.3.1a) для случая $n = 1$ совпадает с интегралом из (10.2.17) при $x = a$ и $k = x - a$. Таким образом, для неселекционной таблицы из соотношения (10.2.18) следует, что

$$ d_x^{(j)} = l_a^{(\tau)}\, {}_{x-a}p_a^{(\tau)} q_x^{(j)} = l_x^{(\tau)} q_x^{(j)}. \tag{10.3.4} $$

Этот результат дает нам возможность связать таблицу значений $p_x^{(\tau)}$ и $q_x^{(j)}$ и соответствующую таблицу значений $l_x^{(\tau)}$ и $d_x^{(j)}$. Каждая из этих таблиц называется *таблицей выбытия по нескольким причинам.*

Пример 10.3.1. Построим таблицу значений величин $l_x^{(\tau)}$ и $d_x^{(j)}$, соответствующую вероятностям выбытия, приведенным ниже:

x	$q_x^{(1)}$	$q_x^{(2)}$
65	0,02	0,05
66	0,03	0,06
67	0,04	0,07
68	0,05	0,08
69	0,06	0,09
70	0,00	1,00

Хотя эта таблица взята для простоты расчета, ее можно считать грубым приближением ситуации с двумя причинами выбытия, первая — смерть, вторая — выход на пенсию. Ясно, что в этом случае 70 лет — возраст обязательного выхода на пенсию.

Решение. Произвольным образом придадим величине $l_{65}^{(\tau)}$ значение 1000 и используем формулу (10.3.4), как показано ниже.

x	$q_x^{(1)}$	$q_x^{(2)}$	$q_x^{(\tau)}$	$p_x^{(\tau)}$	$l_x^{(\tau)} = l_{x-1}^{(\tau)} p_{x-1}^{(\tau)}$	$d_x^{(1)} = l_x^{(\tau)} q_x^{(1)}$	$d_x^{(2)} = l_x^{(\tau)} q_x^{(2)}$
65	0,02	0,05	0,07	0,93	1000,00	20,00	50,00
66	0,03	0,06	0,09	0,91	930,00	27,90	55,80
67	0,04	0,07	0,11	0,89	846,30	33,85	59,24
68	0,05	0,08	0,13	0,87	753,21	37,66	60,26
69	0,06	0,09	0,15	0,85	655,29	39,32	58,98
70	0,00	1,00	1,00	0,00	557,00	0,00	557,00

Заметим в качестве проверки расчетов, что $l_{x+1}^{(\tau)} = l_x^{(\tau)} - d_x^{(1)} - d_x^{(2)}$ с точностью до ошибки округления.

Применяя элементарные факты, продолжим этот пример вычислением некоторых вероятностей:

$$
\begin{aligned}
{}_2p_{65}^{(\tau)} &= p_{65}^{(\tau)} p_{66}^{(\tau)} = (0{,}93)(0{,}91) = 0{,}8463,\\
{}_{2|}q_{66}^{(1)} &= p_{66}^{(\tau)} p_{67}^{(\tau)} q_{68}^{(1)} = (0{,}91)(0{,}89)(0{,}05) = 0{,}0405,\\
{}_2q_{67}^{(2)} &= q_{67}^{(2)} + p_{67}^{(\tau)} q_{68}^{(2)} = 0{,}07 + (0{,}89)(0{,}08) = 0{,}1412.
\end{aligned}
$$

Последние три столбца приведенной выше таблицы могут быть использованы для получения тех же вероятностей. Ответы совпадают с точностью до четвертого десятичного знака,

$$
\begin{aligned}
{}_2p_{65}^{(\tau)} &= \frac{l_{67}^{(\tau)}}{l_{65}^{(\tau)}} = \frac{846{,}30}{1000{,}00} = 0{,}8463,\\
{}_{2|}q_{66}^{(1)} &= \frac{d_{68}^{(1)}}{l_{66}^{(\tau)}} = \frac{37{,}66}{930{,}00} = 0{,}0405,\\
{}_2q_{67}^{(2)} &= \frac{d_{67}^{(2)} + d_{68}^{(2)}}{l_{67}^{(\tau)}} = \frac{59{,}24 + 60{,}26}{846{,}30} = 0{,}1412.
\end{aligned}
$$

▼

10.4. Совокупность детерминированного дожития

Общую интенсивность выбытия можно также рассматривать как общий (эффективный годовой) коэффициент выбытия, а не только как плотность условного распределения. С этой точки зрения, когда рассматривается непрерывная демографическая модель[1]), совокупность $l_a^{(\tau)}$ лиц изменяется с течением времени с детерминированной интенсивностью выбытия $\mu_a^{(\tau)}(y-a)$, $y \geqslant a$. Число доживших до возраста x из начальной совокупности, состоящей из $l_a^{(\tau)}$ лиц возраста a лет, задается формулой

$$
l_x^{(\tau)} = l_a^{(\tau)} \exp\left[-\int_a^x \mu_a^{(\tau)}(y-a)\,dy\right], \tag{10.4.1}
$$

а общее число выбывших между возрастами x и $x+1$ составит

$$
\begin{aligned}
d_x^{(\tau)} = l_x^{(\tau)} - l_{x+1}^{(\tau)} = l_x^{(\tau)}\left(1 - \frac{l_{x+1}^{(\tau)}}{l_x^{(\tau)}}\right) &= l_x^{(\tau)}\left\{1 - \exp\left[-\int_x^{x+1} \mu_a^{(\tau)}(y-a)\,dy\right]\right\}\\
&= l_x^{(\tau)}[1 - p_x^{(\tau)}] = l_x^{(\tau)} q_x^{(\tau)}.
\end{aligned} \tag{10.4.2}
$$

[1]) См. гл. 19. — *Прим. ред.*

Далее, по определению или с помощью дифференцирования равенства (10.4.1) имеем

$$\mu_a^{(\tau)}(x-a) = -\frac{1}{l_x^{(\tau)}}\frac{dl_x^{(\tau)}}{dx}. \tag{10.4.3}$$

Эти формулы аналогичны формулам, использованным для таблиц смертности в разд. 3.4. Здесь $q_x^{(\tau)}$ является эффективным годовым коэффициентом выбытия по всем причинам между возрастами x и $x+1$, соответствующим интенсивности выбытия $\mu_a^{(\tau)}(y-a)$, $x \leqslant y < x+1$.

Рассмотрим теперь m причин выбытия и предположим, что $l_x^{(\tau)}$ доживших до возраста x лет все выбудут исключительно по этим m причинам. Тогда можно себе представить, что эти $l_x^{(\tau)}$ лиц разбиты на подгруппы по $l_x^{(j)}$ лиц, $j=1,2,\ldots,m$, где $l_x^{(j)}$ означает число тех членов первоначальной группы из $l_x^{(\tau)}$ лиц, которые будут выбывать по причине j, так что

$$l_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{m} l_x^{(j)}. \tag{10.4.4}$$

Мы можем теперь определить интенсивность выбытия в возрасте x по причине j формулой

$$\mu_a^{(j)}(x-a) = \lim_{h\to 0}\frac{l_x^{(j)} - l_{x+h}^{(j)}}{hl_x^{(\tau)}},$$

где в знаменателе стоит $l_x^{(\tau)}$, а не $l_x^{(j)}$. Это дает

$$\mu_a^{(j)}(x-a) = -\frac{1}{l_x^{(\tau)}}\frac{dl_x^{(j)}}{dx}. \tag{10.4.5}$$

Из формул (10.4.3)–(10.4.5) следует, что

$$\mu_a^{(\tau)}(x-a) = -\frac{1}{l_x^{(\tau)}}\frac{d}{dx}\sum_{j=1}^{m} l_x^{(j)} = \sum_{j=1}^{m}\mu_a^{(j)}(x-a). \tag{10.4.6}$$

Заменив в формуле (10.4.5) переменную x на y, придем к равенству

$$-dl_y^{(j)} = l_y^{(\tau)}\mu_a^{(j)}(y-a)\,dy$$

и, проинтегрировав его по y от x до $x+1$, получим

$$l_x^{(j)} - l_{x+1}^{(j)} = d_x^{(j)} = \int_x^{x+1} l_y^{(\tau)}\mu_a^{(j)}(y-a)\,dy. \tag{10.4.7}$$

Суммирование по j от 1 до m даст

$$l_x^{(\tau)} - l_{x+1}^{(\tau)} = d_x^{(\tau)} = \int_x^{x+1} l_y^{(\tau)}\mu_a^{(\tau)}(y-a)\,dy. \tag{10.4.8}$$

Далее, разделив формулу (10.4.7) на $l_x^{(\tau)}$, получим

$$\frac{d_x^{(j)}}{l_x^{(\tau)}} = \int_x^{x+1} {}_{y-x}p_x^{(\tau)}\mu_a^{(j)}(y-a)\,dy = q_x^{(j)}, \tag{10.4.9}$$

где $q_x^{(j)}$ — доля тех лиц из числа $l_x^{(\tau)}$ доживших до возраста x, которые выбывают по причине j до возраста $x+1$, когда имеют место все m причин выбытия.

Как и в случае таблиц смертности, детерминистическая модель создает другой язык и концептуальную основу теории выбытия по нескольким причинам.

10.5. Сопутствующие таблицы выбытия по единственной причине

Для каждой причины выбытия, рассмотренной в модели выбытия по нескольким причинам, можно определить модель выбытия по единственной причине, которая зависит лишь от этой выбранной причины выбытия. Определим функции *сопутствующих моделей с единственной причиной выбытия* следующим образом:

$$ {}_tp_x'^{(j)} = \exp\left[-\int_0^t \mu_x^{(j)}(s)\,ds\right], \qquad {}_tq_x'^{(j)} = 1 - {}_tp_x'^{(j)}. \tag{10.5.1}$$

Такие величины, как ${}_tq_x'^{(j)}$, в биологической статистике называются *чистыми вероятностями выбытия*, так как они не связаны с другими причинами выбытия. Однако эти величины имеют много других названий. Одно из них — *независимый коэффициент выбытия* — связано с тем, что причина j не зависит от других причин при вычислении ${}_tq_x'^{(j)}$. Мы будем использовать для ${}_tq_x'^{(j)}$ термин *абсолютный коэффициент выбытия*. Использование слова «коэффициент» при описании величины ${}_tq_x'^{(j)}$ происходит от желания избежать слова «вероятность», чтобы не путать q и q'. Символ ${}_tq_x^{(j)}$ означает вероятность выбытия по причине j между возрастами x и $x+t$, и мы покажем, что эта вероятность не совпадает с ${}_tq_x'^{(j)}$. Кроме того, коэффициент ${}_tp_x'^{(j)}$, в отличие от вероятности ${}_tp_x^{(\tau)}$, не обязательно является функцией дожития, потому что она не подчинена условию $\lim_{t\to\infty} {}_tp_x'^{(j)} = 0$.

Так как

$$\int_0^\infty \mu_x^{(\tau)}(t)\,dt = \infty,$$

из (10.2.14) мы можем лишь заключить, что

$$\int_0^\infty \mu_x^{(j)}(t)\,dt = \infty$$

по крайней мере для одного j. Могут существовать причины выбытия, для которых этот интеграл конечен.

Мы редко сталкиваемся с системами случайного дожития, в которых имеется лишь одна единственная причина выбытия. В пенсионной схеме для работающих выход на пенсию, потеря трудоспособности и увольнение не позволяют рассматривать эту систему как модель, в которой смерть является единственной причиной выбытия в течение периода трудоспособности. В биологических приложениях случайное выбытие из наблюдаемой совокупности и произвольное окончание периода исследования мешают считать смертность единственной причиной выбытия из совокупности.

Как мы увидим в разд. 10.6, обычно первым шагом при построении модели с несколькими причинами выбытия является выбор абсолютных коэффициентов выбытия и принятие предположений о характере возникновения выбытий в любом отдельно взятом годичном возрастном интервале, для того чтобы получить вероятности $q_x^{(j)}$. Обратная задача определения абсолютных коэффициентов на основе этих вероятностей также включает в себя предположения о характере возникновения выбытий. Эти предположения неявно отражены в статистических методах оценивания абсолютных коэффициентов и будут обсуждаться в разд. 10.5.5.

В следующем подразделе мы проверим несколько соотношений между таблицами выбытия по нескольким причинам и сопутствующими таблицами выбытия по отдельным причинам. Затем мы рассмотрим несколько специальных предположений о характере возникновения выбытий в течение годичных возрастных интервалов и отметим некоторые неявные соотношения. В разд. 10.5.5 будут исследованы некоторые статистические подходы к оценке распределений с выбытием по нескольким причинам.

10.5.1. Основные соотношения

Сначала заметим, что так как

$$ {}_tp_x^{(\tau)} = \exp\left\{ -\int_0^t [\mu_x^{(1)}(s) + \mu_x^{(2)}(s) + \cdots + \mu_x^{(m)}(s)]\, ds \right\}, $$

то

$$ {}_tp_x^{(\tau)} = \prod_{i=1}^{m} {}_tp_x^{\prime(i)}. \tag{10.5.2} $$

Этот результат не использует никакой аппроксимации. Он базируется на определении сопутствующей таблицы выбытия по единственной причине, в которой единственная интенсивность выбытия равна интенсивности выбытия по этой же причине в модели с несколькими причинами выбытия. Мы требуем, чтобы этот факт имел место для любого метода построения таблиц выбытия по нескольким причинам на основе набора абсолютных коэффициентов выбытия.

Теперь сравним величины абсолютных коэффициентов и вероятностей. Из формулы (10.5.2) мы видим, что если действует еще одна причина выбытия помимо j, то ${}_tp_x^{\prime(j)} \geqslant {}_tp_x^{(\tau)}$. Из этого следует, что

$$ {}_tp_x^{\prime(j)} \mu_x^{(j)}(t) \geqslant {}_tp_x^{(\tau)} \mu_x^{(j)}(t), $$

и если эти функции проинтегрировать по t на интервале $(0,1)$, то мы получим

$$ q_x^{\prime(j)} = \int_0^1 {}_tp_x^{\prime(j)} \mu_x^{(j)}(t)\, dt \geqslant \int_0^1 {}_tp_x^{(\tau)} \mu_x^{(j)}(t)\, dt = q_x^{(j)}. \tag{10.5.3} $$

Величина других интенсивностей выбытия может так влиять на величину ${}_tp_x^{\prime(j)}$, что она окажется значительно больше, чем ${}_tp_x^{(\tau)}$, и, таким образом, могут возникнуть соответствующие различия между абсолютными коэффициентами и вероятностями.

10.5.2. Повозрастные коэффициенты выбытия по нескольким причинам

В модели выбытия по нескольким причинам существует функция, которая достаточно близка к соответствующей функции для сопутствующей модели выбытия по единственной причине. Для того чтобы ввести эту функцию, вернемся к таблице смертности и вспомним повозрастной коэффициент смертности в возрасте x, обозначаемый через m_x и определяемый по формуле (3.5.13) следующим образом:

$$ m_x = \frac{\int_0^1 {}_tp_x\, \mu_x(t)\, dt}{\int_0^1 {}_tp_x\, dt} = \frac{\int_0^1 l_{x+t}\, \mu_x(t)\, dt}{\int_0^1 l_{x+t}\, dt} = \frac{d_x}{L_x}\,. \tag{10.5.4} $$

Таким образом, m_x — взвешенное среднее интенсивности смертности между возрастами x и $x+1$ и это говорит в пользу термина «повозрастной коэффициент»[1].

Такие повозрастные коэффициенты могут быть определены в контексте выбытия по нескольким причинам. *Повозрастной коэффициент выбытия по всем причинам* определяется по формуле

$$m_x^{(\tau)} = \frac{\int_0^1 {}_tp_x^{(\tau)} \mu_x^{(\tau)}(t)\,dt}{\int_0^1 {}_tp_x^{(\tau)}\,dt} \tag{10.5.5}$$

и является взвешенным средним величины $\mu_x^{(\tau)}(t)$, $0 \leqslant t < 1$. Аналогично, *повозрастной коэффициент выбытия по причине* j — это

$$m_x^{(j)} = \frac{\int_0^1 {}_tp_x^{(\tau)} \mu_x^{(j)}(t)\,dt}{\int_0^1 {}_tp_x^{(\tau)}\,dt}; \tag{10.5.6}$$

он является взвешенным средним величины $\mu_x^{(j)}(t)$, $0 \leqslant t < 1$. Ясно, что

$$m_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{m} m_x^{(j)}.$$

Соответствующий повозрастной коэффициент выбытия в сопутствующей модели с выбытием по единственной причине задается формулой

$$m_x'^{(j)} = \frac{\int_0^1 {}_tp_x'^{(j)} \mu_x^{(j)}(t)\,dt}{\int_0^1 {}_tp_x'^{(j)}\,dt}. \tag{10.5.7}$$

Это — снова взвешенное среднее величины $\mu_x^{(j)}(t)$ в течение того же возрастного интервала, но весами вместо ${}_tp_x^{(\tau)}$ являются ${}_tp_x'^{(j)}$. Если интенсивность выбытия $\mu_x^{(j)}(t)$ постоянна для $0 \leqslant t < 1$, то $m_x^{(j)} = m_x'^{(j)} = \mu_x^{(j)}(0)$. Если $\mu_x^{(j)}(t)$ является возрастающей функцией от t, то ${}_tp_x'^{(j)}$ дает бóльшие веса для более высоких значений этой интенсивности, чем ${}_tp_x^{(\tau)}$, и $m_x'^{(j)} > m_x^{(j)}$. Если $\mu_x^{(j)}(t)$ — убывающая функция от t, то $m_x'^{(j)} < m_x^{(j)}$. См. упр. 10.33 для более формального разбора этих утверждений.

Повозрастные коэффициенты выбытия обеспечивают удобный, но приближенный метод перехода от $q_x'^{(j)}$ к $q_x^{(j)}$, $j = 1, 2, \ldots, m$, и обратно. Это иллюстрируется в упр. 10.18.

10.5.3. Предположение о постоянстве интенсивности выбытия в модели выбытия по нескольким причинам

Исследуем специальные предположения относительно возникновения случаев выбытия. Сначала предположим, что постоянны интенсивность выбытия по причине j и интенсивность выбытия по всем причинам в течение возрастного интервала $(x, x+1)$. Из этого следует, что

$$\begin{gathered} \mu_x^{(j)}(t) = \mu_x^{(j)}(0), \\ \mu_x^{(\tau)}(t) = \mu_x^{(\tau)}(0), \qquad 0 \leqslant t < 1. \end{gathered}$$

[1] Это высказывание относится к английскому варианту термина «central rate». — *Прим. ред.*

Тогда для $0 \leqslant s < 1$ имеем

$$_sq_x^{(j)} = \int_0^1 {}_tp_x^{(\tau)}\mu_x^{(j)}(t)\,dt = \frac{\mu_x^{(j)}(0)}{\mu_x^{(\tau)}(0)}\int_0^s {}_tp_x^{(\tau)}\mu_x^{(\tau)}(t)\,dt = \frac{\mu_x^{(j)}(0)}{\mu_x^{(\tau)}(0)}\,{}_sq_x^{(\tau)}. \qquad (10.5.8)$$

Но, кроме того, для любого r из $(0,1)$ в предположении, что интенсивность выбытия постоянна,

$$r\mu_x^{(\tau)}(0) = -\ln{}_rp_x^{(\tau)} \qquad \text{и} \qquad r\mu_x^{(j)}(0) = -\ln{}_rp_x^{\prime(j)},$$

так что в силу формулы (10.5.8)

$$_sq_x^{(j)} = \frac{\ln{}_rp_x^{\prime(j)}}{\ln{}_rp_x^{(\tau)}}\,{}_sq_x^{(\tau)}. \qquad (10.5.9)$$

Равенство (10.5.9) может быть переписано в виде

$$_rp_x^{\prime(j)} = ({}_rp_x^{(\tau)})^{{}_sq_x^{(j)}/{}_sq_x^{(\tau)}},$$

а затем в пределе при r, стремящемся к 1, его можно разрешить относительно $q_x^{\prime(j)}$:

$$q_x^{\prime(j)} = 1 - (p_x^{(\tau)})^{{}_sq_x^{(j)}/{}_sq_x^{(\tau)}}. \qquad (10.5.10)$$

Если предположение о постоянстве интенсивности выбытия имеет место для каждой из причин выбытия (а следовательно, автоматически, для выбытия по всем причинам), то формулу (10.5.9) при r и s, близких к 1, и равенство (10.5.2) можно использовать для вычисления $q_x^{(j)}$ по заданным значениям $q_x^{\prime(j)}$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Кроме того, равенство (10.5.10) полезно для получения абсолютных коэффициентов по заданному набору вероятностей выбытия. Заметим, что формулы (10.5.9) и (10.5.10) требуют особого обсуждения, если $p_x^{\prime(j)}$ или $p_x^{(\tau)}$ равны нулю.

10.5.4. Предположение о равномерности распределения моментов выбытия в модели выбытия по нескольким причинам

Формула (10.5.10) имеет место при других предположениях. Одно из них состоит в том, что моменты выбытия по причине j и моменты выбытия по всем причинам в контексте модели выбытия по нескольким причинам равномерно распределены в возрастном интервале $(x, x+1)$. Таким образом, мы предполагаем, что

$$_tq_x^{(j)} = tq_x^{(j)} \qquad \text{и} \qquad {}_tq_x^{(\tau)} = tq_x^{(\tau)}.$$

При данном предположении мы также видим, что в силу (10.2.12)

$$_tp_x^{(\tau)}\mu_x^{(j)}(t) = q_x^{(j)} \qquad (10.5.11)$$

и

$$\mu_x^{(j)}(t) = \frac{q_x^{(j)}}{{}_tp_x^{(\tau)}} = \frac{q_x^{(j)}}{1 - tq_x^{(\tau)}}.$$

Тогда

$$_sp_x^{\prime(j)} = \exp\left[-\int_0^s \mu_x^{(j)}(t)\,dt\right] = \exp\left(-\int_0^s \frac{q_x^{(j)}}{1 - tq_x^{(\tau)}}\,dt\right)$$

$$= \exp\left[\frac{q_x^{(j)}}{q_x^{(\tau)}}\ln(1 - sq_x^{(\tau)})\right] = ({}_sp_x^{(\tau)})^{q_x^{(j)}/q_x^{(\tau)}}. \qquad (10.5.12)$$

При $s = 1$ равенства (10.5.10) и (10.5.12) дают то же самое соотношение, связывающее $q_x^{\prime(j)}$ с $q_x^{(j)}$ и $q_x^{(\tau)}$. А тогда формулу (10.5.9) при $r = 1$ можно использовать для получения $q_x^{(j)}$. Упражнение 10.22 дает дополнительную информацию о связи между изложенным в разд. 10.5.3 и 10.5.4.

Пример 10.5.1. Продолжим пример 10.3.1, подсчитав $q_x'^{(1)}$ и $q_x'^{(2)}$ с помощью формулы (10.5.10).

Решение. Согласно (10.5.10), получаются следующие результаты:

x	$q_x^{(1)}$	$q_x^{(2)}$	$q_x'^{(1)}$	$q_x'^{(2)}$
65	0,02	0,05	0,02052	0,05052
66	0,03	0,06	0,03095	0,06094
67	0,04	0,07	0,04149	0,07147
68	0,05	0,08	0,05215	0,08213
69	0,06	0,09	0,06294	0,09291
70	0,00	1,00	—	—

В возрасте 70 лет коэффициенты зависят от требования обязательного выхода на пенсию, и нет необходимости в $q_{70}'^{(1)}$ и $q_{70}'^{(2)}$, хотя их можно найти, использовав $q_{70}^{(1)}$ и $q_{70}^{(2)}$ соответственно. ▼

10.5.5. Проблема оценивания

В определение абсолютного коэффициента выбытия, данное формулой (10.5.1), входит интенсивность выбытия из теории выбытия по нескольким причинам, заданная формулой (10.2.11). Из определения (10.5.1) следуют все результаты настоящего раздела и возможность их применения к построению распределений для нескольких причин выбытия по абсолютным коэффициентам выбытия. Тем не менее, остаются вопросы об интерпретации и оценивании ${}_tp_x'^{(j)}$.

Если функция «плотности» $f_{T,J}(t,j)$ совместного распределения с.в. T и J известна, то функция дожития и интенсивности выбытия определяются по формулам из разд. 10.2. Например, формула (10.2.13) следует из предположения о том, что выбытие происходит по m взаимоисключающим причинам. Настоящий подраздел посвящен вопросу о том, при каких условиях информация, полученная в контексте единственной причины выбытия, может быть использована для построения распределения пары (T, J).

Мы проиллюстрируем этот вопрос, рассмотрев случай двух причин выбытия. Каждая сопутствующая модель с единственной причиной выбытия задается с.в. $T_j(x)$ продолжительности периода до момента выбытия по причине j и соответствующей функцией дожития $s_{T_j}(t) = \mathbf{P}(T_j(x) > t)$, $j = 1, 2$. Совместная функция дожития с.в. $T_1(x)$ и $T_2(x)$ задается формулой

$$s_{T_1,T_2}(t_1,t_2) = \mathbf{P}\{[T_1(x) > t_1] \cap [T_2(x) > t_2]\}.$$

В этом контексте с.в. T продолжительности периода времени до выбытия равна минимуму из $T_1(x)$ и $T_2(x)$, и, согласно формуле (9.3.1) из разд. 9.3, соответствующая функция дожития имеет вид $s_T(t) = s_{T_1,T_2}(t,t)$.

Если с.в. $T_1(x)$ и $T_2(x)$ независимы, то

$$s_T(t) = s_{T_1}(t)s_{T_2}(t) = s_{T_1,T_2}(t)(t,0)s_{T_1,T_2}(0,t)$$

и

$$\mu_x^{(\tau)}(t) = -\frac{d}{dt}\ln s_{T_1}(t)s_{T_2}(t) = \mu_x^{(1)}(t) + \mu_x^{(2)}(t). \qquad (10.5.13)$$

С другой стороны, если с.в. $T_1(x)$ и $T_2(x)$ зависимы, то

$$\mu_x^{(\tau)}(t) = -\frac{d}{dt}\ln s_{T_1,T_2}(t,t) \neq -\frac{d}{dt}\ln s_{T_1,T_2}(t,0) - \frac{d}{dt}\ln s_{T_1,T_2}(0,t). \qquad (10.5.14)$$

Два слагаемых в правой части равенства (10.5.13) называются *маргинальными интенсивностями выбытия*, ассоциированными с соответствующими с.в. $T_1(x)$ и $T_2(x)$.

Если $T_1(x)$ и $T_2(x)$ независимы, то маргинальные интенсивности выбытия из модели выбытия по единственной причине могут быть использованы вместе с равенством (10.5.2) для получения ${}_tp_x^{(\tau)}$. Если с.в. $T_1(x)$ и $T_2(x)$ зависимы, то нет никакой уверенности, что, предполагая выполненным равенство (10.5.2), мы получим функцию дожития для случайной величины продолжительности периода времени до выбытия в модели выбытия по нескольким причинам.

Пример 10.5.2. Этот пример основывается на примерах 9.2.1, 9.2.2 и 9.3.1. Пусть зависимые с.в. $T_1(x)$ и $T_2(x)$ имеют такую совместную функцию плотности:

$$f_{T_1,T_2}(s,t) = \begin{cases} 0{,}0006(s-t)^2, & 0 < s < 10,\ 0 < t < 10, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Совместная функция дожития построена в примере 9.2.2, а функция дожития для с.в. $T = \min[T_1, T_2]$ получена в примере 9.3.1.

Покажем, что

$$-\frac{d}{dt}\ln s_T(t) \neq -\frac{d}{dt}\ln s_{T_1,T_2}(t,0) - \frac{d}{dt}\ln s_{T_1,T_2}(0,t).$$

Решение. Имеем

$$-\frac{d}{dt}\ln s_T(t) = \frac{4}{10-t}, \qquad 0 < t < 10,$$

и

$$\begin{aligned}-\frac{d}{dt}\ln s_{T_1,T_2}(t,0) &= \frac{4000 - 1200t + 120t^2}{20\,000 - 4000t + 600t^2 - 40t^3} \\ &= \frac{100 - 30t + 3t^2}{500 - 100t + 15t^2 - t^3} = \frac{100 - 30t + 3t^2}{(10-t)(50-5t+t^2)};\end{aligned}$$

последнее выражение по соображениям симметрии также равно $-\frac{d}{dt}\ln s_{T_1,T_2}(0,t)$. Следовательно,

$$-\frac{d}{dt}\ln s_T(t) = \frac{4}{10-t} \neq \frac{1}{10-t}\,\frac{200 - 60t + 6t^2}{50 - 5t + t^2}. \qquad ▼$$

Пример 10.5.3. Этот пример основан на примерах 9.2.3 и 9.3.2. Независимые с.в. $T_1(x)$ и $T_2(x)$ имеют совместную функцию плотности

$$f_{T_1,T_2}(s,t) = [0{,}02(10-s)][0{,}02(10-t)], \qquad 0 < s < 10,\ 0 < t < 10.$$

Покажем, что

$$-\frac{d}{dt}\ln s_T(t) = -\frac{d}{dt}\ln s_{T_1,T_2}(t,0) - \frac{d}{dt}\ln s_{T_1,T_2}(0,t).$$

Решение. Функция дожития с.в. $T = \min[T_1(x), T_2(x)]$ построена в примере 9.3.2. Следовательно,

$$-\frac{d}{dt}\ln s_T(t) = \frac{4}{10-t}, \qquad 0 < t < 10,$$

$$-\frac{d}{dt}\ln s_{T_1,T_2}(t,0) = \frac{2}{10-t}, \qquad 0 < t < 10,$$

и из соображений симметрии

$$-\frac{d}{dt}\ln s_{T_1,T_2}(0,t) = \frac{2}{10-t}, \qquad 0 < t < 10.$$

Значит,

$$-\frac{d}{dt}\ln s_T(t) = -\frac{d}{dt}\ln s_{T_1,T_2}(t,0) - \frac{d}{dt}\ln s_{T_1,T_2}(0,t). \qquad \blacktriangledown$$

Интересным, но обескураживающим аспектом примеров 10.5.2 и 10.5.3 является то, что две зависимые случайные величины продолжительности периода времени до момента выбытия и две аналогичные независимые случайные величины дают одно и то же распределение с.в. $T = \min[T_1(x), T_2(x)]$. Значения T можно наблюдать, но без дополнительной информации невозможно решить, какая из этих двух моделей лежит в основе наблюдаемых значений. Как и в разд. 9.3, это — пример невозможности идентификации. Далее в настоящей главе при построении распределений в модели с несколькими причинами выбытия, исходя из распределений в сопутствующих моделях с единственной причиной выбытия, будет предполагаться, что случайные величины из этих сопутствующих моделей независимы.

Замечание. Нам может помочь сравнение модели страхования для нескольких лиц и модели выбытия по нескольким причинам, но эти модели не эквивалентны. Основное различие заключается в двух фактах, которые отмечались при обсуждении формулы (10.5.2) и в примере 10.5.2. В одной модели можно, по крайней мере теоретически, наблюдать обе случайные величин $T(x)$ и $T(y)$, в то время как в другой наблюдается только минимум из двух с.в. $T_1(x)$ и $T_2(x)$, а также то, на какой из этих двух случайных величин этот минимум достигается. Соответствующая проблема в оценивании модели страхования для нескольких лиц упоминалась в разд. 9.3. Кроме того, $\lim_{t\to\infty} {}_tp_x = \lim_{t\to\infty} {}_tp_y = 0$, но нет никаких гарантий, что

$$\lim_{t\to\infty} {}_tp_x'^{(j)} = 0, \qquad j = 1, 2.$$

10.6. Построение таблиц выбытия по нескольким причинам

При построении модели выбытия по нескольким причинам лучше всего, если для непосредственной оценки вероятностей $q_x^{(j)}$ можно использовать различные данные, включая данные о возрасте и причинах выбытия в исследуемой совокупности. Большие, хорошо обоснованные пенсионные схемы для работающих располагают такими данными. В других системах такие данные часто недоступны. Другой возможностью является построение модели на основе коэффициентов выбытия из сопутствующих моделей с единственной причиной выбытия, которые, как предполагается, адекватно описывают изучаемую совокупность. Адекватность такой модели следует затем проверить с помощью данных, которые становятся известными.

Если подобраны подходящие сопутствующие таблицы выбытия по единственной причине, то для завершения построения таблиц выбытия по нескольким причинам можно использовать результаты разд. 10.5. Если известны $p_x'^{(j)}$ для $j = 1, 2, \ldots, m$ и всех значений x, то можно подсчитать $p_x^{(\tau)}$, пользуясь формулой (10.5.2), и $q_x^{(\tau)}$, пользуясь формулой $q_x^{(\tau)} = 1 - p_x^{(\tau)}$. Остается разбить $q_x^{(\tau)}$ на компоненты $q_x^{(j)}$ для $j = 1, 2, \ldots, m$. Если в модели принято предположение о постоянстве интенсивности выбытия или о равномерности распределения моментов выбытия, то для вычисления величины $q_x^{(j)}$ может быть использована формула (10.5.9).

Пример 10.6.1. Используем формулы (10.5.2) и (10.5.9) для получения таблицы выбытия по нескольким причинам, соответствующей абсолютным коэффициентам выбытия, заданным ниже. Предположительно актуарий исследовал характеристики группы участников и решил, что сопутствующие таблицы выбытия по единственной причине являются подходящими для изучаемой совокупности. Предполагается также, что причина 3 является выходом на пенсию, что может происходить между возрастами 65 и 70 лет, а в 70 лет происходит обязательно.

x	$q_x'^{(1)}$	$q_x'^{(2)}$	$q_x'^{(3)}$
65	0,020	0,02	0,04
66	0,025	0,02	0,06
67	0,030	0,02	0,08
68	0,035	0,02	0,10
69	0,040	0,02	0,12

Решение. Приведенная ниже таблица включает в себя результаты расчета вероятностей выбытия. Формула (10.5.2) может быть переписана в виде

$$q_x^{(\tau)} = 1 - \prod_{j=1}^{3} (1 - q_x'^{(j)}).$$

В этом равенстве предполагаемая независимость трех причин выбытия очевидна. Формула (10.5.9) и условие обязательного выхода на пенсию позволяют получить вероятности выбытия по нескольким причинам. Таблица выбытия по нескольким причинам строится, как в примере 10.3.1.

x	$q_x^{(\tau)}$	$q_x^{(1)}$	$q_x^{(2)}$	$q_x^{(3)}$	$l_x^{(\tau)}$	$d_x^{(1)}$	$d_x^{(2)}$	$d_x^{(3)}$
65	0,07802	0,01940	0,01940	0,03921	1000,00	19,40	19,40	39,21
66	0,10183	0,02401	0,01916	0,05867	921,99	22,14	17,67	54,09
67	0,12545	0,02851	0,01891	0,07803	828,09	23,61	15,66	64,62
68	0,14887	0,03290	0,01866	0,09731	724,20	23,83	13,51	70,47
69	0,17210	0,03720	0,01841	0,11649	616,39	22,93	11,35	71,80
70	1,00000	0,00000	0,00000	1,00000	510,31	0,00	0,00	510,31

▼

Как уже было отмечено, если одна из величин $p_x'^{(j)}$, $p_x^{(\tau)}$ равна нулю, то формулы (10.5.9) и (10.5.10) неприменимы. Необходимо найти какой-нибудь другой метод. Один такой метод, который позволяет справиться с этой неопределенностью и подходит для специальных поправок, базируется на предполагаемых распределениях выбытия в сопутствующих таблицах выбытия по единственной причине, а не на предположениях о вероятностях выбытия по нескольким причинам, как в разд. 10.5.

Сначала рассмотрим предположение о равномерности распределения моментов выбытия (в каждом годичном возрастном интервале) в сопутствующих таблицах выбытия по единственной причине. Мы ограничимся ситуацией с тремя причинами выбытия, но метод и формулы легко распространить на случай $m > 3$. При указанном предположении

$$ {}_tp_x'^{(j)} = 1 - t q_x'^{(j)}, \qquad j = 1,2,3,\ 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{10.6.1}$$

$$ {}_tp_x'^{(j)} \mu_x^{(j)}(t) = \frac{d}{dt}(-{}_tp_x'^{(j)}) = q_x'^{(j)}. \tag{10.6.2}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} q_x^{(1)} &= \int_0^1 {}_tp_x^{(\tau)} \mu_x^{(1)}(t)\,dt = \int_0^1 {}_tp_x'^{(1)} \mu_x^{(1)}(t)\, {}_tp_x'^{(2)}\, {}_tp_x'^{(3)}\,dt \\ &= q_x'^{(1)} \int_0^1 (1 - tq_x'^{(2)})(1 - tq_x'^{(3)})\,dt \\ &= q_x'^{(1)} \left[1 - \frac{1}{2}\,(q_x'^{(2)} + q_x'^{(3)}) + \frac{1}{3}\, q_x'^{(2)} q_x'^{(3)}\right]. \end{aligned} \tag{10.6.3}$$

Аналогичные формулы имеют место для $q_x^{(2)}$ и $q_x^{(3)}$, и можно проверить, что

$$\begin{aligned} q_x^{(1)} + q_x^{(2)} + q_x^{(3)} &= q_x'^{(1)} + q_x'^{(2)} + q_x'^{(3)} \\ &\quad - (q_x'^{(1)} q_x'^{(2)} + q_x'^{(1)} q_x'^{(3)} + q_x'^{(2)} q_x'^{(3)}) + q_x'^{(1)} q_x'^{(2)} q_x'^{(3)} \\ &= 1 - (1 - q_x'^{(1)})(1 - q_x'^{(2)})(1 - q_x'^{(3)}) = q_x^{(\tau)}. \end{aligned} \tag{10.6.4}$$

Пример 10.6.2. Получим вероятности выбытия для возрастов 65–69 лет из данных примера 10.6.1 в предположении равномерности распределения моментов выбытия в каждом годичном возрастном интервале в каждой из сопутствующих таблиц выбытия по единственной причине.

Решение. Это — применение формулы (10.6.3).

x	$q_x'^{(1)}$	$q_x'^{(2)}$	$q_x'^{(3)}$	$q_x^{(1)}$	$q_x^{(2)}$	$q_x^{(3)}$
65	0,020	0,02	0,04	0,01941	0,01941	0,03921
66	0,025	0,02	0,06	0,02401	0,01916	0,05866
67	0,030	0,02	0,08	0,02852	0,01892	0,07802
68	0,035	0,02	0,10	0,03292	0,01867	0,09727
69	0,040	0,02	0,12	0,03723	0,01843	0,11643

Эти вероятности близки к полученным с помощью формулы (10.5.9) вероятностям из примера 10.6.1. ▼

Мы завершим этот раздел другим примером, иллюстрирующим использование специального распределения для одной из причин выбытия. Иногда в силу особенности моделируемой ситуации требуется рассматривать специальные распределения.

Пример 10.6.3. Рассмотрим ситуацию с тремя причинами выбытия: смертью, потерей трудоспособности и увольнением. Предположим, что моменты смерти и потери трудоспособности в сопутствующих таблицах выбытия по единственной причине с абсолютными коэффициентами $q_x'^{(1)}$ и $q_x'^{(2)}$ соответственно равномерно распределены в каждом годичном возрастном интервале. Далее предположим, что увольнение происходит лишь в конце года с абсолютным коэффициентом $q_x'^{(3)}$.

(a) Выведем формулы для вероятностей выбытия по этим трем причинам в возрастном интервале от x до $x+1$.

(b) Модифицируем формулы для вероятностей в предположении, что

• в сопутствующей модели выбытия по единственной причине увольнение происходит лишь в середине или в конце года,

• увольнение происходит в середине или в конце года равными долями, по $(1/2)q_x'^{(3)}$ от числа работавших на начало рассматриваемого года.

Замечание. До сих пор наши модели выбытия по нескольким причинам были непрерывными, за исключением, возможно, установления обязательного возраста выхода на пенсию. Кроме того, мы начали с модели выбытия по нескольким причинам и после определения интенсивности выбытия $\mu_x^{(j)}(t)$, $j = 1, 2, \ldots, m$, перешли к сопутствующим таблицам выбытия по единственной причине. В этом примере мы начнем с таблиц выбытия по единственной причине. В одной из этих таблиц выбытие происходит дискретно, в конце данного интервала. Мы не будем пытаться определить интенсивность выбытия для этого дискретного случая, но продолжим построение модели выбытия по нескольким причинам, исходя непосредственно из таблиц выбытия по единственной причине и соотношений (10.2.19) и (10.5.2), выведенных нами ранее.

Решение. (a) На рис. 10.6.1 изображены коэффициенты дожития для данных таблиц выбытия по единственной причине и для таблицы выбытия по нескольким причинам, где ${}_tp_x^{(\tau)} = {}_tp_x'^{(1)}\,{}_tp_x'^{(2)}\,{}_tp_x'^{(3)}$ для нецелых $t \geqslant 0$. При $t = 1$ функции ${}_tp_x'^{(3)}$ и ${}_tp_x^{(\tau)}$ имеют разрыв, так что мы рассматриваем

$$\lim_{t\to 1-} {}_tp_x^{(\tau)} = p_x'^{(1)} p_x'^{(2)} 1 \qquad \text{и} \qquad p_x^{(\tau)} = p_x'^{(1)} p_x'^{(2)} (1 - q_x'^{(3)}).$$

Мы также требуем, чтобы для нашей таблицы выбытия по нескольким причинам выполнялось соотношение

$$q_x^{(\tau)} = q_x^{(1)} + q_x^{(2)} + q_x^{(3)} = 1 - p_x^{(\tau)} = 1 - p_x'^{(1)} p_x'^{(2)} (1 - q_x'^{(3)}).$$

Полагаем

$$q_x^{(1)} = \int_0^1 {}_tp_x^{(\tau)} \mu_x^{(1)}(t)\,dt = \int_0^1 {}_tp_x'^{(1)}\,{}_tp_x'^{(2)}(1)\mu_x^{(1)}(t)\,dt$$
$$= q_x'^{(1)} \int_0^1 (1 - tq_x'^{(2)})\,dt = q_x'^{(1)} \left(1 - \frac{1}{2}\,q_x'^{(2)}\right).$$

Аналогично,

$$q_x^{(2)} = q_x'^{(2)} \left(1 - \frac{1}{2}\,q_x'^{(1)}\right).$$

Тогда

$$q_x^{(3)} = q_x^{(\tau)} - (q_x^{(1)} + q_x^{(2)}) = 1 - p_x'^{(1)} p_x'^{(2)} (1 - q_x'^{(3)}) - q_x'^{(1)} - q_x'^{(2)} + q_x'^{(1)} q_x'^{(2)},$$

и, поскольку

$$1 - q_x'^{(1)} - q_x'^{(2)} + q_x'^{(1)} q_x'^{(2)} = p_x'^{(1)} p_x'^{(2)},$$

получим

$$q_x^{(3)} = p_x'^{(1)} p_x'^{(2)} q_x'^{(3)}.$$

Заметим, что

$$\lim_{t\to 1-} {}_tp_x^{(\tau)} - \lim_{t\to 1+} {}_tp_x^{(\tau)} = p_x'^{(1)} p_x'^{(2)} q_x'^{(3)} = q_x^{(3)}.$$

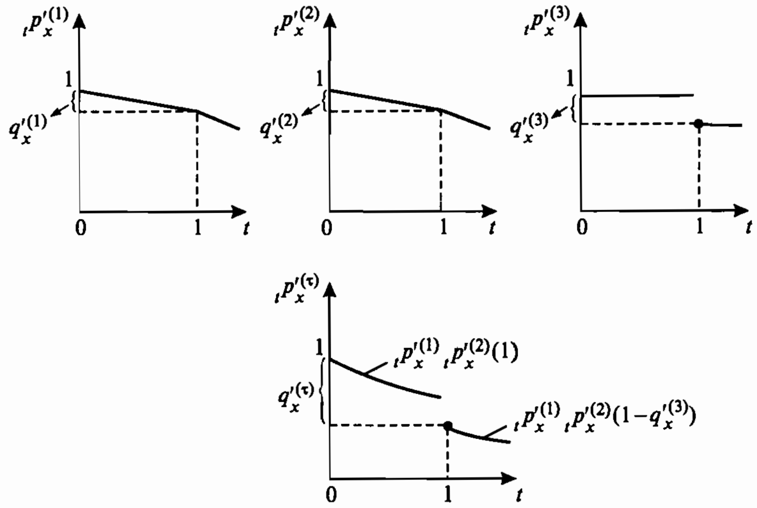


Рис. 10.6.1. Коэффициенты дожития ${}_tp_x'^{(j)}$, $j = 1, 2, 3$, и ${}_tp_x^{(\tau)}$

Таким образом, скачок в точке $t = 1$ равен $q_x^{(3)}$.

(b) Здесь ${}_tp_x'^{(1)}$ и ${}_tp_x'^{(2)}$ такие же, как и на рис. 10.6.1, но ${}_tp_x'^{(3)}$ и ${}_tp_x^{(\tau)}$ теперь имеют разрывы в точках $t = 1/2$ и $t = 1$, как показано на рис. 10.6.2.

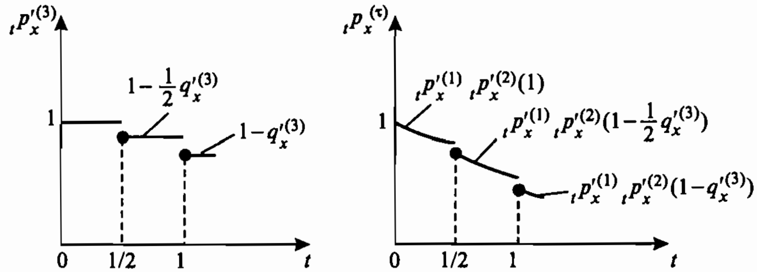


Рис. 10.6.2. Коэффициенты дожития ${}_tp_x'^{(3)}$ и ${}_tp_x^{(\tau)}$

Поступаем, как в п. (a), но, рассматривая интервалы $[0; 1/2)$ и $[1/2; 1)$, положим

$$q_x^{(1)} = q_x'^{(1)} \int_0^{1/2} (1 - tq_x'^{(2)})\, dt + q_x'^{(1)} \left(1 - \frac{1}{2}\, q_x'^{(3)}\right) \int_{1/2}^{1} (1 - tq_x'^{(2)})\, dt$$
$$= q_x'^{(1)} \left(1 - \frac{1}{2}\, q_x'^{(2)} - \frac{1}{4}\, q_x'^{(3)} + \frac{3}{16}\, q_x'^{(2)} q_x'^{(3)}\right).$$

Аналогично,

$$q_x^{(2)} = q_x'^{(2)} \left(1 - \frac{1}{2}\, q_x'^{(1)} - \frac{1}{4}\, q_x'^{(3)} + \frac{3}{16}\, q_x'^{(1)} q_x'^{(3)}\right).$$

Тогда

$$q_x^{(3)} = 1 - p_x^{(\tau)} - q_x^{(1)} - q_x^{(2)} = 1 - p_x'^{(1)} p_x'^{(2)} (1 - q_x'^{(3)}) - q_x^{(1)} - q_x^{(2)},$$

что приводит к формуле

$$q_x^{(3)} = q_x'^{(3)} \left(1 - \frac{3}{4} q_x'^{(1)} - \frac{3}{4} q_x'^{(2)} + \frac{5}{8} q_x'^{(1)} q_x'^{(2)}\right). \qquad \blacktriangledown$$

10.7. Замечания и литература

Исторический обзор теории выбытия по нескольким причинам содержится в работе [Seal 1977]. В работе [Chiang 1968] теория излагается на языке конкурирующих рисков. Основы актуарной теории моделей выбытия по нескольким причинам были заложены Мейкемом [Makeham 1874]. Работы [Menge 1932], [Nesbitt, Van Eenam 1948] посвящены детерминистической интерпретации интенсивностей выбытия и вступления. Бикнелл и Несбитт [Bicknell, Nesbitt 1956] развивают очень общую теорию страхования отдельного лица, используя детерминистическую модель выбытия по нескольким причинам. Хикман [Hickman 1964] развивает эту же теорию на языке стохастической модели, и это изложение составляет основу большей части настоящей главы. Анализу таблиц с выбытием по причине смерти посвящены работы [Greville 1948], [Preston, Keyfitz, Schoen 1973].

Озадачивающие результаты оценивания в случае зависимых случайных величин обсуждались в работе [Elandt-Johnson, Johnson 1980]. Промислов [Promislow 1991b] высказал замечательную мысль, что на практике модели выбытия по нескольким причинам должны быть селекционными в смысле гл. 3. Он развил теорию и соответствующие обозначения для селекционной модели с несколькими причинами выбытия. Упражнения 10.3 и 10.24 основываются на обсуждении из работы [Robinson 1984].

В статье [Carriere 1994] связки, обсуждавшиеся в разд. 9.6.2, применены для получения распределений с несколькими причинами выбытия, которые включают зависимые координатные случайные величины. Там же обсуждается проблема идентификации и дается обзор условий, при которых возможно идентифицировать единственную функцию дожития $s_{T_1(x),T_2(x)}(t,t)$.

Упражнения

К разделу 10.2

10.1. Пусть $\mu_x^{(j)}(t) = \mu_x^{(j)}(0)$, $j = 1, 2, \ldots, m$, $t \geqslant 0$. Выразите
(a) $f_{T,J}(t,j)$, (b) $f_J(j)$, (c) $f_T(t)$.

Функции, о которых идет речь в пп. (a) и (c) — это совместная «плотность» и маргинальная плотность, а функция из п. (b) — функция вероятностей. Покажите, что T и J — независимые случайные величины.

10.2. Интенсивности выбытия для модели выбытия по двум причинам заданы формулами

$$\mu_x^{(1)}(t) = \frac{1}{100-(x+t)} \quad \text{и} \quad \mu_x^{(2)}(t) = \frac{2}{100-(x+t)}, \qquad t < 100 - x.$$

Найдите формулы при $x = 50$ для
(a) $f_{T,J}(t,j)$, (b) $f_T(t)$, (c) $f_J(j)$, (d) $f_{J\,|\,T}(j\,|\,t)$.

10.3. Пусть задана функция «плотности» совместного распределения

$$f_{T,J}(t,j) = \begin{cases} pu_1\, e^{-(u_1+v_1)t} + (1-p)u_2\, e^{-(u_2+v_2)t}, & 0 \leqslant t,\ j = 1, \\ pv_1\, e^{-(u_1+v_1)t} + (1-p)v_2\, e^{-(u_2+v_2)t}, & 0 \leqslant t,\ j = 2, \end{cases}$$

где $0 < p < 1$ и $0 < u_1, u_2, v_1, v_2$. Найдите

(a) функцию плотности $f_T(t)$ и функцию вероятностей $f_J(j)$,

(b) функцию дожития $s_T(t)$.

К разделу 10.3

10.4. Используя вероятности выбытия по нескольким причинам из примера 10.3.1, оцените следующие выражения:

(a) ${}_3p_{65}^{(\tau)}$, (b) ${}_{3|}q_{65}^{(1)}$, (c) ${}_3q_{65}^{(2)}$.

10.5. Следующие вероятности выбытия по нескольким причинам относятся к студентам, поступившим в колледж с четырехлетним сроком обучения.

Пошаговая продолжительность учебы на начало академического года	Вероятность: выбытия по причине академической неуспеваемости, $j = 1$	Вероятность: выбытия по другим причинам, $j = 2$	Вероятность: выбытия по причине успешного окончания академического года
0	0,15	0,25	0,60
1	0,10	0,20	0,70
2	0,05	0,15	0,80
3	0,00	0,10	0,90

Количество поступивших 1000 человек.

(a) Найдите математическое ожидание числа окончивших. Чему равна дисперсия?

(b) Каково математическое ожидание числа тех, кто будет исключен за неуспеваемость в течение всей четырехлетней программы? Чему равна дисперсия?

10.6. Постройте таблицу выбытия по нескольким причинам на основе данных из упр. 10.5 и используйте ее, чтобы найти

(a) маргинальное распределение с.в. J (причины выбытия), которая принимает значения выбытия по академический неуспеваемости, выбытия по другим причинам и выбытия по причине успешного окончания колледжа,

(b) условное распределение причины выбытия при условии, что студент прекращает обучение в третий год.

К разделу 10.4

10.7. При $\mu^{(1)}(x) = 1/(a-x)$, $0 \leqslant x < a$, и $\mu^{(2)}(x) = 1$, предполагая, что $l_0^{(\tau)} = a$, найдите

(a) $l_x^{(\tau)}$, (b) $d_x^{(1)}$, (c) $d_x^{(2)}$.

10.8. При $\mu^{(1)}(x) = 2x/(a-x^2)$, $0 \leqslant x < \sqrt{a}$, $\mu^{(2)}(x) = c$, $c > 0$, и $l_0^{(\tau)} = 1000$ найдите $l_x^{(\tau)}$.

10.9. Найдите выражения для

(a) $\dfrac{d}{dx}\,{}_tq_x^{(\tau)}$, (b) $\dfrac{d}{dx}\,{}_tq_x^{(j)}$, (c) $\dfrac{d}{dt}\,{}_tq_x^{(j)}$.

К разделу 10.5

10.10. Используя данные из упр. 10.5 и предполагая, что моменты выбытия в модели выбытия по нескольким причинам имеют равномерное распределение, составьте таблицу значений $q_k^{\prime(j)}$, $j = 1, 2$, $k = 0, 1, 2, 3$, где k — пошаговая продолжительность учебы.

10.11. Пусть $\mu_x^{(1)}(t)$ равна константе c при $0 \leqslant t \leqslant 1$. Выразите в терминах c и ${}_tp_x^{(\tau)}$ следующие величины:

(a) $q_x^{\prime(1)}$, (b) $m_x^{(1)}$, (c) $q_x^{(1)}$.

10.12. Покажите, что при подходящих предположениях о равномерности распределения моментов выбытия

(a) $m_x^{(\tau)} = \dfrac{q_x^{(\tau)}}{1-(1/2)q_x^{(\tau)}}$, (b) $m_x^{(j)} = \dfrac{q_x^{(j)}}{1-(1/2)q_x^{(\tau)}}$, (c) $m_x^{\prime(j)} = \dfrac{q_x^{\prime(j)}}{1-(1/2)q_x^{\prime(j)}}$

и, обратно,

$$\text{(d) } q_x^{(\tau)} = \frac{m_x^{(\tau)}}{1-(1/2)m_x^{(\tau)}}, \quad \text{(e) } q_x^{(j)} = \frac{m_x^{(j)}}{1-(1/2)m_x^{(\tau)}}, \quad \text{(f) } q_x'^{(j)} = \frac{m_x'^{(j)}}{1-(1/2)m_x'^{(j)}}.$$

10.13. Упорядочите по возрастанию следующие величины: $q_x'^{(j)}$, $q_x^{(j)}$, $m_x'^{(j)}$. Поясните ваши соображения.

10.14. Пусть для таблицы выбытия по двум причинам $q_{40}'^{(1)} = 0{,}02$ и $q_{40}'^{(2)} = 0{,}04$. Вычислите $q_{40}^{(\tau)}$ с точностью до четырех знаков после запятой.

10.15. Пусть для модели выбытия по двум причинам $m_{40}^{(\tau)} = 0{,}2$, $q_{40}'^{(1)} = 0{,}1$. Подсчитайте $q_{40}'^{(2)}$ с точностью до четырех знаков после запятой, предполагая:

(a) равномерность распределения моментов выбытия в этой модели выбытия по нескольким причинам,

(b) равномерность распределение моментов выбытия в сопутствующих таблицах выбытия по единственной причине.

10.16. Используя данные из упр. 10.5 и предполагая равномерность распределения моментов выбытия в модели выбытия по нескольким причинам, постройте таблицу значений $m_k^{(j)}$, $j = 1, 2$, $k = 0, 1, 2, 3$, где k — пошаговая продолжительность учебы. Подсчитайте значения с точностью до пятого знака после запятой.

10.17. При условии, что выбытие может произойти вследствие смерти (1), потери трудоспособности (2) или выхода на пенсию (3), с помощью формулы (10.5.9) постройте таблицу выбытия по нескольким причинам, основанную на следующих абсолютных коэффициентах:

Возраст x	$q_x'^{(1)}$	$q_x'^{(2)}$	$q_x'^{(3)}$
62	0,020	0,030	0,200
63	0,022	0,034	0,100
64	0,028	0,040	0,120

10.18. Пересчитайте таблицу выбытия по нескольким причинам на основе абсолютных коэффициентов выбытия из упр. 10.17 при помощи *приближения повозрастных коэффициентов выбытия*. [Указание. Для этого сначала рассчитайте $m_x'^{(j)}$ по формуле

$$m_x'^{(j)} \cong \frac{q_x'^{(j)}}{1-(1/2)q_x'^{(j)}}, \qquad j = 1, 2, 3,$$

которая выполняется, если распределения моментов выбытия в сопутствующих таблицах выбытия по единственной причине равномерны. Затем предположите, что $m_x^{(j)} \cong m_x'^{(j)}$, $j = 1, 2, 3$, и получите $q_x^{(j)}$ по формуле

$$q_x^{(j)} = \frac{d_x^{(j)}}{l_x^{(\tau)}} = \frac{d_x^{(j)}}{l_x^{(\tau)} - (1/2)d_x^{(\tau)} + (1/2)d_x^{(\tau)}} = \frac{m_x^{(j)}}{1+(1/2)m_x^{(\tau)}}.$$

Это второе соотношение имеет место, если распределение моментов выбытия по всем причинам в таблице выбытия по всем причинам является равномерным. Но тогда

$${}_tp_x^{(\tau)} = 1 - tq_x^{(\tau)} \neq {}_tp_x'^{(1)}\,{}_tp_x'^{(2)}\,{}_tp_x'^{(3)} = (1-tq_x'^{(1)})(1-tq_x'^{(2)})(1-tq_x'^{(3)})$$

при условии равномерности распределений в сопутствующих таблицах выбытия по единственной причине. Таким образом, имеется некоторая несогласованность в предположениях, но расчеты могут быть достаточно точными для первого приближения.]

10.19. Обоснуйте следующие соотношения:

$$\text{(a) } m_x'^{(j)} \cong m_x^{(j)}, \quad \text{(b) } \frac{q_x'^{(j)}}{1-(1/2)q_x'^{(j)}} \cong \frac{q_x^{(j)}}{1-(1/2)q_x^{(\tau)}}.$$

Покажите, что тогда

(c) $q_x^{(j)} \cong \dfrac{q_x'^{(j)}[1-(1/2)q_x^{(\tau)}]}{1-(1/2)q_x'^{(j)}}$, (d) $q_x'^{(j)} \cong \dfrac{q_x^{(j)}}{1-(1/2)(q_x^{(\tau)}-q_x^{(j)})}$.

Сравните формулы пп. (c) и (d) с формулами (10.5.9) и (10.5.10).

10.20. Используйте величины $q_x^{(j)}$ и $q_x'^{(j)}$ из примера 10.5.1, чтобы вычислить $m_x^{(j)}$ и $m_x'^{(j)}$, $j=1,2$, $x=65,\ldots,69$, при подходящих предположениях о равномерности распределения моментов выбытия (см. упр. 10.12).

10.21. Какие из следующих утверждений верны? Исправьте их, если необходимо.

(a) $q_x^{(j)} \cong \dfrac{m_x^{(j)}}{1+(1/2)m_x^{(j)}}$, (b) $\displaystyle\int_0^1 l_{x+t}^{(\tau)}\,dt \cong \frac{l_x^{(\tau)}}{1+(1/2)m_x^{(\tau)}}$,

(c) $q_x^{(1)} = q_x'^{(1)}[1-(1/2)q_x'^{(2)}]$ в таблице выбытия по двум причинам, если в каждой из сопутствующих таблиц выбытия по единственной причине выбытия моменты выбытия в течение года от возраста x до возраста $x+1$ распределены равномерно.

10.22. (a) Покажите, что для некоторого возраста x, для отдельной причины выбытия j и для константы K_j следующие условия эквивалентны:

(i) ${}_tq_x^{(j)} = K_j\,{}_tq_x^{(\tau)}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$,

(ii) $\mu_x^{(j)}(t) = K_j\,\mu_x^{(\tau)}(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$,

(iii) $1-{}_tq_x'^{(j)} = (1-{}_tq_x^{(\tau)})^{K_j}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

[Указание. Покажите, что (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (i).]

(b) Проверьте, что если в таблице выбытия по нескольким причинам либо

$$\mu_x^{(j)}(t) = \mu_x^{(j)}(0), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1,\ j=1,2,\ldots,m$$

(интенсивность выбытия для каждой причины выбытия постоянна), либо

$${}_tq_x^{(j)} = tq_x^{(j)}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1,\ j=1,2,\ldots,m$$

(равномерное распределение моментов выбытия для каждой причины выбытия), то

$${}_tq_x^{(j)} = K_j\,{}_tq_x^{(\tau)}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1,\ j=1,2,\ldots,m.$$

(c) Предположим, что в условии (ii) п. (a) $\mu_x^{(\tau)}(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, задается формулой

(i) kt^n, $k>0$, $n>0$ (Вейбулл),

(ii) Bc^t, $B>0$, $c>1$ (Гомперц).

Для каждого случая найдите соответствующие выражения для ${}_tq_x^{(j)}$ и $1-{}_tq_x'^{(j)}$.

10.23. (a) Докажите, что $\mu_x^{(j)}(t) = K_j\,\mu_x^{(\tau)}(t)$, $0 \leqslant t$, $j=1,2$, где

$$K_j = \int_0^\infty {}_tp_x^{(\tau)}\mu_x^{(j)}(t)\,dt, \qquad j=1,2,$$

тогда и только тогда, когда с.в. T и J независимы.

(b) Покажите, что если с.в. $T_1(x)$ и $T_2(x)$ независимы, то ${}_tp'^{(j)} = ({}_tp_x^{(\tau)})^{K_j}$, $j=1,2$.

[Замечание. Обратите внимание, что $K_j = f_J(j)$.]

10.24. Это упражнение является продолжением упр. 10.3 и использует обозначения из разд. 10.5.5. Совместная функция дожития задана формулой

$$s_{T_1,T_2}(t_1,t_2) = pe^{-u_1t_1-v_1t_2}+(1-p)e^{-u_2t_1-v_2t_2}, \quad 0 \leqslant t_1,t_2,u_1,u_2,v_1,v_2,\ 0<p<1.$$

Проверьте, что $s_{T_1,T_2}(t,t) \neq S_{T_1,T_2}(t,0)S_{T_1,T_2}(0,t)$ и

$$-\left.\frac{\partial \ln s_{T_1,T_2}(t_1,t_2)}{\partial t_1}\right|_{t_1=t_2=t} \neq -\frac{d\ln s_{T_1,T_2}(t,0)}{dt}.$$

К разделу 10.6

10.25. Еще раз проделайте упр. 10.10 с использованием формулы для $q_x'^{(j)}$ из упр. 10.19.

10.26. Покажите, что $\mu_x^{(j)}(1/2) = m_x^{(j)}$, предполагая, что в контексте выбытия по нескольким причинам распределение моментов выбытия по каждой причине в каждом годичном возрастном интервале равномерно.

10.27. Что следовало бы сделать, чтобы построить таблицы выбытия по нескольким причинам, если бы были заданы

(a) $q_x^{\prime(1)}$, $q_x^{\prime(2)}$, $q_x^{(3)}$, (b) $q_x^{\prime(1)}$, $q_x^{(2)}$, $q_x^{(3)}$?

10.28. Предположим, что в примере 10.6.2 распределение моментов выбытия по причине 3 в возрасте 69 лет не является равномерным, а описывается формулой

$$ {}_tp_{69}^{\prime(3)} = \begin{cases} 1 - 0{,}12t, & 0 < t < 1, \\ 0, & t = 1. \end{cases} $$

Иначе говоря, абсолютный коэффициент для причины 3 равен 0,12 в течение этого годичного возрастного интервала. Затем непосредственно перед наступлением возраста 70 лет все оставшиеся в совокупности выбывают по причине 3. Это согласуется с предположением о том, что $q_{69}^{\prime(3)} = 1$. Чему равно значение $q_{69}^{(3)}$?

10.29. В таблице выбытия по двум причинам, в которой причина (1) означает смерть, а причина (2) — увольнение, предполагается, что

• случаи смерти равномерно распределены в течение года от возраста h до возраста $h+1$,

• случаи увольнения в году между возрастами h и $h+1$ происходят непосредственно после достижения возраста h.

Из этой таблицы известно, что в возрасте 50 лет $l_{50}^{(\tau)} = 1000$, $q_{50}^{(2)} = 0{,}2$ и $d_{50}^{(1)} = 0{,}06 d_{50}^{(2)}$. Определите $q_{50}^{\prime(1)}$.

Ко всем темам главы

10.30. На основе таблицы выбытия по трем причинам укажите, какая величина является вероятностью того, что лицо (20) не выбудет по причине (2) до возраста 65 лет.

10.31. (a) Пусть заданы величины $q_x^{\prime(1)}$, $q_x^{\prime(2)}$, $m_x^{(3)}$ и $m_x^{(4)}$. Какие действия следует предпринять для построения таблицы выбытия по нескольким причинам, в которой трудоспособное лицо может выбывать из группы работающих вследствие смерти (1), увольнения (2), потери трудоспособности (3) и выхода на пенсию (4)?

(b) На основе таблицы из п. (a) выразите вероятность того, что работающий член этой группы возраста y в будущем не выйдет на пенсию, но выбудет из данной группы по какой-либо другой причине.

10.32. Докажите и интерпретируйте соотношение

$$ q_x^{(j)} = q_x^{\prime(j)} - \sum_{k \neq j} \int_0^1 {}_tp_x^{(\tau)} \mu_x^{(k)}(t)\ {}_{1-t}q_{x+t}^{\prime(j)}\, dt. $$

10.33. Пусть

$$ w^{(\tau)}(t) = \frac{{}_tp_x^{(\tau)}}{\int_0^1 {}_tp_x^{(\tau)}\, dt} \quad \text{и} \quad w^{(j)}(t) = \frac{{}_tp_x^{\prime(j)}}{\int_0^1 {}_tp_x^{\prime(j)}\, dt}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1. $$

Предположим, что j и по меньший мере еще одна причина выбытия имеют положительные интенсивности выбытия на интервале $0 \leqslant t \leqslant 1$.

(a) Покажите, что

(i) $w^{(\tau)}(0) > w^{(j)}(0)$,

(ii) $w^{(\tau)}(1) < w^{(j)}(1)$,

(iii) существует единственное число r, $0 < r < 1$, такое, что $w^{(\tau)}(r) = w^{(j)}(r)$.

(b) Пусть

$$ -I = \int_0^r [w^{(j)}(t) - w^{(\tau)}(t)]\, dt. $$

Покажите, что

$$ I = \int_r^1 [w^{(j)}(t) - w^{(\tau)}(t)]\, dt. $$

(c) Предположим, что $\mu_x^{(j)}(t)$ — возрастающая функция на интервале $0 \leqslant t \leqslant 1$. Пользуясь теоремой о среднем значении для интеграла, докажите следующие соотношения:

$$\begin{aligned} m_x'^{(j)} - m_x^{(j)} &= \int_0^1 [w^{(j)}(t) - w^{(\tau)}(t)]\mu_x^{(j)}(t)\,dt \\ &= \int_0^r [w^{(j)}(t) - w^{(\tau)}(t)]\mu_x^{(j)}(t)\,dt + \int_r^1 [w^{(j)}(t) - w^{(\tau)}(t)]\mu_x^{(j)}(t)\,dt \\ &= -\mu_{x+t_0}^{(j)} I + \mu_{x+t_1}^{(j)} I \qquad (0 < t_0 < r < t_1 < 1) \\ &= I[\mu_x^{(j)}(t_1) - \mu_x^{(j)}(t_0)] > 0. \end{aligned}$$

10.34. Совместное распределение с.в. T и J определяется формулами

$$\left.\begin{aligned} \mu_x^{(1)}(t) &= \frac{\theta t^{\alpha-1} e^{-\beta t}}{\int_1^\infty s^{\alpha-1} e^{-\beta s}\,ds}, \\ \mu_x^{(2)}(t) &= \frac{(1-\theta) t^{\alpha-1} e^{-\beta t}}{\int_1^\infty s^{\alpha-1} e^{-\beta s}\,ds}, \end{aligned}\right. \qquad 0 < \theta < 1,\ \alpha > 0,\ \beta > 0,\ t \geqslant 0.$$

(a) Найдите формулы для $f_{T,J}(t,j)$, $f_J(j)$ и $f_T(t)$.
(b) Выразите $\mathbf{E}[T]$ и $\mathbf{D}[T]$ через α и β.
(c) Покажите, что с.в. J и T независимы.

11

ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ВЫБЫТИЯ ПО НЕСКОЛЬКИМ ПРИЧИНАМ

11.1. Введение

Модель выбытия по нескольким причинам, изложенная в гл. 10, создает основу для изучения многих систем страхового обеспечения. Например, договоры страхования жизни часто обеспечивают специальные выплаты, если смерть наступила в результате несчастного случая или если страхователь стал нетрудоспособным. Модель выбытия по одной причине, являющаяся предметом гл. 3–9, не может служить адекватной математической моделью для договоров с такими различными типами выплат. Кроме того, существует возможность сохранения обязательств в сокращенном объеме, если страхователь досрочно прекратил выплату премий. Определение размера таких сохраненных выплат и связанные с этим вопросы экономической политики обсуждаются в гл. 16. В настоящей главе рассматривается базовая модель, связанная с выплатами, зависящими от причины выбытия.

Другим важным приложением моделей выбытия по нескольким причинам являются пенсионные схемы. В этой главе мы рассмотрим основные методы, используемые при расчете актуарных настоящих стоимостей выплат и взносов участников пенсионной схемы. Участниками такой схемы могут быть как работники одного работодателя, так и группы работодателей, занимающихся сходной деятельностью. Схема обычно обеспечивает пенсии по старости или выслуге лет, а также в связи с потерей трудоспособности. В случае ухода с работы может быть предусмотрен возврат накопленных за период работы взносов или отсроченная пенсия. В случае смерти до выхода на пенсию по одной из указанных причин может быть предусмотрена выплата выгодоприобретателю единовременной суммы или множества платежей. Платежи для обеспечения выплат пенсий, как правило, называются взносами, а не премиями, как в страховании, и выплачиваются они в различных долях участниками и вкладчиками[1] пенсионной схемы.

Пенсионную схему можно считать системой приобретения отсроченного аннуитета (выплачиваемого по достижении пенсионного возраста) и некоторых дополнительных выплат в обмен на ту или иную форму срочного аннуитета взносов в течение периода трудовой деятельности. Обеспечение баланса актуарных настоящих стоимостей выплат и взносов может осуществляться на индивидуальной основе, но чаще — на некоторой агрегированной основе для целых групп участников. Методы поддержания этого баланса составляют содержание теории оценивания пенсионных фондов. Здесь нас будут интересовать лишь отдельные задачи, состоящие в расчете

[1] В оригинале «plan sponsor». Обычно под вкладчиком понимается работодатель. См. далее гл. 20. — *Прим. ред.*

актуарных настоящих стоимостей выплат и взносов пенсионной схемы в отношении типичного участника. Агрегированные значения можно затем получить путем суммирования по всем участникам. Здесь будут представлены основные методы оценивания выплат из пенсионной схемы и взносов в пенсионную схему, но их приложение к возможным методам финансирования пенсионных схем будет отложено до гл. 20.

В разд. 11.6 мы изучим выплаты на случай потери трудоспособности, как правило, связанные с индивидуальными договорами страхования жизни. При таких выплатах предусматривается освобождение от уплаты премий и возмещение потери дохода вследствие потери трудоспособности. Мы обсудим широко используемую для расчета нетто-премий и нетто-резервов по этим видам покрытия на случай потери трудоспособности аппроксимацию с помощью модели выбытия по одной причине.

11.2. Актуарные настоящие стоимости и их численный расчет

Модели выбытия по нескольким причинам возникают в актуарных приложениях, когда размер выплаты зависит от причины выбытия из совокупности работающих. Пусть $B_{x+t}^{(j)}$ обозначает величину выплаты в возрасте $x+t$ лет при выбытии в этом возрасте по причине j. Тогда актуарная настоящая стоимость выплаты, обозначаемая в общем случае через $\bar{A}$, будет задаваться формулой

$$\bar{A} = \sum_{j=1}^{m} \int_0^\infty B_{x+t}^{(j)} v^t {}_tp_x^{(\tau)} \mu_x^{(j)}(t)\, dt. \tag{11.2.1}$$

Если $m=1$ и $B_{x+t}^{(j)} = 1$, величина $\bar{A}$ равна актуарной настоящей стоимости $\bar{A}_x$ страховой выплаты размера 1 по договору бессрочного страхования на случай смерти с выплатой непосредственно после смерти.

Более подходящим для этой главы является пример *двойной страховой суммы*, которая выплачивается, если смерть произошла в результате несчастного случая. Пусть $J=1$ для смерти в результате несчастного случая и $J=2$, если смерть произошла по другим причинам, и пусть $B_{x+t}^{(1)} = 2$ и $B_{x+t}^{(2)} = 1$. Актуарная настоящая стоимость выплаты по договору страхования на срок n лет задается формулой

$$\bar{A} = 2\int_0^n v^t {}_tp_x^{(\tau)} \mu_x^{(1)}(t)\, dt + \int_0^n v^t {}_tp_x^{(\tau)} \mu_x^{(2)}(t)\, dt. \tag{11.2.2}$$

Первым шагом численных расчетов является разложение этого выражения в сумму интегралов, каждый из которых относится к одному году, входящему в рассматриваемый период. Для первого интеграла из формулы (11.2.2) получим

$$2\int_0^n v^t {}_tp_x^{(\tau)} \mu_x^{(1)}(t)\, dt = 2\sum_{k=0}^{n-1} v^k {}_kp_x^{(\tau)} \int_0^1 v^s {}_sp_{x+k}^{(\tau)}\, \mu_x^{(1)}(k+s)\, ds.$$

Если мы теперь, как и для вывода формулы (10.5.11), предположим, что случаи выбытия по каждой причине равномерно распределены в каждом годичном возрастном интервале, то получим

$$2\int_0^n v^t {}_tp_x^{(\tau)} \mu_x^{(1)}(t)\, dt = 2\sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_kp_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(1)} \int_0^1 (1+i)^{1-s}\, ds = \frac{2i}{\delta} \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_kp_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(1)}.$$

Применяя те же рассуждения для второго интеграла и объединяя результаты, получим

$$\begin{aligned}\bar{A} = \frac{i}{\delta}\left[\sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}{}_k p_x^{(\tau)}(2q_{x+k}^{(1)} + q_{x+k}^{(2)})\right] &= \frac{i}{\delta}\sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}{}_k p_x^{(\tau)}(q_{x+k}^{(1)} + q_{x+k}^{(\tau)}) \\ &= \bar{A}^{1^{(1)}}_{x:\overline{n|}} + \bar{A}^{1}_{x:\overline{n|}}, \end{aligned} \qquad (11.2.3)$$

где $\bar{A}^{1^{(1)}}_{x:\overline{n|}}$ — актуарная настоящая стоимость срочного страхования на случай смерти от несчастного случая с выплатой размера 1 и $\bar{A}^{1}_{x:\overline{n|}}$ — актуарная настоящая стоимость срочного страхования на случай смерти от всех причин с выплатой размера 1. Величина ${}_k p_x^{(\tau)}$ здесь может браться как функция дожития из таблицы смертности. Если значения величины $q_{x+k}^{(1)}$ известны, то для нахождения численных значений актуарных настоящих стоимостей из формулы (11.2.3) в предположении, что случаи выбытия по каждой причине равномерно распределены в течение годичных возрастных интервалов, не обязательно составлять полные таблицы выбытия по двум причинам.

Этот пример очень прост, потому что размер страховых выплат не зависит от возраста выбытия и, в частности, не меняется в течение годичного возрастного интервала. Приведем совсем другой пример: положим $B_{x+t}^{(1)} = t$ и $B_{x+t}^{(2)} = 0$ для $t > 0$. В этом случае

$$\bar{A} = \int_0^\infty t v^t {}_t p_x^{(\tau)} \mu_x^{(1)}(t)\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_k p_x^{(\tau)} \int_0^1 (k+s) v^s {}_s p_{x+k}^{(\tau)}\, \mu_x^{(1)}(k+s)\, ds.$$

Снова предположив, что случаи выбытия по каждой причине в модели выбытия по нескольким причинам равномерно распределены в каждом годичном возрастном интервале, мы получим

$$\begin{aligned}\bar{A} &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}{}_k p_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(1)} \int_0^1 (k+s)(1+i)^{1-s}\, ds \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}{}_k p_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(1)} \frac{i}{\delta}\left(k + \frac{1}{\delta} - \frac{1}{i}\right). \end{aligned} \qquad (11.2.4)$$

На практике $B_{x+t}^{(j)}$ часто оказывается сложной функцией, для которой может потребоваться определенная аппроксимация. В этом случае, если мы применим предположение о равномерности распределения к j-му интегралу в формуле (11.2.1), то получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}{}_k p_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(j)} \int_0^1 B_{x+k+s}^{(j)} (1+i)^{1-s}\, ds.$$

Тогда, пользуясь формулой прямоугольников и выбирая значение функции в середине интервала интегрирования, мы находим формулу

$$\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1/2}{}_k p_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(j)} B_{x+k+1/2}^{(j)}, \qquad (11.2.5)$$

которую можно использовать для вычисления этого выражения на практике.

Чтобы рассмотреть пример, вернемся к формуле (11.2.4). Здесь величину $k + 1/\delta - 1/i$ можно рассматривать как фактический средний размер выплаты в году $k+1$, а хорошо известное отношение i/δ — как поправку, необходимую для обеспечения немедленных выплат при страховом случае. Величина (11.2.4) хорошо аппроксимируется выражением

$$\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1/2}{}_kp_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(j)} \left(k + \frac{1}{2}\right), \tag{11.2.6}$$

которое можно получить с помощью формулы прямоугольников, выбирая значение функции в середине интервала интегрирования, для вычисления интеграла

$$\int_0^1 (k+s)(1+i)^{1-s}\, ds.$$

В разд. 10.6 мы обсуждали ситуации, когда предположение о равномерности распределения моментов выбытия неприменимо. Для таких ситуаций следует проводить специальную корректировку актуарных настоящих стоимостей. Возвратимся к примеру 10.6.3, где в сопутствующей модели выбытия по единственной причине (3) половина ожидаемых случаев увольнения происходит в середине года, а другая половина — в конце года. Актуарная настоящая стоимость для выплат в случае увольнения задается формулой

$$\bar{A} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k{}_kp_x^{(\tau)} \left[\frac{1}{2}\, q_{x+k}^{\prime(3)}\, v^{1/2} B_{x+k+1/2}^{(3)} \left(1 - \frac{1}{2}\, q_{x+k}^{\prime(1)}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\, q_{x+k}^{\prime(2)}\right) \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\, q_{x+k}^{\prime(3)}\, v B_{x+k+1}^{(3)} (1 - q_{x+k}^{\prime(1)})(1 - q_{x+k}^{\prime(2)})\right].$$

Здесь мы имеем дело с распределением моментов выбытия в сопутствующих таблицах выбытия по одной причине, а не с выбытием по многим причинам. Возможная аппроксимация состоит в использовании среднего геометрического коэффициентов дисконтирования в году выбытия, $v^{3/4}$, и среднего арифметического выплат в случае увольнения,

$$\widehat{B}_{x+k}^{(3)} = \frac{1}{2}\,(B_{x+k+1/2}^{(3)} + B_{x+k+1}^{(3)}).$$

Таким образом,

$$\bar{A} \cong \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+3/4}{}_kp_x^{(\tau)} \widehat{B}_{x+k}^{(3)} \left[\frac{1}{2}\, q_{x+k}^{\prime(3)} \left(1 - \frac{1}{2}\, q_{x+k}^{\prime(1)}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\, q_{x+k}^{\prime(2)}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\, q_{x+k}^{\prime(3)} (1 - q_{x+k}^{\prime(1)})(1 - q_{x+k}^{\prime(2)})\right] = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+3/4}{}_kp_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(3)} \widehat{B}_{x+k}^{(3)}.$$

Замечание. В этом разделе, в отличие от гл. 6, мы не занимались проблемами определения размера премий. Это сделано из соображения экономии места. Задачи вычисления премий в этом разделе можно было бы решить, определив функцию потерь и применив принцип эквивалентности или какой-либо другой принцип расчета премий.

Предположим, например, что по договору страхования, заключенному с лицом (x), выплачивается сумма

(a) $2B$ в случае смерти в результате несчастного случая и до наступления возраста r лет,

(b) B в случае смерти по всем другим причинам и до наступления возраста r лет,

(c) B в случае смерти после наступления возраста r лет.

Различаются две причины выбытия: $J = 1$, несчастный случай, и $J = 2$, смерть по иной причине. Функция потерь имеет вид

$$L = \begin{cases} 2Bv^T - \pi, & J = 1,\ 0 < T \leqslant r - x, \\ Bv^T - \pi, & J = 2,\ 0 < T \leqslant r - x, \\ Bv^T - \pi, & J = 1, 2,\ T > r - x. \end{cases}$$

В силу принципа эквивалентности $\mathbf{E}[L] = 0$, или

$$\pi = B\left[\int_0^{r-x} v^t {}_tp_x^{(\tau)} \mu_x^{(1)}(t)\,dt + \int_0^{\infty} v^t {}_tp_x^{(\tau)} \mu_x^{(\tau)}(t)\,dt\right].$$

Мерой разброса, обусловленного случайной природой момента и причин смерти, является дисперсия $\mathbf{D}[L] = \mathbf{E}[L^2]$. Можно проверить, что в этом случае

$$\mathbf{D}[L] = B^2\left[3\int_0^{r-x} v^{2t} {}_tp_x^{(\tau)} \mu_x^{(1)}(t)\,dt + \int_0^{\infty} v^{2t} {}_tp_x^{(\tau)} \mu_x^{(\tau)}(t)\,dt\right] - \pi^2.$$

В общем случае, когда актуарная настоящая стоимость задана формулой (11.2.1), мы получаем

$$\mathbf{D}[L] = \mathbf{E}[L^2] = \sum_{j=1}^{m} \int_0^{\infty} (B_{x+t}^{(j)}\, v^t - \bar{A})^2 {}_tp_x^{(\tau)} \mu_x^{(j)}(t)\,dt,$$

что можно привести к виду

$$\mathbf{D}[L] = \sum_{j=1}^{m} \int_0^{\infty} (B_{x+t}^{(j)}\, v^t)^2 {}_tp_x^{(\tau)} \mu_x^{(j)}(t)\,dt - (\bar{A})^2. \qquad (11.2.7)$$

11.3. Нетто-премии и нетто-резервы

В этом разделе мы исследуем метод финансирования страховых выплат по договору страхования на случай смерти, который соответствует модели выбытия по нескольким причинам. Часто дополнительные страховые выплаты в такой ситуации включаются в договор страхования жизни в качестве дополнительных условий, т. е. за них назначается специальная дополнительная премия и для них образуются особые резервы. Эта дополнительная премия выплачивается до тех пор, пока есть необходимость в фонде для покрытия соответствующих обязательств. При назначении двойной страховой выплаты, если смерть происходит в результате несчастного случая, обычно дополнительную выплату производят, лишь если несчастный случай происходит до определенного возраста, например, до 65 лет, и, таким образом, специальная дополнительная премия должна выплачиваться только до этого возраста.

Далее в качестве такой дополнительной выплаты мы будем рассматривать выплату двойной страховой суммы, если смерть произошла в результате несчастного случая. Эта модель не полна, так как не рассматривается возможность досрочного прекращения действия договора с выплатой соответствующей выкупной суммы.

Такая возможность будет рассматриваться в разд. 11.4, но в основном эта тема обсуждается в гл. 15 и 16.

Рассмотрим дискретную модель бессрочного страхования на случай смерти лица в возрасте 30 лет с дополнительным условием выплаты двойной страховой суммы, если смерть произошла в результате несчастного случая. Страховая сумма равна единице в случае смерти, наступившей не в результате несчастного случая ($J = 1$), или двум, если смерть произошла в результате несчастного случая ($J = 2$). Принцип эквивалентности теперь используется дважды: один раз для вычисления премии по договору страхования на случай смерти без дополнительного условия и один раз для премий, выплачиваемых до возраста 65 лет, которые обеспечивают дополнительную выплату, если смерть наступит в результате несчастного случая до возраста 65 лет.

Для договора без дополнительных условий размер выплаты равен единице при обеих причинах выбытия (и 1, и 2), и премии выплачиваются пожизненно. Таким образом,

$$P_{30}^{(\tau)} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\, {}_kp_{30}^{(\tau)}\, q_{30+k}^{(\tau)}}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} v^k\, {}_kp_{30}^{(\tau)}}. \tag{11.3.1}$$

Нетто-премия для обеспечения дополнительной выплаты вычисляется с учетом того, что премии выплачиваются до достижения 65 лет, а размер выплаты равен единице, причем выплата производится только в случае выбытия по причине 2. Величина нетто-премии определяется по формуле

$${}_{35}P_{30}^{(2)} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{34} v^{k+1}\, {}_kp_{30}^{(\tau)}\, q_{30+k}^{(2)}}{\sum\limits_{k=0}^{34} v^k\, {}_kp_{30}^{(\tau)}}. \tag{11.3.2}$$

Теперь мы можем выписать нетто-резерв по договору с указанным дополнительным условием для периода до достижения 65 лет:

$$\begin{aligned} {}_kV = {} & \sum_{h=0}^{\infty} v^{h+1}\, {}_kp_{30+k}^{(\tau)}\, q_{30+k+h}^{(\tau)} + \sum_{h=0}^{34-k} v^{h+1}\, {}_hp_{30+k}^{(\tau)}\, q_{30+k+h}^{(2)} \\ & - \left(P_{30}^{(\tau)} \sum_{h=0}^{\infty} v^h\, {}_hp_{30+k}^{(\tau)} + {}_{35}P_{30}^{(2)} \sum_{h=0}^{34-k} v^h\, {}_hp_{30+k}^{(\tau)} \right). \end{aligned}$$

Этот резерв является суммой резерва по основным обязательствам и резерва по дополнительным. Резерв по основным обязательствам является нетто-резервом из гл. 7 для дискретной модели бессрочного страхования на случай смерти с $q_x = q_x^{(\tau)} = q_x^{(1)} + q_x^{(2)}$.

11.4. Примеры выкупных сумм, которые можно не учитывать при определении премий и резервов

В главах с 6 по 8 строилась модель выбытия по единственной причине для индивидуального договора страхования жизни с ежегодными нетто-премиями и резервами. В этой модели время и, возможно, размер выплат определяются временем смерти стахователя, а премии выплачиваются пожизненно или до конца периода выплаты премий, установленного в договоре. На практике невозможно препятствовать досрочному прекращению выплаты премий страхователем. В этой ситуации возникает проблема примирения интересов сторон, заключивших договор, для разрешения которой подходит модель, основанная на теории выбытия по нескольким причинам. Государственное законодательство, призванное регулировать отношения между страховщиком и страхователем, досрочно прекратившим выплату премий, является предметом обсуждения с давних времен.

Прежде чем определить премии и резервы, необходимо принять принцип регулирования. Принцип регулирования необходим и для определения размера *сохраненных выплат*, т.е. выплат, право на которые не теряется вследствие досрочного прекращения выплаты премий. В этом разделе мы примем простой рабочий принцип, который на самом деле близок к принципу, принятому в страховом регулировании Соединенных Штатов Америки. Этот принцип состоит в том, что страхователь, досрочно прекративший выплату премий, получает такую сумму, чтобы выплата, премии и структура резерва, построенные с использованием модели выбытия по единственной причине, согласовывались с этими величинами, рассчитанными в контексте выбытия по нескольким причинам.

Этот принцип мотивируется специфическим положением равного отношения к двум различным классам страхователей: тех, кто прервал действие договора страхования до истечения его срока, и тех, кто продолжает соблюдать договор. Ясно, что могут существовать самые разные точки зрения на достижение этого равенства, начиная с точки зрения, что страхователи, досрочно прекратившие выплату премий, нарушили условия договора и, следовательно, не имеют права на какие-либо выплаты со стороны страховщика (пусть даже в сокращенном объеме), до точки зрения, что страхователя, досрочно прекратившего выплату премий, следует вернуть к исходному состоянию, выплатив ему накопленную стоимость всех премий, возможно за вычетом организационных расходов. Концепция равенства, на которой основан принцип регулирования, принятый в Соединенных Штатах Америки, является промежуточной, а именно, страхователь, досрочно прекративший выплату премий по договору страхования на случай смерти, имеет право на сохранение обязательств страховщика в сокращенном объеме или на выкупную сумму, но соответствующие выплаты не должны изменить соотношение «цена–выплата» для страхователей, которые продолжают выплачивать премии по своим договорам.

Для того чтобы проиллюстрировать действие этого принципа, рассмотрим договор бессрочного страхования на случай смерти с выплатами в случае смерти и досрочного прекращения действия договора в непрерывной модели. Интенсивность досрочного прекращения действия договора обозначается через $\mu_x^{(2)}(t)$, причем $\mu_x^{(\tau)}(t) = \mu_x^{(1)}(t) + \mu_x^{(2)}(t)$. В модели выбытия по нескольким причинам требуется, чтобы

$$\int_0^\infty \mu_{x+t}^{(\tau)}\, dt = \infty,$$

так что $\lim_{t\to\infty} {}_tp_x^{(\tau)} = 0$, но интенсивность $\mu_x^{(2)}(t)$ и полученная из нее вероятность ${}_tp_x^{\prime(2)}$ этим свойством могут не обладать.

Мы предполагаем, что введение возможности досрочного прекращения действия договора в модель не изменит интенсивности смертности, которую мы будем обозначать через $\mu_x^{(1)}(t)$ как в модели с одной причиной выбытия, так и в модели с несколькими причинами выбытия. Другими словами, случайные величины продолжительности предстоящей жизни и времени до момента расторжения договора будут предполагаться независимыми, хотя это предположение на практике может нарушаться. Этот вопрос обсуждался в гл. 10.

Начнем описание нашей модели с того, что перепишем равенство (8.6.4) для случая бессрочного страхования на случай смерти с премиями и резервами из модели выбытия по одной причине:

$$\frac{d}{dt}\,{}_t\bar{V}(\bar{A}_x) = \bar{P}(\bar{A}_x) + \delta\,{}_t\bar{V}(\bar{A}_x) - \mu_x^{(1)}(t)[1 - {}_t\bar{V}(\bar{A}_x)]. \tag{11.4.1}$$

Вспомнив (см. разд. 10.2), что

$$\frac{d}{dt}\,{}_tp_x^{(\tau)} = -{}_tp_x^{(\tau)}[\mu_x^{(1)}(t) + \mu_x^{(2)}(t)],$$

мы можем найти выражение для следующей производной:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[v^t\,{}_tp_x^{(\tau)}\,{}_t\bar{V}(\bar{A}_x)] &= v^t\,{}_tp_x^{(\tau)}\{\bar{P}(\bar{A}_x) + \delta\,{}_t\bar{V}(\bar{A}_x) - \mu_x^{(1)}(t)[1 - {}_t\bar{V}(\bar{A}_x)]\} \\ &\qquad - v^t\,{}_tp_x^{(\tau)}\,{}_t\bar{V}(\bar{A}_x)[\delta + \mu_x^{(1)}(t) + \mu_x^{(2)}(t)] \\ &= v^t\,{}_tp_x^{(\tau)}[\bar{P}(\bar{A}_x) - \mu_x^{(1)}(t) - \mu_x^{(2)}(t)\,{}_t\bar{V}(\bar{A}_x)].\end{aligned} \tag{11.4.2}$$

Изменение во времени величины резервов для договора бессрочного страхования на случай смерти, который предполагает выплату выкупной суммы размера ${}_tV(A_x)$, используя премии и резервы, определенные в модели выбытия по двум причинам, аналогично изменению, описанному формулой (11.4.1), и выражается формулой (11.4.3), выписанной ниже. В ней верхний индекс $\underline{2}$ означает премии и резервы, рассчитанные в модели выбытия по двум причинам:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[{}_t\bar{V}(\bar{A}_x)^{\underline{2}}] &= \bar{P}(\bar{A}_x)^{\underline{2}} + \delta\,{}_t\bar{V}(\bar{A}_x)^{\underline{2}} - \mu_x^{(1)}(t)[1 - {}_t\bar{V}(\bar{A}_x)^{\underline{2}}] \\ &\qquad - \mu_x^{(2)}(t)[{}_t\bar{V}(\bar{A}_x) - {}_t\bar{V}(\bar{A}_x)^{\underline{2}}].\end{aligned} \tag{11.4.3}$$

Последний член в равенстве (11.4.3) является чистой стоимостью прекращения действия договора, а резерв ${}_tV(A_x)^{\underline{2}}$ рассматривается как фонд для обеспечения выплат [см. формулу (8.4.5)]. Таким образом,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[v^t\,{}_tp_x^{(\tau)}\,{}_t\bar{V}(\bar{A}_x)^{\underline{2}}] &= v^t\,{}_tp_x^{(\tau)}\{\bar{P}(\bar{A}_x)^{\underline{2}} + \delta\,{}_t\bar{V}(\bar{A}_x)^{\underline{2}} - \mu_x^{(1)}(t)[1 - {}_t\bar{V}(\bar{A}_x)^{\underline{2}}] \\ &\qquad - \mu_{x+t}^{(2)}[{}_t\bar{V}(\bar{A}_x) - {}_t\bar{V}(\bar{A}_x)^{\underline{2}}]\} - v^t\,{}_tp_x^{(\tau)}\,{}_t\bar{V}(\bar{A}_x)^{\underline{2}}[\delta + \mu_x^{(1)}(t) + \mu_x^{(2)}(t)] \\ &= v^t\,{}_tp_x^{(\tau)}[\bar{P}(\bar{A}_x)^{\underline{2}} - \mu_x^{(1)}(t) - \mu_x^{(2)}(t)\,{}_t\bar{V}(\bar{A}_x)].\end{aligned} \tag{11.4.4}$$

Комбинируя формулы (11.4.2) и (11.4.4), получим

$$\frac{d}{dt}\{v^t\,{}_tp_x^{(\tau)}[{}_t\bar{V}(\bar{A}_x)^{\underline{2}} - {}_t\bar{V}(\bar{A}_x)]\} = v^t\,{}_tp_x^{(\tau)}[\bar{P}(\bar{A}_x)^{\underline{2}} - \bar{P}(\bar{A}_x)]. \tag{11.4.5}$$

Теперь, проинтегрировав это равенство по t от 0 до ∞, придем к соотношению

$$0 = \bar{a}_x^{(\tau)}[\bar{P}(\bar{A}_x)^{\underline{2}} - \bar{P}(\bar{A}_x)], \tag{11.4.6}$$

из которого следует, что

$$\bar{P}(\bar{A}_x)^{\underline{2}} = \bar{P}(\bar{A}_x).$$

Таким образом, равенство (11.4.5) приобрело вид

$$\frac{d}{dt}\{v^t\,{}_tp_x^{(\tau)}[{}_t\bar{V}(\bar{A}_x)^{\underline{2}} - {}_t\bar{V}(\bar{A}_x)]\} = 0,$$

что с учетом начальных условий

$${}_0\bar{V}(\bar{A}_x)^{\underline{2}} = {}_0\bar{V}(\bar{A}_x)$$

дает

$${}_t\bar{V}(\bar{A}_x)^{\underline{2}} = {}_t\bar{V}(\bar{A}_x) \quad \text{для всех } t \geqslant 0. \tag{11.4.7}$$

Поэтому если выкупная сумма в непрерывной модели с выбытием по двум причинам для бессрочного страхования на случай смерти равна резерву в соответствующей модели выбытия по одной причине, то премия и резервы, рассчитанные на основе модели выбытия по двум причинам, равны премии и резерву в модели выбытия по одной причине. Этот результат не используется непосредственно в практических задачах определения размера сохраненных выплат при досрочном прекращении действия договора. Тем не менее это подсказывает основную идею, как минимизировать влияние выплат в случае досрочного прекращения действия договора на размер премии и резервов (определяемых в модели выбытия по одной причине). Эти идеи будут обсуждаться в гл. 16.

Материал настоящего раздела тесно связан с примером 6.6.2, в котором показано, что если выплата на случай смерти в течение периода выплаты премий для отсроченного бессрочного аннуитета равна накопленным премиям, то премия не зависит от предположений о смертности в течение периода отсрочки. Это наблюдение используется в примере 11.4.1.

Пример 11.4.1. Непрерывный аннуитет для лица (x) обеспечивает годовой доход размера 1 с возраста $x+n$ лет. Выплата на случай смерти (причина выбытия $J=1$) или выкупная сумма в случае досрочного прекращения действия договора в течение n-летнего периода отсрочки (причина выбытия $J=2$), выплачиваемая в момент выбытия, равна накопленным нетто-премиям с учетом процента, начисляемого по той же процентной ставке, которая используется при расчете премии. Премии выплачиваются непрерывно с возраста x до возраста $x+n$ или до момента выбытия, если оно произойдет раньше достижения возраста $x+n$. Предполагается, что после начала выплаты аннуитета выбытия по причине 2 не происходит.

(a) Выпишем случайную величину потерь.

(b) Определим величину ежегодной нетто-премии π с использованием принципа эквивалентности.

(c) Определим нетто-резервы в момент времени t, $0 \leqslant t \leqslant n$.

Решение.

(a)
$$L = \begin{cases} \pi v^T \bar{s}_{\overline{T}|} - \pi \bar{a}_{\overline{T}|}, & 0 \leqslant T \leqslant n,\ J = 1, 2, \\ v^n \bar{s}_{\overline{T-n}|} - \pi \bar{a}_{\overline{n}|}, & T > n,\ J = 1. \end{cases}$$

(b) Используя принцип эквивалентности, получим

$$\mathbf{E}[L] = \int_n^\infty (v^n \bar{a}_{\overline{t-n}|} - \pi \bar{a}_{\overline{n}|})\,{}_tp_x^{(\tau)} \mu_x^{(1)}(t)\,dt.$$

Это дает

$$v^n\,{}_np_x^{(\tau)} \bar{a}_{x+n} = \pi \bar{a}_{\overline{n}|}\,{}_np_x^{(\tau)} \quad \text{и} \quad \pi = \frac{v^n \bar{a}_{x+n}}{\bar{a}_{\overline{n}|}} = \frac{\bar{a}_{x+n}}{\bar{s}_{\overline{n}|}}.$$

(c) Резерв в момент времени t, $t \leqslant n$, рассчитанный по перспективной формуле, определяется так:

$$\int_0^{n-t} (\pi v^s \bar{s}_{\overline{t+s|}} - \pi \bar{a}_{\overline{s|}})\, {}_s p_{x+t}^{(\tau)}\, \mu_x^{(\tau)}(t+s)\, ds + \int_{n-t}^{\infty} (v^{n-t} \bar{a}_{\overline{s-(n-t)|}} - \pi \bar{a}_{\overline{n-t|}})\, {}_s p_{x+t}^{(\tau)}\, \mu_x^{(1)}(t+s)\, ds =$$
$$= \pi \bar{s}_{\overline{t|}}(1 - {}_{n-t}p_{x+t}^{(\tau)}) + {}_{n-t|}\bar{a}_{x+t} - \pi \bar{a}_{\overline{n-t|}}\, {}_{n-t}p_{x+t}^{(\tau)} = \pi \bar{s}_{\overline{t|}}.$$

Упрощение последнего слагаемого происходит за счет определения величины π из п. (b). Можно считать, что нетто-премии и нетто-резервы в течение периода отсрочки рассчитаны в модели с отсутствием выбытия. ▼

11.5. Расчеты в пенсионных схемах

Для определения актуарных настоящих стоимостей выплат из пенсионных схем и взносов для их обеспечения необходимы два ряда предположений. Один из них можно назвать набором демографических предположений (таблицы выбытия из совокупности работающих и функции дожития для лиц, вышедших на пенсию, утративших трудоспособность и, возможно, вышедших из этой пенсионной схемы), другой — это набор экономических предположений (доход от инвестиций и динамика заработной платы).

11.5.1. Демографические предположения

Исходным пунктом для расчета выплат из пенсионной схемы является таблица выбытия по нескольким причинам из совокупности работающих, построенная так, чтобы для совокупности дожития участников в различные года их трудоспособного возраста указывать следующие вероятности:

- увольнения с работы,
- смерти в период трудовой деятельности,
- выхода на пенсию вследствие потери трудоспособности,
- выхода на пенсию по старости.

Эти вероятности для года между возрастами x и $x+1$ обозначаются через $q_x^{(w)}$, $q_x^{(d)}$, $q_x^{(i)}$ и $q_x^{(r)}$ соответственно. Эти обозначения согласуются с обозначениями, используемыми в гл. 10. Мы также будем использовать функцию дожития $l_x^{(\tau)}$ из гл. 10, которая удовлетворяет условию

$$l_{x+1}^{(\tau)} = l_x^{(\tau)}[1 - (q_x^{(w)} + q_x^{(d)} + q_x^{(i)} + q_x^{(r)})] = l_x^{(\tau)} p_x^{(\tau)}.$$

Эту функцию можно использовать для вычисления таких величин, как ${}_k p_x^{(\tau)}$; таким образом

$${}_k p_x^{(\tau)} = l_{x+k}^{(\tau)} / l_x^{(\tau)}.$$

Ее можно также вычислять непосредственно с помощью рекуррентных соотношений, а именно

$${}_k p_x^{(\tau)} = {}_{k-1} p_x^{(\tau)} p_{x+k-1}^{(\tau)}.$$

Интенсивности выбытия в таблице выбытия из совокупности работающих будут для большинства возрастов непрерывны. Мы их обозначим через $\mu_x^{(w)}(t)$, $\mu_x^{(d)}(t)$, $\mu_x^{(i)}(t)$

и $\mu_x^{(r)}(t)$. В некоторых возрастах могут иметь место разрывы. Чаще всего это происходит в возрасте α, наиболее раннем из допускаемых законом возрастов выхода на пенсию. Мы, как правило, предполагаем, что выбытия происходят в течение всего года.

В первые годы трудовой деятельности величина коэффициентов, отражающих частоту случаев увольнения, достаточно высока, и выплаты на этот случай могут назначаться лишь в размере взносов участника с учетом накопления процентов, если вообще назначаются. По прошествии некоторого времени, например, через 5 лет, величина таких коэффициентов становится несколько меньше и уволенный участник может получить право на отсроченную пенсию. Если эти условия выполняются, то может возникнуть необходимость для определенного числа лет использовать селекционные коэффициенты, отражающие частоту увольнений. Условия для выхода на пенсию вследствие потери трудоспособности могут также указывать на необходимость использования селекционной модели. Математические модификации для использования селекционной модели сделать несложно, а теория, использующая селекционные коэффициенты, более пригодна для практических приложений. В настоящей главе мы будем обозначать возраст вступления в пенсионную схему через x, но больше никак не будем указывать, какие из таблиц, агрегативные, селекционные или селекционные и заключительные, имеются в виду.

Иллюстративная таблица выбытия из совокупности работающих в приложении 2В соответствует вступлению в схему в возрасте 30 лет при наиболее раннем из допускаемых возрастов выхода на пенсию $\alpha = 60$ и с непременным прекращением трудовой деятельности после 71 года. Здесь $l_{71}^{(\tau)} = 0$.

Как было замечено ранее, главными видами выплат из пенсионных схем являются аннуитеты тем лицам, которые имеют на них право. Для вычисления размера аннуитетных выплат необходимо подобрать подходящие таблицы смертности, в которых будет учитываться, произошел выход на пенсию вследствие потери трудоспособности, по старости или, возможно, в связи с увольнением. Обозначения для соответствующих стоимостей аннуитетов будут различаться правым верхним индексом. Аннуитет с непрерывными выплатами используется как удобный способ аппроксимации фактического вида пенсионных выплат, которые обычно производятся ежемесячно, но для начальной и конечной выплат могут быть оговорены специальные условия.

11.5.2. Прогнозирование будущих пенсионных выплат и взносов

Наиболее распространенным видом пенсионных схем являются такие, где размер пенсионных выплат определяется по определенной расчетной формуле. Такие схемы называются *схемами с установленными выплатами*. В некоторых пенсионных схемах выплаты определяются как функции от уровня заработной платы в момент выхода на пенсию или за некоторый период перед этим моментом. В таком случае для определения размера выплат необходимо оценить размер будущей заработной платы. Взносы вкладчиков также часто являются долей от выплачиваемой заработной платы, так что и здесь важны оценки ее величины в будущем. Для получения таких оценок введем следующие показатели:

$(AS)_{x+h}$ — фактическая годовая ставка заработной платы участника схемы в возрасте $x+h$ лет, вступившего в нее в возрасте x лет и достигшего возраста $x+h$ лет;

$(ES)_{x+h+t}$ — прогнозируемая (оценочная) годовая ставка заработной платы в возрасте $x + h + t$ лет.

Далее, предположим, что имеется функция тарифов заработной платы S_y, такая, что

$$(ES)_{x+h+t} = (AS)_{x+h} \frac{S_{x+h+t}}{S_{x+h}}. \tag{11.5.1}$$

Функция тарифов заработной платы S_y может отражать увеличение заработной платы не только вследствие деловых качеств и трудового стажа работника, но также и в связи с инфляцией. Например, в Иллюстративной таблице выбытия из совокупности работающих по нескольким причинам $S_y = (1{,}06)^{y-30} s_y$, где множитель s_y отражает рост заработной платы вследствие деловых качеств и опыта работника, а коэффициент накопления при процентной ставке, равной 6%, отражает долгосрочное воздействие инфляции и роста производительности труда всех участников схемы. Как и для функции $l_x^{(\tau)}$, одно из значений функции S_y можно выбрать произвольно; например, в Иллюстративной таблице выбытия из совокупности работающих по нескольким причинам величина S_{30} взята равной единице. Обычно предполагается, что функция S_y является ступенчатой, с постоянными значениями в пределах любого годичного возрастного интервала.

Теперь перейдем к проблеме оценки размера выплат пенсионной схемы. С этой целью введем функцию $R(x, h, t)$ для обозначения прогнозируемой величины (или ставки) ежегодных пенсионных выплат, которые начинаются с возраста $x+h+t$ лет, для участника, вступившего в схему h лет назад в возрасте x лет. Предполагается, что x и h принимают целые значения. Предположим, что ставка пенсионных выплат остается постоянной в течение периода выплат, так что, вычисляя актуарную настоящую стоимость пенсионных выплат в момент выхода на пенсию, мы получаем просто величину $R(x, h, t)\bar{a}^r_{x+h+t}$. Как сказано в предыдущем разделе, правый верхний индекс r показывает, что следует использовать таблицу смертности, соответствующую статистике для пенсионеров.

Рассмотрим теперь некоторые наиболее часто встречающиеся типы функций $R(x, h, t)$ величины ежегодных пенсионных выплат. Процедуры их оценивания распадаются на две группы. Во-первых, имеются функции, которые не зависят от размера заработной платы. Для других типов функций выплат, которые зависят от величины будущей заработной платы, нужно оценить будущие уровни годового дохода. Имеются функции, которые зависят либо от ставки заработной платы непосредственно перед выходом на пенсию, либо от средней заработной платы за последние несколько лет перед выходом на пенсию. Также имеются формулы, которые зависят от величины средней заработной платы за весь период работы на некоторого вкладчика пенсионной схемы. Ниже приводятся примеры наиболее часто встречающихся типов формул для пенсионных выплат с соответствующими их оценками.

(a) Рассмотрим ставку пенсионных выплат, которая является долей d от ставки последней заработной платы. Иными словами, $R(x, h, t) = d(ES)_{x+h+t}$. Здесь мы оцениваем последнюю заработную плату, исходя из текущей ставки заработной платы в возрасте $x + h$ лет по формуле $(ES)_{x+h+t} = (AS)_{x+h}(S_{x+h+t}/S_{x+h})$, так что $R(x, h, t) = d(AS)_{x+h}(S_{x+h+t}/S_{x+h})$.

(b) Ставка *выплат, зависящих от среднего размера заработной платы за последние m лет*, является долей d от средней ставки заработной платы за последние m лет перед выходом на пенсию. Проиллюстрируем это в общем случае при $m = 5$.

При $t > 5$ оценка средней заработной платы за последние 5 лет будет задана формулой

$$(AS)_{x+h}\frac{0{,}5\,S_{x+h+k-5}+S_{x+h+k-4}+S_{x+h+k-3}+S_{x+h+k-2}+S_{x+h+k-1}+0{,}5\,S_{x+h+k}}{5S_{x+h}},$$

где k — наибольшее целое число, не превосходящее t.

Смысл этого выражения состоит в том, что если выход на пенсию произойдет в середине года, то заработная плата в этом году выплачивается только за полгода. Общепринятым обозначением для приведенного выше среднего является ${}_5Z_{x+h+k}/S_{x+h}$. Если участнику пенсионной схемы осталось меньше 5 лет до выхода на пенсию, расчеты можно делать на основе фактической, а не прогнозируемой заработной платы.

В приведенных выше формулах не учитывается стаж участника в момент выхода на пенсию. Рассмотрим теперь три формулы, в которых выплаты пропорциональны стажу к моменту выхода на пенсию.

(c) Рассмотрим пенсионные выплаты, которые равняются общему числу проработанных лет, включая отработанную долю года выхода на пенсию, умноженному на d. В этом случае $R(x,h,t) = d(h+t)$. Если учитывается лишь полное число проработанных лет, то $R(x,h,t) = d(h+k)$, где k — наибольшее целое число, не превосходящее t.

(d) Рассмотрим ставку пенсионных выплат, которая равна произведению доли d средней заработной платы за последние 5 лет и числа проработанных лет к моменту выхода на пенсию. В этом случае

$$R(x,h,t) = d(h+t)(AS)_{x+h}\,\frac{{}_5Z_{x+h+k}}{S_{x+h}},$$

где d — указанная доля. Снова отметим, что если участнику осталось меньше 5 лет до выхода на пенсию, то можно учитывать фактическую, а не прогнозируемую заработную плату.

(e) Рассмотрим ставку пенсионных выплат, которая представляет собой произведение коэффициента d, числа проработанных лет, и средней заработной платы за все проработанное время. Такая формула выплат называется *средней выплатой за все проработанное время, включаемое в трудовой стаж*. Это то же, что определить ставку пенсионных выплат как долю d от совокупной заработной платы лица, выходящего на пенсию, за весь период его работы.

Анализ средних пенсионных выплат за все проработанное время естественно распадается на две части: одна — по уже проработанному периоду, когда информация о заработной плате известна, другая — по будущему периоду работы, для которого нужно оценить размер заработной платы. Здесь в оценку пенсионных выплат включается размер заработной платы, выплаченной за прошлые годы, для всех участников пенсионной схемы, а не только для тех, кто скоро достигнет пенсионного возраста. Если обозначить совокупную заработную плату за прошлые годы участника в возрасте $x+h$ лет через $(TPS)_{x+h}$, то ставка пенсионных выплат по уже проработанным годам составит $d(TPS)_{x+h}$. Ставка пенсионных выплат на основе будущих лет работы задается формулой

$$d(AS)_{x+h}\frac{S_{x+h}+S_{x+h+1}+\cdots+S_{x+h+k-1}+0{,}5S_{x+h+k}}{S_{x+h}},$$

где k — наибольшее целое число, не превосходящее t, и предполагается, что выходы на пенсию происходят в середине года.

Наконец, приведем еще одну формулу для выплат, в которой компонента, относящаяся к проработанным годам участника с большим стажем к моменту выхода на пенсию модифицирована.

(f) Рассмотрим ставку пенсионных выплат, которая представляет собой произведение средней заработной платы за последние три года, умноженную на 0,02 от числа проработанных лет к моменту выхода на пенсию из числа первых 30 лет работы плюс 0,01 от числа лет, проработанных сверх 30 лет, т. е., согласно (d),

$$R(x,h,t) = \begin{cases} 0{,}02(h+t)(AS)_{x+h}\dfrac{{}_3Z_{x+h+k}}{S_{x+h}}, & h+t \leqslant 30, \\ [0{,}30+0{,}01(h+t)](AS)_{x+h}\dfrac{{}_3Z_{x+h+k}}{S_{x+h}}, & h+t > 30. \end{cases}$$

11.5.3. Схемы с установленными выплатами

Теперь попытаемся вывести формулы для актуарных настоящих стоимостей таких выплат и для взносов, которые, как ожидается, обеспечат необходимые финансовые средства для этих выплат. Сначала рассмотрим общий случай схемы с установленными выплатами, а затем исследуем примеры с типичными структурами установленных выплат.

Рассмотрим, прежде всего, вычисление актуарной настоящей стоимости выплат пенсии по старости и аппроксимацию этой величины. Предположим, что функция ставки выплат — это $R(x,h,t)$ и выплаты включают страховой аннуитет без гарантированного периода выплат. Тогда можно записать интегральное выражение актуарной настоящей стоимости пенсионных выплат (АНС) следующим образом:

$$\text{АНС} = \int_{\alpha-x-h}^{\infty} v^t\, {}_tp_{x+h}^{(\tau)}\, \mu_x^{(r)}(h+t)R(x,h,t)\bar{a}_{x+h+t}^r\, dt. \tag{11.5.2}$$

Как и в разд. 11.2, для практических расчетов актуарной настоящей стоимости воспользуемся аппроксимацией этого интеграла. Для этого запишем

$$\text{АНС} = \sum_{k=\alpha-x-h}^{\infty} v^k\, {}_kp_{x+h}^{(\tau)} \int_0^1 v^s\, {}_sp_{x+h+k}^{(\tau)}\, \mu_x^{(r)}(h+k+s)R(x,h,k+s)\bar{a}_{x+h+k+s}^r\, ds.$$

Предполагая, что распределение моментов выхода на пенсию в каждом годичном возрастном интервале равномерно, можно переписать это выражение в виде

$$\text{АНС} = \sum_{k=\alpha-x-h}^{\infty} v^k\, {}_kp_{x+h}^{(\tau)}\, q_{x+h+k}^{(r)} \int_0^1 v^s R(x,h,k+s)\bar{a}_{x+h+k+s}^r\, ds.$$

Используя аппроксимацию формулой прямоугольников с выбором значения подынтегральной функции в середине отрезка разбиения, получим

$$\text{АНС} = \sum_{k=\alpha-x-h}^{\infty} v^{k+1/2}\, {}_kp_{x+h}^{(\tau)}\, q_{x+h+k}^{(r)} R(x,h,k+1/2)\bar{a}_{x+h+k+1/2}^r. \tag{11.5.3}$$

Формула (11.5.3) дает общий метод расчета актуарных настоящих стоимостей пенсионных выплат при выходе на пенсию по старости и при соответствующем обобщении для других выплат пенсионной схемы.

Теперь дадим пример, демонстрирующий различные типы расчетов, которые можно использовать при вычислении разных видов выплат гипотетической пенсионной схемы с установленными выплатами.

Пример 11.5.1. Найдем актуарные настоящие стоимости следующих пенсионных выплат для участника, присоединившегося к схеме 3 года назад в возрасте 30 лет и получающего сейчас заработную плату в размере 45 000:

(a) Выплаты пенсии участнику схемы, начиная с возраста 65 лет или с момента, когда сумма достигнутого возраста и стажа превзойдет 90 лет. Выплаты осуществляются в форме ежемесячного страхового аннуитета с гарантированным периодом выплат 10 лет с годовой ставкой, равной 0,02 от величины средней заработной платы за последние 5 лет, умноженной на общее число проработанных лет, включая часть последнего года работы.

(b) Выплаты пенсии участнику, имеющему не менее 5 лет стажа в момент увольнения. Размер и формула ставки пенсионных выплат такие же, как и для пенсии по старости. Однако начальные выплаты пенсионного аннуитета отсрочены до наиболее ранней даты выхода на пенсию по старости, если участник продолжает работать.

(c) Выплаты пенсий нетрудоспособным участникам, которые слишком молоды для получения пенсии по старости. Ставка пенсионных выплат — большее из 50% и доли, рассчитанной на основе количества проработанных лет, исходя из средней заработной платы за последние 5 лет. Выплаты образуют страховой аннуитет с гарантированным сроком выплат 10 лет.

(d) Единовременная выплата выгодоприобретателям тех участников, которые умерли в период трудовой деятельности, равная двукратной ставке заработной плате на момент смерти.

Решение. Участник присоединился к пенсионной схеме в возрасте 30 лет и, следовательно, получает право на выход на пенсию в возрасте 60 лет $(60+(60-30)=90)$. Предположим, что выход на пенсию произойдет в середине года. Тогда ставка пенсионных выплат задается формулой

$$0{,}02(h+t)(AS)_{x+h}\frac{{}_5Z_{x+h+k}}{S_{x+h}} = 0{,}02(3+k+0{,}5)(45\,000)\frac{{}_5Z_{30+3+k}}{S_{30+3}}$$

при выходе на пенсию в году, следующем за годом, когда участнику исполняется $33+k$ лет. Актуарную настоящую стоимость выплат пенсии по старости можно аппроксимировать выражением

$$\text{АНС} = 900\sum_{k=27}^{\infty} v^{k+1/2}\,{}_kp_{30+3}^{(\tau)}\,q_{30+3+k}^{(r)}(3{,}5+k)\frac{{}_5Z_{30+3+k}}{S_{30+3}}\,\bar{a}^{r}_{\overline{33+k+1/2:\overline{10|}}}.$$

Выплаты при увольнении производятся в том случае, если оно произошло между возрастами 35 и 60 лет. После достижения возраста 60 лет увольнения рассматриваются как выход на пенсию. Ставка выплат вновь задается формулой

$$0{,}02(h+t)(AS)_{x+h}\frac{{}_5Z_{x+h+k}}{S_{x+h}} = 0{,}02(3+k+0{,}5)(45\,000)\frac{{}_5Z_{30+3+k}}{S_{30+3}}.$$

Для увольнения в возрасте от 35 до 37 лет используется фактическая заработная плата, а не функция Z. Актуарная настоящая стоимость выплат на случай увольнения аппроксимируется выражением

$$\text{АНС} = 900\sum_{k=2}^{26} v^{k+1/2}\,{}_kp_{30+3}^{(\tau)}\,q_{30+3+k}^{(w)}(3{,}5+k)\frac{{}_5Z_{30+3+k}}{S_{30+3}}\,{}_{27-k-1/2|}\bar{a}^{w}_{\overline{33+k+1/2:\overline{10}|}}.$$

Для пенсии по потере трудоспособности функция ставки выплат различается в зависимости от того, проработал участник 25 лет до потери трудоспособности или нет. Поэтому ставка выплат равна

$$0{,}5(AS)_{x+h}\frac{{}_5Z_{x+h+k}}{S_{x+h}} = 0{,}5(45\,000)\frac{{}_5Z_{30+3+k}}{S_{30+3}} \quad \text{для } 0 \leqslant k \leqslant 21$$

и

$$0{,}02(h+t)(AS)_{x+h}\frac{{}_5Z_{x+h+k}}{S_{x+h}} = 0{,}02(3+k+0{,}5)(45\,000)\frac{{}_5Z_{30+3+k}}{S_{30+3}} \quad \text{для } 22 \leqslant k \leqslant 26.$$

Итак, актуарная настоящая стоимость выплат по потере трудоспособности аппроксимируется величиной

$$\text{АНС} = 22\,500\sum_{k=0}^{21} v^{k+1/2}\,{}_kp_{30+3}^{(\tau)}\,q_{30+3+k}^{(i)}\frac{{}_5Z_{30+3+k}}{S_{30+3}}\,\bar{a}^{i}_{\overline{33+k+1/2:\overline{10}|}}$$

$$+\,900\sum_{k=22}^{26} v^{k+1/2}\,{}_kp_{30+3}^{(\tau)}\,q_{30+3+k}^{(i)}\frac{{}_5Z_{30+3+k}}{S_{30+3}}(3{,}5+k)\,\bar{a}^{i}_{\overline{33+k+1/2:\overline{10}|}}.$$

Для выплаты на случай смерти прогнозируемая единовременная выплата равняется

$$2(AS)_{x+h}\frac{S_{x+h+k}}{S_{x+h}} = 2(45\,000)\frac{S_{30+3+k}}{S_{30+3}}.$$

Таким образом, актуарная настоящая стоимость выплат на случай смерти аппроксимируется выражением

$$\text{АНС} = 90\,000\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1/2}\,{}_kp_{30+3}^{(\tau)}\,q_{30+3+k}^{(d)}\frac{S_{30+3+k}}{S_{30+3}}. \qquad \blacktriangledown$$

Существует много методов оценки финансирования пенсионных схем, которые позволяют гарантировать адекватность взносов в схему обязательствам схемы. Обзор этих методов представлен в гл. 20.

11.5.4. Схемы с установленными взносами

Основными выплатами пенсионной схемы обычно являются отсроченные аннуитеты пенсий по старости. В *схемах с установленными взносами* актуарная настоящая стоимость рассчитывается как сумма накопленных с учетом процента взносов, сделанных участником или вкладчиком для данного участника, а выплаты представляют собой аннуитет, который можно приобрести на эти накопленные взносы. Накопленная сумма обычно выплачивается в случае смерти и, при определенных условиях, при увольнении до выхода на пенсию. Мы исследуем связь между ставками взносов и выплат участнику в следующем примере. Величина установленных взносов может быть определена, исходя из размера пенсии, которую хочет получать участник. Риск, связанный с тем, что достичь этого уровня пенсии не удастся, лежит на участнике схемы, а не на вкладчике. Разумеется, вкладчик может уменьшать сумму своих взносов в соответствии со своими бюджетными возможностями.

Пример 11.5.2. Найдем ставку взносов вкладчика для обеспечения пенсии по старости с возраста 65 лет в виде страхового аннуитета с гарантированным периодом выплат 10 лет и с начальной ставкой выплат в размере 50% от средней заработной платы за 5 лет работы между возрастами 60 и 65 лет. Ставка взносов, которая устанавливается как доля от заработной платы, рассчитывается для нового участника в возрасте 30 лет. Предположим, что не оговариваются выплаты на случай увольнения в течение первых 5 лет, но по истечении этого срока накопленные взносы зачисляются на личный пенсионный счет участника, с которого в случае увольнения будет выплачиваться пенсионный аннуитет, но не ранее, чем с возраста 60 лет. (Участник, утративший трудоспособность, рассматривается как уволившийся и обеспечивается страховым покрытием на случай потери трудоспособности из других источников вплоть до достижения им возраста 65 лет, когда начинается выплата обычной пенсии по старости.) В случае смерти накопленные взносы выплачиваются, если завершился начальный 5-летний накопительный период, но не начиналась выплата пенсии.

Решение. В течение первых 5 лет наша модель учитывает как выбытие по причине смерти, так и по причине увольнения. Структура выплат после этого 5-летнего периода аналогична структуре выплат в примере 11.4.1. Таким образом, для периода после этих 5 лет и до достижения участником возраста 65 лет используется модель с отсутствием выбытия.

Начнем с расчета актуарной настоящей стоимости ставки взносов, равной годовой ставке заработной платы, которая для удобства предполагается равной 1 в возрасте 30 лет, умноженной на коэффициент c,

$$\text{АНС} = c\left[\sum_{k=0}^{4} v^{k+1/2}\frac{S_{30+k}}{S_{30}}\,{}_kp_{30}^{(\tau)}\left(1-\frac{1}{2}\,q_{30+k}^{(\tau)}\right) + {}_5p_{30}^{(\tau)}\sum_{k=5}^{34} v^{k+1/2}\frac{S_{30+k}}{S_{30}}\right]. \qquad (11.5.4)$$

В формулу (11.5.4) заложено предположение, что взносы осуществляются в середине года, а прогнозируемая ставка заработной платы в возрасте $30+k$ лет составляет величину S_{30+k}/S_{30}, умноженную на начальную ставку в возрасте 30 лет, т.е. 1. Для $k=0,\ldots,4$ необходимо дожитие до момента времени $k+(1/2)$. Поскольку по прошествии 5 лет случаи выбытия не рассматриваются, для $k=5,\ldots,34$ необходимо лишь не выбыть в течение этих 5 лет.

В качестве первого шага оценки актуарной настоящей стоимости планируемых пенсионных выплат оценим желательную ставку выплат в возрасте 65 лет. Прогнозируемая средняя заработная плата между возрастами 60 и 65 лет равна $(S_{60}+S_{61}+S_{62}+S_{63}+S_{64})/(5S_{30})$. Желательная ставка выплат будет половиной от нее, и актуарная настоящая стоимость планируемых выплат задается формулой

$$\text{АНС} = {}_5p_{30}^{(\tau)}v^{35}(0{,}5)\frac{S_{60}+S_{61}+S_{62}+S_{63}+S_{64}}{5S_{30}}\,\bar{a}^{r}_{\overline{65:\overline{10|}}}. \qquad (11.5.5)$$

В этом выражении требуется не выбыть только до истечения 5 лет, но дисконтирование при учете процентов должно проводиться из расчета всех 35 лет.

Теперь приравняем две полученные актуарные настоящие стоимости, чтобы получить уравнение относительно c, коэффициента взносов вкладчика, который применяется ко всей будущей заработной плате и должен обеспечить желательный размер пенсии. ▼

В некоторых схемах этого типа предполагают взносы как со стороны вкладчика, так и со стороны участника. Обычно при этом устанавливается некоторое соотношение между размерами взносов вкладчика и взносов участника.

11.6. Выплаты на случай потери трудоспособности по индивидуальным договорам страхования жизни

В разд. 11.5.3 мы обсуждали выплаты на случай потери трудоспособности, включенные в пенсионную схему. Теперь вернемся к выплатам на случай потери трудоспособности по индивидуальным договорам страхования жизни. В договор может быть включено условие освобождения от выплаты премий в течение периода потери трудоспособности. С другой стороны, в договоре может содержаться положение о ежемесячных выплатах (иногда связанных со страховой суммой), если произошла потеря трудоспособности. Для изучения обязательств, связанных с такими условиями, удобна модель выбытия по нескольким причинам.

Обычный пункт договора, касающийся потери трудоспособности, обеспечивает выплаты в случае полной потери трудоспособности. Определение полной потери трудоспособности может предполагать высокую степень нетрудоспособности, не позволяющую выполнять никакую работу с удовлетворительным уровнем оплаты, или невозможность выполнять свои профессиональные обязанности. Полная утрата трудоспособности, которая продолжается в течение некоторого периода времени, определенного в договоре и называемого *периодом ожидания* или *исключения*, обеспечивает страхователю право на получение выплат. Период ожидания может составлять 1, 3, 6 или 12 месяцев. По договорам с освобождением от уплаты премий принято придавать выплатам *обратную силу*, т. е. возвращать страхователю все премии, полученные от него в течение периода ожидания. Покрытие предусматривается только для потери трудоспособности, которая наступила до возраста окончания действия обязательств на случай потери трудоспособности. Обычно это 60 или 65 лет. Однако выплаты в форме аннуитета (как по договору с выплатами в период нетрудоспособности, так и по договору с освобождением от уплаты премий) часто продолжаются и далее, как правило, до момента прекращения действия договора страхования жизни или до момента прекращения выплаты премий.

11.6.1. Выплаты на случай потери трудоспособности

Начнем с выражения для актуарной настоящей стоимости выплат на случай потери трудоспособности в размере 1000 в месяц по договору с лицом (x) на срок до исполнения ему y лет и производящихся до достижения этим лицом возраста u лет. Предположим, что период ожидания продолжается m месяцев. Используя обозначения из гл. 10 и предыдущих разделов гл. 11, можно выразить эту актуарную настоящую стоимость в виде определенного интеграла:

$$\bar{A} = \int_0^{y-x} v^t\,{}_tp_x^{(\tau)}\,\mu_x^{(i)}(t)\,v^{m/12}\,{}_{m/12}p_{[x+t]}^{(i)}\big(12\,000\,\ddot{a}^{(12)i}_{[x+t]+m/12:\overline{u-x-t-m/12|}}\big)\,dt. \qquad (11.6.1)$$

Верхний индекс i в выражении ${}_{m/12}p^{i}_{[x+t]}$ указывает, что вероятность дожития относится к нетрудоспособному лицу. Разобьем этот интеграл на отдельные интегралы для каждого года. Предположив, что моменты потери трудоспособности равномерно распределены в течение каждого годичного возрастного интервала, и заменив переменную t на $k+s$, получим выражение для актуарной настоящей стоимости, очень похожее на формулу (11.2.5):

$$\bar{A} = 12\,000 \sum_{k=0}^{y-x-1} v^k {}_kp_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(i)} \, v^{m/12} \int_0^1 v^s {}_{m/12}p^i_{[x+k+s]} \, \ddot{a}^{(12)i}_{[x+k+s]+m/12:\overline{u-x-k-s-m/12|}} ds. \tag{11.6.2}$$

Эта формула станет проще, если ввести предположение, что выбытие по причине i (нетрудоспособность) может происходить только с лицами, которые доживают до конца периода ожидания продолжительностью m месяцев, будучи нетрудоспособным. Если смерть произошла в течение периода ожидания, причина выбытия регистрируется как смерть. Это означает, что нет необходимости в сомножителе ${}_{m/12}p^i_{[x+k+s]}$, вероятности дожития нетрудоспособного лица, так как эта вероятность была учтена в определении величины $q^{(i)}_{x+k}$. Заметим, что это также означает следующее: возраст на момент потери трудоспособности достигается по окончании периода ожидания и в такой форме указывается в качестве возраста селекции в функциях страхового аннуитета нетрудоспособного лица.

Применяя формулу прямоугольников и выбирая значение функции в середине интервалов разбиения, аппроксимируем интегралы в формуле (11.6.2) и получаем

$$\int_0^1 v^s \ddot{a}^{(12)i}_{[x+k+s+m/12]:\overline{u-x-k-s-m/12|}} ds = v^{1/2} \ddot{a}^{(12)i}_{[x+k+1/2+m/12]:\overline{u-x-k-1/2-m/12|}}. \tag{11.6.3}$$

С учетом этих двух изменений формула (11.6.2) может быть переписана в виде

$$A = 12\,000 \sum_{k=0}^{y-x-1} v^{k+1/2} {}_kp_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(i)} \, v^{m/12} \ddot{a}^{(12)i}_{[x+k+1/2+m/12]:\overline{u-x-k-1/2-m/12|}}. \tag{11.6.4}$$

11.6.2. Освобождение от уплаты премий

Проведем аналогичные вычисления в случае освобождения от уплаты премий. Предположим, что премия P, от уплаты которой освобождается нетрудоспособное лицо, выплачивается пожизненно g раз в год. Первое различие между этим видом обязательств и выплатами на случай потери трудоспособности состоит в том, что освобождение от уплаты премий представляет собой аннуитет, выплачиваемый g раз в год, начиная с даты выплаты первой премии по окончании периода ожидания.

Начнем с частного случая, и пусть актуарная настоящая стоимость, записанная в виде определенного интеграла, уже разбита на годы потери трудоспособности. Рассматриваемый частный случай состоит в освобождении от уплаты премий, выплачиваемых пожизненно раз в полгода в случае потери трудоспособности, произошедшей до момента наступления возраста y лет и продолжающейся в течение четырехмесячного периода ожидания. Далее предположим, что выплаты имеют обратную силу, так что премии, выплаченные страхователем в обычные сроки, но попавшие в период ожидания, возвращаются с учетом расчетной процентной ставки. Это увеличит количество интегралов, относящихся к каждому годичному возрастному интервалу, потому что при утрате трудоспособности, наступившей в первые два месяца каждого полугодия, премии не выплачиваются в течение периода ожидания:

$$\bar{A} = P\sum_{k=0}^{y-x-1} v^k\,{}_kp_x^{(\tau)}\Bigg[\int_0^{1/6} v^s\,{}_sp_{x+k}^{(\tau)}\,\mu_x^{(i)}(k+s)\,{}_{1/2-s|}\ddot{a}_{[x+k+s]}^{(2)i}\,ds$$
$$+\int_{1/6}^{1/2} v^s\,{}_sp_{x+k}^{(\tau)}\,\mu_x^{(i)}(k+s)\left({}_{1-s|}\ddot{a}_{[x+k+s]}^{(2)i} + {}_{4/12}p_{[x+k+s]}^{i}v^{1/2-s}\frac{1}{2}\right)ds$$
$$+\int_{1/2}^{2/3} v^s\,{}_sp_{x+k}^{(\tau)}\,\mu_x^{(i)}(k+s)\,{}_{1-s|}\ddot{a}_{[x+k+s]}^{(2)i}\,ds$$
$$+\int_{1/2}^{1} v^s\,{}_sp_{x+k}^{(\tau)}\,\mu_x^{(i)}(k+s)\left({}_{3/2-s|}\ddot{a}_{[x+k+s]}^{(2)i} + {}_{4/12}p_{[x+k+s]}^{i}v^{1-s}\frac{1}{2}\right)ds\Bigg]. \tag{11.6.5}$$

Если ввести предположение о равномерности распределения моментов потери трудоспособности в течение годичных возрастных интервалов и учитывать только те случаи потери трудоспособности, когда лицо доживает до конца периода ожидания, оставаясь нетрудоспособным, то формула (11.6.5) примет вид

$$\bar{A} = P\sum_{k=0}^{y-x-1} v^k\,{}_kp_x^{(\tau)}q_{x+k}^{(i)}\Bigg[\int_0^{1/6} v^{s+4/12}\,{}_{1/2-s-4/12|}\ddot{a}_{[x+k+s+4/12]}^{(2)i}\,ds$$
$$+\int_{1/6}^{1/2}\left(v^{s+4/12}\,{}_{1-s-4/12}\ddot{a}_{[x+k+s+4/12]}^{(2)i} + v^{1/2}\frac{1}{2}\right)ds$$
$$+\int_{1/2}^{2/3} v^{s+4/12}\,{}_{1-s-4/12|}\ddot{a}_{[x+k+s+4/12]}^{(2)i}\,ds$$
$$+\int_{2/3}^{1}\left(v^{s+4/12}\,{}_{3/2-s-4/12|}\ddot{a}_{[x+k+s+4/12]}^{(2)i} + v\frac{1}{2}\right)ds\Bigg]. \tag{11.6.6}$$

Применяя формулу прямоугольников и выбирая значение функции в середине интервала интегрирования, мы получим

$$\bar{A} = P\sum_{k=0}^{y-x-1} v^k\,{}_kp_x^{(\tau)}q_{x+k}^{(i)}\Bigg[\frac{1}{6}v^{5/12}\,{}_{1/12|}\ddot{a}_{[x+k+5/12]}^{(2)i}$$
$$+\frac{1}{3}\left(v^{2/3}\,{}_{1/3|}\ddot{a}_{[x+k+2/3]}^{(2)i} + v^{1/2}\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{6}\,v^{11/12}\,{}_{1/12|}\ddot{a}_{[x+k+11/12]}^{(2)i}$$
$$+\frac{1}{3}\left(v^{7/6}\,{}_{1/3|}\ddot{a}_{[x+k+7/6]}^{(2)i} + v\frac{1}{2}\right)\Bigg]. \tag{11.6.7}$$

11.6.3. Нетто-премии и резервы

Нетто-премии по договору страхования потери дохода вследствие нетрудоспособности, согласно принципу эквивалентности, находятся из условия равенства актуарной настоящей стоимости соответствующих выплат и актуарной настоящей стоимости указанных премий. В случае освобождения от уплаты премий, обсуждавшегося в разд. 11.6.2, ежегодная нетто-премия ${}_{y-x}\Pi_x$ равна величине $\bar{A}$ из формулы (11.6.7), деленной на $\ddot{a}_{x:\overline{x-y}|}^{(\tau)}$.

Нетто-резервы для работающих лиц, т. е. резервы для случая, когда нет освобождения от уплаты премий, наиболее удобно выразить с помощью формулы разности премий:

$$_kV = ({}_{y-x-k}\Pi_{x+k} - {}_{y-x}\Pi_x)\ddot{a}^{(\tau)}_{x+k:\overline{y-x-k}|}. \tag{11.6.8}$$

Конечный резерв для нетрудоспособного лица является актуарной настоящей стоимостью будущих выплат на случай потери трудоспособности, рассчитанных в предположении, что нетрудоспособность наступила. Сумма премий, от уплаты которых освобождается страхователь, или ставка выплат на случай потери трудоспособности, умножается на актуарную настоящую стоимость соответствующего аннуитета для лиц, потерявших трудоспособность. Эта величина учитывает возраст в момент потери трудоспособности, продолжительность периода потери трудоспособности и возраст в момент прекращения выплат.

11.7. Замечания и литература

В этой главе мы не определяли потерь страховщика и не исследовали их дисперсии. Формула (11.2.7) позволяет определить дисперсию этих потерь, если рассматриваются выплаты по всем причинам выбытия. Если рассмотреть только один вид выплат, например, пенсионных, то имеется несколько вариантов определения потерь. Обычно считается, что премии и резервы, относящиеся к выплатам по каждой отдельной причине выбытия, не распространяются на другие причины выбытия. Таким образом, если произойдет выбытие не по выбранной причине, а по другой, то выплаты, связанные с первой причиной, нулевые, т. е. имеется доход. Потери страховщика при таком подходе приводят, например, к формуле (11.4.3). Однако потери, определенные таким образом, могут иметь ненулевые ковариации, так что дисперсия потерь по всем видам выплат не является суммой дисперсий потерь по отдельным видам выплат.

Можно рассмотреть другой подход, при котором, если происходит выбытие по определенной причине, то резервы, накопленные для выплат по всем другим причинам, идут на обеспечение выплат по данной причине. Тогда случайные величины потерь, определенные для выплат, обусловленных различными причинами выбытия, имеют нулевые ковариации и дисперсия потерь по всем видам выплат равна сумме дисперсий потерь по отдельным видам выплат. Однако в рамках этого подхода намного сложнее рассчитать премии и резервы для отдельных типов выплат, и такие премии и резервы существенно отличаются от премий и резервов, полученных традиционным путем. Более подробно эти вопросы изложены в работе [Hickman 1964].

Полученный в разд. 11.4 результат, согласно которому выплата выкупной суммы не влияет на премии и резервы, когда эта выкупная сумма равна нетто-резерву на случай смерти, не выполняется, когда речь идет о дискретной модели страхования. Это было отмечено в работе [Nesbitt 1964] при обсуждении работы Шютте. Возникающая в связи с этим проблема заключается в том, что в дискретной модели вероятность досрочного прекращения действия договора

$$q^{(w)}_{x+k} = \int_0^1 \exp\left[-\int_0^1 \mu^{(\tau)}_x(k+s)\,ds\right]\mu^{(w)}_x(k+t)\,dt$$

зависит от интенсивности смертности.

Хотя существует много книг и статей, посвященных математике пенсионных фондов, в настоящем вводном изложении нам кажется полезным отослать читателя к другим актуарным учебникам, в которых имеются аналогичные главы; см., например, [Hooker, Longley-Cooke 1957], [Jordan 1952] и [Neill 1977]. Авторы этих книг уделяют большое внимание выражению актуарных настоящих стоимостей в терминах пенсионных коммутационных функций и использованию таблиц таких функций для проведения расчетов.

Напротив, мы в основном рассматриваем представления через интегралы и аппроксимирующие суммы с подынтегральными выражениями и слагаемыми, выписанными в терминах основных функций. Эти аппроксимирующие суммы можно вычислять различными способами, использующими или не использующими коммутационные функции. Для пенсионных выплат, определенных на основе сложных правил пенсионной схемы, возможно, более гибкими и эффективными будут методы расчета, не требующие частого обращения к коммутационным функциям. Противоположная точка зрения, подчеркивающая высокую эффективность коммутационных функций для выражения актуарных настоящих стоимостей и проверки их вычисления, высказана в работе [Chamberlin 1982].

Существуют другие основы построения модели страхования на случай потери трудоспособности. В разд. 11.6 была использована модель выбытия по нескольким причинам, которая заведомо не учитывала случая выздоровления. Были развиты модели с несколькими состояниями потери трудоспособности и с возможностью перехода из одного состояния в другое. Эти модели часто используются в долгосрочном медицинском страховании. В книге [Hoem 1988] дано введение в эти вопросы с полезными ссылками на литературу.

Модель выбытия по нескольким причинам, построенную в гл. 10 и использованную в настоящей главе, можно рассматривать как модель с $m+1$ состояниями, из которых m состояний называются поглощающими, так как из них невозможен возврат в состояние трудовой активности. Эти m состояний ассоциируются с m причинами выбытия, а оставшееся состояние связывается с сохранением исходного статуса. Если некоторые из m причин выбытия не являются поглощающими, т.е. возможен переход из них в активное состояние или в другое непоглощающее состояние, то получается более сложная, но, возможно, более реалистическая модель. Оценка вероятностей перехода из одного состояния в другое может быть сложной, так как вероятности могут зависеть от пути, пройденного до текущего состояния.

Упражнения

К разделу 11.2

11.1. Работающие лица вступают в пенсионную схему в возрасте 30 лет. Если такое лицо продолжает работать вплоть до выхода на пенсию, то оно получит ежегодную пенсию, равную числу проработанных лет, умноженному на 300. Если работающий участник схемы умирает в трудоспособном возрасте, то выгодоприобретателю немедленно выплачивается сумма размера 20 000. Если он прекращает работать до достижения им 70 лет по какой-либо причине за исключением смерти, то получает право на отсроченный (до наступления возраста 70 лет) бессрочный аннуитет с ежегодными выплатами, равными числу проработанных лет, умноженному на 300. Выразите актуарную настоящую стоимость этих выплат для работающего участника схемы в возрасте 30 лет с помощью интегралов и непрерывных аннуитетов.

11.2. Пусть $J = 1$ обозначает смерть от несчастного случая, а $J = 2$ — смерть от других причин. Известно, что

(i) $\delta = 0{,}05$,

(ii) $\mu_x^{(1)}(t) = 0{,}005$ для $t \geqslant 0$, где $\mu_x^{(1)}(t)$ представляет собой интенсивность смертности от несчастного случая,

(iii) $\mu_x^{(2)}(t) = 0{,}020$ для $t \geqslant 0$.

Лицом (x) заключается договор страхования на случай смерти сроком на 20 лет с выплатой размера 2, если смерть произошла в результате несчастного случая, и размера 1, если смерть произошла по другой причине, причем осуществляются они в момент смерти. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины настоящей стоимости выплат.

К разделу 11.4

11.3. Модель выбытия по двум причинам определена условиями $\mu_x^{(1)}(t) = \mu_x^{(2)}(t) = 1/(a-t)$, $0 \leqslant t < a$.

(a) В модели выбытия с единственной причиной (1) случайная величина перспективных потерь в момент времени t задана формулой

$$_tL^{\underline{1}} = v^{T(x)-t}, \qquad 0 < t \leqslant T(x),\ J = 1.$$

Убедитесь, что

$$_tV^{\underline{1}} = \frac{1 - e^{-\delta(a-t)}}{\delta(a-t)} = A^{\underline{1}}_{x+t}.$$

(b) В модели выбытия по двум причинам случайная величина перспективных потерь в момент времени t задана формулой

$$_tL^{\underline{2}} = \begin{cases} v^{T(x)-t}, & 0 < t \leqslant T(x),\ J = 1, \\ v^{T(x)-t}{}_{T(x)}V^{\underline{1}}, & 0 < t \leqslant T(x),\ J = 2. \end{cases}$$

Убедитесь, что $\mathbf{E}[{}_tL^{\underline{2}} \,|\, T \geqslant t] = {}_tV^{\underline{1}}$.

К разделу 11.5

11.4. Для расчетов в пенсионной схеме предполагается, что функция тарифов заработной платы S_y линейна и $S_{20} = 1$. Если $(ES)_{45} = 2(AS)_{25}$, найдите S_x для $x \geqslant 20$.

11.5. Новая пенсионная схема с двумя участниками (35) и (40) обеспечивает ежегодные пенсионные выплаты в размере 2% от последней заработной платы, умноженной на число проработанных лет, включая проработанную часть последнего года работы. Подсчитайте максимальное значение величины $[R(40,0,t) - R(35,0,t)]$ при $t \geqslant 0$, если

(i) увеличение заработной платы происходит непрерывно,

(ii) $(AS)_{40} = 50\,000$ и $S_{40+t} = 1 + 0{,}06t$ для лица (40),

(iii) $(AS)_{35} = 35\,000$ и $S_{35+t} = 1 + 0{,}10t$ для лица (35).

11.6. Предполагается, что у нового участника схемы, вступившего в нее в возрасте 30 лет, заработная плата будет увеличиваться на 5% в год, чтобы учесть влияние инфляции и повышение уровня производительности. Кроме того, предполагается, что в возрастах 40, 50 и 60 лет будет происходить продвижение по службе, увеличивающее заработную плату на 10%.

(a) Постройте функцию тарифов заработной платы S_{30+k}, которая отражает эти предположения.

(b) Определите актуарную настоящую стоимость взносов в размере 10% от будущей заработной платы для нового участника схемы с начальной заработной платой размера 24 000, которая будет расти в соответствии с функцией тарифов, построенной в п. (a).

11.7. Каждый год вкладчик пенсионной схемы вносит 10% от суммы, на которую заработная плата каждого участника схемы превышает определенную величину. Эта сумма составляет 15 000 в настоящем году и будет ежегодно увеличиваться на 5%. Выразите актуарную настоящую стоимость взносов вкладчика для участника схемы, вступившего в нее в возрасте 35 лет с заработной платой, равной 40 000.

11.8. Пенсионная схема обеспечивает с момента выхода на пенсию до возраста 65 лет ставку пенсионных выплат в размере 2% от средней заработной платы за последние три года работы перед выходом на пенсию за каждый год стажа. После 65 лет эта ставка составляет $1\frac{1}{3}$% от средней заработной платы за последние три года работы перед выходом на пенсию за каждый год стажа.

