GRUNDLEHREN DER MATHEMATISCHEN
WISSENSCHAFTEN 226
A Series of Comprehensive Studies in Mathematics

K-Theory

An Introduction

Max Karoubi
Université Paris VII

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York
1978

М. КАРУБИ

K-ТЕОРИЯ

ВВЕДЕНИЕ

Перевод с английского
Ю. П. СОЛОВЬЕВА
под редакцией
А. С. МИЩЕНКО

Издательство «Мир»
Москва 1981

УДК 513.83

Написанная французским математиком книга вводит читателя в новое направление алгебраической топологии. Изложение отличается от имеющихся полнотой и систематичностью. Весьма ценны многочисленные конкретные вычисления K-групп. Даны важнейшие приложения K-теории (инварианты Хопфа, векторные поля, теоремы целочисленности).

Для специалистов по топологии и математиков, применяющих топологические методы, для аспирантов и студентов.

Редакция литературы по математическим наукам

1702050000

$$K\,\frac{20203-005}{041\,(01)-81}\,05-81,\ \text{ч. } 1$$

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Теория векторных расслоений является, пожалуй, наиболее плодотворной после классической теории гомологий частью топологии в плане ее приложений к другим областям математики. Наиболее знаменитое ее приложение связано с работами М. Ф. Атьи и И. Сингера по вычислению индекса эллиптического псевдодифференциального оператора на компактном гладком замкнутом многообразии в терминах характеристических классов векторных расслоений.

Можно выделить два фактора, определяющих глубину и богатство теории векторных расслоений. Первый фактор — это наличие одного интересного алгебраического приема описания свойств векторных расслоений, который был придуман А. Гротендиком. Суть приема в замене полугруппы всех векторных расслоений с фиксированной базой некоторой абелевой группой (группой Гротендика), что позволяет изучать свойства векторных расслоений с помощью уже хорошо разработанных приемов теории гомологий. Группа Гротендика, построенная по полугруппе векторных расслоений с фиксированной базой, называется K-группой, а соответствующая ей обобщенная теория гомологий — K-теорией. Этот, казалось бы, простой прием дает тем не менее возможность использовать при изучении векторных расслоений глубокие связи с алгебраической геометрией. На этом пути, в частности, получила дальнейшее развитие теория характеристических классов векторных расслоений, были доказаны теоремы целочисленности, основанные на результатах типа теоремы Римана — Роха. В терминах K-теории приобрела естественный геометрический смысл периодичность Ботта; в свою очередь благодаря периодичности Ботта K-теория приобрела черты обобщенной теории гомологий, что способствовало развитию вычислительных методов в K-теории.

Второй фактор — это наличие большого числа задач, допускающих естественную интерпретацию в терминах векторных расслоений. Многие из этих задач долгое время не поддавались решению и были решены лишь после применения теории векторных расслоений и K-теории. Здесь можно назвать, например, задачи о существовании H-структуры на сфере и о числе векторных полей на сфере, проблему вычисления J-функтора.

Уже решение одних только внутренних задач топологии создало мощный стимул к исследованию возможностей применения K-теории и к развитию самой K-теории. Но векторные расслоения оказались хорошо приспособленными и для интерпретации и решения задач из других областей математики. Одну из таких задач мы упомянули вначале — это проблема вычисления индекса эллиптического оператора. После работ Атьи и Сингера K-теорию стали широко применять в математическом анализе, скажем при исследовании граничных эллиптических задач, при вычислении числа неподвижных точек преобразований, в теории бесконечномерных представлений. В последнее время язык векторных расслоений оказался полезным в теоретической физике (например, при изучении полей Янга — Миллса).

Предлагаемая в русском переводе книга известного французского тополога М. Каруби представляет собой введение в K-теорию. Если сравнить ее с другими имеющимися на русском языке монографиями по K-теории, то следует отметить, что она элементарнее, чем монография Хьюзмоллера [1] и характеризуется большей четкостью и систематичностью изложения, чем лекции Атьи [3]. Ее можно рекомендовать в качестве учебного пособия студентам и аспирантам, изучающим топологические методы.

В книге нашли отражение вкусы автора, уделившего главное внимание функциональным методам в K-теории. Последнее обстоятельство тем более важно, что в других монографиях связь K-теории с теорией банаховых алгебр не отражена, а между тем именно благодаря этой связи получен ряд важных результатов как в теории бесконечномерных представлений, так и в теории эллиптических операторов.

Хотя при описании приложений K-теории автор и ограничился лишь примерами ее применения к задачам самой топологии, нам представляется, что данная книга окажется полезной не только специалистам по топологии, но и всем математикам, использующим в своих исследованиях методы векторных расслоений.

А. С. Мищенко

Посвящается
Пьеру и Тома

ПРЕДИСЛОВИЕ

K-теорию создал А. Гротендик, для того чтобы сформулировать общую теорему Римана—Роха (см. Борель и Серр [2]). Каждому проективному алгебраическому многообразию Гротендик поставил в соответствие некоторую группу, исходя из категории когерентных алгебраических пучков над этим многообразием, и показал, что она обладает многими замечательными свойствами. Атья и Хирцебрух [3] рассмотрели топологический аналог этой теории, а именно построили для каждого компактного пространства X некоторую группу $K(X)$, исходя из категории векторных расслоений над X. Именно этой *топологической K-теорией* мы и будем заниматься в настоящей книге.

Топологическая K-теория стала важным инструментом в топологии. Используя K-теорию, Адамс и Атья смогли дать простое доказательство того, что единственные сферы, которые допускают структуру H-пространства,—это S^1, S^3 и S^7. Далее, методами K-теории удалось получить существенную часть результатов стабильной гомотопической теории (см. Адамс [2]). Кроме того, имеются различные приложения K-теории к анализу и алгебре, основанные на работах Атьи и Сингера [2], Басса [1], Квиллена [1] и других авторов. Ключевым моментом во всех этих приложениях является так называемая периодичность Ботта (Ботт [2]).

Назначение данной книги—служить для студентов старших курсов, изучающих топологию, и для специалистов, работающих в других областях математики, пособием, по которому они могли бы познакомиться с методами и результатами K-теории. Помимо того, представлены некоторые приложения упомянутого выше типа. В общем, мы пытались сделать эту книгу независимой от других источников и всюду, где только возможно, начинаем изложение материала с элементарных понятий. Все-таки предполагается, что читатель знаком с основными понятиями теории гомотопий—гомотопическими классами отображений и гомотопическими группами (см., например, Хилтон [1] или Ху [1]). Используется также „обычная" теория когомологий, но лишь в конце главы V. Поэтому настоящую книгу можно рассматривать как достаточно независимое введение в „обобщенную" теорию когомологий.

Первые две главы („Векторные расслоения" и „Первые понятия K-теории") носят в основном обзорный характер; для тех читателей, кому этот материал известен, достаточно будет беглого взгляда, чтобы познакомиться с принятым нами подходом и обозначениями.

Глава III посвящена доказательству теорем периодичности Ботта. Мы применяем при этом технику, развитую в работах Атьи и Ботта [1], Вуда [1] и автора [2] и основанную на комбинации методов функционального анализа и *алгебраической К-теории*

В главе IV вычисляются K-группы для большого набора конкретных пространств, включая проективные пространства, расслоения на флаги и грассмановы многообразия. Представленный в § IV. 5 вариант теоремы об „изоморфнзме Тома" принадлежит по существу Атье, Ботту и Шапиро [1] (именно благодаря им в K-теории появились алгебры Клиффорда — один из методов, которые мы используем в главе III).

Глава V посвящена описанию ряда приложений K-теории: к исследованию инварианта Хопфа и вопроса о существовании на сфере структур H-пространства (Адамс и Атья [1]), к решению проблемы о векторных полях (Адамс [1]) Кроме того, в этой главе дано эскизное изложение теории характеристических классов, которую мы применяем при доказательстве теорем целочисленности Атьи — Хирцебруха [1]. В последнем параграфе главы V с помощью K-теории вычисляются некоторые стабильные гомотопические группы сфер, для чего используются группы $J(X)$ (см. Адамс [2], Атья [1], Кервер и Милнор [1]).

Несмотря на относительно большой объем, эта книга отнюдь не исчерпывает всей K-теории. Мы опустили ряд важных ее разделов, в особенности из числа тех, которые обстоятельно представлены в литературе. К таким разделам относится, например, теорема Атьи — Сингера об индексе; ее доказательство можно найти в трудах семинара Картана — Шварца [1], в книге Пале [1] и в серии статей Атьи и Сингера [2] (для предварительного ознакомления с вопросом см. также приложение 1 к книге Хирцебруха [2]). Далее, в §§ V.3 и V.4 мы лишь коснулись вопроса о соотношении между K-теорией и другими теориями когомологий. Более полное изложение этого вопроса имеется в книгах Коннера и Флойда [1] и Хилтона [2] (спектральная последовательность Атьи — Хирцебруха) Наконец, за рамками книги осталась алгебраическая K-теория, которая тоже бурно развивается в настоящее время. С алгебраической K-теорией можно познакомиться, скажем, по книге Басса [1] и по шпрингеровским выпускам Lecture Notes in Mathematics, тома 341 — 343.

Я хотел бы завершить это предисловие словами искренней благодарности в адрес Марии Клейв, оказавшей мне огромную помощь при переводе первоначальной рукописи с французского на английский.

Париж, лето 1977 *Макс Каруби*

ЗАМЕЧАНИЯ ОБ ОБОЗНАЧЕНИЯХ

На протяжении всей книги используются следующие обозначения: $\mathbb{Z}$ — целые числа, $\mathbb{Q}$ — рациональные числа, $\mathbb{R}$ — вещественные числа, $\mathbb{C}$ — комплексные числа, $\mathbb{H}$ — кватернионы. Через $\mathrm{GL}_n(A)$ обозначается группа обратимых матриц порядка n с коэффициентами в кольце A. Звездочками *...* выделены утверждения, которые не являются прямым следствием доказываемых в книге теорем, но могут быть найдены в литературе; в дальнейшем мы не ссылаемся на эти утверждения, разве что иногда в упражнениях.

Если $\mathscr{C}$ — категория, а E и F — ее объекты, то через $\mathscr{C}(E, F)$ или $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(E,F)$ обозначается множество всех морфизмов из E в F.

Список более специальных обозначений приведен в конце книги.

Для перекрестных ссылок в книге применяется двойная нумерация (например, 5.21), если мы ссылаемся на материал той же главы, или тройная нумерация (например, IV.6.7), если мы ссылаемся на материал другой главы[1].

---

[1] Заметим также, что при ссылках на параграфы внутри глав используется одинарная нумерация (например, § 2), а при ссылках на параграфы других глав — двойная (например, § IV.2). Наконец, ссылка типа „см. упр. 3" отсылает к упражнению n.3, где n — номер предпоследнего параграфа данной главы. — *Прим. ред.*

ЗАМЕЧАНИЯ ОБ ОБОЗНАЧЕНИЯХ

На протяжении всей книги используются следующие обозначения: $\mathbb{Z}$ — целые числа, $\mathbb{Q}$ — рациональные числа, $\mathbb{R}$ — вещественные числа, $\mathbb{C}$ — комплексные числа, $\mathbb{H}$ — кватернионы. Через $\mathrm{GL}_n(A)$ обозначается группа обратимых матриц порядка n с коэффициентами в кольце A. Звездочками *...* выделены утверждения, которые не являются прямым следствием доказываемых в книге теорем, но могут быть найдены в литературе; в дальнейшем мы не ссылаемся на эти утверждения, разве что иногда в упражнениях.

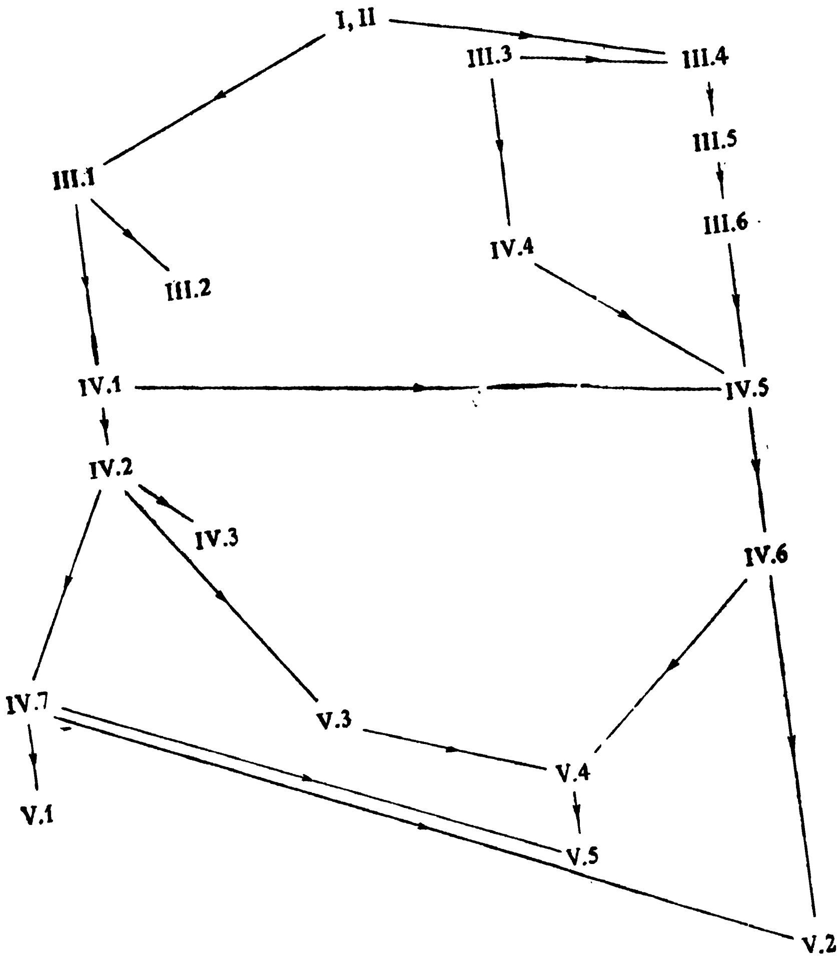
Если $\mathscr{C}$ — категория, а E и F — ее объекты, то через $\mathscr{C}(E, F)$ или $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(E,F)$ обозначается множество всех морфизмов из E в F.

Список более специальных обозначений приведен в конце книги.

Для перекрестных ссылок в книге применяется двойная нумерация (например, 5.21), если мы ссылаемся на материал той же главы, или тройная нумерация (например, IV.6.7), если мы ссылаемся на материал другой главы [1].

---

[1] Заметим также, что при ссылках на параграфы внутри глав используется одинарная нумерация (например, § 2), а при ссылках на параграфы других глав — двойная (например, § IV.2). Наконец, ссылка типа „см. упр. 3“ отсылает к упражнению n.3, где n — номер предпоследнего параграфа данной главы. — *Прим. ред.*


I, II
III.1
III.2
III.3
III.4
III.5
III.6
IV.1
IV.2
IV.3
IV.4
IV.5
IV.6
IV.7
V.1
V.2
V.3
V.4
V.5

КРАТКИЙ ОБЗОР СОДЕРЖАНИЯ КНИГИ ПО ПАРАГРАФАМ

Глава I. Векторные расслоения

1. *Векторные квазирасслоения.* В этом параграфе вводятся общие понятия и определения, необходимые для последующего изложения. Особенно важна для дальнейшего теорема 1.12.
2. *Векторные расслоения.* Рассматриваемые здесь векторные расслоения представляют собой локально-тривиальные расслоения, слоями которых служат конечномерные векторные пространства над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. В последующем наиболее часто используются предложение 2.7 и примеры 2.3 и 2.4.
3 *Теоремы о склеивании.* Этот технический по своему содержанию параграф служит связующим звеном между теорией векторных расслоений и теорией координатных расслоений в смысле Стинрода [1]. Теоремы о склеивании полезны при построении касательного расслоения дифференцируемого многообразия и при описании векторных расслоений над сферами (3.9; см. также 7.6).
4. *Операции над векторными расслоениями.* Некоторые „непрерывные" операции над конечномерными векторными пространствами: взятие прямой суммы, тензорного произведения, переход к двойственному пространству, взятие внешней степени и т. д.—могут быть определены также и в категории векторных расслоений.
5. *Сечения векторных расслоений.* В этом параграфе рассматриваются лишь непрерывные сечения. Изложение концентрируется вокруг теорем о продолжении сечений над паракомпактными пространствами.
6. *Алгебраические свойства категории векторных расслоений.* Здесь мы доказываем, что категория $\mathscr{E}(X)$ векторных расслоений над компактным пространством X является псевдоабелевой аддитивной категорией. Грубо говоря, это означает, что существуют прямые суммы векторных расслоений (так называемые суммы Уитни) и что каждый проекционный оператор имеет образ. Из этого категорного описания (6.13) мы выводим теорему Серра—Суона (6.18): категория $\mathscr{E}(X)$ эквивалентна категории $\mathscr{P}(A)$, где A—кольцо непрерывных функций на X и $\mathscr{P}(A)$—категория конечно-порожденных проективных модулей над A.
7. *Гомотопическая теория векторных расслоений.* Материал этого параграфа существенно используется в последующих главах. Мы доказываем, что проблема классификации векторных расслоений с компактной базой X зависит только от гомотопического типа X (7.2). Мы доказываем также, что множество $\Phi_n^k(X)$ классов изоморфных

k-векторных расслоений над X ранга n ($k=\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), рассматриваемое как функтор от X, является прямым пределом представимых функторов. Более конкретно эти результаты сформулированы в виде теорем 7.10 и 7.14.

8. Метрики и формы на векторных расслоениях. Иногда важно иметь некоторые дополнительные структуры на векторных расслоениях, такие как билинейные формы, эрмитовы формы и т. п. За исключением теоремы 8.7, материал этого параграфа не используется в дальнейших главах (кроме как в упражнениях).

Глава II. Первые понятия К-теории

***1. Группа Гротендика категории. Группа** $K(X)$.* Отправляясь от простого понятия симметризации абелева моноида, мы определяем группу $K(\mathscr{C})$ аддитивной категории $\mathscr{C}$, используя моноид классов изоморфных объектов этой категории. Рассматривая случай, когда $\mathscr{C}=\mathscr{E}(X)$ и X компактно, мы получаем группу $K(X)$ (точнее, $K_{\mathbb{R}}(X)$ или $K_{\mathbb{C}}(X)$ в зависимости от того, какие векторные расслоения рассматриваются). Доказывается, что $K_{\mathbb{R}}(X)=[X, Z\times \mathrm{BO}]$ и $K_{\mathbb{C}}(X)\approx[X, Z\times \mathrm{BU}]$ (1.33).

***2. Группа Гротендика функтора. Группа** $K(X, Y)$.* Для того чтобы получить „разумное" определение группы Гротендика $K(\varphi)$ аддитивного функтора $\varphi : \mathscr{C}\to\mathscr{C}'$, которое обобщало бы в случае $\mathscr{C}'=0$ определение группы $K(\mathscr{C})$, мы налагаем на категории $\mathscr{C}$ и $\mathscr{C}'$ и функтор φ некоторые дополнительные топологические условия (2.6). Поскольку функтор ограничения $\mathscr{E}(X)\to\mathscr{E}(Y)$, где Y — замкнутое подпространство в X, удовлетворяет этим условиям, можно определить „относительную" группу $K(X, Y)$ как K-группу функтора ограничения. Имеет место изоморфизм $K(X, Y)\approx\tilde{K}(X/Y)$ (2.35). Этот изоморфизм показывает, что по существу мы не получили новой группы; однако группы $K(\varphi)$ и $K(X, Y)$ служат важиым техническим средством в дальнейших главах.

3. Группа K^{-1} банаховой категории. Группа $K^{-1}(X)$. Этот параграф представляет собой первый шаг на пути построения теории когомологий h^*, первый член которой h^0 есть группа $K(X, Y)$ (обозначаемая также через $K^0(X, Y)$). Группа $K^{-1}(\mathscr{C})$ где $\mathscr{C}$ — банахова категория, строится из автоморфизмов объектов $\mathscr{C}$. Снова рассматривая случай $\mathscr{C}=\mathscr{E}(X)$, мы получаем группу, обозначаемую через $K^{-1}(X)$. Доказывается, что если Y — замкнутое подпространство в X, то последовательность

$$K^{-1}(X)\to K^{-1}(Y)\to K(X, Y)\to K(X)\to K(Y)$$

точна. Кроме того, устанавливаются изоморфизмы $K_{\mathbb{R}}^{-1}(X)\approx[X, 0]$ и $K_{\mathbb{C}}^{-1}(X)\approx[X, U]$ (3.19).

4. Группы $K^{-n}(X)$ и $K^{-n}(X, Y)$. Основная цель этого параграфа — определить группы $K^{-n}(X, Y)$ для $n\geqslant 2$ и ввести точную последовательность

$$K^{-n-1}(X) \to K^{-n-1}(Y) \to K^{-n}(X, Y) \to K^{-n}(X) \to K^{-n}(Y)$$

для $n \geqslant 1$. Одно из возможных определений группы $K^{-n}(X, Y)$ таково: $K^{-n}(X, Y) = \tilde{K}(S^n(X/Y))$ (4.12). Кроме того, в этом параграфе вводятся так называемые точные последовательности Майера — Вьеториса (4.18 и 4.19), которые будут очень полезны в дальнейшем.

5. *Мультипликативные структуры.* Операция взятия тензорного произведения векторных расслоений задает в группе $K(X)$ кольцевую структуру. Сложнее определяется так называемое $\cup$-произведение

$$K(X, Y) \times K(X', Y') \to K(X \times X', X \times Y' \cup Y \times X').$$

или, более общо,

$$K^{-n}(X, Y) \times K^{-n'}(X', Y') \to K^{-n-n'}(X \times X', X \times Y' \cup Y \times X')$$

в случае когда Y и Y' непусты. Теоретическое построение этих произведений осуществлено в предложении 5.6; однако для приложений часто бывает полезным иметь более явные формулы. Поэтому мы даем еще одно определение группы $K(X, Y)$, предполагая, что рассматриваемые расслоения снабжены метрикой (5.16); это определение впервые используется лишь в гл. IV. Из существования таких $\cup$-произведений следует, что имеет место расщепление $K(X) \approx H^0(X; Z) \oplus K'(X)$, где $K'(X)$ — ниль-идеал (см. 5.9; заметим, что если пространство X связано, то $K'(X) \approx \tilde{K}(X)$).

Глава III. Периодичность Ботта

1. ***Периодичность в комплексной К-теории.*** В этом параграфе мы определяем изоморфизм $K_{\mathbf{C}}^{-n}(X, Y) \approx K_{\mathbf{C}}^{-n-2}(X, Y)$. Методом, принадлежащим Атье, Ботту и Вуду, мы сводим доказательство этого изоморфизма для произвольных n к следующей теореме о банаховых алгебрах (1.11): если A — комплексная банахова алгебра, то группа $K(A)$ (определяемая как $K(\mathscr{P}(A))$) естественно изоморфна группе $\pi_1(\mathrm{GL}(A))$, где $\mathrm{GL}(A) = \operatorname{inj\,lim} \mathrm{GL}_n(A)$. Эта теорема доказывается с привлечением рядов Фурье непрерывных функций со значениями в комплексном банаховом пространстве, а также некоторых классических результатов алгебраической K-теории лорановских полиномов. В интересующей нас ситуации нужно взять в качестве A кольцо комплексных непрерывных функций на компактном пространстве.

2. ***Первые приложения теоремы периодичности Ботта в комплексной К-теории.*** В качестве первого приложения мы получаем классическую теорему Ботта: если $n > i/2$, то $\pi_i(U(n)) \approx Z$ для нечетных i и $\pi_i(U(n)) = 0$ для четных i. Кроме того, мы показываем, что вещественная K-теория периоднчна с периодом 4 по модулю 2-кру-

чения:

$$K_{\mathbb{R}}^{-n}(X, Y)\otimes_{\mathbb{Z}} Z' \approx K_{\mathbb{R}}^{-n-4}(X, Y)\otimes_{\mathbb{Z}} Z',$$

где $Z'=Z[^1/_2]$. Эта теорема будет усилена в § 5.

3. Алгебры Клиффорда. Эти алгебры играют важную роль в вещественной K-теории и будут использованы в гл. IV как для вещественной, так и для комплексной K-теорий. Настоящий параграф носит чисто алгебраический характер. Наиболее важным результатом является теорема 3.21, которая утверждает наличие некой периодичности для алгебр Клиффорда. Эта алгебраическая периодичность будет эффективно использована в § 5 для доказательства топологической периодичности в вещественной K-теории, а также для получения нового доказательства периодичности в комплексной K-теории.

4. Функторы $K^{p,q}(\mathscr{C})$ и $K^{p,q}(X)$. Основная идея этого параграфа состоит в том, чтобы, используя алгебры Клиффорда $C^{p,q}$, алгебраически определить новые функторы $K^n(X)=K^{p,q}(X)$ для $n=p-q\in Z$. Мы доказываем, что так определенные функторы периодичны с периодом 8 в вещественном случае и с периодом 2 в комплексном случае и что $K^0(X)$ и $K^{-1}(X)$ в действительности совпадают с функторами, определенными в гл. II. Для того чтобы доказать периодичность Ботта, нужно теперь показать, что указанные два определения $K^n(X)$ совпадают для отрицательных значений n. Это делается в двух следующих параграфах.

5. Функторы $K^{p,q}(X, Y)$ и изоморфизм t. Периодичность в вещественной K-теории. Введя после некоторых приготовлений относительные группы $K^{p,q}(X, Y)$, мы формулируем фундаментальную теорему этой главы: группы $K^{p,q+1}(X, Y)$ и $K^{p,q}(X\times B^1, X\times S^0\cup Y\times B^1)$ изоморфны. Предполагая эту теорему справедливой (доказательству ее посвящен следующий параграф), мы устанавливаем, что $K_{\mathbb{R}}^{-n}(X, Y) \approx K_{\mathbb{R}}^{-n-8}(X, Y)$ для определений, данных в гл. II. Попутно мы еще раз доказываем теорему периодичности в комплексной K-теории (5.17). Кроме того, применяя предложения 4.29 и 4.30, мы доказываем существование слабой гомотопической эквивалентности между итерированным пространством петель $\Omega^r(\mathrm{O})$ и некоторыми однородными пространствами (5.22). И наконец, используя алгебры Клиффорда, мы вычисляем гомотопические группы $\pi_i(\mathrm{O}(n))$ для $n>i+1$ (5.19).

6. Доказательство фундаментальной теоремы. Этот параграф аналогичен § 1, поскольку доказываемая теорема снова получается как следствие одной общей теоремы о банаховых алгебрах (6.12). Более того, в доказательстве этой общей теоремы используются те же идеи, что и в доказательстве теоремы 1.11.

Глава IV. Вычисление некоторых К-групп

1. Изоморфизм Тома в комплексной К-теории для комплексных векторных расслоений. Цель этого параграфа — вычислить комплексные K-группы пространства Тома комплексного векторного расслоения (1.9). Ключевую роль в этом вычислении играют расслоения внешних алгебр. Особое значение для дальнейшего имеет теорема 1.3.

2. Комплексная К-теория комплексных проективных пространств и комплексных проективных расслоений. В данном параграфе („классическом" по духу) мы описываем некую методику, которая может быть использована также и для обычных когомологий (см. § V.3). Используя носящее технический характер предложение 2.4, мы оказываемся в состоянии вычислить K-группы для пространства $P_n = P(\mathbb{C}^{n+1})$, или, более общим образом, для пространства $P(V)$, где V — комплексное векторное расслоение (2.13). Вводимый в этом параграфе принцип расщепления (2.15) часто используется в дальнейшем. В частности, с помощью этого принципа мы явно описываем мультипликативную структуру кольца $K^*(P(V))$ (2.16).

3. Комплексная К-теория расслоений на флаги и грассмановых расслоений. К-теория произведений. Данный параграф также является классическим по духу, но менее существен для дальнейшего изложения. Мы явно вычисляем группу $K^*(F(V))$, где $F(V)$ — расслоение на флаги комплексного векторного расслоения V. Кроме того, мы вычисляем группы $K^*(G_p(V))$, где $G_p(V)$ — грассманово расслоение, ассоциированное с V (3.12). Эти результаты используются для вычисления группы $\mathcal{K}^*(\mathrm{BU}(n)) = \operatorname{proj}\lim K(G_p(\mathbb{C}^n))$ (3.22), а также K-групп для произведений пространств (3.27).

4. Некоторые дополнительные сведения об алгебрах Клиффорда. В § III.3 мы не стали вводить понятие спинорной группы, поскольку оно не существенно для доказательства периодичности Ботта. Теперь же это понятие понадобится нам для доказательства аналога теоремы Тома в K-теории (для вещественных или комплексных расслоений). После некоторых предварительных алгебраических рассмотрений мы изучаем возможность поднятия структурной группы вещественного векторного расслоения до спинорной группы $\mathrm{Spin}(n)$ или $\mathrm{Spin}^c(n)$. Особый интерес для наших целей представляет теорема 4.22.

5. Изоморфизм Тома в вещественной и комплексной К-теориях для вещественных векторных расслоений. Как и в § 1, наша цель — вычислить K-группы пространства Тома векторного расслоения, но на сей раз вещественного. При этом используются как вещественная, так и комплексная K-теории. При дополнительном предположении о существовании спинорной структуры мы доказываем, что $K(V) \approx K^{-n}(X)$, где n — ранг расслоения V. Далее, мы показываем, что если база расслоения компактна и n кратно 8 (или 2 в комплексном случае), то $K(V)$ является $K(X)$-модулем ранга 1, порожденным классом Тома T_V. Наконец, для случая когда f: $X \to Y$ — собственное непрерывное отображение дифференцируемых многообразий и $\dim(Y)-\dim(X)\equiv 0 \bmod 8 (\bmod 2$ в комплексном случае), мы определяем, в предположении существования спинорной структуры, гомоморфизм Гизина $f_*\colon K(X)\to K(Y)$, который является аналогом гомоморфизма Гизина в обычных когомологиях. Этот гомоморфизм используется лишь в § V.4.

6. Вещественная и комплексная K-теории вещественных проективных пространств и вещественных проективных расслоений. Данный параграф носит по сравнению с другими более технический характер (и результаты его используются только в § V.2). После ряда простых, но довольно нудных лемм, систематически использующих алгебры Клиффорда, мы оказываемся в состоянии вычислить (с точностью до расширения) вещественные и комплексные K-группы вещественных проективных расслоений (6.40 и 6.42). В случае вещественных проективных пространств K-группы вычисляются полностью (6.46 и 6.47).

7. Операции в K-теории. Одной из привлекательных черт K-теории является возможность определить в ней очень красивые операции. Например, в ней существуют операции взятия внешних степеней λ^k (введенные Гротендиком). Используя метод, принадлежащий Атье, мы находим все операции, возможные в комплексной K-теории. С помощью этого метода мы показываем, что операции Адамса ψ^k являются единственными кольцевыми операциями в комплексной K-теории (7.13). Они будут очень полезны в приложениях (гл. V).

Операции λ^k и ψ^k можно определить также и в вещественной K-теории. Однако их свойства доказываются здесь труднее. Мы отсылаем читателя за полными доказательствами к работе Адамса [3] или же к упр. 8.5. Из операций ψ^k мы получаем операции ρ^k, которые окажутся весьма полезными в §§ V.2 и V.5.

Глава V. Некоторые приложения K-теории

1. Структуры H-пространства на сферах и инвариант Хопфа. Используя операции Адамса в комплексной K-теории, мы доказываем, что единственными сферами, допускающими структуру H-пространства, являются S^1, S^3 и S^7. В действительности мы доказываем даже несколько больше: если $f\colon S^{2n-1}\to S^n$ — отображение с нечетным инвариантом Хопфа, то n должно быть равно 2, 4 или 8.

2. Решение проблемы о векторных полях на сферах. Представим произвольное целое число t в виде $(2\alpha-1)\cdot 2^\beta$, где $\beta=\gamma+4\delta$, $0\leqslant\gamma\leqslant 3$, и положим $\rho(t)=2^\gamma+8\delta$. Тогда максимальное число независимых векторных полей на сфере S^{t-1} в точности равно $\rho(t)-1$ (2.10). Доказательство этой классической теоремы „элементарно" (в контексте настоящей книги) и существенно использует операции ρ^k для вещественных K-групп вещественных проективных пространств.

3. Характеристические классы и характер Чженя. В этом параграфе для произвольного комплексного векторного расслоения V мы аксиоматически определяем классы Чженя $c_i(V) \in H^{2i}(X;\ Z)$ (3.15). Построение этих классов аналогично построению характеристических классов, введенных в § IV.3. При помощи этих классов мы определяем некоторый фундаментальный гомоморфизм Ch — характер Чженя — из $K_{\mathbb{C}}(X)$ в $H^{\text{чёт}}(X;\ \mathbb{Q})$. Характер Чженя индуцирует изоморфизм $K_{\mathbb{C}}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \approx H^{\text{чёт}}(X;\ \mathbb{Q})$ для любого компактного пространства X.

4. *Теорема Римана — Роха и теоремы целочисленности.* Каждому комплексному стабильному векторному расслоению (соотв. комплексному спинорному стабильному вещественному расслоению) мы сопоставляем некоторый важный характеристический класс $\tau(V)$, называемый классом Тодда (соотв. класс $\hat{A}(V)$, называемый классом Атьи — Хирцебруха). Эти классы играют важную роль в теореме Римана — Роха для дифференцируемых многообразий: для каждого подходящего непрерывного отображения $f\colon X \to Y$ и каждого элемента $x \in K_{\mathbb{C}}(X)$ имеет место формула

$$Ch(f_*^K(x)) = f_*^H(\hat{A}(\nu_f) \cdot Ch(x)),$$

где $\hat{A}(\nu_f)$ — класс Атьи — Хирцебруха стабильного расслоения $f^*(TY) \to TX$ (в предположении, что $\dim(Y) \equiv \dim(X) \bmod 2$ и что на ν_f задана стабильная комплексная спинорная структура). Из этой теоремы мы получаем теоремы целочисленности для характеристических классов (4.21) и гомотопическую инвариантность некоторых характеристических классов (4.24).

5. *Приложения К-теории к исследованию стабильных гомотопий.* Здесь мы объясняем, как, применяя K-теорию, можно получить интересную информацию о стабильных гомотопических группах сфер. Мы включили лишь те отдельные результаты, которые можно вывести из результатов, представленных в настоящей книге. Более полные результаты читатель найдет в серии работ Адамса [2] о группах $J(X)$ и в книге Хьюзмоллера [1].

Глава I

ВЕКТОРНЫЕ РАССЛОЕНИЯ

1. Векторные квазирасслоения

1.1. Пусть k — поле вещественных или комплексных чисел[1], X — топологическое пространство.

1.2. Определение. *Векторное квазирасслоение с базой* X определяется заданием

1) конечномерного векторного пространства E_x над полем k для каждой точки x из X;

2) топологии на несвязном (дизъюнктном) объединении $E = \coprod E_x$, индуцирующей естественную топологию на каждом E_x и такой, что очевидное отображение проекции π: $E \to X$ непрерывно.

1.3. Пример. Пусть X — сфера $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$. Для каждой точки x из S^n возьмем в качестве E_x векторное пространство, ортогональное к x. Тогда $E = \coprod E_x$ является, очевидно, подпространством в $S^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ и может быть снабжено индуцированной топологией.

1.4. Пример. Отправляясь от предыдущего примера, произвольным образом выберем для каждой точки $x \in S^n$ векторное подпространство $F_x \subset E_x$. Если снабдить пространство $F = \coprod F_x$ индуцированной топологией, мы снова получим на X некоторое векторное квазирасслоение.

Дальнейшие примеры будут даны в следующих пунктах.

1.5. Векторное квазирасслоение обозначается через $\xi = (E, \pi, X)$ или, если это не приводит к недоразумениям, просто через E. Пространство E называется *тотальным пространством* расслоения ξ, а пространство E_x — *слоем* квазирасслоения ξ в точке x.

1.6. Пусть $\xi = (E, \pi, X)$ и $\xi' = (E', \pi', X')$ — векторные квазирасслоения. *Общий морфизм* из ξ в ξ' задается парой (f, g) непрерывных отображений f: $X \to X'$ и g: $E \to E'$, таких что

1) диаграмма

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi"'] & E' \arrow[d, "\pi'"] \\ X \arrow[r, "f"] & X' \end{tikzcd}$$

коммутативна;

2) отображения g_x: $E_x \to E'_{f(x)}$, индуцированные отображением g, k-линейны.

Очевидным образом определяется композиция общих морфизмов, и мы получаем категорию, объектами которой являются векторные квазирасслоения, а стрелками — общие морфизмы.

---

[1] Это наиболее интересные случаи, однако иногда мы будем использовать также тело кватернионов $\mathbb{H}$.

1.7. Если квазирасслоения ξ и ξ' имеют одну и ту же базу $X=X'$, то *морфизмом* между ξ и ξ' называется такой общий морфизм (f, g), для которого $f=\mathrm{Id}_X$. В дальнейшем такой морфизм будет обозначаться просто через g. Векторные квазирасслоения с базой X являются объектами подкатегории, стрелки которой—только что определенные морфизмы.

1.8. Пример. Вернемся к примеру 1.3 и положим $n=1$. Пусть $\xi'=(E', \pi', X')$, где $X=X'=S^1$ и $E'=S^1\times\mathbb{R}$ с топологией произведения. Если обычным образом отождествить $\mathbb{R}^2$ с плоскостью комплексных чисел, то можно определить непрерывное отображение $g\colon E\to E'$, полагая $g(x, z)=(x, iz/x)$ (это отображение корректно определено, поскольку x ортогонален к z в $\mathbb{R}^2=\mathbb{C}$). Отображение g является изоморфизмом между E и E' в категории, описанной в 1.7.

1.9. Пример. Пусть E''—факторпространство пространства $E'=S^1\times\mathbb{R}$ по следующему отношению эквивалентности: $(x, t)\sim(y, u)$, если и только если $y=\varepsilon x$, $u=\varepsilon t$, $\varepsilon=\pm 1$. Тогда E'' является тотальным пространством векторного квазирасслоения над $P_1(\mathbb{R})$, называемого *бесконечным листом Мёбиуса*. Отождествляя $P_1(\mathbb{R})$ с окружностью S^1 при помощи отображения $z\longmapsto z^2$, нетрудно видеть, что E'' является факторпространством произведения $I\times\mathbb{R}$ по отношению эквивалентности, которое отождествляет точки $(0, u)$ и $(1, -u)$. Если мы ограничимся рассмотрением u с нормой, не превосходящей едииницы, то получим классический лист Мёбиуса.

Мы утверждаем, что квазирасслоения E' и E'' над S^1 не изоморфны. Действительно, предположим, что существует изоморфизм $g\colon E'\to E''$. Тогда пространство $E'\setminus X'$ должно быть гомеоморфно пространству $E''\setminus X''$, где X' (и X'')—множество точек вида $(x, 0)$, $x\in S^1$ (заметим, что $X''\approx X'$). Однако пространство $E''\setminus X''$ связно, а $E'\setminus X'$—несвязно.

1.10. Пусть V—конечномерное векторное пространство (как всегда, над полем k). Предыдущие примеры указывают на важную роль векторных квазирасслоений вида $E=X\times V$ как модельных расслоений. Точнее, здесь $E_x=V$ и тотальное пространство квазирасслоения может быть отождествлено с $X\times V$, наделенным топологией произведения. Такие квазирасслоения называются тривиальными векторными квазирасслоениями или просто *тривиальными векторными расслоениями*.

1.11. Пусть $E=X\times V$ и $E'=X\times V'$—тривиальные векторные расслоения с базой X. Мы хотим дать явное описание морфизмов из E в E' (в категории, определенной в 1.7). Поскольку диаграмма

$$\begin{tikzcd} X\times V \arrow[rr] \arrow[dr] & & X\times V' \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

коммутативна, то для каждой точки $x \in X$ отображение g индуцирует линейное отображение g_x: $V \to V'$. Пусть $\check{g}$: $X \to \mathscr{L}(V, V')$ — отображение, задаваемое формулой $\check{g}(x) = g_x$.

1.12. Теорема. *Отображение* $\check{g}$: $X \to \mathscr{L}(V, V')$ *непрерывно относительно естественной топологии в* $\mathscr{L}(V, V')$. *Обратно, пусть* h: $X \to \mathscr{L}(V, V')$ — *непрерывное отображение и* $\hat{h}$: $E \to E'$ — *отображение, которое индуцирует* $h(x)$ *на каждом слое. Тогда* $\hat{h}$ *является морфизмом векторных квазирасслоений.*

Доказательство. Для доказательства выберем в V базис $e_1, \ldots, e_n$ и в V' базис $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p$. Относительно этих базисов отображение g_x можно рассматривать как матрицу $(\alpha_{ij}(x))$, где $\alpha_{ij}(x)$ есть i-я координата вектора $g_x(e_j)$. Следовательно, функция $x \mapsto \alpha_{ij}(x)$ получается как композиция следующих непрерывных отображений:

$$X \xrightarrow{\beta_j} X \times V \xrightarrow{g} X \times V' \xrightarrow{\gamma} V' \xrightarrow{p_i} k,$$

где $\beta_j(x) = (x, e_j)$, $\gamma(x, v') = v'$ и p_i — i-я проекция пространства $V' \cong k^p$ на k. Так как функции $\alpha_{ij}(x)$ непрерывны, то индуцированное ими отображение $\check{g}$ также непрерывно, в силу определения топологии в $\mathscr{L}(V, V')$.

Обратно, пусть h: $X \to \mathscr{L}(V, V')$ — непрерывное отображение. Тогда $\hat{h}$ является композицией непрерывных отображений

$$X \times V \xrightarrow{\delta} X \times \mathscr{L}(V, V') \times V \xrightarrow{\varepsilon} X \times V',$$

где $\delta(x, v) = (x, h(x), v)$ и $\varepsilon(x, u, v) = (x, u(v))$. Следовательно, отображение $\hat{h}$ непрерывно и определяет морфизм квазивекторных расслоений. □

1.13. Замечание. Ясно, что $\hat{\check{g}} = g$ и $\check{\hat{h}} = h$. * Заметим также, что второе утверждение теоремы обобщается на банаховы расслоения (см. Ленг [2]), однако первое утверждение для банаховых расслоений не выполняется. *

1.14. Замечание. Как мы уже отмечали в примере 1.9, совершенно не очевидно, будет ли данное векторное квазирасслоение изоморфным тривиальному расслоению. Обозначим через TS^n векторное квазирасслоение, рассмотренное в 1.3 (это — *касательное расслоение* сферы). Лишь в самом конце книги мы будем в состоянии показать, что TS^n *не изоморфно* тривиальному расслоению, за исключением случаев $n = 1$, 3 или 7 (см. § V.2).

1.15. Пусть $\xi = (E, \pi, X)$ — векторное квазирасслоение, X' — подпространство пространства X. Тройка $(\pi^{-1}(X'), \pi|_{\pi^{-1}(X')}, X')$ определяет векторное квазирасслоение ξ', которое называется *ограничением* ξ на X'. Мы будем обозначать такое расслоение через $\xi|_{X'}$, $E|_{X'}$ или просто $E_{X'}$. Слои ξ' суть в точности слои расслоения ξ над подпространством X'. Если $X'' \subset X' \subset X$, то мы имеем $(\xi|_{X'})|_{X''} = \xi|_{X''}$.

1.16. Более общим образом, пусть $f\colon X' \to X$ — произвольное непрерывное отображение (X' — не обязательно подпространство в X). Для каждой точки $x' \in X'$ положим $E'_{x'} = E_{f(x')}$. Тогда множество $E' = \coprod_{x' \in X'} E'_{x'}$ может быть отождествлено с *расслоенным произведением* $X' \times_X E$, т. е. с подмножеством в $X' \times E$, образованным такими парами (x', e), что $f(x') = \pi(e)$. Если определить проекцию $\pi'\colon E' \to X'$ равенством $\pi'(x', e) = x'$, то очевидно, что тройка (E', π', X') является векторным квазирасслоением над X', в предположении что множество E' снабжено топологией, индуцированной из $X' \times E$. Квазивекторное расслоение ξ' обозначается через $f^*(\xi)$ или $f^*(E)$ и называется *обратным образом* ξ при отображении f или *индуцированным* векторным квазирасслоением. Если $f = \mathrm{Id}_X$, то $f^*(\xi) = \xi$. Далее, если $f'\colon X'' \to X'$ — еще одно непрерывное отображение, то $(f \cdot f')^*(\xi) = f'^*(f^*(\xi))$. Если $f\colon X' \subset X$ — отображение вложення, то $f^*(\xi) = \xi|_{X'}$.

1.17. Пусть $(f, g)\colon E'_1 \to E$ — общий морфизм векторных квазирасслоений, где $f\colon X' \to X$. Этот общий морфизм индуцирует морфизм $h_1\colon E'_1 \to E' = f^*(E)$, как показано на следующей диаграмме:

$$\begin{tikzcd}
E'_1 \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, "\pi'_1"'] & E' \approx X' \times_X E \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\pi'"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\
X' \arrow[r, "\mathrm{Id}_{X'}"] & X' \arrow[r, "f"] & X
\end{tikzcd}$$

Здесь отображение h индуцировано проекцией $X' \times E$ на второй сомножитель. Общий морфизм (f, g) называется *точным*, если h_1 — изоморфизм.

1.18. Рассмотрим теперь два векторных квазирасслоения над X и морфизм $\alpha\colon E \to F$. Если положить $E' = f^*(E)$, как в 1.16, и $F' = f^*(F)$, то формула $\alpha'_{x'} = \alpha_{f(x')}$ задает морфизм $\alpha' = f^*(\alpha)$ из E' в F'. При отождествлении E' с $X' \times_X E$ и F' с $X' \times_X F$ морфизм α' может быть отождествлен с $\mathrm{Id}_{X'} \times_X \alpha$, что доказывает непрерывность отображения α':

$$\begin{tikzcd}
 & f^*(F) \arrow[rr] \arrow[dd, dashed] & & F \arrow[dd] \\
f^*(E) \arrow[ur, "f^*(\alpha)"] \arrow[rr] \arrow[dr] & & E \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr] & \\
 & X' \arrow[rr, "f"] & & X
\end{tikzcd}$$

В частности, если $f\colon X' \subset X$ — отображение вложения, то $f^*(\alpha)$ — ограничение морфизма α. Мы будем обозначать его через $\alpha|_{X'}$ или просто через $\alpha_{X'}$. Предоставляем читателю в качестве несложного упражнения доказать следующее предложение:

1.19. Предложение. *Пусть $f\colon X' \to X$ — непрерывное отображение. Тогда соответствия $E \mapsto f^*(E)$, $\alpha \mapsto f^*(\alpha)$ индуцируют функтор из* *категории векторных квазирасслоений над X в категорию векторных квазирасслоений над X'.*

Упражнения [1]: 1—4 и 6.

2. Векторные расслоения

Векторное расслоение — это векторное квазирасслоение, которое локально изоморфно тривиальному векторному расслоению. Более точно это условие сформулировано в следующем определенни:

2.1. Определение. Пусть $\xi = (E, \pi, X)$ — векторное квазирасслоение. Тогда ξ называется *локально-тривиальным* или *векторным расслоением*, если для каждой точки x из X существует такая окрестность U этой точки, что $\xi|_U$ изоморфно тривиальному расслоению.

2.2. Последнее условие можно выразить следующим образом: существуют конечномерное векторное пространство V и *гомеоморфизм* $\varphi\colon U\times V \to \pi^{-1}(U)$, такие что диаграмма

$$\begin{tikzcd} U\times V \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_1"'] & & \pi^{-1}(U) \arrow[dl, "\pi|_{\pi^{-1}(U)}"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

коммутативна, причем для каждой точки $y\in U$ отображение $\varphi_y\colon V \to E_y$ k-линейно. Мы назовем U *тривиализующей областью* векторного расслоения ξ. Покрытие (U_i) пространства X называется *тривиализующим покрытием*, если каждое U_i есть тривиализующая область.

Конечно же, существуют векторные квазирасслоения, которые не являются локально-тривиальными (1.4).

2.3. Пример. Докажем, что векторное квазирасслоение $E=TS^n$ из примера 1.3 в действительности является векторным расслоением.

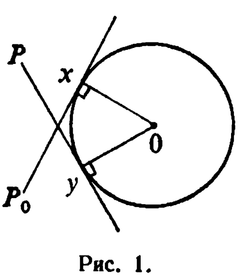


Рис. 1.

Пусть $x\in S^n$, U — окрестность точки x, заданная условием $U=\{y\in S^n \mid \langle y, x\rangle > 0\}$, где через $\langle\, ,\rangle$ обозначено обычное скалярное произведение в $\mathbb{R}^{n+1}$. Пусть P_0 — подпространство в $\mathbb{R}^{n+1}$, ортогональное к вектору x (см. рис. 1), а $\varphi\colon TS^n|_U \to U\times P_0$ — отображение, сопоставляющее паре (y, v) пару (y, w), где w — ортогональная проекция вектора v на P_0. Явная формула для w имеет вид $w=v-\langle x, v\rangle x$. Обратно, вектор v может быть получен из w по формуле $v=w-\dfrac{\langle y, w\rangle}{\langle x, y\rangle}x$, откуда следует, что φ — гомеоморфизм. Таким образом, TS^n локально-тривиально.

[1] См. упражнения в конце главы. — *Прим. ред.*

2.4. *Пример.* Пусть V — конечномерное векторное пространство над k и $P(V)$ — ассоциированное с V проективное пространство (снабженное фактортопологией). Подпространство E в $P(V)\times V$, состоящее из пар (D, e), где $D\in P(V)$ и $e\in D$, является относительно проекции на первый сомножитель векторным квазирасслоением над $P(V)$. Более точно, слой E_D, $D\in P(V)$, является одномерным векторным пространством, состоящим из таких векторов e, что $e\in D$. Покажем, что в действительности E — векторное расслоение. В случае $k=\mathbb{C}$ наделим пространство V положительно-определенной эрмитовой формой, а в случае $k=\mathbb{R}$ — положительно-определенной квадратичной формой. Тогда для каждой прямой D мы можем рассмотреть окрестность U_D, состоящую из всех прямых Δ, не ортогональных D. Тривиализация ограничения $E|_{U_D}$ задается отображением $\varphi\colon E|_{U_D} \to U_D\times D$, $\varphi(\Delta, e)=(\Delta, e')$, где e' — ортогональная проекция вектора e на прямую D. Явные формулы для этих проекций, аналогичные формулам примера 2.3, показывают, что φ — гомеоморфизм. Это расслоение E называется *каноническим линейным расслоением* над $P(V)$.

2.5. Имеется другой способ описания расслоения из примера 2.4. Как хорошо известно, в вещественном случае $P(V)\sim S^n/Z_2$, где $\dim V=n+1$ (более точно, $P(V)$ есть факторпространство сферы S^n по отношению эквивалентности $x\sim\pm x$). Пусть F — факторпространство произведения $S^n\times\mathbb{R}$ по отношению эквивалентности $(x, t)\sim(x', t')\Leftrightarrow(x', t')=(\varepsilon x, \varepsilon t)$, где $\varepsilon=\pm 1$. Тогда F — векторное квазирасслоение над $P(V)$. Определим морфизм $f\colon F\to E$ по формуле $f(x, t)=(\pi(x), tx)$, где $\pi\colon S^n\to P(V)$ — естественная проекция и $tx\in\pi(x)$. Далее, можно определить морфизм $g\colon E\to F$ по формуле $g(D, v)=(x, t)$, где $x\in D\cap S^n$ и t — такой скаляр, что $tx=v$ (конечно же, в этих формулах (x, t) обозначает представителя класса пары (x, t) в $S^n\times\mathbb{R}/\sim$). Тогда f и g — изоморфизмы и $f=g^{-1}$.

В комплексном случае $P(V)\approx S^{2n+1}/U$, где $\dim V=n+1$, а U — группа комплексных чисел с нормой 1 (точнее, $P(V)$ является факторпространством сферы S^{2n+1} по отношению эквивалентности $x\sim\lambda x \Leftrightarrow|\lambda|=1$). В этом случае расслоение E аналогичным образом может быть отождествлено с факторпространством произведения $S^{2n+1}\times\mathbb{C}$ по отношению эквивалентности $(x, t)\sim(x', t')\Leftrightarrow(x', t')=(\varepsilon x, \bar{\varepsilon} t)$, $\varepsilon\in U$.

2.6. Теперь несколько слов о терминологии. Если $k=\mathbb{R}$ (соотв. $k=\mathbb{C}$), то векторное расслоение будет называться *вещественным* (соотв. *комплексным*). Несколько расширяя определение п. 1.10, мы будем далее под тривиальным векторным расслоением понимать векторное расслоение, *изоморфное* $E=X\times V$.

Векторные расслоения образуют полную подкатегорию категории векторных квазирасслоений, рассмотренной в 1.7. Мы будем обозначать эту категорию через $\mathscr{E}(X)$ или же через $\mathscr{E}_k(X)$, когда нужно явно указать основное поле k. Если $f\colon X'\to X$ — непрерывное отображение, то функтор f^*, определенный в 1.19, индуцирует функтор из категории $\mathscr{E}(X)$ в категорию $\mathscr{E}(X')$. Для того чтобы доказать это, достаточно показать, что если ξ локально-тривиально над X, то $f^*(\xi)$ локально-тривиально над X'. Пусть $x' \in X'$, и пусть U — такая окрестность точки $f(x')$, что расслоение $\eta = \xi|_U$ тривиально. Тогда $\xi'|_{U'} = g^*(\eta)$, где $U' = f^{-1}(U)$ и $g\colon U' \to U$ — отображение, индуцированное отображением f. Следовательно, $\eta \approx U \times V$ и $g^*(\eta) \approx U' \times_U (U \times V) \approx U' \times V$, откуда вытекает, что $g^*(\eta)$ тривиально над U'. В частности, если X' — подпространство пространства X, то $\xi|_{X'}$ — векторное расслоение.