(a) Определите актуарную настоящую стоимость выплат участнику схемы в возрасте 50 лет, вступившему в схему в возрасте 30 лет и имеющему в настоящий момент заработную плату 48 000, если самый ранний возраст выхода на пенсию составляет 55 лет и не оговорен возраст обязательного выхода на пенсию.

(b) Выразите актуарную настоящую стоимость выплат указанному выше лицу, если максимальное число лет стажа, учитываемого схемой, равно 35.

(c) Определите для указанного выше лица актуарную настоящую стоимость пенсионных выплат на основе уже проработанных лет.

11.9. Пенсионная схема, учитывающая среднюю заработную плату за весь период трудовой деятельности участника, обеспечивает пенсию в размере 2% от совокупной заработной платы за все годы трудовой деятельности участника схемы. Минимальный возраст выхода на пенсию составляет 58 лет, к возрасту 68 лет на пенсию выходят все. Для участника схемы в возрасте 50 лет, который начал работать в возрасте 30 лет, которому за прошедший период была выплачена суммарная заработная плата размера 450 000 и текущая заработная плата которого равна 42 000, выразите:

(a) годовую ставку пенсионных выплат участнику схемы в случае выхода на пенсию ровно в 65 лет,

(b) годовую ставку пенсионных выплат участнику схемы с учетом 1/2 года стажа, если он выходит на пенсию между возрастами 65 и 66 лет,

(c) актуарную настоящую стоимость пенсионных выплат участнику схемы на основе уже проработанных лет,

(d) актуарную настоящую стоимость пенсионных выплат участнику схемы на основе предстоящих лет его трудовой деятельности.

11.10. Новый участник пенсионной схемы в возрасте 45 лет может выбирать между двумя возможными схемами пенсионных выплат:

(1) схемой с установленными взносами в размере 20% от заработной платы ежегодно, причем взносы осуществляются в начале каждого года, и на них начисляется 5% годовых, а накопленные взносы используются для обеспечения ежемесячного бессрочного пенсионного аннуитета пренумерандо,

(2) схемой с установленными выплатами, осуществляемыми ежемесячно, с годовой ставкой в размере 40% от средней заработной платы за последние 2 года.

Известно, что (a) $\ddot{a}_{65}^{(12)} = 10$, (b) $S_{45+k} = (1{,}05)^k$ для $k \geqslant 0$, где S_y — ступенчатая функция с постоянными значениями в пределах каждого годичного возрастного интервала. Предполагая, что выход на пенсию произошел ровно в 65 лет и что участник дожил до этого момента, рассчитайте отношение ожидаемых ежемесячных выплат в схеме с установленными взносами к соответствующим выплатам в схеме с установленными выплатами.

11.11. Выпишите определенные интегралы актуарных настоящих стоимостей указанных ниже возможных выплат работающему участнику схемы со стороны этой пенсионной схемы. Предположим, что участнику в настоящий момент 40 лет, а его заработная плата составляет 40 000 в год. Он начал работу в возрасте 25 лет и с тех пор получил в качестве заработной платы сумму 320 000. Выплаты пенсии возможны только по достижении 55 лет, а выплаты в связи с увольнением до возраста 55 лет имеют форму аннуитета с отсрочкой выплат до исполнения данному лицу 55 лет.

(a) Пенсионные выплаты с годовой ставкой 50% от последней заработной платы.

(b) Пенсионные выплаты со ставкой в 0,015 от величины последней заработной платы, умноженной на стаж (включая проработанную часть последнего года работы) в момент выхода на пенсию.

(c) Выплаты, связанные с увольнением, вычисленные по формуле из п. (b).

(d) Пенсионные выплаты со ставкой 0,025 от совокупной заработной платы за весь период трудовой деятельности.

(e) Выплаты, связанные с увольнением, вычисленные по формуле из п. (d).

11.12. Пенсионные выплаты, представляющие собой непрерывный бессрочный аннуитет, являются частью пакета гарантий работающему участнику пенсионной схемы. Для лиц, выходящих на пенсию между 60 и 70 годами, годовая ставка выплат составляет 60% от ставки заработной платы на момент выхода на пенсию. Для лица, вышедшего на пенсию после 70 лет, ставка выплат составляет 60% от заработной платы между 69 и 70 годами. Найдите выражение аппроксимирующей суммы для актуарной настоящей стоимости таких выплат для лица 30 лет, только что приступившего к работе с годовым окладом 35 000.

К разделу 11.6

11.13. (a) Вычислите ежегодные нетто-премии, выплачиваемые до возраста 60 лет по договору страхования на случай потери трудоспособности с ежемесячными выплатами в размере 2 000 до возраста 65 лет, заключенного лицом (35), если это лицо станет нетрудоспособным до достижения им 60 лет и доживет до конца периода ожидания, составляющего 6 месяцев.

(b) Определите величину нетто-резерва для трудоспособного лица на конец 10-го года действия договора, описанного в п. (a).

Ко всем темам главы

11.14. Теорема Хаттендорфа для непрерывной модели, сформулированная в упр. 8.24, может быть переформулирована в обозначениях настоящей главы для непрерывной модели с несколькими причинами выбытия:

$$\mathbf{D}[{}_0L^{\underline{m}}] = \sum_{j=1}^{m} \int_0^\infty [v^t(B_{x+t}^{(j)} - {}_t\bar{V}^{\underline{m}})]^2 {}_tp_x^{(\tau)} \mu_x^{(j)}(t)\, dt.$$

Покажите, что этот результат имеет место для бессрочного страхования на случай смерти в непрерывной модели, рассматривавшегося в разд. 11.4.

Набросок решения:

(a) Покажите, что случайная величина потерь для такого договора имеет вид

$${}_0L^{\underline{2}} = \begin{cases} v^T - \bar{P}(\bar{A}_x)^{\underline{2}}\, \bar{a}_{\overline{T}|}, & 0 \leqslant T,\ J = 1, \\ v^T {}_T\bar{V}(\bar{A}_x) - \bar{P}(\bar{A}_x)^{\underline{2}}\, \bar{a}_{\overline{T}|}, & 0 \leqslant T,\ J = 2. \end{cases}$$

(b) Используя формулы (11.4.6) и (11.4.7), перепишите дифференциальное уравнение (11.4.3), а затем используйте интегрирующий множитель $e^{-\delta t}$ для получения решения

$$v^t {}_t\bar{V}(\bar{A}_x) = \bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{\overline{t}|} - \int_0^t e^{-\delta s} \mu_x^{(1)}(s)[1 - {}_s\bar{V}(\bar{A}_x)]\, ds.$$

(c) Используйте результат п. (b) для модификации определения ${}_0L^{\underline{2}}$ в п. (a), а затем покажите, что

$$\mathbf{D}[{}_0L^{\underline{2}}] = \int_0^\infty \left\{ v^t[1 - {}_t\bar{V}(\bar{A}_x)] - \int_0^t v^s \mu_x^{(1)}(s)[1 - {}_s\bar{V}(\bar{A}_x)]\, ds \right\}^2 {}_tp_x^{(\tau)} \mu_x^{(1)}(t)\, dt$$
$$+ \int_0^\infty \left\{ \int_0^t v^s \mu_x^{(1)}(s)[1 - {}_s\bar{V}(\bar{A}_x)]\, ds \right\}^2 {}_tp_x^{(\tau)} \mu_x^{(2)}(t)\, dt.$$

(d) Преобразуйте выражение, стоящее в фигурных скобках в подынтегральном выражении первого интеграла п. (c), и объедините два интеграла, подынтегральное выражение которых содержат величину $\{\int_0^t v^s \mu_x^{(1)}(s)[1 - {}_s\bar{V}(\bar{A}_x)]\, ds\}^2$. Затем, интегрируя по частям, получите

$$\mathbf{D}[{}_0L^{\underline{2}}] = \int_0^\infty \{v^t[1 - {}_t\bar{V}(\bar{A}_x)]\}^2 {}_tp_x^{(\tau)} \mu_x^{(1)}(t)\, dt.$$

Этот результат упрощает формулу для дисперсии при установлении выкупной суммы в размере ${}_t\bar{V}(\bar{A}_x)$.

12

МОДЕЛИ КОЛЛЕКТИВНЫХ РИСКОВ НА КОРОТКОМ ИНТЕРВАЛЕ ВРЕМЕНИ

12.1. Введение

В главах с 3 по 11 мы рассматривали модели долговременного страхования. В этих моделях существенным было наличие процентного дохода. В настоящей главе мы возвращаемся к теме, рассматривавшейся в гл. 2, а именно, к краткосрочным страховым договорам. Поэтому в настоящей главе процентный доход мы учитывать не будем. Цель этой главы — предложить альтернативу для модели индивидуального страхового договора, обсуждавшейся в гл. 2.

Модель индивидуальных рисков, предложенная в гл. 2, рассматривает отдельные страховые договоры и страховые случаи, возникающие по каждому из них. При этом суммарные страховые выплаты получаются сложением выплат по всем страховым договорам, содержащимся в портфеле.

Модель коллективных рисков связана со случайным процессом, который порождает страховые случаи по всему страховому портфелю. Этот процесс описывается в терминах портфеля в целом, а не в терминах отдельных составляющих его договоров. Математически это формулируется следующим образом: пусть N — число страховых случаев по страховому портфелю на заданном временном интервале, X_1 — величина выплаты по первому страховому случаю, X_2 — величина выплаты по второму случаю и т. д. Тогда случайная величина

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N \tag{12.1.1}$$

равна суммарным выплатам по всем страховым случаям из рассматриваемого портфеля, произошедшим на заданном временном интервале. Число страховых случаев N является случайной величиной, связанной с частотой возникновения страховых случаев. Величины страховых выплат $X_1, X_2, \ldots$ также являются случайными величинами. Говорят, что они измеряют «тяжесть» страховых потерь.

Чтобы модель было легче анализировать, мы делаем два основных предположения:

(1) случайные величины $X_1, X_2, \ldots$ одинаково распределены;

(2) случайные величины $X_1, X_2, \ldots$ взаимно независимы.

Выражение (12.1.1) мы будем называть случайной суммой и, если не оговорено противное, будем считать, что для ее слагаемых выполняются предположения (1) и (2).

Главным техническим средством в развитии теории, которой посвящена эта глава, является производящая функция моментов. Эта функция дает читателю простое, но мощное средство приобрести навыки для работы с моделью коллективных рисков.

Для читателя, который давно не работал с этими функциями, было бы полезно освежить свои знания о производящих функциях моментов, о средних и о дисперсиях широко используемых вероятностных распределений, обратившись к приложению 5, где такие сведения собраны.

12.2. Распределение суммарных страховых выплат

В этом разделе мы увидим, как распределение суммарных страховых выплат за фиксированный период времени можно получить из распределения числа страховых случаев и распределения величины выплат по отдельным страховым случаям.

Пусть $P(x)$ — общая для всех независимых и одинаково распределенных с.в. X_i функция распределения, и пусть X — произвольная случайная величина с такой функцией распределения. Обозначим через

$$p_k = \mathbf{E}[X^k] \tag{12.2.1}$$

k-й центральный момент, а через

$$M_X(t) = \mathbf{E}[e^{tX}] \tag{12.2.2}$$

производящую функцию моментов с.в. X. Кроме того, введем

$$M_N(t) = \mathbf{E}[e^{tN}], \tag{12.2.3}$$

производящую функцию моментов числа страховых случаев, и

$$M_S(t) = \mathbf{E}[e^{tS}], \tag{12.2.4}$$

производящую функцию моментов с.в. S суммарных страховых выплат. Функция распределения суммарных страховых выплат будет обозначаться через $F_S(x)$.

Воспользовавшись формулами (2.2.10) и (2.2.11) и учитывая предположения (1) и (2) разд. 12.1, мы получим

$$\mathbf{E}[S] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[S\,|\,N]] = \mathbf{E}[p_1 N] = p_1\mathbf{E}[N] \tag{12.2.5}$$

и

$$\begin{aligned}\mathbf{D}[S] &= \mathbf{E}[\mathbf{D}[S\,|\,N]] + \mathbf{D}[\mathbf{E}[S\,|\,N]]\\ &= \mathbf{E}[N\mathbf{D}[X]] + \mathbf{D}[p_1 N] = \mathbf{E}[N]\mathbf{D}[X] + p_1^2\mathbf{D}[N],\end{aligned} \tag{12.2.6}$$

где $\mathbf{D}[X] = p_2 - p_1^2$.

Утверждение (12.2.5) о том, что математическое ожидание суммарных страховых выплат является произведением математического ожидания величины индивидуальной страховой выплаты и математического ожидания числа страховых случаев, не вызывает удивления. Выражение (12.2.6) для дисперсии суммарных страховых выплат также имеет естественную интерпретацию. Дисперсия суммарных страховых выплат является суммой двух слагаемых, первое из которых относится к изменчивости величины индивидуальной страховой выплаты, а второе — к изменчивости числа страховых случаев.

Аналогичным образом мы получаем выражение для производящей функции моментов с.в. S:

$$\begin{aligned}M_S(t) &= \mathbf{E}[e^{tS}] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[e^{tS}\,|\,N]] = \mathbf{E}[M_X(t)^N]\\ &= \mathbf{E}[e^{N\ln M_X(t)}] = M_N(\ln M_X(t)).\end{aligned} \tag{12.2.7}$$

Пример 12.2.1. Предположим, что с.в. N имеет геометрическое распределение, т. е. ее функция вероятностей задается формулой

$$\mathbf{P}(N = n) = pq^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{12.2.8}$$

где $0 < q < 1$ и $p = 1 - q$. Выразим $M_S(t)$ через $M_X(t)$.

Решение. Поскольку

$$M_N(t) = \mathbf{E}[e^{tN}] = \sum_{n=0}^{\infty} p(qe^t)^n = \frac{p}{1 - qe^t},$$

из формулы (12.2.7) следует, что

$$M_S(t) = \frac{p}{1 - qM_X(t)}. \tag{12.2.9}$$

▼

Для того чтобы найти функцию распределения с.в. S, мы рассмотрим события $\{N = n\}$ и воспользуемся формулой полной вероятности:

$$\begin{aligned} F_S(x) = \mathbf{P}(S \leqslant x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(S \leqslant x \,|\, N = n)\, \mathbf{P}(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n \leqslant x)\, \mathbf{P}(N = n). \end{aligned} \tag{12.2.10}$$

Применяя итеративный процесс взятия свертки, определенной в разд. 2.3, мы можем записать

$$\mathbf{P}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n \leqslant x) = [P * P * P * \cdots * P](x) = P^{*n}(x), \tag{12.2.11}$$

т. е. получить n-кратную свертку функции распределения P.

Напомним, что

$$P^{*0}(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Таким образом, формула (12.2.10) приобретает вид

$$F_S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P^{*n}(x) \mathbf{P}(N = n). \tag{12.2.12}$$

Если распределение индивидуальных страховых выплат является дискретным с функцией вероятностей $p(x) = \mathbf{P}(X = x)$, то распределение суммарных страховых выплат также дискретно. По аналогии с рассуждениями, проведенными выше, функция вероятностей с.в. S может быть получена непосредственно:

$$f_S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{*n}(x)\, \mathbf{P}(N = n), \tag{12.2.13}$$

где

$$p^{*n}(x) = [p * p * p * \cdots * p](x) = \mathbf{P}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n = x), \tag{12.2.11A}$$

$$p^{*0}(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

В этом соотношении знак неравенства из левой части (12.2.11) заменен на знак равенства.

Пример 12.2.2. Рассмотрим страховой портфель, который приводит к 0, 1, 2 или к 3 страховым случаям на фиксированном временном интервале с вероятностями 0,1, 0,3, 0,4 и 0,2 соответственно. Размер индивидуальной страховой выплаты равен 1, 2 или 3 с вероятностями 0,5, 0,4 и 0,1 соответственно. Найдем функцию вероятностей и функцию распределения суммарных страховых выплат.

Решение. Вычисления сведены в приведенную ниже таблицу, в которой показаны лишь ненулевые значения.

(1) x	(2) $p^{*0}(x)$	(3) $p^{*1}(x) = p(x)$	(4) $p^{*2}(x)$	(5) $p^{*3}(x)$	(6) $f_S(x)$	(7) $F_S(x)$
0	1,0	—	—	—	0,1000	0,1000
1	—	0,5	—	—	0,1500	0,2500
2	—	0,4	0,25	—	0,2200	0,4700
3	—	0,1	0,40	0,125	0,2150	0,6850
4	—	—	0,26	0,300	0,1640	0,8490
5	—	—	0,08	0,315	0,0950	0,9440
6	—	—	0,01	0,184	0,0408	0,9848
7	—	—	—	0,063	0,0126	0,9974
8	—	—	—	0,012	0,0024	0,9998
9	—	—	—	0,001	0,0002	1,0000
n	0	1	2	3	—	—
$\mathbf{P}(N=n)$	0,1	0,3	0,4	0,2	—	—

Поскольку происходит не более трех страховых случаев и каждый из них влечет за собой страховую выплату размера не более 3, мы можем ограничиться вычислениями для $x = 0, 1, 2, \ldots, 9$.

Столбец (2) представляет собой функцию вероятностей вырожденного распределения, у которого вся вероятностная масса сосредоточена в нуле. Столбец (3) дает функцию вероятностей случайной величины индивидуальной страховой выплаты. Значения в столбцах (4) и (5) получены рекуррентно с применением соотношения

$$\begin{aligned} p^{*(n+1)}(x) &= \mathbf{P}(X_1 + X_2 + \cdots + X_{n+1} = x) \\ &= \sum_y \mathbf{P}(X_{n+1} = y)\,\mathbf{P}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n = x - y) \\ &= \sum_y p(y) p^{*n}(x-y). \end{aligned} \tag{12.2.14}$$

Поскольку индивидуальная страховая выплата может быть только трех различных размеров, в правой части формулы (12.2.14) содержится не более трех слагаемых. Для вычисления функции вероятностей, выписанной в столбце (6), используется формула (12.2.13). Для этого шага удобно записать функцию вероятностей с.в. N в самую нижнюю строку. Наконец, элементы столбца (7) — это частичные суммы столбца (6). Можно действовать по-другому: выразить свертки через функции распределений и получить $F_S(x)$ с помощью формулы (12.2.12), а потом вычислить $f_S(x) = F_S(x) - F_S(x-1)$, но здесь мы не будем рассматривать этот подход. ▼

Если распределение величины страховой выплаты X непрерывно, это еще не означает, что распределение суммы S непрерывно. Если $\mathbf{P}(N=0) > 0$, то с.в. S имеет распределение смешанного типа, т. е. оно имеет «сгусток» вероятностной массы в точке 0 и непрерывно в остальных точках. Это соображение иллюстрируется следующим примером.

Пример 12.2.3. Возвращаясь к примеру 12.2.1, дополнительно предположим, что

$$P(x) = 1 - e^{-x}, \qquad x > 0.$$

Это означает, что распределение индивидуальных страховых выплат является показательным со средним 1. Покажем, что в этом случае

$$M_S(t) = p + q\,\frac{p}{p-t}, \tag{12.2.15}$$

и дадим интерпретацию этой формулы.

Решение. Сначала перепишем (12.2.9) в следующем виде:

$$M_S(t) = p + q\,\frac{pM_X(t)}{1 - qM_X(t)}.$$

Далее, подставим в это равенство

$$M_X(t) = \int_0^\infty e^{tx}e^{-x}dx = (1-t)^{-1}$$

и получим (12.2.15).

Поскольку 1 является производящей функцией моментов константы 0, а $p/(p-t)$ — производящей функцией моментов показательного распределения с функцией распределения $1 - e^{-px}$, $x > 0$, формулу (12.2.15) можно интерпретировать как взвешенное среднее (с весами p и q соответственно). Отсюда следует, что функция распределения с.в. S является соответствующим взвешенным средним этих распределений. Таким образом, для $x > 0$

$$F_S(x) = p(1) + q(1 - e^{-px}) = 1 - qe^{-px}. \tag{12.2.16}$$

Это распределение смешанного типа. Его функция распределения показана на рис. 12.2.1. ▼

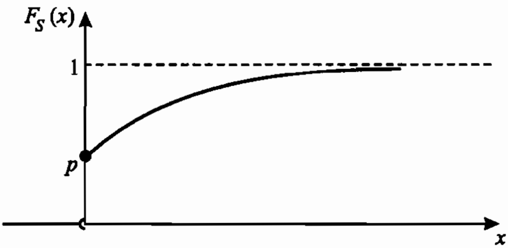


Рис. 12.2.1. График функции $F_S(x)$

12.3. Выбор основных распределений

В этом разделе мы рассмотрим некоторые вопросы, связанные с выбором распределения числа страховых случаев N и функции распределения случайной величины X_i страховых выплат. Поскольку рассуждения при выборе этих распределений различны, им будут посвящены отдельные подразделы.

12.3.1. Распределение для с.в. N

Один из возможных выборов распределения для с.в. N — это пуассоновское распределение с функцией вероятностей, заданной равенствами

$$\mathbf{P}(N=n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}, \qquad n = 0, 1, 2 \ldots, \tag{12.3.1}$$

где $\lambda > 0$. Для пуассоновского распределения $\mathbf{E}[N] = \mathbf{D}[N] = \lambda$. При таком выборе распределения с.в. N распределение с.в. S называется *сложным пуассоновским распределением*. Воспользовавшись формулами (12.2.5) и (12.2.6), получаем

$$\mathbf{E}[S] = \lambda p_1, \tag{12.3.2}$$

$$\mathbf{D}[S] = \lambda p_2. \tag{12.3.3}$$

Подставляя в (12.2.7) производящую функцию моментов пуассоновского распределения

$$M_N(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}, \tag{12.3.4}$$

мы получаем производящую функцию моментов сложного пуассоновского распределения

$$M_S(t) = e^{\lambda[M_X(t) - 1]}. \tag{12.3.5}$$

Сложное пуассоновское распределение имеет ряд привлекательных свойств, часть из которых будет обсуждаться в разд. 12.4.

Пуассоновское распределение не годится, если дисперсия числа страховых случаев превышает его среднее. В этом случае рекомендуется использовать отрицательное биномиальное распределение, которое имеет функцию вероятностей

$$\mathbf{P}(N=n) = \binom{r+n-1}{n} p^r q^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{12.3.6}$$

Это распределение имеет два параметра: $r > 0$ и $0 < p < 1$, а $q = 1 - p$. Для этого распределения

$$M_N(t) = \left(\frac{p}{1 - qe^t}\right)^r, \tag{12.3.7}$$

$$\mathbf{E}[N] = \frac{rq}{p}, \tag{12.3.8}$$

$$\mathbf{D}[N] = \frac{rq}{p^2}. \tag{12.3.9}$$

Когда для с.в. N используется отрицательное биномиальное распределение, распределение с.в. S называется *сложным отрицательным биномиальным распределением*. Подставляя выражения из формул (12.3.8) и (12.3.9) в формулы (12.2.5) и (12.2.6), мы получаем

$$\mathbf{E}[S] = \frac{rq}{p} p_1, \tag{12.3.10}$$

$$\mathbf{D}[S] = \frac{rq}{p} p_2 + \frac{rq^2}{p^2} p_1^2. \tag{12.3.11}$$

Подставляя выражение из формулы (12.3.7) в (12.2.7), получим

$$M_S(t) = \left[\frac{p}{1 - qM_X(t)}\right]^r. \tag{12.3.12}$$

Заметим, что семейство геометрических распределений, использовавшихся в примерах 12.2.1 и 12.2.3, является частным случаем (при $r = 1$) двупараметрического семейства отрицательных биномиальных распределений.

Предположив, что параметр пуассоновского распределения является случайной величиной Λ с функцией плотности $u(\lambda)$, $\lambda > 0$, а условное распределение с.в. N при условии $\Lambda = \lambda$ является пуассоновским с параметром λ, мы получаем семейство распределений для числа страховых случаев. Этот подход может оказаться полезным при рассмотрении распределения с.в. N в целом ряде случаев. Например, рассмотрим группу страхователей, такую, что страховые случаи в различных ее подгруппах возникают в соответствии с пуассоновскими распределениями, имеющими различные значения параметра λ для разных подгрупп. Если обозначить через $u(\lambda)$ относительную частоту значений параметра λ, то можно, используя формулу полной вероятности, получить

$$\mathbf{P}(N=n) = \int_0^\infty \mathbf{P}(N=n \mid \Lambda=\lambda)\, u(\lambda)\, d\lambda = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}\, u(\lambda)\, d\lambda. \tag{12.3.13}$$

Далее, используя соотношения (2.2.10) и (2.2.11), мы получаем

$$\mathbf{E}[N] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[N \mid \Lambda]] = \mathbf{E}[\Lambda], \tag{12.3.14}$$

$$\mathbf{D}[N] = \mathbf{E}[\mathbf{D}[N \mid \Lambda]] + \mathbf{D}[\mathbf{E}[N \mid \Lambda]] = \mathbf{E}[\Lambda] + \mathbf{D}[\Lambda]. \tag{12.3.15}$$

Кроме того,

$$M_N(t) = \mathbf{E}[e^{tN}] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[e^{tN} \mid \Lambda]] = \mathbf{E}[e^{\Lambda(e^t-1)}] = M_\Lambda(e^t - 1). \tag{12.3.16}$$

Равенство

$$\mathbf{E}[e^{tN} \mid \Lambda] = e^{\Lambda(e^t-1)}$$

вытекает из предположения, что условное распределение с.в. N при условии Λ является пуассоновским с параметром Λ.

Сравнение формул (12.3.14) и (12.3.15) показывает, что, как и в случае отрицательного биномиального распределения, $\mathbf{E}[N] < \mathbf{D}[N]$. В следующем примере будет показано, что с помощью таких рассуждений можно прийти к отрицательному биномиальному распределению.

Пример 12.3.1. Предположим, что $u(\lambda)$ является функцией гамма-плотности с параметрами α и β,

$$u(\lambda) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\, \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda}, \qquad \lambda > 0, \tag{12.3.17}$$

где

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y}\, dy.$$

(a) Покажем, что маргинальное распределение с.в. N является отрицательным биномиальным распределением с параметрами

$$r = \alpha, \qquad p = \beta/(1+\beta)\,. \tag{12.3.18}$$

(b) Подставляя $\mathbf{E}[\Lambda] = \alpha/\beta$ и $\mathbf{D}[\Lambda] = \alpha/\beta^2$ в формулы (12.3.14) и (12.3.15), проверим равенства (12.3.8) и (12.3.9).

Решение. (a) Подставляя

$$M_\Lambda(t) = \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^\alpha \tag{12.3.19}$$

в (12.3.16), мы получаем

$$M_N(t) = M_\Lambda(e^t - 1) = \left[\frac{\beta}{\beta - (e^t - 1)}\right]^\alpha = \left\{\frac{\beta/(\beta+1)}{1 - [1 - \beta/(\beta+1)]e^t}\right\}^\alpha. \qquad (12.3.20)$$

Сравнение формул (12.3.20) и (12.3.7) подтверждает, что это распределение с.в. N является отрицательным биномиальным с параметрами $r = \alpha$,

$$p = \frac{\beta}{1+\beta}, \qquad q = 1 - p = \frac{1}{1+\beta}. \qquad (12.3.21)$$

(b) Подставляя эти соотношения в (12.3.14) и (12.3.15), получаем

$$\mathbf{E}[N] = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{rq}{p},$$

что совпадает с равенством (12.3.8), и

$$\mathbf{D}[N] = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta^2} = \frac{rq}{p}\left[1 + \frac{q}{p}\right] = \frac{rq}{p^2},$$

что совпадает с равенством (12.3.9). ▼

Приведем еще один пример распределения с.в. N, которое получено при помощи смеси пуассоновских распределений.

Пример 12.3.2. Предположим, что $u(\lambda)$ является функцией плотности обратного гауссовского распределения с параметрами α и β. Найдем производящую функцию моментов с.в. N, $\mathbf{E}[N]$ и $\mathbf{D}[N]$.

Решение. Основные факты об обратном гауссовском распределении приведены в примере 2.3.5.

Применение формулы (12.3.16) дает

$$M_N(t) = M_\Lambda(e^t - 1) = e^{\alpha\{1 - [1 - 2(e^t - 1)/\beta]^{1/2}\}},$$

и из равенств (12.3.14) и (12.3.14) мы получаем

$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[\Lambda] = \frac{\alpha}{\beta}, \qquad \mathbf{D}[X] = \mathbf{E}[\Lambda] + \mathbf{D}[\Lambda] = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta^2} = \frac{\alpha(\beta+1)}{\beta^2}.$$

Это распределение называется *пуассоновским/обратным гауссовским распределением*. ▼

В табл. 12.3.1 сведена необходимая информация о сложных распределениях, которую мы получили при обсуждении способов выбора распределения с.в. N.

12.3.2. Распределение величины индивидуальных страховых выплат

Обращаясь к формуле (12.2.12), мы видим, что нам нужно иметь выражения для сверток распределения индивидуальных страховых выплат. Поэтому, когда это возможно, разумно выбирать то семейство распределений, для которого свертки легко найти либо в виде формулы, либо численно. Например, если величина страховых выплат имеет нормальное распределение со средним μ и дисперсией σ^2, то его n-я свертка является нормальным распределением со средним $n\mu$ и дисперсией $n\sigma^2$. Для многих типов страхования величина страховых выплат обязана быть положительной и ее распределение «смещено вправо». В этом случае мы можем выбрать гамма-распределение, которое обладает именно этими свойствами.

Таблица 12.3.1. Сложные распределения с.в. S

$S = \sum_{j=1}^{N} X_j$,

$N, X_1, X_2, \ldots$ — независимые случайные величины.
Каждая с.в. X_j имеет функцию распределения $P(x)$, производящую функцию моментов $M_X(t)$ и
$p_k = \mathbf{E}[X^k]$, $k = 1, 2, \ldots$

$$P^{*0}(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$P^{*n}(x) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{x} p(x-j)P^{*(n-1)}(j) & \text{в дискретном случае,} \\ \int_0^x p(x-y)P^{*(n-1)}(y)\,dy & \text{в непрерывном случае.} \end{cases}$$

Название	Функция распределения $F_S(x)$	Ограничения на параметры	Производящая функция моментов $M_S(t)$	Среднее	Дисперсия
Общее	$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(N=n)P^{*n}(x)$	—	$M_N[\ln M_X(t)]$	$p_1\mathbf{E}[N]$	$\mathbf{E}[N](p_2 - p_1^2) + p_1^2\mathbf{D}[N]$
Сложное пуассоновское	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} P^{*n}(x)$	$\lambda > 0$	$e^{\lambda[M_X(t)-1]}$	λp_1	λp_2
Сложное отрицательное биномиальное	$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{r+n-1}{n} p^r q^n P^{*n}(x)$	$0 < p < 1$ $q = 1 - p$ $r > 0$	$\left[\frac{p}{1 - qM_X(t)}\right]^r$ $qM_X(t) < 1$	$\frac{rqp_1}{p}$	$\frac{rqp_2}{p} + \frac{rq^2p_1^2}{p^2}$
Сложное пуассоновское/ обратное гауссовское	замкнутой формулы неизвестно	$\alpha > 0$ $\beta > 0$	$\exp\left\{\alpha\left[1 - \left\{1 - \frac{2[M_X(t) - 1]}{\beta}\right\}^{1/2}\right]\right\}$	$\frac{\alpha}{\beta} p_1$	$\frac{\alpha}{\beta}\left(p_2 + \frac{p_1^2}{\beta}\right)$

Известно, что n-я свертка гамма-распределения с параметрами α и β также является гамма-распределением, но с параметрами $n\alpha$ и β. Действительно, согласно формуле (12.3.19), $M_X(t) = [\beta/(\beta-t)]^\alpha$, а значит, производящая функция моментов, соответствующая свертке $P^{*n}(x)$, имеет вид

$$M_X(t)^n = \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^{n\alpha}, \qquad t < \beta. \tag{12.3.22}$$

Если величина страховых выплат имеет показательное распределение с параметром 1, то функция плотности задается формулой

$$p(x) = e^{-x}, \qquad x > 0.$$

Это частный случай гамма-распределения при $\alpha = \beta = 1$. Воспользовавшись формулой (12.3.19), мы получаем, что n-я свертка такой функции распределения является гамма-распределением с параметрами $\alpha = n$, $\beta = 1$. Другими словами,

$$p^{*n}(x) = \frac{x^{n-1}e^{-x}}{(n-1)!}, \qquad x > 0. \tag{12.3.23}$$

Чтобы выписать выражение для $P^{*n}(x)$, проведем интегрирование по частям n раз:

$$\begin{aligned} 1 - P^{*n}(x) &= \int_x^\infty \frac{y^{n-1}e^{-y}}{(n-1)!}\,dy = -\frac{y^{n-1}}{(n-1)!}\,e^{-y}\Big|_x^\infty + \int_x^\infty \frac{y^{n-2}e^{-y}}{(n-2)!}\,dy \\ &= \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\,e^{-x} + [1 - P^{*n}(x)] = e^{-x}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{x^i}{i!}. \end{aligned} \tag{12.3.24}$$

Затем, воспользовавшись формулой (12.2.12), мы получаем

$$1 - F_S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(N=n)\,e^{-x}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{x^i}{i!}, \qquad x > 0. \tag{12.3.25}$$

На этом примере с показательным распределением мы убеждаемся, что распределение суммарных страховых выплат может иметь сложный вид, даже если исходные распределения были выбраны простыми. Поэтому, быть может, практичнее выбирать дискретное распределение для страховых выплат и затем определять соответствующие свертки численно. Известно, что для сложных пуассоновских распределений процедура взятия сверток может быть ускорена или вместо этой процедуры можно использовать рекуррентную формулу для непосредственного подсчета функции распределения с.в. S. Вычислительные преимущества такого подхода обсуждаются в следующем разделе.

12.4. Свойства некоторых сложных распределений

В этом разделе мы обсудим некоторые математические свойства ряда сложных распределений. Мы приведем две теоремы, касающиеся сложного пуассоновского распределения.

Первая из них показывает, что сумма независимых случайных величин, каждая из которых имеет сложное пуассоновское распределение, также имеет сложное пуассоновское распределение.

Теорема 12.4.1. *Если $S_1, S_2, \ldots, S_m$ — взаимно независимые случайные величины, такие, что S_i имеет сложное пуассоновское распределение с параметром λ_i*

и функцией распределения величины страховых выплат $P_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, *то с.в.* $S = S_1 + S_2 + \cdots + S_m$ *имеет сложное пуассоновское распределение с*

$$\lambda = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i, \tag{12.4.1}$$

$$P(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda}{\lambda_i} P_i(x). \tag{12.4.2}$$

Доказательство. Мы обозначаем производящую функцию моментов распределения $P_i(x)$ через $M_i(t)$. В соответствии с формулой (12.3.5), производящая функция моментов с.в. S_i имеет вид

$$M_{S_i}(t) = \exp\{\lambda_i[M_i(t) - 1]\}.$$

В силу предположения о независимости с.в. $S_1, \ldots, S_m$ производящая функция моментов их суммы имеет вид

$$M_S(t) = \prod_{i=1}^{m} M_{S_i}(t) = \exp\left\{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i[M_i(t) - 1]\right\}.$$

Наконец, преобразуя это выражение, мы получаем

$$M_S(t) = \exp\left\{\lambda\left[\sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{\lambda} M_i(t) - 1\right]\right\}. \tag{12.4.3}$$

Поскольку это производящая функция моментов сложного пуассоновского распределения, заданного формулами (12.4.1) и (12.4.2), теорема доказана. ∎

Этот результат имеет два следствия, важных для построения моделей страхования. Во-первых, если мы объединяем m страховых портфелей, причем суммарные страховые выплаты по каждому из этих портфелей имеют сложное пуассоновское распределение и взаимно независимы, то суммарные страховые выплаты по объединенному портфелю также имеют сложное пуассоновское распределение. Во-вторых, мы можем рассматривать один страховой портфель в течение m лет. При этом мы будем предполагать, что годовые суммарные выплаты за эти m лет независимы и распределены согласно сложному пуассоновскому закону, но не будем предполагать, что они одинаково распределены. Из теоремы 12.4.1 следует, что тогда суммарные выплаты за m-летний период будут иметь сложное пуассоновское распределение.

Пример 12.4.1. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_m$ суть m различных чисел. Предположим, что $N_1, N_2, \ldots, N_m$ — взаимно независимые случайные величины. Далее, предположим, что с.в. N_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ имеет пуассоновское распределение с параметром λ_i. Каково распределение случайной величины

$$x_1 N_1 + x_2 N_2 + \cdots + x_m N_m? \tag{12.4.4}$$

Решение. Поскольку с.в. $x_i N_i$ имеет сложное пуассоновское распределение с пуассоновским параметром λ_i и с вырожденным распределением величины страховых выплат, сосредоточенным в точке x_i, мы можем применить теорему 12.4.1, согласно которой сумма в (12.4.4) имеет сложное пуассоновское распределение с параметром

$$\lambda = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i$$

и функцией вероятностей

$$p(x) = \begin{cases} \lambda_i/\lambda, & x = x_i,\ i = 1, 2, \ldots, m, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{12.4.5}$$

▼

В теореме 12.4.2 мы покажем, что конструкция, приведенная в примере 12.4.1, обратима: всякое сложное пуассоновское распределение с дискретным распределением страховых выплат можно представить в виде суммы вида (12.4.4). Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — те дискретные значения, которым могут равняться индивидуальные страховые выплаты, и пусть через

$$\pi_i = p(x_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{12.4.6}$$

обозначаются соответствующие вероятности. Пусть N_i — число слагаемых в сумме (12.1.1), которые равны x_i. Тогда, группируя слагаемые, мы приходим к равенству

$$S = x_1 N_1 + x_2 N_2 + \cdots + x_m N_m. \tag{12.4.7}$$

В общем случае величины N_i из формулы (12.4.7) являются зависимыми случайными величинами. Однако в частном случае сложного пуассоновского распределения с.в. S они независимы, что будет показано в теореме 12.4.2.

Перед тем как сформулировать теорему 12.4.2, перечислим некоторые свойства *мультиномиального распределения*, которые используются в доказательстве. В этом случае каждое из n независимых испытаний приводит к одному из m различных исходов. Вероятность того, что некоторое испытание приведет к исходу i, обозначается через π_i. Мы обозначим случайную величину, которая равна числу исходов i в n испытаниях, через N_i. Тогда

$$1 = \sum_{i=1}^{m} \pi_i, \qquad n = \sum_{i=1}^{m} N_i$$

и совместная функция вероятностей с.в. $N_1, N_2, \ldots, N_m$ задается соотношением

$$\mathbf{P}(N_1 = n_1, N_2 = n_2, \ldots, N_m = n_m) = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_m!} \pi_1^{n_1} \pi_2^{n_2} \ldots \pi_m^{n_m}. \tag{12.4.8}$$

С помощью этой формулы мы получаем, что

$$\mathbf{E}\left[\exp\left(\sum_{i=1}^{m} t_i N_i\right)\right] = (\pi_1 e^{t_1} + \pi_2 e^{t_2} + \cdots + \pi_m e^{t_m})^n. \tag{12.4.9}$$

Многомерное дискретное распределение с функцией вероятностей, которая задается соотношением (12.4.8), и производящей функцией моментов, которая задается соотношением (12.4.9), называется мультиномиальным распределением с параметрами $n,\ \pi_1, \pi_2, \ldots \pi_m$.

Теорема 12.4.2. *Если с.в. S, определенная соотношением* (12.4.7), *имеет сложное пуассоновское распределение с параметром λ и со страховыми выплатами, которые являются дискретными случайными величинами и функции вероятностей которых определены формулой* (12.4.6), *то*

(a) *с.в. $N_1, N_2, \ldots, N_m$ взаимно независимы;*

(b) *с.в. N_i имеет пуассоновское распределение с параметром $\lambda_i = \lambda\pi_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$.*

Доказательство. Начнем с определения производящей функции моментов совместного распределения с.в. $N_1, N_2, \ldots, N_m$, пользуясь равенством (2.2.10) для условных математических ожиданий. Заметим, что если общее число независимых страховых случаев фиксировано, а каждому такому случаю отвечает выплата одного из m возможных размеров, то количество случаев с выплатой каждого из этих размеров имеет мультиномиальное распределение с параметрами n, $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m$. Другими словами, при условии, что

$$N = \sum_{i=1}^{m} N_i = n,$$

условное распределение с.в. $N_1, N_2, \ldots, N_m$ является мультиномиальным распределением. Итак, воспользовавшись формулой (12.4.9), мы получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[\exp\left(\sum_{i=1}^{m} t_i N_i\right)\right] &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}\left[\exp\left(\sum_{i=1}^{m} t_i N_i\right) \,\Big|\, N=n\right]\mathbf{P}(N=n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (\pi_1 e^{t_1} + \cdots + \pi_1 e^{t_1})^n \, \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}\,. \end{aligned} \qquad (12.4.10)$$

Обратив внимание, что выражение в правой части формулы (12.4.10) есть разложение в ряд Тейлора показательной функции, мы просуммируем его и получим

$$\mathbf{E}\left[\exp\left(\sum_{i=1}^{m} t_i N_i\right)\right] = \exp(-\lambda)\exp\left(\lambda \sum_{i=1}^{m} \pi_i e^{t_i}\right) = \prod_{i=1}^{m} \exp[\lambda\pi_i(e^{t_i} - 1)]. \qquad (12.4.11)$$

Поскольку последнее выражение — произведение m функций, каждая из которых является функцией одной переменной t_i, эта формула доказывает взаимную независимость с.в. N_i. Далее, если мы положим $t_i = t$, $t_j = 0$ для $j \neq i$ в (12.4.11), то получим

$$\mathbf{E}[\exp(tN_i)] = \exp[\lambda\pi_i(e^t - 1)], \qquad (12.4.12)$$

а это производящая функция моментов пуассоновского распределения с параметром $\lambda\pi_i$. Это завершает доказательство утверждения (b). ■

Формула (12.4.7) и теорема 12.4.2 дают другой метод расчета сложного пуассоновского распределения с дискретным распределением страховых выплат. Прежде всего, мы вычисляем функции вероятностей случайных величин $x_1 N_1, x_2 N_2, \ldots,$ $x_m N_m$. Поскольку ненулевые значения функции вероятностей с.в. $x_i N_i$ являются пуассоновскими вероятностями и заданы на значениях, кратных x_i, это сделать не сложно. Затем, чтобы рассчитать функцию вероятностей с.в. S, надо вычислить свертку этих m распределений. Этот подход особенно удобен, если m, число различных значений страховых выплат, мало. Даже если индивидуальные страховые выплаты имеют непрерывное распределение, используя его, с помощью дискретных приближений иногда можно получить удовлетворительное приближение для распределения с.в. S. В следующем примере сравниваются основной и этот второй методы расчета распределения с.в. S.

Пример 12.4.2. Предположим, что с.в. S имеет сложное пуассоновское распределение с параметром $\lambda = 0{,}8$ и с индивидуальными страховыми выплатами, равными 1, 2 и 3 с вероятностями 0,25, 0,375 и 0,375 соответственно. Вычислим $f_S(x) = \mathbf{P}(S=x)$, $x = 0, 1, \ldots, 6$.

Решение. Вычисления, проводимые при использовании основного метода, соответствуют вычислениям примера 12.2.2 и суммируются в следующей таблице.

Вычисления с использованием основного метода

(1) x	(2) $p^{*0}(x)$	(3) $p(x)$	(4) $p^{*2}(x)$	(5) $p^{*3}(x)$	(6) $p^{*4}(x)$	(7) $p^{*5}(x)$	(8) $p^{*6}(x)$	(9) $f_S(x)$
0	1	—	—	—	—	—	—	0,449329
1	—	0,250	—	—	—	—	—	0,089866
2	—	0,375	0,062500	—	—	—	—	0,143785
3	—	0,375	0,187500	0,015625	—	—	—	0,162358
4	—	—	0,328125	0,070313	0,003906	—	—	0,049905
5	—	—	0,281250	0,175781	0,023438	0,000977	—	0,047360
6	—	—	0,140625	0,263672	0,076172	0,007324	0,000244	0,030923
n	0	1	2	3	4	5	6	
$e^{-0,8}\frac{(0,8)^n}{n!}$	0,449329	0,359463	0,143785	0,038343	0,007669	0,001227	0,000164	

Для другого метода, описанного в настоящем разделе, вычисления показаны в следующей таблице:

Вычисления с использованием второго метода

(1) (x)	(2) $\mathbf{P}(1N_1=x)$	(3) $\mathbf{P}(2N_2=x)$	(4) $\mathbf{P}(3N_3=x)$	(5) $\mathbf{P}(N_1+2N_2=x)$ $=(2)*(3)$	(6) $\mathbf{P}(N_1+2N_2+3N_3=x)$ $=(4)*(5)=f_S(x)$
0	0,818731	0,740818	0,740818	0,606531	0,449329
1	0,163746	—	—	0,121306	0,089866
2	0,016375	0,222245	—	0,194090	0,143785
3	0,001092	—	0,222245	0,037201	0,162358
4	0,000055	0,033337	—	0,030973	0,049905
5	0,000002	—	—	0,005703	0,047360
6	0,000000	0,003334	0,033337	0,003287	0,030923
i	1	2	3		
λ_i	0,2	0,3	0,3		
	$e^{-0,2}\frac{(0,2)^x}{x!}$	$e^{-0,3}\frac{(0,3)^{x/2}}{(x/2)!}$	$e^{-0,3}\frac{(0,3)^{x/3}}{(x/3)!}$		

Чтобы применить формулы настоящего раздела, заметим, что $m = 3$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $\lambda_1 = \lambda p(1) = 0{,}2$, $\lambda_2 = \lambda p(2) = 0{,}3$, $\lambda_3 = \lambda p(3) = 0{,}3$. Найдем сначала элементы столбцов (2), (3) и (4). Ненулевые элементы являются пуассоновскими вероятностями. Далее, мы получим свертку функций вероятностей из столбцов (2) и (3) и запишем результат в столбец (5). Наконец, мы найдем свертку функций вероятностей из столбцов (4) и (5) и запишем результат в столбец (6).

Следует помнить, что полностью функция вероятностей не выписывается ни в одном из столбцов. В примере требуется вычислить вероятности лишь для $x = 0, 1, \ldots, 6$. Так, $\mathbf{P}(S \leqslant 6) = f_S(0) + f_S(1) + \cdots + f_S(6) = 0{,}973526 < 1$. ▼

Формула (12.4.7) и теорема 12.4.2 имеют и другой смысл. Вместо того чтобы определять сложное пуассоновское распределение с.в. S с помощью параметра λ и функции распределения дискретных индивидуальных страховых выплат $P(x)$, мы можем определить это распределение с помощью возможных значений $x_1, x_2, \ldots, x_m$ индивидуальных страховых выплат и параметров $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_m$ ассоциированных пуассоновских распределений, описанных в п. (b) теоремы 12.4.2. Таким образом, для x_i имеется ассоциированное пуассоновское распределение с.в. N_i с параметром λ_i. Используя это новое распределение с.в. S, из равенств $\mathbf{E}[N_i] = \mathbf{D}[N_i] = \lambda_i$ и независимости с.в. N_i мы получаем

$$\mathbf{E}[S] = \mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{m} x_i N_i\right] = \sum_{i=1}^{m} x_i \lambda_i, \tag{12.4.13}$$

$$\mathbf{D}[S] = \mathbf{D}\left[\sum_{i=1}^{m} x_i N_i\right] = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 \lambda_i. \tag{12.4.14}$$

Формула (12.4.13) может быть получена из равенства (12.3.2), если заметить, что

$$\lambda p_1 = \lambda \sum_{i=1}^{m} x_i \pi_i = \sum_{i=1}^{m} x_i \lambda_i.$$

Аналогично мы можем получить формулу (12.4.14) из (12.3.3).

В некоторых случаях полезно, как в примере 12.4.1, рассматривать с.в. S как сумму взаимно независимых случайных величин $x_i N_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, где с.в. $x_i N_i$ имеет сложное пуассоновское распределение с параметром λ_i и вырожденным распределением величины страховых выплат, сосредоточенным в точке x_i. Эта интерпретация вытекает из теоремы 12.4.2 и лежит в основе второго метода вычислений, который иллюстрируется в примере 12.4.2.

Если величины страховых выплат могут быть только положительными целыми числами, имеется третий метод вычисления некоторых сложных распределений, называемый *рекуррентным методом*. Он основан на рекуррентной формуле, которая выводится в следующей теореме.

Теорема 12.4.3. *Пусть распределение вероятностей с.в. N, числа страховых случаев, удовлетворяет условию $\mathbf{P}(N=n)/\mathbf{P}(N=n-1) = a+(b/n)$ для $n = 1, 2, \ldots$, а распределение величин страховых выплат сосредоточено на множестве положительных целых чисел. Тогда для сложных распределений с.в. S*

$$f_S(x) = \sum_{i=1}^{x} \left[a + \frac{bi}{x}\right] p(i) f_S(x-i), \qquad x = 1, 2, \ldots,$$

причем начальное значение определяется равенством $f_S(0) = \mathbf{P}(N=0)$.

Для доказательства этой теоремы нам потребуется следующая лемма.

Лемма. *Для независимых и одинаково распределенных с.в. $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$, принимающих значения в множестве положительных целых чисел, и для положительного целого числа x*

(i) $p^{*n}(x) = \sum_{i=1}^{x} p(i) p^{*(n-1)}(x-i)$,

(ii) $p^{*n}(x) = \frac{n}{x} \sum_{i=1}^{x} i p(i) p^{*(n-1)}(x-i)$.

Доказательство леммы. Для $n = 1$ обе формулы, (i) и (ii), сводятся к равенству $p^{*1}(x) = p(x) p^{*0}(0)$. Для $n > 1$ проверку формулы (i) можно провести, используя формулу полной вероятности, которая позволяет представить $\mathbf{P}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n = x)$ в виде

$$\sum_{i=1}^{x} \mathbf{P}(X_1 = i)\, \mathbf{P}(X_2 + X_3 + \cdots + X_n = x - i).$$

Далее, заметим, что $\mathbf{P}(X_2 + X_3 + \cdots + X_n = x - i)$ и $\mathbf{P}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n = x)$ можно вычислить, используя $(n-1)$-кратную и n-кратную свертки функции $p(i)$ соответственно (см. формулу (2.3.4)).

Для $n > 1$ мы получим формулу (ii), рассматривая условные математические ожидания $\mathbf{E}[X_k \,|\, X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n = x]$ для $k = 1, 2, 3, \ldots, n$. Из соображений симметрии эти величины одинаковы для всех k. Поскольку их сумма равна x, каждое слагаемое равно x/n. Для условного математического ожидания $\mathbf{E}[X_k \,|\, X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n = x]$ получается формула

$$\sum_{i=1}^{x} i\mathbf{P}(X_1 = i)\, \mathbf{P}(X_2 + X_3 + \cdots + X_n = x - i) / \mathbf{P}(X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n = x).$$

Заметим, что $\mathbf{P}(X_2 + X_3 + \cdots + X_n = x - i)$ и $\mathbf{P}(X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n = x)$ можно вычислить, используя $(n-1)$-кратную и n-кратную свертки функции $p(i)$. Выражая отсюда $p^{*n}(x)$, мы завершает доказательство леммы. ∎

Доказательство теоремы. Прежде всего,

$$f_S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(N = n)\, p^{*n}(x).$$

Учитывая, что $\mathbf{P}(N = n) = [a + (b/n)]\, \mathbf{P}(N = n - 1)$, мы получаем

$$f_S(x) = a \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(N = n - 1) p^{*n}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b}{n} \mathbf{P}(N = n - 1) p^{*n}(x)$$

и, воспользовавшись обеими частями леммы,

$$\begin{aligned} f_S(x) = {} & a \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(N = n - 1) \sum_{i=1}^{x} p(i) p^{*(n-1)}(x - i) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b}{n} \mathbf{P}(N = n - 1) \frac{n}{x} \sum_{i=1}^{x} i p(i) p^{*(n-1)}(x - i). \end{aligned}$$

Меняя порядок суммирования, получаем

$$\begin{aligned} f_S(x) = {} & a \sum_{i=1}^{x} p(i) \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(N = n - 1)\, p^{*(n-1)}(x - i) \\ & + \frac{b}{x} \sum_{i=1}^{x} i p(i) \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(N = n - 1)\, p^{*(n-1)}(x - i) \\ = {} & a \sum_{i=1}^{x} p(i) f_S(x - i) + \frac{b}{x} \sum_{i=1}^{x} i p(i) f_S(x - i) = \sum_{i=1}^{x} \left(a + \frac{bi}{x}\right) p(i) f_S(x - i). \end{aligned}$$ ∎

Рассмотрим те единственные три распределения, которые удовлетворяют соотношению между последовательными значениями вероятности $\mathbf{P}(N=n)$, сформулированному в условии теоремы 12.4.3.

(a) Пуассоновское распределение: $\mathbf{P}(N=n)/\mathbf{P}(N=n-1) = \lambda/n$. Рекуррентная формула для сложного пуассоновского распределения имеет вид

$$f_S(x) = \frac{\lambda}{x}\sum_{i=1}^{x} ip(i)f_S(x-i) \quad \text{при} \quad f_S(0) = e^{-\lambda}. \tag{12.4.16}$$

(b) Отрицательное биномиальное распределение: $\mathbf{P}(N=n)/\mathbf{P}(N=n-1) = (1-p)(n+r-1)/n$, так что $a = 1-p$ и $b = (1-p)(r-1)$. Рекуррентная формула для сложного отрицательного биномиального распределения имеет вид

$$f_S(x) = (1-p)\sum_{i=1}^{x}\left[(r-1)\frac{i}{x}+1\right]p(i)f_S(x-i) \quad \text{при} \quad f_S(0) = p^r. \tag{12.4.17}$$

(c) Биномиальное распределение с параметрами m и p:

$$\frac{\mathbf{P}(N=n)}{\mathbf{P}(N=n-1)} = \frac{m+1-n}{n}\,\frac{p}{1-p},$$

так что $a = -p/(1-p)$ и $b = (m+1)p/(1-p)$. Рекуррентная формула в этом случае имеет вид

$$f_S(x) = \frac{p}{1-p}\sum_{i=1}^{x}\left[(m+1)\frac{i}{x}-1\right]p(i)f_S(x-i) \quad \text{при} \quad f_S(0) = (1-p)^m. \tag{12.4.18}$$

Пример 12.4.2 (повторное вычисление). Для сложного пуассоновского распределения из этого примера вычислим $f_S(x) = \mathbf{P}(S=x)$ рекуррентным методом.

Решение. Подставляя значения, использовавшиеся при втором методе вычислений, в формулу (12.4.16), получим

$$f_S(x) = \frac{1}{x}[0{,}2f_S(x-1) + 0{,}6f_S(x-2) + 0{,}9f_S(x-3)], \qquad x = 1, 2, \ldots .$$

Вспоминая, что $f_S(x) = 0$, $x < 0$, и что $f_S(0) = e^{-\lambda} = 0{,}449329$, мы легко получим снова значения функции $f_S(x)$, найденные ранее с применением основного метода вычислений. ▼

12.5. Аппроксимации распределения суммарных выплат

В разд. 2.4 для аппроксимации распределения суммарных страховых выплат в модели индивидуальных рисков использовалось нормальное распределение. Оно будет первым из распределений, которые мы рассмотрим здесь применительно к модели коллективных рисков.

Для сложного пуассоновского распределения два параметра нормальной аппроксимации определяются соотношениями (12.3.2) и (12.3.3). Для сложного отрицательного биномиального распределения параметры определяются формулами (12.3.10) и (12.3.11). В каждом из этих двух случаев аппроксимация лучше, если больше математическое ожидание числа страховых случаев, или, другими словами, когда в случае сложного пуассоновского распределения λ велико и когда в случае отрицательного биномиального распределения r велико. Эти два результата содержатся в теореме 12.5.1, которую можно интерпретировать как вариант центральной предельной теоремы.

Теорема 12.5.1. (a) *Если с.в. S имеет сложное пуассоновское распределение с параметром λ и с функцией распределения величины индивидуальных страховых выплат $P(x)$, то распределение с.в.*

$$Z = \frac{S - \lambda p_1}{\sqrt{\lambda p_2}} \tag{12.5.1}$$

сходится при $\lambda \to \infty$ к стандартному нормальному распределению.

(b) *Если с.в. S имеет сложное отрицательное биномиальное распределение с параметрами r, p и с функцией распределения величины индивидуальных страховых выплат $P(x)$, то распределение с.в.*

$$Z = \frac{S - r(q/p)p_1}{\sqrt{r(q/p)p_2 + r(q^2/p^2)p_1^2}} \tag{12.5.2}$$

сходится при $r \to \infty$ к стандартному нормальному распределению.

Доказательство. Мы докажем утверждение (a), показав, что

$$\lim_{\lambda\to\infty} M_Z(t) = e^{t^2/2}.$$

Утверждение (b) можно доказать аналогичным образом, но потребуются некоторые дополнительные шаги.

Из формулы (12.5.1) вытекает, что

$$M_Z(t) = M_S\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda p_2}}\right) \exp\left(-\frac{\lambda p_1 t}{\sqrt{\lambda p_2}}\right).$$

Воспользуемся формулой (12.3.5) и получим

$$M_Z(t) = \exp\left\{\lambda\left[M_X\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda p_2}}\right) - 1\right] - \frac{\lambda p_1 t}{\sqrt{\lambda p_2}}\right\}, \tag{12.5.3}$$

а затем подставим разложение

$$M_X(t) = 1 + \frac{p_1 t}{1!} + \frac{p_2 t^2}{2!} + \cdots, \tag{12.5.4}$$

где t заменяется на $t/\sqrt{\lambda p_2}$, в (12.5.3). Тогда

$$M_Z(t) = \exp\left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\frac{p_3}{p_2^{3/2}}t^3 + \cdots\right). \tag{12.5.5}$$

Таким образом, если $\lambda \to \infty$, то $M_Z(t)$ приближается к $e^{t^2/2}$, а это производящая функция моментов стандартного нормального распределения. ■

Нормальное распределение может не быть наилучшим приближением для распределения суммарных страховых выплат, поскольку оно симметрично, а распределение суммарных страховых выплат часто асимметрично. Эта асимметричность отчетливо видна в табл. 12.5.1, которая показывает, что третий центральный момент с.в. S при каждом из двух рассматривавшихся распределений, сложном пуассоновском или сложном отрицательном биномиальном, не равен 0. Для распределений страховых случаев положительной величины $P(0) = 0$, и третий центральный момент с.в. S в каждом из этих случаев положителен.

Таблица 12.5.1. Вычисление третьего центрального момента с.в. S

Шаг	Распределение S	
	Сложное пуассоновское	Сложное отрицательное биномиальное
$M_S(t)$	$\exp\{\lambda[M_X(t)-1]\}$	$\left[\dfrac{p}{1-qM_X(t)}\right]^r$
$\ln M_S(t)$	$\lambda[M_X(t)-1]$	$r\ln p - r\ln[1-qM_X(t)]$
$\dfrac{d^3}{dt^3}\ln M_S(t)$	$\lambda M_X(t)'''$	$\dfrac{rqM_X'''(t)}{1-qM_X(t)} + \dfrac{3rq^2M_X'(t)M_X''(t)}{[1-qM_X(t)]^2} + \dfrac{2rq^3(M_X'(t))^3}{[1-qM_X(t)]^3}$
$\mathbf{E}[(S-\mathbf{E}[S])^3] = \dfrac{d^3}{dt^3}\ln M_S(t)\Big\vert_{t=0}$ [1)]	λp_3	$\dfrac{rqp_3}{p} + \dfrac{3rq^2p_1p_2}{p^2} + \dfrac{2rq^3p_1^3}{p^3}$

При составлении табл. 12.5.1 мы пользовались свойствами логарифма производящей функции моментов, например,

$$\frac{d}{dt}\ln M_X(t)\Big\vert_{t=0} = \frac{M_X'(0)}{M_X(0)} = \mu,$$
$$\frac{d^2}{dt^2}\ln M_X(t)\Big\vert_{t=0} = \frac{M_X''(0)M_X(0) - M_X'(0)^2}{M_X(0)^2} = \sigma^2.$$

В упр. 12.23(а) читателю предлагается проверить соотношение, использованное в последней строке табл. 12.5.1.

Из-за отмеченной выше асиммертичности нам нужно найти более общую аппроксимацию для распределения суммарных выплат, которая учитывает эту асимметричность. Поиски этой второй аппроксимации мы начнем с гамма-распределения. Этот выбор мотивируется тем, что как гамма-распределение, так и сложное пуассоновское и сложное отрицательное биномиальное распределения для положительных страховых выплат имеют положительный третий центральный момент. Пусть $G(x:\alpha,\beta)$ обозначает функцию распределения с параметрами α и β, т.е.

$$G(x:\alpha,\beta) = \int_0^x \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\,t^{\alpha-1}e^{-\beta t}\,dt. \tag{12.5.6}$$

В этом случае для любого x_0 определим новую функцию распределения, которая будет обозначаться через $H(x:\alpha,\beta,x_0)$, следующим образом:

$$H(x:\alpha,\beta,x_0) = G(x-x_0:\alpha,\beta). \tag{12.5.7}$$

Это равносильно сдвигу распределения $G(x:\alpha,\beta)$ на величину x_0. Рис. 12.5.1 иллюстрирует этот сдвиг для $x_0 > 0$, когда $g(x)$, $x \geqslant x_0$, и $h(x)$, $x \geqslant x_0$, обозначают плотности распределений $G(x:\alpha,\beta)$ и $H(x:\alpha,\beta,x_0)$ соответственно.

[1)] Если $k \geqslant 4$, то $\dfrac{d^k}{dt^k}\ln M_S(t)\Big\vert_{t=0}$ не является k-м центральным моментом.

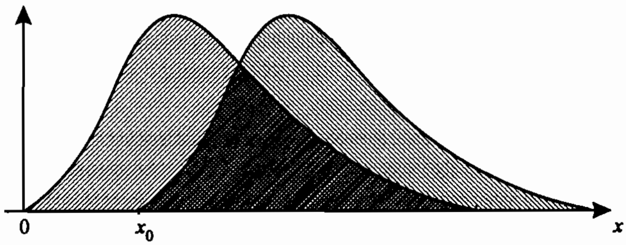


Рис. 12.5.1. Гамма-распределение со сдвигом

Мы аппроксимируем распределение суммарных выплат с.в. S гамма-распределением со сдвигом, в котором параметры α, β и x_0 выбраны таким образом, чтобы первый момент, а также второй и третий центральные моменты с.в. S совпадали с соответствующими характеристиками гамма-распределения со сдвигом. Поскольку центральные моменты такого гамма-распределения совпадают с центральными моментами исходного гамма-распределения, эта процедура приводит к соотношениям

$$\mathbf{E}[S] = x_0 + \frac{\alpha}{\beta}, \tag{12.5.8}$$

$$\mathbf{D}[S] = \frac{\alpha}{\beta^2}, \tag{12.5.9}$$

$$\mathbf{E}[(S - \mathbf{E}[S])^3] = \frac{2\alpha}{\beta^3}. \tag{12.5.10}$$

Из этих соотношений мы имеем

$$\beta = 2\,\frac{\mathbf{D}[S]}{\mathbf{E}[(S - \mathbf{E}[S])^3]}, \tag{12.5.11}$$

$$\alpha = 4\,\frac{[\mathbf{D}[S]]^3}{\mathbf{E}[(S - \mathbf{E}[S])^3]^2}, \tag{12.5.12}$$

$$x_0 = \mathbf{E}[S] - 2\frac{[\mathbf{D}[S]]^2}{\mathbf{E}[(S - \mathbf{E}[S])^3]}. \tag{12.5.13}$$

Для сложного пуассоновского распределения эта процедура приводит к формулам

$$\alpha = 4\lambda\,\frac{p_2^3}{p_3^2}, \tag{12.5.14}$$

$$\beta = 2\,\frac{p_2}{p_3}, \tag{12.5.15}$$

$$x_0 = \lambda p_1 - 2\lambda\,\frac{p_2^2}{p_3}. \tag{12.5.16}$$

Замечание. Мы можем показать, что если $\alpha \to \infty$, $\beta \to \infty$ и $x_0 \to -\infty$, так что

$$x_0 + \frac{\alpha}{\beta} = \mu \quad \text{(постоянная)},$$

$$\frac{\alpha}{\beta^2} = \sigma^2 \quad \text{(постоянная)}, \tag{12.5.17}$$

то распределение $H(x : \alpha, \beta, x_0)$ сходится к $N(\mu, \sigma^2)$. Таким образом, нормальные распределения содержатся в качестве предельных распределений в семействе трехпараметрических гамма-распределений. В этом смысле такая аппроксимация является обобщением нормальной.

Пример 12.5.1. Рассмотрим пуассоновское распределение с параметром $\lambda = 16$. Это то же самое, что сложное пуассоновское распределение с $\lambda = 16$ и вырожденным распределением величины страховых выплат, сосредоточенным в точке 1. Сравним это распределение с его аппроксимациями

(a) гамма-распределением со сдвигом, (b) нормальным распределением.

Решение. (a) Здесь $p_k = 1$, $k = 1, 2, 3$, и из формул (12.5.14)–(12.5.16) мы имеем $\alpha = 64$, $\beta = 2$, $x_0 = -16$. Заметим, что, в отличие от случая, изображенного на рис. 12.5.1, x_0 отрицательно.

(b) Для нормальной аппроксимации воспользуемся значениями $\mu = 16$ и $\sigma = 4$.

Приведенные в таблице ниже результаты позволяют сравнить эти три распределения. В этих приближениях при аппроксимации функции распределения $F_S(x)$ для $x = 5, 10, \ldots, 40$ использовалась половинная коррекция.

	Точное	Аппроксимации	
x	$\sum_{y=0}^{x} \frac{e^{-16}(16)^y}{y!}$	$G(x + 16{,}5 : 64, 2)$	$\Phi(x + 0{,}5 - 16/4)$
5	0,001384	0,001636	0,004332
10	0,077396	0,077739	0,084566
15	0,466745	0,466560	0,450262
20	0,868168	0,868093	0,869705
25	0,986881	0,986604	0,991226
30	0,999433	0,999378	0,999856
35	0,999988	0,999985	0,999999
40	1,000000	1,000000	1,000000

▼

В случае сложного отрицательного биномиального распределения имеется дополнительное соображение в пользу приближения гамма-распределением. Оно изложено в приложении к настоящей главе.

12.6. Замечания и литература

Глава 2 книги [Seal 1969] содержит обширный обзор литературы о моделях коллективных рисков, включая работы Лундберга о сложных пуассоновских распределениях. Ряд авторов, например, Дропкин [Dropkin 1959] и Саймон [Simon 1960] использовали отрицательное биномиальное распределение для моделирования числа автомобильных аварий, совершенных группой страхователей на фиксированном временном интервале.

В примере 12.3.1 мы получили отрицательное биномиальное распределение, предположив, что неизвестный пуассоновский параметр имеет гамма-распределение. Эта идея возникла не позже, чем появились работы Гринвуда и Юла [Greenwood, Yule 1920] о предрасположенности к авариям. Другой метод получения такого распределения в терминах модели заражения принадлежит Пойа и Эггенбергеру; его можно найти в гл. 2 книги Бюльмана [Bühlmann 1970]. В частном случае целого r

отрицательное биномиальное распределение может быть получено как распределение числа бернуллиевских испытаний, которые оканчиваются неуспехом вплоть до r-го успешного. Изложение этих вопросов можно найти в большинстве учебников по теории вероятностей, но это не имеет отношения к материалу настоящей главы.

Теорема 12.4.2 известна давно, и ее можно найти разд. 2 гл. 2 книги Феллера [Feller 1968]. Второй метод вычисления вероятностей для сложного пуассоновского распределения, основанный на теореме 12.4.2, был предложен Песоненом [Pesonen 1967] и реализован Халмстадом [Halmstad 1976] при вычислении премий в страховании на базе эксцедента убыточности. Теорема 12.4.2 допускает обратную теорему, которая не была сформулирована в разд. 12.4. Реньи [Renyi 1962] показал, что если с.в. $N_1, N_2, \ldots, N_m$ взаимно независимы, то с.в. N распределена по пуассоновскому закону. Поэтому второй метод вычислений будет работать только для сложного пуассоновского распределения.

Указанный второй метод вычислений может также применяться для построения имитационной модели для суммарных страховых выплат. Вместо определения величины индивидуальных страховых выплат проводится имитационное моделирование с.в. $N_1, N_2, \ldots, N_m$ и непосредственно из формулы (12.4.7) получается реализация с.в. S. При применении основного метода математическое ожидание количества случайных чисел, необходимого для однократного нахождения с.в. S, равно $1+\lambda$. При применении второго метода для нахождения каждого значения с.в. S требуется ровно m случайных чисел.

Имеется ряд более сложных методов приближения распределения суммарных выплат. В книге [Beard, Pentikäinen, Pesonen 1984] описан метод асимптотических разложений и аппроксимации Эшера. Бохман и Эшер [Bohman, Esscher 1963, 1964] сравнивали ряд методов аппроксимации. Сил [Seal 1978a] привел пример приближения гамма-распределением со сдвигом и продемонстрировал его превосходное качество. Бауэрс [Bowers 1966] аппроксимировал распределение суммарных страховых выплат суммой ортогональных функций, первая из которых является гамма-распределением. Приведенный в приложении к этому разделу результат о том, что гамма-распределение можно получить как предел сложного отрицательного биномиального распределения, принадлежит Лундбергу [Lundberg 1940].

Иногда распределение суммарных выплат можно получить посредством численного обращения производящей функции моментов; эта тема развивается в гл. 3 книги Сила [Seal 1978b].

В монографии [Panjer, Willmot 1992] идеи, изложенные в этой главе, развиваются более подробно. Особое внимание уделяется рекуррентным вычислениям и дискретным аппроксимациям.

Приложение

Теорема 12.A.1. *Если случайные величины S_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$, имеют сложные отрицательные биномиальные распределения с параметрами r и $p(k)$ и с функцией распределения страховых выплат $P(x)$ и если параметры отрицательных биномиальных распределений удовлетворяют условиям*

$$\frac{q(k)}{p(k)} = k\frac{q}{p}$$

для $k = 1, 2, 3, \ldots$, где $q = 1-p$ — константа, то распределение с.в. $S_k/\mathbf{E}[S_k]$ приближает $G(x : r, r)$ при $k \to \infty$.

Доказательство. Воспользовавшись формулой (12.3.12), мы получаем, что производящая функция моментов с.в. $S_k/\mathbf{E}[S_k]$ равна

$$\left[\frac{p(k)}{1-q(k)M_X(t/\mathbf{E}[S_k])}\right]^r. \tag{12.A.1}$$

Кроме того,

$$M_X\left(\frac{t}{\mathbf{E}[S_k]}\right) = 1 + \frac{p_1}{\mathbf{E}[S_k]}\,t + \frac{p_2}{2\mathbf{E}[S_k]^2}\,t^2 + \cdots. \tag{12.A.2}$$

Если выражение (12.A.2) подставить в (12.A.1), мы получим

$$\left\{\frac{p(k)}{1-q(k)-[q(k)p_1/\mathbf{E}[S_k]]t-[q(k)p_2/2\mathbf{E}[S_k]^2]t^2-\cdots}\right\}^r. \tag{12.A.3}$$

Теперь, поскольку

$$\mathbf{E}[S_k] = r\frac{q(k)p_1}{p(k)} = r\frac{kqp_1}{p},$$

мы видим, что производящей функцией моментов с.в. $S_k/\mathbf{E}[S_k]$ является

$$\left[1-\frac{1}{r}\,t-\frac{p_2}{2r^2p_1^2(q/p)k}\,t^2-\cdots\right]^{-r} = \left[1-\frac{1}{r}\,t-R(k)\right]^{-r},$$

где остаточный член $R(k)$ таков, что $\lim_{k\to\infty} R(k) = 0$. Таким образом,

$$\lim_{k\to\infty}\mathbf{E}\left[\exp\left(t\,\frac{S_k}{\mathbf{E}[S_k]}\right)\right] = \left(\frac{r}{r-t}\right)^r, \tag{12.A.4}$$

что представляет собой производящую функцию моментов распределения $G(x:r,r)$. ∎

Из формулы (12.A.4) следует, что производящая функция моментов с.в. S_k приближается выражением

$$\left(\frac{r}{r-\mathbf{E}[S_k]t}\right)^r = \left\{\frac{r}{r-[rq(k)/p(k)]p_1t}\right\}^r = \left\{\frac{p(k)/[q(k)p_1]}{p(k)/[q(k)p_1]-1}\right\}^r,$$

которое является производящей функцией моментов распределения $G\{x:r,[p(k)/q(k)p_1]\}$. Таким образом, когда k велико, откуда в предположениях теоремы 12.A.1 следует, что велико математическое ожидание числа страховых выплат $rq(k)/p(k) = rk(q/p)$, распределение суммарных выплат приближенно равно гамма-распределению.

Теорема 12.A.1 должна стать аргументом в пользу применения гамма-распределений для аппроксимации распределения суммарных выплат. Сравнение основных соображений теоремы 12.5.1(b) и теоремы 12.A.1 позволяет глубже проникнуть в суть. Доказательство теоремы 12.5.1 (b) следует доказательству центральной предельной теоремы. Если переписать формулу (12.5.2) в виде

$$Z = \frac{S/r-(q/p)p_1}{\sqrt{(q/p)p_2+(q^2/p^2)p_1^2}/\sqrt{r}},$$

то соответствие станет ясным, причем r играет роль n из центральной предельной теоремы.

В теореме 12.A.1 параметр r отрицательного биномиального распределения остается фиксированным. Математическое ожидание числа страховых выплат изменяется пропорционально параметру объема k вследствие изменения величин $q(k)$ и $p(k) = 1-q(k)$. В предположениях теоремы 12.A.1

$$\mathbf{D}[S_k] = \frac{rqk}{p}\,p_2 + r\,\frac{k^2q^2}{p^2}\,p_1^2, \qquad \mathbf{D}\left[\frac{S_k}{\mathbf{E}[S_k]}\right] = \frac{p}{rkqp_1^2}\,p_2 + \frac{1}{r}.$$

Если параметр объема k стремится к бесконечности, то

$$\mathbf{D}\left[\frac{S_k}{\mathbf{E}[S_k]}\right] \to \frac{1}{r},$$

что следует из теоремы 12.A.1. Поэтому гамма-приближение может рассматриваться в отрицательном биномиальном случае, когда математическое ожидание страховых случаев велико и распределение величины страховых выплат имеет относительно маленькую дисперсию.

Упражнения

К разделу 12.1

12.1. Пусть S обозначает число лиц, пересекающих некоторый перекресток на автомобиле в определенный час. Как смоделировать величину S в виде случайной суммы?

12.2. Пусть S обозначает общее количество осадков, выпавших на метеорологической станции в определенный месяц. Как смоделировать величину S в виде случайной суммы?

К разделу 12.2

12.3. Предположим, что с.в. N имеет биномиальное распределение с параметрами n и p. Выразите каждую из следующих величин в терминах n, p, p_1, p_2 и $M_X(t)$:
(a) $\mathbf{E}[S]$, (b) $\mathbf{D}[S]$, (c) $M_S(t)$.

12.4. Для распределения, определенного в примере 12.2.2, подсчитайте
(a) $\mathbf{E}[N]$, (b) $\mathbf{D}[N]$, (c) $\mathbf{E}[X]$, (d) $\mathbf{D}[X]$, (e) $\mathbf{E}[S]$, (f) $\mathbf{D}[S]$.

К разделу 12.3

12.5. Предположим, что распределение величины страховых выплат такое же, как в примере 12.2.2, но с.в. N имеет пуассоновское распределение с $\mathbf{E}[N] = 1{,}7$. Вычислите
(a) $\mathbf{E}[S]$, (b) $\mathbf{D}[S]$.

12.6. Предположим, что с.в. S имеет сложное пуассоновское распределение с $\lambda = 2$ и $p(x) = 0{,}1x$, $x = 1, 2, 3, 4$. Вычислите вероятности того, что суммарные выплаты равны $0, 1, 2, 3$ и 4.

12.7. Рассмотрим семейство отрицательных биномиальных распределений с параметрами r и p. Пусть $r \to \infty$ и $p \to 1$, причем произведение $r(1-p) = \lambda$ остается постоянным. Покажите, что полученный предел является пуассоновским распределением с параметром λ. [Указание. Обратите внимание, что $p^r = [1 - (\lambda/r)]^r \to e^{-\lambda}$ при $r \to \infty$, и рассмотрите сходимость производящих функций моментов.]

12.8. Предположим, что с.в. S имеет сложное пуассоновское распределение с пуассоновским параметром λ и функцией вероятностей величины страховых выплат

$$p(x) = [-\ln(1-c)]^{-1}\frac{c^x}{x}, \qquad x = 1, 2, 3, \ldots, \ 0 < c < 1.$$

Рассмотрите производящую функцию моментов с.в. S и покажите, что S имеет отрицательное биномиальное распределение с параметрами p и r. Выразите p и r в терминах c и λ.

12.9. Рассмотрите две функции плотности

$$g(x) = 3^{18}x^{17}\frac{e^{-3x}}{17!} \quad \text{и} \quad h(x) = 3^6x^5\frac{e^{-3x}}{5!}, \qquad x > 0.$$

Выпишите свертку этих двух распределений, т. е. $[g * h](x)$. [Указание. Начните непосредственно с определения свертки из разд. 2.3 или воспользуйтесь соотношением (12.3.19).]

12.10. Предположим, что число аварий, в которые в течение года попал застрахованный водитель, имеет пуассоновское распределение с параметром λ. Если авария произошла, то вероятность того, что ущерб превысит величину некоторой безусловной франшизы, равна p. В предположении, что число аварий не зависит от тяжести их последствий, найдите распределение числа тех аварий, которые повлекли страховые выплаты.

12.11. Пусть производящая функция моментов пуассоновского/обратного гауссовского распределения является решением примера 12.3.2. Замените параметр α на λ/β. В результате этой замены среднее превратится в λ, а дисперсия — в $\lambda + \lambda\beta$. Покажите, что

$$\lim_{\beta\to\infty} M_N(t) = e^{\lambda(e^t-1)}.$$

Это свидетельствует о том, что если параметр β стремится к бесконечности так, что среднее остается постоянным, то пуассоновское/обратное гауссовское распределение приближается к пуассоновскому распределению.

К разделу 12.4

12.12. Предположим, что с.в. S_1 имеет сложное пуассоновское распределение с пуассоновским параметром $\lambda = 2$ и страховыми выплатами, равными 1, 2, 3 с вероятностями 0,2, 0,6 и 0,2 соответственно. Кроме того, с.в. S_2 имеет сложное пуассоновское распределение с пуассоновским параметром $\lambda = 6$ и страховыми выплатами, равными 3 или 4 с равными вероятностями 0,5. Каково распределение с.в. $S_1 + S_2$, если с.в. S_1 и S_2 независимы?

12.13. Предположим, что с.в. N_1, N_2, N_3 взаимно независимы и N_i имеет пуассоновское распределение с $\mathbf{E}[N_i] = i^2$, $i = 1, 2, 3$. Каково распределение с.в. $S = -2N_1 + N_2 + 3N_3$?

12.14. Пусть N имеет пуассоновское распределение с параметром λ. Выразите $\mathbf{P}(N = n+1)$ через $\mathbf{P}(N = n)$.

Обратите внимание, что эта рекуррентная формула может оказаться полезной в таких вычислениях, как вычисление последовательных элементов столбцов (2), (3) и (4) в примере 12.4.2 при применении второго метода вычислений.

12.15. Пусть с.в. S имеет сложное пуассоновское распределение с параметром λ и дискретной функцией вероятностей $p(x)$, $x > 0$. Пусть $0 < \alpha < 1$.

Рассмотрим с.в. $\widetilde{S}$ с распределением, которое является сложным пуассоновским с пуассоновским параметром $\tilde{\lambda} = \lambda/\alpha$ и с функцией вероятностей случайной величины страховых выплат $\tilde{p}(x)$, где

$$\tilde{p}(x) = \begin{cases} \alpha p(x), & x > 0, \\ 1 - \alpha, & x = 0. \end{cases}$$

Это означает, что мы допускаем 0 в качестве значения страховой выплаты (это может случиться, если имеется франшиза) и соответственно изменяем распределение. Покажите, что с.в. $\widetilde{S}$ и S имеют одинаковые распределения,

(a) сравнивая производящие функции моментов с.в. $\widetilde{S}$ и S,

(b) сравнивая определения распределений с.в. $\widetilde{S}$ и S через возможные величины страховых выплат и пуассоновские параметры распределений их частот.

12.16. Пусть в примере 12.2.2 с.в. N_1 является случайным числом выплат величины 1, а N_2 — случайным числом выплат величины 2. Вычислите

(a) $\mathbf{P}(N_1 = 1)$, (b) $\mathbf{P}(N_2 = 1)$, (c) $\mathbf{P}(N_1 = 1, N_2 = 1)$.

Будут ли с.в. N_1 и N_2 независимыми?

12.17. Вычислите $f_S(x)$ при $x = 0, 1, 2, \ldots, 5$ для следующих трех сложных распределений, каждое с распределением величины страховых выплат, заданным соотношениями $p(1) = 0{,}7$ и $p(2) = 0{,}3$:

(a) пуассоновского с $\lambda = 4{,}5$,

(b) отрицательного биномиального с $r = 4{,}5$ и $p = 0{,}5$,

(c) биномиального с $m = 9$ и $p = 0{,}5$.

(d) Для каждого из распределений (a), (b) и (c) вычислите среднее и дисперсию числа страховых случаев.

12.18. Пусть с.в. S, определенная в (12.4.7), имеет сложное отрицательное биномиальное распределение с параметрами r и p и с распределением величины страховых выплат, которое задается дискретной функцией вероятностей, определенной формулой (12.4.6).

(a) Покажите, что с.в. N_i имеет отрицательное биномиальное распределение с параметрами r и $p/(p + q\pi_i)$.

(b) Покажите, что в общем случае с.в. N_1 и N_2 не являются независимыми. [Указание. Воспользуйтесь производящей функцией моментов совместного распределения с.в. $N_1, N_2, N_3, \ldots, N_m$ из доказательства теоремы 12.4.2.]

12.19. Покажите, что сложное распределение из примера 12.2.2 не удовлетворяет предположениям теоремы 12.4.3.

К разделу 12.5

12.20. Покажите, что если с.в. N имеет пуассоновское распределение с параметром λ, то распределение с.в. $Z = (N-\lambda)/\sqrt{\lambda}$ приближается при $\lambda \to \infty$ к распределению $N(0,1)$.

12.21. Воспользуйтесь величиной $\ln M_S(t)$ из таблицы 12.5.1 для проверки формул (12.3.3) и (12.3.11).

12.22. Предположим, что функция распределения с.в. S — это $G(x:\alpha,\beta)$. Воспользуйтесь производящей функцией моментов [см. (12.3.19)] для того, чтобы показать, что

$$\mathbf{E}[S^h] = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+h-1)}{\beta^h}, \qquad h = 1,2,3,\dots.$$

12.23. (a) Проверьте, что

$$\frac{d^3}{dt^3}\ln M_X(t)\bigg|_{t=0} = \mathbf{E}[(X-\mathbf{E}[X])^3].$$

(b) Воспользуйтесь п. (a) для того, чтобы показать, что если с.в. S имеет распределение $G(x:\alpha,\beta)$, то

$$\mathbf{E}[(S-\mathbf{E}[S])^3] = 2\alpha/\beta^3.$$

12.24. (a) Для заданного α определите β и x_0 таким образом, чтобы распределение $H(x:\alpha,\beta,x_0)$ имело нулевое среднее и дисперсию 1.

(b) Каково значение предела функции $H(x:\alpha,\sqrt{\alpha},-\sqrt{\alpha})$ при $\alpha \to \infty$?

12.25. Предположим, что с.в. S имеет сложное пуассоновское распределение с параметром $\lambda = 12$ и равномерно распределенными между 0 и 1 величинами страховых выплат. Постройте аппроксимацию для вероятности $\mathbf{P}(S < 10)$, используя

(a) нормальное приближение, (b) приближение гамма-распределением со сдвигом.

Ко всем темам главы

12.26. Коэффициент потерь для нескольких страховых договоров в течение одного периода выплаты премий определяется соотношением $R = S/G$, где S — величина суммарных страховых выплат, а G — величина суммарных премий. Предположим, что $G = p_1\mathbf{E}[N](1+\theta)$, $\theta > 0$.

(a) Покажите, что

$$\mathbf{E}[R] = (1+\theta)^{-1} \quad \text{и} \quad \mathbf{D}[R] = \frac{\mathbf{E}[N]\,\mathbf{D}[X] + p_1^2\mathbf{D}[N]}{[p_1\mathbf{E}[N](1+\theta)]^2}.$$

(b) Найдите выражение для $\mathbf{D}[R]$, если

(i) с.в. N имеет пуассоновское распределение,

(ii) с.в. N имеет отрицательное биномиальное распределение.

12.27. Предположим, что распределение с.в. S_1 является сложным пуассоновским и задается параметром λ и функцией распределения $P_1(x)$ и что распределение с.в. S_2 является сложным отрицательным биномиальным и задается параметрами r, p $(q = 1-p)$ и функцией распределения $P_2(x)$. Покажите, что с.в. S_1 и S_2 имеют одинаковые распределения, если $\lambda = -r\ln p$ и

$$P_1(x) = \frac{\sum_{k=1}^{\infty}(q^k/k)P_2^{*k}(x)}{-\ln p}.$$

[Указание. Проверьте равенство соответствующих производящих функций моментов.]

Обратите внимание, что из этого упражнения следует, что каждое сложное отрицательное биномиальное распределение можно рассматривать в указанном выше смысле как сложное пуассоновское.

12.28. Пусть с.в. S, определенная формулой (12.4.7), имеет сложное пуассоновское/обратное гауссовское распределение с параметрами α и β и с дискретным распределением вероятностей величины страховых выплат, заданным формулой (12.4.6).

(a) Покажите, что с.в. N имеет пуассоновское/обратное гауссовское распределение, и определите параметры этого распределения.

(b) Покажите, что в общем случае с.в. N_1 и N_2 не являются независимыми.

12.29. Для того чтобы показать, что третий центральный момент с.в. S, когда она имеет сложное пуассоновское/обратное гауссовское распределение, может быть выражен через параметры этого распределения в виде

$$\frac{\alpha}{\beta} p_3 + \frac{3\alpha}{\beta^2} p_1 p_2 + \frac{3\alpha}{\beta^3} p_1^3,$$

проделайте шаги, указанные в табл. 12.5.1.

12.30. (a) Проверьте, что обобщением соотношения (2.2.10) для среднего и соотношения (2.2.11) для дисперсии на третий центральный момент $\mu_3(W) = \mathbf{E}[\{W - \mathbf{E}[W]\}^3]$ является равенство $\mu_3(W) = \mathbf{E}[\mu_3(W \mid V)] + 3\,\mathbf{Cov}(\mathbf{D}[W \mid V], \mathbf{E}[W \mid V]) + \mu_3(\mathbf{E}[W \mid V])$. [Указание. Запишите $\mathbf{E}[\{W - \mathbf{E}[W]\}^3] = \mathbf{E}[\{(W - \mathbf{E}[W \mid V]) + (\mathbf{E}[W \mid V] - \mathbf{E}[W])\}^3]$, раскройте третью степень и возьмите математические ожидания от каждого члена суммы.]

(b) Примените результат п. (a) к с.в. S, определенной в (12.1.1), чтобы представить третий центральный момент этой случайной величины через параметры ее распределения. [Указание. Воспользуйтесь формулами (12.2.5) и (12.2.6).]

(c) Для проверки формулы для третьего центрального момента, содержащейся в табл. 12.5.1, примените формулу п. (b) к сложному распределению из этой таблицы.

(d) Для проверки формулы из предыдущего упражнения примените формулу п. (b) к сложному пуассоновскому/обратному гауссовскому распределению.

13

МОДЕЛИ КОЛЛЕКТИВНЫХ РИСКОВ НА ДЛИТЕЛЬНОМ ИНТЕРВАЛЕ ВРЕМЕНИ

13.1. Введение

Цель этой главы — представить математическую модель изменения величины *рискового резерва* страховщика на длительном интервале времени. Под рисковым резервом мы будем понимать величину, на которую начальный капитал плюс собранные премии превышают величину страховых выплат. Следует оговориться, что это определение удобно с математической точки зрения, но оно не совпадает с определением резерва, принятого в бухгалтерском учете.

Пусть $U(t)$ обозначает рисковый резерв в момент времени t, а $c(t)$ — величину премий, собранных к моменту t. Будем обозначать через $S(t)$ величину суммарных страховых выплат до момента t. Если u — величина рискового резерва в момент времени 0, возникшего, быть может, в результате предыдущих операций, то

$$U(t) = u + c(t) - S(t), \qquad t \geqslant 0. \tag{13.1.1}$$

Побуждаемые вопросом о возможности исчерпать весь рисковый резерв хотя бы один раз за рассматриваемый промежуток времени, мы хотим исследовать вероятностные аспекты величины $U(t)$ для многих, на самом деле для бесконечно многих, значений t одновременно. Поскольку возникающие при этом вопросы связаны с бесконечным количеством случайных величин, мы, в соответствии с языком теории вероятностей, называем $U(t)$ ***процессом рискового резерва***, а $S(t)$ — ***процессом суммарных выплат***. Собранные премии $c(t)$ будут предполагаться детерминированными, а не случайными.

В такой постановке можно считать, что модели предыдущей главы относятся к распределению случайной величины $U(t)$ для отдельного значения t. Отслеживание моментов времени, когда резерв $U(t)$ примет отрицательные значения, может происходить либо периодически, либо непрерывно. В последнем случае мы будем рассматривать непрерывный по времени процесс рискового резерва

$$\{U(t) : t \geqslant 0\}.$$

Типичная реализация процесса рискового резерва $\{U(t) : t \geqslant 0\}$ показана на рис. 13.1.1. Всюду в этой главе мы будем считать интенсивность сбора премий постоянной и обозначать ее через c, $c > 0$, и пусть на протяжении этой главы $c(t) = ct$. В этом случае рисковый резерв увеличивается линейно (с углом наклона c) всегда, кроме тех моментов, когда происходит выплата. В эти моменты резерв уменьшается скачком, размер которого равен величине выплаты. Если величина начального рискового резерва u увеличивается или уменьшается на величину h, то график $U(t)$, не изменяя своего вида, поднимается или опускается на величину h по вертикальной оси.

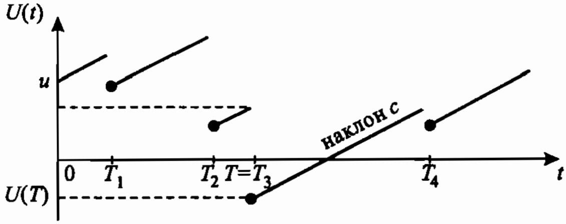


Рис. 13.1.1. Типичная реализация непрерывного процесса рискового резерва

Как показано на рис. 13.1.1, в некоторые моменты времени резерв может становиться отрицательным. Когда это случается в первый раз, мы говорим, что произошло *разорение*. Этот термин происходит из известной в теории вероятностей задачи о разорении в азартной игре. Разорение не эквивалентно *неплатежеспособности* страховщика. Типичной сферой применения материала настоящей главы является отдельная разновидность, или линия, страхования. Однако если мы выразим вероятность разорения как функцию случайных изменений в величине потерь и во времени их наступления, то мы получим тем самым полезную меру финансового риска всей страховой компании.

Пусть

$$T = \min\{t : t \geqslant 0 \text{ и } U(t) < 0\} \tag{13.1.2}$$

обозначает время разорения. Здесь мы полагаем $T = \infty$, если $U(t) \geqslant 0$ для всех t. Пусть

$$\psi(u) = \mathbf{P}(T < \infty) \tag{13.1.3}$$

— вероятность разорения, рассматриваемая как функция начального рискового резерва u. Мы также будем интересоваться с.в. $U(T)$, величиной отрицательного рискового резерва в момент разорения.

Из-за изменений, происходящих в реальной сфере, интервал времени, на который ориентировано построение модели, ограничен, так что разумно выбирать конечный, но достаточно длинный интервал. Точнее, рассматривать следует

$$\psi(u, t) = \mathbf{P}(T < t), \tag{13.1.4}$$

вероятность разорения до момента t. Однако поскольку исследование вероятности разорения за бесконечное время $\psi(u)$ проще с математической точки зрения, мы будем изучать только ее. Очевидно, что $\psi(u)$ является верхней гранью для $\psi(u, t)$.

Соображения, изложенные в настоящей главе, можно применять для создания «системы раннего предупреждения» в управлении страховой компанией. При этом необходимо так выбрать модель, чтобы она правильно отражала процесс риска. Вероятность разорения, найденная в такой модели, будет предупреждать руководство компании о степени риска. Повторим снова, что в моделях настоящей главы, для того чтобы проанализировать их математически, мы принимаем ряд упрощающих предположений. В них не учитываются проценты и дивиденды, а также изменения, основанные на анализе текущего опыта. Тем не менее эти модели создают основу анализа процесса рисков. На практике их использование должно сопровождаться дополнительным анализом.

Перед тем как мы займемся моделью с непрерывным временем, мы обратимся к *процессу рискового резерва с дискретным временем*, который определяется значениями величины $U(t)$ только для целых t. Традиционно такая последовательность случайных величин обозначается через

$$\{U_n : n = 0, 1, 2, 3 \dots\}.$$

Это можно рассматривать как исследование процесса рискового резерва периодически, что практически и делается руководством страховых компаний, которое должно представлять финансовые отчеты ежегодно, раз в полгода, раз в квартал или ежемесячно.

13.2. Модель с дискретным временем

Пусть U_n обозначает рисковый резерв страховщика в моменты n, $n = 0, 1, 2, \dots$. Мы предположим, что

$$U_n = u + nc - S_n, \tag{13.2.1}$$

где u — начальный резерв, величина собранных в каждый период премий постоянна и обозначается через c, а S_n — суммарные страховые выплаты за первые n периодов. Мы предположим далее, что

$$S_n = W_1 + W_2 + \dots + W_n, \tag{13.2.2}$$

где с.в. W_i обозначает суммарные выплаты в период с номером i. Мы предположим сначала, что с.в. $W_1, W_2, \dots$ независимы, одинаково распределены и их математическое ожидание $\mu = \mathbf{E}[W_i]$ меньше c. Впоследствии мы ослабим это ограничение.

Итак, мы можем записать U_n в следующем виде:

$$U_n = u + (c - W_1) + (c - W_2) + \dots + (c - W_n). \tag{13.2.3}$$

Пусть

$$\widetilde{T} = \min\{n : U_n < 0\} \tag{13.2.4}$$

— момент разорения (мы снова считаем, что $\widetilde{T} = \infty$, если $U_n \geqslant 0$ для всех n), и пусть

$$\tilde{\psi}(u) = \mathbf{P}(\widetilde{T} < \infty) \tag{13.2.5}$$

— вероятность разорения в описанных условиях.

Между величиной, называемой *коэффициентом Лундберга*[1], которую мы сейчас введем, и вероятностью разорения существует важная связь. Мы определяем коэффициент Лундберга $\widetilde{R}$ как положительное решение уравнения

$$M_{W-c}(r) = \mathbf{E}[e^{r(W-c)}] = e^{-rc} M_W(r) = 1, \tag{13.2.6}$$

или как решение эквивалентного уравнения

$$\ln M_W(r) = rc, \tag{13.2.7}$$

где W обозначает случайную величину, распределенную так же, как величины ежегодных страховых выплат W_i.

Чтобы построить график функции $e^{-rc} M_W(r)$ (см. рис. 13.2.1), надо заметить, что

$$\frac{d}{dr}\mathbf{E}[e^{r(W-c)}] = \mathbf{E}[(W-c)e^{r(W-c)}] \quad \text{и} \quad \frac{d^2}{dr^2}\mathbf{E}[e^{r(W-c)}] = \mathbf{E}[(W-c)^2 e^{r(W-c)}].$$

---

[1] В оригинале «adjustment coefficient», т. е. поправочный коэффициент, но мы используем здесь другой, более распространенный в Европе, вариант этого термина. — *Прим. ред.*

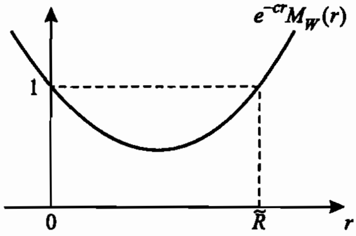


Рис. 13.2.1. Определение коэффициента Лундберга $\widetilde{R}$

Первая из этих формул показывает, что угол наклона касательной в точке $r = 0$ равен $\mu - c$, величине отрицательной, а вторая — что этот график выпуклый вниз. Далее, если с.в. W принимает значения, превосходящие c, с положительной вероятностью, то первая производная, начиная с некоторого достаточно большого r, становится положительной и остается таковой при увеличении r. Поэтому функция $\mathbf{E}[e^{r(W-c)}]$ имеет минимум, как на рис. 13.2.1, вследствие чего уравнение (13.2.6) имеет положительный корень. Этот положительный корень и называется *коэффициентом Лундберга*. Пример 13.4.3 показывает, что $\widetilde{R}$ существует не для всех констант c и распределений с.в. W.

Пример 13.2.1. Выведем формулу для $\widetilde{R}$ в частном случае, когда все с.в. W_i имеют распределение $N(\mu, \sigma^2)$.

Решение. В этом случае

$$\ln[M_W(r)] = \mu r + \sigma^2 r^2/2.$$

Поэтому положительным решением уравнения (13.2.7) будет

$$\widetilde{R} = 2(c - \mu)/\sigma^2,$$

где по-прежнему предполагается, что $\mu < c$. ▼

Связь между коэффициентом Лундберга и вероятностью разорения демонстрируется в следующем результате.

Теорема 13.2.1. *Пусть*

$$U_n = u + nc - \sum_{i=1}^{n} W_i \quad \text{для } n = 1, 2, \ldots,$$

и пусть с.в. $W_1, W_2, \ldots$ взаимно независимы и одинаково распределены, причем $\mathbf{E}[W_i] = \mu \leqslant c$. Тогда для $u > 0$

$$\tilde{\psi}(u) = \frac{\exp(-\widetilde{R}u)}{\mathbf{E}[\exp(-\widetilde{R}U_{\widetilde{T}}) \,|\, \widetilde{T} < \infty]}. \tag{13.2.8}$$

Теорема 13.2.1 является частным случаем теоремы 13.2.2, которая доказана в приложении к настоящей главе.

Поскольку по определению $U_{\widetilde{T}} < 0$, из теоремы 13.2.1 следует, что

$$\tilde{\psi}(u) < \exp(-\widetilde{R}u). \tag{13.2.9}$$

Выведем приближение для $\widetilde{R}$. При обсуждении табл. 12.5.1 мы отмечали, что для с.в. X

$$\frac{d}{dt} \ln M_X(t)\Big|_{t=0} = \mathbf{E}[X] \quad \text{и} \quad \frac{d^2}{dt^2} \ln M_X(t)\Big|_{t=0} = \mathbf{D}[X].$$

Воспользовавшись разложением в ряд Тейлора, мы получим

$$\ln M_W(r) = \mu r + \frac{1}{2}\sigma^2 r^2 + \cdots,$$

где $\sigma^2 = \mathbf{D}[W]$. Если мы ограничимся лишь первыми двумя слагаемыми этого разложения и подставим их в уравнение (13.2.7), то получим приближение

$$\widetilde{R} \cong \frac{2(c-\mu)}{\sigma^2}. \tag{13.2.10}$$

Сравнивая этот результат с результатом примера 13.2.1, заметим, что соотношение (13.2.10) становится точным равенством, если общее распределение всех с.в. W_i нормальное. Далее, если с.в. W имеет сложное распределение и относительная рисковая надбавка θ определяется из равенства $c = (1+\theta)\mu$, то формулы (12.2.5) и (12.2.6) дают

$$\widetilde{R} \cong \frac{2\theta p_1 \mathbf{E}[N]}{(p_2 - p_1^2)\mathbf{E}[N] + p_1^2 \mathbf{D}[N]}, \tag{13.2.11}$$

где N является случайной величиной, распределенной так же, как число страховых случаев в одном периоде.

Пример 13.2.2. Построим приближение для $\widetilde{R}$, если

(a) с.в. N имеет пуассоновское распределение с параметром λ;

(b) с.в. N имеет отрицательное биномиальное распределение с параметрами r и p.

Решение. (a) В этом случае $\mathbf{E}[N] = \mathbf{D}[N] = \lambda$ и соотношение (13.2.11) превращается в

$$\widetilde{R} \cong 2\theta p_1/p_2. \tag{13.2.12}$$

Из упр. 13.6 следует, что на самом деле правая часть формулы (13.2.12) является границей сверху.

(b) В этом случае $\mathbf{E}[N] = rq/p$, $\mathbf{D}[N] = rq/p^2$, так что из соотношения (13.2.11) вытекает, что

$$\widetilde{R} \cong \frac{2\theta p_1}{p_2 + p_1^2[(1/p) - 1]}. \tag{13.2.13}$$

Заметим, что, устремив p к 1, мы получаем отсюда результат п. (a). ▼

Мы предполагали, что суммарные страховые выплаты в различные периоды являются независимыми случайными величинами. Во многих случаях эти предположения могут не соответствовать действительности. Чтобы провести исследование в подобной ситуации, мы рассмотрим сейчас модель авторегрессии для величины страховых выплат страховщика, которая является обобщением рассматривавшейся выше модели и учитывает наличие корреляции между суммарными страховыми выплатами в последовательные периоды.

Мы предположим, что с.в. W_i, сумма выплат в период с номером i, имеет вид

$$W_i = Y_i + aW_{i-1}, \qquad i = 1, 2, \ldots. \tag{13.2.14}$$

Здесь $-1 < a < 1$ и $Y_1, Y_2, \ldots$ — независимые и одинаково распределенные случайные величины с $\mathbf{E}[Y_i] < (1-a)c$. Задание начального значения $W_0 = w$ завершает описание модели авторегрессии первого порядка для с.в. W_i.

Рисковый резерв страховщика U_n в момент n определяется формулой (13.2.1), а $\widetilde{T}$, момент разорения, — формулой (13.2.4). Заметим, что вероятность разорения

$$\tilde{\psi}(u,w) = \mathbf{P}(\widetilde{T} < \infty) \tag{13.2.15}$$

является теперь функцией двух переменных. Это обобщает ранее рассматривавшуюся модель, которая получается из теперешней при $a = 0$.

Применим итеративное правило (13.2.14) и получим

$$W_i = Y_i + aY_{i-1} + \cdots + a^{i-1}Y_1 + a^i w. \tag{13.2.16}$$

Таким образом, суммарные выплаты за первые n периодов составят

$$\begin{aligned} S_n &= Y_n + (1+a)Y_{n-1} + \cdots + (1 + a + \cdots + a^{n-1})Y_1 + (a + a^2 + \cdots + a^n)w \\ &= Y_n + \frac{1-a^2}{1-a}Y_{n-1} + \cdots + \frac{1-a^n}{1-a}Y_1 + a\frac{1-a^n}{1-a}w. \end{aligned} \tag{13.2.17}$$

Это соотношение показывает, что с.в. Y_1 в конечном счете вносит в суммарные страховые выплаты вклад размера $Y_1/(1-a)$. Поэтому мы предположим, что $c > \mathbf{E}[Y_1]/(1-a)$, и по аналогии с формулой (13.2.6) определим коэффициент Лундберга как положительное решение уравнения

$$e^{-cr}M_{Y/(1-a)}(r) = 1. \tag{13.2.18}$$

Таким образом, $\widetilde{R}$ является положительным числом, обладающим тем свойством, что

$$\ln \mathbf{E}\left[\exp\frac{\widetilde{R}Y}{1-a}\right] - c\widetilde{R} = 0 \tag{13.2.19}$$

Заметим, что $\widetilde{R}$ зависит от распределения с.в. Y_i, общего для всех i, и от значений a и c.

В приложении к настоящей главе будет получен следующий результат.

Теорема 13.2.2.

$$\tilde{\psi}(u,w) = \frac{\exp(-\widetilde{R}\hat{u})}{\mathbf{E}[\exp(-\widetilde{R}\widehat{U}_{\widetilde{T}}) \,|\, \widetilde{T} < \infty]}. \tag{13.2.20}$$

Мы использовали здесь обозначение

$$\widehat{U}_n = U_n - \frac{a}{1-a}W_n, \qquad \hat{u} = \widehat{U}_0. \tag{13.2.21}$$

В известном смысле с.в. $\widehat{U}_n$ является модифицированным рисковым резервом. Это рисковый резерв U_n, скорректированный с помощью всех будущих выплат, которые связаны с W_n. Такая интерпретация величины $\widehat{U}_n$ рассматривается в упр. 13.2.

Если $a \geqslant 0$, то $\widehat{U}_{\widetilde{T}} \leqslant U_{\widetilde{T}} < 0$. Таким образом, в этом случае знаменатель дроби в (13.2.20) больше 1 и мы получаем упрощенную верхнюю границу для вероятности разорения.

Следствие 13.2.1. *Если* $0 \leqslant a < 1$, *то*

$$\tilde{\psi}(u,w) \leqslant \exp(-\widetilde{R}\hat{u}). \tag{13.2.22}$$

Заметим, что эта оценка обобщает оценку (13.2.9).

13.3. Модель с непрерывным временем

Мы переходим к построению модели разорения, используя два случайных процесса с непрерывным временем, процесс числа страховых случаев и процесс суммарных страховых выплат. Для моделирования первого мы обычно привлекаем пуассоновский процесс, а для моделирования второго — сложный пуассоновский процесс.

Для некоторого страхового портфеля обозначим через $N(t)$ число страховых случаев, а через $S(t)$ — суммарные страховые выплаты, произведенные до момента t. Мы начинаем отсчет с момента 0; таким образом, $N(0) = 0$. Кроме того, $S(t) = 0$ до того момента, пока $N(t) = 0$. Как и в гл. 12, мы обозначаем через X_i величину i-й страховой выплаты. Тогда

$$S(t) = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_{N(t)}. \tag{13.3.1}$$

Процесс $\{N(t),\, t \geqslant 0\}$ называется *процессом числа страховых случаев*, а процесс $\{S(t),\, t \geqslant 0\}$ — *процессом суммарных страховых выплат*. Эти наборы случайных величин называются процессами, и нас интересуют их совместные распределения во все моменты времени $t \geqslant 0$, в отличие от гл. 12, где мы интересовались числом страховых случаев и суммарными страховыми выплатами лишь для одного момента времени.

Пусть $t \geqslant 0$ и $h > 0$. Из определения следует, что разность $N(t+h) - N(t)$ является числом страховых случаев, а разность $S(t+h) - S(t)$ — суммарными страховыми выплатами, которые происходят в интервале между t и $t + h$. Пусть T_i обозначает момент времени, когда происходит i-й страховой случай. Тогда $T_1, T_2, \ldots$ — случайные величины, причем для того, чтобы исключить возможность возникновения одновременно двух и более страховых случаев, будем считать, что $T_1 < T_2 < T_3 < \ldots$. Время, прошедшее между двумя последовательными страховыми случаями, обозначается через

$$V_1 = T_1 \quad \text{и} \quad V_i = T_i - T_{i-1}, \qquad i > 1. \tag{13.3.2}$$

Типичные реализации процесса числа страховых случаев и процесса суммарных страховых выплат показаны на рис. 13.3.1 и 13.3.2. Заметим, что $N(t)$ и $S(t)$ являются возрастающими ступенчатыми функциями, такими, что скачки происходят в моменты времени T_i, когда наступают страховые случаи, а величины скачков равны 1 для процесса $N(t)$ и X_i для процесса $S(t)$.

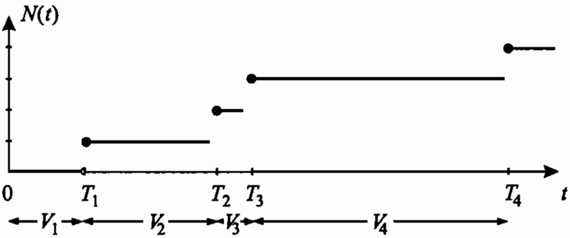


Рис. 13.3.1. Типичная реализация процесса числа страховых случаев

Имеется несколько способов определять распределение процесса числа страховых случаев. Мы рассмотрим два из них:

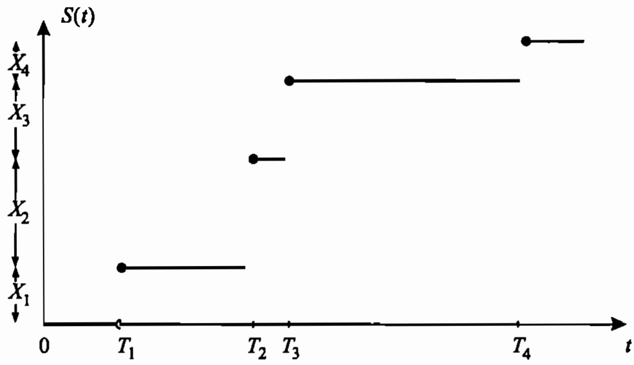


Рис. 13.3.2. Типичная реализация процесса суммарных страховых выплат

(a) *Глобальный метод.* Для всех $t \geqslant 0$ и всех $h > 0$ мы определяем условное распределение с.в. $N(t+h) - N(t)$ при условии, что значения с.в. $N(s)$ для $s \leqslant t$ известны.

(b) *Дискретный метод.* Мы определяем совместное распределение с.в. $V_1, V_2, V_3, \ldots$ или, что эквивалентно, совместное распределение с.в. $T_1, T_2, T_3, \ldots$.

Пример 13.3.1. Рассмотрим n лиц возраста x в момент времени 0. Пусть $N(t)$ — число смертей, которые произошли к моменту времени t, и через T_i обозначается момент, когда происходит i-я смерть ($i = 1, 2, \ldots, n$). Мы предполагаем, что случайные величины продолжительностей предстоящей жизни независимы. Определим процесс $\{N(t),\ t \geqslant 0\}$ каждым из указанных выше методов.

Решение. (a) Условное распределение с.в. $N(t+h) - N(t)$ при условии, что $N(t) = i$, является биномиальным с параметрами $n - i$ и ${}_hq_{x+t}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Поэтому

$$\mathbf{P}[N(t+h) - N(t) = k \,|\, N(t) = i] = \binom{n-i}{k} ({}_hq_{x+t})^k (1 - {}_hq_{x+t})^{n-i-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-i.$$

Заметим, что это условное распределение зависит от t и от $N(s)$, но только в момент $s = t$.

(b) Мы определим совместное распределение с.в. $T_1, T_2, \ldots, T_n$ итеративной процедурой. Прежде всего,

$$\mathbf{P}(T_1 > s) = ({}_sp_x)^n, \qquad f_{T_1}(s) = n({}_sp_x)^n \mu_x(s).$$

Для $i = 1, 2, \ldots, n-1$

$$\mathbf{P}(T_{i+1} > t \,|\, T_i = s) = ({}_{t-s}p_{x+s})^{n-i}, \qquad f_{T_{i+1}\,|\,T_i}(t \,|\, s) = (n-i)({}_{t-s}p_{x+s})^{n-i} \mu_x(t).$$

Заметим, что в этом примере длины интервалов времени между последовательными моментами смерти не являются взаимно независимыми или одинаково распределенными. ▼

Теперь мы переходим к пуассоновскому процессу, для которого длины интервала времени между последовательными страховыми случаями взаимно независимы и одинаково распределены.

В глобальном методе определения пуассоновского процесса исходят из того, что

$$\mathbf{P}[N(t+h)-N(t)=k\,|\,N(s) \text{ для всех } s \leqslant t] = \frac{e^{-\lambda h}(\lambda h)^k}{k!} \text{ для всех } t \geqslant 0 \text{ и } h>0,\ k=0,1,2,3\dots. \tag{13.3.3}$$

Из этого определения пуассоновского процесса вытекают следующие свойства:

(i) *Приращения стационарны*; это означает, что распределение с.в. $N(t+h)-N(t)$, которая является пуассоновской с параметром λh, зависит от длины h интервала, но не от его местоположения, которое определяется величиной t.

(ii) Для любого множества непересекающихся временных интервалов *приращения независимы*, т. е. для $t_1 < t_1+h_1 < t_2 < t_2+h_2 < t_3 \cdots < t_n+h_n$ приращения $N(t_1+h_1)-N(t_1), N(t_2+h_2)-N(t_2),\dots,N(t_n+h_n)-N(t_n)$ взаимно независимы.

(iii) *Вероятность того, что несколько страховых случаев произойдет одновременно, равна нулю*, т. е.

$$\lim_{h\to 0}\frac{\mathbf{P}[N(t+h)-N(t)>1]}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1-e^{-\lambda h}-\lambda h e^{-\lambda h}}{h} = 0.$$

В дискретном методе определения пуассоновского процесса исходят из того, что интервалы между страховыми случаями $V_1, V_2, V_3,\dots$ взаимно независимы и каждый из них имеет показательное распределение с параметром λ.

Покажем эквивалентность этих двух определений пуассоновского процесса. Для того чтобы показать, что процесс, определенный глобальным методом, обладает характеристическим свойством процесса, определенного дискретным методом, заметим, что

$$\mathbf{P}(V_{i+1}>h\,|\,V_1,V_2,\dots,V_i) = \mathbf{P}\left[V_{i+1}>h \mid N(s) \text{ для всех } s\leqslant t=\sum_{j=1}^{i}V_j\right]$$
$$= \mathbf{P}[N(t+h)-N(t)=0\,|\,N(s), s\leqslant t] = e^{-\lambda h}, \tag{13.3.4}$$

а это — функция дожития для каждой с.в. V_i в рассматриваемом пуассоновском процессе.

Для того чтобы показать, что процесс, определенный дискретным методом, обладает характеристическим свойством процесса, определенного глобальным методом, воспользуемся определениями с.в. $N(t)$, T_j, V_j, их взаимной независимостью и свойствами показательного распределения с.в. V_j для проверки того, что

$$\mathbf{P}[N(t+h)-N(t)=k\,|\,N(s) \text{ для } s\leqslant t] = \mathbf{P}[T_k\leqslant h \text{ и } T_k+V_{k+1}>h]. \tag{13.3.5}$$

Поскольку $T_k = V_1+V_2+\dots+V_k$ и с.в. V_i независимы, одинаково распределены и имеют показательное распределение с параметром λ, с.в. T_k имеет гамма-распределение с параметрами k и λ. Поэтому соотношение (13.3.5) эквивалентно соотношению

$$\int_0^h \mathbf{P}(T_k+V_{k+1}>h\,|\,T_k=u)f_{T_k}(u)\,du = \int_0^h \mathbf{P}(V_{k+1}>h-u)f_{T_k}(u)\,du$$
$$= \int_0^h e^{-\lambda(h-u)}\frac{\lambda^k u^{k-1}e^{-\lambda u}}{(k-1)!}\,du = \frac{e^{-\lambda h}\lambda^k}{(k-1)!}\int_0^h u^{k-1}\,du = e^{-\lambda h}\frac{(\lambda h)^k}{k!},$$

правая часть которого — функция вероятностей числа страховых случаев в периоде длины h для пуассоновского процесса.

Перейдем к определению сложного пуассоновского процесса в рассматриваемом нами контексте. Если для с.в. $S(t)$, определенной равенством (13.3.1), случайные величины $X_1, X_2, X_3, \ldots$ независимы, одинаково распределены и имеют общую функцию распределения $P(x)$ и если они также независимы от процесса $\{N(t),\, t \geqslant 0\}$, который предполагается пуассоновским, то процесс $\{S(t),\, t \geqslant 0\}$ называется *сложным пуассоновским процессом*.

Если процесс, описывающий суммарные страховые выплаты, является сложным пуассоновским процессом с параметром λ и с функцией распределения $P(x)$, то свойствам соответствующего процесса $N(t)$ числа страховых случаев отвечают следующие свойства процесса $S(t)$:

(a) Если $t \geqslant 0$ и $h > 0$, то распределение с.в. $S(t+h) - S(t)$ является сложным пуассоновским с параметром λh и с функцией распределения $P(x)$, т. е.

$$\mathbf{P}[S(t+h) - S(t) \leqslant x \,|\, S(s) \text{ для всех } s \leqslant t] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda h} (\lambda h)^k \frac{P^{*k}(x)}{k!},$$

где $P^{*k}(x)$ является k-кратной сверткой функции распределения $P(x)$.

(b) В любой момент t вероятность того, что следующий страховой случай произойдет между моментами $t+h$ и $t+h+dh$ и что величина страховых выплат не будет превосходить x, равна $e^{-\lambda h}(\lambda\, dh) P(x)$.

(c) Процесс $\{S(t),\, t \geqslant 0\}$ является процессом с независимыми и стационарными приращениями. То есть суммарные выплаты на непересекающихся временных интервалах являются независимыми случайными величинами и распределение каждой такой величины зависит только от длины соответствующего временного интервала, а не от его местоположения.

(d) Если через $S(t)$ обозначается сложный пуассоновский процесс и значение t фиксировано, то с.в. $S(t)$ имеет сложное пуассоновское распределение с пуассоновским параметром λt. Формулы (12.3.2) и (12.3.3) определяют среднее и дисперсию с.в. $S(t)$:

$$\mathbf{E}[S(t)] = \lambda t p_1, \tag{13.3.6}$$

$$\mathbf{D}[S(t)] = \lambda t p_2. \tag{13.3.7}$$

13.4. Вероятности разорения и распределение страховых выплат

Для исследования процесса рискового резерва $\{U(t), t \geqslant 0\}$ можно пользоваться его связью с процессом суммарных страховых выплат $S(t)$, которая выражена соотношением (13.1.1). Всюду далее в настоящей главе мы будем предполагать, что $S(t)$ является сложным пуассоновским процессом. При этом предположении мы сможем найти верхнюю и нижнюю границы для $\psi(u)$. В частном случае показательного распределения индивидуальных страховых выплат мы укажем явное выражение для $\psi(u)$.

Прежде всего мы предположим, что интенсивность сбора страховых премий c превышает ожидаемые страховые выплаты в единицу времени, что составляет λp_1. Далее, определим относительную рисковую надбавку θ равенством $c = (1+\theta)\lambda p_1$, где величина θ положительна. Легко видеть, что если $\theta = 0$ или $\theta < 0$, то $\psi(u) = 1$, т. е. разорение произойдет непременно.

Далее, пусть $(-\infty, \gamma)$ обозначает наибольший открытый интервал, для которого существует производящая функция моментов распределения $P(x)$. Мы предположим, что величина γ положительна. В случае показательного распределения с параметром β число γ равняется β, а для любого распределения, для которого величина страховых выплат ограничена, число γ равно $+\infty$. Далее, мы предположим, что $M_X(r)$ стремится к $+\infty$ при $r \to \gamma$. Тот факт, что это предположение для конечных γ не всегда выполняется, иллюстрируется обратным гауссовским распределением в примере 13.4.3. Сравнение рисунков, которые приводятся в этом примере, с рис. 13.4.1 показывает важность этого предположения.

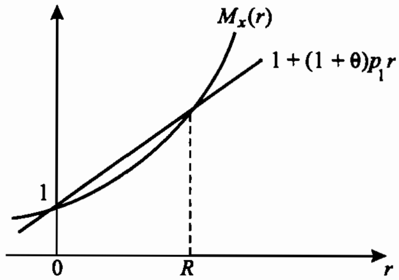


Рис. 13.4.1 Определение коэффициента Лундберга R

Теперь мы поступаем так же, как при определении коэффициента Лундберга формулой (13.2.6). Польза от введения этого коэффициента проявится при доказательстве теоремы 13.4.1.

Рассмотрим период длины $t > 0$, где размер собранной премии равен ct, а распределение величины $S(t)$ суммарных страховых выплат является сложным пуассоновским, причем математическое ожидание числа $N(t)$ страховых случаев равно λt. По аналогии с формулой (13.2.6) в качестве коэффициента Лундберга мы выбираем наименьший положительный корень уравнения

$$M_{S(t)-ct}(r) = \mathbf{E}[e^{r(S(t)-ct)}] = e^{-rct}M_{S(t)}(r) = e^{-rct}e^{-\lambda t[M_X(r)-1]} = 1. \qquad (13.4.1)$$

Таким образом,

$$\lambda t[M_X(r) - 1] = cr. \qquad (13.4.2)$$

Подставляя $c = (1 + \theta)\lambda p_1$, мы получаем эквивалентное уравнение

$$1 + (1 + \theta)\lambda p_1 r = M_X(r). \qquad (13.4.3)$$

Его левая часть является линейной функцией от r, а правая часть — положительная возрастающая функция, которая, согласно предположению, стремится к $+\infty$ при r, стремящемся к γ. Кроме того, вторая производная от правой части положительна, а значит, график этой функции является выпуклым вниз. Предположение, что $c > \lambda p_1$ (эквивалентное неравенству $\theta > 0$), означает, что в точке $r = 0$ угол наклона $(1+\theta)p_1$ левой части уравнения (13.4.3) больше угла наклона $M'_X(0) = p_1$ его правой части. Из рис. 13.4.1 видно, что уравнение (13.4.3) имеет два решения. Помимо тривиального решения $r = 0$ имеется положительное решение $r = R$, которое и принимается за *коэффициент Лундберга*.

Пример 13.4.1. Определим коэффициент Лундберга, если распределение величины страховых выплат показательное с параметром $\beta > 0$.

Решение. Коэффициент Лундберга определяется из уравнения (13.4.3), которое в нашем примере имеет вид

$$1+\frac{(1+\theta)r}{\beta}=\frac{\beta}{\beta-r},$$

или, в форме квадратного уравнения по r,

$$(1+\theta)r^2-\theta\beta r=0.$$

Как и ожидалось, $r=0$ является решением, а наименьшим положительным решением, которое и является коэффициентом Лундберга, оказывается

$$R=\frac{\theta\beta}{1+\theta}.$$ ▼

Пример 13.4.2. Вычислим коэффициент Лундберга, если все величины страховых выплат равны 1.

Решение. В силу формулы (13.4.3) коэффициент Лундберга есть положительный корень уравнения

$$1+(1+\theta)r=e^r.$$

Результаты численных расчетов для приведенного выше уравнения и нескольких выбранных значений θ приводятся ниже:

θ	R	θ	R
0,2	0,35420	1,0	1,25643
0,4	0,63903	1,2	1,41318
0,6	0,87640	1,4	1,55368
0,8	1,07941		

▼

В общем случае коэффициент Лундберга является возрастающей функцией относительной рисковой надбавки θ. В этом легко убедиться, взглянув на рис. 13.4.1. При росте θ угол наклона прямой, проходящей через точку $(0,1)$, увеличивается, так что точка пересечения этой прямой и рассматриваемого графика смещается вправо и вверх.

Пример 13.4.3. Предположим, что распределение величины страховых выплат гауссовское с параметрами α и β. Для этого случая

(a) определим наибольший открытый интервал $(-\infty,\gamma)$, на котором определена производящая функция моментов $M_X(t)$,

(b) определим предел функции $M_X(t)$ при $t\to\gamma$,

(c) выпишем уравнение для коэффициента Лундберга,

(d) нарисуем график, соответствующий рис. 13.4.1, для случая, когда предел из п. (b) больше $1+(1+\theta)(\alpha/\beta)\gamma$,

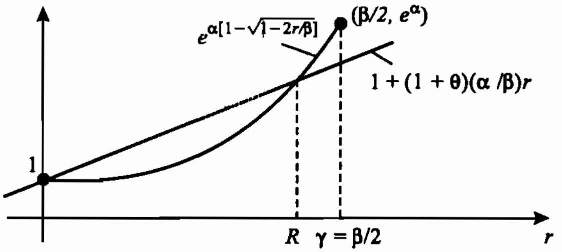
(e) нарисуем график, соответствующий рис. 13.4.1, для случая, когда предел из п. (b) не превосходит $1+(1+\theta)(\alpha/\beta)\gamma$.

Решение. (a) $M_X(t)=e^{\alpha[1-\sqrt{1-2t/\beta}]}$ для $t<\beta/2$; таким образом, $\gamma=\beta/2$.

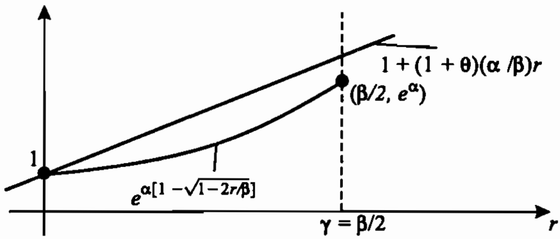
(b) $\lim\limits_{t\to\beta/2}M_X(t)=e^{\alpha}$.

(c) $1+(1+\theta)(\alpha/\beta)r=e^{\alpha[1-\sqrt{1-2t/\beta}]}$ для $t<\beta/2$.

(d) Если $e^{\alpha} > 1 + (1+\theta)(\alpha/2)$, то график имеет вид



(e) Если $e^{\alpha} < 1 + (1+\theta)(\alpha/2)$, то график имеет вид



Замечания. 1. На графиках видно, что коэффициента Лундберга может не существовать, когда предел производящей функции моментов распределения страховых выплат конечен в конце открытого интервала ее определения.

2. Для фиксированного математического ожидания размера страховых выплат α/β прямая на рис. 13.4.1 фиксирована для всех β. При растущем β дисперсия размера страховых выплат α/β^2 убывает и точка $(\beta/2, e^{\alpha})$ перемещается вправо и вверх, что делает существование коэффициента Лундберга R более вероятным. Когда β убывает, ситуация противоположная.

3. Анализ доказательства теоремы 13.4.1, приведенного в приложении к настоящей главе, показывает, как используется коэффициент Лундберга, чтобы получить равенство $-Rc + \lambda[M_X(R) - 1] = 0$ и вывести заключение теоремы 13.4.1. Для ситуации п. (e), когда коэффициента Лундберга не существует, это выражение, вычисленное в точке γ, оказывается меньше нуля и те же шаги доказательства можно провести, заменив R на γ и равенства на неравенства. Получающееся в результате неравенство менее полезно, чем равенство, полученное в случае существования коэффициента Лундберга. ▼

Аналогом теоремы 13.2.1 является следующий результат, который доказан в приложении к настоящей главе.

Теорема 13.4.1. *Если $U(t)$ является процессом рискового резерва, причем соответствующий процесс суммарных страховых выплат $S(t)$ является сложным пуассоновским, и если $c > \lambda p_1$, т. е. рисковая надбавка положительна, то для $u \geqslant 0$*

$$\psi(u) = \frac{\exp(-Ru)}{\mathbf{E}[\exp(-RU(T))\,|\,T<\infty]}, \tag{13.4.4}$$

где R является наименьшим положительным корнем уравнения (13.4.3).

Знаменатель вычисляется, когда рисковый резерв $U(T)$ отрицателен, что следует из условия, что разорение происходит, т. е. $T<\infty$.

Из рис. 13.4.1 видно, что если $\theta \to 0$, то секущая приближается к касательной к графику функции $M_X(t)$ в точке $r = 0$, откуда вытекает, что $R \to 0$. Тогда, согласно формуле (13.4.4), имеем $\psi(u) = 1$, т. е. разорение непременно произойдет. Далее, $U(t)$, $t > 0$, для случая $\theta < 0$ всегда меньше, чем $U(t)$ для $\theta \to 0$, и поскольку разорение непременно произойдет при $\theta = 0$, оно обязательно произойдет при $\theta < 0$. Из этих соображений мы предполагаем, что $\theta > 0$.

В общем случае вычислить выражение, которое стоит в знаменателе формулы (13.4.4), в замкнутой форме невозможно. Исключение составляет случай $u = 0$ (см. упр. 13.10) и случай, когда страховые выплаты имеют показательное распределение (см. пример 13.4.4). Однако эту теорему можно использовать для выведения неравенств. Поскольку с.в. $U(T)$ при условии, что $T < \infty$, непременно отрицательна, знаменатель в (13.4.4) больше 1. Отсюда следует, что

$$\psi(u) < e^{-Ru}. \tag{13.4.5}$$

Если распределение величины страховых выплат ограничено таким образом, что $P(m) = 1$ для некоторого конечного m, то при условии, что $T < \infty$, имеем $U(t) > -m$, поскольку величина рискового резерва непосредственно перед страховыми выплатами, приведшими к разорению, должна быть положительной.

Таким образом,

$$\psi(u) > e^{-Ru}e^{-Rm} = e^{-R(u+m)}. \tag{13.4.6}$$

Некоторые авторы предлагают использовать приближение

$$\psi(u) \cong e^{-Ru}, \tag{13.4.7}$$

которое в силу неравенства (13.4.5) завышает вероятность разорения.

Перейдем теперь к анализу частного случая, когда для получения явного выражения для вероятности разорения $\psi(u)$ может использоваться теорема 13.4.1.

Пример 13.4.4. Вычислим вероятность разорения, когда величина страховых выплат имеет показательное распределение с параметром $\beta > 0$.

Решение. Пусть разорение, если оно происходит, случается в момент T. Пусть $\hat{u}$ является величиной рискового резерва непосредственно перед моментом T. Событие $-U(T) > y$ можно переформулировать как такое событие, что X, величина выплаты по страховому случаю, повлекшему разорение, больше $\hat{u} + y$ при условии, что она больше $\hat{u}$. Условная вероятность этого события задается выражением

$$\frac{\beta\int_{\hat{u}+y}^{\infty} e^{-\beta x}\,dx}{\beta\int_{\hat{u}}^{\infty} e^{-\beta x}\,dx} = e^{-\beta y},$$

так что функция плотности с.в. $-U(T)$ при условии $T < \infty$ равна

$$\frac{d}{dy}(1 - e^{-\beta y}) = \beta e^{-\beta y}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{E}[\exp(-RU(T))\,|\,T<\infty] = \beta\int_0^{\infty} e^{-\beta y}e^{Ry}\,dy = \frac{\beta}{\beta - R}.$$

Нам известно из примера 13.4.1, что коэффициент Лундберга в этом случае имеет вид $R = \theta\beta/(1+\theta)$. Комбинируя это равенство с (13.4.4), мы приходим к следующему выражению:

$$\psi(u) = \frac{(\beta - R)e^{-Ru}}{\beta} = \frac{1}{1+\theta}\exp\left(\frac{-\theta\beta u}{1+\theta}\right) = \frac{1}{1+\theta}\exp\left[\frac{-\theta u}{(1+\theta)p_1}\right]. \qquad (13.4.8)$$

▼

13.5. Величина рискового резерва, впервые оказавшегося ниже начального значения

Продолжим рассмотрение модели с непрерывным временем, в которой процесс $S(t)$ суммарных страховых выплат является сложным пуассоновским. В настоящем разделе мы будем рассматривать величину рискового резерва в тот момент, когда он впервые оказался ниже своего начального значения (конечно, этого может никогда не случиться). В качестве приложения мы найдем простое выражение для $\psi(0)$, вероятности разорения в случае, когда начальное значение рискового резерва равно нулю.

Основная теорема этого раздела, доказательство которой содержится в приложении к настоящей главе, формулируется следующим образом.

Теорема 13.5.1. *Для сложного пуассоновского процесса вероятность того, что величина рискового резерва когда-либо окажется меньше своего начального значения u, впервые оказавшись между величинами $u - y$ и $u - y - dy$, равна*

$$\frac{\lambda}{c}[1 - P(y)]\,dy = \frac{1 - P(y)}{(1+\theta)p_1}\,dy, \qquad y > 0.$$

В качестве приложения теоремы 13.5.1 заметим, что вероятность того, что величина рискового резерва когда-либо окажется меньше его начальной величины, равна

$$\frac{1}{(1+\theta)p_1}\int_0^\infty [1 - P(y)]\,dy = \frac{1}{1+\theta}, \qquad (13.5.1)$$

поскольку

$$\int_0^\infty [1 - P(y)]\,dy = p_1.$$

В частном случае $u = 0$ равенство (13.5.1) определяет вероятность того, что величина рискового резерва когда-либо окажется меньше нуля, т.е. его начального значения. Поэтому

$$\psi(0) = \frac{1}{1+\theta}. \qquad (13.5.2)$$

Примечательно, что $\psi(0)$ зависит только от относительной рисковой надбавки θ и не зависит от структуры распределения величин страховых выплат.

Заметим, что функция

$$\frac{\lambda}{c}[1 - P(y)] = \frac{1 - P(y)}{(1+\theta)p_1}, \qquad y > 0,$$

не является функцией плотности, поскольку интеграл от нее не равен единице. Однако с ней можно связать функцию плотности. Пусть с.в. L_1 — величина, на которую рисковый резерв оказывается меньше начального значения в первый раз, если это действительно происходит. Функция плотности с.в. L_1 получается делением на $\psi(0) = 1/(1+\theta)$ величины

$$\frac{1 - P(y)}{(1+\theta)p_1}$$

и имеет вид

$$f_{L_1}(y) = \frac{1}{p_1}[1 - P(y)], \qquad y > 0. \tag{13.5.3}$$

Связь между производящими функциями моментов с.в. L_1 и случайной величины страховых выплат X устанавливается с помощью интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} M_{L_1}(r) = \frac{1}{p_1}\int_0^\infty e^{ry}[1 - P(y)]\,dy = \frac{1}{p_1}\left\{\frac{e^{ry}}{r}[1 - P(y)]\Big|_0^\infty + \frac{1}{r}\int_0^\infty e^{ry}p(y)\,dy\right\} \\ = \frac{1}{p_1 r}[M_X(r) - 1]. \end{aligned} \tag{13.5.4}$$

Мы проиллюстрируем дальнейшие приложения теоремы 13.5.1 следующими примерами.

Пример 13.5.1. Выпишем выражение для распределения величины рискового резерва в первый момент, когда он упадет ниже исходного значения u, при условии, что это непременно произойдет, если величина выплаты по любому страховому случаю равна 2.

Решение. Мы имеем

$$1 - P(y) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant y < 2, \\ 0, & y \geqslant 2. \end{cases}$$

Поэтому функция плотности с.в. L_1 имеет вид

$$\frac{1}{p_1}[1 - P(y)] = \begin{cases} 1/2, & 0 \leqslant y < 2, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Таким образом, с.в. L_1 равномерно распределена на интервале от 0 до 2 и величина рискового резерва после первого падения ниже уровня u равномерно распределена на интервале от $u - 2$ до u. ▼

Пример 13.5.2. Выпишем выражение для распределения с.в. L_1, если величина индивидуальной выплаты имеет показательное распределение с параметром β.

Решение. Поскольку $1 - P(y) = e^{-\beta y}$ для $y > 0$, функция плотности с.в. L_1 имеет вид

$$\frac{1}{p_1}[1 - P(y)] = \beta e^{-\beta y}, \qquad y > 0.$$

Таким образом, распределение с.в. L_1 также является показательным с параметром β. ▼

13.6. Максимальные суммарные потери

Новая случайная величина, называемая ***максимальными суммарными потерями***, определяется соотношением

$$L = \max_{t \geqslant 0}\{S(t) - ct\} \tag{13.6.1}$$

и является максимальным превышением суммарных выплат над собранными премиями. Так как $S(t) - ct = 0$ для $t = 0$, то $L \geqslant 0$.

Теорема 13.5.1 используется для доказательства другой теоремы, которая дает явное выражение для производящей функции моментов с.в. L, что можно использовать для получения информации о $\psi(u)$. В качестве приложения получается выражение для $\psi(u)$ в случае, когда распределение индивидуальной страховой выплаты является взвешенной суммой показательных распределений.

Для того чтобы получить функцию распределения с.в. L, заметим, что при $u \geqslant 0$

$$\begin{aligned}1 - \psi(u) = \mathbf{P}[U(t) \geqslant 0 \text{ для всех } t] &= \mathbf{P}[u + ct - S(t) \geqslant 0 \text{ для всех } t] \\ &= \mathbf{P}[S(t) - ct \leqslant 0 \text{ для всех } t].\end{aligned}$$

Но правая часть эквивалентна $\mathbf{P}(L \leqslant u)$, и, значит,

$$1 - \psi(u) = \mathbf{P}(L \leqslant u), \qquad u \geqslant 0. \tag{13.6.2}$$

Отсюда следует, что $1 - \psi(u)$, дополнение до вероятности разорения, можно интерпретировать как функцию распределения с.в. L. В частности,

$$1 - \psi(0) = \mathbf{P}(L \leqslant 0) = \mathbf{P}(L = 0), \tag{13.6.3}$$

поскольку $L \geqslant 0$. В этом случае максимальные потери происходят в момент $t = 0$. Кроме того, распределение с.в. L является распределением смешанного типа. В точке 0 сосредоточен «сгусток» вероятностной массы $1 - \psi(0)$, а остальная масса непрерывно распределена там, где с.в. L принимает положительные значения.

Основной результат этого раздела — следующая явная формула для производящей функции моментов с.в. L, которая в силу равенства (13.6.2) может использоваться для получения информации о $\psi(u)$.

Теорема 13.6.1. *Имеет место равенство*

$$M_L(r) = \frac{\theta p_1 r}{1 + (1+\theta)p_1 r - M_X(r)}. \tag{13.6.4}$$

Эквивалентным является равенство

$$M_L(r) = \frac{\theta}{1+\theta} + \frac{\theta}{1+\theta}\,\frac{\theta[M_X(r) - 1]}{1 + (1+\theta)p_1 r - M_X(r)}, \tag{13.6.4A}$$

из которого наличие «сгустка» вероятностной массы в нуле видно более явно, так как вклад вероятности при $L = 0$ в производящую функцию моментов, согласно формуле (13.5.2), равен

$$1 - \psi(0) = \frac{\theta}{1+\theta}.$$

Заметим, что уравнение, использовавшееся для получения коэффициента Лундберга, получено приравниванием знаменателя правой части равенства в (13.6.4) к нулю.

Доказательство. В доказательстве этой теоремы используются моменты времени, когда процесс суммарных потерь достигает новых рекордных значений. Типичная реализация процесса суммарных потерь показана на рис. 13.6.1. На этой реализации новые рекордные значения отмечаются трижды. После каждого рекордного значения вероятность того, что оно не будет превзойдено, равна $1 - \psi(0)$. Вероятность того, что оно будет превзойдено, равна $\psi(0)$. В этом утверждении мы основываемся на том факте, что сложный пуассоновский процесс имеет стационарные и независимые приращения.

Если рекорд превзойден, то функция плотности величины превышения совпадает с функцией плотности с.в. L_1, которая определена соотношением (13.5.3).

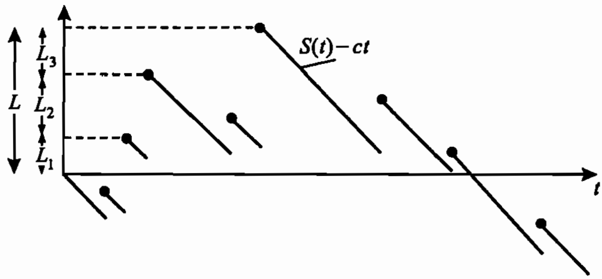


Рис. 13.6.1. Типичная реализация процесса суммарных потерь

Рис. 13.6.1 показывает, что мы можем представить с.в. L как сумму случайного числа случайных величин, а именно,

$$L = L_1 + L_2 + \cdots + L_N. \tag{13.6.5}$$

Здесь N — число новых рекордных величин, имеющее геометрическое распределение, определяемое вероятностями

$$\mathbf{P}(N=n) = [1-\psi(0)][\psi(0)]^n = \theta\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^{n+1}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{13.6.6}$$

Производящая функция моментов этого распределения имеет вид

$$M_N(r) = \frac{\theta}{1+\theta-e^r}. \tag{13.6.7}$$

Случайные величины $N, L_1, L_2, \ldots$ взаимно независимы и общая плотность с.в. L_i задается соотношением (13.5.3). Согласно формуле (12.2.7), производящая функция моментов с.в. L имеет вид

$$M_L(r) = M_N[\ln M_{L_1}(r)] = \frac{\theta}{1+\theta-M_{L_1}(r)}.$$

В формуле (13.5.4) функция $M_{L_1}(r)$ выражена через $M_X(r)$ и, таким образом,

$$M_L(r) = \frac{\theta}{1+\theta-[1/(p_1r)][M_X(r)-1]} = \frac{\theta p_1 r}{1+(1+\theta)p_1r-M_X(r)},$$

что и нужно было показать. Проверка другой формулы, (13.6.4A), сводится к алгебраическим выкладкам. ■

Заметим, что, поскольку $1-\psi(u)$ является функцией распределения с.в. L [см. (13.6.2)], которая имеет «сгусток» вероятностной массы в начале координат и непрерывное распределение массы для положительных значений u,

$$M_L(r) = 1-\psi(0) + \int_0^\infty e^{ur}[-\psi'(u)]\,du = \frac{\theta}{1+\theta} + \int_0^\infty e^{ur}[-\psi'(u)]\,du.$$

Поэтому из соотношения (13.6.4A) следует, что

$$\int_0^\infty e^{ur}[-\psi'(u)]\,du = \frac{\theta}{1+\theta}\,\frac{\theta[M_X(r)-1]}{1+(1+\theta)p_1r-M_X(r)}. \tag{13.6.9}$$

Эту формулу можно использовать для некоторых семейств распределений страховых выплат, чтобы находить явные выражения для $\psi(u)$. Одно такое семейство образуют смеси показательных распределений вида

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} A_i \beta_i e^{-\beta_i x}, \qquad x > 0. \tag{13.6.10}$$

$\beta_i > 0$, $A_i > 0$, $A_1 + \cdots + A_n = 1$. В этом случае

$$M_X(r) = \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\beta_i}{\beta_i - r}\,. \tag{13.6.11}$$

Первоначально величина $M_X(r)$ определялась как некоторое математическое ожидание. Оно существует, только если $r < \gamma = \min\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$. Однако эту функцию можно естественным образом продолжить на все значения $r \neq \beta_i$. Для простоты записи для этого продолжения мы будем использовать тот же самый символ $M_X(r)$.

Подставим выражение (13.6.11) в (13.6.9) и заметим, что правая часть получаемой в результате этой подстановки формулы оказывается рациональной функцией от r, которую, используя метод разложения на простые дроби, мы можем переписать в виде

$$\int_0^\infty e^{ur}[-\psi'(u)]\,du = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i r_i}{r_i - r}\,. \tag{13.6.12}$$

Единственная функция, которая удовлетворяет этому соотношению и соотношению $\psi(\infty) = 0$, имеет вид

$$\psi(u) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{-r_i u}. \tag{13.6.13}$$

Значит, этим выражением задается вероятность разорения. Мы проиллюстрируем описанную процедуру двумя примерами.

Пример 13.6.1. Выведем выражение для $\psi(u)$, если с.в. X_i имеют показательное распределение. Другими словами, в равенстве (13.6.10) выбирается $n = 1$.

Решение. Поскольку

$$M_X(r) = \frac{\beta}{\beta - r} = \frac{1}{1 - p_1 r},$$

правая часть равенства (13.6.9) имеет вид

$$\frac{1}{1+\theta}\,\frac{\theta[1/(1-p_1 r) - 1]}{1 + (1+\theta)p_1 r - 1/(1-p_1 r)} = \frac{1}{1+\theta}\,\frac{\theta}{\theta - (1+\theta)p_1 r} = C_1 \frac{r_1}{r_1 - r},$$

где $C_1 = 1/(1+\theta)$ и $r_1 = \theta/[(1+\theta)p_1]$. Итак,

$$\psi(u) = C_1 e^{-r_1 u}.$$

Эта формула была ранее выведена в примере 13.4.4 (формула (13.4.8)). ▼

Пример 13.6.2. Вычислим $\psi(u)$ при условии, что $\theta = 2/5$ и что $p(x)$ задается соотношением

$$p(x) = \frac{3}{2}\,e^{-3x} + \frac{7}{2}\,e^{-7x}, \qquad x > 0.$$

Решение. Воспользовавшись указанным выражением для $p(x)$, получаем

$$M_X(r) = \frac{3/2}{3 - r} + \frac{7/2}{7 - r} \quad \text{и} \quad p_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7} = \frac{5}{21}\,.$$

Подставляя эти выражения в правую часть формулы (13.6.9) и проводя упрощения, получаем

$$\frac{6}{7}\,\frac{5-r}{6-7r+r^2}.$$

Знаменатель имеет корни $r_1 = 1$ и $r_2 = 6$. Следовательно, это выражение, переписанное в форме правой части формулы (13.6.12), равно

$$\frac{C_1}{1-r} + \frac{6C_2}{6-r}.$$

Далее подсчитываем коэффициенты: $C_1 = 24/35$ и $C_2 = 1/35$. Таким образом,

$$\psi(u) = \frac{24}{35}e^{-u} + \frac{1}{35}e^{-6u}, \qquad u \geqslant 0.$$ ▼

На рис. 13.6.2 показаны точки r_i, удовлетворяющие уравнению

$$1 + (1+\theta)p_1 r = M_X(r), \tag{13.6.14}$$

для случая, когда распределение с.в. X является смесью показательных распределений. Функция $M_X(r)$ задается соотношением (13.6.11) при $n = 3$.

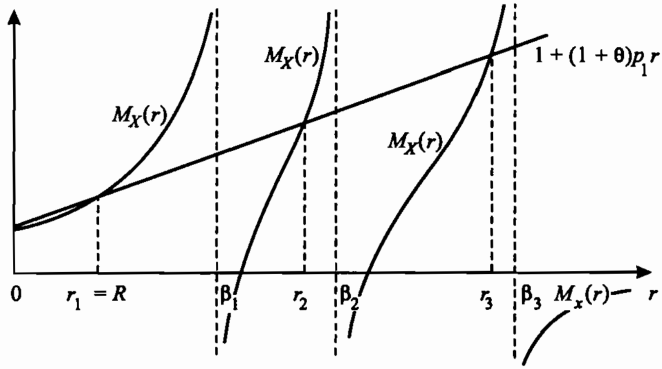


Рис. 13.6.2 Решение уравнения (13.6.14) при $n = 3$

Правая часть функции, заданной формулой (13.6.11), имеет разрывы в точках $\beta_1, \beta_2 \ldots$, и в каждой из этих точек значение функции претерпевает скачок от $+\infty$ до $-\infty$. На рисунке показано, что в общем случае значения r_i удовлетворяют условиям вида

$$r_1 = R < \beta_1 < r_2 < \beta_2 < \cdots < r_n < \beta_n. \tag{13.6.15}$$

На рис. 13.4.1 показана та часть рис. 13.6.2, которая находится левее точки $\beta_1 = \gamma$.

Практика вынуждает рассматривать страховые выплаты, распределение которых не является смесью показательных. Для некоторых распределений трудности могут начинаться уже с вычисления коэффициента Лундберга, который необходим для аппроксимации вероятности разорения. Следующий метод, в котором рассматриваются первые два момента распределения величины страховых выплат, несложен в применении и, как представляется, дает удовлетворительные результаты для не очень больших значений u.

Выражение для первого момента с.в. L получено в упр. 13.13(b). Это

$$\mathbf{E}[L] = p_2/2\theta p_1. \tag{13.6.16}$$

Далее, из формулы (13.5.2) следует, что $\psi(0) = 1/(1+\theta)$, а из (13.4.5) — что $\psi(u) < e^{-Ru}$. Мы предлагаем приближение

$$1 - F_L(u) = \psi(u) \cong \frac{1}{1+\theta}\, e^{-Ku}, \qquad u > 0,$$

где K выбирается таким образом, чтобы приближенное значение величины $\mathbf{E}[L]$ равнялось значению, которое задается соотношением (13.6.16). Но

$$\mathbf{E}[L] = \int_0^\infty [1 - F_L(u)]\, du \cong \frac{1}{1+\theta}\,\frac{1}{K},$$

так что $K = 2\theta p_1/(1+\theta)p_2$ дает нам требуемое равенство. Таким образом, наша аппроксимация — это

$$\psi(u) \cong \frac{1}{1+\theta}\exp\left[-\frac{2\theta p_1 u}{(1+\theta)p_2}\right], \qquad u > 0.$$

Заметим, что если распределение страховых выплат является показательным со средним p_1, так что $p_2 = 2p_1^2$, то результат точен: см. (13.4.8). Этот метод обобщается в упр. 13.19, где дается уточненная аппроксимация.

13.7. Замечания и литература

Важная роль совместного распределения времени разорения T и величины рискового резерва непосредственно после разорения $U(T)$ для процесса рискового резерва, в котором суммарные страховые выплаты описываются сложным пуассоновским процессом, явствует из структуры знаменателя в выражении для вероятности разорения в теореме 13.4.1. Возможность выразить вероятности разорения для такого процесса рискового резерва через распределение величины страховых выплат демонстрируется в теоремах 13.5.1 и 13.6.1. С момента выхода в свет первого издания книги «Актуарная математика» был опубликован ряд результатов в этой области. Недавняя работа [Gerber, Shiu 1998] дает доступный обзор этих результатов. Мы процитируем резюме этой работы:

В работе исследуется совместное распределение момента разорения, величины рискового резерва непосредственно перед разорением и дефицита в момент разорения. Классическая модель обобщается введением дисконтирования. Мы показываем, как вычислять математическое ожидание дисконтированных штрафов, назначаемых в момент разорения и зависящих от величины дефицита в момент разорения и размера резерва непосредственно перед разорением. Математические ожидания дисконтированных штрафов, рассматриваемые как функции начальной величины рискового резерва, удовлетворяют определенному уравнению восстановления, которое обладает вероятностной интерпретацией. Для нулевых и очень больших начальных резервов, а также в случае показательного распределения величины выплат и произвольного начального резерва получены явные выражения. Мы обобщаем формулу Диксона, которая выражает совместное распределение рискового резерва непосредственно перед разорением и в момент разорения через вероятность разорения за бесконечное время. Явные выражения получены также в случае, когда дивиденды выплачиваются в соответствии с барьерной стратегией.

Читатель, ознакомившийся с доказательством теоремы 13.5.1, поймет, что в этом доказательстве использовался метод штрафной функции, заимствованный из этой статьи.

По этим вопросам рекомендуются следующие книги:
- [Beard, Pentikäinen, Pesonen 1984],
- [Beekman 1974],
- [Bühlmann 1970],
- [Gerber 1979],
- [Panjer, Willmot 1992],
- [Seal 1969].

Теория разорения развивалась скандинавской (Лундберг, Крамер) и итальянской (Де Финетти) школами. Эти исследования подробно описаны в книге [Dubourdieu 1952].

Мы не обсуждали знаменитую асимптотическую формулу для вероятности разорения

$$\psi(u) \cong Ce^{-Ru}, \qquad u \to \infty, \tag{13.7.1}$$

где C — некоторая константа. Учитывая теорему 13.4.1, эту формулу легко понять: она означает, что величина, обратная к знаменателю в формуле (13.4.4), имеет предел при $u \to \infty$, равный константе C из правой части формулы (13.7.1). Для случая, когда распределение величины страховых выплат — смесь показательных, это асимптотическое представление иллюстрируется соотношением (13.6.13).

Соотношение из упр. 13.11 называется дефектным уравнением восстановления. Решение уравнений этого типа обсуждались Феллером [Feller 1966]. В частности, он доказал формулу (13.7.1). Используя такую же технику, Гербер [Gerber 1974] нашел предел условного распределения с.в. $-U(T)$ при условии $T < \infty$ при $u \to \infty$.

Если мы усложним модель, предположив, что на рисковый резерв начисляются проценты с постоянной интенсивностью $\delta > 0$, то в интегро-дифференциальном уравнении (13.A.12), приведенном в приложении к настоящей главе, нам надо заменить множитель c на $c + \delta u$. Если страховые выплаты имеют показательное распределение, то это модифицированное уравнение допускает явное решение в терминах гамма-функции.

Если роли премий и выплат поменять местами, т. е. если премии представляют собой выплаты, производимые страховщиком, а выплаты делаются в пользу страховщика, так что

$$U(t) = u - ct + S(t),$$

и предполагается, что $c < \lambda p_1$, то существует следующая явная формула:

$$\psi(u) = e^{-Ru}.$$

Чтобы ее доказать, нужно установить результат, аналогичный теореме 13.4.1, и заметить, что резерв в момент разорения обязательно равен 0. Предлагалось использовать эту модель при рассмотрении портфеля аннуитетов, когда вследствие смерти освобождается резерв страхователя и возникает отрицательная выплата.

Сил [Seal 1978b] рассматривал численные методы для определения вероятности разорения за конечное время. В работе [Beekman, Bowers 1972] аппроксимация для $\psi(u,t)$ построена с помощью уравнивания моментов. Гербер [Gerber 1974] и Де Вильдер [De Vylder 1977] нашли верхние границы для $\psi(u,t)$, применяя мартингальные методы.

Панджер и Виллмот [Panjer, Willmot 1992, Chap. 11] рассматривали вопросы, затронутые в настоящей главе, применяя более сложные математические методы.

Разделы 11.4 и 11.5 их книги представляют особый интерес, поскольку в них развиваются рекуррентные методы приближенного вычисления вероятностей разорения за бесконечное время.

Приложение

Доказательство теоремы 13.2.2. Следующие вычисления приводят к простой рекуррентной формуле для модифицированного рискового резерва:

$$\widehat{U}_i = U_i - \frac{a}{1-a}W_i = U_{i-1} + c - W_i - \frac{a}{1-a}W_i = U_{i-1} + c - \frac{1}{1-a}W_i$$
$$= U_{i-1} + c - \frac{1}{1-a}(Y_i + aW_{i-1}) = \widehat{U}_{i-1} + c - \frac{Y_i}{1-a}, \qquad i = 1, 2, \dots . \tag{13.A.1}$$

Из формул (13.A.1), (13.2.18) и из независимости с.в. Y_i следует, что для любого n

$$\mathbf{E}[\exp(-\widetilde{R}[\widehat{U}_n - \widehat{U}_i])] = 1, \qquad i = 0, 1, \dots, n. \tag{13.A.2}$$

Рассмотрим теперь тождество

$$\mathbf{E}[\exp(-\widetilde{R}\widehat{U}_n)] = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}[\exp(-\widetilde{R}\widehat{U}_n) \,|\, \widetilde{T}=i]\, \mathbf{P}(\widetilde{T}=i) + \mathbf{E}[\exp(-\widetilde{R}\widehat{U}_n) \,|\, \widetilde{T}>n]\, \mathbf{P}(\widetilde{T}>n). \tag{13.A.3}$$

Из формулы (13.A.2) для $i = 0$ вытекает, что выражение в левой части равенства (13.A.3) равно $\exp(-\widetilde{R}\widehat{U}_n)$. В правой части мы заменяем $\widehat{U}_n$ суммой $\widehat{U}_i + (\widehat{U}_n - \widehat{U}_i)$. Разность $\widehat{U}_n - \widehat{U}_i$ не зависит от $\widehat{U}_1, \widehat{U}_2, \dots, \widehat{U}_i$. Это можно проверить, воспользовавшись формулой (13.A.1) и независимостью с.в. Y_i. В частности, с.в. $\widehat{U}_n - \widehat{U}_i$ не зависит от события $\widetilde{T} = i$. Из (13.A.2) следует, что

$$\mathbf{E}[\exp(-\widetilde{R}\widehat{U}_n) \,|\, \widetilde{T}=i] = \mathbf{E}[\exp(-\widetilde{R}\widehat{U}_i) \,|\, \widetilde{T}=i].$$

Поэтому равенство (13.A.3) можно переписать в виде

$$\exp(-\widetilde{R}\hat{u}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}[\exp(-\widetilde{R}\widehat{U}_n) \,|\, \widetilde{T}=i]\, \mathbf{P}(\widetilde{T}=i) + \mathbf{E}[\exp(-\widetilde{R}\widehat{U}_n) \,|\, \widetilde{T}>n]\, \mathbf{P}(\widetilde{T}>n); \tag{13.A.4}$$

оно аналогично равенству (13.A.8) в приведенном ниже доказательстве теоремы 13.4.1. Теперь положим $n \to \infty$. Первое слагаемое в правой части формулы (13.A.4) сходится к

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{E}[\exp(-\widetilde{R}\widehat{U}_n) \,|\, \widetilde{T}=i]\, \mathbf{P}(\widetilde{T}=i) = \mathbf{E}[\exp(-\widetilde{R}\widehat{U}_T) \,|\, \widetilde{T}<\infty]\, \mathbf{P}(\widetilde{T}<\infty).$$

Таким образом, чтобы завершить доказательство теоремы 13.2.2, нам надо показать, что второе слагаемое в правой части формулы (13.A.4) стремится к нулю при $n \to \infty$. Мы проведем эту проверку следующим образом. Из равенства (13.2.17) следует, что

$$\mathbf{E}[S_n] = n\,\frac{\mathbf{E}[Y]}{1-a} - a\,\frac{1-a^n}{1-a}\left(\frac{\mathbf{E}[Y]}{1-a} - w\right).$$

Поскольку $c > \mathbf{E}[Y]/(1-a)$, найдется положительное число α, такое, что $\mathbf{E}[\widehat{U}_n] > u + \alpha n$, если n достаточно велико. Далее, из равенства (13.2.17) следует, что найдется такое число β^2, что $\mathbf{D}[\widehat{U}_n] < \beta^2 n$. Завершение проверки того, что второе слагаемое в правой части формулы (13.A.4) стремится к нулю при $n \to \infty$, аналогично доказательству, которое будет приведено в деталях для второго слагаемого в правой части равенства (13.A.8) при доказательстве теоремы 13.4.1 ниже. Подробное доказательство этого шага можно найти также в работе Промислова [Promislov 1991a]. ■

Доказательство теоремы 13.4.1. Для $t > 0$ и $r > 0$ рассмотрим

$$\mathbf{E}[e^{-rU(t)}] = \mathbf{E}[e^{-rU(t)} \,|\, T \leqslant t]\, \mathbf{P}(T \leqslant t) + \mathbf{E}[e^{-rU(t)} \,|\, T > t]\, \mathbf{P}(T > t). \tag{13.A.5}$$

Поскольку $U(t) = u + ct - S(t)$, выражение в левой части равно

$$\exp\{-ru - rct + \lambda t[M_X(r) - 1]\}. \tag{13.A.6}$$

В первом слагаемом в правой части записываем

$$U(t) = U(T) + [U(t) - U(T)] = U(T) + c(t - T) - [S(t) - S(T)].$$

Для заданной с.в. T выражение в квадратных скобках не зависит от $U(T)$ и имеет сложное пуассоновское распределение с пуассоновским параметром $\lambda(t - T)$. Поэтому первое слагаемое в правой части формулы (13.A.5) можно переписать следующим образом:

$$\mathbf{E}[\exp(-rU(T))\exp(-rc(t - T) + \lambda(t - T)[M_X(r) - 1]\} \,|\, T \leqslant t]\, \mathbf{P}(T \leqslant t). \qquad (13.A.7)$$

Выражения (13.A.6) и (13.A.7) можно существенно упростить, если выбрать r таким образом, что

$$-rc + \lambda[M_X(r) - 1] = 0.$$

У этого уравнения имеется два решения (см. рис. 13.4.1). Решение $r = 0$, подставленное в (13.A.5), приводит к тривиальному тождеству. Второе решение $r = R$ является коэффициентом Лундберга. Если, выбрав $r = R$, подставить полученные упрощенные выражения в (13.A.5), то мы придем к равенству

$$e^{-Ru} = \mathbf{E}[e^{-RU(T)} \,|\, T \leqslant t]\, \mathbf{P}(T \leqslant t) + \mathbf{E}[e^{-RU(t)} \,|\, T > t]\, \mathbf{P}(T > t). \qquad (13.A.8)$$

Пусть теперь $t \to \infty$. Первое слагаемое в правой части сходится к $\mathbf{E}[e^{-RU(T)} \,|\, T < \infty]\psi(u)$. Теорема 13.4.1 будет доказана, если мы покажем, что второе слагаемое в правой части стремится к нулю при $t \to \infty$. Мы сделаем это следующим образом. Пусть $\alpha = c - \lambda p_1$, $\beta^2 = \lambda p_2$. Тогда, согласно формулам (13.3.6) и (13.3.7), $\mathbf{E}[U(t)] = \mathbf{E}[u + ct - S(t)] = u + \alpha t$ и $\mathbf{D}[U(t)] = \mathbf{D}[S(t)] = \beta^2 t$. Рассмотрим выражение $u + \alpha t - \beta t^{2/3}$, которое положительно для достаточно больших t. Расщепим теперь второе слагаемое в правой части равенства (13.A.8) на два, в первом из которых $U(t)$ больше $u + \alpha t - \beta t^{2/3}$, а во втором — меньше. Используя неравенство Чебышёва, мы получим

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}[e^{-RU(t)} \,|\, T > t,\, 0 \leqslant U(t) \leqslant u + \alpha t - \beta t^{2/3}]\, \mathbf{P}[T > t,\, 0 \leqslant U(t) \leqslant u + \alpha t - \beta t^{2/3}] \\
&\qquad + \mathbf{E}[e^{-RU(t)} \,|\, T > t,\, U(t) > u + \alpha t - \beta t^{2/3}]\, \mathbf{P}[T > t,\, U(t) > u + \alpha t - \beta t^{2/3}] \\
&\leqslant \mathbf{P}[U(t) \leqslant u + \alpha t - \beta t^{2/3}] + \exp[-R(u + \alpha t - \beta t^{2/3})] \\
&\leqslant t^{-1/3} + \exp[-R(u + \alpha t - \beta t^{2/3})].
\end{aligned}$$

Но из этой верхней границы очевидно, что второе слагаемое в правой части (13.A.8) стремится к нулю при $t \to \infty$. ■

Доказательство теоремы 13.5.1. Для этого доказательства мы введем новое понятие, которое представляет и самостоятельный интерес. Пусть $w(x)$, $x < 0$, — функция, такая, что $w(x) \geqslant 0$. Положим

$$\psi(u; w) = \mathbf{E}[w(U(T)) \,|\, T < \infty]\psi(u), \qquad (13.A.9)$$

рассматривая эту величину как функцию начального рискового резерва u. Мы можем интерпретировать $w(x)$ как *штраф*, если величина резерва в момент разорения равна x. В этом случае величина $\psi(u; w)$ представляет собой математическое ожидание величины штрафа. Приведем такие примеры:

(a) если $w(x) = e^{-Rx}$, то из формулы (13.4.4) следует, что $\psi(u; w) = e^{-Ru}$;

(b) если $w(x) = 1$, то из формулы (13.A.9) следует, что $\psi(u; w) = \psi(u)$;

(c) если

$$w_h(x) = \begin{cases} 1, & x < -h, \\ 0, & -h \leqslant x \leqslant 0, \end{cases}$$

то

$$\psi(0; w) = \mathbf{P}[U(T) < -h \,|\, T < \infty]\psi(0).$$

Мы начнем доказательство с того, что покажем, что для любой ограниченной функции $w(x)$

$$\psi(0; w) = \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty w(-y)[1 - P(y)]\, dy. \qquad (13.A.10)$$

Применяя формулу полной вероятности к условному математическому ожиданию штрафа (13.A.9) при условии, выраженном в терминах числа страховых случаев в начальном интервале $(0, b)$, мы получим

$$\begin{aligned}\psi(u;w) = \mathbf{P}[N(b)=0]&\{\text{условное математическое ожидание штрафа при условии } N(b)=0\}\\ +\mathbf{P}[N(b)=1]&\{\text{условное математическое ожидание штрафа при условии } N(b)=1\}\\ +\mathbf{P}[N(b)>1]&\{\text{условное математическое ожидание штрафа при условии } N(b)>1\}.\end{aligned} \tag{13.A.11}$$

Из свойств пуассоновского считающего процесса следует, что

$$\begin{aligned}\mathbf{P}[N(b)=0] &= e^{-\lambda b},\\ \mathbf{P}[N(b)=1] &= \lambda b e^{-\lambda b},\\ \mathbf{P}[N(b)>1] &= bA(b), \quad \text{где предел } A(b) \text{ равен } 0 \text{ при } b \to 0.\end{aligned}$$

Поскольку мы предполагаем, что $w(x)$ является неотрицательной ограниченной функцией, найдется такое M, что $0 \leqslant w(x) \leqslant M$. Принимая во внимание это ограничение и свойства сложного пуассоновского процесса, мы можем действовать следующим образом.

Для $N(b) = 0$ условное математическое ожидание штрафа равно $\psi(u+cb; w)$. Поскольку страховых случаев не происходило и премиальный доход поступал с интенсивностью c, рисковый резерв достиг значения $u+cb$ и стационарные независимые приращения приводят процесс к новой начальной точке.

Для $N(b) = 1$ нам необходимо рассмотреть несколько случаев в зависимости от величины x, отдельной страховой выплаты.

- Если $x \leqslant u$, то рисковый резерв остался положительным и, как и в случае отсутствия страховых выплат, условное математическое ожидание штрафа равно $\psi(u + cb - x; w)$.
- Если $u < x \leqslant u + cb$, достаточно заметить, что условное математическое ожидание штрафа, обозначим его через $A(x, b)$, не превосходит верхней грани для $w(x)$, а именно M.
- Если $x > u+cb$, то рисковый резерв становится отрицательным в момент страховой выплаты и условное математическое ожидание штрафа равно $w(u+\xi-x)$, где ξ — величина поступлений, полученных до момента страховой выплаты.

Таким образом, для $N(b) = 1$ условное математическое ожидание штрафа равно

$$\int_0^u \psi(u+cb-x;w)p(x)\,dx + \int_u^{u+cb} A(x,b)p(x)\,dx + \int_{u+cb}^{\infty} w(u+\xi-x)p(x)\,dx.$$

Для $N(b) > 1$ также достаточно заметить, что условное математическое ожидание штрафа, обозначим его $D(b)$, не превосходит M, верхней грани для $w(x)$.

Подставляя эти три варианта в (13.A.11), мы получим

$$\psi(u;w) = e^{-\lambda b}\psi(u+cb;w) + \lambda b e^{-\lambda b}\left[\int_0^u \psi(u+cb-x;w)p(x)\,dx + \int_u^{u+cb} A(x,b)p(x)\,dx \right.$$
$$\left. + \int_{u+cb}^{\infty} w(u+\xi-x)p(x)\,dx\right] + bA(b)D(b). \tag{13.A.12}$$

Вычтем теперь $\psi(u;w)$ из обеих частей формулы (13.A.12) и разделим полученное равенство на cb. Мы получим

$$\frac{e^{-\lambda b}\psi(u+cb;w) - \psi(u;w)}{cb} + \frac{\lambda}{c}e^{-\lambda b}\left[\int_0^u \psi(u+cb-x;w)p(x)\,dx + \int_u^{u+cb} A(x,b)p(x)\,dx \right.$$
$$\left. + \int_{u+cb}^{\infty} w(u+\xi-x)p(x)\,dx\right] + \frac{A(b)D(b)}{c} = 0. \tag{13.A.13}$$

При $b \to 0$ пределы трех слагаемых в (13.A.13) равны

$$\frac{-\lambda\psi(u;w) + c\psi'(u;w)}{c}, \quad \frac{\lambda}{c}\left[\int_0^u \psi(u-x;w)p(x)\,dx + \int_u^\infty w(u-x)p(x)\,dx\right] \quad \text{и} \quad 0.$$

Таким образом,

$$\psi'(u;w) = \frac{\lambda}{c}\psi(u;w) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \psi(u-x;w)p(x)\,dx - \frac{\lambda}{c}\int_u^\infty w(u-x)p(x)\,dx. \qquad (13.\text{A}.14)$$

Проинтегрируем это уравнение по u от 0 до z. Получающиеся при этом двойные интегралы могут быть сведены к одинарным заменой переменных. В первом двойном интеграле заменим x и u на x и $y = u - x$. Тогда

$$\int_0^z \int_0^u \psi(u-x;w)p(x)\,dx\,du = \int_0^z \int_0^{z-y} \psi(y;w)p(x)\,dx\,dy = \int_0^z \psi(y;w)P(z-y)\,dy.$$

Во втором двойном интеграле заменим x и u на x и $y = x - u$. Получаем

$$\int_0^z \int_u^\infty w(u-x)p(x)\,dx\,du = \int_0^\infty \int_y^{y+z} w(-y)p(x)\,dx\,dy = \int_0^\infty w(-y)[P(y+z) - P(y)]\,dy.$$

Таким образом, равенство (13.A.14), будучи проинтегрированным от 0 до z, дает

$$\psi(z;w)-\psi(0;w) = \frac{\lambda}{c}\int_0^z \psi(y;w)[1-P(z-y)]\,dy - \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty w(-y)[P(y+z)-P(y)]\,dy. \quad (13.\text{A}.15)$$

При $z \to \infty$ первые слагаемые в обеих частях пропадают и остается

$$-\psi(0;w) = -\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty w(-y)[1-P(y)]\,dy.$$

Пусть теперь функция $w_h(x)$ определена, как в примере (c). Это значит, что

$$w_h(x) = \begin{cases} 1, & x < -h, \\ 0, & -h \leqslant x \leqslant 0. \end{cases}$$

Тогда

$$\mathbf{P}[U(T) < -h \,|\, T < \infty]\psi(0) = \psi(0;w_h) = \frac{\lambda}{c}\int_h^\infty [1-P(y)]\,dy.$$

Следовательно, при $u = 0$ вероятность того, что рисковый резерв в какой-либо момент окажется меньше нуля и примет значение между $-h$ и $-h-dh$, равна $(\lambda/c)[1-P(h)]\,dh$. Если $u > 0$, то событие, состоящее в том, что рисковый резерв в какой-либо момент окажется меньше u и примет значение между $u-h$ и $u-h-dh$, имеет такую же вероятность. Это доказывает теорему 13.5.1. ■

Упражнения

К разделу 13.2

13.1. Предположим, что с.в. W_i принимает только два значения, 0 и 2, и что $\mathbf{P}(W=0) = p$, $\mathbf{P}(W=2) = q$, где $p + q = 1$. Предположим, что $c = 1$, $p > 1/2$ и что u целое. Определите в этом случае

(a) $U(\widetilde{T})$, (b) $\tilde{\psi}(u)$ в терминах $\widetilde{R}$, (c) $\widetilde{R}$ в терминах p, q, (d) $\tilde{\psi}(u)$ в терминах p, q.

13.2. Рассмотрим страховые случаи в периоды $n+1, n+2, \ldots, n+m$ и обозначим через $S_{n,m}$ их общее число. Таким образом,

$$S_{n,m} = W_{n+1} + W_{n+2} + \cdots + W_{n+m}.$$

Величина страховых выплат для каждого периода порождается случайным процессом, описанным в (13.2.14). Проверьте, что

(a) $$S_{n,m} = \sum_{i=1}^m Y_{n+i}\sum_{j=0}^{m-i} a^j + W_n\sum_{j=1}^m a^j = \sum_{i=1}^m \frac{1-a^{m-i+1}}{1-a}\,Y_{n+i} + \frac{a-a^{m+1}}{1-a}\,W_n,$$

(b) при $m \to \infty$ последнее слагаемое в правой части формулы п. (a) сходится к $\dfrac{aW_n}{1-a}$,

(c) $\mathbf{E}[S_{n,m} \mid W_1 = w_1, W_2 = w_2, \ldots, W_n = w_n] = \dfrac{m(1-a) - a + a^{m+1}}{(1-a)^2}\,\mu + \dfrac{a - a^{m+1}}{1-a}\,w_n$, где $\mathbf{E}(Y_{n+1}) = \mu$.

К разделу 13.3

13.3. Предположим, что $V_1, V_2, \ldots$ являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами с общей функцией распределения $F(x)$ и функцией плотности $f(x)$, $x \geqslant 0$. Чему равна вероятность того, что страховой случай произойдет в интервале между моментами t и $t + dt$ при условии, что $N(t) = i$ и $T_i = s$ $(s < t)$? (Такое обобщение пуассоновского процесса называется *процессом восстановления*).

13.4. Пусть $\{N(t),\ t \geqslant 0\}$ является пуассоновским процессом с параметром λ и $p_n(t) = \mathbf{P}[N(t) = n]$.

(a) Покажите, что $p_0'(t) = -\lambda p_0(t)$, $p_n'(t) = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t)$, $n \geqslant 1$.

(b) Предложите интерпретацию этой формулы.

К разделу 13.4

13.5. Вычислите $\lim_{\theta \to 0} R$ и $\lim_{\theta \to \infty} R$.

13.6. Воспользуйтесь соотношением $e^{rx} > 1 + rx + \frac{1}{2}(rx)^2$, $r > 0$, $x > 0$, чтобы показать, что $R < 2\theta p_1/p_2$.

13.7. Предположим, что $\theta = 2/5$ и $p(x) = \frac{3}{2}e^{-3x} + \frac{7}{2}e^{-7x}$, $x > 0$. Вычислите

(a) γ, (b) R.

13.8. Предположим, что распределение величины страховых выплат дискретно и $p(1) = 1/4$, $p(2) = 3/4$. Подсчитайте θ, если $R = \ln 2$.

13.9. Покажите, что коэффициент Лундберга можно получить также в виде единственного решения уравнения

$$\int_0^\infty e^{rx}[1 - P(x)]dx = \frac{c}{\lambda}, \qquad r < \gamma.$$

К разделу 13.5

13.10. Воспользуйтесь теоремой 13.5.1 для вычисления знаменателя в формуле (13.4.4) при $u = 0$. Справедлив ли полученный результат для (13.5.2)?

13.11. (a) Покажите, интерпретируя приведенное ниже равенство, что при $u \geqslant 0$

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{c}\int_0^u [1 - P(y)]\psi(u-y)\,dy + \frac{\lambda}{c}\int_u^\infty [1 - P(y)]\,dy.$$

[Указание. Воспользуйтесь теоремой 13.5.1.]

(b) Уравнение из п. (a) называется *уравнением восстановления*. [См. упр. 13.3.] Оно является интегральным уравнением, поскольку устанавливает соотношение между функциями, в которые входят интегралы. Один из методов поиска решения интегрального уравнения — преобразовать его в *интегро-дифференциальное уравнение*. Покажите, что

$$\psi'(u) = \frac{\lambda}{c}\left\{\psi(u) - \int_0^u \psi(u-y)p(y)\,dy - [1 - P(u)]\right\}.$$

13.12. Подставьте в (13.5.4) равенство $M_X(r) = 1 + p_1 r + \frac{1}{2}p_2 r^2 + \frac{1}{6}p_3 r^3 + \ldots$ и выведите выражения для

(a) $\mathbf{E}[L_1]$, (b) $\mathbf{E}[L_1^2]$, (c) $\mathbf{D}[L_1]$.

К разделу 13.6

13.13. (a) Покажите, что для с.в. N из равенства (13.6.5)

$$\mathbf{E}[N] = 1/\theta, \qquad \mathbf{D}[N] = (1+\theta)/\theta^2.$$

(b) Воспользуйтесь результатом упр. 13.12 и выведите выражения для $\mathbf{E}[L]$ и $\mathbf{D}[L]$. [Указание. Полезными окажутся формулы (13.6.5), (12.2.5) и (12.2.6) с $p_1 = \mathbf{E}[L_1]$, $\mathbf{D}[X] = \mathbf{D}[L_1]$. Иной метод основан на разложении выражения для $M_L(r)$ из (13.6.4) по степеням r.]

13.14. Определите производящую функцию моментов с.в. L, если размер выплаты по любому страховому случаю равен 2.

13.15. При определенных предположениях вероятность разорения выражается формулой $\psi(u) = (0{,}3)e^{-2u} + (0{,}2)e^{-4u} + (0{,}1)e^{-7u}$, $u \geqslant 0$. Подсчитайте

(a) θ, (b) R.

13.16. Каково математическое ожидание величины страховой выплаты по одному страховому случаю, определяемой распределением вида (13.6.10)?

13.17. Предположим, что $\lambda = 3$, $c = 1$ и $p(x) = \frac{1}{3}e^{-3x} + \frac{16}{3}e^{-6x}$, $x > 0$. Вычислите или приведите выражения для

(a) p_1, (b) θ, (c) $M_X(r)$.

Найдите

(d) выражения для правых частей формул (13.6.9) и (13.6.12),

(e) явную формулу для $\psi(u)$.

13.18. Предположим, что $\lambda = 1$, $c = 10$ и $p(x) = (9x/25)e^{-3x/5}$, $x > 0$. Вычислите или приведите выражения для

(a) p_1, (b) θ, (c) $M_X(r)$.

Найдите

(d) выражения для правых частей формул (13.6.9) и (13.6.12),

(e) явную формулу для $\psi(u)$.

13.19. В работе Бикмана [Beekman 1969] и в обсуждении ее Бауэрсом в том же номере журнала на с. 275–277 было предложено следующее приближение для функции распределения с.в. L:

$$\mathbf{P}(L \leqslant u) \cong \xi I(u) + (1-\xi)G(u:\alpha,\beta),$$

где $I(x)$ — функция распределения константы 0, т. е. вырожденная функция распределения, а $G(u:\alpha,\beta)$ — функция распределения гамма-распределения с параметрами α и β.

(a) Определите ξ, α и β так, чтобы они равнялись «сгустку» вероятностной массы в нуле и первым двум моментам с.в. L соответственно. См. упр. 13.13(b).

(b) Каково будет в этом случае приближение для $\psi(u)$, $u \geqslant 0$?

13.20. Для процесса рискового резерва (1) суммарные страховые выплаты описываются сложным пуассоновским процессом и (2) распределение величины страховых выплат является смесью n показательных распределений, функция распределения которых задается формулой (13.6.10).

(a) Покажите, что условное распределение с.в. L_1 при условии, что величина рискового резерва упадет ниже начального уровня, является смесью тех же самых n показательных распределений.

(b) Определите выражение для n весов этой смеси в терминах весов и параметров распределения страховых выплат.

(c) Определите $\mathbf{E}[L_1]$.

13.21. Для процесса рискового резерва из примера 13.6.2 определите

(a) функцию плотности с.в. L_1, (b) $\mathbf{E}[L_1]$, (c) $\mathbf{D}[L_1]$.

Ко всем темам главы

13.22. В контексте формулы (13.2.1) пусть с.в. $G_i = U_i - U_{i-1}$ обозначает доход страховщика между моментами времени $i-1$ и i. Предположим, что $G_1, G_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины. Предположим далее, что $u(x) = -e^{-\alpha x}$, $\alpha > 0$, является функцией полезности страховщика. Покажите, что

$$\mathbf{E}[u(U_{n+1})\,|\,U_n = x] \geqslant u(x)$$

тогда и только тогда, когда $\alpha \leqslant \widetilde{R}$. Приведите интерпретацию этого результата.

13.23. Заменим временны́е единицы таким образом, чтобы новые единицы были в f раз больше старых (для некоторого $f > 0$). Если $\tilde{c}$, $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{\psi}(u,t)$ обозначают характеристики модели в терминах новых единиц, то

(a) Как выражаются эти новые характеристики через c, λ и $\psi(u,t)$?

(b) Для какого f выполнено равенство $\tilde{\lambda} = 1$? (Некоторые авторы называют такие единицы *операционным временем*.)

13.24. Пусть для рассматриваемого процесса рискового резерва

(1) суммарные страховые выплаты представляются сложным пуассоновским процессом,

(2) величина страховых выплат равномерно распределена на интервале $(0, 10)$,

(3) $\theta = 0{,}05$,

(4) $u = 0{,}0$,

(5) с.в. $U(T)$ является отрицательным рисковым резервом в момент разорения,

(6) с.в. $U(T\text{-})$ является величиной рискового резерва непосредственно перед разорением. [Замечание. $U(T\text{-}) - X = U(T)$, где с.в. X — величина страховой выплаты в момент разорения.]

Определите $\mathbf{E}[U(T\text{-}) \,|\, T < \infty]$. [Указание. Случайные величины $U(T\text{-})$ и $|U(T)|$ в этом упражнении одинаково распределены. Чтобы проверить этот факт, см. [Gerber, Shiu 1998, formula (3.7)].

К приложению

13.25. Предположим, что все страховые выплаты имеют величину 1.

(a) Выпишите уравнение для $\psi(u)$, которое соответствует формуле (13.A.14).

(b) Решите это уравнение при $0 \leqslant u \leqslant 1$.

14

ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ РИСКА

14.1. Введение

Главы 12 и 13 были посвящены модели коллективных рисков. Эта модель основывалась на предположениях, что множество страховых договоров порождает случайное число страховых случаев в каждый временной период и что величина выплат по каждому страховому случаю случайна. Для того чтобы применять эту модель, нам необходима информация о распределении числа страховых случаев и о распределении величины выплаты по отдельному страховому случаю. Выбор таких распределений обсуждался в разд. 12.3, и в настоящей главе будут добавлены лишь некоторые замечания по поводу распределения числа страховых случаев. Здесь распределение величины выплаты по отдельному страховому случаю будет иллюстрироваться на примерах четырех различных видов страхования, а именно огневого, автомобильного, на случай кратковременной потери трудоспособности и страхования расходов на лечение в стационаре.

Мы обсудим два метода приближения модели индивидуальных рисков для некоторого страхового портфеля моделью коллективных рисков. Для коротких временных интервалов это позволит заменить модель индивидуальных рисков моделью коллективных рисков.

Понятие перестрахования на базе эксцедента убыточности для некоторого страхового портфеля исследуется с общих позиций. Методы вычисления распределения суммарных страховых выплат, изложенные в гл. 12, дают способ вычисления перестраховочных нетто-премий по договорам перестрахования эксцедента убыточности. Мы остановимся также на интерпретации некоторой формулы для дивидендов по групповому страхованию как формулы при страховании эксцедента убыточности.

Мы дадим пример анализа договора перестрахования методами гл. 12 и 13, а также путем сравнения коэффициента Лундберга, который связан с вероятностью разорения, с величиной $\mathbf{E}[L]$, которая скорее характеризует величину дефицита при разорении.

Основная цель настоящей главы — указать различные способы применения теории риска к задачам страхования.

14.2. Распределение величины страховых выплат

Для того чтобы продемонстрировать широту спектра приложений моделей теории риска, в настоящем разделе представлены четыре специальных, но охватывающих широкую область, приложения. Здесь обсуждается распределение величины индивидуальных страховых выплат. Для построения модели индивидуальных рисков эту информацию можно затем дополнить вероятностями наступления индивидуальных страховых случаев. Для построения модели коллективных рисков эту же информацию можно дополнить данными о распределении числа страховых случаев, порождаемых коллективом страхователей. Приложения, предлагаемые в настоящем разделе, могут быть использованы страховой компанией при работе с одним из видов страхования или с группой однородных страховых договоров. Промышленная компания может использовать их для моделирования своей программы управления рисками.

Огневое страхование. В этом виде страхования страховым событием является пожар на застрахованном объекте, повлекший потери. Поскольку пожар может причинить серьезный ущерб, большим страховым выплатам необходимо сопоставить адекватную вероятность при помощи функции распределения $P(x)$. В актуарной литературе предлагались некоторые стандартные распределения. Три из них приведены в табл. 14.2.1. Тот факт, что для распределения Парето среднее существует, лишь если $\alpha > 1$, а дисперсия — лишь если $\alpha > 2$, свидетельствует о том, что это распределение имеет большой разброс вероятностей. О распределениях такого типа говорят, что они имеют *тяжелые хвосты*.

Таблица 14.2.1. Типичные распределения страховых выплат

Название	$p(x)$	Среднее	Дисперсия
Логнормальное	$\dfrac{e^{-(\ln x - m)^2/(2\sigma^2)}}{x\sigma\sqrt{2\pi}}$, $x > 0$, $\sigma > 0$	$e^{m+\sigma^2/2}$	$(e^{\sigma^2} - 1)e^{2m+\sigma^2}$
Парето	$\dfrac{\alpha x_0^\alpha}{x^{\alpha+1}}$, $x > x_0 > 0$, $\alpha > 0$	$\dfrac{\alpha x_0}{\alpha - 1}$, $\alpha > 1$	$\dfrac{\alpha x_0^2}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2}$, $\alpha > 2$
Смесь показательных	$p\alpha e^{-\alpha x} + q\beta e^{-\beta x}$, $x > 0$, $0 < p < 1$, $q = 1 - p$, $\alpha, \beta > 0$	$\dfrac{p}{\alpha} + \dfrac{q}{\beta}$	$\dfrac{p(1+q)}{\alpha^2} + \dfrac{q(1+p)}{\beta^2} - \dfrac{2pq}{\alpha\beta}$

Для того чтобы применить одно из этих стандартных распределений, его параметры необходимо оценить по выборке величин страховых выплат.

КАСКО в автомобильном страховании. В этом виде страхования страховым событием является причинение ущерба застрахованному автомобилю. Диапазон величины страховых выплат не столь велик, как в огневом страховании. Поэтому гамма-распределение (12.3.17) достаточно хорошо соответствует статистической информации и используется в качестве распределения величины страховых выплат. Параметры этого распределения могут быть оценены по выборке страховых выплат.

Страхование на случай потери трудоспособности. Этот вид страхования предусматривает выплаты нетрудоспособным. Обычно определяется *период отсрочки* момента начала выплат, например, семь дней с момента потери трудоспособности. Период, в течение которого производятся выплаты, имеет также ограничения сверху, например, это могут быть 13 недель или период до момента наступления пенсионного возраста. Если речь идет о группе страхователей, то этот вид страхования называется *групповым страхованием с еженедельными возмещениями* или *групповым долгосрочным страхованием на случай нетрудоспособности*, в зависимости от продолжительности периода выплат.

Величина выплат в каждый период одна и та же; стоимость страхового случая равна этой величине выплат, умноженной на число периодов, составляющих время, пока длится нетрудоспособность, минус период отсрочки. Пусть с.в. Y представляет собой число таких периодов. Распределение с.в. Y может быть оценено по статистике страховых случаев и представлено в виде таблицы типа табл. 14.2.2. Обратите внимание на аналогию между функцией, представленной во втором столбце табл. 14.2.2, и функцией дожития, обсуждавшейся в связи с таблицами смертности в гл. 3. В рассматриваемом случае такую функцию принято называть функцией длительности. Она дает вероятности длительности или сохранения нетрудоспособности на протяжении указанного периода. Аналогично тому, как функции дожития могут применяться для нахождения различных вероятностей дожития и смерти, *функции длительности* могут применяться для нахождения различных вероятностей, связанных с длительностью и завершением периода нетрудоспособности.

Таблица 14.2.2. Иллюстративные распределения с.в. Y длительности страхового случая при групповом страховании с еженедельным возмещением (максимальный срок выплат 13 недель, период отсрочки 7 дней)

Длительность страхового случая (в днях)	$\mathbf{P}(Y>y)$	$\mathbf{P}(Y=y)$	Длительность страхового случая (в днях)	$\mathbf{P}(Y>y)$	$\mathbf{P}(Y=y)$
0	1,00000	—	24	0,43364	0,01295
1	0,96500	0,03500	25	0,42150	0,01214
2	0,93026	0,03474	26	0,40970	0,01180
3	0,89677	0,03349	27	0,39864	0,01106
4	0,86359	0,03318	28	0,38788	0,01076
5	0,83164	0,03195	31	—	0,06361[1]
6	0,80004	0,03160	35	0,32427	—
7	0,76964	0,03040	38	—	0,04832
8	0,73962	0,03002	42	0,27595	—
9	0,71077	0,02885	45	—	0,03753
10	0,68376	0,02701	49	0,23842	—
11	0,65846	0,02530	52	—	0,02980
12	0,63476	0,02370	56	0,20862	—
13	0,61254	0,02222	59	—	0,02399
14	0,59171	0,02083	63	0,18463	—
15	0,57218	0,01953	66	—	0,01939
16	0,55387	0,01831	70	0,16524	—
17	0,53615	0,01772	73	—	0,01586
18	0,51953	0,01662	77	0,14938	—
19	0,50342	0,01611	80	—	0,01300
20	0,48832	0,01510	84	0,13638	—
21	0,47367	0,01465	87	—	0,01077
22	0,45993	0,01374	91	0,00000	0,12561
23	0,44659	0,01334			1,00000

В применении модели коллективных рисков к групповому страхованию на случай потери трудоспособности такого типа, как рассматривается в табл. 14.2.2, вероятность $\mathbf{P}(N=n)$ интерпретируется как вероятность того, что в рассматриваемой

[1]) Для удобства считалось, что страховые случаи, заканчивающиеся в следующую за данным моментом неделю, заканчиваются в конце третьего дня этой недели.

группе в период действия страхового договора окажутся n нетрудоспособных, период нетрудоспособности которых длится не менее семи дней.

Если выплаты по нетрудоспособности составляют c единиц в день, то распределение величины страховых выплат задается соотношением

$$p(x) = \mathbf{P}(Y = x/c), \qquad x = c, 2c, 3c, \ldots, 28c, 31c, \ldots, 87c, 91c.$$

В этом страховании на коротком интервале времени начисление процента не учитывается.

При групповом страховании на случай потери трудоспособности для распределения числа нетрудоспособных, срок нетрудоспособности которых превышает период отсрочки, часто подходит пуассоновское распределение. Математическое ожидание числа нетрудоспособных при таком распределении часто предполагается пропорциональным числу лиц в группе. В следующем примере показано, как сложное пуассоновское распределение можно использовать для моделирования группового страхования на случай потери трудоспособности с периодом выплат умеренной длины. Число страховых случаев, возникающих в группе в течение периода фиксированной длины, и дли́ны периодов выплат по отдельным страховым случаям предполагаются взаимно независимыми.

Пример 14.2.1. Рассмотрим договор страхования на случай потери трудоспособности для группы из 200 женщин, каждой из которых 32 года. Выплаты производятся ежемесячно в размере 2000 каждая, начинаются через три месяца после даты потери трудоспособности и продолжаются, пока сохраняется нетрудоспособность, но производятся не больше, чем 21 раз. Предположим, что для S, величины суммарных выплат для всей группы, подходит сложное пуассоновское распределение.

Для коэффициента потери трудоспособности и распределения величины страховых выплат мы воспользуемся выдержкой из таблицы длительностей, приведенной ниже. Это часть таблицы, опубликованной в 1987 г. Группой уполномоченных по долгосрочной нетрудоспособности (ГУДН). Рассматриваемая выдержка соответствует группе из 1000 женщин возраста 32 лет. Таблица строилась в детерминистическом контексте. В нашем примере мы достаточно обоснованно считаем, что данные соответствуют сложному пуассоновскому распределению, и заголовки столбцов относятся к с.в. Y из третьего столбца, определение которой приводилось выше. Коэффициент потери трудоспособности в пересчете на одно лицо обозначается через λ_{32}.

Определим математическое ожидание и дисперсию с.в. S.

Решение. Величина страховой выплаты обозначается через $X = 2000\,Y$, $Y = 1, 2, \ldots, 21$, а функция вероятностей с.в. Y обозначается через $p(y)$. Обратим внимание, что в этой постановке игнорируются проценты, начисляемые за период в 21 месяц. Математическое ожидание числа случаев потери трудоспособности, длительность которых превосходит период отсрочки, для группы из 200 страхователей равно $200\,\lambda_{32}$. В нашей постановке

$$\mathbf{E}[S] = 200\,\lambda_{32}\mathbf{E}[X] = (2000)(200)\lambda_{32}\mathbf{E}[Y], \tag{14.2.1}$$

$$\mathbf{D}[S] = 200\,\lambda_{32}\mathbf{E}[X^2] = (2000^2)(200)\lambda_{32}\mathbf{E}[Y^2]. \tag{14.2.2}$$

Длительности из таблицы ГУДН для женщин, утративших трудоспособность в 32 года; трехмесячный период отсрочки

(1) Количество месяцев с момента потери трудоспособности	(2) Число выплат y	(3) $1000\,\lambda_{32}\mathbf{P}(Y \geqslant y)$
3	1	2,6640
4	2	2,4008
5	3	2,1343
6	4	1,9277
7	5	1,7664
8	6	1,6431
9	7	1,5442
10	8	1,4614
11	9	1,3898
12	10	1,3288
13	11	1,2767
14	12	1,2320
15	13	1,1926
16	14	1,1575
17	15	1,1261
18	16	1,0983
19	17	1,0735
20	18	1,0512
21	19	1,0308
22	20	1,0125
23	21	0,9961
24	22	0,9815

Эта таблица продолжается до 25 лет с момента потери трудоспособности

Для того чтобы выразить моменты с.в. S через значения, приведенные в таблице длительностей, мы проводим следующие вычисления:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[Y] &= \sum_{y=1}^{21} yp(y) + 21\sum_{y=22}^{\infty} p(y) = \sum_{y=1}^{21}\left(\sum_{x=1}^{y} 1\right)p(y) + 21\sum_{y=22}^{\infty} p(y) \\ &= \sum_{x=1}^{21}\left[\sum_{y=x}^{y} p(y)\right] + 21\sum_{y=22}^{\infty} p(y) = \sum_{x=1}^{21}\left[\sum_{y=x}^{\infty} p(y) - \sum_{y=22}^{\infty} p(y)\right] + 21\sum_{y=22}^{\infty} p(y) \\ &= \sum_{x=1}^{21}\sum_{y=x}^{\infty} p(y) = \sum_{x=1}^{21}\mathbf{P}(Y \geqslant x).\end{aligned}$$

Подставляя это выражение в (14.2.1), мы получим

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[S] &= 200\,\lambda_{32}\mathbf{E}[X] = (2000)(200)\lambda_{32}\mathbf{E}[Y] \\ &= 400(2{,}6640 + 2{,}4008 + \cdots + 0{,}99610) = 12\,203{,}12.\end{aligned}$$

Для вычисления дисперсии суммарных страховых выплат для группы из 200 страхователей нам надо проделать шаг, аналогичный использованию соотношения $m = \sum_{x=1}^{m} 1$ в предыдущих рассуждениях. Легко проверить, что $m^2 = \sum_{x=1}^{m}(2x - 1)$.

Поэтому

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(Y^2) &= \sum_{y=1}^{21} y^2 p(y) + (21)^2 \sum_{y=22}^{\infty} p(y) = \sum_{y=1}^{21}\left[\sum_{x=1}^{y}(2x-1)\right]p(y) + (21)^2 \sum_{y=22}^{\infty} p(y) \\ &= \sum_{y=1}^{21}(2x-1)\left[\sum_{y=x}^{\infty} p(y) - \sum_{y=22}^{\infty} p(y)\right] + (21)^2 \sum_{y=22}^{\infty} p(y) \\ &= \sum_{x=1}^{21}(2x-1)\sum_{y=x}^{\infty} p(y) = \sum_{x=1}^{21}(2x-1)\mathbf{P}(Y \geqslant x).\end{aligned}$$

Подставляя это выражение в (14.2.2), мы получим

$$\begin{aligned}\mathbf{D}[S] &= (2000)^2(200)\lambda_{32}\mathbf{E}[Y^2] = (800\,000)(1000)\lambda_{32}\sum_{x=1}^{21}(2x-1)\mathbf{P}(Y \geqslant x) \\ &= 800\,000[1(2{,}6640) + 3(2{,}4008) + \cdots + 41(0{,}9961)] = (425{,}9808)(10^6).\end{aligned}$$ ▼

Страхование расходов на лечение в стационаре. Рассмотрим страхование расходов на лечение в стационаре, при котором производятся ежедневные выплаты на протяжении всего времени госпитализации страхователя. Для нахождения функции вероятностей для длительности пребывания в стационаре для каждого случая госпитализации можно использовать соответствующую таблицу длительностей. График функции длительности госпитализации представлен на рис. 14.2.1.

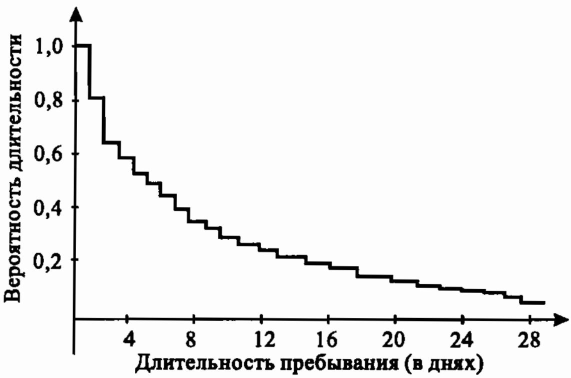


Рис. 14.2.1. Функция длительности для страхования расходов на лечение в стационаре

Если применять модель коллективных рисков к страхованию расходов на лечение в стационаре для группы страхователей, то $\mathbf{P}(N=n)$ следует интерпретировать как вероятность того, что в рассматриваемой группе в течение рассматриваемого периода происходит n госпитализаций, подпадающих под условия договора. Если ежедневная выплата равна c, то функция вероятностей для величины страховых выплат задается соотношениями

$$p(x) = \mathbf{P}(Y = x/c), \qquad x = c, 2c, \ldots, mc,$$

где с.в. Y представляет длительность госпитализации в днях, а m — максимальное количество дней, в течение которых производятся выплаты.

Использование моделей теории риска в перечисленных приложениях позволяет оценить величину необходимой суммарной нетто-премии. Эта оценка может дополняться результатами о величине разброса потерь.

14.3. Аппроксимация индивидуальной модели

Как модель индивидуальных, так и модель коллективных рисков призваны отразить ключевые аспекты страховых систем. В каждой из них строится распределение суммарных страховых выплат в рассматриваемых страховых системах. В этом разделе мы излагаем два метода, с помощью которых сложное пуассоновское распределение, которое обычно ассоциируется с моделью коллективных рисков, можно использовать для аппроксимации распределения суммарных страховых выплат в модели индивидуальных рисков.

Мы рассматриваем модель индивидуальных рисков, введенную в гл. 2, применительно к группе из n страховых договоров. Суммарная величина страховых выплат в течение срока действия договоров имеет вид $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, где через X_j обозначена страховая выплата по договору с номером j $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Мы различаем наступление страхового случая и величину выплаты по нему и будем пользоваться записью

$$X_j = I_j B_j. \tag{14.3.1}$$

Здесь величина I_j равна 1, если по договору с номером j произошел страховой случай, и 0 в противном случае; B_j является величиной страховой выплаты по этому страховому случаю при условии, что он произошел. При условии, что с.в. I_j и B_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, являются взаимно независимыми,

$$\mathbf{E}[S] = \sum_{j=1}^{n} q_j \mu_j, \tag{14.3.2}$$

$$\mathbf{D}[S] = \sum_{j=1}^{n} q_j(1 - q_j)\mu_j^2 + \sum_{j=1}^{n} q_j \sigma_j^2 \tag{14.3.3}$$

[см. (2.2.25) и (2.2.26)], где q_j обозначает вероятность того, что по договору с номером j произошел страховой случай, $\mu_j = \mathbf{E}[B_j]$ и $\sigma_j^2 = \mathbf{D}[B_j]$.

Мы обозначаем функцию распределения с.в. B_j через $P_j(x)$. Если происходит страховой случай, то по теореме Байеса вероятность того, что он относится к договору с номером j приблизительно равна $q_j/(q_1 + q_2 + \cdots + q_n)$. По формуле полной вероятности функция распределения выплаты по данному страховому случаю приблизительно равна

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{q_j P_j(x)}{q_1 + \cdots + q_n}. \tag{14.3.4}$$

Далее мы рассмотрим два метода приближения распределения с.в. S сложным пуассоновским процессом.

В первом методе используется сложное пуассоновское распределение с пуассоновским параметром

$$\lambda = q_1 + q_2 + \cdots + q_n \tag{14.3.5}$$

и с функцией распределения величины индивидуальной страховой выплаты

$$P(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{\lambda} P_j(x). \tag{14.3.6}$$

Формула (14.3.5) интерпретируется следующим образом. Математические ожидания числа страховых случаев в сложной пуассоновской модели и в исходной модели индивидуальных рисков совпадают. Аналогично, из формул (14.3.6) и (14.3.4) следует, что распределение величины страховой выплаты по страховому случаю при условии, что этот страховой случай произошел, в этих двух моделях одинаково.

Сложное пуассоновское распределение, которое определяется соотношениями (14.3.5) и (14.3.6), допускает также следующее пояснение. В модели индивидуальных рисков число страховых случаев, произошедших по договору с номером j, является бернуллиевской случайной величиной. Мы аппроксимируем ее распределение пуассоновским распределением с параметром q_j. Тогда распределение с.в. X_j приближается сложным пуассоновским распределением, которое определяется параметром q_j и распределением $P_j(x)$. Далее мы применяем теорему 12.4.1 для аппроксимации распределения с.в. S сложным пуассоновским распределением, которое задается соотношениями (14.3.5) и (14.3.6).

Из (14.3.6) следует, что

$$p_k = \sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{\lambda} \mathbf{E}[B_j^k], \qquad k = 1, 2, \dots . \tag{14.3.7}$$

В частности,

$$p_1 = \sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{\lambda} \mu_j \quad \text{и} \quad p_2 = \sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{\lambda} (\mu_j^2 + \sigma_j^2).$$

Поэтому среднее аппроксимирующего сложного пуассоновского распределения λp_1 совпадает со средним суммарной величины страховых выплат в исходной модели индивидуальных рисков [см. (14.3.2)]. С другой стороны, дисперсия аппроксимирующего сложного пуассоновского распределения λp_2 равна

$$\sum_{j=1}^{n} q_j(\mu_j^2 + \sigma_j^2), \tag{14.3.8}$$

что превосходит дисперсию величины суммарных страховых выплат в исходной модели индивидуальных рисков [см. (14.3.3)]. Однако если q_j мало, то обе дисперсии приблизительно равны.

Рассмотрим частный случай, когда величина страховых выплат по каждому договору является константой, $B_j = b_j$, так что $\mu_j = b_j$ и $\sigma_j = 0$. Тогда функция вероятностей для величины индивидуальных страховых выплат, согласно формуле (14.3.6), определяется формулой

$$p(x) = \sum_{b_j = x} \frac{q_j}{\lambda}, \tag{14.3.9}$$

причем сумма берется по всем тем договорам, для которых $b_j = x$. Кроме того, отношение дисперсии величины суммарных страховых выплат в модели индивидуальных рисков [см. (14.3.3)] к дисперсии аппроксимирующего сложного пуассоновского распределения [см. (14.3.8)] есть

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} q_j b_j^2 (1-q_j)}{\sum_{j=1}^{n} q_j b_j^2}. \tag{14.3.10}$$

Это отношение можно интерпретировать как взвешенное среднее вероятностей отсутствия страховых случаев, $1-q_j$.

Пример 14.3.1. В примере 2.5.1 мы рассматривали страховой портфель, содержащий 1800 договоров. Построим приближение распределения суммарных страховых выплат сложным пуассоновским распределением и обсудим получаемое при этом приближение дисперсии суммарных выплат.

Решение. Согласно формуле (14.3.5),

$$\lambda = 500(0{,}02) + 500(0{,}02) + 300(0{,}1) + 500(0{,}1) = 100.$$

В силу равенства (14.3.9)

$$p(1) = \frac{500(0{,}02) + 300(0{,}1)}{100} = 0{,}4, \qquad p(2) = \frac{500(0{,}02) + 500(0{,}1)}{100} = 0{,}6.$$

Тогда $p_2 = p(1) + 4p(2) = 2{,}8$ и дисперсия аппроксимирующего сложного пуассоновского распределения равна $\lambda p_2 = 280$. Как и ожидалось, эта величина больше дисперсии суммарных страховых выплат в модели индивидуальных рисков, подсчитанной в примере 2.5.1 и равной 256. ▼

Второй метод аппроксимации распределения с.в. S использует сложное пуассоновское распределение с пуассоновским параметром

$$\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2 + \cdots + \tilde{\lambda}_n, \tag{14.3.11}$$

где $\tilde{\lambda}_j = -\ln(1-q_j)$, и функцией распределения величины индивидуальных страховых выплат

$$\widetilde{P}(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\tilde{\lambda}_j}{\tilde{\lambda}} P_j(x). \tag{14.3.12}$$

Тогда аппроксимация (14.3.11) и (14.3.12) обосновывается так же, как и аппроксимация с помощью сложного пуассоновского процесса, который задается соотношениями (14.3.5) и (14.3.6). Ключевая разница состоит в том, что в (14.3.5) приравниваются математические ожидания числа страховых случаев в двух моделях, в то время как из формулы (14.3.11) следует, что

$$e^{-\tilde{\lambda}} = \prod_{j=1}^{n} (1-q_j);$$

другими словами, в этих двух моделях равны вероятности отсутствия страховых случаев.

Пример 14.3.2. Для портфеля, состоящего из 1800 страховых договоров, рассматривавшегося в примерах 2.5.1 и 14.3.1, найдем аппроксимирующее распределение для распределения суммарных страховых выплат, применяя второй метод.

Решение.

$$\tilde{\lambda} = -500\ln(0{,}98) - 500\ln(0{,}98) - 300\ln(0{,}9) - 500\ln(0{,}9) = 104{,}5,$$

$$\tilde{p}(1) = \frac{-500\ln(0{,}98) - 300\ln(0{,}9)}{104{,}5} = 0{,}399,$$

$$\tilde{p}(2) = \frac{-500\ln(0{,}98) - 500\ln(0{,}9)}{104{,}5} = 0{,}601.$$

В этом разделе мы представили два метода приближения распределения суммарных страховых выплат в модели индивидуальных рисков сложным пуассоновским распределением. Если все величины q_j в этой модели малы (что вполне может иметь место для договоров страхования жизни), представленные два метода дают очень близкие результаты, поскольку в этом случае

$$\tilde{\lambda}_j = -\ln(1 - q_j) = q_j + \frac{1}{2}q_j^2 + \cdots \cong q_j. \qquad \blacktriangledown$$

14.4. Перестрахование эксцедента убыточности

Страховые договоры, содержащие безусловную франшизу, обсуждались в разд. 1.5. Определение такого договора приводилось в формуле (1.5.1), а свойства оптимальности устанавливались в теореме 1.5.1. В случае когда такой договор заключается для множества страховых рисков, он называется договором ***перестрахования эксцедента убыточности***. Эти договоры являются предметом настоящего раздела. В данном конкретном приложении с.в. S может обозначать либо величину суммарных выплат для страховой компании в течение заданного периода, либо величину затрат по ряду направлений деятельности какой-либо производственной компании, либо суммарные выплаты по групповому договору страхования жизни или медицинского страхования.

Для договора перестрахования эксцедента убыточности с безусловной франшизой d сумма, выплачиваемая перестраховщиком страховщику, передающему риск в перестрахование (прямому страховщику), равна

$$I_d = \begin{cases} 0, & S \leqslant d, \\ S - d, & S > d. \end{cases} \tag{14.4.1}$$

Иногда для этого используется запись $I_d = (S - d)_+$, где индекс указывает на то, что берется «положительная часть» разности $S - d$.

Заметим, что I_d, как функция суммарных выплат S, также является случайной величиной. Величина страховых выплат, которая остается на долю прямого страховщика, равна

$$S - I_d = \begin{cases} S, & S \leqslant d, \\ d, & S > d. \end{cases} \tag{14.4.2}$$

Таким образом, удержанная величина выплат ограничена сверху суммой d, что и объясняет выбор термина[1)].

Мы обсудим методы вычисления $\mathbf{E}[I_d]$, математического ожидания величины выплат перестраховщика при безусловной франшизе d. Обозначим функцию распределения с.в. S через $F_S(x)$ и предположим сначала, что функция плотности с.в.

[1)] Выбор английского термина «stop-loss» — дословно «остановленные потери». — *Прим. ред.*

S равна $f_S(x)$. В этом случае

$$\mathbf{E}[I_d] = \int_d^\infty (x-d) f_S(x)\,dx. \tag{14.4.3}$$

Обычно с.в. S не принимает отрицательных значений. Мы можем распространить интеграл на полуось $(0,\infty)$ и вычесть интеграл по $(0,d)$, т.е. получить

$$\mathbf{E}[I_d] = \mathbf{E}[S] - d + \int_0^d (d-x) f_S(x)\,dx. \tag{14.4.4}$$

Если мы положим

$$f_S(x) = -\frac{d}{dx}\,[1 - F_S(x)]$$

в (14.4.3) и проинтегрируем по частям, то получим

$$\mathbf{E}[I_d] = \int_d^\infty [1 - F_S(x)]\,dx. \tag{14.4.5}$$

Аналогично, из формулы (14.4.4) получаем

$$\mathbf{E}[I_d] = \mathbf{E}[S] - \int_0^d [1 - F_S(x)]\,dx. \tag{14.4.6}$$

Каждое из приведенных выше четырех выражений для $\mathbf{E}[I_d]$ имеет свои достоинства. Если известна величина $\mathbf{E}[S]$, то формулы (14.4.4) и (14.4.6) предпочтительнее в тех случаях, когда требуется численное интегрирование, поскольку область интегрирования в этих выражениях конечна. Это уменьшает возможность допустить неточность в приближении функции $f_S(x)$ при больших x. Формулы (14.4.5) и (14.4.6) остаются справедливыми для распределений общего вида, в частности для дискретных и смешанных. Если распределение с.в. S задается аналитическим выражением, например, является нормальным или гамма-распределением, то наиболее удобным может оказаться выражение (14.4.3).

Пример 14.4.1. Пусть с.в. S имеет гамма-распределение. Покажем, что

$$\mathbf{E}[I_d] = \frac{\alpha}{\beta}\,[1 - G(d\colon \alpha+1, \beta)] - d[1 - G(d\colon \alpha, \beta)].$$

Решение. Из формулы (14.4.3) следует, что

$$\mathbf{E}[I_d] = \int_d^\infty x f_S(x)\,dx - d\,[1 - F_S(d)] = \int_d^\infty \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\, x^\alpha e^{-\beta x}\,dx - d\,[1 - G(d\colon \alpha, \beta)].$$

Поскольку $\alpha\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha+1)$, подынтегральное выражение равно величине α/β, умноженной на функцию плотности гамма-распределения с параметрами $\alpha+1$ и β. Отсюда вытекает требуемая формула. ▼

Пример 14.4.2. Предположим, что a, b — такие числа, что $\mathbf{P}(a < S < b) = 0$. Покажем, что при $a < d < b$ выражение $\mathbf{E}[I_d]$ можно получить из $\mathbf{E}[I_a]$ и $\mathbf{E}[I_b]$ линейной интерполяцией.

Решение. Из предположений вытекает, что $F_S(x) = F_S(a)$, $a \leqslant x < b$. Мы использовали это в формуле (14.4.6) для того, чтобы получить равенство

$$\mathbf{E}[I_d] = \mathbf{E}[I_a] - (d-a)[1 - F_S(a)];$$

таким образом, $\mathbf{E}[I_d]$ является линейной функцией от d в интервале $[a,b]$. ▼

Перейдем к рассмотрению случая, когда возможные значения с.в. S — неотрицательные целые числа. Обозначим через $f_S(x)$ функцию вероятностей с.в. S ($x = 0, 1, 2, \ldots$). Предположим, что безусловная франшиза d является целым числом. Согласно предыдущему примеру, математическое ожидание выплат при перестраховании эксцедента убыточности для безусловной франшизы, которая не является целым числом, может быть получено линейной интерполяцией.

Формулы

$$\mathbf{E}[I_d] = \sum_{x=d+1}^{\infty} (x-d) f_S(x), \tag{14.4.7}$$

$$\mathbf{E}[I_d] = \mathbf{E}[S] - d + \sum_{x=0}^{d-1} (d-x) f_S(x) \tag{14.4.8}$$

соответствуют формулам (14.4.3) и (14.4.4). Поскольку функция $F_S(x)$ кусочно постоянна, интегралы в (14.4.5) и (14.4.6) могут быть переписаны в виде сумм. Мы получим

$$\mathbf{E}[I_d] = \sum_{x=d}^{\infty} [1 - F_S(x)], \tag{14.4.9}$$

$$\mathbf{E}[I_d] = \mathbf{E}[S] - \sum_{x=0}^{d-1} [1 - F_S(x)]. \tag{14.4.10}$$

Пример 14.4.3. Для распределения суммарных выплат из примера 12.2.2 вычислим двумя методами математическое ожидание выплаты по договору перестрахования эксцедента убыточности, если величина безусловной франшизы равна 7.

Решение. Согласно равенству (14.4.7),

$$\mathbf{E}[I_7] = f_S(8) + 2 f_S(9) = 0{,}0028.$$

Применяя другой метод, из равенства (14.4.9) получаем

$$\mathbf{E}[I_7] = [1 - F_S(7)] + [1 - F_S(8)] = 0{,}0028. \qquad \blacktriangledown$$

Пример 14.4.4. Вычислим $\mathbf{E}[I_6]$ для сложного пуассоновского распределения, использованного в примере 12.4.2.

Решение. Поскольку область значений этого сложного пуассоновского распределения бесконечна, здесь лучше пользоваться формулами (14.4.8) и (14.4.10). Например, используя (14.4.8), получаем

$$\mathbf{E}[I_6] = \mathbf{E}[S] - 6 + \sum_{x=0}^{5} (6-x) f_S(x) = 1{,}7 - 6 + 4{,}3547 = 0{,}0547. \qquad \blacktriangledown$$

В общем случае из равенства (14.4.9) получается рекуррентная формула

$$\mathbf{E}[I_{d+1}] = \mathbf{E}[I_d] - [1 - F_S(d)], \qquad d = 0, 1, 2, \ldots. \tag{14.4.11}$$

Отсюда можно рекуррентно находить величину $\mathbf{E}[I_d]$, исходя из начального значения $\mathbf{E}[I_0] = \mathbf{E}[S]$.

Подход, основанный на рекуррентных соотношениях, особенно удобен, если с.в. S имеет сложное распределение, которое удовлетворяет условиям теоремы 12.4.3.

В этом случае $f_S(x)$ также можно вычислять с помощью рекуррентной формулы [см. (12.4.16)–(12.4.18)]. Например, если рассматривается сложное пуассоновское распределение, то мы начнем с равенств

$$f_S(0) = F_S(0) = e^{-\lambda}, \qquad \mathbf{E}[I_0] = \lambda p_1$$

и будем последовательно использовать рекуррентные формулы

$$f_S(x) = \frac{\lambda}{x}\sum_{j=1}^{\infty} jp(j) f_S(x-j), \quad F_S(x) = F_S(x-1) + f_S(x), \quad \mathbf{E}[I_x] = \mathbf{E}[I_{x-1}] - [1 - F_S(x-1)]$$

для $x = 1, 2, 3, \ldots$.

Пример 14.4.5. Предположим, что с.в. S имеет сложное пуассоновское распределение с $\lambda = 1{,}5$, $p(1) = 2/3$, $p(2) = 1/3$. Вычислим величины $f_S(x)$, $F_S(x)$, $\mathbf{E}[I_x]$ для $x = 0, 1, \ldots, 6$.

Решение. Прежде всего, $f_S(0) = F_S(0) = e^{-1{,}5} = 0{,}223$ и $\mathbf{E}[I_0] = \lambda p_1 = 1{,}5 \cdot \dfrac{4}{3} = 2$. Далее, поскольку $\lambda j p(j) = 1$ для $j = 1, 2$,

$$f_S(x) = \frac{1}{x}\,[f_S(x-1) + f_S(x-2)], \qquad x = 1, 2, \ldots, 6.$$

Заметим, что $f_S(1) = f_S(0)$.

Оставшиеся этапы рассуждений и полученные результаты приведены в следующей таблице.

x	$f_S(x) = \dfrac{f_S(x-1) + f_S(x-2)}{x}$	$F_S(x) = F_S(x-1) + f_S(x)$	$\mathbf{E}[I_x] = \mathbf{E}[I_{x-1}] + F_S(x-1) - 1$
0	0,223	0,223	2,000
1	0,223	0,446	1,223
2	0,223	0,669	0,669
3	0,149	0,818	0,338
4	0,093	0,911	0,156
5	0,048	0,959	0,067
6	0,024	0,983	0,026

▼

Наше обсуждение концентрировалось вокруг вычисления величины $\mathbf{E}[I_d]$, математического ожидания выплат по договору перестрахования эксцедента убыточности. Обычно эта величина является нижней границей для величины премии при договоре перестрахования эксцедента убыточности. Фактическая премия будет содержать надбавку, которая отражает изменчивость выплат перестраховщика I_d. Одной из мер этой изменчивости является

$$\mathbf{D}[I_d] = \mathbf{E}[I_d^2] - (\mathbf{E}[I_d])^2.$$

В дискретном случае величину $\mathbf{E}[I_d^2]$ можно вычислять с помощью рекуррентной формулы (см. упр. 14.8).

Перейдем к формуле для дивидендов по групповому страхованию, поскольку она близка по своей сути к перестрахованию эксцедента убыточности. Напомним, что термин «групповое страхование» используется в том случае, когда страховое покрытие для многих лиц приобретается в виде одного договора финансирующим субъектом, таким, как работодатель этих лиц. В качестве иллюстраций в разд. 14.2 и в примере 14.2.1 рассматривалось краткосрочное страхование на случай потери трудоспособности. В настоящем разделе мы обсудим один вид формулы для дивидендов, которая может использоваться в связи с групповым страхованием.

Предположим, что, получив премию G, страховщик осуществит суммарные выплаты S за некоторый заданный период времени. Страхователю известно, что премия содержит существенную надбавку $G - \mathbf{E}[S] > 0$. На этом основании страхователь ожидает выплату дивиденда D в конце рассматриваемого периода, величина которого является функцией от S. Для большей конкретности предположим, что дивиденд имеет вид

$$D = \begin{cases} kG - S, & S < kG, \\ 0, & S \geqslant kG, \end{cases} \tag{14.4.12}$$

где $0 < k < 1$. Таким образом, страхователь платит G и получает назад S и D.

Рассмотрим математическое ожидание с.в. D. Для удобства обозначений предположим, что распределение с.в. S непрерывно, и будем обозначать через $f_S(x)$ функцию плотности с.в. S. Как показано в примере 14.4.6, дискретный случай рассматривается аналогично. Из формулы (14.4.12) получаем

$$\mathbf{E}[D] = \int_0^{kG} (kG - x) f_S(x)\, dx. \tag{14.4.13}$$

По-видимому, страховщик выберет число k настолько малым, чтобы выполнялось неравенство $\mathbf{E}[S] + \mathbf{E}[D] < G$.

Пример 14.4.6. Получая премию в пять единиц, страховщик производит суммарные выплаты S, которые имеют сложное пуассоновское распределение, рассматривавшееся в примере 14.4.5. Страховщик согласен также выплачивать дивиденды, сумма которых составляет разницу между 80% от размера премии и выплатами. Вычислим $G - \mathbf{E}[S] - \mathbf{E}[D]$ (это математическое ожидание суммы, предназначенной на покрытие расходов, обеспечение рисковой надбавки и проч.).

Решение. Дивиденд имеет вид (14.4.12) при $k = 0{,}8$. Поэтому

$$\mathbf{E}[D] = 4f_S(0) + 3f_S(1) + 2f_S(2) + f_S(3) = 2{,}156.$$

Таким образом,

$$G - \mathbf{E}[S] - \mathbf{E}[D] = 5 - 2 - 2{,}156 = 0{,}844. \qquad \blacktriangledown$$

Мы можем переписать правую часть формулы (14.4.13) в виде

$$\mathbf{E}[D] = \int_0^{\infty} (kG - x) f_S(x)\, dx + \int_{kG}^{\infty} (x - kG) f_S(x)\, dx.$$

Поэтому

$$\mathbf{E}[D] = kG - \mathbf{E}[S] + \mathbf{E}[I_{kG}], \tag{14.4.14}$$

где I_{kG} обозначает выплаты по договору перестрахования эксцедента убыточности с безусловной франшизой kG. Если математическое ожидание выплаты $\mathbf{E}[I_d]$ по договору перестрахования эксцедента убыточности уже подсчитано для различных безусловных франшиз, то это удобная формула для нахождения $\mathbf{E}[D]$.

Пример 14.4.7. Воспользуемся формулой (14.4.14) для получения $\mathbf{E}[D]$ в примере 14.4.6.

Решение. Поскольку $\mathbf{E}[I_4] = 0{,}156$,

$$\mathbf{E}[D] = 4 - 2 + 0{,}156 = 2{,}156. \qquad \blacktriangledown$$

На самом деле связь между формулой для дивидендов вида (14.4.12) и договором перестрахования эксцедента убыточности имеет и другие аспекты. Начнем с тождества

$$S + D = kG + I_{kG}. \tag{14.4.15}$$

Его можно проверить, рассматривая отдельно случай $S \leqslant kG$, когда обе части равны kG, и случай $S > kG$, когда обе части равны S. Вычитая из обеих частей величину G, мы приходим к тождеству

$$S + D - G = I_{kG} - (1-k)G. \tag{14.4.16}$$

Это можно интерпретировать следующим образом. Разница между страховыми выплатами и дивидендами, полученными в результате выплаты премий, равна разнице между выплатами по договору перестрахования эксцедента убыточности с безусловной франшизой kG и премией размера $(1-k)G$ в этом договоре перестрахования эксцедента убыточности.

Согласно такой интерпретации, страховщик может считать, что премия расщеплена на две составляющие,

$$G = kG + (1-k)G. \tag{14.4.17}$$

Сначала из суммы kG производятся страховые выплаты, а оставшаяся часть $kG - S$ (в случае $S < kG$) выплачивается в качестве дивидендов в соответствии с формулой (14.4.12). Вторая составляющая, $(1-k)G$, используется для обеспечения перестрахования на базе эксцедента убыточности с безусловной франшизой kG.

Формула (14.4.15), переписанная в виде

$$D = kG - S + I_{kG},$$

после взятия математического ожидания от обеих ее частей, снова приводит нас к формуле (14.4.14).

14.5. Анализ перестрахования с помощью теории разорения

На вопросы о типе и величине перестрахования, которое следует приобретать, можно отвечать многими способами. Один из подходов опирается на принятие страховщиком функции полезности. Из всевозможных способов осуществить перестрахование страховщик выбирает тот, который дает наивысшую ожидаемую полезность. Этот идеальный подход, очень простой по своей сути, на практике используется не часто.

Переходя ко второму подходу, напомним, что в гл. 13 мы считали, что интенсивность сбора страховых премий c содержит относительную рисковую надбавку θ, так что $c = (1+\theta)\lambda p_1$ [см. (13.4.3)]. Величина θ не содержала никаких надбавок на расходы и вкладом в процесс рискового резерва была вся величина c. Для продолжения обсуждения перестрахования полезно определить перестраховочную надбавку ξ формулой

$$\begin{aligned}&(\text{интенсивность сбора перестраховочной премии})\\&\qquad = (1+\xi)(\text{математическое ожидание}\\&\qquad\qquad\qquad \text{интенсивности перестраховочных выплат}).\end{aligned} \tag{14.5.1}$$

Интенсивность сбора перестраховочной премии, определяемая перестраховщиком, предназначается для обеспечения выплат перестраховщика, компенсации его расходов, обеспечение рисковой надбавки и дохода. Для определения величины ξ

страховщик может выразить интенсивность перестраховочных премий в виде правой части формулы (14.5.1). В частности, для математического ожидания выплат по договору перестрахования эксцедента убыточности $\mathbf{E}[I_d]$, представленного формулой (14.4.3), надбавка ξ равна нулю.

При втором подходе признается, что покупка перестрахования — это обязательно компромисс между ожидаемым доходом и безопасностью. Из-за того, что перестраховочная премия содержит надбавку, покупка перестрахования снизит ожидаемые доходы прямого страховщика. С другой стороны, разумно выбранные условия перестрахования в известном смысле увеличат его безопасность. При этом подходе сначала определяется требуемый уровень безопасности. Лишь после этого рассматриваются условия перестрахования, обеспечивающие этот уровень. Из всего множества допустимых условий страховщик выбирает то, которое обеспечивает наибольший ожидаемый доход.

Для изучения условий перестрахования мы будем рассматривать два инструмента из теории разорения. Первым из них является коэффициент Лундберга, который можно использовать для получения информации о вероятности разорения. В качестве второго инструмента мы воспользуемся величиной $\mathbf{E}[L]$, математическим ожиданием максимальных суммарных потерь. В этом контексте сам термин «коэффициент Лундберга» раскрывает свое значение[1]: если некоторые условия перестрахования приводят к недостаточно большому значению R (или $\widetilde{R}$), условия перестрахования следует поправить.

Пример 14.5.1. Ежегодные суммарные выплаты по некоторому страховому портфелю являются независимыми и одинаково распределенными случайными величинами. Общим для них всех распределением является сложное пуассоновское распределение с параметром $\lambda = 1{,}5$, $p(1) = 2/3$, $p(2) = 1/3$ (см. пример 14.4.5). Собранные за год премии составляют сумму $c = 2{,}5$.

(a) Подсчитаем коэффициент Лундберга, который соответствует такому портфелю.

(b) Пусть можно заключить договор перестрахования эксцедента убыточности с перестраховочной надбавкой, равной 100%. Найдем коэффициент Лундберга, если величина безусловной франшизы в договоре перестрахования эксцедента убыточности равна (i) 3, (ii) 4, (iii) 5. Сравним эти варианты с точки зрения ожидаемого дохода.

Решение. (a) В этом случае $R = \widetilde{R}$, и мы можем получить R из уравнения (13.2.6) или (13.4.2). Последнее сводится к виду $1{,}5 + 2{,}5r = e^r + (0{,}5)e^{2r}$. Мы получаем $R = \widetilde{R} = 0{,}28$.

(b) Подробно рассмотрим случай (i), $d = 3$. В примере 14.4.5 мы нашли, что $E[I_3] = 0{,}338$. Взимаемая премия в договоре перестрахования эксцедента убыточности в два раза больше этой величины и равна 0,676. Таким образом, премия, удерживаемая прямым страховщиком, в год с номером i равна $2{,}5 - 0{,}676 = 1{,}824$, а удержанные им страховые выплаты определяются формулой

$$\hat{W}_i = \begin{cases} W_i, & \text{если } W_i = 0, 1, 2, 3, \\ 3, & \text{если } W_i > 3, \end{cases}$$

[1] Высказывание относится к английскому термину: в оригинале «adjustment coefficient», или, дословно, «поправочный коэффициент»; см. примечание редактора на с. 357. — *Прим. ред.*

где с.в. W_i обозначает суммарные выплаты в год с номером i. Согласно (13.2.6), $\widetilde{R}$ является положительным решением уравнения

$$e^{-1,824r}\left[\sum_{x=0}^{2} f_W(x)e^{xr} + [1 - F_W(2)]e^{3r}\right] = 1$$

(см. пример 14.4.5). Вычисления дают $\widetilde{R} = 0,25$. Ожидаемый годовой доход составляет

(математическое ожидание годового дохода при
отсутствии перестрахования $c - E[S_i] = 2,5 - 2 = 0,5$)
– (математическое ожидание средств, возвращенных перестраховщиком, $\mathbf{E}[I_3]$, которое, поскольку лимит перестраховщика равен $2\mathbf{E}[I_3]$, равно 0,338)
$= 0,162$.

Вычисления в случаях (ii) и (iii) проводятся аналогично. Результаты представлены ниже в виде таблицы, причем строка, соответствующая $d = \infty$, представляет случай отсутствия перестрахования.

Франшиза в договорах перестрахования эксцедента убыточности, d	Коэффициент Лундберга $\widetilde{R}$	Ожидаемый доход
3	0,25	0,162
4	0,35	0,344
5	0,34	0,433
∞	0,28	0,500

С точки зрения безопасности (измеряемой коэффициентом Лундберга) безусловная франшиза величины 4 лучше, чем безусловная франшиза величины 5, которая в свою очередь лучше, чем полное отсутствие перестрахования. С точки зрения ожидаемого дохода порядок предпочтения меняется на обратный. Кроме того, можно заметить, что выбор безусловной франшизы величины 3 является нерациональным. Это хуже, чем отсутствие перестрахования как с точки зрения безопасности, так и с точки зрения ожидаемого дохода. ▼

Рассмотрим такие условия перестрахования, при которых выплаты перестраховщика зависят от величины индивидуальных страховых выплат. В общем случае это перестраховочное покрытие определяется с помощью функции $h(x)$, такой, что $0 \leqslant h(x) \leqslant x$ для всех x. Функция $h(x)$ интерпретируется как величина выплат перестраховщика прямому страховщику, если величина выплаты по страховому случаю равна x. Одним из частных случаев такого перестрахования является *пропорциональное перестрахование*, при котором

$$h(x) = \alpha x, \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \tag{14.5.2}$$

т. е. перестраховщик покрывает постоянный процент страховых выплат. Другим частным случаем является *эксцедентное перестрахование*, при котором

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant \beta, \\ x - \beta, & \text{если } x > \beta, \end{cases} \tag{14.5.3}$$

где $\beta \geqslant 0$ играет роль безусловной франшизы. Покрытие в договоре эксцедентного перестрахования напоминает покрытие в договоре перестрахования эксцедента убыточности (см. (14.4.1)). Однако эксцедентное перестрахование применяется к индивидуальным выплатам, а перестрахование эксцедента убыточности — к суммарным страховым выплатам.

Рассмотрим модель гл. 13 с непрерывным временем, описываемую сложным пуассоновским процессом, сохраняя введенные для этой модели обозначения. Предположим, что перестраховочные премии выплачиваются непрерывно с интенсивностью c_h. Тогда коэффициент Лундберга R_h для прямого страховщика является решением уравнения

$$\lambda[M_{x-h(x)}(r) - 1] = (c - c_h)r. \tag{14.5.4}$$

Это следует из формулы (13.3.1), поскольку у прямого страховщика поступления происходят с нетто-интенсивностью $c - c_h$ и он выплачивает сумму $x - h(x)$, когда наступает страховой случай с выплатой размера x.

Пример 14.5.2. Рассмотрим процесс рискового резерва, для которого (1) процесс $S(t)$, описывающий суммарные выплаты, является сложным пуассоновским, причем величина страховой выплаты имеет показательное распределение со средним 1, (2) относительная рисковая надбавка составляет 25%, (3) приобретается пропорциональное перестрахование по цене 140% от математического ожидания величины выплат перестраховщика. Определим коэффициент пропорциональности α при перестраховании каждого страхового случая, который максимизирует коэффициент Лундберга R для процесса с таким перестрахованием.

Решение. Согласно формуле (14.5.4), R является наименьшим положительным корнем уравнения

$$\lambda + (c - c_h)r = \lambda \mathbf{E}[\exp\{r[X - h(X)]\}].$$

В рассматриваемой ситуации при $p_1 = 1$ и $h(x) = \alpha x$ мы имеем $c = 1{,}25\,\lambda$ и $c_h = 1{,}4\,\alpha\lambda$. Далее, для с.в. X с показательным распределением

$$\mathbf{E}[\exp\{r[X - h(X)]\}] = \frac{1}{1-(1-\alpha)r}.$$

Это приводит к уравнению

$$1 + (1{,}25 - 1{,}4\,\alpha)r = \frac{1}{1-(1-\alpha)r}$$

относительно R, решение которого есть

$$R = \frac{0{,}25 - 0{,}4\,\alpha}{(1-\alpha)(1{,}25 - 1{,}4\,\alpha)}.$$

Величина α, которая максимизирует величину коэффициента Лундберга, определяется так: $\alpha = (5 - [3(35)^{1/2}/7])/8 = 0{,}308067$, и этот результат соответствует значению коэффициента Лундберга $R = 0{,}223787$. ▼

Полученный ответ учитывает связь между двумя интенсивностями надбавок (см. упр. 14.16).

Пример 14.5.3. Рассмотрим ту же ситуацию, что и в примере 14.5.2. Это эксцедентное перестрахование можно приобрести по цене 140% от величины ожидаемых страховых выплат. Найдем величину безусловной франшизы β, которая для процесса с таким перестрахованием максимизирует коэффициент Лундберга R.

Решение. При рассматриваемом эксцедентном перестраховании распределение величины страховых выплат является показательным распределением, усеченным на уровне β. Снова имеем $c = 1{,}25\,\lambda$, но теперь $h(x) = x - \beta$ для $x > \beta$ и 0 в противном случае, так что $c_h = 1{,}4\,\lambda \int_\beta^\infty (x-\beta)e^{-x}\,dx = 1{,}4e^{-\beta}$. Далее,

$$\mathbf{E}[\exp\{r[X - h(X)]\}] = \int_0^\beta e^{rx}e^{-x}\,dx + \int_\beta^\infty e^{r\beta}e^{-x}\,dx = \frac{1 - re^{-\beta(1-r)}}{1-r}.$$

Таким образом, нелинейное уравнение, определяющее величину R как функцию от β, имеет вид

$$1 + (125 - 1{,}4e^{-\beta})r - \frac{1 - re^{-\beta(1-r)}}{(1-r)} = 0.$$

В приведенной ниже таблице указаны значения R, соответствующие ряду различных значений β.

$\mathbf{E}[h(X)]$	β	R	$\mathbf{E}[h(X)]$	β	R
0,00	∞	0,2000	0,35	1,0498	0,3474
0,05	2,9957	0,2393	0,40	0,9163	0,3486
0,10	2,3026	0,2649	0,45	0,7985	0,3371
0,15	1,8971	0,2871	0,50	0,6931	0,3047
0,20	1,6094	0,3070	0,55	0,5978	0,2366
0,25	1,3863	0,3244	0,60	0,5108	0,1051
0,30	1,2040	0,3384			

Вычисление величины $\mathbf{E}[h(X)]$, которая приводит к максимальному значению R, требует дополнительных усилий, но его можно проделать и получить значение 0,38167, которое соответствует величине безусловной франшизы β, равной 0,9632. При этом R равно 0,3493, что существенно больше, чем то значение, которое может быть получено в пропорциональном перестраховании из примера 14.5.2 при самых благоприятных условиях. ▼

Пример 14.5.4. Сравним значения коэффициента Лундберга R для ситуаций, описанных в примерах 14.5.2 и 14.5.3, для пар α и β, таких, что средние выплаты перестраховщика $\mathbf{E}[h(X)]$ одинаковы, т.е. при $\alpha = e^{-\beta}$.

Решение.

	Пропорциональное перестрахование		Эксцедентное перестрахование	
$\mathbf{E}[h(X)]$	α	R	β	R
0,00	0,00	0,2000	∞	0,2000
0,05	0,05	0,2025	2,9957	0,2393
0,10	0,10	0,2102	2,3026	0,2649
0,15	0,15	0,2149	1,8971	0,2871
0,20	0,20	0,2191	1,6094	0,3070
0,25	0,25	0,2222	1,3863	0,3244
0,30	0,30	0,2238	1,2040	0,3384
0,35	0,35	0,2227	1,0498	0,3474
0,40	0,40	0,2174	0,9163	0,3486
0,45	0,45	0,2053	0,7985	0,3371
0,50	0,50	0,1818	0,6931	0,3047
0,55	0,55	0,1389	0,5978	0,2366
0,60	0,60	0,0610	0,5108	0,1051

При заданной перестраховочной надбавке эксцедентное перестрахование стабильно приводит к бо́льшему значению коэффициента Лундберга, чем соответствующее пропорциональное перестрахование. Ниже мы увидим, что это не случайно. ▼

Следующая теорема, которая указывает условия оптимальности эксцедентного перестрахования, в известном смысле аналогична теореме 1.5.1. Доказательство теоремы 14.5.1 приводится в приложении к настоящей главе.

Теорема 14.5.1. *Рассмотрим сложную пуассоновскую модель гл.* 13. *Пусть произвольное перестрахование определено функцией* $h(x)$, $0 \leqslant h(x) \leqslant x$, *и интенсивностью сбора премий* c_h. *Пусть эксцедентное перестрахование с безусловной франшизой* β *определяется функцией* $h_\beta(x)$ *и* c_β *(последнее обозначение является упрощением для* c_{h_β}*). Пусть, далее,* R_h *и* R_β *— коэффициенты Лундберга для этих видов перестрахования. Если* $\mathbf{E}[h(X)] = \mathbf{E}[h_\beta(X)]$ *и* $c_h = c_\beta$, *то* $R_h \leqslant R_\beta$.

Поскольку $c_h = (1+\xi_h)\lambda\mathbf{E}[h(X)]$ и $c_\beta = (1+\xi_\beta)\lambda\mathbf{E}[h_\beta(X)]$, где через ξ_h и ξ_β обозначаются надбавки при соответствующих перестраховочных покрытиях, из условий теоремы следует, что $\xi_h = \xi_\beta$. Это ограничивает использование теоремы, поскольку не исключено, что эксцедентное перестрахование с точно такой же надбавкой, как и при остальных видах перестрахования, нельзя будет приобрести.

Для иллюстрации обратимся снова к примерам 14.5.2 и 14.5.3. Предположим, что эксцедентное перестрахование можно приобрести только с перестраховочной надбавкой 75%, а пропорциональное перестрахование имеется с надбавкой 40%. Пропорциональному перестрахованию с $\alpha = 0{,}25$, $\xi_h = 0{,}40$ соответствует интенсивность сбора премий $1{,}4\,\alpha = 0{,}35$, и из примера 14.5.4 мы получаем $R = 0{,}2222$. Эксцедентное перестрахование с теми же средними выплатами имеет безусловную франшизу $\beta = 1{,}3863$, и интенсивность сбора премий будет равна $1{,}75\,e^{-\beta} = 0{,}4375$. В данном случае, однако, повторяя рассуждения примера 14.5.3, мы приходим к значению 0,1459 для R. Таким образом, интенсивность сбора перестраховочных премий будет выше, чем при пропорциональном перестраховании, но коэффициент Лундберга будет меньше, так что защита от разорения будет меньше.

Мы переходим теперь к рассмотрению второго критерия для анализа условий перестрахования. Это критерий минимизации математического ожидания случайной величины максимальных суммарных потерь L. По определению $\mathbf{P}(L > u) = \psi(u)$. Поскольку L является неотрицательной случайной величиной,

$$\mathbf{E}[L] = \int_0^\infty \mathbf{P}(L > u)\,du = \int_0^\infty \psi(u)\,du, \tag{14.5.5}$$

и минимизация этой величины связана с задачей уменьшения вероятности разорения. Рассматриваемые два критерия весьма тесно связаны, поскольку, согласно формуле (13.4.5),

$$\psi(u) < e^{-Ru} \quad \text{и} \quad \mathbf{E}[L] = \int_0^\infty \psi(u)\,du < \frac{1}{R}$$

и, значит, максимизация коэффициента R тесно связана с минимизацией величины $\mathbf{E}[L]$.

В следующих двух примерах мы снова определяем условия, минимизирующие $\mathbf{E}[L]$ сначала для перестрахования пропорционального типа, а затем — эксцедентного типа.

Пример 14.5.5. Рассмотрим процесс рискового резерва, для которого (1) процесс суммарных страховых выплат $S(t)$ является сложным пуассоновским, причем выплаты распределены по показательному закону с математическим ожиданием 1, (2) относительная рисковая надбавка составляет 25% и (3) приобретается пропорциональное перестрахование по цене 140% от математического ожидания величины выплат перестраховщика. Определим величину коэффициента пропорциональности α при перестраховании каждого страхового случая, которая минимизирует $\mathbf{E}[L]$, математическое ожидание максимальных суммарных потерь.

Решение. Согласно формуле (13.6.16), $\mathbf{E}[L] = p_2/(2p_1\theta)$. Все эти величины выражаются через премии и выплаты, удержанные прямым страховщиком, так что $p_2 = \mathbf{E}[(1-\alpha)^2X^2](1-\alpha)^2\mathbf{E}[X^2] = 2(1-\alpha)^2$. Выражение θp_1 является нетто-надбавкой, собранной и удержанной прямым страховщиком. Эта величина равна разности $1{,}25 - 1{,}4\,\alpha - (1-\alpha) = 0{,}25 - 0{,}4\,\alpha$. Таким образом, $\mathbf{E}[L] = (1-\alpha)^2/(0{,}25 - 0{,}4\,\alpha)$, и минимум этого выражения достигается при $\alpha = 0{,}25$. При таком значении α мы имеем $\mathbf{E}[L] = 3{,}75$. ▼

Пример 14.5.6. Рассмотрим такую же ситуацию, как и в примере 14.5.5. Найдем величину безусловной франшизы β, которая минимизирует $\mathbf{E}[L]$ для эксцедентного перестрахования по цене

(a) 140% от математического ожидания перестрахованных выплат;

(b) 175% от математического ожидания перестрахованных выплат.

Решение. При эксцедентном перестраховании распределение величины страховых выплат является показательным, усеченным на уровне β. Тогда

$$p_1 = \int_0^\beta xe^{-x}\,dx + \int_\beta^\infty \beta e^{-x}\,dx = 1 - e^{-\beta},$$

$$p_2 = \int_0^\beta x^2e^{-x}\,dx + \int_\beta^\infty \beta^2 e^{-x}\,dx = 2[1 - (\beta+1)e^{-\beta}].$$

(a) Нетто-надбавка, собранная и удержанная прямым страховщиком, равна

$$1{,}25 - 1{,}4e^{-\beta} - (1 - e^{-\beta}) = 0{,}25 - 0{,}4e^{-\beta}.$$

Поэтому $\mathbf{E}[L] = [1-(\beta+1)e^{-\beta}]/(0{,}25 - 0{,}4\,e^{-\beta})$. Величина β, которая минимизирует это выражение, удовлетворяет уравнению $0{,}4 - 0{,}25\,\beta = 0{,}4\,e^{-\beta}$, и его решение — это $\beta = 1{,}02717$. При таком значении β мы имеем $\mathbf{E}[L] = 2{,}56793$, что меньше, чем значение, которое найдено в примере 14.5.5. Эксцедентное перестрахование оказывается предпочтительнее согласно этому критерию.

(b) Аналогичными рассуждениями убеждаемся, что значение β, которое минимизирует $\mathbf{E}[L]$ в п. (b), является решением уравнения $0{,}75 - 0{,}25\,\beta = 0{,}75\,e^{-\beta}$, и искомое значение β равно 2,82143. При таком значении β мы имеем $\mathbf{E}[L] = 3{,}76192$. Это значение $\mathbf{E}[L]$ немного больше, чем то, которое было найдено в примере 14.5.5 в случае пропорционального перестрахования. Это показывает, что если пользоваться критерием, основанным на величине $\mathbf{E}[L]$, то при бóльшей надбавке эксцедентое перестрахование не выглядит предпочтительнее пропорционального. ▼

Пример 14.5.7. Сравним результаты примеров 14.5.5 и 14.5.6 для пар α и β, таких, что ожидаемые выплаты перестраховщика $\mathbf{E}[h(X)]$ оказываются одинаковыми, т. е. для $\alpha = e^{-\beta}$.

Решение.

	Пропорциональное, нагрузка 40%		Эксцедентное, нагрузка 40%		Эксцедентное, нагрузка 75%	
$\mathbf{E}[h(X)]$	α	$\mathbf{E}[L]$	β	$\mathbf{E}[L]$	β	$\mathbf{E}[L]$
0,00	0,00	4,000	∞	4,000	∞	4,000
0,05	0,05	3,924	2,9957	3,479	2,9957	3,766
0,10	0,10	3,857	2,3026	3,189	2,3026	3,827
0,15	0,15	3,803	1,8971	2,976	1,8971	4,112
0,20	0,20	3,765	1,6094	2,812	1,6094	4,781
0,25	0,25	3,750	1,3863	2,690	1,3863	6,455
0,30	0,30	3,769	1,2040	2,606	1,2040	13,552
0,35	0,35	3,841	1,0498	2,569		
0,40	0,40	4,000	0,9163	2,594		
0,45	0,45	4,321	0,7985	2,724		
0,50	0,50	5,000	0,6931	3,069		
0,55	0,55	6,750	0,5978	4,040		
0,60	0,60	16,000	0,5108	9,350		

▼

Пример 14.5.7 наводит на мысль, что при одинаковых уровнях надбавки эксцедентное перестрахование предпочтительнее пропорционального перестрахования. Однако у нас нет теоремы типа теоремы 14.5.1, которая формализовала бы этот факт. При высоких уровнях надбавки для эксцедентного перестрахования картина получается смешанная, а именно, для низких перестраховочных покрытий, т. е. для небольших $\mathbf{E}[h(X)]$, предпочтительность эксцедентного перестрахования все еще заметна. При высоких перестраховочных покрытиях разница в стоимости говорит в пользу пропорционального перестрахования.

14.6. Замечания и литература

В монографии [Hogg, Klugman 1984] показывается, как статистика страховых случаев используется для выбора распределения страховых выплат и для оценки параметров. Дополнительный список литературы можно найти в книге [Seal 1969]. Распределение величины страховых выплат для группового страхования на случай потери трудоспособности с еженедельными возмещениями взято из статей [Miller 1951] и [Bartlett 1965]. Кривая длительности пребывания в стационаре выведена на основе анализа данных, приведенных в статье [Gringery 1952].

Два метода аппроксимации модели индивидуальных рисков моделью коллективных рисков были предложены в статьях [Mereu 1972] и [Wooddy 1973].

Вычисление величины премий в договорах страхования эксцедента убыточности проводилось во многих статьях. В работе [Bohmann, Esscher 1963–64] опубликованы результаты интенсивных исследований других методов аппроксимации распределений суммарных страховых выплат и ожидаемых выплат по договорам перестрахования эксцедента убыточности. Бартлетт [Bartlett 1965] обсуждал использование гамма-распределения для вычисления ожидаемых выплат по договорам перестрахования эксцедента убыточности. Бауэрс [Bowers 1969] нашел верхнюю границу в терминах среднего и дисперсии суммарных выплат для ожидаемых выплат по договорам перестрахования эксцедента убыточности. Этот результат был обобщен в работах [Taylor 1977] и [Goovaerts, De Vylder 1980]. В последние годы в целом ряде работ развивались методы, применимые к дискретным распределениям страховых выплат. Среди этих статей упомянем работы [Halmstad 1972], [Mereu 1972], [Gerber, Jones 1977] и [Panjer 1980].

Связь между применениями теории риска и финансовой экономикой устанавливается в упр. 14.23. Этот результат был получен Блэком и Шоулсом [Black, Scholes 1973], которые исходили из предположений об операциях на эффективном рынке ценных бумаг. Принято считать, что их работа является началом развития нового подхода к многим аспектам финансовой экономики.

Влияние перестрахования на вероятность разорения обсуждается в работе Гербера [Gerber 1980].

Приложение

Доказательство теоремы 14.5.1. Мы знаем, что величина R_h является положительным корнем уравнения

$$\lambda + (c - c_h)r = \lambda M_{X-h(X)}(r),$$

а величина R_β является положительным корнем уравнения

$$\lambda + (c - c_\beta)r = \lambda M_{X-h_\beta(X)}(r).$$

Поскольку $c_h = c_\beta$, на рис. 14.A.1 легко видеть, что из неравенства

$$M_{X-h(X)}(r) \geqslant M_{X-h_\beta(X)}(r), \qquad r > 0, \tag{14.A.1}$$

следует $R_h \leqslant R_\beta$.

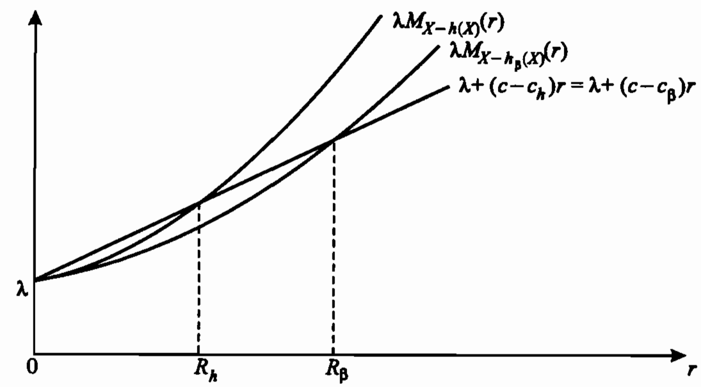


Рис. 14.A.1 Доказательство теоремы 14.5.1

Для того чтобы получить неравенство (14.A.1), воспользуемся сначала выпуклостью показательной функции, из которой следует, что

$$\exp\{r[x - h(x)]\} \geqslant \exp\{r[x - h_\beta(x)]\} + r\exp\{r[x - h_\beta(x)]\}[h_\beta(x) - h(x)].$$

Так как $x - h_\beta(x) \leqslant \beta$ и $x - h_\beta(x) = \beta$, если $h_\beta(x) - h(x) > 0$, то

$$\exp\{r[x - h(x)]\} \geqslant \exp\{r[x - h_\beta(x)]\} + r\exp(r\beta)[h_\beta(x) - h(x)].$$

Поэтому

$$\mathbf{E}[\exp\{r[X - h(X)]\}] \geqslant \mathbf{E}[\exp\{r[X - h_\beta(X)]\}] + r\exp(r\beta)\mathbf{E}[h_\beta(X) - h(X)].$$

По условию теоремы последнее математическое ожидание равно нулю. Это приводит к формулам (14.A.1), откуда вытекает утверждение теоремы. ∎

Упражнения

К разделу 14.1

14.1. Договор срочного страхования предусматривает выплату суммы b, если наступит страховой случай. Вероятность наступления страхового случая равна q.

(a) Рассмотрим следующую случайную величину потерь:

$$L = \begin{cases} b - bq & \text{с вероятностью } q, \\ 0 - bq & \text{с вероятностью } p = 1 - q. \end{cases}$$

Проверьте, что $\mathbf{E}[L] = 0$.

(b) Вычислите $\mathbf{D}[L]$.

(c) Премия, в которую включена рисковая надбавка, выбирается равной $bq + s\sqrt{\mathbf{D}[L]}$. Пусть продано 100 одинаковых страховых договоров такого типа. Пусть случайные величины потерь, описанные в п. (a), для этих договоров взаимно независимы. Вычислите коэффициент s, при котором вероятность того, что сумма этих случайных величин превысит рисковую надбавку, будет меньше 0,01.

К разделу 14.2

14.2. Проверьте правильность заполнения столбцов «среднее» и «дисперсия» в табл. 14.2.1.

14.3. (a) Вычислите среднее распределения, описанного в табл. 14.2.2.

(b) Насколько уменьшатся ожидаемые выплаты по каждому случаю потери трудоспособности по иллюстративному договору краткосрочного страхования на случай потери трудоспособности, если максимум в 13 недель заменить на максимум в 10 недель?

14.4. При условии, что потеря трудоспособности имеет место, вычислите по табл. 14.4.2

(a) $\mathbf{P}(3 \leqslant Y \leqslant 6)$, (b) $\mathbf{P}(10 \leqslant Y \leqslant 13)$, (c) $\mathbf{P}(20 \leqslant Y \leqslant 23)$.

К разделу 14.3

14.5. Рассмотрим портфель, состоящий из 100 договоров страхования жизни сроком на один год.

Годовой коэффициент смертности	Величина страховой выплаты	
	1	4
0,01	10	20
0,02	30	40

Цифры в правых колонках приведенной выше таблицы означают число страховых договоров в портфеле, соответствующих указанной комбинации страховой выплаты и уровня смертности.

(a) Вычислите $\mathbf{E}[S]$ и $\mathbf{D}[S]$, где S — суммарные страховые выплаты.

(b) Какое сложное пуассоновское распределение следует использовать для приближения модели индивидуальных рисков первым методом? Как выглядит получающееся в этом случае приближение для $\mathbf{D}[S]$?

14.6. Предположим, что $B_j = b_j$ для $j = 1, 2, \ldots, n$.

(a) Выпишите выражения для математического ожидания и дисперсии сложного пуассоновского распределения, выбранного с помощью второго метода.

(b) Покажите, что значения из п. (a) превосходят соответствующие значения, полученные первым методом. [Указание. Покажите сначала, что $\tilde{\lambda}_j > q_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$.]

(c) Вычислите математическое ожидание и дисперсию сложного пуассоновского распределения из примера 14.3.1.

14.7. Вычислите вероятность того, что два страховых случая в модели индивидуальных рисков будут относиться к договорам i и j $(i \neq j)$.

К разделу 14.4

14.8. Предположим, что страховые выплаты выражаются только целыми числами. Покажите, что

$$\mathbf{E}[I_d^2] = \mathbf{E}[I_{d-1}^2] - 2\mathbf{E}[I_{d-1}] + 1 - F(d-1).$$

14.9. Вычислите $\mathbf{E}[I_d]$, если распределение с.в. S является нормальным с параметрами μ и σ.

14.10. Предположим, что страховые выплаты выражаются только целыми числами. Представьте следующие величины в терминах $F_S(x)$ и $f_S(x)$:

(a) $\Delta\mathbf{E}[I_x]$, (b) $\Delta^2\mathbf{E}[I_x]$.

14.11. Известно, что $\mathbf{E}[I_d] = 1 - d - (1-d^3)/3$ при $0 \leqslant d \leqslant 1$ и $\mathbf{E}[I_d] = 0$ при $d > 1$. Найдите функцию плотности соответствующего распределения суммарных страховых выплат.

14.12. Вычислите $f_S(x)$, $F_S(x)$ и $\mathbf{E}[I_x]$ при $x = 0, 1, 2$, если с.в. S имеет сложное пуассоновское распределение с $\lambda = 3$, $p(1) = 5/6$, $p(2) = 1/6$.

14.13. В примерах 14.4.6 и 14.4.7 используется дивиденд вида (14.4.12).

(a) Вычислите $G - \mathbf{E}[S] - \mathbf{E}[D]$, если $k = 0{,}9$.

(b) Определите значение k, такое, что $G - \mathbf{E}[S] - \mathbf{E}[D] = 0$.

14.14. Перестраховщик будет платить 80% от разности между величиной S и безусловной франшизой d при условии, что максимальная выплата равна m. Выразите математическое ожидание величины выплат при таком договоре через математическое ожидание величины выплат при договоре перестрахования эксцедента убыточности.

14.15. В примере 14.4.5 определите d таким образом, чтобы $\mathbf{E}[I_d] = 0{,}2$.

К разделу 14.5

14.16. Решите упр. 14.5.2 с $\lambda = 1$, $c = 1+\theta$ и $c_h = (1+\xi)\alpha$. Найдите такое соотношение между θ и ξ, чтобы максимум коэффициента R достигался в точке $\alpha = 0$.

14.17. Решите упр. 14.5.5 с $\lambda = 1$, $c = 1+\theta$ и $c_h = (1+\xi)\alpha$. Найдите такое соотношение между θ и ξ, чтобы минимум величины $\mathbf{E}[L]$ достигался в точке $\alpha = 0$.

14.18. Рассмотрите ситуацию упр. 14.5.3 при $\lambda = 1$, относительной рисковой надбавке θ страховщика и при эксцедентном перестраховании по цене, в $1+\xi$ раз большей, чем ожидаемые выплаты, покрываемые перестраховщиком.

(a) Определите выражение для относительной рисковой надбавки прямого страховщика после приобретения им описанного выше перестрахования.

(b) Выведите уравнение для коэффициента Лундберга прямого страховщика.

14.19. Ежегодные страховые выплаты W_i, $i = 1, 2, \ldots$, производимые страховой компанией, взаимно независимы и имеют одно и то же распределение $N(10, 4)$. Относительная рисковая надбавка, установленная этой компанией, составляет 25%. Перестраховщик согласен принять на себя риск любой части α портфеля на основе пропорционального перестрахования, согласно которому перестраховочная премия составит 140% от математического ожидания выплат по перестрахованным договорам.

(a) Определите коэффициент Лундберга $\widetilde{R}$ для портфеля с пропорциональным перестрахованием как функцию от α.

(b) Определите значение α, которое максимизирует безопасность страховой компании в том смысле, что этому значению соответствует наибольшее значение $\widetilde{R}$.

Ко всем темам главы

14.20. Перестраховщик с капиталом w и с функцией полезности $u(w)$ назначает премию H_d по договору перестрахования эксцедента убыточности, связанную с безусловной франшизой d таким образом, что $u(w) = \mathbf{E}[u(w + H_d - I_d)]$ [см. (1.3.6)]. Вычислите величину H_d, если $u(w) = -\alpha e^{-\alpha w}$ $(\alpha > 0)$ и если с.в. S имеет нормальное распределение с параметрами μ и σ.

14.21. Известно, что

$$\mathbf{E}[I_d] = \left(\frac{\alpha}{\beta} - d\right)\left[1 - \Phi\left(-\frac{\alpha}{\sqrt{\beta d}} + \sqrt{\beta d}\right)\right] + \left(\frac{\alpha}{\beta} + d\right)e^{2\alpha}\Phi\left(-\frac{\alpha}{\sqrt{\beta d}} - \sqrt{\beta d}\right)$$

для $d > 0$. Выведите функцию плотности для соответствующего распределения совокупных выплат. Выясните, что это за распределение.

14.22. Пусть N имеет пуассоновское распределение с параметром λ, которое является положительным целым числом.

(a) Покажите, что $\mathbf{E}[I_\lambda] = \lambda^{\lambda+1}e^{-\lambda}/\lambda!$.

(b) Воспользовавшись результатом упр. 12.20, в котором дана аппроксимация распределения с.в. $(N - \lambda)/\sqrt{\lambda}$ при больших λ, проверьте, что $\mathbf{E}[I_\lambda] \cong \sqrt{\lambda}/\sqrt{2\pi}$.

(c) Воспользуйтесь результатами пп. (a) и (b) и получите приближение

$$\lambda! \cong \lambda^{\lambda+1/2}e^{-\lambda}\sqrt{2\pi}.$$

(Исторические комментарии. Это соотношение называется формулой Стирлинга для факториала $\lambda!$, когда λ велико. «В 1730 Джеймс Стирлинг с помощью Де Муавра вывел это экспоненциальное приближение для факториалов. В своей статье 1733 г. Де Муавр далее показал, что экспоненциальная функция ошибок дает очень хорошее приближение распределения возможных исходов для таких задач, как результат 1000 бросаний монеты» [Porter T. M. The rise of Statistical Thinking, Princeton University Press, 1986, p. 93]. В настоящем упражнении мы идем в обратном направлении по сравнению с тем, как шли Де Муавр и Стирлинг. Мы используем центральную предельную теорему для получения формулы Стирлинга.)

14.23. (a) Пусть S имеет логнормальное распределение с параметрами tm и $t\sigma^2$, $t > 0$. Выведите выражение для $\mathbf{E}[e^{-\delta t}I_d]$, где $\delta > 0$.

(b) Определите значение m, такое, что математическое ожидание дисконтированного значения с.в. S равно 1.

(c) Выполните п. (a) со значением m, найденным в п. (b). [Замечание. Ответ окажется формулой Блэка–Шоулса для европейского опциона «колл» с ценой опциона d на акции с ценой 1 в момент $t = 0$ и ценой S в момент t.]

15

МОДЕЛИ СТРАХОВАНИЯ, ВКЛЮЧАЮЩИЕ РАСХОДЫ

15.1. Введение

Принцип эквивалентности был введен в гл. 6 как средство для определения страховых премий. В этой главе он выражался в том, что актуарные настоящие стоимости страховых выплат и нетто-премий в момент заключения договора равны. В гл. 7 и 8 этот принцип использовался в периоды времени после даты заключения договора. Нетто-резервы представлялись в виде актуарной настоящей стоимости разности между будущими страховыми выплатами и будущими поступлениями нетто-премий.

Бóльшая часть предыдущих глав была посвящена построению модели страховых операций, основанной на принципе эквивалентности. Однако в эту модель не были включены многие аспекты практики страхования и экономической реальности. Например, у страховщика имеются исходящие денежные потоки помимо страховых выплат. Затраты этого общего типа включают расходы на налоги и на получение лицензии, а также на продажу и обслуживание страховых договоров. Эти расходы должны быть оплачены за счет премий и инвестиционного дохода. В этой главе мы включим расходы в модель для премий и резервов.

Принцип эквивалентности модифицируется путем включения указанных расходов, наряду со страховыми выплатами, в общие расходы страховщика, а компенсация этих расходов предусматривается в премиях и резервах. При этом предполагается, что величины таких расходов, приходящиеся на каждый договор, достоверно известны. Мы покажем, что такое расширение модели является разумной основой финансовой отчетности страховых компаний.

В страховании жизни широко распространены выкупные суммы, и в законодательстве ряда штатов и стран их наличие и размер регулируются. В разд. 15.3 рассматривается пример модели выбытия по нескольким причинам, которая учитывает выплаты на случай смерти, выкупные суммы и расходы. В этой модели для определения премий и резервов и для финансовой отчетности применяется принцип эквивалентности.

В истории страховой практики и страхового регулирования модель выбытия по двум причинам, включающую расходы, было принято аппроксимировать моделью с единственной причиной выбытия, смертью, и с подходящим образом измененными нетто-премиями. Некоторые из таких методик, использующихся в страховом регулировании, обсуждаются в разд. 16.2, 16.6 и 16.7.

15.2. Модели, учитывающие расходы

Основные идеи, необходимые для включения расходов в модель, будут сначала подробно рассмотрены на примерах. В таблицах 15.2.1A и 15.2.1B указаны характерные черты, выбранные скорее из-за их удобства и простоты расчетов, чем за их реалистичность.

Таблица 15.2.1A. Пример: описание

1.	Вид страхования	смешанное страхование на срок три года с премией, выплачиваемой ежегодно в течение срока страхования; договор заключен с лицом (x), выплаты и премии постоянны
2.	Характер выплат	дискретная модель
3.	Смертность	$q_x = 0{,}1$, $q_{x+1} = 0{,}1111$, $q_{x+2} = 0{,}5$
4.	Процент	эффективная годовая процентная ставка $i = 0{,}15$
5.	Страховая сумма	1000
6.	Расходы	
	(a) время	выплачиваются в начале каждого года действия договора
	(b) величина	см. табл. 15.2.1B

Таблица 15.2.1B. Пример: величина расходов

Тип расходов	Первый год		Второй и последующие годы	
	процент от премии	постоянная компонента	процент от премии	постоянная компонента
Комиссионные за продажу договора	10%	—	2%	—
Административные расходы	4	3	—	1
Налоги, лицензии и сборы	2	—	2	—
Расходы на ведение договора	2	1	2	1
Заключение договора и андеррайтинг	2	4	—	—
Всего	20%	8	6%	2

15.2.1. Премии и резервы

Пункты с 1 по 5 табл. 15.2.1A с учетом принципа эквивалентности можно использовать для определения ежегодной постоянной нетто-премии по этому договору страхования: $1000P_{x:\overline{3}|} = 288{,}41$. В табл. 15.2.2 представлены подробности расчета соответствующих нетто-резервов.

Типы расходов, перечисленные в табл. 15.2.1B, будут введены в модель путем изменения случайной величины потерь. Настоящая стоимость выплаты будет увеличена на сумму, равную настоящей стоимости расходов. Эта новая сумма будет затем компенсирована настоящей стоимостью постоянной премии с надбавкой на расходы, обозначаемой через G. При составлении табл. 15.2.3 используется информация из табл. 15.2.1B.

В описании случайной величины ${}_0L_e$ потерь с учетом расходов, приведенном в табл. 15.2.3, неявно содержится предположение, что выплаты и расходы покрываются ежегодной премией G постоянного размера. Возможна и другая структура

Таблица 15.2.2. Расчет резервов выплат

(1) Пошаговая продолжительность предстоящей жизни	(2) Случайная величина потерь	(3) Условная вероятность исхода	(4) (2) × (3)
В момент заключения договора ($_0L$)			
$K(x) = 0$	581,16	0,1	58,12
$K(x) = 1$	216,94	0,1	21,69
$K(x) \geqslant 2$	−99,76	0,8	−79,81
		$1000\,{}_0V_{x:\overline{3}\rceil} = \mathbf{E}[{}_0L] =$	0,00
		$\sigma({}_1L) =$	215,51
1 год спустя после заключения договора ($_1L$)			
$K(x) = 1$	581,16	0,1111	64,57
$K(x) \geqslant 2$	216,94	0,8889	192,84
		$1000\,{}_1V_{x:\overline{3}\rceil} = \mathbf{E}[{}_1L] =$	257,41
		$\sigma({}_1L) =$	114,46
2 года спустя после заключения договора ($_2L$)			
$K(x) \geqslant 2$	581,16	1,0	581,16
		$1000\,{}_2V_{x:\overline{3}\rceil} = \mathbf{E}[{}_2L] =$	581,16
		$\sigma({}_2L) =$	0

В качестве заключительного подтверждения мы можем проверить, что ${}_3V_{x:\overline{3}\rceil} = 1{,}0$:

$1000({}_2V_{x:\overline{3}\rceil} + P_{x:\overline{3}\rceil})(1+i) = 1000$

$(581{,}16 + 288{,}41)(1{,}15) = 1000$

Таблица 15.2.3. Случайная величина потерь с учетом расходов ($_0L_e$)

Пошаговая продолжительность предстоящей жизни	Настоящие стоимости: страховые выплаты + расходы	Настоящие стоимости: − премия	Вероятность исхода
$K(x) = 0$	$1000v + (0{,}20G + 8)$	$-G\ddot{a}_{\overline{1}\rceil}$	0,1
$K(x) = 1$	$1000v^2 + (0{,}20G + 8) + (0{,}06G + 2)a_{\overline{1}\rceil}$	$-G\ddot{a}_{\overline{2}\rceil}$	0,1
$K(x) \geqslant 2$	$1000v^3 + (0{,}20G + 8) + (0{,}06G + 2)a_{\overline{2}\rceil}$	$-G\ddot{a}_{\overline{3}\rceil}$	0,8
Математические ожидания	$688{,}58387 + (0{,}20G + 8) + (0{,}06G + 2)(1{,}3875236)$	$-G(2{,}3875236)$	

премий. В рассматриваемом случае премия с надбавкой на расходы определяется согласно принципу эквивалентности, т.е. математическое ожидание случайной величины потерь с учетом расходов равно нулю. Из табл. 15.2.3 следует, что

$$688{,}58387 + (0{,}20G + 8) + (0{,}06G + 2)(1{,}3875236) - G(2{,}3875236) = 0{,}0,$$

откуда $G = 332{,}35$. Это можно записать в виде

$$G = 1000P_{x:\overline{3}\rceil} + \text{постоянная надбавка на расходы } (e) = 288{,}41 + 43{,}94 = 332{,}35.$$

В табл. 15.2.4 приведен расчет математических ожиданий и стандартных отклонений случайной величины потерь с учетом расходов на момент заключения договора и спустя 1 год и 2 года после этого момента. Общий резерв разбивается на компоненту, связанную с выплатами (нетто-компоненту), и компоненту, связанную с надбавкой на расходы. Каждый год математическое ожидание поступлений постоянных нетто-премий отличается от математического ожидания страховых выплат. Эта разница образует неотрицательный нетто-резерв. Аналогично, каждый год математическое ожидание поступлений постоянной надбавки на расходы не покрывает математического ожидания величины расходов. Это создает неположительный резерв расходов.

Таблица 15.2.4. Математические ожидания случайной величины потерь с учетом расходов

Пошаговая продолжительность предстоящей жизни	(Настоящая стоимость выплат) $-1000P_{x:\overline{3}\rvert}\ddot{a}_{\overline{k+1}\rvert}$		(настоящая стоимость расходов) $-e\ddot{a}_{\overline{k+1}\rvert}$	Условная вероятность исхода
В момент заключения договора (${}_0L_e$)				
$K(x)=0$	(869,57 – 288,41)	+	(74,47 – 43,94)	0,1
$K(x)=1$	(756,14 – 539,20)	+	(93,55 – 82,15)	0,1
$K(x)\geqslant 2$	(657,52 – 757,28)	+	(110,14 – 115,37)	0,8
Математические ожидания: нетто-резерв + резерв расходов = общий резерв				
	0	+	0 =	0
			$\sigma({}_0L_e)=$	226,82
1 год спустя после заключения договора (${}_1L_e$)				
$K(x)=1$	(869,57 – 288,41)	+	(21,94 – 43,94)	0,1111
$K(x)\geqslant 2$	(756,14 – 539,20)	+	(41,02 – 82,15)	0,8889
Математические ожидания: нетто-резерв + резерв расходов = общий резерв				
	257,41	–	39,00 =	218,41
			$\sigma({}_1L_e)=$	120,47
2 года спустя после заключения договора ${}_2L_e$				
$K(x)\geqslant 2$	(869,57 – 288,41)	+	(21,94 – 43,94)	1,0
Математические ожидания: резерв выплат + резерв расходов = общий резерв				
	581,16	–	22,00 =	559,16
			$\sigma({}_2L_e)=$	0
В качестве подтверждения: конечный общий резерв (на конец 3-го года) имеет вид (общий резерв на конец года 2 + премия с надбавкой на расходы – расходы)$(1+i)$ $=(559{,}16+332{,}35-21{,}94)(1{,}15)=1000$				

В следующих замечаниях сформулированы некоторые ключевые моменты, содержащиеся в этом примере.

Замечания. 1. Случайные величины потерь в том виде, как они были определены с самого начала, измеряют настоящую стоимость выплат минус настоящая стоимость нетто-премии в различные моменты времени, в которые могут производиться выплаты. Эти случайные величины можно изменить, добавив расходы и рассматривая премии с надбавкой на расходы.

2. Принцип эквивалентности может применяться для определения премий с надбавкой на расходы и соответствующих общих резервов (нетто-резервы плюс резервы расходов).

3. Резерв расходов в начальные годы действия договора часто бывает отрицательным. Это является следствием того, что уменьшающийся поток расходов покрывается постоянным потоком надбавок на расходы.

4. Определению премии с надбавкой на расходы предшествует анализ и прогнозирование расходов.

5. Стандартное отклонение случайной величины потерь с учетом расходов может быть использовано для определения стабилизационного фонда[1]. Этот фонд защищает от дисбаланса между премиями и инвестиционным доходом, с одной стороны, и страховыми выплатами и расходами, с другой стороны, который может возникнуть из-за случайной природы моментов времени, в которые производятся страховые выплаты. Методы определения такого резерва были приведены в гл. 8.

15.2.2. Бухгалтерский учет

На промышленных предприятиях продукт обычно производится до его продажи. В большинстве видов предпринимательства, связанного с предоставлением услуг, последние предоставляются до того, как будет произведена оплата. Страховые операции необычны тем, что страховые премии поступают до того, как оказывается услуга, состоящая в принятии риска на страхование. Именно поэтому органы страхового регулирования и потребители беспокоятся о финансовой устойчивости страховщика, который обязан предоставлять им данные о своем финансовом положении.

Бухгалтерский учет частично направлен на то, чтобы привести в соответствие затраты, связанные с предоставлением продукта или услуги, и выручки от их продажи. Его целью является измерение прибыли или потерь, связанных с осуществлением этой деятельности. Такой учет в сфере страхования жизни и операций с аннуитетами отличается от бухгалтерского учета на многих предприятиях, потому что поступления происходят перед тем, как становятся известными расходы. Для достижения лучшего баланса между поступлениями премий и соответствующими расходами можно использовать системы резервов, о которых говорилось ранее, постоянные нетто-премии и премии с надбавкой на расходы.

Наш пример продолжают табл. 15.2.5 и 15.2.6, в которых сделаны следующие предположения:

- Ежегодная брутто-премия для каждого договора, равная 342,35, состоит из премии с надбавкой на расходы и произвольно назначенной суммы размера 10. Остаток после вычета расходов по этим 10 единицам обеспечивает прибыль и незапланированные выплаты.
- Бухгалтерский баланс составляется для совокупности детерминированного дожития, состоящей в начальный момент из 10 застрахованных. Каждая величина, входящая в баланс, может быть разбита на 10 слагаемых, и каждое из этих слагаемых можно интерпретировать как ожидаемую величину для каждого лица, застрахованного в начальный момент времени.
- Расходы выплачиваются и инвестиционный доход зарабатывается в соответствии с табл. 15.2.1A и 15.2.1B.
- Величина начального фонда равна 1000.
- В первом бухгалтерском балансе (столбец (a)) в пассиве отражены только нетто-резервы. Во втором (столбец (b)) обязательствами являются нетто-резервы плюс резервы расходов.

---

[1] В оригинале «contingency fund». Выплаты из этого фонда (в оригинале «for contingencies») будут в дальнейшем называться незапланированными выплатами или выплатами «на случайность». — *Прим. ред.*

Таблица 15.2.5. Отчет о прибылях и убытках (10 застрахованных в начальный момент)

Прибыли и убытки	(a) Нетто-резерв в качестве пассива	(b) Нетто-резерв плюс резерв расходов в качестве пассива
В течение первого года		
Доход		
Премия (10)	3423,50	3423,50
Инвестиционный доход (15%)	548,82	548,82
	3972,32	3972,32
Отчисления из дохода		
Расходы		
начисляемые в процентах к премии (20%)	684,70	684,70
постоянные (8)	80,00	80,00
Страховые выплаты на случай смерти (1)	1000,00	1000,00
Увеличение резервов	2316,69	1965,69
	4081,39	3730,39
Чистый доход	−109,07	241,93
В течение второго года		
Доход		
Премия (9)	3081,15	3081,15
Инвестиционный доход (15%)	912,88	912,88
	3994,03	3994,03
Отчисления из дохода		
Расходы		
начисляемые в процентах к премии (6%)	184,87	184,87
постоянные (2)	18,00	18,00
Страховые выплаты на случай смерти (1)	1000,00	1000,00
Увеличение резервов	2332,59	2507,59
	3535,46	3710,46
Чистый доход	458,57	283,57
В течение третьего года		
Доход		
Премия (8)	2738,80	2738,80
Инвестиционный доход (15%)	1283,59	1283,59
	4022,39	4022,39
Отчисления из дохода		
Расходы		
начисляемые в процентах к премии (6%)	164,33	164,33
постоянные (2)	16,00	16,00
Выплаты на случай смерти и на дожитие (8)	8000,00	8000,00
Увеличение резервов	−4649,28	−4473,28
	3531,05	3707,05
Чистый доход	491,34	315,34

Комментарии к таблице

1. Инвестиционный доход = (активы в конце предыдущего года + поступление премий − расходы)(0,15).
2. Общий чистый доход = −109,07 + 468,57 + 491,34 (столбец a)
   = 241,03 + 283,57 + 315,34 (столбец b)
   = 840,84.
3. Другой способ расчета (подробности см. в табл. 15.2.1B):
   Общий чистый доход = (доход от инвестирования первоначального фонда) + (накопленная стоимость надбавки на обеспечение чистой прибыли)
   $= 1000[(1{,}15)^3 - 1] + 10[(10)(0{,}8)(1{,}15)^3 + 9(0{,}94)(1{,}15)^2 + (8)(0{,}94)(1{,}15)]$
   $= 840{,}91$.

   Разница между этими двумя величинами объясняется ошибкой округления.

Таблица 15.2.6. Балансовый отчет (первоначально 10 страхователей)

Балансовый отчет	(a) Нетто-резерв в качестве пассива	(b) Нетто-резерв плюс резерв расходов в качестве пассива
В конце первого года		
Активы	3207,62	3207,62
Пассивы (резервы)	2316,69	1965,69
Сальдо	890,93	1241,93
	3207,62	3207,62
В конце второго года		
Активы	5998,78	5998,78
Пассивы (резервы)	4649,28	4473,28
Сальдо	1349,50	1525,50
	5998,78	5998,78
В конце третьего года		
Активы	1840,84	1840,84
Пассивы (резервы)	0	0
Сальдо	1840,84	1840,84
	1840,84	1840,84

Комментарии к таблице

1. Прирост сальдо = общий чистый доход (см. комментарий 2 к табл. 15.2.5).
$1840{,}84 - 1000 = 840{,}84$.
2. Сальдо = (сальдо на конец предыдущего года + чистый доход).
3. Активы = [активы на конец предыдущего года + (чистый доход + прирост резервов)]
= [активы на конец предыдущего года
+ (премии + инвестиционный доход − страховые выплаты − расходы)].

Баланс, использующий в качестве пассивов нетто-резервы, является в некотором смысле внутренне противоречивым, потому что будущие расходы и средства на их погашение, заложенные в будущих премиях, не включены в пассивы.

Следующие замечания указывают некоторые дополнительные ключевые моменты в примере бухгалтерского учета.

Замечания. 6. Величины, отраженные в балансах как чистый доход, подвержены меньшим колебаниям, когда пассивом считаются нетто-резервы и резервы расходов, а не только нетто-резервы. Чистый доход также может быть связан с процентами, начисляемым на сальдо, и надбавкой на чистую прибыль, накопленную с учетом процента.

7. Общие доходы в течение трехлетнего периода не зависят от выбранного метода расчета пассивов.

8. Получение ожидаемой прибыли в реальной практике происходит не с той степенью определенности, которая предполагалась в рассмотренном примере.

Практика (а следовательно, и терминология) бухгалтерского учета в компаниях, которые занимаются страхованием жизни, усложняется тем, что ими пользуются различные группы лиц с различными интересами и сферой ответственности. Соображения, отраженные в столбцах (a) табл. 15.2.5 и 15.2.6, соответствуют исторически сложившимся традициям страхового регулирования в США, а соображения, иллюстрируемые в столбцах (b), соответствуют финансовой отчетности, предназначенной для рынков капитала.

15.3. Выкупные суммы

В разд. 11.4 рассматривалось понятие выкупных сумм, выплачиваемых страхователю при досрочном прекращении договора страхования. Целью указанного раздела было установление условий, при которых премии и резервы, учитывающие выплаты на случай смерти и выкупные суммы, совпадают с премиями и резервами в модели со смертью как единственной причиной выбытия. При этом требовалось, чтобы смерть и досрочное прекращение договора были независимыми событиями, а в разд. 11.7 было отмечено, что существуют препятствия к распространению этого результата на дискретную модель.

15.3.1. Премии и резервы

В этом разделе материал, изложенный в разд. 15.2, распространяется на модель с двумя причинами выбытия, включающую выкупные суммы. Обозначим размер выкупных сумм через $b^{(2)}_{x+t}$. Они определяются в примере 15.3.1. Этот пример основан на принципе, который включен в закон, регулирующий величину минимальной выкупной суммы в США, и согласно которому применяется модель со смертью как единственной причиной выбытия и с неограниченной суммой на обеспечение расходов. Этот принцип базируется на развитии идей, изложенных в разд. 11.4, а именно на том, что если выкупные суммы в модели с двумя причинами выбытия приблизительно равны резервам, в которые включены расходы, т. е. нетто-резервам плюс резервы расходов, определенным с использованием соответствующей модели со смертью в качестве единственной причины выбытия, то добавление выкупной суммы будет мало влиять на премии и резервы.

Пример 15.3.1. Нетто-премия, определенная на основе принципа эквивалентности и предположений из табл. 15.2.1A, равна $1000P_{x:\overline{3}|} = 288{,}41$. К нетто-премии добавляется произвольная надбавка на расходы размера $40/\ddot{a}_{x:\overline{3}|} = 40/2{,}3875 = 16{,}75$. Полученная премия с надбавкой на расходы равна 305,16. В терминологии страхового регулирования такая премия называется ***скорректированной премией*** и в данном примере обозначается через $1000P^A_{x:\overline{3}|}$. Определим выкупную сумму на основе предположений из табл. 15.2.1, используя следующую формулу, которая имеет вид перспективной формулы расчета резервов:

$$b^{(2)}_{x+1} = 1000(A_{x+t:\overline{3-t}|} - P^A_{x:\overline{3}|}\ddot{a}_{x+t:\overline{3-t}|}).$$

Решение.

$$b^{(2)}_{x+1} = 1000A_{x+1:\overline{2}|} - 305{,}16\ddot{a}_{x+1:\overline{2}|} = 768{,}75 - 305{,}16(1{,}7729) = 227{,}73,$$

$$b^{(2)}_{x+2} = 1000A_{x+2:\overline{1}|} - 305{,}16\ddot{a}_{x+2:\overline{1}|} = 869{,}57 - 305{,}16 = 564{,}41.$$ ▼

Предположения, использованные в этом примере, представлены в табл. 15.3.1. Таблицы 15.3.2 и 15.3.3 тесно связаны друг с другом. В таблице 15.3.2 на основе принципа эквивалентности определена ежегодная премия с надбавкой на расходы. Таблица 15.3.3 соответствует табл. 15.2.4 и содержит расчеты нетто-резервов и резервов расходов в модели выбытия по двум причинам. Замечания, приведенные после табл. 15.2.4, остаются в силе.

Случаи смерти и досрочного прекращения договоров предполагаются независимыми, как и в разд. 11.4. Предполагается, что досрочное прекращение договоров происходит только в конце годичных возрастных интервалов, т. е. ${}_tp'^{(2)}_x$ является

Таблица 15.3.1. Пример, включающий выкупные суммы

Выкупные суммы	
$b^{(2)}_{x+1} = 227{,}73$	$b^{(2)}_{x+2} = 564{,}41$
Вероятности выбытия по нескольким причинам	
$q^{(1)}_{x} = 0{,}1$	$q^{(1)}_{x+1} = 0{,}1111$
$q^{(2)}_{x} = 0{,}1$	$q^{(2)}_{x+1} = 0{,}1111$

ступенчатой функцией, как функция ${}_tp_x'^{(3)}$ на рис. 10.6.2. В этом примере $q_x^{(1)} = q_x$ и $q_{x+1}^{(1)} = q_{x+1}$.

Таблица 15.3.2 содержит данные, необходимые для определения ежегодной нетто-премии $P^2_{\bar{x}:\overline{3}|}$, ежегодной надбавки на расходы e и ежегодной премии с надбавкой на расходы G в модели с двумя причинами выбытия согласно принципу эквивалентности. Имеем

$$621{,}0011 - P^2_{x:\overline{3}|}(2{,}1661) = 0, \qquad P^2_{x:\overline{3}|} = 286{,}69,$$

$$612{,}0011 + (0{,}2G + 8) + (0{,}06G + 2)(1{,}1661) - G(2{,}1661) = 0, \qquad G = 332{,}96,$$

$$(0{,}2G + 8) + (0{,}06G + 2)(1{,}1661) - e(2{,}1661) = 0, \qquad e = 46{,}27.$$

В качестве проверки заметим, что

$$G = P^2_{x:\overline{3}|} + e, \quad 332{,}96 = 286{,}69 + 46{,}27.$$

15.3.2. Бухгалтерский учет

Как показано в разд. 15.2, принцип эквивалентности обеспечивает концептуальные основы финансовой отчетности страховых компаний. В этом разделе пример финансовой отчетности из разд. 15.2.2 будет распространен на модель с двумя причинами выбытия.

- В качестве ежегодной брутто-премии будет взята ежегодная постоянная премия с надбавкой на расходы плюс произвольная сумма размера 10 для обеспечения прибыли и «на случайность» (минус расходы по этим 10 единицам).
- Бухгалтерская отчетность основана на математических ожиданиях выплат на случай смерти, выкупных сумм и числа доживших. Первоначально имеется 10 страхователей.
- Расходы выплачиваются и инвестиционный доход зарабатывается в соответствии с табл. 15.2.1A и 15.2.1B.
- Величина начального фонда равна 1000.
- В отчете из столбца (a) в качестве пассива рассматриваются лишь нетто-резервы (в модели с единственной причиной выбытия — смертью), а в столбце (b) в качестве пассива рассматриваются нетто-резервы и резервы расходов.

Отчет в столбце (a) можно считать внутренне противоречивым из-за того, что в пассив не включены будущие расходы, выкупные суммы и соответствующие надбавки в будущих премиях. Столбец (a) приведен из-за его исторической роли в регулировании страховой деятельности.

Сравнение табл. 15.2.5 и 15.2.6 с табл. 15.3.4 и 15.3.5 подтверждает, что финансовая отчетность ближе к реальности, когда используется модель с двумя причинами

Таблица 15.3.2. Случайные величины потерь с учетом расходов; модель с двумя причинами выбытия; настоящая стоимость на момент заключения договора

Исходы: пошаговой продолжительности предстоящей жизни $K(x)$	Исходы: причины выбытия $J(x)$	(Настоящая стоимость выплат)	+	(Настоящая стоимость расходов)	–	(Настоящая стоимость премий)	Вероятность исхода
0	1	$1000{,}00v$	+	$(0{,}2G+8{,}0)$	–	G	0,1
	2	$227{,}73v$	+	$(0{,}2G+8{,}0)$	–	G	0,1
1	1	$1000{,}00v^2$	+	$(0{,}2G+8{,}0)+(0{,}06G+2{,}0)a_{\overline{1}\rceil}$	–	$G\ddot{a}_{\overline{2}\rceil}$	0,0889
	2	$564{,}41v^2$	+	$(0{,}2G+8{,}0)+(0{,}06G+2{,}0)a_{\overline{1}\rceil}$	–	$G\ddot{a}_{\overline{2}\rceil}$	0,0889
$\geqslant 2$	1 или 2	$1000{,}00v^3$	+	$(0{,}2G+8{,}0)+(0{,}06G+2{,}0)a_{\overline{2}\rceil}$	–	$G\ddot{a}_{\overline{3}\rceil}$	0,6222
Математические ожидания		621,011	+	$(0{,}2G+8{,}0)+(0{,}06G+2{,}0)(1{,}1661)$	–	$(1000P^2_{\overline{x}:\overline{3}\rceil}+e)(2{,}1661)$	
$\sigma({}_0L^2_{\overline{e}}) = 224{,}25$							

Таблица 15.3.3. Случайные величины потерь с учетом расходов; модель с двумя причинами выбытия

Исходы: пошаговой продолжительности предстоящей жизни $K(x)$	Исходы: причины выбытия $J(x)$	(Настоящая стоимость выплат)	$-$	(Настоящая стоимость нетто-премий)	$+$	(Настоящая стоимость расходов)	$-$	(Настоящая стоимость надбавки на расходы)	Вероятность исхода
На момент времени 1									
1	1	$1000{,}00v$	$-$	$1000P^2_{\overline{x}:\overline{3}\rceil}$	$+$	$(0{,}06G+2{,}0)$	$-$	e	0,1111
	2	$564{,}41v$	$-$	$1000P^2_{\overline{x}:\overline{3}\rceil}$	$+$	$(0{,}06G+2{,}0)$	$-$	e	0,1111
$\geqslant 2$	1 или 2	$1000{,}00v^2$	$-$	$1000P^2_{\overline{x}:\overline{3}\rceil}\ddot{a}_{\overline{2}\rceil}$	$+$	$(0{,}06G+2{,}0)\ddot{a}_{\overline{2}\rceil}$	$-$	$e\ddot{a}_{\overline{2}\rceil}$	0,7778
Математические ожидания		нетто-резерв 258,67			$+$ $+$	резерв расходов $(-40,73)$		$=$ общий резерв $= 217,94$	
$\sigma({}_2L^2_e) = 120{,}44$									
На момент времени 2									
$\geqslant 2$	1 или 2	$1000{,}00v$	$-$	$1000P^2_{x:\overline{3}\rceil}$	$+$	$(0{,}06G+2{,}0)$	$-$	e	1,0000
Математические ожидания		нетто-резерв 582,88			$+$ $+$	резерв расходов $(-24,29)$		$=$ общий резерв $= 558,59$	
$\sigma({}_2L^2_e) = 0$									

В качестве проверки общего конечного резерва на конец 3-го года:
(общий резерв + премия с надбавкой на расходы − расходы, все на момент времени 2)$(1+i) = (558{,}59 + 332{,}96 - 21{,}98)(1{,}15) = 1000$.

Таблица 15.3.4. Отчет о прибылях и убытках (первоначально 10 страхователей)

Прибыли и убытки	(a) Нетто-резервы в качестве пасснва в модели с едннственной прнчнной выбытня	(b) Нетто-резервы и резервы расходов в качестве пассива в модели с двумя прнчннами выбытня
В течение первого года		
Доход		
Премия (10)	3429,60	3429,60
Инвестиционный доход (15%)	549,55	549,55
	3979,15	3979,15
Отчисления из дохода		
Расходы		
начнсляемые в процентах к премин (20%)	685,92	685,92
постоянные (8)	80,00	80,00
Страховые выплаты на случай смерти (1)	1000,00	1000,00
Выкупная сумма (1)	227,73	227,73
Увеличенне резервов	2059,28	1743,52
	4052,93	3737,17
Чистый доход	−73,78	241,98
В течение второго года		
Доход		
Премия (10)	2743,68	2743,68
Инвестицнонный доход (15%)	832,28	832,28
	3575,96	3575,96
Отчисления из дохода		
Расходы		
начисляемые в процентах к премнн (6%)	164,62	164,62
постоянные (2)	16,00	16,00
Страховые выплаты на случай смертн (0,8889)	888,90	888,90
Выкупная сумма (0,8889)	501,70	501,70
Увеличение резервов	1556,83	1732,15
	3128,05	3303,37
Чистый доход	447,91	272,59
В течение третьего года		
Доход		
Премия (6,2222)	2133,97	2133,97
Инвестиционный доход (15%)	1047,56	1047,56
	3181,53	3181,53
Отчисления из дохода		
Расходы		
начисляемые в процентах к премнн (6%)	128,04	128,04
постоянные (2)	12,44	12,44
Страховые выплаты (6,2222)	6222,22	6222,22
Увеличенне резервов	−3616,11	−3475,67
	2746,59	2887,03
Чистый доход	434,94	294,50

выбытия, в которой учитываются расходы. Также очевидно выравнивающее воздействие более сложной системы резервов на отчетный чистый доход. Если выбирать выкупные суммы из других соображений, нежели уменьшение изменений премий и резервов при переходе от модели с единственной причиной выбытия к модели с двумя причинами выбытия, то различия в прибыли для этих двух моделей будут более существенными.

Таблица 15.3.5. Балансовый отчет (первоначально 10 страхователей)

Прибыли и убытки	(a) Нетто-резервы в качестве пассива в модели с единственной причиной выбытия	(b) Нетто-резервы и резервы расходов в качестве пассива в модели с двумя причинами выбытия
В конце первого года		
Активы	2985,50	2985,50
Пассивы (резервы)	2059,60	1743,52
Сальдо	926,22	1241,68
	2985,50	2985,20
В конце второго года		
Активы	4990,24	4990,24
Пассивы (резервы)	3616,11	3475,67
Сальдо	1374,13	1514,57
	4990,24	4990,24
В конце третьего года		
Активы	1809,07	1809,07
Пассивы (резервы)	0	0
Сальдо	1809,07	1809,07

Комментарии к таблицам 15.3.4 и 15.3.5:

1. Общий чистый доход $= -73{,}78 + 447{,}91 + 434{,}94 = 809{,}07$ [столбец (a)]
$= 241{,}98 + 272{,}59 + 294{,}50 = 809{,}07$ [столбец (b)]
2. Другой способ расчета совокупного дохода:
(Процентный доход от инвестирования начального фонда)
+ (Накопленная стоимость надбавок на прибыль)
$= 1000[(1{,}15)^3 - 1] + 10[10(0{,}8)(1{,}15)^3 + 8(0{,}94)(1{,}15)^2 + (6{,}2222)(0{,}94)(1{,}15)] = 809{,}26.$
Разница между результатами этих двух расчетов связана с накоплением ошибки округления, которая возникла из-за округления брутто-премии до двух знаков после запятой.

15.4. Виды расходов

Система бухгалтерского учета страховых компаний предназначается для записи, классификации и обобщения финансовых операций. Но она же будет предоставлять данные и по сферам деятельности: количество и сумма продаж, число произведенных страховых выплат, количество выплаченных премий и т. п. После сбора этой информации можно провести анализ, цель которого — соотнести основные статьи расходов с направлениями деятельности, которые они обеспечивают. Это распределение составит основу для определения надбавки к премии для страховых договоров, которые будут проданы в будущем. Если используется принцип эквивалентности, актуарная настоящая стоимость надбавки на расходы равна актуарной настоящей стоимости расходов, производимых в связи с этим договором.

Классификация и распределение расходов страховой организации — трудные задачи. Пример такой классификации приведен в табл. 15.4.1. Здесь предложена примерная система классификации и показаны ее результаты.

При определении премий с надбавкой на расходы основное внимание уделяется расходам на страхование. Однако расходы, связанные с инвестированием, обычно рассматриваются как необходимая составляющая инвестиционного процесса и отражаются на величине премий через сокращение прогнозируемой процентной ставки.