2.7. *Предложение.* *Пусть E и F — два векторных расслоения над X и $g\colon E \to F$ — такой морфизм расслоений, что для каждой точки $x \in X$ линейные отображения $g_x\colon E_x \to F_x$ биективны. Тогда g — изоморфизм в категории $\mathscr{E}(X)$.*

Доказательство. Определим отображение $h\colon F \to E$, полагая $h(v) = g_x^{-1}(v)$ для $v \in F_x$. Достаточно доказать, что отображение h непрерывно. Рассмотрим окрестность U точки x и изоморфизмы $\beta\colon E_U \to U \times M$ и $\gamma\colon F_U \to U \times N$. Если положить $g_1 = \gamma \cdot g_U \cdot \beta^{-1}$, то мы получим равенство $h_U = \beta^{-1} \cdot h_1 \cdot \gamma$, где отображение h_1 определено условием $\check{h}_1(x) = (\check{g}_1(x))^{-1}$ (см. 1.12). Так как отображение $\mathrm{Iso}(M, N) \to \mathrm{Iso}(N, M)$, заданное формулой $\alpha \mapsto \alpha^{-1}$, непрерывно, то отображение h_1 также непрерывно. Таким образом, h непрерывно в окрестности каждой точки F и поэтому непрерывно всюду на F. $\square$

2.8. Пусть $\xi = (E, \pi, X)$ — векторное расслоенне. Определим два отображения ($E \times_X E$ — расслоенное произведение)

$$s\colon E \times_X E \to E \text{ и } p\colon k \times E \to E$$

формулами $s(e, e') = e + e'$ и $p(\lambda, e) = \lambda e$, где e, e' — векторы из одного слоя. Эти отображення непрерывны. Для того чтобы показать это, достаточно рассмотреть случай $E = X \times V$, поскольку непрерывность является локальным условием. В этом случае $E \times_X E \approx X \times V \times V$, и при этом изоморфизме s превращается в отображение из $X \times V \times V$ в $X \times V$, заданное формулой $(x, v, v') \mapsto (x, v + v')$. Ясно, что это отображение непрерывно. Таким же способом доказывается непрерывность отображения p.

2.9. Рангом векторного расслоения $\xi = (E, \pi, X)$ называется локально-постоянная функция $r\colon X \to \mathbb{N}$, задаваемая формулой $r(x) = \dim(E_x)$. Ранг ξ равен целому числу n, если $r(x) = n$ для каждой точки $x \in X$. Если база расслоения связна, то ранг постоянен.

Упражнение: 5.

3. Теоремы о склеивании

В предыдущем параграфе мы определили векторные расслоения как локально-тривиальные векторные квазирасслоения. Теперь мы будем строить векторные расслоения, используя их ограничения на подходящие подмножества.

3.1. Теорема (склеивание морфизмов). *Пусть* $\xi=(E, \pi, X)$ *и* $\xi'=(E', \pi', X)$ — *два векторных расслоения с одной и той же базой* X. *Пусть, кроме того, заданы*

a) *покрытие пространства* X, *состоящее из открытых подмножеств* U_i *(соотв. локально конечное покрытие* X *замкнутыми подмножествами* U_i*)*;

b) *такое семейство морфизмов* $\alpha_i\colon \xi|_{U_i}\to\xi'|_{U_i}$, *что* $\alpha_i|_{U_i\cap U_j}=\alpha_j|_{U_i\cap U_j}$.

Тогда существует единственный морфизм $\alpha\colon \xi\to\xi'$, *такой что* $\alpha_{U_i}=\alpha_i$.

Доказательство. Доказательство естественно разбивается на две части.

(i) *Единственность.* Пусть e — точка пространства E. Так как U_i покрывают X, то точка e принадлежит некоторому E_{U_i}. Следовательно, $\alpha(e)=r'_i(\alpha_i(e))$, где $r'_i\colon E'_{U_i}\to E'$ — отображение вложения.

(ii). *Существование.* Для упрощения обозначений будем отождествлять E_{U_i} и E'_{U_i} с подмножествами пространств E и E' соответственно. Для $e\in E$ положим $\alpha(e)=\alpha_i(e)$, если $e\in E_{U_i}$. Из условия b) следует, что это определение не зависит от выбора i. Подмножества $E_{U_i}=\pi^{-1}(U_i)$ образуют открытое покрытие (соотв. локально-конечное покрытие замкнутыми подмножествами) пространства E; следовательно, отображение α непрерывно. Поскольку $\alpha_x\colon E_x\to E'_x$ линейно, отображение α определяет морфизм векторных расслоений. $\square$

3.2. Теорема (склеивание расслоений). *Пусть* (U_i) — *открытое покрытие пространства* X *(соотв. локально-конечное замкнутое покрытие паракомпактного пространства* X*). Пусть* $\xi_i=(E_i, \pi_i, U_i)$ — *векторные расслоения над каждым* U_i *и* $g_{ji}\colon \xi_i|_{U_i\cap U_j}\to\xi_j|_{U_i\cap U_j}$ — *изоморфизмы, которые удовлетворяют условиям согласованности* $g_{ki}|_{U_i\cap U_j\cap U_k}=g'_{kj}\cdot g'_{ji}$, *где* $g'_{kj}=g_{kj}|_{U_i\cap U_j\cap U_k}$ *и* $g'_{ji}=g_{ji}|_{U_i\cap U_j\cap U_k}$. *Тогда существуют векторное расслоение* ξ *над* X *и изоморфизмы* $g_i\colon \xi_i\to\xi|_{U_i}$, *такие что диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
\xi_i|_{U_i\cap U_j} \arrow[rr, "g_{ji}"] \arrow[dr, "g_i|_{U_i\cap U_j}"'] & & \xi_j|_{U_i\cap U_j} \arrow[dl, "g_j|_{U_i\cap U_j}"] \\
& \xi|_{U_i\cap U_j} &
\end{tikzcd}$$

(диаграмма 1)

коммутативна.

Доказательство. Для простоты мы будем использовать одну и ту же букву для обозначения морфизма и его ограничения на подпространство. В несвязном объединении $\coprod E_i$ топологических пространств рассмотрим отношение эквивалентности $e_i\sim e_j \Leftrightarrow g_{ji}(e_i)=e_j$ и снабдим множество $E=\coprod E_i/\sim$ фактортопологией. Непрерывные отображения $\coprod E_i\to X$, индуцируемые проекциями π_i, определяют непрерывное отображение π: $E \to X$. Структура векторного пространства $E_x = \pi^{-1}(\{x\})$, индуцируемая изоморфизмом $E_x \approx E_i|_{\{x\}}$, не зависит от выбора расслоения E_i, поскольку функция g_{ji} линейна на каждом слое. Пусть $\underline{g}_i$: $E_i \to \pi^{-1}(U_i)$ — отображение, задаваемое формулой $\underline{g}_i(e) = \bar{e}$, где $\bar{e}$ — класс элемента e в E. Тогда отображение $\underline{g}_i$ непрерывно, биективно, открыто и индуцирует линейный изоморфизм на каждом слое. Следовательно, отображение $\underline{g}_i$ определяет изоморфизм векторных квазирасслоений (E_i, π_i, U_i) и $(E_{U_i}, \pi|_{E_{U_i}}, U_i)$, где $E_{U_i} = \pi^{-1}(U_i)$.

Предположим, что (U_i) — открытое покрытие пространства X. Пусть $x \in U_i$ и V — окрестность точки x, содержащаяся в U_i и такая, что $\xi_i|_V$ тривиально. Если ξ, как и выше, — векторное квазирасслоение (E, π, X), то $\xi_{U_i} \approx \xi_i$. Следовательно $\xi|_V \approx \xi_i|_V$ тривиально, что доказывает локальную тривиальность расслоения ξ.

Предположим теперь, что пространство X паракомпактно и что (U_i) — замкнутое локально-конечное покрытие. Пусть x_0 — точка пространства X. Поскольку покрытие (U_i) локально-конечно, существует замкнутая окрестность V точки x_0, пересекающаяся лишь с конечным числом подмножеств $U_{i_1}, \ldots, U_{i_p}$ и такая, что расслоения $\xi_j|_{V_j}$, где $V_j = U_{i_j} \cap V$, $j = 1, \ldots, p$, тривиальны. Без ограничения общности мы можем считать, что $x_0 \in V_1$ и что $\xi_j|_{V_j} \approx V_j \times k^n$. Отправляясь от произвольного изоморфизма α_1: $\xi|_{V_1} \approx V_1 \times k^n$, построим индукцией по r морфизм α_r между $\xi|_{V_1 \cup \ldots \cup V_r}$ и тривиальным расслоением $(V_1 \cup \ldots \cup V_r) \times k^n$. Так как расслоение $\xi|_{V_r}$ тривиально, это эквивалентно построению непрерывного отображения β_r: $V_r \to \mathscr{L}(k^n, k^n)$, которое продолжает отображение $\check{\gamma}_r$, где $\gamma_r = \alpha_{r-1}|_{V_r \cap (V_1 \cup \ldots \cup V_{r-1})}$. Такое продолжение возможно в силу теоремы Титце (Келли [1], Бурбаки [1]). Обозначим через α: $\xi|_V \to V \times k^n$ морфизм, полученный такой конструкцией. Поскольку множество $\mathrm{Iso}(k^n, k^n)$ открыто в $\mathscr{L}(k^n, k^n)$, то теорема 1.12 показывает, что множество тех точек $x \in V_s$, для которых α_x — изоморфизм, открыто в V_s. Число таких множеств V_s конечно, и поэтому точки $x \in V$, для которых отображение α_x является изоморфизмом, образуют окрестность W точки x_0. Отображение α_W: $E|_W \to W \times k^n$ индуцирует для каждого s изоморфизм $E|_{V_s \cap W} \to (V_s \cap W) \times k^n$. Следовательно, и само отображение α_W есть изоморфизм. Так как это справедливо для любой точки $x_0 \in X$, то расслоение ξ локально-тривиально. $\square$

3.3. Замечание. Только что построенное расслоение ξ „единственно" в следующем смысле. Пусть ξ' — другое векторное расслоение, и пусть

$g'_i\colon \xi_i \to \xi'|_{U_i}$ — такие изоморфизмы, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\xi_i|_{U_i\cap U_j} \arrow[rr, "g_{ji}"] \arrow[dr, "g'_i|_{U_i\cap U_j}"'] & & \xi_j|_{U_i\cap U_j} \arrow[dl, "g'_j|_{U_i\cap U_j}"] \\
& \xi'|_{U_i\cap U_j} &
\end{tikzcd} \qquad \text{(диаграмма 2)}$$

коммутативна. Тогда существует единственный изоморфизм $\alpha\colon \xi \to \xi'$, превращающий диаграмму

$$\begin{tikzcd}
& \xi_i \arrow[dl, "g_i"'] \arrow[dr, "g'_i"] & \\
\xi|_{U_i} \arrow[rr, "\alpha|_{U_i}"] & & \xi'|_{U_i}
\end{tikzcd}$$

в коммутативную.

Действительно, изоморфизм α можно построить следующим образом. Морфизм $\alpha_i = g'_i \cdot g_i^{-1}$ является изоморфизмом из ξ_{U_i} в ξ'_{U_i}, и из диаграмм 1 и 2 вытекает, что над $U_i \cap U_j$ мы имеем $g_{ji} = g_j^{-1} g_i = g_j'^{-1} g'_i$. Следовательно, над $U_i \cap U_j$ имеем $\alpha_i = g'_i g_i^{-1} = g'_j g_j^{-1} = \alpha_j$. Существование морфизма вытекает теперь из теоремы 3.1. Единственность очевидна.

3.4. Пример. Пусть S^n — сфера в $\mathbb{R}^{n+1}$, т. е. множество точек $x = (x_1, \ldots, x_{n+1})$, таких что $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1$. Обозначим через S^n_+ (соотв. S^n_-) подмножество в S^n, состоящее из таких точек x, что $x_{n+1} \geqslant 0$ (соотв. $x_{n+1} \leqslant 0$). Тогда пространство S^n компактно, S^n_+ и S^n_- — его замкнутые подпространства и $S^n_+ \cap S^n_- = S^{n-1}$ (рис. 2). Пусть $f\colon S^{n-1} \to \mathrm{GL}_p(k)$ — непрерывное отображение. Согласно теореме 3.2,

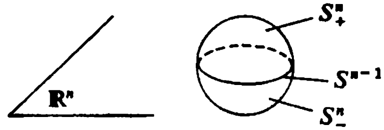


Рис. 2.

над сферой S^n существует расслоение E_f, естественно связанное с f. Оно получается склеиванием тривиальных расслоений $E_1 = S^n_+ \times k^p$ и $E_2 = S^n_- \times k^p$ с помощью *функции перехода* $g_{21} = \hat{f}\colon S^{n-1} \times k^p \to S^{n-1} \times k^p$ (g_{11} и g_{22} — тождественные отображения). Позже мы увидим (7.6), что все расслоения над S^n изоморфны расслоениям этого типа.

3.5. Теорема 3.2 тесно связана с задачей классификации *главных G-расслоений*, где G — топологическая группа $\mathrm{GL}_n(k)$. Более точно, рассмотрим произвольную топологическую группу G и топологическое пространство X.

G-коцикл на пространстве X задается открытым покрытием (U_i) пространства X и такими непрерывными отображениями $g_{ji}: U_i \cap U_j \to G$, что $g_{kj}(x) \cdot g_{ji}(x) = g_{ki}(x)$ для $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$.

Два коцикла (U_i, g_{ji}) и (V_r, h_{sr}) называются *эквивалентными*, если существуют такие непрерывные отображения $g_i^r: U_i \cap V_r \to G$, что $g_j^s(x) \cdot g_{ji}(x) \cdot g_i^r(x)^{-1} = h_{sr}(x)$ для $x \in U_i \cap U_j \cap V_r \cap V_s$. Проверим, что это отношение является отношением эквивалентности. Симметричность и рефлексивность очевидны (заметим, что $g_{ii} = \mathrm{Id}$ и $g_{ij} = g_{ji}^{-1}$). Если коцикл (W_u, l_{vu}) эквивалентен коциклу (V_r, h_{sr}), то найдутся такие непрерывные отображения $h_r^u: V_r \cap W_u \to G$, что $h_s^v(x) \cdot h_{rs}(x) \cdot h_r^u(x)^{-1} = l_{vu}(x)$ для $x \in V_r \cap V_s \cap W_u \cap W_v$. Если $i = j$, то из первого тождества вытекает соотношение $g_i^s(x) \cdot g_i^r(x)^{-1} = h_{sr}(x)$, $x \in U_i \cap V_r \cap V_s$. Для $u = v$ второе тождество дает соотношение $h_s^u(x)^{-1} \cdot h_r^u(x) = h_{sr}(x)$, $x \in V_r \cap V_s \cap W_u$. Отсюда следует, что $h_r^u(x) \times g_i^r(x) = h_s^u(x) \cdot g_i^s(x)$ для $x \in U_i \cap V_r \cap {}_s \cap W_u$. Склеивая вместе непрерывные функции $h_r^u(x) \cdot g_i^r(x)$, получаем новое непрерывное отображение $l_i^u: U_i \cap W_u \to G$. Далее, для $x \in U_i \cap U_j \cap V_r \cap V_s \cap W_u \cap W_v$ имеем $l_{vu}(x) = h_s^v(x) \cdot h_{rs}(x) \cdot h_r^u(x)^{-1} = l_j^v(x) \cdot g_{ji}(x) \cdot l_i^u(x)^{-1}$. Поскольку это соотношение верно для любой пары (r, s), оно также выполняется и для $x \in U_i \cap U_j \cap W_u \cap W_v$. Следовательно, отношение эквивалентности на множестве G-коциклов является корректно определенным. Множество классов эквивалентности G-коциклов на X будет обозначаться через $H^1(X; G)$ (по поводу обоснования этой терминологии см. Хирцебрух [2] и Гринберг [1])[1]. Множество $H^1(H; G)$ контравариантным образом зависит от X и ковариантным образом от G.

3.6. Теорема. *Пусть $\Phi_n^k(X)$ — множество классов изоморфных k-векторных расслоений ранга n над топологическим пространством X. Тогда $\Phi_n^k(X)$ естественно изоморфно множеству $H^1(X; G)$, где $G = \mathrm{GL}_n(k)$.*

Доказательство. Определим два отображения

$$h: \Phi_n^k(X) \to H^1(X; G) \quad \text{и} \quad h': H^1(X; G) \to \Phi_n^k(X),$$

таких что $h' = h^{-1}$.

Пусть $\xi = (E, \pi, X)$ — векторное расслоение и (U_i) — тривиализующее покрытие пространства X. Выберем изоморфизмы $\varphi_i: U_i \times k^n \to E_{U_i}$ и зададим отображения g_{ji} из $U_i \cap U_j$ в $G = \mathrm{GL}_n(k)$, полагая $g_{ji}(x) = (\varphi_j)_x^{-1} \cdot (\varphi_i)_x$. Таким образом мы получаем на X некоторый

---

[1] Предостерегаем читателя от путаницы. Через $H^1(X; G)$ обычно обозначают одномерные когомологии с коэффициентами в группе G, что соответствует локально-постоянным G-коциклам. Здесь же G-коциклы не обязаны быть локально-постоянными, т. е. через $H^1(X; G)$ в данном контексте обозначены одномерные когомологии алгебраического пучка ростков непрерывных отображений пространства X в группу G (см., например, Годеман Р. Алгебраическая топология и теория пучков.— М.: Мир, 1965). — *Прим. ред.*

G-коцикл. Его класс в множестве $H^1(X; G)$ не зависит от выбора тривиализующего покрытия и изоморфизмов φ_i. В самом деле, если (V_r, h_{sr}) — другой коцикл, ассоциированный с тривиализациями ψ_r: $V_r \times k^n \to E_{V_r}$, то положим $g_i^r(x) = (\psi_r)_x^{-1} \cdot (\varphi_i)_x$. Тогда для $x \in U_i \cap U_j \cap V_r \cap V_s$ мы имеем

$$g_j^s(x) \cdot g_{ji}(x) \cdot (g_r^r(x))^{-1} = (\psi_s)_x^{-1} \cdot (\varphi_j)_x \cdot (\varphi_j)_x^{-1} \cdot (\varphi_i)_x \cdot (\varphi_i)_x^{-1} \cdot (\psi_r)_x = (\psi_s)_x^{-1} \cdot (\psi_r)_x = h_{sr}(x).$$

Это показывает, что отображение h корректно определено.

Обратно, пусть (U_i, g_{ji}) — некоторый G-коцикл. Рассмотрим на X векторное расслоение E, полученное склеиванием тривиальных расслоений $E_i = U_i \times k^n$ с помощью *функций перехода* g_{ji} (теорема 3.2). Тогда класс изоморфизма расслоения E в $\Phi_n^k(X)$ зависит только от класса эквивалентности данного коцикла в $H^1(X; G)$. Действительно, рассмотрим коцикл (V_r, h_{sr}), эквивалентный (U_i, g_{ji}), и пусть F — векторное расслоение, полученное из этого коцикла склеиванием тривиальных расслоенний $F_r = V_r \times k^n$. Пусть α: $E \to E'$ — единственный морфизм, который для каждой пары индексов (i, r) превращает следующую диаграмму в коммутативную:

$$\begin{array}{ccc} E_i|_{U_i \cap V_r} & \xrightarrow{\hat{g}_i^r} & F_r|_{U_i \cap V_r} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle g_i|_{U_i \cap V_r}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle h_r|_{U_i \cap V_r}} \\ E|_{U_i \cap V_r} & \xrightarrow{\alpha|_{U_i \cap V_r}} & F|_{U_i \cap V_r} \end{array}$$

(в этой диаграмме морфизмы g_i и h_r получаются скленванием при помощи теоремы 3.2). Для того чтобы показать, что морфизм α корректно определен, отметим следующие тождества, справедливые для $x \in U_i \cap U_j \cap V_r \cap V_s$:

$$h_{sr}(x) = g_j^s(x) \cdot g_{ji}(x) \cdot (g_i^r(x))^{-1},$$
$$h_{sr}(x) \cdot g_i^r(x) \cdot g_{ij}(x) = g_j^s(x),$$
$$(h_s(x))^{-1} \cdot h^r(x) \cdot g_i^r(x) \cdot (g_i(x))^{-1} \cdot g_j(x) = g_j^s(x)$$

и, наконец,

$$h_r(x) \cdot g_i^r(x) \cdot (g_i(x))^{-1} = h_s(x) \cdot g_j^s(x) \cdot (g_j(x))^{-1}.$$

Отсюда следует, что отображение h' также корректно определено. Тот факт, что композиции $h \cdot h'$ и $h' \cdot h$ являются тождественными преобразованиями множеств $H^1(X; G)$ и $\Phi_n^k(X)$, непосредственно следует из определения этих множеств. □

3.7. Замечание. Если пространство X паракомпактно, то, используя локально-конечные покрытия замкнутыми множествами, мы можем получить множество $H_f^1(X; G)$, аналогичное множеству $H^1(X; G)$. В случае $G = \mathrm{GL}_n(k)$ приведенные выше рассуждения показывают, что $H_f^1(X; G)$ естественно изоморфно множеству $\Phi_n^k(X)$.

3.8. Теорема. *Пусть (U_i, g_{ji}) и (U_i, h_{ji}) — два коцикла относительно одного и того же открытого покрытия пространства X (соотв. относительно локально-конечного замкнутого покрытия паракомпактного пространства X). Связанные с этими коциклами векторные расслоения E и F изоморфны тогда и только тогда, когда существуют такие непрерывные функции λ_i: $U_i \to G = \mathrm{GL}_n(k)$, что $h_{ji}(x) = \lambda_j(x) \cdot g_{ji}(x) \cdot (\lambda_i(x))^{-1}$ для $x \in U_i \cap U_j$. В частности, векторное расслоение E тривиально тогда и только тогда, когда $g_{ji}(x) = \lambda_j(x)^{-1} \cdot \lambda_i(x)$ при подходящем выборе функций λ_j.*

Доказательство. Пусть α: $E \to F$ — изоморфизм. Тогда мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
E|_{U_i\cap U_j} \arrow[rr, "\alpha|_{U_i\cap U_j}"] \arrow[dr, "g_j|_{U_i\cap U_j}"] \arrow[dd, "g_i|_{U_i\cap U_j}"'] & & F|_{U_i\cap U_j} \arrow[dr, "h_j|_{U_i\cap U_j}"] \arrow[dd, "h_i|_{U_i\cap U_j}"] & \\
& E_j|_{U_i\cap U_j} \arrow[rr, "\hat\lambda_i|_{U_i\cap U_j}"] & & F_j|_{U_i\cap U_j} \\
E_i|_{U_i\cap U_j} \arrow[ur, "\hat g_{ji}"] \arrow[rr, "\hat\lambda_i|_{U_i\cap U_j}"] & & F_i|_{U_i\cap U_j} \arrow[ur, "\hat h_{ji}"'] &
\end{tikzcd}$$

в которой $E_i = F_i = U_i \times k^n$ и $\hat\lambda_i = h_i \cdot \alpha|_{U_i} (g_i)^{-1}$ (в обозначениях п. 1.12). Из этой теоремы мы получаем соотношения $h_{ji}(x) = \lambda_j(x) \cdot g_{ji}(x) \cdot (\lambda_i(x))^{-1}$. В частности, если взять $h_{ji} = 1$, то F изоморфно тривиальному расслоенню и мы получаем $g_{ji}(x) = \lambda_j(x)^{-1} \cdot \lambda_i(x)$, что и требовалось. $\square$

3.9. Применим теорему 3.8 к примеру 3.4 (используем обозначения этого примера). Пусть λ — автоморфизм расслоения $E_1 = S^n_+ \times k^p$, индуцирующий автоморфизм μ расслоення $E_1|_{S^{n-1}} = S^{n-1} \times k^p$. Тогда, как нетрудно показать, векторные расслоения E_f и $E_{f\hat\mu}$ изоморфны. Действительно, применяя предыдущую теорему и полагая $\lambda_1 = \check\lambda$ и $\lambda_2 = 1$, получаем ситуацию, изображенную на диаграмме

$$\begin{tikzcd}
E_1 \arrow[r, "\lambda^{-1}"] \arrow[d, dashed, leftrightarrow, "f"'] & E_1 \arrow[d, dashed, "f\mu"] \\
E_2 \arrow[r, "\mathrm{Id}"] & E_2
\end{tikzcd}$$

(штриховыми стрелками обозначены морфизмы, определенные только на S^{n-1}). Точно так же можно показать, что изоморфны расслоения E_f и $E_{\check\nu f}$, где ν — автоморфизм $E_2|_{S^{n-1}}$, который может быть продолжен до автоморфизма расслоения E_2.

Рассмотрим теперь два непрерывных гомотопных отображения f_0 и f_1 из S^{n-1} в $\mathrm{GL}_p(k)$. Пусть α: $S^{n-1} \to \mathrm{GL}_p(k)$ — отображение, заданное формулой $\alpha(x) = (f_1(x))^{-1} \cdot f_0(x)$. Тогда α гомотопно 1; более точно, существует такое непрерывное отображение β: $S^{n-1} \times I \to \mathrm{GL}_p(k)$, что $\beta(x, 0) = \alpha(x)$ и $\beta(x, 1) = 1$. Параметрнзуем верхнюю полусферу

$S^n_+ \subset S^n$, записывая каждый элемент $w \in S^n_+$ в виде $w = v\cos\theta + e_{n+1}\sin\theta$, где $v \in S^{n-1}$ (рис. 3). Используя β, определим отображение γ: $S^n_+ \to \mathrm{GL}_p(k)$ по формуле $\gamma(w) = \beta(v, \sin\theta)$. Это отображение определено и непрерывно даже при $\theta = \pi/2$, так как $\beta(x, t)$ стремится к 1 равномерно по x при $t \to 1$. Отсюда следует, что расслоение $E_{f_0} = E_{f_1\alpha}$ изоморфно расслоению E_{f_1} (этот факт может быть также получен из теоремы 7.1, которая будет доказана независимо от настоящих рассуждений).

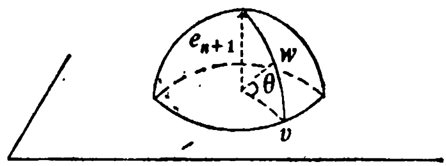


Рис. 3.

Ограничимся рассмотрением таких отображений f: $S^{n-1} \to \mathrm{GL}_p(k)$, что $f(e) = 1$, где $e = (1, 0, \ldots, 0)$ — отмеченная точка сферы S^{n-1}. Приведенные выше рассуждения показывают, что соответствие $f \longmapsto E_f$ определяет отображение из $\pi_{n-1}(\mathrm{GL}_p(k))$ в $\Phi^k_p(S^n)$ (относительно определения и элементарных свойств гомотопических групп см. Хилтон [1] или Ху [1]). С другой стороны, $\pi_0(\mathrm{GL}_p(k))$ действует на $\pi_{n-1}(\mathrm{GL}_p(k))$ при помощи отображения, определенного правилом $(a, f) \longmapsto a \cdot f \cdot a^{-1}$. Так как в силу теоремы 3.8 векторные расслоения E_f и $E_{a \cdot f \cdot a^{-1}}$ изоморфны, то соответствие $f \longmapsto E_f$ задает в действительности отображение фактормножества $\pi_{n-1}(\mathrm{GL}_p(k))/\pi_0(\mathrm{GL}_p(k))$ в множество $\Phi^k_p(S^n)$.

3.10. Теорема. *Описанное выше отображение*

$$\pi_{n-1}(\mathrm{GL}_p(k))/\pi_0(\mathrm{GL}_p(k)) \to \Phi^k_p(S^n)$$

инъективно.

Доказательство. Пусть f и g — непрерывные отображения из S^{n-1} в $\mathrm{GL}_p(k)$, причем $f(e) = g(e) = 1$ (где e — отмеченная точка сферы S^{n-1}) и векторные расслоения E_f и E_g изоморфны. Мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, dashed, "f"'] & E_1 \arrow[d, dashed, "g"] \\ E_2 \arrow[r, "\alpha_2"] & E_2 \end{tikzcd}$$

где штриховыми стрелками обозначены морфизмы, определенные только на S^{n-1}. Отображения $\beta_i = \alpha_i|_{S^{n-1}}$ суть отображения из S^{n-1} в $\mathrm{GL}_p(k)$, гомотопные отображениям в точку, причем $g(x) = \beta_2(x) \times f(x) \cdot \beta_1(x)^{-1}$. Далее, так как $f(e) = g(e) = 1$, то отображения β_1 и β_2 гомотопны *одному и тому же* постоянному отображению a (действительно, отображения β_1 и β_2 являются ограничениями отображений, определенных на стягиваемом множестве $S^n \setminus \{p\}$, где $p \notin S^{n-1}$). Следовательно, отображения g и $a \cdot f \cdot a^{-1}$ гомотопны. Пусть h: $S^{n-1} \times I \to \mathrm{GL}_p(k)$ — связывающая их гомотопия. Тогда гомотопия

l: $S^{n-1}\times I \to \mathrm{GL}_p(k)$, определенная формулой $l(x, t)=h(x, t)\cdot h(e, t)^{-1}$, показывает, что отображения g и $a\cdot f\cdot a^{-1}$ принадлежат одному и тому же классу в гомотопической группе $\pi_{n-1}(\mathrm{GL}_p(k))$ (ибо $l(e, t)=e$). □

3.11. Замечание. Ниже (7.6) мы покажем, что это отображение также и сюръективно.

3.12. Замечание. Тем же самым методом можно доказать, что вообще $H^1(S^n; G)\approx\pi_{n-1}(G)/\pi_0(G)$ для любой топологической группы G (Стинрод [1]).

****3.13.*** Сделаем некоторые пояснения к теореме 3.10. Если $k=\mathbb{C}$, то группу $\mathrm{GL}_p(k)=\mathrm{GL}_p(\mathbb{C})$ можно рассматривать как топологическое произведение $\mathrm{U}(p)$ и $\mathbb{R}^q$, где $q=p^2$ (см. Шевалле [1]). Так как группа $\mathrm{U}(p)$ линейно-связна, то $\pi_0(\mathrm{U}(p))=\pi_0(\mathrm{GL}_p(\mathbb{C}))=0$. Следовательно, $\Phi_p^{\mathbb{C}}(S^n)\approx\pi_{n-1}(\mathrm{U}(p))$. Существует локально-тривиальное расслоение

$$\mathrm{U}(p)\to\mathrm{U}(p+1)\to S^{2p+1}.$$

и поэтому можно записать точную последовательность гомотопических групп

$$\pi_{i+1}(S^{2p+1})\to\pi_i(\mathrm{U}(p))\to\pi_i(\mathrm{U}(p+1))\to\pi_i(S^{2p+1}).$$

Так как $\pi_j(S^r)=0$ для $j>r$, то для $p>i/2$ мы имеем $\pi_i(\mathrm{U}(p))\approx\pi_i(\mathrm{U}(p+1))$ и $\pi_i(\mathrm{U}(p))\approx\operatorname{inj\,lim}\pi_i(\mathrm{U}(m))$. Позже мы докажем (§ III.2), что $\operatorname{inj\,lim}\pi_i(\mathrm{U}(m))=0$ для четных i и $\operatorname{inj\,lim}\pi_i(\mathrm{U}(m))=\mathbb{Z}$ для нечетных i. Из этой теоремы вытекает, что проблема классификации комплексных векторных расслоений ранга p над сферой S^r полностью решена для $p>(r-1)/2$. Для $p\leqslant(r-1)/2$ эта проблема в общем случае остается открытой.

Если $k=\mathbb{R}$, то группу $\mathrm{GL}_p(k)=\mathrm{GL}_p(\mathbb{R})$ можно рассматривать как топологическое произведение $\mathrm{O}(p)\times\mathbb{R}^q$, где $q=p(p+1)/2$ (см. Шевалле [1]). Следовательно, $\pi_i(\mathrm{GL}_p(\mathbb{R}))\approx\pi_i(\mathrm{O}(p))$ и $\pi_0(\mathrm{GL}_p(\mathbb{R}))\approx\mathbb{Z}/2$. Точная гомотопическая последовательность, ассоциированная с локально-тривиальным расслоением

$$\mathrm{O}(p)\to\mathrm{O}(p+1)\to S^p,$$

т. е. последовательность

$$\pi_{i+1}(S^p)\to\pi_i(\mathrm{O}(p))\to\pi_i(\mathrm{O}(p+1))\to\pi_i(S^p),$$

показывает, что $\pi_i(\mathrm{O}(p))\approx\pi_i(\mathrm{O}(p+1))$ и что $\pi_i(\mathrm{O}(p))\approx\operatorname{inj\,lim}\pi_i(\mathrm{O}(m))$, где $p>i+1$. Ниже (§ III.5) мы докажем, что группы $\pi_i=\operatorname{inj\,lim}\pi_i(\mathrm{O}(m))$ изоморфны $\mathbb{Z}/2$, $\mathbb{Z}/2$, 0, $\mathbb{Z}$, 0, 0, 0, $\mathbb{Z}$ соответственно для $i=0$, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 mod 8. Таким образом, в случае $p>i+1$ гомотопические группы $\pi_i(\mathrm{O}(p))\approx\pi_i(\mathrm{GL}_p(\mathbb{R}))$ полностью известны. Далее, в этом случае действие $\pi_0(\mathrm{GL}_p(\mathbb{R}))=\mathbb{Z}/2$ тривиально. Это очевидно для нечетных p, так как тогда $\det(-1)=-1$. Для четных p изоморфизм между $\pi_i(\mathrm{O}(p))$ и $\pi_i(\mathrm{O}(p+1))$ согласован с действием.

Следовательно, $\pi_i(\mathrm{O}(p))/(\mathbb{Z}/2) \approx \pi_i(\mathrm{O}(p+1))/(\mathbb{Z}/2) \approx \pi_i(\mathrm{O}(p+1)) \approx \pi_i(\mathrm{O}(p))$. На основании вышеизложенного мы заключаем, что проблема классификации вещественных векторных расслоений ранга p над S^n полностью решена для $p > n$. Так же как и в комплексиой ситуации, случай $p \leqslant n$ остается открытым. *

3.14. Конструкция, использованная для описания векторных расслоений над сферой, может быть обобщена следующим образом. Пусть X — произвольное паракомпактное пространство. Рассмотрим *двойной конус* над X; он определяется как факторпространство произведения $X \times [-1, 1]$ по отношению эквивалентности, которое отождествляет все точки $X \times \{1\}$ в одну точку и все точки $X \times \{-1\}$ — в некоторую другую точку (рис. 4). Обозначим через $C^+(X)$ (соотв. $C^-(X)$) образ подпространства $X \times [0, 1]$ (соотв. $X \times [-1, 0]$) в полученном факторпространстве и положим $S'(X) = C^+(X) \cup C^-(X)$. Пространство $S'(X)$ (паракомпактное для паракомпактного X) называется *надстройкой* над X. Рассуждения, использованные при параметризации S^n_+ в 3.9, показывают, что $S'(S^{n-1})$ гомеоморфно S^n.

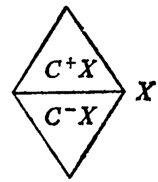


Рис. 4.

Пусть $f\colon X \to \mathrm{GL}_p(k)$ — непрерывное отображение. Тогда, склеивая тривиальные расслоения $E_1 = C^+(X) \times k^p$ и $E_2 = C^-(X) \times k^p$ с помощью функции перехода $g_{21} = \hat{f}$, мы получаем расслоение E_f над пространством $S'(X)$. Так же как и в 3.9, можно доказать, что если отображение f_0 гомотопно отображению f_1, то расслоения E_{f_0} и E_{f_1} изоморфны. Выберем в пространстве X некоторую отмеченную точку e и обозначим через $[X, \mathrm{GL}_p(k)]'$ множество гомотопических классов таких отображений f, для которых $f(e) = 1$. Тогда аналогично теореме 3.10 можно показать, что $\Phi^k_p(S'(X))$ содержит фактормножество $[X, \mathrm{GL}_p(k)]'$ по действию группы $\pi_0(\mathrm{GL}_p(k))$. Позже (7.6) мы усилим этот результат.

Используем теперь теоремы о склеивании для того, чтобы определить касательное расслоение к многообразию. Сперва мы вкратце напомним некоторые основные понятия и конструкции, относящиеся к многообразиям (см. Ленг [2]).

3.15. Пусть A — некоторое открытое множество в $\mathbb{R}^n$, и пусть $TA = A \times \mathbb{R}^n$ рассматривается как тривиальное расслоение над A. Если B — другое открытое множество в $\mathbb{R}^p$ и если $f\colon A \to B$ — дифференцируемое отображение класса C^m, $m \geqslant 1$, то мы можем связать с f общий морфизм векторных расслоений (в смысле п. 1.6)

$$\begin{tikzcd} TA \arrow[r, "Tf"] \arrow[d] & TB \arrow[d] \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

полагая $(Tf)_x(v)=f'(x)(v)$ (рис. 5). В этой формуле $f\colon A\to\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ — производная отображения f и v — вектор из $\mathbb{R}^n$. Если $g\colon B^l\to C$ — другое дифференцируемое отображение класса C^m, из множества B в открытое множество $C\subset\mathbb{R}^q$, то в силу формулы для производной от композиции двух дифференцируемых отображений имеем $T(g\cdot f)=T(g)\cdot T(f)$ (композиция общих морфизмов). Читатель может легко убедиться в том, что соответствие $A\mapsto TA$ является „функтором" из категории дифференцируемых отображений в категорию тривиальных расслоений.

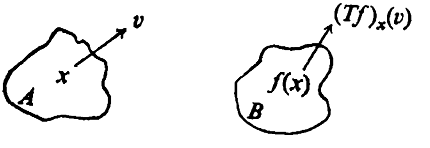


Рис. 5.

3.16. Определение многообразия класса C^m. Пусть M — топологическое пространство и (U_i), $i\in I$, — открытое покрытие M. Для каждого $i\in I$ пусть φ_i — гомеоморфизм U_i на некоторое множество A_i из $\mathbb{R}^{n_i}$. Положим $U_{ij}=U_i\cap U_j$ и $A_{ji}=\varphi_i(U_i\cap U_j)$ (рис. 6). Совокупность (U_i, A_i, φ_i) называется *атласом* класса C^m, $m\geqslant 1$, если отображения $\theta_{ji}=\varphi_j|_{U_{ij}}\cdot\varphi_i^{-1}|_{A_{ji}}\colon A_{ji}\to A_{ij}$ являются диффеоморфизмами класса C^m. Два атласа называются *эквивалентными*, если очевидным образом определяемое объединение этих атласов есть снова атлас. *Дифференцируемая структура* (или структура *дифференцируемого многообразия*) *класса* C^m на M задается классом эквивалентности атласов. Для того чтобы избежать логических трудностей (покрытия данного пространства не являются элементами какого-либо множества!), мы всегда будем предполагать, что множество индексов I содержится в некотором фиксированном множестве. В качестве такого множества можно взять, например, множество $\coprod\limits_{\substack{U\in S\\ n\in\mathbb{N}}} F(U, \mathbb{R}^n)$, где S — множество всех открытых подмножеств в M, а $F(U, \mathbb{R}^n)$ — множество всех непрерывных отображений из U в $\mathbb{R}^n$. Существует канонический способ связать дифференцируемую структуру (U_i, A_i, φ_i) на M с некоторым атласом (такой атлас называется *максимальным*). Он определяется как множество всех троек (V, B, φ), где V открыто в M, B открыто в некотором пространстве $\mathbb{R}^q$, а $\varphi\colon V\to B$ — гомеоморфизм, удовлетворяющий следующему условию. Для каждого индекса i положим $V_i=V\cap U_i$ и $B_i=\varphi(V_i)$; тогда отображение $\varphi_i|_{V_i}\cdot\varphi^{-1}|_{B_i}$ должно быть диффео-

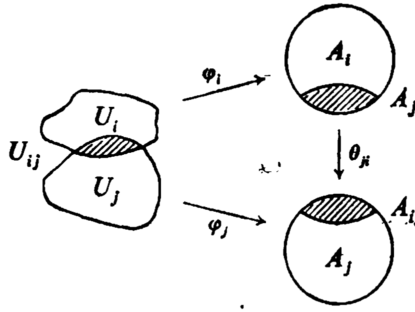


Рис. 6.

морфизмом класса C^∞ из B_i в $\varphi(B_i)$. Легко проверить, что два атласа эквивалентны тогда и только тогда, когда совпадают ассоциированные с ними максимальные атласы. *Карта* на дифференцируемом многообразии M — это просто элемент φ: $V \rightarrow B$ максимального атласа.

3.17. Примеры. Пусть F: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — такая дифференцируемая функция, что частные производные $\partial F/\partial x_1, \ldots, \partial F/\partial x_n$ не обращаются одновременно в нуль. Тогда множество $M = F^{-1}(0)$ является дифференцируемым многообразием (в каждой точке $x \in M$ рассматриваем ортогональную проекцию окрестности точки x на гиперплоскость, определяемую равенством $\sum\limits_{i=1}^{n} (\partial F/\partial x_i)(x) \cdot (X - x_i) = 0$). Проективные пространства $P_n(\mathbb{C})$ и $P_n(\mathbb{R})$ также представляют собой классические примеры дифференцируемых многообразий (Годбийон [2], Спивак [1]).

3.18. Касательное расслоение дифференцируемого многообразия. Пусть $\mathcal{A} = (U_i, A_i, \varphi_i)$ — атлас на многообразии M. Мы хотим определить расслоение TM на M, склеивая тривиальные расслоения $TU_i = U_i \times \mathbb{R}^{n_i}$ над элементами покрытия (U_i). Пусть $\bar{\varphi}_i$: $U_i \times \mathbb{R}^{n_i} \to A_i \times \mathbb{R}^{n_i}$ — изоморфизм из TU_i в TA_i, задаваемый формулой $\bar{\varphi}_i(x, v) = (\varphi_i(x), v)$, и пусть g_{ji}: $TU_i|_{U_i \cap U_j} \to TU_j|_{U_i \cap U_j}$ — изоморфизм, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
TU_i|_{U_i \cap U_j} \arrow[r, "\bar{\varphi}_i|_{U_i \cap U_j}"] \arrow[d, "g_{ji}"] & TA_i|_{A_{ji}} \arrow[d, "T(\theta_{ji})"] \\
TU_j|_{U_i \cap U_j} \arrow[r, "\bar{\varphi}_j|_{U_i \cap U_j}"] & TA_j|_{A_{ij}}
\end{tikzcd}$$

Так как $\theta_{ki}(x) = \theta_{kj}(\theta_{ji}(x))$ для $x \in \varphi_i(U_i \cap U_j \cap U_k)$, то, согласно 3.15, на подпространстве $\varphi_i(U_i \cap U_j \cap U_k)$ выполняется равенство $T(\theta_{ki}) = T(\theta_{kj}) \cdot T(\theta_{ji})$. Следовательно, на $U_i \cap U_j \cap U_k$ мы имеем $g_{ki} = g_{kj} \cdot g_{ji}$. Определим расслоение TM как расслоение, задаваемое функциями перехода g_{ji}. Покажем, что это определение не зависит (с точностью до изоморфизма) от выбора атласа $\mathcal{A}$. Если $\mathcal{B} = (V_r, B_r, \psi_r)$ — эквивалентный атлас, то мы получаем на $V_r \cap V_s$ (соотв. на $U_i \cap V_r$) такие функции перехода h_{sr} (соотв. g_i^r), что $g_j^s \cdot g_{ji} = h_{sr} \cdot g_i^r$ или, эквивалентно, $h_{sr} = g_j^s \cdot g_{ji} \cdot (g_i^r)^{-1}$ на $U_i \cap U_j \cap V_r \cap V_s$. Наше утверждение следует теперь из определения $H^1(M; G)$, примененного к каждой связной компоненте многообразия M, и из теоремы 3.6. Мы назовем TM *касательным расслоением* дифференцируемого многообразия M.

3.19. Функтор T. Для того чтобы сделать приведенную выше конструкцию функториальной, раз и навсегда выберем атлас для каждого многообразия M (например, максимальный атлас). Пусть теперь M и N — два дифференцируемых многообразия класса C^m, (U_i, A_i, φ_i) — атлас M и (V_r, B_r, ψ_r) — атлас N. Пусть $f\colon M \to N$ — непрерывное отображение. Отображение f называется *дифференцируемым класса* C^α, $1 \leqslant \alpha \leqslant p$, если для любых $i \in I$ и $x \in U_i$ и для $f(x) \in V_r$ отображение $f_i^r = \psi_r \cdot f \cdot \varphi_i^{-1}$ является дифференцируемым класса C^α в некоторой окрестности точки $\varphi_i(x)$, достаточно малой для того, чтобы имела смысл композиция $\psi_r \cdot f \cdot \varphi_i^{-1}$. Мы хотим определить общий морфизм $Tf\colon TM \to TN$ над $f\colon M \to N$, обобщив понятие общего морфизма, определенного в 3.15 для открытых множеств эвклидова пространства. На TU_i в окрестности произвольной точки $x \in U_i$ задаем Tf так, чтобы была коммутативной диаграмма

$$\begin{array}{ccc} TU_i & \xrightarrow{\varphi_i} & TA_i \\ {\scriptstyle Tf}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T(f_i^r)} \\ TV_r & \xrightarrow{\psi_r} & TB_r \end{array}$$

где морфизм $T(f_i^r)$ определен так же, как 3.15. Мы должны показать, что это определение согласовано с функциями перехода g_{ji} и h_{sr}, заданными на M и N соответственно. Имеют место тождества $f_j^s = (\psi_s \cdot \psi_r^{-1}) \cdot (\psi_r \cdot f \cdot \varphi_i^{-1}) \cdot (\varphi_i \cdot \varphi_j^{-1}) = \theta_{sr}^N \cdot f_i^r \cdot \theta_{ij}^M$, где $\theta_{sr}^N\colon B_{sr} \xrightarrow{\approx} B_{rs}$ и $\theta_{ij}^M\colon A_{ij} \xrightarrow{\approx} A_{ji}$ (все морфизмы определены в подходящих окрестностях). Из этих тождеств вытекает, что $T(f_j^s) = T(\theta_{sr}^N) \cdot T(f_i^r) \cdot T(\theta_{ij}^M)$. Так как $T(\theta_{sr}^N) = g_{sr}^N$ и $T(\theta_{ij}^M) = g_{ij}^M$ (где g_{ij}^M и g_{sr}^N — функции перехода расслоений TM и TN соответственно), то из последнего тождества следует коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} TA_i & \xrightarrow{g_{ji}^N} & TA_j \\ {\scriptstyle T(f_i^r)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T(f_j^s)} \\ TB_r & \xrightarrow{g_{sr}^N} & TB_s \end{array}$$

Согласно теореме 3.1, это означает, что морфизм Tf корректно определен. Далее, если $g\colon N \to P$ — другое дифференцируемое отображение, то нетрудно проверить, что $T(g \cdot f) = T(g) \cdot T(f)$.

3.20. Пример. Пусть $f\colon M \to \mathbb{R}^p$ — вложение (Ленг [2]). Тогда *локально*, в окрестности каждой точки $a \in M$, многообразие M задается системой уравнений

$$\begin{aligned} &f_1(x_1, \ldots, x_p) = 0, \\ &f_2(x_1, \ldots, x_p) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &f_n(x_1, \ldots, x_p) = 0, \qquad n < p, \end{aligned}$$

причем матрица

$$\begin{pmatrix} \partial f_1/\partial x_1 & & \partial f_n/\partial x_1 \\ \cdot\ \cdot & & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \partial f_1/\partial x_p & & \partial f_n/\partial x_p \end{pmatrix}$$

имеет ранг n в окрестности точки $a=(a_1, \ldots, a_p)$. Пространство $T_a(M)$ является подпространством в $T_a(\mathbb{R}^p)$ размерности $n-p$, ортогональным к *вектор-градиентам* $V_1, \ldots, V_n$, где $V_i=(\partial f_i/\partial x_1(a), \ldots, \partial f_i/\partial x_p(a))$.

Упражнения: 7, 8, 28.

4. Операции над векторными расслоениями

Как правило, в этой книге через $\mathscr{E}$ обозначается категория конечномерных векторных пространств и через $\mathscr{E}(X)$ — категория векторных расслоений над пространством X. Если нужно указать основное поле k ($=\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), то мы пишем $\mathscr{E}_k$ или $\mathscr{E}_k(X)$.

4.1. Определение. Функтор $\varphi\colon \mathscr{E}\to\mathscr{E}$ называется *непрерывным*, если для каждой пары (M, N) объектов из $\mathscr{E}$ естественное отображение $\varphi_{M,N}\colon \mathscr{E}(M, N)\to\mathscr{E}(\varphi(M), \varphi(N))$ непрерывно (относительно обычной топологии на конечномерных векторных пространствах).

4.2. Примеры. Существует много хорошо известных примеров таких функторов: a) $\varphi(M)=M\oplus\ldots\oplus M$ (i раз), b) $\varphi(M)=M\otimes\ldots\otimes M$ (i раз), c) $\varphi(M)=\lambda^i(M)$ (i-я внешняя степень), d) $\varphi(M)=S^i(M)$ (i-я симметрическая степень). Для того чтобы усмотреть непрерывность этих функторов, выберем в пространствах M и N базисы и заметим, что $\varphi_{M,N}(\alpha)$ задается матрицей, которая непрерывно зависит от матрицы морфизма α. Примером функтора, который *не* является непрерывным, может служить функтор $\mathscr{E}_\mathbb{C}\to\mathscr{E}_\mathbb{C}$, индуцированный разрывным автоморфизмом поля комплексных чисел $\mathbb{C}$.

4.3. Главная цель настоящего параграфа заключается в том, чтобы связать с каждым таким функтором φ функтор $\varphi'=\varphi(X)\colon \mathscr{E}(X)\to\mathscr{E}(X)$, который совпадает с φ в случае, когда X — одноточечное пространство. Пусть $\xi=(E, \pi, X)$ — векторное расслоение над X. Определим вначале *множество* $E'=\varphi'(E)$ как несвязное объединение $\coprod_{x\in X}\varphi(E_x)$ и рассмотрим очевидную проекцию $\pi'\colon \varphi'(E)\to X$. Для того чтобы снабдить множество $\varphi'(E)$ топологией, в которой оно будет векторным расслоением, нам понадобится следующая лемма.

4.4. Лемма. *Пусть U и V — открытые подмножества пространства X и $\beta\colon E_U\to U\times M$, $\gamma\colon E_V\to V\times N$ — тривиализации E соответственно над U и V. Пусть $\beta'\colon E'_U\to U\times\varphi(M)$ и $\gamma'\colon E'_V\to V\times\varphi(N)$ — биекции, индуцированные по функториальности отображениями слоев. Если снабдить множества E'_U и E'_V топологиями, индуцированными этими биекциями, то полученные топологии совпадают на $E'_U\cap E'_V=E'_{U\cap V}$ и $E'_{U\cap V}$ открыто в E'_U и в E'_V.*

Доказательство. Мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} E'_{U\cap V} \arrow[r, "\beta'|_{U\cap V}"] \arrow[d, equal] & (U\cap V)\times\varphi(M) \arrow[d, "\delta"] \\ E'_{U\cap V} \arrow[r, "\gamma'|_{U\cap V}"] & (U\cap V)\times\varphi(N) \end{tikzcd}$$

в которой δ — композиция непрерывных отображений

$$U\cap V \xrightarrow{\hat{s}} \mathscr{E}(M,\ N) \xrightarrow{\varphi_{M,N}} \mathscr{E}(\varphi(M),\ \varphi(N)),$$

причем $\hat{s}=\gamma|_{U\cap V}\cdot\beta^{-1}|_{U\cap V}$. Поскольку отображение δ непрерывно, то $\hat{\delta}$ тоже непрерывно (1.12). Точно также отображение δ^{-1} непрерывно, и это показывает, что указанные две топологии на $E'_{U\cap V}$ совпадают. Далее, проекция π'_U: $E'_U \to U$ непрерывна относительно топологии, индуцированной β'. Следовательно, $E'_{U\cap V}=\pi'^{-1}_U(U\cap V)$ открыто в E'_U. Аналогично $E'_{U\cap V}$ открыто в E'_V. $\square$

4.5. Мы теперь в состоянии определить топологию на $E'=\varphi'(E)$. Пусть (U_i) — открытое покрытие X и β_i: $E_{U_i}\to U_i\times M_i$ для каждого i — тривиализация расслоения E над U_i. По функториальности изоморфизмы β_i индуцируют биекции $E'_{U_i}\to U_i\times\varphi(M_i)$; этим путем множества E'_{U_i} наделяются топологией. Снабдим теперь множество E' слабейшей из топологий, в которой все вложения $E'_U\to E'$ непрерывны. Это возможно, так как, согласно предыдущей лемме, для каждой пары $(i,\ j)$ топологии на E'_{U_i} и E'_{U_j} совпадают на $E'_{U_i\cap U_j}$, превращая $E'_{U_i\cap U_j}$ в открытое подмножество в E'_{U_i} и в E'_{U_j}.

Эта топология не зависит ни от выбора покрытия, ни от выбора тривиализаций Действительно, если (V_r) — другое покрытие и ψ_r: $E_{V_r}\to V_r\times N_r$ — другие тривиализации, то те же самые рассуждения, что и выше, показывают, что две возможные топологии на $E'_{U_i\cap V_r}$ совпадают и $E'_{U_i\cap V_r}$ открыто как в E'_{U_i}, так и в E'_{V_r}. Следовательно, две топологии на E' совпадают. Наконец, расслоение E' локально-тривиально, поскольку для каждого i расслоение E'_{U_i} $\approx U_i\times\varphi(M_i)$ тривиально

4.6. Для того чтобы завершить определение функтора φ', мы должны определить морфизм $f'=\varphi'(f)$: $\varphi'(E)\to\varphi'(F)$ для заданного морфизма векторных расслоений f: $E\to F$. Определим f', полагая просто на каждом слое $f'_x=\varphi(f_x)$: $\varphi(E_x)\to\varphi(F_x)$ (отображения f'_x линейны). Для доказательства непрерывности f' рассмотрим коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccc} E_U & \xrightarrow[\approx]{\beta} & U\times M \\ {\scriptstyle f|_U}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ F_U & \xrightarrow[\approx]{\delta} & U\times N \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} E'_U & \xrightarrow{\beta'} & U\times \varphi(M) \\ {\scriptstyle f'|_U}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g'} \\ F'_U & \xrightarrow{\delta'} & U\times \varphi(N) \end{array}$$

где отображения β', δ' и g' снова индуцированы послойно из отображений β, δ и g. Отображение $\check{g}'$, индуцированное из g', является композицией непрерывных отображений

$$U \xrightarrow{\check{g}} \mathscr{E}(M,\ N) \to \mathscr{E}(\varphi(M),\ \varphi(N)).$$

В силу теоремы 1.12 отображение $\check{g}'$ непрерывно, следовательно f' также непрерывно.

4.7. Обобщение. Пусть $\mathscr{C}$ — категория

$$\underbrace{\mathring{\mathscr{E}}_{\mathrm{R}}\times\ldots\times\mathring{\mathscr{E}}_{\mathrm{R}}}_{p_1}\times\underbrace{\mathring{\mathscr{E}}_{\mathrm{C}}\times\ldots\times\mathring{\mathscr{E}}_{\mathrm{C}}}_{p_2}\times\underbrace{\mathscr{E}_{\mathrm{R}}\times\ldots\times\mathscr{E}_{\mathrm{R}}}_{q_1}\times\underbrace{\mathscr{E}_{\mathrm{C}}\times\ldots\times\mathscr{E}_{\mathrm{C}}}_{q_2},$$

а $\mathscr{C}$ — категория

$$\underbrace{\mathring{\mathscr{E}}_{\mathrm{R}}\times\ldots\times\mathring{\mathscr{E}}_{\mathrm{R}}}_{p'_1}\times\underbrace{\mathring{\mathscr{E}}_{\mathrm{C}}\times\ldots\times\mathring{\mathscr{E}}_{\mathrm{C}}}_{p'_2}\times\underbrace{\mathscr{E}_{\mathrm{R}}\times\ldots\times\mathscr{E}_{\mathrm{R}}}_{q'_1}\times\underbrace{\mathscr{E}_{\mathrm{C}}\times\ldots\times\mathscr{E}_{\mathrm{C}}}_{q'_2},$$

где знак $^\circ$ обозначает переход к противоположной категории (категории с теми же объектами и обращенными стрелками). Функтор $\varphi\colon \mathscr{C}\to\mathscr{C}'$ называется *непрерывным*, если для каждой пары $(R,\ S)$ объектов из $\mathscr{C}$ отображение $\mathscr{C}(R,\ S)\to\mathscr{C}'(\varphi(R),\ \varphi(S))$ непрерывно. Методом, аналогичным использованному выше, можно определить функтор $\varphi'=\varphi(X)\colon \mathscr{C}(X)\to\mathscr{C}'(X)$, где

$$\mathscr{C}(X)=\underbrace{\mathscr{E}^0_{\mathrm{R}}(X)\times\ldots\times\mathscr{E}^0_{\mathrm{R}}(X)}_{p_1}\times\underbrace{\mathscr{E}^0_{\mathrm{C}}(X)\times\ldots\times\mathscr{E}^0_{\mathrm{C}}(X)}_{p_2}$$
$$\times\underbrace{\mathscr{E}_{\mathrm{R}}(X)\times\ldots\times\mathscr{E}_{\mathrm{R}}(X)}_{q_1}\times\underbrace{\mathscr{E}_{\mathrm{C}}(X)\times\ldots\times\mathscr{E}_{\mathrm{C}}(X)}_{q_2},$$

$$\mathscr{C}'(X)=\underbrace{\mathscr{E}^0_{\mathrm{R}}(X)\times\ldots\times\mathscr{E}^0_{\mathrm{R}}(X)}_{p'_1}\times\underbrace{\mathscr{E}^0_{\mathrm{C}}(X)\times\ldots\times\mathscr{E}^0_{\mathrm{C}}(X)}_{p'_2}$$
$$\times\underbrace{\mathscr{E}_{\mathrm{R}}(X)\times\ldots\times\mathscr{E}_{\mathrm{R}}(X)}_{q'_1}\times\underbrace{\mathscr{E}_{\mathrm{C}}(X)\times\ldots\times\mathscr{E}_{\mathrm{C}}(X)}_{q'_2}.$$

Если композиция $\varphi_2\cdot\varphi_1$ определена, то мы имеем $(\varphi_2\cdot\varphi_1)(X)\approx\varphi_2(X)\times\varphi_1(X)$. Наконец, если φ_1 и φ_2 — изоморфные функторы, то функторы $\varphi_1(X)$ и $\varphi_2(X)$ также изоморфны.

4.8. Примеры. a) Функтор φ: $\mathscr{E}\times\mathscr{E}\to\mathscr{E}$, задаваемый формулой $\varphi(M, N)=M\oplus N$, индуцирует функтор $\varphi(X)$: $\mathscr{E}(X)\times\mathscr{E}(X)\to\mathscr{E}(X)$. Если E и F — векторные расслоения на X, то расслоение $\varphi(X)(E, F)$ обозначается через $E\oplus F$ и называется *суммой Уитни* расслоений E и F. Легко видеть, что $E\oplus F$ изоморфно расслоенному произведению $E\times_X F$. Кроме того, из классических тождеств для векторных пространств следуют канонические изоморфизмы $(E\oplus F)\oplus G \approx E\oplus(F\oplus G)$ и $E\oplus F\approx F\oplus E$.

b) Пусть φ: $\mathscr{E}_k\times\mathscr{E}_k\to\mathscr{E}_k$ — функтор, задаваемый формулой $\varphi(M, N)=M\otimes_k N$. Тогда $\varphi(X)(E, F)=E\otimes F$ называется *тензорным произведением* E и F. Снова мы имеем канонические изоморфизмы $(E\otimes F)\otimes G\approx E\otimes(F\otimes G)$ и $E\otimes F\approx F\otimes E$.

c) Если φ: $\mathscr{E}^\circ\times\mathscr{E}\to\mathscr{E}$ — функтор $(M, N)\mapsto\mathscr{E}(M, N)$, то объект $\varphi(X)(E, F)=\mathrm{HOM}(E, F)$ называется *векторным расслоением гомоморфизмов* из расслоения E в расслоение F (слой над точкой $x\in X$ есть $\mathscr{E}(E_x, E_x)=\mathrm{Hom}_{\mathscr{E}}(E_x, F_x)$).

d) Функтор двойственности $M\mapsto M^*$ из $\mathscr{E}_k^\circ$ в $\mathscr{E}_k$ индуцирует новый *функтор двойственности* $E\mapsto E^*$ из $\mathscr{E}_k^\circ(X)$ в $\mathscr{E}_k(X)$. Разумеется, мы имеем тождество $\mathrm{HOM}(E, F)\approx E^*\otimes_k F$.

e) Имеется также *функтор сопряжения* t: $\mathscr{E}_{\mathbf{C}}(X)\mapsto\mathscr{E}_{\mathbf{C}}(X)$, индуцированный функтором $M\mapsto\overline{M}$, который сопоставляет каждому комплексному векторному пространству его сопряженное[1]. Пусть c: $\mathscr{E}_{\mathbf{R}}(X)\to\mathscr{E}_{\mathbf{C}}(X)$ — *функтор комплексификации*, индуцированный функтором $\mathscr{E}_{\mathbf{R}}\to\mathscr{E}_{\mathbf{C}}$, $M\mapsto M\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}$. Пусть, далее, r: $\mathscr{E}_{\mathbf{C}}(X)\to\mathscr{E}_{\mathbf{R}}(X)$ — *функтор овеществления*, индуцированный функтором $\mathscr{E}_{\mathbf{C}}\to\mathscr{E}_{\mathbf{R}}$, который сопоставляет каждому комплексному векторному пространству его овеществление. Тогда $(rc)(E)$ естественно изоморфно $E\oplus E$ и $(cr)(E)$ естественно изоморфно $E\oplus\overline{E}$.

f) Примеры c) и d) из 4.2 дают нам возможность определить на категории векторных расслоений операции λ^i и S^i. Эти операции очень важны в приложениях K-теории, описываемых в последней главе этой книги.

4.9. Пусть E и F — векторные расслоения с базами X и Y соответственно. Определим *внешнюю сумму Уитни* расслоений E и F как векторное расслоение $E\boxplus F$ на $X\times Y$, где $E\boxplus F=\pi_1^*(E)\oplus\pi_2^*(F)$, π_1: $X\times Y\to X$, π_2: $X\times Y\to Y$. Очевидно, что $E\boxplus F=E\times F$ и $(E\boxplus F)_{(x, y)}=E_x\oplus F_y$. Аналогично *внешним тензорным произведе-*

---

[1] *Сопряженным пространством* $\overline{M}$ называется комплексное векторное пространство, которое как множество совпадает с M, но операция умножения на комплексное число λ в котором задается соответствием $(x, \lambda)\mapsto\bar{\lambda}x$. Если φ: $M_1\to M_2$ — морфизм (т. е. линейное отображение), то φ является морфизмом и сопряженных пространств. Но если в пространствах M_1 и M_2 фиксировать базисы и те же базисы задать в пространствах $\overline{M}_1$ и $\overline{M}_2$, то матрицы морфизмов φ: $M_1\to M_2$ и φ: $\overline{M}_1\to\overline{M}_2$ различны: вторая из них комплексно сопряжена к первой. — *Прим. ред.*

нием расслоений E и F называется векторное расслоение $E \boxplus F$ на $X \times Y$, где $E \boxplus F = \pi_1^*(E) \otimes \pi_2^*(F)$. Аналогично $(E \boxplus F)_{(x,y)} = F_x \otimes F_y$.
Упражнения: 9—12, 30.

5. Сечения векторных расслоений

5.1. Определение. Пусть $\xi = (E, \pi, X)$ — векторное расслоение. *Сечением* расслоения ξ называется такое отображение s: $X \to E$, что $\pi \cdot s = \mathrm{Id}_X$. Сечение s называется *непрерывным*, если s — непрерывное отображение (ниже мы часто будем говорить просто „сечение", вместо „непрерывное сечение", поскольку мы не рассматриваем в этой книге другие типы сечений).

5.2. Пример. Пусть s: $X \to E$ — отображение, сопоставляющее каждой точке x из X нулевой вектор векторного пространства E_x. Если β: $E_U \to U \times M$ — тривиализация расслоения E над открытым множеством U, то мы имеем $(\beta \cdot s)(x) = (x, 0)$, $x \in U$. Следовательно, s является непрерывным сечением E. Это сечение называется *нулевым сечением* векторного расслоения.

5.3. Пример. Предположим, что E есть тривиальное расслоение $X \times M$. Тогда всякое непрерывное сечение E можно представить в виде $x \mapsto (x, s_1(x))$, где s_1: $X \to M$ — непрерывное отображение. Обратно, любое такое непрерывное отображение индуцирует непрерывное сечение E. Таким образом, мы видим, что понятие сечения векторного расслоения является в некотором смысле обобщением понятия непрерывного отображения со значениями в векторном пространстве.

5.4. Пусть $s_1, \ldots, s_n$ — непрерывные сечения векторного расслоения E. Пусть α: $X \times k^n \to E$ — морфизм, определенный равенством $\alpha(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot s_i(x)$ (где сумма берется в векторном пространстве E_x). Эти сечения называются *линейно-независимыми*, если $s_1(x), \ldots, s_n(x)$ линейно-независимы в каждой точке x. Если ранг расслоения E равен n, то α индуцирует изоморфизм на каждом слое и, значит, в силу предложения 2.7, является изоморфизмом.

5.5. Пример. Рассмотрим еще раз векторное расслоение $E = TS^{n-1}$ примера 2.3. В § V.2 мы докажем, что TS^{n-1} допускает в точности $\rho(n) - 1$ линейно-независимых сечений, где $\rho(n)$ — арифметическая функция натурального аргумента n, определяемая равенством $\rho(n) = 2^\gamma + 8\delta$ для $n = k \cdot 2^{\gamma + 4\delta}$, где k нечетно и $0 \leqslant \gamma \leqslant 3$:

$n-1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\rho(n)-1$	1	0	3	0	1	0	7	0	1	0	3

В частности, если $n-1$ четно, то не существует всюду ненулевых сечений, и TS^{n-1} тривиально тогда и только тогда, когда $n-1 = 1$, 3 или 7, С другой стороны, если θ_1 — тривиальное расслоение ранга 1 на S^{n-1}, то $TS^{n-1}\oplus\theta_1$ изоморфно тривиальному расслоению θ_n ранга n над S^{n-1}. Изоморфизм $TS^{n-1}\oplus\theta_1 \to \theta_n$ задается формулой $((x, v), \lambda)\mapsto(x, v+\lambda x)$, где $(x, v)\in TS^{n-1}$ и $TS^{n-1}\oplus\theta_1$ отождествляется с $TS^{n-1}\times\mathbb{R}$. Следовательно, расслоение $TS^{n-1}\oplus\theta_1$ допускает n непрерывных линейно-независимых сечений.

5.6. Пусть E — векторное расслоение с базой X. Обозначим множество непрерывных сечений расслоения E через $\Gamma(X, E)$. Очевидно, что это множество является векторным пространством относительно операций $(s+t)(x)=s(x)+t(x)$ и $(\lambda s)(x)=\lambda s(x)$. Пусть теперь $i\colon Y \to X$ — непрерывное отображение. Композиция i и сечения s расслоения E индуцирует сечение t расслоения $i^*(E)=Y\times_X E$ по формуле $t(y)=(y, (si)(y))$. Отображение $\Gamma(X, E)\to\Gamma(Y, i^*(E))$, очевидно, k-линейно. В частности, если Y — подпространство пространства X, то сечение t есть *ограничение* сечения s на Y; мы будем обозначать его через $s|_Y$ или просто через s_Y.

5.7. Теорема. *Если пространство X паракомпактно и подпространство Y замкнуто в X, то гомоморфизм ограничения $\Gamma(X, E) \to \Gamma(Y, E_Y)$ является эпиморфизмом.*

Доказательство. Доказательство этой теоремы разобъем на три части.

a) *Предположим, что* $E=X\times M$. Из примера 5.3 следует, что пространство сечений $\Gamma(X, E)$ может быть отождествлено с векторным пространством $F(X, M)$ непрерывных отображений $s_1\colon X\to M$. С этой точки зрения гомоморфизм ограничения $\Gamma(X, E)\to\Gamma(Y, E_Y)$ можно интерпретировать как гомоморфизм ограничения функций

$$F(X, M)\to F(Y, M).$$

В силу теоремы Титце о продолжении (Бурбаки [1], Келли [1]) этот гомоморфизм является эпиморфизмом.

(b) *Предположим, что E изоморфно* $X\times M$. Рассмотрим изоморфизм $E\approx F=X\times M$. Тогда мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(X, E) \arrow[r, "\approx"] \arrow[d] & \Gamma(X, F) \arrow[d] \\
\Gamma(Y, E_Y) \arrow[r, "\approx"] & \Gamma(Y, F_Y)
\end{tikzcd}$$

и наше утверждение следует из a).

c) *Общий случай.* Пусть (U_i), $i\in I$, — такое локально-конечное открытое покрытие пространства X, что E_{U_i} тривиально. Пусть (V_i) — открытое покрытие X, для которого $\bar V_i\subset U_i$. Положим $T_i=\bar V_i\cap Y$. Если t — сечение расслоения E_Y, то положим $t_i=t|_{T_i}$. Согласно b), мы можем выбрать такое сечение s_i расслоения $E/_{\bar V_i}$, что $s_i/_{T_i}=t_i$. Если (α_i) — разбиение единицы, подчиненное покрытию (V_i), то положим $s_i'(x)=\alpha_i(x)\,s_i(x)$ для $x\in\bar V_i$ и $s_i'(x)=0$

в остальных случаях. Тогда s_i' — непрерывное сечение, равное нулю всюду, за исключением конечного числа множеств V_j. Следовательно, сумма $\sum_{i\in I} s_i'(x)$ (рассматриваемая в каждом слое) является конечной в окрестности каждой точки x и определяет непрерывное сечение s расслоение E. Для $x \in Y$ мы имеем

$$s(x) = \sum_{i\in I} \alpha_i(x)\, s_i(x) = \sum_{i\in I} \alpha_i(x)\, t(x) = \Big(\sum_{i\in I} \alpha_i(x)\Big)\, t(x) = t(x).$$

Следовательно, $s|_Y = t$. □

5.8. Если E и F — векторные расслоения над X, то обозначим через $\mathrm{Hom}(E, F)$ множество морфизмов из E в F. Очевидно, что это множество является векторным пространством относительно операций $(f+g)_x = f_x + g_x$ и $(\lambda f)_x = \lambda f_x$. Соответствие $(E, F) \mapsto \mathrm{Hom}(E, F)$ индуцирует функтор из $\mathcal{E}_k(X)^\circ \times \mathcal{E}_k(X)$ в категорию k-векторных пространств (произвольной размерности). С другой стороны, соответствие $(E, F) \mapsto \Gamma(X, \mathrm{HOM}(E, F))$ (см. 4.8, с)) также индуцирует функтор из $\mathcal{E}_k(X^\circ) \times \mathcal{E}_k(X)$ в ту же самую категорию.

5.9. Теорема. *Функторы* $(E, F) \mapsto \mathrm{Hom}(E, F)$ *и* $(E, F) \mapsto \Gamma(X, \mathrm{HOM}(E, F))$ *изоморфны.*

Доказательство. Пусть $\alpha\colon E \to F$ — морфизм. Тогда отображение $x \mapsto \alpha_x$ определяет сечение s векторного расслоения $\mathrm{HOM}(E, F)$. Для того чтобы доказать непрерывность s, рассмотрим тривиализации $\beta\colon E_U \xrightarrow{\approx} U \times M$ и $\gamma\colon F_U \xrightarrow{\approx} U \times N$, где U — открытое в X множество. Тогда мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} U \times M \arrow[r, "\hat{g}"] & U \times N \\ E_U \arrow[u, "\beta"] \arrow[r, "\alpha|_U"] & F_U \arrow[u, "\gamma"'] \end{tikzcd}$$

которая, согласно 1.12, определяет непрерывное отображение g. Перенося структуру, мы видим, что $\mathrm{HOM}(E, F)|_U \approx \mathrm{HOM}(E_U, F_U) \approx$ $\approx U \times \mathcal{E}(M, N)$. Таким образом, $s|_U$ можно отождествить с сечением тривиального расслоения $U \times \mathcal{E}(M, N)$, задаваемым формулой $x \mapsto (x, g(x))$. Следовательно, сечение s непрерывно.

Обратно, если s — непрерывное сечение расслоения $\mathrm{HOM}(E, F)$, то s определяет отображение $\alpha\colon E \to F$ по формуле $\alpha_x = s(x)$. Применяя изложенный выше метод, мы видим, что отображение α непрерывно. □

5.10. Теорема. *Пусть E и F — векторные расслоения над паракомпактным пространством X, Y — замкнутое подпространство в X и $\alpha\colon E_Y \to F_Y$ — морфизм векторных расслоений. Тогда существует такой морфизм $\tilde{\alpha}\colon E \to F$, что $\tilde{\alpha}|_Y = \alpha$* ($\tilde{\alpha}$ называется *продолжением* морфизма α на X).

Доказательство. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(E, F) \arrow[r, "\approx"] \arrow[d] & \Gamma(X, \mathrm{HOM}(E, F)) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}(E_Y, F_Y) \arrow[r, "\approx"] & \Gamma(Y, \mathrm{HOM}(E_Y, F_Y))
\end{tikzcd}$$

Она является коммутативной вследствие теоремы 5.9. Поэтому наше утверждение следует из теоремы 5.7, примененной к векторному расслоению HOM (E, F). □

5.11. Следствие. *В обозначениях теоремы* 5.10 *предположим, что* α — *изоморфизм. Тогда существует такая окрестность* V *подпространства* Y *и такой изоморфизм* α': $E_V \to F_V$, что $\alpha'_Y = \alpha$.

Доказательство. Пусть $\tilde{\alpha}$: $E \to F$ — продолжение морфизма α и V — множество тех точек $x \in X$, для которых $\tilde{\alpha}_x$ — изоморфизм. Докажем прежде всего, что V — открытая окрестность подпространства Y. В самом деле, если $x \in V$, мы можем найти такую открытую окрестность W_x точки x, что $E|_{W_x} \approx F|_{W_x} \approx W_x \times k^n$. Индуцируя структуру векторного расслоения, мы видим, что $\beta_x = \tilde{\alpha}|_{W_x}$ является морфизмом из $W_x \times k^n$ в $W_x \times k^n$, который представляется непрерывным отображением $\check{\beta}_x$: $W_x \to \mathscr{E}(k^n, k^n)$. Следовательно, $V \cap W_x$ можно отождествить с множеством тех точек $v \in W_x$, для которых $\check{\beta}_x(v) \in \mathrm{Iso}(k^n, k^n)$. Так как $\mathrm{Iso}(k^n, k^n)$ есть открытое подмножество в $\mathscr{E}(k^n, k^n)$, то множество $V \cap W_x$ открыто в W_x и, значит, в X. Отсюда вытекает, что $V = \bigcup\limits_{x \in V} V \cap W_x$ есть открытое подмножество в X, содержащее Y. Наконец, в силу предложения 2.7, $\alpha' = \tilde{\alpha}|_V$ является изоморфизмом. □

5.12. Одно приложение этого результата описано в пп. 7.1—7.6, которые можно, забегая вперед, прочесть уже сейчас.

5.13. Теорема. *Пусть* X — *паракомпактное пространство,* E *и* F — *векторные расслоения над* X *и* α: $E \to F$ — *такой морфизм, что отображение* α_x: $E_x \to F_x$ *является эпиморфизмом для всех точек* $x \in X$. *Тогда существует такой морфизм* β: $F \to E$, *что* $\alpha\beta = \mathrm{Id}_F$.

Доказательство. Пусть x — точка пространства X и U — такая окрестность этой точки, что расслоения E_U и F_U тривиальны. Тогда мы можем отождествить E_U и F_U соответственно с $U \times M$ и $U \times N$. При таком отождествлении морфизм α_U: $U \times M \to U \times N$ может быть представлен в виде $\hat{\theta}$, где θ: $U \to \mathscr{E}(M, N)$ — непрерывное отображение Если мы запишем M в виде суммы $M \oplus \mathrm{Ker}(\theta(x))$, то отображение $\theta(y)$: $N \oplus \mathrm{Ker}(\theta(x)) \to N$ представляется матрицей

$$(\theta_1(y),\ \theta_2(y)),$$

где θ_1 и θ_2 — непрерывные функции от y, такие что $\theta_1(x) = 1$ и $\theta_2(x) = 0$. Поскольку множество $\mathrm{Aut}(N)$ открыто в $\mathrm{End}(N)$, то существует такая окрестность V_x точки x, что $\theta_1(y)$ — изоморфизм для всех $y \in V_x$. Рассмотрим теперь отображение θ_x': $V_x \to \mathscr{E}(N, M)$, которое представляется матрицей

$$\theta_x'(y) = \begin{pmatrix} \theta_1(y)^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда θ_x' индуцирует такой морфизм $\hat{\theta}_x'$: $F|_{V_x} \to E|_{V_x}$, что $\alpha_{V_x} \cdot \hat{\theta}_x' = \mathrm{Id}$. Варьируя точку x, мы получаем локально-конечное открытое покрытие (V_i) пространства X и семейство морфизмов β_i: $F_{V_i} \to E_{V_i}$, такие что $\alpha_{V_i} \cdot \beta_i = \mathrm{Id}\, F_{V_i}$. Пусть (η_i) — разбиение единицы, подчиненное покрытию (V_i), и β: $F \to E$ — отображение, определенное формулой $\beta(e) = \sum\limits_{i \in I} \eta_i(x) \beta_i(e)$, $e \in E_x$. В этой формуле мы используем соглашение, что $\eta_i(x) \beta_i(e) = 0$ для $x \notin V_i$. Следовательно, в подходящей окрестности точки x мы имеем $\eta_i(x) \beta_i(e) = 0$, за исключением конечного числа индексов i. Таким образом, отображение β непрерывно. Наконец,

$$(\alpha \cdot \beta)(e) = \sum_{i \in I} \eta_i(x) (\alpha \cdot \beta_i)(e) = \left(\sum_{i \in I} \eta_i(x) \right) (\alpha \cdot \beta_i(e)) = e. \ \square$$

5.14. Теорема. *Пусть X — паракомпактное пространство, E и F — два векторных расслоения над X и α: $E \to F$ — такой морфизм, что отображение α_x: $E_x \to F_x$ является мономорфизмом для всех точек $x \in X$. Тогда существует такой морфизм β: $F \to E$, что $\beta \cdot \alpha = \mathrm{Id}_E$.*

Доказательство. Доказательство этой теоремы совершенно аналогично предыдущему доказательству и предоставляется читателю в качестве упражнения. $\square$

Упражнения: 13—15, 27.

6. Алгебраические свойства категории векторных расслоений

6.1. Теорема. *Категория $\mathscr{E}(X)$ векторных расслоений с базой X является аддитивной категорией.*

Доказательство. Если E и F — векторные расслоения, то, как мы уже знаем, множество $\mathrm{Hom}(E, F) = \mathscr{E}(X)(E, F)$ является векторным пространством и a fortiori абелевой группой (5.8). Ясно, что отображение

$$\mathrm{Hom}(M, N) \times \mathrm{Hom}(N, P) \to \mathrm{Hom}(M, P),$$

определяемое композицией морфизмов, билинейно. Кроме того, существует нулевой объект — тривиальное расслоение нулевого ранга $\xi = (X, \mathrm{Id}_X, X)$. Ключевой момент в доказательстве теоремы 6.1 — доказательство того факта, что сумма Уитни $E_1 \oplus E_2$ расслоений E_1 и

E_2 является суммой объектов E_1 и E_2 в категории $\mathscr{E}(X)$. Для этого нам понадобятся канонические морфизмы i_α: $E_\alpha \to E_1 \oplus E_2$, $\alpha = 1, 2$, задаваемые очевидными гомоморфизмами $(E_\alpha)_x \to (E_1)_x \oplus (E_2)_x$. Пусть f_α: $E_\alpha \to F$ — произвольные морфизмы в $\mathscr{E}(X)$. Мы должны доказать, что существует единственный морфизм f: $E_1 \oplus F_2 \to F$, превращающий диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & E_1 \arrow[dl, "i_1"'] \arrow[dr, "f_1"] & \\
E_1 \oplus E_2 \arrow[rr, dashed, "f"] & & F \\
 & E_2 \arrow[ul, "i_2"] \arrow[ur, "f_2"'] &
\end{tikzcd}$$

в коммутативную.

a) *Единственность* f. Над каждой точкой $x \in X$ мы имеем $(f_\alpha)_x = f_x \cdot (i_\alpha)_x$. Отсюда следует, что для каждой точки $(e_1, e_2) \in (E_1)_x \oplus (E_2)_x = (E_1)_x \times (E_2)_x$ выполнено равенство $f_x(e_1, e_2) = (f_1)_x (e_1) + (f_2)_x (e_2)$.

b) *Существование* f. Определим отображение f: $E_1 \oplus E_2 \to F$, задав его в каждом слое приведенным выше равенством. Для того чтобы проверить непрерывность f, рассмотрим такое открытое множество U, что $E_{\alpha \mid U} \approx U \times M_\alpha$ и $F|_U \approx U \times N$. При переходе к индуцированным структурам векторных расслоений ограничение $f_{\alpha \mid U}$ превращается в отображение $\hat{g}_\alpha$, где g_α: $U \to \mathscr{E}(M, N)$ — непрерывное отображение (1.12). Аналогично $f|_U$ превращается в отображение из $U \times (M_1 \oplus M_2)$ в $U \times N$, задаваемое формулой $(x, (m_1, m_2)) \mapsto (x, g_1(m_1) + g_2(m_2))$. Ясно, что это отображение непрерывно. Следовательно, отображение f непрерывно. $\square$

6.2. Замечания. Так как $\mathscr{E}(X)$ — аддитивная категория, то $E_1 \oplus E_2$ является произведением объектов E_1 и E_2 в категории $\mathscr{E}(X)$ (но не в категории топологических пространств, за исключением случаев, когда X — точка или пустое множество). Если $E_1, \ldots, E_n$ и $F_1, \ldots, F_p$ — векторные расслоения над X, то морфизм из $\bigoplus_{i=1}^{n} E_i$ в $\bigoplus_{j=1}^{p} F_j$ может быть представлен матрицей (α_{ji}), где $\alpha_{ji} \in \operatorname{Hom}(E_i, E_j)$.

Следующая теорема будет очень полезна в этой книге:

6.3. Теорема. *Пусть E — векторное расслоение над X и p — проектор в E (т. е. такой эндоморфизм E, что $p^2 = p$). Тогда векторное квазирасслоение* $\operatorname{Ker} p = \coprod_{x \in X} \operatorname{Ker} p_x$ *(снабженное топологией, индуцированной топологией пространства E) локально-тривиально.*

Доказательство. Так как задача локальна, мы можем считать, что E — тривиальное расслоение $X \times M$. Пусть x_0 — точка пространства X и f: $X \to \mathscr{E}(M, M)$ — отображение, определяемое формулой $f(x) = 1 - p_x - p_{x_0} + 2 p_x p_{x_0}$. Так как $p_{x_0} \cdot f(x) = f(x) \cdot p_x$, мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} p \arrow[r] \arrow[d, dashed] & X\times M \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\hat{f}"] & X\times M \arrow[d, "\hat{f}"] \\
0 \arrow[r] & X\times\operatorname{Ker} p_{x_0} \arrow[r] & X\times M \arrow[r, "p_0"] & X\times M
\end{tikzcd}$$

где $p_0=\mathrm{Id}_X\times p_{x_0}$. Поскольку $f(x_0)=1$, то существует такая окрестность $V(x_0)$ точки x_0, что $f(x)$ — автоморфизм для каждого $x\in V(x_0)$ (ибо $\operatorname{Aut}(M)$ открыто в $\operatorname{End}(M)$). Над $V(x_0)$ отображение $\hat{f}$ индуцирует гомеоморфизм между $\operatorname{Ker} p$ и $V(x_0)\times\operatorname{Ker} p_{x_0}$, так как согласно 1.12, существует непрерывное отображение $(\hat{f}_{V(x_0)})^{-1}=(f^{-1}_{V(x_0)})\hat{}$. □

6.4. Замечание. Легко проверить, что определенное таким способом векторное расслоение $\operatorname{Ker} p$ является ядром морфизма p в категорном смысле. Если $p^2\neq p$, то ядро p в общем случае не существует.

* Более подготовленный читатель мог заметить, что доказательство теоремы 6.3 переносится на банаховы расслоения (Ленг [2]). *

6.5. Теорема. *Пусть E — векторное расслоение над компактной базой X. Тогда существует такое расслоение E', что расслоение $E\oplus E'$ тривиально.*

Доказательство. Пусть (U_i), $i=1, \ldots, n$, — такое открытое покрытие пространства X, что $E_{U_i}\approx U_i\times k^{n_i}$, и пусть (η_i) — разбиение единицы, ассоциированное с покрытием (U_i). Согласно 5.4, в расслоении E_{U_i} существует n_i линейно-независимых сечений s_i^1, s_i^2, $\ldots$, $s_i^{n_i}$. Сечения $\eta_i s_i^1$, $\ldots$, $\eta_i s_i^{n_i}$, продолженные нулем вне множества U_i, являются линейно-независимыми сечениями расслоения $E|_{V_i}$, где $V_i=\eta_i^{-1}((0, 1])$. Обозначим через σ_i^j сечение $\eta_i s_i^j$, $1\leqslant j\leqslant n_i$. Тогда векторы $\sigma_i^j(x)$ порождают векторное пространство E_x и, в силу 5.4, при $n=\sum_{i=1}^{r} n_i$ существует такой морфизм

$$\alpha\colon T=X\times k^n\to E,$$

что $\alpha_x\colon T_x\to E_x$ — эпиморфизм для каждого x из X. Согласно теореме 5.13, существует такой морфизм $\beta\colon E\to T$, что $\alpha\cdot\beta=\mathrm{Id}_E$. Пусть E' — ядро проектора $p=\beta\cdot\alpha$. Доказательство теоремы может быть завершено теперь двумя различными способами:

(i) Так как $\mathscr{E}(X)$ — аддитивная категория и $E\approx\operatorname{Ker}(1-p)$, то $E\oplus E'\approx T$.

(ii) Определим морфизм из $E\oplus E'$ в T как прямую сумму отображения β и вложения E' в T. Так как $E'_x\approx\operatorname{Ker} p_x$ и $E_x\approx\operatorname{Ker}(1-p_x)$, этот морфизм индуцирует изоморфизм на каждом слое. Поэтому, на основании 2.7, этот морфизм является изоморфизмом. □

****6.6. Замечание.*** Следуя Гуревичу и Волмэну [1], скажем, что топологическое пространство X имеет *размерность* $\leqslant p$, если для каждого конечного открытого покрытия $\mathcal{U}$ пространства X найдется такое более мелкое покрытие (V_i), что каждая точка из X принадлежит самое большее $p+1$ множествам покрытия (V_i). Топологическое пространство имеет размерность p, если его размерность $\leqslant p$ и если оно не является пространством размерности $\leqslant p-1$. Дифференцируемое многообразие, моделью которого служит пространство $\mathbb{R}^p$, имеет размерность p. Клеточное разбиение, клетки которого содержатся в $\mathbb{R}^p$, также имеет размерность $\leqslant p$. Если E — векторное расслоение над связным компактным пространством размерности p, то существует такое конечное покрытие (V_i), $i=1, \ldots, p$, что расслоения E_{V_i} тривиальны. Следовательно, E является прямым слагаемым тривиального расслоения ранга $\leqslant p \times \operatorname{rank}(E)$.

6.7. Определение. Пусть $\mathscr{C}$ — аддитивная категория. Категория $\mathscr{C}$ называется *псевдоабелевой*, если для каждого объекта E из $\mathscr{C}$ и каждого морфизма $p\colon E \to E$, удовлетворяющего условию $p^2=p$, существует ядро p.

6.8. Примеры. Как мы только что показали, $\mathscr{E}(X)$ — псевдоабелева категория. Приведем пример из другой области. Пусть A — произвольное кольцо с единицей. Категория $\mathscr{P}(A)$ конечно-порожденных проективных модулей над A[1] псевдоабелева, так как прямое слагаемое проективного модуля — снова проективный модуль. В то же время категория $\mathscr{L}(A)$ конечно-порожденных *свободных* модулей, вообще говоря, не является псевдоабелевой (примеры: $A=k\times k$, $A=\mathrm{M}_n(k)$ и т. д.).

6.9. Предложение. *Пусть $\mathscr{C}$ — псевдоабелева категория, E — объект категории $\mathscr{C}$ и $p\colon E \to E$ — такой морфизм, что $p^2=p$. Тогда объект E разлагается в прямую сумму $E=\operatorname{Ker}(p)\oplus\operatorname{Ker}(1-p)$. Относительно этого разложения эндоморфизм p задается матрицей вида*

$$p=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

(т. е. $p=0_{\operatorname{Ker}(p)}\oplus\mathrm{Id}_{\operatorname{Ker}(1-p)}$).

Доказательство. Пусть $i_1\colon \operatorname{Ker}(p)\to E$ и $i_2\colon \operatorname{Ker}(1-p)\to E$ — канонические вложения. В силу хорошо известной леммы из теории аддитивных категорий (Митчелл [1]) нам достаточно доказать существование таких морфизмов $j_1\colon E\to\operatorname{Ker}(p)$ и $j_2\colon E\to\operatorname{Ker}(1-p)$, что $j_1\cdot i_1=\mathrm{Id}_{\operatorname{Ker}(p)}$, $j_2\cdot i_2=\mathrm{Id}_{\operatorname{Ker}(1-p)}$, $j_1\cdot i_2=0$, $j_2\cdot i_1=0$ и $i_1\cdot j_1+i_2\cdot j_2=\mathrm{Id}_E$. Определим j_1 и j_2 как морфизмы, которые превращают

[1] Мы рассматриваем здесь правые A-модули.

диаграммы

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ker}(p) \arrow[r, "i_1"] & E \arrow[r, "p"] & E \\ \mathrm{Ker}(p) \arrow[u, dashed, "\mathrm{Id}"] \arrow[r, dashed, "i_1"] & E \arrow[ul, "j_1"] \arrow[u, "1-p"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{Ker}(1-p) \arrow[r, "i_2"] & E \arrow[r, "1-p"] & E \\ \mathrm{Ker}(1-p) \arrow[u, dashed, "\mathrm{Id}"] \arrow[r, dashed, "i_2"] & E \arrow[ul, "j_2"] \arrow[u, "p"'] & \end{tikzcd}$$

в коммутативные. Очевидно, что такие морфизмы j_1 и j_2 единственны. Используя свойство универсальности ядер, получаем $i_1 j_1 i_1 = i_1$ и $i_2 j_2 i_2 = i_2$, следовательно $j_1 \cdot i_1 = \mathrm{Id}_{\mathrm{Ker}\,(p)}$ и $j_2 \cdot i_2 = \mathrm{Id}_{\mathrm{Ker}\,(1-p)}$. Далее, из свойства универсальности ядер вытекает, что диаграммы

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ker}(p) \arrow[r, "i_1"] & E \arrow[r, "p"] & E \\ \mathrm{Ker}(1-p) \arrow[u, dashed, "0"] \arrow[r, "i_2"] & E \arrow[ul, "j_1"] \arrow[u, "1-p"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{Ker}(1-p) \arrow[r, "i_2"] & E \arrow[r, "1-p"] & E \\ \mathrm{Ker}(p) \arrow[u, dashed, "0"] \arrow[r, "i_1"] & E \arrow[ul, "j_2"] \arrow[u, "p"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативны. Поэтому $j_1 \cdot i_2 = 0$ и $j_2 \cdot i_1 = 0$. Наконец, $i_1 \cdot j_1 + i_2 \cdot j_2 = p + (1-p) = 1$. Следовательно, $p = i_2 \cdot j_2$ и матрица p имеет нужный вид. □

Теперь мы опишем универсальную процедуру вложения произвольной аддитивной категории в псевдоабелеву категорию. Главным приложением этой процедуры будет теорема 6.18.

6.10. Теорема. *Пусть $\mathscr{C}$ — аддитивная категория. Тогда существуют псевдоабелева категория $\tilde{\mathscr{C}}$ и вполне унивалентный аддитивный функтор $\varphi\colon \mathscr{C} \to \tilde{\mathscr{C}}$, удовлетворяющие следующему свойству универсальности. Для любой псевдоабелевой категории $\mathscr{D}$ и любого аддитивного функтора $\psi\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ существует единственный функтор $\psi'\colon \tilde{\mathscr{C}} \to \mathscr{D}$, который превращает диаграмму*

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & & \tilde{\mathscr{C}} \arrow[dl, "\psi'"] \\ & \mathscr{D} & \end{tikzcd}$$

в коммутативную. Кроме того, пара $(\varphi, \tilde{\mathscr{C}})$ единственна с точностью до эквивалентности категорий.

Доказательство. Очевидно, что пара $(\varphi, \tilde{\mathscr{C}})$, будучи решением „универсальной задачи" единственна с точностью до эквивалентности категорий (упражнение, представляемое читателю). Поэтому достаточно явно построить категорию $\tilde{\mathscr{C}}$ и аддитивный функтор φ.

Определим объекты из $\tilde{\mathscr{C}}$ как пары (E, p), где $E \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ и p — проектор в E (если, например, $\mathscr{C}$ — категория модулей, можно представлять себе такую пару как „образ" проектора p). Морфизм из

(E, p) в (F, q) определяется как такой $\mathscr{C}$-морфизм f: $E \to F$, что $f \cdot p = q \cdot f = f$. (Для того чтобы понять, каким образом мы пришли к этому определению, снова рассмотрим (E, p) как образ p. Тогда мы получаем разложения $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im}(1-p)$, $F = \operatorname{Im} q \oplus \operatorname{Im}(1-q)$. Отображение f в этом случае задается матрицей

$$\begin{pmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и, следовательно, определяет морфизм f_1 из $\operatorname{Im} p$ в $\operatorname{Im} q$.)

Композиция морфизмов в $\tilde{\mathscr{C}}$ индуцирована композицией морфизмов в $\mathscr{C}$, тождественный морфизм объекта (E, p) есть p, и сумма двух объектов (E, p) и (F, q) определяется как объект $(E \oplus F, p \oplus q)$. Очевидно, что эти определения задают в $\tilde{\mathscr{C}}$ структуру аддитивной категории Покажем, что категория $\tilde{\mathscr{C}}$ псевдоабелева. Если f — проектор объекта (E, p), то мы имеем следующую коммутативную диаграмму (где F, q, g и h определены ниже):

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "p-f"] \arrow[dd, "(1-f)\cdot p"'] & & E \arrow[r, "f"] \arrow[dd, "p"] & E \arrow[dd, "p"] \\
& F \arrow[ul, dashed, "h"'] \arrow[ur, "g"'] \arrow[dd, "q"] & & \\
E \arrow[rr, "p-f"] & & E \arrow[r, "f"] & E \\
& F \arrow[ul, dashed, "h"] \arrow[ur, "g"'] & &
\end{tikzcd}$$

Пара $(E, (1-f)\cdot p)$ является объектом категории $\tilde{\mathscr{C}}$, и $p-f$ определяет морфизм этого объекта в объект (E, p) Действительно, эта пара образует объект $(E, (1-f)\cdot p)$ и морфизм $p-f$ является ядром f в категорном смысле. Для доказательства рассмотрим третий объект (F, q) и такой морфизм g: $(F, q) \to (E, p)$, что $f \cdot g = 0$. Если h: $(F, q) \to (E, (1-f)\cdot p)$ — морфизм, который превращает указанную диаграмму в коммутативную, то мы должны иметь $h = (1-f)\cdot ph = p(1-f)h = pg = g$, чем доказана единственность h. Обратно, если мы положим $h = g$, то диаграмма, очевидно, будет коммутативна.

Определим теперь функтор φ: $\mathscr{C} \to \tilde{\mathscr{C}}$, полагая соответственно на объектах и морфизмах $\varphi(E) = (E, \mathrm{Id}_E)$ и $\varphi(f) = f$. Проделанные выше вычисления показывают, что (E, p) является ядром $1-p$, если интерпретировать $1-p$ как морфизм из $\varphi(E)$ в $\varphi(E)$. Следовательно, $\varphi(E) \approx (E, p) \oplus (E, 1-p)$. Если ψ: $\mathscr{C} \to \mathscr{D}$ (соотв. ψ': $\tilde{\mathscr{C}} \to \mathscr{D}$) — аддитивный функтор из $\mathscr{C}$ (соотв. $\tilde{\mathscr{C}}$) в псевдоабелеву категорию $\mathscr{D}$, такой что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & & \tilde{\mathscr{C}} \arrow[dl, "\psi'"] \\
& \mathscr{D} &
\end{tikzcd}$$

коммутативна с точностью до изоморфизма, то $\psi'(\operatorname{Ker} f) \approx \operatorname{Ker}(\psi'(f))$ для любого проектора f. Следовательно, $\psi'(E, p) = \operatorname{Ker} \psi(1-p)$: $\psi(E) \to \psi(E)$ и $\psi'(f) = \psi(f)_{\operatorname{Ker} \psi(1-p)}$ на объектах и морфизмах соответственно. Обратно, эти формулы определяют ψ' (с точностью до изоморфизма). □

6.11. Обозначение и определение. Назовем $\tilde{\mathscr{C}}$ *псевдоабелевой категорией, ассоциированной* с $\mathscr{C}$.

6.12. Теорема. *Пусть $\mathscr{C}$ — аддитивная категория, $\mathscr{D}$ — псевдоабелева категория и ψ: $\mathscr{C} \to \mathscr{D}$ — аддитивный вполне унивалентный функтор, так что каждый объект из $\mathscr{D}$ является прямым слагаемым объекта из образа ψ. Тогда функтор ψ', определенный в* 6.9, *является эквивалентностью между категориями $\tilde{\mathscr{C}}$ и $\mathscr{D}$.*

Доказательство. Покажем вначале, что функтор ψ' (с p, замененным на $1-p$) сюръективен на объектах. Если G — объект из $\mathscr{D}$, то по предположению существуют такой объект E в $\mathscr{C}$ и такой проектор q: $\psi(E) \to \psi(E)$, что $G \approx \operatorname{Ker} q$. Поскольку функтор ψ вполне унивалентен, мы можем считать, что $q = \psi(p)$, где p — проектор в E Тогда из формулы для ядер, данной в 6.10, следует, что объект G изоморфен объекту $\psi'(E, 1-p)$.

Для доказательства того, что функтор ψ' вполне унивалентен, рассмотрим два объекта H и H' из $\tilde{\mathscr{C}}$, являющиеся прямыми слагаемыми объектов $\varphi(E)$ и $\varphi(E')$ соответственно. Тогда диаграмма

$$
\begin{tikzcd}
\tilde{\mathscr{C}}(\varphi(E), \varphi(E')) \approx \mathscr{C}(E, E') \arrow[r, shift left] \arrow[d, bend right, "\psi'_{\varphi(E), \varphi(E')}"'] \arrow[d, "\psi_{E,E'}"] & \tilde{\mathscr{C}}(H, H') \arrow[l, shift left] \arrow[d, "\psi'_{H,H'}"] \\
\mathscr{D}(\psi(E), \psi(E')) \arrow[r, shift left] & \mathscr{D}(\psi'(H), \psi'(H')) \arrow[l, shift left]
\end{tikzcd}
$$

горизонтальные стрелки которой индуцированы разложениями в прямые суммы $\varphi(E) = H \oplus H_1$ и $\varphi(E') = H' \oplus H'_1$, показывает, что $\psi'_{H,H'}$ — изоморфизм, поскольку $\psi_{E,E'}$ — изоморфизм по предположению. Следовательно, ψ' — эквивалентность категорий. □

6.13. Теорема. *Пусть $\mathscr{C} = \mathscr{E}_T(X)$ — полная подкатегория категории $\mathscr{E}(X)$, состоящая из тривиальных расслоений. Если пространство X компактно, то псевдоабелева категория $\tilde{\mathscr{C}}$, ассоциированная с $\mathscr{C}$, эквивалентна категории $\mathscr{E}(X)$ всех векторных расслоений над X.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{D}$ — категория $\mathscr{E}(X)$ и ψ: $\mathscr{C} \to \mathscr{D}$ — функтор вложения. Согласно 6.5, каждый объект из $\mathscr{D}$ является прямым слагаемым некоторого объекта $\psi(G)$. Следовательно, по теореме 6.12, функтор ψ' индуцирует эквивалентность $\widetilde{\mathscr{E}_T(X)} \sim \mathscr{E}(X)$. □

6.14. Замечание. Теорема 6.12 дает нам чисто алгебраический способ описания векторных расслоений над компактным пространством X как образов проекционных операторов Все основные результаты K-теории, содержащиеся в гл. II и III, можно доказать, исходя из этой точки зрения. Однако представляющие основной интерес векторные расслоения (например, касательные расслоения дифференцируемых многообразий) не определяются таким способом. Тем не менее эта точка зрения иногда очень удобна в теоретических вопросах.

* ***6.15. Замечание.*** Из замечания 6.6 следует, что теорема 6.13 остается справедливой для любого связного топологического пространства X конечной размерности. *

6.16. Теорема. *Пусть A — произвольное кольцо с единицей и $\mathscr{C} = \mathscr{L}(A)$ — категория, рассмотренная в* 6.8. *Тогда $\tilde{\mathscr{C}}$ эквивалентна категории $\mathscr{P}(A)$ конечно-порожденных проективных A-модулей.*

Доказательство. Так как каждый объект из $\mathscr{P}(A)$ является прямым слагаемым некоторого A^n, то требуемые утверждения получаются применением теоремы 6.12 к категории $\mathscr{D} = \mathscr{P}(A)$. $\square$

6.17. Пусть $A = C_k(X)$ — кольцо непрерывных функций на компактном пространстве X со значениями в поле k. Если E есть k-векторное расслоение с базой X, то множество $\Gamma(X, E)$ непрерывных сечений E является A-модулем относительно операции $(s \cdot \lambda)(x) = s(x)\lambda(x)$, где $\lambda \in A$ и $s \in \Gamma(X, E)$. Если E — тривиальное расслоение $X \times k^n$, то $\Gamma(X, E)$ как A-модуль изоморфен A^n. Если E — произвольное векторное расслоение и если $E \oplus E' \approx X \times k^n$, то имеет место изоморфизм A-модулей $\Gamma(X, E) \oplus \Gamma(X, E') \approx \Gamma(X, E \oplus E') \approx A^n$. Следовательно, $\Gamma(X, E)$ является объектом категории $\mathscr{P}(A)$ и соответствие $E \mapsto \Gamma(X, E)$ индуцирует аддитивный функтор из $\mathscr{E}(X)$ в $\mathscr{P}(A)$, обозначаемый через Γ.

6.18. Теорема (Серр [2]—Суон [1]). *Пусть $A = C_k(X)$ — кольцо непрерывных функций на компактном пространстве X со значениями в поле k. Тогда функтор сечений Γ индуцирует эквивалентность категорий $\mathscr{E}(X) \sim \mathscr{P}(A)$.*

Доказательство. Функтор Γ индуцирует функтор Γ_T: $\mathscr{E}_T(X) \to \mathscr{L}(A)$, где $\mathscr{E}_T(X)$ — категория, определенная в 6.13. Если $E = X \times k^n$, то $\Gamma_T(E) \approx A^n$, и поэтому функтор Γ_T сюръективен. Если $F = X \times k^p$ и f: $E \to F$ — морфизм расслоений, то $\Gamma_T(f)$ представляется матрицей $M(x) = (a_{ji}(x))$, где $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, p$, и отображение $x \mapsto M(x)$ совпадает с отображением $\check{f}$: $X \to \mathscr{E}_k(k^n, k^p)$, в обозначениях теоремы 1.12. Из этой теоремы следует, что функтор Γ_T вполне унивалентен и поэтому задает эквивалентность категорий $\mathscr{E}_T(X) \sim \mathscr{L}(A)$.

Положим теперь $\mathscr{C} = \mathscr{E}_T(X)$, $\mathscr{D} = \mathscr{P}(A)$, и пусть ψ: $\mathscr{C} \to \mathscr{D}$ — композиция функтора Γ_T и функтора вложения категории $\mathscr{L}(A)$

в $\mathcal{P}(A)$. Так как диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}_T(X)=\mathcal{C} \arrow[r] \arrow[d, "\psi"'] & \tilde{\mathcal{C}}\sim\mathcal{E}(X) \arrow[dl, "\Gamma"] \\ \mathcal{P}(A)=\mathcal{D} & \end{tikzcd}$$

коммутативна, то, согласно теореме 6.10, функтор Γ может быть отождествлен с функтором ψ. Поэтому из теоремы 6.12 следует, что Γ — эквивалентность категорий. □

* **6.19. *Замечание.*** Пусть Y — замкнутое подпространство пространства X. Тогда с помощью гомоморфизма ограничения функций $C_k(X)\to C_k(Y)$ кольцо $B=C_k(Y)$ наделяется структурой $C_k(X)$-модуля. Если мы отождествим $\mathcal{E}_k(X)$ (соотв. $\mathcal{E}_k(Y)$) с $\mathcal{P}(A)$ (соотв. $\mathcal{P}(B)$), то функтор ограничения $\mathcal{E}_k(X)\to\mathcal{E}_k(Y)$ можно интерпретировать как функтор $\mathcal{P}(A)\to\mathcal{P}(B)$, задаваемый правилом $M\mapsto M\otimes_A B$. *

6.20. Пусть E — векторное расслоение с базой X. Сейчас мы зададим на векторном пространстве $\Gamma(X, E)$ структуру банахова пространства. Если $E=X\times k$, то $\Gamma(X, E)=A$ является банаховой алгеброй относительно нормы

$$\|s\|=\sup_{x\in X}|s(x)|.$$

Если E — произвольное расслоение, то мы можем рассматривать $\Gamma(X, E)$ как модуль над A. Возьмем какой-нибудь сюръективный гомоморфизм A-модулей u: $A^n\to\Gamma(X, E)$ и наделим пространство $\Gamma(X, E)$ соответствующей фактортопологией. Эта топология на $\Gamma(X, E)$ не зависит от выбора u. Действительно, пусть u': $A^{n'}\to\Gamma(X, E)$ — другой сюръективный гомоморфизм. Так как модуль $\Gamma(X, E)$ проективен, то существуют такие A-линейные отображения v: $A^n\to A^{n'}$ и v': $A^{n'}\to A^n$, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} A^n \arrow[r, shift right, "v"'] \arrow[dr, "u"'] & A^{n'} \arrow[l, shift right, "v'"'] \arrow[d, "u'"] \\ & \Gamma(X,E) \end{tikzcd}$$

коммутативна. Как A-линейные отображения v и v' задаются матрицами и потому непрерывны, поскольку A — банахова алгебра. Таким образом, приведенная выше диаграмма показывает, что топология на $\Gamma(X, E)$ не зависит от выбора u.

Морфизм векторных расслоений f: $E\to F$ индуцирует гомоморфизм A-модулей $\Gamma(X, f)$: $\Gamma(X, E)\to\Gamma(X, F)$. Если u: $A^n\to\Gamma(X, E)$ и v: A^m: $\to\Gamma(X, F)$ — сюръективные A-линейные отображения, то найдется такое отображение $\bar{f}\colon A^n \to A^m$, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} A^n \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "\varphi"] & A^m \arrow[d] \\ \Gamma(X, E) \arrow[r, "\Gamma(X, f)"] & \Gamma(X, F) \end{tikzcd}$$

коммутативна. Так как отображение f непрерывно, то $\bar{f}$ — непрерывный гомоморфизм A-модулей.

6.21. Топологию на $\Gamma(X, E)$ возможно интерпретировать и по-иному. Пусть (U_i) — конечное покрытие пространства X замкнутыми подмножествами U_i. Каждое непрерывное сечение s расслоения E индуцирует такие непрерывные сечения s_i расслоений $E_i = E_{U_i}$, что $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$. Обратно, пусть s_i — такие непрерывные сечения расслоений E_i, что $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$. Тогда, применяя тот же метод, что и в теореме 3.1, нетрудно доказать существование и единственность такого непрерывного сечения s расслоения E, что $s|_{U_i} = s_i$. Другими словами, мы имеем точную последовательность

$$0 \to \Gamma(X, E) \to \prod_i \Gamma(U_i, E_i) \xrightarrow{r_1 - r_2} \prod_{i,j} \Gamma(U_i \cap U_j, E_{ij}),$$

где $E_{ij} = E|_{U_i \cap U_j}$, а гомоморфизмы r_1 и r_2 индуцированы гомоморфизмами ограничений $\Gamma(U_i, E_i) \to \Gamma(U_i \cap U_j, E_{ij})$ и $\Gamma(U_j, E_j) \to \Gamma(U_i \cap U_j, E_{ij})$ соответственно. Согласно 6.20, гомоморфизмы r_1 и r_2 непрерывны. Поэтому $\operatorname{Ker}(r_1 - r_2)$ является замкнутым подпространством банахова пространства $\prod\limits_i \Gamma(U_i, E_i)$ и каноническое отображение $\Gamma(X, E) \to \operatorname{Ker}(r_1 - r_2)$ биективно. Применяя теорему Банаха или используя разбиение единицы, мы можем определить отображение из $\operatorname{Ker}(r_1 - r_2)$ в $\Gamma(X, E)$, откуда следует, что банаховы пространства $\Gamma(X, E)$ и $\operatorname{Ker}(r_1 - r_2)$ изоморфны. В частности, если векторные расслоения E_i тривиальны, то $\Gamma(U_i, E_i) \approx C_k(U_i)^{n_i}$, где $E_i \approx U_i \times k^{n_i}$, и поэтому $\Gamma(X, E)$ является замкнутым подпространством пространства $\prod\limits_i C_k(U_i)^{n_i}$.