В некоторых случаях практика указывает естественные связи между статьями затрат и видами деятельности. Например, обычно комиссионное вознаграждение страховому агенту составляет некоторый процент от премии первого года и последующих лет. В разд. 15.2 выплачиваемые комиссионные составляли 10% от премии первого года и 2% от премии второго и третьего года. Налоги на страховые компании, особенно налоги, установленные штатами[1], обычно являются долей от премии, собранной на соответствующей территории. В разд. 15.2 считалось, что на налоги, лицензии и сборы приходилось 2% от премий.

Таблица 15.4.1. Схема классификации расходов страховой компании

Классификация расходов	Компоненты
Расходы на инвестирование	(a) расходы на анализ (b) расходы на покупку, продажу и техническое обслуживание
Расходы на страхование	
1. Расходы на привлечение новых страхователей	(a) расходы на продажу, включая комиссионные агентам и расходы на рекламу (b) расходы на андеррайтинг, включая медицинское освидетельствование (c) расходы на подготовку новых договоров и их регистрацию
2. Расходы на ведение договоров	(a) расходы на сбор премий и учет (b) расходы, связанные со сменой выгодоприобретателя и реализации права изменений условий договора (страховых опционов) (c) расходы на переписку с владельцем договора
3. Административные расходы	(a) расходы на исследования (b) расходы на актуарные и общие юридические услуги (c) расходы на бухгалтерский учет и управление (d) налоги, лицензии и сборы
4. Расходы на урегулирование страховых случаев	(a) расходы на расследование требований о выплатах и юридическую защиту (b) расходы, связанные с осуществлением страховых выплат

Распределение других статей расходов менее очевидно, и часто используется комбинация статистического анализа и здравого смысла. Обычно расходы на привлечение клиентов включаются в надбавку на расходы для премий первого года действия договора, потому что для подготовки и продажи новых страховых договоров производятся маркетинговые и андеррайтинговые расходы. Некоторые виды расходов на привлечение клиентов зависят от размера премии, как, например, комиссионные. Некоторые изменяются в зависимости от размера страховой суммы, как, например, расходы на андеррайтинг. Некоторые расходы имеют место для каждого заключенного договора, независимо от размера страховой суммы или премии, например, расходы на ведение внутренней документации.

Классификация и распределение расходов являются важными инструментами контроля за страховыми операциями. Однако при определении премий точка зрения на расходы является скорее перспективной, чем ретроспективной. Цель такого

[1] В отличие от федеральных. — *Прим. ред.*

контроля — сбалансировать будущие расходы и будущие надбавки к премии. Поэтому динамика расходов при ожидаемой инфляции или дефляции и экономия средств от введения автоматизации учитываются в надбавке на расходы.

Спорным является включение в надбавку к премии средств на покрытие расходов, которые приведены в табл. 15.4.1 в статьях «Расходы на страхование, административные расходы: (a), (b) и (c)», и расходов, возникающих при создании системы распространения страховых продуктов. Эти расходы непосредственно не связаны с одним отдельно взятым договором. Некоторые из этих вопросов обсуждаются в разд. 16.4.

Таблица 15.4.2 иллюстрирует систему классификации из табл. 15.4.1 для расходов на страхование и соответствующих надбавок.

Таблица 15.4.2. Пример распределения будущих страховых расходов

Классификация	Первый год			Второй и последующие годы				
	На один договор	На 1000 единиц страховой суммы	Процент от премии	На один договор	На 1000 единиц страховой суммы	Процент от премии для года действия договора		
						2–9	10–15	16 и далее
1. Расходы на привлечение страхователей								
(a) Затраты на продажу								
Комиссионные	—	—	60%	—	—	7,0%	5,0%	3%
Содержание бюро продаж	—	—	25%	—	—	2,5%	1,5%	1%
Другие виды затрат, связанные с продажами	12,50	4,0	—	—	—	—	—	—
(b) андеррайтинг	18,00	0,50	—	—	—	—	—	—
(c) заключение и регистрация договоров	4,00	—	—	—	—	—	—	—
2. Расходы на ведение договора	2,00	0,25	—	2,00	0,25	—	—	—
3. Административные расходы								
(a), (b), (c)	4,00	0,25	—	4,00	0,25	—	—	—
(d) налоги	—	—	2%	—	—	2,0%	2,0%	2%
Итого (1,2,3)	40,50	5,0	87%	6,00	0,50	11,5%	8,5%	6%
4. Расходы на урегулирование страховых случаев 18,00 единиц на один договор плюс 0,10 на 1000 единиц страховой суммы								

Пример 15.4.1. Используя принцип эквивалентности, выведем формулу ежегодной премии с надбавкой на расходы для договора бессрочного страхования на случай смерти, заключенного лицом (x), со страховой суммой $1000\,b$ в полунепрерывной модели. Статьи расходов перечислены в табл. 15.4.2. Используем модель с единственной причиной выбытия или предположим, что выкупные суммы определены так, что они никак не влияют на премии, рассчитанные в модели со смертью как единственной причиной выбытия. Предполагая, что андеррайтинг приведет к селекции, используем таблицу смертности с 15-летним периодом селекции.

Решение. Обозначим через $G(b)$ премию с надбавкой на расходы для договора, по которому выплаты на случай смерти производятся в размере b тысяч. Тогда, используя принцип эквивалентности, получим

(актуарная настоящая стоимость премии с надбавкой на расходы)
= (актуарная настоящая стоимость страховых выплат, расходов на урегулирование страховых случаев и других видов расходов),

$$G(b)\ddot{a}_{[x]} = 1000\,b\bar{A}_{[x]} + [40{,}50 + 5{,}00\,b + 0{,}87G(b)] + (6{,}00\,a_{[x]} + 0{,}50\,ba_{[x]})$$
$$+ [(0{,}115\,a_{[x]:\overline{8|}} + 0{,}085\,{}_{9|6}\ddot{a}_{[x]} + 0{,}06\,{}_{15|}\ddot{a}_{[x]})G(b)] + (18{,}00 + 0{,}10\,b)\bar{A}_{[x]},$$
$$G(b)(\ddot{a}_{[x]} - 0{,}87 - 0{,}115\,a_{[x]:\overline{8|}} - 0{,}085\,{}_{9|6}\ddot{a}_{[x]} - 0{,}06\,{}_{15|}\ddot{a}_{[x]})$$
$$= (1000{,}1\,\bar{A}_{[x]} + 5{,}00 + 0{,}50\,a_{[x]})b + 40{,}50 + 6{,}00\,a_{[x]} + 18{,}00\,\bar{A}_{[x]}.$$

Величина постоянной ежегодной премии с надбавкой на расходы для выплаты на случай смерти размера $1000\,b$ составляет

$$G(b) = \frac{(1000{,}1\bar{A}_{[x]} + 5{,}00 + 0{,}50\,a_{[x]})b + 40{,}50 + 6{,}00\,a_{[x]} + 18{,}00\,\bar{A}_{[x]}}{0{,}94\,\ddot{a}_{[x]} - 0{,}755 - 0{,}03\,\ddot{a}_{[x]:\overline{9|}} - 0{,}025\,\ddot{a}_{[x]:\overline{15|}}}.$$

Постоянная ежегодная премия с надбавкой на расходы, рассчитанная на тысячу единиц страховой суммы, равна

$$\frac{G(b)}{b} = \frac{1000{,}1\bar{A}_{[x]} + 5{,}00 + 0{,}50\,a_{[x]} + (40{,}50 + 6{,}00\,a_{[x]} + 18{,}00\,\bar{A}_{[x]})/b}{0{,}94\,\ddot{a}_{[x]} - 0{,}755 - 0{,}03\,\ddot{a}_{[x]:\overline{9|}} - 0{,}025\,\ddot{a}_{[x]:\overline{15|}}}. \qquad ▼$$

На практике премии обычно определяются как доля от единицы страховой суммы. Для страхования жизни эти доли, как правило, устанавливаются на 1000 единиц страховой суммы. Для аннуитетов они обычно устанавливается по отношению к ежемесячной выплате.

В примере 15.4.1 величина премии с надбавкой на расходы $G(b)$ не пропорциональна b, потому что величина некоторых видов расходов не зависит от b. [Если бы таких расходов не было, отношение $G(b)/b$ было бы постоянным.] Средства, предусмотренные на покрытие этих не зависящих от b расходов, можно определить с помощью специальных методов. Один из таких методов — заменить b на усредненную по портфелю страховую сумму. Другой метод — отделить расходы, не зависящие от страховой суммы, от тех статей расходов, которые изменяются пропорционально страховой сумме договора, и компенсировать такие расходы специальной надбавкой, не зависящей от страховой суммы. В примере 15.4.1 величина такой ежегодной надбавки будет равна

$$\frac{40{,}50 + 6{,}00\,a_{[x]} + 18{,}00\,\bar{A}_{[x]}}{0{,}94\,\ddot{a}_{[x]} - 0{,}755 - 0{,}03\,\ddot{a}_{[x]:\overline{9|}} - 0{,}025\,\ddot{a}_{[x]:\overline{15|}}}.$$

Часто эти специальные надбавки усредняются по договорам, заключенным лицами одного возраста, так что они постоянны при данном возрасте заключения договора.

15.5. Алгебраические основы бухгалтерского учета: модель с единственной причиной выбытия

В этом разделе многие соображения, разъяснявшиеся в разд. 15.2.2, будут изложены более точно. В помощь читателю даются частые ссылки на табл. 15.2.5 и 15.2.6.

Одной из целей финансового учета является определение элементов уравнения баланса на последовательных интервалах,

$$A(h) = L(h) + U(h). \tag{15.5.1}$$

В формуле (15.5.1) $A(h)$ обозначает размер активов, $L(h)$ — размер пассивов, а $U(h)$ — акционерный капитал (сальдо в терминологии страхового учета), рассчитанные на конец отчетного периода h. Изменение сальдо можно представить формулой

$$\Delta U(h) = \Delta A(h) - \Delta L(h) = \text{чистый доход в период } h+1. \tag{15.5.2}$$

Проиллюстрируем эту основную модель, используя алгебраические соотношения при идеализированных условиях из табл. 15.5.1.

Таблица 15.5.1. Пример бухгалтерского учета

Постоянные выплаты, постоянная страховая премия	
1. Вид страхования	Бессрочное страхование на случай смерти со страховой суммой размера 1
2. Характер платежей	Дискретная модель
3. Возраст и время заключения договора	Заключен лицом (x) в начале первого отчетного периода
4. Расходы	Нет расходов или надбавок на расходы
5. Эмпирические данные[1]	Эмпирические данные инвестирования соответствуют предположениям
	Бухгалтерские записи ведутся в терминах математических ожиданий на момент заключения договора для каждого из застрахованных в начальный момент

Этот пример основан на рекуррентной формуле для резерва (8.3.10) при $b_h = 1$, $\pi_{h-1} = P_x$ и ${}_hV = {}_hV_x$. Умножая на ${}_{h-1}p_x(1+i)$, получим

$${}_{h-1}p_x({}_{h-1}V_x + P_x)(1+i) - {}_{h-1}p_x\, q_{x+h-1} = {}_hp_x\, {}_hV_x, \qquad h = 1, 2, \dots . \tag{15.5.3}$$

При сделанных выше предположениях формулу (15.5.3) можно интерпретировать как ожидаемое изменение страховых активов и пассивов для каждого из группы застрахованных в начальный момент. Левую часть этого равенства можно интерпретировать как ожидаемый денежный поток, изменяющий активы, а правая часть — это размер ожидаемых обязательств каждого лица из группы застрахованных в начальный момент.

Рассмотрим, что происходит в первом отчетном периоде. В течение этого периода ожидаемые активы, приходящиеся на каждое лицо из группы лиц, застрахованных в начальный момент, изменяются следующим образом:

Увеличение	Поступление премий	$= P_x$
	Доход от инвестирования	$= P_x i$
Уменьшение	Выплаты на случай смерти	$= q_x$

Если начальные фонды отсутствуют, то

$$A(1) = A(0) + [A(1) - A(0)] = 0 + [P_x(1+i) - q_x],$$

и, используя (15.5.3) при $h = 1$, получим $A(1) = p_x V_x = L(1)$. В этом примере $A(1) - L(1) = U(1) = 0$.

[1] В оригинале «experience». Термин может переводиться и как «наблюдаемые» или «опытные данные». — *Прим. ред.*

Формула (15.5.3) может также быть использована для изучения рекуррентным образом по всем годам действия договора динамики отчетности. Предположим, что $A(h) = L(h)$ в конце отчетного периода h и что мы исследуем баланс в $(h+1)$-м периоде:

$$\Delta A(h) = (\text{поступление премий} + \text{инвестиционный доход} \\ - \text{выплаты на случай смерти}) = {}_hp_x\, P_x + {}_hp_x({}_hV_x + P_x)i - {}_hp_x\, q_{x+h}.$$

Тогда

$$A(h+1) = A(h) + \Delta A(h) = {}_hp_x\, {}_hV_x + \{{}_hp_x[P_x + ({}_hV_x + P_x)i] - {}_hp_x\, q_{x+h}\} \\ = {}_hp_x\, [(P_x + {}_hV_x)(1+i)] - {}_hp_x\, q_{x+h} = {}_{h+1}p_x\, {}_{h+1}V_x = L(h+1). \qquad (15.5.4)$$

В этом примере, где нет ни начального фонда, ни прибылей, ни надбавок «на случайность», ожидаемые результаты страхования описываются равенством $A(h) - L(h) = U(h) = 0,\ h = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Теперь изменим предположения табл. 15.5.1, допустив, что к нетто-премии в качестве надбавки добавляется положительная постоянная величина c и что e_{h-1} — расходы, выплачиваемые в начале h-го периода по каждому договору для дожившего лица. Постоянная надбавка может включать компоненту, учитывающую прибыль, т. е. актуарная настоящая стоимость надбавки c может быть больше, чем актуарная настоящая стоимость последовательности e_{h-1}, $h = 1, 2, \ldots$.

Усложненный вариант равенства (15.5.3), включающий премии с такой надбавкой и расходы, имеет вид

$${}_{h-1}p_x\{[{}_{h-1}V_x + \underline{u(h-1)}] + (P_x + \underline{c}) - \underline{e_{h-1}}\}(1+i) - {}_{h-1}p_x\, q_{x+h-1} \\ = {}_hp_x[{}_hV_x + \underline{u(h)}], \qquad h = 1, 2, 3, \ldots . \qquad (15.5.5)$$

Элементы, составляющие усложнение формулы (15.5.3), подчеркнуты. В формуле (15.5.5) $u(h)$ обозначает ожидаемую величину сальдо для каждого дожившего страхователя к концу отчетного периода h.

Вычитая формулу (15.5.3), в которую не включены надбавки, из формулы (15.5.5), получим

$${}_{h-1}p_x[u(h-1) + (c - e_{h-1})](1+i) = {}_hp_x u(h), \qquad h = 1, 2, 3, \ldots . \qquad (15.5.6)$$

Умножая разностное уравнение (15.5.6) на v^h и пе́регруппировывая слагаемые, получим

$$v^{k-1}\, {}_{h-1}p_x[u(h-1) + (c - e_{h-1})] = v^h\, {}_hp_x\, u(h), \\ \Delta[v^{h-1}\, {}_{h-1}p_x\, u(h-1)] = v^{h-1}\, {}_{h-1}p_x(c - e_{h-1}). \qquad (15.5.7)$$

Налагая начальное условие $u(0) = 0$, из формулы (15.5.7) получаем

$$\sum_{j=1}^{h} \Delta[v^{j-1}\, {}_{j-1}p_x\, u(j-1)] = \sum_{j=1}^{h} v^{j-1}\, {}_{j-1}p_x(c - e_{j-1}), \\ v^h\, {}_hp_x\, u(h) = \sum_{j=1}^{h} v^{j-1}\, {}_{j-1}p_x(c - e_{j-1}), \\ {}_hp_x\, u(h) = \sum_{j=1}^{h} (1+i)^{h-j+1}\, {}_{j-1}p_x(c - e_{j-1}). \qquad (15.5.8)$$

Таким образом, ожидаемое сальдо на конец h-го отчетного периода для каждого из лиц, застрахованных в начальный момент, является накопленной стоимостью ожидаемых вкладов в сальдо в каждый из предшествующих отчетных периодов. Этот результат следует сравнить с табл. 15.2.5, комментарий 3.

Если нетто-резервы рассматриваются как мера пассива, то ожидаемые величины, приходящиеся на одно лицо из лиц, застрахованных в начальный момент, будут выглядеть в отчетности нашей модельной страховой компании к концу отчетного периода h следующим образом:

Балансовый отчет (на конец отчетного периода h)

$$A(h) = L(h) + U(h) = {}_hp_x\,{}_hV_x + {}_hp_x\,u(h)$$
$$= {}_hp_x\,{}_hV_x + \sum_1^h (1+i)^{h-j+1}\,{}_{j-1}p_x(c - e_{j-1})$$

Отчет о прибылях и убытках (h-й отчетный период)

Доход	
Поступление премий	${}_{h-1}p_x(P_x + c)$
Инвестиционный доход	${}_{h-1}p_x[{}_{h-1}V_x + u(h-1) + P_x + c - e_{h-1}]i$
Всего	${}_{h-1}p_x\{(P_x + c)(1+i) + [{}_{h-1}V_x + u(h-1) - e_{h-1}]i\}$
Отчисления из дохода	
Выплаты в случае смерти	${}_{h-1}p_x\,q_{x+h-1}$
Расходы	${}_{h-1}p_x\,e_{h-1}$
Изменение резерва	${}_hp_x\,{}_hV_x - {}_{h-1}p_x\,{}_{h-1}V_x$
Всего	${}_hp_x\,{}_hV_x - {}_{h-1}p_x\,({}_{h-1}V_x - e_{h-1}) + {}_{h-1}p_x\,q_{x+h-1}$
Чистый доход (изменение сальдо)	${}_{h-1}p_x[u(h-1)i + (c - e_{h-1})(1+i)$ (15.5.9)

Для завершения отчетности используем формулы (15.5.8) и (15.5.3). Левые столбцы табл. 15.2.5 и 15.2.6 обеспечивают численную иллюстрацию этого подхода. Таблицы представлены в терминах группы детерминированного дожития, а не ожидаемых величин для каждого из лиц, застрахованных в начальный момент. Таким образом, ожидаемое сальдо в конце h-го отчетного периода для каждого из таких лиц составит

$${}_hp_x\,u(h) = {}_{h-1}p_x\,u(h-1) + {}_{h-1}p_x[u(h-1)i + (c - e_{h-1})(1+i)]. \qquad (15.5.10)$$

Формула (15.5.10) совпадет с (15.5.6); однако она была выведена с позиций бухгалтерского учета. Умножая на v^h и перегруппировывая слагаемые, получим

$$\Delta[v^{h-1}\,{}_{h-1}p_x\,u(h-1)] = v^{h-1}\,{}_{h-1}p_x(c - e_{h-1}),$$

а это формула (15.5.7), но выведенная с позиций бухгалтерского учета.

Ранее в этой главе отмечалось, что на практике расходы проявляют тенденцию к снижению со временем. Таким образом, ожидаемое сальдо

$${}_hp_x\,u(h) = \sum_{j=1}^h (1+i)^{h-j+1}\,{}_{j-1}p_x(c - e_{j-1})$$

обычно будет отрицательным при малых значениях h и положительным при больших значениях. Это замечание относится к модели бухгалтерского учета, в которой нетто-резервы рассматриваются как мера пассивов, надбавки являются постоянными, а расходы уменьшаются по мере увеличения интервала времени с момента заключения договора.

Для того чтобы избежать ситуации, когда активы меньше пассивов, на ранних периодах можно предпринять ряд действий:

• страховая организация может получить дополнительный капитал для первоначального сальдо $u(0)$, чтобы выражение

$$u(0)(1+i)^h + \sum_{j=1}^{h}(1+i)^{h-j+1}{}_{j-1}p_x(c - e_{j-1})$$

было положительным для $h = 0, 1, 2, 3, \ldots$;

• надбавка может зависеть от периода, так что $c_{h-1} - e_{h-1} \geqslant 0$, $h = 1, 2, 3, \ldots$;

• пассивы страховой организации могут определяться на основе такого отражения организации резерва, который уменьшает указываемые в отчетности пассивы в начальные годы действия договора. Принцип, согласно которому в качестве пассива указывается нетто-резерв плюс резерв расходов из столбцов (b) табл. 15.2.5 и 15.2.6, является примером таких действий. (Эта последняя возможность является предметом разд. 16.6 и 16.7).

15.6. Доля активов

Для обеспечения алгебраических основ бухгалтерского учета в модели с двумя причинами выбытия на основе принципа эквивалентности необходимо получить ряд рекуррентных соотношений. Они имеют много приложений, и некоторые из них мы рассмотрим в разд. 16.4.2 и 16.5. Основную переменную этих рекуррентных соотношений называют по-разному в зависимости от приложения. В этом разделе мы назовем ее *долей активов* — термином, имеющим долгую историю. В других разделах будут рассматривать другие интерпретации в зависимости от приложения.

15.6.1. Рекуррентные соотношения

Договор страхования на случай смерти является долгосрочным контрактом, в котором доходы страховщика — премии, поступления от инвестиций, а убытки — выплаты на случай смерти, выплаты выкупных сумм и выплаты на погашение расходов. На брутто-премию, обычно исчисляемую на единицу страховой суммы, влияет конкуренция, а на выкупные суммы влияют закон и конкуренция. Необходим баланс (в смысле актуарных настоящих стоимостей) между различными элементами структуры премий и выплат. Этому и служит расчет доли активов, излагаемый в этом разделе. Это — не обобщение прошлого опыта, а преспективные расчеты, направленные на то, чтобы учесть наиболее значимые аспекты, влияющие на ожидаемый финансовый результат по группе договоров.

Мы начнем с модификации формулы (15.5.5) для случая страховой выплаты размера 1:

$${}_hp_x^{(\tau)}({}_hAS) = {}_{h-1}p_x^{(\tau)}\{[{}_{h-1}AS + G(1 - c_{h-1}) - e_{h-1}](1+i) - q_{x+h-1}^{(1)} - q_{x+h-1}^{(2)}\,{}_hCV\}, \qquad h = 1, 2, 3, \ldots. \quad (15.6.1)$$

Умножая (15.6.1) на $1/{}_{h-1}p_x^{(\tau)}$, получим

$$p_{x+h-1}^{(\tau)}({}_hAS) = [{}_{h-1}AS + G(1-c_{h-1}) - e_{h-1}](1+i) \\ - q_{x+h-1}^{(1)} - q_{x+h-1}^{(2)}\, {}_hCV, \qquad h = 1, 2, 3, \ldots . \tag{15.6.2}$$

В формулах (15.6.1) и (15.6.2)

${}_hAS$ обозначает ожидаемую долю активов спустя h лет с момента заключения договора, непосредственно перед началом $(h+1)$-го года действия договора;

G обозначает постоянную брутто-премию;

c_h обозначает долю брутто-премии, предназначенную на покрытие расходов, которая выплачивается в момент времени h;

e_h обозначает величину расходов, не зависящих от страховой суммы и выплачиваемых в момент времени h;

$q_{x+h}^{(1)}$ обозначает вероятность смерти страхователя, которому сейчас $x+h$ лет, до достижения им возраста $x+h+1$ лет;

$q_{x+h}^{(2)}$ обозначает вероятность досрочного прекращения действия договора со страхователем, которому сейчас $x+h$ лет, до достижения им возраста $x+h+1$ лет;

${}_hCV$ обозначает размер выкупной суммы, выплачиваемый в момент времени h. Она также называется *денежной стоимостью*.

Формула (15.6.1) относится к дискретной модели страхования, где страховая сумма размера 1 выплачивается в конце года смерти, а сумма ${}_hCV$ — в конце года досрочного прекращения действия договора.

Формула (15.6.1) является обобщением рекуррентного соотношения, связывающего последовательность конечных резервов. Она будет переписана несколькими способами, которые напоминают сходные преобразования уравнений для резервов. Умножая формулу (15.6.2) на $v^h l_{x+h-1}^{(\tau)}$, получим

$$\Delta(l_{x+h-1}^{(\tau)} v^{h-1}\, {}_{h-1}AS) = [G(1-c_{h-1}) - e_{h-1}] l_{x+h-1}^{(\tau)}\, v^{h-1} \\ - (d_{x+h-1}^{(1)} + d_{x+h-1}^{(2)}\, {}_hCV) v^h, \qquad h = 1, 2, 3, \ldots . \tag{15.6.3}$$

Суммирование по $h = 1, 2, \ldots, n$ дает

$$l_{x+n}^{(\tau)}\, v^n\, {}_nAS - l_x^{(\tau)}\, {}_0AS = \sum_{h=1}^{n} \{[G(1-c_{h-1}) - e_{h-1}] l_{x+h-1}^{(\tau)}\, v^{h-1} \\ - (d_{x+h-1}^{(1)} + d_{x+h-1}^{(2)}\, {}_hCV) v^h\}. \tag{15.6.4}$$

Если ${}_0AS = 0$, то величина ${}_nAS$ равна

$$\sum_{h=1}^{n} \frac{\{[G(1-c_{h-1}) - e_{h-1}] l_{x+h-1}^{(\tau)}(1+i) - (d_{x+h-1}^{(1)} + d_{x+h-1}^{(2)}\, {}_hCV)\}(1+i)^{n-h}}{l_{x+n}^{(\tau)}} . \tag{15.6.5}$$

Для бессрочного страхования на случай смерти положим $n = \omega - x$ в формуле (15.6.4). Тогда, учитывая, что в пределе математическое ожидание доли активов равно нулю, мы перепишем выражение (15.6.5), чтобы получить

$$G\ddot{a}_x^{(\tau)} = A_x^{(1)} + \sum_{h=1}^{\omega-x} (Gc_{h-1} + e_{h-1}) v^{h-1}\, {}_{h-1}p_x^{(\tau)} + \sum_{h=1}^{\omega-x} {}_{h-1}p_x^{(\tau)} q_{x+h-1}^{(2)}\, v^h\, {}_hCV. \tag{15.6.6}$$

Формулу (15.6.6) можно интерпретировать как общую формулу для премии с надбавкой на расходы при использовании принципа эквивалентности. Из нее можно получить формулу для случаев срочного страхования на случай смерти или смешанного страхования жизни.

Делая замену $p_{x+h-1}^{(\tau)} = 1 - q_{x+h-1}^{(1)} - q_{x+h-1}^{(2)}$, можно переписать равенство (15.6.2) в виде

$$\begin{aligned} {}_hAS = [{}_{h-1}AS + G(1-c_{h-1}) - e_{h-1}](1+i) \\ - q_{x+h-1}^{(1)}(1 - {}_hAS) - q_{x+h-1}^{(2)}({}_hCV - {}_hAS). \end{aligned} \tag{15.6.7}$$

Это подчеркивает особое значение разности ${}_hCV - {}_hAS$ в изменении долей активов.

Расчет доли активов можно рассматривать как определение ожидаемой динамики активов на один еще действующий договор из набора одинаковых договоров. Для контроля баланса между различными компонентами структуры премий и выплат рассчитываются фиксированная брутто-премия, обязательства по покрытию расходов и денежные стоимости. Целью этих расчетов может быть выяснение, будет ли для всех лет действия договора, кроме очень ранних, выполняться неравенство ${}_kAS \geqslant {}_kV$.

15.6.2. Бухгалтерский учет

Пусть ${}_hAS = {}_hV + u(h)$, где ${}_hV$ — резерв, а $u(h)$ — ожидаемое сальдо на одного дожившего страхователя на конец периода h. Значения $u(h)$ могут быть отрицательными, особенно в первые годы. Предположим, что резервы определяются по рекуррентной формуле

$${}_hVp_{x+h-1}^{(\tau)} = ({}_{h-1}V + P)(1+i) - q_{x+h-1}^{(1)} - q_{x+h-1}^{(2)}\,{}_hCV, \qquad h = 1, 2, 3, \ldots . \tag{15.6.8}$$

Формула (15.6.8) является рекуррентным уравнением, которое позволяет вычислить нетто-резервы в модели с двумя причинами выбытия. Эти резервы соответствуют нетто-резервам, подсчитанным в табл. 15.3.3.

Умножим равенства (15.6.2) и (15.6.8) на ${}_{h-1}p_x^{(\tau)}$ и вычтем одно из другого:

$$u(h)\,{}_hp_x^{(\tau)} = [u(h-1) + G(1-c_{h-1}) - e_{h-1} - P](1+i)\,{}_{h-1}p_x^{(\tau)}, \qquad h = 1, 2, \ldots . \tag{15.6.9}$$

Пусть $G = P + c$ и $Gc_{h-1} + e_{h-1} = E_{h-1}$, где E_{h-1} — совокупные расходы. Тогда формула (15.6.9) сводится к формуле

$$u(h)\,{}_hp_x^{(\tau)} = [u(h-1) + c - E_{h-1}](1+i)\,{}_{h-1}p_x^{(\tau)}, \tag{15.6.10}$$

которая является вариантом формулы (15.5.10) для модели с двумя причинами выбытия. Умножая рекуррентное соотношение (15.6.10) на v^h и производя алгебраические преобразования, получим

$$\Delta v^{h-1}\,{}_{h-1}p_x^{(\tau)} u(h-1) = v^{h-1}\,{}_{h-1}p_x^{(\tau)}(c - E_{h-1}).$$

Аналогично тому, как в разд. 15.5 выводилась формула (15.5.8), мы можем получить

$${}_hp_x^{(\tau)} u(h) = \sum_{j=1}^{h} (1+i)^{h-j+1}\,{}_{j-1}p_x^{(\tau)}(c - E_{j-1}). \tag{15.6.11}$$

Остальные рассуждения разд. 15.5 можно повторить почти дословно, заменив вероятность выбытия по единственной причине на соответствующую вероятность из модели выбытия по нескольким причинам и прибавив математическое ожидание выкупной суммы ${}_{h-1}p_x^{(\tau)}\,q_{x+h-1}^{(2)}\,{}_{h-1}CV$. Численная иллюстрация содержится в столбцах (b) табл. 15.3.4 и 15.3.5.

Пример 15.6.1. Рассмотрим пример из табл. 15.2.1, включив в него выкупную сумму из табл. 15.3.1. Предположим, как и в табл. 15.3.4 и 15.3.5, что $G = 342{,}96$. Вычислим набор долей активов.

Решение. Для проведения расчетов используем формулу (15.6.2).

Период	Доля активов
h	$\dfrac{[{}_{h-1}AS + G(1-c_{h-1}) - e_{h-1}](1+i) - 1000q_{x+h-1}^{(1)} - {}_hCV\,q_{x+h-1}^{(2)}}{p_{x+h-1}^{(\tau)}} = {}_hAS$
1	$\dfrac{[0 + 342{,}96(1-0{,}20) - 8{,}0](1{,}15) - 1000(0{,}1) - 227{,}73(0{,}1)}{0{,}8} = 229{,}44$
2	$\dfrac{[229{,}44 + 342{,}96(1-0{,}06) - 2{,}0](1{,}15) - 1000(0{,}1111) - 564{,}41(0{,}1111)}{0{,}7778}$ $= 589{,}46$
3	$\dfrac{[589{,}46 + 342{,}96(1-0{,}06) - 2{,}0](1{,}15) - 1000}{1{,}0} = 46{,}32$

▼

Сравнение решения этого примера и математического ожидания активов на конец третьего года, приведенных в табл. 15.3.5, объясняет термин «доля активов»:

(доля активов)(математическое ожидание числа страхователей, получающих выплаты на случай смерти, на дожитие или выкупную сумму в конце третьего года действия договора)
= (совокупные ожидаемые активы),

$$(46{,}32)[(10)(0{,}6222)] = 288{,}22,$$

(математическое ожидание активов на конец третьего года действия договора)
− (активы, накопленные за счет инвестирования начального фонда)
= (совокупные ожидаемые активы),

$$1809{,}07 - 1000(1{,}15)^3 = 288{,}20.$$

Различие в результатах объясняется ошибкой округления.

15.7. Расходы, резервы и договор страхования жизни общего вида

В разд. 15.2 и 15.3, используя два простых примера, мы рассмотрели ряд новых идей. В разд. 8.2 были рассчитаны резервы для договора страхования жизни общего вида в модели с единственной причиной выбытия, где расходы не принимались во внимание. Изложение начиналось со следующей случайной величины потерь:

$$ {}_tL = b_{T(x)}\,v^{T(x)-t} - \int_t^{T(x)} \pi_u\,v^{u-t}\,du$$

для $T(x) > t$. Наша цель состоит в обобщении этой модели путем включения в нее компонент, рассматривавшихся в предыдущих разделах. Во-первых, мы добавим возможность выплаты выкупной суммы:

$$
{}_tL^{\underline{2}} = \begin{cases} b^{(1)}_{T(x)}\, v^{T(x)-t} - \displaystyle\int_t^{T(x)} \pi^{\underline{2}}_{u}\, v^{u-t}\, du & \text{при выбытии вследствие смерти,} \\ b^{(2)}_{T(x)}\, v^{T(x)-t} - \displaystyle\int_t^{T(x)} \pi^{\underline{2}}_{u}\, v^{u-t}\, du & \text{при выбытии вследствие} \\ & \text{досрочного прекращения договора.} \end{cases}
$$

Верхний правый индекс $^{\underline{2}}$ добавляется к обозначениям случайной величины потерь и величины премии для указания на то, что к исходной модели были добавлены выкупные суммы.

Во-вторых, добавим расходы с интенсивностью E_t в момент времени t, где t — время с момента заключения договора. Это соответствует тому, что было сделано в соотношении (15.6.10). Нижний индекс e в обозначениях случайной величины потерь и величины премий указывает на то, что к модели добавляются расходы. Предполагается, что ${}_e\pi^{\underline{2}}_{u}$ определяется согласно принципу эквивалентности. Тогда

$$
{}_tL^{\underline{2}}_{e} = \begin{cases} b^{(1)}_{T(x)} v^{T(x)-t} - \displaystyle\int_t^{T(x)} ({}_e\pi^{\underline{2}}_{u} - E_u) v^{u-t}\, du & \text{при выбытии вследствие смерти,} \\ b^{(2)}_{T(x)} v^{T(x)-t} - \displaystyle\int_t^{T(x)} ({}_e\pi^{\underline{2}}_{u} - E_u) v^{u-t}\, du & \text{при выбытии вследствие} \\ & \text{досрочного прекращения} \\ & \text{договора.} \end{cases}
$$

Тогда, сделав замену переменной $s = u - t$, запишем условное математическое ожидание с.в. ${}_tL^{\underline{2}}_{e}$ при условии $T(x) > t$:

$$
\begin{aligned} \mathbf{E}[{}_tL^{\underline{2}}_{e}] = &\int_t^{\infty} \left[b^{(1)}_{y} v^{y-t} - \int_0^{y-t} ({}_e\pi^{\underline{2}}_{t+s} - E_{t+s}) v^{s}\, ds \right] {}_{y-t}p^{(\tau)}_{x+t}\, \mu^{(1)}_{x+t}(y-t)\, dy \\ &+ \int_t^{\infty} \left[b^{(2)}_{y} v^{y-t} - \int_0^{y-t} ({}_e\pi^{\underline{2}}_{t+s} - E_{t+s}) v^{s}\, ds \right] {}_{y-t}p^{(\tau)}_{x+t}\, \mu^{(2)}_{x+t}(y-t)\, dy. \end{aligned} \tag{15.7.1}
$$

Теперь сделаем замену переменной $u = y - t$ во внешнем интеграле и сгруппируем слагаемые следующим образом:

$$
\mathbf{E}[{}_tL^{\underline{2}}_{e}] = \int_0^{\infty} \left[\sum_{j=1}^{2} b^{(j)}_{t+u}\, \mu^{(j)}_{x+t}(u) v^{u} - \int_0^{u} ({}_e\pi^{\underline{2}}_{t+s} - E_{t+s}) v^{s}\, ds\, \mu^{(\tau)}_{x+t}(u) \right] {}_up^{(\tau)}_{x+t}\, du.
$$

Интегрируя по частям во втором слагаемом, получим

$$
\mathbf{E}[{}_tL^{\underline{2}}_{e}] = \int_0^{\infty} v^{u} \left\{ \left[\sum_{j=1}^{2} b^{(j)}_{t+u}\, \mu^{(j)}_{x+t}(u) - {}_e\pi^{\underline{2}}_{t+s} + E_{t+s} \right] {}_up^{(\tau)}_{x+t} \right\} du = \int_0^{\infty} v^{u} [f(u:t)]\, du. \tag{15.7.2}
$$

Формула (15.7.2) представляет интерес из-за того, что функцию

$$
f(u:t) = \left[E_{t+u} + \sum_{j=1}^{2} b^{(j)}_{t+u}\, \mu^{(j)}_{x+t}(u) - {}_e\pi^{\underline{2}}_{t+u} \right] {}_up^{(\tau)}_{x+t} \tag{15.7.3}
$$

можно интерпретировать как *ожидаемый денежный поток* в момент времени $t+u$ по договору страхования при условии дожития до момента времени t.

Так как положительные значения функции $f(u:t)$ связаны с ожидаемым исходящим денежным потоком, некоторые актуарии предпочитают использовать функцию $g(u:t) = -f(u:t)$, для которой ожидаемые входящие денежные потоки имеют положительные значения. Формула (15.7.3) указывает на еще одну интерпретацию резервов. Резерв представляет собой настоящую стоимость будущего ожидаемого чистого исходящего денежного потока. Формулу (8.6.1) можно интерпретировать аналогичным образом, но для менее сложной модели.

В разд. 15.2.2 и 15.3.2 показано, что резервы могут описываться с большей или меньшей степенью детализации в зависимости от того, какая поставлена цель. В этом разделе был введен договор страхования весьма общего вида. Для целей страхового регулирования резервы могут вычисляться с помощью формулы (8.2.4) в предположении, что игнорирование расходов является консервативным в том смысле, что при включении расходов резервы обычно уменьшаются. Выкупные суммы также могут быть исключены из рассмотрения, если предположить, что правильно определенные выкупные суммы мало влияют на резервы. Для финансовой отчетности, используемой на рынках капитала, основой оценки резервов обычно является формула (15.7.2).

В управлении финансами компаний, занимающихся страхованием жизни, очень важно учитывать, как изменение процентной ставки, при которой производятся расчеты, влияет на изменение резерва. Используя формулу (15.7.2) и считая, что величина премий, установленная в момент времени 0, не зависит от будущих процентных ставок, имеем

$$\frac{d}{d\delta}\,\mathbf{E}[{}_tL_e^2] = -\int_0^\infty u v^u f(u:t)\,du. \tag{15.7.4}$$

Пример 15.7.1. Найдем функцию $f(u:t)$ ожидаемого денежного потока для договора бессрочного страхования на случай смерти в непрерывной модели, в которой не учитываются расходы, и выразим $d\mathbf{E}[{}_tL_e^1]/d\delta$ в терминах актуарных настоящих стоимостей.

Решение. Модифицируя формулы (15.7.3) и (15.7.4), получаем

$$f(u:t) = [\mu_{x+t}(u) - \bar{P}(\bar{A}_x)]_u p_{x+t},$$

$$\frac{d}{d\delta}\mathbf{E}[{}_tL_e^1] = -\int_0^\infty u v^u [\mu_{x+t}(u) - \bar{P}(\bar{A}_x)]_u p_{x+t}\,du = -(\bar{I}\bar{A})_{x+t} + \bar{P}(\bar{A}_x)(\bar{I}\bar{a})_{x+t},$$

где $(\bar{I}\bar{A})_{x+t}$ и $(\bar{I}\bar{a})_{x+t}$ рассчитаны при процентной ставке, используемой для оценки резервов. Напомним, что премия установлена в момент 0 и не зависит от этой процентной ставки. ▼

Обычно $g(0:0) < 0$ и существует такое u_0, что $g(u:0) > 0$ для $u > u_0$. Информация о моменте времени u_0, когда ожидаемый денежный поток изменит знак с отрицательного на положительный, может быть полезна для финансового планирования.

Пример 15.7.2. Выведем уравнение, которое может быть использовано для определения числа u_0 для договора, описанного в примере 15.7.1.

Решение. $f(u:0) = [\mu_x(u) - \bar{P}(\bar{A}_x)]_u p_x = 0$, или $\mu_x(u) = \bar{P}(\bar{A}_x)$. ▼

15.8. Замечания и литература

В этой главе мы ввели неуклюжий термин «премии с надбавкой на расходы» для понятия, которое некоторые называют брутто-премиями. Его использование должно послужить предупреждением о том, что тема премий не исчерпывается нетто-премиями, обсуждавшимися в предыдущих главах, и надбавкой для компенсации расходов, представленной здесь. При рассмотрении премий нужно учитывать соображения конкуренции, надбавки на прибыль при страховании без участия в прибыли, ожидаемые дивиденды при страховании с участием в прибыли, факторы риска и выплаты выкупных сумм. В статье [Guertin 1965] обсуждаются многие из этих вопросов. В статье [Chalke 1991] критикуется традиционный подход «издержки плюс» для расчета премий. Эта критика основывается на принципах классической микроэкономики.

В статье [Fassel 1956] обсуждаются вопросы, связанные с оценкой и распределением расходов, не зависящих от страховой суммы. До момента выхода этой статьи большинство расходов, не зависящих от страховой суммы, включалось в надбавку для покрытия расходов, зависящих от размера страховой суммы (при этом рассматривался средний размер договора). Но использование надбавок, не зависящих от страховой суммы, или группового метода, многие годы считалось несправедливым способом распределения начислений на расходы.

Работа [Brenner et al. 1988] посвящена бухгалтерскому учету в страховании жизни. Хорн [Horn 1971] изучал влияние различных систем резервов на время появления чистого дохода в отчетности. Вычисление долей активов имеет долгую историю. В статье [Huffmann 1978] обсуждаются модификации расчетов долей резервов.

Упражнения

К разделу 15.2

15.1. (a) Букмекерская контора собирает по 0,55 с каждого из 1000 клиентов 1-го июля года Z и сразу же вносит эту сумму на сберегательный счет с доходом 3% за каждые 6 месяцев. 1-го июля года $Z+1$ подбрасывается 1000 монет, каждая из которых отождествляется с одним клиентом. Если монета клиента выпадает гербом, то клиент получает приз размера 1. Если монета выпадает решкой, то клиент ничего не получает. Составьте балансовый отчет и отчет о прибылях и убытках этой компании на 31 декабря года Z. В пассив вносите актуарную настоящую стоимость соответствующих величин.

Балансовый отчет	
Активы	Пассивы
Сберегательный счет	Резервы
	Сальдо
Отчет о прибылях и убытках	
Поступление премий	
Инвестиционный доход	
Увеличение поступлений	

(b) Случайная величина Y является суммой выплат, сделанных 1 июля года $Z+1$, и имеет биномиальное распределение. Используя нормальную аппроксимацию, вычислите вероятность $\mathbf{P}[Y(1{,}03)^{-1} - A > 0]$, где A — активы на 31 декабря года Z.

(c) Если компания имеет только одного клиента, то в расчетах п. (a) должен появиться поправочный коэффициент 0,001. Покажите, что в случае одного клиента вероятность, выписанная в п. (b), равна 1/2.

15.2. Случайная величина потерь с учетом расходов по договору бессрочного страхования на случай смерти в непрерывной модели задается формулой $L_e = L + X$, где $L = v^T - \bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{\overline{T}|}$ и $X = c_0 + (g - e)\bar{a}_{\overline{T}|}$. В этих формулах L является случайной величиной потерь, связанных с выплатами по договору, а X — с расходами. Символ c_0 обозначает неслучайные начальные расходы, g — величину непрерывных расходов на ведение договора, а e — надбавку на расходы к премии. Применяется принцип эквивалентности, так что $\mathbf{E}[L] = \mathbf{E}[X] = 0$. Покажите, что

(a) $X = c_0 L$, (b) $\mathbf{D}[L_e] = (1 + c_0)^2\mathbf{D}[L]$, (c) $\mathbf{Cov}(L, X) = c_0[({}^2\bar{A}_x - \bar{A}_x)^2]/(\delta\bar{a}_x)^2$.

15.3. Торговая фирма направляет счета на оплату в конце каждого годового отчетного периода. Прошлый опыт показывает, что к моменту времени T с вероятностью 0,25 счета не будут оплачены, а с вероятностью 0,75 полная оплата будет произведена. Функция плотности с.в. T задана формулой $f(t) = 4 - 8t$, $0 < t < 0{,}5$, где t измеряется в годах. В конце некоторого года фирма разослала 100 счетов на оплату, каждый на сумму 100. Случайная величина R_i обозначает настоящую стоимость выплат по счету i на конец этого года.

(a) Проверьте, что

$$R_i = \begin{cases} 0 & \text{с вероятностью } 0{,}25, \\ 100\,v^T & \text{с вероятностью } 0{,}75. \end{cases}$$

(b) При условии, что R_i, $i = 1, 2, \ldots, 100$, являются независимыми случайными величинами, подсчитайте

(i) $\mathbf{E}[\sum_1^{100} R_i]$, (ii) $\mathbf{D}(\sum_1^{100} R_i)$ при $\delta = 0{,}06$.

(c) Произведите вычисления п. (b), если $\delta = 0$.

(d) В финансовой отчетности фирма предпочитает указывать актуарную настоящую стоимость счетов на оплату. Используется результат п. (a). Какую сумму для счетов на оплату следует указать в отчете?

(e) В качестве альтернативы при вычислении актуарной настоящей стоимости счетов на оплату, указываемой в отчете, фирма может использовать результаты п. (c). Какую сумму надо указывать в отчете?

(f) Еще одним методом составления отчета будет использование результатов п. (c) при $\delta = 0{,}00$ с указанием в отчете величины

$$\mathbf{E}\left[\sum_1^{100} R_i\right] - k\sqrt{\mathbf{D}\left[\sum_1^{100} R_i\right]}.$$

Для какого значения коэффициента k величина, указываемая в отчете, согласно п. (f), будет равна соответствующей величине из п. (d)?

К разделу 15.3

15.4. (a) Предположим, что в примере табл. 15.3.1 $b_{x+1}^{(2)} = 257{,}41$ и $b_{x+2}^{(2)} = 581{,}16$, а нетто-резерв взят из модели с единственной причиной выбытия. Найдите $P^2_{x:\overline{3}|}$, используя принцип эквивалентности.

(b) Предположим, что $b_{x+1}^{(2)} = 218{,}41$ и $b_{x+2}^{(2)} = 559{,}16$, а общий резерв взят из модели с единственной причиной выбытия. Определите G, премию с надбавкой на расходы, используя принцип эквивалентности.

К разделу 15.4

15.5. Ежегодная постоянная премия с надбавкой на расходы для 1000 договоров смешанного страхования жизни на срок до возраста 65 лет, заключенных лицами в возрасте 40 лет, рассчитывается при следующих предположениях:

- комиссионные агенту составляют 40% премии с надбавкой на расходы за первый год,
- комиссионные второго и последующих лет составляют 5% премии с надбавкой на расходы со 2-го по 10-й год действия договора,
- налог на премии составляет 2% от премии с надбавкой на расходы за каждый год,

• расходы на ведение договора составляют 12,50 на 1000 единиц страховой суммы в 1-й год и 4,00 на 1000 единиц страховой суммы в последующие годы,

• нетто-премия должна обеспечивать выплату на случай смерти в момент смерти без корректировки премии в случае смерти,

• должна использоваться селекционная и заключительная таблица с 15-летним сроком действия селекции. Запишите выражение для премии с надбавкой на расходы.

15.6. Единовременная премия с надбавкой на расходы по договору смешанного страхования на срок n лет определяется при следующих предположениях:

• налоги составляют 2,5% от премий с надбавкой на расходы,

• комиссионные составляют 4% от премий с надбавкой на расходы,

• другие расходы составляют 5 единиц в первый год и 2,5 единиц в последующие годы на 1000 единиц страховой суммы.

Страховые выплаты производятся сразу после наступления страхового случая, а расходы возмещаются в начале каждого года действия договора. Выведите формулу для премии с надбавкой на расходы при страховой сумме 1000 единиц по договору, заключенному с лицом (x).

15.7. Ежегодная премия с надбавкой на расходы по бессрочному договору страхования на случай смерти со страховой суммой размера 1 в дискретной модели основана на следующем наборе расходов:

• начальные расходы e_0,

• расходы $e_1 + e_2 P_x$ в каждый год действия договора, включая первый,

• расходы, связанные с урегулированием страховых случаев и выплачиваемые сразу после наступления страхового случая в размере e_3 на каждую единицу страховой суммы.

Если $G = aP_x + c$, то определите a и c.

15.8. Имеются две случайные величины: с.в. $T(x)$, продолжительность предстоящей жизни лица (x), и с.в. B, размер страховой суммы, выбранной случайно взятым заявителем, желающим заключить договор бессрочного страхования на случай смерти в непрерывной модели. Случайная величина потерь с учетом расходов по этому договору задается равенством

$$L(T(x), B)_e = \begin{cases} 0, & T < 0, \\ Bv^T + \alpha B\bar{a}_{\overline{T|}} + \theta\bar{a}_{\overline{T|}} + \rho(B\pi + f)\bar{a}_{\overline{T|}} - (B\pi + f)\bar{a}_{\overline{T|}}, & 0 < T. \end{cases}$$

В формуле для этой случайной величины потерь

$\alpha B =$ расходы, пропорциональные страховой сумме и производимые непрерывно в течение жизни лица (x);

$\theta =$ расходы, не зависящие от величины премии и страховой суммы и производимые непрерывно в течение жизни лица (x);

$\rho(B\pi + f) =$ расходы, пропорциональные величине премии и производимые непрерывно в течение жизни лица (x);

$\pi =$ доля непрерывно выплачиваемой премии, пропорциональная страховой сумме;

$f =$ специальная надбавка на покрытие расходов, не зависящих от страховой суммы, выплачиваемая непрерывно в течение жизни лица (x).

Предположим, что с.в. $T(x)$ и B независимы.

(a) Используя принцип условной эквивалентности, т. е.

$$\mathbf{E}[L(T(x), B)_e \mid B = b] = 0,$$

выведите формулу для величины ежегодной премии на единицу страховой суммы, т. е. получите выражение $\pi + f/b$.

(b) Используя принцип безусловной эквивалентности,

$$\mathbf{E}[L(T(x), B)_e] = 0,$$

выведите формулу для величины ежегодной постоянной премии на единицу страховой суммы.

15.9. Функция плотности распределения страховой суммы по определенному виду индивидуального страхования задана формулой $f(b) = kb^{-3}$, $b > 10$, где b измеряется в тысячах. Вычислите

(a) нормирующую константу k;

(b) математическое ожидание страховой суммы;

(c) медиану распределения страховой суммы.

15.10. Один из видов договоров бессрочного страхования на случай смерти (в полунепрерывной модели) имеет следующее распределение расходов:

	Доля от премии с надбавкой на расходы	На 1000 единиц страховой суммы	Не зависящие от страховой суммы
Расходы первого года	30%	3,00	10,00
Расходы второго и последующих лет	5%	0,50	2,50

(a) Выведите формулы для премий с надбавкой на расходы для первого года и для второго и последующих лет, предполагая, что расходы, не зависящие от страховой суммы, рассматриваются отдельно для первого года и для последующих лет.

(b) Выведите формулу для специальной надбавки на покрытие расходов, не зависящих от страховой суммы, для каждого года, если эти расходы рассматриваются совместно для первого и для последующих лет.

К разделу 15.5

15.11. Непрерывным аналогом формулы (15.5.5) является дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dt}\,{}_tp_x[{}_t\bar{V}(\bar{A}_x) + \bar{u}(t)] = {}_tp_x[\bar{P}(\bar{A}_x) + \delta_t\,\bar{V}(\bar{A}_x) + \bar{c} - \bar{e}(t) + \delta\bar{u}(t) - \mu_x(t)].$$

Используя это уравнение и вариант формулы (8.6.4), который дает выражение для величины $\frac{d}{dt}\,[{}_tp_x\,{}_t\bar{V}(\bar{A}_x)]$, покажите, что

$${}_tp_x\,\bar{u}(t) = \int_0^t e^{\delta(t-y)}\,{}_yp_x[\bar{c} - \bar{e}(y)]\,dy.$$

К разделу 15.6

15.12. Запишите формулу для ${}_{10}AS_2 - {}_{10}AS_1$, если величина ${}_{10}AS_1$, определенная соотношением (15.6.7), представляет собой долю активов на конец года 10, основанную на G_1, а ${}_{10}AS_2$ — соответствующую величину, основанную на G_2.

15.13. Непрерывным аналогом разностного уравнения (рекуррентного соотношения) (15.6.3) является

$$\frac{d}{dt}\,{}_tp_x^{(\tau)}v^t\,{}_t\overline{AS} = [\bar{G}(1 - \bar{c}(t) - \bar{e}(t)]{}_tp_x^{(\tau)}v^t - {}_tp_x^{(\tau)}[\mu_x^{(1)}(t) + \mu_x^{(2)}(t)\,{}_t\overline{CV}]v^t.$$

В этом дифференциальном уравнении черта сверху в обозначениях указывает на непрерывный способ выплат.

(a) Решите это дифференциальное уравнение и используйте начальное условие ${}_0\overline{AS} = 0$ для получения непрерывного варианта соотношения (15.6.5):

$${}_t\overline{AS} = \left\{\int_0^t [\bar{G}(1 - \bar{c}(s)) - \bar{e}(s)]\,{}_sp_x^{(\tau)}v^s\,ds - \int_0^t {}_sp_x^{(\tau)}[\mu_x^{(1)}(s) + \mu_x^{(2)}(s)\,{}_s\overline{CV}]v^s\,ds\right\}\Big/(v^t\,{}_tp_x^{(\tau)}).$$

(b) Для договора бессрочного страхования на случай смерти в непрерывной модели ${}_0\overline{AS} = {}_{w-x}\overline{AS} = 0$. Покажите, что

$$G\bar{a}_x^{(\tau)} = \bar{A}_x^{(1)} + \int_0^\infty [\bar{G}\bar{c}(s) + \bar{e}(s) + \mu_x^{(2)}(s)\,{}_s\overline{CV}]\,{}_sp_x^{(\tau)}v^s\,ds.$$

К разделу 15.7

15.14. (a) С помощью формулы (8.2.7) найдите аналог формулы (15.7.2) для модели с единственной причиной выбытия без учета расходов:

$$ {}_t\bar{V} = \int_0^\infty v^u \{b_{t+u}\,\mu_x(t+u) - \pi_{t+u}]_u p_{x+t}\}\,du = \int_0^\infty v^u f(u:t)\,du = \int_0^t (1+i)^{t-\mu} g(u:0)\,\frac{du}{{}_t p_x}\,. $$

При выведении этой формулы следует предположить, что используется агрегативная таблица смертности, как в разд. 7.2 и 7.3.

(b) В момент времени t будущая интенсивность начисления процента меняется с δ на δ'. В распределении продолжительности предстоящей жизни никаких изменений из-за изменений в процентной ставке не происходит, а изменения величины премии π_{t+u} запрещены договором страхования. Символ ${}_t\bar{V}'$ обозначает резервы, рассчитанные при интенсивности начисления процента δ'. Выпишите формулу для ${}_t\bar{V}' - {}_t\bar{V}$. [Если изменения интенсивности начисления процента с δ на δ' связано с наблюдаемыми изменениями процентных ставок на рынке капитала, то разность ${}_t\bar{V}' - {}_t\bar{V}$ может рассматриваться как оценка изменения рыночной стоимости резерва.]

16

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ОТЧЕТНОСТИ И РЕГУЛИРОВАНИЯ

16.1. Введение

В гл. 15 был сделан важный шаг в направлении повышения реалистичности моделей страхования жизни, исследовавшихся в предыдущих главах. Были введены операционные расходы и выкупные суммы и исследовано влияние этих новых элементов на премии, резервы и финансовую отчетность.

В этой главе рассматривается несколько вопросов, которые развивают основную тему гл. 15. Два основных соображения обеспечивают взаимосвязь между ними.

Первое соображение состоит в развитии моделей с единственной причиной выбытия, которые аппроксимируют результаты в более сложных моделях с несколькими причинами выбытия, учитывающих расходы, с достаточной для конкретных целей степенью точности. Например, в ряде законодательств такие аппроксимирующие модели используются для страхового регулирования. Необходимость таких аппроксимаций объясняется очевидной концептуальной и вычислительной сложностью моделей выбытия по нескольким причинам, учитывающих расходы. При имеющихся возможностях компьютеров эта их роль уменьшается.

Второе из этих соображений исходит из экономики. Те, кто предоставляет капитал для организации страховой компании и стабилизации ее работы, ожидают вознаграждения за инвестиции. Брутто-премии должны обеспечивать прибыль в соответствии с тем риском, которому подвергается инвестор. Если страховая компания является компанией взаимного страхования, то возникает вопрос, как справедливо распределить среди ее членов прибыль, получаемую в случае благоприятного развития событий. Для решения такого рода проблем следует заимствовать идеи из экономики.

16.2. Денежные стоимости

Разделы 11.4 и 15.3 посвящены выкупным суммам и их влиянию на премии и финансовую отчетность. Выкупные суммы также называются *сохраненными выплатами*, т. е. выплатами, которые не теряются вследствие досрочного прекращения выплаты премий.

Для определения премий и резервов требуется сначала принять принцип их расчета. При определении размера выкупных сумм также нужен руководящий принцип. В этом разделе мы примем простой принцип, который является близким к принципу, принятому для регулирования страховой деятельности в Соединенных Штатах Америки. Этот принцип состоит в том, что страхователь, досрочно прервавший договор, получает такую сумму, что страховая выплата, премия и структура резерва, основанные на модели выбытия по единственной причине, остаются пригодными и в контексте выбытия по нескольким причинам. Принятие этого принципа также позволяет использовать для надзора за страховой деятельностью менее сложную модель.

Применение этого принципа мотивируется определенной концепцией равенства страховой защиты двух классов страхователей: тех, кто прекратил выплату премий прежде, чем условия основного страхового договора были полностью выполнены, и тех, кто не сделал этого. Ясно, что можно предложить разные концепции такого рода равенства, от точки зрения, что страхователи, досрочно прекратившие выплату премий, не выполнили условия договора и, следовательно, не имеют права на выкупные суммы, до точки зрения, что таких страхователей следует вернуть к первоначальному состоянию путем возврата накопленной стоимости всех премий, возможно за вычетом расходов на ведение дела. Концепция равенства, рассматриваемая в этом разделе, является промежуточной, т. е. страхователь, досрочно прервавший договор страхования жизни, имеет право на сохраненные выплаты, но эти выплаты не должны изменить соотношение между премиями и выплатами для страхователей, которые не аннулировали своих договоров.

В разд. 11.4 не затрагивался вопрос о расходах и соответствующих надбавках к премии. Поэтому, если для определения размера сохраненных страховых выплат на момент прекращения выплаты премий применяется общий принцип, сформулированный в указанном разделе, то необходимо компенсировать эти недостающие факторы. Приближенный метод внесения в нетто-резерв поправок на начальные расходы, еще не покрытые надбавкой на расходы к премии, и риска досрочного прерывания договора в неудобное для страховщика с финансовой точки зрения время — это расчет величины

$$ {}_kCV = {}_kV - {}_kSC. \tag{16.2.1} $$

В этом равенстве ${}_kCV$ означает *денежную стоимость* выкупной суммы в момент $k = 1, 2, 3, \ldots$ после заключения договора, ${}_kV$ — конечный резерв[1)], а ${}_kSC$ — *штраф за нарушение условий договора*. Из-за сложности сбора дополнительных средств со страхователей, досрочно прекративших выплату премий, ${}_kCV \geqslant 0$.

Денежные стоимости, определенные формулой (16.2.1), составляют основу того, что называлось выкупными суммами в разд. 11.4 и 15.3. В предыдущих разделах они обозначались $B^{(2)}_{x+t}$. Эти выкупные суммы не обязательно выплачиваются наличными, но являются основой для эквивалентных (с актуарной точки зрения) изменений условий договора, описанных в разд. 16.3.

Постоянным вопросом при регулировании денежной стоимости сохраненных страховых выплат является необходимость непосредственного определения суммы и момента возникновения расходов. В связи с этим возникает мысль определить минимальную денежную стоимость на единицу страховой суммы по формуле

$$ {}_kCV = A(k) - P^a\, \ddot{a}(k) = {}_kV - (P^a - P)\ddot{a}(k), \tag{16.2.2} $$

где $A(k)$ и $\ddot{a}(k)$ — соответственно символы актуарной настоящей стоимости страховых выплат и аннуитета в моменты времени k, $k = 1, 2, 3, \ldots$, после заключения договора, ${}_kV$ означает конечный резерв на тот же момент времени, P — ежегодная нетто-премия, а P^a называется *скорректированной премией*. Вместо $A(0)$ и $\ddot{a}(0)$ мы будем писать A и $\ddot{a}$ соответственно. Проблема страхового регулирования сводится к определению величины скорректированной премии.

---

1) См. определение в разд. 8.3. — *Прим. ред.*

Отчет Комитета Общества актуариев по изучению сохраненных обязательств и смежных вопросов от 1975 г. включает в себя обсуждение двух типов расходов при определении скорректированной премии. Первым является постоянная величина на единицу страховой суммы, обозначенная через E, которая возникает каждый год на всем протяжении периода выплаты премий. Вторым является компенсация дополнительных расходов первого года в размере E_0. Предполагается, что брутто-премия G состоит из скорректированной премии и компоненты постоянных ежегодных расходов E, а компонента дополнительных расходов первого года E_0 обеспечивается скорректированной премией. Таким образом,

$$G = P^a + E, \tag{16.2.3A}$$

$$G\ddot{a} = (P^a + E)\ddot{a} = A + E_0 + E\ddot{a}. \tag{16.2.3B}$$

Из равенств (16.2.3B) мы получаем

$$P^a = (A + E_0)/\ddot{a}. \tag{16.2.4}$$

Формула (16.2.4) может быть переписана после замены $\ddot{a} = a + 1$ в виде

$$P^a - E_0 + P^a a = A. \tag{16.2.5}$$

Пример 16.2.1. Примерное положение Национальной ассоциации специальных уполномоченных по страхованию[1] от 1980 г. о расчете сохраненных обязательств использует для определения минимальных денежных стоимостей формулы (16.2.2) и (16.2.4). Согласно этому примерному положению, для договоров с постоянными страховыми выплатами и постоянными брутто-премиями $E_0 = 1{,}25\min(P,\ 0{,}04) + 0{,}01$, где P обозначает величину годовой нетто-премии в пересчете на единицу выплат на случай смерти по этому договору. Выразим расходы первого года E_0 и соответствующие скорректированные премии для (a) $P < 0{,}04$, (b) $P \geqslant 0{,}04$.

Решение. (a) $P < 0{,}04$, $E_0 = 1{,}25P + 0{,}01$, $P^a = (A + 1{,}25P + 0{,}01)/\ddot{a}$;
(b) $P \geqslant 0{,}04$, $E_0 = 0{,}06$, $P^a = (A + 0{,}06)/\ddot{a}$.

Пример 15.3.1 можно интерпретировать как использование формул (16.2.2) и (16.2.4) для определения денежных стоимостей при $E_0 = 0{,}04$. ▼

В этом разделе мы обсудили принцип определения минимальной денежной стоимости, используемый в законодательстве многих штатов и стран. Этот метод является еще одним примером использования модели с единственной причиной выбытия (при произвольных предположениях о величине и моменте возникновения расходов) для аппроксимации более сложной модели с двумя причинами выбытия. В истории законодательного регулирования величин сохраненных выплат отклонения от этого общего принципа наблюдались редко.

Для юридического завершения определения минимальных денежных стоимостей нужно указать процентную ставку и таблицу смертности, которые предписывается использовать. Законодательные изменения предписаний об использовании процентных ставок и таблиц смертности при установлении минимальной денежной стоимости происходили более часто, чем изменения общих принципов. Примерное положение от 1980 г. обеспечивает пересмотр максимальной процентной ставки в

---

[1] Подробнее об этой ассоциации см., например: Страхование и управление риском. Терминологический словарь. — М.: Наука, 2000. — *Прим. ред.*

соответствии с формулой, частично опирающейся на индекс средних учетных ставок, наблюдавшихся в течение некоторого периода времени до момента заключения договора.

Когда брутто-премия или страховые выплаты не являются постоянными, это примерное положение нуждается в модификации. Такие модификации будут рассматриваться в разд. 16.9. Они являются частным случаем очень похожих модификаций, которые необходимы, чтобы приспособить стандарты, выработанные органами страхового регулирования при рассмотрении обязательств по резервам, к случаю непостоянных брутто-премий и страховых выплат.

Так как исходный договор был договором страхования, существует точка зрения, что выкупная сумма может быть использована для обеспечения обязательств по измененному договору страхования. С этой точки зрения денежная стоимость является инструментом определения новых страховых выплат. Варианты такого изменения договора обсуждаются в разд. 16.3. Кроме того, денежные стоимости формируют основу другого важного положения, а именно права на получение займа под договор. Согласно этому положению, страховщик обязуется выдать денежный заем под залог денежной стоимости, не превышающий ее размера. Одно время процентная ставка по таким займам устанавливалась в договоре. Однако в ответ на неустойчивость процентной ставки возникла тенденция привязывать процентные ставки по займу под договор к некоторой рыночной процентной ставке, приемлемой в момент выдачи займа. Невыплаченная сумма долга вычитается из выплат на случай смерти, дожития или выкупной суммы, в зависимости от типа договора.

16.3. Право изменения условий договора

Денежные стоимости выплачиваются либо в форме единовременной выплаты, либо как страховые выплаты равной им актуарной настоящей стоимости. Далее обсуждается три общих вида новых договоров.

16.3.1. Оплаченное страхование

Для определения измененной величины страховой суммы оплаченного страхования в соответствии с условиями выплат по договору используется принцип эквивалентности. Если прекращение выплаты премий произойдет через k лет после заключения договора, общее уравнение для оплаченной страховой суммы, обозначаемой через b_k, записывается в виде

$$ {}_kCV = b_k A(k), \qquad b_k = {}_kCV/A(k), \tag{16.3.1}$$

где ${}_kCV$ — денежная стоимость в момент прекращения выплаты премий, а $A(k)$ — актуарная настоящая стоимость будущих страховых выплат размера 1 по этому договору в момент времени k. На практике, если нужно, используются различные усложнения символа $A(k)$, чтобы указать различные сроки, наличие выплат на дожитие и то, что выплаты происходят сразу после страхового случая.

Для страховой выплаты размера 1 в частном случае, когда ${}_kCV = {}_kV$, где ${}_kV$ — нетто-резерв, формула (16.3.1) может быть переписана в еще более прозрачной форме. Некоторые из подобных соображений уже были приведены в связи с формулами (7.3.2) и (7.4.6). В этом частном случае для обозначения оплаченной страховой суммы используется символ ${}_kW = b_k = {}_kV/A(k)$. В табл. 16.3.1 представлены некоторые соотношения между ${}_kW$ и другими актуарными величинами. Дополнительные соотношения этого типа приведены в упр. 16.7 и 16.8.

Таблица 16.3.1. Оплаченная страховая сумма

Частный случай $b_k = {}_kW = {}_kV/A(k)$	
непрерывная модель	дискретная модель
Бессрочное страхование на случай смерти	
${}_k\bar{W}(\bar{A}_x) = \dfrac{\bar{A}_{x+k} - \bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{x+k}}{\bar{A}_{x+k}} = 1 - \dfrac{\bar{P}(\bar{A}_x)}{\bar{P}(\bar{A}_{x+k})}$	${}_kW_x = \dfrac{A_{x+k} - P_x\ddot{a}_{x+k}}{A_{x+k}} = 1 - \dfrac{P_x}{P_{x+k}}$
Бессрочное страхование на случай смерти с n-летним периодом выплаты премий ($k < n$)	
${}^n_k\bar{W}(\bar{A}_x) = \dfrac{\bar{A}_{x+k} - {}_n\bar{P}(\bar{A}_x)\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}\rceil}}{\bar{A}_{x+k}} = 1 - \dfrac{{}_n\bar{P}(\bar{A}_x)}{{}_{n-k}\bar{P}(\bar{A}_{x+k})}$	${}^n_kW_x = \dfrac{A_{x+k} - {}_nP_x\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}\rceil}}{A_{x+k}} = 1 - \dfrac{{}_nP_x}{{}_{n-k}P_{x+k}}$
Смешанное страхование на срок n лет ($k < n$)	
${}_k\bar{W}(\bar{A}_{x:\overline{n}\rceil}) = \dfrac{\bar{A}_{x+k:\overline{n-k}\rceil} - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}\rceil})\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}\rceil}}{\bar{A}_{x+k:\overline{n-k}\rceil}} = 1 - \dfrac{\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}\rceil})}{\bar{P}(\bar{A}_{x+k:\overline{n-k}\rceil})}$	${}_kW_{x:\overline{n}\rceil} = \dfrac{A_{x+k:\overline{n-k}\rceil} - P_{x:\overline{n}\rceil}\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}\rceil}}{A_{x+k:\overline{n-k}\rceil}} = 1 - \dfrac{P_{x:\overline{n}\rceil}}{{}_{n-k}P_{x+k:\overline{n-k}\rceil}}$

Результаты табл. 16.3.1 можно пояснить с помощью следующих рассуждений. В возрасте $x + k$ лет нетто-премия по договору бессрочного страхования на случай смерти со страховой суммой размера 1 составляет P_{x+k}. Таким образом, ежегодной премии P_x, выплачиваемой с возраста $x + k$, достаточно для обеспечения страховых выплат лишь в размере P_x/P_{x+k}. Поскольку P_x является нетто-премией, фактически выплачиваемой для обеспечения страховой суммы размера 1, разность $1 - P_x/P_{x+k}$ в момент времени k должна обеспечиваться резервом. Эти рассуждения можно применить и к другим видам страхования.

16.3.2. Измененный срок страхования

Для определения продолжительности действия нового договора срочного страхования с такой же страховой суммой, как в исходном договоре, обеспеченного выкупной суммой, используется принцип эквивалентности. В случае страховой выплаты размера 1 нужно разрешить относительно s уравнение

$$ {}_kCV = \bar{A}^{\;1}_{x+k:\overline{s}\rceil}. \tag{16.3.2} $$

В случае смешанного страхования может случиться так, что s больше $n-k$, времени, оставшегося до окончания действия договора. В этом случае величина денежной стоимости, не использованная для обеспечения срочного оплаченного страхования используется для обеспечения страхования на дожитие со страховой суммой

$$ ({}_kCV - \bar{A}^{\;1}_{x+k:\overline{n-k}\rceil})/\bar{A}_{x+k:\overline{n-k}\rceil}^{\;\;\;\;\;1}. \tag{16.3.3} $$

Если под договор со страховой суммой b в момент прекращения выплаты премий был взят заем в размере L, то, как правило, заключается договор с измененным сроком страхования на сумму $b - L$. Без этого условия страхователь, взяв заем размера L с сохранением выплат на случай смерти $b - L$, мог бы увеличить страховую сумму до b, просто отказавшись вносить премии. В случае займа под договор размера L формула (16.3.2) приобретает вид

$$b\,{}_kCV - L = (b - L)\bar{A}^{\ 1}_{x+k:\overline{s}|}\,.$$

Если страхователь, прекратив выплату премий, выбирает изменение страховой суммы или изменение срока страхования, то страховщик должен предоставить ему такую возможность изменить условия договора. Лица с хорошим здоровьем чаще предпочитают изменить страховую сумму, а лица с плохим здоровьем — изменить срок страхования. Для компенсации дополнительных расходов, связанных с реализацией права на изменение условий договора, при определении величины $\bar{A}^{\ 1}_{x+k:\overline{s}|}$ в формуле (16.3.2) некоторые страховщики используют таблицы смертности с более высокими вероятностями смерти, чем при определении величины $A(k)$ в формуле (16.3.1).

Основное соображение состоит в том, что переход страхователя из одного состояния, определенного в договоре, в другое — это информация, которую следует использовать при определении условных распределений продолжительности периода между моментом такого перехода и моментом смерти. Эти соображения возникают также при обсуждении ускоренных выплат в разд. 17.6 и страхования на случай последней смерти в группе в разд. 18.7.

Пример 16.3.1. По договору бессрочного страхования на случай смерти в полунепрерывной модели, заключенному с лицом (40), предусмотрена страховая выплата размера 100 000. Используя Иллюстративную таблицу смертности с равномерным распределением случаев смерти в течение каждого годичного возрастного интервала и $i = 0{,}06$, определим следующие показатели на момент времени 10:

(a) минимальную выкупную сумму в соответствии с Примерным положением Национальной ассоциации специальных уполномоченных по страхованию от 1980 г. о расчете сохраненных обязательств;

(b) продолжительность измененного срока страхования при условии, что размер денежной стоимости по договору равен 8700;

(c) продолжительность измененного срока страхования при сформулированном в п. (b) условии в случае непогашенного займа под договор в размере 5000.

Решение. Приведенные ниже расчеты произведены на основе Иллюстративной таблицы смертности, составленной в ходе решения упражнений с использованием компьютера. *Одновременное* использование этой Иллюстративной таблицы смертности как для исходных оценок премий и резервов, так и для расчета продолжительности измененного срока страхования может быть нереалистичным, так как продолжительность предстоящей жизни страхователя, реализующего право на изменение срока страхования, может определяться более высокими показателями смертности, чем продолжительность предстоящей жизни только что застрахованного лица.

(a) $P(\bar{A}_{40}) = \bar{A}_{40}/\ddot{a}_{40} = (i/\delta)A_{40}/\ddot{a}_{40} = 0{,}011211537$,

$E_0 = 1{,}25\,\mathrm{Min}[P(\bar{A}_{40}), 0{,}04] + 0{,}01 = 0{,}024014421$,

$P^a = P(\bar{A}_{40}) + E_0/\ddot{a}_{40} = 0{,}012832315$.

Минимальная денежная стоимость на момент времени 10 равна 8620,2247.

Нетто-резерв на момент времени 10 равен 10 770,4823.

(b) Для определения s формула (16.3.2) дает следующие соотношения: $8700 = 100\,000\bar{A}^{1}_{50:\overline{s}|}$, или $0{,}08700 = \bar{A}^{1}_{50:\overline{s}|}$. Чтобы использовать предположение о равномерности распределения моментов смерти в течение каждого годичного возрастного интервала, начнем с определения такого целого числа $\lfloor s \rfloor$, что

$$\bar{A}^1_{50:\overline{\lfloor s \rfloor}|} < 0{,}08700 < \bar{A}^1_{50:\overline{\lfloor s \rfloor + 1}|}.$$

Согласно Иллюстративной таблице смертности,

$$\bar{A}^1_{50:\overline{13}|} = 0{,}083094960 \quad \text{и} \quad \bar{A}^1_{50:\overline{14}|} = 0{,}090194845.$$

[Указание. См. п. (b) в конце разд. 4.3.]

Таким образом,

$$0{,}087 = \bar{A}^1_{50:\overline{s}|} = 0{,}083094960 + v^{13}{}_{13}p_{50} \int_0^{s-13} q_{63}\, v^t\, dt,$$

$$\frac{0{,}003905040(1{,}06)^{13}}{{}_{13}p_{50}\, q_{63}} = \frac{1 - v^{s-13}}{\ln(1{,}06)},$$

$$v^{s-13} = 0{,}968948162 \quad \text{и} \quad s = 13 + 0{,}541355012.$$

Эту величину можно округлить до 13 лет и 198 дней.

(c) Найдем теперь такое s, что $(8700 - 5000) = (100\,000 - 5000)\bar{A}^1_{50:\overline{s}|}$, или $0{,}038947368 = \bar{A}^1_{50:\overline{s}|}$. Рассуждая, как в п. (b), получим $s = 6{,}444084519$. Округляя, получаем 6 лет и 163 дня. ▼

16.3.3. Автоматический заем на уплату премий

Другим вариантом условия, которое не все актуарии относят к сохраненным выплатам, является условие автоматического займа на уплату премий. Это условие обеспечивает сохранение обязательств по исходному договору в полном объеме при прекращении выплаты премий до тех пор, пока соответствующая денежная стоимость больше, чем растущий вследствие начисления процента и прекращения выплаты премий размер займа под договор. По такому условию страхователь имеет одностороннее право на восстановление обязательств по договору в полном объеме по возмещении займа. Споры по поводу классификации такого варианта условий ведутся из-за того, что восстановление обязательств в полном объеме по другим типам условий, предусмотренных в подобных случаях, обычно требует выплаты накопленной задолженности по брутто-премии и часто проведения повторного андеррайтинга.

При прекращении выплаты премии в момент времени k для договора страхования со страховой выплатой размера 1 в непрерывной модели максимальная длительность периода предоставления займа на уплату премий является решением уравнения

$$G\bar{s}_{\overline{t}|i} = {}_{k+t}CV \tag{16.3.4}$$

относительно t, в котором

- G — величина брутто-премии на единицу страховой суммы;
- ${}_{k+t}CV$ — денежная стоимость на единицу страховой суммы;
- i — процентная ставка по займу под страховой договор.

На практике t иногда находят как целое число, такое, что

$$G\ddot{s}_{\overline{t}|i} \leqslant {}_{k+t}CV \quad \text{и} \quad G\ddot{s}_{\overline{t+1}|i} > {}_{k+t+1}CV.$$

Оставшаяся денежная стоимость ${}_{k+t}CV - G\ddot{s}_{\overline{t}|i}$ используется для обеспечения страхования на измененный срок.

Пример 16.3.2. Пусть условия договора бессрочного страхования со страховыми выплатами размера 1, заключенного лицом (x), в непрерывной модели изменяются в конце k-го года его действия.

(a) При условии, что ${}_kCV = {}_k\bar{V}(\bar{A}_x)$, выразим отношение дисперсии будущих потерь, связанных с изменением условий договора страхования, непосредственно после этого изменения к дисперсии будущих потерь в момент k по исходному договору страхования, если сохраненные выплаты обеспечивают

(i) оплаченное страхование;

(ii) страхование с измененным сроком.

(b) При $x = 35$ и $k = 10$ подсчитаем отношения из п. (a)(i) и п. (a)(ii) на основе Иллюстративной таблицы смертности с процентной ставкой 6% (см. упр. 6.10 и 7.23).

Решение. (a) (i) Согласно формуле (7.2.5), дисперсия перед изменением условий составляет

$$\left[1 + \frac{\bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta}\right]^2 [{}^2\bar{A}_{x+k} - (\bar{A}_{x+k})^2] = \frac{{}^2\bar{A}_{x+k} - (\bar{A}_{x+k})^2}{(1 - \bar{A}_x)^2}.$$

Для оплаченного страхования мы имеем случайную величину потерь

$${}_k\bar{W}(\bar{A}_x)v^{T(x)-k} - {}_k\bar{V}(\bar{A}_x),$$

дисперсия которой составляет $[{}_k\bar{W}(\bar{A}_x)]^2[{}^2\bar{A}_{x+k} - (\bar{A}_{x+k})^2]$. Отношение ее к дисперсии перед изменением условий договора равно $[{}_k\bar{W}(\bar{A}_x)]^2(1 - \bar{A}_x)^2$, что меньше 1.

(ii) В случае изменения срока страхования из формул (16.3.2) и (4.2.5) получаем, что дисперсия после изменения условий договора составит ${}^2\bar{A}_{\overset{1}{x+k}:\overline{s|}} - (\bar{A}_{\overset{1}{x+k}:\overline{s|}})^2$. Теперь отношение дисперсий представляет собой

$$[{}^2\bar{A}_{\overset{1}{x+k}:\overline{s|}} - (\bar{A}_{\overset{1}{x+k}:\overline{s|}})^2](1 - \bar{A}_x)^2/[{}^2\bar{A}_{x+k} - (\bar{A}_{x+k})^2].$$

(b) (i) ${}_{10}\bar{W}(\bar{A}_{35}) = {}_{10}\bar{V}(\bar{A}_{35})/\bar{A}_{45} = 0{,}08604/0{,}20718 = 0{,}41529$, $\bar{A}_{35} = 0{,}13254$, $[0{,}41529(1 - 0{,}13254)]^2 = 0{,}13$.

Дисперсия потерь по оплаченному страхованию составит 13% от дисперсии потерь по исходному договору страховании в конце 10-го года его действия.

(ii) ${}_{10}V(\bar{A}_{35}) = 0{,}08604\bar{A}^1_{45:\overline{s|}}$ дает величину s между 19 и 20. При $s = 19$ имеем

$$\frac{{}^2\bar{A}^1_{45:\overline{19|}} - (\bar{A}^1_{45:\overline{19|}})^2}{{}^2\bar{A}_{45} - (\bar{A}_{45})^2}(1 - \bar{A}_{35})^2 = \frac{0{,}04308}{0{,}02922}(0{,}86746)^2 = 1{,}11.$$

Так как s лежит между 19 и 20, дисперсия увеличивается примерно до 111% от величины дисперсии до изменения условий договора. ▼

16.4. Премии и экономические соображения

В разд. 15.2.1 и 15.3.1 мы ввели в формулы для премий ожидаемые расходы, использовав для этого принцип эквивалентности. Полученные премии были названы премиями с надбавкой на расходы, но их можно было бы также назвать премиями с учетом ожидаемых расходов. В разд. 15.2.2 и 15.3.2 была введена дополнительная сумма для обеспечения прибыли, а также «на случайность» как постоянная надбавка к премии с надбавкой на расходы. Определение целевых значений прибыли и их введение в процесс определения премий не обсуждались.

В этом разделе рассматриваются четыре метода определения премий, которые можно сформулировать в терминах моделей, включающих расходы. Эти четыре метода изучаются в порядке увеличения экономической сложности целей, которые преследуются при расчете прибыли.

16.4.1. Естественные премии

При определении брутто-премии для одновременного вычисления премий и денежных стоимостей используется метод, называемый *методом естественных премий и резервов*. Сначала на основе модели с единственной причиной выбытия вычисляется некоторый набор премий с надбавкой на расходы и соответствующие резервы, как это было сделано в табл. 15.2.4. Затем выкупные суммы устанавливаются равными совокупным резервам, нетто-резервам плюс резервы расходов, а к премии с надбавкой на расходы добавляется надбавка на прибыль и получается брутто-премия. Этот метод основан на том, что полученные таким образом выкупные суммы будут слабо влиять на премии и резервы, определенные в модели с двумя причинами выбытия, учитывающей расходы. Конечно, следует проверить, что полученные значения выкупных сумм соответствуют минимальным значениям, установленным органами страхового регулирования. Термины «естественные премии» и «естественные резервы» в некоторых актуарных приложениях используются в другом значении. Этот метод подробно излагался в разд. 15.3.

16.4.2. Целевое значение фонда

Формула (15.6.6) рассматривается здесь как общая формула для определения премии с надбавкой на расходы согласно принципу эквивалентности. Исследование разд. 15.6.1 можно расширить, указав способ учитывать компоненту, отражающую целевые значения прибыли, при определении брутто-премии.

При такой постановке менеджеры устанавливают целевое значение доли активов в размере, скажем, $K > {}_{20}V$. Если ожидаемые расходы и обязательства по обеспечению денежных стоимостей известны, то формулу (15.6.5) можно использовать для определения брутто-премии G следующим образом. Пусть пробное значение брутто-премии, обозначаемое через H, выбрано произвольно, и пусть величина ${}_{20}AS$ вычислена с помощью выражения (15.6.5) с этим значением H и с $n = 20$:

$$\begin{aligned}{}_{20}AS = \frac{1}{l_{x+20}^{(\tau)}}\Bigg\{ \sum_{h=1}^{20}[H(1-c_{h-1}) - e_{h-1}]\, l_{x+h-1}^{(\tau)}(1+i)^{21-h} \\ - (d_{x+h-1}^{(1)} + d_{x+h-1}^{(2)}\, {}_hCV)(1+i)^{20-h}\Bigg\}. \end{aligned} \tag{16.4.1}$$

Целевое значение K получается в результате применения формулы (16.4.1) с заменой H на G. Вычитая, получим

$$K - {}_{20}AS = \sum_{h=1}^{20} \frac{(G-H)(1-c_{h-1})l_{x+h-1}^{(\tau)}(1+i)^{21-h}}{l_{x+20}^{(\tau)}},$$

и искомая брутто-премия задается формулой

$$G = H + \frac{(K - {}_{20}AS)\, {}_{20}p_x^{(\tau)} v^{20}}{\sum\limits_{h=1}^{20} (1-c_{h-1})\, {}_{h-1}p_x^{(\tau)} v^{h-1}}. \tag{16.4.2}$$

Второе слагаемое в формуле (16.4.2) корректирует начальную премию H так, что целевое значение K достигается в смысле актуарных настоящих стоимостей. Знаменатель второго слагаемого можно интерпретировать как актуарную настоящую стоимость увеличения прибыли при увеличении брутто-премии на единицу.

16.4.3. Целевое значение нормы доходности

Прибыльность, к достижению которой стремятся в экономике, часто описывается в терминах нормы доходности на инвестированный капитал. Существует точка зрения, что важнейшим направлением инвестирования при создании страховой компании является развитие системы продаж. С этой точки зрения ожидаемую норму доходности инвестиций в систему продаж можно выразить как долю актуарной настоящей стоимости комиссионных вознаграждений, которые являются следствием работы этой системы. Кроме того, согласно этой точке зрения, страховая компания должна покрывать расходы на привлечение клиента в тот момент, когда эти расходы возникают, т. е. в момент заключения договора, в надежде на будущие доходы по этому договору.

Чтобы включить эти соображения в метод расчета премий, начнем с модели доли активов, изложенной в разд. 15.6. Одно из необходимых изменений состоит в том, чтобы разделить по видам расходы c_h, $c_h = g_h + t_h$, где g_h — ставка выплаченного комиссионного вознаграждения, а t_h включает остальные виды расходов, например, налоги на премии.

В табл. 15.3.4 в предположении, что не наблюдается никаких отклонений от математических ожиданий, были показаны финансовые операции очень маленькой компании страхования жизни. Рекуррентное соотношение, использованное для расчета табл. 15.3.4 и 15.3.5, тесно связано с формулой для долей активов (15.6.7). Перепишем эту формулу в предположении, что разность ${}_hAS' - {}_hV$ по окончании каждого года рассматривается как бухгалтерская прибыль или убытки и обозначается через ${}_hBP$, а начальная доля активов в $h+1$-м году действия договора устанавливается в размере ${}_hV$. Символ ${}_hV$ обозначает резерв, зафиксированный заранее. Чтобы подчеркнуть, что ${}_hBP$ выделяется из ожидаемого изменения фонда как прибыль, к обозначению для доли активов добавляется штрих.

Так как величина ${}_hBP$ измеряется на конец страхового года для каждого страхователя, который был жив на начало этого года, имеем

$$\begin{aligned}{}_hBP = {}_hAS' - {}_hV = \{[{}_{h-1}V + H(1 - g_{h-1} - t_{h-1}) - e_{h-1}](1+i) \\ - q^{(1)}_{x+h-1}(1 - {}_hV) - q^{(2)}_{x+h-1}({}_hCV - {}_hV)\} - {}_hV.\end{aligned}$$

Прибыль, указанная в бухгалтерской отчетности, ${}_hBP$, рассчитывается с помощью произвольной начальной премии H, которую можно рассматривать как нетто-премию; величина ${}_hBP$ может быть отрицательной. Это особенно вероятно в начальные годы действия договора.

Актуарная настоящая стоимость бухгалтерской прибыли на момент заключения договора задается формулой

$$v_j^h\, {}_{h-1}p_x^{(\tau)}\, {}_hBP = v_j\, {}_{h-1}E_x^*\, {}_hBP, \qquad h = 1, 2, 3, \ldots,$$

где v_j вычисляется на основе процентной ставки j, представляющей собой желательную норму доходности инвестиций в систему привлечения новых клиентов. Звездочка в обозначении выплат на дожитие указывает на то, что соответствующая величина вычисляется с процентной ставкой j в модели с двумя причинами выбытия.

Для начального значения премии H актуарная настоящая стоимость бухгалтерской прибыли инвестора страховой компании в момент заключения договора составляет

$$Z = \sum_{h=1}^{\infty} v_{j\ h-1} E_x^*\ _h BP.$$

Актуарная настоящая стоимость будущих комиссионных вознаграждений, основанная на начальном выборе премии и рассчитанная на момент заключения договора, равна

$$X = H \sum_{h=1}^{\infty} g_{h-1\ h-1} E_x^*,$$

а актуарная настоящая стоимость увеличения выплаты бухгалтерской прибыли инвестору на каждую единицу увеличения премии H, рассчитанная на момент заключения договора, — это

$$Y = \sum_{h=1}^{\infty} (1 - g_{h-1} - t_{h-1})(1+i) v_{j\ h-1} E_x^*.$$

Значение величины Y тесно связано со знаменателем дроби из формулы (16.4.2). Различие состоит в том, что Y измеряет влияние изменения премии на единицу за весь период действия договора, а в формуле (16.4.2) это влияние измеряется только за 20 лет, за которые достигается целевое значение фонда.

Пусть, как и ранее, G обозначает брутто-премию, соответствующую поставленной экономической цели, и предположим, что $G > H$. Вводятся две модифицированные величины. Пусть

$$Z' = Z + (G - H)Y \tag{16.4.3}$$

— модифицированное значение актуарной настоящей стоимости бухгалтерской прибыли инвестора, а

$$X' = (G/H)\, X \tag{16.4.4}$$

— модифицированное значение актуарной настоящей стоимости будущих комиссионных вознаграждений.

Экономическую цель можно описать формулой

$$Z' = bX', \tag{16.4.5}$$

где b — требуемая норма доходности капитала, инвестированного в систему продаж. Тогда из формулы (16.4.3) получаем $(G - H)Y = Z' - Z$ и в силу (16.4.4) и (16.4.5)

$$Z + (G - H)Y = bX' = b\,(G/H)\, X. \tag{16.4.6}$$

Равенство (16.4.6) имеет экономическую интерпретацию. Правая часть устанавливает экономическую цель. Левая часть содержит два слагаемых. Первое слагаемое Z является актуарной настоящей стоимостью бухгалтерской прибыли при начальном выборе брутто-премии H. Второе слагаемое $(G - H)Y$ представляет собой прирост актуарной настоящей стоимости бухгалтерской прибыли при увеличении брутто-премии на величину $G - H$.

Разрешая равенство (16.4.6) относительно G, получим $G = (H^2Y - HZ)/(HY - bX)$. Эта премия соответствует требуемой норме доходности j по новым договорам и норме прибыли b по комиссионному вознаграждению, связанным с инвестициями в систему продаж страховых продуктов.

16.4.4. Целевые значения риска

Другой подход к расчету надбавки на прибыль состоит в том, что инвестор должен получить прямую компенсацию за принятые на себя риски. Как и в разд. 15.3, обозначим через ${}_0L_e$ настоящую стоимость на момент заключения договора случайной величины потерь с учетом расходов по страховому договору в модели с двумя причинами выбытия. Тогда $\mathbf{D}[{}_0L_2]$ и $\sqrt{\mathbf{D}[{}_0L_2]}$ будут возможными мерами риска, связанного с этим договором. Обозначим через P' премию с надбавкой на расходы, определенную согласно принципу эквивалентности. Брутто-премия с надбавкой на прибыль, учитывающей риск, может быть представлена в виде

$$P' + c\mathbf{D}[{}_0L_e], \qquad c > 0, \tag{16.4.7}$$

или

$$P' + k\sqrt{\mathbf{D}[{}_0L_2]}, \qquad k > 0. \tag{16.4.8}$$

Премия в формуле (16.4.7) основана на *принципе дисперсии для расчета премии*, а (16.4.8) — на *принципе стандартного отклонения для расчета премии*.

Величина $\mathbf{D}[{}_0L_e]$ измеряет риски, связанные с неопределенностью момента и причины выбытия. Из-за важности учета инвестиционного риска при долгосрочном страховании некоторые актуарии ограничивают применение принципов дисперсии и стандартного отклонения краткосрочными договорами страхования или вводят случайные процентные ставки в случайную величину потерь.

Если обе величины c и k являются константами, то принцип стандартного отклонения имеет то преимущество, что премия с надбавкой на расходы и брутто-премия измеряются в одних и тех же денежных единицах. Однако, если c зависит от риска и имеет размерность «(денежные единицы)$^{-1}$», то в принципе дисперсии как премия с надбавкой на расходы, так и брутто-премия измеряются в одних и тех же денежных единицах.

Одно из преимуществ принципа дисперсии можно продемонстрировать, рассмотрев две независимые случайные величины потерь с учетом расходов, обозначенные через ${}_0L_e(1)$ и ${}_0L_e(2)$. Тогда

$$c\mathbf{D}[{}_0L_e(1) + {}_0L_e(2)] = c\mathbf{D}[{}_0L_e(1)] + c\mathbf{D}[{}_0L_e(2)]. \tag{16.4.9}$$

С другой стороны,

$$k\sqrt{\mathbf{D}[{}_0L_e(1)] + \mathbf{D}[{}_0L_e(2)]} < k\sqrt{\mathbf{D}[{}_0L_e(1)]} + k\sqrt{\mathbf{D}[{}_0L_e(2)]}.$$

Это свойство принципа дисперсии называется *аддитивностью*. Аддитивность означает, что премия для суммы независимых рисков является суммой их индивидуальных премий. Надбавки на прибыль и «на случайность» для группы независимых договоров являются суммой соответствующих надбавок для отдельных договоров. Упражнение 16.11 показывает, что простая пропорциональная надбавка к премии на прибыль и «на случайность» также обладает свойством аддитивности.

Пример 16.4.1. Используем результаты табл. 15.3.2 для вычисления брутто-премии согласно (a) принципу дисперсии при $c = 0{,}05$ и (b) принципу стандартного отклонения при $k = 1{,}0$.

Решение. (a) $332{,}96 + 0{,}05(224{,}25) = 344{,}17$, (b) $332{,}96 + 1{,}0\sqrt{224{,}25} = 347{,}93$. ▼

16.5. Поправки на накопленный опыт

Набор долей активов, рассчитанных с использованием формулы (15.6.7) теоретически, до момента заключения договоров из некоторого портфеля, почти наверное будет отличаться от активов на одного дожившего страхователя, определенных эмпирически, на основе накопленного опыта. Формулы разд. 15.6 все же можно применять для анализа источников доходов и расходов и для измерения отклонения соответствующих эмпирических значений от теоретических, ожидаемых значений. Предположим, что нас интересует, как происходит переход от величины ${}_kAS$ к величине ${}_{k+1}\widehat{AS}$, где «крышка» означает, что $(k+1)$-я доля активов получена из математического ожидания k-й доли активов с использованием эмпирических показателей расходов. Такие эмпирические, полученные на основе накопленного опыта, показатели снабжаются «крышкой»[1]. В частности, $\hat{i}_{k+1}$ — эмпирическая процентная ставка, по которой начисляется доход в течение $(k+1)$-го года действия договора. Эмпирическая доля активов будет определяться формулой

$$\begin{aligned}{}_{k+1}\widehat{AS} = [{}_kAS + G(1-\hat{c}_k) - \hat{e}_k](1+\hat{i}_{k+1})\\ - \hat{q}^{(1)}_{x+k}(1 - {}_{k+1}\widehat{AS}) - \hat{q}^{(2)}_{x+k}({}_{k+1}CV - {}_{k+1}\widehat{AS}).\end{aligned} \qquad (16.5.1)$$

Вычитая равенство (15.6.7), которое описывает ожидаемое изменение во времени доли активов, из равенства (16.5.1), получим

$$\begin{aligned}&(a)\quad {}_{k+1}\widehat{AS} - {}_{k+1}AS = ({}_kAS + G)(\hat{i}_{k+1} - i)\\ &(b)\quad\quad + [(Gc_k + e_k)(1+i) - (G\hat{c}_k + \hat{e}_k)(1+\hat{i}_{k+1})]\\ &(c)\quad\quad + [q^{(1)}_{x+k}(1 - {}_{k+1}AS) - \hat{q}^{(1)}_{x+k}(1 - {}_{k+1}\widehat{AS})]\\ &(d)\quad\quad + [q^{(2)}_{x+k}({}_{k+1}CV - {}_{k+1}AS) - \hat{q}^{(2)}_{x+k}({}_{k+1}CV - {}_{k+1}\widehat{AS})].\end{aligned} \qquad (16.5.2)$$

В формуле (16.5.2) общее отклонение эмпирической доли активов от математического ожидания разбивается на четыре компоненты. В компоненту (a) входит разность между эмпирической и предполагаемой процентными ставками. Компонента (b) является разностью между эмпирическими и предполагаемыми расходами с разными процентными ставками. Компонента (c) является разностью между предполагаемыми и эмпирическими расходами вследствие наступления смертей, а компонента (d) — разностью между предполагаемыми и эмпирическими расходами вследствие досрочного прекращения действия договора.

Принцип страхования жизни с участием в прибыли состоит в установлении настолько высоких премий, что вероятность того, что этих премий и соответствующего дохода от инвестиций не хватит для покрытия обязательств по страховым выплатам и расходов по портфелю договоров страхования, очень мала. При этом принципе, который можно рассматривать как альтернативу принципа эквивалентности, математическое ожидание случайной величины потерь должно быть отрицательным, чтобы появлялись средства на случай неблагоприятных для страховой системы случайных отклонений. Так как неопределенность, связанная с незнанием будущего

[1] Следуя приведенному выше пояснению, мы используем термин «эмпирический» в смысле, принятом, в частности, в математической статистике; см. например, «эмпирическое среднее», «эмпирическая функция распределения» и т.д. в книге: Крамер Г. Математическая статистика. — М.: Мир, 1975. — *Прим. ред.*

опыта, со временем исчезает, необходимость в резервах на случай неблагоприятных отклонений, первоначально предусмотренных в структуре «премии–выплаты», может исчезнуть и эти средства могут быть возвращены страхователю, который несет на себе риски, связанные с более высокими премиями. Эти возвращающиеся денежные средства, не являющиеся необходимыми для покрытия будущих рисков, называется *дивидендами*[1]. В анализе, который приводит к определению дивидендов, часто используется упрощенный вариант формулы (16.5.2).

Чтобы получить этот упрощенный вариант, начнем с модификации формулы (15.6.7). В этих рассуждениях величина ${}_kF$ занимает место ${}_kAS$. Новый символ обозначает долю страхового фонда, которая не является более следствием ожидаемых страховых операций. Напротив, величины ${}_kF$ — это установленные заранее суммы, такие, что с учетом будущих премий и инвестиционного дохода высока вероятность того, что для рассматриваемого портфеля договоров все обязательства по выплатам и расходам, связанным с этими договорами, будут выполнены. Таким образом,

$$ {}_{k+1}F = [{}_kH + G(1-c_k) - e_k](1+i) - q^{(1)}_{x+k}(1 - {}_{k+1}F) - q^{(2)}_{x+k}({}_{k+1}CV - {}_{k+1}F). \quad (16.5.3) $$

В формуле (16.5.3) величины c_k, e_k, $q^{(1)}_{x+k}$ и $q^{(2)}_{x+k}$ обычно устанавливаются на несколько более высоком уровне, чем ожидаемый, а величина i устанавливается на несколько более низком уровне, чем ожидаемый, чтобы обеспечить средства на случай неблагоприятных отклонений. Из-за этого будет мала вероятность того, что понадобится внешнее финансирование.

Следующая формула описывает изменение во времени доли страхового фонда на единицу страховой суммы, где эмпирические показатели расходов снабжаются «крышкой»:

$$ \begin{aligned} {}_{k+1}F + {}_{k+1}D = [{}_kF + G(1-\hat{c}_k) - \hat{e}_k](1+\hat{i}_{k+1}) - \hat{q}^{(1)}_{x+k}(1 - {}_{k+1}F - {}_{k+1}D) \\ - \hat{q}^{(2)}_{x+k}({}_{k+1}CV - {}_{k+1}F - {}_{k+1}D). \quad (16.5.4) \end{aligned} $$

В ней дивиденды обозначаются через ${}_{k+1}D$. Заранее определенное целевое значение ${}_{k+1}F$ отличается от доли страхового фонда, определенной на основе практики. Вычитая (16.5.3) из (16.5.4), получим

$$ \begin{aligned} &(a) \quad {}_{k+1}D = ({}_kF + G)(\hat{i}_{k+1} - i) \\ &(b) \qquad\qquad + [(Gc_k + e_k)(1+i) - (G\hat{c}_k + \hat{e}_k)(1+\hat{i}_{k+1})] \\ &(c) \qquad\qquad + (1 - {}_{k+1}F)(q^{(1)}_{x+k} - \hat{q}^{(1)}_{x+k}) \\ &(d) \qquad\qquad + ({}_{k+1}CV - {}_{k+1}F)(q^{(2)}_{x+k} - \hat{q}^{(2)}_{x+k}) \\ &(e) \qquad\qquad + {}_{k+1}D(\hat{q}^{(1)}_{x+k} + \hat{q}^{(2)}_{x+k}). \qquad (16.5.5) \end{aligned} $$

Компоненты соотношения (16.5.5) могут быть отождествлены с эмпирическими показателями, которые определяют их размер. Таким образом, часть (a) связана с процентом, (b) — с расходами, (c) — со смертностью, (d) — с досрочным прекращением действия договора и (e) — с выплатой дивидендов лишь дожившим лицам. Если ${}_{k+1}CV = {}_{k+1}F$, а дивиденды выплачиваются застрахованным, которые умерли или досрочно прекратили действие договора, и если $Gc_k + e_k$ обозначается через E_k,

[1] В оригинале «dividends». — *Прим. ред.*

в то время как $G\hat{c}_k + \hat{e}_k$ обозначается через $\widehat{E}_k$, то правую часть формулы (16.5.5) можно записать в виде трех слагаемых:

$$_{k+1}D = ({}_kF+G)(\hat{i}_{k+1}-i)+[E_k(1+i)-\widehat{E}_k(1+\hat{i}_{k+1})]+(1-{}_{k+1}F)(q^{(1)}_{x+k}-\hat{q}^{(1)}_{x+k}). \quad (16.5.6)$$

Пример 16.5.1. В примере 15.6.1 подсчитывался набор долей активов для смешанного страхования сроком на 3 года с постоянными премиями. Напомним, что пример был составлен для удобства и простоты расчетов, а не для описания реальной ситуации. Сделаем следующие предположения об эмпирических значениях параметров:

$$_0F = {}_0AS = 0, \qquad {}_1F = {}_1AS = 229{,}44, \qquad {}_2F = {}_2AS = 589{,}47,$$
$$\hat{i}_1 = 0{,}15, \qquad \hat{i}_2 = 0{,}16, \qquad \hat{q}^{(1)}_x = 0{,}085, \qquad \hat{q}^{(2)}_x = 0{,}200,$$
$$\hat{q}^{(1)}_{x+1} = 0{,}090, \qquad \hat{q}^{(2)}_x = 0{,}100, \qquad c_k = \hat{c}_k \quad \text{при } k = 0,1,2,$$
$$\hat{e}_0 = 10, \qquad \hat{e}_1 = 1.$$

Рассчитаем величины $_1D$ и $_2D$ с помощью равенства (16.5.5), предполагая, что тем, кто умер или досрочно прекратил уплату премий, дивиденды выплачиваются.

Решение.

		$_1D$	$_2D$
(a)	Проценты $({}_kF + G)(\hat{i} - i)$	$(0 + 342{,}96)(0)$	$(299{,}44 + 342{,}96)(0{,}01)$
	+	+	+
(b)	Расходы $(Gc_k + e_k)(1 + i)$ $-(G\hat{c}_k + \hat{e}_k)(1 + \hat{i}_{k+1})$	$[342{,}96(0{,}20) + 8](1{,}15)$ $-[342{,}96(0{,}20) + 10](1{,}15)$	$[342{,}96(0{,}06) + 2](1{,}15)$ $-[342{,}96(0{,}06) + 1](1{,}16)$
	+	+	+
(c)	Смертность $[1000 - {}_{k+1}F]$ $(q^{(1)}_{x+k} - \hat{q}^{(1)}_{x+k})$	$[1000 - 229{,}44](0{,}015)$	$[1000 - 589{,}47](0{,}0211)$
	+	+	+
(d)	Досрочное прекращение действия договора страхования $[{}_{k+1}CV - {}_{k+1}F]$ $(q^{(2)}_{x+k} - \hat{q}^{(2)}_{x+k})$	$[227{,}73 - 229{,}44](-0{,}1)$	$[564{,}41 - 589{,}47](0{,}0111)$
(a)		0,0000	5,7240
(b)		−2,3000	0,9342
(c)		11,5584	8,6623
(d)		0,1708	−0,2781
	Итого	9,4292	15,0424

▼

16.6. Методы модифицированного резерва

В примерах, представленных в разд. 15.2.2 и 15.3.2, были отмечены две характерные черты финансовой отчетности компаний, занимающихся страхованием жизни. Первая из них состоит в том, что денежные потоки, а следовательно, и экономическая выгода, не зависит от метода, применяемого для расчета обязательств. Вторая заключается в том, что при использовании резервов из модели с несколькими причинами выбытия с учетом расходов получаются более высокие значения для указываемых в отчетности ежегодных потоков чистого дохода, чем при использовании нетто-резервов из модели с единственной причиной выбытия.

В разд. 16.1 было отмечено, что в качестве аппроксимации более сложных моделей с несколькими причинами выбытия с учетом расходов часто используется, и особенно для целей страхового регулирования, модель с единственной причиной выбытия. В этом разделе использование такой аппроксимации для финансовой отчетности будет рассматриваться подробнее.

Договор страхования общего вида, заключенный лицом (x), в дискретной модели был введен с помощью равенства (8.2.1). Далее, в гл. 8 было показано, что для фиксированного набора выплат на случай смерти не обязательно определять последовательность постоянных нетто-премий, чтобы определить соответствующие нетто-резервы согласно принципу эквивалентности. Однако экономические ограничения или ограничения со стороны регулирующих органов, например, ${}_kV \geqslant 0$, могут приводить к тому, что некоторые последовательности изменяющихся, непостоянных, нетто-премий будут неприемлемыми. Другим примером таких ограничений может служить требование, чтобы нетто-премия, используемая для определения резерва, была меньше или равна брутто-премии и, если не считать первый год действия договора, составляла фиксированную долю брутто-премии.

Для договоров страхования, в которых страховые выплаты и нетто-премии постоянны, разработана система обозначений и терминов, предназначенная для определения систем модифицированных резервов с непостоянными нетто-премиями, которые обеспечивают более реалистическое соответствие между резервами премий и соответствующими расходами. Такие системы модифицированных резервов строятся с использованием модели с единственной причиной выбытия в предположении, что выкупные суммы определены так, чтобы минимизировать доходы и расходы, связанные с досрочным прекращением действия договора страхования.

Метод модифицированного резерва — это метод, в котором при определении резервов из актуарной настоящей стоимости будущих выплат вычитается не актуарная настоящая стоимость набора постоянных нетто-премий. Вместо этого набора определяется система *ступенчатых премий*. Обычно рассматривается не более трех различных уровней, хотя теория допускает большее количество «ступеней». Три уровня премии обозначаются следующим образом: α — нетто-премия первого года, β — нетто-премия следующих $j-1$ лет, P — постоянная нетто-премия, которую предполагается выплачивать после первых j лет действия договора. Вводится ограничение, что этот набор премий должен иметь ту же актуарную настоящую стоимость, что и набор постоянных нетто-премий, т. е.

$$\alpha + \beta(\ddot{a}_{x:\overline{j}|} - 1) + P(\ddot{a}_{x:\overline{h}|} - \ddot{a}_{x:\overline{j}|}) = P\ddot{a}_{x:\overline{h}|}, \qquad \alpha + \beta a_{x:\overline{j-1}|} = P\ddot{a}_{x:\overline{j}|}, \tag{16.6.1}$$

где h — продолжительность периода выплаты премий.

В случае резервов, определяемых при постоянной нетто-премии, ожидается, что в первый год действия договора доступна величина (в обозначениях разд. 15.5) c. Она возникает из премии с надбавкой $P+c$, предназначенной на покрытие расходов первого года действия договора. Если $\alpha < P$, то ожидается, что в рамках метода модифицированного резерва для покрытия расходов первого года будет доступна величина $P + c - \alpha > c$. Если $\alpha < P$, то, значит, $\beta > P$. В этом можно убедиться, переписав формулу (16.6.1) в виде

$$\alpha + \beta a_{x:\overline{j-1}|} = P(a_{x:\overline{j-1}|} + 1), \qquad \beta = P + (P - \alpha)/a_{x:\overline{j-1}|}. \tag{16.6.2}$$

Второе полезное выражение может быть получено из формулы (16.6.1) следующим образом:

$$\beta(\ddot{a}_{x:\overline{j}|} - 1) = P\ddot{a}_{x:\overline{j}|} - \alpha, \qquad \beta = P + (\beta - \alpha)/\ddot{a}_{x:\overline{j}|}. \tag{16.6.3}$$

Следовательно, метод модифицированного резерва для договора с постоянными страховыми выплатами и постоянными премиями может быть определен путем выбора длины периода модификации j и любых двух из следующих трех величин: премии первого года α, премии второго и последующих лет β и разности премий $\beta-\alpha$. На рис. 16.6.1 приведена диаграмма, на которой показаны соотношения между премиями, используемыми в методе модифицированного резерва. Актуарные настоящие стоимости компонент премии, изображенных серыми областями A и B, равны, в чем можно убедиться, переписав формулу (16.6.1) в виде $P - \alpha = (\beta - P)a_{x:\overline{j-1}|}$.

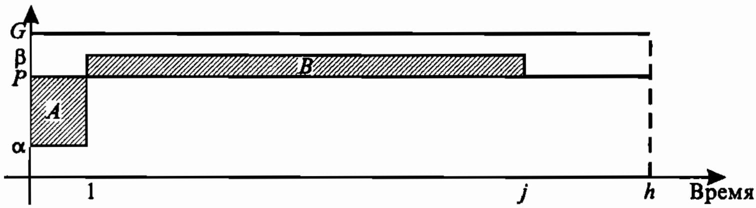


Рис. 16.6.1. Премии в методе модифицированного резерва

В формулах (16.6.1) и (16.6.2) мы использовали символы α и β для обозначения соответственно нетто-премии первого года и нетто-премии второго и последующих лет периода модификации для метода j-летнего модифицированного резерва, а стандартное обозначение P относится к постоянной нетто-премии. Аналогичным образом мы будем использовать символ V^{Mod} для обозначения конечного[1] резерва, рассчитанного согласно методу модифицированного резерва.

При расчете конечных резервов для договора смешанного страхования на срок n лет с выплатой премии в течение h лет в дискретной модели по методу модифицированного резерва с j-летним периодом модификации используется следующая формула. В течение периода модификации, т. е. при $k < j$,

$$\begin{aligned}
{}^h_kV^{\mathrm{Mod}}_{x:\overline{n}|} &= A_{x+k:\overline{n-k}|} - \beta\ddot{a}_{x+k:\overline{j-k}|} - {}_hP_{x:\overline{n}|\,j-k|}\ddot{a}_{x+k:\overline{h-j}|} \\
&= A_{x+k:\overline{n-k}|} - {}_hP_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}|} - (\beta - {}_hP_{x:\overline{n}|})\ddot{a}_{x+k:\overline{j-k}|} \\
&= {}^h_kV_{x:\overline{n}|} - (\beta - {}_hP_{x:\overline{n}|})\,\ddot{a}_{x+k:\overline{j-k}|}\,.
\end{aligned}$$

Для системы модифицированных резервов, представленной в этом разделе, применимы результаты гл. 8 для договора страхования общего вида в дискретной модели. В формуле (8.2.1) следует взять $b_{K(x)+1} = 1$, $\pi_0 = \alpha$, $\pi_h = \beta$, $h = 1, 2, \ldots$. Это означает, что для модифицированных нетто-резервов выполняется теорема 8.5.1 и ее можно использовать при принятии решений в условиях риска.

По прошествии j лет резервы, рассчитанные по методу модифицированного резерва, равны резервам, рассчитанным на основе постоянных нетто-премий.

[1] См. определение в разд. 8.3. — *Прим. ред.*

Пример 16.6.1. Пусть резервы по бессрочному договору страхования на случай смерти в непрерывной модели определяются по методу модифицированного резерва. Согласно этому методу, нетто-премии в первый год и во второй и последующие годы составляют $\bar{\alpha}_x$ и $\bar{\beta}_x$, $\bar{\alpha}_x < \bar{P}(\bar{A}_x)$; период модификации является периодом действия договора. Определим случайную величину будущих потерь и запишем уравнения, которые можно использовать для расчета резерва.

Решение.

$$
{}_tL^{\text{Mod}} = \begin{cases} v^{T(x)-t} - \bar{\alpha}_x\,\bar{a}_{\overline{T(x)-t}|}, & 0 \leqslant T(x)-t < 1-t,\ 0 \leqslant t < 1, \\ v^{T(x)-t} - \bar{\alpha}_x\,\bar{a}_{\overline{1-t}|} - \bar{\beta}_x\,{}_{1-t|}\bar{a}_{\overline{(T(x)-t)-(1-t)}|}, & T(x)-T \geqslant 1-t,\ 0 \leqslant t < 1, \\ v^{T(x)-t} - \bar{\beta}_x\,\bar{a}_{\overline{T(x)-t}|}, & t \geqslant 1. \end{cases}
$$

По аналогии с формулой (7.2.3) резерв равен

$$
{}_t\bar{V}(\bar{A}_x)^{\text{Mod}} = \begin{cases} \bar{A}_{x+t} - \bar{\alpha}_x\,\bar{a}_{x+t:\overline{1-t}|} - \bar{\beta}_x\,{}_{1-t|}\bar{a}_{x+t}, & 0 \leqslant t < 1, \\ \bar{A}_{x+t} - \bar{\beta}_x\,\bar{a}_{x+t}, & t \geqslant 1. \end{cases}
$$

Кроме того,

$$
{}_t\bar{V}(\bar{A}_x) - {}_t\bar{V}(\bar{A}_x)^{\text{Mod}} = [\bar{\beta}_x - \bar{P}(\bar{A}_x)]\bar{a}_{x+t}, \qquad t \geqslant 1.
$$

Поскольку требуется, чтобы

$$
\bar{\alpha}_x\,\bar{a}_{x:\overline{1}|} + \bar{\beta}_x\,{}_{1|}\bar{a}_x = \bar{P}(\bar{A}_x)(\bar{a}_{x:\overline{1}|} + {}_{1|}\bar{a}_x), \tag{16.6.4}
$$

мы получаем формулу, аналогичную формуле (16.6.2):

$$
\bar{\beta}_x = \bar{P}(\bar{A}_x) + [\bar{P}(\bar{A}_x) - \bar{\alpha}_x]\bar{a}_{x:\overline{1}|}\big/{}_{1|}\bar{a}_x
$$

и $\bar{\beta}_x > \bar{P}(\bar{A}_x)$. Следовательно, ${}_t\bar{V}(\bar{A}_x) - {}_t\bar{V}(\bar{A}_x)^{\text{Mod}} \geqslant 0, \quad t \geqslant 1$. ▼

Пример 16.6.2. Используя информацию из примера 16.6.1, выведем ретроспективную формулу для ${}_t\bar{V}(\bar{A}_x)^{\text{Mod}}$.

Решение. Рассмотрим случай, когда $0 \leqslant t < 1$, и вспомним, что

$$
\bar{A}_x = \bar{\alpha}_x\,\bar{a}_{x:\overline{1}|} + \bar{\beta}_x\,{}_{1|}\bar{a}_x = \bar{\alpha}_x(\bar{a}_{x:\overline{t}|} + \bar{a}_{x+t:\overline{1-t}|}\,{}_tE_x) + \bar{\beta}_x({}_{1-t|}\bar{a}_{x+t}\,{}_tE_x).
$$

Затем, используя обозначение из разд. 7.3, получаем

$$
\begin{aligned}
{}_t\bar{V}(\bar{A}_x)^{\text{Mod}} &= \bar{A}_{x+t} - \bar{\alpha}_x\,\bar{a}_{x+t:\overline{1-t}|} - \bar{\beta}_x\,{}_{1-t|}\bar{a}_{x+t} \\
&= \bar{A}_{x+t} - \frac{\bar{A}_x - \bar{\alpha}_x\,\bar{a}_{x:\overline{t}|}}{{}_tE_x} = \bar{\alpha}_x\,\bar{s}_{x:\overline{t}|} - {}_t\bar{k}_x, \quad 0 \leqslant t < 1.
\end{aligned}
$$

Кроме того, ${}_t\bar{V}(\bar{A}_x) - {}_t\bar{V}(\bar{A}_x)^{\text{Mod}} = [\bar{P}(\bar{A}_x) - \bar{\alpha}_x]\bar{s}_{x:\overline{t}|}$, $0 \leqslant t < 1$. В случае $t \geqslant 1$ вспомним, что $\bar{A}_x = \bar{\alpha}_x\,\bar{a}_{x:\overline{1}|} + \bar{\beta}_x({}_{1|}\bar{a}_{x:\overline{t-1}|} + \bar{a}_{x+t}\,{}_tE_x)$. Тогда

$$
\begin{aligned}
{}_t\bar{V}(\bar{A}_x)^{\text{Mod}} = \bar{A}_{x+t} - \bar{\beta}_x\,\bar{a}_{x+t} &= \bar{A}_{x+t} - \frac{\bar{A}_x - \bar{\alpha}_x\,\bar{a}_{x:\overline{1}|} - \bar{\beta}_x\,{}_{1|}\bar{a}_{x:\overline{t-1}|}}{{}_tE_x} \\
&= \frac{\bar{\alpha}_x\,\bar{a}_{x:\overline{1}|}}{{}_tE_x} + \bar{\beta}_x\,\bar{s}_{x+1:\overline{t-1}|} - {}_t\bar{k}_x.
\end{aligned}
$$

▼

16.7. Метод полного подготовительного периода

При использовании метода расчета резервов, который увеличивает фактическую надбавку на расходы $G - \alpha$ в первый год действия договора для того, чтобы иметь бо́льшие средства для компенсации бо́льших расходов первого года, обычно налагается ограничение, чтобы величина α была меньше, чем P. Однако, согласно определенным принципам страхового регулирования, на практике существует нижняя граница для величины α.

Эта нижняя граница определяется из тех соображений, что отрицательные резервы фактически учитываются как активы. Поскольку величина брутто-премий, которая будет собрана, точно не известна, ряд органов страхового надзора не разрешает включать такие отрицательные резервы в балансовый отчет при представлении требуемой по закону оценки платежеспособности страховой компании. Таким образом, практическая цель этого метода расчета резервов заключается в том, чтобы избежать отрицательного резерва в конце первого года действия договора. Это означает, что для договора с постоянными страховыми выплатами размера 1 наименьшая возможная величина α в дискретной модели будет равна $A^{1}_{x:\overline{1}|}$. Это требование содержалось в примере 8.2.1. Результат можно представить следующим образом:

$$ {}_1V \geqslant 0, \qquad \alpha \ddot{s}_{x:\overline{1}|} - {}_1k_x \geqslant 0, \qquad \alpha \geqslant A^{1}_{x:\overline{1}|}. \tag{16.7.1}$$

Если величина α установлена на минимальном уровне, а период модификации j охватывает весь период выплаты премий, то рассматриваемый метод называется *методом полного подготовительного периода* (метод ППП). При этом методе резерв в конце первого года действия договора равен нулю.

Для дискретной модели премия второго и последующих лет β может быть получена из формулы (16.6.1). Обозначим актуарную настоящую стоимость страхования общего вида с постоянными премиями, выплачиваемыми в течение h лет, через A; если через $A(1)$ обозначается актуарная настоящая стоимость выплат за оставшиеся годы действия договора страхования, заключенного с лицом возраста $x+1$ лет, то

$$A^{1}_{x:\overline{1}|} + \beta\, {}_{1|}\ddot{a}_{x:\overline{h-1}|} = P\ddot{a}_{x:\overline{h}|} = A = A^{1}_{x:\overline{1}|} + {}_1E_x\, A(1), \tag{16.7.2}$$

или

$$\beta = \frac{{}_1E_x\, A(1)}{{}_{1|}\ddot{a}_{x:\overline{h-1}|}} = \frac{A(1)}{\ddot{a}_{x+1:\overline{h-1}|}}.$$

Словесная интерпретация этого равенства: β — ежегодная нетто-премия для аналогичного договора страхования, заключенного с лицом на 1 год старше, с премией, выплачиваемой в случае ограниченного периода выплаты премий на 1 год меньше, и со сроком страхования, заканчивающимся в том же возрасте, что и первоначальный договор страхования.

Для непрерывной модели наименьшая возможная величина премии первого года $\bar{\alpha}$, вновь выбранная так, чтобы избежать отрицательного резерва в момент времени 1, равна $\bar{A}^{1}_{x:\overline{1}|}/\bar{a}_{x:\overline{1}|}$. Таким образом,

$$ {}_1\bar{V}(\bar{A}_x) \geqslant 0, \qquad \frac{\bar{\alpha}\bar{a}_{x:\overline{1}|}}{{}_1E_x} - {}_1\bar{k}_x \geqslant 0, \qquad \bar{\alpha} \geqslant \frac{\bar{A}^{1}_{x:\overline{1}|}}{\bar{a}_{x:\overline{1}|}}. \tag{16.7.3}$$

Вывод формулы для премии второго и последующих лет $\bar{\beta}$ точно следует выводу формулы (16.7.2), проведенному выше:

$$A^{1}_{x:\overline{1}|} + \bar{\beta}\, {}_{1|}\bar{a}_{x:\overline{h-1}|} = \bar{P}(\bar{A})\bar{a}_{x:\overline{h}|} = \bar{A} = \bar{A}^{1}_{x:\overline{1}|} + {}_1E_x\, \bar{A}(1), \tag{16.7.4}$$

или

$$\bar{\beta} = \frac{{}_1E_x\,\bar{A}(1)}{{}_{1|}\bar{a}_{x:\overline{h-1}|}} = \frac{\bar{A}(1)}{\bar{a}_{x+1:\overline{h-1}|}}.$$

Модифицировав формулу (15.5.5), можно показать, как влияет метод ППП на бухгалтерскую отчетность. Заметим, что премии с надбавкой на расходы при этом методе определяются формулой

$$P_x + c = A^1_{x:\overline{1}|} + c_0 = \beta_x + c_1,$$

где c_0 — надбавка первого года, а c_1 — надбавка второго и последующих лет. Аналогом формулы (15.5.5), где, как и прежде, $u(k)$ обозначает искомое сальдо для дожившего, согласно нашим ожиданиям, страхователя в конце отчетного периода k и $u(0) = 0$, будет формула

$$\begin{aligned}[(\bar{A}^1_{x:\overline{1}|} + c_0) - e_0](1+i) - q_x &= p_x\,u(1),\\ (c_0 - e_0)(1+i) &= p_x\,u(1), \qquad k = 0, \qquad (16.7.5\text{A})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}{}_kp_x\{[{}_kV_x^{\text{ППП}} + u(k)] + (\beta_x + c_1) - e_k\}(1+i) - {}_kp_x\,q_{x+k}&\\ = {}_{k+1}p_x[{}_{k+1}V_x^{\text{ППП}} + u(k+1)], \qquad k = 1, 2, \ldots. \qquad (16.7.5\text{B})&\end{aligned}$$

Следовательно, если $c_0 - e_0 = (P_x + c - A^1_{x:\overline{1}|} - e_0) > 0$, то сальдо первого года в нашем идеализированном примере учета будет положительным. В реальных ситуациях $c_0 = P_x + c - A^1_{x:\overline{1}|} > c$, и величина $p_x\,u(1)$ будет больше, чем в случае, когда пассивы измеряются резервами при постоянной нетто-премии.

Рекуррентные формулы, аналогичные соотношению (8.3.10), имеют вид

$$A^1_{x:\overline{1}|}(1+i) - q_x = 0, \qquad (16.7.6\text{A})$$

$${}_kp_x({}_kV_x^{\text{ППП}} + \beta_x)(1+i) - {}_kp_x\,q_{x+k} = {}_{k+1}p_x\;{}_{k+1}V_x^{\text{ППП}}. \qquad (16.7.6\text{B})$$

Вычитая (16.7.6B) из (16.7.5B), получим

$${}_kp_x[u(k) + c_1 - e_k](1+i) = {}_{k+1}p_x\,u(k+1), \qquad k = 1, 2, 3, \ldots. \qquad (16.7.7)$$

Умножим (16.7.5A) и (16.7.7) на v^{k+1}, положим $c'_k = c_0$ при $k = 0$ и $c'_k = c_1$ при $k = 1, 2, \ldots$ и получим

$$\Delta[v^k\,{}_kp_x\,u(k)] = v^k\,{}_kp_x(c'_k - e_k). \qquad (16.7.8)$$

При $u(0) = 0$ разностное уравнение (16.7.8) дает

$$\sum_{j=0}^{k-1}\Delta[v^j\,{}_jp_x\,u(j)] = \sum_{j=0}^{k-1} v^j\,{}_jp_x(c'_j - e_j), \qquad (16.7.9)$$

$${}_kp_x\,u(k) = \sum_{j=0}^{k-1}(1+i)^{k-j}\,{}_jp_x(c'_j - e_j). \qquad (16.7.10)$$

Как и в формуле (15.5.8), математическое ожидание сальдо для каждого первоначального страхователя в нашей идеализированной модели представляет собой накопленную стоимость превышения надбавок на расходы над фактическими расходами в каждом из более ранних лет. Следующие сравнения математических ожиданий годовых вкладов в сальдо для каждого дожившего страхователя в случае резервов, полученных по методу ППП, и в случае резервов, рассчитанных на основе *постоянной нетто-премии* (ПНП), осуществляются с помощью формул (15.5.7) и (16.7.8):

ППП		ПНП	
$c_0 - e_0$	$>$	$c - e_0$	
$c_1 - e_k$	$<$	$c - e_k$	$k = 1, 2, \ldots$

(16.7.11)

Неравенства из таблицы (16.7.11) для ожидаемых вкладов в сальдо выполняются, если $\alpha < P$ и $\beta > P$.

16.8. Метод модифицированного подготовительного периода

Если принять принцип, что отрицательные резервы неприемлемы для балансового отчета страховой компании, то метод ППП обеспечивает минимальный конечный резерв первого года и минимальные нетто-премии первого года. Согласно формуле (16.7.11), годовой вклад в сальдо в первый год по методу ППП и на основе постоянных нетто-премий составят соответственно $P + c - A^1_{x:\overline{1}|} - e_0 = c_0 - e_0$ и $c - e_0$, $c_0 - e_0 > c - e_0$. Трудность состоит в том, что величина $P - A^1_{x:\overline{1}|}$ зависит от вида страхования. Поскольку $P_{x:\overline{1}|}$ обычно много больше, чем $P^1_{x:\overline{1}|}$, резерв на покрытие расходов первого года для смешанного страхования на срок n лет также будет много больше, чем для страхования на случай смерти на срок n лет. Одна из научных школ считает, что если $P - A^1_{x:\overline{1}|}$ обеспечивает приемлемые средства на покрытие расходов для договоров с низкой премией, то она приведет к избыточным средствам в случае договоров с высокой премией. При такой точке зрения для договоров с низкой премией годятся расчеты по методу ППП, но для договоров с высокими премиями следует использовать метод модифицированного резерва, который будет обеспечивать положительный резерв на конец первого года.

Для *стандартного метода модифицированного подготовительного периода* требуется (1) правило, согласно которому договоры можно разделить на два класса, с низкими и высокими премиями; (2) применение для договоров с низкой премией метода ППП, при котором $\alpha = A^1_{x:\overline{1}|}$; (3) определение метода вычисления резервов для договоров с высокой премией путем задания любых двух из трех величин β, $\beta - \alpha$ и $\alpha > A^1_{x:\overline{1}|}$ вместе с длиной периода модификации.

Целью государственного страхового регулирования является снижение риска для страхователей, связанного с тем, что страховая компания не сможет выполнить свои обязательства. В соответствии с этой целью в законодательстве некоторых штатов и стран актуарию вменяется в обязанность проверять адекватность резервов будущим обязательствам страховой компании.

В других законодательствах, регулирующих страховую деятельность, выбор методов и предположений, которые разрешено использовать для оценки обязательств по резервам в целях страхового регулирования, ограничен. В некоторых случаях эти законы и правила определяют некоторый стандартный метод модифицированного резерва. К актуарной практике в США имеет прямое отношение лишь один такой стандартный метод. Примерное положение о стандартных расчетах определяет стандартный метод расчета резервов специальных уполномоченных в страховании жизни. Этот стандартный метод состоит в следующем:

• договорами с высокими премиями считаются договоры, для которых $\beta^{\text{ППП}} > {}_{19}P_{x+1}$, где ${}_{n}P_{x+1}$ — нетто-премия второго и последующих лет, рассчитанная по методу ППП при 20-летнем периоде выплаты премий;

• минимальные резервы для договоров с низкими премиями определяются по методу ППП;

• для договоров с высокими премиями используется метод расчета резервов специальных уполномоченных (метод СУ). При этом период выплаты премий является периодом модификации и

$$\beta^{\text{СУ}} - \alpha^{\text{СУ}} = {}_{19}P_{x+1} - A^{1}_{x:\overline{1}|}.$$

Применяя формулу (16.6.3), получаем

$$\beta^{\text{СУ}} = P + \frac{{}_{19}P_{x+1} - A^{1}_{x:\overline{1}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}, \tag{16.8.1}$$

где h — продолжительность периода выплаты премий.

Схема принятия решений в случае стандартного метода модифицированного подготовительного периода, который иллюстрируется стандартным методом расчета резервов специальных уполномоченных, показана на рис. 16.8.1.

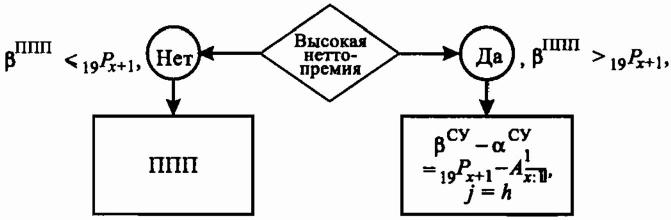


Рис. 16.8.1. Схема принятия решений в случае стандартного метода модифицированного полного подготовительного периода

16.9. Изменяющиеся премии или страховые выплаты

В разд. 16.2 излагается модель с единственной причиной выбытия для определения минимальных денежных стоимостей при произвольных предположениях о размере расходов и моментах их наступления. В разд. 16.8 представлен аналогичный подход для определения минимальных резервов, указываемых в финансовой отчетности, которая предоставляется органам страхового регулирования. В обоих разделах мы ограничивались случаем постоянных премий и страховых выплат. Инструкции регулирующих органов, определяющие минимальные резервы и денежные стоимости, обычно ограничиваются договорами с постоянными премиями и постоянными страховыми выплатами. Поскольку число вариантов, которые могут возникать при изменяющихся премиях и выплатах, неограниченно, необходимая интерпретация этих инструкций оставлена на усмотрение регулирующих органов и профессиональных объединений. Задача здесь — исходя из языка законов и договорной практики, разработать согласованную с ними математическую модель. Такого рода усилия предпринимаются во многих актуарных разработках.

Главным инструментом в распространении методики регулирования, выработанной для договоров с постоянными выплатами на случай смерти и с постоянными брутто-премиями, на договоры с изменяющимися премиями и страховыми выплатами является усреднение. Последовательность изменяющихся премий или выплат на случай смерти заменяется на последовательность постоянных премий или выплат, получаемую как их взвешенное среднее. Способы распространения методики регулирования на непостоянные премии или непостоянные выплаты на случай смерти различаются весами, используемыми при усреднении.

16.9.1. Определение резервов

В разд. 8.2 обсуждался договор страхования общего вида в дискретной модели. Мы используем этот договор для иллюстрации рассматриваемой здесь проблемы. Вспомним, что при этом виде страхования выплаты на случай смерти b_{j+1} осуществляются в конце $(j+1)$-го года действия договора, если смерть произошла в этом году. При условии дожития ежегодные премии выплачиваются в начале каждого года действия договора в течение периода выплаты премий. Брутто-премия G_j выплачивается в момент j в начале $(j+1)$-го года действия договора.

Для этого договора страхования приведем интерпретацию стандартного метода оценки резервов специальных уполномоченных из статьи Менге [Menge 1946]. Мы приведем формулы для срочного страхования на случай смерти и укажем соответствующую модификацию для смешанного страхования. Эти правила непосредственно применимы к страховым договорам с фиксированным размером страховых выплат и премий. Договоры, для которых выплаты или премии привязаны к результатам инвестирования или могут меняться по желанию страхователя, требуют отдельного рассмотрения.

Первой задачей является определение критерия для применения метода ППП. В качестве первого шага рассчитаем *эквивалентную постоянную сумму второго и последующих лет* (ЭПСП). Для этого вида страхования мы имеем

$$\text{ЭПСП} = \frac{\sum\limits_{j=0}^{n-2} b_{j+2}\, v^{j+1}\, {}_jp_{x+1}\, q_{x+1+j}}{A^{\;1}_{x+1:\overline{n-1|}}}. \tag{16.9.1}$$

ЭПСП для смешанного страхования рассчитывается только на основе выплат на случай смерти и, таким образом, также задается формулой (16.9.1). ЭПСП можно интерпретировать как взвешенное среднее страховых выплат с весами

$$v^{j+1}\, \frac{{}_jp_{x+1}\, q_{x+1+j}}{A^{\;1}_{x+1:\overline{n-1|}}}.$$

Кроме того, отношение средних нетто-премий второго и последующих лет к средним брутто-премиям второго и последующих лет обозначается через r_F и определяется формулой

$$r_F = \frac{\sum\limits_{j=0}^{n-2} b_{j+2}\, v^{j+1}\, {}_jp_{x+1}\, q_{x+1+j}}{\sum\limits_{j=0}^{h-2} G_{j+1}\, v^j\, {}_jp_{x+1}}. \tag{16.9.2}$$

Интерпретация Менге основана на предположении о том, что премия, используемая для определения резерва, является постоянной долей от брутто-премии.

Для смешанного страхования в числитель выражения для r_F включается выплата на дожитие.

Согласно интерпретации Менге, метод ППП применим, если

$$r_F G_0 \leqslant \text{ЭПСП}\, {}_{19}P_{x+1}\,. \tag{16.9.3}$$

Если это условие выполнено, то считается, что нетто-премии выражаются формулами $\pi_0 = vb_1 q_x$ и $\pi_j = r_F G_j$, $j = 1, 2, \ldots, h-1$, где h — продолжительность периода выплаты премий. Модифицированный резерв для $k \geqslant 1$ задается формулой

$${}_kV^{\text{Mod}} = \sum_{j=0}^{n-k-1} b_{k+j+1}\, v^{j+1}\, {}_jp_{x+k}\, q_{x+k+j} - r_F \sum_{j=0}^{h-k-1} G_{k+j}\, v^j\, {}_jp_{x+k}\,. \tag{16.9.4}$$

Для смешанного страхования к первому слагаемому правой части формулы (16.9.4) добавляется выплата на дожитие.

В случаях, когда неравенство (16.9.3) не выполняется, компенсация превышения расходов первого года, аналогичная $\beta - \alpha$, определена формулой

$$\text{ЭПСП}\, {}_{19}P_{x+1} - b_1\, A^1_{x:\overline{1}|}\,.$$

Модифицированное отношение средних нетто-премий к средним брутто-премиям, обозначаемое через r_C, определяется формулой

$$r_C = \frac{\sum\limits_{j=0}^{n-1} b_{j+1}\, v^{j+1}\, {}_jp_x\, q_{x+j} + (\text{ЭПСП}\, {}_{19}P_{x+1} - b_1 A^1_{x:\overline{1}|})}{\sum\limits_{j=0}^{h-1} G_j\, v^j\, {}_jp_x}\,. \tag{16.9.5}$$

Модифицированный резерв в этом случае высокой премии задан равенством

$${}_kV^{\text{Mod}} = \sum_{j=0}^{n-k-1} b_{k+j+1}\, v^{j+1}\, {}_jp_{x+k}\, q_{x+k+j} - r_C \sum_{j=0}^{h-k-1} G_{k+j}\, v^j\, {}_jp_{x+k}\,. \tag{16.9.6}$$

Для смешанного страхования числитель выражения r_C в формуле (16.9.5) и правая часть равенства (16.9.6) корректируются путем включения выплат на дожитие.

Пример 16.9.1. Рассчитаем ежегодные нетто-премии для специального договора смешанного страхования на срок 30 лет, заключенного лицом (35), с помощью стандартного метода оценки резервов специальных уполномоченных. Выплаты на случай смерти составляют 150 000 для первых 20 лет и 100 000 для оставшихся 10 лет с выплатами на дожитие в размере 100 000. Постоянные брутто-премии составляют в течение первых 10 лет 2500, а затем 1250. Будем использовать Иллюстративную таблицу смертности при $i = 0{,}06$.

Решение. Величина ЭПСП основана на выплатах на случай смерти и вычисляется следующим образом:

$$\text{ЭПСП} = 50\,000\left(\frac{2A^1_{36:\overline{29}|} + A^1_{36:\overline{19}|}}{A^1_{36:\overline{29}|}}\right) = 130\,153{,}30.$$

Отношение r_F задано формулой

$$r_F = \frac{50\,000}{1250}\left(\frac{2A_{36:\overline{29}|} + A^1_{36:\overline{19}|}}{\ddot{a}_{36:\overline{29}|} + \ddot{a}_{36:\overline{9}|}}\right) = 0{,}91014604 \quad \text{и} \quad {}_{19}P_{36} = 0{,}0116543.$$

Чтобы можно было применить метод ППП, должно выполняться условие (16.9.3). Однако, поскольку

$$r_F\, G_0 = (0{,}91014604)(2500) = 2275{,}37 > 1516{,}85 = \text{ЭПСП}\,{}_{19}P_{36},$$

метод полного подготовительного периода неприменим. Компенсация превышения расходов первого года, аналогичная $\beta - \alpha$, задана формулой

$$\text{ЭПСП}\,{}_{19}P_{x+1} - b_1\, A^{1}_{x:\overline{1|}} = 1516{,}8456 - 284{,}9395 = 1231{,}9061,$$

и

$$r_C = \frac{50\,000(2A_{36:\overline{29|}} + A^{1}_{36:\overline{19|}}) + 1231{,}9061}{1250(\ddot{a}_{36:\overline{29|}} + \ddot{a}_{36:\overline{9|}})} = 0{,}88223578.$$

Таким образом, нетто-премии второго и последующих лет представляют собой

$$r_C(2500) = 2205{,}59 \quad \text{для года } 2, 3, \ldots, 10,$$
$$r_C(1250) = 1102{,}79 \quad \text{для года } 11, 12, \ldots, 30,$$

а нетто-премия первого года равна

$$r_C(2500) - 1231{,}9061 = 973{,}68.$$ ▼

Другая интерпретация стандартного метода расчета резервов специальных уполномоченных применительно к договорам страхования на случай смерти с изменяющимися страховыми выплатами содержится в Актуарном руководстве XVII, принятом Национальной ассоциацией специальных уполномоченных по страхованию. Такие руководства в большинстве штатов не имеют силы закона, но на них следует ориентироваться при применении законов в особых обстоятельствах.

Согласно этому руководству, прежде всего нужно определить среднее страховых выплат на случай смерти с 2-го года по 10-й. Обозначим это среднее значение через M, т. е.

$$M = \frac{1}{9}\sum_{j=0}^{8} b_{j+2}\,.$$

Если

$$\sum_{j=0}^{n-2} b_{j+2}\, v^{j+1}\, {}_jp_{x+1}\, q_{x+1+j} \Big/ \ddot{a}_{x+1:\overline{h-1|}} > M\, {}_{19}P_{x+1},$$

то r_C определяется согласно формуле (16.9.5), где величина ЭПСП заменена на M. Если выполняется обратное неравенство, то r_F определяется согласно формуле (16.9.2). Формулы резервов (16.9.4) и (16.9.6) остаются в силе. Целью этого руководства является замена ЭПСП на более простую величину M.

16.9.2. Денежные стоимости

Вопросы, которые возникают в связи с выкупными суммами в договорах с изменяющимися премиями и страховыми выплатами, аналогичны рассмотренным выше, но есть и различия. Примерное положение от 1980 г. опирается на *среднюю страховую сумму* (ССС) и указывает, что эта сумма вычисляется по страховым выплатам, произведенным в концах первых 10 лет. Таким образом, в обозначениях договора страхования общего вида из разд. 8.2

$$\text{ССС} = \frac{1}{10}\sum_{j=0}^{9} b_{j+1},$$

где $n \geqslant 10$. Постоянная нетто-премия — это

$$P = \sum_{j=0}^{n-1} b_{j+1}\, v^{j+1}\, {}_jp_x\, q_{x+j} \Big/ \ddot{a}_{x:\overline{h}|}. \tag{16.9.7}$$

Если учитываются выплаты на дожитие, то в числитель дроби (16.9.7) включается дополнительное слагаемое. В формулу для компенсации расходов первого года величины P и CCC входят следующим образом:

$$E_1 = \begin{cases} 1{,}25P + 0{,}01\,\mathrm{CCC}, & P < 0{,}04\,\mathrm{CCC}, \\ 0{,}06\,\mathrm{CCC}, & P \geqslant 0{,}04\,\mathrm{CCC}. \end{cases} \tag{16.9.8}$$

Скорректированная премия для любого года действия договора является произведением r_N на соответствующую брутто-премию для этого года действия договора, где

$$r_N = \frac{E_1 + \sum\limits_{j=0}^{n-1} b_{j+1}\, v^{j+1}\, {}_jp_x\, q_{x+j}}{\sum\limits_{j=0}^{h-1} G_j v^j\, {}_jp_x}. \tag{16.9.9}$$

Минимальная денежная стоимость задается формулой

$${}_kCV = \sum_{j=0}^{n-k-1} b_{k+j+1}\, v^{j+1}\, {}_jp_{x+k}\, q_{x+k+j} - r_N \sum_{j=0}^{h-k-1} G_{k+j}\, v^j\, {}_jp_{x+k}. \tag{16.9.10}$$

Если обеспечиваются выплаты на дожитие, то формулы (16.9.9) и (16.9.10) должны быть модифицированы.

Пример 16.9.2. Подсчитаем минимальные денежные стоимости в конце 1-го, 2-го, 10-го и 20-го года для договора смешанного страхования на срок 30 лет, описанного в примере 16.9.1. Будем пользоваться формулами (16.9.8), (16.9.9) и (16.9.10), Иллюстративной таблицей смертности и процентной ставкой 6%.

Решение. Выплаты на случай смерти составляют 150 000 для первых 20 лет и 100 000 по истечении этого срока. Кроме того, поскольку величина CCC определяется по страховым выплатам в первые 10 лет действия договора, CCC = 150 000. Постоянная нетто-премия для этого договора, заключенного в возрасте 35 лет, составляет

$$P = \frac{50\,000(2A_{35:\overline{30}|} + A^{\;1}_{35:\overline{20}|})}{\ddot{a}_{35:\overline{30}|}} = 1622{,}9358.$$

Поскольку $P = 1622{,}94 \leqslant 6000 = 0{,}04\,\mathrm{CCC}$, согласно (16.9.8) имеют место равенства $E_1 = 1{,}25P + 0{,}01\,\mathrm{CCC} = 3528{,}6698$. Брутто-премия составляет 2500 в год в течение 10 лет и 1250 в год в течение оставшихся 20 лет. Коэффициент r_N для скорректированной премии имеет вид

$$r_N = \frac{E_1 + 50\,000(2A_{35:\overline{30}|} + A^{\;1}_{35:\overline{20}|})}{1{,}250(\ddot{a}_{35:\overline{30}|} + \ddot{a}_{35:\overline{10}|})} = 0{,}9667466.$$

Для получения приведенных ниже денежных стоимостей по этому договору используется формула (16.9.10). Итого,

k	${}_kCV$
1	0,00
2	669,73
10	22 519,81
20	48 776,92

Согласно этой формуле, ${}_1CV = -1483{,}53$. Однако отрицательную сумму денежной стоимости нельзя собрать со страхователей, досрочно прекращающих выплату премий, так что мы полагаем ее равной нулю. ▼

16.10. Замечания и литература

В книге [Cummins 1973] содержится очерк истории выкупных сумм в США, причем подчеркивается роль основополагающей работы Э. Райта. В других странах развитие шло другими путями. В отчете Национальной ассоциации специальных уполномоченных по страхованию 1941 г. о сохраненных выплатах подводится итог исторического развития страхового регулирования в США, приведен краткий обзор практики других стран, обсуждаются этические соображения относительно равноправия страхователей, досрочно прекративших выплату премий, и развитие подхода со скорректированной премией для определения минимальной денежной стоимости. Отчет Комитета Общества актуариев о требованиях к сохраненным обязательствам от 1975 г. особенно интересен из-за содержащегося там обсуждения этой проблемы применительно к договорам, в которых разрешено изменение выплат после заключения договора. Ричардсон [Richardson 1977] дополняет этот последний доклад исследованием расходов для определения надбавок в скорректированных премиях.

Шеперд [Shepherd 1940] разрабатывал вопросы, связанные с естественными резервами и премиями. Хоскинс в двух статьях, [Hoskins 1939] и [Hoskins 1929], первая из которых посвящена выкупным суммам, а вторая — брутто-премиям, развил некоторые соображения, изложенные в разд. 16.4.2. Метод определения премий, который учитывает целевые значения нормы доходности, является упрощенной версией метода, изложенного в работе Андерсона [Anderson 1959]. Андерсон также приводит обширный материал, относящийся к средствам на обеспечение прибыли и «на случайность».

Дивиденды подробно обсуждаются в работах [Jackson 1959] и в монографии [Maclean, Marshall 1937]. В последней также описывается история развития методик распределения сальдо. В работе [Cody 1981] описывается более сложная модель, чем ранее предложенные модели.