6.22. Пусть A — произвольная банахова алгебра, и пусть M и N — объекты из $\mathcal{P}(A)$. Тогда векторное пространство $\operatorname{Hom}_A(M, N)$ может быть снабжено структурой банахова пространства. Действительно, A-модули M и N можно наделить нормами, индуцированными произвольными A-линейными эпиморфизмами $A^m \to M$ и $A^n \to N$. Применяя рассуждения, использованные в 6.20, мы убеждаемся, что полученные таким образом структуры банахова пространства в M и N не зависят от выбора этих эпиморфизмов. Далее, $\operatorname{Hom}_A(M, N)$ является замкнутым подпространством пространства $\mathcal{L}(M, N)$ непрерывных $\mathbb{R}$-линейных отображений из M в N с обычной топологией. Так как модули M и N проективны и конечно-порождены, то разложения $M \bigoplus M' \approx A^n$ и $N \bigoplus N' \approx A^m$ позволяют нам отождествить $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ с замкнутым подпространством пространства $\mathrm{Hom}_A(A^n, A^m) \approx A^{nm}$. Пусть теперь P — еще один объект категории $\mathscr{P}(A)$. Тогда отображение

$$\mathrm{Hom}_A(M, N) \times \mathrm{Hom}_A(N, P) \to \mathrm{Hom}_A(M, P),$$

задаваемое композицией морфизмов, является k-линейным и непрерывным (A — банахова алгебра над $k = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), так как оно индуцировано отображением

$$\mathscr{L}(M, N) \times \mathscr{L}(N, P) \to \mathscr{L}(M, P).$$

В частности, пусть E, F и G — векторные расслоения с компактной базой X. Беря $A = C_k(X)$, мы видим, что $\mathrm{Hom}(E, F) \approx \mathrm{Hom}_A(\Gamma(X, E), \Gamma(X, F))$, $\mathrm{Hom}(F, G) \approx \mathrm{Hom}_A(\Gamma(X, F), \Gamma(X, G))$ и $\mathrm{Hom}(E, G) \approx \mathrm{Hom}(\Gamma(X, E), \Gamma(X, G))$. Следовательно, $\mathrm{Hom}(E, F)$, $\mathrm{Hom}(F, G)$ и $\mathrm{Hom}(E, G)$ являются банаховыми пространствами и отображение

$$\mathrm{Hom}(E, F) \times \mathrm{Hom}(F, G) \to \mathrm{Hom}(E, G)$$

k-билинейно и непрерывно.

6.23. *Замечание.* Изоморфизм $\Gamma(X, \mathrm{HOM}(E, F)) \approx \mathrm{Hom}(E, F)$, определенный в 5.9, согласован с естественными структурами банахова пространства на $\Gamma(X, \mathrm{HOM}(E, F))$ и $\mathrm{Hom}(E, F)$. (*Указание:* представьте E и F в виде прямых слагаемых тривиальных расслоений.)

6.24. Мы завершим этот параграф рассмотрением для произвольного топологического пространства X псевдоабелевой категории $\widetilde{\mathscr{E}_T(X)}$, ассоциированной с категорией $\mathscr{E}_T(X)$. Те же самые идеи, которые были использованы при доказательстве теоремы 6.12, позволяют показать, что $\widetilde{\mathscr{E}_T(X)}$ эквивалентна полной подкатегории в $\mathscr{E}(X)$, состоящей из расслоений, которые являются прямыми слагаемыми тривиальных расслоений. Мы будем обозначать эту категорию через $\mathscr{E}'(X)$. В общем случае категория $\mathscr{E}'(X)$ не эквивалентна категории $\mathscr{E}(X)$. Тем не менее подкатегория $\mathscr{E}'(X)$ обладает некоторыми хорошими свойствами. Именно, имеет место следующее предложение.

6.25. *Предложение.* *Пусть (U_i), $i = 1, \ldots, n$, — конечное открытое покрытие топологического пространства X и существует разбиение единицы, ассоциированное с (U_i). Пусть $E_i \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{E}'(U_i)$ и*

$$g_{ji}\colon E_i|_{U_i \cap U_j} \to E_j|_{U_i \cap U_j}$$

— такие изоморфизмы, что $g_{ki} = g_{kj} \cdot g_{ji}$ над $U_i \cap U_j \cap U_k$. Тогда векторное расслоение, полученное склеиванием расслоений E_i с использованием g_{ji} (см. 3.2), является объектом категории $\mathscr{E}'(X)$.

Доказательство. Для каждого пространства Y отождествим категорию $\mathscr{E}'(Y)$ с $\widetilde{\mathscr{E}_T(Y)}$, так что каждое расслоение E_i может быть представлено в виде (M_i, p_i), где M_i — тривиальное расслоение и p_i — проекционный оператор. Рассмотрим пару $E=(M, p)$, где $M=M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$, а p — проекционный оператор, который представляется матрицей (p_{kl}), определенной следующим образом. Пусть (α_k) — разбиение единицы, ассоциированное с (U_k), и $\beta_k=\sqrt{\alpha_k}$. Положим

$$p_{kl}=\beta_k\beta_l g_{kl} p_l,$$

где, как обычно, мы используем соглашение о том, что $g_{kl}=0$ вне $U_k \cap U_l$. Определим g_i: $(M_i, p_i) \to (M, p)$ как матрицу-столбец $(g_i)_k = \beta_k g_{ki} p_i$ и f_i: $(M, p) \to (M_i, p_i)$ — как матрицу-строку $(f_i)_k=\beta_k g_{ik} p_k$. Тогда прямое вычисление показывает, что f_i и g_i — взаимно обратные гомоморфизмы над U_i. Над $U_i \cap U_j$ мы имеем

$$g_j^{-1} \cdot g_i = f_j \cdot g_i = \sum_k \beta_k g_{jk} p_k \beta_k g_{ki} p_i = \sum_k (\beta_k)^2 g_{ji} = g_{ji}.$$

В силу 3.3 отсюда следует, что (M, p) является расслоением, полученным склеиванием расслоений E_i. □

6.26. Пример. Пусть X — локально-компактное пространство, X_1 — открытое относительно-компактное подпространство в X и $X=X_1 \cup X_2$, где X_2 открыто. Обозначим через K компактное пространство $\bar{X}_1$. Пусть (α_1', α_2') — разбиение единицы, ассоциированное с покрытием K множествами $\bar{X}_1$ и $X_2 \cap K$. Тогда $\alpha_2'|_{K \setminus X_1}=1$ и функция α_2' может быть продолжена единицей на $X \setminus K$. Если обозначить через α_2 это продолжение, то пара (α_1', α_2) определяет разбиение единицы, ассоциированное с (X_1, X_2). В частности, если $E_1 \in \operatorname{Ob} \mathcal{E}'(\bar{X}_1)$, $E_2 \in \operatorname{Ob} \mathcal{E}'(X_2)$ и α: $E_1|_{X_1 \cap X_2} \to E_2{}_{X_1 \cap X_2}$ — изоморфизм, то расслоение, получаемое склеиванием E_1 и E_2 с помощью α, является прямым слагаемым тривиального расслоения.

7. Гомотопическая теория векторных расслоений

7.1. Теорема. *Пусть X — компактное пространство и E — векторное расслоение над $X \times I$, где $I=[0, 1]$. Пусть α_t: $X \to X \times I$ и Π: $X \times I \to X$ — непрерывные отображения, задаваемые формулами $\alpha_t(x)=(x, t)$ и $\Pi(x, u)=x$ для $x \in X$ и $(t, u) \in I^2$. Тогда векторные расслоения $E_0=\alpha_0^*(E)$ и $E_1=\alpha_1^*(E)$ изоморфны.*

Доказательство. Пусть $E_t=\alpha_t^*(E)$. Тогда векторные расслоения E и $\Pi^*(E_t)$ изоморфны на подмножестве $X \times \{t\}$ пространства $X \times I$. Согласно 5.11, существует такая окрестность $V \subset X \times I$ множества $X \times \{t\}$, что расслоения $E|_V$ и $\Pi^*(E_t)|_V$ изоморфны. Так как пространство X компактно, окрестность V должна содержать подмножество вида $X \times U$, где U — окрестность точки t в I. Следовательно, для фиксированной точки $t \in I$ существует такая окрестность U этой точки, что $E_u \approx E_t$ для $u \in U$. Из связности отрезка I вытекает, что расслоения E_0 и E_1 изоморфны. □

7.2. Теорема. *Пусть X — компактное пространство и $f_0, f_1\colon X \to Y$ — два непрерывных гомотопных отображения. Если E — векторное расслоение над Y, то векторные расслоения $f_0^*(E)$ и $f_1^*(E)$ изоморфны (определение f^* для общего случая см. в 2.6).*

Доказательство. Пусть $F\colon X \times I \to Y$ — такое непрерывное отображение, что $f_t = F \cdot \alpha_t$ для $t = 0, 1$. Тогда $f_0^*(E) = (F \cdot \alpha_0)^*(E) = \alpha_0^*(F^*(E)) = (F^*(E))_0$ и $f_1^*(E) = (F \cdot \alpha_1)^*(E) = \alpha_1^*(F^*(E)) = (F^*(E))_1$. Применяя предыдущую теорему к расслоению $F^*(E)$ над $X \times I$, получаем требуемое утверждение. □

7.3. Теорема. *В обозначениях теоремы 7.1 расслоения E и $\Pi^* E_0$ изоморфны.*

Доказательство. Пусть $p\colon X \times I \times I \to X \times I$ — отображение, определенное формулой $p(x, t, u) = (x, tu)$. Тогда $E' = p^*(E)$ является векторным расслоением над $X' \times I$, где $X' = X \times I$. Но $E'_0 \approx \Pi^* E_0$ и $E'_1 \approx E$. Применяя теорему 7.1, получаем, что расслоения E и $\Pi^* E_0$ изоморфны. □

7.4. Теорема. *Пусть X — стягиваемое компактное пространство. Тогда каждое расслоение над X тривиально.*

Доказательство. Пусть x_0 — некоторая точка X, $i\colon X \to \{x_0\}$ и $j\colon \{x_0\} \to X$ — отображения проекции и вложения. Тогда композиция $j \cdot i$ гомотопна тождественному отображению пространства X. Для любого векторного расслоения E над X имеем $E \approx i^*(j^*(E))$. Так как расслоение $F = j^*(E)$ тривиально, то расслоение $E = i^*(F)$ также тривиально. □

7.5. Замечание. Используя значительно более сложные рассуждения, можно доказать предыдущую теорему в случае, когда пространство X паракомпактно (см. Хьюзмоллер [1]).

7.6. Теорема. *Если пространство X компактно, то отображения*

$$\pi_{n-1}(\mathrm{GL}_p(k))/\pi_0(\mathrm{GL}_p(k)) \to \Phi_p^k(S^n)$$

и

$$[X, \mathrm{GL}_p(k)]'/\pi_0(\mathrm{GL}_p(k)) \to \Phi_p^k(S'(X)),$$

определенные соответственно в 3.10 и 3.14, биективны.

Доказательство. Поскольку второе отображение является обобщением первого, будем рассматривать только второе отображение. Согласно 3.14, достаточно доказать, что любое расслоение над $S'(X)$ изоморфно расслоению вида E_f, где $f\colon X \to \mathrm{GL}_p(k)$ — непрерывное отображение и $f(e) = 1$. Если E — расслоение над $S'(X)$, то его ограничения на C^+X и C^-X тривиальны, поскольку пространства C^+X и C^-X стягиваемы. Пусть $E_1 = C^+X \times k^p$, $E_2 = C^-X \times k^p$ и $g_1\colon E_1 \to E|_{C^+X}$, $g_2\colon E_2 \to E|_{C^-X}$ — изоморфизмы. Согласно теореме 3.2, E изоморфно расслоению, полученному из расслоений E_1 и E_2 склеиванием при помощи функции перехода $g_{21}\colon E_1|_{X \times \{0\}} \to E_2|_{X \times \{0\}}$, где $g_{21} = (g_2|_X)^{-1} \times (g_1|_X)$ и $X \approx X \times \{0\}$. Пусть $f\colon X \to \mathrm{GL}_p(k)$ — отображение, определенное формулой $f(x) = g_{21}(x) \cdot (g_{21}(e))^{-1}$. Тогда вычисления, проделанные в 3.9, применительно к $S'(X)$ показывают, что расслоение E изоморфно расслоению E_f. □

7.7. Предложение. *Пусть T — векторное расслоение с базой X и p, p' — такие два проектора в T, что $\operatorname{Im} p \approx \operatorname{Im} p'$ Пусть $\bar{p}$ и $\bar{p}'$ — проекторы расслоения $T \oplus T$, определенные формулами $\bar{p} = p \oplus 0_T$ и $\bar{p}' = p' \oplus 0_T$. Тогда существует автоморфизм δ расслоения $T \oplus T$, изотопный тождественному изоморфизму и такой, что $\bar{p}' = \delta \cdot \bar{p} \cdot \delta^{-1}$.*

Доказательство. Положим $T_1 = \operatorname{Im} p$, $T_2 = \operatorname{Im}(1-p)$, $T_1' = \operatorname{Im} p'$ и $T_2' = \operatorname{Im}(1-p')$. Тогда расслоение $T \oplus T$ можно представить в виде $T_1 \oplus T_2 \oplus T_1' \oplus T'$. Заметим, что любой изоморфизм α: $T_1 \to T_1'$ индуцирует автоморфизм δ расслоения $T \oplus T$, задаваемый матрицей

$$\delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha^{-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В таком матричном представлении проекторы $\bar{p}$ и $\bar{p}'$ имеют вид

$$\bar{p} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{p}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

и простое вычисление показывает, что $\bar{p}' = \delta \cdot \bar{p} \cdot \delta^{-1}$. С другой стороны, на прямом слагаемом $T_1 \oplus T_1'$ расслоения $T \oplus T$ автоморфизм

$$\delta' = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha^{-1} \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

изотопен тождественному: для доказательства достаточно рассмотреть произведение

$$\begin{pmatrix} 1 & -t\alpha^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t\alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -t\alpha^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad t \in I.$$

Следовательно, автоморфизм $\delta = \delta' \oplus \operatorname{Id}_{T_2 \oplus T_2'}$ также изотопен тождественному. □

7.8. Обозначим через $\operatorname{Proj}_n(k^N)$ для $N \geqslant n$ пространство проекционных операторов q на k^N, для которых $\dim(\operatorname{Im} q) = n$. Непрерывное отображение g: $Y \to \operatorname{Proj}_n(k^N)$ определяет проектор $p = \hat{g}$ тривиального расслоения $T = Y \times k^N$, а значит, векторное расслоение $\xi_g = \operatorname{Im} p$ ранга n над Y. Если f: $X \to Y$ — непрерывное отображение, то очевидно, что $\xi_{g \cdot f} = f^*(\xi_g)$. В частности, мы можем положить $Y = \operatorname{Proj}_n(k^N)$ и $g = \operatorname{Id}_Y$. Получающееся расслоение $\xi_{n, N} = \xi_g$ называется *каноническим расслоением над* $\operatorname{Proj}_n(k^N)$. Если f: $X \to \operatorname{Proj}_n(k^N)$, то векторное расслоение ξ_f в соответствии с указанной выше формулой есть просто $f^*(\xi_{n,N})$. Далее, если пространство X компактно, то теорема 7.2 показывает, что с точностью до изоморфизма расслоение $\xi_f = f^*(\xi_{n,N})$ зависит только от гомотопического класса отображения f. Следовательно, соответствие $f \longmapsto \xi_f$ определяет отображение

$$C_{n,N}\colon [X, \operatorname{Proj}_n(k^N)] \to \Phi_n^k(X).$$

Для $N' \geqslant N$ мы имеем инъективное отображение $i_{N',N}\colon \operatorname{Proj}_n(k^N) \to \operatorname{Proj}_n(k^{N'})$, определенное правилом $q \longmapsto q \oplus 0$ (здесь пространство $k^{N'}$ отождествляется с прямой суммой $k^N \oplus k^{N'-N}$). Следовательно, переходя к прямому пределу, мы видим, что отображения $C_{n,N}$ индуцируют отображение

$$C_n\colon \operatorname{inj\,lim}[X, \operatorname{Proj}_n(k^N)] \to \Phi_n^k(X).$$

7.9. Теорема. *Для любого компактного пространства X определенное выше отображение C_n биективно.*

Доказательство. a) C_n *сюръективно.* Пусть ξ — векторное расслоение над X. Поскольку X компактно, то $\xi \approx \operatorname{Im} p$, где $p\colon T \to T$ — проекционный оператор на тривиальном расслоении $T = X \times k^N$ (6.5). Следовательно, $\xi \approx \xi_{\check{p}}$, где $\check{p}$ — отображение из X в $\operatorname{Proj}_n(k^N)$, канонически ассоциированное с проектором p (1.12).

b) C_n *инъективно.* Достаточно проверить следующее утверждение. Пусть $f_0, f_1\colon X \to \operatorname{Proj}_n(k^N)$ — такие непрерывные отображения, что $\xi_{f_0} \approx \xi_{f_1}$. Тогда отображения $\overline{f}_\alpha = i_{2N,N} \cdot f_\alpha$ для $\alpha = 0, 1$ гомотопны. Для доказательства этого утверждения рассмотрим проекторы $p_\alpha = \hat{f}_\alpha$ на расслоении $T = X \times k^N$, ассоциированные с отображениями f_α (1.12). Согласно предложению 7.7, существует автоморфизм δ тривиального расслоения $T \oplus T$, изотопный тождественному и такой, что $\overline{p}_1 = \delta \cdot \overline{p}_0 \cdot \delta^{-1}$, где $\overline{p}_\alpha = p_\alpha \oplus 0_T$. Следовательно, отображение $\overline{p}_0$ гомотопно отображению $\overline{p}_1$ в пространстве проекторов расслоения $T \oplus T$, а отображение $\overline{f}_0 = \overline{\check{p}}$ гомотопно отображению $\overline{f}_1 = \overline{\check{p}}_1$ в пространстве отображений из X в $\operatorname{Proj}_n(k^{2N})$. $\square$

7.10. Следствие. *Положим* $\operatorname{BGL}_n(k) = \operatorname{inj\,lim} \operatorname{Proj}_n(k^N)$. *Тогда для компактного пространства X отображение C_n индуцирует изоморфизм*

$$[X, \operatorname{BGL}_n(k)] \approx \Phi_n^k(X).$$

Доказательство. Так как пространство X компактно, а пространство $\operatorname{Proj}_n(k^N)$ замкнуто в $\operatorname{Proj}_n(k^{N'})$ для $N' \geqslant N$, то $\operatorname{inj\,lim}[X, \operatorname{Proj}_n(k^N)] \approx [X, \operatorname{inj\,lim} \operatorname{Proj}_n(k^N)] = [X, \operatorname{BGL}_n(k)]$ (Каруби [1]). $\square$

* ***7.11. Замечание.*** Следствие 7.10 верно и в случае, когда пространство X паракомпактно. *

7.12. Введем в пространстве $\mathbb{R}^n$ (соотв. в $\mathbb{C}^n$) билинейную (соотв. эрмитову) форму, заданную формулой $\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \left(\text{соотв. } \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i\right)$. Произвольное n-мерное подпространство M в k^N определяет самосопряженный проекционный оператор p на k^N ($k = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), задаваемый условиями $\operatorname{Im}(p) = M$ и $\operatorname{Im}(1-p) = M^{\perp}$. Обозначим через $G_n(k^N)$ множество всех n-мерных подпространств пространства k^N. Из сказанного выше следует, что существует взаимно-однозначное соответствие между $G_n(k^N)$ и подпространством в $\operatorname{Proj}_n(k^N)$, состоящим из самосопряженных проекционных операторов. Снабдим множество $G_n(k^N)$ топологией, индуцированной этим взаимно-однозначным соответствием (в действительности множество $G_n(k^N)$ может быть наделено структурой гладкого многообразия; оно называется *многообразием Грассмана*).

7.13. Предложение. *Многообразие Грассмана* $G_n(k^N)$ *является деформационным ретрактом пространства* $\operatorname{Proj}_n(k^N)$.

Доказательство. Если h — самосопряженный положительный оператор в k^N, то он имеет однозначно определенный положительный самосопряженный квадратный корень $\sqrt{h}$, который непрерывно зависит от h. Пусть

$$F\colon \operatorname{Proj}_n(k^N) \times I \to \operatorname{Proj}_n(k^N)$$

— отображение, определенное формулой $F(p, t) = \alpha \cdot p \cdot \alpha^{-1}$, где $\alpha = \sqrt{1 + tJ^* \cdot J}$, $J = 2p - 1$. Тогда $F(p, t) = p$ для $p \in G_n(k^N)$, $F(p, 0) = p$ и $F(p, 1) \in G_n(k^N)$, так как $\alpha^2 \cdot p\alpha^{-2} = p^*$ при $t = 1$. $\square$

7.14. Теорема. *Положим* $BO(n) = \operatorname{inj\,lim} G_n(\mathbb{R}^N)$ *и* $BU(n) = \operatorname{inj\,lim} G_n(\mathbb{C}^N)$. *Тогда для любого компактного пространства* X *отображение* C_n *индуцирует изоморфизмы*

$$[X, BO(n)] \approx \Phi_n^{\mathbb{R}}(X) \text{ и } [X, BU(n)] \approx \Phi_n^{\mathbb{C}}(X).$$

Доказательство. Это прямое следствие теоремы 7.9 и предложения 7.13. $\square$

7.15. Другое описание пространств $\operatorname{Proj}_n(k^N)$ и $G_n(k^N)$ может быть дано в терминах однородных пространств. Символ $O_r(k)$ будет обозначать группу $O(r)$, если $k = \mathbb{R}$, и группу $U(r)$, если $k = \mathbb{C}$. Пусть p_0 — проектор пространства $k^N = k^n \oplus k^{N-n}$, заданный формулой $p = \mathrm{Id}_{k^n} \oplus 0_{k^{N-n}}$, и пусть $\rho\colon GL_N(k) \to \operatorname{Proj}_n(k^N)$ и $\sigma\colon O_N(k) \to G_n(k^N)$ — отображения, определяемые формулами $\rho(\alpha) = \alpha \cdot p_0 \cdot \alpha^{-1}$ и $\sigma = \rho|_{O_N(k)}$.

7.16. Предложение. *Отображения* ρ *и* σ *индуцируют гомеоморфизмы*

$$\bar{\rho}\colon GL_N(k)/GL_n(k) \times GL_{N-n}(k) \xrightarrow{\approx} \operatorname{Proj}_n(k^N),$$

$$\bar{\sigma}\colon O_N(k)/O_n(k) \times O_{N-n}(k) \xrightarrow{\approx} G_n(k^N).$$

Доказательство. Определим на пространстве $\mathrm{Proj}_n(k^N)$ непрерывное транзитивное действие группы $\mathrm{GL}_N(k)$, полагая $(\alpha, p)\mapsto \alpha p\alpha^{-1}$. Тогда, как $\mathrm{GL}_N(k)$-множество, пространство $\mathrm{Proj}_n(k^N)$ может быть отождествлено с однородным пространством $\mathrm{GL}_N(k)/G_0$, где G_0 — подгруппа в $\mathrm{GL}_N(k)$, состоящая из таких матриц α, что $\alpha\cdot p_0\alpha^{-1}=p_0$. Подгруппа G_0 изоморфна подгруппе $\mathrm{GL}_n(k)\times\mathrm{GL}_{N-k}(k)$, вложенной в $\mathrm{GL}_N(k)$ посредством отображения

$$(\alpha_1\ \alpha_2)\mapsto\begin{pmatrix}\alpha_1 & 0\\ 0 & \alpha_2\end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы получаем непрерывное биективное отображение

$$\bar\rho\colon \mathrm{GL}_N(k)/\mathrm{GL}_n(k)\times\mathrm{GL}_{N-n}(k)\to\mathrm{Proj}_n(k^N).$$

Совершенно аналогично мы получаем непрерывное биективное отображение

$$\bar\sigma\colon \mathrm{O}_N(k)/\mathrm{O}_n(k)\times\mathrm{O}_{N-n}(k)\to\mathrm{G}_n(k^N),$$

являющееся фактически ограничением отображения $\bar\rho$. Всё, что нам осталось сделать,— это доказать, что $\bar\rho$ — открытое отображение. Для этого мы построим непрерывное сечение для отображения ρ в окрестности каждой точки $p\in\mathrm{Proj}_n(k^N)$. Если $\alpha\in\mathrm{GL}_N(k)$ — такой элемент, что $\rho(\alpha)=p$, то отображение $s\colon\mathrm{Proj}_n(k^N)\to\mathrm{GL}_N(k)$, задаваемое формулой $s(q)=(1-p-q+2qp)\alpha$ (точка q принадлежит окрестности p), является требуемым сечением. В самом деле,

$$\begin{aligned}s(q)\cdot p_0&=(1-p-q+2qp)\cdot\alpha\cdot p_0=(1-p-q+2qp)\cdot p\cdot\alpha\\&=q(1-p-q+2qp)\cdot\alpha=q\cdot s(q).\ \square\end{aligned}$$

Упражнения: 16, 27, 29, 31—33.

8. Метрики и формы на векторных расслоениях

Пусть $\lambda\mapsto\bar\lambda$ — непрерывная инволюция поля $k=\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Хорошо известно, что единственными такими инволюциями являются тождественное отображение и комплексное сопряжение (если $k=\mathbb{C}$).

8.1. Определение. Пусть E есть k-векторное расслоение над пространством X. *Полуторалинейной формой* на E называется всякое непрерывное отображение $\varphi\colon E\times_X E\to k$, обладающее следующим свойством. Отображение $\varphi_x\colon E_x\times E_x\to k$, индуцированное на каждом слое, ***полуторалинейно*** относительно структуры k-векторного пространства на E_x. Другими словами, оно $\mathbb{R}$-билинейно и $\varphi_x(\lambda e, e')=\varphi_x(e,\bar\lambda e')=\lambda\varphi_x(e,e')$ для $\lambda\in k$, $e\in E_x$, $e'\in E_x$.

8.2. Если $E=X\times k^n$ — тривиальное расслоение, то каждая полуторалинейная форма φ индуцирует непрерывное отображение $\check\varphi\colon X\to M_n(k)$ по формуле $\check\varphi(x)=(a_{ji}(x))$, где $a_{ji}(x)=\varphi_x(e_i, e_j)$ и (e_i) —

канонический базис в k^n. Обратно, любое непрерывное отображение θ: $X \to M_n(k)$ индуцирует полуторалинейную форму $\hat{\theta}$ на E: над каждой точкой x базы X эта форма определяется матрицей $\theta(x) = (a_{ji}(x))$. В более явном виде имеет место формула

$$\hat{\theta}_x\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i,\ \sum_{j=1}^{n} \mu_j e_j\right) = \sum_{i,j} a_{ji}(x)\, \lambda_i \bar{\mu}_j,$$

показывающая, что отображение $\hat{\theta}$ непрерывно, если непрерывно отображение θ.

8.3. Для произвольного векторного расслоения E обозначим через ${}^tE$ дуальное расслоение E^*, если инволюция поля k тривиальна, и *антидуальное* расслоение $\bar{E}^*$, если $k = \mathbb{C}$ и инволюция совпадает с комплексным сопряжением (см. 4.8, d) и e)). Тогда каждая полуторалинейная форма φ индуцирует морфизм ψ из E в ${}^tE$ следующим образом. На каждом слое E_x морфизм ψ_x: $E_x \to ({}^tE)_x = {}^tE_x$ задается формой φ_x по формуле $\psi_x(e)(e') = \varphi_x(e, e')$. Для того чтобы доказать, что отображение ψ непрерывно, рассмотрим такое открытое множество U в X, над которым $E_U \approx U \times k$. В этом случае ${}^tE$ также можно отождествить с $U \times k^n$ и на каждом слое $E_x = k^n$ отображение ψ задается линейным отображением, определяемым матрицей $\check{\varphi}(x)$. Следовательно, в силу 8.2 и 1.12, отображение ψ непрерывно. Обратно, аналогичными рассуждениями показывается, что каждый морфизм из E в ${}^tE$ определяет полуторалинейную форму на E. Полуторалинейная форма φ называется *невырожденной*, если индуцированный морфизм $E \to {}^tE$ является изоморфизмом.

8.4. Пусть $\varepsilon = \pm 1$. Полуторалинейная форма φ на E называется *ε-симметричной*, если $\varphi_x(e', e) = \varepsilon \overline{\varphi_x(e, e')}$, где e и e' — векторы, лежащие в одном и том же слое E_x. Это условие эквивалентно равенству $\psi' = \varepsilon\psi$, где ψ' — композиция морфизмов $E \approx t({}^tE) \xrightarrow{{}^t\psi} {}^tE$, а ${}^t\psi$ — морфизм, транспонированный к ψ. Если $\varepsilon = 1$ (соотв. $\varepsilon = -1$) и инволюция тривиальна, такие формы называются *симметричными* (соотв. *кососимметричными*). Если $\varepsilon = 1$, $k = \mathbb{C}$ и инволюция есть комплексное сопряжение, такие формы называются *эрмитовыми* (в этой ситуации нет необходимости рассматривать формы с $\varepsilon = -1$, поскольку такие формы получаются из эрмитовых умножением на $i = \sqrt{-1}$).

8.5. Определение. Пусть E — вещественное векторное расслоение (соотв. комплексное векторное расслоение). *Метрикой* на E называется такая симметричная билинейная форма (соотв. эрмитова форма) на E, что $\varphi_x(e, e) > 0$ для любого ненулевого вектора e из E_x. Две такие метрики φ_0 и φ_1 называются *гомотопными*, если на расслоении π^*E (π: $X \times I \to X$) существует такая метрика φ, что $\varphi|_{X \times \{\alpha\}} = \varphi_\alpha$, $\alpha = 0, 1$. Наконец, две метрики φ_0 и φ_1 называются *изоморфными*, если существует такой автоморфизм f векторного расслоения E, что $\varphi_1(f(e), f(e')) = \varphi_0(e, e')$.

8.6. Замечание. Очевидно, что метрики на векторных расслоениях всегда невырожденны. Мы будем использовать метрики на векторных расслоениях для того, чтобы расщеплять их в прямые суммы (9.35).

8.7. Теорема. *Если база векторного расслоения E паракомпактна, то на E существует метрика. В частности, в этом случае $E \approx {}^tE$. Далее, для любой базы (не обязательно паракомпактной) любые две метрики φ_0 и φ_1 гомотопны.*

Доказательство. Докажем вначале второе утверждение теоремы. Мы можем отождествить расслоение $\pi^*E \times_{X \times I} \pi^*E$, где $\pi\colon X \times I \to X$, с расслоением $(E \times_X E) \times I$. Определим теперь метрику φ на π^*E, полагая $\varphi(e, e', t) = t\varphi_0(e, e') + (1-t)\varphi_1(e, e')$, где векторы e и e' принадлежат одному и тому же слою. Если $e \neq 0$, то мы имеем $\varphi(e, e, t) > 0$, откуда следует, что форма φ является метрикой.

Доказательство первого утверждения теоремы разобьем на три части.

a) $E = X \times k^n$. Тогда $E \times_X E \approx X \times k^n \times k^n$ и мы задаем метрику φ на E формулой

$$\varphi(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_n) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \bar{\mu}_j.$$

b) *E изоморфно $X \times k^n$.* Пусть $f\colon E \to T = X \times k^n$ — произвольный изоморфизм, и пусть $f_1\colon E \times_X E \to T \times_X T$ — изоморфизм, индуцированный при помощи f. Если φ — метрика на расслоении T, определенная в a), то очевидно, что $\varphi \cdot f_1$ является метрикой на расслоении E.

c) *E — произвольное расслоение.* Пусть (U_i), $i \in I$, — такое локально-конечное открытое покрытие пространства X, что каждое ограничение E_{U_i} тривиально, и пусть (α_i) — разбиение единицы, ассоциированное с покрытием (U_i), а σ_i — метрика на расслоении E_{U_i}. Пусть $\varphi_i\colon E \times E \to k$ — отображение, определенное формулами

$$\varphi_i(e, e') = \begin{cases} \alpha_i(x)\sigma_i(e, e'), & \text{если } x \in U_i,\ e \text{ и } e' \in E_x, \\ 0, & \text{если } x \notin U_i,\ e \text{ и } e' \in E_x. \end{cases}$$

Отображение φ_i непрерывно, так как носитель α_i содержится в U_i. Таким образом, мы определили форму на расслоении E, симметричную, если $k = \mathbb{R}$, и эрмитову, если $k = \mathbb{C}$. Пусть теперь $\varphi\colon E \times_X E \to k$ — отображение, задаваемое формулой $\varphi(e, e') = \sum_{i \in I} \varphi_i(e, e')$, где векторы e и e' принадлежат одному и тому же слою. Эта сумма корректно определена и представляет собой непрерывное отображение, так как в окрестности слоя $\pi^{-1}(\{x\})$, где $\pi\colon E \to X$, все $\varphi_i(e, e') = 0$, за исключением конечного числа индексов. Далее, отображение φ является метрикой, поскольку для ненулевого вектора $e \in E_x$ и такого индекса $i \in I$, что $\alpha_i(x) > 0$, мы имеем $\varphi(e, e) \geqslant \alpha_i(x)\varphi_i(e, e) > 0$. $\square$

8.8. Теорема. *Пусть φ_0 и φ_1 — две метрики на векторном расслоении E с произвольной базой X. Тогда φ_0 и φ_1 изоморфны.*

Доказательство. Пусть $\psi_0: E \to {}^tE$ и $\psi_1: E \to {}^tE$ — изоморфизмы, каноническим образом ассоциированные с метриками φ_0 и φ_1 (8.3). Тогда отображение $\psi_0^{-1}\psi_1 = h$ является автоморфизмом E, самосопряженным и положительным на каждом слое относительно метрики φ_0. Если обозначить через f его самосопряженный положительный квадратный корень, то мы имеем

$$\varphi_0(f(e), f(e')) = \varphi_0(f^2(e), e') = \psi_0(\psi_0^{-1}\psi_1(e))(e') = \psi_1(e)(e') = \varphi_1(e, e'). \ \square$$

8.9. Следствие. *Пусть X — компактное пространство и E — векторное расслоение над $X \times I$, снабженное метрикой φ. Тогда векторные расслоения $E_0 = E|_{X+\{0\}}$ и $E_1 = E_{X\times\{1\}}$ изометричны (т. е. существует согласованный с метрикой изоморфизм между E_0 и E_1).*

Доказательство. Согласно теореме 7.1, векторные расслоения E_0 и E_1 изоморфны. Пусть $f: E_0 \to E_1$ — соответствующий изоморфизм. Обозначим через E_0' векторное расслоение E_0, снабженное метрикой $\varphi_1 \cdot f$. Тогда f индуцирует изометрию между расслоениями E_0' и E_1, которую мы также обозначим через f. Согласно 8.8, мы имеем изометрию $g: E_0 \to E_0'$. Поэтому композиция $g \cdot f$ является изометрией между E_0 и E_1. $\square$

8.10. Пусть E — вещественное векторное расслоение, снабженное невырожденной симметричной билинейной формой θ. Над каждой точкой x из X форма θ индуцирует форму θ_x. Классические теоремы теории квадратичных форм показывают, что пространство E_x может быть представлено в виде ортогональной суммы $V^+ \oplus V^-$, где ограничение θ_x на V^+ (соотв. V^-) положительно-определенно (соотв. отрицательно-определенно). Целые числа $p(x) = \dim(V^+)$ и $q(x) = \dim(V^-)$ не зависят от разложения в прямую сумму и являются локально-постоянными функциями от x.

8.11. Теорема. *Пусть E — вещественное векторное расслоение с базой X, снабженное невырожденной симметричной билинейной формой θ. Тогда E можно представить в виде ортогональной суммы $E^+ \oplus E^-$, где ограничение θ на E^+ (соотв. E^-) положительно-определенно (соотв. отрицательно-определенно). Кроме того, это разложение единственно с точностью до изоморфизма.*

Доказательство. Пусть φ — некоторая метрика на E (8.7), $\psi: E \xrightarrow{\approx} {}^tE = E^*$ — изоморфизм, ассоциированный с метрикой φ, и $\chi: E \xrightarrow{\approx} {}^tE$ — изоморфизм, ассоциированный с формой θ. Тогда композиция $\omega = \psi^{-1}f$ является самосопряженным автоморфизмом расслоения E, согласованным с метрикой φ. Следовательно, автоморфизм ω можно представить в виде $h \cdot u$, где $h = \sqrt{\omega^2}$ (положительный корень) и $u = h^{-1}\omega$. В более явном виде, если представить ω_x в некотором ортогональном базисе матрицей $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, то h_x есть диагональная матрица $\operatorname{diag}(|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_n|)$. Автоморфизмы h и ω коммутируют, и мы имеем $u^2 = \omega h^{-1} \omega h^{-1} = \omega^2 h^{-2} = 1$. Пусть $p = (1-u)/2$; тогда p является проекционным оператором (см. 6.3) и мы можем разложить расслоение E в сумму $E = E^+ \oplus E^-$, где $E^+ = \operatorname{Ker} p$ и $E^{-1} = \operatorname{Ker}(1-p)$. Если $e \in E_x^+$ и $e \neq 0$, то $\theta(e, e) = \varphi(\omega(e), e) = \varphi(h(e), e) > 0$. Точно так же для $e \in E_x^- - \{0\}$ мы имеем $\theta(e, e) < 0$. Кроме того, расслоения E^+ и E^- ортогональны относительно обеих форм θ и φ.

Обратно, предположим, что расслоение E может быть представлено в виде $E^+ \oplus E^-$, где ограничение формы θ на E^+ (соотв. E^-) положительно-определенно (соотв. отрицательно-определенно), причем E^+ и E^- ортогональны. Используя предыдущий метод, мы получаем, что это разложение ассоциировано с метрикой φ, задаваемой формулой

$$\varphi_x(e, e') = \begin{cases} \theta_x(e, e'), & \text{если } e, e' \in E_x^+, \\ -\theta_x(e, e'), & \text{если } e, e' \in E_x^-, \\ 0, & \text{если } e \in E_x^+, e' \in E_x^- \text{ или } e \in E_x^-, e' \in E_x^+. \end{cases}$$

В самом деле, в этом случае автоморфизм h тождествен.

Наконец, пусть $E = E_0^+ \oplus E_0^-$ и $E = E_1^+ \oplus E_1^-$ — два ортогональных разложения расслоения E. На основании только что сказанного эти разложения ассоциированы с корректно определенными метриками φ_0 и φ_1. Так как эти метрики гомотопны (8.7), то над $X \times I$ существует расслоение F, снабженное метрикой φ и симметричной билинейной формой $\Pi^*\theta$, где $\Pi\colon X \times I \to X$, такое что $(F, \varphi, \Pi^*\theta)|_{X\times\{0\}} \approx (E, \varphi_0, \theta)$ и $(F, \varphi, \Pi^*\theta)|_{X\times\{1\}} \approx (E, \varphi_1, \theta)$. Следовательно, над $X \times I$ существует такое расслоение F^+ (соотв. F^-), что $F^+|_{X\times\{0\}} \approx E_0^+$ и $F^+|_{X\times\{1\}} \approx E_1^+$ (соотв. $F^-|_{X\times\{0\}} \approx E_0^-$ и $F^-|_{X\times\{1\}} \approx E_1^-$). Поэтому в силу теоремы 7.1 расслоения E_0^+ и E_1^+ (соотв. E_0^- и E_1^-) изоморфны. $\square$

8.12. В случае вещественных векторных расслоений, снабженных кососимметричными формами, или комплексных расслоений, снабженных симметричными, кососимметричными или эрмитовыми формами, имеют место аналогичные теоремы (см. упр. 18—21).

Упражнения: 18—26.

9. Упражнения

9.1. Доказать, что TS^1 и TS^3 — тривиальные расслоения.

9.2. *Числами Кэли* называются пары (q_1, q_2), где q_1 и q_2 — элементы тела кватернионов $\mathbb{H}$. Снабдим множество C чисел Кэли структурой (неассоциативной) алгебры, полагая

$$(q_1, q_2) + (q_1', q_2') = (q_1 + q_1', q_2 + q_2'),$$
$$(q_1, q_2) \cdot (q_1', q_2') = (q_1 q_1' - \bar{q}_2' q_2, q_2' q_1 + q_2 \bar{q}_1'),$$

где $\bar{q} = a - bi - cj - dk$ для $q = a + bi + cj + dk$.

1) Доказать, что алгебра C не имеет делителей нуля (т. е. из равенства $c \cdot c' = 0$ следует, что $c = 0$ или $c' = 0$).

2) Доказать, что TS^7 — тривиальное расслоение.

3) Более общо, доказать, что если пространство $\mathbb{R}^n$ можно снабдить структурой $\mathbb{R}$-алгебры без делителей нуля, то расслоение TS^{n-1} тривиально.

9.3. Пусть E'' — векторное расслоение, рассмотренное в 1.9, и $f\colon S^1 \to S^1$ — отображение, задаваемое формулой $f(z) = z^2$. Доказать, что $f^*(E)$ — тривиальное расслоение.

9.4. Доказать, что расслоение $E'' \oplus E'' \oplus \ldots \oplus E''$ (n раз) тривиально тогда и только тогда, когда n четно (здесь E'' — расслоение, определенное в 1.9).

9.5. Пусть E и F — векторные расслоения над X и $f\colon E \to F$ — морфизм.

a) Доказать, что $\dim(\operatorname{Ker} f_x)$ — полунепрерывная снизу функция от x.

b) Предположим, что f выбран так, что $\dim(\operatorname{Ker} f_x)$ — непрерывная функция от x. Доказать, что векторное квазирасслоение, определенное равенством $\operatorname{Ker} f = \coprod_{x \in X} \operatorname{Ker}(f_x) \subset E$, является векторным расслоением. Служит ли $\operatorname{Ker} f$ ядром f в категории $\mathscr{E}(X)$?

c) Доказать утверждения, аналогичные утверждениям a) и b), для $\operatorname{Coker}(f)$.

* ***9.6.*** Доказать, что касательное расслоение ко всякой группе Ли тривиально. *

9.7. Задать на сфере S^n дифференцируемую структуру таким образом, чтобы векторное расслоение TS^n, определенное в 1.3, стало касательным расслоением к S^n

* ***9.8.*** Доказать, что если пространство X паракомпактно, то множество $\Phi_1^{\mathbb{R}}(X)$ естественно изоморфно множеству классов изоморфных двулистных накрытий над X. *

9.9. Пусть (e_1, e_2, e_3) — канонический базис в $\mathbb{R}^3$ и $x \in \mathbb{R}^3$ — вектор единичной длины. Для $\varepsilon = \pm 1$ и $x \neq -\varepsilon e_3$ обозначим через $\mathbb{R}(x, \varepsilon e_3)$ вращение в $\mathbb{R}^3$, переводящее εe_3 в x и оставляющее неподвижными векторы, ортогональные x и εe_3.

a) Вычислить матрицу вращения $R(x, \varepsilon e_3)$ и показать, что она непрерывно зависит от вектора x ($x \neq -\varepsilon e_3$).

b) Вычислить матрицу вращения $R(x, -e_3)^{-1} R(x, e_3)$, где x — вектор из $S^1 \subset S^2$, т. е. вектор, координаты которого удовлетворяют соотношениям $(x_1)^2 + (x_2)^2 - 1 = x_3 = 0$.

c) Доказать, что TS^2 изоморфно нетривиальному векторному расслоению E_f (3.4), построенному по непрерывной функции $f\colon S^1 \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, задаваемой формулой

$$f(e^{i\theta}) = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}.$$

d) Доказать, что функция $g\colon S^1 \to \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, задаваемая равенством

$$g(e^{i\theta}) = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta & 0 \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

гомотопна постоянному отображению (заметьте, что $TS^2 \oplus \theta_1$ есть тривиальное расслоение: здесь θ_1 — тривиальное расслоение ранга 1).

9.10. Пусть RP_n — проективное пространство, ассоциированное с вещественным векторным пространством $\mathbb{R}^{n+1}$.

a) Показать, что $T(RP_n)$ изоморфно факторпространству TS^n по отношению эквивалентности $(x, v) \sim (\varepsilon x, \varepsilon v)$, где $\varepsilon = \pm 1$, $x \in S^n$, $v \perp x$.

b) Пусть ξ — каноническое линейное расслоение над RP_n. Показать, что $T(RP_n) \oplus \theta_1 \approx \xi^* \oplus \xi^* \oplus \ldots \oplus \xi^*$ ($n+1$ раз), где θ_1 — тривиальное расслоение ранга 1.

9.11. Пусть CP_n — проективное пространство, ассоциированное с комплексным векторным пространством $\mathbb{C}^{n+1}$.

a) Показать, что $T(CP_n)$ может быть отождествлено с факторпространством TS^{2n+1} по отношению эквивалентности $(x, v) \sim (\lambda x, \lambda v)$, где $x \in S^{2n+1}$, $v \perp x$ и λ — комплексное число с модулем 1. Снабдить $T(CP_n)$ комплексной структурой.

b) Показать, что $T(CP_n) \oplus \eta_1$ изоморфно $\xi^* \oplus \ldots \oplus \xi^*$, где расслоение ξ^* двойственно к каноническому линейному расслоению ξ, а η_1 — *комплексное* тривиальное расслоение ранга 1.

9.12. Пусть V и W — векторные расслоения. Доказать формулы

a) $\lambda^n(V \oplus W) \approx \bigoplus\limits_{i+j=n} \lambda^i(V) \otimes \lambda^j(W)$,

b) $S^n(V \oplus W) \approx \bigoplus\limits_{i+j=n} S^i(V) \otimes S^j(W)$,

c) $V \otimes V \approx \lambda^2(V) \oplus S^2(V)$.

9.13. Пусть $\pi\colon \mathrm{O}(n)/\mathrm{O}(n-k) \to \mathrm{O}(n)/\mathrm{O}(n-1)$ — очевидное сюръективное отображение. Показать, что следующие свойства пары (n, k) эквивалентны:

(i) Существует такое непрерывное отображение $s\colon \mathrm{O}(n)/\mathrm{O}(n-1) \to \mathrm{O}(n)/\mathrm{O}(n-k)$, что $\pi \cdot s = \mathrm{Id}$.

(ii) Векторное расслоение TS^{n-1} допускает $k-1$ линейно-независимых сечений (заметьте, что $S^{n-1} \approx \mathrm{O}(n)/\mathrm{O}(n-1)$).

* *9.14.* Пусть X — клеточное разбиение размерности n и E — вещественное (соотв. комплексное) векторное расслоение над X ранга $n+p$ (соотв. $\geqslant n/2+p$). Показать, что E допускает p линейно-независимых сечений. *

9.15. Пусть X — паракомпактное пространство и E — вещественное векторное расслоение над X. Показать, что множество сечений $\Gamma(X, E)$ может быть наделено структурой пространства Фреше, функториально зависящей от E.

** **9.16.** Пусть H — бесконечномерное гильбертово пространство над k и $\mathrm{Proj}_n(H)$ — пространство таких его непрерывных эндоморфизмов q, что $q^2 = q$ и $\dim(\mathrm{Im}\, q) = n$.

a) Показать, что $\mathrm{Proj}_n(H)$ имеет тот же гомотопический тип, что и пространство $\Gamma_n(H)$, состоящее из эндоморфизмов D пространства H, обладающих следующими двумя свойствами:

(i) спектр D не пересекает оси $\mathcal{R}(z) = 1/2$;

(ii) эндоморфизм

$$p = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z - D},$$

где γ — гладкая кривая в полуплоскости $\mathcal{R}(z) > 1/2$, содержащая часть спектра D, лежащую в этой полуплоскости, принадлежит $\mathrm{Proj}_n(H)$.

b) Используя теорему Кёйпера [1] ($\mathrm{GL}(H)$ стягиваемо), показать, что $\mathrm{Proj}_n(H)$ имеет гомотопический тип пространства $\mathrm{BGL}_n(k)$. **

9.17. Вычислить $\Phi_n^{\mathbb{R}}(X)$ и $\Phi_n^{\mathbb{C}}(X)$ для $X = S^1, S^2, S^3$.

9.18. Пусть E — вещественное векторное расслоение с компактной базой, наделенное невырожденной кососимметричной формой θ. Доказать, что на E существуют комплексная структура (единственная с точностью до изоморфизма) и метрика φ, такие что $\theta(e, e') = \varphi(ie, e')$.

9.19. Пусть E — комплексное векторное расслоение с компактной базой, снабженное невырожденной эрмитовой формой θ. Доказать, что E можно представить в виде ортогональной суммы $E^+ \oplus E^-$, где ограничение θ на E^+ (соотв. E^-) положительно- (соотв. отрицательно-) определенно. Кроме того, показать, что это разложение единственно с точностью до изоморфизма.

9.20. Пусть E — комплексное векторное расслоение с компактной базой, снабженное невырожденной симметричной билинейной формой θ. Доказать существование и единственность (с точностью до изоморфизма) такого вещественного векторного расслоения $F \subset E_{\mathbb{R}}$, что

(i) E является комплексификацией F,

(ii) ограничение θ на F есть вещественная метрика.

9.21. Пусть E — комплексное векторное расслоение с компактной базой, наделенное невырожденной кососимметричной формой θ. Доказать существование и единственность с точностью до изоморфизма пары (J, φ), где

(i) J — такой автоморфизм $E_{\mathbb{R}}$, что $J^2 = -1$ и $iJ = -Ji$,

(ii) $\theta(e, e') = \varphi(Je, e')$, φ — метрика на E.

9.22. Пусть $\Phi^k(X)$ — множество классов изоморфных k-векторных расслоений над компактным пространством X ($k = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ или $\mathbb{H}$).

a) Доказать. что сумма Уитни векторных расслоений индуцирует в $\Phi^k(X)$ структуру абелева моноида.

b) Пусть $k=\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, и пусть

1) $\mathrm{Sym}_+^k(X)$ обозначает множество классов изоморфных k-векторных расслоений, снабженных невырожденной симметричной билинейной формой,

2) $\mathrm{Sym}_-^k(X)$ — множество классов изоморфных k-векторных расслоений, снабженных невырожденной кососимметричной формой,

3) $\mathrm{Herm}^{\mathbb{C}}(X)$ — множество классов изоморфных $\mathbb{C}$-векторных расслоений, снабженных невырожденной эрмитовой формой. Доказать, что сумма Уитни векторных расслоений индуцирует структуры абелевых моноидов на множествах $\mathrm{Sym}_+^k(X)$, $\mathrm{Sym}_-^k(X)$ и $\mathrm{Herm}^{\mathbb{C}}(X)$.

c) Доказать следующие изоморфизмы:

$\mathrm{Sym}_+^{\mathbb{R}}(X) \approx \Phi^{\mathbb{R}}(X)\times\Phi^{\mathbb{R}}(X)$ (используйте 8.11),

$\mathrm{Sym}_-^{\mathbb{R}}(X) \approx \Phi^{\mathbb{C}}(X)$ (используйте 9.18),

$\mathrm{Sym}_+^{\mathbb{C}}(X) \approx \Phi^{\mathbb{R}}(X)$ (используйте 9.20),

$\mathrm{Sym}_-^{\mathbb{C}}(X) \approx \Phi\mathbb{H}(X)$ (используйте 9.21),

$\mathrm{Herm}^{\mathbb{C}}(X) \approx \Phi^{\mathbb{C}}(X)\times\Phi^{\mathbb{C}}(X)$ (используйте 9.19).

9.23. a) Пусть $\mathrm{O}_{n,p}(k)$ — подгруппа группы $\mathrm{GL}_{n+p}(k), k=\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, состоящая из изометрий пространства k^{n+p}, наделенного формой $\sum_{i=1}^{n} x_i\bar{y}_i-\sum_{i=n+1}^{n+p} x_i\bar{y}_i$. Доказать, что существует деформационная ретракция $\mathrm{O}_{n,p}(k)$ на $\mathrm{O}(n)\times\mathrm{O}(p)$ для $k=\mathbb{R}$ и на $\mathrm{U}(n)\times\mathrm{U}(p)$ для $k=\mathbb{C}$.

b) Пусть $\mathrm{Sp}_{2n}(k)$ — подгруппа группы $\mathrm{GL}_{2n}(k)$, состоящая из изометрий пространства k^{2n}, наделенного кососимметричной формой $\sum_{i=1}^{n} x_iy_{i+n}-\sum_{i=1}^{n} x_{i+n}y_i$. Доказать, что $\mathrm{U}(n)$ является деформационным ретрактом $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$. Доказать, что $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ имеет гомотопический тип пространства $\mathrm{GL}_n(\mathbb{H})$.

c) Пусть $\mathrm{O}_n(\mathbb{C})$ — подгруппа группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, состоящая из изометрий пространства $\mathbb{C}^n$, снабженного квадратичной формой $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$. Доказать, что $\mathrm{O}(n)$ является деформационным ретрактом $\mathrm{O}_n(\mathbb{C})$.

9.24. Пусть E — векторное расслоение. Определить биективное соответствие между векторным пространством симметричных билинейных форм на E и пространством сечений расслоения $S^2(E^*)$. Охарактеризовать те сечения, которые соответствуют невырожденным билинейным формам. Проделать то же самое для кососимметричных форм и сечений расслоения $\lambda^2(E^*)$.

9.25. Пусть E и F — векторные расслоения, снабженные метрикой, и $f: E\to F$ — морфизм, индуцирующий эпиморфизм на каждом слое.

a) Показать, что отображение $f^*\colon F \to E$, заданное на каждом слое формулой $(f^*)_x = (f_x^*)$, является морфизмом векторных расслоений.

b) Показать, что $f \cdot f^*$ — изоморфизм векторных расслоений, изотопный тождественному изоморфизму.

* ***9.26.*** Доказать, что $\Phi_1^{\mathbb{C}}(X) \approx H^2(X; Z)$ и $\Phi_1^{\mathbb{R}}(X) \approx H^1(X; Z/2)$, если X — паракомпактное пространство. *

9.27 (обобщение упр. 9.9). Пусть $(e_1, \ldots, e_{n+1})$ — канонический базис в $\mathbb{R}^{n+1}$ и x — вектор из S^n, $x \neq \varepsilon e_{n+1}$, $\varepsilon = \pm 1$. Пусть $R(x, \varepsilon e_{n+1})$ — вращение пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, переводящее x в εe_{n+1} и оставляющее неподвижными векторы, ортогональные x и e_{n+1}.

a) Пусть $\rho_{n+1}\colon \Gamma^0(n+1) \to \mathrm{SO}(n+1)$ — накрытие группы $\mathrm{SO}(n+1)$ специальной группой Клиффорда (§ IV.4). Доказать, что $R(x, \varepsilon e_{n+1}) = \rho_{n+1}((1 + \varepsilon x e_{n+1})/2)$, и вывести отсюда непрерывность $R(x, \varepsilon e_{n+1})$ как функции от x.

b) Доказать формулу $R(x, -e_{n+1})^{-1} R(x, e_{n+1}) = \rho_{n+1}(x e_{n+1})$, $x \in S^{n-1} = S_+^n \cap S_-^n$.

c) Показать, что TS^n изоморфно векторному расслоению E_f, ассоциированному с непрерывной функцией $f\colon S^{n-1} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $f(x) = \rho_n(x e_n)$ (мы отождествляем S^{n-1} с соответствующим подмножеством в $\Gamma^0(n)$).

d) Вычислить явно матрицу $\rho_n(x e_n)$ для $n = 2, 3, \ldots$.