Резервы, определенные по методу ППП, также называются резервами по Цильмеру в честь швейцарского актуария, который развил этот метод. Метод специальных уполномоченных и соответствующие рекомендации были разработаны двумя комитетами Национальной ассоциации специальных уполномоченных по страхованию с почти одинаковым составом: Комитетом по изучению необходимости новых таблиц смертности и смежным вопросам (1939 г.) и Комитетом по изучению сохраненных выплат и смежным вопросам (1941 г.). По фамилии их общего председателя эти комитеты часто называют комитетами Гертина (Guertin Commitees). Статья

[Menge 1946] — подробное исследование технических аспектов метода специальных уполномоченных. Монография [Tullis, Polkinghorn 1992] посвящена многим аспектам, которые возникают при расчете обязательств при страховании жизни.

Упражнения

К разделу 16.3

16.1. Компания планирует принять новую таблицу смертности. Укажите, как следует определить те возрасты заключения договора и периоды времени, прошедшие с момента заключения договора, для которых измененные сохраненные оплаченные страховые суммы по договору бессрочного страхования на случай смерти будут увеличиваться, и те, для которых они будут уменьшаться. Используйте только таблицу ежегодных нетто-премий для договоров бессрочного страхования на случай смерти, рассчитанных на основе старой и новой таблиц смертности. Предполагается, что денежные стоимости рассчитываются с применением в новых таблицах тех же долей нетто-резерва, который использовался в старых таблицах.

16.2. Договор смешанного страхования жизни на срок n лет с n-летним периодом выплаты премий и с единичной страховой суммой заключается лицом (x) в дискретной модели. В случае прекращения выплаты премий в момент t страхователь может выбрать:

- договор оплаченного бессрочного страхования на случай смерти или
- договор с измененным сроком страхования до конца периода дожития с измененной выплатой на дожитие в возрасте $x + n$ лет.
- Денежная стоимость в момент времени t составляет ${}_tV_{x:\overline{n}|}$ и достаточна для обеспечения оплаченного договора бессрочного страхования на случай смерти со страховой суммой b или договора с измененным сроком страхования с выплатой размера 1 на случай смерти и страхования на дожитие до возраста $x + n$ с выплатой размера f. Выразите f через b, $A^{\;1}_{x+t:\overline{n-t}|}$ и ${}_{n-1}E_{x+t}$, если $A_{x+t:\overline{n-t}|} = 2A_{x+t}$.

16.3. Договор смешанного страхования на срок 20 лет с выплатой размера 1, заключенный лицом (30), в непрерывной модели расторгается в конце 10-го года, когда имеется задолженность величины L под залог этого договора с денежной стоимостью ${}_{10}CV$. Выразите в терминах актуарных настоящих стоимостей:

(a) выплаты на дожитие E на дату окончания срока исходного договора, если заключается новый договор страхования со страховой суммой $1 - L$, равной страховой сумме по старому договору за вычетом задолженности, на срок до указанной даты;

(b) размер резерва для нового договора смешанного страхования с измененным сроком в 5 лет после даты переоформления договора.

16.4. Предполагается, что величина измененной оплаченной страховой суммы определяется умножением исходной на отношение числа выплаченных ежегодных премий к общему числу премий, которые должны быть выплачены по этому договору. Сравните оплаченную страховую сумму, определенную данным правилом, с ${}^{20}_{10}W_{40}$ и ${}_{10}W_{40:\overline{20}|}$, используя Иллюстративную таблицу смертности и процентную ставку 6%.

16.5. Покажите, что

$$\frac{d}{dt}\left[{}_t\bar{W}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\right] = \frac{\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) - \mu_x(t)[1 - {}_t\bar{W}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})]}{\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|}},$$

и дайте словесную интерпретацию этого уравнения. [Указание. Используйте формулу (8.6.2), чтобы выписать производные для ${}_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})$ и $\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|}$.]

16.6. Начиная с первых лет срока действия договора страхования на случай смерти, компания определяет денежную стоимость для этого договора следующим образом:

$${}_kCV = h(G_{x+k} - G_x)\ddot{a}(k), \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

где G означает брутто-премию в указанном возрасте, а $\ddot{a}(k)$ — аннуитет, выплата которого начинается в возрасте $x + k$ и продолжается в течение периода выплаты премий. На практике h выбирается равным 2/3. Если, согласно Примерному положению от 1980 г., брутто-премии по договору бессрочного страхования на случай смерти выбираются равными скорректированным премиям и если каждая из величин P_x и P_{x+k} меньше 0,04 и $h = 0{,}9$, то покажите, что

$$_kCV = (0{,}909 + 1{,}125P_x)_kV_x + 1{,}125(P_{x+k} - P_x).$$

16.7. Пусть $_k\widehat{W} = {}_kCV/A(k)$, где $_kCV = A(k) - P^a\ddot{a}(k)$, как в формуле (16.2.2), а P^a является скорректированной премией. Постройте таблицу, подобную табл. 16.3.1, для трех видов страхования жизни, указанных в этой таблице, в дискретной модели, связывающую величину $_k\widehat{W}$ со скорректированной премией и постоянной нетто-премией.

16.8. Пусть $_kW^{\mathrm{Mod}} = {}_kV^{\mathrm{Mod}}/A(k)$, где $_kV^{\mathrm{Mod}}$ является резервом на конец k-го года, определенным с помощью изложенного в разд. 16.8 стандартного метода оценки резервов специальных уполномоченных. Постройте таблицу, подобную табл. 16.3.1, для трех видов страхования, указанных в этой таблице, в дискретной модели, связывающую величину $_kW^{\mathrm{Mod}}$ с премией второго и последующих лет и постоянной нетто-премией. Мы предполагаем, что период выплаты премий в страховании с ограниченным сроком внесения премий меньше 20 лет.

16.9. Пусть $_{k+t}CV = {}_{k+t}\bar{V}(\bar{A}_x)$.

(a) Покажите, что уравнение (16.3.4) для продолжительности периода автоматического займа на выплату премий можно записать в виде $H(t) = 0$, где $H(t) = \bar{a}_x\, G\, \bar{s}_{\overline{t}|i} + \bar{a}_{x+k+t} - \bar{a}_x$.

(b) Проверьте, что $H(0) < 0$ для таких функций дожития, где интенсивность смертности возрастает, и что при $t \to \infty$ величина $H(t)$ становится положительной и неограниченно растет.

(c) Вычислите $H'(t)$.

К разделу 16.4

16.10. Запишите формулу для $_{10}AS_2 - {}_{10}AS_1$, если $_{10}AS_1$ в соотношении (16.4.1) является долей активов спустя 10 лет, рассчитанной на основе G_1, а $_{10}AS_2$ — соответствующая величина, рассчитанная на основе G_2.

16.11. Обозначим премию с надбавкой на расходы, определенную согласно принципу эквивалентности, через P', а брутто-премию, включающую надбавку на обеспечение прибыли и «на случайность» — через G. Если $G = P'(1+\theta)$, $\theta > 0$, то брутто-премия определяется согласно ***принципу ожидаемого значения для расчета премий***. Этот принцип получил свое название из-за того, что брутто-премия пропорциональна премии, полученной на основе принципа эквивалентности. Покажите, что принцип ожидаемого значения обладает свойством аддитивности. Это можно сделать, рассмотрев две независимые случайные величины $_0L_e^*(1)$ и $_0L_e^*(2)$, где звездочка означает, что премия, включенная в функцию потерь, в $1+\theta$ раз больше премии с надбавкой на расходы, определенной на основе принципа эквивалентности. Покажите, что

$$\mathbf{E}[_0L_e^*(1) + {}_0L_e^*(2)] = \mathbf{E}[_0L_e^*(1)] + \mathbf{E}[_0L_e^*(2)].$$

16.12. Рассмотрим ***эмпирическую премию***, которая обозначается через $\widehat{G}$ и основана на реалистических предположениях о смертности и о расходах, такую, что

$$\widehat{G} = v\,{}_{k+1}F - {}_kF + \hat{g} + v\hat{q}^{(1)}_{x+k}(1 - {}_{k+1}F),$$

где $\hat{g} = G\hat{c}_k + \hat{e}_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Кроме того, предположим, что $_{k+1}CV = {}_{k+1}F$ для $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Покажем, что при этих предположениях

(a) $_{k+1}F = ({}_kF + \widehat{G} - \hat{g})(1+i) - \hat{q}^{(1)}_{x+k}(1 - {}_{k+1}F)$;

(b) если дивиденды выплачиваются страхователям, которые умерли или досрочно прекратили действие договора, то равенство (16.5.4) может быть записано в виде

$$_{k+1}F + {}_{k+1}D = [{}_kF + G - \hat{g}](1 + \hat{i}_{k+1}) - \hat{q}^{(1)}_{x+k}(1 - {}_{k+1}F)$$

и

$$_{k+1}D = (G - \widehat{G})(1 + \hat{i}_{k+1}) + ({}_kF + \widehat{G} - \hat{g})(\hat{i}_{k+1} - i).$$

В этом упражнении представлен ***метод эмпирических премий*** для расчета дивидендов.

16.13. Рекуррентное соотношение между последовательными настоящими стоимостями страховых аннуитетов задается формулой

$$(\ddot{a}_{x+h}-1)(1+i)=p_{x+h}\,\ddot{a}_{x+h+1}, \qquad h=0,1,2,\ldots .$$

(a) Если эмпирическая процентная ставка равна $\hat{i}_{h+1}$, а эмпирическая вероятность дожития равна $\hat{p}_{x+h}$, то динамика фонда будет описываться формулой

$$(\ddot{a}_{x+h}-1)(1+\hat{i}_{h+1})=\hat{p}_{x+h}(\ddot{a}_{x+h+1}+\Delta_{h+1}),$$

где Δ_{h+1} — доля отклонений на одного дожившего. Покажите, что

$$\Delta_{h+1}=\frac{(\hat{i}_{h+1}-i)(\ddot{a}_{x+h}-1)+(p_{x+h}-\hat{p}_{x+h})\ddot{a}_{x+h+1}}{\hat{p}_{x+h}}$$

и дайте интерпретацию этой формулы. [Эта формула лежит в основе двухфакторной формулы распределения дивидендов по аннуитету.]

(b) Пусть выплаты аннуитета в конце года составляют произведение r_{h+i} на выплаты в начале года, где

$$(\ddot{a}_{x+h}-1)(1+\hat{i}_{h+1})=\hat{p}_{x+h}(r_{h+1})\ddot{a}_{x+h+1}.$$

Выразите r_{h+1} в терминах i, $\hat{i}_{h+1}$, p_{x+h} и $\hat{p}_{x+h}$.

К разделу 16.6

16.14. Пусть в методе модифицированного резерва период модификации равен периоду выплаты премий. Покажите, что

$${}_kV^{\mathrm{Mod}}_{x:\overline{n}|}=1-(\beta+d)\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}.$$

16.15. Пусть для метода модифицированного резерва для бессрочного страхования на случай смерти в непрерывной модели

$$\bar{\alpha}(t)=\frac{t}{m}\,\bar{\beta}, \qquad 0\leqslant t<m,$$

где $\bar{\beta}$ — постоянные премии для $t\geqslant m$.

(a) Выразите $\bar{\beta}$.

(b) Выведите перспективную формулу для ${}_t\bar{V}(\bar{A}_x)^{\mathrm{Mod}}$, $t<m$.

16.16. Рассчитайте α_x^{Mod} и β_x^{Mod} в методе модифицированного резерва для бессрочного страхования на случай смерти в дискретной модели, где ${}_1V_x^{\mathrm{Mod}}=K$. Период модификации равен периоду выплаты премий.

16.17. При расчетах по методу модифицированного резерва для договора бессрочного страхования на случай смерти в дискретной модели ежегодная нетто-премия P_x заменяется (при расчете резерва) ежегодной премией α_x^{Mod} в течение первых n лет и премией β_x^{Mod} в дальнейшем. Покажите, что

$$\frac{\beta_x^{\mathrm{Mod}}-P_x}{P_x-\alpha_x^{\mathrm{Mod}}}=\frac{\ddot{a}_x}{{}_{n|}\ddot{a}_x}-1.$$

16.18. Покажите, что

$${}_kV-{}_kV^{\mathrm{Mod}}=\frac{\beta-\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{j}|}}\,\ddot{a}_{x+k:\overline{j-k}|},$$

где j — продолжительность периода модификации. Заметим, что эту разность можно интерпретировать как неиспользованную часть повышенных надбавок на расходы первого года.

16.19. Используйте общие обозначения из формулы (16.2.2) для определения модели модифицированного резерва для договора с постоянными выплатами и постоянными премиями:

$${}_kV^{\mathrm{Mod}}=A(k)-\beta\ddot{a}(k), \qquad k=1,2,3,\ldots .$$

Проведите следующие этапы доказательства:

(a) $${}_kV^{\text{Mod}} = vq_k + bp_k A(k+1) - \beta - \beta v p_k\, \ddot{a}(k+1) = vq_k - \beta + vp_k\, {}_{k+1}V^{\text{Mod}},$$
$$({}_kV^{\text{Mod}} + \beta)(1+i) = q_k(1 - {}_{k+1}V^{\text{Mod}}) + {}_{k+1}V^{\text{Mod}}, \qquad k = 1, 2, \dots .$$

(b) Если ${}_0V^{\text{Mod}}$ определяется как $\alpha - \beta$, то рекуррентное соотношение в п. (a) может быть распространено на случай $k = 0$.

(c) $\Delta v^k {}_kV^{\text{Mod}} = v^k\beta - q_k(1 - {}_{k+1}V^{\text{Mod}})v^{k+1}$, $k = 1, 2, 3 \dots$.

(d) Просуммировав выражение из п. (c) по $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ от 1 до $n-1$, покажите, что
$${}_nV^{\text{Mod}} = \beta\ddot{s}_{\overline{n}|} - (\beta - \alpha)(1+i)^n - \sum_{k=0}^{n-1}(1+i)^{n-k-1}q_k(1 - {}_{k+1}V^{\text{Mod}}).$$

К разделу 16.7

16.20. Покажите, что
$${}_kV^{\text{ППП}}_{x:\overline{n}|} = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}}{\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}}, \qquad k = 1, 2, \dots, n.$$

16.21. *Метод с двухгодичным подготовительным периодом расчета резерва* определяется тремя значениями премий, используемыми для вычисления резервов:

первый год:	$A^{1}_{x:\overline{1}|}$,
второй год:	$A^{\;1}_{x+1:\overline{1}|}$,
последующие годы:	постоянная нетто-премия для возраста $x+2$ без изменения размера страховых выплат или периода выплаты премий.

Покажите, что для этого метода резерв по договору бессрочного страхования на случай смерти, заключенного лицом (x), задается формулой
$${}_1V^{\text{Mod}} = {}_2V^{\text{Mod}} = 0,$$
$${}_kV^{\text{Mod}} = {}_kV_x - (P_{x+2} - P_x)\ddot{a}_{x+k}, \qquad k = 3, 4, 5, \dots .$$
(Этот тип системы резервов является общепринятым в медицинском страховании.)

16.22. Рассмотрите договор бессрочного страхования на случай смерти, заключенный лицом (x), в дискретной модели. Величина $\Lambda_h^{\text{ППП}}$ определяется согласно соотношению (8.5.1) при $\pi_0 = A^{1}_{x:\overline{1}|}$, $\pi_h = P_{x+1}$, $h = 1, 2, \dots$, и ${}_hV = {}_hV^{\text{ППП}}$. Покажите, что при ${}_1V_x > 0$
$$\mathbf{D}[\Lambda_0^{\text{ППП}}\,|\,K(x) = 0, 1 \dots] = v^2 p_x q_x > \mathbf{D}[\Lambda_0\,|\,K(x) = 0, 1, \dots].$$

К разделу 16.8

16.23. Пусть в некотором методе расчета резерва нетто-премия первого года равна α, а нетто-премия второго и последующих лет равна β. Пусть премия первого года не меньше величины $A^{1}_{x:\overline{1}|}$, что позволяет пользоваться методом полного подготовительного периода для некоторых договоров и для некоторых возрастов. Разность $\beta - \alpha$ не может превышать 0,05. Предположим, что при использовании этого метода вычислений $d = 0{,}03$, $\ddot{a}_x = 17$, $\ddot{a}_{x:\overline{12}|} = 9$, $A_{x:\overline{12}|}^{\;\;\;1} = 2/3$ и $A^{1}_{x:\overline{1}|} = 0{,}01$.

(a) Вычислите β для договора бессрочного страхования на случай смерти, заключенного лицом (x).

(b) Вычислите ${}_{12}V_x^{\text{Mod}}$ для этого метода.

(c) Предполагая, что $\alpha = A^{1}_{x:\overline{1}|} = 0{,}01$, определите пробное значение β по договору смешанного страхования на срок 12 лет, заключенному лицом (x). Убедитесь, что такая величина β неприемлема, поскольку $\beta - \alpha > 0{,}05$.

(d) Используя результат п. (c), подсчитайте величину β для договора смешанного страхования на срок 12 лет, заключенного лицом (x).

(e) Рассчитайте ${}_1V^{\text{Mod}}_{x:\overline{12}|}$.

16.24. Некоторый стандартный метод модифицированного подготовительного периода описывается следующим образом:

• Договоры разделяются на два класса: класс I, где премии второго и последующих лет по методу полного подготовительного периода больше ${}_{19}P_{x+1}$, и класс II для всех прочих договоров.

• Для договоров из класса I премия первого года определяется по методу расчета резервов специальных уполномоченных, премии второго и последующих лет устанавливаются в таком размере, чтобы резерв постоянной нетто-премии достигался на конец периода выплаты премий или на конец 15-го года действия договора, в зависимости от того, какой из этих периодов короче.

• Для договоров из класса II используется метод полного подготовительного периода. При описанном стандартном методе выразите α и β для договора смешанного страхования жизни на срок 20 лет, заключенного лицом (x), с 20-летним периодом выплаты премий в дискретной модели.

16.25. Для $\beta^{\text{ППП}} > {}_{19}P_{x+1}$ величина резерва на конец k-го периода, определенного по методу расчета резерва специальных уполномоченных, для договора страхования на случай смерти с постоянными страховыми выплатами, заключенного лицом (x), в дискретной модели может быть записана в виде

$$ {}_kV^{\text{СУ}} = \frac{A^1_{x:\overline{1}|}}{{}_kE_x} + {}_{19}P_{x+1}\,\ddot{s}_{x+1:\overline{k-1}|} + T\ddot{s}_{x:\overline{k}|} - \frac{A^1_{x:\overline{k}|}}{{}_kE_x}\,. $$

Выразите отсюда T.

К разделу 16.9

16.26. Предположим, что $\beta^{\text{ППП}} > {}_{19}P_{x+1}$ и

$$ \begin{aligned} b_{j+1} &= 1, \qquad & j &= 0, 1, \ldots, n-1, \\ G_j &= P(1+\theta), \qquad & j &= 0, 1, \ldots, h-1. \end{aligned} $$

Покажите, что формулу (16.9.7) можно свести к формуле для k-го резерва с помощью стандартного метода расчета резервов специальных уполномоченных.

17

ОСОБЫЕ ВИДЫ СТРАХОВАНИЯ И АННУИТЕТОВ

17.1. Введение

В этой главе мы изучим разнообразные договоры, обеспечивающие особые виды страховых выплат и аннуитетов и определим для них актуарные настоящие стоимости, нетто- и брутто-премии и нетто-резервы. В разд. 17.2 мы рассмотрим ряд аннуитетов для одного лица, по условиям которых период выплат может превосходить продолжительность предстоящей жизни этого лица или могут быть предусмотрены выплаты на случай его смерти. Такие договоры могут возникать при выборе способа урегулирования для договора страхования жизни или по правилам пенсионной схемы, или по условиям договора с отдельным лицом на получение им аннуитета. В разд. 17.3 рассматриваются близкие проблемы для страхования на случай потери кормильца. Предметом разд. 17.4 являются договоры переменного страхования, в которых размер выплат и резервы зависят от результатов инвестирования. Эти договоры становятся важными, когда инфляция цен фактически уменьшает размер выплат, установленных в фиксированных денежных единицах. В разд. 17.5 рассматриваются договоры, в которых страховые суммы и размер премий могут изменяться в широких пределах. Некоторые договоры страхования жизни предусматривают выплаты до наступления смерти, если застрахованный заболеет неизлечимой, критической, болезнью или потеряет способность обслуживать себя самостоятельно. Такие выплаты называются *ускоренными*. В разд. 17.6 вводится модель выбытия по нескольким причинам для таких договоров. Эта модель похожа на модель страхования на случай потери трудоспособности, введенную в гл. 11, тем, что и время, и размер ускоренных выплат могут быть случайными.

17.2. Особые типы аннуитетов

В этом разделе мы будем заниматься расчетом актуарных настоящих стоимостей особых видов аннуитетов. Порядок осуществления платежей зависит от собранной брутто-премии. Будем определять величину брутто-премии, исходя из принципа эквивалентности. Мы подробно остановимся на непрерывных аннуитетах и по аналогии получим соответствующие результаты для аннуитетов с выплатами m раз в год.

В разд. 5.2 содержится анализ бессрочного страхового аннуитета с гарантированным периодом выплат n лет, независимо от того, жив страхователь или нет. Аннуитеты из этого раздела можно рассматривать как частные случаи такого аннуитета, где вместо числа n появляется величина, связанная с величиной выплат.

Одним из примеров является *аннуитет с гарантией возврата премии*. По такому аннуитету гарантируется число выплат, достаточное для того, чтобы лицо, которому выплачивается аннуитет, получило сумму, не меньшую выплаченной брутто-премии. Актуарная настоящая стоимость выплат для этого непрерывного аннуитета с брутто-премией G равна $\bar{a}_{\overline{G}|} + {}_G E_x\, \bar{a}_{x+G}$. Если помимо G брутто-премия должна содержать надбавку, равную ее r-кратной величине, то, согласно принципу эквивалентности, величина G должна удовлетворять соотношению

$$G(1-r) = \bar{a}_{\overline{G}|} + {}_G E_x\, \bar{a}_{x+G}. \tag{17.2.1}$$

Можно вычислить левую и правую части этого соотношения для целых значений премии G. Тогда приближенное значение G, для которого обе эти части равны, находится с помощью линейной интерполяции. Аналогичные выражения имеются в дискретной модели, так что G можно найти таким же образом.

К этим аннуитетам близок аннуитет, который обладает некоторыми признаками договора страхования, а именно *аннуитет с возвратом премии в форме выплат на случай смерти*. Выплата на случай смерти определяется как превышение, если таковое имеется, выплаченной брутто-премии над платежами, осуществленными по аннуитету. Если G — единовременная брутто-премия, а T — момент смерти, то настоящая стоимость непрерывных выплат — это

$$Z = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T}|} + (G-T)v^T, & T \leqslant G, \\ \bar{a}_{\overline{T}|}, & T > G. \end{cases} \tag{17.2.2}$$

Актуарная настоящая стоимость таких выплат задается формулой

$$E(Z) = \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{t}|}\, {}_t p_x\, \mu_x(t)\, dt + \int_0^G (G-t)v^t\, {}_t p_x\, \mu_x(t)\, dt = \bar{a}_x + G\bar{A}^{\,1}_{x:\overline{G}|} - (\bar{I}\bar{A})^{1}_{x:\overline{G}|}. \tag{17.2.3}$$

Как и для аннуитета с гарантией возврата премий, для определения премии G используется принцип эквивалентности. Если надбавка равна r-кратной величине брутто-премии, то

$$G(1-r) = \bar{a}_x + G\bar{A}^{\,1}_{x:\overline{G}|} - (\bar{I}\bar{A})^{1}_{x:\overline{G}|}. \tag{17.2.4}$$

Чтобы найти приближенное значение G, можно использовать линейную интерполяцию, предварительно определив левую и правую части соотношения (17.2.4) для целых значений премии G.

Пример 17.2.1. Рассмотрим *аннуитет с возвратом части премии в форме выплаты на случай смерти*, случайная величина настоящей стоимости которого определятся формулой

$$Z = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T}|} + (\rho G - T)v^T, & T < \rho G,\ 0 < \rho < 1, \\ \bar{a}_{\overline{T}|}, & T \geqslant \rho G. \end{cases}$$

(a) Покажем, что равенство (17.2.4) можно переписать для аннуитета с возвратом части премии в форме выплаты на случай смерти в виде

$$G(1-r) = \bar{a}_x + \rho G\bar{A}^{\,1}_{x:\overline{\rho G}|} - (\bar{I}\bar{A})^{1}_{x:\overline{\rho G}|}.$$

(b) Исходя из соотношения $H(G) = Gr + \bar{a}_x + \rho G\bar{A}^{\,1}_{x:\overline{\rho G}|} - (\bar{I}\bar{A})^{1}_{x:\overline{\rho G}|} = G$, методом последовательного приближения определим такую величину G, что $H(G) = G$. Итерации в этом методе определяются соотношением $H(G_i) = G_{i+1}$.

(i) Найдем выражения для $H'(G)$ и $H''(G)$.

(ii) Определим знаки величин $H'(G)$ и $H''(G)$ в окрестности решения.

Решение. (a) Согласно принципу эквивалентности,

$$\begin{aligned}G(1-r) = \mathbf{E}[Z^*] &= \int_0^{\rho G} [\bar{a}_{\overline{t}|} + (\rho G - t)v^t]\, {}_tp_x\, \mu_x(t)\, dt + \int_{\rho G}^{\infty} \bar{a}_{\overline{t}|}\, {}_tp_x\, \mu_x(t)\, dt \\ &= \bar{a}_x + \rho G \int_0^{\rho G} v^t\, {}_tp_x\, \mu_x(t)\, dt - \int_0^{\rho G} t\, v^t\, {}_tp_x\, \mu_x(t)\, dt \\ &= \bar{a}_x + \rho G \bar{A}^1_{x:\overline{\rho G}|} - (\bar{I}\bar{A})^1_{x:\overline{\rho G}|}.\end{aligned}$$

(b) (i)

$$\begin{aligned}H'(g) &= r + \rho \bar{A}^1_{x:\overline{\rho G}|} + \rho[\rho G v^{\rho G}\, {}_{\rho G}p_x\, \mu_x(\rho G) - \rho G v^{\rho G}\, {}_{\rho G}p_x\, \mu_x(\rho G)] \\ &= r + \rho \bar{A}^1_{x:\overline{\rho G}|}, \\ H''(G) &= \rho^2 v^{\rho G}\, {}_{\rho G}p_x\, \mu_x(\rho G) \geqslant 0.\end{aligned}$$

(ii) Скорость сходимости методов последовательного приближения при решении нелинейных уравнений зависит от значения первой производной, $H'(G)$, в окрестности решения этого уравнения. Предположим, что для определения величины G этим методом используется равенство $H(G_i) = G_{i+1}$. Известно, что $H''(G) > 0$ и $H'(G) = r + \rho \bar{A}^1_{x:\overline{\rho G}|} = [G - \bar{a}_x + (\bar{I}\bar{A})^1_{x:\overline{\rho G}|}]/G$. Но $G > \bar{a}_x > \bar{a}_x - (\bar{I}\bar{A})^1_{x:\overline{\rho G}|} > \bar{a}_x - (\bar{I}\bar{A})_x > 0$, так что $0 < G - \bar{a}_x + (\bar{I}\bar{A})^1_{x:\overline{\rho G}|} < G$. Таким образом, $0 < H'(G) < 1$ в окрестности значения G, для которого $H(G) = G$. Условие $|H'(G)| < 1$ в окрестности решения является достаточным условием сходимости метода последовательного приближения, основанного на соотношении $H(G_i) = G_{i+1}$. ▼

17.3. Страхование на случай потери кормильца

Страхование на случай потери кормильца на срок n лет предусматривает выплаты с момента смерти страхователя до тех пор, пока не пройдет n лет с момента заключения договора. Обычно эти выплаты обеспечиваются премиями, которые выплачиваются в течение n лет или более короткого периода, необходимого для создания положительного нетто-резерва. Снова начнем с непрерывного аннуитета. Если T — момент смерти застрахованного, то настоящая стоимость выплат есть

$$Z = \begin{cases} v^T \bar{a}_{\overline{n-T}|}, & T \leqslant n, \\ 0, & T > n. \end{cases} \tag{17.3.1}$$

Обычно сомножитель $\bar{a}_{\overline{n-T}|}$ вычисляется с той же процентной ставкой, что и сомножитель v^T. Вариантом такого договора является *договор страхования, гарантирующий исполнение обязательств по закладной*, где сомножитель $\bar{a}_{\overline{n-T}|}$ в выражении для настоящей стоимости выплат представляет собой непогашенный долг по закладной. Процентная ставка по такому договору, применяемая при вычислении величины $\bar{a}_{\overline{n-T}|}$, может отличаться от процентной ставки, применяемой при вычислении величины v^T.

Актуарная настоящая стоимость выплат на случай потери кормильца задается формулой

$$\mathbf{E}[Z] = \int_0^n v^t \bar{a}_{\overline{n-t}|}\, {}_tp_x\, \mu_x(t)\, dt. \tag{17.3.2}$$

Это выражение можно преобразовать в интеграл в форме текущих платежей:

$$\bar{a}_{\overline{n}|} - \int_0^n v^t {}_tp_x \, dt = \int_0^n v^t(1 - {}_tp_x) \, dt = \bar{a}_{\overline{n}|} - \bar{a}_{x:\overline{n}|}. \tag{17.3.3}$$

Интеграл в средней части интерпретируется следующим образом: аннуитет выплачивается в момент времени t при $t < n$ лишь тогда, когда лицо (x) не доживет до этого момента времени, причем вероятность этого равна $1 - {}_tp_x$. Первое и третье выражения в формуле (17.3.3) можно интерпретировать как требование обеспечить непрерывные платежи постоянного размера 1 в год до момента времени n с возвратом этих платежей, если лицо (x) живо.

Завершим этот раздел примером, в котором сочетаются свойства договора страхования на случай потери кормильца и пенсионного аннуитета с гарантированным сроком выплаты.

Пример 17.3.1. Рассчитаем актуарную настоящую стоимость выплат по договору, заключенному в возрасте 40 лет и обеспечивающему следующий непрерывный аннуитет выплат размера 1 в год:

- выплаты на случай потери кормильца, если смерть страхователя произошла до достижения им возраста 65 лет, причем выплаты прекращаются, когда страхователю исполнилось бы 65 лет, или спустя 10 лет с момента смерти, если этот момент наступает позднее, и

- страховой аннуитет с гарантированным периодом выплат 10 лет, если страхователь доживет до возраста 65 лет.

Решение. Запишем интеграл в форме текущих платежей. В следующей таблице приведены условия выплат в момент времени t и соответствующие вероятности.

Время	Условие	Вероятность
$0 < t \leqslant 25$	лицо (40) умерло	$1 - {}_tp_{40}$
$25 < t \leqslant 35$	лицо (40) дожило до момента времени $t - 10$	${}_{t-10}p_{40}$
$t > 35$	лицо (40) живо	${}_tp_{40}$

Актуарная настоящая стоимость равна

$$\int_0^{25} v^t(1 - {}_tp_{40}) \, dt + \int_{25}^{35} v^t \, {}_{t-10}p_{40} \, dt + \int_{35}^{\infty} v^t {}_tp_{40} \, dt.$$

Если сделать замену переменных $s = t - 10$ в среднем интеграле, то получим

$$\int_{15}^{25} v^{s+10} \, {}_sp_{40} \, ds = v^{10}(\bar{a}_{40:\overline{25}|} - \bar{a}_{40:\overline{15}|}).$$

Таким образом, актуарная настоящая стоимость выплат может быть записана в виде

$$\bar{a}_{\overline{25}|} - \bar{a}_{40:\overline{25}|} + v^{10}(\bar{a}_{40:\overline{25}|} - \bar{a}_{40:\overline{15}|}) + \bar{a}_{40} - \bar{a}_{40:\overline{35}|}.$$ ▼

17.4. Договоры переменного страхования

Рассмотрим ряд договоров страхования, в которых размер выплат и резервы зависят от результатов инвестирования. С договором страхования могут быть связаны различные виды инвестиций. Обычно они согласуются с объявленными целями соответствующих страховых договоров или аннуитетов. Исходное соображение при использовании договоров переменного страхования — это желание участвовать в более высоких совокупных ожидаемых доходах (дивиденды, проценты на капитал), полученных от инвестирования активов, чтобы обеспечить некоторую защиту от инфляции. В типичном договоре предусматриваются гарантии, связанные лишь со смертью и с расходами. В этом случае страхователь не подвергается риску, связанному с неблагоприятной конъюнктурой, но и не получает дополнительных выплат при благоприятном развитии событий. Исследуем механизм изменения размера выплат, рассматривая индивидуальный договор.

17.4.1. Переменные аннуитеты

Здесь мы рассматриваем *переменные аннуитеты*. В течение периода выплаты премий или *периода накопления* увеличение фонда происходит вследствие выплаты единовременной премии или в результате периодических взносов с уровнями доходности, зависящими от результатов инвестирования фонда. Обычно в переменных аннуитетах оговариваются максимальные расходы на уплату комиссионных, на административные и инвестиционные издержки, а также используемые таблицы смертности. Если мы игнорируем прибыль и потери, связанные с расторжением договора и с выплатами на случай смерти гарантированной величины, то ожидаемый прирост доли фонда задается формулой

$$[F_k + \pi_k(1 - c_k) - e_k](1 + i'_{k+1}) = F_{k+1} + q_{x+k}(b_{k+1} - F_{k+1}); \tag{17.4.1}$$

сравните ее с равенством (16.5.3). Здесь F_k — доля фонда в момент времени k, π_k — величина депозитной премии в момент времени k, c_k — доля премии π_k, предназначенная на покрытие расходов в момент времени k, пропорциональных выплаченной в этот момент премии, e_k — надбавка на расходы, не пропорциональные выплаченной премии в момент времени k, b_{k+1} — выплаты, произведенные в момент времени $k+1$ на случаи смерти, произошедшие в интервале от k до $k+1$, i'_{k+1} — фактическая доходность инвестиций без учета инвестиционных издержек в году, следующем за моментом времени k. Второе слагаемое в правой части этого равенства равно нулю в течение периода накопления, так что это фонд, увеличивающийся лишь за счет начисления процента.

Средства, составляющие долю фонда в момент выхода на пенсию, используются для покупки оплаченного аннуитета, причем его продажная цена рассчитывается на основе предварительно определенной смертности и *предполагаемой доходности инвестиций*. Если предполагаемая доходность инвестиций низка, то начальный платеж по аннуитету будет мал по сравнению с долей фонда, но можно ожидать, что последующие выплаты будут увеличиваться, что в некоторой степени компенсирует наличие инфляции. Пусть предполагаемая доходность инвестиций обозначается через i, а фактическая чистая доходность инвестиций в момент времени k — через i'_{k+1}. Если платеж аннуитета производится только в случае, когда лицо дожило до начала соответствующего года, причем в момент k он равен b_k, то непосредственно перед выплатой резерв равен $b_k\,\ddot{a}_{x+k}$, где x — возраст выхода на пенсию. Формула для изменения доли фонда во времени имеет вид

$$(b_k\,\ddot{a}_{x+k} - b_k)(1 + i'_{k+1}) = b_{k+1}\,p_{x+k}\,\ddot{a}_{x+k+1}\,. \tag{17.4.2}$$

Но в силу формулы (5.3.4) имеем

$$(\ddot{a}_{x+k} - 1)(1 + i) = p_{x+k}\,\ddot{a}_{x+k+1}\,. \tag{17.4.3}$$

Деля (17.4.2) на (17.4.3), получим

$$b_{k+1} = b_k \, \frac{1 + i'_{k+1}}{1 + i} \, . \tag{17.4.4}$$

Таким образом, если $i'_{k+1} > i$, то размер выплат будет возрастать. Заметим, что высокая предполагаемая доходность инвестиций i может привести к ситуации, когда выплаты в более поздние годы часто оказываются меньше, чем в предыдущие.

Полученный результат, формула (17.4.4), имеет место и при другой структуре выплат. В упр. 17.11 это показано для бессрочного аннуитета с гарантированным периодом выплат n лет. Он справедлив в несколько иной форме для аннуитетов с выплатами m раз в год. Сначала рассмотрим изменение выплат, производимых ежемесячно. Формула, связывающая настоящие стоимости аннуитета в первый и второй месяцы года действия договора, имеет вид

$$\left(\ddot{a}^{(12)}_{x+k} - \frac{1}{12}\right)\left(1 + \frac{i^{(12)}}{12}\right) = {}_{1/12}p_{x+k}\, \ddot{a}^{(12)}_{x+k+1/12},$$

в то время как динамика доли фонда выражается формулой

$$\left(b_k\, \ddot{a}^{(12)}_{x+k} - \frac{b_k}{12}\right)\left(1 + \frac{i'^{(12)}_{k+1}}{12}\right) = {}_{1/12}p_{x+k}\, b_{k+1/12}\, \ddot{a}^{(12)}_{x+k+1/12}.$$

Деление этого равенства на предыдущее дает

$$b_{k+1/12} = \frac{b_k(1 + i'^{(12)}_{k+1}/12)}{1 + i^{(12)}/12} \, . \tag{17.4.5}$$

С другой стороны, мы могли бы найти динамику выплат на годовой основе, хотя выплаты и осуществляются ежемесячно. Прежде всего, выражение для величин последовательных годовых резервов для аннуитета с ежемесячными выплатами имеет вид

$$(\ddot{a}^{(12)}_{x+k} - \ddot{a}^{(12)}_{x+k:\overline{1}|})(1 + i) = p_{x+k}\, \ddot{a}^{(12)}_{x+k+1} \, .$$

Уравнение роста доли фонда в этом случае примет вид

$$(b_k\, \ddot{a}^{(12)}_{x+k} - b_k\, \ddot{a}^{(12)}_{x+k:\overline{1}|})(1 + i'_{k+1}) = p_{x+k}\, b_{k+1}\, \ddot{a}^{(12)}_{x+k+1} \, .$$

Таким образом, мы приходим к надбавке величины $b_k\, \ddot{a}^{(12)}_{x+k:\overline{1}|}$ для платежей аннуитета текущего года. Разделив последние два равенства одно на другое, вновь получаем (17.4.4):

$$b_{k+1} = b_k \, \frac{1 + i'_{k+1}}{1 + i} \, .$$

17.4.2. Переменное страхование жизни с переменными премиями

Существует большое число вариантов *переменного страхования жизни*. Рассмотрим три различных варианта, основывающихся на бессрочном страховании на случай смерти. Каждый из них легко переносится на страхование на случай смерти с ограниченным периодом выплаты премий или на смешанное страхование жизни. В каждом из них премии выплачиваются ежегодно и выплаты на случай смерти и на дожитие производятся непосредственно в момент смерти или дожития. Размер выплат изменяется в начале каждого года.

Первым видом является *страхование на случай смерти с переменными премиями*. Страховая сумма изменяется в зависимости от результатов инвестирования, а премии остаются пропорциональными страховой сумме. Начнем со страховой суммы размера 1 и нетто-премии $P(\bar{A}_x)$. Резерв в конце k-го года равен произведению ${}_kV(\bar{A}_x)$ на страховую сумму b_k, выплачиваемую в $k+1$-м году. Нетто-премия, выплачиваемая в момент времени k, равна $b_k\,P(\bar{A}_x)$. По получении этой нетто-премии приобретается срочное страхование на год со страховой суммой b_k, за которое выплачивается величина $b_k\,\bar{A}_{\overset{1}{x+k}:\overline{1}|}$. Следующее равенство связывает математическое ожидание величины фонда в начале и в конце года и используется для определения выплаты на следующий год:

$$[b_k\,{}_kV(\bar{A}_x) + b_k\,P(\bar{A}_x) - b_k\,\bar{A}_{\overset{1}{x+k}:\overline{1}|}](1+i'_{k+1}) = p_{x+k}\,b_{k+1}\,{}_{k+1}V(\bar{A}_x). \tag{17.4.6}$$

Но мы знаем, что

$$[{}_kV(\bar{A}_x) + P(\bar{A}_x) - \bar{A}_{\overset{1}{x+k}:\overline{1}|}](1+i) = p_{x+k}\,{}_{k+1}V(\bar{A}_x). \tag{17.4.7}$$

Деля (17.4.6) на (17.4.7), получим

$$b_{k+1} = b_k\,\frac{1+i'_{k+1}}{1+i}\,. \tag{17.4.8}$$

Это опять соотношение (17.4.4), которое имело место в течение периода выплаты переменного аннуитета.

17.4.3. Переменное страхование жизни с фиксированными премиями

Далее рассмотрим *договоры переменного страхования на случай смерти с фиксированными премиями*. Главным отличием от ситуации с переменными премиями, как следует из названия, является то, что нетто-премия остается постоянной. Вновь начнем со страховой суммы размера 1 и запишем равенство, связывающее ожидаемые значения величины фонда в начале и в конце года:

$$[b_k\,{}_kV(\bar{A}_x) + P(\bar{A}_x) - b_k\,\bar{A}_{\overset{1}{x+k}:\overline{1}|}](1+i'_{k+1}) = p_{x+k}\,b_{k+1}\,{}_{k+1}V(\bar{A}_x). \tag{17.4.9}$$

Объединяя это равенство с равенством (17.4.7), получим

$$b_{k+1} = b_k\left[\frac{{}_kV(\bar{A}_x) + P(\bar{A}_x)/b_k - \bar{A}_{\overset{1}{x+k}:\overline{1}|}}{{}_kV(\bar{A}_x) + P(\bar{A}_x) - \bar{A}_{\overset{1}{x+k}:\overline{1}|}}\right]\frac{1+i'_{k+1}}{1+i}\,. \tag{17.4.10}$$

Выражение в квадратных скобках в левой части формулы (17.4.9) можно переписать в виде

$$(b_k-1)\,{}_kV(\bar{A}_x) + {}_kV(\bar{A}_x) + P(\bar{A}_x) - b_k\,\bar{A}_{\overset{1}{x+k}:\overline{1}|}\,.$$

Оно показывает, что постоянная нетто-премия обеспечивает первоначально установленную страховую сумму размера 1 и дополнительные выплату $b_k - 1$, возникающую за счет фактических доходов от инвестирования.

17.4.4. Оплаченное увеличение страховой суммы

Рассмотрим одну из возможных реализаций варианта третьего вида. Мы будем считать изменения страховой суммы оплаченными и использовать премии лишь для обеспечения первоначально установленного уровня выплат. Равенство, связывающее доли фондов, приобретает вид

$$[(b_k - 1)\bar{A}_{x+k} + {}_kV(\bar{A}_x) + P(\bar{A}_x) - b_k\,\bar{A}^{\;1}_{x+k:\overline{1|}}](1 + i'_{k+1})$$
$$= p_{x+k}[(b_{k+1} - 1)\bar{A}_{x+k+1} + {}_{k+1}V(\bar{A}_x)]. \qquad (17.4.11)$$

Левая часть равенства (17.4.11) может быть преобразована следующим образом:

$$\{b_k(\bar{A}_{x+k} - \bar{A}^{\;1}_{x+k:\overline{1|}}) - [\bar{A}_{x+k} - {}_kV(\bar{A}_x) - P(\bar{A}_x)]\}(1 + i'_{k+1})$$
$$= [b_k\,{}_1E_{x+k}\,\bar{A}_{x+k+1} - P(\bar{A}_x)(\ddot{a}_{x+k} - 1)](1 + i'_{k+1})$$
$$= [b_k\,{}_1E_{x+k}\,\bar{A}_{x+k+1} - P(\bar{A}_x)({}_1E_{x+k}\,\ddot{a}_{x+k+1})](1 + i'_{k+1})$$
$$= p_{x+k}\,\bar{A}_{x+k+1}\left[b_k - \frac{P(\bar{A}_x)}{P(\bar{A}_{x+k+1})}\right]\frac{1 + i'_{k+1}}{1 + j}.$$

Правая часть равенства (17.4.11) наиболее легко преобразуется с помощью формулы для резерва в случае оплаченного страхования. Она сводится к виду

$$p_{x+k}\left\{(b_{x+1} - 1)\bar{A}_{x+k+1} + \bar{A}_{x+k+1}\left[1 - \frac{P(\bar{A}_x)}{P(\bar{A}_{x+k+1})}\right]\right\} = p_{x+k}\,\bar{A}_{x+k+1}\left[b_{k+1} - \frac{P(\bar{A}_x)}{P(\bar{A}_{x+k+1})}\right].$$

Таким образом, равенство (17.4.11) превращается в рекуррентную формулу для страховых сумм:

$$b_{k+1} - \frac{P(\bar{A}_x)}{P(\bar{A}_{x+k+1})} = \left[b_k - \frac{P(\bar{A}_x)}{P(\bar{A}_{x+k+1})}\right]\frac{1 + i'_{k+1}}{1 + i}. \qquad (17.4.12)$$

Этот третий вариант имеет то преимущество, что если после периода с высокими доходами от инвестиций, приводящими к выплатам $b_k > 1$, доходность инвестиций опустится на предполагаемый уровень, то страховая сумма останется неизменной. Это не так для второго страхового плана, который приводит к формуле (17.4.10).

Переменное страхование с оплаченным увеличением страховой суммы наиболее часто используется в коммерческой практике. В упр. 17.14 рассматривается другая реализация варианта третьего вида.

17.5. Договоры страхования с гибкими условиями

В начале 70-х годов страховые компании стали предлагать различные типы договоров, обеспечивающих страхователю широкие возможности для изменения страховых сумм, премий и других условий договора. Компании обычно допускали небольшое увеличение страховых выплат на случай смерти без проведения повторного андеррайтинга, но для более значительного увеличения требовали проведения такой процедуры. Подобные договоры распространялись обычно на все типы срочного страхования с постоянными премиями и постоянными выплатами, включая как предельный случай бессрочное страхование на случай смерти. Наиболее дорогостоящие из предлагаемых страховых договоров — это либо все варианты страхования с ограниченным сроком выплаты премий, либо все варианты смешанного страхования жизни.

В разд. 8.2 была предложена модель страхования на случай смерти с непостоянными, изменяющимися, выплатами и премиями. Предполагалось, что размеры премий и страховых сумм для всех лет действия договора определяются в момент заключения договора. В этом разделе рассматривается право страхователя на изменение размера премий и страховых сумм в рамках ограничений, установленных договором страхования. Страховыми компаниями предлагались страховые договоры с участием в прибыли (где дивиденды определяются фактическим состоянием) и без участия в прибыли. Был разработан специальный вариант получения дивидендов, позволяющий добавлять дивиденд к нетто-ставкам для прямого увеличения денежной стоимости. Эта более высокая денежная стоимость затем использовалась для отдаления даты окончания действия договора по срочному страхованию или для увеличения страховых выплат по бессрочному страхованию. Назовем такие страховые договоры *договорами с гибкими условиями* и приведем один очень простой пример, который показывает некоторые из связанных с этими договорами сложностей. Мы завершим этот раздел описанием второго типа договоров, который в меньшей степени связан с видом покрытия и имеет некоторые общие свойства с переменными страховыми договорами, описанными в предыдущем разделе.

17.5.1. Пример договора с гибкими условиями

Основой для рассматриваемого здесь типа договоров с гибкими условиями является формула, связывающая брутто-премии и нетто-премии, которая применяется при расчете резервов. Мы используем следующее очень простое соотношение, применимое для срочного страхования на случай смерти и для страхования с ограниченным сроком выплаты премий (последнее при бессрочном варианте):

$$0{,}8\,G = P. \tag{17.5.1}$$

Здесь G — брутто-премия, а P — нетто-премия.

Другое основополагающее решение — это определение формы общей надбавки на расходы и связанное с этим регулирование резерва в моменты изменения условий страхования. Мы будем использовать в нашем примере метод полного подготовительного периода (ППП) для расчета резервов и выкупных сумм. Следует заметить, что инструкции регулирующих органов относительно размера выкупных сумм и резервов могут потребовать более высоких минимальных значений этих величин, в частности, для страхования с ограниченными сроками выплаты премий. Положим ${}_0V = -E_0$, где E_0 — величина дополнительных расходов первого года. Эти соображения уже использовались в разд. 16.2. Затем в силу того, что для расчета резервов мы выбрали метод ППП, ${}_1V = 0$; предполагая, что модель у нас дискретная, получаем ${}_0V + P = vq_x b$. Таким образом,

$$E_0 = -{}_0V = P - vq_x b. \tag{17.5.2}$$

Соотношение, связывающее начальную страховую сумму b, начальную нетто-премию P и начальные условия договора со сроком выплаты премий h лет, записывается так:

$${}_0V + P\ddot{a}_{x:\overline{h}|} = bA^{1}_{x:\overline{j}|}. \tag{17.5.3}$$

Здесь j равно h (для срочного страхования) или $\omega - x$ (для страхования с ограниченным сроком выплаты премий). Наиболее легко резервы определяются по ретроспективным формулам, поскольку, как мы увидим далее, обычно требуются минимальные изменения выплаты последнего года действия договора. Таким образом,

$${}_kV = \frac{{}_0V + P\ddot{a}_{x:\overline{k}|} - bA^{1}_{x:\overline{k}|}}{{}_kE_x}. \tag{17.5.4}$$

Проиллюстрируем приложения этих формул следующим примером.

Пример 17.5.1. Рассмотрим договор с начальной брутто-премией размера 1000 и начальной страховой суммой размера 120 000, заключенный с лицом в возрасте 35 лет. Для определения дополнительных расходов первого года, резерва пятого года и типа страхования используем Иллюстративную таблицу смертности и процентную ставку 6%.

Решение. Согласно формуле (17.5.1), $P = 800$. Следовательно, величина дополнительных расходов первого года составит

$$-{}_0V = P - 120\,000vq_{35} = 572{,}05,$$

а резерв пятого года задается формулой

$${}_5V = \frac{-572{,}05 + 800\ddot{a}_{35:\overline{5}|} - 120\,000A^{1}_{35:\overline{5}|}}{{}_5E_{35}} = 2\,491{,}24\,.$$

Нетто-премия второго и последующих лет для страховых выплат размера 120 000 по договору бессрочного страхования на случай смерти, заключенному лицом в возрасте 35 лет, вычисленная с применением метода ППП, составит $120\,000P_{36} = 1057{,}37$. Поскольку наша нетто-премия составляет лишь 800, следует выбрать срочное страхование. Можно проверить, используя ретроспективные формулы, что

$${}_{39}V = 3375{,}72 \quad \text{и} \quad {}_{40}V = -1313{,}14.$$

Таким образом, выбранным типом страхования будет срочное до наступления возраста 74 года. Резерв, оставшийся на момент времени 39, обычно используется для обеспечения срочного страхования в течение части следующего года. В нашем примере число дней задается формулой

$$\frac{{}_{39}V}{120\,000A^{1}_{74:\overline{1}|}}\,365 = 230\,.$$ ▼

В момент изменения страховой суммы или премии вычисляется новая нетто-премия и некоторое изменение резерва, которое, например, может происходить из-за изменения предполагаемой величины расходов первого года. Для нашего упрощенного вида страхования нетто-премия является постоянной долей брутто-премии, и мы можем предположить, что пересмотренный резерв ${}_kV'$ в момент изменения условий договора равен имеющемуся резерву, определенному по методу ППП. Соотношение между пересмотренным резервом, новой нетто-премией P' и новой страховой суммой b' задается формулой, аналогичной формуле (17.5.3), а именно

$${}_kV' + P'\ddot{a}_{x+k:\overline{h}|} = b'\bar{A}^{\;1}_{x+k:\overline{j}|}. \tag{17.5.5}$$

Здесь j и h, вообще говоря, должны меняться при новом соотношении между премией и страховыми суммами. Вновь j равно или h, или $\omega - x - k$, а наиболее пригодной для вычисления резерва является ретроспективная формула. Таким образом, для $g = 1, 2, 3, \ldots$ имеем

$${}_{k+g}V' = \frac{{}_kV' + P'\ddot{a}_{x+k:\overline{g}|} - b'\bar{A}^{\;1}_{x+k:\overline{g}|}}{{}_gE_{x+k}}\,. \tag{17.5.6}$$

Изложим далее три примера, которые являются продолжениями примера 17.5.1 и иллюстрируют различные типы изменений и некоторые характерные расчеты.

Пример 17.5.2. Страхователь из примера 17.5.1 спустя 5 лет после заключения договора хочет увеличить брутто-премии до 2000, а страховую сумму до 150 000. Определим резерв 10-го года после заключения исходного договора и новый тип страхового покрытия.

Решение. $P' = 1600$ и ${}_5V' = 2491{,}24$ (в примере 17.5.1 ${}_5V' = {}_5V$). Таким образом, согласно формуле (17.5.6),

$$ {}_{10}V' = \frac{2491{,}24 + 1600\,\ddot{a}_{40:\overline{5|}} - 150\,000 A^{1}_{40:\overline{5|}}}{{}_5E_{40}} = 10\,391{,}89. $$

Поскольку $2491{,}24 + 1600\,\ddot{a}_{40}$ превосходит $150\,000A_{40}$, мы знаем, что договор должен быть договором бессрочного страхования на случай смерти с ограниченным сроком выплаты премий. Можно показать, что резерв в возрасте 69 лет — первый резерв, превосходящий актуарную настоящую стоимость выплат величины 150 000 в том же возрасте по бессрочному страхованию на случай смерти. Таким образом,

$$ {}_{34}V' = \frac{2491{,}24 + 1600\,\ddot{a}_{40:\overline{29|}} - 150\,000 A^{1}_{40:\overline{29|}}}{{}_{29}E_{40}} = 75\,597{,}32, $$

в то время как $150\,000A_{69} = 74\,954{,}44$. Когда страхователь достигнет 69 лет, договор, вероятно, будет заменен на договор оплаченного страхования на случай смерти со страховой суммой $75\,597{,}32/A_{69} = 151\,287$. ▼

Пример 17.5.3. Страхователь из примера 17.5.1 через 5 лет хочет изменить условия договора страхования на оплаченное страхование на случай смерти до возраста 60 лет с брутто-премией размера 2000. Определим размер страховых выплат, который следует из этих изменений.

Решение. $P = 0{,}8(2000) = 1600$; таким образом, по формуле (17.5.5)

$$ 2491{,}24 + 1600\,\ddot{a}_{40:\overline{20|}} = b' A_{40}. $$

Разрешая относительно b', получим $b' = 132\,090$. ▼

Пример 17.5.4. Страхователь из примера 17.5.1 через 5 лет хочет изменить условия договора на срочное страхование на случай смерти до достижения им возраста 65 лет со страховой выплатой размера 150 000. Определим брутто-премию, необходимую после этих изменений.

Решение. $P = 0{,}8\,G$; таким образом, по формуле (17.5.5)

$$ 2\,491{,}24 + 0{,}8\,G\ddot{a}_{40:\overline{25|}} = 150\,000 A^{1}_{40:\overline{25|}}. $$

Решение этого уравнения дает $G = 895{,}00$. ▼

17.5.2. Еще один вариант страхования

Другой вариант страхования является комбинацией переменного страхования на случай смерти и только что описанного варианта страхования с гибкими условиями договора. В этом изложении связь с типом страхового покрытия не является такой строгой, как это было в предыдущем разделе. Далее, вместо страховой суммы рассматривается *рисковая сумма*, ранее называвшаяся чистой рисковой суммой. Можно определить рисковую сумму в начале $(k+1)$-го года действия договора, а уравнение роста фонда можно записать в терминах этого показателя, который мы обозначим через r_k. Мы проводим анализ модели с ежегодными расчетами, но на практике обычно расчеты производятся ежемесячно или даже чаще. Основное уравнение роста доли фонда, аналогичное (16.5.3), без учета возможности досрочного прекращения действия договора, имеет вид

$$({}_kF + G - E - r_k\, \bar{A}^{\,1}_{x+k:\overline{1}|})(1 + i'_{k+1}) = {}_{k+1}F. \tag{17.5.7}$$

Заметим, что накопление происходит лишь за счет процентов, и в случае смерти страхователя выплачивается как доля фонда, т. е. фонд на начало года, ${}_kF + G - E - r_k\, \bar{A}^{\,1}_{x+k:\overline{1}|}$, так и рисковая сумма с учетом процента на момент смерти. Рисковая сумма может быть выбрана таким образом, чтобы поддерживать приблизительно постоянную совокупную страховую выплату. Страхователю обеспечивается значительная гибкость в выборе брутто-премии G и рисковой суммы r_k. Страховщик обычно предоставляет ряд гарантий. Как правило, i'_{k+1} является нормой доходности инвестиций, которая должна быть не ниже некоторой минимальной ставки i. Обычно гарантируется, что суммы, предназначенные для покрытия риска, не превосходят величины $r_k\, \bar{A}^{\,1}_{x+k:\overline{1}|}$, где актуарная настоящая стоимость страхового покрытия на срок 1 год рассчитывается при процентной ставке i и с помощью той же таблицы смертности, которая используется при расчете резервов в отчете, предоставляемом органам страхового надзора.

Величина r_k в этом случае должна быть больше или равна нижней границе, установленной налоговым законодательством. Цель такого регулирования — воспрепятствовать распространению благоприятных условий налогообложения, предоставляемых для договоров страхования на случай смерти, на договоры, которые по существу являются сберегательными программами.

Вид страхования, базирующийся на рекуррентном соотношении (17.5.7), называется *универсальным страхованием на случай смерти*. Такое всеобъемлющее название оправдывается предоставленным страхователю правом на изменение относительного значения рисковой и накопительной компонент путем изменения премий и выплат на случай смерти. В некоторых случаях договор обязывает страховщика использовать ставки накопления i_k, которые базируются на инвестициях определенной структуры. Например, i_k может базироваться на инвестициях в обыкновенные акции. Такое страхование называется *переменным универсальным страхованием на случай смерти*.

Надбавка на расходы, которая в формуле (17.5.7) обозначена символом E, используется теперь в нескольких формах, включая

- постоянную надбавку ко всем брутто-премиям;
- надбавку на досрочное прекращение действия договора, равную большой, но уменьшающейся (с течением времени) доле премии первого года, или операционные издержки, например, 25 единиц для каждого случая выбытия вследствие досрочного прекращения действия договора;
- одинаковые для всех договоров суммы, взимаемые только в первый год, или меньшие суммы, но взимаемые каждый год действия договора;
- надбавку на расходы первого года, пересчитанную на 1000 единиц страховой суммы.

Видами надбавок, наиболее подверженными регулированию со стороны органов страхового надзора, являются надбавка, связанная с дополнительными расходами первого года, и надбавка, связанная с риском. Расходы покрываются страховщиком за счет надбавки, рассчитанной согласно установленной формуле, а также за счет многих других источников. Вот некоторые из них:

• кредиты с уменьшенным процентом, ограниченным гарантированной ставкой, для начального коридора значений денежных стоимостей, например, первой тысячи единиц денежной стоимости;

• маржа процентной ставки от 1% до 1,5% между чистой инвестиционной доходностью и ставкой, применяемой для оценки денежных стоимостей;

• признание того факта, что надбавка, связанная с риском, фактически включает некоторое обеспечение расходов, как в случае регулярных премий по срочным видам страхования.

Как отмечалось ранее, условия договора страхования строго не привязаны к тому или иному типу страхового покрытия. В любой момент времени могут быть проведены расчеты, аналогичные тем, которые были использованы в примерах 17.5.1 и 17.5.2, для определения типа страхового покрытия, которое отвечает конкретному набору премий, выплат, надбавок на покрытие текущего риска и расходов, процентных ставок и резервов.

17.6. Ускоренные выплаты

Некоторые договоры страхования жизни обеспечивают специальные выплаты, если страхователь переходит в состояние, характеризующееся серьезными ограничениями в возможности обслуживать себя и очень высокими расходами на лечение. Эти выплаты сокращают размер основных выплат на случай смерти и выкупных сумм. Вследствие этого такие выплаты называются *ускоренными выплатами*.

Мы употребляем слово *состояние* для описания двух «состояний среды», каждое со своими распределениями времени и причинами выбытия, поскольку это слово принято в теории случайных процессов. В контексте страхования такие два состояния называются состоянием *трудоспособности* и *нетрудоспособности*.

Ускоренные выплаты можно разделить на два класса. В одном осуществляется единовременная выплата, обычно в момент постановки диагноза критического заболевания. Такие выплаты часто называется *выплатами на случай критического заболевания*. Второй класс включает периодические выплаты, которые начинаются, когда страхователь не может себя полностью обслуживать. Некоторые договоры подразумевают, что необходимый в таких случаях уход должен обеспечиваться специализированными организациями. Другие договоры допускают уход на дому или в специализированной организации до тех пор, пока уход необходим вследствие нетрудоспособности застрахованного. Второй класс часто называется *долгосрочным медицинским покрытием*.

В формулах для нетто-премий, определенных на основе принципа эквивалентности, по таким договорам мы будем использовать модель с несколькими причинами выбытия, изложенную в гл. 10. Имеется, однако, одно важное дополнение. Как и в гл. 10, символ ${}_tp_x^{(\tau)}\mu_x^{(j)}(t)$ обозначает функцию «плотности»[1] совместного распределения случайных величин продолжительности периода до момента выбытия и причины (или типа) выбытия. Индекс $j = 1$ обозначает смерть, $j = 2$ — досрочное прекращение действия договора, а $j = 3$ — переход в новое состояние, обозначаемое h. В нашем приложении h — состояние, когда поставлен диагноз критического заболевания или возникает потребность в ежедневном уходе. Для лиц в состоянии h, которые перешли в подобное состояние в возрасте $x + t$, функция «плотности»

[1]См. примечание на с. 277. — *Прим. ред.*

совместного распределения продолжительности периода до момента выбытия и причины (или типа) выбытия обозначается через ${}_u(hp)^{(\tau)}_{x+t}\,(h\mu)^{(hj)}_{x+t}(u)$ для $u > 0$, где $(hj) = 1$ обозначает выбытие вследствие смерти, а $(hj) = 2$ — выбытие вследствие досрочного прекращения действия договора. Эту функцию «плотности» можно рассматривать как условную (при условии перехода в состояние h в момент времени t, считая от даты заключения договора).

Наша модель не предполагает обратного перехода из состояния нетрудоспособности h в состояние трудоспособности. Таким образом, три состояния, в которые может перейти трудоспособное лицо, являются *поглощающими*. Отсылки к литературе, где обсуждаются модели, в которых разрешены переходы в трудоспособное состояние, содержатся в разд. 17.7.

Если лицо находится в состоянии h, то его здоровье явно хуже и совместное распределение продолжительности периода до момента выбытия и причины выбытия, несомненно, отличаются от соответствующего распределения в трудоспособном состоянии.

17.6.1. Единовременные выплаты

В этом разделе рассматривается пример, где на основании принципа эквивалентности определяется величина ежегодной нетто-премии по договору страхования жизни, предполагающему единовременные ускоренные выплаты в момент перехода в состояние h. На практике h обычно является состоянием, когда поставлен диагноз критического заболевания.

Пример 17.6.1. Условия договора перечислены в таблице 17.6.1.

(a) Выведем случайную величину потерь, связанную с описанным в табл. 17.6.1 договором, заключенным лицом (x).

(b) На основе принципа эквивалентности выведем формулу для величины ежегодной нетто-премии.

Таблица 17.6.1. Описание договора с выплатами, осуществляемыми непосредственно в момент выбытия или в момент перехода в состояние h

Выплаты на случай смерти	В момент смерти производится выплата размера 1 для лиц, находящихся в трудоспособном состоянии, или размера 0,75 для лиц, находящихся в состоянии h
Выкупные суммы	Выплачивается сумма ${}_tCV$ в момент досрочного прекращения договора для лиц, находящихся в трудоспособном состоянии, и сумма $0{,}75\,{}_{t+u}CV$ в момент $t+u$ для лиц, находящихся в состоянии h, где t — момент перехода в состояние h
Ускоренные выплаты	В момент перехода в состояние h производится выплата размера 0,25
Премии	Премии постоянной величины выплачиваются до момента смерти, досрочного прекращения договора или перехода в состояние h

Решение.

(a) Случайная величина потерь, связанная с этим договором, включает новый элемент. Символ $B^{(3)}_{x+t}$ был введен в разд. 11.2. В этом примере он обозначает актуарную настоящую стоимость выплат страхователю, находящемуся в состоянии h. Эта актуарная настоящая стоимость определяется на момент перехода в состояние h.

Случайная величина потерь	Область	Функция плотности	Формула
$L = v^T - \pi\bar{a}_{\overline{T}\rceil}$	$0 \leqslant T,\ J=1$	${}_tp_x^{(\tau)}\mu_x^{(1)}(t)$	(17.6.1a)
$\quad = v^T{}_TCV - \pi\bar{a}_{\overline{T}\rceil}$	$0 \leqslant T,\ J=2$	${}_tp_x^{(\tau)}\mu_x^{(2)}(t)$	(17.6.1b)
$\quad = v^T B_{x+T}^{(3)} - \pi\bar{a}_{\overline{T}\rceil}$	$0 \leqslant T,\ J=3$	${}_tp_x^{(\tau)}\mu_x^{(3)}(t)$	(17.6.1c)
$B_{x+t}^{(3)} = \mathbf{E}_{U,HJ\mid T,J=3}[b(U,HJ)]$, где			
$b(u,hj) = \begin{cases} 0{,}25 + 0{,}75\,v^u \\ 0{,}25 + 0{,}75\,v^u{}_{t+u}CV \end{cases}$	$0 \leqslant u,\ hj=1$ $0 \leqslant u,\ hj=2$	${}_u(hp)_{x+t}^{(\tau)}\,(h\mu)_{x+t}^{(1)}(u)$ ${}_u(hp)_{x+t}^{(\tau)}\,(h\mu)_{x+t}^{(2)}(u)$	(17.6.1d)

(b) У величины $\mathbf{E}_{T,J}[L]$ имеется три компоненты. Эти компоненты соответствуют формулам (17.6.1a), (17.6.1b), (17.6.1c) и обозначаются соответственно через I_a, I_b и I_c:

$$I_a = \int_0^\infty (v^t - \pi\bar{a}_{\overline{t}\rceil})\,{}_tp_x^{(\tau)}\mu_x^{(1)}(t)\,dt, \tag{17.6.2a}$$

$$I_b = \int_0^\infty (v^t{}_tCV - \pi\bar{a}_{\overline{t}\rceil})\,{}_tp_x^{(\tau)}\mu_x^{(2)}(t)\,dt, \tag{17.6.2b}$$

$$I_c = \int_0^\infty (v^t B_{x+t}^{(3)} - \pi\bar{a}_{\overline{t}\rceil})\,{}_tp_x^{(\tau)}\mu_x^{(3)}(t)\,dt. \tag{17.6.2c}$$

В свою очередь,

$$B_{x+t}^{(3)} = \Big[0{,}25 + 0{,}75\int_0^\infty v^u{}_u(hp)_{x+t}^{(\tau)}\,(h\mu)_{x+t}^{(1)}(u)\,du + 0{,}75\int_0^\infty v^u{}_{t+u}CV\,{}_u(hp)_{x+t}^{(\tau)}\,(h\mu)_{x+t}^{(2)}(u)\,du\Big]. \tag{17.6.2d}$$

Используя принцип эквивалентности и равенство (2.2.10), мы получаем

$$I_a + I_b + I_c = 0.$$

Разрешая это уравнение относительно ежегодной нетто-премии π, получим

$$\pi = \frac{1}{\bar{a}_x^{(\tau)}}\left[\bar{A}_x^{(1)} + \int_0^\infty v^t{}_tCV\,{}_tp_x^{(\tau)}\,\mu_x^{(2)}(t)\,dt + \int_0^\infty v^t B_{x+t}^{(3)}\,{}_tp_x^{(\tau)}\,\mu_x^{(3)}(t)\,dt\right]. \tag{17.6.3}$$

Для вычисления интегралов в этом равенстве можно использовать метод, рассматривавшийся в разд. 11.2. ▼

В табл. 17.6.1 было указано, что в момент перехода в состояние h выплачивается сумма размера 0,25 и делается дополнительная выплата размера 0,75 в момент последующей смерти. В таблице можно было бы указать любое значение страховой суммы b, $0 \leqslant b \leqslant 1$, выплачиваемой при переходе в состояние h, и соответствующую величину $1 - b$, выплачиваемую в момент смерти.

17.6.2. Периодические выплаты

Этот раздел содержит пример, где на основании принципа эквивалентности определяется величина ежегодной нетто-премии по договору страхования на случай смерти, обеспечивающему ускоренные выплаты периодического характера, в результате чего уменьшаются выплаты на случай смерти. Небольшое различие между примерами 17.6.1 и 17.6.2 заключается в определении функции условной актуарной настоящей стоимости $B_{x+t}^{(3)}$.

Пример 17.6.2. Рассматриваемый договор обладает многими чертами договора, представленного в табл. 17.6.1. Однако в нем не предусмотрены денежные выплаты в момент перехода в состояние h. После такого перехода выплаты на случай смерти и выкупные суммы не уменьшаются в течение короткого периода отсрочки продолжительностью e. Например, e может составлять 2 месяца. Если страхователь не умер в течение этого периода, то в течение 2 лет осуществляются периодические выплаты размера 0,25 в год с соответствующим уменьшением выплаты на случай смерти и выкупных сумм. Таблица 17.6.2 содержит определение функции выплат, исходя из которой можно найти значение $B_{x+t}^{(3)} = \mathbf{E}_{U,HJ|T,J=3}[b(U, HJ)]$. Для определения ежегодной нетто-премии используется принцип эквивалентности.

Таблица 17.6.2. Определение настоящей стоимости выплат в состоянии h

Настоящая стоимость выплат $b(u, hj)$	Область	Функция плотности
v^u	$0 \leqslant u < e$, $hj = 1$	${}_u(hp)_{x+t}^{(\tau)}\,(h\mu)_{x+t}^{(1)}(u)$
$0{,}25\, v^e \bar{a}_{\overline{u-e}|} + [1 - 0{,}25(u-e)]v^u$	$e \leqslant u < e+2$, $hj = 1$	
$0{,}25\, v^e \bar{a}_{\overline{2}|} + 0{,}5\, v^u$	$e+2 \leqslant u$, $hj = 1$	
$v^u{}_{t+u}CV$	$0 \leqslant u < e$, $hj = 2$	${}_u(hp)_{x+t}^{(\tau)}\,(h\mu)_{x+t}^{(2)}(u)$
$0{,}25\, v^e \bar{a}_{\overline{u-e}|} + [1 - 0{,}25(u-e)]v^u{}_{t+u}CV$	$e \leqslant u < e+2$, $hj = 2$	
$0{,}25\, v^e \bar{a}_{\overline{2}|} + 0{,}5v^u{}_{t+u}CV$	$e+2 \leqslant u$, $hj = 2$	

Решение. Решение аналогично решению в случае примера 17.6.1 за исключением того, что $B_{x+t}^{(3)}$ является условным математическим ожиданием функции выплат из табл. 17.6.2 и заменяет соответствующую функцию, представленную формулами (17.6.2d) и (17.6.3). ▼

В примере 17.6.2 периодические выплаты осуществляются ежегодно в размере 0,25 в течение двух лет; в общем случае годовая выплата может быть равна b в течение n лет, где $0 \leqslant bn \leqslant 1$. Изменения величин b и n повлечет за собой изменение соотношения между выплатами на случай смерти и выплатами на случай потери трудоспособности.

17.7. Замечания и литература

Основы для переменных аннуитетов были заложены в статье [Duncan 1952]. С 1969 г. проявляется большой интерес к переменному страхованию жизни. Статья [Fraser, Miller, Sternhell 1969] и ее активное обсуждение — основная литература по этому вопросу. Книга [Miller 1971] содержит менее формальное введение и некоторые числовые примеры. Статьи [Biggs 1969] и [Macarchuk 1969] и их обсуждение дают дополнительную информацию о переменных аннуитетах.

Сложно обсуждать гибкие страховые договоры в книге, посвященной основным актуарным моделям. Работы, относящиеся к этим договорам, в первую очередь касаются вопросов регулирования и управления. Тип договоров, описанный в разд. 17.5.1, изучается в работе [Chapin 1976], а тип договора, описанный в разд. 17.5.2, является предметом статьи [Chalke, Davlin 1983].

Ускоренные выплаты, рассматривающиеся как дополнительное соглашение к основному договору, обсуждаются в работе [Keller 1990]. Приложение к этой работе содержит данные об интенсивностях переходов в состояние, требующее долговременного ухода, и о математических ожиданиях времени пребывания в нем.

В работе [Jones 1994] содержится введение в актуарные модели, допускающие как переходы из трудоспособного состояния в нетрудоспособное, так и обратно.

Упражнения

К разделу 17.2

17.1. Настоящая стоимость непрерывного аннуитета, выплачиваемого в течение n лет после смерти лица (x), с которым этот договор заключен, равна $Z = \bar{a}_{\overline{T+n}|}$. Выразите соответствующую актуарную настоящую стоимость в форме текущих платежей.

17.2. Покажите, что для с.в. Z, введенной в упр. 17.1, величина $\mathbf{D}[Z]$ определяется формулой $[v^{2n}({}^2\bar{A}_x - \bar{A}_x^2)]/\delta^2$.

17.3. Предположим, что $\delta > 0$ и $\mu_x(t) = \mu$, $0 \leqslant t$. Используйте формулу (17.2.1) для выведения уравнения

$$G(1 - r) = \frac{1 - e^{-\delta G}}{\delta} + \frac{e^{-(\mu+\delta)G}}{\mu + \delta},$$

которое можно разрешить относительно G.

17.4. Перепишите уравнение из упр. 17.3 для случая $\delta = 0$, $\mu > 0$ и $0 < r < 1$ и покажите, что оно не имеет положительного решения.

К разделу 17.3

17.5. Покажите, что для с.в. Z, определенной формулой (17.3.1),

$$\mathbf{D}[Z] = [{}^2\bar{A}_{x:\overline{n}|} - (\bar{A}_{x:\overline{n}|})^2]/\delta^2.$$

17.6. Покажите, что актуарная настоящая стоимость выплат по договору страхования на случай потери кормильца на срок n лет в форме непрерывного аннуитета, рассчитанного с интенсивностью начисления процента δ', равна $(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} - e^{-\delta' n}\, {}''\bar{A}^1_{x:\overline{n}|})/\delta'$, где ${}''\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}$ вычисляется с интенсивностью начисления процента $\delta'' = \delta - \delta'$.

17.7. Договор предусматривает непрерывный финансовый аннуитет с выплатой размера 1 в год, причем выплаты начинаются в момент смерти лица (x). Если смерть произошла в течение 15 лет с момента заключения договора, то аннуитет выплачивается до окончания 20-летнего периода с момента заключения договора. Если смерть произошла в период между 15-м и 20-м годами с момента заключения договора, то аннуитет выплачивается в течение 5 лет. Действие договора прекращается по истечении 20 лет с момента его заключения. Выведите явную формулу для актуарной настоящей стоимости выплат по такому договору.

17.8. По условиям договора, если страхователь проживет 20 лет с момента заключения договора, выплачивается сумма размера 1000, а если нет, производятся периодические выплаты размера 10 в месяц. Первая периодическая выплата осуществляется в конце месяца смерти, а последующие — лишь до истечения 20 лет с момента заключения договора. Выведите формулу ежегодной нетто-премии, если договор заключен в возрасте x лет. Премии выплачиваются в начале каждого года действия договора и их общее количество не более 20.

17.9. Покажите, что $\bar{a}_{\overline{n}|} - \bar{a}^{\,\mathrm{I}}_{x:\overline{n}|} = (\bar{A}_{x:\overline{n}|} - v^n\, {}_nq_x)/\delta$.

17.10. (a) В условиях примера 17.3.1 выразите настоящую стоимость в виде функции продолжительности предстоящей жизни.

(b) Выразите актуарную настоящую стоимость выплат в форме агрегированных платежей.

(c) Проверьте, что интегрирование по частям результата, полученного в п. (b), дает выражение, полученное в примере 17.3.1.

К разделу 17.4

17.11. (a) Проверьте, что $(\ddot{a}_{\overline{x:\overline{n}|}} - 1)(1 + i) = p_x\, \ddot{a}_{\overline{x+1:\overline{n-1}|}} + q_x\, \ddot{a}_{\overline{n-1}|}$.

(b) Проверьте, что формула (17.4.4) справедлива для бессрочного переменного аннуитета с гарантированным периодом выплат n лет.

17.12. (a) Приведите формулу (17.4.10) к следующему эквивалентному виду:

$$b_{k+1} = \left[b_k - \frac{(b_k - 1)P(\bar{A}_x)}{{}_1E_{x+k}\; {}_{k+1}V(\bar{A}_x)}\right]\frac{1 + i'_{k+1}}{1 + i}.$$

(b) Покажите, что если для формулы из п. (a) $i'_{k+1} = i$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, и $b_0 = 1$, то $b_{k+1} = 1$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

(c) Покажите, что если для формулы из п. (a) $i'_{k+h} = i$ для некоторых $k > 0$ и $h = 1, 2, \ldots$, то величина b_{k+h} будет ограничена сверху единицей.

17.13. Еще раз проделайте упр. 16.13(b), предполагая, что $p'_{x+h} = p_{x+h}$, и покажите, что $r_{h+1} = b_{h+1}/b_h$ задается равенством (17.4.4).

17.14. Договор переменного бессрочного страхования на случай смерти с постоянными премиями в дискретной модели гарантирует выплату b_{k+1} на случай смерти в $k+1$-м году, равную $F_{k+1} + (1 - {}_{k+1}V_x) = 1 + (F_{k+1} - {}_{k+1}V_x)$, где доля фонда F_k удовлетворяет рекуррентному соотношению $(F_k + P_x)(1 + i'_{k+1}) = q_{x+k}\, b_{k+1} + p_{x+k}\, F_{k+1}$. Здесь i'_{k+1} — фактический уровень доходности инвестиций в $(k+1)$-м году, а премии P_x и резерв ${}_kV_x$ вычисляются при процентной ставке i.

(a) Покажите, что указанное рекуррентное соотношение можно свести к виду

$$(F_k + P_x)(1 + i'_{k+1}) - q_{x+k}(1 - {}_{k+1}V_x) = F_{k+1},$$

и дайте словесную интерпретацию этого соотношения.

(b) Покажите, что если $i'_{k+1} = i$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, то $F_{k+1} = {}_{k+1}V_x$, так что величина b_{k+1} постоянна и равна 1.

(c) Покажите, что $b_{k+1} = b_k + (F_k + P_x)i'_{k+1} - ({}_kV_x + P_x)i$. [Заметим, что для этого договора выплаты на случай смерти в $(k+1)$-м году составят b_{k+1}, а не b_k, как в формуле (17.4.9). Далее, расходы по страхованию жизни на срок 1 год в начале $k+1$-го года равны в этом случае $b_{k+1}\, q_{x+k}/(1 + i'_{k+1})$, а не $b_k\, q_{x+k}/(1+i)$, как в случае (17.4.9). Характер этого договора зависит от того, что модель дискретна и выплаты на случай смерти осуществляются в конце периода.]

К разделу 17.5

17.15. Страхователь из примера 17.5.1 хочет изменить условия договора по прошествии 5 лет с его заключения на смешанное страхование на срок до наступления возраста 65 лет с ежегодной брутто-премией размера 5000. Определите размер выплат, получающийся в результате этих изменений.

17.16. (a) Страхователь из упр. 17.15 решает предпочесть смешанное страхование на срок до исполнения ему 65 лет со страховой суммой размера 160 000, выплачивая по-прежнему ежегодную брутто-премию размера 5000 до года последней выплаты, с тем, чтобы еще один год после этого выплачивать частичную премию. В каком возрасте выплачивается им эта частичная премия?

(b) Для договора из п. (a) определите, какой резерв сформируется через 10 лет после изменения условий договора.

К разделу 17.6

17.17. Используйте результаты примера 17.6.1 и предположение, что $\mu_x^{(1)}(t) = \mu^{(1)}$, $\mu_x^{(2)}(t) = \mu^{(2)}$, $\mu_x^{(3)}(t) = \mu^{(3)}$, $(h\mu)_{x+t}^{(1)}(u) = (h\mu)^{(1)}$, $(h\mu)_{x+t}^{(2)}(u) = (h\mu)^{(2)}$ и ${}_tCV = 0$, а интенсивность начисления процента δ больше нуля, чтобы показать, что

$$\pi = \mu^{(1)} + \mu^{(3)} \left[\frac{(hu)^{(1)} + (0{,}25)(hu)^{(2)} + 0{,}25\delta}{(hu)^{(1)} + (hu)^{(2)} + \delta} \right].$$

17.18. (a) Представьте результаты упр. 17.17 в виде

$$\pi - \bar{P}(\bar{A}_x) = \mu^{(3)} \left[\frac{(h\mu)^{(1)} + (0{,}25)(h\mu)^{(2)} + 0{,}25\delta}{(h\mu)^{(1)} + (h\mu)^{(2)} + \delta} \right].$$

(b) Эту разность можно рассматривать как ставку дополнительной нетто-премии, связанной с ускоренными выплатами. Если $(h\mu)^{(2)} = 0$, то

$$\pi - \bar{P}(\bar{A}_x) = \mu^{(3)} \left[\frac{(h\mu)^{(1)} + 0{,}25\delta}{(h\mu)^{(1)} + \delta} \right].$$

(c) Покажите, как будет вести себя разность $\pi - \bar{P}(\bar{A}_x)$ из п. (b) при $\delta \to 0$ и при $\delta \to \infty$.

18

РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ ДЛЯ НЕСКОЛЬКИХ ЛИЦ

18.1. Введение

В гл. 9 мы определили статус дожития всех лиц из группы и статус дожития последнего лица в группе, выражая случайные величины продолжительности предстоящего периода сохранения каждого из этих статусов через соответствующие случайные величины для отдельных лиц. Для этого мы обобщили понятия, введенные в гл. 3–5, и получили актуарные функции для указанных статусов в случае группы из двух лиц. В предположении, что продолжительности предстоящей жизни двух лиц независимы, мы выразили актуарные функции для группы из двух лиц через соответствующие функции для отдельных лиц, что позволяет вычислить их с помощью легко доступных таблиц смертности для отдельных лиц. В гл. 9, кроме того, обсуждались вероятности, аннуитеты и обязательства по договорам страхования, учитывающим очередность моментов смерти двух лиц.

В настоящей главе мы распространим эту теорию на группы, состоящие из более чем двух лиц. Действительно, понятие статуса дожития можно обобщить на случай групп из более чем двух лиц (см. разд. 18.2 и 18.3). Для того чтобы в конечном счете найти значения соответствующих актуарных функций, мы используем теорему 18.2.1 для выражения функций дожития рассматриваемых статусов лишь через функции дожития статуса дожития всех лиц в группе. Вновь в предположении независимости продолжительностей предстоящей жизни функции дожития статуса дожития всех лиц из группы представляются как произведение функций дожития отдельных лиц. Теорема 18.1 является частным случаем более общей теоремы теории вероятностей, использующей так называемый метод включения и исключения. Формулировку и доказательство этой более общей теоремы, теоремы 18.2.2, можно найти в приложении к настоящей главе.

Вероятности и функции в случае, когда учитывается очередность смертей в группе лиц, а также реверсивные аннуитеты тоже обобщаются на группы из более, чем двух лиц.

В разд. 18.7 модели с ежегодно выплачиваемыми премиями из гл. 6 и 7 развиваются для статусов, связанных с группами лиц, и обсуждаются практические аспекты одного из наиболее распространенных страховых продуктов — договора страхования на случай второй смерти.

18.2. Более общие статусы

Для группы из m лиц $(x_1), (x_2), \ldots, (x_m)$ *статус k-дожития*, обозначаемый

$$\left(\overline{x_1 x_2 \ldots x_m}^{\,k}\right),$$

существует до тех пор, пока по крайней мере k из m лиц живы, и теряется после $(m-k+1)$-й смерти в рассматриваемой группе. Это статус дожития в смысле определения из разд. 9.3. Ранее определенный статус дожития всех лиц из группы и статус дожития последнего лица в группе являются соответственно статусом m-дожития и статусом 1-дожития. Когда мы будем упоминать какой-либо из этих статусов, мы будем пользоваться специальными обозначениями для этого статуса, а не общим обозначением для статуса k-дожития. Продолжительность предстоящего периода сохранения статуса k-дожития равна k-й по величине (считая в порядке убывания) продолжительности предстоящей жизни $T(x_1), T(x_2), \ldots, T(x_m)$. Как и продолжительность предстоящей жизни в гл. 3 и 9, продолжительность предстоящего периода сохранения статуса k-дожития — это длина периода существования этого статуса, который имеет фиксированный начальный и случайный конечный момент. Распределение вероятностей и функции из таблицы смертности гл. 3 применимы для продолжительности предстоящего периода сохранения этого статуса. Нужно только заменить в индексе x на

$$\left(\overline{\overset{\qquad k}{x_1 x_2 \ldots x_m}}\right).$$

Аннуитеты и страховые выплаты определяются в терминах продолжительности предстоящего периода сохранения статуса k-дожития точно так же, как они определялись в гл. 4 и 5 для лица (x). Для непрерывного аннуитета с выплатами размера 1 в год до тех пор, пока по крайней мере k из m лиц живы, в силу формулы (5.2.4) актуарная настоящая стоимость есть

$$\bar{a}_{\overline{\overset{k}{x_1 x_2 \ldots x_m}}} = \int_0^\infty v^t\, {}_tp_{\overline{\overset{k}{x_1 x_2 \ldots x_m}}}\, dt. \tag{18.2.1}$$

Актуарная настоящая стоимость страховой выплаты размера 1 по договору страхования на случай $(m-k+1)$-й смерти в группе из m лиц задается формулой (4.2.6), т. е.

$$\bar{A}_{\overline{\overset{k}{x_1 x_2 \ldots x_m}}} = \int_0^\infty v^t\, {}_tp_{\overline{\overset{k}{x_1 x_2 \ldots x_m}}}\, \mu_{\overline{\overset{k}{x_1 x_2 \ldots x_m}}}(t)\, dt. \tag{18.2.2}$$

Для анализа и вычисления вероятностей и актуарных настоящих стоимостей этих выплат (и других комбинаций выплат) мы определим новый тип статуса. Для m лиц $(x_1), (x_2), \ldots, (x_m)$ *статус* $[k]$*-отсроченного дожития* существует, пока живы в точности k из m лиц, т. е. он возникает после $(m-k)$-й смерти и сохраняется до тех пор, пока не произойдет следующая смерть. Мы будем обозначать этот статус через

$$\left(\overline{\overset{\qquad [k]}{x_1 x_2 \ldots x_m}}\right).$$

Для $k=m$ статус $[m]$-отсроченного дожития совпадает со статусом m-дожития. Для $k=0$ статус $[0]$-отсроченного дожития существует вечно после m-й смерти.

Статус

$$\left(\overline{\overset{\qquad [k]}{x_1 x_2 \ldots x_m}}\right)$$

не является статусом дожития в смысле гл. 9. Например, для $k<m$ величина ${}_tp_{\overline{\overset{[k]}{x_1 x_2 \ldots x_m}}}$, которая является вероятностью того, что в момент времени t живы в точности k из m лиц, не равна 1 в момент времени $t=0$ и, таким образом, не удовле-

творяет требованиям, предъявляемым к функции дожития, заданной в табл. 3.2.1. Далее, ${}_tp_{\overline{x_1x_2\ldots x_m}}^{[0]}$ стремится к 1 при $t \to \infty$, что также грубо нарушает эти требования. Кроме того, для статуса $[k]$-отсроченного дожития продолжительность периода его существования и продолжительность периода до его потери не равны. Это означает, что нужно аккуратно определить выплаты в форме аннуитета для этого нового статуса. По определению аннуитет с актуарной настоящей стоимостью $\bar{a}_{\overline{x_1x_2\ldots x_m}}^{[k]}$ выплачивается в течение предстоящего периода сохранения статуса $[k]$-отсроченного дожития; следовательно, это — отсроченный аннуитет со случайным периодом отсрочки. Поскольку момент потери статуса $[k]$-отсроченного дожития совпадает с моментом потери статуса k-дожития, страховые выплаты, осуществляемые при потере первого из этих статусов, являются частным случаем выплат при потере второго.

Пример 18.2.1. Аннуитет выплачивается непрерывно до тех пор, пока живо хотя бы одно из лиц (w), (x), (y) или (z). В момент каждой смерти величина годовой выплаты уменьшается на 50%. Выразим актуарную настоящую стоимость такого аннуитета в терминах $\bar{a}_{\overline{wxyz}}^{[k]}$, $k = 1, 2, 3, 4$. Предположим, что начальная величина годовой выплаты равна 1.

Решение. Актуарная настоящая стоимость составит

$$\bar{a}_{\overline{wxyz}}^{[4]} + \frac{1}{2}\,\bar{a}_{\overline{wxyz}}^{[3]} + \frac{1}{4}\,\bar{a}_{\overline{wxyz}}^{[2]} + \frac{1}{8}\,\bar{a}_{\overline{wxyz}}^{[1]}.$$

Обсуждение этого аннуитета будет продолжено (после теоремы 18.2.1) в примере 18.2.2. ▼

В гл. 9 мы выразили вероятности дожития последнего лица в группе и связанные с ними актуарные настоящие стоимости в терминах соответствующих величин для статусов дожития отдельных лиц и дожития всех лиц из группы. Используем приведенную ниже теорему для получения тех же результатов для статуса k-дожития. Более общая формулировка этой теоремы для произвольных событий, а также ее доказательство приведены в приложении к этой главе. Основные символы и операции исчисления конечных разностей, используемые в теореме 18.2.1, приведены в приложении 5.

Теорема 18.2.1. *Пусть*

$${}_tD_j = \sum {}_tp_{x_{(1)}x_{(2)}\ldots x_{(j)}},$$

где суммирование проводится по всем комбинациям по j из m лиц. Тогда для произвольных чисел $c_0, c_1, \ldots, c_m$

$$\sum_{j=0}^{m} c_j\,{}_tp_{\overline{x_1x_2\ldots x_m}}^{[j]} = c_0 + \sum_{j=1}^{m} \Delta^j c_0\,{}_tD_j. \tag{18.2.3}$$

Теорема 18.2.1 применима для лиц с зависимыми случайными величинами продолжительности предстоящей жизни. Тем не менее в большинстве приложений мы будем предполагать взаимную независимость продолжительностей предстоящей жизни и вычислять члены суммы ${}_tD_j$ как произведения вероятностей дожития отдельных лиц.

Проиллюстрируем формулу (18.2.3) на таком примере:

$$c_1\,{}_tp_{\overline{xy}}^{[1]} + c_2\,{}_tp_{\overline{xy}}^{[2]} = (\Delta c_0)({}_tp_x + {}_tp_y) + \Delta^2 c_0({}_tp_{xy})$$
$$= c_1({}_tp_x + {}_tp_y) + (c_2 - 2c_1)\,{}_tp_{xy}.$$

Пример 18.2.2. Выразим актуарную настоящую стоимость аннуитета, описанного в примере 18.2.1, в терминах актуарных настоящих стоимостей аннуитетов, сопряженных со статусами дожития отдельных лиц и всех лиц из группы.

Решение. Искомая актуарная настоящая стоимость представляет собой

$$\int_0^\infty v^t\left[\sum_{j=1}^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{4-j}{}_tp_{\overline{wxyz}}^{[j]}\right]dt.$$

Коэффициенты и их разности даны ниже.

j	c_j	Δc_j	$\Delta^2 c_j$	$\Delta^3 c_j$	$\Delta^4 c_j$
0	0	1/8	0	1/8	0
1	1/8	1/8	1/8	1/8	—
2	1/4	1/4	1/4	—	—
3	1/2	1/2	—	—	—
4	1	—	—	—	—

Таким образом, указанный интеграл равен

$$\int_0^\infty v^t\left(\frac{1}{8}\,{}_tD_1 + \frac{1}{8}\,{}_tD_3\right)dt = \frac{1}{8}(\bar{a}_w + \bar{a}_x + \bar{a}_y + \bar{a}_z) + \frac{1}{8}(\bar{a}_{wxy} + \bar{a}_{wxz} + \bar{a}_{wyz} + \bar{a}_{xyz}).$$

Исследовать адекватность таких представлений можно, интерпретируя последнее выражение в терминах набора аннуитетов, для которых при любом исходе сумма их выплат равна выплате исходного аннуитета. Например, в этом частном случае первоначальный аннуитет начинается с годовой выплаты размера 1, в то время как последнее выражение соответствует набору из четырех аннуитетов, сопряженных с дожитием отдельных лиц, и четырех аннуитетов, сопряженных с дожитием всех лиц в группе из трех лиц, и каждый из них имеет годовую выплату размера 1/8. В период между моментами первой и второй смерти интенсивность выплат исходного аннуитета составит 1/2, в то время как три аннуитета, сопряженные со статусами дожития отдельных лиц, и один, сопряженный со статусом дожития всех трех лиц, которые еще в это время выплачиваются, имеют интенсивность выплат 1/8. Выплаты в другие периоды времени можно сравнивать таким же образом. ▼

Теперь найдем выражение для ${}_tp_{\overline{x_1x_2\ldots x_m}}^{[k]}$ как частный случай теоремы 18.2.1.

Следствие 18.2.1.

$${}_tp_{\overline{x_1x_2\ldots x_m}}^{[k]} = \sum_{j=k}^{m}(-1)^{j-k}\binom{j}{k}{}_tD_j. \tag{18.2.4}$$

Доказательство. В теореме 18.2.1 положим $c_k = 1$ и $c_j = 0$ для $j \neq k$. Для этих величин c_j мы получаем $\Delta^j c_0 = (\mathrm{E}-1)^j c_0 = (-1)^{j-k}\binom{j}{k}$, $j = k, k+1, \ldots, m$. ■

Пример 18.2.3. Выразим актуарную настоящую стоимость непрерывного аннуитета с годовыми выплатами размера 1, осуществляемыми при условии, что ровно три из пяти лиц живы, в терминах актуарных настоящих стоимостей аннуитетов, сопряженных с дожитием всех лиц в группе.

Решение. Используя формулу (5.2.4), а затем (18.2.4), получим

$$\bar{a}_{\overline{x_1x_2x_3x_4x_5}}^{[3]} = \int_0^\infty v^t {}_tp_{\overline{x_1x_2x_3x_4x_5}}^{[3]}\,dt = \int_0^\infty v^t({}_tD_3 - 4\,{}_tD_4 + 10\,{}_tD_5)\,dt$$

$$\begin{aligned} &= \bar{a}_{x_1x_2x_3} + \bar{a}_{x_1x_2x_4} + 8 \text{ других актуарных настоящих} \\ &\qquad \text{стоимостей аннуитетов, сопряженных с дожитием трех лиц} \\ &\quad - 4(\bar{a}_{x_1x_2x_3x_4} + \bar{a}_{x_1x_2x_3x_5} + 3 \text{ другие актуарные настоящие} \\ &\qquad \text{стоимости аннуитетов, сопряженных с дожитием четырех лиц)} \\ &\quad + 10\bar{a}_{x_1x_2x_3x_4x_5}. \end{aligned}$$

Из соотношения

$$ {}_tp_{\overline{x_1x_2\ldots x_m}}^{\;h} = \sum_{j=h}^m {}_tp_{\overline{x_1x_2\ldots x_m}}^{[j]} \tag{18.2.5}$$

получим такое следствие теоремы 18.2.1:

Следствие 18.2.2. *Для произвольных чисел* $d_0, d_1, \ldots, d_m$

$$\sum_{j=0}^m d_j\,{}_tp_{\overline{x_1x_2\ldots x_m}}^{\;j} = d_0 + \sum_{j=1}^m \Delta^{j-1}d_1\,{}_tD_j. \tag{18.2.6}$$

Доказательство. Используя формулу (18.2.5), мы можем получить

$$\sum_{h=0}^m d_h\,{}_tp_{\overline{x_1x_2\ldots x_m}}^{\;h} = \sum_{h=0}^m\sum_{j=h}^m d_h\,{}_tp_{\overline{x_1x_2\ldots x_m}}^{[j]}.$$

Меняя порядок суммирования, можно записать

$$\sum_{j=0}^m d_j\,{}_tp_{\overline{x_1x_2\ldots x_m}}^{\;j} = \sum_{j=0}^m \left(\sum_{h=0}^j d_h\right){}_tp_{\overline{x_1x_2\ldots x_m}}^{[j]},$$

а это выражение, если положить $c_j = \sum_{h=0}^j d_h$ для $j = 0, 1, \ldots, m$, записывается в виде (18.2.3). Для таких величин c мы имеем $c_0 = d_0$ и $\Delta c_j = d_{j+1}$ для $j = 0, 1, \ldots, m-1$ и, таким образом, $\Delta^j c_0 = \Delta^{j-1}(\Delta c_0) = \Delta^{j-1}d_1$ для $j = 1, 2, \ldots, m$. Тогда из правой части формулы (18.2.3) получаем

$$\sum_{j=0}^m d_j\,{}_tp_{\overline{x_1x_2\ldots x_m}}^{\;j} = d_0 + \sum_{j=1}^m \Delta^{j-1}d_1\,{}_tD_j\,. \qquad \blacksquare$$

С помощью следствия 18.2.1 можно выразить функцию дожития для статуса k-дожития в терминах функций дожития для статусов дожития отдельных лиц и всех лиц из группы.

Следствие 18.2.3.

$$ {}_tp_{\overline{x_1x_2\ldots x_m}}^{\;k} = \sum_{j=k}^m \left[(-1)^{j-k}\binom{j-1}{k-1}\right]{}_tD_j\,. \tag{18.2.7}$$

Доказательство. В следствии 18.2.1 положим $d_k = 1$ и $d_j = 0$ для $j \neq k$. Для этих величин d имеем $\Delta^{j-1}d_1 = (\mathrm{E}-1)^{j-1}d_1 = (-1)^{j-k}\binom{j-1}{k-1}$, $j = k, k+1, \ldots, m$. $\blacksquare$

Из формулы (18.2.7) для функции дожития статуса k-дожития путем дифференцирования можно получить аналогичное выражение для функции плотности распределения продолжительности предстоящего периода T сохранения этого статуса:

$$f_T(t) = \frac{d}{dt}(1 - {}_tp_{\overline{x_1x_2\ldots x_m}}^{\;k}) = \sum_{j=k}^{m}(-1)^{j-k}\binom{j-1}{k-1}(-{}_tD_j'). \tag{18.2.8}$$

Используя формулы (18.2.7) или (18.2.8), можно определить актуарную настоящую стоимость и другие характеристики распределения вероятностей для настоящей стоимости набора выплат, которые зависят от T. При этом мы воспользуемся тем, что $-{}_tD_j'$ является суммой функций плотности распределений продолжительностей предстоящего периода сохранения $\binom{m}{j}$ статусов j-дожития для m лиц.

Пример 18.2.4. Обозначим через T продолжительность предстоящего периода сохранения статуса дожития последнего из трех лиц. Выразим в терминах статусов, связанных с дожитием отдельных лиц и всех лиц из группы

(a) функцию дожития, (b) $\mathbf{E}[v^T]$, (c) $\mathbf{E}[\bar{a}_{\overline{T}|}]$.

Решение. (a) Согласно формуле (18.2.7),

$${}_tp_{\overline{x_1x_2x_3}} = \sum_{j=1}^{3}(-1)^{j-1}\binom{j-1}{0}{}_tD_j = {}_tD_1 + (-1)\,{}_tD_2 + {}_tD_3,$$

где

$${}_tD_1 = {}_tp_{x_1} + {}_tp_{x_2} + {}_tp_{x_3}, \quad {}_tD_2 = {}_tp_{x_1x_2} + {}_tp_{x_1x_3} + {}_tp_{x_2x_3}, \quad {}_tD_3 = {}_tp_{x_1x_2x_3}.$$

(b) Обозначим $\mathbf{E}[v^T]$ через $\bar{A}_{\overline{x_1x_2x_3}}$ и используем формулу (18.2.8) для того, чтобы получить равенство

$$\begin{aligned}\bar{A}_{\overline{x_1x_2x_3}} &= \int_0^\infty v^t(-1)({}_tB_1' - {}_tB_2' + {}_tB_3')\,dt \\ &= \bar{A}_{x_1} + \bar{A}_{x_2} + \bar{A}_{x_3} - (\bar{A}_{x_1x_2} + \bar{A}_{x_1x_3} + \bar{A}_{x_2x_3}) + \bar{A}_{x_1x_2x_3}.\end{aligned}$$

(c) Заменяя v^T на $\bar{a}_{\overline{T}|}$ в п. (b) и обозначая $\mathbf{E}[\bar{a}_{\overline{T}|}]$ через $\bar{a}_{\overline{x_1x_2x_3}}$, получим

$$\bar{a}_{\overline{x_1x_2x_3}} = \bar{a}_{x_1} + \bar{a}_{x_2} + \bar{a}_{x_3} - (\bar{a}_{x_1x_2} + \bar{a}_{x_1x_3} + \bar{a}_{x_2x_3}) + \bar{a}_{x_1x_2x_3}.$$

Для любого статуса дожития $v^T + \delta\bar{a}_{\overline{T}|} = 1$, так что, используя равенство $\bar{A}_{\overline{x_1x_2x_3}} + \delta\bar{a}_{\overline{x_1x_2x_3}} = 1$, можно вычислять каждое из этих двух математических ожиданий, вычислив другое. ▼

Дифференцируя обе части формулы (18.2.6), можно распространить это соотношение на соответствующие функции плотности. Эти рассуждения можно использовать для договоров страхования, по которым некоторая страховая сумма выплачивается в случае каждой смерти в группе из m лиц.

Пример 18.2.5. Рассмотрим договор страхования для лиц (x), (y) и (z) с выплатой размера 1 в случае первой смерти, размера 2 в случае второй смерти, и размера 3 в случае третьей смерти. Выразим актуарную настоящую стоимость страховых выплат по этому договору в терминах актуарных настоящих стоимостей страховых выплат по договорам с выплатами размера 1, связанным со статусами дожития отдельных лиц и всех лиц из группы.

Решение. Пусть $f_j(t)$ — функция плотности продолжительности предстоящего периода сохранения статуса j-дожития. Актуарная настоящая стоимость — это

$$\int_0^{\infty} v^t[1f_3(t) + 2f_2(t) + 3f_1(t)]\,dt.$$

В обозначениях формулы (18.2.6) имеем:

j	d_j	Δd_j	$\Delta^2 d_j$	$\Delta^3 d_j$
0	0	3	−4	4
1	3	−1	0	—
2	2	−1	—	—
3	1	—	—	—

Следовательно, актуарная настоящая стоимость равна

$$\int_0^{\infty} v^t(-1)(3\,{}_tD_1' - {}_tD_2')\,dt = 3\,(\bar{A}_x + \bar{A}_y + \bar{A}_z) - (\bar{A}_{xy} + \bar{A}_{xz} + \bar{A}_{yz}). \qquad \blacktriangledown$$

18.3. Сложные статусы

В предыдущем разделе мы определили некоторые статусы для нескольких лиц через статус k-дожития. Путем комбинирования статусов можно определить другие статусы. Говорят, что существует *сложный статус*, если этот статус основывается на комбинации статусов, по крайней мере один из которых сам является статусом, связанным с более, чем одним лицом. В примере 18.3.1 рассмотрим некоторые их варианты.

Пример 18.3.1. Опишем условия для выплат по аннуитетам и по договорам страхования, соответствующим следующим символам актуарных настоящих стоимостей:

(a) $\bar{a}_{\overline{wx}:\overline{yz}}$, (b) $\bar{a}_{\overline{\overline{wx}:(yz)}}$, (c) $\bar{a}_{\overline{(x:\overline{n|}):(yz:\overline{m|})}}$, (d) $\bar{A}_{\overline{wx}:yz}$, (e) $\bar{A}_{\overline{(wx):(yz)}}$, (f) $\bar{A}_{\overline{(wx):y:z}}$.

Решение. (a) Аннуитет выплачивается непрерывно с интенсивностью 1 в год, пока живо по крайней мере одно из лиц (w), (x) и по крайней мере одно из лиц (y), (z). Таким образом, аннуитет выплачивается, пока живы три или четыре лица и пока живы два, если одно из них — из пары (w), (x), а другое — из пары (y), (z).

(b) Аннуитет выплачивается непрерывно с интенсивностью 1 в год, пока живы по крайней мере двое из четырех лиц, а также пока жив лишь один человек при условии, что доживший — кто-либо из пары (w), (x).

(c) Аннуитет выплачивается непрерывно с интенсивностью 1 в год, пока либо лицо (x) живо и не истек n-летний период, либо оба лица (x) и (z) живы и не истек m-летний период.

(d) Страховая выплата размера 1 осуществляется в момент первой смерти, если первым умерло одно из лиц (y), (z), и в момент второй смерти в противном случае.

(e) Страховая сумма размера 1 выплачивается в момент второй смерти, если одна из этих двух смертей произошла в группе (w), (x), а другая — в группе (y), (z). Если это условие не выполнено, то выплата производится в момент третьей смерти.

(f) Страховая сумма размера 1 выплачивается лишь после смерти обоих лиц (y) и (z) и одного из лиц (w) или (x). Другими словами, выплата производится в момент третьей смерти, если в живых остается одно из лиц (w), (x). В противном случае она производится в момент четвертой смерти. ▼

В реальных приложениях для получения числовых значений какой-либо из этих актуарных настоящих стоимостей их, как правило, сначала выражают в терминах актуарных настоящих стоимостей, отвечающих статусам дожития отдельных лиц и всех лиц в группе. Соотношения между $T(xy)$, $T(\overline{xy})$, $T(x)$ и $T(y)$, а также между $K(xy)$, $K(\overline{xy})$, $K(x)$ и $K(y)$ из разд. 9.4 имеют место и для общих статусов дожития (u), (v). Например,

$$v^{T(uv)} + v^{T(\overline{uv})} = v^{T(u)} + v^{T(v)}. \tag{18.3.1}$$

Используя пункты примера 18.3.1, проиллюстрируем процесс использования тождества (18.3.1) и аналогичных тождеств. Во-первых, рассмотрим п. (e):

$$\bar{A}_{\overline{(wx):(yz)}} = \bar{A}_{wx} + \bar{A}_{yz} - \bar{A}_{wxyz}.$$

Здесь $(u) = (wx)$, а $(v) = (yz)$. Для того чтобы записать $\bar{A}_{(wx):(yz)}$ в виде $\bar{A}_{wxyz}$, мы использовали соотношение

$$\min\{\min[T(w), T(x)], \min[T(y), T(z)]\} = \min[T(w), T(x), T(y), T(z)]. \tag{18.3.2}$$

Для п. (c) примера 18.3.1 имеем

$$\bar{a}_{\overline{(x:\overline{n}|)(yz:\overline{m}|)}} = \bar{a}_{x:\overline{n}|} + \bar{a}_{yz:\overline{m}|} - \bar{a}_{xyz:\overline{n}|},$$

где последнее слагаемое получено с помощью соотношения

$$\min[T(x), T(y), T(z), T(\overline{n}|), T(\overline{m}|)] = \min[T(x), T(y), T(z), T(\overline{n}|)]$$

для случая $n \leqslant m$.

Выражения из пп. (a), (b), (d) и (f) примера 18.3.1 требуют использования других соотношений. Для п. (a) используем

$$\bar{a}_{\overline{wx}:\overline{yz}} = \mathbf{E}[\bar{a}_{\overline{T}|}], \tag{18.3.3}$$

где

$$T = \min[T(\overline{wx}), T(\overline{yz})] = \min\{\max[T(w), T(x)], \max[T(y), T(z)]\}.$$

Для этой случайной величины простой ответ типа формулы (18.3.2) не подходит. Предположим сначала, что с.в. $T(\overline{wx})$ и $T(\overline{yz})$ независимы, и рассмотрим функцию дожития $s(t)$ для с.в. T. Тогда

$$\begin{aligned} s(t) &= \mathbf{P}[T > t] = \mathbf{P}\{\min[T(\overline{wx}), T(\overline{yz})] > t\} = \mathbf{P}\{T(\overline{wx}) > t,\ T(\overline{yz}) > t\} \\ &= \mathbf{P}\{T(\overline{wx}) > t\}\mathbf{P}\{T(\overline{yz}) > t\} = {}_tp_{\overline{wx}}\, {}_tp_{\overline{yz}} \\ &= ({}_tp_w + {}_tp_x - {}_tp_{wx})({}_tp_y + {}_tp_z - {}_tp_{yz}) = {}_tp_{wy} + {}_tp_{wz} + {}_tp_{xy} + {}_tp_{xz} \\ &\qquad - {}_tp_{wyz} - {}_tp_{xyz} - {}_tp_{wxy} - {}_tp_{wxz} + {}_tp_{wxyz} \end{aligned} \tag{18.3.4}$$

в случае независимости. Теперь, используя (18.3.4), получим

$$\bar{a}_{\overline{wx}:\overline{yz}} = \int_0^\infty v^t s(t)\, dt = \bar{a}_{wy} + \bar{a}_{wz} + \bar{a}_{xy} + \bar{a}_{xz} - \bar{a}_{wyz} - \bar{a}_{xyz} - \bar{a}_{wxy} - \bar{a}_{wxz} + \bar{a}_{wxyz}. \tag{18.3.5}$$

Возвратимся к формуле (18.3.4) и покажем, что аналогичное соотношение, а значит, и эта формула, имеют место и без предположения о независимости случайных величин. Начнем с утверждения о том, что для всех возможных исходов

$$T(\overline{\overline{wx}:\overline{yz}}) = T(wy) + T(wz) + T(xy) + T(xz) - T(wyz) \\ - T(xyz) - T(wxy) - T(wxz) + T(wxyz). \qquad (18.3.6)$$

Исходы могут быть объединены в 24 взаимоисключающих события в зависимости от того, как величины $T(w)$, $T(x)$, $T(y)$ и $T(z)$ упорядочены по размеру. Поскольку данное утверждение симметрично относительно w и x, а также относительно y и z, необходимо проверить лишь шесть различных исходов. В качестве примера рассмотрим случай $T(w) < T(x) < T(y) < T(z)$, для которого левая часть равенства (18.3.6), $T(\overline{\overline{wx}:\overline{yz}})$, представляет собой $T(x)$, а правая часть последовательным рассмотрением каждого слагаемого сводится к

$$T(w) + T(w) + T(x) + T(x) - T(w) - T(x) - T(w) - T(w) + T(w) = T(x),$$

что и требовалось доказать. Другие случаи проверяются таким же образом.

Выражение для аннуитетов, аналогичное (18.3.6), можно доказать с помощью таких же соображений. Следовательно,

$$\bar{a}_{\overline{T(\overline{\overline{wx}:\overline{yz}})}|} = \bar{a}_{\overline{T(wy)}|} + \bar{a}_{\overline{T(wz)}|} + \bar{a}_{\overline{T(xy)}|} + \bar{a}_{\overline{T(xz)}|} - \bar{a}_{\overline{T(wyz)}|} \\ - \bar{a}_{\overline{T(xyz)}|} - \bar{a}_{\overline{T(wxy)}|} - \bar{a}_{\overline{T(wxz)}|} + \bar{a}_{\overline{T(wxyz)}|}. \qquad (18.3.7)$$

Находя математическое ожидание обеих частей этого выражения, получим (18.3.5).

Подчеркнем два аспекта предположения о независимости для этого случая. Оно не использовалось для доказательства формулы (18.3.7) и не требуется при вычислении математических ожиданий для получения формул (18.3.5) из (18.3.7). Однако для того чтобы получить актуарные функции для статуса дожития всех лиц из группы из таблиц смертности для отдельных лиц, мы из соображений удобства вновь предполагаем, что продолжительности предстоящей жизни отдельных лиц независимы.

18.4. Вероятности и страховые выплаты, зависящие от очередности смертей

В этом разделе мы распространим рассматривавшиеся в разд. 9.9 актуарные функции для выплат, зависящих от очередности смертей, на случай более двух лиц. Мы начнем с интегрального выражения для искомой вероятности или актуарной настоящей стоимости, которые затем можно переписать в терминах вероятностей или актуарных настоящих стоимостей, относящихся к первой смерти. Тогда для завершения вычислений можно будет использовать некоторые методы разд. 9.10. В ряде случаев можно использовать методы численного интегрирования.

Для того чтобы получить интегральное выражение для вероятности, используем формулу

$$\mathbf{P}(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}(A|T=t) f_T(t)\,dt, \qquad (18.4.1)$$

где T обычно обозначает момент смерти отдельного лица.

Пример 18.4.1. Выразим ${}_nq^{\;\;2}_{wxyz}$ в терминах вероятностей, зависящих от первой смерти.

Решение. Здесь событие A состоит в том, что лицо (y) умрет вторым из лиц (w), (x), (y) и (z) в течение n лет. Поскольку A определяется через $T(y)$, используем $T(y)$ в качестве T в формуле (18.4.1) для получения выражения

$$_n q_{wx\overset{2}{y}z} = \int_0^n \mathbf{P}(A\,|\,T(y)=t)\,{}_t p_y\,\mu_y(t)\,dt.$$

Пределы интегрирования определяются соотношениями

$$f_{T(y)}(t) = 0, \quad t<0, \qquad \mathbf{P}[A\,|\,T(y)=t] = 0, \quad t>n.$$

Теперь лицо (y) умрет вторым тогда и только тогда, когда в этот момент времени живы в точности двое из трех лиц (w), (x) и (z). Если предположить, что с.в. $T(y)$ не зависит от с.в. $T(w)$, $T(x)$ и $T(z)$, то

$$\mathbf{P}[A\,|\,T(y)=t] = {}_t p_{\overline{wxz}}^{[2]}, \qquad t<n,$$

и

$$\begin{aligned} _n q_{wx\overset{2}{y}z} &= \int_0^n {}_t p_{\overline{wxz}}^{[2]}\,{}_t p_y\,\mu_y(t)\,dt = \int_0^n ({}_tD_2 - 3\,{}_tD_3)\,{}_t p_y\,\mu_y(t)\,dt \\ &= {}_n q_{wx\overset{1}{y}} + {}_n q_{w\overset{1}{y}z} + {}_n q_{x\overset{1}{y}z} - 3\,{}_n q_{wx\overset{1}{y}z}. \end{aligned}$$

(Второй интеграл возникает при применении теоремы 18.2.1.) ▼

Сходство окончательного выражения из примера 18.4.1 с предыдущим результатом, где не требовалось выполнения предположения о независимости, наводит на мысль, что это предположение не является необходимым. Другие способы рассуждений, применяемые в упр. 18.18 и 18.38, показывают, что это действительно так.

Договоры страхования, учитывающие очередность смертей, можно анализировать с помощью той же процедуры, основываясь на формуле

$$\mathbf{E}[Z] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}[Z\,|\,T=t]\,f_T(t)\,dt. \tag{18.4.2}$$

Пример 18.4.2. Выразим величину $\bar{A}_{wx\overset{2}{y}}$ в терминах актуарных настоящих стоимостей страховых выплат, зависящих только от первой смерти.

Решение. Пусть Z — случайная величина, представляющая настоящую стоимость страховых выплат на момент заключения договора. Поскольку страховые выплаты осуществляются в случае смерти лица (y), мы выберем $T(y)$ в качестве T в условном математическом ожидании (18.4.2):

$$\bar{A}_{wx\overset{2}{y}} = \mathbf{E}[Z] = \int_0^\infty \mathbf{E}[Z\,|\,T(y)=t]\,{}_t p_y\,\mu_y(t)\,dt.$$

Если в момент t смерти лица (y) живо ровно одно лицо из двух, (x) и (w), то осуществляется выплата размера 1; в противном случае не производится никаких выплат. Таким образом,

$$\mathbf{E}[Z\,|\,T(y)=t] = v^t\,{}_t p_{\overline{wx}}^{[1]}$$

и

$$\begin{aligned} \bar{A}_{wx\overset{2}{y}} &= \int_0^\infty v^t\,{}_t p_{\overline{wx}}^{[1]}\,{}_t p_y\,\mu_y(t)\,dt \\ &= \int_0^\infty v^t({}_tD_1 - 2\,{}_tD_2)\,{}_t p_y\,\mu_y(t)\,dt = \bar{A}_{x\overset{1}{y}} + \bar{A}_{w\overset{1}{y}} - 2\bar{A}_{wx\overset{1}{y}}. \end{aligned}$$

С учетом того, что размер выплаты равен 1, дисперсию $\mathbf{D}[Z]$ можно найти по методу моментов. ▼

18.5. Сложные актуарные функции, зависящие от очередности смертей

Актуарные функции в этом разделе отличаются от рассматривавшихся в предыдущем разделе тем, что установлена очередность смертей до той смерти, после которой производятся выплаты или которой определяется страховой случай. Эта очередность обозначается числами, стоящими ниже символов соответствующих лиц. Рассмотрим два таких символа и укажем возможные различия в обозначениях.

Оба символа ${}_nq_{\underset{1}{x}yz}^{\,2}$ и ${}_nq_{\underset{1}{x}yz}^{\,3}$ относятся к случаям, для которых $T(x) < T(y) < T(z)$. Они отличаются, однако, тем, что в первом случае вторая смерть должна произойти до момента времени n, в то время как во втором случае моменту времени n должна предшествовать третья смерть.

Сложные актуарные функции, учитывающие очередность смертей, не всегда можно выразить исключительно в терминах функций, зависящих лишь от первой смерти. С другой стороны, такую функцию всегда можно выразить как простой или кратный интеграл от функции плотности совместного распределения случайных величин продолжительности предстоящей жизни соответствующих лиц. Пример этой общей процедуры (пример 18.5.1) сложнее, чем другие примеры этого раздела.

Пример 18.5.1. Выразим вероятность того, что лица (w), (x), (y) и (z) умрут в указанной последовательности при условии, что между смертью лица (w) и смертью лица (z) пройдет менее 10 лет, а между смертью лица (x) и смертью лица (y) — менее 5 лет.

Решение. Сначала определим следующее событие A, чтобы использовать многомерную версию равенства (18.4.1):

$$A = \{T(w) < T(x) < T(y) < T(z),\ T(z) - T(w) < 10,\ T(y) - T(x) < 5\}. \qquad (18.5.1)$$

Мы предпочитаем рассматривать условные вероятности с условиями на с.в. $T(w)$ и $T(x)$ потому, что эти случайные величины обе включаются как в верхние, так и в нижние пределы для с.в. $T(y)$ и $T(z)$. Таким образом,

$$\mathbf{P}(A) = \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbf{P}(A \mid [T(w) = r] \cap [T(x) = s])\, g_{T(w),T(x)}(r, s)\, ds\, dr, \qquad (18.5.2)$$

где $g_{T(w),T(x)}(r,s)$ — функция плотности совместного распределения с.в. $T(w)$ и $T(x)$. Далее, величина $\mathbf{P}[A \mid (T(w) = r) \cap (T(x) = s)]$ равна $\mathbf{P}(A^*)$, где

$$A^* = \{r < s < T(y) < T(z) < r + 10,\ T(y) < s + 5\},$$

и эта вероятность рассчитывается с помощью условного совместного распределения с.в. $T(y)$ и $T(z)$ при условии $T(x) = s$ и $T(w) = r$. Таким образом, вероятность $\mathbf{P}(A^*)$ определена на выборочном пространстве с.в. $T(y)$ и $T(z)$. Два случая показаны на рис. 18.5.1.

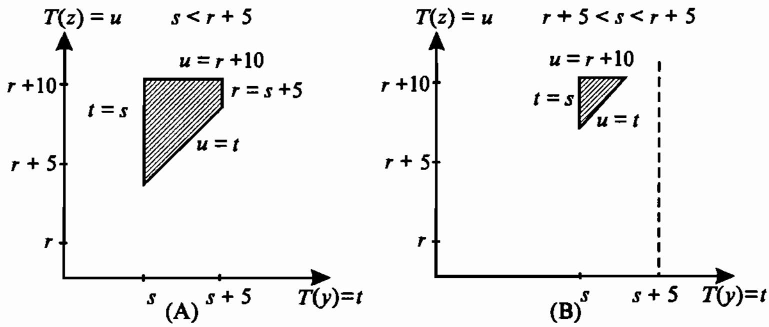


Рис. 18.5.1. Множество A^* (заштриховано) в случаях (A): $s < r + 5$, и (B): $r + 5 < s < r + 10$

Обозначая через $h(t, u)$ функцию плотности условного распределения с.в. $T(y)$ и $T(z)$ при условии $T(w) = r$ и $T(x) = s$, получаем

$$\mathbf{P}(A^*) = \begin{cases} \int_s^{s+5} \int_t^{r+10} h(t,u)\,du\,dt, & r < s < r+5, \\ \int_s^{r+10} \int_t^{r+10} h(t,u)\,du\,dt, & r+5 < s < r+10, \\ 0, & s > r+10 \text{ или } s < r. \end{cases}$$

Подставляя это выражение в формулу (18.5.2), приходим к равенству

$$\mathbf{P}(A) = \int_0^\infty \int_r^{r+5} \left[\int_s^{s+5} \int_t^{r+10} h(t,u) g(r,s)\,du\,dt \right] ds\,dr + \int_0^\infty \int_{r+5}^{r+10} \left[\int_s^{r+10} \int_t^{r+10} h(t,u) g(r,s)\,du\,dt \right] ds\,dr.$$

В предположении о взаимной независимости продолжительностей предстоящей жизни подынтегральное выражение можно заменить на

$${}_rp_w\,\mu_w(r)\,{}_sp_x\,\mu_x(s)\,{}_tp_y\,\mu_y(t)\,{}_up_z\,\mu_z(u). \qquad \blacktriangledown$$

Теперь рассмотрим некоторые сложные вероятности, учитывающие очередность смертей, которые можно записать в терминах обычных интегралов. Сначала найдем эквивалентные выражения для вероятностей, используя формулу (18.4.1).

Пример 18.5.2. Запишем три разных интеграла для ${}_nq_{\overset{}{\underset{1}{x}}yz}^{\;3}$ и сведем один из них к вероятностям, зависящим только от первой смерти, предполагая, что продолжительности предстоящей жизни взаимно независимы.

Решение. Здесь $A = \{T(x) < T(y) < T(z) < n\}$. Найдем три интеграла, налагая условия на продолжительности предстоящей жизни каждого из трех лиц:

$${}_nq_{\underset{1}{x}yz}^{\;3} = \int_0^\infty \mathbf{P}[A\,|\,T(x)=t]\,{}_tp_x\,\mu_x(t)\,dt \quad \text{и} \quad \mathbf{P}[A\,|\,T(x)=t] = \begin{cases} 0, & t > n, \\ {}_tp_{yz}\,{}_{n-t}q_{y+t:\overset{2}{z+t}}, & t \leqslant n. \end{cases}$$

Таким образом,

$${}_nq_{\underset{1}{x}yz}^{\;3} = \int_0^n {}_tp_{yz}\,{}_{n-t}q_{y+t:\overset{2}{z+t}}\,{}_tp_x\,\mu_x(t)\,dt.$$

Аналогично,

$$
{}_nq_{\underset{1}{x}y\overset{3}{z}} = \int_0^\infty \mathbf{P}[A\,|\,T(y)=t]\,{}_tp_y\,\mu_y(t)\,dt = \int_0^n {}_tq_x\,{}_tp_z\,{}_{n-t}q_{z+t}\,{}_tp_y\,\mu_y(t)\,dt,
$$

$$
{}_nq_{\underset{1}{x}y\overset{3}{z}} = \int_0^\infty \mathbf{P}[A\,|\,T(z)=t]\,{}_tp_z\,\mu_z(t)\,dt = \int_0^n {}_tq_{x\overset{2}{y}}\,{}_tp_z\,\mu_z(t)\,dt.
$$

Второй из этих интегралов можно выразить в терминах вероятностей первой смерти следующим образом:

$$
{}_nq_{\underset{1}{x}y\overset{3}{z}} = \int_0^n (1-{}_tp_x)({}_tp_z-{}_np_z)\,{}_tp_y\,\mu_y(t)\,dt = {}_nq_{\overset{1}{y}z} - {}_nq_{x\overset{1}{y}z} - {}_np_z({}_nq_y - {}_nq_{x\overset{1}{y}}). \qquad \blacktriangledown
$$

Пример 18.5.3. Используя формулу (18.4.1), запишем четыре различных интегральных выражения для ${}_nq_{\underset{1}{w}\underset{2}{x}y\overset{3}{z}}$, предполагая, что продолжительности предстоящей жизни взаимно независимы.

Решение. Здесь $A=\{T(w)<T(x)<T(y)<T(z)$ и $T(y)<n\}$. Тогда

$$
\begin{aligned}
{}_nq_{\underset{1}{w}\underset{2}{x}y\overset{3}{z}} &= \int_0^n {}_tp_{xyz}\,{}_{n-t}q_{\underset{1}{x+t}:\overset{2}{y+t}:z+t}\,{}_tp_w\,\mu_w(t)\,dt = \int_0^n {}_tq_w\,{}_tp_{yz}\,{}_{n-t}q_{\overset{1}{y+t}:z+t}\,{}_tp_x\,\mu_x(t)\,dt \\
&= \int_0^n {}_tq_{w\overset{2}{x}}\,{}_tp_z\,{}_tp_y\,\mu_y(t)\,dt = \int_0^n {}_tq_{\underset{1}{w}x\overset{3}{y}}\,{}_tp_z\,\mu_z(t)\,dt + {}_nq_{\underset{1}{w}x\overset{3}{y}}\,{}_np_z.
\end{aligned} \tag{18.5.3}
$$

Правая часть последнего равенства в этой цепочке равенств, полученная при условии на с.в. $T(z)$, включает одно слагаемое для $T(z)<n$ и одно для $T(z)>n$. ▼

Применяя равенство (18.4.1) в примерах этого раздела и рассматривая $\mathbf{P}(A\,|\,T=t)$, мы использовали предположение о независимости продолжительностей предстоящей жизни. Теперь рассмотрим вычисление этих вероятностей, если интенсивность смертности каждого из рассматриваемых лиц подчиняется закону Гомперца.

Пример 18.5.4. Покажем, что для закона Гомперца

$$
{}_\infty q_{\underset{1}{w}\underset{2}{x}y\overset{3}{z}} = {}_\infty q_{\overset{1}{w}xyz}\,{}_\infty q_{\overset{1}{x}yz}\,{}_\infty q_{\overset{1}{y}z}\,.
$$

Решение. Полагая $n\to\infty$ в формуле (18.5.3), получаем

$$
{}_\infty q_{\underset{1}{w}\underset{2}{x}y\overset{3}{z}} = \int_0^\infty {}_tq_w\,{}_tp_{yz}\,{}_\infty q_{\overset{1}{y+t}:z+t}\,{}_tp_x\,\mu_x(t)\,dt. \tag{18.5.4}
$$

В п. (b) примера 9.10.1 было показано, что, согласно закону смертности Гомперца,

$$
{}_nq_{\overset{1}{x}y} = \frac{c^x}{c^w}\,{}_nq_w, \tag{18.5.5}
$$

где $c^w=c^x+c^y$. Переписывая это выражение для данного случая и подставляя его вместо ${}_\infty q_{\overset{1}{\overline{y+t}}:z+t}$ в подынтегральное выражение в (18.5.4), получим

$$
{}_\infty q_{\underset{1}{w}\underset{2}{x}y\overset{3}{z}} = \int_0^\infty \frac{c^{y+t}}{c^{y+t}+c^{z+t}}\,{}_tq_w\,{}_tp_{yz}\,{}_tp_x\,\mu_x(t)\,dt = \frac{c^y}{c^y+c^z}({}_\infty q_{\overset{1}{x}yz} - {}_\infty q_{w\overset{1}{x}yz}).
$$

Формулу (18.5.5) можно распространить на более чем два лица и затем использовать полученное выражение. Следовательно,

$$
\begin{aligned}
{}_{\infty}q^{\;3}_{\substack{wxyz\\12}} &= \frac{c^y}{c^y+c^z}\left(\frac{c^x}{c^x+c^y+c^z}-\frac{c^x}{c^w+c^x+c^y+c^z}\right)\\
&= \left(\frac{c^w}{c^w+c^x+c^y+c^z}\right)\left(\frac{c^x}{c^x+c^y+c^z}\right)\left(\frac{c^y}{c^y+c^z}\right) = {}_{\infty}q^1_{wxyz}\,{}_{\infty}q^1_{xyz}\,{}_{\infty}q^1_{yz}. \qquad \blacktriangledown
\end{aligned}
$$

18.6. Еще о реверсивных аннуитетах

В разд. 9.7 мы исследовали несколько договоров страхования и аннуитетов для групп, состоящих из более чем двух лиц. Хотя там рассматривались более общие типы реверсивных аннуитетов, они строились только для двух лиц и иногда с гарантированным периодом выплат. Рассмотрим примеры аннуитетов с гарантированными периодами выплат, которые отсчитываются от момента смерти, и примеры аннуитетов, начало выплат которых связано с порядком случаев смерти. Мы также ограничим наше обсуждение непрерывными аннуитетами.

Начнем с рассмотрения двух примеров реверсивных аннуитетов с гарантированным периодом выплат, исчисляемым с момента смерти. Для реверсивного аннуитета, по которому выплачивается аннуитет на срок n лет лицу (y) после смерти лица (x), гарантированный период выплат является отсроченным статусом, так что мы возвращаемся к начальным понятиям. Настоящая стоимость выплат Z на момент заключения договора — это

$$
Z = \begin{cases} 0, & T(y) \leqslant T(x), \\ v^{T(x)}\bar{a}_{\overline{T(y)-T(x)}|}, & T(x) < T(y) \leqslant T(x)+n, \\ v^{T(x)}\bar{a}_{\overline{n}|}, & T(x)+n \leqslant T(y). \end{cases}
$$

Используя формулу (18.4.2) при условии $T(x) = t$, можно записать актуарную настоящую стоимость в виде

$$
\mathrm{E}[Z] = \int_0^\infty \mathrm{E}[Z\,|\,T(x)=t]\,{}_tp_x\,\mu_x(t)\,dt = \int_0^\infty {}_tp_y\,v^t\,\bar{a}_{y+t:\overline{n}|}\,{}_tp_x\,\mu_x(t)\,dt. \qquad (18.6.1)
$$

Подставляя выражение

$$
\bar{a}_{y+t:\overline{n}|} = \int_t^{t+n} v^{s-t}\,{}_{s-t}p_{y+t}\,ds
$$

в формулу (18.6.1), получим

$$
\mathrm{E}[Z] = \int_0^\infty\int_t^{t+n} v^s\,{}_sp_y\,{}_tp_x\,\mu_x(t)\,ds\,dt.
$$

Затем поменяем порядок интегрирования, так что

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[Z] &= \int_0^n\int_0^s v^s\,{}_sp_y\,{}_tp_x\,\mu_x(t)\,dt\,ds + \int_n^\infty\int_{s-n}^s v^s\,{}_sp_y\,{}_tp_x\,\mu_x(t)\,dt\,ds\\
&= \int_0^n v^s\,{}_sp_y(1-{}_sp_x)\,ds + \int_n^\infty v^s\,{}_sp_y({}_{s-n}p_x - {}_sp_x)\,ds\\
&= \bar{a}_{y:\overline{n}|} - \bar{a}_{xy} + v^n\,{}_np_y\,\bar{a}_{x:y+n}. \qquad (18.6.2)
\end{aligned}
$$

Выражение в правой части второго равенства в (18.6.2) является формулой текущих платежей для этой актуарной настоящей стоимости.

Другим реверсивным аннуитетом этого типа будет аннуитет, выплаты которого начинаются спустя n лет после смерти лица (x) и продолжаются лишь до тех пор, пока лицо (y) живо. Настоящая стоимость выплат Z, рассчитанная на момент заключения договора, составит

$$Z = \begin{cases} 0, & T(y) \leqslant T(x) + n, \\ (v^{T(x)+n})\bar{a}_{\overline{T(y)-T(x)-n}|}, & T(x) + n < T(y). \end{cases}$$

Используя формулу (18.4.2) при условии $T(x) = t$, актуарную настоящую стоимость можно записать в виде

$$\mathbf{E}[Z] = \int_0^\infty \mathbf{E}[Z \,|\, T(x) = t]\, {}_tp_x\, \mu_x(t)\, dt = \int_0^\infty {}_{t+n}p_y\, v^{t+n}\, \bar{a}_{y+n+t}\, {}_tp_x\, \mu_x(t)\, dt\,. \qquad (18.6.3)$$

Подставим

$${}_{t+n}p_y\, v^{t+n}\, \bar{a}_{y+n+t} = \int_{t+n}^\infty v^s\, {}_sp_y\, ds$$

в (18.6.3) и получим

$$\mathbf{E}[Z] = \int_0^\infty \int_{t+n}^\infty v^s\, {}_sp_y\, {}_tp_x\, \mu_x(t)\, ds\, dt.$$

Далее поменяем порядок интегрирования, так что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[Z] &= \int_n^\infty \int_0^{s-n} v^s\, {}_sp_y\, {}_tp_x\, \mu_x(t)\, dt\, ds = \int_n^\infty v^s\, {}_sp_y (1 - {}_{s-n}p_x)\, ds \\ &= v^n\, {}_np_y (\bar{a}_{y+n} - \bar{a}_{x:y+n}) = v^n\, {}_np_y\, \bar{a}_{x|y+n}. \end{aligned} \qquad (18.6.4)$$

Другой класс реверсивных аннуитетов, который мы рассмотрим, возможно, имеет ограниченный коммерческий интерес: это аннуитеты, для начала выплат которых должно произойти некоторое событие, обусловленное очередностью смертей в группе. Рассмотрим два примера, привлекая начальные понятия.

Пример 18.6.1. Выразим актуарную настоящую стоимость реверсивного аннуитета, обозначаемую через $\bar{a}^{1}_{xy|z}$,

(a) согласно определению,

(b) в форме текущих платежей, изменив порядок интегрирования в результате из п. (a).

Решение. Используя формулу (18.4.2) при условии $T(x) = t$, получим

$$\begin{aligned} \bar{a}^{1}_{xy|z} &= \int_0^\infty v^t\, {}_tp_x\, \mu_x(t)\, {}_tp_y\, {}_tp_z\, \bar{a}_{z+t}\, dt = \int_0^\infty {}_tp_x\, \mu_x(t)\, {}_tp_y \left(\int_t^\infty v^s\, {}_sp_z\, ds \right) dt \\ &= \int_0^\infty v^s\, {}_sp_z \left[\int_0^s {}_tp_x\, \mu_x(t)\, {}_tp_y\, dt \right] ds = \int_0^\infty v^s\, {}_sp_z\, {}_sq^{1}_{xy}\, ds. \end{aligned}$$ ▼

Этот результат можно рассматривать как актуарную настоящую стоимость в форме текущих платежей. Он показывает, что общий вид реверсивных аннуитетов можно интерпретировать достаточно широко, если допускать, что потеря статуса (u)

может включать некоторое событие, обусловленное очередностью смертей в группе. В общем случае имеем

$$\bar{a}_{u|v} = \int_0^\infty v^t\,{}_tp_v\,{}_tq_u\,dt. \tag{18.6.5}$$

Следующий пример демонстрирует простой частный случай для двух лиц, в котором актуарная настоящая стоимость может быть сведена к выражению, в котором нет интегралов.

Пример 18.6.2. Выразим актуарную настоящую стоимость аннуитета, обозначаемую через $\bar{a}^{\,1}_{x:\overline{n}|\,|y}$, в виде, не использующем интегралы.

Решение. Согласно (18.6.5), имеем

$$\begin{aligned}
\bar{a}^{\,1}_{x:\overline{n}|\,|y} &= \int_0^\infty v^t\,{}_tp_y\,{}_tq^{\,1}_{x:\overline{n}|}\,dt \\
&= \int_0^n v^t\,{}_tp_y\left[\int_0^t {}_sp_x\,\mu_x(s)\,ds\right]dt + \int_n^\infty v^t\,{}_tp_y\left[\int_0^n {}_sp_x\,\mu_x(s)\,ds\right]dt \\
&= \int_0^n v^t\,{}_tp_y(1-{}_tp_x)\,dt + (1-{}_np_x)\int_n^\infty v^t\,{}_tp_y\,dt = \bar{a}_y - \bar{a}_{xy:\overline{n}|} - v^n\,{}_np_{xy}\bar{a}_{y+n}. \quad \blacktriangledown
\end{aligned}$$

18.7. Нетто-премии и нетто-резервы

В этом разделе мы остановимся на нетто-премиях и нетто-резервах для рассматриваемых в этой главе типов страховых договоров. Как и в гл. 6, нетто-премия будет определяться согласно принципу эквивалентности. Как и в гл. 7, нетто-резерв будет определяться по перспективному методу как условное математическое ожидание будущих потерь при условии дожития до момента, в который рассчитывается резерв.

Период выплаты премий должен оканчиваться не позднее момента наступления страхового случая, а для договоров страхования, учитывающих очередность смертей, не позднее момента, когда ясно, что никаких страховых выплат производиться не будет. Этот период может оканчиваться раньше указанных моментов.

При рассмотрении страховых выплат на случай первой смерти премии выплачиваются лишь до тех пор, пока все лица живы. Используя принцип эквивалентности, получаем, например,

$$P_{xy}\ddot{a}_{xy} = A_{xy}, \quad {}_{10}P^{\{4\}}(\bar{A}^{\;\;1}_{\overline{xy}:\overline{20}|})\ddot{a}^{\{4\}}_{xy:\overline{10}|} = \bar{A}^{\;\;1}_{\overline{xy}:\overline{20}|}, \quad P(\bar{A}^{1}_{xyz})\ddot{a}_{xyz} = \bar{A}^{1}_{xyz}.$$

Для страховых выплат, осуществляемых в случае второй или одной из последующих смертей, возможен не единственный период выплаты премий. Для того чтобы минимизировать нетто-премии, которые могут назначаться для определенных страховых выплат, мы используем наиболее длительный период. Следующий пример иллюстрирует этот процесс для нескольких случаев.

Пример 18.7.1. Используя принцип эквивалентности, запишем уравнение для следующих нетто-премий:

(a) $P_{\overline{xy}}$, (b) $P(\bar{A}_{\overline{xyz}}^{\;\;2})$, (c) $P(\bar{A}_{\overline{wx}:yz})$, (d) $P(\bar{A}^{\;2}_{xyz})$, (e) $P(\bar{A}^{\;2}_{\underset{1}{x}yz})$.

Решение. (a) $P_{\overline{xy}}\,\ddot{a}_{\overline{xy}} = A_{\overline{xy}}$,

(b) $P(\bar{A}_{\overline{xyz}}^{\;\;2})\ddot{a}_{\overline{xyz}}^{\;\;2} = \bar{A}_{\overline{xyz}}^{\;\;2}$,

(c) $P(\bar{A}_{\overline{wx}:yz})\ddot{a}_{\overline{wx}:yz} = \bar{A}_{\overline{wx}:yz}$,

(d) До тех пор, пока живы лицо (y) и по крайней мере одно из лиц (x) и (z), страховые выплаты еще возможны. Следовательно,

$$P(\bar{A}_{xyz}^{\;2})\ddot{a}_{y:\overline{xz}} = \bar{A}_{xyz}^{\;2}.$$

(e) В этом случае страховые выплаты возможны, если живы все лица или если живы только лица (y) и (z). Таким образом, соответствующий период выплаты премий определяется периодом сохранения статуса (yz) и

$$P(\bar{A}_{\underset{1}{x}yz}^{\;2})\ddot{a}_{yz} = \bar{A}_{\underset{1}{x}yz}^{\;2}. \qquad \blacktriangledown$$

Как условное математическое ожидания будущих потерь нетто-резерв будет зависеть от условий статуса, используемого в расчетах. Резерв для страховых выплат на случай первой смерти определен однозначно, потому что все лица должны дожить до окончания срока действия договора страхования. Проиллюстрируем формулы резервов для двух таких договоров страхования:

$${}_5V_{\overline{xy}:\overline{10|}}^{\,1} = A_{\overline{x+5:y+5}:\overline{5|}}^{\,1} - P_{\overline{xy}:\overline{10|}}^{\,1}\,\ddot{a}_{x+5:y+5:\overline{5|}},$$

где

$$P_{\overline{xy}:\overline{10|}}^{\,1}\,\ddot{a}_{xy:\overline{10|}} = A_{\overline{xy}:\overline{10|}}^{\,1}, \quad {}_5V_{xyz}^{1} = A_{x+5:y+5:z+5}^{\,1} - P_{xyz}^{1}\ddot{a}_{x+5:y+5:z+5}.$$

Для страховых выплат на случай второй или одной из последующих смертей нетто-резерв можно рассчитать как условное математическое ожидание, где условие состоит либо в том, (a) какие лица дожили, либо в том, что (b) действие договора не заканчивается с последней смертью.

Рассмотрим непрерывную модель страхования со страховой выплатой размера 1 на случай потери статуса $(\overline{xy})$ и с премиями, выплачиваемыми до наступления второй смерти. Пусть ${}_tL$ — будущие потери в момент времени t. В зависимости от информации о том, какое из лиц (x), (y) (или они оба) дожило до момента времени t, имеем

$$\mathbf{E}[{}_tL\,|\,T(x)>t\cap T(y)>t] = \bar{A}_{\overline{x+t:y+t}} - \bar{P}(\bar{A}_{\overline{xy}})\bar{a}_{\overline{x+t:y+t}}, \tag{18.7.1}$$

$$\mathbf{E}[{}_tL\,|\,T(x)>t\cap T(y)\leqslant t] = \bar{A}_{x+t} - \bar{P}(\bar{A}_{\overline{xy}})\bar{a}_{x+t} \tag{18.7.2}$$

или

$$\mathbf{E}[{}_tL\,|\,T(x)\leqslant t\cap T(y)>t] = \bar{A}_{y+t} - \bar{P}(\bar{A}_{\overline{xy}})\bar{a}_{y+t}. \tag{18.7.3}$$

С другой стороны, если известно только, что статус еще не потерян, то нетто-резерв представляет собой величину

$${}_t\bar{V}(\bar{A}_{\overline{xy}}) = \mathbf{E}[{}_tL\,|\,T(\overline{xy})>t],$$

которую можно рассчитать по формуле полной вероятности как сумму

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[{}_tL\,|\,T(x)>t\cap T(y)\leqslant t]\,\mathbf{P}[T(x)>t\cap T(y)\leqslant t\,|\,T(\overline{xy})>t]\\ +\,\mathbf{E}[{}_tL\,|\,T(x)\leqslant t\cap T(y)>t]\,\mathbf{P}[T(x)\leqslant t\cap T(y)>t\,|\,T(\overline{xy})>t]\\ +\,\mathbf{E}[{}_tL\,|\,T(x)>t\cap T(y)>t]\,\mathbf{P}[T(x)>t\cap T(y)>t\,|\,T(\overline{xy})>t].\end{aligned} \tag{18.7.4}$$

В этом выражении условные математические ожидания задаются формулами (18.7.1), (18.7.2) и (18.7.3). В предположении независимости с.в. $T(x)$ и $T(y)$ вероятности примут вид

$$\mathbf{P}[T(x)>t\cap T(y)\leqslant t\,|\,T(\overline{xy})>t] = \frac{{}_tp_x(1-{}_tp_y)}{{}_tp_x(1-{}_tp_y)+{}_tp_y(1-{}_tp_x)+{}_tp_x\,{}_tp_y}.$$

Комбинируя эти формулы, получаем

$$
\begin{aligned}
{}_t\bar V(\bar A_{\overline{xy}}) = \frac{1}{{}_tp_x(1-{}_tp_y)+{}_tp_y(1-{}_tp_x)+{}_tp_x\,{}_tp_y}\,&\big\{{}_tp_x(1-{}_tp_y)[\bar A_{x+t}-\bar P(\bar A_{\overline{xy}})\bar a_{x+t}]\\
&+{}_tp_y(1-{}_tp_x)[\bar A_{y+t}-\bar P(\bar A_{\overline{xy}})\bar a_{y+t}]\\
&+{}_tp_x\,{}_tp_y[\bar A_{\overline{x+t:y+t}}-\bar P(\bar A_{\overline{xy}})\,\bar a_{\overline{x+t:y+t}}]\big\}. \qquad (18.7.5)
\end{aligned}
$$

Теперь подставим равенства

$$
\bar a_{\overline{xy}} = \bar a_x + \bar a_y - \bar a_{xy}, \qquad \bar A_{\overline{xy}} = \bar A_x + \bar A_y - \bar A_{xy},
$$

полученные в разд. 9.7, в последний член формулы (18.7.5), стоящий в квадратных скобках, и получим

$$
\begin{aligned}
&{}_tp_x\,{}_tp_y[\bar A_{\overline{x+t:y+t}}-\bar P(\bar A_{\overline{xy}})\bar a_{\overline{x+t:y+t}}]\\
&\quad={}_tp_x\,{}_tp_y[\bar A_{x+t}+\bar A_{y+t}-\bar A_{x+t:y+t}-\bar P(\bar A_{\overline{xy}})(\bar a_{x+t}+\bar a_{y+t}-\bar a_{x+t:y+t})].
\end{aligned}
$$

Подставляя данный результат в (18.7.5), получим

$$
\begin{aligned}
{}_t\bar V(\bar A_{\overline{xy}}) &= [({}_tp_x\,\bar A_{x+t}+{}_tp_y\,\bar A_{y+t}-{}_tp_x\,{}_tp_y\,\bar A_{x+t:y+t})\\
&\quad-\bar P(\bar A_{\overline{xy}})({}_tp_x\,\bar a_{x+t}+{}_tp_y\,\bar a_{y+t}-{}_tp_x\,{}_tp_y\,\bar a_{x+t:y+t})]/({}_tp_x+{}_tp_y-{}_tp_x\,{}_tp_y). \qquad (18.7.6)
\end{aligned}
$$

Так как $(\overline{xy})$ является статусом дожития, он имеет функцию условного дожития при условии, что статус сохраняется до момента времени t. Обозначим ее через ${}_up_{\overline{xy}+t}$. Нетто-резерв по договору страхования, обсуждавшемуся выше, можно рассчитать непосредственно, исходя из функции условного дожития, если она вычислена заранее. Более точно,

$$
{}_up_{\overline{xy}+t} = \mathbf{P}[T(xy)>u+t\,|\,T(xy)>t] = \frac{{}_{t+u}p_x+{}_{t+u}p_y-{}_{t+u}p_{xy}}{{}_tp_x+{}_tp_y-{}_tp_{xy}}. \qquad (18.7.7)
$$

Подчеркнем, что лишь при $t=0$ доподлинно известно, что оба лица (x) и (y) живы. Если предположить независимость продолжительностей предстоящей жизни этих лиц, то в качестве соответствующей функции плотности условного распределения для статуса дожития последнего лица при условии, что этот статус сохранится до момента времени t, получим

$$
\frac{{}_{u+t}p_x\,\mu_x(t+u)+{}_{u+t}p_y\,\mu_y(t+u)-{}_{u+t}p_{xy}[\mu_x(t+u)+\mu_y(t+u)]}{{}_tp_x+{}_tp_y-{}_tp_{xy}}. \qquad (18.7.8)
$$

Если каждый из сомножителей ${}_{u+t}p$ в числителе формул (18.7.7) и (18.7.8) можно представить в виде произведения, например, ${}_{u+t}p_x = {}_up_{x+t}\,{}_tp_x$, то эти выражения будут представлять собой взвешенные средние с весами, равными вероятностям дожития до t.

Если для расчета величины $\mathbf{E}[v^{T(xy)-t}-\bar P(\bar A_{xy})\bar a_{\overline{T(xy)-t|}}\,|\,T(xy)>t]$ используется выражение (18.7.8), то мы вновь получаем равенство (18.7.6).

18.8. Замечания и литература

Практические приложения материала этой главы не так многочисленны, как приложения некоторых других глав. Тем не менее существует обширная актуарная литература по различным вопросам теории страхования нескольких лиц. Главы 10, 11, 12 и 13 книги [Jordan 1952] и гл. 7, 8 книги [Neill 1977] частично посвящены этим вопросам.

Теорема 18.2.2 (см. ниже) — одна из основных теорем теории вероятностей. Она объединяет многие идеи гл. 4 книги [Feller 1968]. Метод, используемый в доказательстве результатов этого типа, часто называется *методом включения и исключения*. Обзор основных результатов в этой области содержится в работе [Takacs 1967], причем в ней приведена обширная библиография. Варинг дал высокую оценку приложениям этих алгебраических методов к расчету величин страховых аннуитетов. Ранее актуарные учебники выводили результаты следствий 18.2.1 и 18.2.3 с помощью так называемого *Z-метода*. Это мнемоническое правило, основанное на наблюдении, что коэффициенты при ${}_tD_j$ в выражениях ${}_tp_{\overline{x_1\ldots x_k}}^{[k]}$ и ${}_tp_{\overline{x_1\ldots x_k}}^{k}$ совпадают с соответствующими коэффициентами в разложениях величин $Z^k/(1+Z)^{k+1}$ и $Z^k/(1+Z)^k$.

Более ранняя версия теоремы 18.2.2 содержится в обсуждении работы [White, Greville 1959], проведенном Шютте и Несбиттом. Использование этих методов для определения актуарной настоящей стоимости доли аннуитета, выплачиваемого до момента последней смерти в группе лиц с распределением дохода равными долями среди доживших, является предметом упражнения 18.36 и статьи [Rasor, Myers 1952]. Другое доказательство теоремы 18.2.2, не содержащее ссылок на теорию вероятностей, дано в работе [Buchta 1994].

Некоторые из результатов, касающихся премий и резервов для договоров страхования на случай последней смерти в группе, обсуждались в статье [Frasier 1978].

В договорах страхования на случай смерти с сохраненными выплатами часто оговаривается право на изменение условий договора (страховой опцион). В каждую годовщину заключения договора страхователь имеет право на получение выкупной суммы и заключение нового договора страхования, используя доступную на тот момент времени экономическую и медицинскую информацию с целью увеличения актуарной настоящей стоимости обязательств по договору страхования. Рейнольдс в работе [Reynolds 1994] обсуждает расходы на реализацию такого права по договорам на случай последней смерти, для которых премии, резервы и выкупные суммы определяются с использованием функций условного дожития, подобных (18.7.7). Он показал, что важно учитывать антиселекцию рисков смертности в том смысле, что страхователи, реализующие право на изменение условий договора, «здоровее», т.е. имеют большую вероятность прожить долго, чем те, кто не реализует этого права. Учет ожидаемых дополнительных расходов, связанных с реализацией этого права, должен быть встроен в дизайн страхового продукта. Это соображение базируется на том, что выкупные суммы, как и резервы, которые получены на основе функций условного дожития, в которых фигурирует лишь сохранение статуса, как правило, будут больше соответствующих величин, рассчитанных с учетом дополнительной информации о дожитии лиц (x) и (y), как в формулах (18.7.1), (18.7.2) и (18.7.3).

Приложение

Теорема 18.2.2. *Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — рассматриваемые события, и пусть $P_{[j]}$ обозначает вероятность того, что происходит ровно j из этих n событий. Пусть D_j — сумма (по всем сочетаниям по j событий из n) вероятностей того, что j указанных событий произойдут, вне зависимости от того, произойдут ли другие $n-j$ событий. Тогда для любого набора чисел $c_0, c_1, \ldots, c_n$*

$$c_0P_{[0]} + c_1P_{[1]} + c_2P_{[2]} + \cdots + c_nP_{[n]} = c_0 + D_1\Delta c_0 + D_2\Delta^2 c_0 + \cdots + D_n\Delta^n c_0.$$

Доказательство. Пусть X_i обозначает индикатор события A_i, так что $X_i = 1$, если A_i произошло, и $X_i = 0$ в противном случае. Пусть Y_j — индикатор, такой, что $Y_j = 1$, если произошло в точности j из n событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, и $Y_j = 0$ в противном случае. Заметим, что математическое ожидание с.в. Y_j равно $P_{[j]}$. Наконец, определим оператор $\phi(\mathrm{E})$ как функцию оператора сдвига $\mathrm{E} = 1 + \Delta$ по формуле

$$\phi(\mathrm{E}) = (X_1\,\mathrm{E} + 1 - X_1)(X_2\,\mathrm{E} + 1 - X_2)\cdots(X_n\,\mathrm{E} + 1 - X_n).$$

Заметим, что любой сомножитель равен либо E, если входящая в него величина X_i равна 1, либо 1, если эта величина равна 0. Умножая, получаем

$$\phi(\mathrm{E}) = Y_0 + Y_1\,\mathrm{E} + Y_2\,\mathrm{E}^2 + \cdots + Y_n\,\mathrm{E}^n,$$

поскольку в этом разложении степень оператора E равна числу тех X_i, которые равны 1. Таким образом, показатель степени оператора E равен числу произошедших событий $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$.

Поскольку степень оператора сдвига E^j, примененная к величине c_0, дает c_j, получим

$$\phi(\mathrm{E})c_0 = c_0 Y_0 + c_1 Y_1 + \cdots + c_n Y_n,$$

и тогда математическое ожидание величины $\phi(\mathrm{E})c_0$ представляет собой

$$c_0 P_{[0]} + c_1 P_{[1]} + \cdots + c_n P_{[n]}. \qquad (*)$$

Поскольку $\mathrm{E} = 1 + \Delta$, можно также записать $\phi(\mathrm{E})$ в виде

$$\phi(\mathrm{E}) = (1 + X_1\Delta)(1 + X_2\Delta)\cdots(1 + X_n\Delta) = 1 + \sum_{j=1}^{n}\Bigg(\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_j} X_{i_1} X_{i_2} \ldots X_{i_j}\Bigg)\Delta^j,$$

где коэффициент при Δ^j представлен в виде суммы всех возможных произведений (в количестве $\binom{n}{j}$) по j с.в. X_i. Поскольку $X_{i_1} X_{i_2} \ldots X_{i_j} = 1$ лишь в случае, если произошло событие $A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_j}$, математическое ожидание с.в. $X_{i_1} X_{i_2} \ldots X_{i_j}$ равно вероятности $\mathbf{P}(A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_j})$ и математическое ожидание случайной величины

$$\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_j} X_{i_1} X_{i_2} \ldots X_{i_j}$$

равно D_j. Следовательно, математическое ожидание с.в. $\phi(\mathrm{E})c_0$ также можно записать в виде

$$c_0 + D_1\Delta c_0 + D_2\Delta^2 c_0 + \cdots + D_n\Delta^n c_0. \qquad (**)$$

Приравнивая два выражения для математического ожидания с.в. $\phi(\mathrm{E})c_0$, завершаем доказательство теоремы. ■

Обычная теорема сложения вероятностей дает пример применения теоремы 18.2.2. Для $n = 4$

$$\mathbf{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = P_{[1]} + P_{[2]} + P_{[3]} + P_{[4]}.$$

Здесь $c_0 = 0$ и $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 1$ в первой форме записи $(*)$ математического ожидания $\phi(\mathrm{E})c_0$. Из таблицы

i	c_i	Δc_i	$\Delta^2 c_i$	$\Delta^3 c_i$	$\Delta^4 c_i$
0	0	1	−1	1	−1
1	1	0	0	0	—
2	1	0	0	—	—
3	1	0	—	—	—
4	1	—	—	—	—

мы видим, что вторая форма записи (**) математического ожидания представляет собой

$$\mathbf{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = D_1 - D_2 + D_3 - D_4$$

$$= \sum_{i=1}^{4} \mathbf{P}(A_i) - \sum_{\substack{\text{по всем комбинациям} \\ \text{по два из } 1,\,2,\,3,\,4}} \mathbf{P}(A_i A_j)$$

$$+ \sum_{\substack{\text{по всем комбинациям} \\ \text{по три из } 1,\,2,\,3,\,4}} \mathbf{P}(A_i A_j A_k) - \mathbf{P}(A_1 A_2 A_3 A_4).$$

Упражнения

Если не оговорено противное, продолжительность жизни всех лиц описывается одной и той же таблицей смертности, а случайные величины продолжительности предстоящей жизни независимы.

К разделу 18.2

18.1. Опишите события, имеющие вероятности, заданные следующими выражениями:

(a) ${}_tp_{wx} + {}_tp_{wy} + {}_tp_{wz} + {}_tp_{xy} + {}_tp_{xz} + {}_tp_{yz} - 3({}_tp_{wxy} + {}_tp_{wxz} + {}_tp_{wyz} + {}_tp_{xyz}) + 7{}_tp_{wxyz}$,

(b) ${}_tp_w + {}_tp_x + {}_tp_y + {}_tp_z - 2({}_tp_{wx} + {}_tp_{wy} + {}_tp_{wz} + {}_tp_{xy} + {}_tp_{xz} + {}_tp_{yz}) + 4({}_tp_{wxy} + {}_tp_{wxz} + {}_tp_{wyz} + {}_tp_{xyz}) - 8{}_tp_{wxyz}$.

18.2. Используя следствия из разд. 18.2, проверьте, что ${}_tp_{\overline{x_1x_2\ldots x_m}}^{[0]} = 1 - {}_tp_{\overline{x_1x_2\ldots x_m}}^{1}$.

18.3. Выдержка из таблицы актуарных настоящих стоимостей аннуитетов, сопряженных со статусом дожития всех лиц из группы и вычисленных с процентной ставкой 3,5%, выглядят следующим образом:

Статус дожития всех лиц	Актуарная настоящая стоимость аннуитета постнумерандо, связанного со статусом дожития всех лиц
20:26:28	14,4
20:26:29	14,3
20:28:29	14,0
26:28:29	13,8
20:26:28:29	12,5

(a) Рассчитайте актуарную настоящую стоимость аннуитета, выплачиваемого в конце каждого года до тех пор, пока ровно трое из лиц (20), (26), (28) и (29) живы.

(b) Рассчитайте актуарную настоящую стоимость страховой выплаты размера 10 000 в конце года смерти второго лица из совокупности лиц (20), (26), (28) и (29).

18.4. Выразите ${}_tp_{\overline{wxyz}}^{2} - {}_tp_{\overline{wxyz}}^{[2]}$ через ${}_tD_j$, $j = 1, 2, 3, 4$.

18.5. Выразите в терминах символов аннуитетов актуарную настоящую стоимость аннуитета с выплатами размера 1 в конце каждого года до тех пор, пока лицо (w) и по крайней мере одно из лиц (x), (y) и (z) живы.

18.6. Если $\mu_{40}(t) = 0{,}002$, $0 \leqslant t \leqslant 10$, и $\delta = 0{,}05$, то вычислите величину $\bar{A}_{40:40:40:40:40:\overline{10|}}$.

18.7. Учреждается фонд доверительного управления имуществом для обеспечения дохода трем лицам (x), (y) и (z). Фонд должен обеспечивать непрерывный доход с годовой суммой выплат 8 единиц каждому лицу, пока все они живы, с годовой суммой выплат 10 единиц каждому, если живы два лица, и с годовой суммой выплат 15 единиц единственному оставшемуся в живых. Рассчитайте актуарную настоящую стоимость

(a) всех выплат, которые будут сделаны, (b) всех выплат лицу (x).

18.8. Договор страхования обеспечивает выплату в размере 4 единиц после первой смерти в группе из четырех лиц возраста x лет, в размере 3 единиц после второй смерти, в размере 2 единиц после третьей смерти, в размере 1 единицы после четвертой смерти. Оцените актуарную настоящую стоимость выплат по этому договору, если $\bar{A}_x = 0{,}4$ и $\bar{A}_{xx} = 0{,}5$.

К разделу 18.3

18.9. Выразите актуарную настоящую стоимость аннуитетов постнумерандо с выплатой 1000 в месяц до тех пор, пока

(a) ровно одно лицо из двух лиц (40) и (35) живо в течение последующих 25 лет,

(b) по крайней мере одно из двух лиц (40) и (35) живо и ему не более 65 лет,

в символах актуарной настоящей стоимости аннуитетов, сопряженных со статусами дожития отдельных лиц и всех лиц в группе.

18.10. Выразите следующие величины в терминах аннуитетов с гарантированным периодом выплат, а также аннуитетов, сопряженных со статусом дожития отдельного лица и всех лиц из группы:

(a) $\bar{a}_{\overline{x:\overline{y:\overline{n}|}}}$, (b) $\bar{a}_{\overline{(25:\overline{40}|):\overline{30}|}}$.

К разделу 18.4

18.11. Пусть в каждый период времени интенсивность смертности лица (x) равна 1/2 от интенсивности смертности лица (y), в то время как интенсивность смертности лица (z) равна удвоенной величине интенсивности смертности лица (y). Оцените вероятность того, что из трех указанных лиц лицо возраста x умрет:

(a) первым, (b) вторым, (c) третьим.

18.12. Какое из следующих равенств верно? Поправьте те, которые не верны, если таковые есть.

(a) $\bar{A}_{\overline{wxy\overset{1}{z}}} = \bar{A}^{1}_{wxyz} + \bar{A}_{w\overset{1}{x}yz} + \bar{A}_{wx\overset{1}{y}z} + \bar{A}_{wxy\overset{1}{z}}$,

(b) $\bar{A}_{\overline{wxy\overset{3}{z}}} = \bar{A}^{2}_{wxyz} + \bar{A}_{w\overset{2}{x}yz} + \bar{A}_{wx\overset{2}{y}z} + \bar{A}_{wxy\overset{2}{z}}$,

(c) $\bar{A}_{wxy\overset{3}{z}} = \bar{A}_{w\overset{1}{z}} + \bar{A}_{x\overset{1}{z}} + \bar{A}_{y\overset{1}{z}} - (\bar{A}_{wx\overset{1}{z}} + \bar{A}_{wy\overset{\mathrm{I}}{z}} + \bar{A}_{xy\overset{1}{z}}) + \bar{A}_{wxy\overset{1}{z}}$.

18.13. Запишите в форме определенного интеграла актуарную настоящую стоимость страховой выплаты в момент смерти лица (x), если это лицо пережило лицо (y). Размер выплаты равен времени, прошедшему между заключением договора и датой смерти лица (y).

18.14. Предполагая, что выполняется закон Гомперца и $\mu(40) = 0{,}003$, $\mu(56) = 0{,}012$, вычислите

(a) ${}_{\infty}q_{40:\overset{2:3}{48}:56}$, (b) ${}_{\infty}q_{40:\overset{2}{48}:56}$.

[Замечание. В п. (a) обозначение 2:3 отражает событие, что лицо (48) умрет вторым или третьим в указанной группе лиц.]

18.15. Выплата размера 1 по договору страхования, заключенному лицами (x), (y) и (z), осуществляется в момент смерти лица (z) только в случае, если лицо (x) умерло не менее чем за 10 лет до этого, а лицо (y) умерло менее 10 лет назад. Выразите актуарную настоящую стоимость этой страховой выплаты в терминах актуарных настоящих стоимостей страховых выплат на случай смерти и на дожитие.

18.16. Выведите формулу, не содержащую интегралов, для актуарной настоящей стоимости выплаты размера 1 через 10 лет после смерти лица (x) при условии, что одно или оба лица (y) и (z) переживут лицо (x) и умрут до окончания этого 10-летнего периода.

18.17. Получите формулу для единовременной брутто-премии по договору страхования с выплатой размера 1, если лицо (30) умрет раньше лица (60) или в течение 5 лет после смерти последнего, с возвратом единовременной брутто-премии без учета процента в конце пятилетнего строка после смерти лица (60), если по этому договору не предъявлялось требования о выплате в связи со смертью лица (30). Предположите, что надбавка составляет 7,5% от нетто-премии.

К разделу 18.5

18.18. Не используя предположения о независимости, выведите соотношения типа

$$ {}_{n}q_{wx\overset{1}{y}} = {}_{n}q_{wx\overset{1}{y}z} + {}_{n}q_{wxy\overset{2}{\underset{1}{z}}} $$

и используйте их для получения результата примера 18.4.1.

18.19. Не используя предположение о независимости, выведите соотношения

$$\bar{A}_{xy}^{\,1} = \bar{A}_{xyz}^{\,1} + \bar{A}_{xy\overset{2}{\underset{1}{z}}}, \qquad \bar{A}_{yz}^{1} = \bar{A}_{xyz}^{\,1} + \bar{A}_{\underset{1}{x}y\overset{2}{z}}$$

и используйте их для получения результата примера 18.4.2.

18.20. Выразите ${}_{\infty}q_{\underset{1}{w}xyz}^{\;\;\;\;2}$

(a) в виде определенного интеграла,

(b) в терминах вероятностей смерти с учетом порядка смертей в группе.

18.21. Предполагая, что выполняется закон Гомперца, покажите, что

(a) ${}_tq_{xy}^{\;\;2} = {}_tq_y - \dfrac{c^y}{c^x+c^y}\,{}_tq_{xy}$;

(b) $\bar{A}_{\underset{1}{x}yz}^{\;\;\;3} = \dfrac{c^x}{c^x+c^y}\bar{A}_z - \dfrac{c^z}{c^y+c^z}\bar{A}_{yz} + \dfrac{c^y}{c^x+c^y}\,\dfrac{c^z}{c^x+c^y+c^z}\bar{A}_{xyz}$.

18.22. Вычислите

(a) ${}_{\infty}q_{20:\overset{2}{40}:\underset{1}{60}}$, (b) ${}_{\infty}q_{20:40:\overset{1}{60}}$, (c) ${}_{\infty}q_{20:\overset{1}{40}}$,

если для лиц (20), (40) и (60) интенсивность смертности определяется формулой $\mu_x = 1/(100-x)$ при $0 < x < 100$. Это показывает, что соотношение ${}_{\infty}q_{\underset{1}{x}\overset{2}{y}z} = {}_{\infty}q_{xyz}^{1}\;{}_{\infty}q_{yz}^{1}$, которое справедливо, если выполняется закона Гомперца, в общем случае неверно.

18.23. На основе таблицы смертности, соответствующей закону Гомперца (при $c^8 = 2$), $\bar{A}_{54} = 0{,}3$, $\bar{A}_{62} = 0{,}4$ и $\bar{A}_{70} = 0{,}52$. Определите $\bar{A}_{54:54:\underset{1}{62}}^{2}$.

18.24. Пусть $\bar{A}_w = 0{,}6$, $\bar{A}_{wx}^{1} = 0{,}3$, $\bar{A}_{wxx}^{1} = 0{,}2$, $\bar{A}_{wxxx}^{1} = 0{,}1$. Вычислите

(a) $\bar{A}_{wxxx}^{2}$, (b) $\bar{A}_{wxxx}^{4}$, (c) $\bar{A}_{\underset{1}{w}\underset{2}{x}\underset{2}{x}x}^{4}$.

18.25. Выразите в интегральной форме вероятность того, что лица (x), (y) и (z) умрут в указанном порядке в течение следующих 25 лет, причем между любыми двумя смертями пройдет не менее 10 лет.

18.26. Выразите в интегральной форме вероятность того, что лица (10), (20) и (30) умрут до достижения 60-летнего возраста, причем лицо (20) умрет вторым.

18.27. Пусть ${}_{\infty}q_{xy}^{1} = 0{,}5537$, ${}_{\infty}q_{xz}^{1} = 0{,}6484$, ${}_{\infty}q_{xyz}^{1} = 0{,}5325$ и ${}_{\infty}q_{xyz}^{\;\;2} = {}_{\infty}q_{xyz}^{\;\;3}$. Вычислите $q_{x\underset{1}{y}z}^{\;\;2}$.

18.28. В соответствии с некоторой таблицей смертности вероятность того, что три лица (70), (55) и (40) умрут в указанном порядке с интервалами не менее 15 лет, составляет 0,048, а вероятность того, что по крайней мере одно лицо из двух лиц (70) будет живо в течение 15 лет до момента смерти лица (55), составляет 0,8. Вычислите вероятность того, что ни одно из двух лиц (40) не доживет до возраста 70 лет.

18.29. Какие из следующих выражений верны? Исправьте неверные, если таковые имеются.

(a) $$\bar{A}_{\underset{1}{w}\underset{2}{x}yz}^{\;\;\;\;3} = \int_0^\infty v^t\,{}_tq_w\,{}_tp_{xyz}\,\mu_x(t)\,\bar{A}_{y+t}\,dt;$$

(b) $$\int_0^{10}(1 - {}_{t+10}p_{50})\,{}_tp_{60}\,\mu_{60}(t)\,dt + \int_{10}^\infty({}_{t-10}p_{50} - {}_{t+10}p_{50})\,{}_tp_{60}\,\mu_{60}(t)\,dt$$
$$= \int_0^{10}(1 - {}_{t+10}p_{60})\,{}_tp_{50}\,\mu_{50}(t)\,dt + \int_{10}^\infty({}_{t-10}p_{60} - {}_{t+10}p_{60})\,{}_tp_{60}\,\mu_{50}(t)\,dt;$$

(c) $${}_{30}q_{40:50:60}^{1} + {}_{30}q_{40:50:60}^{\;\;\;2} = {}_{30}q_{40:\overline{50:60}}^{1}.$$

К разделу 18.6

18.30. Запишите выражение, не использующее интегралов, для актуарной настоящей стоимости аннуитета, выплачиваемого непрерывно с интенсивностью 1 в год

(a) в течение жизни лица (y) и 10 лет после его смерти при условии, что выплаты не производятся, пока живо лицо (x),

(b) в течение жизни лица (y) и 10 лет после его смерти при условии, что выплаты не производятся, пока живо лицо (x), или если лицо (y) умрет раньше лица (x).

18.31. В символах актуарных настоящих стоимостей аннуитетов и договоров страхования жизни выразите единовременную брутто-премию (с надбавкой 8%), обеспечивающую страховые выплаты в виде аннуитета, сопряженного со статусом дожития последнего из двух лиц (x) и (y), отсроченного на n лет, с ежегодными выплатами размера 1, уменьшаемыми на 1/3 в случае первой смерти, с учетом следующих условий: если смерть лица (x) произошла первой и в течение периода отсрочки, то выплата уменьшенного аннуитета начинается спустя год после этой смерти, а если смерть лица (x) произошла второй и в течение периода отсрочки, то единовременная брутто-премия возвращается в конце года смерти.

18.32. В разд. 18.6 реверсивный аннуитет начинал выплачиваться, если статус (u) сохранялся после потери статуса (v). Это соображение может быть распространено на аннуитеты с выплатами, начинающимися после наступлении двух или более смертей в указанном порядке.

(a) Покажите, что $a_{\overset{2}{x}y|z} = a_{y|z} - a_{\overset{1}{x}y|z}$.

(b) На основе таблицы смертности, соответствующей закону Гомперца, докажите, что

$$a_{\overset{2}{x}y|z} = \frac{c^x}{c^x + c^y}\, a_z - a_{yz} + \frac{c^y}{c^x + c^y}\, a_{xyz}.$$

К разделу 18.7

18.33. Выразите ежегодную нетто-премию по договору страхования на дожитие с выплатой размера 1 при условии, что лицо (x) проживет n лет после смерти лица (y).

18.34. Какую актуарную настоящую стоимость аннуитета следует использовать для вычисления ежегодной нетто-премии, соответствующей актуарной настоящей стоимости $A_{\underset{1}{w}\overset{2}{x}yz}$?

Ко всем темам главы

18.35. Договор страхования, в котором страховым случаем является смерть лица (x) ранее возраста $x+n$ лет и смерть лица (y) ранее возраста $y+m$, причем $m < n$, обеспечивает выплату размера 1 в конце года второй смерти.

(a) Покажите, что актуарная настоящая стоимость выплаты может быть выражена в виде

$$A_{\overline{xy}:\overline{m|}}^{\;1} + v^m\, {}_m p_x (1 - {}_m p_y) A_{x+m:\overline{n-m|}}^{\;1}.$$

(b) Какая актуарная настоящая стоимость аннуитета может быть использована для вычисления ежегодной нетто-премии?

18.36. Группа из m лиц получает аннуитет с годовой выплатой размера 1, сопряженный со статусом дожития последнего лица в группе, с распределением дохода среди доживших равными долями. Актуарная настоящая стоимость доли лица (x_1) составляет

$$\sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{j+1}\, \bar{a}_{x_1:\overline{x_2 x_3 \dots x_m}^{[j]}}.$$

Покажите, что эта актуарная настоящая стоимость может быть записана в виде

$$\bar{a}_{x_1} - \frac{1}{2}(\bar{a}_{x_1x_2} + \dots + \bar{a}_{x_1x_m}) + \frac{1}{3}(\bar{a}_{x_1x_2x_3} + \dots + \bar{a}_{x_1x_{m-1}x_m}) - \dots (-1)^{m-1}\frac{1}{m}\,\bar{a}_{x_1x_2\dots x_m}.$$

$$\left[\text{Указание. Используйте теорему 18.2.1 для выражения } \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{j+1}\, {}_t p_{\overline{x_2 \dots x_m}^{[j]}}.\right]$$

18.37. Дайте словесную интерпретацию выражения

$$\int_0^{\infty} v^t\, {}_t q_x\, {}_t p_{yz}\, \mu_y(t) \bar{A}_{z+t:\overline{10|}}^{\;1}\, dt.$$

18.38. Пусть в обозначениях теоремы 18.2.2

$$A_1 = \{T(y) < \min[n, T(x), T(z)]\},$$
$$A_2 = \{T(y) < \min[n, T(x), T(w)]\},$$
$$A_3 = \{T(y) < \min[n, T(w), T(z)]\}.$$

Покажите, что событие A из примера 18.4.1 совпадает с событием, которое осуществляется, если происходит в точности одно из событий A_1, A_2 и A_3. Следовательно, используйте теорему 18.2.2 для получения результата примера 18.4.1 без предположения о независимости. [Указание. Покажите, что $\mathbf{P}(A_1) = {}_nq_{wx\overset{1}{y}z}$, $\mathbf{P}(A_1A_2) = \mathbf{P}(A_1A_3) = \mathbf{P}(A_2A_3) = \mathbf{P}(A_1A_2A_3)$ $= {}_nq_{wx\overset{1}{y}z}$ и $\mathbf{P}[A_1(\text{не}A_2)(\text{не}A_3)] = {}_nq_{\underset{1}{w}x\overset{2}{y}z}$.]

18.39. Рассмотрите договор бессрочного страхования на случай второй смерти с премиями, выплачиваемыми до тех пор, пока живо по крайней мере одно лицо из пары (x) и (y), предполагая, что модель дискретна.

(a) Покажите, что ${}_kV_{\overline{xy}} = 1 - \ddot{a}_{\overline{xy}+k}/\ddot{a}_{\overline{xy}}$, где

$$\ddot{a}_{\overline{xy}+k} = \frac{{}_kp_x\,\ddot{a}_{x+k} + {}_kp_y\,\ddot{a}_{y+k} - {}_kp_x\,{}_kp_y\,\ddot{a}_{x+k:y+k}}{{}_kp_x + {}_kp_y - {}_kp_x\,{}_kp_y}.$$

(b) Покажите, что $\ddot{a}_{\overline{xy}+k}$ можно вычислить по формуле

$$\ddot{a}_{\overline{xy}+k} = \frac{1}{v^k\,{}_kp_{\overline{xy}}}\sum_{j=k}^{\infty} v^j\,{}_jp_{\overline{xy}}.$$

19

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ДЕМОГРАФИЯ

19.1. Введение

Многие соображения, использованные в гл. 3, проистекают из математической демографии. Например, функция дожития, посредством которой определялось распределение случайной величины продолжительности предстоящей жизни и описывалось изменение во времени некоторой совокупности дожития, играет важную роль в построении демографических моделей.

В этой главе излагаются общие модели. С необходимыми изменениями их можно применять к населению страны или региона, к трудоспособному населению или к совокупностям животных в дикой природе.

Нас, в частности, будут интересовать некоторые актуарные приложения математической демографии. В разд. 19.5 модель математической демографии применяется к исследованию динамики определенной схемы страхования жизни для некоторой группы населения. В гл. 20 модель математической демографии используется как составная часть модели, предназначенной для исследования динамики некоторой системы пенсионного обеспечения группы населения.

19.2. Диаграмма Лексиса

В этом разделе мы введем удобный метод описания изменения численного состава какой-либо группы населения[1] во времени. Например, период работы отдельных лиц можно изобразить параллельными отрезками на двумерной диаграмме, называемой *диаграммой Лексиса* (см. рис. 19.2.1). Точка вступления лица в группу работников (координатами которой являются время и возраст вступления) обозначена светлым кружком, — один из концов отрезка, сопоставленного этому лицу. Пребывание в этой группе изображается наклонным отрезком, второй конец которого, обозначенный черным кружком (его координаты — это время и возраст выбытия), означает выбытие из группы работников.

На рис. 19.2.1 видно, что в рассматриваемую группу работников в момент времени -25 по отношению к настоящему времени ($t = 0$) входили три лица. В настоящий момент времени ($t = 0$) останется два работника. Могут представлять интерес утверждения о продолжительности их предстоящей работы. Штриховые линии на рис. 19.2.1 изображают длительность предстоящей работы двух лиц, являющихся работниками в настоящее время.

В следующих замечаниях приведены характерные черты диаграммы Лексиса.

[1] Иногда для краткости мы будем говорить просто «группа» или «население». — *Прим. ред.*

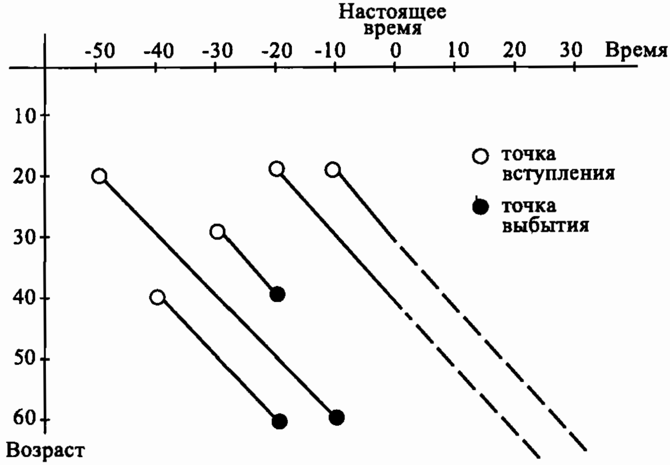


Рис. 19.2.1. Диаграмма Лексиса

Замечания. 1. Фиксированный момент времени соответствует вертикальной прямой. Количество членов группы в этот момент времени определяется числом параллельных отрезков (каждый из которых представляет отдельное лицо), пересекающих эту вертикальную прямую.

2. Фиксированный возраст соответствует горизонтальной прямой. Если отрезок, сопоставленный некоторому лицу, пересекает горизонтальную линию возраста x_0, то это лицо достигает возраста x_0, оставаясь членом группы.

3. Если член группы достигает возраста x лет в момент времени t, то момент его рождения — это $u = t - x$. Хотя координатами диаграммы Лексиса служат x и t, мы часто используем в нашем изложении переменные x и u. Одна из причин состоит в том, что u, будучи постоянным для каждого члена группы, не является постоянным по всей группе.

Эти соображения можно развивать во многих направлениях. Например, диаграмма Лексиса используется для описания динамики числа когорт, а не отдельных лиц. *Когортой* называется совокупность лиц, родившихся в один и тот же период времени. В моделях для группы работников можно учитывать различные причины выбытия, а вступление в совокупность может происходить в различных возрастах. Эти возможности обсуждались в гл. 10 и 11.

Демографические модели, развиваемые в следующих двух разделах, используют лишь одну причину выбытия, интерпретируемую как смерть. Аналогично, в качестве единственной причины вступления в совокупность мы рассматриваем рождение. Используемый нами подход будет детерминистическим.

19.3. Непрерывная демографическая модель

В этой главе мы будем использовать непрерывную демографическую модель, а не дискретный набор параллельных отрезков (каждый из которых сопоставляется лицу из группы), как это было на рис. 19.2.1. Это изменение позволит нам использовать методы математического анализа, а также многие из методов, рассматрившихся в предыдущих главах. Можно было бы вести параллельное изложение для дискретной модели, используя методы линейной алгебры.

Итак, мы будем предполагать, что все вступления в группу населения — рождения, а все выбытия — смерти. Миграция в модели исключается. Рождения происходят непрерывно, и $b(u)$ обозначает ***функцию плотности рождений*** в момент времени u. Таким образом, $b(u)\,du$ есть число рождений между моментами времени u и $u+du$. Обозначим через $s(x,u)$ функцию дожития лиц, рожденных в момент времени u. Она называется ***функцией дожития поколения***. Положим

$$l(x,u) = b(u)\,s(x,u). \tag{19.3.1}$$

Эта функция $l(x,u)$ называется ***функцией плотности группы населения***.

Интерпретация функции $l(x,u)$ упрощается обращением к непрерывному варианту диаграммы Лексиса (см. рис. 19.3.1). Этот и последующие рисунки данного раздела являются двумерными. Они призваны облегчить интерпретацию дифференциалов или показать области интегрирования. В каждом случае следовало бы использовать трехмерное изображение, рисуя функцию, определенную на плоскости «возраст–время».

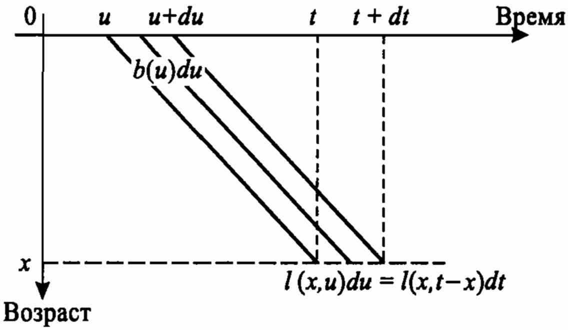


Рис. 19.3.1. Интерпретация функции $l(x,u)$

Из $l(0,u)\,du = b(u)\,du$ лиц, рожденных между моментами времени u и $u+du$, до возраста x лет доживает $l(x,u)\,du$ лиц. Пусть $t = x+u$; тогда $dt = du$ и это выражение можно переформулировать:

$$l(x,t-x)\,dt = (\text{число лиц, доживших до возраста } x \text{ в моменты времени между } t \text{ и } t+dt). \tag{19.3.2}$$

Отсюда следует, что число лиц, доживших до возраста x лет в моменты времени между t_0 и t_1, равно

$$\int_{t_0}^{t_1} l(x,t-x)\,dt. \tag{19.3.3}$$

Теперь рассмотрим другой вопрос. Пусть $x_0 < x_1$ — два фиксированных возраста, а t_0 — заданный момент времени. Какое количество лиц в возрасте между x_0 и x_1 будет живо в момент времени t_0? В этом вопросе под «количеством лиц» подразумевается значение интеграла от функции $l(x,u)$, как в гл. 3, а не переменная, принимающая только целые значения.

Эти лица достигают возраста x_0 между моментами времени $t_0 - (x_1 - x_0)$ и t_0, а затем доживают до момента времени t_0, как показано на рис. 19.3.2. Диагональная пунктирная линия показывает типичную когорту лиц, которые достигнут возраста между x_0 и x_1 в момент времени t_0.

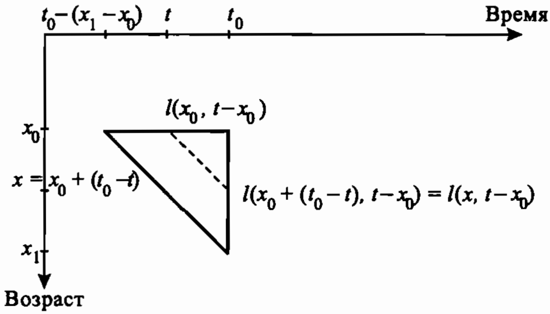


Рис. 19.3.2. Число лиц в возрасте между x_0 и x_1 в момент времени t_0

Таким образом, число, которое мы ищем, — это

$$\int_{t_0-(x_1-x_0)}^{t_0} l(x_0, t - x_0) \frac{s(x_0 + t_0 - t, t - x_0)}{s(x_0, t - x_0)} dt. \tag{19.3.4}$$

При вычислении интеграла (19.3.4) для того, чтобы записать подынтегральное выражение в виде $b(t - x_0)s(x_0 + t_0 - t, t - x_0) = l(x_0 + t_0 - t, t - x_0)$, мы можем использовать формулу (19.3.1). Положим $x = x_0 + (t_0 - t)$. Тогда интеграл (19.3.4) можно переписать в виде

$$-\int_{x_1}^{x_0} l(x, t_0 - x)\, dx = \int_{x_0}^{x_1} l(x, t_0 - x)\, dx. \tag{19.3.5}$$

Из этого равенства следует, что

$$l(x, t_0 - x)\, dx = (\text{число лиц в возрасте между } x \text{ и } x + dx \text{ в момент времени } t_0). \tag{19.3.6}$$

Следовательно, функция плотности группы населения имеет две интерпретации. Первая следует из формул (19.3.2) и (19.3.3) и относится к числу лиц, достигших возраста x между моментами времени t и $t + dt$. Вторая следует из формул (19.3.5) и (19.3.6) и относится к числу лиц в возрасте между x и $x + dx$ в момент времени t_0. Эти две интерпретации соответствуют выделению слоев на диаграмме Лексиса для рассматриваемой группы; в первой интерпретации это слой между вертикальными прямыми, проходящими через точки t и $t + dt$, а во второй — слой между горизонтальными прямыми, проходящими через точки x и $x + dx$.

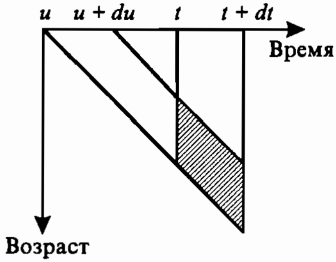
Для того чтобы ввести в нашу модель смертность, положим

$$\mu(x, u) = -\frac{1}{s(x, u)} \frac{\partial}{\partial x} s(x, u) = -\frac{1}{l(x, u)} \frac{\partial}{\partial x} l(x, u); \tag{19.3.7}$$

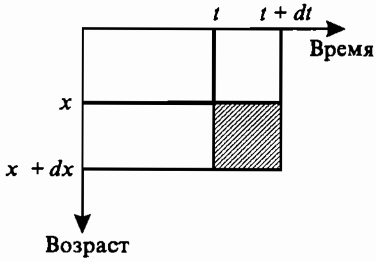
это *интенсивность смертности поколения* в возрасте x для лиц, родившихся в момент времени u. На рис. 19.3.3 даются три интерпретации этого определения. Они получаются с помощью указанных в пп. A, B и C линейных преобразований двумерной функции плотности населения, умноженной на интенсивность смертности поколения, если убедиться, что якобиан таких преобразований равен 1.

Общее число смертей в какой-либо области на плоскости «возраст–время» диаграммы Лексиса получается интегрированием одного из выражений из пп. A, B или C на рис. 19.3.3 по данной области, что требует вычисления двойного интеграла.

A. $l(t-u,u)\mu(t-u,u)\,du\,dt =$ (число смертей между моментами времени t и $t+dt$ среди лиц, родившихся между моментами времени u и $u+du$).



B. Сделаем замену переменных $u = t-x$ и получим $l(x,t-x)\mu(x,t-x)\,dt\,dx =$ (число смертей лиц в возрасте между x и $x+dx$ между моментами времени t и $t+dt$).



C. Сделаем замену переменных $x = t-u$ и получим $l(x,u)\mu(x,u)\,du =$ (число смертей лиц, родившихся между моментами времени u и $u+du$, в возрасте между x и $x+dx$).

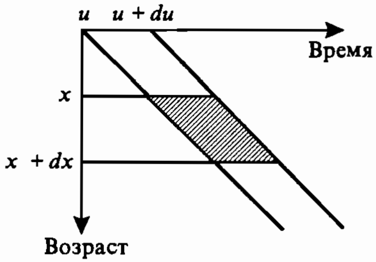


Рис. 19.3.3. Интерпретации функции плотности населения, умноженной на интенсивность смертности поколения

Существует другой метод, называемый *методом «вход–выход»*, который часто позволяет найти искомое число смертей легче. Этот метод состоит в определении числа лиц, вступивших в рассматриваемую область и покинувших ее. Разность между этими двумя числами равна числу смертей. В большинстве случаев метод «вход–выход» требует вычисления лишь двух обычных интегралов.

Пример 19.3.1. Сколько людей доживет до возраста x_0 между моментами времени t_0 и t_0+1 и умрет до наступления момента времени t_0+3?

Решение. Мы должны найти выражение для числа смертей в трапециевидной области, изображенной на рис. 19.3.4.

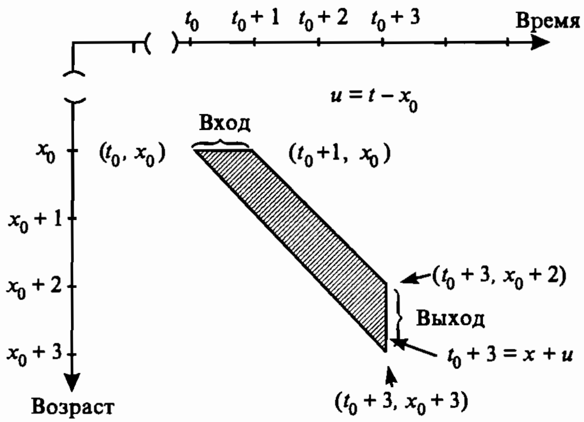


Рис. 19.3.4. Область, в которой подсчитывается число смертей для примера 19.3.1

Метод двойного интеграла: используя интерпретацию на рис. 19.3.3С, мы получим для числа смертей выражение

$$\int_{t_0-x_0}^{t_0+1-x_0}\int_{x_0}^{t_0+3-u} l(x,u)\mu(x,u)\,dx\,du.$$

Используя формулу (19.3.7), получим для числа смертей выражение

$$\int_{t_0-x_0}^{t_0+1-x_0}\int_{x_0}^{t_0+3-u}\left[-\frac{\partial l(x,u)}{\partial x}\right]dx\,du=\int_{t_0-x_0}^{t_0+1-x_0}[l(x_0,u)-l(t_0+3-u,u)]\,du$$
$$=\int_{t_0-x_0}^{t_0+1-x_0} l(x_0,u)\,du-\int_{t_0-x_0}^{t_0+1-x_0} l(t_0+3-u,u)\,du.$$

Положив в первом интеграле $y=u+x_0$, а во втором $w=t_0+3-u$, придем к следующей формуле для числа смертей:

$$\int_{t_0}^{t_0+1} l(x_0,y-x_0)\,dy-\int_{x_0+2}^{x_0+3} l(w,t_0+3-w)\,dw.$$

Метод «вход–выход»: для того чтобы получить искомое число смертей, найдем разность между числом вступивших, т. е. тех, которые достигли возраста x_0 между моментами времени t_0 и t_0+1, и числом выбывших, т. е. тех, которые дожили до возрастов между x_0+2 и x_0+3 в момент времени t_0+3. Используя формулы (19.3.3) и (19.3.5), получаем

$$\int_{t_0}^{t_0+1} l(x_0,y-x_0)\,dy-\int_{x_0+2}^{x_0+3} l(w,t_0+3-w)\,dw,$$

что совпадает с результатом, полученным с помощью двойного интеграла. ▼

Пример 19.3.2. Определим число лиц, находящихся в возрасте между 20 и 40 годами в момент времени t_0, которые умрут до достижения возраста 70 лет.

Решение. Необходимо найти выражение для числа смертей в трапециевидной области, изображенной на рис. 19.3.5.

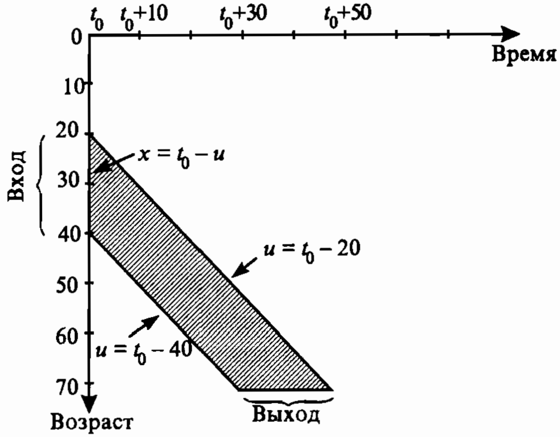


Рис. 19.3.5. Область, в которой подсчитывается число смертей в примере 19.3.2

Метод двойного интеграла: используя интерпретацию на рис. 19.3.3C, вычислим искомое число смертей по формуле

$$\begin{aligned}\int_{t_0-40}^{t_0-20}\int_{t_0-u}^{70} l(x,u)\mu(x,u)\,dx\,du &= \int_{t_0-40}^{t_0-20}\int_{t_0-u}^{70}\left[-\frac{\partial l(x,u)}{\partial x}\right]dx\,du\\ &= \int_{t_0-40}^{t_0-20}[l(t_0-u,u)-l(70,u)]\,du\\ &= \int_{t_0-40}^{t_0-20} l(t_0-u,u)\,du - \int_{t_0-40}^{t_0-20} l(70,u)\,du.\end{aligned}$$

Положим $y = t_0 - u$ в первом интеграле и $w = u + 70$ во втором; тогда искомое число смертей выражается формулой

$$\int_{20}^{40} l(y, t_0 - y)\,dy - \int_{t_0+30}^{t_0+50} l(70, w-70)\,dw.$$

Метод «вход–выход»: используем формулу (19.3.5) для вступающих и (19.3.3) для выбывающих и получим

$$\int_{20}^{40} l(x, t_0 - x)\,dx - \int_{t_0+30}^{t_0+50} l(70, t-70)\,dt,$$

что совпадает с результатом, полученным с помощью двойного интеграла. ▼

19.4. Понятия стационарного и стабильного населений

Здесь мы изучим два важных частных случая модели, описанной в разд. 19.3. Если $l(x,u)$ не зависит от u, мы будем говорить о *стационарном населении* (*стационарной группе населения*). Для такого стационарного населения формула (19.3.1) принимает вид

$$l(x,u) = b\,s(x), \tag{19.4.1}$$

где b — постоянная функция плотности рождений, а $s(x)$ — функция дожития, которая не зависит от времени рождения. В демографических приложениях константа

b обычно обозначает число рождений в год, а переменная возраста измеряется в годах. В соответствии с формулой (3.3.1) перепишем равенство (19.4.1) в виде

$$l(x,u) = b\,s(x) = l_x, \tag{19.4.2}$$

где b играет роль корня l_0 таблицы смертности.

Для стационарного населения мы можем записать формулу (19.3.5) в виде

$$\int_{x_0}^{x_1} l_x\,dx = T_{x_0} - T_{x_1}.$$

Мы получаем число лиц в возрасте от x_0 до x_1 в этом стационарном населении в произвольный момент времени t, выраженное через функцию T_x, введенную формулой (3.5.16) в связи с анализом совокупности дожития. Кроме того, из интерпретации произведения $l_x\mu(x)$, приведенной на рис. 19.3.3В, следует, что

$$\int_{x_0}^{x_1} l_x\mu(x)\,dx = l_{x_0} - l_{x_1}$$

является плотностью смертей в возрастном интервале между x_0 и x_1 в произвольный момент времени t. В частности, плотность смертей в возрасте x_0 и старше равна плотности лиц, достигших возраста x_0 в момент времени t. Эта интерпретация содержится в формуле (19.3.2). Изложенные факты иллюстрируют уместность названия «стационарное население».

Если функция плотности населения имеет вид

$$l(x,u) = e^{Ru} b\,s(x) = e^{Ru} l_x, \tag{19.4.3}$$

где $b > 0$ и R — константы, а $s(x)$ — функция дожития, которая не зависит от времени рождения, то мы имеем дело со *стабильным населением* (*стабильной группой населения*). Функция плотности рождений в момент времени u для стабильного населения равна $e^{Ru}b = e^{Ru}l_0$. Если $R = 0$, то стабильное население является стационарным.

Используя формулу (19.3.5), убеждаемся, что численность населения в момент времени t, обозначаемая через $N(t)$, для стабильного населения задается формулой

$$N(t) = \int_0^\infty l(x, t-x)\,dx = e^{Rt}\int_0^\infty e^{-Rx} l_x\,dx. \tag{19.4.4}$$

Следовательно, если $R > 0$, то численность населения экспоненциально увеличивается, а если $R < 0$, то экспоненциально уменьшается.

Вновь используя формулу (19.3.5), получим, что доля лиц в возрасте между x_0 и x_1 во всем стабильном населении в момент времени t равна

$$\frac{\int_{x_0}^{x_1} l(x,t-x)\,dx}{\int_0^\infty l(x,t-x)\,dx} = \frac{\int_{x_0}^{x_1} e^{-Rx} l_x\,dx}{\int_0^\infty e^{-Rx} l_x\,dx}. \tag{19.4.5}$$

Эта величина не зависит от t. Таким образом, хотя размер стабильного населения может меняться во времени, его возрастная структура постоянна.

Для стабильного населения можно выразить число лиц в возрасте между x_0 и x_1, используя формулу (19.3.5), в виде

$$\int_{x_0}^{x_1} l(x,t-x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} e^{R(t-x)} l_x\,dx = e^{R(t-x_0)} l_{x_0} \bar{a}_{x_0:\overline{x_1-x_0}|} \quad \text{при } \delta = R. \tag{19.4.6}$$

В пределе при $x_1 \to \infty$ число лиц старше x_0 лет в момент времени t в стабильном населении можно записать в виде выражения $e^{R(t-x_0)} l_{x_0} \bar{a}_{x_0}$, рассчитанного при $\delta = R$.

Для стабильного населения интенсивность смертности, определенная равенством (19.3.7), записывается, с учетом формулы (19.4.3), так:

$$\mu(x,u) = -\frac{1}{l(x,u)} \frac{\partial}{\partial x} l(x,u) = \mu(x).$$

Мы можем выразить плотность смертей в момент времени t для стабильного населения в возрасте между x_0 и x_1 в виде

$$\int_{x_0}^{x_1} e^{R(t-x)} l_x \mu(x)\, dx = l_{x_0} e^{R(t-x_0)} \bar{A}^{\,1}_{x_0:\overline{x_1-x_0}|} \quad \text{при } \delta = R, \qquad (19.4.7)$$

а плотность смертей в момент времени t среди лиц старше x_0 лет равна $e^{R(t-x_0)} l_{x_0} \bar{A}_{x_0}$.

Эти факты о стабильном населении можно использовать, учитывая тождества из гл. 5, чтобы сформулировать следующее свойство стабильного населения:

$$\begin{pmatrix}\text{Скорость изменения чис-}\\ \text{ла лиц старше } x_0 \text{ лет в мо-}\\ \text{мент времени } t\end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix}\text{Плотность лиц, достиг-}\\ \text{ших возраста } x_0 \text{ в момент}\\ \text{времени } t\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{плотность смертей среди}\\ \text{лиц старше } x_0 \text{ лет в мо-}\\ \text{мент времени } t\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}\text{число лиц старше } x_0 \text{ лет}\\ \text{в момент времени } t\end{pmatrix}}$$

$$= \frac{e^{R(t-x_0)} l_{x_0} - R^{(t-x_0)} l_{x_0} \bar{A}_{x_0}}{e^{R(t-x_0)} l_{x_0} \bar{a}_{x_0}} = \frac{1 - \bar{A}_{x_0}}{\bar{a}_{x_0}} = R.$$

Последнее равенство вытекает из того, что расчет этих функций производился при интенсивности начисления процента R.

Пример 19.4.1. Для стационарного населения полная ожидаемая продолжительность жизни лица в возрасте 0 лет, определенная по функции дожития, равна числу лиц в этой группе населения в любой момент времени t, деленному на плотность рождений:

$$\mathring{e}_0 = \int_0^\infty s(x)\, dx = \int_0^\infty \frac{l_x}{l_0}\, dx = \frac{T_0}{l_0}.$$

Что получится, если произвести аналогичные расчеты для стабильного населения?

Решение.

$$\frac{N(t)}{e^{Rt} l_0} = \frac{\displaystyle\int_0^\infty l(x, t-x)\, dx}{e^{Rt} l_0} = \frac{\displaystyle\int_0^\infty e^{R(t-x)} l_x\, dx}{e^{Rt} l_0} = \bar{a}_0 \quad \text{при } \delta = R.$$

Если $R > 0$, то $\bar{a}_0 < \mathring{e}_0$. Если $R < 0$, то $\bar{a}_0 > \mathring{e}_0$. Если $R = 0$, то мы возвращаемся к стационарному населению. Этот пример показывает, что величины полной ожидаемой продолжительности жизни не могут быть получены непосредственно из наблюдений за характеристиками стабильного населения, за исключением случая $R = 0$. ▼

19.5. Актуарные приложения

Из-за изменений функции дожития или плотности рождений условия стабильности или стационарности населения реализуются редко. Тем не менее эти модели оказываются полезными при изучении различных схем финансирования в страховании жизни или в системах пенсионного обеспечения. Под схемой финансирования в страховании жизни мы понимаем финансовый план расходования и накопления средств, необходимых для обеспечения страховых выплат или выплат аннуитета.

В этом разделе и в гл. 20 мы отойдем от моделей, изучаемых в главах с 4 по 11 и в гл. 15 и 16. Построение этих моделей начиналось с анализа операций с одним договором. В данном разделе мы будем изучать агрегированные модели в страховании жизни. В гл. 20 будут рассматриваться аналогичные модели для пенсионных систем. Рассмотренные модели особенно уместны для систем социального и группового страхования, обеспечивающих выплаты на случай смерти или выхода на пенсию для больших групп населения.

Пример 19.5.1. Предположим, что имеется функция плотности населения $l(x,u) = b(u)s(x)$, где функция дожития $s(x)$ не зависит от u. Далее предположим, что среди этой группы населения каждое лицо старше a лет застраховано по договору бессрочного страхования на случай смерти с выплатой размера 1 и с ежегодными премиями, выплачиваемыми с возраста a, в непрерывной модели[1]. Премия, выплачиваемая каждым лицом, зависит от интенсивности начисления процента δ и от функции дожития $s(x)$. Покажем, что

$$\bar{P}(\bar{A}_a)\int_a^\infty l(x,t-x)\,dx + \delta\int_a^\infty l(x,t-x)\,{}_{x-a}\bar{V}(\bar{A}_a)\,dx$$
$$= \int_a^\infty l(x,t-x)\mu(x)\,dx + \frac{d}{dt}\int_a^\infty l(x,t-x)\,{}_{x-a}\bar{V}(\bar{A}_a)\,dx. \qquad (19.5.1)$$

Решение. *Решение на основе общих соображений.* Словесная интерпретация формулы (19.5.1):

(интенсивность поступления премий в момент времени t)
+ (интенсивность поступления инвестиционного дохода в момент времени t)
= (интенсивность страховых выплат в момент времени t)
+ (интенсивность изменения совокупного резерва в момент времени t).

Таким образом, формулу (19.5.1) можно интерпретировать как уравнение, описывающее баланс поступлений в схеме страхования жизни, в которую входят лица не моложе a лет. Левая часть формулы (19.5.1) отражает источники поступлений, премии и проценты, а правая часть — их расходование на выплаты на случай смерти и изменение совокупного резервного фонда.

Аналитическое решение. Начнем с формулы (8.6.4), которая для данного случая принимает вид

$$\frac{d}{dx}\,{}_{x-a}\bar{V}(\bar{A}_a) - \mu(x)\,{}_{x-a}\bar{V}(\bar{A}_a) + \mu(x) = \bar{P}(\bar{A}_a) + \delta\,{}_{x-a}\bar{V}(\bar{A}_a). \qquad (19.5.2)$$

---

[1] См. подстрочное примечание в разд. 6.2. — *Прим. ред.*

Домножим эту формулу на $l(x,t-x)$ и проинтегрируем от a до верхней границы возраста живущих. Эти операции дают

$$\int_a^\infty l(x,t-x)\,d[{}_{x-a}\bar{V}(\bar{A}_a)] - \int_a^\infty l(x,t-x)\mu(x)\,{}_{x-a}\bar{V}(\bar{A}_a)\,dx + \int_a^\infty l(x,t-x)\mu(x)\,dx$$
$$= \bar{P}(\bar{A}_x)\int_a^\infty l(x,t-x)\,dx - \delta\int_a^\infty l(x,t-x)\,{}_{x-a}\bar{V}(\bar{A}_a)\,dx. \quad (19.5.3)$$

Первый интеграл в левой части формулы (19.5.3) вычисляется интегрированием по частям. Получим

$$l(x,t-x)\,{}_{x-a}\bar{V}(\bar{A}_a)\Big|_s^\infty + \int_a^\infty [b'(t-x)s(x) + l(x,t-x)\mu(x)]\,{}_{x-a}\bar{V}(\bar{A}_a)\,dx. \quad (19.5.4)$$

Завершая интегрирование по частям, важно вспомнить, что

$$\frac{d}{dx}\,l(x,t-x) = \frac{d}{dx}\,b(t-x)s(x) = -b'(t-x)s(x) - b(t-x)s(x)\mu(x).$$

Подставляя (19.5.4) в (19.5.3) и приводя подобные члены, получим формулу (19.5.1). ▼

Пример 19.5.2. Предположим, что финансирование страхования населения на случай смерти, описанное в примере 19.5.1, происходит на основе схемы с нулевыми резервами, а не схемы бессрочного страхования жизни; иными словами, годовой взнос на одного человека в момент времени t, обозначаемый через π_t, равен величине выплат на одно лицо в момент времени t. Определим π_t.

Решение. Размер взноса можно вычислить из соотношения

$$\pi_t\int_a^\infty l(x,t-x)\,dx = \int_a^\infty l(x,t-x)\,\mu(x)\,dx,$$

или

$$\pi_t = \frac{\int_a^\infty l(x,t-x)\mu(x)\,dx}{\int_a^\infty l(x,t-x)\,dx}. \quad (19.5.5)$$

▼

Пример 19.5.3. Предположим, что население стабильно, и вновь рассмотрим (a) пример 19.5.1, (b) пример 19.5.2.

Решение. (a) Начнем с формулы (19.5.1), которая уже была выведена для более общей функции плотности населения $l(x,u) = b(u)s(x)$. Для этого примера $l(x,u) = e^{Ru}b\,s(x)$ и уравнение баланса расходов и поступлений имеет вид

$$\bar{P}(\bar{A}_x)\int_a^\infty e^{R(t-x)}l_x\,dx + \delta\int_a^\infty e^{R(t-x)}l_x\,{}_{x-a}\bar{V}(\bar{A}_a)\,dx$$
$$= \int_a^\infty e^{R(t-x)}l_x\,\mu(x)\,dx + R\int_a^\infty e^{R(t-x)}l_x\,{}_{x-a}\bar{V}(\bar{A}_a)\,dx. \quad (19.5.6)$$

Все члены формулы (19.5.6) можно сократить на e^{Rt}. Согласно интерпретации формулы (19.5.6), полученной при решении примера 19.5.1 на основе общих соображений, отношение поступлений за счет премий к расходам за счет выплат составит

$$\frac{\bar{P}(\bar{A}_a)\int_a^\infty e^{-Rx}l_x\,dx}{\int_a^\infty e^{-Rx}l_x\mu(x)\,dx} = \frac{\bar{P}(\bar{A}_a)}{\bar{P}'(\bar{A}'_a)}. \quad (19.5.7)$$

Здесь величина $\bar{P}'(\bar{A}'_a)$ рассчитана при интенсивности начисления процента R.

Если $R = 0$, т.е. если население стационарно, то уравнение баланса расходов и поступлений (19.5.6) можно переписать в виде

$$\bar{P}(\bar{A}_a)T_a + \delta \int_a^\infty l_{x\ x-a}\bar{V}(\bar{A}_a)\,dx = l_a, \tag{19.5.8}$$

а отношение поступлений за счет премий к расходам за счет выплат (19.5.7) сводится к величине $\bar{P}(\bar{A}_a)\mathring{e}_a$.

(b) В случае стабильного населения ежегодный взнос, определенный формулой (19.5.5), переписывается в виде

$$\pi_t = \frac{\int_a^\infty e^{-Rx} l_x\,\mu(x)\,dx}{\int_a^\infty e^{-Rx} l_x\,dx} = \bar{P}'(\bar{A}'_a), \tag{19.5.9}$$

где правая часть не зависит от t. Если $R = 0$, т.е. население стационарно, то $\pi_t = 1/\mathring{e}_a$. ▼

Замечание. Один аспект примера 19.5.3 нуждается в специальном пояснении. Необходимые премии для каждого лица из стабильного населения в возрасте не моложе a лет при бессрочном страховании жизни и при финансировании с нулевыми резервами составляют соответственно $\bar{P}(\bar{A}_a)$ и $\bar{P}'(\bar{A}'_a)$. В упр. 19.21 показывается, что если интенсивность смертности является возрастающей функцией, то

$$\begin{aligned} \bar{P}(\bar{A}_a) &> \bar{P}'(\bar{A}'_a) \quad \text{при } \delta < R, \\ \bar{P}(\bar{A}_a) &= \bar{P}'(\bar{A}'_a) \quad \text{при } \delta = R, \\ \bar{P}(\bar{A}_a) &< \bar{P}'(\bar{A}'_a) \quad \text{при } \delta > R. \end{aligned}$$

Таким образом, если фактор начисления процента меньше фактора скорости роста населения, то премии при методе финансирования с нулевыми резервами меньше, чем премии при методе финансирования в схеме бессрочного страхования жизни. Если фактор начисления процента больше, чем фактор скорости роста населения, то метод финансирования по бессрочному страхованию жизни дает меньшие премии, чем метод финансирования с нулевыми резервами.

Пример 19.5.4. Дадим общую интерпретацию уравнения баланса расходов и поступлений (19.5.8) для стационарного населения, которое имеет вид

$$\int_a^\infty l_{x\ x-a}\bar{V}(\bar{A}_a)\,dx = \frac{l_a - \bar{P}(\bar{A}_a)T_a}{\delta}.$$

Решение. Вид этой формулы показывает, что суммарный резерв можно интерпретировать как разность между настоящими стоимостями двух бессрочных аннуитетов:

$$\begin{aligned} \frac{l_a}{\delta} &= (\text{настоящая стоимость выплат на случай смерти в форме непрерывно выплачиваемого бессрочного аннуитета с годовой выплатой } l_a) \\ &= (\text{настоящая стоимость выплат на случай смерти лиц, составляющих население в настоящее время}) + (\text{настоящая стоимость выплат на случай смерти будущих членов}), \end{aligned}$$

$$\frac{\bar{P}(\bar{A}_a)T_a}{\delta}$$ = (настоящая стоимость премий в форме непрерывно выплачиваемого бессрочного аннуитета с годовой выплатой $\bar{P}(\bar{A}_a)T_a$)

= (настоящая стоимость премий, выплачиваемых лицами, составляющими население в настоящее время) + (настоящая стоимость премий, выплачиваемых будущими членами).

Ситуация станет яснее, если учесть следующее: ежегодные премии размера $\bar{P}(\bar{A}_a)$ будут выплачиваться будущими членами, начиная с возраста a лет. Настоящая стоимость этих премий будет равна настоящей стоимости соответствующих выплат. Следовательно, вторые компоненты в интерпретации величин l_a/δ и $\bar{P}(\bar{A}_a)T_a/\delta$ при вычитании взаимно уничтожатся и

$$\frac{l_a}{\delta} - \frac{\bar{P}(\bar{A}_a)T_a}{\delta}$$ = (суммарный резерв для лиц, составляющих население в настоящее время)

= (настоящая стоимость выплат лицам, составляющим население в настоящее время) – (настоящая стоимость премий, выплачиваемых лицами, составляющими население в настоящее время)

$$= \int_a^\infty l_x \; {}_{x-a}\bar{V}(\bar{A}_a)\,dx.$$ ▼

В примерах 19.5.1, 19.5.3 и 19.5.4 рассматривают методы финансирования страхования жизни, когда имеется страховой фонд. В этих примерах рассматривались характеристики таких фондов в ситуации, когда все лица старше a лет из состава населения являются участниками схемы, причем входят в нее в a лет. Когда все имеющие право войти в нее лица участвуют в страховой схеме, причем с момента достижения ими возраста a лет, мы будем говорить, что система достигла *конечного состояния*. До этого момента суммарный фонд изменяется, увеличиваясь за счет притока вновь вступивших членов. В наших примерах для достижения фондом конечного состояния потребуется $\omega - a$ лет.

19.6. Динамика изменения населения

В этом разделе мы возвратимся к рассмотрению функции $b(t)$, плотности рождений в момент времени t. Мы хотим подвести базу под непрерывную демографическую модель разд. 19.3. Кроме того, мы исследуем условия, которые приводят к стабильному или стационарному населению, о чем шла речь в разд. 19.4.

Для разработки математической модели плотности рождений введем *функцию интенсивности рождений девочек*, которую обозначим через $\beta(x,u)$. Тогда $\beta(x,t-x)\,dt$ представляет число детей женского пола, рожденных между моментами времени t и $t+dt$ одной из женщин возраста x лет, которая родилась в момент времени $t-x$. Функция интенсивности рождений является мгновенным коэффициентом фертильности, зависящим от возраста и поколения, для детей женского пола.

Общее число детей женского пола, рожденных между моментами времени t и $t+dt$ — это

$$b_f(t)\,dt = \left[\int_0^\infty l_f(x,t-x)\beta(x,t-x)\,dx\right]dt. \tag{19.6.1}$$

Нижний индекс f в формуле (19.6.1) показывает, что функция относится к лицам женского пола. Общее число рождений получается путем умножения на константу вида (общее число рождений)/(число рождений лиц женского пола), которая для большинства групп населения немного превышает 2.

Если мы разделим равенство (19.6.1) на dt и подставим в него выражение для $l_f(x, t-x)$ из формулы (19.3.1), то увидим, что функция плотности рождений лиц женского пола удовлетворяет интегральному уравнению

$$b_f(t) = \int_0^\infty b_f(t-x) s_f(x, t-x) \beta(x, t-x)\, dx. \tag{19.6.2}$$

Интегральное уравнение — это утверждение о некотором соотношении между функциями, в котором участвует интеграл. Задача состоит в нахождении функции $b_f(t)$ при заданных функциях $s_f(x, t-x)$ и $\beta(x, t-x)$. Функция $s_f(x, t-x)\beta(x, t-x)$ называется *функцией интенсивности воспроизводства женского населения* и ниже, в формуле (19.6.3), обозначается через $\phi(x, t-x)$.

Далее в этом разделе будет предполагаться, что эта функция не зависит от года рождения матери. Иными словами, $s_f(x, t-x)\beta(x, t-x) = \phi(x)$. При этом предположении интегральное уравнение (19.6.2) сводится к виду

$$b_f(t) = \int_0^\infty b_f(t-x) \phi(x)\, dx. \tag{19.6.3}$$

В этом разделе мы ограничимся проверкой того, что

$$b_f(t) = b\, e^{Rt} \tag{19.6.4}$$

является частным решением этого уравнения. Здесь b — положительная константа, а R — единственное вещественное решение уравнения

$$H(r) = 1, \tag{19.6.5}$$

где

$$H(r) = \int_0^\infty e^{-rx} \phi(x)\, dx.$$

Прямая подстановка выражения из (19.6.4) в формулу (19.6.3) дает

$$b\, e^{Rt} = \int_0^\infty b\, e^{R(t-x)} \phi(x)\, dx,$$

и, разделив обе части уравнения на одну и ту же константу, получим

$$1 = \int_0^\infty e^{-Rx} \phi(x)\, dx = H(R).$$

Покажем, как проверить утверждение о том, что уравнение $H(r) = 1$ имеет единственное вещественное решение. Можно заметить, что

1. $H'(r) = -\int_0^\infty x e^{-rx} \phi(x)\, dx < 0$;
2. $H(0) = \int_0^\infty \phi(x)\, dx > 0$;
3. $\lim_{r \to \infty} H(r) = 0$;
4. $\lim_{r \to -\infty} H(r) = \infty$.

Эти замечания, а также тот факт, что $H''(r) = \int_0^\infty x^2 e^{-rx}\phi(x)\,dx > 0$, отражены на рис. 19.6.1.

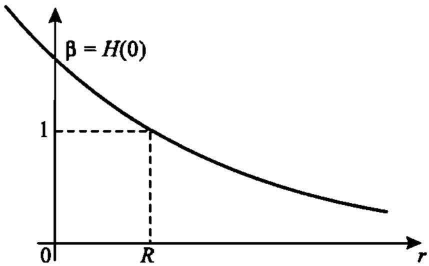


Рис. 19.6.1. Типичная функция $H(r)$ и формула (19.6.5)

Из рис. 19.6.1 видно, что существует единственное вещественное решение R (на рисунке оно изображено положительным, но может оказаться и отрицательным), чем и завершается проверка.

Если $b_f(t) = b\,e^{Rt}$, то $l_f(x, t-x) = b\,e^{R(t-x)}s_f(x)$ и группа населения, состоящая из всех женщин, является стабильной группой населения. В частном случае $R = 0$ она стационарна.

Для того чтобы выяснить, является ли решение R положительным, равным нулю или отрицательным, рассмотрим число

$$\beta = H(0) = \int_0^\infty \phi(x)\,dx.$$

Рисунок 19.6.1 позволяет сделать следующие выводы:

- если $\beta > 1$, то число R положительно и рассматриваемая группа населения является стабильной и возрастающей;
- если $\beta = 0$, то $R = 0$ и рассматриваемая группа населения является стационарной;
- если $\beta < 1$, то число R отрицательно и рассматриваемая группа населения является стабильной и убывающей.

Поскольку $H(0) = \beta$ можно интерпретировать как число детей женского пола, рожденных одной женщиной, эта величина называется ***нетто-коэффициентом воспроизводства женского населения***. Параметр R называется ***внутренним темпом роста населения***.

Замечание. Ни одно население на самом деле не является стабильным, хотя на основании материала этого раздела могло бы сложиться противоположное мнение. Ряд предположений, принятых в наших моделях, не соответствуют реальной практике. Наша основная модель, заданная уравнением (19.6.2), строится в предположении, что функция дожития и функция интенсивности рождений не меняются во времени. Переходя к формуле (19.6.3), мы ввели еще одно ограничение, предположив, что функция интенсивности воспроизводства женского населения зависит от возраста, но не от года рождения матери. Демографическая статистика, однако, демонстрирует, что функция дожития и функция интенсивности рождений существенно непостоянны по времени.

Кроме того, при решении интегрального уравнения (19.6.3) мы получили лишь вещественное решение уравнения $H(r) = 1$. Но в дополнение к этому единственному вещественному решению можно найти бесконечное число комплексных решений этого уравнения. Эти дополнительные решения дают общее решение уравнения (19.6.3) вида $\sum_j c_j b_f^{(j)}(t)$, где каждая функция $b_f^{(j)}(t)$ связана с некоторым решением уравнения $H(r) = 1$. Из-за этих комплексных решений, которые распадаются на сопряженные пары, в функции плотности рождений может возникать затухающая волновая структура.

Математическая демография — это набор красивых математических утверждений. Однако остается и много очень важных статистических проблем оценивания таких ключевых составляющих, как функция дожития и функция интенсивности рождений. На практике наблюдается изменение этих функций во времени, отражающее динамичную природу человеческого общества.

Как и во всех моделях природных явлений, математические модели демографических процессов охватывают лишь малую часть движущих сил, которые формируют распределение реальных групп населения по размеру и возрасту. Если даже в некоторый момент времени модель стабильного населения и служит удовлетворительным приближением, она не может быть таковой в течение длительного периода времени. Константа R не может быть больше нуля в течение длительного периода времени ни на какой планете с конечным населением. Точно так же, если величина R отрицательна в течение очень длительного периода времени, то стабильное население обречено на вымирание.

19.7. Замечания и литература

Основы математической демографии закладывались, в частности, Лоткой, который решил ряд вопросов в области страхования жизни. Основная теория изложена в книге Кейфица [Keyfitz 1968], а приложения — в другой его книге [Keyfitz 1977]. Кейфиц и Бикман [Keyfitz, Beekman 1984] написали учебник, который должен помочь студентам овладеть основами демографии с помощью набора расположенных по степени трудности упражнений. Диаграммы Лексиса называются так в честь их изобретателя Вильгельма Лексиса (1837–1914), немецкого статистика, демографа и экономиста. Чарльз Троубридж [Trowbridge C. L. 1952, 1955] содействовал использованию моделей стационарного населения в изучении характеристик методов финансирования пенсионных схем и систем страхования жизни.

Упражнения

К разделу 19.2

19.1. Используя диаграмму Лексиса на рис. 19.2.1, подсчитайте

(a) средний возраст работников на момент времени -25,

(b) общее число работников, которые достигли возраста 50 лет,

(c) общее число работников, которые достигли или достигнут возраста 50 лет, из числа тех, кто уже работал на момент времени -25.

К разделу 19.3

19.2. Пусть

$$b(u) = 100[1 + \cos(\pi u/200)], \qquad -\infty < u < \infty,$$
$$s(x, u) = \cos(\pi x/200), \qquad 0 < x \leqslant 100.$$

Найдите число лиц, которые достигнут возраста 50 лет между моментами времени 50 и 100.

19.3. Пусть

$$b(u) = 100(1 - e^{-u/100}), \qquad u > 0,$$
$$s(x) = e^{-x/100}, \qquad x > 0.$$

Найдите число лиц в возрасте между 25 и 50 годами в момент времени 100.

19.4. Подсчитайте число тех лиц, которые достигнут возраста 25 лет между моментами времени 50 и 51 и умрут до наступления момента времени 53. Используйте функции $b(u)$ и $s(x, u)$ из упр. 19.3. (Это — числовая версия примера 19.3.1).

19.5. Заново разберите пример 19.3.2, если $s(x, u) = s(x)$ и $b(u) = l_0$.

19.6. Выразите интеграл для определения числа лиц в возрасте между 20 и 50 годами в момент времени 0, которые умрут до достижения возраста 80 лет, причем до наступления момента времени 50.

К разделу 19.4

19.7. (a) Пусть $N(t)$ обозначает число лиц из стабильной группы населения в момент времени t. Покажите, что $dN(t)/dt = RN(t)$.

(b) Коэффициент рождаемости в момент времени t определяется как $i(t) = b(t)/N(t)$. Покажите, что для стабильного населения

$$i(t) = \left[\int_0^\infty e^{-Rx} s(x)\, dx\right]^{-1}.$$

19.8. Пусть $\mu(x) = ax$, $a > 0$ и $b(u) = be^{Ru}$. Выразите размер всей группы в момент времени t через $\Phi(z)$, функцию стандартного нормального распределения $N(0, 1)$.

19.9. Предположим, что население стабильно. Найдите выражение для среднего возраста лиц, которым в момент времени t от a до r лет. Перепишите это выражение для случая $R = 0$.

19.10. Пусть $\widetilde{\mu}(x) = \mu(x) + 0{,}05/\mathring{e}_x$. Покажите, что $\tilde{p}_x = p_x(T_{x+1}/T_x)^{0,05}$.

19.11. Подтвердите тот факт, что $s^*(x) = e^{-Rx}s(x)$, $R \geqslant 0$, является функцией дожития. Далее,

(a) выразите функцию распределения и функцию плотности, соответствующие этой функции дожития $s^*(x)$,

(b) покажите, что полная ожидаемая продолжительность жизни лица возраста x_0 лет с функцией дожития $s^*(x)$ есть $\bar{a}_{x_0}$ и что дисперсия продолжительности предстоящей жизни равна $2(\bar{I}\bar{a})_{x_0} - \bar{a}_{x_0}^2$. Актуарные функции аннуитета рассчитываются здесь при интенсивности начисления процента R.

19.12. Общий коэффициент смертности в момент времени t определяется формулой

$$\int_0^\infty l(x, t-x)\mu(x, t-x)\, dx \bigg/ \int_0^\infty l(x, t-x)\, dx.$$

Покажите, что если население стабильно, то общий коэффициент смертности равен $i(t) - R$, где $i(t)$ — коэффициент рождаемости, определенный в упр. 19.7(b).

К разделу 19.5

19.13. Рассмотрим стационарное население с функцией дожития $s(x)$ и предположим, что та же функция дожития используется при вычислении актуарных функций. Проверьте и дайте словесную интерпретацию следующих тождеств:

$$l_r\, \bar{a}_r + \delta \int_r^\infty l_x\, \bar{a}_x\, dx = T_r\,.$$

19.14. Рассмотрим стабильную группу населения с функцией дожития $s(x)$ и предположим, что эта же функция используется при вычислении актуарных функций. Проверьте и дайте интерпретацию следующих тождеств:

$$\text{(a)}\quad l(a,t-a)\bar{a}_{a:\overline{r-a}|}+\delta\int_a^r l(x,t-x)\bar{a}_{x:\overline{r-x}|}\,dx$$
$$=\int_a^r l(x,t-x)\,dx+R\int_a^r l(x,t-x)\bar{a}_{x:\overline{r-x}|}\,dx.$$

[указание: вычислите производную функции $l(x,t-x)\bar{a}_{x:\overline{r-x}|}$, используя формулу (5.2.27)],

$$\text{(b)}\quad l(a,t-a)\bar{A}_a+\delta\int_a^\infty l(x,t-x)\bar{A}_x\,dx$$
$$=\int_a^\infty l(x,t-x)\,\mu(x)\,dx+R\int_a^\infty l(x,t-x)\bar{A}_x\,dx.$$

19.15. Вычислите годовой взнос π_t для системы страхования населения на случай смерти из примера 19.5.2, если $b(u)=100\,e^{0,01u}$, возраст a равен 0 и $s(x)=e^{-x/50}$.

19.16. Отношение числа лиц пенсионного возраста к числу лиц трудоспособного возраста в группе населения на момент времени t выражается формулой

$$f(t)=\int_{65}^\infty l(x,t-x)\,dx\bigg/\int_{20}^{65} l(x,t-x)\,dx.$$

Покажите, что для стабильной группы населения

$$\frac{\partial}{\partial R}\ln f(t)=\bar{x}_1-\bar{x}_2,$$

где $\bar{x}_1$ — средний возраст лиц, которые в момент времени t старше 20 лет, но младше 65 лет, а $\bar{x}_2$ — средний возраст лиц, которые в момент времени t старше 65 лет.

К разделу 19.6

19.17. Для функции интенсивности воспроизводства женского населения

$$\phi(x)=x^{\alpha-1}e^{-\beta x},\qquad \alpha>0,\ \beta>0,$$

(a) вычислите R,

(b) определите, будет ли население стабильным или стационарным, если $\alpha=2$ и $\beta=1$.

Ко всем темам главы

19.18. Предположим, что численность населения в момент времени t удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dN(t)}{dt}=\frac{c}{a}\{N(t)[a-N(t)]\},\qquad a>0.$$

Заметим, что при $N(t)$, стремящемся к a, скорость изменения численности населения стремится к нулю. Такая модель учитывает ограничения на рост населения, связанные с окружающей средой.

(a) Проверьте, что функция $N(T)=a(1+b\,e^{-ct})^{-1}$, $b>0$, удовлетворяет этому дифференциальному уравнению. Такая функция называется *логистической*.

(b) Вычислите $\lim\limits_{t\to\infty}N(t)$ и постройте график функции $N(t)$ при $c>0$.

(c) Вычислите величину абсциссы точки перегиба функции $N(t)$.

19.19. Покажите, что если интенсивность смертности строго возрастает, то

(a) $s(x)s(y)\geqslant s(x+y)$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, (b) $s(x)\int_0^\infty s(y)\,dy\geqslant\int_0^\infty s(x+y)\,dy$,

(c) $s(x)\int_0^\infty s(y)\,dy\geqslant\int_x^\infty s(w)\,dw$, (d) $\int_0^\infty s(y)\,dy\geqslant\int_x^\infty\frac{s(w)}{s(x)}\,dw$, (e) $\mathring{e}_0\geqslant\mathring{e}_x$.

19.20. Домножьте обе части неравенств из упр. 19.19 на v^y и покажите, что $\bar{a}_0\geqslant\bar{a}_x$.

19.21. (a) Покажите, что $\bar{P}(\bar{A}_x)$ можно представить в виде среднего взвешенного интенсивностей смертности $\mu_x(t)$ с весовой функцией $w(t,\delta)=v^t\,{}_tp_x/\bar{a}_x$.

(b) Проверьте, что

(i) $\displaystyle\int_0^\infty w(t,\delta)\,dt = 1$, (ii) $\dfrac{\partial}{\partial t}\,w(t,\delta) \leqslant 0$, (iii) $\dfrac{\partial}{\partial \delta}\,w(t,\delta) = \dfrac{v^t\,{}_tp_x[-t\bar{a}_x + (\bar{I}\bar{a})_x]}{(\bar{a}_x)^2}$.

(c) Проверьте, что

(i) $\dfrac{\partial}{\partial \delta}\,w(0,\delta) > 0$, (ii) $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\partial}{\partial \delta}\,w(t,\delta) = -\infty$,

(iii) единственным положительным решением уравнения $\dfrac{\partial}{\partial \delta}\,w(t,\delta) = 0$ при фиксированном δ является $(\bar{I}\bar{a})_x/\bar{a}_x$.

(d) Пусть интенсивность смертности строго возрастает. Покажите, используя результаты пп. (b)(ii) и (b)(iii), что при увеличении интенсивности начисления процента веса для малых значений интенсивности смертности увеличиваются, а для больших уменьшаются. Таким образом, если интенсивность смертности — строго возрастающая функция, то увеличение интенсивности начисления процента приводит к уменьшению значения $\bar{P}(\bar{A}_x)$.

20

ТЕОРИЯ ФИНАНСИРОВАНИЯ ПЕНСИОННЫХ СХЕМ

20.1. Введение

В разд. 11.5 мы изучали актуарные настоящие стоимости пенсионных выплат и взносов для отдельного участника пенсионной схемы. Эти актуарные настоящие стоимости для отдельных участников схемы являются исходными элементами процесса определения суммарных, или агрегированных, актуарных настоящих стоимостей для пенсионной схемы в целом. Для того чтобы пенсионная схема обеспечивала финансовую защиту участников, эти суммарные стоимости будущих пенсионных выплат и текущие активы должны уравновешиваться суммарными настоящими стоимостями будущих взносов. Структура суммарных взносов, которые должны уравновешивать пенсионные выплаты, определяется выбранным методом *актуарных расходов* или *актуарного финансирования*[1]. В этой главе определены актуарные функции, которые используются при исследовании финансирования пенсионной схемы. Эти функции затем используются при определении методов актуарных расходов и при изучении свойств этих методов.

В этих целях мы применяем некоторые положения математической демографии из гл. 19. Рассуждения здесь проводятся так же, как они проводились в примерах 19.5.1, 19.5.2, 19.5.3 и 19.5.4 для различных методов финансирования или планирования расходов при анализе системы страхования жизни для некоторой группы лиц (населения).

Чтобы соединить идеи этой главы с развитыми ранее соображениями, читатель должен учитывать представленные ниже основные ограничения:

(1) Для того чтобы защитить интересы участников и ограничить величину дохода, налоги по которой взимаются в более поздние сроки (потому что эта величина внесена в пенсионный фонд в качестве взносов), методы актуарных расходов подвергаются регулированию со стороны государства. Такое регулирование важно на практике, но здесь обсуждаться не будет.

(2) Пенсионные схемы часто обеспечивают несколько типов выплат. Помимо выплат пенсии по старости распространены выплаты на случай смерти, выплаты в связи с потерей трудоспособности и выплаты при выходе из пенсионной схемы. В ряде случаев последний вид выплат является обязательным: такие выплаты называются *безусловными*. Определение актуарной настоящей стоимости для некоторых из этих выплат рассматривалось в гл. 11. Используемая в настоящей главе

[1] Первое из этих названий отражает точку зрения вкладчиков схемы, а второе — страховщика. — *Прим. ред.*

модель обеспечивает лишь выплаты пенсии по старости. Это упрощение принято для того, чтобы внимание фокусировалось на свойствах различных методов актуарных расходов. Хотя в большинстве пенсионных схем размер пенсии по старости зависит определенным образом от доходов в различные моменты, предшествующие выходу на пенсию, модель, используемая в этой главе, определяет начальную величину пенсионных выплат, лишь исходя из дохода в момент выхода на пенсию. И это упрощение также делается для того, чтобы сконцентрироваться на существе методов актуарных расходов.

(3) Следующая мысль проходит через всю книгу: для определения актуарных настоящих стоимостей необходимо знать коэффициенты дисконтирования и вероятности, относящиеся к будущим выплатам, обусловленным случайными событиями. В этой главе будущие выплаты могут зависеть от многих неопределенностей. Однако в соответствии с нашей основной целью — изучением методов актуарных расходов — мы придерживаемся детерминистической точки зрения.

(4) Взносы в пенсионную схему представляют собой расходы организаций-вкладчиков. Чтобы обеспечить сопоставимость финансового состояния различных вкладчиков пенсионных схем, в практике бухгалтерской отчетности ограничиваются вполне определенным набором методов актуарных расходов. Подобные ограничения здесь не обсуждаются.

20.2. Модель

Рассмотрим группу населения (пенсионную схему), состоящую из лиц, вступивших в нее в возрасте a лет и выходящих на пенсию в возрасте r лет, с функцией дожития $s(x)$, такой, что $s(a) = 1$. Для $a < x < r$ выбытие может произойти вследствие смерти или по другим причинам, но для $x > r$ смерть будет единственной причиной выбытия. Плотность новых лиц, вступивших в группу в возрасте a лет в момент времени u, задана функцией $n(u)$, а плотность лиц, вступивших в момент u и достигших возраста x лет в момент времени t, определяется функцией

$$n(u)s(x), \tag{20.2.1}$$

где $u = t - (x - a)$ является моментом вступления в пенсионную схему. Формула (20.2.1) соответствует формуле (19.3.1) за исключением того, что «рождения» происходят в возрасте a лет при вступлении в пенсионную схему. Мы предполагаем, что функция дожития не зависит от u.

Будем также предполагать, что ставка заработной платы для каждого лица возраста x лет в момент времени 0 равна $w(x)$, $a < x < r$. Функция $w(x)$ отражает ту составляющую в изменениях заработной платы, которая связана с индивидуальным опытом и заслугами. Ставка заработной платы также меняется в зависимости от коэффициента «года рассмотрения», который отражает инфляцию и изменения в производительности труда всех участников схемы. В этой главе коэффициент «года рассмотрения» полагается равным $e^{\tau t}$. Этот коэффициент не зависит от возраста отдельного лица. Таким образом, ожидаемая годовая ставка заработной платы лица возраста x лет в момент времени t задается формулой

$$w(x)e^{\tau t}, \qquad a < x < r. \tag{20.2.2}$$

Эту формулу следует сравнить с более простым выражением в формуле (11.5.1), где изменения заработной платы рассматриваются только как функции достигнутого возраста.

Сравнивая с формулой (19.3.5), мы увидим, что величина суммарной заработной платы, полученной $n(t-x+a)s(x)\,dx$ лицами в возрасте между x и $x+dx$, в момент времени t равна $n(t-x+a)s(x)w(x)e^{\tau t}\,dx$, а годовая суммарная заработная плата в момент времени t равна

$$W_t = \int_a^r n(t-x+a)s(x)w(x)e^{\tau t}\,dx. \tag{20.2.3}$$

В формуле (20.2.3) используется соглашение об обозначениях, принятое в этой главе. Символ с нижним индексом означает суммарную величину, относящуюся ко всем работающим участникам схемы. Таким образом, W_t — это ставка суммарной выплаченной заработной платы в момент времени t.

Модель пенсионной схемы, рассматриваемая в настоящей главе, обеспечивает пенсионный аннуитет, выплачиваемый лишь после достижения пенсионного возраста r. Начальная годовая ставка пенсионных выплат является долей f от последней ставки заработной платы перед выходом на пенсию. Таким образом, для участника схемы, выходящего на пенсию (т.е. достигающего возраста r) в момент времени t, прогнозируемая годовая ставка пенсионных выплат составит

$$fw(r)e^{\tau t}. \tag{20.2.4}$$

Для пенсионера возраста x в момент времени t прогнозируемая годовая ставка пенсионных выплат равна $fw(r)e^{\tau(t-x+r)}h(x)$, $x \geqslant r$, где $h(x)$ — поправочный коэффициент, применяемый к исходной ставке пенсионных выплат размера $fw(r)e^{\tau(t-x+r)}$ тем лицам, которые вышли на пенсию $x-r$ лет назад. Заметим, что $h(r) = 1$. Например, $h(x)$ может быть экспоненциальной функцией $e^{\beta(x-r)}$, где β — постоянный коэффициент прироста (возможно, связанный с ожидаемым темпом инфляции).

В центре нашего внимания при обсуждении методов актуарных расходов будет находиться *схема с установленными выплатами*. Размер пенсионных выплат, которые будут получать участники схемы, вышедшие на пенсию, в этой схеме фиксирован, и мы будем описывать методы актуарных расходов, которые обеспечат поток взносов и инвестиционный доход, уравновешивающие эти пенсионные выплаты. В *схемах с установленными взносами* выбрано иное исходное положение. Здесь фиксирован взнос, который производится от имени каждого участника схемы. Это либо постоянная величина, либо определенная часть его заработной платы. В этом случае задачей актуарного анализа будет найти тот размер пенсионных выплат, при котором их актуарная настоящая стоимость будет равна актуарной настоящей стоимости сделанных взносов. Его можно определить в момент выхода на пенсию, используя накопленные взносы для приобретения эквивалентного аннуитета пенсионных выплат, а можно каждый год покупать отсроченный аннуитет пенсионных выплат за счет взносов этого года.

20.3. Метод конечного финансирования

При *методе конечного финансирования* в течение всего периода трудоспособности не делается никаких взносов, обеспечивающих пенсию. Вместо этого в момент выхода на пенсию производится единовременный взнос. Искомый размер взноса, или *уровень нормальных расходов*, при методе конечного финансирования в момент времени t, обозначаемый через ${}^TP_t$, является величиной, исходя из которой рассчитывается актуарная настоящая стоимость будущих пенсий участников, достигающих возраста r на момент времени t. Чтобы определить величину ${}^TP_t$ для нашей модели пенсионной схемы, предположим, что годовая интенсивность начисления процента равна δ, и обозначим через $\bar{a}_r^h$ актуарную настоящую стоимость непрерывного страхового аннуитета, выплачиваемого лицу (r) с годовой нормой дохода $h(x)$, когда это лицо достигает возраста x лет. Следовательно,

$$\bar{a}_r^h = \int_r^\infty e^{-\delta(x-r)} h(x)\, \frac{s(x)}{s(r)}\, dx. \tag{20.3.1}$$

В силу формулы (19.3.2) мы имеем $n(t-r+a)s(r)\,dt$ участников, достигших возраста r между моментами времени t и $t+dt$, и, согласно формуле (20.2.4), они будут получать пенсии со средней начальной ставкой $fw(r)e^{\tau t}$. Значит,

$${}^TP_t = fw(r)e^{\tau t} n(t-r+a)s(r)\bar{a}_r^h. \tag{20.3.2}$$

Мы увидим, что ${}^TP_t$ — основной блок, применяемый при построении различных функций, используемых для описания операций финансирования в модельной схеме.

Для иллюстрации мы часто обращаемся к *экспоненциальному случаю* со следующими характеристиками:

- $n(u) = ne^{Ru}$. Поскольку мы предположили, что функция дожития не зависит от времени, из формулы (19.4.3) и из вида функции $n(u)$ следует, что размер группы населения изменяется экспоненциально с показателем R, причем распределение населения по возрастам не меняется;
- $h(x) = e^{\beta(r-x)}$, т. е. пенсии изменяются с постоянным коэффициентом прироста β.

Прежде чем приступить к исследованию экспоненциального случая, следует понять его ограничения. Ясно, что условия для экспоненциального роста или убывания не могут существовать бесконечно долго. Если имеется приближение к экспоненциальному случаю, то три ключевых экономических показателя, интенсивность начисления процента δ, заработная плата τ и коэффициент изменения пенсии β взаимосвязаны. Например, если коэффициент β связан с инфляцией, обычно предполагают, что $\delta > \beta$, даже если имели место периоды непредвиденной инфляции, когда выполнялось противоположное неравенство. Если бы выполнялось неравенство $\beta > \tau$, то экономическое положение пенсионера улучшалось бы по сравнению с работающим. Поэтому обычно предполагается, что $\beta \leqslant \tau$.

Пример 20.3.1. Покажем, что в экспоненциальном случае ${}^TP_{t+u} = e^{\rho u}\,{}^TP_t$, где $\rho = \tau + R$.

Решение. Согласно определению экспоненциального случая, $n(t+u-r+a) = ne^{R(t+u-r+a)}$, а из (20.3.1) следует, что

$$\bar{a}_r^h = \int_r^\infty e^{-(\delta-\beta)(x-r)} \frac{s(x)}{s(r)}\, dx = \bar{a}'_r,$$

где $\bar{a}'_r$ вычисляется с интенсивностью начисления процента $\delta - \beta$. Тогда, используя формулу (20.3.2), получаем

$$^TP_{t+u} = fw(r)e^{\tau(t+u)}ns(r)e^{R(t+u-r+a)}\bar{a}'_r = e^{(\tau+R)u}fw(r)e^{\tau t}ns(r)e^{R(t-r+a)}\bar{a}'_r = e^{\rho u}\,{}^TP_t\,.$$

Некоторые члены в этом соотношении можно интерпретировать независимо. Величину $\rho = \tau + R$ можно интерпретировать как фактор общего экономического роста или спада. Множитель $ns(r)$ можно интерпретировать как l_r, т.е. как число доживших до возраста r из n лиц из совокупности дожития, образованной лицами возраста a и описываемой функцией дожития $s(x)$, $a \leqslant x \leqslant r$, в модели выбытия по нескольким причинам. ▼

20.4. Основные актуарные функции для пенсионеров

В этом разделе будет рассмотрен ряд основных функций, определяющих основополагающие понятия финансирования пенсионных схем для групп пенсионеров. Такие обозначения, как $(\mathrm{r}A)$, подчеркивают, что речь идет о группе пенсионеров[1].

20.4.1. Актуарная настоящая стоимость будущей пенсии $(\mathrm{r}A)_t$

Напомним, что $n(t-x+a)s(x)$ участников схемы, возраст которых находится между x и $x+dx$ в момент времени t, вышли на пенсию $x-r$ лет назад и их исходная годовая ставка пенсионных выплат равна $fw(r)e^{\tau(t-x+r)}$. Актуарная настоящая стоимость каждой единицы исходной пенсии дожившего пенсионера равна

$$\bar{a}^h_x = \int_x^\infty e^{-\delta(y-x)}h(y)\frac{s(y)}{s(x)}\,dy, \tag{20.4.1}$$

где $s(y)$ — функция дожития в модели с выбытием по единственной причине (смерти). Следовательно, в силу формулы (20.3.2)

$$(\mathrm{r}A)_t = \int_x^\infty n(t-x+a)s(x)fw(r)e^{\tau(t-x+r)}\bar{a}^h_x\,dx. \tag{20.4.2}$$

Подставив сюда выражение для $\bar{a}^h_x$ из формулы (20.4.1), можно переписать $(\mathrm{r}A)_t$ в виде двойного интеграла:

$$(\mathrm{r}A)_t = \int_r^\infty n(t-x+a)fw(r)e^{\tau(t-x+r)}\left[\int_x^\infty e^{-\delta(y-x)}h(y)s(y)\,dy\right]dx. \tag{20.4.3}$$

20.4.2. Уровень пенсионных выплат B_t

Для участников схемы, уже получающих пенсию, вводится новая функция B_t, уровень пенсионных выплат в момент времени t. При выводе формулы (20.4.2) для актуарной настоящей стоимости будущих пенсионных выплат участникам, уже получающим пенсию, мы видели, что пенсии лицам в возрасте от x до $x+dx$ лет выплачивались с исходной величиной $n(t-x+a)s(x)fw(r)e^{r(t-x+r)}\,dx$. К возрасту x она корректируется введением поправочного множителя $h(x)$. Следовательно,

$$B_t = \int_r^\infty n(t-x+a)s(x)fw(r)e^{\tau(t-x+r)}h(x)\,dx. \tag{20.4.4}$$

[1] От английского «retired» — пенсионеры. — *Прим. ред.*

Во-первых, заметим, что для всех дифференцируемых функций g

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t-x+r) = -\frac{\partial}{\partial x} g(t-x+r).$$

Дифференцирование функции B_t приводит к равенствам

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} B_t &= \int_r^\infty fw(r)s(x)h(x)\,\frac{\partial}{\partial t}\left[n(t-x+a)e^{\tau(t-x+r)}\right]dx \\
&= -\int_r^\infty fw(r)s(x)h(x)\,\frac{\partial}{\partial x}\left[n(t-x+a)e^{\tau(t-x+r)}\right]dx \\
&= -fw(r)s(x)h(x)n(t-x+a)e^{\tau(t-x+r)}\Big|_{x=r}^{x=\infty} \\
&\quad + \int_r^\infty fw(r)n(t-x+a)e^{\tau(t-x+r)}[s'(x)h(x)+s(x)h'(x)]\,dx \\
&= \left[fw(r)n(t-r+a)s(r)e^{\tau t} - \int_r^\infty fw(r)n(t-x+a)s(x)\mu(x)e^{\tau(t-x+r)}h(x)\,dx\right] \\
&\quad + \int_r^\infty fw(r)n(t-x+a)s(x)e^{\tau(t-x+r)}h'(x)\,dx.
\end{aligned} \tag{20.4.5}$$

Слагаемые в скобках в правой части формулы (20.4.5) измеряют *эффект замены*. Первое слагаемое является фактором увеличения пенсионных выплат из-за начальных пенсий лиц, только что вышедших на пенсию. Второе слагаемое является фактором уменьшения пенсионных выплат из-за смертей в момент времени t. Слагаемое вне скобок называется *эффектом поправки*. Оно измеряет величину поправки к уровню пенсионных выплат в момент времени t.

20.4.3. Уравнение баланса

Теперь мы в состоянии сформулировать основную формулу для пенсионеров

$$^{T}P_t + \delta(\mathrm{r}A)_t = B_t + \frac{d}{dt}(\mathrm{r}A)_t. \tag{20.4.6}$$

Это уравнение можно обосновать с помощью теории сложных процентов, рассматривая $(\mathrm{r}A)_t$ как фонд, наполняемый взносами, рассчитанными по методу конечного финансирования, и инвестиционными доходами и расходуемый на выплату пенсий. Разность между общим уровнем доходов и уровнем расходов определяет скорость изменения размера фонда.

Проверку формулы (20.4.6) можно произвести дифференцированием выражения для $(\mathrm{r}A)_t$, заданного соотношением (20.4.3). Мы получаем

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\mathrm{r}A)_t &= \int_r^\infty fw(r)\,\frac{\partial}{\partial t}\left[n(t-x+a)e^{\tau(t-x+r)}\right]\left[\int_x^\infty e^{-\delta(y-x)}h(y)s(y)\,dy\right]dx \\
&= -fw(r)\int_r^\infty\left[\int_x^\infty e^{-\delta(y-x)}h(y)s(y)\,dy\right]\frac{\partial}{\partial x}\left[n(t-x+a)e^{\tau(t-x+r)}\right]dx
\end{aligned}$$

$$= -fw(r)\left\{n(t-x+a)e^{\tau(t-x+r)}\int_r^\infty e^{-\delta(y-x)}h(y)s(y)\,dy\Bigg|_{x=r}^{x=\infty}\right.$$
$$\left.-\int_r^\infty \left[\delta\int_x^\infty e^{-\delta(y-x)}h(y)s(y)\,dy - s(x)h(x)\right]n(t-x+a)e^{\tau(t-x+r)}\,dx\right\}$$
$$= {}^TP_t + \delta(\mathrm{r}A)_t - B_t,$$

где для того, чтобы выделить слагаемое B_t, используется формула (20.4.4).

Пример 20.4.1. Покажем, что для экспоненциального случая

(a) $B_{t+u} = e^{\rho u}B_t, \quad \rho = \tau + R;$ (20.4.7)

(b) $(\mathrm{r}A)_{t+u} = e^{\rho u}(\mathrm{r}A)_t;$ (20.4.8)

(c) ${}^TP_t + \theta(\mathrm{r}A)_t = B_t, \quad \theta = \delta - \rho;$ (20.4.9)

(d) ${}^TP_t < B_t,$ если $\theta > 0,$
${}^TP_t = B_t,$ если $\theta = 0,$ (20.4.10)
${}^TP_t > B_t,$ если $\theta < 0.$

Решение. (a) Из формулы (20.4.4) следует, что

$$B_{t+u} = \int_r^\infty ne^{R(t+u-x+a)}e^{\tau(t+u-x+r)}fw(r)s(x)e^{\beta(x-r)}\,dx$$
$$= e^{(R+\tau)u}\int_r^\infty ne^{R(t-x+a)}e^{\tau(t-x+r)}fw(r)s(x)e^{\beta(x-r)}\,dx = e^{\rho u}B_t.$$

(b) Из формулы (20.4.2), рассуждая, как в п. (a), получим искомый результат.

(c) Переписывая равенство (20.4.8) в виде $[(\mathrm{r}A)_{t+u} - (\mathrm{r}A)_t]/u = (e^{\rho u}-1)(\mathrm{r}A)_t/u$ и устремляя u к 0, получим

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{r}A)_t = \rho(\mathrm{r}A)_t. \qquad (20.4.11)$$

Затем, подставляя (20.4.11) в (20.4.6), получим утверждение п. (c).

(d) Требуемые неравенства следуют из соотношения (20.4.9). Этот пример показывает, что величина $\theta = \delta - \tau - R$ является критической в экспоненциальном случае. ▼

Пример 20.4.2. Рассмотрим модельную пенсионную схему для стационарного населения с фиксированным размером заработной платы и с фиксированным размером пенсионных выплат. Выведем формулу

$$(\mathrm{r}A)_t = fw(r)\,\frac{T_r - l_r\bar{a}_r}{\delta} \qquad (20.4.12)$$

и дадим ее словесную интерпретацию.

Решение. В этом примере $h(x) = 1$, $\tau = 0$, $\theta = \delta$, $B_t = fw(r)T_r$, ${}^TP_t = fw(r)l_r\bar{a}_r$. Подставив эти выражения в (20.4.9), мы получим формулу (20.4.12). Чтобы интерпретировать этот результат, заметим, что для нашего стационарного населения пенсии размера $fw(r)$ в год выплачиваются непрерывно всем лицам, начиная с r лет. Сюда входят пенсии будущих «новых» пенсионеров, увеличение численности которых происходит со скоростью l_r в год. Эти будущие пенсионные выплаты образуют бессрочный финансовый аннуитет, настоящая стоимость которого равна

$fw(r)l_r\bar{a}_r/\delta$. Разность между настоящими стоимостями этих двух бессрочных аннуитетов равна настоящей стоимости $(\mathrm{r}A)_t$ будущих пенсионных выплат замкнутой группе участников схемы, которые в настоящий момент не моложе r лет. ▼

20.5. Нарастание актуарных обязательств

Методы актуарных расходов различаются той скоростью, с которой будущие пенсионные обязательства нарастают в течение периода трудовой активности участников пенсионной схемы. Метод конечных расходов, описанный в разд. 20.3, не предусматривает возникновения обязательств до самого момента наступления пенсионного возраста r. Для того чтобы выразить нарастание актуарных обязательств в случае пенсий, выплаты которых начинаются в возрасте r, для любого метода расходов мы определим *функцию нарастания обязательств* $M(x)$. Она равна той доле актуарной настоящей стоимости будущих пенсионных выплат, которая наросла в виде актуарных обязательств к моменту достижения возраста x при использовании данного метода актуарных расходов. Функция $M(x)$ — неубывающая непрерывная справа функция аргумента x, возраста, такая, что $0 \leqslant M(x) \leqslant 1$ для всех $x \geqslant a$. При *начальном финансировании* все обязательства по будущим пенсионным выплатам принимаются в полном объеме сразу, как только участник пенсионной схемы вступил в нее в возрасте a лет, так что $M(x) = 0$ для $x < a$ и $M(x) = 1$ для $x \geqslant a$. Для других методов актуарных расходов предполагается, что $M(a) = 0$. Для методов финансирования, требующих нарастания или признания обязательств относительно будущих пенсионных выплат в полном объеме к возрасту r лет, $M(x) = 1$ при $x \geqslant r$.

Функцию $M(x)$ можно также определить в терминах *функции плотности нарастания обязательств по пенсиям*, обозначаемой через $m(x)$, такой, что

$$M(x) = \int_a^x m(y)\,dy, \qquad x \geqslant a. \tag{20.5.1}$$

Заметим, что существует аналогия между функциями $M(x)$ и $m(x)$, с одной стороны, и функцией распределения $F_X(x)$ и функцией плотности $f_X(x)$, с другой. В общем случае мы предполагаем, что функция $m(x)$ непрерывна для $a < x < r$, непрерывна справа в точке a и слева в точке r и что $m(x) = 0$ для $x > r$. В этом непрерывном случае из формулы (20.5.1) следует, что

$$m(x) = M'(x). \tag{20.5.2}$$

В точках разрыва производной $M'(x)$ функция плотности $m(x)$ не определена, и мы можем придать ей произвольное значение, например, равное правому или левому пределу.

Польза от введения функции нарастания обязательств состоит в том, что это позволяет развивать теорию пенсионного обеспечения одновременно для всего множества методов актуарных расходов, а не для каждого метода в отдельности.

Пример 20.5.1. Пусть $M(x) = \bar{a}_{a:\overline{x-a}|}/\bar{a}_{a:\overline{r-a}|}$, $a < x < r$. Проверим, что

(a) $M(x)$ обладает свойствами функции нарастания обязательств,

(b) $M(x)\,{}_{r-x|}\bar{a}_x$ равна резерву на момент наступления возраста x непрерывного отсроченного аннуитета, заключенного лицом (a), с выплатой размера 1 в год, начиная с возраста r, оплаченного непрерывно выплачиваемыми премиями.

Решение. (a) $M(x) = \int_a^x e^{-\delta(y-a)} s(y)\,dy \Big/ \int_a^r e^{-\delta(y-a)} s(y)\,dy$. Таким образом,

$$M'(x) = m(x) = e^{-\delta(x-a)} s(x) \Big/ \int_a^r e^{-\delta(y-a)} s(y)\,dy. \tag{20.5.3}$$

Далее, поскольку $M(a) = 0$ и $M(r) = 1$, ясно, что $M(x)$ обладает свойствами функции нарастания обязательств.

(b) Резерв в возрасте x, вычисленный по ретроспективной формуле, равен

$$\bar{P}({}_{r-a|}\bar{a}_a)\bar{s}_{a:\overline{x-a|}} = \frac{{}_{r-a|}\bar{a}_a}{\bar{a}_{a:\overline{r-a|}}}\,\bar{s}_{a:\overline{x-a|}} = \frac{{}_{x-a}E_a\;{}_{r-x|}\bar{a}_x}{\bar{a}_{a:\overline{r-a|}}}\;\frac{\bar{a}_{a:\overline{x-a|}}}{{}_{x-a}E_a} = {}_{r-x|}\bar{a}_x M(x).$$ ▼

20.6. Основные актуарные функции для работающих

В этом разделе определим несколько актуарных функций, связанных с финансированием пенсионных выплат в модельной пенсионной схеме. Они относятся к работающим участникам схемы, что будет обозначаться префиксом a[1].

20.6.1. Актуарная настоящая стоимость $(\mathrm{a}A)_t$ будущих пенсионных выплат

Взнос $n(t-x+a)s(x)$ участников схемы, находящихся в возрасте между x и $x+dx$ годами в момент времени t, рассчитанный по методу конечного финансирования в конце $(r-x)$-го года, равен ${}^TP_{t+r-x}\,dx$. Следовательно,

$$(\mathrm{a}A)_t = \int_a^r e^{-\delta(r-x)}\,{}^TP_{t+r-x}\,dx. \tag{20.6.1}$$

Пример 20.6.1. Покажем, что

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{a}A)_t = e^{-\delta(r-a)}\,{}^TP_{t+r-a} - {}^TP_t + \delta(\mathrm{a}A)_t, \tag{20.6.2}$$

и дадим словесную интерпретацию этого равенства.

Решение. Вновь заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\,{}^TP_{t+r-x} = -\frac{\partial}{\partial x}\,{}^TP_{t+r-x}\,. \tag{20.6.3}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\mathrm{a}A)_t &= \int_a^r e^{-\delta(r-x)}\,\frac{\partial}{\partial t}\,{}^TP_{t+r-x}\,dx = -\int_a^r e^{-\delta(r-x)}\,\frac{\partial}{\partial x}\,{}^TP_{t+r-x}\,dx \\ &= -e^{-\delta(r-x)}\,{}^TP_{t+r-x}\Big|_{x=a}^{x=r} + \delta\int_a^r {}^TP_{t+r-x}e^{-\delta(r-x)}\,dx \\ &= {}^TP_{t+r-a}e^{-\delta(r-a)} - {}^TP_t + \delta(\mathrm{a}A)_t.\end{aligned}$$

Скорость изменения актуарной настоящей стоимости будущих пенсионных выплат равна настоящей стоимости будущего уровня нормальных расходов при конечном финансировании для новых участников схемы (которые выйдут на пенсию через $r-a$ лет) минус уровень нормальных расходов при конечном финансировании для работающих участников схемы, выходящих на пенсию сейчас, плюс интенсивность

[1] От «active». — *Прим. ред.*

начисления процента, умноженная на актуарную настоящую стоимость на момент времени t. ▼

20.6.2. Уровень нормальных расходов P_t

Предположим, что был выбран метод актуарных расходов с функцией нарастания обязательств $M(x)$. Мы хотим найти формулу для уровня нормальных расходов в модельной пенсионной схеме, т.е. найти такую функцию, которая в нашей непрерывной модели выражает актуарную настоящую стоимость будущих пенсионных выплат через величины, относящиеся к различным моментам периода трудовой деятельности участника пенсионной схемы.

Как и в формуле (20.6.1), будущие нормальные расходы при конечном финансировании для участников пенсионной схемы в возрасте между x и $x+dx$ в момент времени t равны ${}^{T}P_{t+r-x}\,dx$. В функции нормальных расходов эти обязательства учитываются с плотностью $m(x)$. Мы имеем

$$\begin{aligned} P_t &= \int_a^r e^{-\delta(r-x)}\,{}^{T}P_{t+r-x}\,m(x)\,dx \\ &= e^{\tau t} f w(r) s(r) \bar{a}_r^h \int_a^r e^{-(\delta-\tau)(r-x)} n(t-x+a) m(x)\,dx. \end{aligned} \tag{20.6.4}$$

Можно наглядно представить, как уровень нормальных расходов P_t, $u \leqslant t \leqslant u+r-a$, полностью обеспечивает пенсионные выплаты участника схемы, вступившего в нее в возрасте a лет в момент времени u и вышедшего на пенсию спустя $r-a$ лет. Рассмотрим участников схемы, которые вступили в нее между моментами времени u и $u+du$. Их окончательный уровень нормальных расходов, рассчитанный по методу конечного финансирования, равен ${}^{T}P_{u+r-a}$. В момент времени t плотность взносов этой группы в интеграле, определяющем P_t, имеет вид $e^{-\delta(r-x)}\,{}^{T}P_{t+r-x}\,m(x)$, где $x = a+t-u$. За $r-x$ лет, оставшихся до выхода на пенсию, эта величина возрастет (в силу начисления процента) до величины

$${}^{T}P_{t+r-x}\,m(x), \tag{20.6.5}$$

и эта плотность в терминах u составит ${}^{T}P_{u+r-a}\,m(a+t-u)$. Интегрируя эти взносы, накопленные с учетом процента, получим величину

$$\int_u^{u+r-a} {}^{T}P_{u+r-a}\,m(a+t-u)\,dt = {}^{T}P_{u+r-a},$$

которая является искомым уровнем нормальных расходов при методе конечного финансирования.

Пример 20.6.2. (a) Покажем, что в экспоненциальном случае

$$P_t = e^{-\delta[r-X(\theta)]}\,{}^{T}P_{t+r-X(\theta)}, \tag{20.6.6}$$

где $\theta = \delta - \rho = \delta - \tau - R$ и

$$e^{\theta X(\theta)} = \int_a^r m(x) e^{\theta x}\,dx. \tag{20.6.7}$$

(b) Дадим интерпретацию этой формулы.

Решение. (a) Из формулы (20.6.4) и решения примера 20.3.1 мы получим

$$\begin{aligned} P_t &= \int_a^r e^{-\delta(r-x)}\, {}^T P_{t+r-x}\, m(x)\, dx = \int_a^r e^{-\delta(r-x)}\, {}^T P_{t+[X(\theta)-x]+r-X(\theta)}\, m(x)\, dx \\ &= \int_a^r e^{-\delta(r-x)} e^{\rho[X(\theta)-x]}\, {}^T P_{t+r-X(\theta)}\, m(x)\, dx \\ &= e^{[-\delta r+\rho X(\theta)]}\, {}^T P_{t+r-X(\theta)} \int_a^r e^{(\delta-\rho)x}\, m(x)\, dx. \end{aligned}$$

Сделаем подстановку $\rho = \delta - \theta$ и, используя (20.6.7), получим равенство

$$P_t = e^{[-\delta r+(\delta-\theta)X(\theta)]}\, {}^T P_{t+r-X(\theta)} e^{\theta X(\theta)},$$

которое сводится к (20.6.6).

(b) Годового уровня нормальных расходов в момент времени t с учетом процентов достаточно для обеспечения уровня нормальных расходов, рассчитанного по методу конечного финансирования, спустя $r - X(\theta)$ лет. Существование такого числа $X(\theta)$ обеспечивается теоремой о среднем значении для интегралов и может интерпретироваться как средний возраст выплаты нормальных расходов, связанный с функцией плотности нарастания обязательств $m(x)$ в экспоненциальном случае при $\theta = \delta - \tau - R$. Следовательно, число $X(\theta)$ зависит от процентной ставки и от скорости изменения заработной платы и численности населения. ▼

20.6.3. Актуарные наросшие обязательства $(\mathrm{a}V)_t$

Как и в разд. 20.6.2, будем предполагать, что выбран метод актуарных расходов с функцией нарастания обязательств $M(x)$. По аналогии с (20.6.4) *актуарные наросшие обязательства* по отношению к работающим участникам схемы в момент времени t заданы формулой

$$(\mathrm{a}V)_t = \int_a^r e^{-\delta(r-x)}\, {}^T P_{t+r-x} M(x)\, dx. \tag{20.6.8}$$

В этом интеграле мы опирались на то, что в виде актуарных обязательств к возрасту x лет наросла доля $M(x)$ актуарной настоящей стоимости будущих пенсионных выплат.

Если переписать формулу (20.6.4) в виде

$$P_t = \int_a^r e^{-\delta(r-x)}\, {}^T P_{t+r-x}\, dM(x)$$

и проинтегрировать ее по частям, мы получим, используя равенство (20.6.3),

$$\begin{aligned} P_t = e^{-\delta(r-x)}\, {}^T P_{t+r-x}\, M(x)\Big|_{x=a}^{x=r} - \delta \int_a^r M(x) e^{-\delta(r-x)}\, {}^T P_{t+r-x}\, dx \\ + \int_a^r M(x) e^{-\delta(r-x)} \frac{\partial}{\partial t}\, {}^T P_{t+r-x}\, dx = {}^T P_t - \delta(\mathrm{a}V)_t + \frac{d}{dt}\,(\mathrm{a}V)_t, \end{aligned}$$

или

$$P_t + \delta(\mathrm{a}V)_t = {}^T P_t + \frac{d}{dt}\,(\mathrm{a}V)_t. \tag{20.6.9}$$

Последнее равенство можно интерпретировать с позиций теории сложных процентов. Рассмотрим актуарные наросшие обязательства $(\mathrm{a}V)_t$ как фонд, в который поступают нормальные расходы уровня P_t и из которого отчисляются нормальные расходы уровня ${}^TP_t$, когда работающие участники схемы выходят на пенсию. Левая часть формулы (20.6.9) является скоростью увеличения фонда за счет нормальных расходов и процентов. Правая часть представляет сумму уровня нормальных расходов, рассчитанного по методу конечного финансирования, и скорости изменения величины фонда.

Пример 20.6.3. Покажем, что в экспоненциальном случае

$$\text{(a)}\quad P_{t+u} = e^{\rho u} P_t, \quad \rho = \tau + R, \tag{20.6.10}$$

$$\text{(b)}\quad (\mathrm{a}V)_{t+u} = e^{\rho u} (\mathrm{a}V)_t, \tag{20.6.11}$$

$$\text{(c)}\quad P_t + \theta(\mathrm{a}V)_t = {}^TP_t, \quad \theta = \delta - \rho, \tag{20.6.12}$$

$$\text{(d)}\quad \begin{aligned} &P_t < {}^TP_t, \quad \text{если } \theta > 0,\\ &P_t = {}^TP_t, \quad \text{если } \theta = 0,\\ &P_t > {}^TP_t, \quad \text{если } \theta < 0. \end{aligned} \tag{20.6.13}$$

Решение. (a) В примере 20.3.1 показано, что ${}^TP_{t+u} = e^{\rho u}\, {}^TP_t$. Тогда, подставляя это выражение в формулу (20.6.4), получим

$$P_{t+u} = \int_a^r e^{-\delta(r-x)}\, {}^TP_{t+u+r-x}\, m(x)\, dx = e^{\rho u} \int_a^r e^{-\delta(r-x)}\, {}^TP_{t+r-x}\, m(x)\, dx = e^{\rho u} P_t.$$

(b) Решение начинается с определения величины $(\mathrm{a}V)_t$ по формуле (20.6.8), а дальше нужно рассуждать, как в п. (a).

(c) Перепишем равенство (20.6.11) в виде $[(\mathrm{a}V)_{t+u} - (\mathrm{a}V)_t]/u = (e^{\rho u} - 1)(\mathrm{a}V)_t/u$ и при $u \to 0$ получим

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{a}V)_t = \rho(\mathrm{a}V)_t. \tag{20.6.14}$$

Подставляя это равенство в формулу (20.6.9), приходим к формуле (20.6.12).

(d) Указанные неравенства следуют из (20.6.12). Этот пример снова показывает критическую роль величины $\theta = \delta - \tau - R$ в экспоненциальном случае. ▼

В соответствии с предположением, что $M(x) = 1$ для $x \geqslant r$, не существует будущих нормальных расходов в отношении замкнутой группы пенсионеров в момент времени t. Поэтому актуарные наросшие обязательства $(\mathrm{r}V)_t$ по отношению к участникам схемы, вышедшим на пенсию, равны актуарной настоящей стоимости их будущих пенсий. Таким образом,

$$(\mathrm{r}V)_t = (\mathrm{r}A)_t. \tag{20.6.15}$$

Это приводит к следующему дифференциальному уравнению для актуарных наросших обязательств по отношению к вышедшим на пенсию:

$${}^TP_t + \delta(\mathrm{r}V)_t = B_t + \frac{d}{dt}(\mathrm{r}V)_t. \tag{20.6.16}$$

20.6.4. Актуарная настоящая стоимость будущих нормальных расходов $(P\mathrm{a})_t$

В разд. 20.6.1 мы заметили, что взнос $n(t - x + a)s(x)$ участников схемы, находящихся в возрасте между x и $x + dx$ годами в момент времени t, рассчитанный по методу конечного финансирования, в конце $(x - r)$-го года равен ${}^TP_{t+r-x}\, dx$. Когда эти участники из возраста y переходят в возраст $y+dy$, выплачиваются нормальные расходы $e^{-\delta(r-y)}\,{}^{T}P_{t+r-x}\,dx\,m(y)\,dy$. Настоящая стоимость этих нормальных расходов равна

$$e^{-\delta(r-x)}\,{}^{T}P_{t+r-x}\,dx\,m(y)\,dy, \tag{20.6.17}$$

а настоящая стоимость будущих нормальных расходов для всех работающих участников схемы, обозначаемая через $(P\mathrm{a})_t$, выражается формулой

$$(P\mathrm{a})_t = \int_a^r e^{-\delta(r-x)}\,{}^{T}P_{t+r-x} \int_x^r m(y)\,dy\,dx, \tag{20.6.18}$$

или

$$(P\mathrm{a})_t = e^{rt} f w(r) s(r) \bar{a}_r^h \int_a^r e^{-(\delta-\tau)(r-x)} n(t-x+a)[1-M(x)]\,dx. \tag{20.6.19}$$

Рисунок 20.6.1 поясняет это определение величины $(P\mathrm{a})_t$. Выражение (20.6.17) представляет настоящую стоимость в момент времени t элемента расходов в заштрихованной области. В (20.6.18) внутренний интеграл представляет сложение элементов вдоль диагонали, а внешний интеграл — настоящую стоимость будущих нормальных расходов в момент времени t для всех возрастов.

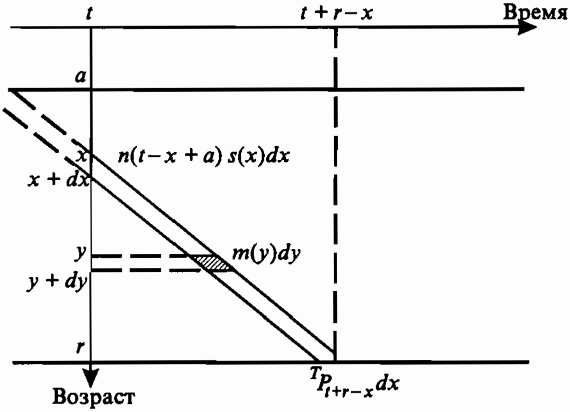


Рис. 20.6.1. Описание $(P\mathrm{a})_t$

Из формул (20.6.18), (20.6.1) и (20.6.8) следует, что $(P\mathrm{a})_t = (\mathrm{a}A)_t - (\mathrm{a}V)_t$, или

$$(\mathrm{a}V)_t = (\mathrm{a}A)_t - (P\mathrm{a})_t. \tag{20.6.20}$$

Формула (20.6.20) выражает ту же концепцию, что и перспективные формулы для определения резервов из гл. 7, и часто используется для определения $(\mathrm{a}V)_t$. Другими словами,

(актуарные обязательства в момент времени t по отношению к работающим)
= (актуарная настоящая стоимость будущих пенсий для работающих)
− (актуарная настоящая стоимость будущих нормальных расходов)

По аналогии с концепцией гл. 7, согласно которой $V = A - Pa$, или $A = V + Pa$, можно показать, что актуарная настоящая стоимость будущих пенсий для работающих уравновешивается актуарными настоящими наросшими обязательствами по отношению к работающим и актуарной настоящей стоимостью будущих нормальных расходов, т. е.

$$(\mathrm{a}A)_t = (\mathrm{a}V)_t + (P\mathrm{a})_t. \tag{20.6.21}$$

Доли двух слагаемых в правой части формулы (20.6.21) определяются методом актуарных расходов, выбранным в соответствии с функцией нарастания обязательств $M(x)$.

Пример 20.6.4. (a) Рассмотрим две функции нарастания обязательств $M_I(x)$ и $M_{II}(x)$. Покажем, что если величина $D(x) = M_I(x) - M_{II}(x)$ такова, что $D'(a) > 0$ и уравнение $D'(x) = 0$ имеет в точности одно решение при $a < x < r$, то $(\mathrm{a}V)_{It} > -(\mathrm{a}V)_{IIt}$.

(b) Покажем, что если $M_I(x) = \bar{a}_{a:\overline{x-a}|}/\bar{a}_{a:\overline{r-a}|}$ и $M_{II}(x) = (x-a)/(r-a)$, то $(\mathrm{a}V)_{It} > -(\mathrm{a}V)_{IIt}$.

Решение. (a) Согласно свойствам функции нарастания обязательств, $D(a) = D(r) = 0$. Нам дано, что $D'(a) > 0$ и $D'(x) = 0$ в точности для одного значения x, такого, что $a < x < r$, а следовательно, $D(x) > 0$ для $a < x < r$. Таким образом, выражение

$$(\mathrm{a}V)_{It} - (\mathrm{a}V)_{IIt} = \int_a^r e^{-\delta(r-x)}\, {}^TP_{t+r-x} D(x)\, dx$$

больше нуля и неравенство доказано.

(b) Имеем

$$D'(x) = \frac{e^{-\delta(x-a)} s(x)}{\int_a^r e^{-\delta(y-a)} s(y)\, dy} - \frac{1}{r-a}.$$

Далее, если $\delta > 1$, то $e^{-\delta(y-a)} s(y) < 1$ и, таким образом,

$$\int_a^r e^{-\delta(y-a)} s(y)\, dy < \int_a^r dy = r - a.$$

Следовательно,

$$D'(a) = \frac{1}{\int_a^r e^{-\delta(y-a)} s(y)\, dy} - \frac{1}{r-a} > 0.$$

Аналогично, $D'(r) < 0$. Поскольку как $e^{-\delta(x-a)}$, так и $s(x)$ — убывающие, но положительные функции от x, $D''(x) < 0$, и, таким образом, равенство $D'(x) = 0$ выполняется в точности для одного значения x, такого, что $a < x < r$. Тогда из п. (a) следует неравенство $(\mathrm{a}V)_{It} > -(\mathrm{a}V)_{IIt}$.

Кроме того, в силу формулы (20.6.21)

$$(\mathrm{a}A)_t = (\mathrm{a}V)_{It} + (P\mathrm{a})_{It} = (\mathrm{a}V)_{IIt} + (P\mathrm{a})_{IIt},$$

так что $(P\mathrm{a})_{IIt} > (P\mathrm{a})_{It}$. ▼

20.7. Методы индивидуальных актуарных расходов

Общий метод актуарных расходов, задаваемый функцией нарастания обязательств $M(x)$ или ее производной, функцией плотности нарастания обязательств $m(x)$, является методом индивидуальных расходов в том смысле, что $m(x)$ и $M(x)$

можно применить для получения уровня нормальных расходов и актуарных наросших обязательств по отношению к каждому участнику пенсионной схемы. Суммарный уровень нормальных расходов и актуарные наросшие обязательства по отношению ко всем работающим можно определить путем сложения компонент, относящихся к каждому участнику.

Актуарные функции, связанные с фиксированием индивидуальных пенсий в форме аннуитета с начальной годовой выплатой размера 1, выплачиваемого с возраста r лет, для работающих возраста x лет, $a \leqslant x \leqslant r$, определяются следующим образом:

• актуарная настоящая стоимость будущих пенсионных выплат задается формулой
$$(\mathrm{a}A)(x) = e^{-\delta(r-x)}\,\frac{s(r)}{s(x)}\,\bar{a}_r^h, \tag{20.7.1}$$

• уровень нормальных расходов задается формулой
$$P(x) = (\mathrm{a}A)(x)m(x), \tag{20.7.2}$$

• актуарные наросшие обязательства задаются формулой
$$(\mathrm{a}V)(x) = (\mathrm{a}A)(x)M(x), \tag{20.7.3}$$

• актуарная настоящая стоимость будущих нормальных расходов задается формулой
$$(P\mathrm{a})(x) = (\mathrm{a}A)(x) - (\mathrm{a}V)(x) = (\mathrm{a}A)(x)[1 - M(x)]. \tag{20.7.4}$$

Заметим, что это — показатели, соответствующие выплате размера 1 для лица (x), а не суммарные показатели для пенсионной схемы на момент времени t. В упр. 20.18 подробно излагаются соотношения между этими показателями и основными показателями, касающимися всей группы населения, которые рассматривались в разд. 20.6.

В *методах нарастающих расходов на обеспечение пенсионных выплат* функция $M(x)$ непосредственно связана с наросшими расходами на пенсионные выплаты, которые относятся к участнику пенсионной схемы в возрасте x лет. Мы рассмотрим две возможности. Если прогнозируемые обязательства нарастают в течение периода трудоспособности равномерно, то
$$m(x) = 1/(r-a)\,. \tag{20.7.5}$$

Если нарастание пенсионных выплат пропорционально сумме полной заработной платы при экспоненциальном временно́м тренде роста всех заработных плат, то
$$m(x) = kw(x)e^{\tau x} = \frac{w(x)e^{\tau x}}{\int_a^r w(y)e^{\tau y}\,dy}\,. \tag{20.7.6}$$

Частный случай, когда нарастание пенсионных выплат пропорционально сумме полной заработной платы без учета временно́го тренда роста заработной платы, т. е. $\tau = 0$, дает формулу
$$m(x) = kw(x) = \frac{w(x)}{\int_a^r w(y)\,dy}\,. \tag{20.7.7}$$

Для методов *актуарных расходов, нарастающих с момента вступления в пенсионную схему*, прогнозируемые пенсионные выплаты обеспечиваются постоянными взносами с момента вступления в пенсионную схему до момента выхода на пенсию.

Вновь рассмотрим две возможности. Если предположить, что уровень нормальных расходов $P(x)$, заданный равенством (20.7.2), постоянен, то $P(x) = k = (\mathrm{a}A)(x)m(x)$, так что

$$m(x) = \frac{k}{(\mathrm{a}A)(x)} = \frac{ks(x)}{e^{-\delta(r-x)}s(r)\bar{a}_x^h} = k_1 s(x)e^{-\delta x}.$$

Теперь необходимо нормировать $m(x)$, поскольку интеграл по x от этой функции в пределах от a до r должен быть равен единице:

$$m(x) = \frac{s(x)e^{-\delta x}}{\int_a^r s(y)e^{-\delta y}\,dy}. \tag{20.7.8}$$

С другой стороны, если величина взноса является постоянной долей π от величины заработной платы, причем существует экспоненциальный тренд роста суммарной заработной платы, то

$$P(x) = \pi w(x)e^{\tau x} = m(x)(\mathrm{a}A)(x),$$

так что

$$m(x) = \frac{e^{-\delta x}s(x)e^{\tau x}w(x)}{\int_a^r e^{-\delta y}s(y)e^{\tau y}w(y)\,dy}. \tag{20.7.9}$$

Актуарные наросшие обязательства по отношению к лицам возраста x лет, т. е. разность между актуарными настоящими стоимостями пенсионных выплат и будущих взносов, равны

$$\begin{aligned}(\mathrm{a}V)(x) &= e^{-\delta(r-x)}\,\frac{s(r)}{s(x)}\,\bar{a}_r^h - \pi\int_x^r e^{-\delta(y-x)}\,\frac{s(y)}{s(x)}\,w(y)\,dy \\ &= e^{-\delta(r-x)}\,\frac{s(r)}{s(x)}\,\bar{a}_r^h\left[1 - \frac{\int_x^r e^{-\delta y}s(y)w(y)\,dy}{\int_a^r e^{-\delta y}s(y)w(y)\,dy}\right] = (\mathrm{a}A)(x)M(x).\end{aligned}$$

Это еще раз говорит в пользу нашего выбора функции $m(x)$ из формулы (20.7.9).

Как и выше, можно показать, что если экспоненциального временного тренда заработной платы не предполагается, то функция плотности нарастающих обязательств — это

$$m(x) = \frac{s(x)w(x)e^{-\delta x}}{\int_a^r s(y)w(y)e^{-\delta y}\,dy}. \tag{20.7.10}$$

Заметим, что доля прогнозируемых пенсионных выплат, соответствующая актуарным обязательствам по методам актуарных расходов, нарастающих с момента вступления в пенсионную схему, отличается от пенсионных выплат в большинстве схем. Определение нарастающих расходов на обеспечение пенсионных выплат необходимо для целей регулирования и для информирования участников схемы о размере пенсии, которая будет им назначена. Различие здесь аналогично различию между резервом и выкупной суммой в обычном страховании.

Следует также заметить, что ставка взносов, выплачиваемых вкладчиком схемы, который придерживается метода индивидуальных актуарных расходов, обычно отличается от суммарного уровня нормальных расходов, определенного этим методом. Это объясняется двумя общими причинами. Во-первых, при создании схемы или в момент пересмотра правил схемы актуарные наросшие обязательства за предыдущий период работы могут измениться. Во-вторых, актуарные предположения не реализуются в точности, а следовательно, возникают доходы и убытки. Вопрос о том, какие поправки следует внести в оценку ставки взносов для финансового обеспечения этих изменений актуарных нарастающих обязательств (т. е. для учета доходов или убытков), является важным и подлежит регулированию. Выбранные частные поправки не соотносятся с выбором метода индивидуальных актуарных расходов.

20.8. Методы групповых актуарных расходов

В этом разделе рассмотрим методы агрегированных или групповых актуарных расходов, для которых взносы определяются на коллективной основе, а не как суммы взносов от лица отдельных участников. Чтобы определить методы групповых актуарных расходов, нам необходимы три дополнительных функции:

1. $(\mathrm{a}F)_t$ — величина фонда для работающих участников в момент времени t,
2. $(\mathrm{a}C)_t$ — поступление годового взноса в момент времени t для работающих участников,
3. $(\mathrm{a}U)_t$ — необеспеченные актуарные наросшие обязательства (долг) по отношению к работающим участникам схемы в момент времени t.

Таким образом,

$$(\mathrm{a}U)_t = (\mathrm{a}V)_t - (\mathrm{a}F)_t. \tag{20.8.1}$$

Фонд для работающих в момент времени t можно описать дифференциальным уравнением

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{a}F)_t = (\mathrm{a}C)_t + \delta(\mathrm{a}F)_t - {}^T\!P_t \tag{20.8.2}$$

с начальным значением $(\mathrm{a}F)_0$. Правая часть уравнения (20.8.2) отражает два источника поступлений и один источник расходов — перечисление расходов на конечное финансирование в фонд для вышедших на пенсию.

Если P_t — уровень нормальных расходов, рассчитанный по методу актуарных расходов с некоторой функцией нарастания обязательств [см.(20.6.4)], и $(\mathrm{a}U)_t$ — необеспеченные дополнительные обязательства по отношению к работающим [см.(20.6.8) и (20.8.1)], то естественно представить поступление взносов в следующем виде:

$$(\mathrm{a}C)_t = P_t + \lambda(t)(\mathrm{a}U)_t\,. \tag{20.8.3}$$

В этой формуле функция $\lambda(t)$ определяет процесс погашения долга $(\mathrm{a}U)_t$.

Равенство (20.8.3) указывает на еще не сформулированную характеристику метода групповых актуарных расходов. Эти методы определяют поступление годового взноса $(\mathrm{a}C)_t$, что зависит от финансирования, т. е. от величины $(\mathrm{a}U)_t$. Здесь поправки, необходимые для учета изменений правил схемы или доходов и убытков, могут быть произведены автоматически в рамках метода актуарных расходов, поскольку величина $(\mathrm{a}U)_t$ будет отражать такие изменения и наличие доходов и убытков.

Рассмотрим пример одного такого процесса погашения долга, для которого

$$\lambda(t) = 1/\bar{a}_{P_t}, \tag{20.8.4}$$

где

$$\bar{a}_{P_t} = (P\mathrm{a})_t / P_t. \tag{20.8.5}$$

Таким образом, $(P\mathrm{a})_t = P_t\,\bar{a}_{P_t}$, так что $\bar{a}_{P_t}$ является актуарной настоящей стоимостью срочного аннуитета с ежегодными выплатами размера 1. Такая актуарная настоящая стоимость, умноженная на текущий уровень нормальных расходов P_t, равняется актуарной настоящей стоимости будущих нормальных расходов для работающих участников схемы $(P\mathrm{a})_t$. В этом примере обозначения были выбраны так, чтобы подкреплять соображения, лежащие в его основе.

Для выбранной таким образом функции $\lambda(t)$ формулу (20.8.3) можно переписать в виде

$$(\mathrm{a}C)_t = P_t + \frac{(\mathrm{a}V)_t - (\mathrm{a}F)_t}{\bar{a}_{P_t}} = \frac{(P\mathrm{a})_t + (\mathrm{a}V)_t - (\mathrm{a}F)_t}{\bar{a}_{P_t}} = \frac{(\mathrm{a}A)_t - (\mathrm{a}F)_t}{\bar{a}_{P_t}}, \qquad (20.8.6)$$

воспользовавшись равенством (20.6.20). Таким образом, при $\lambda(t)$, заданной формулой (20.8.4), имеем

$$(\mathrm{a}C)_t\, \bar{a}_{P_t} = (\mathrm{a}A)_t - (\mathrm{a}F)_t\,. \qquad (20.8.7)$$

Интерпретация этой формулы: актуарная настоящая стоимость срочного аннуитета с интенсивностью выплат $(\mathrm{a}C)_t$ эквивалентна актуарной настоящей стоимости будущих выплат работающим участникам схемы за вычетом величины фонда для этих участников.

Формула (20.8.2), управляющая процессом изменения фонда, сводится для функции $\lambda(t)$, заданной формулой (20.8.4), к виду

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{a}F)_t = P_t + \frac{(\mathrm{a}U)_t}{\bar{a}_{P_t}} + \delta(\mathrm{a}F)_t - {}^{T}P_t\,. \qquad (20.8.8)$$

Формулу (20.6.9) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{a}V)_t = P_t + \delta(\mathrm{a}V)_t - {}^{T}P_t\,. \qquad (20.8.9)$$

Вычитая формулу (20.8.8) из формулы (20.8.9), получим

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{a}U)_t = -\frac{(\mathrm{a}U)_t}{\bar{a}_{P_t}} + \delta(\mathrm{a}U)_t\,. \qquad (20.8.10)$$

Дифференциальное уравнение (20.8.10) можно решить, заменив в нем t на u, проинтегрировав по u от 0 до t и потенцируя, что дает

$$(\mathrm{a}U)_t = (\mathrm{a}U)_0 \exp\left[-\int_0^t \left(\frac{1}{\bar{a}_{P_u}} - \delta\right) du\right]. \qquad (20.8.11)$$

Подставляя сюда равенство (20.8.1), получим

$$(\mathrm{a}F)_t = (\mathrm{a}V)_t - [(\mathrm{a}V)_0 - (\mathrm{a}F)_0] \exp\left[-\int_0^t \left(\frac{1}{\bar{a}_{P_u}} - \delta\right) du\right]. \qquad (20.8.12)$$

Если $\bar{a}_{P_u}$ меньше, чем $\bar{a}_{\overline{\infty}|} = 1/\delta$, так что $1/\bar{a}_{P_u} - \delta \geqslant \varepsilon > 0$, то

$$\exp\left[-\int_0^t \left(\frac{1}{\bar{a}_{P_u}} - \delta\right) du\right] \to 0$$

при $t \to \infty$, а следовательно, $(\mathrm{a}F)_t \to (\mathrm{a}V)_t$.

Здесь метод агрегированных расходов при $\lambda(t) = 1/\bar{a}_{P_t}$ асимптотически эквивалентен методу индивидуальных расходов, определенному с помощью функции нарастания обязательств, которая используется для вычисления $(\mathrm{a}V)_t$ и P_t. Может существовать много функций нарастания обязательств, определяющих такие показатели, что отношение $(P\mathrm{a})_t/P_t$ будет настолько мало, чтобы обеспечить сходимость

$(\mathrm{a}F)_t$ к $(\mathrm{a}V)_t$. Каждая из этих функций нарастания обязательств определяет свою структуру внесения взносов и величины своих предельных фондов. При упоминании метода агрегированных актуарных расходов для полноты всегда следует указывать использованную функцию нарастания обязательств. В частности, на практике большое значение имеет метод групповых расходов, нарастающих с момента вступления в пенсионную схему.

Ясно, что существует много возможностей для выбора функции $\lambda(t)$ при определении процесса погашения долга $(\mathrm{a}U)_0$. Если цель состоит в завершении погашения долга в конце n-го года с некоторого начального момента времени 0, то один из возможных выборов $\lambda(t)$ — это

$$\lambda(t) = 1/\bar{a}_{\overline{n-t}|}, \qquad 0 < t < n.$$

Тогда в соответствии с формулой (20.8.11) получим

$$(\mathrm{a}U)_t = (\mathrm{a}U)_0 \exp\left[-\int_0^t \left(\frac{1}{\bar{a}_{\overline{n-u}|}} - \delta\right) du\right] = (\mathrm{a}U)_0 \exp\left[-\int_0^t \frac{1}{\bar{s}_{\overline{n-u}|}}\, du\right]. \qquad (20.8.13)$$

Можно показать (упр. 20.21), что

$$-\int_0^t \frac{1}{\bar{s}_{\overline{n-u}|}}\, du = \ln \frac{\bar{s}_{\overline{n}|} - \bar{s}_{\overline{t}|}}{\bar{s}_{\overline{n}|}}.$$

Следовательно, формула (20.8.13) принимает вид

$$(\mathrm{a}U)_t = (\mathrm{a}U)_0 \frac{\bar{s}_{\overline{n}|} - \bar{s}_{\overline{t}|}}{\bar{s}_{\overline{n}|}},$$

и можно показать, что

$$(\mathrm{a}C)_t = P_t + \frac{(\mathrm{a}U)_0}{\bar{a}_{\overline{n}|}}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant n.$$

В момент времени n цель финансирования фонда будет достигнута: мы получим $(\mathrm{a}U)_n = 0$, а величина $(\mathrm{a}C)_t$ будет равна величине P_t.

На практике общий подход к выбору схемы погашения долга состоит в определении $\lambda(t)$ как обратной величины к средней стоимости аннуитета будущей заработной платы работающих. Положим ее равной $\bar{a}_{W_t} = (Wa)_t/W_t$, где величина $(Wa)_t$ задана формулой

$$\begin{aligned}(Wa)_t &= \int_a^r n(t-x+a)s(x)w(x)\left[\int_x^r e^{-\delta(y-x)}\, \frac{s(y)}{s(x)}\, \frac{w(y)}{w(x)}\, e^{\tau(t+y-x)}\, dy\right] dx \\ &= \int_a^r n(t-x+a)\left[\int_x^r e^{-\delta(y-x)}\, s(y)w(y)e^{\tau(t+y-x)}\, dy\right] dx. \qquad (20.8.14)\end{aligned}$$

Комбинируя (20.2.3) и (20.8.14), получим

$$\bar{a}_{W_t} = \frac{\int_a^r n(t-x+a)\int_x^r e^{-(\delta-\tau)(y-x)}s(y)w(y)\, dy\, dx}{\int_a^r n(t-x+a)s(x)w(x)\, dx}. \qquad (20.8.15)$$

Упражнение 20.23 посвящено проверке того, что приведенное выше отношение совпадает с величиной $\bar{a}_{P_t}$, определенной формулой (20.8.5), для метода актуарных расходов, нарастающих с момента вступления в пенсионную схему, использующего постоянную долю заработной платы для определения нормальных расходов. Таким образом, выбор $\lambda(t) = 1/\bar{a}_{W_t}$ приводит к методу актуарных расходов, который асимптотически эквивалентен методу актуарных расходов, нарастающих с момента вступления в пенсионную схему, с нормальными расходами, равными постоянной доле заработной платы, и с функцией $m(x)$ из формулы (20.7.9).

Пример 20.8.1. Рассмотрим стационарное население, т. е. предположим, что $n(a) = l_a$, $\tau = 0$ и $h(x) = 1$, и функцию нарастания обязательств $M(x) = \bar{a}_{a:\overline{x-a}|}/\bar{a}_{a:\overline{r-a}|}$, связанную с таким методом актуарных расходов, когда обязательства нарастают с момента вступления в схему при постоянных взносах (см. пример 20.5.1).

(a) Найдем λ.

(b) Вычислим $(\mathrm{a}C)_0$, если $(\mathrm{a}F)_0 = 0$.

Решение. (a) Формула (20.3.2) дает для стационарного случая ${}^TP_t = fw(r)\, l_r\, \bar{a}_r$ для всех t. Таким образом, из формулы (20.6.19) следует, что

$$(P\mathrm{a})_t = \int_a^r e^{-\delta(r-x)} fw(r)\, l_r\, \bar{a}_r \left(1 - \frac{\bar{a}_{a:\overline{x-a}|}}{\bar{a}_{a:\overline{r-a}|}}\right) dx.$$

Теперь $M'(x) = m(x) = {}_{x-a}E_a/\bar{a}_{a:\overline{r-a}|}$, так что, согласно формуле (20.6.4),

$$P_t = \int_a^r e^{-\delta(r-x)} fw(r)\, l_r\, \bar{a}_r\, \frac{{}_{x-a}E_a}{\bar{a}_{a:\overline{r-a}|}}\, dx.$$

Таким образом, формула (20.8.5) дает

$$\bar{a}_{P_t} = \frac{(P\mathrm{a})_t}{P_t} = \frac{\int_a^r e^{\delta x}\, {}_{x-a}E_a\, \bar{a}_{x:\overline{r-x}|}\, dx}{\int_a^r e^{\delta x}\, {}_{x-a}E_a\, dx} = \frac{\int_a^r l_x\, \bar{a}_{x:\overline{r-x}|}\, dx}{\int_a^r l_x\, dx}$$

и $\lambda = 1/\bar{a}_{P_t}$.