9.28. Пусть $\pi\colon P \to X$ — сюръективное непрерывное отображение. Говорят, что (P, π, X) есть *главное расслоение* с топологической группой G, если G послойно действует на P справа и для каждой точки $x \in X$ существуют окрестность U этой точки и эквивариантный гомеоморфизм $\pi^{-1}(U) \to U \times G$, такие что диаграмма

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr] \arrow[dr] & & U \times G \arrow[dl] \\ & U & \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Пусть теперь F — топологическое пространство, на котором G действует непрерывно слева. Ассоциируем с P и F топологическое пространство $E = P \times_G F$, представляющее собой факторпространство пространства $P \times F$ по отношению эквивалентности $(p, v) \sim (p \cdot g, g^{-1} \cdot v)$, $g \in G$. Пусть $\pi'\colon E \to X$ — проекция, определенная формулой $(p, v) \mapsto \pi(p)$.

a) Показать, что для каждой точки $x \in X$ существуют окрестность U этой точки и гомеоморфизм $\varphi_U\colon \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U \times F$, согласованный с проекцией на U.

b) Более точно, показать, что существуют такое открытое покрытие (U_i) пространства X и такие гомеоморфизмы $\varphi_{U_i}\colon \pi^{-1}(U_i)$

$\approx U_i \times F$, что $\varphi_{U_j}^{-1} \cdot \varphi_{U_i}$: $(U_i \cap U_j) \times F \to (U_i \cap U_j) \times F$ представляются в виде $(x, v) \mapsto (x, g_{ji}(x) \cdot v)$, где функции g_{ji}: $U_i \cap U_j \to G$ образуют G-коцикл.

c) Доказать, в частности, что если $F = k^n$ и G действует на F линейными преобразованиями, то E является k-векторным расслоением. Обратно, показать, что если E' — произвольное векторное расслоение ранга n, то существует такое главное расслоение P с группой $G = \mathrm{GL}_n(k)$, что $E' \approx P \times_G k^n$.

d) Доказать, что $\mathrm{O}(n+1)$ является главным расслоением над $\mathrm{O}(n+1)/\mathrm{O}(n) \approx S^n$ с группой $G = \mathrm{O}(n)$ и что $TS^n \approx \mathrm{O}(n+1) \times_{\mathrm{O}(n)} \mathbb{R}^n$.

9.29. Доказать, что теорема 7.2 справедлива также для паракомпактного пространства X (Хьюзмоллер [1]).

9.30. Пусть G — конечная группа, действующая слева на пространстве X. *Векторное G-расслоение* над X задается векторным расслоением E, на котором G действует слева, причем диаграмма

$$\begin{array}{ccc} G \times E & \xrightarrow{\theta} & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ G \times X & \longrightarrow & X \end{array}$$

коммутативна и отображение $e \mapsto \theta(g, e)$ из E_x в $E_{g \cdot x}$ является k-линейным. Если E и F — векторные G-расслоения с одной и той же базой, то морфизм из E в F — это эквивариантный морфизм векторных расслоений. Обозначим через $\mathscr{E}_{G,k}(X)$ или просто через $\mathscr{E}_G(X)$ категорию векторных G-расслоений над X.

a) Показать, что если G свободно действует на X, то E/G — векторное расслоение над X/G и $E \approx \pi^*(E/G)$, где π: $X \to X/G$. Доказать, что категории $\mathscr{E}_G(X)$ и $\mathscr{E}(X/G)$ эквивалентны относительно π^*.

* b) Пусть n — число неприводимых представлений группы G (Серр [1]). Доказать, что если основное поле $k = \mathbb{C}$ и G тривиально действует на X, то любое векторное G-расслоение E можно единственным образом представить в виде суммы $E_1 \oplus E_2 \oplus \ldots \oplus E_n$. Здесь $E_j = T_j \otimes F_j$, F_j — обычное векторное расслоение, а T_j — пространство j-го неприводимого представления группы G. *

c) Явно указать разложение расслоения E (как в п. b)) для $G = \mathbb{Z}/n$.

9.31 (продолжение упр. 30). Пусть E и F — векторные G-расслоения и f: $E \to F$ — морфизм подстилающих (низлежащих) векторных расслоений. Пусть $\bar{f}$: $E \to F$ — отображение, заданное формулой

$$\bar{f}(e) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1} f(g \cdot e).$$

a) Показать, что $\bar{f}(g \cdot e) = g \cdot \bar{f}(e)$ (другими словами, $\bar{f}$ — морфизм векторных G-расслоений).

b) Если f — морфизм векторных G-расслоений, то $\bar{f} = f$.

c) Пусть $h\colon F \to E$ — такой морфизм векторных G-расслоений, что $h \cdot f = \mathrm{Id}_E$. Тогда $h \cdot \bar{f} = \mathrm{Id}_E$.

d) Вывести из c), что любое G-векторное расслоение является прямым слагаемым векторного G-расслоения вида $X \times M$, где M — G-модуль конечной размерности.

e) Пусть A — алгебра непрерывных функций на X со значениями в k и $B = A[G]$ (свободный A-модуль, базисом которого служат элементы группы G, а умножение задается правилом $(\lambda \cdot g)(\lambda' \cdot g') = (\lambda(g \cdot \lambda'), gg')$, где $(g \cdot \lambda')(x) = \lambda'(g^{-1}x)$). Доказать, что категория векторных G-расслоений над X эквивалентна категории конечно-порожденных проективных модулей над B.

f) Пусть E — векторное G-расслоение над $X \times I$, где X — компакт. Показать, что расслоения $E_0 = E|_{X \times \{0\}}$ и $E_1 = E|_{X \times \{1\}}$ изоморфны.

** g) Обобщить утверждения a) — d) и f) на случай, когда G — компактная группа. **

9.32 (конструкция Милнора). Для каждой группы G рассмотрим подмножество E'_G бесконечного произведения $I \times G \times I \times G \times \ldots$, состоящее из таких последовательностей $S = (t_0, x_0, t_1, x_1, \ldots)$, $x_i \in G$, $t_i \in [0, 1]$, что $t_i = 0$ для всех индексов i, за исключением конечного числа, и $\sum_{i \in \mathbb{N}} t_i = 1$. Введем в множестве E'_G следующее отношение эквивалентности: последовательность S эквивалентна последовательности S' тогда и только тогда, когда 1) $t_i = t'_i$ и 2) $x_i = x'_i$, если $t_i = t'_i > 0$. Фактормножество E'_G по этому отношению эквивалентности обозначается через E_G или через $G * G * G * \ldots$ (*бесконечный джойн*), класс последовательности S — через $(t_0x_0, t_1x_1, \ldots)$.

a) Пусть теперь G — топологическая группа. Показать, что на E_G существует слабейшая топология, превращающая отображения $t_i\colon E_G \to [0, 1]$ и $x_i\colon t_i^{-1}(0, 1] \to G$ в непрерывные.

b) Доказать, что в этой топологии G свободно и непрерывно действует на E_G по правилу $(t_0x_0, \ldots, t_kx_k, \ldots) \cdot g = (t_0x_0g, \ldots, t_kx_kg, \ldots)$.

c) Доказать, что E_G — главное расслоение над $B_G = E_G/G$ (9.28).

d) Пусть X — паракомпактное пространство и E — главное G-расслоение над X. Доказать существование такого открытого покрытия (U_n), $n \in \mathbb{N}$, пространства X, что каждое $E|_{U_n}$ тривиально.

e) Используя разбиение единицы, построить общий морфизм (в некотором очевидном смысле) из E в E_G, согласованный с действием группы G.

* f) Пусть $\mathcal{P}_G(X)$ — множество классов изоморфных главных G-расслоений над паракомпактным пространством X Показать, что $\mathcal{P}_G(X) \approx [X, B_G]$. *

* g) Дать простое описание пространств E_G и B_G для групп $G = \mathbb{Z}/2$, $\mathbb{Z}$ или $U(1)$. *

* h) Доказать, что для $G = \mathrm{GL}_n(k)$ пространство B_G имеет гомотопический тип пространства $\mathrm{BGL}_n(k)$. *

* **9.33.** Показать, что основные результаты данной главы остаются справедливыми, если заменить основное поле k произвольной банаховой алгеброй A (в качестве слоев рассматриваются конечнопорожденные проективные A-модули с естественной топологией, см. 6.20). Показать, что если пространства X и Y компактны, то $\mathcal{E}_{C_k(Y)}(X) \sim \mathcal{E}_k(X \times Y)$. *

9.34. Пусть E — каноническое линейное расслоение над $P(V)$, рассмотренное в 2.4 и 2.5. В вещественном случае показать, что расслоение $E_p = E \otimes \ldots \otimes E$ (n раз) можно отождествить с факторпространством произведения $S^n \times \mathbb{R}$ по отношению эквивалентности $(x, t) \sim (\lambda x, \lambda^p t)$, $\lambda = \pm 1$. Вывести отсюда, что E_p тривиально для четных p и изоморфно расслоению E для нечетных p.

В комплексном случае показать, что расслоение E_p можно отождествить с факторпространством произведения $S^{2n+1} \times \mathbb{C}$ по отношению эквивалентности $(x, t) \sim (\lambda x, \lambda^{-p} t)$, $\lambda \in U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

Вычислить таким же образом дуальное векторное расслоение E_p^*.

9.35. Пусть F — векторное расслоение, снабженное метрикой, и i: $E \to F$ — такой морфизм векторных расслоений, что i_x: $E_x \to F_x$ — мономорфизмы. Снабдим E индуцированной метрикой.

a) Показать, что отображение i^*: $F \to E$, задаваемое правилом $(i^*)_x = i_x^*$, является морфизмом векторных расслоений, причем $i^* \cdot i = \mathrm{Id}_E$.

b) Показать, что i^* и фактор-отображение $F \to \mathrm{Coker}(i)$ (9.5) определяют разложение в прямую сумму $F \approx E \oplus \mathrm{Coker}(i)$.

10. Исторические замечания

Почти весь материал этой главы является классическим; мы только отобрали из общей теории расслоений ту ее часть, которая необходима для изложения топологической K-теории. Для ознакомления с общей теорией расслоений отсылаем читателя к книгам Стинрода [1] и Хьюзмоллера [1], где представлены также более общие результаты для векторных расслоений над паракомпактными пространствами (для наших целей достаточно компактных пространств). Описание операций на векторных расслоениях заимствовано у Атьи [3] и Ленга [2]. Доказательство гомотопической инвариантности $\Phi_n^k(X)$ (§ 7) также взято из книги Атьи [3]. Наконец, доказательства теоремы Серра — Суона (6.18) и теоремы о представимости функтора $\Phi_n^k(X)$ берут истоки в диссертации автора [2].

Глава II

ПЕРВЫЕ ПОНЯТИЯ K-ТЕОРИИ

1. Группа Гротендика категории. Группа $K(X)$

1.1. Рассмотрим абелев моноид M, т е. множество, снабженное законом композиции (обозначаемым символом $+$), который удовлетворяет всем свойствам абелевой группы, за исключением, быть может, существования обратного элемента. Тогда с M можно связать некоторую абелеву группу $S(M)$[1] и гомоморфизм подстилающих моноидов $s\colon M \to S(M)$, обладающие следующим универсальным свойством. Для произвольной абелевой группы G и произвольного гомоморфизма подстилающих моноидов $f\colon M \to G$ существует и единствен гомоморфизм групп $\tilde{f}\colon S(M) \to G$, такой что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "s"] \arrow[dr, "f"'] & S(M) \arrow[d, "\tilde{f}"] \\
 & G
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

1.2. Существуют различные возможные конструкции группы $S(M)$ и гомоморфизма s. Конечно же, с точностью до изоморфизма все они дают один и тот же результат. Рассмотрим свободную абелеву группу $\mathcal{F}(M)$, порожденную элементами $[m]$, $m \in M$. Тогда группа $S(M)$ является факторгруппой группы $\mathcal{F}(M)$ по подгруппе, порожденной линейными комбинациями вида $[m+n]-[m]-[n]$, а гомоморфизм s определяется условием: образ элемента m при этом гомоморфизме есть класс элемента $[m]$. Можно также рассмотреть произведение $M \times M$ и построить фактормоноид по следующему отношению эквивалентности:

$$(m, n) \sim (m', n') \Leftrightarrow \exists p\colon m+n'+p = n+m'+p.$$

Этот фактормоноид является группой, и $s(m)$ есть, по определению, класс пары $(m, 0)$. Наконец, третья возможная конструкция состоит в том, чтобы рассмотреть фактормоноид произведения $M \times M$ по отношению эквивалентности

$$(m, n) \sim (m', n') \Leftrightarrow \exists p, q\colon (m, n)+(p, p) = (m', n')+(q, q)$$

и снова определить $s(m)$ как класс пары $(m, 0)$.

Нетрудно заметить, что во всех этих трех конструкциях каждый элемент из $S(M)$ может быть представлен в виде $s(m)-s(n)$, где

---

[1] Называемую *симметризацией* моноида M. Отсюда обозначенне.— *Прим. ред.*

m, $n \in M$. Однако, вообще говоря, отображение s не является инъективным (см. ниже пример 1.5).

1.3. Пример. Одним из самых естественных примеров служит $M = \mathbb{N}$. Тогда, как хорошо известно, $S(M) \approx \mathbb{Z}$.

1.4. Пример. Рассмотрим $M = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ — абелев моноид ненулевых целых чисел относительно умножения. Тогда $S(M) \approx \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

1.5. Пример. Пусть M — абелев моноид, обладающий следующим свойством: существует такой элемент $\infty \in M$, что $m + \infty = \infty$ для любого $m \in M$. Тогда $S(M) = 0$, поскольку каждый элемент из $S(M)$ может быть представлен в виде $s(m) - s(n) = s(m) + s(\infty) - s(n) - s(\infty) = s(\infty) - s(\infty) = 0$. Примеры моноидов с этим свойством: $\mathbb{Z}$ (с операцией умножения; здесь $\infty = 0$!), $\mathbb{R}^{+*} \cup \infty$ и т. д.

1.6. Замечание. Группа $S(M)$ „функториально“ зависит от M в следующем смысле. Если f: $M \to N$, то универсальное свойство позволяет нам однозначно определить гомоморфизм $S(f)$: $S(M) \to S(N)$, который превращает диаграмму

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d] & N \arrow[d] \\ S(M) \arrow[r, "S(f)"] & S(N) \end{tikzcd}$$

в коммутативную. Кроме того, $S(g \cdot f) = S(g) \cdot S(f)$ и $S(\mathrm{Id}_M) = \mathrm{Id}_{S(M)}$. Группа $S(M)$ называется *симметризацией* абелева моноида M.

1.7. В качестве основного примера рассмотрим теперь аддитивную категорию $\mathscr{C}$. Для всякого объекта E из $\mathscr{C}$ обозначим его класс изоморфизма через $\dot{E}$. Множество $\Phi(\mathscr{C})$ этих классов изоморфизма может быть превращено в абелев моноид, если положить $\dot{E} + \dot{F} = (E \oplus F)^{\cdot}$. Эта операция корректно определена, поскольку класс изоморфизма $E \oplus F$ зависит только от классов изоморфизма E и F. Далее, соотношения $E \oplus (F \oplus G) \approx (E \oplus F) \oplus G$, $E \oplus F \approx F \oplus E$ и $E \oplus 0 \approx E$ задают требуемые алгебраические тождества в $\Phi(\mathscr{C})$. В этом случае группа $S(M)$ (где $M = \Phi(\mathscr{C})$) называется *группой Гротендика* категории $\mathscr{C}$ и обозначается через $K(\mathscr{C})$. Если φ: $\mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ — аддитивный функтор, то φ естественным образом индуцирует гомоморфизм моноидов $\Phi(\mathscr{C}) \to \Phi(\mathscr{C}')$ и, следовательно, групповой гомоморфизм $K(\mathscr{C}) \to K(\mathscr{C}')$, который мы будем обозначать через φ_*. Если $\mathscr{C}''$ — третья категория и ψ: $\mathscr{C}' \to \mathscr{C}''$ — аддитивный функтор, то, согласно 1.6, мы имеем формулу $(\psi \cdot \varphi)_* = \psi_* \cdot \varphi_*$. Конечно же, если $\mathscr{C} = \mathscr{C}'$ и $\varphi = \mathrm{Id}_{\mathscr{C}}$, то $\varphi_* = \mathrm{Id}_{K(\mathscr{C})}$.

1.8. Пример. Пусть F — произвольное (не обязательно коммутативное) тело и $\mathscr{C}$ — категория, объектами которой являются конечномерные F-векторные пространства (для определенности правые), а морфизмами — линейные отображения. Тогда из классической теории размерности векторных пространств известно, что $\Phi(\mathscr{C}) \approx \mathbb{N}$. Поэтому из примера 1.3 следует, что $K(\mathscr{C}) \approx \mathbb{Z}$

1.9. Пример. Пусть $\mathscr{C}$ — аддитивная категория и $\tau\colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ — такой аддитивный функтор, что существует естественный изоморфизм $\tau + \mathrm{Id}_{\mathscr{C}} \approx \tau$. Тогда $K(\mathscr{C}) = 0$, поскольку из указанного изоморфизма вытекает равенство $s(\tau(E)) + s(E) = s(\tau(E))$ и поэтому $s(E) = 0$ (1.5). Например, пусть $\mathscr{C}$ — категория, объектами которой являются произвольные F-векторные пространства (не обязательно конечномерные), а морфизмами — линейные отображения. Берем в качестве τ функтор $E \mapsto E \oplus E \oplus \ldots \oplus E \oplus \ldots$. Другим примером служит категория $\mathscr{H}$, объекты которой — гильбертовы пространства, а морфизмы — непрерывные линейные отображения. Тогда $\tau(E) = E \oplus E \oplus \ldots \oplus E \oplus \ldots$ (гильбертова сумма с L^2-нормой).

1.10. Пример (обобщение примера 1.8). Пусть A — произвольное кольцо с единицей и $\mathscr{P}(A)$ — категория, объектами которой являются конечно-порожденные проективные правые A-модули, а морфизмами — A-линейные отображения. Для краткости будем, допуская вольность, обозначать группу Гротендика категории $\mathscr{P}(A)$ через $K(A)$. Одной из главных задач *алгебраической K-теории* является вычисление групп $K(A)$ для интересных колец A (Басс [1]).

1.11. Пример. В этой книге мы главным образом будем иметь дело с категорией $\mathscr{E}(X)$ векторных расслоений над компактным пространством X. Обозначим через $K(X)$ группу Гротендика категории $\mathscr{E}(X)$. В случае когда во избежание недоразумений нужно явно указать основное поле k ($\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), мы будем вместо $K(X)$ писать соответственно $K_{\mathbb{R}}(X)$ или $K_{\mathbb{C}}(X)$ Предметом *топологической K-теории* является вычисление групп $K(X)$ для интересных пространств X. С этой точки зрения топологическая K-теория представляет собой частный случай алгебраической K-теории. Из сказанного в п. I.6.17 вытекает, что категория $\mathscr{E}(X)$ эквивалентна категории $\mathscr{P}(A)$, где A — кольцо непрерывных функций на X. Следовательно, группы $K(\mathscr{E}(X))$ и $K(\mathscr{P}(A))$ изоморфны. В действительности многие методы алгебраической K-теории вызваны к жизни методами топологической K-теории, изложению которой посвящена настоящая книга.

1.12. Замечание. Как мы видели в 1.7, группа $K(\mathscr{C})$ *ковариантно* зависит от категории $\mathscr{C}$. Точно также группа $K(A)$ ковариантно зависит от кольца A. Более точно, если $u\colon A \to B$ — кольцевой гомоморфизм, то существует связанный с u функтор $\bar{u}\colon \mathscr{P}(A) \to \mathscr{P}(B)$, определенный правилом $E \mapsto E \otimes_A B$. Он называется *функтором расширения* (или *продолжения*) *скаляров* (посредством гомоморфизма u на кольце B вводится структура левого A-модуля). Например, если E — образ проекционного оператора $p = (p_{ji})\colon A^n \to A^n$, то $\bar{u}(E)$ — образ проекционного оператора $q = (u(p_{ji}))\colon B^n \to B^n$. Однако группа $K(X)$ *контравариантным* образом зависит от пространства X. Более точно, если $f\colon Y \to X$ — непрерывное отображение, то, согласно 1.2.6,

f индуцирует функтор $f^*\colon \mathscr{E}(X) \to \mathscr{E}(Y)$ и, значит, гомоморфизм $K(X) \to K(Y)$, снова обозначаемый через f^*. Из 1.2.6 вытекают тождества $(g \cdot f)^* = f^* \cdot g^*$ и $\mathrm{Id}^* = \mathrm{Id}$.

1.13. Замечание по поводу обозначений. К сожалению, одна и та же буква K используется для обозначения „K-групп" и категорий, и колец, и компактных пространств. Поэтому, во избежание ошибок, мы примем следующее соглашение об обозначениях. Первыми буквами алфавита A, B, C, ... будем обозначать кольца, последними буквами ..., X, Y, Z — топологические пространства. Категории же будем обозначать рукописными буквами $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$, ...

1.14. Возвращаясь к определению группы $K(\mathscr{C})$, заметим, что фактически мы использовали в этом определении лишь весьма малую часть аддитивной структуры категории $\mathscr{C}$. Иногда полезно рассматривать категории, снабженные *законом композиции* $\mathscr{C} \times \mathscr{C} \to \mathscr{C}$, обозначаемым через $(E, F) \mapsto E \perp F$, таким что имеют место естественные изоморфизмы $E \perp (F \perp G) \approx (E \perp F) \perp G$, $E \perp F \approx F \perp E$, $E \perp O \approx E$, согласованные с итерациями. Функтор $\perp$ индуцирует на $\Phi(\mathscr{C})$ структуру абелева моноида, поэтому мы можем определить группу $K(\mathscr{C})$, зависящую от закона композиции $\perp$. Типичным примером такой ситуации является категория векторных расслоений, снабженных невырожденными симметричными билинейными формами (тогда $E \perp F$ индуцируется суммой Уитни подстилающих расслоений). Подробно этот пример будет рассмотрен в упражнениях.

1.15. Предложение. *Пусть $\mathscr{C}$ — аддитивная категория, и пусть через $[E] = s(E)$ обозначен класс объекта E из $\mathscr{C}$ в группе Гротендика $K(\mathscr{C})$. Тогда каждый элемент из $K(\mathscr{C})$ может быть представлен в виде $[E]-[F]$. Далее, $[E]-[F]=[E']-[F']$ в $K(\mathscr{C})$ тогда и только тогда, когда в $\mathscr{C}$ существует такой объект G, что $E \oplus F' \oplus G \approx E' \oplus F \oplus G$.*

Доказательство. Согласно 1.2, каждый элемент из $K(\mathscr{C})$ является классом пары $(\dot{E}, \dot{F})$, который может быть представлен в виде $s(\dot{E}) - s(\dot{F}) = [E]-[F]$. Кроме того, две такие пары $(\dot{E}, \dot{F})$ и $(\dot{E}', \dot{F}')$ определяют один и тот же элемент из $K(\mathscr{C})$ тогда и только тогда, когда в $\mathscr{C}$ найдется такой объект G, что $\dot{E} + \dot{F}' + \dot{G} = \dot{E}' + \dot{F} + \dot{G}$, т. е. $E \oplus F' \oplus G \approx E' \oplus F \oplus G$. $\square$

1.16. Следствие. *Пусть E и F — объекты из $\mathscr{C}$. Тогда $[E]=[F]$ в том и только в том случае, если в $\mathscr{C}$ существует такой объект G, что $E \oplus G \approx F \oplus G$.*

1.17. Предложение. *Пусть через θ_n обозначено тривиальное расслоение ранга n над компактным пространством X. Тогда каждый элемент x из $K(X)$ может быть представлен в виде $[E]-[\theta_n]$ для некоторого n и некоторого векторного расслоения E над X. Далее, $[E]-[\theta_n]=[F]-[\theta_p]$ тогда и только тогда, когда существует такое целое число q, что $E \oplus \theta_{p+q} \approx F \oplus \theta_{n+q}$.*

Доказательство. Применим предложение 1.15 к категории $\mathscr{C} = \mathscr{E}(X)$. Из этого предложения вытекает, что каждый элемент x из $K(X)$

может быть представлен в виде E_1-F_1, где E_1 и F_1 — два векторных расслоения над X. Согласно I.6.5, существует такое векторное расслоение F_2, что расслоение $F_1\oplus F_2$ тривиально, скажем изоморфно θ_n. Тогда $[E_1]-[F_1]=[E_1]+[F_2]-[F_1]-[F_2]=[E]-[\theta_n]$, где $E=E_1\oplus E_2$. Предположим теперь, что $[E]-[\theta_n]=[F]-[\theta_p]$. В силу второй части предложения 1.15 мы можем найти такое векторное расслоение G, что $E\oplus\theta_p\oplus G\approx F\oplus\theta_n\oplus G$. Пусть G_1 — такое векторное расслоение, что $G\oplus G_1\approx\theta_q$. Тогда мы имеем $E\oplus\theta_{p+q}\approx E\oplus\theta_p\oplus G\oplus G_1\approx F\oplus\theta_n\oplus G\oplus G_1\approx F\oplus\theta_{n+q}$. Обратное очевидно. □

1.18. Следствие. *Пусть E и F — векторные расслоения. Тогда $[E]=[F]$ в $K(X)$ в том и только в том случае, когда $E\oplus\theta_n\approx F\oplus\theta_n$ для некоторого n.*

1.19. Пример. Пусть E — касательное расслоение сферы S^p и $F=\theta_p$ (I.2.3). Тогда, согласно I.5.5, $E\oplus\theta_1\approx\theta_{p+1}$. Следовательно, $[E]=[\theta_p]$ в $K_{\mathbb{R}}(S^p)$. Однако расслоение E, вообще говоря, нетривиально (§ V.2). Это дает нам нетривиальный пример неинъективного отображения $\Phi(\mathscr{C})\to K(\mathscr{C})$ ($\mathscr{C}=\mathscr{E}_{\mathbb{R}}(S^p)$, $p\neq 1, 3, 7$). Позже (1.32) мы дадим гомотопическое объяснение этому явлению.

1.20. Так как функтор K контравариантен на категории компактных пространств (1.12), то проекция пространства X на одноточечное пространство P индуцирует гомоморфизм α: $\mathbb{Z}\approx K(P)\to K(X)$, коядро которого обозначается через $\tilde{K}(X)$ и называется *приведенным K-функтором* X. В случае когда нужно указать основное поле $k=\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, мы пишем $\tilde{K}_{\mathbb{R}}(X)$ или $\tilde{K}_{\mathbb{C}}(X)$.

1.21. Предложение. *Для всякого $X\neq\varnothing$ имеет место точная последовательность*

$$0\to\mathbb{Z}\xrightarrow{\alpha}K(X)\xrightarrow{\beta}\tilde{K}(X)\to 0.$$

Выбор точки x_0 в X определяет каноническое расщепление, так что

$$\tilde{K}(X)\approx\operatorname{Ker}[K(X)\to K(\{x_0\})\approx\mathbb{Z}]\text{ и }K(X)\approx\mathbb{Z}\oplus\tilde{K}(X).$$

Доказательство. Пусть $P=\{x_0\}$. Тогда вложение $\{x_0\}$ в X индуцирует гомоморфизм из $K(X)$ в $K(\{x_0\})\approx\mathbb{Z}$, который является левым обратным для гомоморфизма α. □

1.22. Обозначим через $\Phi(X)$ (или $\Phi^k(X)$, если мы хотим явно указать основное поле k) абелев моноид классов изоморфных векторных расслоений над X. Пусть γ обозначает композицию $\Phi(X)\xrightarrow{s}K(X)\xrightarrow{\beta}\tilde{K}(X)$.

1.23. Предложение. *Гомоморфизм γ сюръективен. Кроме того, $\gamma(\dot{E})=\gamma(\dot{F})$ тогда и только тогда, когда $E\oplus\theta_n\approx F\oplus\theta_p$ для некоторых тривиальных расслоений θ_n и θ_p.*

Доказательство. Поскольку класс θ_n в $\tilde{K}(X)$ равен нулю, а любой элемент из $K(X)$ может быть представлен в виде $E-\theta_n$ (1.17), мы имеем $\beta([E]-[\theta_n])=\beta([E])=\gamma(\dot{E})$. Этим доказана первая часть нашего предложения. С другой стороны, равенство $\gamma(\dot{E})=\gamma(\dot{F})$ эквивалентно равенству $[E]-[F]=[\theta_q]-[\theta_r]$ для некоторых q и r. Согласно 1.18, из последнего равенства следует, что $E\oplus\theta_r\oplus\theta_t\approx F\oplus\theta_q\oplus\theta_t$ для некоторого t. Значит, $E\oplus\theta_n\approx F\oplus\theta_p$, где $n=r+t$ и $p=q+t$. Обратное утверждение очевидно. □

1.24. Замечание. Это предложение дает удобное прямое определение группы $\tilde{K}(X)$. А именно, группа $\tilde{K}(X)$ получается из абелева моноида $\Phi(X)$ факторизацией по следующему отношению эквивалентности: $\dot{E}\sim\dot{F}\Leftrightarrow\exists n,\ p\colon E\oplus\theta_n\approx F\oplus\theta_p$.

1.25. Теорема. *Пусть X и Y — компактные пространства и f_0, $f_1\colon X\to Y$ — гомотопные отображения. Тогда f_0 и f_1 индуцируют одинаковые гомоморфизмы $K(Y)\to K(X)$ и $\tilde{K}(Y)\to\tilde{K}(X)$.*

Доказательство. Согласно I.7.2, отображения f_0 и f_1 индуцируют один и тот же гомоморфизм $\Phi(Y)\to\Phi(X)$, а значит, один и тот же гомоморфизм из $K(Y)=S(\Phi(Y))$ в $K(X)=S(\Phi(X))$. Так как диаграмма

$$\begin{tikzcd}
K(Y) \arrow[rr, "f_\alpha^*"] & & K(X) \\
& K(P) \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

(где P — точка и $\alpha=0$, 1) коммутативна, то f_0 и f_1 индуцируют один и тот же гомоморфизм $\tilde{K}(Y)\to\tilde{K}(X)$. □

1.26. Предложение. *Пусть X — несвязное объединение открытых подпространств $X_1\cup X_2\cup\ldots\cup X_n$. Тогда вложения X_i в X индуцируют разбиение $K(X)$ в прямое произведение*

$$K(X_1)\times K(X_2)\times\ldots\times K(X_n)=K(X_1)\oplus K(X_2)\oplus\ldots\oplus K(X_n).$$

Доказательство. Поскольку расслоение над X характеризуется своими ограничениями на каждое подпространство X_i, мы имеем $\Phi(X)\approx\Phi(X_1)\times\Phi(X_2)\times\ldots\times\Phi(X_n)$. Следовательно, $K(X)\approx K(X_1)\times K(X_2)\times\ldots\times K(X_n)$. □

1.27. Замечание. Для функтора $\tilde{K}$ это утверждение неверно. Например, если X — несвязное объединение двух точек P_1 и P_2, то $\tilde{K}(X)\approx\mathbb{Z}$, но $\tilde{K}(P_i)=0$, $i=1$, 2.

1.28. Напомним, что каждое векторное расслоение E определяет локально-постоянную функцию $r\colon X\to\mathbb{N}$, задаваемую формулой $r(x)=\dim(E_x)$ (I.2.9). Обозначим через $H^0(X;\mathbb{N})$ абелев моноид локально-постоянных функций на X со значениями в $\mathbb{N}$. Мы видим, что r определяет гомоморфизм моноидов $\Phi(X)\to H^0(X;\mathbb{N})$, который мы также будем обозначать через r. Ясно, что симметризацией моноида $H^0(X;\mathbb{N})$ является абелева группа $H^0(X;\mathbb{Z})$ локально-постоянных на X функций со значениями в $\mathbb{Z}$ (* $H^0(X;\mathbb{Z})$ есть первая группа когомологий Чеха пространства X (Эйленберг и Стинрод [1]) *). Следовательно, r определяет групповой гомоморфизм (снова обозначаемый через r)

$$K(X) \to H^0(X;\ \mathbb{Z}).$$

1.29. Предложение. *Положим $K'(X) = \operatorname{Ker}[K(X) \to H^0(X;\ \mathbb{Z})]$. Имеет место канонически расщепляющаяся точная последовательность*

$$0 \to K'(X) \to K(X) \xrightarrow{r} H^0(X;\ \mathbb{Z}) \to 0.$$

Кроме того, если пространство X связно, то группы $K'(X)$ и $\tilde{K}(X)$ канонически изоморфны.

Доказательство. Пусть $f\colon X \to \mathbb{N}$ — локально-постоянная функция. Так как пространство X компактно, то f принимает лишь конечное число значений $n_1, \ldots, n_p$ и $X = X_1 \cup \ldots \cup X_p$, где $X_i = f^{-1}(\{n_i\})$. Пусть E — векторное расслоение над X, определенное условиями $E|_{X_i} \approx X_i \times k^{n_i}$. Тогда соответствие $f \mapsto E$ определяет гомоморфизм моноидов $t\colon H^0(X,\ \mathbb{N}) \to \Phi(X)$, причем $r \cdot t = \mathrm{Id}$. После симметризации t превращается в групповой гомоморфизм $H^0(X;\ \mathbb{Z}) \to K(X)$, являющийся правым обратным к гомоморфизму $r\colon K(X) \to H^0(X;\ \mathbb{Z})$.

Если X связно, то $H^0(X;\ \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}$ и, в силу сказанного выше, $K'(X) \approx \operatorname{Coker}[\mathbb{Z} \to K(X)]$. Но отображение $\mathbb{Z} \to K(X)$ можно отождествить с отображением, индуцированным проекцией пространства X в точку. Следовательно, $K'(X) \approx \tilde{K}(X)$. $\square$

1.30. Снова рассмотрим множество $\Phi_n(X)$ классов изоморфных векторных расслоений ранга n над X (мы пишем $\Phi_n^k(X)$, если хотим явно указать поле k). Пусть $\Phi(X) \to \Phi_{m+1}(X)$ — отображение, сопоставляющее классу расслоения F ранга m класс расслоения $E \oplus \theta_1$ ранга $m+1$, где θ_1 — тривиальное расслоение ранга 1. Такие отображения определяют индуктивную систему множеств

$$\Phi_0(X) \to \Phi_1(X) \to \ldots \to \Phi_n(X) \to \ldots .$$

Используя отображения

$$\Phi_n(X) \times \Phi_p(X) \to \Phi_{n+p}(X),$$

индуцированные суммой Уитни векторных расслоений, мы можем снабдить прямой предел $\Phi'(X)$ указанной индуктивной системы структурой абелева моноида. Если $\dot{E}$ — класс векторного расслоения E — принадлежит множеству $\Phi_n(X)$, то $[E] - [\theta_n] \in \operatorname{Ker} r\colon K(X) \to H^0(X;\ \mathbb{Z})$. Соответствие $\dot{E} \mapsto [E] - [\theta_n]$ для $\dot{E} \in \Phi_n(X)$ индуцирует гомоморфизм моноидов $\Phi'(X) \to K'(X)$.

1.31. Предложение. *Определенный выше гомоморфизм $\Phi'(X) \to K'(X)$ является изоморфизмом. Следовательно, $\Phi'(X)$ — абелева группа.*

Доказательство. Если $[E] - [\theta_n] = [F] - [\theta_p]$ в $K(X)$, то, согласно 1.17, существует такое натуральное число q, что $E \oplus \theta_{p+q} \approx F \oplus \theta_{n+q}$. Поэтому отображение $\Phi'(X) \to K'(X) \subset K(X)$ инъективно. Пусть u — произвольный элемент из $K'(X)$. Согласно 1.17, u может быть представлен в виде $[E]-[\theta_n]$, причем $r([E]-[\theta_n])=0$, т. е. $\dim(E_x)=n$ для каждой точки $x \in X$. Следовательно, отображение $\Phi'(X) \to K'(X)$ сюръективно. □

1.32. Предложение. *Пусть* BO — *индуктивный предел системы топологических пространств*

$$\mathrm{BO}(1) \to \ldots \to \mathrm{BO}(n) \to \ldots,$$

где отображение $\mathrm{BO}(n) \to \mathrm{BO}(n+1)$ *индуцировано отображением грассманианов* $G_n(\mathbb{R}^N) \to G_{n+1}(\mathbb{R}^{N+1})$, *состоящим в добавлении подпространства, порожденного последним вектором* $e_{N+1}=(0, \ldots, 1)$. *Тогда имеет место естественный изоморфизм функторов*

$$K'_{\mathbb{R}}(X) \approx [X, \mathrm{BO}].$$

Аналогично пусть BU — *индуктивный предел системы*

$$\mathrm{BU}(1) \to \ldots \to \mathrm{BU}(n) \to \ldots$$

Тогда имеет место естественный изоморфизм функторов

$$K'_{\mathbb{C}}(X) \approx [X, \mathrm{BU}].$$

Доказательство. Поскольку пространства $\mathrm{BO}(n)$ паракомпактны [Картан и Шварц [1], exposé 5] и, значит, нормальны и поскольку $\mathrm{BO}(n)$ замкнуто в $\mathrm{BO}(n+1)$, то для компактного пространства X имеем $[X, \mathrm{BO}] \approx \operatorname{inj\,lim}[X, \mathrm{BO}(n)]$. В силу I.7.15, $\Phi_n^{\mathbb{R}}(X) \approx [X, \mathrm{BO}(n)]$, причем отображения $\Phi_n^{\mathbb{R}}(X) \to \Phi_{n+1}^{\mathbb{R}}(X)$, индуцированные добавлением тривиального расслоения ранга 1, совпадают с отображениями, индуцированными вложениями $\mathrm{BO}(n) \subset \mathrm{BO}(n+1)$. Следовательно, $K'_{\mathbb{R}}(X) \approx \Phi'_{\mathbb{R}}(X) \approx \operatorname{inj\,lim} \Phi_n^{\mathbb{R}}(X) \approx \operatorname{inj\,lim}[X, \mathrm{BO}(n)] \approx [X, \mathrm{BO}]$. В случае $k=\mathbb{C}$ доказательство аналогично. □

1.33. Теорема. *Для любого компактного пространства* X *имеют место естественные изоморфизмы*

$$K_{\mathbb{R}}(X) \approx [X, \mathbb{Z} \times \mathrm{BO}] \text{ и } K_{\mathbb{C}}(X) \approx [X, \mathbb{Z} \times \mathrm{BU}],$$

где $\mathbb{Z}$ *снабжено дискретной топологией.*

Доказательство. Мы дадим доказательство лишь для вещественного случая, поскольку комплексный случай совершенно аналогичен. Согласно 1.29, $K_{\mathbb{R}}(X) \approx H^0(X, \mathbb{Z}) \oplus K'_{\mathbb{R}}(X)$. Так как $H^0(X, \mathbb{Z}) \approx [X, \mathbb{Z}]$, то $K_{\mathbb{R}}(X) \approx [X, \mathbb{Z}] \times [X, BO] \approx [X, \mathbb{Z} \times BO]$. □

1.34. В случае $X=S^n$ можно дать более полное описание группы $\tilde{K}(X)$ (а значит, и группы $K(X)=\mathbb{Z} \oplus \tilde{K}(X)$). Из теоремы I.7.6 следует, что $\Phi_p^{\mathbb{C}}(S^n) \approx \pi_{n-1}(GL_p(\mathbb{C})) \approx \pi_{n-1}(U(p))$. $\tilde{K}_{\mathbb{C}}(S^n) \approx \operatorname{inj\,lim} \pi_{n-1}(\mathrm{U}(p)) \approx \pi_{n-1}(\mathrm{U})$, где $\mathrm{U}=\operatorname{inj\,lim}\mathrm{U}(p)$. (* В действительности, согласно I.3.13, $\pi_{n-1}(\mathrm{U}) \approx \pi_{n-1}(\mathrm{U}(p))$ для $p > n-1/2$. *) Аналогичным образом,

$$\Phi_p^{\mathbb{R}}(S^n) \approx \pi_{n-1}(\mathrm{GL}_p(\mathbb{R}))/\pi_0(\mathrm{GL}_p(\mathbb{R})) \approx \pi_{n-1}(\mathrm{O}(p))/\mathbb{Z}/2).$$

Следовательно,

$$\tilde{K}_{\mathbb{R}}(S^n) \approx \operatorname{inj}\lim \pi_{n-1}(\mathrm{O}(p))/(\mathbb{Z}/2) \approx \operatorname{inj}\lim \pi_{n-1}(\mathrm{O}(p)),$$

так как для нечетного p действие $\mathbb{Z}/2$ на $\pi_{n-1}(\mathrm{O}(p))$ тривиально. Таким образом, мы получаем изоморфизм $\tilde{K}_{\mathbb{R}}(S^n) \approx \pi_{n-1}(\mathrm{O})$, где $\mathrm{O} = \operatorname{inj}\lim \mathrm{O}(p)$. (* В действительности, согласно I.3.13, $\pi_{n-1}(\mathrm{O}) \approx \pi_{n-1}(\mathrm{O}(p))$ для $p > n$. *) Одна из основных наших целей — доказательство изоморфизмов $K_{\mathbb{R}}(S^n) \approx K_{\mathbb{R}}(S^{n+8})$ и $K_{\mathbb{C}}(S^n) \approx K_{\mathbb{C}}(S^{n+2})$ (см гл. III). Из этих изоморфизмов будут следовать утверждения, сформулированные в I.3.13. Более общо, аналогичным образом можно доказать, что $\tilde{K}_{\mathbb{R}}(S'(X)) \approx [X, \mathrm{O}]'$ и $\tilde{K}_{\mathbb{C}}(S'(X)) \approx [X, \mathrm{U}]'$ (гомотопические классы отображений, сохраняющих отмеченные точки)

Упражнения: 1—8 и 10.

2. Группа Гротендика функтора. Группа $K(X, Y)$

2.1. Определение. Пусть $\mathscr{C}$ — аддитивная категория. *Банахова структура* на $\mathscr{C}$ определяется заданием структуры банахова пространства на всех группах $\mathscr{C}(E, F)$, где E и F — произвольные объекты из $\mathscr{C}$. Кроме того, предполагается, что отображения

$$\mathscr{C}(E, F) \times \mathscr{C}(F, G) \to \mathscr{C}(E, G),$$

определяемые композицией морфизмов, билинейны и непрерывны (все банаховы пространства рассматриваются над основным полем $k = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$). *Банаховой категорией* называется аддитивная категория, снабженная банаховой структурой.

2.2. Пример. В I.6.20 мы задали банахову структуру в категории $\mathscr{E}(X)$ в случае компактного пространства X. Более общим образом, если A — банахова алгебра (с единицей, но не обязательно коммутативная), то категория $\mathscr{P}(A)$ наделяется банаховой структурой (I.6.22).

2.3. Пример. Пусть $\mathscr{H}$ — категория, рассмотренная в 1.9. Она превращается в банахову категорию, если задать в $\mathscr{H}(E, F)$ классическую норму

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}.$$

2.4. Пример. Обозначим через $\check{\mathscr{H}}$ следующую категорию. Ее объектами являются объекты категории $\mathscr{H}$. Множество морфизмов

$\check{\mathscr{H}}(E, F)$ определяется равенством $\check{\mathscr{H}}(E, F)=\mathscr{H}(E, F)/\mathscr{K}(E, F)$, где $\mathscr{K}(E, F)$ — множество компактных операторов из E в F (т. е. пределов операторов конечного ранга). Тогда $\check{\mathscr{H}}(E, F)$ — банахово пространство и композиция морфизмов в $\mathscr{H}$ индуцирует композицию морфизмов в $\check{\mathscr{H}}$.

2.5. *Пример.* Если $\mathscr{C}$ — произвольная банахова категория, то ассоциированная с ней псевдоабелева категория $\tilde{\mathscr{C}}$ (I.6.9) также является банаховой категорией, поскольку $\tilde{\mathscr{C}}((E, p), (F, q))$ — замкнутое подпространство в $\mathscr{C}(E, F)$.

2.6. *Определение.* Пусть $\mathscr{C}$ и $\mathscr{C}'$ — аддитивные категории и φ: $\mathscr{C}\longrightarrow\mathscr{C}'$ — аддитивный функтор. Функтор φ называется *квазисюръективным*, если каждый объект в $\mathscr{C}'$ является прямым слагаемым объекта вида $\varphi(E)$, где $E\in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$. Функтор φ называется *полным*, если отображение $\mathscr{C}(E, F)\longrightarrow\mathscr{C}'(\varphi(E), \varphi(F))$ сюръективно для любых $E, F\in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$. Наконец, если $\mathscr{C}$ и $\mathscr{C}'$ — банаховы категории, то функтор φ называется *банаховым функтором*, если отображение $\mathscr{C}(E, F)\longrightarrow\mathscr{C}'(\varphi(E), \varphi(F))$ линейно и непрерывно.

2.7. *Пример.* Пусть φ: $\mathscr{E}(X)\longrightarrow\mathscr{E}(Y)$ — функтор, определяемый равенством $\varphi(E)=E_Y$, где Y — замкнутое подпространство компактного пространства X. Тогда φ является полным квазисюръективным банаховым функтором. Действительно, из I.5.9 следует, что с точностью до изоморфизма „отображение ограничения" $\mathscr{E}(X)(E, F)\longrightarrow\mathscr{E}(Y)(E_Y, F_Y)$ может быть отождествлено с отображением $\Gamma(X, \mathrm{HOM}(E, F))\longrightarrow\Gamma(Y, \mathrm{HOM}(E, F)_Y)$. Из I.6.23 следует, что φ — банахов функтор. Далее, функтор φ является полным на основании I.5.10 и квазисюръективным, поскольку каждый объект из $\mathscr{E}(Y)$ является прямым слагаемым тривиального расслоения $\theta_n=Y\times k^n$ (I.6.5), а $\theta_n=\varphi(E)$ для $E=X\times k^n$.

2.8. *Пример.* Более общим образом пусть f: $Y\longrightarrow X$ — произвольное непрерывное отображение. Тогда функтор f^*: $\mathscr{E}(X)\longrightarrow\mathscr{E}(Y)$ (I.2.6) квазисюръективен и банахов. Для доказательства рассмотрим отображение $u_{E, F}$: $\mathscr{E}(X)(E, F)\longrightarrow\mathscr{E}(Y)(f^*(E), f^*(F))$, индуцированное отображением f^*. Если $E=X\times k^n$ и $F=X\times k^p$, то отображение $u_{E, F}$ превращается в отображение $C(X)^{np}\longrightarrow C(Y)^{np}$, задаваемое формулой $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{np})\mapsto(\lambda_1\cdot f, \ldots, \lambda_{np}\cdot f)$. Ясно, что это отображение линейно и непрерывно. Для произвольных расслоений E и F отображение $u_{E, F}$ также непрерывно, поскольку E и F являются прямыми слагаемыми некоторых тривиальных расслоений. Наконец, соображения, аналогичные использованным в 2.7, показывают, что функтор f^* квазисюръективен.

2.9. *Пример.* Пусть A и B — банаховы алгебры и u: $A\longrightarrow B$ — непрерывный гомоморфизм. Этот гомоморфизм индуцирует функтор u_*: $\mathscr{P}(A)\longrightarrow\mathscr{P}(B)$, задаваемый на объектах правилом $E\mapsto E\otimes_A B$ (гомоморфизм u наделяет алгебру B структурой левого A-модуля). Мы утверждаем, что u_* — квазисюръективный банахов функтор. Для доказательства достаточно повторить рассуждения предыдущего пункта. Если $E = A^n$ и $F = A^p$, то отображение $\mathcal{P}(A)(E, F) \to \mathcal{P}(B)(u_*(E), (u_*(F))$ есть отображение $A^{np} \to B^{np}$, линейное и непрерывное. Для произвольных проективных модулей E и F отображение $\mathcal{P}(A)(E, F) \to \mathcal{P}(B)(u_*(E), u_*(F))$ линейно и непрерывно, поскольку E и F являются прямыми слагаемыми свободных модулей. Функтор u_* полон тогда и только тогда, когда гомоморфизм u сюръективен.

2.10. Пример. Функтор $\mathcal{H} \to \check{\mathcal{H}}$ (2.4), тождественный на объектах, является полным квазисюръективным банаховым функтором.

2.11. Пример. Пусть $\mathscr{C}$ — произвольная банахова категория и φ: $\mathscr{C} \to \mathscr{C}$ — функтор, определенный равенством $\varphi(E) = E \oplus \ldots \oplus E$ (n раз). Тогда φ квазисюръективен н банахов (но не полон, за исключением случаев $\mathscr{C} = 0$ или $n = 1$).

2.12. Замечание. Пусть φ: $\mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ — банахов функтор, являющийся полным (соотв. унивалентным, квазисюръективным). Тогда функтор $\tilde{\varphi}$: $\tilde{\mathscr{C}} \to \tilde{\mathscr{C}}'$ между ассоциированными псевдоабелевыми категориями (I.6.9) также является полным (соотв унивалентным, квазисюръективным).

2.13. Пусть φ: $\mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ — квазисюръективный банахов функтор. Определим „относительную" группу $K(\varphi)$ (*группу Гротендика функтора* φ), совпадающую с группой $K(\mathscr{C})$, в случае когда $\mathscr{C}' = 0$. Обозначим через $\Gamma(\varphi)$ множество, состоящее из троек вида (E, F, α), где E и F — объекты категории $\mathscr{C}$, а α: $\varphi(E) \to \varphi(F)$ — изоморфизм. Назовем две тройки (E, F, α) и (E', F', α') *изоморфными*, если существуют такие изоморфизмы f: $E \to E'$ и g: $F \to F'$, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \varphi(E) & \xrightarrow{\alpha} & \varphi(F) \\ {\scriptstyle \varphi(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi(g)} \\ \varphi(E') & \xrightarrow{\alpha'} & \varphi(F') \end{array}$$

коммутативна. Тройка (E, F, α) называется *элементарной*, если $E = F$ и изоморфизм α гомотопен тождественному изоморфизму $\mathrm{Id}_{\varphi(E)}$ в множестве автоморфизмов объекта $\varphi(E)$. Наконец, определим *сумму* двух троек (E, F, α) и (E', F', α') как

$$(E \oplus E', F \oplus F', \alpha \oplus \alpha').$$

$K(\varphi)$ определяется как фактормножество моноида $\Gamma(\varphi)$ по следующему отношению эквивалентности: $\sigma \sim \sigma'$ тогда и только тогда, когда существуют такие элементарные тройки τ и τ', что тройка $\sigma + \tau$ изоморфна тройке $\sigma' + \tau'$. Очевидно, что операция взятия суммы троек снабжает $K(\varphi)$ структурой моноида. Через $d(E, F, \alpha)$ мы будем обозначать класс эквивалентности тройки (E, F, α) в моноиде $K(\varphi)$. Непосредственно из определения следует, что $d(E, F, \alpha) = 0$ тогда и только тогда, когда в категории $\mathscr{C}$ существуют такие объекты G и H и такие изоморфизмы u: $E\oplus G \to H$ и v: $F\oplus G\to H$, что $\varphi(v)\cdot(\alpha\oplus \mathrm{Id}_{\varphi(G)})\cdot\varphi(u^{-1})$ гомотопно $\mathrm{Id}_{\varphi(H)}$ в множестве автоморфизмов объекта $\varphi(H)$.

2.14. Предложение. *Моноид $K(\varphi)$ является абелевой группой, совпадающей с $K(\mathscr{C})$, в случае когда $\mathscr{C}'=0$. Кроме того, $d(E, F, \alpha)+d(F, E, \alpha^{-1})=0$.*

Доказательство. Пусть $d(E, F, \alpha)$ — произвольный элемент из $K(\varphi)$. Тогда $d(E, F, \alpha)+d(F, E, \alpha^{-1})=d(E\oplus F, F\oplus E, \alpha\oplus\alpha^{-1})$. Тройка $(E\oplus F, F\oplus E, \alpha\oplus\alpha^{-1})$ изоморфна тройке $(E\oplus F, E\oplus F, \beta)$, где β — автоморфизм объекта $\varphi(E)\oplus\varphi(F)$, задаваемый матрицей

$$\beta=\begin{pmatrix}0 & -\alpha^{-1}\\ \alpha & 0\end{pmatrix}.$$

В группе $\mathrm{Aut}(\varphi(E)\oplus\varphi(F))$ имеет место тождество

$$\begin{pmatrix}0 & -\alpha^{-1}\\ \alpha & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -\alpha^{-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ \alpha & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\alpha^{-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Пусть теперь σ: $I\to \mathrm{Aut}(\varphi(E)\oplus\varphi(F))$ — непрерывное отображение, задаваемое формулой

$$\sigma(t)=\begin{pmatrix}1 & -t\alpha^{-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ t\alpha & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -t\alpha^{-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Так как $\sigma(0)=1$ и $\sigma(1)=\beta$, то тройка $(E\oplus F, E\oplus F, \beta)$ элементарна и элемент $d(E, F, \alpha^{-1})$ противоположен элементу $d(E, F, \alpha)$, как и требовалось. Далее, пусть i: $K(\varphi)\to K(\mathscr{C})$ — гомоморфизм, определенный формулой $i(d(E, F, \alpha))=[E]-[F]$. Очевидно, что, когда $\mathscr{C}'=0$, i является изоморфизмом, так как в этом случае тройка (E, F, α) вполне определяется парой (E, F) (1.2). □

2.15. Предложение. *Пусть $d(E, F, \alpha)$ и $d(E', F', \alpha')$ — такие элементы группы $K(\varphi)$, что α и α' гомотопны в множестве изоморфизмов из $\varphi(E)$ в $\varphi(F)$. Тогда $d(E, F, \alpha)=d(E, F, \alpha')$.*

Доказательство. Согласно 2.14, $d(E, F, \alpha)-d(E, F, \alpha')=d(E, F, \alpha)+d(F, E, \alpha'^{-1})=d(E\oplus F, F\oplus E, \alpha\oplus\alpha'^{-1})=d(E\oplus F, E\oplus F, \beta')$, где β' — автоморфизм объекта $\varphi(E)\oplus\varphi(F)$, определенный матрицей

$$\beta'=\begin{pmatrix}0 & -\alpha'^{-1}\\ \alpha & 0\end{pmatrix}.$$

Так как α' гомотопен α в множестве изоморфизмов из $\varphi(E)$ в $\varphi(F)$, то автоморфизм β' гомотопен автоморфизму

$$\beta=\begin{pmatrix}0 & -\alpha^{-1}\\ \alpha & 0\end{pmatrix}$$

в множестве автоморфизмов объекта $\varphi(E)\oplus\varphi(F)$. Как было показано в 2.14, отображение β гомотопно $\mathrm{Id}_{\varphi(E)\oplus\varphi(F)}$. Следовательно, тройка $(E\oplus F,\ E\oplus F,\ \beta')$ элементарна и поэтому $d(E,\ F,\ \alpha) = d(E,\ F,\ \alpha')$. □

2.16. Предложение. *Пусть* $d(E,\ F,\ \alpha)$ *и* $d(F,\ G,\ \beta)$ — *элементы группы* $K(\varphi)$. *Тогда имеет место соотношение*

$$d(E,\ F,\ \alpha)+d(F,\ G,\ \beta)=d(E,\ G,\ \beta\alpha).$$

Доказательство. Левая сторона равенства может быть записана в виде $d(E\oplus F,\ F\oplus G,\ \alpha\oplus\beta)=d(E\oplus F,\ G\oplus F,\ \gamma)$, где изоморфизм γ задается матрицей

$$\gamma=\begin{pmatrix}0 & -\beta\\ \alpha & 0\end{pmatrix}.$$

С другой стороны, $d(E,\ G,\ \beta\alpha)=d(E\oplus F,\ G\oplus F,\ \gamma')$, где $\gamma'=\beta\alpha\oplus 1$. Автоморфизм $\gamma\gamma'^{-1}$ задается матрицей

$$\begin{pmatrix}0 & -\beta\\ \beta^{-1} & 0\end{pmatrix}$$

и гомотопен тождественному автоморфизму в множестве всех автоморфизмов объекта $\varphi(G)\oplus\varphi(F)$. Следовательно, γ гомотопен γ' в множестве всех изоморфизмов из $\varphi(E)\oplus\varphi(F)$ в $\varphi(G)\oplus\varphi(F)$ и поэтому, согласно 2.15, $d(E\oplus F,\ G\oplus F,\ \gamma)=d(E\oplus F,\ G\oplus F,\gamma')$. □

2.17. Пример. Вернемся снова к примеру 2.11, где $\mathscr{C}=\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ (категория конечномерных вещественных векторных расслоений) и $n=2$. Пусть $d(E,\ F,\ \alpha)\in K(\varphi)$, где $\alpha\colon E\oplus E\xrightarrow{\approx} F\oplus F$. Для любого изоморфизма $u\colon F\longrightarrow E$ знак определителя композиции $E\oplus E\xrightarrow{\alpha} F\oplus F \xrightarrow{u\oplus u} E\oplus E$ не зависит от выбора u. Это определяет изоморфизм $K(\varphi)\approx \mathbb{Z}/2$.