(b) Подставляя равенство (20.6.1) в (20.8.6), получим

$$(\mathrm{a}C)_0 = \frac{\int_a^r e^{-\delta(r-x)} fw(r)\, l_r\, \bar{a}_r\, dx}{\bar{a}_{P_t}} = \frac{fw(r)\, l_r\, \bar{a}_r\, \bar{a}_{\overline{r-a}|} \int_a^r l_x\, dx}{\int_a^r l_x\, \bar{a}_{x:\overline{r-x}|}\, dx}. \qquad \blacktriangledown$$

20.9. Основные актуарные функции для объединенной группы работающих и пенсионеров

В разд. 20.4 и 20.6 мы рассматривали отдельно основные актуарные функции для работающих участников схемы и для участников схемы, получающих пенсию; это обычное деление, используемое для многих целей. Система управления, проблемы актуарных расчетов и даже инвестиционная политика для этих двух групп могут быть различными. Однако для других целей полезно рассматривать основные актуарные функции для объединенной группы работающих и пенсионеров.

Основные актуарные функции для объединенной группы являются суммами соответствующих функций для работающих участников схемы, которые рассматривались в разд. 20.6, и для участников схемы, получающих пенсию, которые рассматривались в разд. 20.4. Они сведены в табл. 20.9.1.

Таблица 20.9.1. Актуарные функции для работающих участников схемы, для пенсионеров и для объединенной группы участников пенсионной схемы[1)]

Показатели	Работающие	Пенсионеры	Объединенная группа участников
Актуарная настоящая стоимость будущих пенсий в момент времени t	$(\mathrm{a}A)_t$	$(\mathrm{r}A)_t$	$A(t) = (\mathrm{a}A)_t + (\mathrm{r}A)_t$
Уровень нормальных расходов	P_t	0	P_t
Актуарные дополнительные обязательства	$(\mathrm{a}V)_t$	$(\mathrm{r}V)_t$	$V_t = (\mathrm{a}V)_t + (\mathrm{r}V)_t$
Актуарные настоящие стоимости будущих нормальных расходов	$(P\mathrm{a})_t$	0	$(P\mathrm{a})_t$

Для получения уравнения баланса для объединенной группы можно использовать уравнения баланса для работающих участников, (20.6.9), и участников, получающих пенсию, (20.4.6). Таким образом,

$$P_t + \delta V_t = B_t + \frac{d}{dt} V_t\,. \tag{20.9.1}$$

В этом уравнении нормальные расходы и инвестиционные доходы, поступившие в фонд, разделяются на пенсионные выплаты и изменение актуарных наросших обязательств.

Чтобы получить формулы для объединенной группы участников при агрегированном финансировании, будем предполагать, что пенсии для тех участников схемы, которые получают ее, финансируются полностью, так что $(\mathrm{r}V)_t = (\mathrm{r}F)_t$. Тогда (20.8.1) можно представить как необеспеченные актуарные обязательства по отношению ко всем участникам, а именно

$$U_t = V_t - F_t = (\mathrm{a}V)_t + (\mathrm{r}V)_t - (\mathrm{a}V)_t - (\mathrm{r}F)_t = (\mathrm{a}U)_t. \tag{20.9.2}$$

Далее, поскольку для участников, получающих пенсию, не требуется никаких взносов, годовой взнос для всех участников C_t равен годовому взносу для работающих участников схемы $(\mathrm{a}C)_t$. В этом случае формулу (20.8.3) можно переписать в виде

$$C_t = P_t + \lambda(t)U_t. \tag{20.9.3}$$

Если $\lambda(t) = 1/\bar{a}_{P_t}$, то величина взноса примет вид

$$C_t = (P_t\bar{a}_{P_t} + V_t - F_t)/\bar{a}_{P_t} = (A_t - F_t)/\bar{a}_{P_t}\,. \tag{20.9.4}$$

Таким образом, если $(\mathrm{r}F)_t = (\mathrm{r}V)_t$, то результаты метода агрегированных актуарных расходов, определенные для работающих участников схемы в момент времени t согласно (20.8.6), эквивалентны результатам, определенным для всех участников по формуле (20.9.4).

20.10. Замечания и литература

Многие элементарные принципы теории пенсионного обеспечения опубликованы в правительственном издании, так называемом «Bulletin on 23P». Чарльз Тробридж [Trowbridge C. L. 1952, 1963] внес значительный вклад в создание математической теории финансирования пенсионных схем. Более развитая модель, ис-

[1)] Величины $(\mathrm{a}A)_t$, $(\mathrm{r}A)_t$, P_t $(\mathrm{a}V)_t$, $(\mathrm{r}V)_t$ и $(P\mathrm{a})_t$ определены соответственно в формулах (20.6.1), (20.4.2), (20.6.4), (20.6.8), (20.6.15) и (20.6.18).

пользуемая в этой главе, была изложена в серии статей [Bowers, Hickman, Nesbitt 1976, 1979]. Разделением на отдельные показатели для работающих и пенсионеров занимался Кищук [Kischuk 1976].

Ряд авторов изучал проблемы, возникающие в сфере финансирования пенсионных схем из-за влияния инфляции на заработную плату, процентные ставки и выплаты. К этому классу относятся статьи [Allison and Winklevoss 1975] и [Myers 1960]. Работа Джона Троубриджа [Trowbridge J. R. 1977] содержит обширные наблюдения за изменением финансирования пенсионных схем в различных странах в ответ на инфляцию.

Упражнения

К разделу 20.2

20.1. Какова будет годовая величина суммарной заработной платы W_t для стационарной группы населения с постоянной заработной платой со ставкой w?

К разделу 20.3

20.2. Какова будет годовая величина суммарной заработной платы W_t для экспоненциального случая?

20.3. Предположим, что начальная годовая величина пенсионных выплат отдельному лицу в момент времени t задается выражением

$$\frac{f}{b}\int_{t-b}^{t} w(r-t+y)e^{\tau y}\,dy, \qquad 0<b<r-a.$$

Другие условия этой модельной схемы не изменяются. Для этого определения пенсии, базирующегося на формуле средней заработной платы за последние несколько лет,

(a) покажите, что начальный уровень выплат в момент времени t задается формулой

$$\frac{f}{b}\int_{0}^{b} w(r-z)e^{\tau(t-z)}\,dz,$$

(b) найдите формулу для ставки расходов по методу конечного финансирования в момент времени t,

(c) решите другим методом пример 20.3.1.

20.4. Начальная годовая величина пенсионных выплат для лица, вышедшего на пенсию в момент времени t, задается формулой $c(r-a)we^{\tau t}$. Другие условия модельной схемы остаются неизменными. Для этой начальной величины выплат, основанной на произведении числа лет стажа на величину последней заработной платы,

(a) определите формулу для уровня расходов по методу конечного финансирования в момент времени t,

(b) решите другим методом пример 20.3.1.

20.5. Полагая $s(x)=e^{-\mu(x-a)}$, $a\leqslant x\leqslant r$, выпишите выражение для ${}^{T}P_t$ в экспоненциальном случае.

20.6. Рассмотрим пенсионную схему для стационарной группы работающих, в которой структура фонда изначально не отражает возрастной структуры населения, но по мере вступления новых участников фонд стабилизируется, а его структура начинает соответствовать возрастной структуре населения. Схема описывается следующими данными: $a=25$, $r=65$, $n(t)=0$ при $t<-40$ и $n(t)=75$ при $t>-40$, $s(x)=(100-x)/75$ при $25<x<100$, $\delta=0{,}06$, $w(x)=525/(100-x)$, $\tau=0{,}02$, $f=0{,}6$, $h(x)=1$.

(a) Найдите $\bar{a}_x^h$ и, в частности, $\bar{a}_{65}^h$.

(b) Найдите ${}^{T}P_t$.

К разделу 20.4

20.7. Покажите, что в экспоненциальном случае $B_t = {}^T\!P_t(\bar{a}'^h_r/\bar{a}^h_r)$, где

$$\bar{a}'^h_r = \int_r^\infty e^{-(\rho-\beta)(x-r)}\,\frac{s(x)}{s(r)}\,dx.$$

20.8. В пенсионной схеме для стационарной группы работающих из упр. 20.6
(a) вычислите $(\mathrm{r}A)_t$ по формуле (20.4.3) для $t > 35$,
(b) найдите B_t для $t > 35$,
(c) проверьте уравнение баланса (20.4.6) для $t > 35$.

К разделу 20.5

20.9. Какова будет функция $M(x)$ в случае метода конечного финансирования?

К разделу 20.6

20.10. Используя предположения упр. 20.5 и считая, что $m(x) = 1/(r-a)$, определите P_t.

20.11. (a) Покажите, что

$$(\mathrm{a}A)_t = \int_t^{t+r-a} e^{-\delta(y-t)}\,{}^T\!P_y\,dy.$$

(b) Дифференцируя выражение из п. (a), получите другое решение для примера 20.6.1.

20.12. Пусть

$$e^{\theta X(\theta)} = \int_a^r e^{\theta x} m(x)\,dx \quad \text{и} \quad \mu = \int_a^r x m(x)\,dx.$$

Покажите, что
(a) $X(\theta) > \mu$, если $\theta > 0$,
(b) $X(\theta) < \mu$, если $\theta < 0$.
[Указание. Используйте неравенство Йенсена (1.3.2) или (1.3.3).]
(c) Докажите, что при $\theta \to 0$ предел $X(\theta)$ равен μ.
[Указание. Рассмотрите $e^{\theta X(\theta)} = \mathbf{E}[e^{\theta X}]$ как производящую функцию моментов.]

20.13. Покажите, что в экспоненциальном случае
(a) $P_t = {}^T\!P_t e^{-\theta[r-X(\theta)]}$,
(b) $(\mathrm{a}V)_t = {}^T\!P_t\,\bar{a}_{\overline{r-X(\theta)}|\theta} = P_t\,\bar{s}_{\overline{r-X(\theta)}|\theta}$.

20.14. (a) Что случится с формулами из упр. 20.13, если модельная схема действует в стационарной совокупности с $\tau = 0$?
(b) Что случиться с формулами из упр. 20.13, если $\theta = \delta - \rho = 0$?

20.15. (a) Определите уровень нормальных расходов, учитывающий заработную плату, для лиц, ставших участниками схемы в момент времени u. Другие условия модельной схемы не меняются.
(b) Используя результат п. (a), найдите соответствующую функцию плотности нарастания обязательств по отношению к лицам, вступившим в схему в момент времени u.

20.16. (a) Покажите, что для модельной схемы

$$P_t = f w(r) s(r) \bar{a}^h_r \int_a^r e^{-\delta(r-x)} e^{\tau(t+r-x)} n(t-x+a) m(x)\,dx.$$

(b) Покажите, что если $\tau = 0$, $n(t) = l_a$, то

$$P_t = f w(r) \int_a^r l_x\,{}_{r-x}E_x\,\bar{a}^h_r\,m(x)\,dx,$$

где ${}_{r-x}E_x$ основывается на функции дожития $s(x)$ и интенсивности начисления процента δ.

20.17. Пусть $n(t) = l_a$ и

$$m(x) = \frac{w(x)e^{\tau x}}{\int_a^r w(y)e^{\tau y}\,dy}.$$

Покажите, что $P_{t+u} = e^{\tau u} P_t$.

К разделу 20.7

20.18. Предположим, что прогнозируемая начальная ставка выплат при выходе на пенсию для лица возраста x лет в момент времени t определяется формулой $fw(r)e^{\tau(t+r-x)}$, а число лиц возраста между x и $x+dx$ в момент времени t составляет $n(t-x+a)s(x)\,dx$.

(a) Проверьте, что величина $(\mathrm{a}A)_t$, заданная формулой (20.6.1), равна

$$\int_a^r fw(r)e^{\tau(t+r-x)}n(t-x+a)s(x)(\mathrm{a}A)(x)\,dx.$$

(b) Проверьте, что величина P_t, заданная формулой (20.6.4), равна

$$\int_a^r fw(r)e^{\tau(t+r-x)}n(t-x+a)s(x)P(x)\,dx.$$

(c) Проверьте, что величина $(\mathrm{a}V)_t$, заданная формулой (20.6.8), равна

$$\int_a^r fw(r)e^{\tau(t+r-x)}n(t-x+a)s(x)(\mathrm{a}V)(x)\,dx.$$

(d) Проверьте, что величина $(P\mathrm{a})_t$, заданная формулой (20.6.18), равна

$$\int_a^r fw(r)e^{\tau(t+r-x)}n(t-x+a)s(x)(P\mathrm{a})(x)\,dx.$$

20.19. Проверьте формулу (20.7.9).

20.20. В модели пенсионной схемы для стационарной группы работающих из упр. 20.6
(a) найдите $(\mathrm{a}A)_t$,
(b) найдите $M(x)$ и $m(x)$ для постоянного нарастания пенсии.
Для этого метода актуарных расходов найдите
(i) $(\mathrm{a}V)_t$ и
(ii) P_t.
(iii) Проверьте уравнение баланса (20.6.9).
(c) Найдите $M(x)$ и $m(x)$ для расходов, равных постоянной доле от прогнозируемой заработной платы между возрастами 25 и 65 лет. Для этого метода актуарных расходов найдите
(i) $(\mathrm{a}V)_t$ и
(ii) P_t.
(iii) Проверьте уравнение баланса (20.6.9).

К разделу 20.8

20.21. Проверьте, что

(a) $\displaystyle -\int_0^t \frac{1}{\bar{s}_{\overline{n-y}|}}\,dy = \ln\frac{\bar{s}_{\overline{n}|}-\bar{s}_{\overline{t}|}}{\bar{s}_{\overline{n}|}}$, (b) $\displaystyle -\int_0^t \frac{1}{\bar{a}_{\overline{n-y}|}}\,dy = \ln\frac{\bar{a}_{\overline{n}|}-\bar{a}_{\overline{t}|}}{\bar{a}_{\overline{n}|}}$.

20.22. (a) Получите упрощенную формулу для $\bar{a}_{P_t}$ в экспоненциальном случае.
(b) Что случится с $\bar{a}_{P_t}$ в экспоненциальном случае, если $\theta=\delta-\rho=0$?

20.23. Проверьте, что величина $\bar{a}_{W_t}$, заданная формулой (20.8.15), равна величине $\bar{a}_{P_t}$, заданной формулой (20.8.5), если используется функция плотности нарастания обязательств, определенная формулой (20.7.9).

20.24. В модели пенсионной схемы для стационарной группы работающих из упр. 20.6
(a) найдите W_t,
(b) найдите настоящую стоимость $(W\mathrm{a})_t$ прогнозируемой будущей заработной платы для работающих в момент времени t.
(c) Проверьте, что среднее значение аннуитета будущей заработной платы $\bar{a}_{W_t} = (W a)_t/W_t$ равно среднему значению аннуитета нормальных расходов, нарастающих с момента вступления в схему (упр. 20.20(c)), определенному формулой

$$\bar{a}_{P_t} = \frac{(P\mathrm{a})_t}{P_t} = \frac{(\mathrm{a}A)_t-(\mathrm{a}V)_t}{P_t}.$$

Ко всем темам главы

20.25. В модели пенсионной схемы для стационарной группы работающих из упр. 20.6 выведите и решите дифференциальное уравнение для размера фонда для работающих в случае 15-летнего срока погашения $(\mathrm{a}V)_0$, используя

(a) метод актуарных расходов из упр. 20.20(b),

(b) метод актуарных расходов из упр. 20.20(c).

[Указание. Для $0 < t < 15$ модифицируйте формулу (20.8.2) так, чтобы величина $(\mathrm{a}C)_t$ была равна нормальным расходам плюс величина платежей, направляемых на погашение.]

21

ПРОЦЕНТЫ КАК СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА

21.1. Введение

Изложение в гл. 3–11 и в гл. 15–18 строилось на основополагающих предположениях, что время до выбытия и причина или тип выбытия являются случайными величинами и что их совместное распределение известно. Когда в моделях долгосрочных финансовых операций учитывался процентный доход, это осуществлялось введением процентных ставок, которые предполагались детерминированными и обычно постоянными величинами. Анализ множества наблюдений за величиной процентных ставок подтверждает мысль о том, что это — нереалистичное предположение.

Таблица 21.1.1. Средняя доходность 30-летних государственных казначейских облигаций США на январь указанного года[1)]

Год	Доходность[2)]	Год	Доходность
1978	8,18%	1987	7,39%
1979	8,94%	1988	8,83%
1980	10,60%	1989	8,93%
1981	12,14%	1990	8,26%
1982	14,22%	1991	8,27%
1983	10,63%	1992	7,58%
1984	11,75%	1993	7,34%
1985	11,45%	1994	6,29%
1986	9,40%	1995	7,85%
		1996	6,05%

21.1.1. Учет изменчивости процентов

Для учета изменчивости процентных ставок в актуарных моделях имеется несколько методов.

1. Сценарии настоящей процентной ставки. Эти сценарии — последовательности будущих процентных ставок, которые индексируются временны́м параметром и которые наряду с другими предположениями и принципом эквивалентности применяются в вычислениях премий и резервов. В более сложных моделях каждый сценарий должен определять другие переменные, такие, как расходы и частота досрочных расторжений договоров, так, чтобы они соответствовали этим процентным

[1)] Источник: «Economic Statistics for Employee Benefit Actuaries», April, Schaumburg, Ill.: Society of Actuaries.

[2)] Процентный доход по облигациям.

ставкам. Кроме того, в таких моделях сами процентные ставки и в рамках одного сценария, и для ряда сценариев, можно строить так, чтобы они удовлетворяли определенным экономическим условиям.

(a) Сценарии могут определяться без создания модели, отвечающей наблюдавшимся ранее данным, и предназначаться только для измерения адекватности величин премий и резервов при различных вариантах возможного развития экономических условий в будущем. Это — вариант анализа чувствительности, который будет обсуждаться в разд. 21.2.1.

(b) Сценарии могут определяться после систематического анализа альтернативных макроэкономических прогнозов и индивидуальных вероятностей, приписываемых актуарием каждому сценарию. Этот подход будет обсуждаться в разд. 21.2.2.

2. Стохастические модели, которые, как правило, основаны на анализе наблюдавшихся ранее данных. В этом методе такие данные играют определяющую роль и влияют как на выбор модели, так и на оценку ее параметров. Если наблюдения за одними сегментами рынков капитала поддерживают предположение о том, что для моделирования годовых процентных ставок могут применяться независимые и одинаково распределенные случайные величины, то другие наблюдения могут говорить в пользу тех моделей, в которых годовые процентные ставки — зависимые случайные величины. Каждый класс таких моделей можно разделить на те, в которых экономическая информация извлекается из уже наблюдавшихся процентных ставок, и на те, в которых процентные ставки строятся, исходя из другой экономической информации. Эти стохастические модели, основанные на анализе прошлых данных, изучаются в разд. 21.3 и 21.4.

3. Стохастические модели, которые определяются некоторыми характеристиками рынков капитала. В финансовой экономике разработаны теории операций на рынках капитала. Следствием одной из этих теорий является положение о том, что согласованное предсказание будущих финансовых условий определяется текущими курсами ценных бумаг и связями между ними. Например, связь между уровнями доходности и соответствующими временами погашения, которая дается кривой доходности, содержит информацию, которую можно применять при построении стохастических моделей будущих процентных ставок и, возможно, других экономических переменных. Эти соображения вводятся в разд. 21.5.

В этой главе вводятся элементы каждого из описанных выше методов учета изменчивости процентных ставок. Применение этих методов требует знания макроэкономики, прикладной статистики и финансовой экономики соответственно. Эти три метода излагаются в настоящей главе в том порядке, в каком они перечислены. Этот порядок совпадает с последовательностью их появления в актуарной литературе. Ни для одного из этих методов мы не можем представить здесь исчерпывающего изложения, поскольку для этого необходимо множество разнообразных предварительных сведений.

В предыдущих главах, в которых время и причина выбытия предполагались случайными величинами, внимание уделялось тем методам управления рисками, которые смягчали неблагоприятные финансовые последствия развития, отклоняющегося от ожидаемого. Для страховщика эти методы включали привлечение капитала, покупку перестрахования, увеличение надбавок «на случайность» к премиям и увеличение численности группы страхователей. В разд. 21.6 обсуждаются некоторые методы управления риском, связанным с процентными ставками.

21.1.2. Обозначения и предварительные сведения

Символом I_k мы будем обозначать случайную величину, интерпретируемую как эффективная процентная ставка на k-м расчетном периоде, т.е. I_k является *однопериодной* процентной ставкой для этого k-го периода: капитал размера 1 в конце периода имеет настоящую стоимость $1/(1 + I_k)$ на начало периода. В большинстве приложений, рассматриваемых в настоящей главе, под расчетным периодом будет пониматься год действия страхового договора. В большинстве ранних исследований предполагалось, что I_k, $k = 1, 2, \ldots$, имеет распределение, сосредоточенное в одной точке (называемое вырожденным), такое, что $\mathbf{P}(I_k = i) = 1$, $k = 1, 2, \ldots$.

Из неравенства Иенсена (1.3.3), в котором $u''(x) > 0$, может быть выведено одно непосредственное следствие предположения о том, что эффективная (однопериодная) процентная ставка является случайной величиной. Переформулируем это неравенство в виде $\mathbf{E}[u(X)] \geqslant u(\mathbf{E}[X])$. Если $u(x) = (1+x)^{-1}$ и $X = I_k$, то $u''(x) > 0$, $-1 < x$, и

$$\mathbf{E}[(1 + I_k)^{-1}] \geqslant [1 + \mathbf{E}(I_k)]^{-1}, \qquad (21.1.1)$$

причем равенство имеет место только в том случае, когда распределение I_k вырожденно.

На рис. 21.1.1, который является модификацией рис. 1.3.1, дано графическое доказательство неравенства (21.1.1).

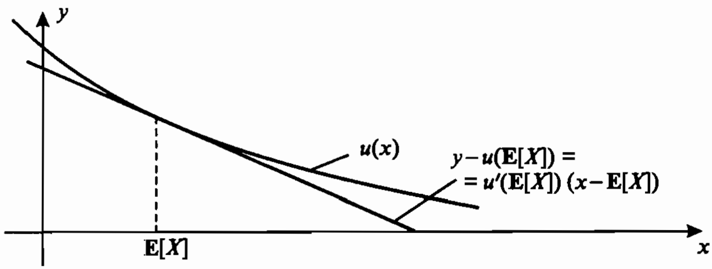


Рис. 21.1.1. Доказательство неравенства Иенсена, $u'(x) < 0$, $u''(x) > 0$

Неравенство (21.1.1) можно преобразовать в утверждение о влиянии случайной процентной ставки на актуарную настоящую стоимость, равную единице, выплачиваемую в конце одного периода. Актуарная настоящая стоимость не может быть меньше, чем настоящая стоимость выплаты при ожидаемой процентной ставке.

21.2. Сценарии

Сценарием называется схема предполагаемой последовательности событий. В соответствии с этим определением нахождение величины премий и резервов в страховании жизни требует знания сценариев для демографических и экономических явлений в будущем. В предыдущих главах рассматривался единый сценарий будущих процентных ставок, и эти ставки обычно предполагались одинаковыми. В настоящем разделе развивается подход, состоящий в создании и использовании множества сценариев для процентных ставок.

21.2.1. Детерминистические сценарии

В этой главе в качестве детерминистического сценария для процентных ставок выбирается последовательность $(i_1, i_2, i_3 \dots)$ одноипериодных процентных ставок на единичных периодах в будущем, которые определены актуарием для использования в актуарных расчетах. В качестве элементов этой последовательности выбраны наиболее вероятные, согласно представлениям актуария о будущей экономической ситуации, значения процентных ставок. Если актуарий уверен в величине будущих доходов от инвестирования, причем эта уверенность проистекает из предыдущих инвестиционных решений или из специальных знаний, то может быть достаточно одного сценария. В противном случае можно определить несколько сценариев, чтобы иметь возможность исследовать чувствительность актуарных настоящих стоимостей к изменениям в экономической обстановке.

Если используется несколько сценариев, то им приписываются номера $j = 1, 2, \dots, m$, где m — количество сценариев. Таким образом, вектор $({}_ji_1, {}_ji_2, {}_ji_3, \dots)$ обозначает сценарий номер j динамики процентных ставок. Далее, коэффициенты дисконтирования и стоимости аннуитетов, соответствующие сценарию j, обозначаются следующим образом:

$$ {}_jv^0 = 1, \quad {}_jv^k = \prod_{r=1}^{k} (1 + {}_ji_r)^{-1} \quad \text{и} \quad {}_j\ddot{a}_{\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_jv^k. $$

Пользуясь этими обозначениями и привлекая материал из гл. 4, 5 и 6, естественно определить

$$ {}_jA_x = \mathbf{E}[{}_jv^{K+1}] = \sum_{k=0}^{\infty} {}_jv^{k+1}\, {}_kp_x\, q_{x+k}, \tag{21.2.1a} $$

$$ {}_j\ddot{a}_x = \mathbf{E}[{}_j\ddot{a}_{\overline{K+1}|}] = \sum_{k=0}^{\infty} {}_j\ddot{a}_{\overline{k+1}|}\, {}_kp_x\, q_{x+k}, \tag{21.2.1b} $$

где K — случайная величина, определенная как число полных лет предстоящей жизни лица возраста x лет. Применяя принцип эквивалентности, мы получаем

$$ {}_jP_x = \frac{{}_jA_x}{{}_j\ddot{a}_x}. \tag{21.2.1c} $$

Символ ${}_jP_x$, стоящий в левой части соотношения (21.2.1c), не входит в Международную систему актуарных обозначений, и его можно спутать с символом, использованным в гл. 6 для обозначения нетто-премии по страхованию жизни с ограниченным сроком выплаты премий. Несмотря на возможную путаницу, мы будем использовать этот символ в настоящей главе, чтобы обеспечить согласованность с обозначениями, применяющимися для актуарных настоящих стоимостей, вычисляемых в соответствии со сценарием j.

Определение дисперсий для случайных величин потерь, неявно входящих в соотношения (21.2.1a)–(21.2.1c), требует осторожности. Упрощения, допустимые в случае постоянной процентной ставки, здесь неприменимы. Мы также должны помнить, что при рассматриваемом сценарии процентных ставок эти дисперсии отражают случайную природу только продолжительности предстоящей жизни.

Имеем

$$\mathbf{D}[{}_jv^{K+1}] = \sum_{k=0}^{K+1} {}_jv^{2(k+1)}{}_kp_x\, q_{x+1} - ({}_jA_x)^2 = {}^2_jA_x - ({}_jA_x)^2,$$

$$\mathbf{D}[{}_j\ddot{a}_{\overline{K+1}|}] = \sum_{k=0}^{\infty}({}_j\ddot{a}_{\overline{k+1}|})^2{}_kp_x\, q_{x+k} - ({}_j\ddot{a}_x)^2 = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{r=0}^{k}{}_jv^r\right)^2{}_kp_x\, q_{x+k} - ({}_j\ddot{a}_x)^2,$$

$$\mathbf{D}[{}_jv^{K+1} - {}_jP_x\, {}_j\ddot{a}_{\overline{K+1}|}] = \sum_{k=0}^{\infty}({}_jv^{k+1} - {}_jP_x\, {}_j\ddot{a}_{\overline{k+1}|})^2{}_kp_x\, q_{x+k}.$$

Пример 21.2.1. Определяются четыре сценария для процентных ставок:

j	${}_ji_1$	${}_ji_2$	${}_ji_3$	${}_ji_4$
1	0,06	0,06	0,06	0,06
2	0,06	0,03	0,03	0,03
3	0,06	0,09	0,09	0,09
4	0,06	0,03	0,09	0,03

В следующей таблице дается дискретное распределение пошаговой продолжительности предстоящей жизни лица (x):

k	${}_kp_x\, q_{x+k}$
0	0,1
1	0,2
2	0,3
3	0,4

Подсчитаем ${}_jv^k$, ${}_j\ddot{a}_{\overline{k}|}$ для $j = 1,2,3,4$ и $k = 0,1,2,3$ и ${}_jA_x$, ${}_j\ddot{a}_x$, ${}_jP_x$ для $j = 1,2,3,4$.

Решение.

	${}_jv^{k+1}$				${}_j\ddot{a}_{\overline{k+1}|}$			
j	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$
1	0,9434	0,8900	0,8396	0,7921	1,0000	1,9434	2,8334	3,6730
2	0,9434	0,9159	0,8892	0,8633	1,0000	1,9434	2,8593	3,7486
3	0,9434	0,8655	0,7940	0,7285	1,0000	1,9434	2,8089	3,6029
4	0,9434	0,9159	0,8403	0,8158	1,0000	1,9434	2,8593	3,6996

j	${}_jA_x$	${}_j\ddot{a}_x$	${}_jP_x$
1	0,8411	2,8079	0,2995
2	0,8896	2,8459	0,3126
3	0,7970	2,7725	0,2875
4	0,8559	2,8263	0,3028

▼

Пример 21.2.2. Воспользовавшись предположениями примера 21.2.1, подсчитаем $\sqrt{\mathbf{D}[{}_jv^{K+1}]}$ и $\sqrt{\mathbf{D}[{}_j\ddot{a}_{\overline{K+1}|}]}$, $j = 1,2,3,4$.

Решение.

j	${}_j v^{2(k+1)}$, $k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$({}_j\ddot a_{\overline{k+1}\rceil})^2$, $k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$
1	0,8900	0,7921	0,7049	0,6274	1,0000	3,7768	8,0282	13,4910
2	0,8900	0,8389	0,7908	0,7454	1,0000	3,7768	8,1757	14,0517
3	0,8900	0,7491	0,6305	0,5307	1,0000	3,7768	7,8899	12,9811
4	0,8900	0,8389	0,7061	0,6656	1,0000	3,7768	8,1757	13,6871

j	$\sqrt{\mathbf{D}[{}_j v^{K+1}]} = \sqrt{\mathbf{E}[{}_j v^{2(K+1)}] - (\mathbf{E}[{}_j v^{K+1}])^2}$	$\sqrt{\mathbf{D}[{}_j\ddot a_{\overline{K+1}\rceil}]} = \sqrt{\mathbf{E}[({}_j\ddot a_{\overline{K+1}\rceil})^2] - (\mathbf{E}[{}_j\ddot a_{\overline{K+1}\rceil}])^2}$
1	$\sqrt{0{,}7099 - (0{,}8411)^2} = 0{,}0490$	$\sqrt{8{,}6602 - (2{,}8079)^2} = 0{,}8808$
2	$\sqrt{0{,}7921 - (0{,}8896)^2} = 0{,}0265$	$\sqrt{8{,}9286 - (2{,}8459)^2} = 0{,}9108$
3	$\sqrt{0{,}6402 - (0{,}7970)^2} = 0{,}0704$	$\sqrt{8{,}4147 - (2{,}7725)^2} = 0{,}8532$
4	$\sqrt{0{,}7348 - (0{,}8559)^2} = 0{,}0469$	$\sqrt{8{,}7828 - (2{,}8263)^2} = 0{,}8915$

▼

21.2.2. Случайные сценарии: детерминированные процентные ставки

При построении модели процентных ставок будем считать, что актуарий предложил m вероятных сценариев. Следующим шагом может стать определение распределения вероятностей на множестве из этих m сценариев с привлечением методов, выявляющих индивидуальные вероятности. Символом $p(j)$ обозначается вероятность сценария j. Это — не функция вероятностей случайной величины индивидуальных страховых выплат, как в гл. 12.

Задание этих вероятностей должно отражать представление актуария о величине будущих доходов от инвестирования. Процесс выявления этих вероятностей тесно связан с процессом построения функции полезности, который пояснялся в гл. 1.

Актуарные настоящие стоимости определяются с использованием совместного распределения случайной величины пошаговой продолжительности предстоящей жизни K и сценария для процентных ставок J. В настоящей главе символ J будет применяться для обозначения случайной величины, понимаемой как индекс, приписанный сценарию динамики процентной ставки. Это — не причина выбытия, как в гл. 10. Будем предполагать, что с.в. K и J независимы. Звездочка в нижнем левом индексе, добавленная к обозначениям для актуарных настоящих стоимостей, будет показывать, что математическое ожидание берется относительно с.в. K и J:

$$ {}_*A_x = \mathbf{E}_J \mathbf{E}_{K|J}[{}_J v^{K+1}] = \mathbf{E}_J[{}_J A_x] = \sum_{j=1}^{m} {}_j A_x\, p(j), \tag{21.2.2a}$$

$$ {}_*\ddot a_x = \mathbf{E}_J \mathbf{E}_{K|J}[{}_J \ddot a_{\overline{K+1}\rceil}] = \mathbf{E}_J[{}_J \ddot a_x] = \sum_{j=1}^{m} {}_j A_x\, p(j). \tag{21.2.2b}$$

Сохраняя такое же соглашение для обозначений случайной величины потерь и премии для страхования на случай смерти с постоянной ежегодной премией в дискретной модели, мы получаем $L = {}_J v^{K+1} - {}_*P_x\, {}_J\ddot a_{\overline{k+1}\rceil}$. Используя принцип эквивалентности, приходим к равенству $\mathbf{E}_J \mathbf{E}_{K|J}[L] = 0$, или ${}_*P_x = {}_*A_x / {}_*\ddot a_x$, а дисперсия с.в. L

задается формулой

$$\mathbf{D}[L] = \sum_{j=1}^{m} \left[\sum_{k=0}^{\infty} ({}_j v^{k+1} - {}_*P_x \, {}_j\ddot{a}_{\overline{k+1}|})^2 \, {}_k p_x \, q_{x+k} \right] p(j).$$

Пример 21.2.3. Покажем, что величину ${}_*A_x$ из формулы (21.2.2a) можно также определить, исходя из выражения $\mathbf{E}_K \mathbf{E}_{J|K}[{}_J v^{K+1}]$.

Решение. В силу предположения о независимости величина процентных ставок не влияет на распределение смертности:

$$\mathbf{E}_K \mathbf{E}_{J|K}[{}_J v^{K+1}] = \mathbf{E}_K \left[\sum_{j=1}^{m} {}_j v^{K+1} p(j) \right]$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^{m} {}_j v^{k+1} p(j) \right] {}_k p_x \, q_{x+k} = \sum_{j=1}^{m} {}_j A_x p(j) = {}_*A_x. \qquad ▼$$

Предположим теперь, что имеется множество из n лиц одинакового возраста x, что всем входящим в это множество были предоставлены одинаковые договоры страхования на случай смерти с постоянными ежегодными премиями в дискретной модели и что с.в. K_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, пошаговой продолжительности предстоящей жизни одинаково распределены. Кроме того, с.в. K_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, и с.в. J взаимно независимы. Если нетто-премия определена согласно принципу эквивалентности, то случайная величина суммарных потерь для множества из n страхователей равна

$$\sum_{i=1}^{n} ({}_J v^{K_i+1} - {}_*P_x \, {}_J\ddot{a}_{\overline{K_i+1}|}).$$

Дисперсия величины суммарных потерь задается выражением

$$\mathbf{D}\left[\sum_{i=1}^{n} ({}_J v^{K_i+1} - {}_*P_x \, {}_J\ddot{a}_{\overline{K_i+1}|}) \right]$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{D}[{}_J v^{K_i+1} - {}_*P_x \, {}_J\ddot{a}_{\overline{K_i+1}|}]$$
$$+ n(n-1) \, \mathbf{Cov}({}_J v^{K_1+1} - {}_*P_x \, {}_J\ddot{a}_{\overline{K_1+1}|}, {}_J v^{K_2+1} - {}_*P_x \, {}_J\ddot{a}_{\overline{K_2+1}|})$$
$$= n\mathbf{E}[({}_J v^{K+1} - {}_*P_x \, {}_J\ddot{a}_{\overline{K+1}|})^2]$$
$$+ n(n-1)\mathbf{E}[({}_J v^{K_1+1} - {}_*P_x \, {}_J\ddot{a}_{\overline{K_1+1}|})({}_J v^{K_2+1} - {}_*P_x \, {}_J\ddot{a}_{\overline{K_2+1}|})]$$
$$= n\mathbf{E}_J \mathbf{E}_{K|J}[({}_J v^{K+1} - {}_*P_x \, {}_J\ddot{a}_{\overline{K+1}|})^2]$$
$$+ n(n-1)\mathbf{E}_J \mathbf{E}_{K|J}[({}_J v^{K_1+1} - {}_*P_x \, {}_J\ddot{a}_{\overline{K_1+1}|})({}_J v^{K_2+1} - {}_*P_x \, {}_J\ddot{a}_{\overline{K_2+1}|})]$$
$$= n\mathbf{D}[{}_J v^{K+1} - {}_*P_x \, {}_J\ddot{a}_{\overline{K+1}|}] + n(n-1) \left[\sum_{j=1}^{m} ({}_j A_x - {}_*P_x \, {}_j\ddot{a}_x)^2 p(j) \right]$$
$$= n \sum_{j=1}^{m} \left[\sum_{k=0}^{\infty} ({}_j v^{k+1} - {}_*P_x \, \ddot{a}_{\overline{k+1}|})^2 {}_k p_x \, q_{x+k} + (n-1)({}_j A_x - {}_*P_x \, \ddot{a}_x)^2 \right] p(j).$$

Если нас интересуют не суммарные потери по нашему портфелю рисков, состоящему из n тождественных страховых договоров, а средняя величина потерь, то

$$\mathbf{D}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}({}_Jv^{K_i+1} - {}_*P_x\, {}_J\ddot{a}_{\overline{K_i+1}|})\right]$$
$$= \frac{\mathbf{D}[{}_Jv^{K+1} - {}_*P_x\, {}_J\ddot{a}_{\overline{K+1}|}]}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\sum_{j=1}^{m}({}_jA_x - {}_*P_x\, {}_j\ddot{a}_x)^2 p(j). \quad (21.2.3)$$

При $n \to \infty$ первое слагаемое в равенстве (21.2.3) стремится к нулю, а второе остается положительным. Суммарные потери состоят из n компонент, причем эти компоненты не являются независимыми. При увеличении числа независимых страхователей в этой более сложной модели со случайными сценариями для процентных ставок в отличие от случая, когда продолжительности предстоящей жизни предполагались взаимно независимыми случайными величинами, а сценарий для процентных ставок был детерминистическим, дисперсия средних потерь не стремится к нулю. В этом можно убедиться, заметив, что при единственном детерминистическом сценарии для процентных ставок суммирование во втором слагаемом равенства (21.2.3) дает нуль. Тот факт, что на величину всех потерь влияет один и тот же случайно выбранный сценарий для процентных ставок, признан одной из проблем в управлении рисками.

Пример 21.2.4. В условиях примеров 21.2.1 и 21.2.2 предположим, что актуарием сделаны следующие вероятностные заключения о сценариях для процентных ставок: $p(1) = 0{,}5$, $p(2) = 0{,}2$, $p(3) = 0{,}2$ и $p(4) = 0{,}1$, и подсчитаем величины ${}_*P_x$ и $\mathbf{D}[{}_jv^{K+1} - {}_*P_x\, \ddot{a}_{\overline{K+1}|}]$.

Решение. Воспользовавшись принципом эквивалентности, получим

$$\mathbf{E}_J\mathbf{E}_{K|J}[{}_Jv^{K+1} - {}_*P_x\, {}_J\ddot{a}_{\overline{K+1}|}] = 0,$$
$$({}_1A_x - {}_*P_x\, {}_1\ddot{a}_x)p(1) + ({}_2A_x - {}_*P_x\, {}_2\ddot{a}_x)p(2)$$
$$+ ({}_3A_x - {}_*P_x\, {}_3\ddot{a}_x)p(3) + ({}_4A_x - {}_*P_x\, {}_4\ddot{a}_x)p(4) = 0,$$
$${}_*P_x = {}_*A_x/{}_*\ddot{a}_x = 0{,}8435/2{,}8103 = 0{,}3001,$$
$$\mathbf{D}[{}_Jv^{K+1} - {}_*P_x\, {}_J\ddot{a}_{\overline{K+1}|}] = \mathbf{E}_J\mathbf{E}_{K|J}[({}_Jv^{K+1} - 0{,}3001\, {}_J\ddot{a}_{\overline{K+1}|})^2]$$
$$= (0{,}0987)(0{,}5) + (0{,}0912)(0{,}2) + (0{,}1078)(0{,}2) + (0{,}0983)(0{,}1)$$
$$= (0{,}0990).$$ ▼

21.3. Независимые процентные ставки

В разд. 21.2.2 были введены случайные сценарии для процентных ставок. Заключения о вероятностях там делались на основе экономических знаний актуария. Сейчас мы рассмотрим стохастическую модель для процентных ставок, в которой выбор модели и оценка параметров модели зависят от имеющихся данных. Предположим, что актуарий решил моделировать интенсивности начисления процента и принял модель

$$\ln(1 + I_k) = \delta + \varepsilon_k, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots, \quad (21.3.1)$$

где δ — неотрицательная постоянная и ε_k — независимые и одинаково распределенные случайные величины с распределением $N(0, \sigma^2)$. Эта модель может рассматриваться как модель долгосрочной средней интенсивности начисления процента при наличии случайных возмущений. В силу предположений относительно распределения слагаемых, ответственных за эти случайные возмущения, возможны отрицательные интенсивности начисления процента. Некоторые актуарии считают из-за этого модель, определенную формулой (21.3.1), несостоятельной. Другие принимают ее, поскольку моделировать интенсивность начисления процента кажется естественным, а отрицательные значения наблюдаются в инвестиционных операциях. Итак, с.в. $\ln(1+I_k)$ имеют одинаковое распределение $N(0,\sigma^2)$, а с.в. $1+I_k$ имеют логнормальные распределения.

Логнормальное распределение было введено в табл. 14.2.1 как одно из распределений величины страховых выплат. Напомним, что, согласно этой таблице,

$$\mathbf{E}[1+I_k] = e^{\delta+\sigma^2/2} \geqslant 1, \qquad \mathbf{D}[1+I_k] = (e^{\sigma^2}-1)e^{2\delta+\sigma^2} \geqslant 0.$$

Логарифмом случайной величины, которая соответствует детерминированной накопленной процентной ставке $(1+i)^n$, является случайная величина

$$\ln \prod_{k=1}^{n}(1+I_k) = \sum_{k=1}^{n}\ln(1+I_k).$$

Согласно равенствам (21.3.1), она имеет распределение $N(n\delta, n\sigma^2)$. Поэтому функция накопленных процентов имеет логнормальное распределение с

$$\mathbf{E}\left[\prod_{k=1}^{n}(1+I_k)\right] = e^{n(\delta+\sigma^2/2)}, \qquad \mathbf{D}\left[\prod_{k=1}^{n}(1+I_k)\right] = (e^{\sigma^2}-1)e^{n(2\delta+\sigma^2)}.$$

Полезно заметить, что если $\sigma^2=0$, то математическое ожидание накопленных процентов равно $e^{n\delta}$ и дисперсия этой случайной величины равна нулю.

Логарифм коэффициента дисконтирования

$$\ln(1+I_k)^{-1} = -\ln(1+I_k) = -\delta-\varepsilon_k$$

имеет распределение $N(-\delta,\sigma^2)$, а $(1+I_k)^{-1}$ — логнормальное распределение с

$$\mathbf{E}[(1+I_k)^{-1}] = e^{-(\delta-\sigma^2/2)} > 0, \qquad \mathbf{D}[(1+I_k)^{-1}] = (e^{\sigma^2}-1)(e^{-2\delta+\sigma^2}) \geqslant 0.$$

Определим функцию дисконтирования как случайную величину

$$\tilde{v}_n = \prod_{k=1}^{n}(1+I_k)^{-1}, \qquad \tilde{v}_0 = 1.$$

Выбор символа $\tilde{v}_n$ мотивирован использованием символа v_n для обозначения коэффициента дисконтирования в разд. 4.3. Волна над символом указывает на то, что $\tilde{v}_n$ является случайной величиной. Далее, с.в. $\ln\tilde{v}_n = -\sum_{k=1}^{n}\ln(1+I_k)$ имеет распределение $N(-n\delta, n\sigma^2)$, а $\tilde{v}_n$ — логнормальное распределение с математическим ожиданием $\mathbf{E}[\tilde{v}_n] = e^{-n(\delta-\sigma^2/2)}$ и дисперсией

$$\mathbf{D}[\tilde{v}_n] = (e^{n\sigma^2}-1)e^{n(-2\delta+\sigma^2)}. \tag{21.3.2}$$

И снова, если $\sigma^2=0$, мы приходим к ранее излагавшимся в детерминистическом случае результатам.

Мы предположим, что с.в. I_k, $k=1,2,3,\ldots$, и с.в. K, пошаговая продолжительность предстоящей жизни, взаимно независимы, и рассмотрим более сложные актуарные модели. Актуарная настоящая стоимость страхования жизни с выплатой размера единица равна

$$
\begin{aligned}
{}_*A_x &= \mathbf{E}[\tilde{v}_{K+1}] = \mathbf{E}_{\tilde{v}}\mathbf{E}_{K\,|\,\tilde{v}}[\tilde{v}_{K+1}] \\
&= \mathbf{E}_{\tilde{v}}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{v}_{k+1}\,{}_kp_x\,q_{x+k}\right] = \sum_{k=0}^{\infty}e^{-(\delta-\sigma^2/2)(k+1)}\,{}_kp_x\,q_{x+k}.
\end{aligned}
\tag{21.3.3}
$$

Актуарная настоящая стоимость ${}_*A_x$ вычисляется при детерминированной интенсивности начисления процента $\delta - \sigma^2/2$. Для того чтобы измерить риск, положим

$$
\begin{aligned}
\mathbf{D}[\tilde{v}_{K+1}] &= \mathbf{E}[(\tilde{v}_{K+1})^2] - ({}_*A_x)^2 = \mathbf{E}_{\tilde{v}}\mathbf{E}_{K\,|\,\tilde{v}}[(\tilde{v}_{K+1})^2] - ({}_*A_x)^2 \\
&= \mathbf{E}_{\tilde{v}}\left[\sum_{k=0}^{\infty}(\tilde{v}_{k+1})^2\,{}_kp_x\,q_{x+k}\right] - ({}_*A_x)^2.
\end{aligned}
$$

Поскольку с.в. $\tilde{v}_{k+1}$ имеет логнормальное распределение с параметрами $-(k+1)\delta$ и $(k+1)\sigma^2$, мы можем вычислить $\mathbf{E}[(\tilde{v}_{k+1})^2]$, второй центральный момент, следующим образом:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}[(\tilde{v}_{k+1})^2] = \mathbf{D}[\tilde{v}_{k+1}] + (\mathbf{E}[\tilde{v}_{k+1}])^2 &= (e^{(k+1)\sigma^2} - 1)e^{(k+1)(-2\delta+\sigma^2)} + e^{-2(k+1)(\delta-\sigma^2/2)} \\
&= e^{-(k+1)[2(\delta-\sigma^2)]},
\end{aligned}
\tag{21.3.4}
$$

и поэтому

$$
\mathbf{D}[\tilde{v}_{K+1}] = \sum_{k=0}^{\infty}e^{-(k+1)[2(\delta-\sigma^2)]}\,{}_kp_x\,q_{x+k} - ({}_*A_x)^2.
$$

Можно видеть, что при $\sigma^2 = 0$ мы приходим к результатам гл. 4.

Выражения для актуарных настоящих стоимостей аннуитетов требуют бо́льших вычислений, в процессе которых мы по-прежнему будем предполагать, что с.в. I_k, $k = 1, 2, \ldots,$ и K взаимно независимы.

Положим

$$
\ddot{a}_{\overline{K}|\tilde{v}} = \sum_{s=0}^{K-1}\tilde{v}_s;
$$

тогда

$$
\mathbf{E}_{\tilde{v}\,|\,K}[\ddot{a}_{\overline{K+1}|\tilde{v}}] = \sum_{s=0}^{K}e^{s(-\delta+\sigma^2/2)} = \ddot{a}_{\overline{K+1}|\delta-\sigma^2/2}
$$

и

$$
{}_*\ddot{a}_x = \mathbf{E}[\ddot{a}_{\overline{K+1}|\tilde{v}}] = \mathbf{E}_K\mathbf{E}_{\tilde{v}\,|\,K}[\ddot{a}_{\overline{K+1}|\tilde{v}}] = \mathbf{E}_K[\ddot{a}_{\overline{K+1}|\delta-\sigma^2/2}] = \sum_{k=0}^{\infty}(\ddot{a}_{\overline{k+1}|\delta-\sigma^2/2})\,{}_kp_x\,q_{x+k}.
\tag{21.3.5}
$$

Чтобы вычислить $\mathbf{D}[\ddot{a}_{\overline{K+1}|\tilde{v}}]$, начнем с соотношений

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\tilde{v}}\left[\left(\sum_{s=0}^{k}\tilde{v}_s\right)^2\right] &= \mathbf{E}_{\tilde{v}}[(1 + \tilde{v}_1 + \tilde{v}_2 + \cdots + \tilde{v}_k)^2] = \mathbf{E}_{\tilde{v}}\left[\sum_{s=0}^{k}(\tilde{v}_s)^2 + 2\sum_{s=0}^{k-1}\sum_{r=s+1}^{k}\tilde{v}_s\tilde{v}_r\right] \\
&= \sum_{s=0}^{k}e^{-s[2(\delta-\sigma^2)]} + 2\sum_{s=0}^{k-1}\sum_{r=s+1}^{k}\mathbf{E}[\tilde{v}_s\tilde{v}_r].
\end{aligned}
$$

Выражения вида $\mathbf{E}[(\tilde{v}_s)^2]$ были вычислены с применением соотношения (21.3.4).

Рассмотрим выражения под знаком двойного суммирования при $s < r$:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[\tilde{v}_s\tilde{v}_r] &= \mathbf{E}[(1+I_1)^{-2}\cdots(1+I_s)^{-2}(1+I_{s+1})^{-1}\cdots(1+I_r)^{-1}]\\ &= e^{-s[2(\delta-\sigma^2)]-(r-s)(\delta-\sigma^2/2)}. \qquad (21.3.6)\end{aligned}$$

Для вывода формулы (21.3.6) использовались независимость с.в. I_k, $k = 1, 2, \ldots$, и соотношения (21.3.2) и (21.3.4). Итак, мы получаем

$$\mathbf{E}_{\tilde{v}}\left[\left(\sum_{s=0}^{k}\tilde{v}_s\right)^2\right] = \sum_{s=0}^{k} e^{-s[2(\delta-\sigma^2)]} + 2\sum_{s=0}^{k-1}\sum_{r=s+1}^{k} e^{-s[2(\delta-\sigma^2)]-(r-s)(\delta-\sigma^2/2)}. \qquad (21.3.7)$$

Двойное суммирование в равенстве (21.3.7) можно упростить, изменяя порядок суммирования и применяя формулу суммирования геометрической прогрессии. Мы получаем

$$2\sum_{r=1}^{k} e^{-r(\delta-\sigma^2)}\sum_{s=0}^{r-1} e^{-s[\delta-(3\sigma^2/2)]} = 2\sum_{r=1}^{k} e^{-r(\delta-\sigma^2/2)}\frac{1-e^{-r[\delta-(3\sigma^2/2)]}}{1-e^{-[\delta-(3\sigma^2/2)]}}. \qquad (21.3.8)$$

Заметим, что суммирование в формуле (21.3.8) может начинаться с $r = 0$, поскольку соответствующее слагаемое равно нулю.

Объединяя промежуточные результаты формул (21.3.7) и (21.3.8), мы получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{D}[\ddot{a}_{\overline{K+1}|\tilde{v}}] &= \mathbf{E}_K\mathbf{E}_{\tilde{v}|K}[(\ddot{a}_{\overline{K+1}|\tilde{v}})^2] - ({}_*\ddot{a}_x)^2\\ &= \mathbf{E}_K\left[\sum_{s=0}^{K} e^{-s[2(\delta-\sigma^2)]} + 2\sum_{r=0}^{K}\frac{e^{-r(\delta-\sigma^2/2)} - e^{-r[2\delta-2\sigma^2]}}{1-e^{-[\delta-(3\sigma^2/2)]}}\right] - ({}_*\ddot{a}_x)^2\\ &= {}^{\alpha}\ddot{a}_x + 2\frac{{}_*\ddot{a}_x - {}^{\alpha}\ddot{a}_x}{1-e^{-[\delta-(3\sigma^2/2)]}} - ({}_*\ddot{a}_x)^2, \qquad (21.3.9)\end{aligned}$$

где величина ${}^{\alpha}\ddot{a}_x$ вычислена при интенсивности начисления процента, равной $2(\delta - \sigma^2)$.

Если $\sigma^2 = 0$, то соотношение (21.3.9) приобретает вид ${}^2\ddot{a}_x + 2(\ddot{a}_x - {}^2a_x)/d - (\ddot{a}_x)^2$, где величина ${}^2\ddot{a}_x$ вычислена при интенсивности начисления процента 2δ, а $\ddot{a}_x$ — при интенсивности начисления процента δ.

Этот результат можно сравнить с формулой (5.3.8), где

$$\mathbf{D}[\ddot{a}_{\overline{K+1}|}] = \frac{{}^2A_x - (A_x)^2}{d^2} = \frac{1-(2d-d^2)\,{}^2\ddot{a}_x - 1 + 2d\ddot{a}_x - d^2\ddot{a}_x^2}{d^2} = {}^2\ddot{a}_x + \frac{\ddot{a}_x - {}^2\ddot{a}_x}{d} - (\ddot{a}_x)^2;$$

это еще раз показывает, что при $\sigma^2 = 0$ мы приходим к результатам, получавшимся для детерминированных процентных ставок.

Пример 21.3.1. Предположим, что $\ln(1 + I_k) = \delta + \varepsilon_k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, где $\delta = 0{,}06$ и слагаемое, ответственное за случайные возмущения, имеет распределение $N(0,\ 0{,}0001)$. Случайная величина пошаговой продолжительности предстоящей жизни имеет дискретное распределение, показанное в примере 21.2.1. Вычислим (a) $\mathbf{E}[\tilde{v}_{K+1}]$, (b) $\mathbf{D}[\tilde{v}_{K+1}]$, (c) $\mathbf{E}[\ddot{a}_{\overline{K+1}|\tilde{v}}]$ и (d) $\mathbf{D}[\ddot{a}_{\overline{K+1}|\tilde{v}}]$. Мы будем предполагать, что с.в. K и I_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$, независимы.

Решение. (a) Согласно (21.3.3),

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[\tilde{v}_{K+1}] &= \sum_{k=0}^{3} e^{-(0{,}06-0{,}00005)(k+1)}\,{}_kp_x\,q_{x+k}\\ &= (0{,}9418)(0{,}1)+(0{,}8870)(0{,}2)+(0{,}8354)(0{,}3)+(0{,}7868)(0{,}4)=0{,}8369.\end{aligned}$$

(b) Согласно (21.3.4),

$$\begin{aligned}\mathbf{D}[\tilde{v}_{K+1}] &= \sum_{k=0}^{3} e^{-[2(0{,}06-0{,}00001)](k+1)}\,{}_kp_x\,q_{x+k}-({}_*A_x)^2\\ &= (0{,}8871)(0{,}1)+(0{,}7869)(0{,}2)+(0{,}6981)(0{,}3)+(0{,}6193)(0{,}4)-(0{,}8369)^2\\ &= 0{,}0028.\end{aligned}$$

(c) Получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[\ddot{a}_{\overline{K+1}|\tilde{v}}] &= \sum_{k=0}^{3}\sum_{s=0}^{k} e^{-s(0{,}06-0{,}00005)}\,{}_kp_x\,q_{x+k}\\ &= (1)(0{,}1)+(1{,}9418)(0{,}2)+(2{,}8288)(0{,}3)+(3{,}6642)(0{,}4)=2{,}8027.\end{aligned}$$

(d) Вычисление величины $\mathbf{D}[\ddot{a}_{\overline{K+1}|\tilde{v}}]$ начинается с величины ${}^{\alpha}\ddot{a}_x$, рассчитанной при интенсивности начисления процента $2(\delta-\sigma^2)=0{,}1198$:

$${}^{\alpha}\ddot{a}_x=(1)(0,1)+(1{,}8871)(0{,}2)+(2{,}6740)(0{,}3)+(3{,}3721)(0{,}4)=2{,}6285,$$

и, согласно (21.3.9),

$$\mathbf{D}[\ddot{a}_{\overline{K+1}|\tilde{v}}]=2{,}6285+2\,\frac{2{,}8027-2{,}6285}{1-e^{-0{,}05985}}-(2{,}8027)^2=8{,}6257-7{,}8551=0{,}7705. \quad ▼$$

Пример 21.3.2. Примем предположения о распределении величин $\ln(1+I_k)$ и K, сформулированные в примере 21.3.1. Найдем функцию распределения с.в. $\tilde{v}_{K+1}$.

Решение.

$$\mathbf{P}(\tilde{v}_{K+1}\leqslant y)=\mathbf{E}_K\mathbf{P}(\tilde{v}_{K+1}\leqslant y\,|\,K=k)=\sum_{k=0}^{3}\mathbf{P}(\tilde{v}_{k+1}\leqslant y)\,{}_kp_x\,q_{x+k}.$$

Воспользуемся теперь тем, что

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\tilde{v}_{K+1}\leqslant y) &= \sum_{k=0}^{3}\mathbf{P}(\ln\tilde{v}_{k+1}\leqslant\ln y)\,{}_kp_x\,q_{x+k}\\ &= \sum_{k=0}^{3}\mathbf{P}\left[\frac{\ln\tilde{v}_{k+1}+(k+1)\delta}{\sqrt{(k+1)\sigma^2}}\leqslant\frac{\ln y+(k+1)\delta}{\sqrt{(k+1)\sigma^2}}\right]{}_kp_x\,q_{x+k}\\ &= \sum_{k=0}^{3}\Phi\left[\frac{\ln y+(k+1)\delta}{\sqrt{(k+1)\sigma^2}}\right]{}_kp_x\,q_{x+k}=\sum_{k=0}^{3}\Phi\left[\frac{\ln y+(k+1)(0{,}06)}{\sqrt{(k+1)(0{,}01)}}\right]{}_kp_x\,q_{x+k},\end{aligned}$$

где $\Phi(w)$ является функцией распределения случайной величины с распределением $N(0,1)$. В качестве примера положим $y=\mathbf{E}[\tilde{v}_{K+1}]={}_*A_x=0{,}8369$ и вычислим $\mathbf{P}(\tilde{v}_{K+1}\leqslant 0{,}8369)=\Phi(-11{,}8051)(0{,}1)+\Phi(-4{,}1048)(0{,}2)+\Phi(0{,}1125)(0{,}3)+\Phi(3{,}0945)(0{,}4)$

$= 0{,}5630$. Так как медиана с.в. $\tilde{v}_{K+1}$ меньше ее среднего, это свидетельство того, что ее распределение асимметрично с большей массой левее среднего. ▼

21.4. Зависимые процентные ставки

В финансовой экономике ведутся продолжительные дискуссии о том, можно ли применять независимые и одинаково распределенные случайные величины для моделирования эффективных процентных ставок в различных классах инвестирования. В том случае, когда актуарий считает достаточными свидетельства в пользу гипотезы о независимости и одинаковой распределенности, можно применять методы, развитые в разд. 21.3. Актуарий может вносить в эти методы изменения. Например, в качестве распределения случайных величин ε_k, слагаемых, ответственных за случайные возмущения, не обязательно брать распределение $N(0,\sigma^2)$.

Если актуарий отвергает гипотезу, что эффективные процентные ставки являются независимыми и одинаково распределенными случайными величинами, то возникают две возможности. Первая состоит в том, чтобы разработать многомерную модель, которая не меняется с течением времени. Такие модели называются стационарными. Простая модель из этого класса будет предложена в разд. 21.4.1.

Вторая возможность — применить модель, в которой учитывается возможность структурных сдвигов в инвестиционном окружении. Такие модели мы обсуждать не будем.

21.4.1. Модель скользящего среднего

В настоящем разделе мы ограничиваемся моделью

$$\ln(1+I_k) = \delta + \varepsilon_k - \theta\varepsilon_{k-1}, \qquad k = 1,2,3,\ldots, \tag{21.4.1}$$

где $\delta > 0$ и ε_k, $k = 1,2,3,\ldots$, являются взаимно независимыми случайными величинами, каждая из которых имеет распределение $N(0,\sigma^2)$. Кроме того, $|\theta| \leqslant 1$ и ε_0 известно. Если $\theta = 0$, эта модель превращается в модель (21.3.1). Она называется *моделью скользящего среднего первого порядка*, или, пользуясь сокращением, MA(1).

Смысл этой модели состоит в том, что интенсивность начисления процента имеет долгосрочное среднее значение δ, но случайные экономические возмущения порождают отклонения от этого среднего. Возмущение ε_k, отвечающее периоду с номером k, оказывает отсроченное и уменьшенное влияние размера $-\theta\varepsilon_k$ на интенсивность начисления процента в интервале с номером $k+1$.

Мы определим $\tilde{v}_n$ так же, как в разд. 21.3:

$$\tilde{v}_n = \prod_{k=1}^{n}(1+I_k)^{-1} = e^{-\sum_1^n(\delta+\varepsilon_k-\theta\varepsilon_{k-1})};$$

тогда

$$\ln\tilde{v}_n = -\sum_{k=1}^{n}(\delta+\varepsilon_k-\theta\varepsilon_{k-1}) = -n\delta+\varepsilon_n-\theta\varepsilon_0+(1-\theta)\sum_{k=1}^{n-1}\varepsilon_k$$

и

$$\mathbf{E}[\tilde{v}_n] = \mathbf{E}[e^{-[n\delta+\varepsilon_n-\theta\varepsilon_0+(1-\theta)\sum_{k=1}^{n-1}\varepsilon_k]}].$$

Мы предположили, что с.в. ε_k, $k = 1,2,\ldots,n$, взаимно независимы и каждая из них имеет распределение $N(0,\sigma^2)$. Поэтому, вспоминая вид производящей функции моментов распределения $N(0,\sigma^2)$, получаем

$$\mathbf{E}[e^{t\varepsilon_k}] = e^{t^2\sigma^2/2} = M(t), \qquad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Этот результат позволяет нам записать

$$\mathbf{E}[\tilde{v}_n] = e^{-n\delta} M(-1) e^{\theta\varepsilon_0} M(\theta-1)^{n-1} = C_1 e^{-n\delta'}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

где $C_1 = M(-1)e^{\theta\varepsilon_0}M(\theta-1)^{-1}$ и $\delta' = \delta - \ln M(\theta - 1)$. Заметим, что, так же как в разд. 21.3, мы полагаем $\tilde{v}_0 = 1$ и $\mathbf{E}[\tilde{v}_0] = 1$, а не $\mathbf{E}[\tilde{v}_0] = C_1$. Если $\theta = 0$, то $\delta' = \delta - \ln M(-1)$, $C_1 = 1$ и $\mathbf{E}[\tilde{v}_n] = e^{-n[\delta - \ln M(-1)]} = e^{-n(\delta - \sigma^2/2)}$, что согласуется с соотношением (21.3.2) для логнормальной модели с условием независимости.

Располагая полученными выше предварительными результатами, мы можем вычислять актуарные настоящие стоимости. Первые шаги — те же, что и в формуле (21.3.3):

$${}_*A_x = \mathbf{E}[\tilde{v}_{K+1}] = \mathbf{E}_{\tilde{v}}\mathbf{E}_{K|\tilde{v}}[\tilde{v}_{K+1}] = \mathbf{E}_{\tilde{v}}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{v}_{k+1}\, {}_kp_x\, q_{x+k}\right] = C_1 \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(k+1)\delta'}\, {}_kp_x\, q_{x+k}. \tag{21.4.3}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}{}_*\ddot{a}_x &= \mathbf{E}[\ddot{a}_{\overline{K+1}|\tilde{v}}] = \mathbf{E}_{\tilde{v}}\mathbf{E}_{K\,|\,\tilde{v}}[\ddot{a}_{\overline{K+1}|\tilde{v}}] = \mathbf{E}_{\tilde{v}}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(1 + \sum_{s=1}^{k} \tilde{v}_s\right) {}_kp_x\, q_{x+k}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(1 + \sum_{s=1}^{k} C_1 e^{-s\delta'}\right) {}_kp_x\, q_{x+k} = \sum_{k=0}^{\infty}(1 + C_1\, a_{\overline{k}|\delta'})\, {}_kp_x\, q_{x+k}. \end{aligned} \tag{21.4.4}$$

Чтобы продолжать рассуждения, как в разд. 21.3, мы должны получить формулы для $\mathbf{E}[\tilde{v}_r\tilde{v}_s]$, $s < r$, и заметить, что

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[(\tilde{v}_n)^2] &= \mathbf{E}[e^{-2[n\delta + \varepsilon_n - \theta\varepsilon_0 + (1-\theta)\sum_{k=1}^{n-1}\varepsilon_k]}] \\ &= e^{-2n\delta}\mathbf{E}[e^{-2\varepsilon_n}]\mathbf{E}[e^{2\theta\varepsilon_0}]\mathbf{E}[e^{-2(1-\theta)\varepsilon}]^{n-1} = e^{-2n\delta}M(-2)e^{2\theta\varepsilon_0}M(2\theta-2)^{n-1}.\end{aligned}$$

Мы пользуемся сокращенными обозначениями

$$\mathbf{E}[(\tilde{v}_n)^2] = C_2 e^{-\delta'' n}, \tag{21.4.5}$$

где $\delta'' = 2\delta - \ln M(2\theta - 2)$ и $C_2 = M(-2)e^{2\theta\varepsilon_0}/[M(2\theta-2)]$.

Величина $\mathbf{E}[\tilde{v}_r\tilde{v}_s]$ появляется в выражении для $\mathbf{D}[\ddot{a}_{\overline{K+1}|\tilde{v}}]$. Заметим, что $\mathbf{E}[\tilde{v}_r\tilde{v}_0] = \mathbf{E}[\tilde{v}_r]$. Если $r > s \geqslant 1$, то

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[\tilde{v}_r\tilde{v}_s] &= \mathbf{E}[e^{-[r\delta + \varepsilon_r - \theta\varepsilon_0 + (1-\theta)\sum_{j=1}^{r-1}\varepsilon_j]}e^{-[s\delta + \varepsilon_s - \theta\varepsilon_0 + (1-\theta)\sum_{j=1}^{s-1}\varepsilon_j]}] \\ &= e^{-(r+s)\delta}\mathbf{E}[e^{-\varepsilon_r}]\mathbf{E}[e^{(\theta-2)\varepsilon_s}]\mathbf{E}[e^{2\theta\varepsilon_0}]\mathbf{E}[e^{-2(1-\theta)\sum_{j=1}^{s-1}\varepsilon_j}]\mathbf{E}[e^{-(1-\theta)\sum_{j=s+1}^{r-1}\varepsilon_j}] \\ &= e^{-(r+s)\delta}M(-1)M(\theta-2)e^{2\theta\varepsilon_0}M[2(\theta-1)]^{s-1}M(\theta-1)^{r-s-1} \\ &= C_3 e^{-\delta''}e^{-\delta'(r-s)},\end{aligned}$$

где δ' и δ'' такие же, как выбирались ранее, и

$$C_3 = M(-1)M(\theta-2)e^{2\theta\varepsilon_0}M[2(\theta-1)]^{-1}M(\theta-1)^{-1}.$$

Используя эти результаты, мы выводим формулу для дисперсии случайных величин настоящих стоимостей в модели, где интенсивность начисления процента подчиняется модели MA(1):

$$\mathbf{D}[\tilde{v}_{K+1}] = \mathbf{E}[(\tilde{v}_{K+1})^2] - ({}_*A_x)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} C_2 e^{-\delta''(k+1)}\, {}_kp_x\, q_{x+k} - ({}_*A_x)^2. \qquad (21.4.6)$$

При выведении этих равенств мы использовали формулы (21.4.3) и (21.4.5).

Для нахождения величины $\mathbf{D}[\ddot{a}_{\overline{K+1}|\tilde{v}}]$ начнем с формулы

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\tilde{v}}\left[\left(\sum_{s=0}^{k}\tilde{v}_s\right)^2\right] &= \mathbf{E}_{\tilde{v}}\left[\left(1+\sum_{s=1}^{k}\tilde{v}_s^2\right) + 2\sum_{s=0}^{k-1}\sum_{r=s+1}^{k}\tilde{v}_r\tilde{v}_s\right] \\ &= \left(1+\sum_{s=1}^{k}C_2e^{-\delta'' s}\right) + 2\left(\sum_{r=1}^{k}C_2e^{-r\delta'} + \sum_{s=1}^{k-1}\sum_{r=s+1}^{k}C_3e^{-\delta'' s-\delta'(r-s)}\right).\end{aligned} \qquad (21.4.7)$$

Таким образом,

$$\mathbf{D}[\ddot{a}_{\overline{K+1}|\tilde{v}}] = \sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{E}_{\tilde{v}}\left[\left(1+\sum_{s=1}^{k}\tilde{v}_s\right)^2\right]{}_kp_x\, q_{x+k} - ({}_*\ddot{a}_x)^2, \qquad (21.4.8)$$

а выражения для слагаемых в правой части даются формулами (21.4.7) и (21.4.4).

Пример 21.4.1. Предположим, что выражение $\ln(1+I_k)$ определяется формулой (21.4.1) при $\delta = 0{,}06$, $\mathbf{D}[\varepsilon_k] = 0{,}0001$, $\theta = -0{,}8$ и $\varepsilon_0 = 0$. Определим (a) δ', (b) C_1, (c) δ'', (d) C_2 и (e) C_3.

Решение. (a) $\delta' = \delta - \ln M(\theta-1) = 0{,}06 - \ln(e^{(-0{,}8-1)^2(0{,}00001)/2}) = 0{,}05984$.

(b) $C_1 = \dfrac{M(-1)e^{\theta\varepsilon_0}}{M(\theta-1)} = e^{(0{,}00001)/2}e^{-(1{,}8)^2(0{,}00001)/2} = 0{,}99989$.

(c) $\delta'' = 2\delta - \ln M[2(\theta-1)] = 0{,}12 - \ln(e^{[2(-1{,}8)]^2(0{,}00001)/2}) = 0{,}119352$.

(d) $C_2 = \dfrac{M(-2)e^{2\theta\varepsilon_0}}{M(2\theta-2)} = \dfrac{e^{(-2)^2(0{,}00001)/2}}{e^{(-3{,}6)^2(0{,}00001)/2}} = 0{,}99955$.

(e) $C_3 = \dfrac{M(-1)M(\theta-2)e^{2\theta\varepsilon_0}}{M(2\theta-2)M(\theta-1)} = \dfrac{e^{(0{,}00001)/2}e^{(-2{,}8)^2(0{,}00001)/2}}{e^{(-3{,}6)^2(0{,}00001)/2}e^{(-1{,}8)^2(0{,}00001)/2}} = 0{,}99963$. ▼

Пример 21.4.2. В модели процентных ставок из примера 21.4.1 для функции дожития из примера 21.2.1 определим (a) $\mathbf{E}[\tilde{v}_{K+1}]$, (b) $\mathbf{D}[\tilde{v}_{K+1}]$, (c) $\mathbf{E}[\ddot{a}_{\overline{K+1}|\tilde{v}}]$ и (d) $\mathbf{D}[\ddot{a}_{\overline{K+1}|\tilde{v}}]$,

Решение. (a) Согласно (21.3.4),

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[\tilde{v}_{K+1}] &= \mathbf{E}_K\mathbf{E}_{\tilde{v}|K}[\tilde{v}_{K+1}] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}C_1e^{-(k+1)\delta'}\,{}_kp_x\,q_{x+k} = (0{,}99989)\sum_{k=0}^{3}C_1e^{-(k+1)(0{,}05984)}\,{}_kp_x\,q_{x+k} \\ &= (0{,}99989)[(0{,}94192)(0{,}1) + (0{,}88720)(0{,}2) + (0{,}83567)(0{,}3) + (0{,}78713)(0{,}4)] \\ &= 0{,}83710.\end{aligned}$$

(b) Согласно (21.4.6),

$$\begin{aligned}\mathbf{D}[\tilde{v}_{K+1}] &= \sum_{k=0}^{3} C_2 e^{-\delta''(k+1)}{}_k p_x\, q_{x+k} - ({}_*A_x)^2 \\ &= (0{,}99955)[(0{,}88721)(0{,}1) + (0{,}78714)(0{,}2) \\ &\qquad + (0{,}69836)(0{,}3) + (0{,}61959)(0{,}4)] - (0{,}83710)^2 = 0{,}0024.\end{aligned}$$

(c) Получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[\ddot{a}_{\overline{K+1}|\tilde{v}}] &= \mathbf{E}_{\tilde{v}}\mathbf{E}_{K\,|\,\tilde{v}}[\ddot{a}_{\overline{K+1}|\tilde{v}}] = \sum_{k=0}^{3}\left(1 + \sum_{s=1}^{k} C_1 e^{-s\delta'}\right){}_k p_x\, q_{x+k} \\ &= (1)(0{,}1) + (1{,}94181)(0{,}2) + (2{,}82892)(0{,}3) + (3{,}66450)(0{,}4) = 2{,}80284\end{aligned}$$

(d) Воспользовавшись формулой (21.4.7), вычислим сначала $\mathbf{E}_{\tilde{v}}[(1 + \sum_{s=1}^{k} \tilde{v}_s)^2]$ для $k = 0, 1, 2, 3$. Эти вычисления сведены в следующую таблицу:

k	$\mathbf{E}_{\tilde{v}}[(1 + \sum_{s=1}^{k} \tilde{v}_s)^2]$	
0	1	$= 1$
1	$[1 + C_2 e^{-\delta''} + 2C_1 e^{-\delta'}]$	$= 3{,}77043$
2	$[1 + C_2(e^{-\delta''} + e^{-2\delta''}) + 2(C_1 e^{-\delta'} + C_1 e^{-2\delta'} + C_3 e^{-\delta''-\delta'})]$	$= 8{,}00214$
3	$[1 + C_2(e^{-\delta''} + e^{-2\delta''} + e^{-3\delta''}) + 2(C_1 e^{-\delta'} + e^{-2\delta'} + e^{-3\delta'})$ $+ C_3(e^{-\delta''-\delta'} + e^{-\delta''-2\delta'}) + C_3(e^{-2\delta''-\delta''})]$	$= 13{,}42729$

$$\begin{aligned}\mathbf{D}[\ddot{a}_{\overline{K+1}|\tilde{v}}] &= (1)(0{,}1) + (3{,}77043)(0{,}2) + (8{,}00214)(0{,}3) + (13{,}42729)(0{,}4) - (2{,}80284)^2 \\ &= 0{,}7699.\end{aligned}$$

▼

21.4.2. Реализация

В разд. 21.3 и 21.4.1 показано, что если процентные ставки предполагаются случайными величинами, то вывод формул для моментов случайных величин настоящих стоимостей может состоять из нескольких этапов. Аналогичные шаги могут применяться к другим статистическим моделям для $X_k = \ln(1 + I_k)$, принадлежащим к тому же классу моделей, а именно, к

(a) авторегрессионной модели первого порядка AR(1),

$$(X_k - \delta) = \phi(X_{k-1} - \delta) + \varepsilon_k, \tag{21.4.9a}$$

(b) AR(1) и MA(1),

$$(X_k - \delta) - \phi(X_{k-1} - \delta) = \varepsilon_k - \theta\varepsilon_{k-1}, \tag{21.4.9b}$$

(c) AR(1) для первых разностей,

$$(X_k - X_{k-1}) - \phi(X_{k-1} - X_{k-2}) = \varepsilon_k. \tag{21.4.9c}$$

Выбор подходящей модели для интенсивности начисления процента и оценка входящих в нее параметров относится к области статистики.

Мы не касались важной задачи нахождения функции распределения случайных величин настоящих стоимостей. Техника, использованная в разд. 4.2, 5.2, 6.2 и 7.2, не годится для случая, когда с.в. K и с.в. $\tilde{v}_k$, пошаговая продолжительность предстоящей жизни и коэффициенты дисконтирования, зависимы и заданы своим совместным распределением.

В предыдущих главах, в которых случайными были только пошаговые продолжительности предстоящей жизни, предлагались аппроксимации для распределения потерь по портфелю рисков. При этом мы предполагали, что случайные величины продолжительности предстоящей жизни взаимно независимы. Обычно такие рассуждения используют результат типа центральной предельной теоремы, который обосновывает использование аппроксимирующих нормальных распределений. В случае когда каждая компонента случайных величин настоящих стоимостей является функцией одного и того же процесса процентных ставок, эти случайные величины более не являются независимыми, что иллюстрируется соотношением (21.2.3). Таким образом, когда процентные ставки также являются случайными величинами, распределение суммарных потерь по портфелю случайных величин настоящих стоимостей не может быть, как обычно, приближено с использованием нормального распределения.

К трем задачам для портфеля страховых рисков, оценке моментов случайных величин настоящей стоимости, аппроксимации функции распределения настоящей стоимости, аппроксимации функции распределения настоящей стоимости потерь, имеются подходы, основанные на имитационном моделировании. Опираясь на реализации значений случайной величины с распределением $N(0,\sigma^2)$, можно генерировать выборочные траектории $(I_1, I_2, \dots)$ для таких моделей, как в (21.3.1), (21.4.1) и (21.4.6 a, b и c). Если $\{I_k\}$, последовательность будущих эффективных процентных ставок, и K, полное число лет предстоящей жизни, предполагаются независимыми, то стандартными методами можно построить эмпирическую функцию распределения, которая приближает функцию распределения случайной величины индивидуальных потерь.

В качестве примера рассмотрим ситуацию, когда с помощью модели MA(1), описанной соотношением (21.4.1), генерируются 100 последовательностей величин будущих процентных ставок. Для каждой из этих последовательностей с применением некоторой заранее заданной функции дожития будет определяться реализация случайной величины K полного числа лет предстоящей жизни. На основе этих результатов можно подсчитать 100 выборочных значений с.в. $\tilde{v}_{K+1}$. Эти значения можно рассматривать как выборку, полученную из совместного распределения с.в. $\{I_k\}$ и K. Среднее и дисперсия этих 100 выборочных значений, полученных имитационным методом, будут оценками среднего и дисперсии распределения с.в. $\tilde{v}_{K+1}$. Эмпирическая функция распределения будет оценкой функции распределения с.в. $\tilde{v}_{K+1}$.

Процедура имитационного моделирования может также применяться для приближения функции распределения настоящей стоимости суммарных потерь по портфелю, состоящему из n индивидуальных рисков. В этом случае существует множество случайных величин числа полных лет предстоящей жизни K_i, $i = 1, 2, \dots, n$. Если эти случайные величины предполагаются независимыми, то для имитации значений случайной величины настоящей стоимости суммарных потерь используется имитация значений каждой с.в. K_i и случайным образом генерированный сценарий динамики процентных ставок.

Понятно, почему имитационное моделирование с использованием полученных на компьютере реализаций случайных величин настоящих стоимостей, которые могут быть функциями нескольких случайных величин, широко используется для построения эмпирических функций распределения. Описанные приложения вывели имитационное моделирование в ряд важных методов актуарной науки.

Если имеются свидетельства, что случайные величины времени до выбытия и причины выбытия не являются независимыми от с.в. $\{I_k\}$, то построение реализаций случайных величин настоящих стоимостей становится более сложным. Например, факт и время расторжения договора страхования или выхода из пенсионной схемы могут зависеть от с.в. $\{I_k\}$.

21.5. Модели финансовой экономики

На основе данных об инвестиционных операциях моделируемой финансовой системы можно выбрать одну из моделей, описанных в разд. 21.3 и 21.4, и оценить параметры этой модели. Критически настроенные специалисты утверждают, что эта процедура не принимает во внимание важную информацию, имеющуюся на рынках капитала.

Для того чтобы продемонстрировать изменчивость с течением времени доходности при погашении одной из разновидностей ценных бумаг, на рис. 21.1.1 показана средняя доходность при погашении для 30-летних облигаций Казначейства США. Изменения цены и доходности облигаций отражают изменения оценки рынком облигаций будущих экономических событий. Конечно, имеется много других видов инвестиций, которые могут отражать различные схемы доходности за тот же самый период времени. Экономические новости влияют на доходность различных ценных бумаг по-разному. Даже облигациям Казначейства с различными сроками погашения могут отвечать различные временны́е ряды уровней доходности.

21.5.1. Информация о ценах и сроках погашения

Для того чтобы получить информацию о взаимосвязи между процентными ставками и сроками погашения, освобожденную от таких усложняющих картину факторов, как риск отказа от уплаты и риск досрочного погашения (досрочного погашения по желанию заемщика), обычно анализируют облигации, выпущенные центральными правительствами. В Соединенных Штатах Америки это — облигации Казначейства. Анализ прочих облигаций проводится путем их сравнения с облигациями Казначейства.

Чтобы проиллюстрировать методы, используемые для оценки взаимосвязей между процентными ставками и сроками погашения, требуется обратиться к основным положениям финансовой математики. Рассмотрим *чистую дисконтную облигацию*, по которой выплачивается одна единица в момент погашения и которая продается на рынке без оплаты расходов на совершение сделки. Эти облигации не подвержены риску отказа от уплаты. Через s обозначается текущее время, и имеются дисконтные облигации со сроками погашения $s, s+1, \dots$. Цена одной облигации в момент времени s, до погашения которой остается t временны́х периодов, обозначается через $P(s, s+t)$. Предположим, что

$$P(s,s) = 1, \quad \lim_{t\to\infty} P(s,t) = 0 \quad \text{и} \quad P(s,t) > P(s,u) \quad \text{при} \quad u > t.$$

Третье предположение эквивалентно тому, что более ранней из двух равных по величине выплат отвечает бóльшая стоимость. Уровень доходности за t временны́х периодов обозначается через $i(s, s+t)$ и определяется соотношением

$$P(s, s+t) = [1 + i(s, s+t)]^{-t}. \tag{21.5.1}$$

Число $i(s, s+t)$ называется *ставкой «спот»* на t периодов в момент времени s. Такие ставки могут быть определены по текущему состоянию рынка и связаны с единовременной выплатой в определенный момент в будущем. Ставки «спот» $i(s, s+t)$, рассматриваемые как функции от t, называются *временнóй структурой* процентных ставок в момент времени s.

Форвардные ставки — другой подход к изучению взаимосвязи между временем до погашения и процентными ставками. Форвардные ставки являются процентными ставками, которые следует применять к договорам, заключающимся в настоящий момент и предусматривающим оплату в будущем. Требуется, чтобы эти ставки были согласованы с множеством ставок «спот», наблюдаемых на рынке в текущий момент. Эта согласованность заключается в *отсутствии возможности арбитража* в форвардных ставках. Возможность арбитража возникает на рынке капитала тогда, когда для одного и того же инвестиционного периода имеются две стратегии инвестирования, такие, что одна из них заведомо будет приводить к большему капиталу в конце периода, чем другая. Для иллюстрации требования отсутствия возможности арбитража предположим, что инвестор выплачивает сумму размера 1 за дисконтную облигацию со сроком погашения $s + u$ и стоимостью при погашении $[1 + i(s, s + u)]^u$. Действуя иначе, инвестор мог бы приобрести облигацию со сроком действия t $(t < u)$ и в момент $t + s$ инвестировать капитал, полученный от ее погашения, в другую дисконтную облигацию, со сроком погашения $s + u$ и стоимостью при погашении

$$[1 + i(s, s + t)]^t [1 + j(s, s + t, s + u)]^{u-t},$$

где $j(s, s + t, s + u)$ является форвардной ставкой в момент времени s для такой же будущей операции с денежными потоками в моменты времени $s + t$ и $s + u$. Если отсутствует возможность арбитража, то окончательные размеры капитала должны быть равными,

$$[1 + i(s, s + u)]^u = [1 + i(s, s + t)]^t [1 + j(s, s + t, s + u)]^{u-t}, \qquad (21.5.2)$$

или

$$[1 + j(s, s + t, s + u)]^{u-t} = \frac{[1 + i(s, s + u)]^u}{[1 + i(s, s + t)]^t}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant u.$$

Частный случай, когда $u = t + 1$, дает

$$[1 + j(s, s + t, s + t + 1)] = \frac{[1 + i(s, s + t + 1)]^{t+1}}{[1 + i(s, s + t)]^t},$$

а при $t = 0$

$$j(s, s, s + 1) = i(s, s + 1). \qquad (21.5.3)$$

Повторные применения формулы (21.5.3) с началом при $t = 0$ дают

$$[1+i(s, s+t)]^t = [1+j(s, s, s+1)][1+j(s, s+1, s+2)] \cdots [1+j(s, s+t-1, s+t)]. \quad (21.5.4)$$

Текущая цена облигации с выплатой дивидендов величины c по купонам в конце каждого из n периодов и с выплатой стоимости при погашении F может быть выражена с использованием цен дисконтных облигаций, а также ставок «спот» или форвардных ставок, а именно,

- с использованием дисконтных облигаций:

$$c \sum_{k=1}^{n} P(s, s + k) + FP(s, s + n); \qquad (21.5.5a)$$

- с использованием ставок «спот»:

$$c\sum_{k=1}^{n}[1+i(s,s+k)]^{-k}+F[1+i(s,s+n)]^{-n}; \qquad (21.5.5b)$$

- с использованием форвардных ставок:

$$c\sum_{k=1}^{n}\prod_{w=0}^{k-1}[1+j(s,s+w,s+w+1)]^{-1}+F\prod_{w=0}^{n-1}[1+j(s,s+w,s+w+1)]^{-1}. \qquad (21.5.5c)$$

Равенство этих трех выражений для цены облигации основано на предположении об отсутствии возможности арбитража.

Интервалы времени, через которые производятся выплаты по очередному купону, не всегда равны одному году. Так, облигации Казначейства США обычно имеют полугодовые купоны. Для облигаций, рассматривавшихся в табл. 21.1.1, $n = 30\times 2 = 60$.

Из соотношения (21.5.4b) можно получить еще один метод выражения связи между процентными ставками и временем погашения. Пусть задан набор ставок «спот» в момент времени s, $i(s, s+k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, и номинальная доходность, обозначаемая через $y(s, s+m)$, т. е. набор искусственных платежей по купонам, определяемых соотношением

$$1 = y(s,s+m)\sum_{k=1}^{m}[1+i(s,s+k)]^{-k}+[1+i(s,s+m)]^{-m}, \qquad m = 1,\ldots,n. \qquad (21.5.6)$$

Номинальная доходность может описываться как купонная ставка для облигации, которая продается по ее стоимости при погашении на рынке с известным множеством ставок «спот» и отсутствием возможности арбитража. График величины $y(s, s+n)$, рассматриваемой как функция от n, называется *кривой доходности* в момент времени s. Номинальная доходность наиболее часто выражается в виде *доходности в облигационном эквиваленте*, т. е. через полугодовые номинальные ставки.

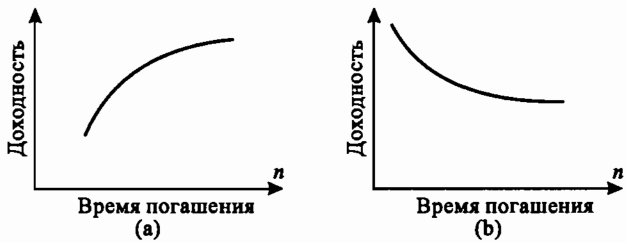


Рис. 21.5.1. Примеры кривых доходности

График 21.5.1(a) с положительным углом наклона касательной является типичной кривой доходности. График 21.5.1(b) с отрицательным углом наклона касательной называется *обратной кривой доходности*. Обратная кривая доходности может возникнуть в результате действий, предпринимаемых государственными органами денежного регулирования для поддержания величины краткосрочных процентных ставок на высоком уровне, чтобы замедлить ценовую инфляцию. Ожидание на рынке капитала таково, что инфляция будет краткосрочной и долгосрочные ставки не изменятся.

Пример 21.5.1. Определим эквивалентные форвардные ставки и ставки номинальной доходности при следующем множестве ставок «спот»:

t	$i(s, s+t)$
1	0,060
2	0,065
3	0,070

Решение. Воспользовавшись соотношением (21.5.2), получим

$$1 + j(s, s+t, s+t+1) = \frac{[1 + i(s, s+t+1)]^{t+1}}{[1 + i(s, s+t)]^t}.$$

t	$j(s, s+t, s+t+1)$
0	0,06000
1	0,07002
2	0,08007

Воспользовавшись соотношением (21.5.5), получим

$$y(s, s+t) = \frac{1 - [1 + i(s, s+t)]^{-t}}{\sum_{k=1}^{t}[1 + i(s, s+k)]^{-k}}.$$

t	$y(s, s+t)$
1	0,06000
2	0,06484
3	0,06955

Заметим, что все три ставки, рассматриваемые как функции от t, имеют положительный угол наклона касательной. ▼

21.5.2. Стохастические модели

В этом разделе мы проиллюстрируем метод генерирования последовательностей будущих ставок номинальной доходности. Эти последовательности, в основе построения которых лежит генерирование случайных чисел, могут быть «данными на входе» при имитационном моделировании финансовых операций, касающихся портфеля страховых или пенсионных договоров. На практике чаще моделируются ставки номинальной доходности, а не форвардные ставки или ставки «спот», поскольку эксперты по инвестированию лучше с ними знакомы и им легче в этом случае выбрать модель и определить ее параметры.

Мы предполагаем, что динамика логарифма ставок номинальной доходности определяется модифицированной авторегрессионной моделью первого порядка:

$$\ln[Y(t,n)] = \lambda(t,n) + (1 - \phi_n)\ln[Y(t-1,n)] + \sigma_n \varepsilon_{t,n}, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots. \tag{21.5.7}$$

Слагаемые в выражении (21.5.7) определяются следующим образом:

$Y(t,n) =$ случайная номинальная доходность в момент времени t для облигации, до погашения которой осталось n периодов. Предполагается, что настоящее время — это $t = 0$.

$\lambda(t,n) =$ параметр сноса, соответствующий моменту времени t, для облигаций, до погашения которых осталось n периодов. Если $\lambda(t,n) = \lambda_n$, то формула (21.5.7) превращается в стандартную авторегрессионную модель первого порядка AR(1). Параметр сноса $\lambda(t,n)$ для каждого t можно изменить таким образом, что будет удовлетворяться условие отсутствия арбитража или любое другое условие финансовой экономики.

$(1 - \phi_n) =$ авторегрессионный параметр, соответствующий облигациям со сроком погашения n периодов. Параметр ϕ_n определяет скорость затухания ранее произошедших возмущений. По этой причине в финансовой экономике параметр ϕ_n называется коэффициентом средней реверсии. Для того чтобы получить модель стационарных временных рядов, надо, чтобы $|1 - \phi_n| < 1$.

$\sigma_n =$ стандартное отклонение случайных возмущений.

$\varepsilon_{t,n} =$ случайные величины с распределением $N(0,1)$ для облигаций со сроком погашения через n периодов в момент времени t. Случайные величины ε_{t_1,n_1} и ε_{t_2,n_2} независимы, если $t_1 \neq t_2$, и их корреляция равна ρ_{n_1,n_2}, если $t_1 = t_2$. Если $n_1 = n_2$, то $\rho_{n_1,n_2} = 1$. Мы предполагаем, что одновременные возмущения коррелированы.

Замечание. Модель, описанная соотношением (21.5.7), — это только одна из широкого класса стохастических моделей, которые могут применяться в рассматриваемой ситуации. На выбор модели и на оценку параметров влияют теория финансовой экономики и анализ статистических данных. Формула (21.5.7) также иллюстрирует другой выбор средств при моделировании процентных ставок. Модели, определенные соотношениями (21.3.1), (21.4.1) и (21.4.6a, b и c), используют $\ln(1 + I_k)$, случайную интенсивность начисления процента для периода k. Формула (21.5.7) использует логарифм величины $Y(t,n)$. Переход к логарифму можно рассматривать как средство стабилизации дисперсии наблюдений или как средство, обеспечивающее неотрицательность реализации величины $Y(t,n)$. Некоторые актуарии считают требование неотрицательности важным. В упр. 21.9 приводится модель случайного блуждания, которая может считаться частным случаем модели (21.5.7) с $1 - \phi = 1$ и $\lambda = 0$. Модель для процентных ставок из упр. 21.9 обладает одним из свойств модели (21.5.7), а именно, в ней случайные процентные ставки неотрицательны.

Модели, подобные описанной соотношением (21.5.7), можно применять для оценивания кривых будущей доходности. Если применяется формула (21.5.7), то оценка кривых доходности потребует выбора множества моментов погашения n и соответствующих значений параметров λ_n, ϕ_n, σ_n для каждого значения n и коэффициентов корреляции ρ_{n_1,n_2} для каждой пары выбранных времен погашения. При этом число таких значений n должно выбираться достаточно малым, чтобы с тем числом параметров, которые необходимо определить, можно было бы работать. Тогда, пользуясь множеством выбранных случайным образом значений величин $\varepsilon_{t,n}$, можно будет определить вид кривых будущей доходности при различных значениях t с помощью имитационного моделирования будущих значений величин $Y(t,n)$, применяя для выбранных узловых значений времени погашения формулу (21.5.7).

Если инвестиционный портфель, рассматриваемый актуарием, содержит облигации с постоянным сроком погашения, то формулу (21.5.7) можно использовать непосредственно для генерирования случайных последовательностей будущих процентных ставок, которые затем используются в имитационном анализе.

До сих пор при выборе параметров модели мы не учитывали мнения актуария по поводу долгосрочной средней ставки или необходимости согласования с такими требованиями, как отсутствие возможности арбитража. Для того чтобы включать в рассмотрение такую информацию, можно пользоваться параметром $\lambda(t,n)$.

Например, приводимые ниже соображения дают актуарию способ учитывать информацию о долгосрочном среднем ставки номинальной доходности для ценных бумаг со сроком погашения n.

Пусть $\lambda(t,n) = \phi_n \ln \mu_n$, т.е. $\lambda(t,n)$ не зависит от t. Соотношение (21.5.7) можно переписать в виде

$$\ln[Y(t,n)] = \phi_n \ln \mu_n + (1-\phi_n)\ln[Y(t-1,n)] + \sigma_n \varepsilon_{t,n}, \qquad t = 1,2,3,\ldots. \tag{21.5.8}$$

Чтобы упростить следующие шаги, положим

$$Z_t = \ln[Y(t,n)], \quad \theta = \phi_n \ln \mu_n, \quad \Psi = 1-\phi_n, \qquad 0 < \Psi < 1;$$

тогда соотношение (21.5.8) переписывается в форме

$$Z_t = \theta + \Psi Z_{t-1} + \sigma_n \varepsilon_{t,n}, \tag{21.5.9}$$

т.е. в форме стандартной модели AR(1) с параметром сноса θ. Выпишем эти равенства последовательно, умножив равенство для Z_{t-j} на Ψ^j:

$$\begin{gathered}
Z_t - \Psi Z_{t-1} = \theta + \sigma_n \varepsilon_{t,n}, \\
\Psi Z_{t-1} - \Psi^2 Z_{t-2} = \Psi\theta + \Psi\sigma_n \varepsilon_{t,n}, \\
\Psi^2 Z_{t-2} - \Psi^3 Z_{t-3} = \Psi^2\theta + \Psi^2\sigma_n \varepsilon_{t,n}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{gathered}$$

Складывая эту последовательность равенств и предполагая, что t велико, получаем

$$Z_t \doteqdot \frac{\theta}{1-\Psi} + \sigma_n \sum_{j=0}^{t} \varepsilon_{t-j,n}\Psi^j.$$

Потенцируя это приближение, получаем

$$e^{Z_t} \doteqdot \exp\left(\frac{\theta}{1-\Psi} + \sigma_n \sum_{j=0}^{t} \varepsilon_{t-j,n}\Psi^j\right), \qquad Y(t,n) \doteqdot \mu_n \exp\left(\sigma_n \sum_{j=0}^{t} \varepsilon_{t-j,n}\Psi^j\right).$$

Случайная величина $\sigma_n \sum_{j=0}^{t} \varepsilon_{t-j,n}\Psi^j$ под знаком экспоненты имеет нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией, которая при больших значениях t приблизительно равна $\sigma_n^2/(1-\Psi^2)$.

Воспользовавшись этими замечаниями о распределении случайной компоненты и вспоминая вид производящей функции моментов нормальных случайных величин, для больших значений t получаем

$$\mathbf{E}[Y(t,n)] \doteqdot \mu_n \exp\left\{\frac{\sigma_n^2}{2[1-(1-\phi_n)^2]}\right\}. \tag{21.5.10}$$

Если имеющиеся данные или мнение актуария говорят в пользу существования долгосрочного среднего ставки номинальной доходности для облигаций со сроком погашения через n периодов, то выбранные значения $\lambda(t,n) = \phi_n$, $\ln \mu_n$ и σ_n^2 должны оказаться согласованными с формулой (21.5.10).

Помимо требований к параметрам модели, связанных с оценками долгосрочного среднего, можно изменить параметр $\lambda(t,n)$ таким образом, чтобы модель была согласована с условием отсутствия возможности арбитража. Наблюденные ставки $[i(0,n_1), i(0,n_2), \ldots, i(0,n_m)]$ для m различных сроков погашения не должны давать больших возможностей для арбитража на эффективном рынке капитала. Такие возможности представляли бы собой безрисковые стратегии увеличения капитала, которые утрачиваются по мере их использования биржевыми брокерами. Оцененные кривые будущей доходности, определяемые усреднением по многим имитационным процедурам, могут привести к моделям, допускающим возможность арбитража, следствием чего было бы противоречивое поведение на рынках капитала. Поэтому наличие такой возможности, заложенное в оцененной кривой будущей доходности, также привело бы к противоречию.

Разработка метода изменения всей оцененной кривой доходности с тем, чтобы предотвратить возможность арбитража, сопряжена с некоторыми соображениями, выходящими за рамки настоящего изложения. Поэтому мы будем рассматривать только облигации со сроком погашения, равным одному периоду, $n = 1$. Мы воспользуемся упрощением формулы (21.5.8) и предположим, что хотим разработать сценарии для процентной ставки, длительность каждого из которых равна H периодам. Модель имеет вид

$$\ln[Y(t,1)] = \mu + \sigma_1 \varepsilon_{t,1}, \qquad t = 1, 2, \ldots, H. \tag{21.5.11}$$

Если генерируется m последовательностей вида $(e_{1,1}, e_{2,1}, \ldots, e_{H,1})$, состоящих из реализаций случайной величины $\varepsilon_{t,1}$, то должны получиться m последовательностей возможных будущих одноперiодных ставок, $(e^{\mu+\sigma_1 e_{1,1}}, e^{\mu+\sigma_1 e_{2,1}}, \ldots, e^{\mu+\sigma_1 e_{H,1}})_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Для минимизации возможности арбитража в момент 1 значение параметра μ, среднего модели, будет изменено таким образом, чтобы ожидаемые ставки на момент 1 не предоставляли такой возможности. Для этого каждое из m значений величины $e^{\mu+\sigma_1 e_{1,1}}$ будет умножаться на $e^{\lambda_1 - \mu}$, где λ_1 определяется из соотношения

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{[1 + y(0,1)]^{-1} (1 + e^{\lambda_1 + \sigma_1 e_{1,1}})_j^{-1}}{m} = P(0,2).$$

Как и ранее, $P(0,2)$ является наблюденной ценой дисконтной облигации, срок погашения которой — два периода. Символ $(1 + e^{\lambda_1 + \sigma_1 e_{1,1}})_j^{-1}$ означает, что переменная $e_{1,1}$ берется из сценария с номером j, определенного соотношением (21.5.11).

Поправка для устранения арбитража для остальных лет из тех H лет, для которых осуществляется планирование, будет определяться последовательным разрешением уравнений

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{[1 + y(0,1)]^{-1} (1 + e^{\lambda_1 + \sigma_1 e_{1,1}})_j^{-1} \ldots (1 + e^{\lambda_{h-1} + \sigma_1 e_{h-1,1}})_j^{-1}}{m} = P(0,h),$$

где $h = 2, 3, \ldots, H$, относительно λ_{h-1}. Получающиеся в результате m последовательностей вида $[y(0,1), e^{\lambda_1 + \sigma_1 e_{1,1}}, \ldots, e^{\lambda_{H-1} + \sigma_1 e_{H-1,1}}]_j$ могут быть использованы как генерированные случайным образом сценарии будущих процентных ставок, где каждому сценарию приписывается вес, равный $1/m$.

Замечание. В этом разделе мы рассматривали предположение об отсутствии арбитража на рынках капитала. Эмпирические исследования показывают, что хотя арбитраж может существовать, из-за активности биржевых брокеров срок его существования незначителен.

21.6. Управление процентным риском

Построение актуарных моделей систем финансовой безопасности обеспечивает разумный базис для расчета стоимости обязательств, для оценок финансового состояния такой системы и для управления рисками, связанными с операциями в таких системах. В гл. 12–14 затрагивались соображения, применяемые при управлении краткосрочными рисками. В гл. 4–11 затрагивались соображения, применяемые при управлении неблагоприятными последствиями для систем финансовой безопасности, связанными со случайной природой момента и причины выбытия.

В настоящем разделе приводятся соображения, связанные с управлением неблагоприятными последствиями изменений процентных ставок. В разд. 21.6.1 вводятся специальные обозначения и разрабатывается упрощенный набор правил управления процентной ставкой при детерминированном окружении. В разд. 21.6.2 разрабатывается довольно общий набор условий для времени и величины потоков денежных активов, направленных на минимизацию риска, связанного с процентной ставкой в случайной модели.

21.6.1. Иммунизация

Наша модель состоит из следующих данных:

$$\text{резерв обязательств} = L(i) = n(A_{x+t} - P_x \ddot{a}_{x+t}),$$

$$\text{активы} = A(i) = \sum_{j=0}^{\infty} v^j a(j),$$

$$\text{прибыль} = S(i) = A(i) - L(i),$$

где

$n =$ число одинаковых договоров бессрочного страхования на случай смерти в этой модели;

$t =$ число лет, прошедших с момента, когда были заключены эти n договоров; активы, обязательства и прибыль измеряются в этот момент;

$P_x =$ нетто-премия в момент заключения договора, не обязательно согласующаяся с разумной экспертной оценкой обязательств в момент t; эта премия используется в расчете денежных потоков при упрощающем предположении, что надбавка на расходы равна имеющимся расходам;

$\{a(j)\} =$ последовательность денежных потоков, доходов по ценным бумагам, дивидендов и стоимости в момент погашения имеющихся активов, выплачиваемых в конце будущих договорных лет; в рассматриваемом детерминированном окружении эти величины предполагаются известными, не подверженными риску непогашения;

$i =$ подходящим образом оцененная ставка в момент t; предполагается, хотя это и нереалистично, что i не зависит от того времени, в которое рассматриваются будущие денежные потоки, и что любое мгновенное изменение величины i не повлияет на гладкость графика кривой доходности, каковая неявно предполагается в наших условиях относительно i.

Ясно, что эта упрощенная модель с одной причиной выбытия не рассматривает выплат при досрочном прекращении действия договора, связанных с ними расходов и надбавок на их покрытие в брутто-премии. Предполагается, что денежные потоки как активов, так и обязательств, известны и не зависят от процентной ставки i. Некоторые из этих нереалистических черт можно изменить в рамках более сложной модели. Внести другие уточнения, такие, как реалистический учет зависимости денежных потоков активов и обязательств от значения процентной ставки, сложнее.

В рамках нашей простой модели мы можем рассматривать последовательность будущих денежных потоков активов $\{\alpha(j)\}$ как управляющую переменную. Руководство может принять решение выйти на рынок капитала для того, чтобы получить последовательность $\{\alpha(j)\}$, которая удовлетворяет соотношениям

$$\frac{dS(i)}{di} = \frac{d}{di}[A(i) - L(i)] = 0, \tag{21.6.1a}$$

$$\frac{dS^2(i)}{di^2} = \frac{d^2}{di^2}[A(i) - L(i)] > 0. \tag{21.6.1b}$$

Эти две формулы характеризуют минимальное значение величины $S(i)$. Если можно найти такую последовательность денежных потоков активов $\{\alpha(j)\}$, которая удовлетворяет условиям (21.6.1a) и (21.6.1b), то любое изменение в значении процентной ставки приведет к увеличению прибыли.

Из формулы для первой производной (21.6.1a) мы получаем

$$\frac{d}{di}S(i) = v\left\{ -\sum_{j=1}^{\infty} v^j a(j) + n\left[\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)v^{k+1}p_{x+t}\,q_{x+t+k} - P_x\sum_{k=1}^{\infty} k\,v^k\,{}_kp_{x+t}\right]\right\} = 0,$$

или

$$\sum_{j=1}^{\infty} v^j a(j) = n[(IA)_{x+t} - P_x\,(Ia)_{x+t}]. \tag{21.6.2}$$

Объединяя условия на первую и на вторую производные, обеспечивающие минимум величины $S(i)$, (21.6.1a) и (21.6.1b), мы получаем

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^2 v^j a(j) > n\left[\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^2 v_k^{k+1} p_{x+t}\,q_{x+k+t} - P_x\sum_{k=1}^{\infty} k^2\,{}_kp_x\right]. \tag{21.6.3}$$

Условие на первую производную для выбора $\{\alpha(j)\}$ достижимо. Но маловероятно, что на рынке капитала может выполняться условие на вторую производную.

Если бы условие на вторую производную при справедливости условий, налагаемых на модель, особенно условия гладкости кривой доходности, использовавшееся при оценке активов и обязательств, выполнялось, то это привело бы к возможности арбитража, поскольку можно было бы увеличивать прибыль без новых инвестиций или увеличения риска, используя изменения в величине процентной ставки. На эффективном рынке либо такой возможности не должно существовать, либо она должна быть краткосрочной.

Правила выбора инвестирования, содержащиеся в формулах (21.6.2) и (21.6.3), были названы правилами иммунизации, поскольку их реализация «иммунизирует», или защищает значение $S(i)$ от изменений i.

21.6.2. Общая стохастическая модель

Сейчас мы обобщим понятия и связанные с ними символы, использованные в разд. 21.6.1, с тем, чтобы ввести случайные элементы. Мы имеем

$$S(\tilde{v}, \widetilde{K}) = A(\tilde{v}) - L(\tilde{v}, \widetilde{K}), \tag{21.6.4}$$

где $\tilde{v}$ обозначает последовательность $\{\tilde{v}_j\}$ случайных коэффициентов дисконтирования и $\widetilde{K} = (K_1, K_2, \ldots, K_n)$ — вектор, состоящий из n независимых случайных величин пошаговой продолжительности предстоящей жизни.

Хотя это предположение нереалистично, мы будем предполагать, что последовательность $\{\alpha(j)\}$ денежных потоков активов детерминирована. Такие события, связанные с потоками активов, как непогашение и т. п., рассматриваться не будут.

Воспользовавшись формулой (2.2.11), мы получаем

$$\mathbf{D}[S(\tilde{v}, \widetilde{K})] = \mathbf{D}[\mathbf{E}[S(\tilde{v}, \widetilde{K}) \,|\, \tilde{v}]] + \mathbf{E}[\mathbf{D}[S(\tilde{v}, \widetilde{K}) \,|\, \tilde{v}]].$$

Поскольку мы предполагаем, что денежный поток активов детерминирован, в примере бессрочного страхования на случай смерти из разд. 21.6.1 мы получаем

$$\mathbf{E}[S(\tilde{v}, \widetilde{K}) \,|\, \tilde{v}] = \sum_{j=0}^{\infty} v_j\, a(j) - n\left[\sum_{k=0}^{\infty} (v_{k+1} - P_x \ddot{a}_{\overline{k+1|}\tilde{v}})\, {}_kp_x\, q_{x+k}\right],$$

$$\mathbf{D}[S(\tilde{v}, \widetilde{K}) \,|\, \tilde{v}] = \mathbf{D}[L(\tilde{v}, \widetilde{K}) \,|\, \tilde{v}].$$

Поэтому

$$\mathbf{D}[S(\tilde{v}, \widetilde{K})] = \mathbf{D}_{\tilde{v}}[A(\tilde{v}) - \mathbf{E}[L(\tilde{v}, \widetilde{K}) \,|\, \tilde{v}]] + \mathbf{E}_{\tilde{v}}[\mathbf{D}[L(\tilde{v}, \widetilde{K}) \,|\, \tilde{v}]]. \tag{21.6.5}$$

Мы можем переписать последнее равенство в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{D}[S(\tilde{v}, \widetilde{K})] = \mathbf{D}_{\tilde{v}}[A(\tilde{v})] &+ \mathbf{D}_{\tilde{v}}[\mathbf{E}[L(\tilde{v}, \widetilde{K}) \,|\, \tilde{v}]] \\ &- 2\,\mathbf{Cov}_{\tilde{v}}[A(\tilde{v}), \mathbf{E}[L(\tilde{v}, \widetilde{K}) \,|\, \tilde{v}]] + \mathbf{E}_{\tilde{v}}[\mathbf{D}[L(\tilde{v}, \widetilde{K}) \,|\, \tilde{v}]]. \end{aligned} \tag{21.6.6}$$

Второе и четвертое слагаемые в (21.6.6) можно объединить, получив

$$\mathbf{D}[S(\tilde{v}, \widetilde{K})] = \mathbf{D}_{\tilde{v}}[A(\tilde{v})] + \mathbf{D}[L(\tilde{v}, \widetilde{K})] - 2\,\mathbf{Cov}_{\tilde{v}}[A(\tilde{v}), \mathbf{E}[L(\tilde{v}, \widetilde{K}) \,|\, \tilde{v}]]. \tag{21.6.7}$$

Мы полагаем, что выбор последовательности $\{\alpha(j)\}$ денежных потоков активов находится в управлении актуария и его цель — минимизировать $\mathbf{D}[S(\tilde{v}, \widetilde{K})]$. Поскольку второе слагаемое в (21.6.5) не зависит от управляющей последовательности $\{\alpha(j)\}$, для минимизации величины $\mathbf{D}[S(\tilde{v}, \widetilde{K})]$ следует минимизировать

$$\mathbf{D}_{\tilde{v}}[A(\tilde{v}) - \mathbf{E}[L(\tilde{v}, \widetilde{K}) \,|\, \tilde{v}]].$$

Эта дисперсия достигнет своего минимального значения, равного нулю, если $A(\tilde{v}) - \mathbf{E}[L(\tilde{v}, \widetilde{K}) \,|\, \tilde{v}] = 0$ для каждого будущего года. Если можно найти такую последовательность денежных потоков активов, которая удовлетворяет соотношениям

$$a(0) + nP_x = 0, \quad a(j) - n[{}_{j-1}p_x\, q_{x+j-1} - P_x\, {}_jp_x] = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, \tag{21.6.8}$$

то

$$[a(0) + nP_x] + \sum_{j=1}^{\infty}[a(j) - n({}_{j-1}p_x\, q_{x+j-1} - P_x\, {}_jp_x)]v_j = 0$$

и

$$\mathbf{D}_{\tilde{v}}[A(\tilde{v}) - \mathbf{E}[L(\tilde{v}, \widetilde{K})\,|\,\tilde{v}]] = 0.$$

В этом очень частном случае мы можем провести подстановку в (21.6.7) и получить

$$\mathbf{D}[S(\tilde{v}, \widetilde{K})] = \mathbf{D}[A(\tilde{v})] + \mathbf{D}[L(\tilde{v}, \widetilde{K})] - 2\,\mathbf{Cov}[A(\tilde{v}), A(\tilde{v})] = \mathbf{D}[L(\tilde{v}, \widetilde{K})] - \mathbf{D}[A(\tilde{v})].$$

Условия, выраженные соотношениями (21.6.8), похожи на принцип эквивалентности. Эти условия налагают жесткие ограничения на денежные потоки активов. Например, может оказаться, что последовательность денежных потоков активов, которая минимизирует величину $\mathbf{D}[S(\tilde{v}, \widetilde{K})]$, потребует инвестирования $a(j) < 0$ для некоторого j. На выбор последовательности денежных потоков активов могут влиять также другие экономические и бюджетные ограничения.

21.7. Замечания и литература

Идеи и понятия, содержащиеся в настоящей главе, более разнообразны и возникли позже, чем те, которые излагались в предыдущих главах. Поэтому приводящиеся ниже замечания и ссылки важны для актуария, который хочет их применять или обобщать.

Объединение моделей временных рядов для стохастических процентных ставок с моделями, в которых момент и причина выбытия случайны, в последние годы являлось предметом интенсивного изучения. Изложение в разд. 21.3.1 и 21.4.1 следует работе [Frees 1990]. Правила управления рисками по портфелю, связанные с процентной ставкой, изложенные в разд. 21.6.2, также основаны на этой работе. Более общими, выходящими за рамки модели MA(1), являются исследования из работы [Bellhouse, Panjer 1980] и [Giaccotti 1986].

Эмпирический анализ данных о процентных ставках для выяснения адекватности различных моделей является важнейшей задачей финансовой экономики. Статья [Becker 1991] является хорошим примером продвижения в этом направлении. Клейн [Klein 1993] наметил пути вовлечения в анализ денежных потоков в страховании ряда распределений процентных ставок. В частности, он рассмотрел гипотезу о том, что распределение случайных величин, определяющих возмущения в моделях случайных процентных ставок, могут иметь тяжелые хвосты. Истории выдвижения гипотез, относящихся к ставке дохода, и их проверки содержится в работе [Fama 1970].

В работе [Jetton 1988] классифицируются и поясняются методы генерирования определенных множеств сценариев для процентных ставок. Кристиансен [Christiansen 1992] исходит из частичной классификации, приведенной в работе [Jetton 1988], но расширяет рассмотренные там модели и рассматривает их применение. Особое внимание уделяется таким способам генерирования процентных ставок, при которых полученные ставки после внесения возмущения возвращаются к среднему, и сдвигам кривых доходности, описывающимся матрицами переходных вероятностей. В работе [Tilley 1992] изложено больше базовых сведений из финансовой экономики, связанных с генерированием сценариев для процентной ставки. В монографии [Boyle 1992], особенно в гл. 2, 3 и 4, изложен материал, составивший основу настоящей главы.

Идеи иммунизации разд. 21.6.1 имеют много источников. Они были введены в актуарную науку в работе [Redington 1952]. Внимание североамериканских актуариев к ним привлек Вандерхоф [Vanderhoof 1972]. Его работа содержит модель страховой компании, занимающейся страхованием жизни, отражающую характерные особенности индустрии страхования жизни в США на 1971 г.

В настоящей главе предполагается, что построена стохастическая модель, в которой при нескольких типах инвестиций и некоторых других экономических переменных генерируются сценарии для процентной ставки. Такими другими экономическими переменными могут быть индекс потребительских цен и уровень безработицы. Было бы полезно построить модель, которая включала бы наблюдаемые одновременные корреляции между этими величинами, а также их автокорреляции с течением времени. Непротиворечивая и достаточно полная модель такого типа была бы, без сомнения, полезна для имитирования будущих операций системы социального обеспечения, большой пенсионной схемы или страховой компании. Примерно с 1980 г. прилагались значительные усилия к построению, тестированию и использованию таких моделей. В этой сфере новаторской являлась работа [Wilkie 1986]. Приведенная там модель интенсивно обсуждалась в работе [Geoghegan et al. 1992].

Упражнения

К разделу 21.1

21.1. Пусть с.в. I имеет равномерное распределение на интервале $(e^{0,03}-1, e^{0,10}-1)$. Найдите $\mathbf{E}[(1+I)^{-1}]-(1+\mathbf{E}[I])^{-1}$.

21.2. Функцию $(1+x)^{-1}$ можно разложить в ряд Тейлора

$$(1+x)^{-1}=1-x+x^2-R(\theta), \qquad |x|<1,$$

в которой остаточный член имеет вид $R(\theta)=x^3/(1+\theta)^2$, $|\theta|<|x|<1$. Пусть с.в. I имеет равномерное распределение на интервале (0,02, 0,12) и с.в. $(1+I)^{-1}$ приближается первыми тремя членами ряда Тейлора. Найдите $\mathbf{E}[1-I+I^2]-(1+\mathbf{E}[I])^{-1}$.

21.3. Случайная величина I имеет распределение Парето с функцией плотности

$$f_I(x)=\begin{cases}11/(1+x)^{12}, & 0<x,\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

(a) Найдите $\mathbf{E}[I]$.

(b) Найдите $\mathbf{E}[(1+I)^{-1}]-(1+\mathbf{E}[I])^{-1}$.

21.4. Для модели, заданной формулой (21.3.1), определите с.в. $\tilde{v}_n$ выражением

$$\tilde{v}_n=\exp\left[-\sum_1^n \ln(1+I_k)\right].$$

(a) Пользуясь производящей функцией моментов с.в. $\ln(1+I_k)$, найдите $\mathbf{E}[\tilde{v}_n]$.

(b) Пользуясь производящей функцией моментов с.в. $\ln(1+I_k)$, найдите $\mathbf{E}[(\tilde{v}_n)^j]$, $j=1,2,3,\ldots$.

(c) Предположим, что с.в. $\tilde{v}$ и с.в. K, пошаговая продолжительность предстоящей жизни, независимы. Воспользовавшись результатом п. (b), найдите

(i) $\mathbf{E}[(\tilde{v}_{K+1})^j]$, $j=1,2,3,\ldots$, (ii) $\mathbf{D}[\tilde{v}_{K+1}]$.

(d) При всех предположениях настоящего упражнения докажите, что ${}_*A_x+{}_*d\,{}_*\ddot{a}_x=1$, где ${}_*d=1-e^{-(\delta-\sigma^2/2)}$.

21.5. Рассмотрим модель, описанную соотношением (21.3.1), но будем считать, что с.в. ε_k независимы и одинаково и равномерно распределены на интервале (−0,05, 0,05) и $\delta = 0{,}05$. Пусть с.в. $Z = \sum_{k=1}^{2} \ln(1 + I_k)$ является логарифмом случайной величины накопленного процента для двух периодов.

(a) Найдите $\mathbf{E}[Z]$ и $\mathbf{D}[Z]$.

(b) Нарисуйте функцию плотности с.в. Z.

(c) Нарисуйте функцию плотности с.в. $Y = e^Z$.

21.6. Предположим, что выполнены условия из примера 21.5. Пусть $X_k = \ln(1 + I_k)$ и $\bar{X} = \sum_1^n X_k/n$.

(a) Обоснуйте утверждение, что с.в. $(\bar{X} - 0{,}05)/\sqrt{0{,}01/12n}$ при больших n будет иметь распределение, близкое к $N(0,1)$.

(b) Обоснуйте утверждение о том, что с.в. $\sum_1^n X_k$ имеет распределение, близкое к $N(0{,}5n,\ 0{,}01n/12)$.

(c) Воспользовавшись результатом п. (b), обоснуйте утверждение о том, что функция распределения случайного накопленного процента $\prod_1^n (1 + I_k)$ приближается логнормальным распределением с параметрами $\mu = 0{,}5n$ и $\sigma^2 = 0{,}01n/12$.

К разделу 21.3

21.7. Рассмотрим модель для годовых процентных ставок вида

$$\ln(1 + I_k) = \begin{cases} \ln(1 + I_{k-1}) + \varepsilon_k, & k = 1, 2, 3, \ldots, \\ \delta, & k = 0, \end{cases}$$

и предположим, что на с.в. возмущения ε_k налагаются те же требования, что и при анализе соотношения (21.3.1). Такая модель называется моделью *случайного блуждания*, и она часто используется в исследованиях ставки дохода на рынке простых акций. Найдите

(a) $\mathbf{E}[\ln(1 + I_k)]$, (b) $\mathbf{D}[\ln(1 + I_k)]$,

(c) распределения с.в. $\ln(1 + I_k)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ [указание: проверьте, что $\ln(1 + I_k) = \delta + \sum_1^k \varepsilon_j$].

21.8. Используя модель и предположения упр. 21.7,

(a) вычислите $\mathbf{E}[\ln \tilde{v}_n]$ и $\mathbf{D}[\ln \tilde{v}_n]$,

(b) найдите распределение с.в. $\ln \tilde{v}_n$,

(c) дайте ответы на пп. (a) и (b) для с.в. $\tilde{v}_n$.

21.9. Другим вариантом модели случайного блуждания является

$$\ln I_k = \begin{cases} \ln I_{k-1} + \varepsilon_k, & k = 1, 2, 3, \ldots, \\ r, & k = 0, \end{cases}$$

где с.в. ε_k взаимно независимы и имеют распределение $N(0, \sigma^2)$. Найдите

(a) $\mathbf{E}[\ln I_n]$, (b) $\mathbf{D}[\ln I_n]$, (c) распределение с.в. $\ln I_n$.

21.10. Это упражнение — продолжение упр. 21.9. Найдите распределение с.в. I_n, а также $\mathbf{E}[I_n]$ и $\mathbf{D}[I_n]$.

К разделу 21.4

21.11. Докажите, что соотношение (21.4.5) для $\mathbf{E}[(\tilde{v}_n)^2]$ приводится к виду (21.3.4) при $\theta = 0$.

21.12. Докажите, что соотношение (21.4.6) для $\mathbf{E}[\tilde{v}_r \tilde{v}_s]$ приводится к виду (21.3.6) при $\theta = 0$.

21.13. Проверьте выражения, приведенные в столбце под $\mathbf{D}[1 + I_k]$, $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Модель	$\mathbf{D}[1 + I_k]$	Название модели
Формула (21.3.1)	$(e^{\sigma^2} - 1)e^{2\delta + \sigma^2}$	Логнормальная
Формула (21.4.1)	$\sigma^2(1 + \theta^2)$	MA(1)
Упражнение 21.7	$k\sigma^2$	Случайного блуждания

Обратите внимание на то, что в третьем случае (в случае модели случайного блуждания из упр. 21.7) дисперсия растет с ростом k.

К разделу 21.5

21.14. Убедитесь, что модель, описанная соотношением (21.5.7), эквивалентна модели, определяемой соотношениями

$$Y(t,n) = Y(t-1,n)^{1-\phi_n} e^{\lambda(t,n)+\sigma_n\varepsilon_{t,n}} \quad \text{и} \quad \frac{Y(t,n)}{Y(t-1,n)} = Y(t-1,n)^{-\phi_n} e^{\lambda(t,n)+\sigma_n\varepsilon_{t,n}}.$$

Эти формулы показывают, почему соотношение (21.5.7) называется *мультипликативной моделью*. Заметим, что если начальное значение таково, что $Y(0,n) = y(0,n) > 0$, то $Y(t,n) > 0$.

21.15. Покажите, что если $\phi_n = 0$ и $\lambda(t,n) = \mu$, то формула (21.5.7) принимает вид

$$\ln Y(t,n) = \mu + \ln Y(t-1,n) + \sigma_n\varepsilon_{t,n}, \qquad \Delta \ln Y(t-1,n) = \mu + \sigma_n\varepsilon_{t,n},$$

$$\ln Y(t,n) - \ln Y(0,n) = t\mu + \sigma_n \sum_{s=1}^{t} \varepsilon_{s,n},$$

$$\mathbf{E}[\ln Y(t,n)] = \ln[y(0,n)] + t\mu, \qquad \mathbf{D}[\ln Y(t,n)] = t\sigma_n^2.$$

Это модель случайного блуждания с параметром сноса μ. Покажите, что если $\mu = 0$, то справедливы результаты упр. 21.9.

21.16. Пусть $1 + i(s, s+k) = 1 + i$, $k = 1, 2, 3, \ldots, n$, и стоимость облигации при погашении равна 1. Проверьте, что $y(s, s+n) = i$.

21.17. Ставка «спот» в последовательные моменты времени задается следующим образом:

k	$i(s, s+k)$
1	0,050
2	0,055
3	0,060

Рассчитайте соответствующую ставку номинальной доходности $y(s, s+t)$ для облигаций с погашением через $k = 1, 2, 3$ периодов.

К разделу 21.6

21.18. Пусть через $\bar{a}(t)$ обозначается денежный поток в виде активов и через $\bar{l}(t)$ — денежный поток вследствие страховых операций. Например, величина $\bar{l}(t)$ равна страховым выплатам и расходам минус премии в момент времени t. Эти потоки предполагаются детерминистическими и независимыми как друг от друга, так и от процентной ставки. Пусть через $\bar{A}(\delta)$, $\bar{L}(\delta)$ и $\bar{S}(\delta) = \bar{A}(\delta) - \bar{L}(\delta)$ обозначаются текущие значения активов, обязательств и дохода соответственно, вычисленные при интенсивности начисления процента δ. Мы имеем

$$\bar{S}(\delta) = \bar{A}(\delta) - \bar{L}(\delta) = \int_0^\infty e^{-\delta t}[\bar{a}(t) - \bar{l}(t)]\,dt.$$

Кроме того, пусть $\bar{R}(\delta) = \bar{S}(\delta)/\bar{A}(\delta)$, что интерпретируется как интенсивность прибыли.

Проверьте, что если $\bar{R}(\delta_0)$ является минимальным значением величины $\bar{R}(\delta)$, то $\bar{A}'(\delta_0)/\bar{A}(\delta_0) = \bar{L}'(\delta_0)/\bar{L}(\delta_0)$ и $\bar{A}''(\delta_0)/\bar{A}(\delta_0) = \bar{L}''(\delta_0)/\bar{L}(\delta_0)$.

21.19. Функции денежных потоков в этом упражнении будут связаны с гамма-функцией плотности, т. е. обе величины $\bar{a}(t)$ и $\bar{l}(t)$ из упр. 21.18 будут иметь вид

$$f(t) = \frac{k\beta^\alpha t^{\alpha-1} e^{-\beta t}}{\Gamma(2)}, \qquad k > 0.$$

(a) Проверьте, что

$$\int_0^\infty \tau^n e^{-\delta t} f(t)\,dt = \frac{k\beta^\alpha \Gamma(\alpha+n)}{(\beta+\delta)^{n+\alpha}\Gamma(\alpha)}.$$

(b) Проверьте, что если параметры денежных потоков активов обозначаются через α_A, β_A и R_A, а параметры денежных потоков обязательств обозначаются через α_L, β_L и k_L, то условия, определяющие минимальное значение $\bar{R}(\delta)$ из упр. 21.18, имеют вид $\beta_A^{\alpha_A}\alpha_A/(\beta_A+\delta_0)^{\alpha_A+1} = \beta_L^{\alpha_L}\alpha_L/(\beta_L+\delta_0)^{\alpha_L+1}$ и $(\alpha_A+1)/(\beta_A+\delta_0) > (\alpha_L+1)/(\beta_L+\delta_0)$.

21.20. Воспользуйтесь результатами упр. 21.18 и проверьте, что соотношение

$$\bar{A}'(\delta_0)/\bar{A}(\delta_0) = \bar{L}'(\delta_0)/\bar{L}(\delta_0)$$

эквивалентно соотношению

$$\int_0^\infty te^{-\delta_0 t}\bar{a}(t)\,dt \Big/ \int_0^\infty e^{-\delta_0 t}\bar{a}(t)\,dt = \int_0^\infty te^{-\delta_0 t}\bar{l}(t)\,dt \Big/ \int_0^\infty e^{-\delta_0 t}\bar{l}(t)\,dt.$$

Этот результат приводит к следующей интерпретации. Отношение $\bar{A}'(\delta_0)/\bar{A}(\delta_0)$ является взвешенным средним времени денежного потока активов t с весами, которые задаются отношением $e^{-\delta_0 t}\bar{a}(t)/\int_0^\infty e^{-\delta_0 t}\bar{a}(t)\,dt$. Аналогичным образом можно интерпретировать отношение $\bar{L}'(\delta_0)/\bar{L}(\delta_0)$. Эта интерпретация посредством взвешенных моментов времени для денежных потоков обосновывает то, что величины $\bar{A}'(\delta_0)/\bar{A}(\delta_0)$ и $\bar{L}'(\delta_0)/\bar{L}(\delta_0)$ называются «дюрациями».

21.21. Выберем в качестве меры дисперсии времен денежных потоков второй центральный момент инерции. Проверьте, что условия, полученные в упр. 21.18, эквивалентны требованию того, чтобы дисперсия денежных потоков обязательств не превосходила дисперсии денежных потоков активов. [Указание. Второй центральный момент инерции для массы с плотностью $m(x)$ в точке x равен $\int_0^\infty (x-c)^2 m(x)\,dx$, где $c = \int_0^\infty xm(x)\,dx$.]

21.22. Воспользовавшись обозначениями упр. 21.18, постройте модель для множества l_x договоров бессрочного страхования на случай смерти в непрерывной модели. Сделайте следующие предположения:

- Брутто-премия равна $\bar{G} = \bar{P}(\bar{A}_x)(1+\theta)$, $\theta > 0$.
- Выплаты дожившим в момент времени t осуществляются с интенсивностью ce^{-rt}, $r > 0$.

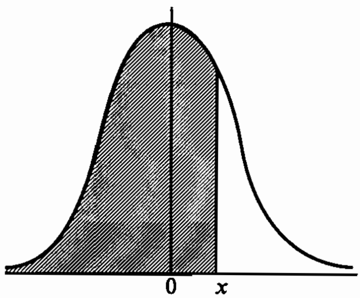
(a) Докажите, что $\bar{l}(t) = l_x[\mu_x(t) + ce^{-rt} - \bar{P}(\bar{A}_x)(1+\theta)]\,{}_tp_x$.

(b) Выразите $\bar{L}(\delta)$ в терминах актуарных настоящих стоимостей.

(c) Выразите $\bar{L}'(\delta)$ в терминах актуарных функций.

Приложение 1

ТАБЛИЦА НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ



Нормальное распределение

В таблице ниже приводятся значения функции

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-w^2/2}\, dw$$

для некоторых значений x. Целая часть числа x приводится в верхней строке, а первая значащая цифра после запятой — в крайнем левом столбце. Поскольку функция плотности симметрична, значение функции распределения для $-x$ можно получить, вычитая значение этой функции в точке x из единицы.

x	0	1	2	3
0,0	0,5000	0,8413	0,9772	0,9987
0,1	0,5398	0,8643	0,9821	0,9990
0,2	0,5783	0,8849	0,9861	0,9993
0,3	0,6179	0,9032	0,9893	0,9995
0,4	0,6554	0,9192	0,9918	0,9997
0,5	0,6915	0,9332	0,9938	0,9998
0,6	0,7257	0,9452	0,9953	0,9998
0,7	0,7580	0,9554	0,9965	0,9999
0,8	0,7881	0,9641	0,9974	0,9999
0,9	0,8159	0,9713	0,9981	1,0000

Приведем значения функции нормального распределения в некоторых выбранных точках:

$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x
0,800	0,842	0,975	1,960
0,850	1,036	0,990	2,326
0,900	1,282	0,995	2,576
0,950	1,645		

Приложение **2A**

ИЛЛЮСТРАТИВНАЯ ТАБЛИЦА СМЕРТНОСТИ

Иллюстративная таблица смертности. Основные функции

Возраст	l_x	d_x	$1000q_x$
0	100 000,00	2 042,1700	20,4217
1	97 957,83	131,5672	1,3431
2	97 826,26	119,7100	1,2237
3	97 706,55	109,8124	1,1239
4	97 596,74	101,7056	1,0421
5	97 495,03	95,2526	0,9770
6	97 399,78	90,2799	0,9269
7	97 309,50	86,6444	0,8904
8	97 222,86	84,1950	0,8660
9	97 138,66	82,7816	0,8522
10	97 055,88	82,2549	0,8475
11	96 973,63	82,4664	0,8504
12	96 891,16	83,2842	0,8594
13	96 807,88	84,5180	0,8730
14	96 723,36	86,0611	0,8898
15	96 637,30	87,7559	0,9081
16	96 549,54	89,6167	0,9282
17	96 459,92	91,6592	0,9502
18	96 368,27	93,9005	0,9744
19	96 274,36	96,3596	1,0009
20	96 178,01	99,0569	1,0299
21	96 078,95	102,0149	1,0618
22	95 976,93	105,2582	1,0967
23	95 871,68	108,8135	1,1350
24	95 762,86	112,7102	1,1770
25	95 650,15	116,9802	1,2230
26	95 533,17	121,6585	1,2735
27	95 411,51	126,7830	1,3288
28	95 284,73	132,3953	1,3895
29	95 152,33	138,5406	1,4560
30	95 013,79	145,2682	1,5289
31	94 868,53	152,6317	1,6089
32	94 715,89	160,6896	1,6965
33	94 555,20	169,5052	1,7927
34	94 385,70	179,1475	1,8980
35	94 206,55	189,6914	2,0136

36	94 016,86	201,2179	2,1402
37	93 815,64	213,8149	2,2791
38	93 601,83	227,5775	2,4313
39	93 374,25	242,6085	2,5982
40	93 131,64	259,0186	2,7812
41	92 872,62	276,9271	2,9818
42	92 595,70	296,4623	3,2017
43	92 299,23	317,7619	3,4427
44	91 981,47	340,9730	3,7070
45	91 640,50	366,2529	3,9966
46	91 274,25	393,7687	4,3141
47	90 880,48	423,6978	4,6621
48	90 456,78	456,2274	5,0436
49	90 000,55	491,5543	5,4617
50	89 509,00	529,8844	5,9199
51	88 979,11	571,4316	6,4221
52	88 407,68	616,4165	6,9724
53	87 791,26	665,0646	7,5755
54	87 126,20	717,6041	8,2364
55	86 408,60	774,2626	8,9605
56	85 634,33	835,2636	9,7538
57	84 799,07	900,8215	10,6230
58	83 898,25	971,1358	11,5752
59	82 927,11	1 046,3843	12,6181
60	81 880,73	1 126,7146	13,7604
61	80 754,01	1 212,2343	15,0114
62	79 541,78	1 302,9994	16,3813
63	78 238,78	1 399,0010	17,8812
64	76 839,78	1 500,1504	19,5231
65	75 339,63	1 606,2618	21,3203
66	73 733,37	1 717,0334	23,2871
67	72 016,33	1 832,0273	25,4391
68	70 184,31	1 950,6476	27,7932
69	68 233,66	2 072,1177	30,3680
70	66 161,54	2 195,4578	33,1833
71	63 966,08	2 319,4639	36,2608
72	61 646,62	2 442,6884	39,6240
73	59 203,93	2 563,4258	43,2982
74	56 640,51	2 679,7050	47,3108
75	53 960,80	2 789,2905	51,6911
76	51 171,51	2 889,6965	56,4708
77	48 281,81	2 978,2164	61,6840
78	45 303,60	3 051,9717	67,3671
79	42 251,62	3 107,9833	73,5589
80	39 143,64	3 143,2679	80,3009
81	36 000,37	3 154,9603	87,6369
82	32 845,41	3 140,4624	95,6134
83	29 704,95	3 097,6146	104,2794
84	26 607,34	3 024,8830	113,6860
85	23 582,45	2 921,5530	123,8867

86	20 660,90	2 787,9129	134,9367
87	17 872,99	2 625,4088	146,8926
88	15 247,58	2 436,7474	159,8121
89	12 810,83	2 225,9244	173,7533
90	10 584,91	1 998,1533	188,7738
91	8 586,75	1 759,6818	204,9298
92	6 827,07	1 517,4869	222,2749
93	5 309,58	1 278,8606	240,8589
94	4 030,72	1 050,9136	260,7257
95	2 979,81	840,0452	281,9122
96	2 139,77	651,4422	304,4456
97	1 488,32	488,6776	328,3410
98	999,65	353,4741	353,5993
99	646,17	245,6772	380,2041
100	400,49	163,4494	408,1188
101	237,05	103,6560	437,2837
102	133,39	62,3746	467,6133
103	71,01	35,4358	498,9935
104	35,58	18,9023	531,2793
105	16,68	9,4105	564,2937
106	7,27	4,3438	597,8266
107	2,92	1,8458	631,6360
108	1,08	0,7163	665,4495
109	0,36	0,2517	698,9685
110	0,11	0,0793	731,8742

Иллюстративная таблица смертности.
Актуарные функции для одного лица, $i = 0{,}06$

Возраст	$\ddot{a}_x$	$1000A_x$	$1000(^2A_x)$
0	16,80096	49,0025	25,9210
1	17,09819	32,1781	8,8845
2	17,08703	32,8097	8,6512
3	17,07314	33,5957	8,5072
4	17,05670	34,5264	8,4443
5	17,03786	35,5930	8,4547
6	17,01675	36,7875	8,5310
7	16,99351	38,1031	8,6666
8	16,96823	39,5341	8,8553
9	16,94100	41,0757	9,0917
10	16,91187	42,7245	9,3712
11	16,88089	44,4782	9,6902
12	16,84807	46,3359	10,0460
13	16,81340	48,2981	10,4373
14	16,77685	50,3669	10,8638
15	16,73836	52,5459	11,3268
16	16,69782	54,8404	11,8295
17	16,65515	57,2558	12,3749
18	16,61024	59,7977	12,9665
19	16,56299	62,4720	13,6080

20	16,51330	65,2848	14,3034
21	16,46105	68,2423	15,0569
22	16,40614	71,3508	15,8730
23	16,34843	74,6170	16,7566
24	16,28783	78,0476	17,7128
25	16,22419	81,6496	18,7472
26	16,15740	85,4300	19,8657
27	16,08733	89,3962	21,0744
28	16,01385	93,5555	22,3802
29	15,93683	97,9154	23,7900
30	15,85612	102,4835	25,3113
31	15,77161	107,2676	26,9520
32	15,68313	112,2754	28,7206
33	15,59057	117,5148	30,6259
34	15,49378	122,9935	32,6772
35	15,39262	128,7194	34,8843
36	15,28696	134,7002	37,2574
37	15,17666	140,9437	39,8074
38	15,06159	147,4572	42,5455
39	14,94161	154,2484	45,4833
40	14,81661	161,3242	48,6332
41	14,68645	168,6916	52,0077
42	14,55102	176,3572	55,6199
43	14,41022	184,3271	59,4833
44	14,26394	192,6071	63,6117
45	14,11209	201,2024	68,0193
46	13,95459	210,1176	72,7205
47	13,79136	219,3569	77,7299
48	13,62235	228,9234	83,0624
49	13,44752	238,8198	88,7329
50	13,26683	249,0475	94,7561
51	13,08027	259,6073	101,1469
52	12,88785	270,4988	107,9196
53	12,68960	281,7206	115,0885
54	12,48556	293,2700	122,6672
55	12,27581	305,1431	130,6687
56	12,06042	317,3346	139,1053
57	11,83953	329,8381	147,9883
58	11,61327	342,6452	157,3280
59	11,38181	355,7466	167,1332
60	11,14535	369,1310	177,4113
61	10,90412	382,7858	188,1682
62	10,65836	396,6965	199,4077
63	10,40837	410,8471	211,1318
64	10,15444	425,2202	223,3401
65	9,89693	439,7965	236,0299
66	9,63619	454,5553	249,1958
67	9,37262	469,4742	262,8299
68	9,10664	484,5296	276,9212
69	8,83870	499,6963	291,4559

70	8,56925	514,9481	306,4172
71	8,29879	530,2574	321,7850
72	8,02781	545,5957	337,5361
73	7,75683	560,9339	353,6443
74	7,48639	576,2419	370,0803
75	7,21702	591,4895	386,8119
76	6,94925	606,6460	403,8038
77	6,68364	621,6808	421,0184
78	6,42071	636,5634	438,4155
79	6,16101	651,2639	455,9527
80	5,90503	665,7528	473,5861
81	5,65330	680,0019	491,2698
82	5,40629	693,9837	508,9574
83	5,16446	707,6723	526,6012
84	4,92824	721,0431	544,1537
85	4,69803	734,0736	561,5675
86	4,47421	746,7428	578,7956
87	4,25710	759,0320	595,7923
88	4,04700	770,9244	612,5133
89	3,84417	782,4056	628,9163
90	3,64881	793,4636	644,9611
91	3,46110	804,0884	660,6105
92	3,28118	814,2726	675,8298
93	3,10914	824,0111	690,5878
94	2,94502	833,3007	704,8565
95	2,78885	842,1408	718,6115
96	2,64059	850,5325	731,8321
97	2,50020	858,4791	744,5010
98	2,36759	865,9853	756,6047
99	2,24265	873,0577	768,1330
100	2,12522	879,7043	779,0793
101	2,01517	885,9341	789,4400
102	1,91229	891,7573	799,2147
103	1,81639	897,1852	808,4054
104	1,72728	902,2295	817,0170
105	1,64472	906,9025	825,0563
106	1,56850	911,2170	832,5324
107	1,49838	915,1860	839,4558
108	1,43414	918,8224	845,8386
109	1,37553	922,1396	851,6944
110	1,32234	925,1507	857,0377

Иллюстративная таблица смертности. Актуарные функции для статуса дожития двух лиц одного возраста, $i = 0{,}06$

Возраст	$\ddot{a}_{xx}$	$1\,000A_{xx}$	$1\,000(^2A_{xx})$	$\ddot{a}_{x:x+10}$	$1\,000A_{x:x+10}$	$1\,000(^2A_{x:x+10})$
0	16,13448	86,7274	50,8875	16,28443	78,2400	34,7076
1	16,71842	53,6745	17,4565	16,55328	63,0218	18,1309
2	16,70637	54,3565	16,9753	16,52270	64,7527	18,2195
3	16,68957	55,3072	16,6683	16,48839	66,6947	18,4277
4	16,66839	56,5060	16,5191	16,45053	68,8378	18,7468
5	16,64317	57,9339	16,5121	16,40925	71,1745	19,1700
6	16,61421	59,5733	16,6324	16,36464	73,6996	19,6923
7	16,58178	61,4085	16,8664	16,31677	76,4091	20,3096
8	16,54614	63,4258	17,2017	16,26571	79,2997	21,0188
9	16,50749	65,6137	17,6271	16,21147	82,3696	21,8172
10	16,46599	67,9626	18,1330	16,15408	85,6181	22,7036
11	16,42178	70,4655	18,7116	16,09353	89,0457	23,6776
12	16,37492	73,1176	19,3572	16,02977	92,6543	24,7402
13	16,32547	75,9170	20,0661	15,96277	96,4469	25,8935
14	16,27340	78,8643	20,8373	15,89244	100,4282	27,1413
15	16,21865	81,9632	21,6726	15,81866	104,6042	28,4891
16	16,16111	85,2203	22,5769	15,74131	108,9826	29,9441
17	16,10065	88,6424	23,5556	15,66025	113,5710	31,5141
18	16,03715	92,2366	24,6142	15,57534	118,3771	33,2071
19	15,97049	96,0099	25,7588	15,48645	123,4087	35,0317
20	15,90053	99,9697	26,9958	15,39343	128,6737	36,9970
21	15,82715	104,1234	28,3320	15,29615	134,1800	39,1126
22	15,75021	108,4786	29,7746	15,19448	139,9353	41,3884
23	15,66958	113,0429	31,3311	15,08826	145,9474	43,8349
24	15,58511	117,8241	33,0098	14,97738	152,2240	46,4632
25	15,49667	122,8299	34,8192	14,86169	158,7725	49,2847
26	15,40413	128,0682	36,7681	14,74106	165,6003	52,3114
27	15,30734	133,5468	38,8662	14,61538	172,7144	55,5555
28	15,20617	139,2737	41,1234	14,48452	180,1217	59,0301
29	15,10047	145,2564	43,5502	14,34836	187,8286	62,7483
30	14,99012	151,5028	46,1574	14,20681	195,8411	66,7238
31	14,87498	158,0203	48,9566	14,05976	204,1648	70,9706
32	14,75491	164,8162	51,9595	13,90712	212,8047	75,5028
33	14,62981	171,8977	55,1785	13,74882	221,7652	80,3352
34	14,44953	179,2716	58,6264	13,58478	231,0501	85,4824
35	14,36398	186,9444	62,3164	13,41497	240,6623	90,9593
36	14,22304	194,9221	66,2622	13,23933	250,6040	96,7805
37	14,07662	203,2104	70,4777	13,05785	260,8765	102,9610
38	13,92461	211,8144	74,9770	12,87052	271,4799	109,5154
39	13,76695	220,7386	79,7749	12,67736	282,4136	116,4579
40	13,60357	229,9867	84,8858	12,47840	293,6755	123,8024
41	13,43441	239,5619	90,3247	12,27370	305,2625	131,5623
42	13,25943	249,4664	96,1064	12,06333	317,1700	139,7502
43	13,07861	259,7015	102,2457	11,84740	329,3924	148,3778
44	12,89194	270,2677	108,7571	11,62604	341,9222	157,4559
45	12,69943	281,1642	115,6552	11,39940	354,7507	166,9939

46	12,50112	292,3892	122,9537	11,16767	367,8678	177,0001
47	12,29706	303,9398	130,6661	10,93105	381,2615	187,4810
48	12,08733	315,8114	138,8051	10,68978	394,9184	198,4414
49	11,87202	327,9986	147,3826	10,44412	408,8233	209,8841
50	11,65127	340,4941	156,4093	10,19438	422,9597	221,8099
51	11,42522	353,2895	165,8951	9,94087	437,3092	234,2171
52	11,19405	366,3746	175,8482	9,68395	451,8518	247,1016
53	10,95797	379,7377	186,2752	9,42400	466,5661	260,4567
54	10,71721	393,3656	197,1814	9,16142	481,4292	274,2728
55	10,47203	407,2435	208,5696	8,89664	496,4168	288,5375
56	10,22273	421,3546	220,4410	8,63011	511,5030	303,2353
57	9,96964	435,6810	232,7940	8,36232	526,6612	318,3475
58	9,71308	450,2029	245,6250	8,09375	541,8633	333,8526
59	9,45345	464,8990	258,9275	7,82491	557,0805	349,7258
60	9,19114	479,7465	272,6922	7,55633	572,2833	365,9390
61	8,92659	494,7213	286,9070	7,28853	587,4417	382,4614
62	8,66024	509,7977	301,5568	7,02206	602,5251	399,2593
63	8,39257	524,9491	316,6234	6,75745	617,5030	416,2961
64	8,12406	540,1477	332,0853	6,49524	632,3449	433,5327
65	7,85522	555,3647	347,9183	6,23597	647,0206	450,9279
66	7,58658	570,5707	364,0947	5,98016	661,5006	468,4383
67	7,31867	585,7356	380,5839	5,72831	675,7560	486,0192
68	7,05202	600,8289	397,3525	5,48092	689,7590	503,6243
69	6,78718	615,8203	414,3642	5,23847	703,4830	521,2065
70	6,52467	630,6790	431,5803	5,00138	716,9030	538,7185
71	6,26504	645,3750	448,9598	4,77008	729,9954	556,1128
72	6,00881	659,8785	466,4595	4,54495	742,7386	573,3422
73	5,75650	674,1606	484,0346	4,32634	755,1127	590,3606
74	5,50858	688,1934	501,6393	4,11456	767,1002	607,1233
75	5,26555	701,9503	519,2266	3,90989	778,6857	623,5869
76	5,02783	715,4057	536,7489	3,71254	789,8559	639,7107
77	4,79586	728,5362	554,1588	3,52273	800,6001	655,4561
78	4,57002	741,3197	571,4091	3,34060	810,9096	670,7874
79	4,35066	753,7364	588,4536	3,16625	820,7782	685,6720
80	4,13809	765,7683	605,2473	2,99977	830,2020	700,0806
81	3,93260	777,3999	621,7467	2,84117	839,1791	713,9874
82	3,73442	788,6175	637,9108	2,69046	847,7098	727,3701
83	3,54375	799,4102	653,7007	2,54760	855,7965	740,2101
84	3,36075	809,7690	669,0804	2,41251	863,4431	752,4921
85	3,18552	819,6876	684,0169	2,28509	870,6554	764,2049
86	3,01814	829,1617	698,4806	2,16521	877,4407	775,3401
87	2,85866	838,1892	712,4451	2,05273	883,8075	785,8931
88	2,70706	846,7701	725,8879	1,94748	889,7655	795,8619
89	2,56332	854,9067	738,7899	1,84925	895,3253	805,2478
90	2,42735	862,6027	751,1355	1,75786	900,4984	814,0543
91	2,29908	869,8636	762,9129	1,67309	905,2969	822,2875
92	2,17836	876,6967	774,1136	1,59471	909,7331	829,9554
93	2,06505	883,1102	784,7323	1,52251	913,8199	837,0680
94	1,95899	889,1137	794,7670	1,45626	917,5703	843,6367
95	1,85998	894,7179	804,2185	1,39571	920,9973	849,6744

96	1,76783	899,9341	813,0901	1,34065	924,1140	855,1951
97	1,68232	904,7742	821,3876	1,29084	926,9335	860,2140
98	1,60324	909,2506	829,1188	1,24605	929,4689	864,7475
99	1,53035	913,3762	836,2934	1,20604	931,7333	868,8126
100	1,46344	917,1638	842,9228	1,17060	933,7399	872,4279
101	1,40226	920,6266	849,0197	1,13946	935,5020	875,6129
102	1,34659	923,7777	854,5980	1,11241	937,0336	878,3888
103	1,29620	926,6301	859,6727	1,08917	938,3489	880,7785
104	1,25086	929,1969	864,2600	1,06949	939,4630	882,8066
105	1,21032	931,4911	868,3771	1,05308	940,3917	884,5002
106	1,17437	933,5261	872,0421	1,03965	941,1518	885,8881
107	1,14277	935,3151	875,2746	1,02889	941,7609	887,0017
108	1,11526	936,8720	878,0956	1,02047	942,2374	887,8735
109	1,09161	938,2110	880,5276	1,01406	942,6001	888,5376
110	1,07154	939,3470	882,5952	1,00934	942,8678	889,0280

Приложение 2В

ИЛЛЮСТРАТИВНАЯ ТАБЛИЦА ВЫБЫТИЯ ИЗ СОВОКУПНОСТИ РАБОТАЮЩИХ

Возраст x	$l_x^{(\tau)}$	$d_x^{(d)}$	$d_x^{(w)}$	$d_x^{(i)}$	$d_x^{(r)}$	S_x
30	100 000	100	19 900	—	—	1,00
31	79 910	80	14 376	—	—	1,06
32	65 454	72	9 858	—	—	1,13
33	55 524	61	5 702	—	—	1,20
34	49 761	60	3 971	—	—	1,28
35	45 730	64	2 693	46	—	1,36
36	42 927	64	1 927	43	—	1,44
37	40 893	65	1 431	45	—	1,54
38	39 352	71	1 181	47	—	1,63
39	38 053	72	989	49	—	1,74
40	36 943	78	813	52	—	1,85
41	36 000	83	720	54	—	1,96
42	35 143	91	633	56	—	2,09
43	34 363	96	550	58	—	2,22
44	33 659	104	505	61	—	2,36
45	32 989	112	462	66	—	2,51
46	32 349	123	421	71	—	2,67
47	31 734	133	413	79	—	2,84
48	31 109	143	373	87	—	3,02
49	30 506	156	336	95	—	3,21
50	29 919	168	299	102	—	3,41
51	29 350	182	293	112	—	3,63
52	28 763	198	259	121	—	3,86
53	28 185	209	251	132	—	4,10
54	27 593	226	218	143	—	4,35
55	27 006	240	213	157	—	4,62
56	26 396	259	182	169	—	4,91
57	25 786	276	178	183	—	5,21
58	25 149	297	148	199	—	5,53
59	24 505	316	120	213	—	5,86
60	23 856	313	—	—	3 552	6,21
61	19 991	298	—	—	1 587	6,56
62	18 106	284	—	—	2692	6,93
63	15 130	271	—	—	1350	7,31
64	13 509	257	—	—	2 006	7,70
65	11 246	204	—	—	4 448	8,08
66	6 594	147	—	—	1 302	8,48
67	5 145	119	—	—	1 522	8,91
68	3 504	83	—	—	1 381	9,35
69	2 040	49	—	—	1 004	9,82
70	987	17	—	—	970	10,31

Приложение 3

ОБОЗНАЧЕНИЯ

Приложение 4

ОБЩИЕ ПРАВИЛА ДЛЯ ОБОЗНАЧЕНИЙ АКТУАРНЫХ ФУНКЦИЙ

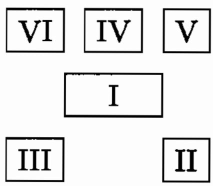
Актуарная функция представляется основным символом и комбинацией вспомогательных символов, таких, как буквы, числа, двоеточия, кружки, крышки, горизонтальные и вертикальные черточки. Основной символ отражает общее определение функции. Выбор и расположение вспомогательных символов сверху, а также справа или слева в качестве верхних или нижних индексов уточняет его значение. Мы приведем обзор правил выбора и расположения таких символов и продемонстрируем одну или несколько форм их стандартного применения.