2.18. Пример. Пусть $d(E,\ F,\ \alpha)\in K(\varphi)$, где $\varphi\colon \mathscr{H}\longrightarrow\tilde{\mathscr{H}}$ (2.4). Если $\tilde{\alpha}\colon E\longrightarrow F$ — такое непрерывное отображение, что $\varphi(\tilde{\alpha})=\alpha$, то *индекс* отображения $\tilde{\alpha}$, т. е. число $\dim(\operatorname{Ker}(\tilde{\alpha}))-\dim(\operatorname{Coker}(\tilde{\alpha}))$, зависит только от α. Это определяет изоморфизм $K(\varphi)\approx Z$ (упр. 6.12).

2.19. Наиболее важным и интересным для нас является пример 2.7. В конце этого параграфа мы вновь рассмотрим этот пример в терминах группы $\tilde{K}(X/Y)$; группа $K(\varphi)$ будет тогда обозначаться через $K(X,\ Y)$.

2.20. Предложение. *Пусть* $i\colon\ K(\varphi)\longrightarrow K(\mathscr{C})$ (*соотв.* $j\colon\ K(\mathscr{C})\longrightarrow K(\mathscr{C}')$) — *гомоморфизм, задаваемый формулой* $i(d(E,\ F,\ \alpha)) = [E]-[F]$ (*соотв.* $j([E]-[F])=[\varphi(E)]-[\varphi(F)]$). *Тогда имеет место точная последовательность*

$$K(\varphi)\xrightarrow{i} K(\mathscr{C})\xrightarrow{j} K(\mathscr{C}').$$

Кроме того, если существует такой функтор $\psi\colon\ \mathscr{C}'\longrightarrow\mathscr{C}$, *что* $\varphi\psi\approx \mathrm{Id}_{\mathscr{C}'}$, *то имеет место расщепляющаяся точная последователь-*

ность

$$0 \longrightarrow K(\varphi) \xrightarrow{i} K(\mathscr{C}) \xrightarrow{j} K(\mathscr{C}') \longrightarrow 0.$$

Доказательство. Так как α: $\varphi(E) \longrightarrow \varphi(F)$ — изоморфизм, то $(j \cdot i)(d(E, F, \alpha)) = [\varphi(E)] - [\varphi(F)] = 0$. С другой стороны, пусть $x = [E] - [F]$ — такой элемент из группы $K(\mathscr{C})$, что $j(x) = 0$. Согласно 1.16, в категории $\mathscr{C}'$ существует такой элемент T', что $\varphi(E) \bigoplus T' \approx \varphi(F) \bigoplus T'$. Поскольку функтор φ квазисюръективен, найдутся такие объекты T из $\mathscr{C}$ и T'_1 из $\mathscr{C}'$, для которых $\varphi(T) \approx T' \bigoplus T'_1$. Следовательно, объекты $\varphi(E \bigoplus T) = \varphi(E) \bigoplus T' \bigoplus T'_1$ из $\varphi(F \bigoplus T) \approx \varphi(F) \bigoplus T' \bigoplus T'_1$ изоморфны. Таким образом, мы можем представить элемент x в виде $x = [E \bigoplus T] - [F \bigoplus T] = i(d(E \bigoplus T, F \bigoplus T, \delta))$, где δ — изоморфизм между объектами $\varphi(E \bigoplus T)$ и $\varphi(F \bigoplus T)$. Предположим теперь, что существует такой функтор ψ: $\mathscr{C}' \longrightarrow \mathscr{C}$, что $\varphi\psi \approx \mathrm{Id}_{\mathscr{C}'}$. Докажем инъективность гомоморфизма i, что составляет основную часть всего доказательства. Если $i(d(E, F, \alpha) = [E] - [F] = 0$, то в категории $\mathscr{C}$ существует такой объект T, что $E \bigoplus T \approx F \bigoplus T$. Следовательно, $d(E, F, \alpha) = d(E \bigoplus T, F \bigoplus T, \alpha \bigoplus 1) = d(G, G, \beta)$, где $G = E \bigoplus T$ и β — композиция $\alpha \bigoplus 1$ и изоморфизма из $\varphi(E \bigoplus T)$ в $\varphi(F \bigoplus T)$. Поэтому мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
\varphi(G) & \xrightarrow{\beta} & \varphi(G) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\gamma} \\
(\varphi\psi)(\varphi(G)) & \xrightarrow{(\varphi\psi)(\beta)} & (\varphi\psi)(\varphi(G))
\end{array}$$

где отображение γ индуцировано изоморфизмом $\mathrm{Id}_{\mathscr{C}'} \approx \varphi\psi$. Переписывая $(\varphi\psi)(\varphi(G))$ в виде $\varphi((\psi\varphi)(G))$ и дважды применяя предложение 2.16, получаем $\beta = \gamma^{-1} \cdot (\varphi\psi)(\beta) \cdot \gamma$ и $d(G, G, \beta) = d(G, (\psi\varphi)(G), \gamma) + d((\psi\varphi)(G), (\psi\varphi)(G), ((\varphi\psi)(\beta)) + d(\psi\varphi)(G), G, \gamma^{-1}))$. В силу предложения 2.14, $d(G, (\psi, \varphi)(G), \gamma) + d((\psi\varphi)(G), G, \gamma^{-1}) = 0$. Кроме того, $d((\psi\varphi)(G), (\psi\varphi)(G), (\varphi\psi)(\beta)) = 0$, потому что тройка $((\psi\varphi)(G), (\psi\varphi)(G), (\varphi\psi)(\beta))$ изоморфна тройке $((\psi\varphi)(G), (\psi\varphi)(G), \mathrm{Id})$ ввиду коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
\varphi(\psi\varphi)(G) = (\varphi\psi)(\varphi(G)) & \xrightarrow{(\varphi\psi)(\beta)} & (\varphi\psi)(\varphi(G)) = \varphi(\psi\varphi)(G) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle(\varphi\psi)(\beta)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\mathrm{Id}} \\
\varphi(\psi\varphi)(G) & \xrightarrow{\mathrm{Id}} & \varphi(\psi\varphi)(G)
\end{array} \quad \square$$

2.21. Лемма. *Пусть A и A' — банаховы алгебры (с единицей, но не обязательно коммутативные) и f: $A \longrightarrow A'$ — непрерывный сюръек-*

тивный гомоморфизм алгебр. Обозначим соответственно через A^*, A'^* группы обратимых элементов в алгебрах A, A'. Пусть $\sigma'\colon I \longrightarrow A'$ — такое непрерывное отображение, что $\sigma'(t) \in A'^*$ для любой точки $t \in I = [0, 1]$ и $\sigma'(0) = f(\alpha)$ для некоторого $\alpha \in A^*$. Тогда существует элемент $\beta \in A^*$, такой, что $f(\beta) = \sigma^1(1)$.

Доказательство. Для любой банаховой алгебры C существует непрерывное отображение $\exp\colon C \longrightarrow C^*$, задаваемое формулой $\exp(x) = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \ldots$. Образ отображения exp содержит множество V, состоящее из точек y с $\|y - 1\| < 1$, так как на этом множестве определена логарифмическая функция. Поскольку отрезок I компактен, можно найти такую конечную последовательность точек $t_i \in I$, что $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = 1$ и $\sigma'(t_i)^{-1}\sigma'(t_{i+1}) \in V$ (для $C = A'$). Пусть

$\alpha_1' = \operatorname{Log}(\sigma'(t_i)^{-1}\sigma'(t_{i+1}))$ для $i = 0, \ldots, n-1$. Тогда элемент $\alpha' = \sigma'(1)$ может быть представлен в виде $\sigma'(0)\cdot\exp(\alpha_0')\cdot\exp(\alpha_1')\ldots\exp(\alpha_{n-1}')$. Для каждого $i = 0, \ldots, n-1$ выберем такой элемент $\alpha_i \in A$, что $f(\alpha_i) = \alpha_i'$. Тогда $\beta = \alpha\cdot\exp(\alpha_0)\cdot\exp(\alpha_1)\cdot\ldots\cdot\exp(\alpha_{n-1})$ — требуемый элемент. □

Следующие лемма и предложение окажутся полезными в дальнейшем изложении.

2.22. *Лемма.* *Обозначим через $B(X)$ банахову алгебру непрерывных функций на компактном пространстве X со значениями в банаховой алгебре B. Если гомоморфизм f из леммы 2.21 индуцирует сюръективный гомоморфизм алгебр $f\colon A(I) \longrightarrow A'(I)$, то существует такое непрерывное отображение $\sigma\colon I \longrightarrow A^*$, что $\sigma(0) = \alpha$ и $f(\sigma(t)) = \delta'(t)$.*

Доказательство. Применим лемму 2.21 к случаю $f\colon A(I) \longrightarrow A'(I)$, заменяя элемент α постоянной функцией $\tilde{\alpha}$, задаваемой формулой $\tilde{\alpha}(t) = \alpha$, а функцию σ' — функцией $\tilde{\sigma}'\colon I \longrightarrow A'(I)^*$, задаваемой формулой $\tilde{\sigma}'(t)(u) = \sigma'(tu)$. Получим, что существует такой элемент $\sigma_1 \in A(I)^*$, что $f(\sigma_1(t)) = \sigma'(t)$. Тогда функция $\sigma(t) = \sigma_1(t)\cdot\sigma_1(0)^{-1}\cdot\alpha$ обладает всеми требуемыми свойствами. □

2.23. *Замечание.* Используя методы функционального анализа, можно доказать, что для сюръективного гомоморфизма f гомоморфизм $A(X) \longrightarrow A'(X)$ сюръективен. Можно доказать также, что $A^* \longrightarrow A'^*$ — локально-тривиальное расслоение и, следовательно, расслоение Серра. Однако эти результаты не понадобятся нам в настоящей кииге.

2.24. *Предложение.* *Пусть X — компактное пространство, X' —* замкнутое подпространство *в X и E — векторное расслоение над X. Пусть $\alpha\colon E \longrightarrow E$ — автоморфизм и $\sigma'\colon I \longrightarrow \operatorname{Aut}(E_{X'})$ — такое непрерывное отображение, что $\sigma'(0) = \alpha|_{X'}$. Тогда существует такое непрерывное отображение $\sigma\colon I \longrightarrow \operatorname{Aut}(E)$, что $\sigma(0) = \alpha$ и $\sigma(t)|_{X'} = \sigma'(t)$.*

Доказательство. Данное предложение немедленно следует из предыдущей леммы, примененной к $A = \operatorname{End}(E)$ и $A' = \operatorname{End}(E_{X'})$ (I.5.10). □

2.25. *Предложение.* *Пусть $\varphi\colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}'$ — полный банахов функтор* *и* $\tau=(E, E, \alpha')$ — *элементарная тройка. Тогда* τ *изоморфна тройке* $(E, E, \mathrm{Id}_{\varphi(E)})$.

Доказательство. Пусть A (соотв. A') — банахова алгебра $\mathrm{End}(E)$ (соотв. $\mathrm{End}(\varphi(E))$). Тогда функтор φ индуцирует непрерывный сюръективный гомоморфизм алгебр $A \to A'$ Так как тройка $(E, E, \mathrm{Id}_{\varphi(E)})$ элементарна, то найдется такой непрерывный путь σ: $I \to A'^*$, что $\sigma(0)=1$ и $\sigma(1)=\alpha'$ По лемме 2.21 можно найти автоморфизм α объекта E, для которого $\varphi(\alpha)=\alpha'$. Тогда из коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} \varphi(E) \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\varphi(\alpha)"'] & \varphi(E) \arrow[d, "\varphi(\mathrm{Id})"] \\ \varphi(E) \arrow[r, "\mathrm{Id}"] & \varphi(E) \end{tikzcd} \qquad \square$$

следует, что тройки (E, E, α') и $(E, E, \mathrm{Id}_{\varphi(E)})$ изоморфны. $\square$

2.26. *Следствие.* *Пусть* φ: $\mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ — *полный квазисюръективный банахов функтор. Обозначим через* $\dot{K}(\varphi)$ *моноид, получаемый при замене в определении* $K(\varphi)$ *элементарных троек тройками вида* $(E, E\ \mathrm{Id}_{\varphi(E)})$. *Естественное отображение из* $\dot{K}(\varphi)$ *в* $K(\varphi)$ *является изоморфизмом. Следовательно,* $\dot{K}(\varphi)$ — *абелева группа.*

2.27. *Замечание.* Это следствие дает чисто алгебраическое описание группы $K(\varphi)$ для полного квазисюръективного функтора φ. Начиная с этого места, мы будем отождествлять группы $\dot{K}(\varphi)$ и $K(\varphi)$.

2.28. *Предложение.* *Пусть* $d(E, F, \alpha')$ — *элемент группы* $K(\varphi)$, *где* φ: $\mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ — *полный квазисюръективный банахов функтор. В этом случае* $d(E, F, \alpha')=0$ *тогда и только тогда, когда существуют такие объект* G *из* $\mathscr{C}$ *и изоморфизм* β: $E \bigoplus G \to F \bigoplus G$, *что* $\varphi(\beta) = \alpha' \bigoplus \mathrm{Id}_{\varphi(G)}$.

Доказательство. Согласно предыдущему следствию, найдутся такие тройки $(G, G, \mathrm{Id}_{\varphi(G)})$ и $(H, H, \mathrm{Id}_{\varphi(H)})$, что тройки $(E \bigoplus G, F \bigoplus G, \alpha' \bigoplus \mathrm{Id}_{\varphi(G)})$ и $(H, H, \mathrm{Id}_{\varphi(H)})$ изоморфны Если f: $E \bigoplus G \to H$ и g: $F \bigoplus G \to H$ — требуемые изоморфизмы, то мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \varphi(E \oplus G) \arrow[r, "\alpha' \oplus \mathrm{Id}_{\varphi(G)}"] \arrow[d, "\varphi(f)"'] & \varphi(F \oplus G) \arrow[d, "\varphi(g)"] \\ \varphi(H) \arrow[r, "\mathrm{Id}_{\varphi(H)}"] & \varphi(H) \end{tikzcd}$$

Следовательно, $\alpha' \bigoplus \mathrm{Id}_{\varphi(G)} = \varphi(\beta)$, где $\beta = g^{-1} \cdot f$. Обратное утверждение очевидно. $\square$

2.29. Применим это предложение в случае, когда $\mathscr{C}=\mathscr{E}(X)$, $\mathscr{C}'=\mathscr{E}(Y)$, где Y — замкнутое подпространство компактного пространства X, и φ: $\mathscr{E}(X) \to \mathscr{E}(Y)$ — функтор, индуцированный ограничением расслоений (см. 2.7). Вместо $K(\varphi)$ в этом случае мы будем использовать обозначение $K(X, Y)$ (соотв. $K_{\mathbb{R}}(X, Y)$ или $K_{\mathbb{C}}(X, Y)$, если нужно указать основное поле). Перефразируя следствие 2.26, мы можем сказать, что каждый элемент из $K(X, Y)$ представляется в виде $d(E, F, \alpha)$, где E и F — векторные расслоения над X и α: $E_Y \to F_Y$ — изоморфизм. Кроме того, $d(E, F, \alpha) = d(E', F', \alpha')$ тогда и только тогда, когда существуют такие тройки $(G, G, \mathrm{Id}_{G_Y})$ и $(G', G', \mathrm{Id}_{G'_Y})$ и такие изоморфизмы f: $E \oplus G \to E' \oplus G'$ и g: $F \oplus G \to F' \oplus G'$, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
(E \oplus G)|_Y \arrow[r, "\alpha \oplus \mathrm{Id}_{G_Y}"] \arrow[d, "f|_Y"'] & (F \oplus G)|_Y \arrow[d, "g|_Y"] \\
(E' \oplus G')|_Y \arrow[r, "\alpha' \oplus \mathrm{Id}_{G'_Y}"] & (F' \oplus G')|_Y
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Согласно 2.20, мы имеем точную последовательность

$$K(X, Y) \to K(X) \to K(Y).$$

Если Y — ретракт пространства X (т. е. отображение вложения i: $Y \to X$ допускает левое обратное), то существует функтор ψ: $\mathscr{E}(Y) \to \mathscr{E}(X)$, являющийся правым обратным к функтору ограничения. Тогда, согласно второй части предложения 2.20, мы имеем расщепляющуюся точную последовательность

$$0 \to K(X, Y) \to K(X) \to K(Y) \to 0.$$

Наконец, заметим, что $K(X, \varnothing) \approx K(X)$.

2.30. *Пример.* Пусть $X = B^2$ (соотв. $Y = S^1$) — единичный шар (соотв. единичная сфера) в пространстве $\mathbb{R}^2$. Определим элемент $d(E, F, \alpha)$ из $K_{\mathbb{C}}(X, Y) = K_{\mathbb{C}}(B^2, S^1)$, полагая $E = F = B^2 \times \mathbb{C}$ и $\alpha(x, v) = (x, xv)$ для $x \in S^1 \subset B^2 \subset \mathbb{C}$. Этот элемент будет играть важнейшую роль в гл. III Мы увидим позже, что $d(E, F, \alpha)$ является образующей группы $K_{\mathbb{C}}(B^2, S') \approx Z$

2.31. *Пример.* Более общим образом, пусть $X = B^2 \times Z$ и $Y = S^1 \times Z$, где Z — произвольное компактное пространство. Пусть G — комплексное векторное расслоение над Z и $\pi^*(G)$ — обратный образ G при проекции π: $B^2 \times Z \to Z$. Определим элемент $d(E, F, \alpha)$ из $K_{\mathbb{C}}(X, Y) = K(B^2 \times Z, S^1 \times Z)$, полагая $E = F = \pi^*(G) = B^2 \times G$ и $\alpha(x, v) = (x, xv)$ для $x \in S^1 \subset B^2 \subset \mathbb{C}$. В § III.1 мы увидим, что соответствие $G \mapsto d(E, F, \alpha)$ индуцирует изоморфизм $K_{\mathbb{C}}(Z) \approx K_{\mathbb{C}}(B^2 \times Z, S' \times Z)$.

2.32. *Пример.* Пусть φ: $\mathscr{H} \to \check{\mathscr{H}}$ — функтор из примера 2.10, а $E = F = H = k \oplus k \oplus \ldots \oplus k \oplus \ldots$ (гильбертова сумма $\aleph_0$ экземпляров основного поля $k=\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$). Рассмотрим в группе $K(\varphi)$ элемент $d(E, F, \alpha)$, где α — класс эквивалентности эндоморфизма $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)\mapsto(x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)$, который обратим в $\check{\mathscr{H}}$ (но необратим в $\mathscr{H}$). Можно доказать, что элемент $d(E, F, \alpha)$ является образующей группы $K(\varphi)\approx\mathbb{Z}$ (упр. 6.12 и пример 2.18).

2.33. Группа $K(X, Y)$ функториальным образом зависит от пары пространств (X, Y). Более точно, напомним, что морфизмом пар (X, Y) и (X', Y') называется непрерывное отображение $f\colon X\to X'$, для которого $f(Y)\subset Y'$. Такой морфизм индуцирует коммутативную диаграмму категорий

$$\begin{array}{ccc}\mathscr{E}(X) & \longrightarrow & \mathscr{E}(Y)\\ {\scriptstyle f^*}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle f_1^*}\\ \mathscr{E}(X') & \longrightarrow & \mathscr{E}(Y')\end{array}$$

где $f_1=f|_Y$, и тем самым морфизм из $K(X, Y)$ в $K(X', Y')$ (снова обозначаемый через f^*), задаваемый формулой

$$f^*(\alpha(E', F', \alpha'))=d(f^*(E), f^*(F), f_1^*(\alpha')).$$

2.34. Рассмотрим теперь „факторпространство" X/Y. Если подпространство $Y\subset X$ непусто, то X/Y — это компактное пространство, получаемое отождествлением всех точек Y — „склеиванием" их в одну точку $\{y\}$. Если же Y пусто, то X/Y — это несвязное объединение пространства X и некоторой „внешней" точки, снова обозначаемой через $\{y\}$. Заметим, что X/Y является одноточечной компактификацией локально-компактного пространства $X\setminus Y$.

2.35. Теорема (о вырезании). *Проекция $\pi\colon X\to X/Y$ индуцирует изоморфизм*

$$\pi^*\colon K(X/Y, \{y\})\to K(X, Y).$$

Доказательство. Для случая когда Y пусто, мы предоставляем тривиальную проверку того, что π^* изоморфизм, читателю. В случае же когда Y непусто, доказательство разбивается на две части.

а) *Гомоморфизм π^* сюръективен.* Пусть $d(E, F, \alpha)$ — некоторый элемент из $K(X, Y)$. Прибавляя, если надо, к E и F одно и то же расслоение, мы без ограничения общности можем считать, что F — тривиальное расслоение, скажем $F=\theta_n$. Пусть $\pi_1\colon Y\to\{y\}$ — очевидная проекция. Мы хотим найти тройку (E', F', α'), определяющую элемент из $K(X/Y, \{y\})$, для которой тройки $(\pi^*(E'), \pi^*(F'), \pi_1^*(\alpha'))$ и (E, F, α) изоморфны. Согласно I.5.11, существуют такая замкнутая окрестность V подпространства Y и такой изоморфизм $\beta\colon E_V\to F_V$, что $\beta|_Y=\alpha$. Пусть E' — векторное расслоение над X/Y, получаемое склеиванием над V/Y расслоения $E|_{X\setminus Y}$ и тривиального расслоения ранга n с помощью изоморфизма $\beta|_{V\setminus Y}$ (заметим, что $X\setminus Y\approx(X/Y)\setminus\{y\}$ и $V\setminus Y\approx(V/Y)\setminus\{y\}$). Пусть F' —

тривиальное расслоение над X/Y ранга n и α': $E|_{\{y\}} \to F'|_{\{y\}}$ — изоморфизм, индуцированный указанным выше склеиванием.

Тогда существует изоморфизм f: $E \to \pi^*[E']$, задаваемый соотношением $f|_{X\setminus Y} = \mathrm{Id}$ с учетом отождествлений $\pi^*E'|_{X\setminus Y} = E'|_{X\setminus Y} = E|_{X\setminus Y}$ и соотношением $f|_Y = \mathrm{Id}$ с учетом отождествления $\pi^*(E')|_Y = \theta_n|_Y$ (I.3.3). Непосредственно проверяется, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} E|_Y \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f|_Y"'] & F|_Y \arrow[d, equal] \\ \pi^*(E')|_Y \arrow[r, "\pi_1^*(\alpha')"] & \pi^*(F')|_Y \end{tikzcd}$$

коммутативна.

b) *Гомоморфизм π^* инъективен.* Пусть $d(E', F', \alpha')$ — такой элемент из $K(X/Y, \{y\})$, что $\pi^*(d(E', F', \alpha')) = d(\pi^*(E'), \pi^*(F'), \pi_1^*(\alpha')) = 0$. Согласно 2.28, над пространством X существует такое расслоение T, что изоморфизм $\pi_1^*(\alpha') \oplus \mathrm{Id}_{T|_Y}$ может быть продолжен до изоморфизма β: $\pi^*[E'] \oplus T \to \pi^*(F') \oplus T$. Как и ранее, мы можем считать, что расслоение T тривиально. Пусть T' — тривиальное расслоение над X/Y того же ранга, что и расслоение T. Обозначим через β' изоморфизм $E' \oplus T' \to F' \oplus T'$, равный β над пространством $X \setminus Y$ и равный α' над точкой $\{y\}$. Очевидно, что β' непрерывен и является продолжением на пространство X/Y изоморфизма $\alpha' \oplus \mathrm{Id}_{T'|\{y\}}$. Вновь применяя предложение 2.28, получаем, что $d(E', F', \alpha') = d(E' \oplus T', F' \oplus T', \alpha' \oplus \mathrm{Id}_{T'}) = 0$. □

2.36. Замечание. Так как $\{y\}$ является ретрактом пространства X/Y, то в силу 2.29 мы имеем $K(X/Y, \{y\}) \approx \mathrm{Ker}(K(X/Y) \to K(\{y\})) \approx \tilde{K}(X/Y)$.

2.37. Следствие. *Пусть X_1 и X_2 — такие замкнутые подпространства пространства X, что $X_1 \cup X_2 = X$. Вложение $(X_1, X_1 \cap X_2) \to (X_1 \cup X_2, X_2)$ индуцирует изоморфизм*

$$K(X_1 \cup X_2, X_2) \xrightarrow{\approx} K(X_1, X_1 \cap X_2).$$

Доказательство. Это утверждение непосредственно следует из коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} (X_1, X_1 \cap X_2) \arrow[r] \arrow[d] & (X_1 \cup X_2, X_2) \arrow[d] \\ (X_1/(X_1 \cap X_2), \{y\}) \arrow[r] & ((X_1 \cup X_2)/X_2, \{y\}) \end{tikzcd}$$

где $X_1/(X_1 \cap X_2) \approx (X_1 \cup X_2)/X_2$, поскольку пространства $X_1 \setminus (X_1 \cap X_2)$ и $(X_1 \cup X_2) \setminus X_2$ гомеоморфны. □

2.38. Пример. Пусть B^n (соотв. S^{n-1}) — единичный шар (соотв. единичная сфера) в пространстве $\mathbb{R}^n$. Пространство B^n/S^{n-1} следующим образом отождествляется со сферой $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Рассмотрим ортогональную проекцию пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ на подпространство $\mathbb{R}^n$, задаваемое уравнением $\bar{\varepsilon}=0$, где ε — последний базисный вектор в $\mathbb{R}^{n+1}$, а $\bar{\varepsilon}$ — дуальная к ε форма. При этой проекции верхняя полусфера S^n_+ гомеоморфно отображается на B^n (рис. 7). Каждая точка сферы S^n может быть представлена в виде $v \sin\theta + \varepsilon\cos\theta$, $v \in S^{n-1}$, $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Это представление единственно, за исключением случаев, когда данная точка совпадает с $\pm\varepsilon$. Зададим теперь отображение γ: $S^n_+ \to S^n$, полагая $\gamma(v\sin\theta + \varepsilon\cos\theta) = v\sin 2\theta + \varepsilon\cos 2\theta$. Тогда γ корректно определено во всех точках S^n_+, включая и точку ε, непрерывно и индуцирует гомеоморфизм $S^n_+/S^{n-1} \approx B^n/S^{n-1}$ на S^n. Из 2.29, 2.35 и 1.34 следует, что

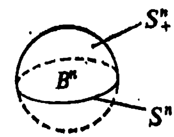


Рис. 7.

$$K(B^n,\ S^{n-1}) \approx K(B^n/S^{n-1},\ \{y\}) \approx \tilde{K}(S^n) = \pi_{n-1}(\mathrm{GL}(k)).$$

Следовательно, $K_{\mathbb{R}}(B^n, S^{n-1}) \approx \pi_{n-1}(\mathrm{GL}(\mathbb{R})) \approx \pi_{n-1}(\mathrm{O})$ и $K_{\mathbb{C}}(B^n, S^{n-1}) \approx \pi_{n-1}(\mathrm{U})$. В частности, мы имеем $K_{\mathbb{C}}(B^2, S^1) \approx \pi_1(\mathrm{U}) \approx \pi_1(\mathrm{U}(1)) \approx \mathbb{Z}$.

2.39. *Пример.* Более общим образом, рассмотрим последовательность

$$K(X\times B^n,\ X\times S^{n-1}) \xrightarrow{u} K(X\times S^n,\ X) \xrightarrow{v} \tilde{K}((X\times S^n)/X).$$

Рассуждения предыдущего примера показывают, что u — изоморфизм; v — также изоморфизм, в силу теоремы 2.35. Следовательно, композиция vu тоже является изоморфизмом.

2.40. *Пример.* Пусть (X, A) и (Y, B) — две пары компактных пространств. Тогда $(X\setminus A)\times(Y\setminus B)$ гомеоморфно пространству $(X\times Y)\setminus C$, где $C=(X\times B)\cup(A\times Y)$. С другой стороны, если Z и T — компактные пространства с отмеченными точками z_0 и t_0, определим $Z\vee T$ как подпространство произведения $Z\times T$, состоящее из таких точек (z, t), что $z=z_0$ или $t=t_0$. Далее, определим пространство $Z\wedge T$, полагая $Z\wedge T=(Z\times T)/Z\vee T$. Тогда для $Z=X/A$ и $T=Y/B$ мы имеем $(Z\times T)\setminus Z\vee T \approx (X\times Y)\setminus C$ и поэтому $K(X\times Y, (X\times B)\cup(A\times Y)) \approx \tilde{K}((X/A)\wedge(Y/B))$.

2.41. *Пример.* Если Z — пространство с отмеченной точкой z_0, то определим *приведенную надстройку* $S(Z)$, полагая $S(Z)=Z\wedge S^1 \approx (Z\times I)/(Z\times\{0\}\cup Z\times\{1\}\cup\{z_0\}\times I)$. Приведенная надстройка $S(Z)$ получается из надстройки $S'(Z)$, рассмотренной в I.3.14, стягиванием в точку подпространства $\{z_0\}\times I$. Приведенную надстройку можно интерпретировать также как одноточечную компактификацию пространства $(Z\setminus\{z_0\})\times\mathbb{R}$. Далее, *n-кратная* приведенная надстройка пространства Z определяется индуктивно формулой $S^n(Z) = S(S^{n-1}Z)$ и является одноточечной компактификацией пространства $(Z\setminus\{z_0\})\times\mathbb{R}^n$. Рассмотрим теперь группу $K(X\times B^n,\ X\times S^{n-1} \cup Y\times B^n)$, где Y — замкнутое подпространство компактного пространства X. Тогда $(X\times B^n)\setminus(X\times S^{n-1}\cup Y\times B^n)\approx(X\setminus Y)\times\mathbb{R}^n$. Следовательно, на основании 2.29 и 2.35, $K(X\times B^n,\ X\times S^{n-1}\cup Y\times B^n)\approx\tilde K(S^n(X/Y))$.

2.42. Теорема. *Пусть Y — замкнутое подпространство компактного пространства X. Тогда имеет место точная последовательность*

$$\tilde K(X/Y)\to\tilde K(X)\to\tilde K(Y).$$

Доказательство. В силу 2.35, 2.36 и 2.29 мы имеем точную последовательность

$$\tilde K(X/Y)\to K(X)\to K(Y).$$

Точная последовательность теоремы следует теперь из коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[d] & \mathbf{Z} \arrow[d] & \mathbf{Z} \arrow[d] \\
K(X,Y) \arrow[r] \arrow[d, "\approx"'] & K(X) \arrow[r] \arrow[d] & K(Y) \arrow[d] \\
\tilde K(X/Y) \arrow[r] \arrow[d] & \tilde K(X) \arrow[r] \arrow[d] & \tilde K(Y) \arrow[d] \\
0 & 0 & 0
\end{tikzcd}$$ □

2.43. Теорема. *Пусть $f_0,\ f_1\colon (X,\ Y)\to(X',\ Y')$ — два непрерывных гомотопных отображения пар. Тогда f_0 и f_1 индуцируют один и тот же гомоморфизм $(f_0)^*=(f_1)^*\colon K(X',\ Y')\to K(X,\ Y)$.*

Доказательство. Пусть $f\colon (X\times I,\ Y\times I)\to(X',Y')$ — гомотопия между отображениями f_0 и f_1. Тогда f индуцирует гомотопию между фактор-отображениями $\bar f_0,\ \bar f_1\colon X/Y\to X'/Y'$. Следовательно, отображения $\bar f_0$ и $\bar f_1$ определяют один и тот же гомоморфизм $(\bar f_0)^*=(\bar f_1)^*$ из $\tilde K(X'/Y')$ в $\tilde K(X/Y)$. Утверждение теоремы следует теперь из коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
K(X',Y') \arrow[r, "f_\alpha^*"] & K(X,Y) \\
\tilde K(X'/Y') \arrow[r, "\bar f_\alpha^*"] \arrow[u, "\approx"] & \tilde K(X/Y) \arrow[u, "\approx"']
\end{tikzcd}$$

($\alpha=0,\ 1$), теоремы 2.35 и замечания 2.36. □

Упражнение: 13.

3. Группа K^{-1} банаховой категории. Группа $K^{-1}(X)$

3.1. Прежде чем двигаться дальше, вкратце опишем, чем мы собираемся заниматься в следующих параграфах. Нашей основной целью будет построение для компактного пространства X и его замкнутого подпространства Y групп $K^n(X, Y)$, $n \in \mathbb{Z}$, контравариантным образом зависящих от пары (X, Y). Кроме того, мы построим „связывающие гомоморфизмы", т. е. естественные преобразования

$$\partial^{n-1}\colon K^{n-1}(Y) \to K^n(X, Y).$$

Наконец, мы докажем, что выполняются следующие аксиомы:

(1) *Аксиома точности.* Последовательность

$$K^{n-1}(X) \xrightarrow{j^*} K^{n-1}(Y) \xrightarrow{\partial^{n-1}} K^n(X, Y) \xrightarrow{i^*} K^n(X) \xrightarrow{j^*} K^n(Y),$$

где $K^n(Z) = K^n(Z, \varnothing)$ и гомоморфизмы j^* и i^* индуцированы включениями $(Y, \varnothing) \subset (X, \varnothing)$ и $(X, \varnothing) \subset (X, Y)$, точна.

(2) *Аксиома гомотопической инвариантности.* Если $f_0, f_1\colon (X, Y) \to (X', Y')$ — гомотопные непрерывные отображения пар, то они индуцируют один и тот же гомоморфизм $(f_0)^* = (f_1)^*\colon K^n(X', Y') \to K^n(X, Y)$.

(3) *Аксиома вырезания.* Проекция $(X, Y) \to (X/Y, \{y\})$ индуцирует изоморфизм $K^n(X/Y, \{y\}) \xrightarrow{\approx} K^n(X, Y)$.

(4) *Аксиома нормализации.* Функтор $K^0(X) = K^0(X, \varnothing)$ совпадает с функтором $K(X)$, построенным в § II. 1.

Пока мы выполнили лишь незначительную часть этой работы. Действительно, полагая $K^0(X, Y) = K(X, Y)$, мы можем на основании 2.20 и 2.29 утверждать точность последовательности

$$K^0(X, Y) \xrightarrow{i^*} K^0(X) \xrightarrow{j^*} K^0(Y).$$

Кроме того, в 2.43 и 2.35 мы доказали аксиомы соответственно гомотопической инвариантности и вырезания для случая $n = 0$. В следующих двух параграфах мы построим „половину" теории, а именно построим функторы $K^n(X, Y)$ для $n < 0$.

Построение другой половины теории, т. е. функторов $K^n(X, Y)$ для $n > 0$, представляет собой значительно более трудную задачу. Мы определим эти функторы в гл. III, доказав предварительно теорему „периодичности" для функторов $K^{-n}(X, Y)$ (именно, установив изоморфизмы $K_{\mathbb{R}}^{-n}(X, Y) \approx K_{\mathbb{R}}^{-n-8}(X, Y)$ и $K_{\mathbb{C}}^{-n}(X, Y) \approx K_{\mathbb{C}}^{-n-2}(X, Y)$).

Все эти результаты можно было бы получить для произвольной банаховой категории, как это сделано в диссертации автора [2]. Однако для того, чтобы не удлинять изложения, мы в основном ограничимся рассмотрением категории векторных расслоений. Интересующийся читатель может познакомиться с обобщениями утверждений последующих параграфов по диссертации автора [2] или по упражнениям, помещенным в конце главы.

3.2. Пусть $\mathscr{C}$ — банахова категория. В этом параграфе мы определим группу $K^{-1}(\mathscr{C})$, функториально зависящую от категории $\mathscr{C}$ (в случае когда $\mathscr{C}=\mathscr{E}(X)$, группа $K^{-1}(\mathscr{C})$ будет обозначаться через $K^{-1}(X)$). Кроме того, если $\varphi\colon \mathscr{C}\to\mathscr{C}'$ — квазисюръективный банахов функтор, мы определим также „связывающий гомоморфизм“

$$\partial\colon K^{-1}(\mathscr{C}')\to K(\varphi),$$

который включается в точную последовательность

$$K^{-1}(\mathscr{C})\to K^{-1}(\mathscr{C}')\xrightarrow{\partial} K(\varphi)\to K(\mathscr{C})\to K(\mathscr{C}').$$

В случае когда $\varphi\colon \mathscr{E}(X)\to\mathscr{E}(Y)$ — функтор ограничения, эта последовательность может быть записана в виде

$$K^{-1}(X)\to K^{-1}(Y)\xrightarrow{\partial} K^0(X,\ Y)\to K^0(X)\to K^0(Y)$$

и является последовательностью, фигурирующей в аксиоме точности для $n=0$.

3.3. Более точно, рассмотрим множество пар вида $(E,\ \alpha)$, где E — объект категории $\mathscr{C}$ и α — автоморфизм E. Две пары (E,α) и (E',α') называются *изоморфными*, если в категории $\mathscr{C}$ существует такой изоморфизм $h\colon E\to E'$, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\alpha"'] & E' \arrow[d, "\alpha'"] \\ E \arrow[r, "h"] & E' \end{tikzcd}$$

коммутативна. Определим *сумму* двух пар $(E_0,\ \alpha_0)$ и $(E_1,\ \alpha_1)$, полагая $(E_0,\ \alpha_0)+(E_1,\ \alpha_1)=(E_0\oplus E_1,\ \alpha_0\oplus\alpha_1)$. Пара $(E,\ \alpha)$ называется *элементарной*, если автоморфизм α гомотопен Id_E в множестве всех автоморфизмов объекта E. Множество $K^{-1}(\mathscr{C})$ определяется как фактормножество множества пар $\{(E,\ \alpha)\}$ по следующему отношению эквивалентности: $\sigma\sim\sigma'$ тогда и только тогда, когда существуют такие элементарные пары τ и τ', что $\sigma+\tau\approx\sigma'+\tau'$. Операция сложения пар индуцирует на $K^{-1}(\mathscr{C})$ структуру абелева моноида. Через $d(E,\ \alpha)$ мы будем обозначать класс эквивалентности пары $(E,\ \alpha)$ в $K^{-1}(\mathscr{C})$.

3.4. Предложение. *Имеет место соотношение $d(E,\alpha)+d(E,\alpha^{-1})=0$. Следовательно, $K^{-1}(\mathscr{C})$ — абелева группа.*

Доказательство. По определению $d(E,\ \alpha)+d(E,\ \alpha^{-1})=d(E\oplus E,\ \alpha\oplus\alpha^{-1})$. Но автоморфизм $\alpha\oplus\alpha^{-1}$ можно представить в виде

Как было показано в 2.14, каждая из матриц в правой части этого равенства гомотопна автоморфизму $\mathrm{Id}_{E\oplus E}$. Следовательно, $d(E\oplus E, \alpha\oplus\alpha^{-1})=0$. □

3.5. Предложение. *Пусть α и α' — автоморфизмы объекта E, гомотопные в множестве* $\mathrm{Aut}(E)$. *Тогда* $d(E, \alpha)=d(E, \alpha')$.

Доказательство. Согласно предложению 3.4, мы имеем $d(E, \alpha)-d(E, \alpha')=d(E, \alpha)+d(E, \alpha'^{-1})=d(E\oplus E, \alpha\oplus\alpha'^{-1})$. Но автоморфизм $\alpha\oplus\alpha'^{-1}$ гомотопен автоморфизму $\alpha\oplus\alpha^{-1}$ и, следовательно, автоморфизму $\mathrm{Id}_{E\oplus E}$. Поэтому пара $(E\oplus E, \alpha\oplus\alpha'^{-1})$ элементарна и $d(E\oplus E, \alpha\oplus\alpha'^{-1})=0$. □

3.6. Предложение. *Имеет место формула*

$$d(E, \alpha)+d(E, \beta)=d(E, \alpha\beta)=d(E, \beta\alpha).$$

Доказательство. Рассмотрим классы $d(E, \alpha)+d(E, \beta)=d(E\oplus E, \alpha\oplus\beta)$ и $d(E, \alpha\beta)=d(E\oplus E, \alpha\beta\oplus\mathrm{Id}_E)$. Согласно предложению 3.5, для того чтобы доказать их равенство, достаточно показать, что $\alpha\oplus\beta$ и $\alpha\beta\oplus\mathrm{Id}_E$ гомотопны в множестве $\mathrm{Aut}(E\oplus E)$ Но, как было показано в 3.4, автоморфизм $(\alpha\oplus\beta)^{-1}(\alpha\beta\oplus\mathrm{Id}_E)=\beta\oplus\beta^{-1}$ гомотопен автоморфизму $\mathrm{Id}_{E\oplus E}$ и поэтому $\alpha\oplus\beta$ гомотопен $\alpha\beta\oplus\mathrm{Id}_E$, что и требовалось. Кроме того, $d(E, \beta\alpha)=d(E, \beta)+d(E, \alpha)=d(E, \alpha)+d(E, \beta)$. □

3.7. Лемма. *Класс $d(E, \alpha)$ обращается в нуль тогда и только тогда, когда существует такой объект G из $\mathscr{C}$, что автоморфизм $\alpha\oplus\mathrm{Id}_G$ гомотопен автоморфизму $\mathrm{Id}_{E\oplus G}$ в множестве $\mathrm{Aut}(E\oplus G)$.*

Доказательство. Предположим, что $d(E, \alpha)=0$. По определению $K^{-1}(\mathscr{C})$, существуют такие элементарные пары (G, η) и (G', η') с изоморфизмом h: $E\oplus G\to G'$, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E\oplus G & \xrightarrow{h} & G' \\ {\scriptstyle \alpha\oplus\eta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \eta'} \\ E\oplus G & \xrightarrow{h} & G' \end{array}$$

коммутативна. Отсюда видно, что автоморфизм $\alpha\oplus\mathrm{Id}_G$ гомотопен автоморфизму $\alpha\oplus\eta=h^{-1}\cdot\eta'\cdot h$, который в свою очередь гомотопен автоморфизму $h^{-1}\cdot\mathrm{Id}_{G'}\cdot h=\mathrm{Id}_{E\oplus G}$. Обратное очевидно. □

3.8. Предложение. *Равенство $d(E, \alpha)=d(F, \beta)$ имеет место тогда и только тогда, когда существует такой объект G из $\mathscr{C}$, что автоморфизмы $\alpha\oplus\mathrm{Id}_F\oplus\mathrm{Id}_G$ и $\mathrm{Id}_E\oplus\beta\oplus\mathrm{Id}_G$ гомотопны в множестве* $\mathrm{Aut}(E\oplus F\oplus G)$.

Доказательство. Пусть $d(E, \alpha)=d(F, \beta)$. Согласно предложению 3.4, $d(E, \alpha)-d(F, \beta)=d(E\oplus F, \alpha\oplus\beta^{-1})=0$. Следовательно, на основании 3.7 существует такой объект G из $\mathscr{C}$, что автоморфизм $\alpha\oplus\beta^{-1}\oplus\mathrm{Id}_G$ гомотопен автоморфизму $\mathrm{Id}_{E\oplus F\oplus G}$. Умножая эту гомотопию на $\mathrm{Id}_E\oplus\beta\oplus\mathrm{Id}_G$, мы видим, что автоморфизмы $\alpha\oplus\mathrm{Id}_F\oplus\mathrm{Id}_G$ и $\mathrm{Id}_E\oplus\beta\oplus\mathrm{Id}_G$ гомотопны. Обратное утверждение очевидно. □

3.9. Замечание. Предложение 3.8 дает нам эквивалентное определение группы $K^{-1}(\mathscr{C})$.

3.10. Пример. Пусть A — банахова алгебра (с единицей, но не обязательно коммутативная) и $\mathscr{C} = \mathscr{L}(A)$ — категория конечно порожденных свободных правых A-модулей. Обозначим через $\mathrm{GL}_n(A)$ группу обратимых матриц размера $n \times n$ с коэффициентами в A и положим $\mathrm{GL}(A) = \mathrm{inj}\lim \mathrm{GL}_n(A)$. Определим отображение $\gamma\colon K^{-1}(\mathscr{C}) \to \pi_0(\mathrm{GL}(A)) = \mathrm{inj}\lim \pi_0(\mathrm{GL}_n(A))$, полагая $\gamma(d(A^n, \alpha)) = [\alpha]$, где $[\alpha]$ — класс автоморфизма α в $\pi_0(\mathrm{GL}(A))$. Вычисления п. 3.4 показывают, что матрицы $\alpha \oplus \mathrm{Id}_{A^n}$ и $\mathrm{Id}_{A^n} \oplus \alpha$ принадлежат одной и той же компоненте связности в $\mathrm{GL}_{2n}(A)$. Поэтому, в силу предложения 3.8, отображение γ корректно определено. Далее, если снабдить множество $\pi_0(\mathrm{GL}(A))$ структурой абелевой группы, индуцированной умножением матриц, то предложение 3.6 показывает, что γ — гомоморфизм групп. Наконец, из 3.7 вытекает, что гомоморфизм γ сюръективен и инъективен.

3.11. Пример. Пусть $\mathscr{E}_k$ — категория коиечномерных k-векторных пространств. Из предыдущего примера следует, что $K^{-1}(\mathscr{E}_{\mathbb{C}}) \approx \pi_0(\mathrm{GL}(\mathbb{C})) = 0$ и $K^{-1}(\mathscr{E}_{\mathbb{R}}) \approx \pi_0(\mathrm{GL}(\mathbb{R})) \approx \mathbb{Z}/2$.

3.12. Пример. Пусть H — бесконечномерное гильбертово пространство и $\mathscr{K}$ — замкнутый двусторонний идеал компактных операторов (т. е. пределов операторов конечного ранга). Пусть $A = \mathrm{End}(H)/\mathscr{K}$ — факторалгебра (называемая в функциональном анализе алгеброй Калкина). Из упр. 12 следует, что $\pi_0(\mathrm{GL}(A)) \approx \mathbb{Z}$. Таким образом, $K^{-1}(\mathscr{L}(A)) \approx \mathbb{Z}$.

31.3. Пусть $\mathscr{C}$ — произвольная банахова категория и $\tilde{\mathscr{C}}$ — ассоциированная с ней псевдоабелева категория (I.6.9). Канонический функтор $\varphi\colon \mathscr{C} \to \tilde{\mathscr{C}}$ индуцирует групповые гомоморфизмы $K(\mathscr{C}) \to K(\tilde{\mathscr{C}})$ и $K^{-1}(\mathscr{C}) \to K^{-1}(\tilde{\mathscr{C}})$. Как мы уже видели, первый гомоморфизм в общем случае не является биективным (I.3.10 и I.6.16). Однако для второго гомоморфизма справедливо следующее утверждение.

3.14. Теорема. *Отображение*

$$\varphi_*\colon K^{-1}(\mathscr{C}) \to K^{-1}(\tilde{\mathscr{C}})$$

биективно.

Доказательство. a) φ_* *сюръективно.* Пусть $d(E, \alpha) \in K^{-1}(\tilde{\mathscr{C}})$, и пусть T (соотв. F) — такой объект в $\mathscr{C}$ (соотв. в $\tilde{\mathscr{C}}$), что $\varphi(T) \xrightarrow[\approx]{h} E \oplus F$. Тогда $d(E, \alpha) = d(E \oplus F, \alpha \oplus \mathrm{Id}_F) = d(T, \beta)$, где β — однозначно определенный автоморфизм объекта T, для которого $\varphi(\beta) = h \cdot (\alpha \oplus \mathrm{Id}_F) \cdot h^{-1}$ (это возможно, поскольку функтор φ вполне унивалентен; см. I.6.10).

b) φ_* *инъективно.* Пусть $d(E, \alpha) \in K^{-1}(\mathscr{C})$ — такой объект, что $\varphi_*(d(E, \alpha)) = 0$. В силу леммы 3.7 и квазисюръективности функтора φ, в категории $\tilde{\mathscr{C}}$ существует такой объект $G = \varphi(E')$, что автоморфизм $\varphi(\alpha) \oplus \mathrm{Id}_{\varphi(E')}$ гомотопен автоморфизму $\mathrm{Id}_{\varphi(E) \oplus \varphi(E')}$

в множестве $\mathrm{Aut}(\varphi(E)\oplus\varphi(E'))$. Поскольку функтор φ вполне унивалентен, автоморфизмы $\alpha\oplus\mathrm{Id}_{E'}$ и $\mathrm{Id}_{E\oplus E'}$ гомотопны в множестве $\mathrm{Aut}(E\oplus E')$. Следовательно, $d(E,\alpha)=d(E\oplus E',\alpha\oplus\mathrm{Id}_{E'})=0$. □

3.15. Пример. Пусть $\mathscr{C}=\mathscr{L}(A)$, где A — банахова алгебра. Тогда, согласно I.6.16, $\tilde{\mathscr{C}}\sim\mathscr{P}(A)$. Следовательно, $K^{-1}(\mathscr{P}(A))\approx\pi_0(\mathrm{GL}(A))$.

3.16. В доказательстве теоремы 3.14 использовался лишь тот факт, что функтор $\varphi\colon\mathscr{C}\to\tilde{\mathscr{C}}$ вполне унивалентен и квазисюръективен. Поэтому, если мы заменим $\mathscr{C}$ на категорию $\mathscr{E}_T(X)$ тривиальных расслоений над компактным пространством X, а категорию $\tilde{\mathscr{C}}$ — на категорию $\mathscr{E}(X)$ локально-тривиальных векторных расслоений над X (I.6.5) и возьмем в качестве $\varphi\colon\mathscr{E}_T(X)\to\mathscr{E}(X)$ функтор вложения, то теорема 3.14 дает нам изоморфизм

$$K^{-1}(\mathscr{E}_T(X))\to K^{-1}(\mathscr{E}(X)).$$

Для того чтобы вычислить группы $K^{-1}(\mathscr{E}_T(X))$, а значит группу $K^{-1}(\mathscr{E}(X))$, мы воспользуемся следующим результатом, который будем часто применять в дальнейшем. Для векторных расслоений E и F над пространством X существует взаимно-однозначное соответствие между непрерывными отображениями из Y в $\mathrm{Hom}(E,F)$ и пространством $\mathrm{Hom}(\pi^*(E),\pi^*(F))$, где π — каноническая проекция $X\times Y\to X$. Прежде всего, это утверждение справедливо для тривиальных расслоений, так как $F(X\times Y,k^n)\approx F(Y,F(X,k^n))$, где F обозначает пространство непрерывных отображений. Утверждение остается справедливым и для произвольных векторных расслоений, поскольку любое векторное расслоение является прямым слагаемым тривиального.

3.17. Теорема. *Пусть X — компактное пространство и $[X,\mathrm{GL}(k)]\approx\mathrm{inj\,lim}[X,\mathrm{GL}_n(k)]$ ($k=\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) — множество гомотопических классов непрерывных отображений из X в $\mathrm{GL}(k)$, снабженное групповой структурой, которая индуцирована произведением матриц. Пусть $u\colon\mathrm{inj\,lim}[X,\mathrm{GL}_n(k)]\to K^{-1}(X)=K^{-1}(\mathscr{E}_k(X))$ — отображение, определенное формулой $\alpha_n\mapsto\alpha(\theta_n,\hat{\alpha}_n)$, где $\theta_n=X\times k$. Тогда u — изоморфизм.*

Доказательство. В силу сделанного выше замечания, $[X,\mathrm{GL}_n(k)]\approx\pi_0(\mathrm{GL}_n(A))$, где A — банахова алгебра непрерывных функций на X со значениями в k. Отображение u разлагается в композицию

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{inj\,lim}[X,\mathrm{GL}_n(k)] & \longrightarrow & K^{-1}(\mathscr{E}_T(X)) & \xrightarrow{\approx} & K^{-1}(\mathscr{E}(X))\\
\wr\wr & & \wr\wr & & \\
\mathrm{inj\,lim}\,\pi_0(\mathrm{GL}_n(A)) & \xrightarrow{\approx} & K^{-1}(\mathscr{L}(A)) & &
\end{array}$$

Здесь мы воспользовались категорной эквивалентностью $\mathscr{E}_T(X)\sim\mathscr{L}(A)$, установленной при доказательстве теоремы I.6.18. Таким образом, настоящая теорема является, по существу, следствием теоремы 3.14. □

3.18. Замечание. Рассуждая в духе п. 3.14, нетрудно дать и прямое доказательство теоремы 3.17, не использующее банаховых алгебр.

3.19. Следствие. *Пусть* $\mathrm{O} = \mathrm{inj}\lim \mathrm{O}(n)$ *(соотв.* $\mathrm{U} = \mathrm{inj}\lim \mathrm{U}(n)$*) — бесконечная ортогональная группа (соотв. бесконечная унитарная группа). Тогда имеют место естественные изоморфизмы*

$$[X, \mathrm{O}] \approx \mathrm{inj}\lim [X, \mathrm{O}(n)] \xrightarrow{\approx} K_{\mathbf{R}}^{-1}(X),$$

$$[X, \mathrm{U}] \approx \mathrm{inj}\lim [X, \mathrm{U}(n)] \xrightarrow{\approx} K_{\mathbf{C}}^{-1}(X).$$

3.20. Пример. Пусть X — сфера S^p с отмеченной точкой $\{e\}$. Определим отображение $[S^p, \mathrm{GL}(k)] \to \pi_p(\mathrm{GL}(k)) \times \pi_0(\mathrm{GL}(k))$, полагая $\alpha \mapsto (\alpha', \alpha(e))$, где $\alpha'(x) = \alpha(x)\alpha(e)^{-1}$. Нетрудно убедиться, что это отображение биективно. Следовательно, $K^{-1}(S^p) \approx K^{-1}(\{e\}) \oplus \tilde{K}(S^{p+1})$ (1.34).

3.21. Пусть $\varphi\colon \mathscr{C} \to \tilde{\mathscr{C}}$ — квазисюръективный банахов функтор. Следуя плану, намеченному в 3.2, определим *связывающий гомоморфизм*

$$\partial\colon K^{-1}(\mathscr{C}') \to K(\varphi).$$

Пусть $d(E', \alpha')$ — элемент группы $K^{-1}(\mathscr{C}')$. Поскольку функтор φ квазисюръективен, то существуют такие объекты E из $\mathscr{C}$ и F' из $\mathscr{C}'$, что имеет место изоморфизм $h\colon \varphi(E) \to E' \oplus F'$. Пусть $\alpha\colon \varphi(E) \to \varphi(E)$ — изоморфизм, превращающий диаграмму

$$\begin{tikzcd}
E' \oplus F' \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\alpha' \oplus \mathrm{Id}_{F'}"'] & \varphi(E) \arrow[d, "\alpha"] \\
E' \oplus F' \arrow[r, "h"] & \varphi(E)
\end{tikzcd}$$

в коммутативную. Возьмем элемент $d(E, E, \alpha)$ из $K(\varphi)$ в качестве образа элемента $d(E', \alpha')$ при отображении ∂. Мы должны доказать, что элемент $d(E, E, \alpha)$ не зависит от выбора F', E и h. Пусть $\bar{F}'$, $\bar{E}$ — другие возможные объекты, $\bar{h}$ — другой возможный изоморфизм $\bar{h}\colon \varphi(\bar{E}) \to E' \oplus \bar{F}'$ и $d(\bar{E}, \bar{E}, \bar{\alpha})$ — новый элемент из $K(\varphi)$, построенный по $\bar{F}'$, $\bar{E}$ и $\bar{h}$. Тогда $d(E, E, \alpha) = d(E \oplus \bar{E}, E \oplus \bar{E}, \alpha \oplus \mathrm{Id}_{\varphi(\bar{E})})$, причем автоморфизм $\alpha \oplus \mathrm{Id}_{\varphi(\bar{E})}$ включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
(E' \oplus F') \oplus (E' \oplus \bar{F}') \arrow[r, "h \oplus \bar{h}"] \arrow[d, "\gamma"'] & \varphi(E) \oplus \varphi(\bar{E}) \arrow[d, "\alpha \oplus \mathrm{Id}_{\varphi(\bar{E})}"] \\
(E' \oplus F') \oplus (E' \oplus \bar{F}') \arrow[r, "h \oplus \bar{h}"] & \varphi(E) \oplus \varphi(\bar{E})
\end{tikzcd}$$

где $\gamma = (\alpha' \oplus \mathrm{Id}_{F'}) \oplus (\mathrm{Id}_{E'} \oplus \mathrm{Id}_{\bar{F}'})$. Как было показано в 3.4, автоморфизм γ гомотопен автоморфизму $\bar{\gamma} = (\mathrm{Id}_{E'} \oplus \mathrm{Id}_{F'}) \oplus (\alpha' \oplus \mathrm{Id}_{\bar{F}'})$

в множестве $\mathrm{Aut}(E' \oplus F' \oplus E' \oplus F')$. Поэтому автоморфизм $\alpha \oplus \mathrm{Id}_{\varphi(\bar{E})}$ гомотопен автоморфизму $\mathrm{Id}_{\varphi(E)} \oplus \bar{\alpha}$, что видно из аналогичной коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} (E' \oplus F') \oplus (E' \oplus \bar{F}') & \xrightarrow[\sim]{h \oplus h} & \varphi(E) \oplus \varphi(\bar{E}) \\ \Big\downarrow \bar{\gamma} & & \Big\downarrow \mathrm{Id}_{\varphi(E)} \oplus \bar{\alpha} \\ (E' \oplus F') \oplus (E' \oplus \bar{F}') & \xrightarrow{h \oplus \bar{h}} & \varphi(E) \oplus \varphi(\bar{E}) \end{array}$$

Согласно 2.15, мы имеем тождество $d(E \oplus \bar{E}, E \oplus \bar{E}, \alpha \oplus \mathrm{Id}_{\varphi(\bar{E})}) = d(E \oplus \bar{E}, E \oplus \bar{E}, \mathrm{Id}_{\varphi(E)} \oplus \bar{\alpha}) = d(\bar{E}, \bar{E}, \bar{\alpha})$, которое показывает, что гомоморфизм ∂ корректно определен и функториален.

3.22. Теорема. *Последовательность*

$$K^{-1}(\mathscr{C}) \xrightarrow{j_*} K^{-1}(\mathscr{C}') \xrightarrow{\partial} K(\varphi) \xrightarrow{i_*} K(\mathscr{C}) \xrightarrow{j_*} K(\mathscr{C}')$$

точна.

Доказательство. Согласно 2.20, нам нужно доказать лишь точность в членах $K(\varphi)$ и $K^{-1}(\mathscr{C}')$.

a) *Точность в* $K(\varphi)$. Пусть $d(E', \alpha')$ — элемент из $K^{-1}(\mathscr{C}')$. Так как функтор φ квазисюръективен, то без ограничения общности мы можем считать, что объект E' имеет вид $\varphi(E)$. Тогда $\partial(d(E', \alpha')) = d(E, E, \alpha')$ и $(i_* \partial)(d(E', \alpha')) = [E] - [E] = 0$.

Обратно, пусть $d(E, F, \alpha)$ — такой элемент из $K(\varphi)$, что $i_*(d(E, F, \alpha)) = [E] - [F] = 0$. Согласно 1.16, найдутся объект T из $\mathscr{C}$ и изоморфизм δ: $E \oplus T \to F \oplus T$. Положим $\gamma = \varphi(\delta^{-1}) \cdot (\alpha \oplus \mathrm{Id}_{\varphi(T)})$. Так как тройки $(E \oplus T, E \oplus T, \gamma)$ и $(E \oplus T, F \oplus T, \alpha \oplus \mathrm{Id}_{\varphi(T)})$ изоморфны (2.13), то $d(E, F, \alpha) = d(E \oplus T, F \oplus T, \alpha \oplus \mathrm{Id}_{\varphi(T)}) = d(E \oplus T, E \oplus T, \gamma)$. Следовательно, $d(E, F, \alpha) = \partial(d(E', \alpha))$, где $E' = \varphi(E) \oplus \varphi(T)$.

b) *Точность в* $K^{-1}(\mathscr{C}')$. Пусть $d(E, \alpha)$ — элемент из $K^{-1}(\mathscr{C})$. Тогда $(\partial \cdot j_*)(d(E, \alpha)) = d(E, E, \alpha) = 0$, поскольку тройки (E, E, α) и $(E, E, \mathrm{Id}_{\varphi(E)})$ изоморфны.

Обратно, пусть $d(E', \alpha')$ — некоторый элемент из $K^{-1}(\mathscr{C}')$. Так как функтор φ квазисюръективен, то без ограничения общности мы можем считать, что объект E' имеет вид $\varphi(E)$. Если $\partial(d(E', \alpha')) = d(E, E, \alpha') = 0$, то мы можем найти такие элементарные тройки (G, G, η) и (H, H, ε), что $(E, E, \alpha') + (G, G, \eta) \approx (H, H, \varepsilon)$ (2.13). Более точно, имеют место такие изоморфизмы u: $E \oplus G \to H$ и v: $E \oplus G \to H$, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \varphi(E) \oplus \varphi(G) & \xrightarrow{\alpha' \oplus \eta} & \varphi(E) \oplus \varphi(G) \\ \Big\downarrow \varphi(u) & & \Big\downarrow \varphi(v) \\ \varphi(H) & \xrightarrow{\cdot\ \varepsilon} & \varphi(H) \end{array}$$

коммутативна. Следовательно, согласно 3.5, $d(E', \alpha') = d(\varphi(E) \bigoplus \varphi(G), \alpha' \bigoplus \eta) = d(\varphi(H), \varphi(u)\varphi(v^{-1})\varepsilon) = d(\varphi(H), \varphi(u \cdot v^{-1}))$. Поэтому $d(E', \alpha') = j_*(d(H, \alpha))$, где $\alpha = u \cdot v^{-1}$ $\square$

3.23. *Следствие.* *Пусть X — компактное пространство и Y — замкнутое подпространство в X. Тогда имеет место точная последовательность*

$$K^{-1}(X) \xrightarrow{j^*} K^{-1}(Y) \xrightarrow{\partial} K(X, Y) \xrightarrow{i^*} K(X) \xrightarrow{j^*} K(Y).$$

3.24. *Пример.* Пусть CP_n — комплексное проективное пространство. Тогда $CP_1 \approx S^2$ и, в силу 1.34, $K_{\mathbb{C}}(CP_1) \approx K_{\mathbb{C}}(S^2) \approx \mathbb{Z} \bigoplus \mathbb{Z}$. Далее, образующая группы $K_{\mathbb{C}}(S^2)$ задается каноническим линейным расслоением над CP_1 (I.2.5). Пусть теперь $X = CP_2$ и $Y = CP_1$. Так как каноническое линейное расслоение над CP_1 является ограничением канонического линейного расслоения над CP_2, то отображение $K_{\mathbb{C}}(X) \to K_{\mathbb{C}}(Y)$ сюръективно. Наконец, $K_{\mathbb{C}}^{-1}(S^2) = 0$, так как $\pi_2(\mathrm{U}(2)) = 0$ (1.34 и 3.20), и $K(X, Y) \approx K((X \setminus Y)^{\cdot}) \approx \tilde{K}_{\mathbb{C}}(S^4) \approx \mathbb{Z}$, так как $\pi_3(\mathrm{U}(2)) \approx \mathbb{Z}$. Отсюда и из следствия 3.23 мы получаем точную последовательность

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \tilde{K}_{\mathbb{C}}(S^4) & \longrightarrow & K_{\mathbb{C}}(CP_2) & \longrightarrow & K_{\mathbb{C}}(CP_1) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \wr\wr & & & & \wr\wr & & \\
 & & \mathbb{Z} & & & & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & &
\end{array}$$

Поэтому $K_{\mathbb{C}}(CP_2) \approx \mathbb{Z} \bigoplus \mathbb{Z} \bigoplus \mathbb{Z}$. Более полные результаты будут представлены в гл. III и IV.

3.25. Определение группы $K^{-1}(X)$ можно обобщить иа „относительный" случай $K^{-1}(X, Y)$, где Y — замкнутое подпространство пространства X. Так же как в 3.3, рассмотрим множество пар (E, α), где E — по-прежнему объект из $\mathscr{E}(X)$, но α теперь — такой автоморфизм E, что $\alpha|_Y = 1$. Оставим в силе все определения п. 3.3, за исключением следующего: пара (E, α) будет называться *элементарной*, если существует такое непрерывное отображение $\sigma: I \to \mathrm{Aut}(E)$, что $\sigma(0) = 1$, $\sigma(1) = \alpha$ и $\sigma(t)|_Y = \mathrm{Id}_{E_Y}$. Группу, полученную этой процедурой, будем обозначать через $K^{-1}(X, Y)$. Утверждения 3.4—3.8 без труда обобщаются на относительный случай (следует лишь обратить внимание на то, что все рассматриваемые гомотопии постоянны над Y). Используя доказательство теоремы 3.4, нетрудно показать, что группа $K^{-1}(X, Y)$ может быть построена с помощью одних тривиальных расслоений (ср. с 3.16). Следовательно, $K^{-1}(X, Y) \approx K^{-1}(X/Y, \{y\}) \approx [X/Y, \mathrm{GL}(k)]'$, где через $[\ ,\ ]'$ обозначено множество гомотопических классов отображений, сохраняющих отмеченные точки.

3.26. Предложение. *Имеет место точная последовательность*

$$K^{-1}(X, Y) \xrightarrow{i^*} K^{-1}(X) \xrightarrow{j^*} K^{-1}(Y).$$

Кроме того, если Y — ретракт пространства X, имеет место расщепляющая точная последовательность

$$0 \to K^{-1}(X, Y) \xrightarrow{i^*} K^{-1}(X) \xrightarrow{j^*} K^{-1}(Y) \to 0.$$

Доказательство. Очевидно, что композиция $K^{-1}(X, Y) \to K^{-1}(X) \to K^{-1}(Y)$ равна нулю. Пусть теперь $d(E, \alpha)$ — такой элемент из $K^{-1}(X)$, что $j^*(d(E, \alpha)) = d(E_Y, \alpha_Y) = 0$. Согласно 3.7, найдется такое расслоение G над Y (которое можно предполагать имеющим вид $F|_Y$), что автоморфизм $\alpha_Y \bigoplus \mathrm{Id}_G$ гомотопен автоморфизму $\mathrm{Id}_{E_Y \oplus G}$ в множестве $\mathrm{Aut}(E_Y \bigoplus G) = \mathrm{Aut}((E \bigoplus F)_Y)$. В силу 2.24 автоморфизм $\alpha \bigoplus \mathrm{Id}_F$ гомотопен автоморфизму β, для которого $\beta|_Y = \mathrm{Id}_{(E \oplus F)_Y}$. Следовательно, элемент $d(E, \alpha) = d(E \bigoplus F, \alpha \bigoplus \mathrm{Id}_F) = d(E \bigoplus F, \beta)$ принадлежит образу гомоморфизма i^*.

Предположим теперь, что Y — ретракт X. Для того чтобы доказать, что полученная точная последовательность расщепляется, достаточно установить инъективность гомоморфизма i^*. Пусть x — элемент из $K^{-1}(X, Y)$, представляющий непрерывное отображение γ: $X \to \mathrm{GL}(k)$, удовлетворяющее условию $\gamma(Y) = \{1\}$ и гомотопное постоянному отображению γ_0: $X \to \{1\} \in GL(k)$. Пусть $\bar{\gamma}$: $X \times I \to \mathrm{GL}(k)$ — гомотопия, связывающая γ и γ_0. Зададим отображение $\bar{\bar{\gamma}}$: $X \times I \to \mathrm{GL}(k)$, полагая $\bar{\bar{\gamma}}(x, t) = \bar{\gamma}(x, t) \cdot \bar{\gamma}(r(x), t)^{-1}$, где r: $X \to Y$ — ретракция Тогда $\bar{\bar{\gamma}}$ будет гомотопией, связывающей отображения γ и 1, причем $\bar{\bar{\gamma}}(Y \times I) = \{1\}$. □

3.27. Предложение. *Пусть f: $(X, Y) \to (X', Y')$ — морфизм компактных пар, индуцирующий гомотопические эквивалентности $X \sim X'$ и $Y \sim Y'$. Тогда f индуцирует изоморфизм $K(X'/Y')K \xrightarrow{\approx} K(X/Y)$.*

Доказательство. Так как $X \sim X'$ и $Y \sim Y'$, то f индуцирует изоморфизмы $K(X') \approx K(X)$, $K^{-1}(X') \approx K^{-1}(X)$, $K(Y') \approx K(Y)$ и $K^{-1}(Y') \approx K^{-1}(Y)$. Следовательно, мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc}
K^{-1}(X') & \longrightarrow & K^{-1}(Y') & \longrightarrow & K(X', Y') & \longrightarrow & K(X') & \longrightarrow & K(Y') \\
\approx\downarrow & & \approx\downarrow & & \downarrow & & \downarrow\approx & & \downarrow\approx \\
K^{-1}(X) & \longrightarrow & K^{-1}(Y) & \longrightarrow & K(X, Y) & \longrightarrow & K(X) & \longrightarrow & K(Y)
\end{array}$$

где четыре вертикальных отображения суть изоморфизмы. Поэтому из леммы о пяти гомоморфизмах (Норскотт [1]) вытекает, что отображение $K(X', Y') \to K(X, Y)$ — также изоморфизм. Из коммутативной диаграммы (см. 2.35)

$$\begin{tikzcd} K(X'/Y',\{y'\}) \arrow[r, "\approx"] \arrow[d] & K(X',Y') \arrow[d] \\ K(X/Y,\{y\}) \arrow[r, "\approx"] & K(X,Y) \end{tikzcd}$$

мы получаем изоморфизмы $\tilde{K}(X'/Y')\approx\tilde{K}(X/Y)$ и $K(X'/Y')\approx K(X/Y)$. □

3.28. В случае когда функтор $\varphi=f^*$: $\mathscr{E}(X)\to\mathscr{E}(Y)$ индуцирован непрерывным отображением $f\colon Y\to X$, можно дать другую интерпретацию теоремы 3.22. Для данного отображения f определим *цилиндр отображения* M_f (как факторпространство несвязного объединения $X\sqcup(Y\times I)$ по отношению эквивалентности, которое отождествляет точки $(y, 0)$ и $f(y)$ для каждого $y\in Y$ Тогда мы имеем коммутативную с точностью до гомотопии диаграмму

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & X \arrow[d, "u"] \\ Y \arrow[r, "i"] & M_f \end{tikzcd}$$

где u — гомотопическая эквивалентность (ее гомотопическим обратным является „проекция" на X) и $i(y)$ — класс эквивалентности точки $(y, 1)$. Следовательно, мы имеем коммутативную диаграмму категорий и функторов

$$\begin{tikzcd} \mathscr{E}(X) \arrow[r, "f^*"] & \mathscr{E}(Y) \arrow[d, equal] \\ \mathscr{E}(M_f) \arrow[u, "u^*"] \arrow[r, "i^*"] & \mathscr{E}(Y) \end{tikzcd}$$

и то же рассуждение, что и при доказательстве предложения 3.27, показывает, что $K(f^*)\approx K(i^*)\approx\tilde{K}(C'f)$, где $C'f\approx M_f/i(Y)$ (рис. 8).

Последовательностью Пуппе, ассоциированной с отображением f, называется последовательность

$$Y\xrightarrow{f}X\to C'f\to S'(Y)\to S'(X),$$

где $S'(Y)$ и $S'(X)$ — надстройки над пространствами Y и X соответственно (см. I.3.14). Если x_0 и y_0 — отмеченные точки пространств X и Y и если $f(y_0)=x_0$, то мы можем также рассмотреть *приведенную последовательность Пуппе*

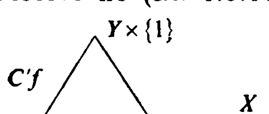


Рис. 8.

$$Y\xrightarrow{f}X\to Cf\to S(Y)\to S(X),$$

где $S(Y)$ и $S(X)$ — приведенные надстройки пространств Y и X (2.41). Отображения $S(Y) \to S(X)$ и $S'(Y) \to S'(X)$ индуцированы функториальностью нашей конструкции; отображение $C'f \to S'(Y)$ индуцировано отождествлением $C'f/X \approx S'(Y)$. Наконец, Cf получается стягиванием в точку подпространства $\{x_0\} \times I$ в $C'f$; отображение $Cf \to S(Y)$ индуцировано отображением $C'f \to S'(Y)$.

3.29. Теорема. *Последовательность Пуппе и приведенная последовательность Пуппе индуцируют точную последовательность $\tilde{K}$-групп*

$$\begin{tikzcd}
\tilde{K}(S'(X)) \arrow[r] & \tilde{K}(S'(Y)) \arrow[r] & \tilde{K}(C'f) \arrow[r] & \tilde{K}(X) \arrow[r] & \tilde{K}(Y) \\
\tilde{K}(S(X)) \arrow[r] \arrow[u, dashed, "\approx"] & \tilde{K}(S(Y)) \arrow[r] \arrow[u, dashed, "\approx"] & \tilde{K}(Cf) \arrow[r] \arrow[u, dashed, "\approx"] & \tilde{K}(X) \arrow[r] \arrow[u, equal] & \tilde{K}(Y) \arrow[u, equal]
\end{tikzcd}$$

Доказательство. Так как Cf, $S(Y)$ и $S(X)$ являются факторпространствами пространств $C'f$, $S'(Y)$ и $S'(X)$ по стягиваемым подмножествам, то из предложения 3.27 вытекает, что достаточно доказать точность первой последовательности.

a) *Точность в* $\tilde{K}(X)$. Она следует из диаграммы

$$\begin{tikzcd}
K(C'f) \arrow[r] & \tilde{K}(X) \arrow[r] & \tilde{K}(Y) \\
\tilde{K}(C'f) \arrow[r] \arrow[u, equal] & \tilde{K}(M_f) \arrow[r] \arrow[u, "u^*"'] & \tilde{K}(Y) \arrow[u, equal]
\end{tikzcd}$$

так как нижняя последовательность точна в силу теоремы 2.42.

b) *Точность в* $\tilde{K}(C'f)$. Поскольку $S'(Y) \approx C'f/X$, то точность в этом члене снова следует из теоремы 2.42.

c) *Точность в* $\tilde{K}(S'(Y))$. Рассмотрим рис. 9 и следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
C'f \arrow[r] & S'(Y) \arrow[r] & S'(X) \\
C'f \arrow[r] \arrow[u, equal] & S'(Y) \cup C^-(X) \arrow[r] \arrow[u] & S''(X) \arrow[u] \arrow[d] \\
C'f \arrow[r] \arrow[u, equal] & S'(Y) \cup C^-(X) \arrow[r] \arrow[u, equal] & S'(X)
\end{tikzcd}$$

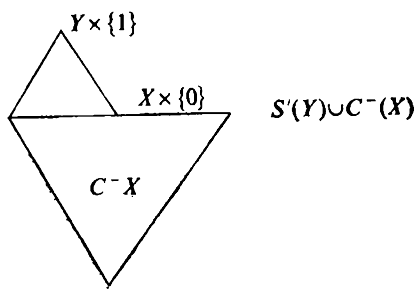


Рис. 9.

Здесь $S'(Y) \cup C^-(X)$ получается из пространства $Y \times [0, 1] \cup X \times [-1, 0]$ отождествлениями $(y, 0) \sim (f(y), 0)$, $(y, 1) \sim (y', 1)$ и $(x, -1) \sim (x', -1)$, где $y, y' \in Y$ и $x, x' \in X$. Пространство $S'(Y)$ гомеоморфно факторпространству $S'(Y) \cup C^-(X)$ по стягиваемому подмножеству $C^-(X)$ (I.3.14). Поэтому, согласно 3.27, отображение $S'(Y) \cup C^-(X) \to S'(Y)$

индуцирует изоморфизм $\tilde{K}(S'(Y)) \approx \tilde{K}(S'(Y) \cup C^-(X))$. Пространство $S''(X)$ получается из произведения $X \times [-1, 1]$ стягиванием подмножества $X \times \{1\}$ в точку и подмножества $X \times \{-1\}$ — в другую точку. Поэтому $S'(X)$ отождествляется с факторпространством пространства $S''(X)$ по стягиваемому подмножеству $C^+(X)$ (или по стягиваемому подмножеству $C^-(X)$) и два вертикальных фактор-отображения $S''(X) \to S'(X)$ индуцируют изоморфизмы $\tilde{K}$-групп. Окончательно мы получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\tilde{K}(C'f) \arrow[d, equal] & \tilde{K}(S'(Y)) \arrow[l] \arrow[d, "\approx"] & \tilde{K}(S'(X)) \arrow[l] \arrow[d, "\approx"] \\
\tilde{K}(C'f) \arrow[d, equal] & \tilde{K}(S'(Y) \cup C^-(X)) \arrow[l] \arrow[d, equal] & \tilde{K}(S''(X)) \arrow[l] \\
\tilde{K}(C'f) & \tilde{K}(S'(Y) \cup C^-(X)) \arrow[l] & \tilde{K}(S'(X)) \arrow[l] \arrow[u, "\approx"]
\end{tikzcd}$$

все вертикальные стрелки которой суть изоморфизмы. Так как нижняя горизонтальная строка точна в силу теоремы 2.42, то последовательность

$$\tilde{K}(S'(X)) \to \tilde{K}(S'(Y)) \to \tilde{K}(Cf)$$

также точна. □

3.30. Замечание. Пусть $\dot{Y} = Y \cup \{\infty\}$. Согласно 1.34 и 3.19, соответствие, сопоставляющее каждому отображению $\alpha\colon \dot{Y} \to \mathrm{GL}_p(k)$, такому что $\alpha(\infty) = 1$, p-мерное расслоение E_α из I.3.14, индуцирует изоморфизм $\tilde{K}(S'(\dot{Y})) \approx \tilde{K}^{-1}(Y)$. Мы утверждаем, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\tilde{K}(S'(\dot{Y})) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \tilde{K}(C'(\dot{f})) \approx \tilde{K}(C'(f)) \arrow[dl] \\
K^{-1}(Y) \arrow[r] & K(i^*)
\end{tikzcd}$$

коммутативна. В этой диаграмме $\dot{f}\colon \dot{Y} \to \dot{X}$ — компактификация отображения f и $\tilde{K}(C'(\dot{f})) \approx \tilde{K}(C'(f))$, согласно предложению 3.27 (рис. 10). Наконец, через i^* в этой диаграмме обозначен функтор обратного образа, индуцированный вложением $i\colon Y \approx Y \times \{1\} \to M_f$, где M_f — цилиндр отображения f (заметим, что $C'(f) = M_f/i(Y)$), Образ класса расслоения E_α при композиции $\tilde{K}(S'(Y)) \to \tilde{K}(C'(f)) \to K(i^*)$ равен $d(E, F, \beta)$. Здесь расслоение $E = F$ получается склеи-

Рис. 10.

ванием тривиальных расслоений $M_f^+ \times k^n$ и $M_f^- \times k^n$ с помощью функции перехода $\alpha' = \alpha|_Y$ над пространством $Y \times \{1/2\}$ (через M_f^+ обозначен образ в M_f пространства $Y \times [1/2, 1]$, через M_f^- — образ пространства $X \sqcup Y \times [0, 1/2]$ (рис. 11)), а морфизм β: $E|_{Y \times \{1\}} \to F|_{Y \times \{1\}}$ индуцирован тождественным отображеиием тривиальных расслоений. Применяя I.3.3, легко показать, что элемент $d(E, F, \beta)$ равен элементу $d(E', F', \beta')$, где $E' = F'$ получается склеиванием тривиальных расслоений $M_f \times k^n$ и $Y \times k^n$ с помощью функции перехода α над пространством $Y \times \{1\}$, а морфизм β' индуцирован тождественным отображением тривиального расслоения. Если мы отождествим E' и F' с $M_f \times k^n$, то получим образ E_α в $K(i^*)$ под действием связывающего гомоморфизма $K^{-1}(Y) \to K(i^*)$, описанного в 3.21.

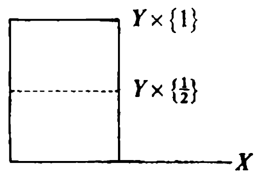


Рис. 11.

Упражнения: 7, 12.

4. Группы $K^{-n}(X)$ и $K^{-n}(X, Y)$

В этом параграфе мы определим обещанные в 3.1 группы $K^{-n}(X)$ и $K^{-n}(X, Y)$ и докажем, что они обладают желаемыми свойствами. В действительности мы будем рассматривать вместо компактных пространств более общие локально-компактные пространства (это обобщение окажется в дальнейшем очень полезным).

4.1. Так же как и в предыдущем параграфе, через $\dot{X}$ будет обозначаться одноточечная компактификация локально-компактного пространства X. Определим группы $K(X)$ и $K^{-1}(X)$ соответственно как $\operatorname{Ker}[K(\dot{X}) \to K(\{\infty\})]$ и $\operatorname{Ker}[K^{-1}(\dot{X}) \to K^{-1}(\{\infty\})]$. Если пространство X компактно, то $\dot{X}$ есть в точности несвязное объединение X и $\{\infty\}$; поэтому, согласно 1.26 и 3.19, эти определения совпадают с исходными определениями групп $K(X)$ и $K^{-1}(X)$. Определим *морфизм* между двумя локально-компактными пространствами X и Y как непрерывное отображение f: $\dot{X} \to \dot{Y}$, для которого $f(\infty) = \infty$. Мы будем записывать этот морфизм f в виде f: $X \dashrightarrow Y$.

Очевидно, что локально-компактные пространства и только что определенные морфизмы этих пространств образуют категорию. Далее, так как диаграммы

$$\begin{array}{ccc} K(\dot{Y}) & \longrightarrow & K(\dot{X}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K(\infty) & = & K(\infty) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} K^{-1}(\dot{Y}) & \longrightarrow & K^{-1}(\dot{X}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K^{-1}(\infty) & = & K^{-1}(\infty) \end{array}$$

коммутативны, функторы K и K^{-1} определены на этой категории.

4.2. Пример. Пусть $g\colon X \to Y$ — непрерывное *собственное* отображение из X в Y. Тогда g индуцирует непрерывное отображение $f\colon \dot{X} \to \dot{Y}$, где $f(x) = g(x)$, если $x \neq \infty$, и $f(\infty) = \infty$. Однако не любой морфизм локально-компактных пространств получается таким образом.

4.3. Пример. Пусть Z — локально-компактное пространство и T — замкнутое подпространство в Z. Тогда существует морфизм $f\colon Z \dashrightarrow Z \setminus T$, или $f\colon \dot{Z} \to (Z\setminus T)^{\cdot}$, задаваемый формулами: $f(z) = z$, если $z \notin T$; $f(z) = \infty$, если $z \in T$; $f(\infty) = \infty$.

4.4. Пример. Вложение точки $\{\infty\}$ в S^n индуцирует изоморфизмы $\tilde{K}(S^n) \approx K(\mathbb{R}^n)$ и $\tilde{K}^{-1}(S^n) \approx K^{-1}(\mathbb{R}^n)$.

4.5. Замечание. Теория, которую мы развиваем, аналогична теории *когомологий с компактными носителями*. Мы хотим предупредить читателя, что теоремы 1.33 и 3.17 неверны для локально-компактных пространств.

4.6. Предложение. *Пусть X — компактное пространство и Y — его замкнутое подпространство. Тогда имеет место точная последовательность*

$$K^{-1}(X) \xrightarrow{j^*} K^{-1}(Y) \xrightarrow{\partial} K(X\setminus Y) \xrightarrow{i^*} K(X) \xrightarrow{j^*} K(Y),$$

где гомоморфизмы i^* и j^* индуцированы отображениями $i\colon X \dashrightarrow X\setminus Y$ и $j\colon Y \dashrightarrow X$ соответственно.

Доказательство. Так как пространство $(X/Y)\setminus\{y\}$ может быть отождествлено с $X\setminus Y$, то мы имеем $(X\setminus Y)^{\cdot} \approx X/Y$ и $K(X\setminus Y) \approx \tilde{K}(X/Y)$. Наше утверждение следует теперь из 2.35 и 3.23. □

4.7. Следствие. *Пусть X — локально-компактное пространство и Y — его замкнутое подпространство. Тогда мы имеем точную последовательность*

$$K^{-1}(X) \xrightarrow{j^*} K^{-1}(Y) \xrightarrow{\partial} K(X\setminus Y) \xrightarrow{i^*} K(X) \xrightarrow{j^*} K(Y),$$

где гомоморфизмы i^* и j^* индуцированы отображениями $i\colon X \dashrightarrow X\setminus Y$ и $j\colon Y \dashrightarrow X$ соответственно.

Доказательство. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
K^{-1}(\{\infty\}) \arrow[r] \arrow[u] & K^{-1}(\{\infty\}) \arrow[r] \arrow[u] & 0 \arrow[r] \arrow[u, equal] & K(\{\infty\}) \arrow[r] \arrow[u] & K(\{\infty\}) \arrow[u] \\
K^{-1}(\dot{X}) \arrow[r] \arrow[u] & K^{-1}(\dot{Y}) \arrow[r] \arrow[u] & K(\dot{X}\setminus\dot{Y}) \arrow[r] \arrow[u] & K(\dot{X}) \arrow[r] \arrow[u] & K(\dot{Y}) \arrow[u] \\
K^{-1}(X) \arrow[r] \arrow[u] & K^{-1}(Y) \arrow[r] \arrow[u] & K(X\setminus Y) \arrow[r] \arrow[u, "\approx"] & K(X) \arrow[r] \arrow[u] & K(Y) \arrow[u] \\
0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

нижняя горизонтальная строка которой индуцирована двумя остальными. Так как вертикальные отображения определяют расщепляющиеся точные последовательности, стандартный диаграммный поиск показывает, что нижняя строка точна, если точны первые две горизонтальные строки. Поэтому наше утверждение следует из предложения 4.6. □

4.8. Теорема. *Для любого локально-компактного пространства Y имеет место естественный изоморфизм $K^{-1}(Y)\approx K(Y\times\mathbb{R})$. Кроме того, если Y — замкнутое подпространство пространства X, то имеет место точная последовательность*

$$K(X\times\mathbb{R})\to K(Y\times\mathbb{R})\to K(X\setminus Y)\to K(X)\to K(Y).$$

Доказательство. Второе утверждение теоремы является следствием из 4.7 и первого утверждения. Для доказательства первого утверждения рассмотрим пространство $Z=Y+\mathbb{R}^+$, где $\mathbb{R}^+=[0, +\infty[$. Тогда Z гомеоморфно пространству $(\dot{Y}\times[0, 1])\setminus(\dot{Y}\vee[0, 1])$ (где 1—отмеченная точка отрезка $[0, 1]$).Следовательно, $\dot{Z}\approx(Y\times[0, 1])/(Y\vee[0, 1])$. Определим теперь гомотопию $r\colon\dot{Z}\times[0, 1]\to\dot{Z}$, полагая $r(y, t, u)=\{y, 1+(1-t)u\}$ для $(y, t)\in\dot{Y}\times[0, 1]$, где $\{x, \tau\}$ обозначает образ точки $(x, \tau)\in\dot{Y}\times[0, 1]$ при естественной проекции $\dot{Y}\times[0, 1]\to\dot{Z}\approx(\dot{Y}\times[0, 1])/(\dot{Y}\vee[0, 1])$ (рис. 12). Отсюда ясно, что $K(Y\times\mathbb{R}^+)=K^{-1}(Y\times\mathbb{R}^+)=0$. Применяя 4.7 к паре $(Y\times\mathbb{R}^+, Y)$, мы получаем точную последовательность

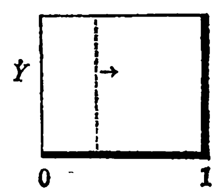


Рис. 12.

$$K^{-1}(Y\times\mathbb{R}^+)\to K^{-1}(Y)\to K(Y\times\mathbb{R})\to K(Y\times\mathbb{R}^+).$$

Следовательно, $K^{-1}(Y)\approx K(Y\times\mathbb{R})$. □

4.9. Гомоморфизм

$$\partial=\partial_{X, Y}\colon K(Y\times\mathbb{R})\to(X\setminus Y)$$

может быть описан более явно следующим образом. Обозначим через Z пространство $(X\times\{0\}\cup Y\times[0,\ 1])\diagdown(Y\times\{1\})$ (рис. 13). Так как $Z\diagdown Y\times[0,\ 1)\approx X\diagdown Y$ и $Z\diagdown X\times\{0\}\approx Y\times\mathbb{R}$, мы имеем следующую диаграмму:

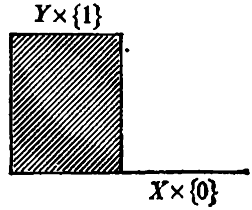


Рис. 13.

$$\begin{tikzcd} K(Y\times\mathbb{R}) \arrow[rr, "\partial_{X,Y}"] \arrow[dr, "\beta^*_{X,Y}"'] & & K(X\diagdown Y) \arrow[dl, "\alpha^*_{X,Y}"] \\ & K(Z) & \end{tikzcd}$$

Покажем, что гомоморфизм $\alpha^*_{X,Y}$ в этой диаграмме является изоморфизмом. Для этого рассмотрим точную последовательность

$$K^{-1}(Y\times[0,\ 1))\to K(X\diagdown Y)\to K(Z)\to K(Y\times[0,\ 1)).$$

K-группа пространства $(Y\times[0,\ 1))^{\cdot}\approx\dot{Y}\times I/\dot{Y}_\vee I$ совпадает с K-группой точки (см. 3.27). Аналогичные соображения, примененные к $Y\times\mathbb{R}$, показывают, что $K^{-1}(Y\times[0,\ 1))=K^{-1}$ (*точка*). Поэтому $K(Y\times[0,\ 1))$ $=K^{-1}(Y\times[0,\ 1))=0$, откуда и следует требуемый изоморфизм. Мы утверждаем, что приведенная выше диаграмма коммутативна (т. е. что $\partial_{X,Y}=\alpha^{*^{-1}}_{X,Y}\cdot\beta^*_{X,Y}$). Для доказательства положим $\partial'_{X,Y}=\alpha^{*^{-1}}_{X,Y}\cdot\beta^*_{X,Y}$. Тогда мы имеем две коммутативные диаграммы:

$$\begin{tikzcd} K(\dot{Y}\times\mathbb{R}) \arrow[r, "\partial_{\dot{X},\dot{Y}}"] \arrow[d] & K(\dot{X}\diagdown\dot{Y}) \arrow[d, equal] \\ K(Y\times\mathbb{R}) \arrow[r, "\partial_{X,Y}"] & K(\dot{X}\diagdown Y) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} K(\dot{Y}\times\mathbb{R}) \arrow[r, "\partial'_{\dot{X},\dot{Y}}"] \arrow[d] & K(\dot{X}\diagdown\dot{Y}) \arrow[d, equal] \\ K(\dot{Y}\times\mathbb{R}) \arrow[r, "\partial'_{X,Y}"] & K(X\diagdown Y) \end{tikzcd}$$

Следовательно, заменяя, если надо, пространство X на $\dot{X}$ и пространство Y на $\dot{Y}$, мы можем считать, что X и Y компактны. В этом случае $\tilde{K}(\dot{Z})\approx\tilde{K}(C'(f))\approx\tilde{K}(C'\dot{f})$), где f: $Y\to X$ — отображение вложения (см. 3.30), $(Y\times\mathbb{R})^{\cdot}\approx S(\dot{Y})$ и $\beta^*_{X,Y}$: $K(Y\times\mathbb{R})\to K(Z)$ по модулю изоморфизма совпадает с гомоморфизмом $\tilde{K}(S(\dot{Y}))\to\tilde{K}(C(\dot{f}))$, индуцированным точной последовательностью Пуппе для отображения $\dot{f}$. Согласно 3.30, диаграмма

$$\begin{tikzcd} \tilde{K}(S(\dot{Y})) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr"] & \tilde{K}(C(\dot{f})) \arrow[d, phantom, "\wr"] \\ K^{-1}(Y) \arrow[r, "\partial_{X,Y}"'] \arrow[r, bend left=60, "\partial'_{X,Y}"] & K(X\diagdown Y) \end{tikzcd}$$

коммутативна. Отождествляя группы $K(Y\times\mathbb{R})$ и $K^{-1}(Y)$ с помощью отображения $\alpha\mapsto E_\alpha$, описанного в 3.30, мы получаем из последней диаграммы, что $\partial_{X,Y}=\partial'_{X,Y}$.

4.10. Предложение. *Пусть $T\colon X\times\mathbb{R}\to X\times\mathbb{R}$ — инволюция, определяемая формулой $(x, \lambda)\mapsto(x, -\lambda)$. Тогда $T^*(u)=-u$, где $T^*\colon K(X\times\mathbb{R})\to K(X\times\mathbb{R})$ — гомоморфизм, индуцированный отображением T.*

Доказательство. Так как мы имеем расщепляющуюся точную последовательность

$$0\to K(X\times\mathbb{R})\to K(\dot{X}\times\mathbb{R})\to K(\{\infty\}\times\mathbb{R})\to 0,$$

иам достаточно доказать предложение для компактного пространства X. В этом случае $K(X\times\mathbb{R})\approx K(X\times B^1,\ X\times S^0)$ и гомоморфизм T^* может быть отождествлен с инволюцией на группе $K(X\times B^1, X\times S^0)$, индуцированной отображением $(x, \lambda)\mapsto(x, -\lambda)$.

Рассмотрим теперь точную последовательность, ассоциированную с парой $(X\times B^1,\ X\times S^0)$:

$$\begin{array}{ccccccccc}
K^{-1}(X\times B^1) & \xrightarrow{\Delta_1} & K^{-1}(X\times S^0) & \xrightarrow{\partial} & K(X\times B^1, X\times S^0) & \to & K(X\times B^1) & \xrightarrow{\Delta} & K(X\times S^0)\\
\wr\wr & & \wr\wr & & & & \wr\wr & & \wr\wr\\
K^{-1}(X) & & K^{-1}(X)\oplus K^{-1}(X) & & & & K(X) & & K(X)\oplus K(X)
\end{array}$$

В этой точной последовательности $S^0=\{-1, +1\}$, а морфизмы Δ_1 и Δ суть диагональные гомоморфизмы (с учетом сделаниых отождествлений). Далее, инволюция T индуцирует инволюцию t^* на группе $K^{-1}(X\times S^0)\approx K^{-1}(X)\bigoplus K^{-1}(X)$, которая переставляет слагаемые, и мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
K^{-1}(X\times S^0) & \xrightarrow{\partial} & K(X\times B^1, X\times S^0)\\
\Big\downarrow{\scriptstyle t^*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle T^*}\\
K^{-1}(X\times S^0) & \xrightarrow{\partial} & K(X\times B^1, X\times S^0)
\end{array}$$

где ∂ — эпиморфизм. Если $x=\partial(y)\in K(X\times B^1,\ X\times S^0)$, то $x+T^*(x)=\partial(y+t^*)(y))=0$, поскольку $\operatorname{Im}(\partial\Delta_1)=0$. $\square$

4.11. Определение. Если Y — замкнутое подпространство локально-компактиого пространства X, то мы полагаем $K^{-n}(X, Y)=K((X\setminus Y)\times\mathbb{R}^n)$.

В силу теоремы 4.8 это определение согласуется (с точностью до изоморфизма) с определением группы $K^{-1}(X)=K^{-1}(X, \varnothing)$, данным в 3.3. Далее, так как $K^{-1}(X, Y)\approx\operatorname{Ker}[K^{-1}(X/Y)\to K^{-1}(\{y\})]$ для обоих определений группы $K^{-1}(X, Y)$ (см. п. 3.25 и теорему 4.13 ниже), то определение 4.11 согласуется с определением 3.25.

4.12. Предложение. *Если X — компактное пространство и Y — замкнутое подпространство в X, то имеют место естественные изоморфизмы*

$$K^{-n}(X,\ Y)\approx\tilde{K}(S^n(X/Y))\approx K(X\times B^n,\ X\times S^{n-1}\cup Y\times B^n).$$

Доказательство. Мы имеем гомеоморфизмы (см. 2.41)

$$X\times B^n\setminus X\times S^{n-1}\cup Y\times B^n\approx(X\setminus Y)\times(B^n\setminus S^{n-1})\approx(X\setminus Y)\times\mathbb{R}^n,$$

Следовательно,

$$K(X\times B^n,\ X\times S^{n-1}\cup Y\times B^n)\approx K((X\setminus Y)\times(B^n\setminus S^{n-1}))$$
$$\approx K((X\setminus Y)\times\mathbb{R}^n).$$

Кроме того, $S^n(X/Y)\approx B^n/S^{n-1}\wedge X/Y\approx X\times B^n/X\times S^{n-1}\cup Y\times B^n$, откуда следует второй из утверждаемых изоморфизмов. □

Группа $K^{-n}(X, \varnothing)$ будет в дальнейшем обозначаться через $K^{-n}(X)$. Заметим, что группа $K^{-n}(X, Y)$ функториально зависит от пары (X, Y).

4.13. Теорема. *Пусть X — локально-компактное пространство и Y — его замкнутое подпространство. Тогда для любого $n\geqslant 0$ мы имеем точную последовательность*

$$K^{-n-1}(X)\to K^{-n-1}(Y)\to K^{-n}(X,\ Y)\to K^{-n}(X)\to K^{-n}(Y).$$

Доказательство. Если $n=0$, то наша теорема — это просто теорема 4.8. Общий случай получается применением теоремы 4.8 к паре $(X\times\mathbb{R}^n,\ Y\times\mathbb{R}^n)$. □

4.14. Следствие. *Пусть X и Y — такие же, как в теореме 4.13, и Z — замкнутое подпространство в Y. Тогда мы имеем точную последовательность*

$$K^{-n-1}(X,\ Z)\to K^{-n-1}(Y,\ Z)\to K^{-n}(X,\ Y)\to K^{-n}(X,\ Z)$$
$$\to K^{-n}(Y,\ Z).$$

Доказательство. Применяем теорему 4.13 к паре $(X\setminus Z,\ Y\setminus Z)$. □

Примем следующее общее соглашение: через X/Y будет обозначаться факторпространство пространства $\dot X$ по отношению эквивалентности, при котором каждый элемент из Y отождествляется с $\{\infty\}$ (например, $X/\varnothing$ — это одноточечная компактификация X). Имеем следующую теорему:

4.15. Теорема. *Естественное отображение $(X, Y)\to(X/Y,\ \{\infty\})$ индуцирует изоморфизм $K^{-n}(X/Y,\ \{\infty\})\approx K^{-n}(X,\ Y)$. Кроме того, группа $K^{-n}(X)$ естественно изоморфна группе* $\operatorname{Ker}[K^{-n}(\dot X)\to K^{-n}(\{\infty\})]$.

Доказательство. Так как пространства $(X/Y)\setminus\{\infty\}$ и $X\setminus Y$ гомеоморфны, то $K^{-n}(X/Y,\ \{\infty\})\approx K^{-n}(X,\ Y)$. В частности, $K^{-n}(X)\approx K^{-n}(\dot X,\ \{\infty\})$. Так как точка $\{\infty\}$ является ретрактом пространства $\dot X$, то точная последовательность

$$K^{-n-1}(\dot X)\to K^{-n-1}(\{\infty\})\to K^{-n}(\dot X,\{\infty\})\to K^{-n}(\dot X)\to K^{-n}(\{\infty\})$$

превращается в расщепляющуюся точную последовательность

$$0\to K^{-n}(X)\to K^{-n}(\dot X)\to K^{-n}(\{\infty\})\to 0.\ \square$$

4.16. Теорема. *Пусть f_0, f_1: $X\to Y$ — два гомотопных морфизма локально-компактных пространств. Тогда f_0 и f_1 индуцируют один* *и тот же гомоморфизм*

$$f_0^* = f_1^*\colon K^{-n}(Y) \to K^{-n}(X).$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $n=0$, так как общий случай получается заменой пространств Y и X на пространства $Y\times\mathbb{R}^n$ и $X\times\mathbb{R}^n$ соответственно. Так как морфизмы f_0 и f_1 гомотопны, то существует такой морфизм $f\colon X\times I \dashrightarrow Y$, что $f_\alpha = f\cdot i_\alpha$, где $i_\alpha\colon X \to X\times I$ — морфизм, ассоциированный с собственным непрерывным отображением $x \mapsto (x, \alpha)$, $\alpha = 0, 1$. Поэтому имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\dot X\times I \arrow[r] & \dot{\overline{X\times I}} \arrow[r] & \dot Y \\
& \dot X \arrow[ul, "j_\alpha"] \arrow[u, "i_\alpha"] \arrow[ur, "\dot f_\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

показывающая, что отображения $\dot f_0\colon \dot X \to \dot Y$ и $\dot f_1\colon \dot X \to \dot Y$ гомотопны. Следовательно, эти отображения индуцируют один и тот же гомоморфизм K-групп: $\dot f_0^* = \dot f_1^*\colon K(\dot Y) \to K(\dot X)$, и из коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
K(\dot Y) \arrow[r] \arrow[d] & K(\dot X) \arrow[d] \\
K(\{\infty\}) \arrow[r, phantom, "="] & K(\{\infty\})
\end{tikzcd}$$

мы получаем, что $f_0^* = f_1^*\colon K(Y) \to K(X)$. □

4.17. Пусть X', X и X'' — локально-компактные пространства, $i\colon X' \dashrightarrow X$ и $j\colon X \dashrightarrow X''$ — морфизмы. Последовательность

$$X' \dashrightarrow X \dashrightarrow X''$$

называется *точной*, если она изоморфна последовательности вида

$$T \dashrightarrow X \dashrightarrow X\setminus T,$$

где T — замкнутое подпространство пространства X. Если $X' \dashrightarrow X \dashrightarrow X''$ — точная последовательность пространств и морфизмов, то, согласно теореме 4.13, последовательность групп и гомоморфизмов

$$K^{-n-1}(X) \to K^{-n-1}(X') \to K^{-n}(X'') \to K^{-n}(X) \to K^{n}(X')$$

точна для $n \geqslant 0$. Это формальное определение „точных последовательностей пространств" может быть использовано для построения аксиоматики функторов K^{-n} (Каруби и Вилльямайор [1]).

4.18. Теорема. *Пусть X_1 и X_2 — такие замкнутые подпространства локально-компактного пространства X, что $X_1 \cup X_2 = X$. Тогда* *для $n \geqslant 0$ имеет место точная последовательность*

$$K^{-n-1}(X_1) \oplus K^{-n-1}(X_2) \xrightarrow{v} K^{-n-1}(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{\Delta} K^{-n}(X_1 \cup X_2) \xrightarrow{u} K^{-n}(X_1) \oplus K^{-n}(X_2) \xrightarrow{v} K^{-n}(X_1 \cap X_2),$$

где гомоморфизмы u и v задаются формулами

$$u(\alpha) = (\alpha|_{X_1}, \alpha|_{X_2}), \quad v(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1|_{X_1 \cap X_2} - \alpha_2|_{X_1 \cap X_2}.$$

Доказательство. Мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, dashed] & X_1 \cup X_2 \arrow[r, dashed] & (X_1 \cup X_2) \setminus X_1 = Z \\
X_1 \cap X_2 \arrow[r, dashed] \arrow[u] & X_2 \arrow[r, dashed] \arrow[u] & X_2 \setminus (X_1 \cap X_2) = Z \arrow[u, equal]
\end{tikzcd}$$

горизонтальные строки которой точны. Согласно 4.17, получаем коммутативную диаграмму с двумя точными строками

$$\begin{tikzcd}
K^{-n-1}(X_1 \cup X_2) \arrow[r] \arrow[d] & K^{-n-1}(X_1) \arrow[r] \arrow[d] & K^{-n}(Z) \arrow[r] \arrow[d, equal] & K^{-n}(X_1 \cup X_2) \arrow[r] \arrow[d] & K^{-n}(X_1) \arrow[d] \\
K^{-n-1}(X_2) \arrow[r] & K^{-n-1}(X_1 \cap X_2) \arrow[r] & K^{-n}(Z) \arrow[r] & K^{-n}(X_2) \arrow[r] & K^{-n}(X_1 \cap X_2)
\end{tikzcd}$$

„Зигзаг“ $K^{-n-1}(X_1 \cap X_2) \to K^{-n}(Z) = K^{-n}(Z) \to K^{-n}(X_1 \cup X_2)$ из этой последовательности совпадает с гомоморфизмом Δ: $K^{-n-1}(X_1 \cap X_2) \to K^{-n}(X_1 \cup X_2)$ из формулировки теоремы. Поэтому, из исключением трех „начальных“ членов

$$K^0(X_1 \cup X_2) \to K^0(X_1) \oplus K^0(X_2) \to K^0(X_1 \cap X_2),$$

утверждение теоремы немедленно следует из точности строк в записанной выше коммутативной диаграмме. Докажем точность этой начальной последовательности.

Пусть сначала пространства X_1 и X_2 компактны, и пусть $\alpha_i = [E_i] - [T_i]$ — такие элементы из $K(X_i)$, что $\alpha_1|_{X_1 \cap X_2} = \alpha_2|_{X_1 \cap X_2}$, причем T_1, T_2 — тривиальные расслоения одного и того же ранга n. Прибавляя тривиальные расслоения и используя 1.18, мы получаем, что векторные расслоения $E_1|_{X_1 \cap X_2}$ и $E_2|_{X_1 \cap X_2}$ изоморфны. Пусть f: $E_1|_{X_1 \cap X_2} \to E_2|_{X_1 \cap X_2}$ — соответствующий изоморфизм. Обозначим через E векторное расслоение, полученное склеиванием E_1 и E_2 с помощью f (I.3.2), и через T — тривиальное расслоение над X ранга n. Тогда элемент $x = [E] - [T] \in K(X)$ обладает тем свойством, что его ограничения на $K(X_1)$ и $K(X_2)$ совпадают с элементами α_1 и α_2.