Рассматриваемая нами структура обозначений основана на Международной системе актуарных обозначений[1)] (МСАО), которая была первоначально принята на Втором международном конгрессе актуариев в 1898 г. и периодически подвергалась изменениям, которые осуществлялись под руководством Постоянного комитета по актуарным обозначениям[2)] Международной актуарной ассоциации[3)]. МСАО представляет собой основополагающую систему принципов, которая не покрывает всех областей применения актуарных расчетов. В этой книге мы следовали указанным принципам, иногда расширяя их, чтобы при необходимости создавать актуарные обозначения, согласующиеся с принятыми ранее.

Настоящее приложение предназначено для того, чтобы представить читателю обзор основных конструкций символов, появляющихся в этой книге. Хотя наше изложение является хорошим введением в МСАО, его нельзя считать исчерпывающим. Авторитетными источниками для дальнейших ссылок являются:

- Actuarial Society of America, International Actuarial Notation, *Transactions of the Actuarial Society of America*, XLVIII, 1947:166–176,
- *Transactions of the Faculty of Actuaries*, XIX, 1950:89,
- *Journal of the Institute of Actuaries*, LXXV, 1949:121.

Структура любого актуарного символа строиться по приведенной ниже схеме. Прямоугольник I представляет собой основной символ, прочие символы — верхние и нижние индексы. Римские цифры в этих прямоугольниках соответствуют разделам настоящего приложения, где содержится их описание.



1) International Actuarial Notation (IAN). — *Прим. ред.*

2) Permanent Committee of Actuarial Notations. — *Прим. ред.*

3) International Actuarial Association. — *Прим. ред.*

Блок I (центр)

Главный символ	Описание	Тема
i	Эффективная процентная ставка для некоторого периода времени, обычно одного года или, с верхним индексом в позиции V, номинальная процентная ставка	Процент
v	Настоящая стоимость суммы размера 1 в конце периода начисления процента, обычно это один год	
δ	Интенсивность начисления процента	
d	Эффективная ставка дисконта для некоторого периода времени, обычно это один год или, с верхним индексом в позиции V, номинальная ставка дисконта	
l	Ожидаемое или фактическое число лиц, доживших до данного возраста	Таблицы смертности[1)]
d	Ожидаемое или фактическое число умерших в данный период времени. Этот символ всегда имеет нижний индекс в позиции II	
p	Вероятность прожить данный период времени	
q	Вероятность смерти в течение данного периода времени	
μ	Интенсивность смертности, обычно определяемая, исходя из интеравала в 1 год	
m	Повозрастной коэффициент смертности для данного периода времени	
L	Ожидаемое или фактическое число лет жизни в течение данного периода для доживших до начала этого периода	
T	Ожидаемая или фактическая суммарная продолжительность предстоящей жизни всех доживших до данного возраста	
A	Актуарная настоящая стоимость (единовременная нетто-премия) страхования на случай смерти или на дожитие со страховой выплатой размера 1	Страхование на случай смерти и на дожитие
(IA)	Актуарная настоящая стоимость (единовременная нетто-премия) страхования со страховой выплатой, равной 1 в конце первого года и линейно возрастающей со скоростью 1 в год	
(DA)	Актуарная настоящая стоимость (единовременная нетто-премия) срочного страхования жизни с начальной страховой выплатой, равной сроку действия договора страхования и линейно уменьшающейся со скоростью 1 в год	
E	Актуарная настоящая стоимость страхования на дожитие со страховой выплатой размера 1	
a	Актуарная настоящая стоимость аннуитета с выплатами размера 1 в один временной период, обычно равный одному году	Аннуитеты
s	Актуарная накопленная стоимость аннуитета с выплатами размера 1 в один временной период, обычно равный одному году	
(Ia)	Актуарная настоящая стоимость аннуитета с выплатами размера 1 в конце первого года и линейным увеличением выплат со скоростью 1 в год	
(Da)	Актуарная настоящая стоимость срочного аннуитета с начальной выплатой, равной сроку действия договора страхования и линейно уменьшающейся со скоростью 1 за период	

[1)] Ниже даны определения функций, приведенных в таблице смертности и обозначаемых через l, d, L и T, для совокупности дожития. Другие определения для стационарного населения см. в гл. 19.

P	Постоянная ежегодная премия на покрытие лишь страховых выплат (нетто-премия)	Премии[1)]
V	Резерв на покрытие разницы между будущими страховыми выплатами и будущими премиями (нетто-резерв)	Резервы
W	Стоимость оплаченного страхования, приобретенного за счет денежной стоимости, равной резерву	
S	Функция тарифов заработной платы, используемая для прогнозирования заработной платы	Пенсионное обеспечение
Z	Среднее для данного числа значений функции тарифов заработной платы, обычно на единичных интервалах в случае независимости	

Блок II (справа внизу)

Вспомогательные символы	Описания	Примеры
x, 10	Отдельная буква или число является возрастом лица в начале всего периода времени, относящегося к главному символу	a_x, $\bar{a}_{10}$, q_x, ${}_5q_{10}$, $\bar{A}_x$, A_{10}
$\overline{n}\rceil$, $\overline{10}\rceil$	Срок до определенного момента обозначается отдельной буквой или числом под знаком «угол»	$A_{x:\overline{n}\rceil}$, $\ddot{a}_{\overline{10}\rceil}$
$[x]$, $[35]$, $[x]+t$, $[35-n]+n$	Буквенно-числовое выражение, заключенное в прямые скобки, обозначает возраст, в котором происходит селекция. Срок, обозначающий период, прошедший с момента селекции, может быть прибавлен к выражению, заключенному в прямые скобки, для выражения достигнутого возраста	$l_{[x]}$, $l_{[x]+10}$, $A_{[35]}$, $\ddot{a}^{i}_{[35-n]+n}$
xyz или $x{:}y{:}z$, $25{:}\overline{10}\rceil$	Две или более буквенно-числовые характеристики означают статус дожития, который сохраняется до наступления первой смерти или окончания срока действия	l_{xyz}, $A_{x:y:z}$, $\ddot{a}_{25:\overline{10}\rceil}$, $P_{25:\overline{10}\rceil}$
$\frown$	Этот символ подчеркивает, что речь идет о статусе, связанном с дожитием нескольких лиц, если возможна двусмысленность	$A_{\overset{1}{\overparen{xy}}:z}$
$\overset{1}{x}{:}\overline{10}\rceil$; $\overset{2}{x}\underset{1}{y}z$	Числа над или под статусами дожития отдельных лиц в буквенно-числовом наборе ставятся, чтобы показать порядок, в котором эти лица теряют статус вследствие наступления страховых случаев. Страховая выплата производится при потере статуса, над которым стоит номер	$\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}\rceil}$, ${}_\infty q_{\underset{1}{x}\underset{2}{y}\overset{3}{z}}$
$\overline{xyz}$, $\overline{65{:}60{:}\overline{10}\rceil}$	Горизонтальная черта над буквенно-числовым набором определяет статус, который сохраняется до тех пор, пока сохраняется последний статус дожития отдельного лица	$a_{\overline{xyz}}$, $\bar{A}_{\overline{xy:\overline{n}\rceil}}$
$\overset{r}{\overline{xyz}}$, $\overset{[r]}{\overline{x{:}y{:}10}}$	Отдельная буква или число, скажем r, над правым концом черты, стоящей над буквенно-числовым набором, определяет статус, который сохраняется до тех пор, пока сохраняется по крайней мере r статусов дожития отдельных лиц. Если r заключено в квадратные скобки, то статус существует лишь в том случае, когда сохраняются в точности r статусов дожития отдельных лиц	$\bar{a}_{\overset{[2]}{\overline{xyz}}}$, $\bar{A}_{\overset{2}{\overline{xyz}}}$
$y\|x$, $60\|55$, $\overset{1}{y}z\|x$	Вертикальная черта, разделяющая буквы или числа, показывает, что выплаты, относящиеся к основному символу, начинаются с потери статуса перед чертой и продолжается до потери статуса, стоящего после черты, при условии, что статусы теряются в указанном порядке	$a_{y\|x}$, $a_{\underset{1}{w}x\overset{3}{y}\|z}$

1) Главные символы для нетто-премий, нетто-резервов и стоимостей оплаченного страхования P, V и W комбинируются с символами выплат, за исключением случая, когда страховые выплаты являются постоянным выплатами размера 1, производимыми в конце года смерти. [Примеры: $\bar{P}_x$, $P(\bar{A}_x)$, ${}_{10}V^{(4)}(\bar{A}_{x:\overline{n}\rceil})$, $P^{(12)}({}_{30|}\ddot{a}^{(12)}_{35})$.]

Блок III (снизу слева)

Вспомогательные символы	Описания	Примеры
n, 15	Отдельное число или буква показывает время, в течение которого вычисляется основной символ. Для годовой премии P эта позиция показывает максимальное число лет, в течение которых выплачиваются премии, если этот срок меньше, чем срок действия страхового договора или период отсрочки в случае отсроченного аннуитета	${}_np_x$, ${}_{15}E_{30}$, ${}_{20}P_{25}$, ${}_{20}V_{40:\overline{30}\rvert}$
$n\|m$, $n\|$	Буквенно-числовая пара, разделенная вертикальной чертой, показывает период отсрочки (слева от черты) и период, следующий за отсрочкой (справа от черты). В некоторых случаях, когда одна из этих величин равна единице или бесконечности, ее можно опустить	${}_{n\|m}q_x$, ${}_{n\|}\bar{a}_x$

Блок IV (в центре сверху)

Вспомогательные символы	Описания	Примеры
$\ddot{}$	Две точки над символом, обозначающим аннуитет, показывают, что выплата производится в начале периода, т. е. это аннуитет пренумерандо. Символ аннуитета без двоеточия означает аннуитет постнумерандо, т. е. выплаты производятся в конце периода	$\ddot{a}_x$, $\ddot{s}_{\overline{40}\rvert}$
$\bar{}$	Для аннуитета черта означает, что выплаты производятся непрерывно, а для страхового договора — что премии выплачиваются непрерывно, а страховая выплата производится в момент наступления страхового случая	$\bar{a}_x$, $\bar{A}_x$, ${}_3\bar{V}_x$, $\bar{P}(\bar{A}_x)$
$\circ$	Кружок означает, что выплаты или продолжительность жизни являются «полными», т. е. подсчитываются вплоть до момента смерти	$\mathring{a}_x$, $\mathring{a}_x$

Блок V (сверху справа)

Вспомогательные символы	Описания	Примеры
(m), (12)	Буквенно-числовой набор в круглых скобках показывает число выплат аннуитета течение периода начисления процента, обычно года. Для настоящих стоимостей страховых выплат это число периодов в году, в конце которых может выплачиваться страховая сумма в случае смерти. Для символов в случае выбытия по нескольким причинам символ в круглых скобках показывает используемую причину выбытия или то, что рассматривается выбытие по всем причинам	$s^{(12)}_{\overline{10}\rvert}$, $A^{(m)}_x$, $q^{(2)}_x$, ${}_tp^{(\tau)}_x$
$\{m\}$, $\{12\}$	Буквенно-числовой набор в фигурных скобках показывает число выплат аннуитета пренумерандо с корректирующим платежом в течение периода времени, обычно года. Для основного символа премии или резерва это обозначение показывает, что премии выплачиваются на этой основе	$\ddot{a}^{\{12\}}_{30:\overline{20}\rvert}$, $P^{\{1\}}_{30}$, ${}_tV^{\{2\}}(\bar{A}_x)$
r, i	Буква показывает специальный базис, используемый для актуарной настоящей стоимости	$\ddot{a}^r_{65}$, $\ddot{a}^i_{\{x\}}$

Блок VI (сверху слева)

Вспомогательные символы	Описания	Примеры
h, 2	Буква или число, показывающее число лет, в течение которых выплачиваются премии, если оно меньше, чем период действия договора страхования или период отсрочки для отсроченного аннуитета. Это относится лишь к основным символам V и W, если позиция III используется для времени, в течение которого вычисляется функция.	${}^{h}_{5}V_{30}$
	В этой книге дано новое применение этой позиции, чтобы показать, что актуарная настоящая стоимость аннуитета или выплат по договору страхования рассчитывается с удвоенной интенсивностью смертности	${}^{2}\bar{A}_{x}$, ${}^{2}\ddot{a}_{20:\overline{10}\rceil}$

Приложение 5

НЕКОТОРЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ, ПРИМЕНЯЕМЫЕ В АКТУАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Мы не ставим здесь цели напомнить известные стандартные формулы и методы, но указываем те из них, которые могут быть менее привычны для студентов-актуариев.

Интегральное исчисление.

Если

$$F(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)\,dx,$$

то

$$\frac{dF(t)}{dt} = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\,dx + f(\beta(t),t)\,\frac{d}{dt}\,\beta(t) - f(\alpha(t),t)\,\frac{d}{dt}\,\alpha(t).$$

Исчисление конечных разностей.

(a) Операторы сдвига:

$$\mathrm{E}[f(x)] = f(x+1).$$

(b) Операторы конечных разностей:

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x) = (\mathrm{E}-1)f(x).$$

(c) Кратные операторы конечных разностей:

$$\Delta^n f(x) = \Delta[\Delta^{n-1} f(x)] = (\mathrm{E}-1)^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k^n (-1)^{n-k} f(x+k).$$

(d) Оператор конечных разностей, примененный к произведению:

$$\Delta[f(x)g(x)] = f(x+1)\Delta g(x) + g(x)\Delta f(x).$$

(e) Обратный к разностному оператору:

если $\Delta f(x) = g(x)$, то $\Delta^{-1} g(x) = f(x) + w(x)$, где $w(x) = w(x+1)$.

Приложения.

(a) Представление полинома (формула Ньютона). Пусть $p_n(x)$ — полином степени n. Тогда

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k^{x-a} \Delta^k p_n(a).$$

(b) Суммирование рядов:

если $\Delta F(x) = f(x)$, то

$$\begin{aligned} f(1) &= F(2) - F(1), \\ f(2) &= F(3) - F(2), \\ &\dots\dots\dots\dots \\ f(n) &= F(n+1) - F(n), \end{aligned}$$

$$\sum_{x=1}^{n} f(x) = F(n+1) - F(1) = \Delta^{-1} f(x)\Big|_1^{n+1}.$$

(c) Суммирование по частям:

$$\sum_{x=1}^{n} g(x)\Delta f(x) = f(x)g(x)\Big|_1^{n+1} - \Delta^{-1}[f(x+1)\Delta g(x)]\Big|_1^{n+1}.$$

[Доказательство: просуммируйте обе части равенства для $\Delta[f(x)g(x)]$ по x от 1 до n.]

Распределения вероятностей

Дискретные распределения	Функция распределения	Ограничения на параметры	Производящая функция моментов $M(s)$	Моменты	
				Среднее	Дисперсия
Биномиальное	$C_x^n p^x q^{n-x}$, $x = 0, 1, \ldots, n$	$0 < p < 1$, $q = 1 - p$	$(pe^s + q)^n$	np	npq
Бернулли	частный случай $n = 1$				
Отрицательное биномиальное	$C_x^{r+x-1} p^r q^x$, $x = 0, 1, \ldots$	$0 < p < 1$, $q = 1 - p$, $r > 0$	$\left(\frac{p}{1 - qe^s}\right)^r$, $qe^s < 1$	$\frac{rq}{p}$	$\frac{rq}{p^2}$
Геометрическое	частный случай $n = 1$				
Пуассона	$\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$, $x = 0, 1, \ldots$	$\lambda > 0$	$e^{\lambda(e^s - 1)}$	λ	λ
Равномерное	$\frac{1}{n}$, $x = 1, \ldots, n$	n положительное целое	$\frac{e^s(1 - e^{sn})}{n(1 - e^s)}$, $s \neq 0$ 1, $s = 0$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2 - 1}{12}$

Непрерывные распределения	Плотность распределения	Ограничения на параметры	Производящая функция моментов $M(s)$	Моменты	
				Среднее	Дисперсия
Равномерное	$\frac{1}{b-a}$, $a < x < b$	—	$\frac{e^{bs}-e^{as}}{(b-a)s}$, $s \neq 0$	$\frac{b+a}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Нормальное	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$, $-\infty < x < \infty$	$\sigma > 0$	$\exp\left(\mu s + \frac{\sigma^2 s^2}{2}\right)$	μ	σ^2
Гамма-распре-деление	$\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$, $x > 0$	$\alpha > 0$, $\beta > 0$	$\left(\frac{\beta}{\beta - s}\right)^\alpha$, $s < \beta$	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{\alpha}{\beta^2}$
Показательное	частный случай $\alpha = 1$				
Хи-квадрат	частный случай $\alpha = \frac{k}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$	k — положительное целое			
Обратное гауссовское	$\frac{\alpha}{\sqrt{2\pi\beta}} x^{-3/2} \exp\left[-\frac{(\beta x - \alpha)^2}{2\beta x}\right]$, $x > 0$	$\alpha > 0$, $\beta > 0$	$\exp\left[\alpha\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2s}{\beta}}\right)\right]$, $s < \frac{\beta}{2}$	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{\alpha}{\beta^2}$
Парето	$\alpha \frac{x_0^n}{x^{\alpha+1}}$, $x > x_0$	$x_0 > 0$, $\alpha > 0$		$\frac{\alpha x_0}{\alpha - 1}$, $\alpha > 1$	$\frac{\alpha x_0^2}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2}$, $\alpha > 2$
Логнормальное	$\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\log x - m)^2}{2\sigma^2}\right]$, $x > 0$	$-\infty < m < \infty$, $\sigma > 0$		$e^{m+\sigma^2/2}$	$(e^{\sigma^2} - 1)e^{2m+\sigma^2}$

Приложение 6

ЛИТЕРАТУРА

Actuarial Society of America.
(1947) International Actuarial Notation, *Transactions of the Actuarial Society of America*, XLVIII:166–176.

Allen J. M.
(1907) On the Relation between the Theories of Compound Interest and Life Contingencies, *Journal of the Institute of Actuaries*, 41:305–337.

Allison G. O., Winklevoss H. E.
(1975) The Interrelationship among Inflation Rates, Interest Rates, and Pension Costs, *Transactions of the Society of Actuaries*, XXVII:197–210.

Anderson J. C. H.
(1959) Gross Premium Calculations and Profit Measurement for Nonparticipating Insurance, *Transactions of the Society of Actuaries*, XI:357–394.

Arrow K. J.
(1963) Uncertainty and the Welfare of Medical Care, *American Economic Review*, 53:941–973.

Balducci G.
(1921) Correspondence. *Journal of the Institute of Actuaries*, 52:184.

Bartlett D. K.
(1965) Excess Ratio Distributions in Risk Theory, *Transactions of the Society of Actuaries*, XVIL:435–463.

Batten R. W.
(1978) *Mortality Table Construction*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall.

Beard R. E., Pentikäinen T., Pesonen E.
(1984) *Risk Theory*. 3rd ed. New York: Chapman & Hall.

Becker D. N.
(1991) Statistical Tests of the Lognormal Distribution as a Basis for Interest Rate Changes, *Transactions of the Society of Actuaries*, XLIII:7–57.

Beekman J. A.
(1969) A Ruin Function Approximation. *Transactions of the Society of Actuaries*, XXI:41–48.

Beekman J. A.
(1974) *Two Stochastic Processes*. New York: Halsted Press.

Beekman J. A., Bowers N. L.
(1972) An Approximation to the Finite Time Ruin Function, *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, 41–56, 128–137.

Bellhouse D. R., Panjer H. H.
(1980) Stochastic Modelling of Interest Rates with Applications to Life Contingencies, *Journal of Risk and Insurance*, 47:91–110.

Bellman R. E., Kalaba R. E., Lockett J.
(1966) *Numerical Inversion of the Laplace Transform: Applications to Biology, Economics, Engineering, and Physics*. New York: American Elsevier.

Bicknell W. S., Nesbitt C. J.
(1956) Premiums and Reserves in Multiple Decrement Theory, *Transactions of the Society of Actuaries*, VIII:344–377.

Biggs J. H.
(1969) Alternatives in Variable Annuity Benefit Design, *Transactions of the Society of Actuaries*, XXI:495–517.

Black F., Scholes M.
(1973) The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy*, 81:637–659.

Boermeester J. M.
(1956) Frequency Distribution of Mortality Costs, *Transactions of the Society of Actuaries*, VIII:1–9.

Bohman H., Esscher F.
(1963, 1964) Studies in Risk Theory with Numerical Illustrations Concerning Distribution Functions and Stop-Loss Premiums, *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, 173–225, 1–40.

Borch K.
(1960) An Attempt to Determine the Optimum Amount of Stop-Loss Reinsurance, *Transactions of the 16th International Congress of Actuaries*, I:597–610.

Borch K.
(1974) *The Mathematical Theory of Insurance*. Lexington, Mass.: Lexington Books.

Bowers N. L.
(1966) Expansions of Probability Density Functions as a Sum of Gamma Densities with Applications in Risk Theory, *Transactions of the Society of Actuaries*, XVIII:125–137.

Bowers N. L.
(1967) An Approximation to the Distribution of Annuity Costs, *Transactions of the Society of Actuaries*, XIX:295–309.

Bowers N. L.
(1969) An Upper Bound for the Net Stop-Loss Premium, *Transactions of the Society of Actuaries*, XXI:211–218.

Bowers N. L., Jr., Hickman J. C, Nesbitt C. J.
(1976) Introduction to the Dynamics of Pension Funding, *Transactions of the Society of Actuaries*, XXVIII:177–203.

Bowers N. L., Jr., Hickman J. C., Nesbitt C. J.
(1979) The Dynamics of Pension Funding: Contribution Theory, *Transactions of the Society of Actuaries*, XXXI:93–119.

Boyle P. P.
(1992) *Options and the Management of Financial Risk*. Schaumburg, Ill.: Society of Actuaries.

Brenner H. F., et al.
(1988) *Life Insurance Accounting*. Durham, N.C.: Insurance Accounting and Systems Association.

Brillinger D. R.
(1961) A Justification of Some Common Laws of Mortality, *Transactions of the Society of Actuaries*, XIII:116–119.

Buchta C.
(1994) An Elementary Proof of the Schuette-Nesbitt Formula, *Bulletin of the Swiss Association of Actuaries*, 219–220.

Bühlmann H.
(1970) Mathematical Methods in Risk Theory. New York: Springer.

Carriere J. F.
(1994) Dependent Decrement Theory, *Transactions of the Society of Actuaries*, XLVI:45–65.

Chalke S. A.
(1991) Macro Pricing: A Comprehensive Product Development Process, *Transactions of the Society of Actuaries*, XLIII:137–194.

Chalke S. A., Davlin M. F.
(1983) Universal Life Valuation and Nonforfeiture: A Generalized Model, *Transactions of the Society of Actuaries*, XXXV:249–298.

Chamberlin G.
(1982) The Proficient Instrument — a New Appraisal of the Commutation Function in the Context of Pension Fund Work, *Journal of the Institute of Actuaries Students' Society*, 25:1–46.

Chapin W. L.
(1976) Toward Adjustable Individual Life Policies, *Transactions of the Society of Actuaries*, XXVIII:237–269.

Chiang C. L.
(1968) *Introduction to Stochastic Processes in Biostatistics*. New York: John Wiley and Sons.

Christiansen S. L.
(1992) A Practical Guide to Interest Rate Generators for C-3 Risk, *Transactions of the Society of Actuaries*, XLIV:101–134.

Cody D. D.
(1981) An Expanded Financial Structure for Ordinary Dividends, *Transactions of the Society of Actuaries*, XXXIII:313–338.

Committee on Ordinary Insurance and Annuities.
(1982) II. 1975-80 Basic Tables with Appendix of Age-Last Birthday Basic Tables, *TSA 1982 Reports*, 56–81.

Cramér H.
(1930) *On the Mathematical Theory of Risk*. Stockholm: Centraltryckeriet.

Cummins J. D.
(1973) *Development of Life Insurance Surrender Values in the United States*. Homewood, Ill.: Richard D. Irwin.

DeGroot M. H.
(1970) *Optimal Statistical Decisions*. New York: McGraw-Hill. [Имеется перевод: Де Гроот М. Оптимальные статистические решения. — М., Мир, 1974.]

DeGroot M. H.
(1986) *Probability and Statistics*. 2nd ed. Reading, Mass.: Addison-Wesley.

DeVylder F.
(1977) Martingales and Ruin in a Dynamic Risk Process, *Scandinavian Actuarial Journal*, 217–225.

Dropkin L. B.
(1959) Some Considerations in Automobile Rating Systems Utilizing Individual Driving Records, *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, XLVI:165–176.

Dubourdieu J.
(1952) *Theorie Mathématique des Assurances*. Paris: Gauthier Villars.

Duncan, R. M.
(1952) A Retirement System Granting Unit Annuities and Investing in Equities, *Transactions of the Society of Actuaries*, IV:317–344.

Elandt-Johnson R. C., Johnson N. L.
(1980) *Survival Models and Data Analysis*. New York: John Wiley and Sons.

Fama E. F.
(1970) Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work, *Journal of Finance*, 25:383–417.

Fassel E. G.
(1956) Premium Rates Varying by Policy Size, *Transactions of the Society of Actuaries*, VIII:390–419.

Feller W.
(1966) *An Introduction to Probability Theory and Its Applications.* Vol. II. New York: John Wiley and Sons. [Имеется перевод: Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. — М.: Мир, 1984.]

Feller W.
(1968) *An Introduction to Probability Theory and Its Applications.* Vol. I. 3rd ed. New York: John Wiley and Sons. [Имеется перевод: Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. — М.: Мир, 1984.]

Fraser J. C., Miller W. N., Sternhell C. M.
(1969) Analysis of Basic Actuarial Theory for Fixed Premium Variable Benefit Life Insurance, *Transactions of the Society of Actuaries*, XXI:343–78, and discussions 379–457.

Frasier W. M.
(1978) Second to Die Joint Life Cash Values and Reserves, *The Actuary*, 12:3.

Frees E. W.
(1990) Stochastic Life Contingencies with Solvency Considerations, *Transactions of the Society of Actuaries*, XLII:91–129.

Frees E. W., Carriere J. F., Valdez E.
(1996) Annuity Valuation with Dependent Mortality, *Journal of Risk and Insurance*, 63:229–261.

Fretwell R. L., Hickman J. C.
(1964) Approximate Probability Statements about Life Annuity Costs, *Transactions of the Society of Actuaries*, XVI:55–60.

Friedman M., Savage L. J.
(1948) The Utility Analysis of Choices Involving Risk, *Journal of Political Economy*, 56:279–304.

Genest C.
(1987) Frank's Family of Bivariate Distributions, *Biometrika*, CXXIV:549–555.

Geoghegan T. J., et al.
(1992) Report on the Wilkie Stochastic Investment Model, *Journal of the Institute of Actuaries*, 119, Part II, No. 473:173–228.

Gerber H. U.
(1973) Martingales in Risk Theory, *Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker*, LXXIII:205-16.

Gerber H. U.
(1974) The Dilemma between Dividends and Safety and a Generalization of the Lundberg-Cramér Formulas, *Scandinavian Actuarial Journal*, 46–57.

Gerber H. U.
(1976) A Probabilistic Model for (Life) Contingencies and a Delta-Free Approach to Contingency Reserves, *Transactions of the Society of Actuaries*, XXVIII:127–141.

Gerber H. U.
(1979) *An Introduction to Mathematical Risk Theory.* Huebner Foundation Monograph 8, distributed by Richard D. Irwin, Homewood, Ill.

Gerber H. U.
(1980) Principles of Premium Calculation and Reinsurance, *Transactions of the 21st International Congress of Actuaries*, I:137–142.

Gerber H. U., Jones D. A.
(1977) Some Practical Considerations in Connection with the Calculation of Stop-Loss Premiums, *Transactions of the Society of Actuaries*, XXVIII:215–232.

Gerber H. U., Shiu E. S.
(1998) On the Time Value of Ruin, *North American Actuarial Journal*, II, No. 1:48–78.

Giaccotto C.
(1986) Stochastic Modelling of Interest Rates: Actuarial vs. Equilibrium Approach, *Journal of Risk and Insurance*, 53:435–453.

Gingery S. W.
(1952) Special Investigation of Group Hospital Expense Insurance Experience, *Transactions of the Society of Actuaries*, IV:44–112.

Goovaerts M. J., DeVylder F.
(1980) Upper Bounds on Stop-Loss Premiums under Constraints on Claim Size Distributions as Derived from Representation Theorems for Distribution Functions, *Scandinavian Actuarial Journal*, 141–148.

Greenwood M., Yule G. U.
(1920) An Inquiry into the Nature of Frequency Distributions Representative of Multiple Happenings with Particular Reference to the Occurrence of Multiple Attacks of Disease or Repeated Accidents, *Journal of the Royal Statistical Society*, LXXXIII:255–279.

Greville T. N. E.
(1948) Mortality Tables Analyzed by Cause of Death, *Record of the American Institute of Actuaries*, XXXVIL:283–294. Discussion in XXXVIII (1949):77–79.

Greville T. N. E.
(1956) Laws of Mortality Which Satisfy a Uniform Seniority Principle, *Journal of the Institute of Actuaries*, 82:114–122.

Guertin A. N.
(1965) Life Insurance Premiums, *Journal of Risk and Insurance*, 32:23–50.

Halmstad D. G.
(1972) Underwriting the Catastrophe Accident Hazard, *Transactions of the Society of Actuaries*, XXIV:D408–418.

Halmstad D. G.
(1976) Exact Numerical Procedures in Discrete Risk Theory, *Transactions of the 20th International Congress of Actuaries*, III:557–562.

Hattendorf K.
(1868) The Risk with Life Assurance, E. A. Masius's *Rundschau der Versicherungen* (Review of Insurances), Leipzig; translated by Trevor Sibbett and reprinted in *Life Insurance Mathematics*, Vol. IV, Part 2 of *History of Actuarial Science*, edited by Steven Haberman and Trevor Sibbett. London: William Pickering, 1995.

Hickman J. C.
(1964) A Statistical Approach to Premiums and Reserves in Multiple Decrement Theory, *Transactions of the Society of Actuaries*, XVI:1–16.

Hoem J. M.
(1988) The Versatility of the Markov Chain as a Tool in the Mathematics of Life Insurance, *Transactions of the 23rd International Congress of Actuaries*, Record of Proceedings, 171–202.

Hogg R. V., Klugman S. A.
(1984) *Loss Distributions*. New York: John Wiley and Sons.

Hooker P. F., Longley-Cook L. H.
(1953) *Life and Other Contingencies*. Vol. I. Cambridge: Cambridge University Press.

Hooker P. F., Longley-Cook L. H.
(1957) *Life and Other Contingencies*. Vol. II. Cambridge: Cambridge University Press.

Horn R. G.
(1971) Life Insurance Earnings and the Release from Risk Policy Reserve, *Transactions of the Society of Actuaries*, XXIII:391–399.

Hoskins J. E.
(1929) A New Method of Computing Non-Participating Premiums, *Transactions of the Actuarial Society of America*, XXX:140–166.

Hoskins J. E.
(1939) Asset Shares and Their Relation to Nonforfeiture Values, *Transactions of the Actuarial Society of America*, XL:379–393.

Huffman P. J.
(1978) Asset Share Mathematics, *Transactions of the Society of Actuaries*, XXX:277–296.

Institute of Actuaries, Faculty of Actuaries,
(1992), *Standard Tables of Mortality: The "80"Series.* Institute of Actuaries, Staple Inn Hall, High Holborn, London WCIV7QJ, U.K.; Faculty of Actuaries, 23 St. Andrew Square, Edinburgh EH21AQ, U.K.

Jackson R. T.
(1959) Some Observations on Ordinary Dividends, *Transactions of the Society of Actuaries*, XI:764–796.

Jenkins W. A.
(1943) An Analysis of Self-Selection, among Annuitants, Including Comparisons with Selection among Insured Lives, *Transactions of the Actuarial Society of America*, XLIV:227-239.

Jetton M. F.
(1988) Interest Rate Scenarios, *Transactions of the Society of Actuaries*, XL, Part I:423–437.

Jones B. L.
(1994) Actuarial Calculations Using a Markov Model, *Transactions of the Society of Actuaries*, XLVI:227–250.

Jordan C. W.
(1952) *Life Contingencies.* 2nd ed., 1967. Schaumburg, Ill.: Society of Actuaries.

Kahn P. M.
(1961) Some Remarks on a Recent Paper by Borch, *ASTIN Bulletin*, I:265–272.

Kahn P. M.
(1962) An Introduction to Collective Risk Theory and Its Application to Stop-Loss Reinsurance, *Transactions of the Society of Actuaries*, XIV:400–425.

Keller J. B.
(1990) Pricing of Accelerated Benefit Plans, *Transactions of the Society of Actuaries*, XLII:259–280.

Kendall M., Stuart A.
(1977) *The Advanced Theory of Statistics.* Vol. I. 4th ed. New York: Macmillan. [Имеется перевод II изд.: Кендалл М., Стьюарт А. Теория распределений. — М.: Наука, 1966.]

Keyfitz N.
(1968) *Introduction to the Mathematics of Population.* Reading, Mass.: Addison-Wesley.

Keyfitz N.
(1977) *Applied Mathematical Demography.* New York: John Wiley and Sons.

Keyfitz N., Beekman J.
(1984) *Demography through Problems.* New York: Springer.

King G.
(1887) *Institute of Actuaries' Textbook.* Part II. 2nd ed., 1902. London: Charles and Edwin Layton.

Kischuk R. K.
(1976) Discussion of "Fundamentals of Pension Funding", *Transactions of the Society of Actuaries*, XXVIII:205–211.

Klein G. E.
(1993) The Sensitivity of Cash-Flow Analysis to the Choice of Statistical Model for Interest Rate Changes, *Transactions of the Society of Actuaries*, XLV:79–124.

Kornya P. S.
(1983) Distribution of Aggregate Claims in the Individual Risk Theory Model, *Transactions of the Society of Actuaries*, XXXV:823–836.

Lauer J. A.
(1967) Apportionable Basis for Net Premiums and Reserves, *Transactions of the Society of Actuaries*, XIX:13–23.

Linton M. A.
(1919) Analysis of the Endowment Premium, *Transactions of the Actuarial Society of America*, XX:430–439.

London D.
(1988) *Survival Models and Their Estimation.* Winsted, Conn.: ACTEX Publications.

Lukacs E.
(1948) On the Mathematical Theory of Risk, *Journal of the Institute of Actuaries Students' Society*, 8:20–37.

Lundberg O.
(1940) *On Random Processes and Their Application to Sickness and Accident Statistics.* Uppsala: Almqvist and Wiksells.

Macarchuk J.
(1969) Some Observations on the Actuarial Aspects of the Insured Variable Annuity, *Transactions of the Society of Actuaries*, XXI:529–538.

Maclean J. B., Marshall E. W.
(1937) *Distribution of Surplus.* Schaumburg, Ill.: Society of Actuaries.

Makeham W. M.
(1874) On the Application of the Theory of the Composition of Decremental Forces, *Journal of the Institute of Actuaries*, 18:317–322.

Marshall A. W., Olkin I.
(1967), A Multivariate Exponential Distribution, *Journal of the American Statistical Association*, 62:30–44.

Marshall A. W., Olkin I.
(1988) Families of Multivariate Distributions, *Journal of the American Statistical Association*, 83:834–841.

McCrory R. T.
(1984) Mortality Risk in Life Annuities, *Transactions of the Society of Actuaries*, XXXVI: 309–338.

Menge W. O.
(1932) Forces of Decrement in a Multiple-Decrement Table, *Record of the American Institute of Actuaries*, XXI:41–46.

Menge W. O.
(1946) Commissioners Reserve Valuation Method, *Record of the American Institute of Actuaries*, XXXV:258–300.

Mereu J. A.
(1961) Some Observations on Actuarial Approximations, *Transactions of the Society of Actuaries*, XIII:87–102.

Mereu J. A.
(1962) Annuity Values Directly from Makeham Constants, *Transactions of the Society of Actuaries*, XIV:269–286.

Mereu J. A.
(1972) An Algorithm for Computing Expected Stop-Loss Claims under a Group Life Contract, *Transactions of the Society of Actuaries*, XXIV:311–320.

Miller M. D.
(1951) Group Weekly Indemnity Continuation Table Study, *Transactions of the Society of Actuaries*, III:31–67.

Miller W. N.
(1971) Variable Life Insurance Product Design, *Journal of Risk and Insurance*, 38:527–542.

Mood A. M., Graybill F. A., Boes D. C.
(1974) *Introduction to the Theory of Statistics.* New York: McGraw-Hill.

Myers R. J.
(1960) Actuarial Analysis of Pension Plans under Inflationary Conditions, *Transactions of the 16th International Congress of Actuaries*, I:301–315.

National Association of Insurance Commissioners.
(1939) Report of the Committee to Study the Need for a New Mortality Table and Related Topics. Kansas City: National Association of Insurance Commissioners.

National Association of Insurance Commissioners.
(1941) Report and Statements on Nonforfeiture Benefits and Related Matters. Kansas City: National Association of Insurance Commissioners.

Neill A.
(1977) *Life Contingencies.* London: Heinemann.

Nesbitt C. J.
(1964) Discussion of "A Statistical Approach to Premiums and Reserves in Multiple Decrement Theory", *Transactions of the Society of Actuaries*, XV:149–153.

Nesbitt C. J., Van Eenam M. L.
(1948) Rate Functions and Their Role in Actuarial Mathematics, *Record of the American Institute of Actuaries*, XXXVII:202-222.

Panjer H. H.
(1980) The Aggregate Claims Distribution and Stop-Loss Reinsurance, *Transactions of the Society of Actuaries*, XXXII:523–535.

Panjer H. H., Willmot G. E.
(1992) *Insurance Risk Models.* Schaumburg, Ill.: Society of Actuaries.

Pesonen E.
(1967) On the Calculation of the Generalized Poisson Function, *ASTIN Bulletin*, IV:120–128.

Pratt J. W.
(1964) Risk Aversion in the Small and in the Large, *Econometrica*, XXXII:122–136.

Preston S. H., Keyfitz N., Schoen R.
(1973) Cause-of-Death Life Tables: Application of a New Technique to Worldwide Data, *Transactions of the Society of Actuaries*, XXV:83–109.

Promislow S. D.
(1991a) The Probability of Ruin in a Process with Dependent Increments, *Insurance: Mathematics and Economics*, X:99–107.

Promislow S. D.
(1991b) Select and Ultimate Models in Multiple Decrement Theory, *Transactions of the Society of Actuaries*, XLIII:281–300.

Rasor E. A., Greville T. N. E.
(1952) Complete Annuities, *Transactions of the Society of Actuaries*, IV:574–582.

Rasor E. A., Myers R. J.
(1952) Actuarial Note: Valuation of the Shares in a Share-and-Share-Alike Last Survivor Annuity, *Transactions of the Society of Actuaries*, IV:128–30.

Redington F. M.
(1952) A Review of the Principles of Life Office Valuation, *Journal of the Institute of Actuaries*, LXXVII:286–340.

Renyi A.
(1962) *Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften.

Reynolds C. W.
Last Survivor Antiselection, Development News, Feb. 1994.

Richardson C. F. B.
(1977) Expense Formulas for Minimum Nonforfeiture Values, *Transactions of the Society of Actuaries*, XXIX:222–229.

Robinson J. M.
(1984) Discussion of "Maximum Likelihood Alternatives to Actuarial Estimators of Mortality Rates", *Transactions of the Society of Actuaries*, XXXVI:125–138.

Scher E.
(1974) Relationships among the Fully Continuous, the Discounted Continuous, and the Semicontinuous Reserve Bases for Ordinary Life Insurance, *Transactions of the Society of Actuaries*, XXVI:597–606.

Seal H. L.
(1969) *Stochastic Theory of a Risk Business.* New York: John Wiley and Sons.

Seal H. L.
(1977) Studies in the History of Probability and Statistics—Multiple Decrements or Competing Risks, *Biometrika*, LXIV:429–439.

Seal H. L.
(1978a) From Aggregate Claims Distribution to Probability of Ruin, *ASTIN Bulletin*, X:47–53.

Seal H. L.
(1978b) *Survival Probabilities—The Goal of Risk Theory.* New York: John Wiley and Sons.

Shepherd B. E.
(1940) Natural Reserves, *Transactions of the Actuarial Society of America*, XLI:463–479.

Shiu E. S. W.
(1982) Integer Functions and Life Contingencies, *Transactions of the Society of Actuaries*, XXXIV:571–590.

Simon L. J.
(1960) The Negative Binomial and the Poisson Distributions Compared, *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, XLVII:20–24.

Society of Actuaries Committee on Actuarial Principles.
(1992) Principles of Actuarial Science, *Transactions of the Society of Actuaries*, XLIV:565–591.

Special Committee on Valuation and Nonforfeiture Laws.
(1975) Report on Actuarial Principles and Practical Problems with Regard to Nonforfeiture Requirements, *Transactions of the Society of Actuaries*, XXVII:549–633.

Spurgeon E. F.
(1922. 2nd ed., 1929. 3rd ed., 1932) *Life Contingencies.* Cambridge: Cambridge University Press.

Steffensen J. F.
(1929) On Hattendorfs Theorem in the Theory of Risk, *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, 1–17.

Takács L.
(1967) *Combinatorial Methods in the Theory of Stochastic Processes.* New York: John Wiley and Sons. [Имеется перевод: Такач Л. Комбинаторные методы в теории случайных процессов. — М.: Мир, 1974.]

Taylor G. C.
(1977) Upper Bounds on Stop-Loss Premiums under Constraints on Claim Size Distributions, *Scandinavian Actuarial Journal*, 94–105.

Taylor R. H.
(1952) The Probability Distribution of Life Annuity Reserves and Its Application to a Pension System, *Proceedings of the Conference of Actuaries in Public Practice*, 11:100–150.

Tenenbein A., Vanderhoof I. T.
(1980) New Mathematical Laws of Select and Ultimate Mortality, *Transactions of the Society of Actuaries*, XXXII:119–158.

Thompson J. S.
(1934) Select and Ultimate Mortality, *Transactions of the 10th International Congress of Actuaries*, 11:252–263.

Tilley J. A.
(1992) An Actuarial Layman's Guide to Building Interest Rate Generators, *Transactions of the Society of Actuaries*, XLIV:509–538.

Trowbridge C. L.
(1952) Fundamentals of Pension-Funding, *Transactions of the Society of Actuaries*, IV:17–43.

Trowbridge C. L.
(1955) Funding of Group Life Insurance, *Transactions of the Society of Actuaries*, VII:270–284.

Trowbridge C. L.
(1963) The Unfunded Present Value Family of Pension Funding Methods, *Transactions of the Society of Actuaries*, XV:151–169.

Trowbridge J. R.
(1977) Assessmentism—An Alternative to Pensions Funding? *Journal of the Institute of Actuaries*, 104:173–204.

Tullis M. A., Polkinghorn P, K.
(1992) *Valuation of Life Insurance Liabilities*. 2nd ed. Winsted, Conn.: ACTEX Publications.

U.S. Department of Health and Welfare. Public Health Service.
(1985) *United States Life Tables*: 1979–81. Washington, D.C.: Government Printing Office.

Vanderhoof I. T.
(1972) The Interest Rate Assumption and the Maturity Structure of the Assets of a Life Insurance, *Transactions of the Society of Actuaries*, XXIV:157–192.

White R. P., Greville T. N. E.
(1959) On Computing the Probability that Exactly k of n Independent Events Will Occur, *Transactions of the Society of Actuaries*, XI:88–95.

Wilkie A. D.
(1986) A Stochastic Investment Model for Actuarial Use, *Transactions of the Faculty of Actuaries*, 39, Part 3:341–373.

Willett A. H.
(1951) *The Economic Theory of Risk and Insurance*. Philadelphia: University of Pennsylvania Press.

Williamson W. R.
(1942) Selection, *Transactions of the Actuarial Society of America*, XLIII:33–43.

Wittstein T.
(1873) On Mathematical Statistics and Its Applications to Political Economy and Insurances, *Journal of the Institute of Actuaries and Assurance Magazine*, XVII:178–189, 355–369, 417–435.

Wooddy J.
(1973) *Study Notes for Risk Theory*. Schaumburg, Ill.: Society of Actuaries.

Приложение 7

ОТВЕТЫ К УПРАЖНЕНИЯМ

Глава 1

1.1. (a) и (b).

w	$u(w)$	$u(w_1, w_2)$	$u(w_1, w_2, w_3)$
0	$-1,000$	$125 \cdot 10^{-6}$	$-48 \cdot 10^{-10}$
4 000	$-0,500$	$93 \cdot 10^{-6}$	$-34 \cdot 10^{-10}$
6 700	$-0,250$	$78 \cdot 10^{-6}$	$-14 \cdot 10^{-10}$
8 300	$-0,125$	$74 \cdot 10^{-6}$	—
10 000	0,000	—	—

1.2. (b) 2, 2; (d) $2\ln 2$.

1.3. (c) $\mathbf{D}[X]$.

1.7. (a) Да, для всех w; (b) $(90 < w < 100) \cup (w > 110)$.

1.11. $-(n/2\alpha)\ln(1-2\alpha)$.

1.12. (a) $G = 400\ln(13/12) = 32{,}02$; (b) $G = 150\ln(3/2) = 60{,}82$.

1.13. (a) 30; (b) 26.

1.14. Полное страховое покрытие.

1.17. (a) $-[1 - F(d)]$.

1.18. (a) 10, 100.

1.19. (a) 50, 2500/3; (b) $k = 0{,}25$, $d = 50$; (c) $\mathbf{D}[X - I_1(X)] = 468{,}75$, $\mathbf{D}[X - l_2(X)] = 260{,}42$.

Глава 2

2.1. 1/2, 19/4.

2.2. 1/2, 77/12.

2.3. 35/4, 1085/48.

2.4. 7/4, 77/48.

2.5. 49/4, 735/16.

2.6. $a/100$ и $a^2(197/30\,000)$.

2.7.

x	$F_s(x)$	x	$F_s(x)$	x	$F_s(x)$
0	0,2268	5	0,8586	10	0,9948
1	0,2916	6	0,9018	11	0,9988
2	0,4374	7	0,9582	12	0,9996
3	0,6210	8	0,9762	13	1,0000
4	0,7434	9	0,9918		

2.8. (c) 1/48, 1/6, 1/2.

2.9. $\mathbf{E}[X] = \alpha/\beta$, $\mathbf{D}[X] = \alpha/\beta^2$.

2.10. $\mathbf{E}[X] = 1$, $\mathbf{D}[X] = 1/3$, $\mathbf{E}[Y] = 3/2$, $\mathbf{D}[Y] = 3/4$, $\mathbf{P}(X+Y > 4) \cong 0{,}0748$, $\mathbf{P}(X+Y > 4) = 0{,}0833$.

2.11. (a) $b = -1$, $c = 1$, $d = a$ или $b = 1$, $c = 0$, $d = -a$; (b) 0,0228, 0,1587, 0,5000.

2.12. (a) 18, 36; (b) 27,8713, 31,9607.

2.13. (a) 0,0041; (b) 0,0045.

2.14. 3,56, т. е. 35 600.

2.15. (a) 6,4, 6,144; (b) $7(10^4)$, $17{,}072(10^8)$; (c) 1,37341.

2.16. 0,0062.

Глава 3

3.1.

$s(x)$	$F(x)$	$f(x)$	μ_x
$\cos x$	$1-\cos x$	$\sin x$	—
—	$1-e^{-x}$	e^{-x}	1
$\dfrac{1}{1+x}$	—	$\dfrac{1}{(1+x)^2}$	$\dfrac{1}{1+x}$

3.2. (a) $\exp[-(B/\ln c)(c^x-1)]$; (b) $\exp(-ux^{n+1})$, $u=k/(n+1)$; (c) $(1+x/b)^{-a}$.

3.3. $\mu(x)=x^2/4$, $f(x)=x^2e^{-x^3/12}/4$, $F(x)=1-e^{-x^3/12}$.

3.4. (a) $\int_0^\infty \mu(x)\,dx<\infty$; (b) $s'(x)>0$ для некоторых x, включая $x=1,2$; (c) $\int_0^\infty f_X(x)\,dx=2^n\Gamma(n)>1$ при $n\geqslant 1$.

3.5. (a) $1/(100-x)$; (b) $x/100$; (c) $1/100$; (d) $3/10$.

3.6. (a) $1-t/60$, (b) $1/(60-t)$, (c) $1/60$.

3.7. (a) 8/9, (b) 1/8, (c) 1/8, (d) 1/128, (e) 128/3.

3.9. 0,001994.

3.10. $f_X(x)=C_x^{10}(0{,}77107)^x(0{,}22893)^{10-x}$, $x=0,1,2,\ldots,10$, $\mathbf{E}[\mathcal{L}(x)]=7{,}7107$, $\mathbf{D}[\mathcal{L}(x)]$ Q1 $=1{,}765211$.

3.11. (a) 9/4 для каждой; (b) 27/16 для каждой; (c) $-1/3$.

3.12. (a) ${}_5q_0=0{,}01505$ больше, чем ${}_5q_5=0{,}001503$, умноженное на 10; (b) ${}_{55|5}q_{25}=0{,}156729$.

3.15. 1436,19.

3.18. (a) $1/c$; (b) $1/c^2$; (c) $(\ln 2)/c$, (d) 0.

3.19. (a) $te^{-t^2/2}$; (b) $\sqrt{\pi/2}$.

3.20. (a) $(100-x)/2$; (b) $(100-x)^2/12$; (c) $(100-x)/2$.

3.23. (a) $\mathring{e}_x=(10-x)/2$, $x=0,1,2,3\ldots,9$, $e_x=(9-x)/2$, $x=0,1,2,3\ldots,9$.

3.24. (a) $u(0)=e^{-\lambda}$, $-c(x)/d(x)=0$, $1/d(x)=\lambda/(x+1)$; (b) $u(0)=(1-p)^n$, $-c(x)/d(x)=0$, $1/d(x)=(n-x)p/[(x+1)(1-p)]$.

3.25. (a) $u(0)=0$, $-c(x)/d(x)=1$, $1/d(x)=v$; (b) $u(0)=0$, $-c(x)/d(x)=1+i$, $1/d(x)=1+i$.

3.28. Равномерное распределение: 0,989709; постоянная интенсивность: 0,989656; гиперболичность: 0,989602.

3.29. (a) 77,59; (b) 29,11.

3.30. (a) 0,044; (b) 0,04421.

3.31.

	Равномерное распределение	Постоянная интенсивность	Гиперболичность
(a)	0,012696	0,012616	0,012537
(b)	0,013676	0,013770	0,013865
(c)	0,013770	0,013770	0,013770

3.35. (a) $\alpha/(\omega-x)$; (b) $(\omega-x)/(\alpha+1)$.

3.36. (a) 0,000877; (b) 0,999189.

3.37. (a) 0,4076; (b) 0,1786.

3.39. 0,97920.

3.40. $\ln(1-q_{[x]}/2)-\ln(1-q_{[x]})$.

3.41. $q'_x<2q_x$.

3.43. (a) $[(1+Bc^x)/(1+B)]^{-A/(B\ln c)}$.

3.44. (a) $5^7/4^{18}$; (b) 77,2105.

3.45. (b) $-\ln(1-q_x)$; (c) $-q_x^2/[(1-q_x)\ln(1-q_x)]$; (d) 1/45.

3.49. $q_{40}^1 = 0{,}0055547$, $q_{40} = 0{,}0027812$.

3.50. Проверочное значение $e_{40} = 35{,}367$.

3.51. $e_{20} = 46{,}038$, $e_{40} = 28{,}366$, $e_{60} = 13{,}264$, $e_{80} = 3{,}889$, $e_{100} = 0{,}503$.

3.52. Проверочное значение $\mathring{e}_{40} = 35{,}867$.

3.53. Начальное значение $e_{y:\overline{0}|} = 0$. Проверочное значение $e_{25:\overline{20}|} = 19{,}369$.

3.54. Начальное значение $e_{\omega:\overline{10}|} = 0$. Проверочное значение $e_{40:\overline{10}|} = 9{,}809$.

3.55. $e_{15:\overline{25}|} = 24{,}610$.

Глава 4

4.5. (b) $\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} = \dfrac{\mu_{x+n}}{\delta+\mu_{x+n}} A_{x:\overset{\;1}{\overline{n}|}}$; (c) $-\dfrac{\mu_{x+n}}{\delta+\mu_{x+n}}(A_{x:\overset{\;1}{\overline{n}|}})^2$, где n удовлетворяет (b); (d) $n = \dfrac{\ln 2}{\mu+\delta}$, $\min \mathbf{Cov}(Z_1, Z_2) = -\dfrac{\mu}{4(\mu+\delta)}$.

4.6. (a) 0,237832; (b) 0,416667.

4.7. (a) 0,092099; (b) 0,055321.

4.8. (a) $\dfrac{20}{3(100-x)}\left[1-\left(\dfrac{20}{120-x}\right)^3\right]$;

$$\frac{20}{7(100-x)}\left[1-\left(\frac{20}{120-x}\right)^7\right]-\left\{\frac{20}{3(100-x)}\left[1-\left(\frac{20}{120-x}\right)^3\right]\right\}^2;$$

(b) $\dfrac{20}{3(100-x)}\left[10-10\left(\dfrac{20}{120-x}\right)^2-(100-x)\left(\dfrac{20}{120-x}\right)^3\right]$.

4.10. (a) $\dfrac{\mu}{(\mu+\delta)^2}$; (b) $\mu\left[\dfrac{2}{(\mu+2\delta)^3}-\dfrac{\mu}{(\mu+\delta)^4}\right]$.

4.11. (a) $0{,}2\, z^{-0{,}8}$, $0 < z < 1$; (c) 1/6, 25/396.

4.12. 0,0 при $z < v^n$, $1{,}0 - F_T(\ln z/\ln v)$ при $v^n \leqslant z \leqslant 1$, 1,0 при $1 \leqslant z$.

4.13. (a) 0,0 при $z < e^{-1}$, $z^{0{,}2}$ при $e^{-1} \leqslant z < 1$, 1,0 при $1 \leqslant z$.

4.14. (a) 0,407159; (b) 5,554541.

4.16. (a) 0,5; (b) 0,05.

4.17. (b) $(IA)_{x:\overline{m}|} = (IA)^1_{x:\overline{m}|} + mA_{x:\overset{\;1}{\overline{m}|}}$.

4.19. (a) $v^{[k+(j+1)/m]}$; (b) $A_x^{(m)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}{}_k p_x \sum_{j=0}^{m-1} {}_{j/m|1/m}q_{x+k}(1+i)^{[1-(j+1)/m]}$.

4.23. $A_x + A^1_{x:\overline{65-x}|}$.

4.24. 4007,85.

4.26. (a) $9100/(14-k)$;

(b) $1\,000\,000[{}^2A_{x:\overset{\;1}{\overline{n}|}} + (A_{x:\overset{\;1}{\overline{n}|}})^2] + (k\pi)^2[{}^2\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} - (\bar{A}^1_{x:\overline{n}|})^2] - 2\,000k\pi\bar{A}_{x:\overset{\;1}{\overline{n}|}} A_{x:\overset{\;1}{\overline{n}|}}$, где π — единовременная нетто-премия из п. (a).

4.27. (a) 0,307215.

4.34. (a) $A^{\;1}_{20:\overline{20}|} = 0{,}01827$, ${}^2A^{\;1}_{20:\overline{20}|} = 0{,}01143$; (b) 110 933 839.

4.35. (b) $A_{\omega:\overline{0}|} = 0{,}0$.

4.36. (a) 3,06569; (b) $(I\bar{A})_x = (\bar{A}^1_{x:\overline{1}|} + vp_x\,\bar{A}_{x+1}) + vp_x\,(I\bar{A})_{x+1}$, $(I\bar{A})_\omega = 0$;

(c) $(\bar{I}\bar{A})_x = [(\bar{I}\bar{A})^1_{x:\overline{1}|} + vp_x\,\bar{A}_{x+1}] + vp_x\,(\bar{I}\bar{A})_{x+1}$, $(\bar{I}\bar{A})_\omega = 0$;

(d) $(I\bar{A})_x = \dfrac{d}{\delta}(q_x + p_x\,\bar{A}_{x+1}) + vp_x\,(I\bar{A})_{x+1}$, $(\bar{I}\bar{A})_x = \dfrac{d}{\delta}\left(\dfrac{i-\delta}{i\delta}\,q_x + p_x\,\bar{A}_{x+1}\right) + vp_x(\bar{I}\bar{A})_{x+1}$.

4.38. (b) $\bar{A}_{y:\overline{0}|} = 1$; (c) $\bar{A}_{45:\overline{65-45}|} = 0{,}34743$.

4.39. Среднее = 38 056,82, дисперсия = 42 337 224,63.

Глава 5

5.1. (a) 16,008, 12,761, 5,397; (b) 3,137, 10,230, 9,523.

5.2. (a) 0,111, 0,251, 0,572; (b) 0,0251.

5.4. $-\mathbf{D}[v^T] = -({}^2\bar{A}_x - \bar{A}_x^2)$.

5.6. (a) $F_y(y) = \begin{cases} 1-(1-\delta y)^{\mu/\delta}, & 0 \leqslant y < 1/\delta, \\ 1, & 1/\delta \leqslant y; \end{cases}$

(b) $F_y(y) = \begin{cases} 1-(1-\delta y)^{\mu/\delta}, & 0 \leqslant y < \bar{a}_{\overline{n}|}, \\ 1, & \bar{a}_{\overline{n}|} \leqslant y; \end{cases}$

(c) $F_y(y) = \begin{cases} 1-(v^n-\delta y)^{\mu/\delta}, & 0 \leqslant y < v^n/\delta, \\ 1, & v^n/\delta \leqslant y; \end{cases}$

(d) $F_y(y) = \begin{cases} 0, & 0 < y \leqslant \bar{a}_{\overline{n}|}, \\ 1-(1-\delta y)^{\mu/\delta}, & \bar{a}_{\overline{n}|} < y < 1/\delta, \\ 1, & 1/\delta \leqslant y. \end{cases}$

5.7. $\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \bar{a}_{x:\overline{1}|} - v^n\,{}_np_x\,\bar{a}_{x+n:\overline{1}|} + vp_x\,\bar{a}_{x+1:\overline{n}|}$, $n = 0,1,2,\ldots$, $x = 0,1,\ldots$; $\bar{a}_{\omega:\overline{n}|} = \bar{a}_{\omega:\overline{1}|}$, что равно $1/2$ по правилу прямоугольников.

5.8. ${}_{n|}\bar{a}_x = v^n\,{}_np_x\,\bar{a}_{x+n:\overline{1}|} + vp_x\,{}_{n|}\bar{a}_{x+1}$, $x = 0,1,\ldots$, $n = 0,1,2,\ldots$; ${}_{n|}\bar{a}_\omega = 0$.

5.9. $\bar{a}_{\overline{x:\overline{n}|}} = v^n\,{}_np_x\,\bar{a}_{x+n:\overline{1}|} + \bar{a}_{\overline{n}|}(1-vp_x) + vp_x\,\bar{a}_{\overline{x+1:\overline{n}|}}$, $\bar{a}_{\overline{\omega:\overline{n}|}} = \bar{a}_{\overline{n}|}$.

5.14. $(2/i)(a_{x:\overline{n}|} - {}^2a_{x:\overline{n}|}) - {}^2a_{x:\overline{n}|} - (a_{x:\overline{n}|})^2$.

5.15. $\dfrac{s_{\overline{1}|}^{(m)}-1}{d^{(m)}}A_x$.

5.16. (a) $\dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{h=0}^{m-1} v^{h/m}\,{}_{h/m}p_x + \dfrac{1}{m}\sum_{h=m}^{(y-x)m-1} v^{h/m}\,{}_{h/m}p_x$; (b) $\alpha(m) - \beta(m)(1-vp_x)$;

(c) $c(x) = \alpha(m) - \beta(m)(1-vp_x)$, $d(x) = vp_x$, $\ddot{a}_{y:\overline{0}|}^{(m)} = 0$.

5.17. $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \dfrac{m-1}{2m}(1-{}_nE_x)$, ${}_{n|}\ddot{a}_x - \dfrac{m-1}{2m}\,{}_nE_x$.

5.22. (a) $\alpha(m)\ddot{s}_{25:\overline{40}|} - \beta(m)(1/{}_{40}E_{25} - 1)$; (b) (i) 15,038, (ii) 196,380.

5.23. (a) $Y = \begin{cases} (I\ddot{a})_{\overline{K+J+1/m}|}^{(m)}, & K = 0,1,\ldots,n-1,\ J = 0,1,\ldots,m-1, \\ (I\ddot{a})_{\overline{n}|}^{(m)}, & K = n, n+1, \ldots. \end{cases}$

5.24. (a) $Y = \begin{cases} (D\ddot{a})_{\overline{K+J+1/m}|}^{(m)}, & K = 0,1,\ldots,n-1,\ J = 0,1,\ldots,m-1, \\ (D\ddot{a})_{\overline{n}|}^{(m)}, & K = n, n+1, \ldots. \end{cases}$

5.25. (a) $Y = \begin{cases} (I\ddot{a})_{\overline{K+J+1/m}|}^{(m)}, & K = 0,1,\ldots,n-1,\ J = 0,1,\ldots,m-1, \\ n\ddot{a}_{\overline{K+J+1/m}|}^{(m)}, & K = n, n+1, \ldots,\ J = 0,1,\ldots,m-1. \end{cases}$

5.31. (a) $\ddot{a}_x + 0{,}03(Ia)_x$; (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(1{,}03)^k v^k\,{}_kp_x = \ddot{a}'_x$ при процентной ставке $i' = \dfrac{i-0{,}03}{1{,}03}$.

5.32. $\displaystyle\int_0^n (n-t)v^t\,{}_tp_x\,dt$.

5.33. $1200(a_{30}^{(12)} + {}_{10|}a_{30}^{(12)} + 3\,{}_{20|}a_{30}^{(12)} + 5\,{}_{30|}a_{30}^{(12)} - 10\,{}_{40|}a_{30}^{(12)})/{}_{40}E_{30}$.

5.34. $\ddot{a}_{35:\overline{25}|} - {}_{25}p_{35}\ddot{a}_{\overline{25}|}$.

5.35. $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - {}_np_x\ddot{a}_{\overline{n}|}$.

5.36. $(1/2)\,\ddot{a}_{x:\overline{25}|} - (25/12)\,{}_{25}E_x$.

5.38. $v^{2n}\,{}_np_x(1-{}_np_x)\ddot{a}_{x+n}^2 + v^{2n}\,{}_np_x\,({}^2A_{x+n} - A_{x+n}^2)/d^2$.

5.41. (a) $\alpha(m) = 1 + \dfrac{m^2-1}{12m^2}\delta^2 + \dfrac{2m^4-5m^2+3}{720m^4}\delta^4 + \ldots$,

$$\beta(m) = \frac{m-1}{2m}\left[1 + \frac{m+1}{3m}\,\delta + \frac{m(m+1)}{12m^2}\,\delta^2 + \frac{(m+1)(6m^2-4)}{360m^3}\,\delta^3 + \ldots\right];$$

(b) $\alpha(\infty) = 1 + \dfrac{1}{12}\,\delta^2 + \dfrac{1}{360}\,\delta^4 + \ldots,\ \beta(\infty) = \dfrac{1}{2}\left[1 + \dfrac{1}{3}\,\delta + \dfrac{1}{12}\,\delta^2 + \dfrac{1}{60}\,\delta^3 + \ldots\right].$

5.44. $\dfrac{I}{\delta} + \left(J - \dfrac{I}{\delta}\right)v^T,\ \dfrac{I}{\delta} + \left(J - \dfrac{I}{\delta}\right)\bar{A}_x,\ \left(J - \dfrac{I}{\delta}\right)^2({}^2\bar{A}_x - \bar{A}_x^2).$

5.45. (a) 14,353; (b) 13,350; (c) 1,002.

5.51. (a) 488,23; (b) 700,48; (c) 531,77.

5.53. $\ddot{a}_{55:\overline{10}|} = 7{,}45735$.

5.54. $\bar{a}_{55:\overline{10}|} = 7{,}19783$.

5.56. $\bar{a}_{55:\overline{10}|} = 7{,}19783$.

5.57. $\bar{a}_{60:\overline{10}|} = 6{,}46348,\ \mathbf{D}[X] = 1{,}82621$.

5.58. $\ddot{a}_{65}^{(12)} = 10{,}13343,\ \mathbf{D}[Y] = 16{,}87662$.

5.59. 10,41532.

К главе 6

6.1. −0,43202 и 0,39760.

6.3. 0,303598.

6.4. (a) 0,02; (b) 0,00857; (c) 0,02885.

6.6. $\mu/(\mu + 2\delta) = {}^2\bar{A}_x$.

6.10.

Страхование	Ежегодные премии для лица (35)		
	Непрерывная модель	Полунепрерывная модель	Дискретная модель
Смешанное на срок 10 лет	0,075128	0,072885	0,072810
Смешанное на срок 30 лет	0,015371	0,014894	0,014751
Смешанное на срок 60 лет	0,008913	0.008621	0.008374
Бессрочное на случай смерти	0,008903	0,008611	0,008362
На случай смерти на срок 30 лет	0,005117	0,004958	0,004815
На случай смерти на срок 10 лет	0,002669	0,002589	0,002514

6.12. $A_x = \dfrac{1-r}{1+i-r},\ P_x = \dfrac{1-r}{1+i},\ \ddot{a}_x = \dfrac{1+i}{1+i-r},\ \dfrac{{}^2A_x - A_x^2}{(d\ddot{a}_x)^2} = \dfrac{(1-r)r}{1+2i+i^2-r}.$

6.13. 0,019139.

6.15. 0,032868.

6.16. 0,0413.

6.17. Если опустить аргумент $(\bar{A}_{40:\overline{25}|})$ в обозначении для премий, то

$$P \leqslant P^{(2)} \leqslant P^{\{4\}} \leqslant P^{\{12\}} \leqslant \bar{P}.$$

6.18. 100/99.

6.19. 740,93.

6.21. $P(A'^{\,1}_{45:\overline{20}|})$, где $A'^{\,1}_{45:\overline{20}|}$ есть актуарная настоящая стоимость страхования на случай смерти на срок 20 лет, заключенного с лицом (45), при котором $b_{k+1} = \ddot{s}_{\overline{k+1}|}$.

6.22. (a) 11,5451, 20,4106; (b) 6,3099, 25,6458.

6.24. ${}_{25}P_{60}$.

6.25. (b) $P^{(12)}(A^{(12)}_{\overset{1}{65}:\overline{10}|}) + d^{(12)}$.

6.26. $\dfrac{100\,000}{1{,}1\ddot{s}_{\overline{30}|} - 0{,}1\ddot{s}_{35:\overline{30}|}}$.

6.27. 0,008.

6.28. $\dfrac{11\,000A_x + 25\ddot{a}_{x:\overline{20|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{20|}} - 1{,}1(I_{\overline{20|}}A)_x}$.

6.29. $\dfrac{2A_{25} - A^{\,1}_{25:\overline{10|}}}{2\ddot{a}_{25:\overline{40|}} - \ddot{a}_{25:\overline{10|}}}$.

6.30. $L_1 = v^T - \bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{\overline{T|}} \equiv 1 - (1/\bar{a}_x)\bar{a}_{\overline{T|}} = L_2$.

6.31. (a) $-0{,}08$; (b) $0{,}1296$; (c) $0{,}1587$.

6.32. $\bar{A}_x/(2\ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{5|}})$.

6.33. ${}_{20}P^{\{m\}}(\bar{A}_x) - {}_{20}P^{(m)}(\bar{A}_x) = {}_{20}\bar{P}(\bar{A}_x)\,\dfrac{\bar{A}^{\,1}_{x:\overline{20|}} - A^{(m)\,1}_{x:\overline{20|}}}{\delta\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{20|}}}$.

6.35. (a) $\dfrac{\mu}{\delta u + \bar{P}}\left(\dfrac{\delta u + \bar{P}}{\delta + \bar{P}}\right)^{\mu/\delta}$ при $-\dfrac{\bar{P}}{\delta} < u < 1$; 0 в противном случае.

6.36. (a) $1/\sqrt{3}$; (b) $0{,}02$.

Глава 7

7.1. ${}_1V = 0{,}15111$, ${}_2V = 0{,}30809$, ${}_3V = 0{,}47118$, ${}_4V = 0{,}64067$.

7.2. ${}_1V = 0{,}14925$, ${}_2V = 0{,}30492$, ${}_3V = 0{,}46741$, ${}_4V = 0{,}63712$.

7.3. ${}_1V = 1{,}2871$, ${}_2V = 2{,}6996$, ${}_3V = 4{,}2553$, ${}_4V = 5{,}9748$.

7.4. ${}_1V = 0{,}15064$, ${}_2V = 0{,}30730$, ${}_3V = 0{,}47025$, ${}_4V = 0{,}63980$.

7.5. (a) $1 = \frac{1}{5}\displaystyle\int_0^5 e^{0{,}1[1{,}06^{-t}(1+P/\delta)-P/\delta]}\,dt$, где $\delta = \ln(1{,}06)$;

${}_1V = 10\ln\left(\dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^4 e^{0{,}1[1{,}06^{-t}(1+P/\delta)-P/\delta]}\,dt\right)$, где P и δ такие же, как в п. (a);

(b) $P = 0{,}388380$, ${}_1V = 0{,}182825$.

7.6. ${}_tL = \begin{cases} v^U - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n|}})\bar{a}_{\overline{U|}}, & U < n-t, \\ v^{n-t} - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n|}})\bar{a}_{\overline{n-t|}}, & U \geqslant n-t. \end{cases}$

7.7. $\mathbf{E}[{}_tL] = \bar{a}_{x+t:\overline{n-t|}}$, $\mathbf{D}[{}_tL] = ({}^2\bar{A}_{x+t:\overline{n-t|}} - \bar{A}^2_{x+t:\overline{n-t|}})/\delta^2$.

7.8. (a) $\bar{A}_{45:\overline{20|}} - {}_{20}\bar{P}(\bar{A}_{35:\overline{30|}})\bar{a}_{45:\overline{10|}}$; (b) $\bar{A}^{\;\;1}_{50:\overline{5|}}$.

7.9. (a) $u_0 = -(\ln\bar{A}_x)/\delta$; (b) $23{,}2476$.

7.10. $41{,}7524$.

7.11. $F_{{}_tL}(y) = 0$ при $y < v^{n-t} - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n|}})\bar{a}_{\overline{n-t|}}$;

$F_{{}_tL}(y) = \dfrac{1 - F_{T(x)}\left(t - \dfrac{1}{\delta}\ln\dfrac{\delta y + \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n|}})}{\delta + \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n|}})}\right)}{1 - F_{T(x)}(t)}$ при $v^{n-t} - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n|}})\bar{a}_{\overline{n-t|}} \leqslant y < 1$;

$F_{{}_tL}(y) = 1$, $y \geqslant 1$.

7.12. $F_{{}_tL}(y) = 0$ при $y < \bar{P}(\bar{A}^{\,1}_{x:\overline{n|}})\bar{a}_{\overline{n-t|}}$;

$F_{{}_tL}(y) = \dfrac{1 - F_{T(x)}(n)}{1 - F_{T(x)}(t)} = \dfrac{{}_np_x}{{}_tp_x}$ при $-\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n|}})\bar{a}_{\overline{n-t|}} \leqslant y < v^{n-t} - \bar{P}(\bar{A}^{\,1}_{x:\overline{n|}})\bar{a}_{\overline{n-t|}}$;

$F_{{}_tL}(y) = \dfrac{1 - F_{T(x)}\left(t - \dfrac{1}{\delta}\ln\dfrac{\delta y + \bar{P}(\bar{A}^{\,1}_{x:\overline{n|}})}{\delta + \bar{P}(\bar{A}^{\,1}_{x:\overline{n|}})}\right)}{1 - F_{T(x)}(t)}$ при $v^{n-t} - \bar{P}(\bar{A}^{\,1}_{x:\overline{n|}}) \leqslant y < 1$.

7.14. $\bar{A}_{50} - {}_{20}\bar{P}(\bar{A}_{40})\bar{a}_{50:\overline{10|}}$, $[{}_{10}P(A_{50}) - {}_{20}P(A_{40})]\bar{a}_{50:\overline{10|}}$, $\left[1 - \dfrac{{}_{20}\bar{P}(\bar{A}_{40})}{{}_{10}\bar{P}(\bar{A}_{50})}\right]\bar{A}_{50}$, ${}_{20}\bar{P}(\bar{A}_{40})\bar{s}_{40:\overline{10|}} - {}_{10}\bar{k}_{40}$.

7.15. $\bar{A}_{50:\overline{10|}} - \bar{P}(\bar{A}_{40:\overline{20|}})\bar{a}_{50:\overline{10|}}$, $[\bar{P}(\bar{A}_{50:\overline{10|}}) - \bar{P}(\bar{A}_{40:\overline{20|}})]\bar{a}_{50:\overline{10|}}$, $\left[1 - \dfrac{\bar{P}(\bar{A}_{40:\overline{20|}})}{\bar{P}(\bar{A}_{50:\overline{10|}})}\right]\bar{A}_{50:\overline{10|}}$,
$\bar{P}(\bar{A}_{40:\overline{20|}})\bar{s}_{40:\overline{10|}} - {}_{10}\bar{k}_{40}$, $1 - \dfrac{\bar{a}_{50:\overline{10|}}}{\bar{a}_{40:\overline{20|}}}$, $\dfrac{\bar{P}(\bar{A}_{50:\overline{10|}}) - \bar{P}(\bar{A}_{40:\overline{20|}})}{\bar{P}(\bar{A}_{50:\overline{10|}}) + \delta}$, $\dfrac{\bar{A}_{50:\overline{10|}} - \bar{A}_{40:\overline{20|}}}{1 - \bar{A}_{40:\overline{20|}}}$.

7.16. $\bar{P}({}_{30|}\bar{a}_{35})\bar{s}_{35:\overline{20|}}$.

7.18. (7.3.3).

7.19. $A_{50} - {}_{20}P_{40}\,\ddot{a}_{50:\overline{10}|}$, $({}_{10}P_{50} - {}_{20}P_{40})\ddot{a}_{50:\overline{10}|}$, $\left(1 - \dfrac{{}_{20}P_{40}}{{}_{10}P_{50}}\right)A_{50}$, ${}_{20}P_{40}\,\ddot{s}_{40:\overline{10}|} - {}_{10}k_{40}$.

7.20. $A_{50:\overline{10}|} - P_{40:\overline{20}|}\ddot{a}_{50:\overline{10}|}$, $(P_{50:\overline{10}|} - P_{40:\overline{20}|})\ddot{a}_{50:\overline{10}|}$, $\left(1 - \dfrac{P_{40:\overline{20}|}}{P_{50:\overline{10}|}}\right)A_{50:\overline{10}|}$,
$P_{40:\overline{20}|}\ddot{s}_{40:\overline{10}|} - {}_{10}k_{40}$, $1 - \dfrac{\ddot{a}_{50:\overline{10}|}}{\ddot{a}_{40:\overline{20}|}}$, $\dfrac{P_{50:\overline{10}|} - P_{40:\overline{20}|}}{P_{50:\overline{10}|} + d}$, $\dfrac{A_{50:\overline{10}|} - A_{40:\overline{20}|}}{1 - A_{40:\overline{20}|}}$.

7.22. 1/5.

7.23.

Страхование	Непрерывная модель	Полунепрерывная модель	Дискретная модель
Смешанное на срок 30 лет	0,17530	0,17504	0,17407
Бессрочное на случай смерти	0,08604	0,08566	0,08319
На случай смерти на 30 лет	0,03379	0,03370	0,03273

7.24. (b) и (c).

7.26. Все, кроме (d).

7.27. Все.

7.29. 0,008.

7.30. 0,240.

7.31. (a) 0,005527; (b) 0,051255; (c) 0,946122; (d) 0,132109.

7.32. (a) 0,0241821; (b) 0,0189660.

Глава 8

8.1. (a) $\dfrac{1-r}{1+i}$; (b) $\dfrac{(1-r)(1+i+r)}{(1+i)(1-i-r)}$.

8.2. $\dfrac{\int_0^\infty b_t v^t\,{}_tp_x\,\mu_x(t)\,dt}{\int_0^\infty w(t)v^t\,{}_tp_x\,dt}$.

8.3. (a) $\dfrac{\mu}{\delta+\mu}$; (b) $\dfrac{\mu t}{\delta+\mu}$.

8.5. (a) $(P_{x+1} - vq_{x+h})\,{}_hp_x\,vq_x$; (b) $(P_{x+1} - vq_{x+h})\,{}_hp_x(v\,{}_jp_x\,q_{x+j} + {}_jq_x\,P_{x+1})$;
(c) Если $P_{x+1} - vq_{x+n} < 0$, то $\mathbf{Cov}(C_j, C_h) < 0$ для всех $j < h$.

8.6. Если $1 - vq_{x+h}\,\ddot{s}_{\overline{h+1}|} < 0$, то $\mathbf{Cov}(C_j, C_h) < 0$ для всех $j < h$.

8.13. Аргумент $(\bar{A}_{x:\overline{40}|})$ в обозначениях для резервов и премий опускается.
(a) $\frac{1}{2}\,{}_{20}V + \frac{1}{2}\,{}_{21}V + \frac{1}{2}\,P$; (b) $\frac{1}{2}\,{}_{20}\bar{V} + \frac{1}{2}\,{}_{21}\bar{V}$; (c) $\frac{1}{2}\,{}_{20}V^{(2)} + \frac{1}{2}\,{}_{21}V^{(2)}$; (d) $\frac{1}{3}\,{}_{20}V^{(2)} + \frac{2}{3}\,{}_{21}V^{(2)} + \frac{1}{3}\,P^{(2)}$; (e) то же выражение, что и в (b); (f) $\frac{1}{3}\,{}_{20}\bar{V} + \frac{2}{3}\,{}_{21}\bar{V} + \frac{1}{3}\,P^{\{2\}}$.

8.14. 0,05448.

8.17. (b) $\mathbf{D}[L] = 0{,}076090$.

8.18. (a) 0,0067994; (b) 0,1858077; (c) 0,2012024; (d) 0,0275369; (e) 0,0255406.

8.21. $-{}_tp_x[\delta\,{}_t\bar{V}(\bar{A}_x) + \bar{P}(\bar{A}_x)]$.

8.22. (a) ${}_tp_x[\pi_t + \delta_t\bar{V} - b_t\,\mu_x(t)]$; (b) $v^t[\pi_t + \mu_x(t)\,{}_t\bar{V} - b_t\,\mu_x(t)]$; (c) $v^t\,{}_tp_x[\pi_t - b_t\,\mu_x(t)]$.

8.26. (a) и (b) 1 491,03; (c) 343,84; (d) 0.

8.27. (a) 1 490 915; (b) 6 450 962; 1 495 093, что равно резерву, умноженному на 1,00280;
(c) 5 311 375; добавляемая сумма равна 3791, т. е. резерву, умноженному на 0,00254;
(d) для (b): 645 096 250; 149 133 281, т. е. резерв, умноженный на 1,00028; для (c): 531 137 500; добавляемая сумма равна 37 911, т. е. резерву, умноженному на 0,00025.

8.28. (a) 1 104 260 — резерв для этих договоров;
(b) 6 450 962; 1 108 438, т. е. резерв, умноженный на 1,00378;
(c) 5 311 375; добавляемая сумма равна 3791, т. е. резерву, умноженному на 0,00343;
(d) для (b): 645 096 250, 110 467 781, т. е. это резерв, умноженный на 1,00038; для (c) 531 137 500; добавляемая сумма равна 37 911, т. е. резерву, умноженному на 0,00034.

8.29. $5\,000[{}_{10}\bar{V}(\bar{A}_{30}) + P^{\{1\}}(\bar{A}_{30}) + {}_{11}\bar{V}(\bar{A}_{30})]$.

8.30. (a) 0,2; (b) 0,25; (c) 0,7584; (d) 0,27.

8.32. 0,081467.

8.34. (a) 355,6563; (b) 2 614,2511.

8.35. (a) $100\,000\, A_{35:\overline{30|}}^{\;\;1}/(1 - A_{35:\overline{30|}}^{\;\;1})$;

(b) $100\,000\, A_{35+k:\overline{30-k|}}^{\;\;1} + SA_{35+k:\overline{30-k|}}^{\;\;1}$;

(c) $(S - SA_{35:\overline{k|}}^{\;\;1})/A_{35:\overline{k|}}^{\;\;1}$;

(d) $S = 18\,575{,}08$, ${}_{20}V = 53\,962{,}62$.

Глава 9

9.1. (a) $1 - \dfrac{1}{(1+s)^{n-2}} - \dfrac{1}{(1+t)^{n-2}} + \dfrac{1}{(1+s+t)^{n-2}}$, $s > 0$, $t > 0$;

(b) $f_{T(x)}(s) = \dfrac{n-2}{(1+s)^{n-1}}$, $s > 0$; $F_{T(x)}(s) = 1 - \dfrac{1}{(1+s)^{n-2}}$, $s > 0$; $\mu(x+s) = \dfrac{n-2}{1+s}$, $s > 0$;

(c) $\mathbf{Cov}[T(x), T(y)] = \dfrac{1}{(n-4)(n-3)^2}$, $\rho_{T(x)T(y)} = \dfrac{1}{n-2}$.

9.2. $\dfrac{1}{(1+s+t)^{n-2}}$, $s \geqslant 0$, $t \geqslant 0$.

9.3. $F_{T(x)T(y)}(s,t) = \left[1 - \dfrac{1}{(1+s)^{n-2}}\right]\left[1 - \dfrac{1}{(1+t)^{n-2}}\right]$, $s > 0$, $t > 0$;

$s_{T(x)T(y)}(s,t) = \dfrac{1}{(1+s)^{n-2}}\,\dfrac{1}{(1+t)^{n-2}}$, $s \geqslant 0$, $t \geqslant 0$.

9.4. (a) ${}_np_x\,{}_np_y$; (b) ${}_np_x + {}_np_y - 2\,{}_np_x\,{}_np_y$; (c) ${}_np_x + {}_np_y - {}_np_x\,{}_np_y$; (d) $1 - {}_np_x\,{}_np_y$; (e) та же, что в (d); (f) $(1 - {}_np_x)(1 - {}_np_y) = 1 - {}_np_x - {}_np_y + {}_np_x\,{}_np_y$.

9.6. ${}_nq_{xx}$.

9.7. $F_{T(xy)}(t) = 1 - \dfrac{1}{(1+2t)^{n-2}}$ при $t > 0$; $s_{T(xy)}(t) = \dfrac{1}{(1+2t)^{n-2}}$ при $t \geqslant 0$; $\mathbf{E}[T(xy)] = \dfrac{1}{2(n-3)}$.

9.8. $f_{T(xy)}(t) = \begin{cases} (10-t)^3/2500 & \text{при } 0 < t < 10, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$

9.10. ${}_{n|}q_x + {}_{n|}q_y - {}_{n|}q_x\,{}_{n|}q_y$.

Нет, поскольку для ${}_{n|}q_{\overline{xy}}$ вторая смерть должна произойти в $(n+1)$-м году, а это не так для описанной в упражнении вероятности.

9.11. (a) $F_{T(\overline{xy})}(t) = 1 - \dfrac{2}{(1+t)^{n-2}} + \dfrac{2}{(1+2t)^{n-2}}$, $t > 0$;

$f_{T(\overline{xy})}(t) = 2(n-2)\left[\dfrac{1}{(1+t)^{n-1}} - \dfrac{1}{(1+2t)^{n-1}}\right]$, $t > 0$;

(b) $\mathbf{E}[T(\overline{xy})] = \dfrac{3}{2(n-3)}$; (c) $\mu_{\overline{xy}}(t) = \dfrac{2(n-2)[1/(1+t)^{n-1} - 1/(1+2t)^{n-1}]}{2/(1+t)^{n-2} - 1/(1+2t)^{n-2}}$, $t > 0$.

9.12. 2/9.

9.13. (a) 2/3; (b) 29/30; (c) 18,06; (d) 36,94; (e) 160,11; (f) 182,33; (g) 82,95; (h) 0,49.

9.14. $\mu_{xx}(0)\mathring{e}_{xx} - 1$.

9.17. 531/2000.

9.18. (a) $\dfrac{1}{\alpha}\ln\left[1 + \dfrac{(e^{\alpha t}-1)^2}{e^{\alpha}-1}\right]$; (b) $\dfrac{(e^{\alpha t}-1)(e^{\alpha}-1)}{(e^{\alpha}-1)+(e^{\alpha t}-1)^2}$.

9.19. $\dfrac{1}{\alpha}\ln\left[1 + \dfrac{(e^{0,05\alpha}-1)(e^{0,03\alpha}-1)}{e^{\alpha}-1}\right]$.

9.20. (a) 0,001500; (b) 0,000266; (c) 0,004232.

9.21. Аннуитет с гарантированными выплатами размера 1 в конце каждого года в течение n лет, а далее до потери статуса (xy).

9.22. Страхование с выплатой размера 1 на случай смерти лица (x) или по истечении n лет, в зависимости от того, что случится позже.

9.24. $\bar{a}_{25:\overline{25|}} + \bar{a}_{30:\overline{20|}} - \bar{a}_{25:30:\overline{20|}}$.

9.25. ${}_{20|}a_{30} + {}_{25|}a_{25} - {}_{25|}a_{25:30}$.

9.26. $\frac{1}{6}\ddot{a}_{xy:\overline{n|}} + \frac{1}{2}\ddot{a}_{y:\overline{n|}} + \frac{1}{3}\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$.

9.27. $a_{x:\overline{n|}} + v^n{}_n p_x\, a_{x+n:y:\overline{m-n|}}$.

9.28. ${}_{5|}\bar{a}_{55} + {}_{20|}\bar{a}_{40} - {}_{5|10}\bar{a}_{40:55} - {}_{20|}\bar{a}_{40:55}$.

9.29. (a) $[\ddot{a}_x^{(m)} + p(\ddot{a}_y^{(m)} - \ddot{a}_{xy}^{(m)})]$; (b) $\dfrac{\ddot{a}_x^{(m)}}{\ddot{a}_x^{(m)} + p(\ddot{a}_y^{(m)} - \ddot{a}_{xy}^{(m)})}$.

9.32. (a) 7,0753; (b) 7,0756.

9.35. $w = \frac{3}{5}x + \frac{2}{5}y$.

9.37. 1/3.

9.41. ${}_\infty q_{xy}^{1} = {}_\infty q_{xy}^{\;\,2}$.

9.44. $\bar{A}_{50} - \bar{A}^{\;\;1}_{50:20:\overline{20|}}$.

9.45. $\bar{A}^{1}_{x:\overline{n|}} - \bar{A}^{1}_{xy} + {}_nE_x\,\bar{A}_{\overset{1}{x+n}:y}$.

9.46. 1/12.

9.47. (a) 0,2755; (b) $\frac{1}{4}\bar{A}_{40:50} + 0{,}0015\,\bar{a}_{40:50}$.

9.48. 1/3, 52,68.

9.49. (a) $\bar{a}_x + \bar{a}_{\overline{n|}} - \bar{a}_{x:\overline{n|}}$; (b) $v^n{}_n q_x$.

9.51. $\mu(x)\mathring{e}_{xy} - {}_\infty q^{1}_{xy}$.

9.52. (a) $(\mu_2+\lambda)e^{-(\mu_2+\lambda)t}$, $t>0$; (b) $e^{-(\mu_2+\lambda)t}$, $t \geqslant 0$; (c) $\dfrac{\lambda}{\mu_1+\mu_2+\lambda}$.

К главе 10

10.1. (a) $e^{-t\mu_x^{(\tau)}}\mu_x^{(j)}$; (b) $\mu_x^{(j)}/\mu_x^{(\tau)}$; (c) $e^{-t\mu_x^{(\tau)}}\mu_x^{(\tau)}$.

10.2. (a) $j(50-t)^2/50^3$; (b) $3(50-t)^2/50^3$; (c) $j/3$; (d) $j/3$.

10.3. (a) $f_T(t) = p(u_1+v_1)e^{-(u_1+v_1)t} + (1-p)(u_2+v_2)e^{-(u_2+v_2)t}$, $f_J(1) = \dfrac{pu_1}{u_1+v_1} + (1-p)\dfrac{u_2}{u_2+v_2}$, $f_J(2) = p\dfrac{v_1}{u_1+v_1} + (1-p)\dfrac{v_2}{u_2+v_2}$;
(b) $s_T(t) = pe^{-(u_1+v_1)t} + (1-p)e^{-(u_2+v_2)t}$.

10.4. ${}_3p_{65}^{(\tau)} = 0{,}75321$, ${}_{3|}q_{65}^{(1)} = 0{,}03766$, ${}_3q_{65}^{(2)} = 0{,}16504$.

10.5. (a) 302,4 и 210,95; (b) 231,0 и 177,64.

10.6. (a) $h(1) = 0{,}231$, $h(2) = 0{,}4666$, $h(3) = 0{,}3024$; (b) $h(1\,|\,k=2) = 0{,}25$, $h(2\,|\,k=2) = 0{,}75$, $h(3\,|\,k=2) = 0$.

10.7. $l_x^{(\tau)} = (a-x)e^{-x}$, $d_x^{(1)} = e^{-x}(1-e^{-1})$, $d_x^{(2)} = (a-x-1)e^{-x} - (a-x-2)e^{-x-1}$.

10.8. $1000\,\dfrac{a-x^2}{a}\,e^{-cx}$.

10.9. (a) ${}_tp_x^{(\tau)}(\mu_{x+t}^{(\tau)} - \mu_x^{(\tau)})$; (b) ${}_tp_x^{(\tau)}\mu_{x+t}^{(j)} + {}_tq_x^{(j)}\mu_x^{(\tau)} - \mu_{x+t}^{(j)}$; (c) ${}_tp_x^{(\tau)}\mu_{x+t}^{(j)}$.

10.10.

k	$q_k'^{(1)} = 1 - (p_k^{(\tau)})^{q_k^{(1)}/q_k^{(\tau)}}$	$q_k'^{(2)} = 1 - (p_k^{(\tau)})^{q_k^{(2)}/q_k^{(\tau)}}$
0	0,17433	0,27332
1	0,11210	0,21163
2	0,05426	0,15410
3	0,00000	0,10000

10.11. (a) $1 - e^{-c}$; (b) c; (c) $c\int_0^1 {}_tp_x^{(\tau)}\,dt$.

10.13. $m_x'^{(j)} \geqslant q_x'^{(j)} \geqslant q_x^{(j)}$.

10.14. 0,0592.

10.15. (a) 0,0909; (b) 0,0906.

10.16.

k	$m_k^{(1)}$	$m_k^{(2)}$
0	0,18750	0,31250
1	0,11765	0,23529
2	0,05556	0,16667
3	0,00000	0,10526

10.17.

x	$p_x^{(\tau)}$	$q_x^{(1)}$	$q_x^{(2)}$	$q_x^{(3)}$
62	0,76048	0,01767	0,02665	0,19520
63	0,85027	0,02054	0,03193	0,09726
64	0,82115	0,02578	0,03705	0,11603

10.18.

x	$m_x^{(1)}=m_x'^{(1)}$	$m_x^{(2)}=m_x'^{(2)}$	$m_x^{(3)}=m_x'^{(3)}$	$m_x^{(\tau)}$	$q_x^{(1)}$	$q_x^{(2)}$	$q_x^{(3)}$
62	0,02020	0,03046	0,22222	0,27288	0,01777	0,02680	0,19554
63	0,02224	0,03459	0,10526	0,16209	0,02057	0,03200	0,09737
64	0,02840	0,04082	0,12766	0,19688	0,02585	0,03716	0,11622

10.20.

x	$m_x^{(1)}$	$m_x^{(2)}$	$m_x'^{(1)}$	$m_x'^{(2)}$
65	0,02073	0,05181	0,02073	0,05183
66	0,03141	0,06283	0,03144	0,06286
67	0,04233	0,07407	0,04237	0,07412
68	0,05348	0,08556	0,05355	0,08565
69	0,06486	0,09730	0,06499	0,09744

10.21. Правую часть в п. (a) надо заменить на $m_x^{(j)}/(1+\frac{1}{2}m_x^{(\tau)})$.

10.22. (c) (i) ${}_tq_x^{(j)} = K_j(1-e^{-[k/(n+1)]t^{n+1}}) = K_j\,{}_tq_x^{(\tau)}$,
${}_tq_x'^{(j)} = 1-e^{-[k/(n+1)]t^{n+1}} = 1-({}_tp_x^{(\tau)})^{K_j}$.
(ii) ${}_tq_x^{(j)} = K_j(1-e^{(B/\ln c)(c^t-1)}) = K_j\,{}_tq_x^{(\tau)}$, ${}_tq_x'^{(j)} = 1-e^{K_t(B/\ln c)(c^t-1)} = 1-({}_tp_x^{(\tau)})^{K_j}$.

10.25.

k	$q_k'^{(1)}$	$q_k'^{(2)}$
0	0,17143	0,27027
1	0,11111	0,21053
2	0,05405	0,15385
3	0,00000	0,10000

10.27. (a) Из равенства $q_x^{(3)} = q_x'^{(3)}[1-\frac{1}{2}(q_x'^{(1)}+q_x'^{(2)})+\frac{1}{3}\,q_x'^{(1)}q_x'^{(2)}]$ получите $q_x'^{(3)}$, а затем воспользуйтесь формулой (9.6.3);

(b) найдите $q_x^{(1)}$ из соотношения, выведенного в упр. 9.18,

$$q_x^{(1)} \cong q_x'^{(1)}[1-\tfrac{1}{2}(q_x^{(2)}+q_x^{(3)})].$$

10.28. $q_{69}^{(3)} = 0{,}94434$.

10.29. $q_{50}'^{(1)} = 0{,}015$.

10.30. $1-\sum\limits_{k=0}^{44}\dfrac{d_{20+k}^{(2)}}{l_{20}^{(\tau)}} = 1-\dfrac{l_{20}^{(2)}-l_{65}^{(2)}}{l_{20}^{(\tau)}}$.

10.31. (a) Найдите приближенные значения для $m_x^{(1)}$, $m_x^{(2)}$ по $q_x'^{(1)}$, $q_x'^{(2)}$ или для $q_x'^{(3)}$, $q_x'^{(4)}$ по $m_x^{(3)}$, $m_x^{(4)}$;

(b) $1 - \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{d_{y+k}^{(4)}}{l_y^{(\tau)}} = 1 - \dfrac{l_y^{(4)}}{l_y^{(\tau)}}$.

10.32. (Вероятность выбытия по причине j в модели с несколькими причинами выбытия) = (абсолютный коэффициент выбытия по причине j) – (вероятность того, что произойдет выбытие по причине k, $k \neq j$, а затем произойдет выбытие по причине j до того, когда (x) достигнет возраста $x+1$).

10.34. (a) $f_{T,J}(t,j) = \begin{cases} \dfrac{\theta\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}e^{-\beta t}, & j=1,\ t \geqslant 0, \\ \dfrac{(1-\theta)\beta^\alpha t^{\alpha-1}e^{-\beta t}}{\Gamma(\alpha)}, & j=2,\ t \geqslant 0, \end{cases}$

$f_J(j) = \begin{cases} \theta, & j=1, \\ 1-\theta, & j=2, \end{cases} \qquad f_T(t) = \dfrac{\beta^\alpha t^{\alpha-1}e^{-\beta t}}{\Gamma(\alpha)}$;

(b) $\mathbf{E}[T] = \alpha/\beta$, $\mathbf{D}[T] = \alpha/\beta^2$.

Глава 11

11.1. Если 1 обозначает смерть, а 2 — выбытие по всем остальным причинам, то актуарная настоящая стоимость равна

$$20\,000 \int_0^{40} v^t\,{}_tp_{30}^{(\tau)}\mu_{30(t)}^{(1)}\,dt + 300 \int_0^{40} v^t\,{}_tp_{30}^{(\tau)}\mu_{30(t)}^{(2)}\,t\,{}_{40-t|}\bar{a}_{30+t}\,dt + 12\,000 v^{40}\,{}_{40}p_{30}^{(\tau)}\bar{a}_{70}.$$

11.2. 0,31075, 0,19717.

11.4. $S_x = x/15 - 1/3$, $20 \leqslant x$.

11.5. 2,250.

11.6. (a) Пусть $S_{30} = 1$. Тогда

$$S_{30+k} = \begin{cases} (1{,}05)^k, & 0 \leqslant k < 10, \\ (1{,}1)(1{,}05)^k, & 10 \leqslant k < 20, \\ (1{,}1)^2(1{,}05)^k, & 20 \leqslant k < 30, \\ (1{,}1)^3(1{,}05)^k, & k \geqslant 30; \end{cases}$$

(b) $1\,200 \sum_{k=0}^{\omega-31} v^{k+1/2}\,{}_{k+1/2}p_{30}^{(\tau)} S_{30+k}$.

11.7. $0{,}1 \sum_{k=0}^{\omega-36} v^{k+1/2}\,{}_{k+1/2}p_{35}^{(\tau)} \left[25\,000\,\dfrac{S_{35+k}}{S_{35}} - 10\,000(1{,}05)^k\right]$.

11.8. (a) Здесь $\alpha = 55$, $\omega = 68$,

$$\sum_{k=5}^{17} v^{k+1/2}\,{}_kp_{50}^{(\tau)}\,q_{50+k}^{(\tau)}\left(20+k+\frac{1}{2}\right)\frac{{}_3Z_{50+k}}{S_{50}}\,640\,\bar{a}^r_{50+k+1/2}$$

$$+ \sum_{k=5}^{14} v^{k+1/2}\,{}_kp_{50}^{(\tau)}\,q_{50+k}^{(\tau)}\left(20+k+\frac{1}{2}\right)\frac{{}_3Z_{50+k}}{S_{50}}\,360\,\bar{a}^r_{50+k+1/2:\overline{15-k-1/2|}}.$$

Поскольку $q_{50+k}^{(\tau)} = 0$ при $k < 5$, суммирование здесь можно производить по k от $k = 0$.

(b) Последние три слагаемых в первой сумме заменяются на

$$\sum_{k=15}^{17} v^{k+1/2}\,{}_kp_{50}^{(\tau)}\,q_{50+k}^{(\tau)}\,\frac{{}_3Z_{50+k}}{S_{50}}\,(22\,400)\bar{a}^r_{50+k+1/2}.$$

(c) В ответе к упр. п. (a) замените $20 + k + 1/2$ на 20.

11.9. (a) $R(30,20,15) = 8000 + 720\sum_{j=0}^{14}\frac{S_{50+j}}{S_{50}}$;

(b) $R(30,20,15\frac{1}{2}) = 8000 + \frac{720}{S_{50}}\left(\sum_{j=0}^{14} S_{50+j} + \frac{1}{2}\,S_{65}\right)$;

(c) $8000\sum_{k=8}^{17} v^{k+1/2}\,{}_kp_{50}^{(\tau)}q_{50+k}^{(r)}\,\bar{a}_{50+k+1/2}^{r}$;

(d) $\sum_{k=0}^{17} v^{k+1/2}\,{}_kp_{50}^{(\tau)}q_{50+k}^{(r)}\,\frac{720}{S_{50}}\left(\sum_{j=0}^{k-1} S_{50+j} + \frac{1}{2}\,S_{50+k}\right)\bar{a}_{50+k+1/2}^{r}$, что совпадает с суммой по k от 8 до 17, или

$$\frac{720}{S_{50}}\left[\sum_{j=0}^{17} S_{50+j}\left(\frac{1}{2}\,v^{j+1/2}\,{}_jp_{50}^{(\tau)}q_{50+j}^{(r)}\,\bar{a}_{50+j+1/2}^{r} + \sum_{k=j+1}^{17} v^{k+1/2}\,{}_kp_{50}^{(\tau)}q_{50+k}^{(r)}\,\bar{a}_{50+k+1/2}^{r}\right)\right].$$

11.10. 1,0756.

11.11. (a) $20\,000\int_{15}^{\infty} v^t\,{}_tp_{40}^{(\tau)}\mu_{25}^{(r)}(15+t)\,\frac{S_{40+t}}{S_{40}}\,\bar{a}_{40+t}^{r}\,dt$;

(b) $600\int_{15}^{\infty} v^t\,{}_tp_{40}^{(\tau)}\mu_{25}^{(r)}(15+t)\,\frac{S_{40+t}}{S_{40}}\,(15+t)\bar{a}_{40+t}^{r}\,dt$;

(c) $600\int_{0}^{15} v^t\,{}_tp_{40}^{(\tau)}\mu_{25}^{(w)}(15+t)\,\frac{S_{40+t}}{S_{40}}\,(15+t)\,{}_{15-t|}\bar{a}_{40+t}^{w}\,dt$, где w в верхнем индексе символа для аннуитета означает, что эту величину надо вычислять, используя коэффициент смертности для лиц, уже вышедших на пенсию;

(d) $1000\int_{15}^{\infty} v^t\,{}_tp_{40}^{(\tau)}\,\mu_{25}^{(r)}(15+t)\left(8+\int_0^t\frac{S_{40+u}\,du}{S_{40}}\right)\bar{a}_{40+t}^{r}\,dt$; если S_x — ступенчатая функция, являющаяся постоянной в промежутках между целыми значениями возраста, то

$$1000\int_{15}^{\infty} v^t\,{}_tp_{40}^{(\tau)}\mu_{25}^{(r)}(15+t)\left[8+\frac{1}{S_{40}}\left(\left(\sum_{k=0}^{\lfloor t\rfloor-1} S_{40+k}\right) + S_{40+\lfloor t\rfloor}(t-\lfloor t\rfloor)\right)\right]\bar{a}_{40+t}\,dt;$$

(e) $1000\int_{0}^{15} v^t\,{}_tp_{40}^{(\tau)}\,\mu_{25}^{(w)}(15+t)\left(8+\frac{1}{S_{40}}\int_0^t S_{40+u}\,du\right){}_{15-t|}\bar{a}_{40+t}^{w}\,dt$; если S_x — ступенчатая функция, являющаяся постоянной в промежутках между целыми значениями возраста, то

$$1000\int_{0}^{15} v^t\,{}_tp_{40}^{(\tau)}\,\mu_{25}^{(w)}(15+t)\left[8+\frac{1}{S_{40}}\left(\left(\sum_{k=0}^{\lfloor t\rfloor-1} S_{40+k}\right) + S_{40+\lfloor t\rfloor}(t-\lfloor t\rfloor)\right)\right]{}_{15-t|}\bar{a}_{40+t}^{w}\,dt.$$

11.12. $\sum_{k=30}^{39} v^{k+1/2}\,{}_kp_{30}^{(\tau)}\,q_{30+k}^{(r)}(0{,}60)35\,000\,\frac{S_{30+k+1/2}}{S_{30}}\,\bar{a}_{30+k+1/2}^{r}$

$+\sum_{k=40}^{\infty} v^{k+1/2}\,{}_kp_{30}^{(\tau)}\,q_{30+k}^{(r)}(0{,}60)35\,000\,\frac{S_{69+1/2}}{S_{30}}\,\bar{a}_{30+k+1/2}^{r}$.

11.13. (a) $24\,000\,\frac{1}{\ddot{a}_{35:\overline{25}|}^{(\tau)}}\sum_{k=0}^{24} v^{k+1}\,{}_kp_{35}^{(\tau)}\,q_{35+k}^{(i)}\,\ddot{a}_{[36+k]:\overline{28-k}|}^{(12)i}$;

(b) $24\,000({}_{15}^{20}\Pi_{45}^{i} - {}_{25}^{30}\Pi_{35}^{i})\ddot{a}_{45:\overline{15}|}^{(\tau)}$, где $24\,000\,{}_{25}^{30}\Pi_{35}^{i}$ и $24\,000\,{}_{15}^{20}\Pi_{45}^{i}$ — ежегодные нетто-премии, обеспечивающие страховые выплаты лицам (35) и (45) соответственно.

Глава 12

12.1. $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$, где N — число автомобилей, а X_i — число пассажиров в i-м автомобиле.

12.2. Пусть N — число дождей, а X_i — количество дюймов осадков во время i-го дождя.

12.3. (a) npp_1; (b) $npp_2 - np^2p_1^2$; (c) $[pM_x(t) + 1 - p]^n$.

12.4. (a) 1,7; (b) 0,81; (c) 1,6; (d) 0,44; (e) 2,72; (f) 2,8216.

12.5. (a) 2,72; (b) 5,1.

12.6. e^{-2}, $0{,}2e^{-2}$, $0{,}42e^{-2}$, $0{,}681333e^{-2}$, $1{,}008067e^{-2}$.

12.8. $r = \dfrac{\lambda}{-\ln(1-c)}$, $p = 1 - c$.

12.9. $3^{24}x^{23}e^{-3x}/23!$.

12.10. Пуассоновское с параметром λp.

12.12. Сложное пуассоновское с $\lambda = 8$, $p(1) = 0{,}05$, $p(2) = 0{,}15$, $p(3) = 0{,}425$, $p(4) = 0{,}375$.

12.13. Сложное пуассоновское с $\lambda = 14$, $p(-2) = 1/14$, $p(1) = 4/14$, $p(3) = 9/14$.

12.14. $\mathbf{P}(N = n + 1) = \lambda \dfrac{\mathbf{P}(N = n)}{n + 1}$.

12.16. (a) 0,425; (b) 0,3984; (c) 0,184; нет: $\mathbf{P}(N_1 = 1, N_2 = 1) \neq \mathbf{P}(N_1 = 1)\mathbf{P}(N_2 = 1)$.

12.17.

$x/f(x)$	Сложное пуассоновское	Сложное отрицательное биномиальное	Сложное биномиальное
0	0,011109	0,044194	0,001953
1	0,034993	0,069606	0,012305
2	0,070112	0,096827	0,039727
3	0,105111	0,108230	0,085805
4	0,130100	0,110967	0,137767
5	0,138723	0,104988	0,173661
	$\mathbf{E}[N] = 4{,}5$	$\mathbf{E}[N] = 4{,}5$	$\mathbf{E}[N] = 4{,}5$
	$\mathbf{D}[N] = 4{,}5$	$\mathbf{D}[N] = 9$	$\mathbf{D}[N] = 2{,}25$

12.25. (a) $\Phi(2) = 0{,}9772$; (b) $G(44/3 : 256/9, 8/3)$.

12.26. (b) (i) $\dfrac{p_2}{\lambda[p_1(1+\theta)]^2}$; (ii) $\dfrac{p_2 + (q/p)p_1^2}{(rq/p)(p_1(1+\theta))^2}$.

12.28. (a) α, $p/\pi(i)$.

Глава 13

13.1. (a) -1; (b) $e^{-\tilde{R}(u+1)}$; (c) $\ln(p/q)$; (d) $(p/q)^{u+1}$.

13.3. $\dfrac{f(t-s)}{1 - F(t-s)}\,dt$.

13.5. 0; γ.

13.7. (a) 3; (b) 1.

13.8. $\dfrac{10}{7\ln 2} - 1$.

13.12. (a) $\dfrac{1}{2}\dfrac{p_2}{p_1}$; (b) $\dfrac{1}{3}\dfrac{p_3}{p_1}$; (c) $\dfrac{1}{3}\dfrac{p_3}{p_1} - \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{p_2}{p_1}\right)^2$.

13.13. (b) $\mathbf{E}[L] = \dfrac{1}{2}\dfrac{p_2}{\theta p_1}$, $\mathbf{D}[L] = \dfrac{1}{3}\dfrac{p_3}{\theta p_1} + \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{p_2}{\theta p_1}\right)^2$.

13.14. $\dfrac{2\theta r}{1 + (1+\theta)2r - e^{2r}}$.

13.15. (a) 2/3; (b) 2.

13.16. $p_1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{\beta_i}$.

13.17. (a) $\frac{5}{27}$; (b) $\frac{4}{5}$; (c) $\frac{-17r+54}{3(3-r)(6-r)}$; (d) $\frac{4}{9}\,\frac{10-3r}{8-6r+r^2} = \frac{4}{9}\,\frac{2}{2-r} + \frac{1}{9}\,\frac{4}{4-r}$.

(e) $\psi(u) = \frac{4}{9}\,e^{-2u} + \frac{1}{9}\,e^{-4u}$. Проверьте, что $\psi(0) = \frac{5}{9} = \frac{1}{1+\theta}$.

13.18. (a) $\frac{10}{3}$; (b) 2; (c) $\frac{9}{(3-5r)^2}$;

(d) $\frac{2}{3}\,\frac{0{,}12-0{,}1r}{0{,}24-1{,}1r+r^2} = \frac{0{,}4(0{,}3)}{0{,}3-r} - \frac{0{,}067(0{,}8)}{0{,}8-r}$; (e) $\psi(u) = 0{,}4e^{-0{,}3u} - 0{,}067e^{-0{,}8u}$.

13.19. (a) $\xi = \frac{\theta}{1+\theta}$, $\mathbf{E}[L] = \frac{1}{1+\theta}\,\frac{\alpha}{\beta}$, $\mathbf{E}[L^2] = \frac{1}{1+\theta}\left(\frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\alpha}{\beta^2}\right)$;

(b) $\psi(u) = \frac{1}{1+\theta}[1 - G(u\!:\alpha,\beta)]$.

13.20. (a) $\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{A_i/B_i}{\sum_{j=1}^{n}(A_j/B_j)}\right]\beta_i e^{-\beta_i x}$; (b) $\frac{A_i/B_i}{\left[\sum_{i=1}^{n}(A_i/B_i)\right]}$, $i = 1, 2, \ldots, n$;

(c) $\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{A_i/B_i}{\sum_{j=1}^{n}(A_j/B_j)}\right]\frac{1}{\beta_i}$.

13.21. (a) $\frac{21}{10}\,e^{-3x} + e^{-7x}$; (b) $\frac{29}{105}$; (c) $\frac{1\,009}{11\,025}$.

13.23. (a) fc, $f\lambda$, $\psi(u, ft)$; (b) $1/\lambda$.

13.24. 10/3.

13.25. (a) $\psi'(u) = \begin{cases} (\lambda/c)\psi(u) - \lambda/c, & 0 \leqslant u \leqslant 1, \\ (\lambda/c)\psi(u) - (\lambda/c)\psi(u-1), & u > 1. \end{cases}$

(b) $\psi(u) = 1 - (1 - \lambda/c)e^{(\lambda/c)u}$, $0 \leqslant u \leqslant 1$.

Глава 14

14.1. (b) b^2pq; (c) $s = 0{,}233$.

14.3. (a) 31,35 дней; (b) 2,99848c.

14.4. (a) 0,13022; (b) 0,09823; (c) 0,05683.

14.5. (a) $\mathbf{E}[S] = 4{,}7$, $\mathbf{D}[S] = 16{,}40$; (b) $\lambda = 1{,}7$, $p(1) = 7/17$, $p(4) = 10/17$, 16,7.

14.6. (a) $\sum_{j=1}^{n} b_j\,\tilde{\lambda}_j$, $\sum_{j=1}^{n} b_j^2\,\tilde{\lambda}_j$; (c) 167,293.

14.7. $\frac{q_i q_j}{\sum\sum_{k<l} q_k q_l}$.

14.9. $\sigma\phi\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right) - (d-\mu)\left[1 - \Phi\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right)\right]$.

14.10. (a) $-[1 - F_S(x)]$; (b) $f_S(x+1)$.

14.11. $f_S(x) = 2x$, $0 < x < 1$.

14.12.

x	$f_S(x)$	$F_S(x)$	$\mathbf{E}[I_x]$
0	0,050	0,050	3,500
1	0,124	0,174	2,550
2	0,180	0,354	1,724

14.13. (a) 0,3885; (b) 0,985.

14.14. $0{,}8\mathbf{E}[I_d] - 0{,}8\mathbf{E}[I_l]$, где $l = d + m/0{,}8$.

14.15. 3,758.

14.16. $\alpha = \dfrac{\theta}{\xi} - \dfrac{|\xi - \theta|}{\xi\sqrt{1+\xi}}$; $\theta < \xi$ и $(1+\theta)^2 < 1+\xi$.

14.17. $\alpha = \dfrac{2\theta}{\xi} - 1$; $\xi > 2\theta$.

14.18. $(1+\theta) - (1+\xi)e^{-\beta}$, $1 + [(1+\theta) - (1+\xi)e^{-\beta}]r = \dfrac{1 - re^{-\beta(1-r)}}{1-r}$.

14.19. $R = \dfrac{1{,}25 - 2\alpha}{(1-\alpha)^2}$, $\alpha = 0{,}25$.

14.20. $H_d = \dfrac{1}{\alpha}\ln\left\{\Phi\left(\dfrac{d-\mu}{\sigma}\right) + \left[1 - \Phi\left(\dfrac{d-\mu}{\sigma} - \alpha\sigma\right)\right]\exp\left[\alpha(\mu - d) + \dfrac{\alpha^2\sigma^2}{2}\right]\right\}$.

Замечание: ответ к упр. 14.9 — предел величины H_d при $\alpha \to 0$.

14.21. Обратное гауссовское распределение с параметрами α и β.

14.23. (a) $e^{-\delta t}\left\{e^{tm + t\sigma^2/2}\left[1 - \Phi\left(\dfrac{\ln d - (tm + t\sigma^2)}{\sqrt{t}\,\sigma}\right)\right] - d\left[1 - \Phi\left(\dfrac{\ln d - tm}{\sqrt{t}\,\sigma}\right)\right]\right\}$;

(b) $m = \delta - \sigma^2/2$;

(c) $\Phi\left(\dfrac{-\ln d + t\delta + t\sigma^2/2}{\sqrt{t}\,\sigma}\right) - de^{-\delta t}\Phi\left(\dfrac{-\ln d + t\delta - t\sigma^2/2}{\sqrt{t}\,\sigma}\right)$.

Глава 15

15.1. (a)

Сберегательный счет	566,50	Резерв	485,44
		Сальдо	81,06
	566,50		566,50
Поступление премий	550,00		
Инвестиционный доход	16,50		
	566,50		
Увеличение резервов	485,44		
Чистый доход	81,06		

(b) $1 - \Psi(5{,}28) = 0{,}00000$.

15.3. (b) (i) 7 425,56, (ii) 183 833; (c) (i) 7 500, (ii) 187 500; (d) 7 425,56; (e) 7 500; (f) 0,171914.

15.4. (a) 288,41; (b) 332,35.

15.5. $\dfrac{1\,000\bar{A}_{[40]:\overline{25|}} + 4\ddot{a}_{[40]:\overline{25|}} + 8{,}5}{0{,}93\ddot{a}_{[40]:\overline{25|}} + 0{,}05\,{}_{10}E_{[40]}\,\ddot{a}_{[40]+10:\overline{15|}} - 0{,}35}$.

15.6. $\dfrac{1\,000\bar{A}_{x:\overline{n|}} + 2{,}5\ddot{a}_{x:\overline{n|}} + 2{,}5}{0{,}935}$.

15.7. $a = 1 + e_0 + e_2 + e_3$, $c = e_1 + de_0$.

15.8. (a) $\dfrac{\bar{P}(\bar{A}_x) + \alpha}{1-p} + \dfrac{\theta}{1-p}\,\dfrac{1}{b} = \pi + \dfrac{f}{b}$; (b) $\dfrac{\bar{P}(\bar{A}_x) + \alpha}{1-p} + \dfrac{\theta}{1-p}\,\dfrac{1}{\mathbf{E}[B]} = \pi + \dfrac{f}{\mathbf{E}[B]}$.

15.9. (a) 200; (b) 20; (c) $\sqrt{200}$.

15.10. (a) Первый год: $a'b + 14{,}29$, где $a' = \dfrac{1\,000\bar{A}_x + 0{,}5\ddot{a}_x + 2{,}5}{0{,}95\ddot{a}_x - 0{,}25}$.
Второй и последующий годы: $a'b + 2{,}63$.

(b) Все годы: $a'b + \dfrac{2{,}5\ddot{a}_x - 7{,}5}{0{,}95\ddot{a}_x - 0{,}25}$.

15.12. $(G_2 - G_1)\displaystyle\sum_{k=0}^{9}(1 - c_k)l_{x+k}^{(\tau)}\dfrac{(1+i)^{10-k}}{l_{x+10}^{(\tau)}}$.

15.14. (b) $\displaystyle\int_0^\infty (e^{-\delta' u} - e^{-\delta u})[b_{t+u}\,\mu_x(t+u) - \pi_{t+u}]\,{}_up_{x+t}\,du$.

Глава 16

16.1. ${}_tW'_x \gtreqless {}_tW_x$ в зависимости от $\dfrac{P'_{x+t}}{P_{x+t}} \gtreqless \dfrac{P'_x}{P_x}$.

16.2. $\dfrac{b}{2} + \left(\dfrac{b}{2} - 1\right)\dfrac{A^{\ \ 1}_{x+t:\overline{n-t}|}}{{}_{n-t}E_{x+t}}$.

16.3. (a) $\dfrac{{}_{10}CV - L - (1-L)\bar{A}^{\ \ 1}_{40:\overline{10}|}}{{}_{10}E_{40}}$; (b) $(1-L)\bar{A}^{\ \ 1}_{45:\overline{5}|} + E\,{}_5E_{45}$.

16.4. ${}^{20}_{10}W_{40} = 0{,}5829$, ${}_{10}W_{40:\overline{20}|} = 0{,}6232$, отношение $= 0{,}5$.

16.7. Бессрочное на случай смерти: $1 - \dfrac{P^a_x}{P_{x+k}}$, на случай смерти на срок n лет: $1 - \dfrac{{}_nP^a_x}{{}_{n-k}P_{x+k}}$, смешанное на срок n лет: $\dfrac{1 - P^a_{x:\overline{n}|}}{P_{x+k:\overline{n-k}|}}$.

16.8. Бессрочное на случай смерти: $1 - \dfrac{P_{x+1}}{P_{x+k}}$, на случай смерти на срок n лет: $1 - \dfrac{\beta^{\text{Com}}}{{}_{n-k}P_{x+k}}$, где $\beta^{\text{Com}} = {}_nP_x + \dfrac{{}_{19}P_{x+1} - A^{1}_{x:\overline{1}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$, смешанное на срок n лет: $1 - \dfrac{\beta^{\text{Com}}}{P_{x+k:\overline{n-k}|}}$, где $\beta^{\text{Com}} = P_{x:\overline{n}|} + \dfrac{{}_{19}P_{x+1} - A^{1}_{x:\overline{1}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$.

16.9. (c) $\bar{a}_x\, Ge^{\delta t} + \bar{a}_{x+k+t}\,(\mu_{x+k+t} + \delta) - 1$.

16.10. $(G_2 - G_1)\displaystyle\sum_{k=0}^{9}(1 - c_k)l^{(\tau)}_{x+k}\,\dfrac{(1+i)^{10-k}}{l^{(\tau)}_{x+10}}$.

16.13. (b) $\dfrac{1 + \hat{\imath}_{h+1}}{1+i}\,\dfrac{p_{x+h}}{p'_{x+h}}$.

16.15. $\bar{\beta} = \dfrac{\bar{A}_x}{(\bar{I}\bar{a})_{x:\overline{m}|}/m + {}_{m|}\bar{A}_x}$.

16.16. $\alpha^{\text{Mod}}_x = A^{1}_{x:\overline{1}|} + K_1E_x$, $\beta^{\text{Mod}}_x = P_{x+1} - \dfrac{K}{\ddot{a}_{x+1}}$.

16.23. (a) $\beta = 0{,}03$, $\alpha = 0{,}01$, $\beta - \alpha < 0{,}05$; (b) 0,28; (d) 0,0867; (e) 0,0278.

16.24. $\alpha = \beta^{\text{Com}}_{x:\overline{20}|} - ({}_{19}P_{x+1} - A^{1}_{x:\overline{1}|})$, $\beta = \dfrac{P_{x:\overline{20}|}\ddot{a}_{x:\overline{15}|} - \alpha}{a_{x:\overline{14}|}}$.

16.25. $T = \beta^{\text{Com}} - {}_{19}P_{x+1}$.

Глава 17

17.1. $\bar{a}_{\overline{n}|} + \displaystyle\int_n^{\infty} v^s\,{}_{s-n}p_x\,ds$.

17.7. $\dfrac{\bar{A}^{1}_{x:\overline{15}|} - v^{20}\,{}_{15}q_x}{\delta} + \bar{a}_{\overline{5}|}(\bar{A}^{1}_{x:\overline{20}|} - \bar{A}^{1}_{x:\overline{15}|})$, или

$$\bar{a}_{\overline{20}|} - \bar{a}_{x:\overline{20}|} + v^{20}\,{}_{15}p_x\,\bar{a}_{x+15:\overline{5}|} - v^{20}\,{}_{20}p_x\,\bar{a}_{\overline{5}|}.$$

17.8. $\dfrac{1\,000A_{x:\overline{20}|}^{\ \ 1} + 120(a^{(12)}_{\overline{20}|} - a^{(12)}_{x:\overline{20}|})}{\ddot{a}_{x:\overline{20}|}}$.

17.10. (a)

$$Z = \begin{cases} v^T \bar{a}_{\overline{25-T}|}, & T \leqslant 15, \\ v^T \bar{a}_{\overline{10}|}, & 15 < T \leqslant 25, \\ v^{25} \bar{a}_{\overline{10}|}, & 25 < T \leqslant 35, \\ v^{25} \bar{a}_{\overline{T-25}|}, & T > 35; \end{cases}$$

(b) $\displaystyle\int_0^{15} v^t \bar{a}_{\overline{25-t}|}\, {}_tp_{40}\, \mu_{40}(t)\, dt + \bar{a}_{\overline{10}|} \int_{15}^{25} v^t\, {}_tp_{40}\, \mu_{40}(t)\, dt$

$$+ v^{25} \bar{a}_{\overline{10}|} \int_{25}^{35} {}_tp_{40}\, \mu_{40}(t)\, dt + v^{25} \int_{35}^{\infty} \bar{a}_{\overline{t-25}|}\, {}_tp_{40}\, \mu_{40}(t)\, dt.$$

17.15. 203 421.

17.16. (a) 55; (b) 53 759,04.

17.18. (c) $\mu^{(3)}$ при $\delta \to 0$, $\mu^{(3)}/4$ при $\delta \to \infty$.

Глава 18

18.1. (a) 2 или 4 лица из w, x, y, z доживут до момента t;
(b) 1 или 3 лица из w, x, y, z доживут до момента t.

18.3. (a) 6,5; (b) 3236,71.

18.4. ${}_tD_3 - 3\, {}_tD_4$, где ${}_tD_3 = {}_tp_{wxy} + {}_tp_{wxz} + {}_tp_{wyz} + {}_tp_{xyz}$ и ${}_tD_4 = {}_tp_{wxyz}$.

18.5. $a_w - (a_{wxy} + a_{wxz} + a_{wyz}) + 2a_{wxyz}$.

18.6. 0,624010.

18.7. (a) $15(\bar{a}_x + \bar{a}_y + \bar{a}_z) - 10(\bar{a}_{xy} + \bar{a}_{xz} + \bar{a}_{yz}) + 9\bar{a}_{xyz}$; (b) $15\bar{a}_x - 5(\bar{a}_{xy} + \bar{a}_{xz}) + 3\bar{a}_{xyz}$.

18.8. 4,6.

18.9. (a) $12\,000(a^{(12)}_{40:\overline{25}|} + a^{(12)}_{35:\overline{25}|} - 2a^{(12)}_{40:35:\overline{25}|})$; (b) $12\,000(a^{(12)}_{40:\overline{25}|} + a^{(12)}_{35:\overline{30}|} - a^{(12)}_{40:35:\overline{25}|})$.

18.10. (a) $\bar{a}_x + \bar{a}_y + \bar{a}_{\overline{n}|} - \bar{a}_{y:\overline{n}|} - \bar{a}_{xy} - \bar{a}_{x:\overline{n}|} + \bar{a}_{xy:\overline{n}|}$; (b) $\bar{a}_{\overline{30}|} + \bar{a}_{25:\overline{40}|} - \bar{a}_{25:\overline{30}|}$.

18.11. (a) 1/7; (b) 26/105; (c) 64/105.

18.12. (a) I неверно. Замените правую часть на $\bar{A}_{\overset{4}{w}xyz} + \bar{A}_{w\overset{4}{x}yz} + \bar{A}_{wx\overset{4}{y}z} + \bar{A}_{wxy\overset{4}{z}}$;
(b) II верно;
(c) III неверно. Замените правую часть на

$$\bar{A}_{w\overset{1}{z}} + \bar{A}_{x\overset{1}{z}} + \bar{A}_{y\overset{1}{z}} - 2(\bar{A}_{wx\overset{1}{z}} + \bar{A}_{wy\overset{1}{z}} + \bar{A}_{xy\overset{1}{z}}) + 3\bar{A}_{wxy\overset{1}{z}}.$$

18.13. $\displaystyle\int_0^{\infty} v^t\, {}_tp_{xy}\, \mu_y(t) t\bar{A}_{x+t}\, dt.$

18.14. (a) 5/7; (b) 3/7.

18.15. $A_{z:\overset{1}{\overline{10}|}}(A_{y:\overset{1}{\overline{z+10}|}} - A_{xy:\overset{1}{\overline{z+10}|}}) - A_{yz:\overset{1}{\overline{10}|}}(A_{y+10:\overset{1}{\overline{z+10}|}} - A_{xy+10:\overset{1}{\overline{z+10}|}})$.

18.16. $v^{10}(\bar{A}^1_{xy} + \bar{A}^1_{xz} - \bar{A}^1_{xyz}) - A_{y:\overset{1}{\overline{10}|}} \bar{A}^1_{x:y+10} - A_{z:\overset{1}{\overline{10}|}} \bar{A}^1_{x:z+10} + A_{yz:\overset{1}{\overline{10}|}} \bar{A}^1_{x:y+10:z+10}$.

18.17. $\dfrac{\bar{A}^1_{30:\overline{5}|} + A_{30:\overset{1}{\overline{5}|}} \bar{A}^1_{35:60}}{\frac{1}{1{,}075} - A_{30:\overset{1}{\overline{5}|}} \bar{A}^1_{35:60}}$.

18.20. (a) $\displaystyle\int_0^{\infty} (1 - {}_tp_w)\, {}_tp_x\, \mu_x(t)\, {}_tp_{yz}\, dt$; (b) ${}_tq^1_{xyz} - {}_\infty q_{w\overset{1}{x}yz}$.

18.22. (a) 25/72; (b) 19/36; (c) 5/8.

18.23. 0,07.

18.24. (a) 0,3; (b) 0,2; (c) 1/30.

18.25. $\displaystyle\int_{10}^{15} (1 - {}_{t-10}p_x)\, {}_tp_y\, \mu_y(t) ({}_{t+10}p_z - {}_{25}p_z)\, dt.$

18.26. $\int_0^{30}(1-{}_tp_{10})\,{}_tp_{20}\,\mu_{20}(t)({}_tp_{30}-{}_{30}p_{30})\,dt+\int_0^{30}(1-{}_tp_{30})\,{}_tp_{20}\,\mu_{20}(t)({}_tp_{10}-{}_{50}p_{10})\,dt$
$+\int_{30}^{40}(1-{}_{30}p_{30})\,{}_tp_{20}\,\mu_{20}(t)({}_tp_{10}-{}_{50}p_{10})\,dt.$

18.27. 0,2145.

18.28. 0,2704.

18.29. (a) неверно. Сомножитель должен быть заменен на $\bar{A}_{\overset{1}{y+t}:z+t}$.

(b) верно.

(c) верно.

18.30. (a) $\bar{a}_{\overline{10}|}-\bar{a}_{x:\overline{10}|}+v^{10}\bar{a}_y-v^{10}{}_{10}p_x\,\bar{a}_{x+10:y}$; (b) $\bar{a}_{\overline{10}|}\bar{A}^1_{xy}+v^{10}\bar{a}_y-v^{10}\bar{a}_{xy}$.

18.31. $G=\dfrac{\frac{2}{3}(\ddot{a}_{x|y}+{}_{n|}\ddot{a}_x)+\frac{1}{3}{}_{n|}\ddot{a}_{xy}}{0{,}92-{}_nA^2_{xy}}$.

18.33. $\dfrac{\bar{A}_{x+n:\overset{1}{y}}}{\ddot{s}_{x:\overline{n}|}+\ddot{a}_{x:y+n}}$.

18.34. $\ddot{a}_{xyz}$.

18.35. (b) $\ddot{a}_{\overline{xy}:\overline{m}|}+v^m{}_np_x(1-{}_mp_y)\ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}|}$.

18.37. Страхование с выплатой в момент смерти лица (z), если смерти происходят в очередности x, y, z, причем только если между смертями лиц (y) и (z) пройдет меньше 10 лет.

Глава 19

19.1. (a) 45; (b) 2; (c) 2.

19.2. $2\,500\sqrt{2}+10\,000/\pi$.

19.3. $10\,000[e^{-1/4}-e^{-1/2}-e^{-1}/4]$.

19.4. $100^2[e^{-51/100}-e^{-50/100}+e^{-28/100}-e^{-27/100}]+100[e^{-1/4}+e^{-53/100}]$.

19.5. $T_{20}-T_{40}-20\,l_{70}$.

19.6. $\int_{20}^{50}l(x,-x)\,dx-\int_{70}^{80}l(x,50-x)\,dx-\int_{30}^{50}l(80,t-80)\,dt$.

19.8. $b\,\dfrac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{a}}\left[1-\Phi\left(\dfrac{R}{\sqrt{a}}\right)\right]\exp\left(Rt+\dfrac{R^2}{2a}\right)$.

19.9. $a+\dfrac{(\bar{I}\bar{a})'_{a:\overline{r-a}|}}{\bar{a}'_{a:\overline{r-a}|}}$, $\int_a^r xl_x\,\dfrac{dx}{T_a-T_r}$.

19.11. (a) $e^{-Rx}s(x)(R+\mu_x)$, $1-e^{-Rx}s(x)$.

19.15. 0,02.

19.17. (a) $[\Gamma(\alpha)]^{1/a}-\beta$; (b) стационарным.

19.18. (b) a; (c) $(\ln b)/c$.

Глава 20

20.1. $(T_a-T_r)w$.

20.2. $ne^{R(t+a)+\tau t}\int_a^r e^{-Ry}s(y)w(y)\,dy$.

20.3. (b) $n(t-r+a)s(r)\bar{a}^h_r\left(\dfrac{f}{b}\right)\int_0^b w(r-y)e^{\tau(t-y)}\,dy$;

(c) ${}^TP_{t+u}=ne^{R(t+u-r+a)}s(r)\bar{a}'_r\left(\dfrac{f}{b}\right)\int_0^b w(r-y)e^{\tau(t+u-y)}\,dy=e^{\rho u}\,{}^TP_t$.

20.4. (a) $c(r-a)w(r)e^{\tau t}n(t-r+a)s(r)\bar{a}^r_h$;

(b) ${}^{T}P_{t+u} = c(r-a)w(r)e^{\tau(t+u)}ne^{R(t-r+a)}s(r)\bar{a}'_r = e^{\rho u}\,{}^{T}P_t$.

20.5. $e^{\rho t}e^{-(R+\mu)(r-a)}fw(r)\bar{a}'_r$.

20.6. (a) $\dfrac{1}{0{,}06} - \dfrac{1-e^{-6+0{,}06x}}{(100-x)(0{,}06)^2}$, $25 < x < 100$, $\bar{a}^h_{65} = 9{,}7020$;

(b) $3\,056{,}14e^{0{,}02t}$ при $0 \leqslant t$, 0 при $t < 0$.

20.8. (a) $34\,175{,}71e^{0{,}02t}$ при $0 \leqslant t$; (b) $4\,423{,}17e^{0{,}02t}$ при $0 \leqslant t$.

20.9. $M(x) = \begin{cases} 0, & x < r, \\ 1, & x \geqslant r. \end{cases}$

20.10. $fw(r)\bar{a}'_r\, e^{-(R+\mu)(r-a)}e^{\rho t}\, \dfrac{\bar{a}_{\overline{r-a}|\theta}}{r-a}$, вычисленное при θ, где $\theta = \delta - \rho$.

20.14. (a) $P_t = e^{-\delta[r-X(\delta)]}\,{}^{T}P_t$, $(aV)_t = {}^{T}P_t\, \bar{a}_{\overline{r-X(\delta)}|\delta} = P_t\, \bar{s}_{\overline{r-X(\delta)}|}$, вычисленное при δ;

(b) $P_t = {}^{T}P_t$, $(aV)_t = {}^{T}P_t(r-\mu)$, где $\mu = \displaystyle\int_a^r xm(x)\,dx$.

20.15. (a) $\dfrac{fw(r)e^{(\tau-\delta)r}s(r)\bar{a}^h_r}{\int_a^r w(y)e^{(\tau-\delta)r}s(y)\,dy}$; (b) $\dfrac{e^{-(\delta-\tau)x}s(x)w(x)}{\int_a^r e^{-(\delta-\tau)y}s(y)w(y)\,dy}$.

20.20. (a) $60\,977{,}92e^{0{,}02t}$; (b) $M(x) = \dfrac{x-25}{40}$, $m(x) = \dfrac{1}{40}$,

(i) $38\,292{,}33e^{0{,}02t}$, (ii) $1524{,}45e^{0{,}02t}$.

(c) $M(x) = \dfrac{e^{-1} - e^{-0{,}04x}}{e^{-1} - e^{-2{,}6}}$, $m(x) = \dfrac{0{,}04e^{-0{,}04x}}{e^{-1} - e^{-2{,}6}}$,

(i) $45\,479{,}00e^{0{,}02t}$, (ii) $1236{,}88e^{0{,}02t}$.

20.21. $\dfrac{d}{dt}(aF)_t = \left[\dfrac{(aV)_0}{\bar{a}_{\overline{15}|}} + P_t\right] + \delta(aF)_t - {}^{T}P_t$, $0 \leqslant t < 15$.

Начальное условие $(aF)_0 = 0$

$$\frac{d}{dt}(aF)_t = P_t + \delta(aF)_t - {}^{T}P_t, \qquad 15 \leqslant t.$$

Начальное условие $(aF)_{15} = (aV)_{15}$.

(a) $26\,234{,}75e^{0{,}06t} + 38\,292{,}33e^{0{,}02t} - 64\,527{,}08$ при $0 \leqslant t < 15$,

$38\,292{,}33e^{0{,}02t}$ при $15 \leqslant t$;

(b) $31\,158{,}47e^{0{,}06t} + 45\,479{,}00e^{0{,}02t} - 76\,637{,}48$ при $0 \leqslant t < 15$,

$45\,479{,}00e^{0{,}02t}$ при $15 \leqslant t$.

20.23. (a) $\bar{a}_{\overline{X(\theta)-a}|\theta}$, вычисленное при θ; (b) $\mu - a$, где $\mu = \displaystyle\int_a^r x\,m(x)\,dx$.

20.25. (a) $21\,000{,}00e^{0{,}02t}$; (b) $263\,122{,}29e^{0{,}02t}$.

Глава 21

21.1. 0,000382.

21.2. 0,001154.

21.3. (a) 1/10; (b) 1/132.

21.4. (a) $e^{-n(\delta-\sigma^2/2)}$; (b) $e^{-jn(\delta-j\sigma^2/2)}$;

(c) (i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} e^{-j(k+1)(\delta-j\sigma^2/2)}\,{}_kp_x\,q_{x+k} = {}^{j}_{*}A_x$, (ii) ${}^{2}_{*}A_x - ({}_{*}A_x)^2$.

21.5. (a) 0,10, $\dfrac{2}{1200}$; (b) $f_z(z) = \begin{cases} 100z, & 0 < z < 0{,}1, \\ 20 - 100z, & 0{,}1 < z < 0{,}2, \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$

(c) $f_y(y) = \begin{cases} 100\,\dfrac{\ln y}{y}, & 1 < y < e^{0,1}, \\ \dfrac{20 - 100\ln y}{y}, & e^{0,1} < y < e^{0,2}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$

21.7. (a) δ; (b) $k\sigma^2$; (c) $\ln(1+I_k) \sim N(\delta, k\sigma^2)$.

21.8. (a) $-n\delta$, $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\sigma^2$; (b) $\ln(\tilde{v}_n) \sim N[-n\delta, \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\sigma^2]$;
(c) $e^{-n(\delta-[(n+1)(2n+1)/12]\sigma^2)}$, $e^{-2n(\delta-[(n+1)(2n+1)/12]\sigma^2)}(e^{[n(n+1)(2n+1)/6]\sigma^2} - 1)$;
(d) $\tilde{v}_n$ — логнормальное распределение с параметрами $-n\delta$ и $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\sigma^2$.

21.9. (a) r; (b) $n\sigma^2$; (c) $\ln I_n \sim N(r, n\delta^2)$.

21.10. $e^{r+(n\sigma^2/2)}$, $e^{2r+n\sigma^2}(e^{n\sigma^2/2} - 1)$.

21.17. 0,050000, 0,054866, 0,059611.

21.22. (b) $l_x(c^*\bar{a}_x - \theta\bar{A}_x)$; (c) $-l_x[(\bar{I}\bar{A})_x + c(I^*\bar{a})_x - \bar{P}(\bar{A}_x)(1+\theta)(\bar{I}\bar{a})_x]$, где величина ${}^*\bar{a}_x$ вычислена при ${}^*\delta = \delta + r$.

Предметный указатель

Оглавление

Научное издание

Бауэрс Н., Гербер Х., Джонс Д., Несбитт С., Хикман Дж.

Актуарная математика

Сдано в набор 20.04.2001. Подписано в печать 27.07.2001. Формат 70x100/16. Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Уч.-изд л. 57,8. Физ.п.л. 41. Тираж 1000.

ООО «Янус-К». Лицензия на издательскую деятельность ЛР 064784 от 02.10.96.
109319, Москва, ул. Стройковская д. 12, корп. 2
119048, Москва, Кооперативная ул. 3-6-128 (для писем)

Отпечатано с готовых диапозитивов в ППП «Типография «Наука»
121099, Москва, Шубинский пер., 6. Заказ № 1855

Налоговая льгота — общероссийский классификатор продукции ОК-005-93, том 2; 953000 — книги, брошюры

ISBN 5-8037-0065-7

9785803700654

	Напечатано	Следует читать
С.31, стр.15 сверху	$e^{\alpha_I \omega_I}$	$-e^{\alpha_I \omega_I}$
С.32, стр.10 сверху	$\frac{3}{2}\sqrt{10}$	$\frac{2}{3}\sqrt{10}$
С.54, стр.8 и 6 снизу	$E[X]$ $D[X]$	$E[S]$ $D[S]$
С.55, стр.8 сверху	$q_k = 0.01$	$q_k = 0.10$
С.68, стр.15 снизу	табл. 1.3.1	табл. 3.2.1
С.101, стр.2 снизу	$(1/80)/(1/\delta z)$	$(1/80)\cdot(1/\delta z)$
С.139, Табл. 5.2.1	$\bar{a}_{\overline{x:n}\rceil} = a_{\overline{n}\rceil} + \ldots$	$\bar{a}_{\overline{x:n}\rceil} = \bar{a}_{\overline{n}\rceil} + \ldots$