В общем случае рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & 0 & \\
0 \arrow[r] & K^0(\{\infty\}) \arrow[r] \arrow[u] & K^0(\{\infty\}) \oplus K^0(\{\infty\}) \arrow[r] \arrow[u] & K^0(\{\infty\}) \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
 & K^0(\dot{X}_1 \cup \dot{X}_2) \arrow[r] \arrow[u] & K^0(\dot{X}_1) \oplus K^0(\dot{X}_2) \arrow[r] \arrow[u] & K^0(\dot{X}_1 \cap \dot{X}_2) \arrow[u] & \\
 & K^0(X_1 \cup X_2) \arrow[r] \arrow[u] & K^0(X_1) \oplus K^0(X_2) \arrow[r] \arrow[u] & K^0(X_1 \cap X_2) \arrow[u] & \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

с точными расщепляющимися вертикалями. Мы только что доказали, что две верхние горизонтальные строки в этой диаграмме точны. Поэтому точна и нижняя горизонтальная строка. □

4.19. Теорема. *Пусть U_1 и U_2 — два таких открытых подпространства локально-компактного пространства X, что $U_1 \cup U_2 = X$. Тогда имеет место точная последовательность*

$$\begin{aligned} K^{-n-1}(U_1) \oplus K^{-n-1}(U_2) \to K^{-n-1}(U_1 \cup U_2) \to K^{-n}(U_1 \cup U_2) \\ \to K^{-n}(U_1) \oplus K^{-n}(U_2) \to K^{-n}(U_1 \cup U_2). \end{aligned}$$

Доказательство. Мы имеем следующие точные последовательности локально-компактных пространств:

$$\begin{aligned} U &= U_1 \setminus (U_1 \cap U_2) \dashrightarrow U_1 \dashrightarrow U_1 \cap U_2, \\ U &= (U_1 \cup U_2) \setminus U_2 \dashrightarrow U_1 \cup U_2 \dashrightarrow U_2. \end{aligned}$$

Согласно 4.17, это дает точные последовательности

$$\begin{tikzcd}
K^{-n-1}(U_1) \arrow[r] \arrow[d] & K^{-n-1}(U) \arrow[r] \arrow[d, equal] & K^{-n}(U_1 \cap U_2) \arrow[r] \arrow[d] & K^{-n}(U_1) \arrow[r] \arrow[d] & K^{-n}(U) \arrow[d, equal] \\
K^{-n-1}(U_1 \cup U_2) \arrow[r] & K^{-n-1}(U) \arrow[r] & K^{-n}(U_2) \arrow[r] & K^{-n}(U_1 \cup U_2) \arrow[r] & K^{-n}(U)
\end{tikzcd}$$

Гомоморфизм $K^{-n-1}(U_1 \cup U_2) \to K^{-n}(U_1 \cap U_2)$ из формулировки теоремы получается очевидным „зигзагом" на этой диаграмме. Применяя метод диаграммного поиска, как при доказательстве предыдущей теоремы, немедленно приходим к требуемому утверждению. □

4.20. Последовательности из теорем 4.18 и 4.19 называются *точными последовательностями Майера — Вьеториса.*

4.21. Предложение. *Пусть X — локально-компактное пространство и (U_i) — такое индуктивное семейство открытых подмножеств в X, что каждое компактное подмножество в X содержится по крайней мере в одном из множеств U_i. Тогда*

$$K^{-n}(X) \approx \operatorname{inj}\lim K^{-n}(U_i).$$

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать предложение для $n=0$, так как общий случай получается из него заменой пространства X на $X\times\mathbb{R}^n$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} K(U_i) & \longrightarrow & K(U_j) & \longrightarrow & K(X) \\ \wr\wr & & \wr\wr & & \wr\wr \\ K(\dot{X}, \dot{X}\setminus U_i) & \longrightarrow & K(\dot{X}, \dot{X}\setminus U_j) & \longrightarrow & K(\dot{X}, \infty) \end{array}$$

где $\dot{X}$ — одноточечная компактификация пространства X (заметим, что $\dot{U}_i\approx\dot{X}/(\dot{X}\setminus U_i)$) и отображение $K(\dot{X}, \dot{X}\setminus U_i)\to K(\dot{X}, \dot{X}\setminus U_j)$ индуцировано вложением пар $(\dot{X}, \dot{X}\setminus U_j)\subset(\dot{X}, \dot{X}\setminus U_i)$. Так как множества $\dot{X}\setminus U_i$ образуют базу замкнутых окрестностей точки $\{\infty\}$, то наше предложение является частным случаем следующей леммы. $\square$

4.22. Лемма. *Пусть Y — компактное пространство, $y\in Y$ и (S_i) — база замкнутых окрестностей точки y. Тогда*

$$K(Y, \{y\})\approx \operatorname{inj}\lim K(Y, S_i).$$

Доказательство. Обозначим через l очевидный гомоморфизм из $\operatorname{inj}\lim K(Y, S_i)$ в $K(Y, \{y\})$.

a) *Гомоморфизм l сюръективен.* Пусть $d(E, F, \alpha)\in K(Y, \{y\})$, где E и F — векторные расслоения над Y и α: $E|_{\{y\}}\to F_{\{y\}}$ — изоморфизм. Согласно I.5.11, мы можем найти такую окрестность точки y и такой изоморфизм α_i: $E_{S_i}\to F_{S_i}$, что $\alpha_i|_{\{y\}}=\alpha|_{\{y\}}$. Тогда $d(E, F, \alpha_y)$ является образом при гомоморфизме l класса элемента $d(E, F, \alpha_i)$ в индуктивном пределе.

b) *Гомоморфизм l инъективен.* Пусть $d(E, F, \alpha_i)$ — такой элемент из $K(Y, S_i)$, что $d(E, F, \alpha_i|_{\{y\}})=0$. Применяя к категориям $\mathscr{C}=\mathscr{E}(Y)$ и $\mathscr{C}'=\mathscr{E}(\{y\})$ предложение 2.28, мы получаем над пространством Y такое расслоение G, что $\alpha_i|_{\{y\}}\oplus\mathrm{Id}_G|_{\{y\}}$ является ограничением на $\{y\}$ изоморфизма α': $E\oplus G\to F\oplus G$. Положим $E'=E\oplus G$, $F'=F\oplus G$ и $\alpha_i'=\alpha_i\oplus\mathrm{Id}_{G_{S_i}}$. Пусть γ: $\pi^*(E')|_{S_i\times I}\to\pi^*(F')|_{S_i\times I}$, где π: $Y\times I\to Y$ — морфизм, определенный на $S_i\times I$ формулой $(x, t)\mapsto t\alpha_{ix}+(1-t)\alpha_x'$. Так как $\gamma|_{\{y\}\times I}=\mathrm{Id}$, то в пространстве $S_i\times I$ существует окрестность V подмножества $\{y\}\times I$, имеющая вид $V=S_j\times I$ и такая, что $\gamma|_V$ — изоморфизм (I.5.11). Следовательно, в силу 2.15, мы имеем $d(E, F, \alpha_i|_{S_j})=d(E, F, \alpha'|_{S_j})=0$. Поэтому класс элемента $d(E, F, \alpha_i)$ в индуктивном пределе равен нулю. $\square$

Упражнения: 14—18.

5. Мультипликативные структуры

5.1. Пусть X и Y — компактные пространства, E и F — векторные расслоения с базами X и Y соответственно. Их внешнее тензорное произведение $E\boxtimes F$ (I.4.9) является векторным расслоением над

$X\times Y$. Соответствие $(E,\ F)\mapsto E\boxtimes F$ индуцирует функтор $\varphi\colon \mathscr{E}(X)\times\mathscr{E}(Y)\to\mathscr{E}(X\times Y)$, который удовлетворяет условиям

$$\varphi(E\oplus E',\ F)\approx\varphi(E,\ F)\oplus\varphi(E',\ F),$$
$$\varphi(E,\ F\oplus F')\approx\varphi(E,\ F)\oplus\varphi(E,\ F')$$

и аналогичным условиям для морфизмов. С помощью этого функтора мы получаем билинейное отображение

$$\varphi_*\colon K(X)\times K(Y)\to K(X\times Y),$$

задаваемое равенством

$$\varphi_*([E]-[E'],\ [F]-[F'])=[\varphi(E,\ F)]+[\varphi(E',\ F')]-[\varphi(E,\ F')]-[\varphi(E',\ F)].$$

Для $x\in K(X)$ и $y\in K(Y)$ элемент $\varphi_*(x,\ y)\in K(X\times Y)$ будет называться их $\cup$-*произведением* и обозначаться через $x\cup y$.

Если Z — еще одно компактное пространство и G — векторное расслоение над Z, то из ассоциативности тензорного произведения (I.4.7) непосредственно вытекает канонический изоморфизм $(E\boxtimes F)\boxtimes G\approx E\boxtimes(F\boxtimes G)$. Отсюда следует коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} K(X)\times K(Y)\times K(Z) & \longrightarrow & K(X\times Y)\times K(Z) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K(X)\times K(Y\times Z) & \longrightarrow & K(X\times Y\times Z) \end{array}$$

Аналогичным образом доказывается коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} K(X)\times K(Y) & \longrightarrow & K(X\times Y) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T^*} \\ K(Y)\times K(X) & \longrightarrow & K(Y\times X) \end{array}$$

где $T(x,\ y)=(y,\ x)$.

5.2. Диагональное отображение $X\to X\times X$ индуцирует гомоморфизм $K(X\times X)\to K(X)$. Взяв композицию этого гомоморфизма и гомоморфизма $K(X)\times K(X)\to K(X\times X)$, определенного выше, мы получим в группе $K(X)$ бинарную операцию, обозначаемую через $(u,\ v)\mapsto u\cdot v$ (или просто uv) и называемую *умножением*. Используя коммутативные диаграммы п. 5.1, нетрудно показать, что это умножение задает в $K(X)$ структуру коммутативного кольца. Единичным элементом в этом кольце служит класс тривиального расслоения ранга 1 (обращаем внимание читателя, что основным полем является поле $k=\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$; для кватернионных расслоений данная техника не работает).

5.3. Пример. Пусть $X=CP_n$ — комплексное проективное пространство и ξ — каноническое линейное расслоение над X (I.2.4).

В § IV.2 мы докажем, что $K(X)$ изоморфно факторалгебре $\mathbf{Z}[u]/(u^{n+1})$, где $u=[\xi]-1$.

5.4. Предложение. *$\cup$-произведение, определенное в 5.1, единственным образом продолжается на K-группы локально-компактных пространств X и Y:*

$$K(X)\times K(Y)\to K(X\times Y).$$

Кроме того, в этом случае по-прежнему выполняются свойства ассоциативности и коммутативности.

Доказательство. Пусть $\dot X$ и $\dot Y$ — одноточечные компактификации локально-компактных пространств X и Y. Так как $X\times Y\approx(\dot X\times\dot Y)\setminus\dot X\vee\dot Y$, то, согласно 4.6, мы имеем точную последовательность

$$K^{-1}(\dot X\times\dot Y)\to K^{-1}(\dot X\vee\dot Y)\to K(X\times Y)\to K(\dot X\times\dot Y)\to K(\dot X\vee\dot Y).$$

Докажем, что первый гомоморфизм в этой последовательности сюръективен. Если $\alpha\colon \dot X\vee\dot Y\to \mathrm{GL}(k)$ — непрерывное отображение, гомотопический класс которого представляет собой элемент из $K^{-1}(\dot X\vee\dot Y)$ (3.17), то α является ограничением непрерывного отображения $\tilde\alpha\colon \dot X\times\dot Y\to\mathrm{GL}(k)$, задаваемого равенством $\tilde\alpha(x,y)=f(x)f(\infty)^{-1}g(y)$, где $f=\alpha|_{\dot X}$ и $g=\alpha|_{\dot Y}$ (мы отождествляем $\dot X$ с $\dot X\times\{\infty\}$ и $\dot Y$ с $\dot Y\times\{\infty\}$). В силу сюръективности отображения $K^{-1}(\dot X\times\dot Y)\to K^{-1}(\dot X\vee\dot Y)$ получаем точную последовательность

$$0\to K(X\times Y)\to K(\dot X\times\dot Y)\to K(\dot X\vee\dot Y).$$

Теперь единственность $\cup$-произведения $\theta\colon K(X)\times K(Y)\to K(X\times Y)$ следует из коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] \\
K(X)\times K(Y) \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "i\times j"'] & K(X\times Y) \arrow[d] \\
K(\dot X)\times K(\dot Y) \arrow[r] & K(\dot X\times\dot Y) \arrow[d] \\
 & K(\dot X\vee\dot Y)
\end{tikzcd}$$

Для доказательства существования заметим прежде всего, что гомоморфизм $\gamma\colon K(\dot X\vee\dot Y)\to K(\dot X)\times K(\dot Y)$, индуцированный проекциями на сомножители, инъективен. Действительно, из $\gamma([E]$

$-[T]) = 0$ следует после стабилизации, что $E|_{\dot{X}} \approx T|_{\dot{X}}$ и $E|_{\dot{Y}} \approx T|_{\dot{Y}}$. Так как $\dot{X} \cap \dot{Y}$ состоит из одной точки, то $E \approx T$.

Построим теперь отображение θ. Если $x \in K(X)$ и $y \in K(Y)$, то $i(x) \cup j(y)$ является элементом из $K(\dot{X} \times \dot{Y})$, ограничение z которого на $K(\dot{X} \vee \dot{Y})$ равно нулю (так как ограничения $i(x)$ и $j(y)$ на $K(\{\infty\})$ равны нулю, то также равен нулю и образ z при инъективном гомоморфизме $K(\dot{X} \vee \dot{Y}) \to K(\dot{X}) \times K(\dot{Y})$). Следовательно, гомоморфизм $K(\dot{X}) \times K(\dot{Y}) \to K(\dot{X} \times \dot{Y})$ индуцирует гомоморфизм $K(X) \times K(Y) \to K(X \times Y)$, обладающий всеми требуемыми свойствами. □

5.5. Замечание. Рассматривая компактные пространства с отмеченными точками, можно дать другую интерпретацию предложения 5.4. Обозначим отмеченную точку пространств X и Y через $\{\infty\}$. Тогда мы имеем $(X' \times Y')^{\cdot} \approx X \wedge Y$, где $X' = X \setminus \{\infty\}$ и $Y' = Y \setminus \{\infty\}$. Следовательно, $\cup$-произведение, определенное в 5.4, индуцирует $\cup$-произведение

$$\tilde{K}(X) \times \tilde{K}(Y) \to \tilde{K}(X \wedge Y)$$

с теми же самыми формальными свойствами.

5.6. Предложение. *Пусть (X, X') и (Y, Y') — произвольные пары компактных пространств $(X' \subset X,\ Y' \subset Y)$. Тогда можно единственным способом определить билинейный гомоморфизм*

$$K(X, X') \times K(Y, Y') \to K(X \times Y,\ X \times Y' \cup X' \times Y),$$

который в случае $X' = Y' = \varnothing$ совпадает с гомоморфизмом, определенным в 5.1.

Доказательство. Так как $(X \times Y) \setminus (X \times Y' \cup X' \times Y) \approx (X \setminus X') \times (Y \setminus Y')$, то существование такого $\cup$-произведения следует из предложения 5.4. Для доказательства единственности рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
K(X, X') \times K(Y, Y') \arrow[r] & K(X \times Y, X \times Y' \cup X' \times Y) \\
K(X/X', \{x'\}) \times K(Y/Y', \{y'\}) \arrow[r] \arrow[u, "\approx"] & K(X/X' \times Y/Y', X/X' \times \{y'\} \cup \{x'\} \times Y/Y') \arrow[u, "\approx"']
\end{tikzcd}$$

Из этой диаграммы следует, что достаточно доказать единственность в случае, когда подпространства X' и Y' сводятся к точкам. В этом случае мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
K(X, X') \times K(Y, Y') \arrow[r] \arrow[d] & K(X \times Y, X \times Y' \cup X' \times Y) \arrow[d] \\
K(X) \times K(Y) \arrow[r] & K(X \times Y)
\end{tikzcd}$$

где отображение $K(X\times Y, X\times Y'\cup X'\times Y)\to K(X\times Y)$ есть в точности отображение $K(Z\times T)\to K(Z^+\times T^+)$ для $Z=X\setminus X'$ и $T=Y\setminus Y'$. Рассматривая точные последовательности, ассоциированные с парами $(Z^+\times T^+, Z\times T^+)$ и $(Z\times T^+, Z\times T)$, нетрудно показать (ср. 4.15), что последнее отображение инъективно. □

5.7. Пример. В III.1.3 мы докажем, что $K_{\mathbf{C}}(B^2, S^1)\approx \mathbf{Z}$ и что $\cup$-произведение с образующей группы $K_{\mathbf{C}}(B^2, S^1)$ индуцирует изоморфизм между группами $K_{\mathbf{C}}(X, X')$ и $K_{\mathbf{C}}(X\times B^2, X\times S^1\cup X'\times B^2)$. Кроме того, в III.5.17 мы докажем, что $\cup$-произведение с образующей группы $K_{\mathbf{R}}(B^8, S^7)\approx \mathbf{Z}$ индуцирует изоморфизм между $K_{\mathbf{R}}(X, X')$ и $K_{\mathbf{R}}(X\times B^8, X\times S^7\cup X'\times B^8)$. Этим будут доказаны классические теоремы периодичности Ботта.

5.8. Предположим теперь, что $X=X'$. Так же как в 5.2, взяв ограничение на диагональ, мы получим новый тип произведения

$$K(X, Y)\times K(X, Y')\to K(X, Y\cup Y');$$

в случае $Y=Y'=\varnothing$ оно совпадает с произведением, определенным в 5.2. Будем обозначать это произведение через $(a, b)\mapsto a\cdot b$ (или просто ab).

5.9. Теорема. *Пусть X — компактное пространство и $K'(X)$ — подгруппа группы $K(X)$, определенная в I.1.29. Тогда относительно кольцевой структуры, определенной в 5.2, подгруппа $K'(X)$ является нильидеалом в $K(X)$ (т. е. каждый элемент из $K'(X)$ нильпотентен). В частности, если пространство X связно, то каждый элемент из $\tilde{K}(X)\approx$ $\operatorname{Ker}[K(X)\to \mathbf{Z}]$ нильпотентен. Кроме того, если $X=\bigcup_{i=1}^{n} X_i$, где X_i — замкнутые стягиваемые подмножества, то $(K'(X))^n=0$.*

Доказательство. Для каждого замкнутого подмножества Y в X положим $K_Y(X)=\operatorname{Ker}[K(X)\to K(Y)]$. Из 5.8 следует, что в кольце $K(X)$ мы имеем $K_Y(X)\cdot K_{Y'}(X)\subset K_{Y\cup Y'}(X)$. Более общим образом, если $Y_1, \ldots, Y_p$ — замкнутые подмножества, то $K_{Y_1}(X)\cdot K_{Y_2}\cdot\ldots$ $\ldots\cdot K_{Y_p}(X)\subset K_{Y_1\cup Y_2\cup\ldots\cup Y_p}(X)$.

Пусть $\alpha=[E]-[T]\in K'(X)$. В силу 1.17 мы можем предположить, что T — тривиальное расслоение и что $E_x\approx T_x$ для каждой точки x из X. Так как пространство X компактно, то существует такое конечное покрытие $[X_i^\alpha]$ замкнутыми подмножествами, что $\alpha|_{X_i^\alpha}=0$. Следовательно, $\alpha\in K_{X_i^\alpha}(X)$ для $i=1, \ldots, n$. Отсюда индукцией по i получаем, что $(\alpha)^n\in K_X(X)=0$.

Наконец, если $X=\bigcup_{i=1}^{n} X_i$, где множества X_i замкнуты и стягиваемы, то мы можем выбрать $X_i^\alpha=X_i$ для каждого элемента $\alpha\in K'(X)$. Следовательно, если $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ суть n элементов из $K'(X)$, то их произведение $\alpha_1\ldots\alpha_n$ принадлежит группе $K_X(X)=0$. □

5.10. Примеры. Если X — сфера S^p, то мы можем взять $X_1 = S^p_+$ и $X_2 = S^p_-$. Следовательно, все произведения в $K'(X) = \operatorname{Ker}[K(S^p) \to Z]$ равны нулю. Если $X = CP_n$ или RP_n, то можно найти $n+1$ стягиваемых подмножеств X_i, таких что $X = \bigcup_{i=0}^{n} X_i$. В однородных координатах, X_i — это множество таких точек $(x_0, \ldots, x_n)$, что $x_i \neq 0$ и $\sum_{j \neq i} |x_j/x_i|^2 \leqslant 1$. Следовательно, $[\tilde{K}(RP^n)]^{n+1} = [\tilde{K}(CP^n)]^{n+1} = 0$.

5.11. Положим в произведении, определенном в 5.8, $Y' = \varnothing$. Тогда мы получим третий тип произведения:

$$K(X, Y) \times K(X) \to K(X, Y).$$

Снова будем обозначать его $(a, b) \mapsto a \cdot b$ (или ab). Легко видеть, что это произведение наделяет группу $K(X, Y)$ структурой правого модуля над кольцом $K(X)$. Аналогично можно задать в $K(X, Y)$ структуру левого модуля. Эти две структуры совпадают между собой.

5.12. В качестве приложения этой $K(X)$-модульной структуры, которая может быть определена даже для некомпактного пространства X, рассмотрим над X векторное расслоение V. Пусть φ — метрика на V (I.8.5). Обозначим через $B(V)$ *ассоциированное с V расслоение на шары*, т. е. множество таких точек v из V, что $\varphi(v, v) \leqslant 1$ на каждом слое, и через $S(V)$ — *ассоциированое с V расслоение на сферы*, т. е. множество таких точек v из V, что $\varphi(v, v) = 1$. Тогда $B(V) - S(V) \approx V$ и пространство X является деформационным ретрактом пространства $B(V)$. При помощи изоморфизма $K(X) \xrightarrow{\approx} K(B(V))$ (см. 4.16) группа $K(V) \approx K(B(V), S(V))$ превращается в $K(X)$-модуль. Эта модульная структура может быть также описана следующим образом. Отображение $K(X) \times K(V) \to K(V)$ является композицией гомоморфизмов

$$K(X) \times K(V) \to K(X \times V) \xrightarrow{\tau^*} K(V),$$

где $\tau\colon V \to X \times V$ — собственное отображение $v \mapsto (\pi(x), v)$, а $\pi\colon V \to X$ — проекция. Совпадение двух указанных описаний модульной структуры следует из коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
K(X\times V) \arrow[r, "\tau^*"] \arrow[d, "\wr"] & K(V) \arrow[d, "\wr"] \\
K(X\times B(V), X\times S(V)) \arrow[r, "\tau'^*"] \arrow[d, "\wr"] & K(B(V), S(V)) \arrow[d, equal] \\
K(B(V)\times B(V), B(V)\times S(V)) \arrow[r, "d^*"] & K(B(V), S(V))
\end{tikzcd}$$

где τ' определяется той же самой формулой, что и τ, а d — диагональное отображение. [Заметим, что отображение $d\colon (B(V), S(V)) \to (B(V) \times B(V), B(V) \times S(V))$ гомотопно отображению d_0, задаваемому формулой $d_0(v) = (\pi(v), v)$; при этом X рассматривается как подпространство в $B(V)$, отвечающее нулевому сечению (I.5.2).]

5.13. Предложение. *Пусть V — векторное расслоение над локально-компактным пространством X, а x и y — элементы из $K(V)$. Обозначим через Δ: $V \to V \times V$ диагональное отображение, и пусть $x' \in K(X)$ — ограничение элемента x на нулевое сечение. Тогда в $K(X)$-модуле $K(V)$ выполнено равенство $xy = \Delta^*(x \cup y) = x' \cdot y$.*

Доказательство. Композиция $V \xrightarrow{(\pi,\, id) = \tau} X \times V \xrightarrow{\delta = (i,\, id)} V \times V$, где i — нулевое сечение, гомотопна в множестве собственных отображений диагональному отображению Δ. Поскольку диаграмма

$$\begin{array}{ccc} K(V) \times K(V) & \longrightarrow & K(V \times V) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle (i^*,\, id^*)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle (i,\, id)^*} \\ K(X) \times K(V) & \longrightarrow & K(X \times V) \end{array}$$

коммутативна, то $\Delta^*(x \cup y) = (\tau^* \cdot \delta^*)(x \cup y) = \tau^*(x' \cup y) = x' \cdot y$. □

Теперь мы хотим более явно описать произведение, определенное в 5.6. Общее описание, которое мы получим в пп. 5.15—5.25, будет использоваться лишь начиная с гл. IV.

5.14. В частном случае $X' = \varnothing$ гомоморфизм

$$K(X) \times K(Y, Y') \to K(X \times Y, X \times Y')$$

может быть просто определен следующим образом. Пусть $x = [E] - [F]$ — элемент из $K(X)$ и $y = d(G, H, \alpha)$ — элемент из $K(Y, Y')$. Тогда $\cup$-произведение элементов x и y равняется $d(E \boxtimes G[, E \boxtimes H, 1 \boxtimes \alpha) - \alpha(F \boxtimes G, F \boxtimes H, 1 \boxtimes \alpha)$. Легко видеть, что это произведение билинейно и в случае $Y' = \varnothing$ совпадает с произведением, определенным в 5.1. Рассуждение, аналогичное использованному при доказательстве предложения 5.6, показывает корректность данной формулы.

5.15. В общем случае удобно сначала дать другое описание относительной группы $K(X, X')$ для локально-компактного пространства X и замкнутого подмножества X' в X. Рассмотрим полную подкатегорию $\mathscr{E}'(X)$ категории $\mathscr{E}(X)$, состоящую из расслоений, которые являются прямыми слагаемыми тривиальных расслоений (см. I.6.24; заметим, что для компактного пространства X, согласно I.6.5, $\mathscr{E}'(X) = \mathscr{E}(X)$). Пусть E — объект категории $\mathscr{E}'(X)$, снабженный некоторой метрикой (I.8.5), и $E_0 \oplus E_1$ — ортогональное разложение E по отношению к этой метрике. Эндоморфизм D объекта $E = E_0 \oplus E_1$ называется *допустимым*, если

(i) D самосопряжен и имеет степень 1, т. е. может быть представлен в виде

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha^* \\ \alpha & 0 \end{pmatrix},$$

где α: $E_0 \to E_1$;

(ii) $D|_Y$ является автоморфизмом $E|_Y$;

(iii) существует такое компактное пространство $K \subset X$, что $D|_{X \setminus K}$ — автоморфизм $E|_{X \setminus K}$.

5.16. Обозначим через $\mathscr{E}$ множество пар (E, D) с допустимыми D. Элемент (E, D) множества $\mathscr{E}$ называется *элементарным*, если D — автоморфизм. Два элемента (E, D) и (E', D') называются *гомотопными*, если существует такая изометрия f: $E \to E'$ вида $f_0 \oplus f_1$, где f_i: $E_i \to E'_i$, что эндоморфизм $f^{-1} \cdot D' \cdot f$ гомотопен D в множестве допустимых эндоморфизмов объекта E. Зададим в множестве $\mathscr{E}$ следующее отношение эквивалентности: два элемента σ и σ' эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют такие элементарные элементы τ и τ', что элемент $\sigma + \tau$ гомотопен $\sigma' + \tau'$ (сумма пар определяется, как обычно, покомпонентно). Обозначим через $K_0(X, X')$ фактормножество множества $\mathscr{E}$ по этому отношению эквивалентности. Сложение пар задает на $K_0(X, X')$ структуру моноида. Через $\sigma(E, D)$ мы будем обозначать класс пары (E, D) в моноиде $K_0(X, X')$.

5.17. Предложение. *Моноид $K_0(X, X')$ является абелевой группой.*

Доказательство. Пусть $\sigma(E, D)$ — некоторый элемент из $K_0(X, X')$ и $\overline{E}$ — векторное расслоение, снабженное „противоположной градуировкой“, т. е. $\overline{E}_0 = E_1$ и $\overline{E}_1 = E_0$. Тогда $\sigma(E, D) + \sigma(\overline{E}, -D) = \sigma(E \oplus \overline{E}, D \oplus (-D))$ и мы имеем гомотопию

$$\Delta_\theta = \begin{pmatrix} D\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -D\cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in [0, \pi/2].$$

Так как $\Delta_{\pi/2}$ — автоморфизм, то $\sigma(E, D) + \sigma(\overline{E}, -D) = 0$. $\square$

5.18. Предложение. *Если X — компактное пространство, то гомоморфизм*

$$\gamma = K_0(X, X') \to K(X, X'),$$

задаваемый правилом $\delta(E, D) \mapsto d(E_0, E_1, \alpha|_{X'})$, является изоморфизмом.

Доказательство. Из определения группы $K(X, X')$ (см. 2.13 и 2.19) вытекает, что гомоморфизм γ корректно определен. Определим гомоморфизм γ': $K(X, X') \to K_0(X, X')$, обратный к гомоморфизму γ. Пусть $d(E_0, E_1, \beta)$ — элемент из $K(X, X')$. Мы можем снабдить расслоения E_0 и E_1 метриками, которые однозначно определены с точностью до изоморфизма (I.8.8). Пусть α: $E_0 \to E_1$ — произвольное продолжение морфизма β (I.5.10) и D — эндоморфизм расслоения $E_0 \oplus E_1$, задаваемый матрицей

$$D = \begin{pmatrix} 0 & \alpha^* \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда элемент $\sigma(E, D)$ не зависит от выбора продолжения, поскольку любые два продолжения α и α' гомотопны (для доказательства достаточно рассмотреть гомотопию $t\alpha+(1-t)\alpha'$, $t\in[0, 1]$, и соответствующую гомотопию между эндоморфизмами D, отвечающими α и α'). Очевидно, что гомоморфизм γ' является обратным к γ. $\square$

5.19. Предложение. *Если X — локально-компактное пространство и X' — его замкнутое подпространство, то гомоморфизм*

$$e\colon K_0(X, X')\to K_0(X\setminus X'),$$

задаваемый правилом $\sigma(E, D)\mapsto(E|_{X\setminus X'}, D|_{X\setminus X'})$, является изоморфизмом.

Доказательство. a) *Гомоморфизм e сюръективен.* Пусть $\sigma(E, D)$ — элемент группы $K_0(X\setminus X')$, где $E=E_0\oplus E_1$ и

$$D=\begin{pmatrix}0 & \alpha^*\\ \alpha & 0\end{pmatrix}.$$

По предположению в пространстве $X\setminus X'$ существует такой компакт K, что $\alpha|_{X\setminus X'\setminus K}$ — изоморфизм. С другой стороны, прибавляя, если надо, к E_0 и E_1 одно и то же векторное расслоение, без ограничения общности можно считать, что расслоение E_1 тривиально. Пусть $\tilde{E}_1$ — тривиальное расслоение того же ранга, что и E_1, и $\tilde{E}_0$ — векторное расслоение над X, полученное склеиванием расслоений E_0 и $\tilde{E}_1|_{X\setminus K}$ при помощи $\alpha|_{X\setminus X'\setminus K}$ (I.6.25). Обозначим через $\tilde{\alpha}\colon\tilde{E}_0\to\tilde{E}_1$ морфизм, полученный склеиванием морфизмов α и $\mathrm{Id}_{\tilde{E}_1|X\setminus K}$ (I.3.2). Для любых метрик в расслоениях $\tilde{E}_0$ и $\tilde{E}_1$ обозначим через $\tilde{D}$ эндоморфизм расслоения $\tilde{E}=\tilde{E}_0\oplus\tilde{E}_1$, заданный матрицей

$$\tilde{D}=\begin{pmatrix}0 & \tilde{\alpha}^*\\ \tilde{\alpha} & 0\end{pmatrix}.$$

Тогда очевидно, что $e(\sigma(\tilde{E}, \tilde{D}))=\sigma(E, D)$.

b) *Гомоморфизм e инъективен.* Пусть $\sigma(E, D)$ — такой элемент из $K_0(X, X')$, что $e(\sigma(E, D))=0$. Из определения группы $K_0(X\setminus X')$ вытекает существование такой элементарной пары (E', D') над $X\setminus X'$, что эндоморфизм $D|_{X\setminus X'}\oplus D'$ гомотопен допустимому автоморфизму в множестве допустимых эндоморфизмов расслоения $E|_{X\setminus X'}\oplus E'$. Если D_t — соответствующая гомотопия, то в пространстве $X\setminus X'$ существует такое относительно компактное открытое множество V, что $D|_{X\setminus V}$ и $D_t|_{\bar{V}\setminus V}$ — автоморфизмы. Следовательно, элемент $\sigma(E_{\bar{V}\setminus V}, D|_{\bar{V}\setminus V})$ равен 0. Согласно 5.18, имеет место изоморфизм $K_0(\bar{V}, \bar{V}\setminus V)\approx K(\bar{V}, \bar{V}\setminus V)$. Поэтому, прибавляя элементарную пару вида (F, δ), где $F=F'\oplus F'$, F' тривиально, $\delta=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, и используя 2.28, получаем, что $D|_{\bar{V}\setminus V}$ может быть продолжен до некоторого допустимого автоморфизма $\bar{D}$ над пространством $\bar{V}$. Пусть Δ:

$E \to E$ — допустимый автоморфизм, задаваемый условиями $\Delta|_{X\setminus V} = D|_{X\setminus V}$ и $\Delta|_{\bar V} = \bar D$. Ясно, что морфизм $t\Delta + (1-t)D$ является гомотопией между Δ и D в множестве допустимых эндоморфизмов объекта E. Следовательно, $\sigma(E, D) = \sigma(E, \Delta) = 0$, так как пара (E, Δ) элементарна. $\square$

5.20. Следствие. *Если X — локально-компактное пространство и X' — его замкнутое подпространство, то группы $K_0(X, X')$, $K_0(X\setminus X')$, $K(X, X')$ и $K(X\setminus X')$ естественно изоморфны.*

Доказательство. Согласно 5.18, $K(X\setminus X') \approx K(X, X') \approx K(\dot X, \dot X') \approx K_0(\dot X, \dot X')$. Применяя 5.19, получаем $K_0(\dot X, \dot X') \approx K_0(\dot X\setminus \dot X') \approx K_0(X\setminus X')$. $\square$

5.21. Вернемся к нашей исходной задаче — дать явную формулу для $\cup$-произведения

$$K(X, X') \times K(Y, Y') \to K(X\times Y, X\times Y' \cup X'\times Y).$$

Согласно 5.20, мы можем отождествить группы K и K_0. Поэтому будем решать нашу задачу для групп K_0. Пусть $\sigma(E, \Gamma) \in K_0(X, X')$ и $\sigma(F, \Delta) \in K_0(Y, Y')$. Тогда в произведение $E \boxtimes F$ можно ввести следующую градуировку: $(E \boxtimes F)_0 = (E_0 \boxtimes F_0) \oplus (E_1 \boxtimes F_1)$ и $(E \boxtimes F)_1 = (E_0 \boxtimes F_1) \oplus (E_1 \boxtimes F_0)$. Эти разложения согласованы с естественной метрикой на расслоении $G = E \boxtimes F$. Пусть Ω: $G \to G$ — морфизм, определенный формулой $\Omega = \Gamma \hat\boxtimes 1 + 1 \hat\boxtimes \Gamma$. Другими словами, $\Omega(x_i \otimes y_j) = \Gamma(x_i) \otimes y_j + (-1)^i x_i \otimes \Delta(y_j)$, где x_i и y_j принадлежат соответственно слоям расслоений E_i и F_j. Тогда морфизм Ω имеет степень 1 и $\Omega^* = \Gamma^* \hat\boxtimes 1 + 1 \hat\boxtimes \Delta^* = \Gamma \hat\boxtimes 1 + 1 \hat\boxtimes \Delta = \Omega$. Далее $\Omega^2 = \Gamma^2 \hat\boxtimes 1 + 1 \hat\boxtimes \Delta^2$. Так как $(\Gamma_x)^2 \geqslant 0$ и $\Delta_y^2 \geqslant 0$, то для любой точки $(x, y) \in X \times Y$ мы имеем $(\Omega_{x,y})^2 > 0$, если хотя бы один из операторов $(\Gamma_x)^2$ и $(\Delta_y)^2$ строго положителен (здесь положительность операторов означает положительность их собственных значений). Следовательно, если Γ_x *или* Δ_y — автоморфизм, то $\Omega_{x,y}$ — также автоморфизм. Поэтому элемент $\sigma(G, \Omega) \in K(X\times X', X\times Y' \cup X'\times Y)$ корректно определен. Соответствие

$$[\sigma(E, \Gamma), \sigma(F, \Delta)] \mapsto \sigma(E \boxtimes F, \Omega)$$

определяет искомый билинейный гомоморфизм.

5.22. Теорема. *Имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccc}
K_0(X, X') \times K_0(Y, Y') & \longrightarrow & K_0(X\times Y, X\times Y' \cup X'\times Y) \\
\downarrow & & \downarrow \\
K_0(X\setminus X') \times K_0(Y\setminus Y') & \longrightarrow & K_0((X\setminus X')\times(Y\setminus Y')) \\
\wr\wr & & \wr\wr \\
K(X\setminus X') \times K(Y\setminus Y') & \longrightarrow & K((X\setminus X')\times(Y\setminus Y'))
\end{array}$$

нижняя строка которой представляет собой $\cup$*-произведение, определенное в 5.4. Далее, если пространства* X *и* Y *компактны, то произведение*

$$\begin{array}{ccc} K(X,X')\times K(Y,Y') & \longrightarrow & K(X\times Y, X\times Y'\cup X'\times Y) \\ \wr\wr & & \wr\wr \\ K_0(X,X')\times K_0(Y,Y') & \longrightarrow & K_0(X\times Y, X\times Y'\cup X'\times Y) \end{array}$$

может быть определено непосредственно следующим образом. Пусть $d(E_0, E_1, \beta)$ *(соотв.* $d(F_0, F_1, \gamma)$*) — элемент из* $K(X, X')$ *(соотв.* $K(Y, Y')$*) и* α: $E_0\to E_1$ *(соотв.* δ: $F_0\to F_1$*) — такой морфизм, что* $\alpha|_{X'}=\beta$ *(соотв.* $\delta|_{Y'}=\gamma$*). Тогда элементам* $d(E_0, E_1, \beta)$ *и* $d(F_0, F_1, \gamma)$ *сопоставляется элемент* $d(G_0, G_1, \omega)\in K(X\times Y,\ X\times Y'\cup X'\times Y)$, *где* $G_0=(E_0\boxtimes F_0)\oplus(E_1\boxtimes F_1)$, $G_1=(E_0\boxtimes F_1)\oplus(E_1\boxtimes F_0)$, *а морфизм* ω *для произвольных метрик на векторных расслоениях задается матрицей*

$$\omega=\begin{pmatrix}\alpha\boxtimes 1 & -1\boxtimes\delta^* \\ \delta\boxtimes 1 & \alpha^*\boxtimes 1\end{pmatrix}.$$

Доказательство. Коммутативность первой диаграммы непосредственно следует из определения морфизмов ограничения $K_0(X, X')\to K_0(X\setminus X')$ и т. д. Согласно 5.6, коммутативность второй диаграммы достаточно доказать лишь для случая $X'=Y'=\varnothing$. Так как в этом случае морфизмы α и δ гомотопны нулю, мы можем считать, что $\alpha=\delta=0$. Поэтому желаемый результат следует из равенства (в кольце $K(X\times Y)$)

$$E_0\boxtimes F_0+E_1\boxtimes F_1-E_0\boxtimes F_1-E_1\boxtimes F_0=(\pi^*E_0-\pi^*E_1)\times(p^*F_0-p^*F_1),$$

в котором π: $X\times Y\to X$ и p: $X\times Y\to Y$ — канонические проекции. $\square$

5.23. Если пространство X компактно, то композиция морфизмов

$$K_0(X)\times K_0(X\setminus X')\to K_0(X\setminus X')\times K_0(X\setminus X')\to K_0((X\setminus X')\times(X\setminus X'))\xrightarrow{\Delta^*}K_0(X\setminus X'),$$

где Δ — диагональное отображение, задается формулой

$$([E]-[E'],\ \sigma(F,\ D))\mapsto\sigma(E\otimes F,\ 1\otimes D)-\sigma(E'\otimes F,\ 1\otimes D).$$

Учитывая это замечание, формально определим в общем случае произведение $K_0(X)\times K_0(X,\ X')\to K_0(X,\ X')$ той же самой формулой:

$$([E]-[E'],\ \sigma(F,\ D))\mapsto\sigma(E\otimes F,\ 1\otimes D)-\sigma(E'\otimes F,\ 1\otimes D).$$

Имеет место коммутативная диаграмма (для компактного пространства X)

$$\begin{tikzcd}
K(X)\times K(X, X') \arrow[r] & K(X, X') \\
K_0(X)\times K_0(X, X') \arrow[r] \arrow[u, "\approx"] \arrow[d, "\approx"] & K_0(X, X') \arrow[u, "\approx"] \arrow[d, "\approx"] \\
K_0(X)\times K_0(X\setminus X') \arrow[r] & K_0(X\setminus X')
\end{tikzcd}$$

верхний гомоморфизм в которой определен так же, как в 5.11. Другими словами, *изоморфизм* $K(X, X')\approx K(X\setminus X')$ *является изоморфизмом* $K(X)$*-модулей.*

5.24. Пример. Пусть V — одномерное комплексное векторное пространство. Любой элемент $v\in V$ определяет такой гомоморфизм d_v: $\mathbb{C}\to V$, что $d_v(1)=v$. Если снабдить V положительной эрмитовой формой φ, то мы можем определить гомоморфизм ∂_v: $V\to\mathbb{C}$ как сопряженный к d_v (именно, $\partial_v(w)=\varphi(w, v)$). Рассмотрим теперь тривиальное расслоение E над V со слоем $\mathbb{C}\oplus V$; таким образом, $E=V(\mathbb{C}\times V)$. Зададим морфизм D: $E\to E$ формулой $D(v, \lambda, w)=(v, \partial_v(w), d_v(\lambda))$, или, в матричных обозначениях,

$$D_v=\begin{pmatrix}0 & \partial_v\\ d_v & 0\end{pmatrix}.$$

Тогда $(D_v)^2=\varphi(v, v)\cdot \mathrm{Id}_E$; следовательно, D_v — изоморфизм для $v\neq 0$. Кроме того, относительно рассматриваемой метрики морфизм D самосопряжен и имеет степень 1. Поэтому пара (E, D) определяет элемент $K_{0\mathbb{C}}(V)$. Следующее предложение более точно описывает эту ситуацию.

5.25. Предложение. *Пусть* $B(V)$ (*соотв.* $S(V)$ — *подмножество в* V, *состоящее из тех точек* v, *для которых* $\varphi(v, v)\leqslant 1$ (*соотв.* $\varphi(v, v)=1$). *Тогда образ элемента* $\sigma(E, D)$ *из* $K(B(V), S(V))$ *при естественном изоморфизме* $K_{\mathbb{C}}(B(V), S(V))\approx K_{0\mathbb{C}}(V)$ *равен* $d(F_0, F_1, \alpha)$, *где* $F_i=E_i|_{B(V)}$ *и* $\alpha_v=d_v$ *для* $v\in S(V)$. *В частности, для* $V=\mathbb{C}$ *этот образ совпадает с элементом из* $K_{\mathbb{C}}(B^2, S^1)$, *определенным в 2.30.*

Доказательство. Образ элемента $d(F_0, F_1, \alpha)$ из $K_{0\mathbb{C}}(B(V), S(V))$ при естественном изоморфизме $K_{0\mathbb{C}}(B(V), S(V))\approx K_{\mathbb{C}}(B(V), S(V))$ равен $\sigma(F, \Delta)$, где $F=F_0\oplus F_1$ и $\Delta_v=D_v$ для $v\in B(V)$. Отождествим пространство $B(V)\setminus S(V)$ с пространством V при помощи отображения $v\mapsto v/(1-\|v\|)$, где $\|v\|=\sqrt{\varphi(v, v)}$. Тогда образ элемента $\sigma(F, \Delta)$ при изоморфизме $K_{0\mathbb{C}}(B(V), S(V))\approx K_0(V)$ равен $\sigma(E, D')$, где $D'_v = D_w$, $w = v\|v\|/(1+\|v\|)$. Так как морфизм $tD_v + (1-t)D'_v$ является изоморфизмом для любых $t \in I$ и $v \neq 0$, то морфизмы D' и D гомотопны. Следовательно, $\sigma(E, D') = \sigma(E, D)$ в $K_{0_{\mathbb{C}}}(V)$. □

5.26. Пусть X и Y — локально-компактные пространства. Тогда $\cup$-произведение

$$\begin{array}{c} K(X\times\mathbb{R}^n)\times K(Y\times\mathbb{R}^p) \longrightarrow K(X\times\mathbb{R}^n\times Y\times\mathbb{R}^p) \\ \hphantom{K(X\times\mathbb{R}^n)\times K(Y\times\mathbb{R}^p) \longrightarrow} \wr\wr \\ \hphantom{K(X\times\mathbb{R}^n)\times K(Y\times\mathbb{R}^p) \longrightarrow} K(X\times Y\times\mathbb{R}^{n+p}) \end{array}$$

можно интерпретировать как билинейное отображение

$$K^{-n}(X)\times K^{-p}(Y) \to K^{-n-p}(X\times Y),$$

характеризуемое некоторым набором аксиом (Каруби [5]). Это отображение удовлетворяет свойству ассоциативности, описанному в 5.1. Свойство коммутативности выполняется в несколько измененном виде:

5.27. Предложение. *Пусть T^*: $K^{-n-p}(X\times Y) \to K^{-n-p}(Y\times X)$ — гомоморфизм, индуцированный отображением T: $Y\times X \to X\times Y$. Тогда диаграмма*

$$\begin{tikzcd} K^{-n}(X)\times K^{-p}(Y) \arrow[r] \arrow[d] & K^{-n-p}(X\times Y) \arrow[d, "T^*"] \\ K^{-p}(Y)\times K^{-n}(X) \arrow[r] & K^{-n-p}(Y\times X) \end{tikzcd}$$

коммутативна с точностью до знака $(-1)^{np}$.

Доказательство. Имеет место очевидная коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} K(X\times\mathbb{R}^n)\times K(Y\times\mathbb{R}^p) \arrow[r] \arrow[ddd] & K(X\times\mathbb{R}^n\times Y\times\mathbb{R}^p) \arrow[d] \\ & K(X\times Y\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p) \arrow[d] \\ & K(X\times Y\times\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^n) \arrow[d] \\ K(Y\times\mathbb{R}^p)\times K(X\times\mathbb{R}^n) \arrow[r] & K(Y\times\mathbb{R}^p\times X\times\mathbb{R}^n) \end{tikzcd}$$

в которой гомоморфизм $K(X\times Y\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p) \to K(X\times Y\times\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^n)$ индуцирован преобразованием пространства $\mathbb{R}^{n+p} = \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p$, переставляющим сомножители. Такое преобразование является произведением np транспозиций пространства $\mathbb{R}^{n+p}$ вида

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_i, \ldots, \lambda_j, \ldots, \lambda_{n+p}) \mapsto (\lambda_1, \ldots, \lambda_j, \ldots, \lambda_i, \ldots, \lambda_{n+p}).$$

Следовательно, в силу 4.10, это преобразование индуцирует гомоморфизм умножения на $(-1)^{np}$ на группе $K(X\times Y\times\mathbb{R}^{n+p})$. □

5.28. В качестве следствия из 5.27 рассмотрим случай $X=Y$. Тогда диагональное отображение $X \to X\times X$ индуцирует гомоморфизм $K^{-n-p}(X\times X) \to K^{-n-p}(X)$. Следовательно, мы получаем произведение

$$K^{-n}(X)\times K^{-p}(X) \to K^{-n-p}(X),$$

превращающее группу $K^*(X)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} K^{-n}(X)$ в градуированную алгебру. Если $x_n \in K^{-n}(X)$ и $x_p \in K^{-p}(X)$, то в $K^*(X)$ имеет место равенство $x_n x_p = (-1)^{np} x_p x_n$.

5.29. Произведение, определенное в 5.27, задает билинейное отображение

$$K^{-n}(X,\ X')\times K^{-p}(Y,\ Y') \to K^{-n-p}(X\times Y,\ X\times Y'\cup X'\times Y)$$ при

помощи отождествлений $K^{-n}(X,\ X')\approx K^{-n}(X\setminus X')$, $K^{-p}(Y,\ Y') \approx K^{-p}(Y\setminus Y')$ и $K^{-n-p}(X\times Y,\ X\times Y'\cup X'\times Y)\approx K^{-n-p}((X\setminus X')\times(Y\setminus Y'))$ В частности, если X и Y — компактные пространства, мы имеем произведение

$$K(X)\times K^{-1}(Y) \to K^{-1}(X\times Y),$$

которое можно непосредственно определить формулой

$$([F]-[G])\cup d(E,\ \alpha)=d(F\boxtimes E,\ 1\boxtimes\alpha)-d(G\boxtimes E,\ 1\boxtimes\alpha).$$

Для того чтобы доказать корректность этой формулы, достаточно проверить коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd}
K(X)\times K^{-1}(Y) \arrow[r] \arrow[d, "1\times\partial"'] & K^{-1}(X\times Y) \arrow[d, "\partial"] \\
K(X)\times K(X\times B^1,\ Y\times S^0) \arrow[r, "c"] & K(X\times Y\times B^1,\ X\times Y\times S^0)
\end{tikzcd}$$

где гомоморфизм ∂ определен в 3.21, а гомоморфизм c — в 5.14. Но коммутативность этой диаграммы очевидна, поскольку ∂ задает каноническое отождествление группы $K^{-1}(Y)$ с группой $K(Y\times B^1,\ Y\times S^0)$ и, аналогично, каноническое отождествление $K^{-1}(X\times Y)$ с $K(X\times Y\times B^1,\ X\times Y\times S^0)$ (3.30).

5.30. Ситуация, рассмотренная в 5.13, может быть обобщена на группы $K^{-n}(X)$. Именно, определим произведение (обозначаемое $(\alpha,\ \beta)\mapsto\alpha\cdot\beta$)

$$K(X\times\mathbb{R}^q)\times K(V\times\mathbb{R}^r) \to K(V\times\mathbb{R}^{q+r}),$$

или

$$K^{-q}(X)\times K^{-r}(V) \to K^{-q-r}(V),$$

как композицию

$$K(X\times\mathbb{R}^q)\times K(V\times\mathbb{R}^r) \to K(X\times\mathbb{R}^q\times V\times\mathbb{R}^r)\approx K(X\times V\times\mathbb{R}^{q+r}) \xrightarrow{\tau^*} K(V\times\mathbb{R}^{q+r}).$$

где τ — собственное отображение $(v, \lambda) \mapsto (\pi(v), v, \lambda)$. Следующее предложение обобщает предложение 5.13.

5.31. Предложение. *Пусть V — векторное расслоение над компактным пространством X, $x \in K(V \times \mathbb{R}^q) = K^{-q}(V)$, $y \in K(V \times \mathbb{R}^r) = K^{-r}(V)$. Тогда произведение x на y в $K^{-q-r}(V)$, определенное в* 5.27, *равно $x' \cdot y$, где x' — ограничение элемента x на подгруппу $K(X \times \mathbb{R}^q)$, полученное с помощью нулевого сечения.*

Доказательство. Рассмотрим композицию отображений

$$V \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^r \xrightarrow{\tau} X \times \mathbb{R}^q \times V \times \mathbb{R}^r \xrightarrow{j} V \times \mathbb{R}^q \times V \times \mathbb{R}^r,$$

где $\tau(v, \mu, \nu) = (\pi(v), \mu, v, \nu)$, $j(x, \mu, v, \nu) = (i(x), \mu, v, \nu)$ и i — нулевое сечение расслоения V. В множестве собственных отображений эта композиция гомотопна диагональному отображению Δ, заданному формулой $\Delta(\nu, \mu, \nu) = (v, \mu, v, \nu)$. Следовательно, $\Delta^*(x \cup y) = (\tau^* \cdot j^*)(x \cup y) = \tau^*(x' \cup y) = x' \cdot y$. $\square$

Упражнения: 9, 11, 19.

6. Упражнения

6.1. Пусть A — произвольное кольцо с единицей и $\mathcal{A}_n$ — полная подкатегория категории $\mathrm{Mod}(A)$, состоящая из объектов M, допускающих резольвенту вида

$$0 \to P_n \to P_{n-1} \to \ldots \to P_0 \to M \to 0,$$

где все P_i проективны и конечно-порожденны.

a) Доказать, что для всякого объекта N из $\mathcal{A}_{n+1}$ существует точная последовательность

$$0 \to Q_1 \to Q_0 \to N \to 0,$$

где Q_0 и Q_1 — объекты из $\mathcal{A}_n$. Кроме того, доказать, что если

$$0 \to Q_1' \to Q_0' \to N \to 0$$

— другая резольвента того же типа, то существует точная последовательность

$$0 \to Q_1 \to Q_0 \oplus Q_1' \to Q_0' \to 0.$$

b) Определим $G(\mathcal{A}_n)$ как факторгруппу свободной группы, порожденной объектами $\mathcal{A}_n$, по подгруппе, порожденной соотношениями $[M] = [M'] + [M'']$, где

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

— точная последовательность в $\mathcal{A}_n$. Доказать, что функтор включения $\mathcal{A}_n \to \mathcal{A}_{n+1}$ индуцирует изоморфизм $G(\mathcal{A}_n) \approx G(\mathcal{A}_{n+1})$.

c) Пусть $\mathcal{A} = \bigcup \mathcal{A}_n$ и $G(\mathcal{A})$ — факторгруппа свободной группы, порожденной объектами из $\mathcal{A}$ по подгруппе, порожденной соотношениями $[M]=[M']+[M'']$, где M', M и M'' связаны точной последовательностью, как в п. b). Доказать, что $K(A)\approx G(A)$.

6.2. Доказать, что если A — область главных идеалов, то $K(A)\approx \mathbb{Z}$.

6.3. Пусть G — компактная группа Ли и $\mathscr{C}$ — категория конечномерных комплексных представлений группы G. Обозначим через $R(G)$ группу Гротендика $K(\mathscr{C})$ этой категории.

a) Вычислить группу $R(G)$ для $G=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

* b) Доказать, что $R(G)$ есть свободная группа, порожденная неприводимыми представлениями группы G. *

6.4. Доказать равенства

$$\tilde{K}_{\mathbb{C}}(S^1)=0,\quad \tilde{K}_{\mathbb{R}}(S^1)=\mathbb{Z}/2,$$
$$\tilde{K}_{\mathbb{C}}(S^2)=\mathbb{Z},\quad \tilde{K}_{\mathbb{R}}(S^2)=\mathbb{Z}/2,$$
$$\tilde{K}_{\mathbb{C}}(S^3)=0,\quad \tilde{K}_{\mathbb{R}}(S^3)=0.$$

**6.5.* Пусть X — связное клеточное разбиение размерности $\leqslant 2$. Доказать, что $\tilde{K}(X)\approx H_2(X;\ \mathbb{Z})$. *

6.6. Пусть π: $X\to Y$ — некоторое n-листное накрытие пространства Y. Если E — векторное расслоение над X, то определим векторное расслоение $F=\pi_*(E)$ над Y, полагая $F_y=\bigoplus\limits_{x\in\pi^{-1}(\{y\})} E_x$. Более точно, если U — такое открытое множество в Y, что $V=\pi^{-1}(U)\approx U\times D$, где D дискретно, то множество F_U снабжается топологией, индуцированной биекцией $F_U\approx (E_V)^D$.

a) Доказать, что F с определенной таким образом топологией является корректно определенным векторным расслоением над Y.

b) Доказать, что соответствие $E\mapsto F$ индуцирует групповой гомоморфизм π_*: $K(X)\to K(Y)$. Кроме того, доказать формулу

$$\pi_*(\pi^*(y)\cdot x)=y\cdot\pi_*(x),$$

где $y\in K(Y)$, $x\in K(X)$.

c) Пусть π: $X\to Y$ — главное накрытие с группой G (т. е. на X задано свободное действие конечной группы G и $Y\approx X/G$). Доказать, что $(\pi^*\cdot\pi_*)(x)=\sum\limits_{g\in G}\rho(g)^*(x)$, где $\rho(g)^*$: $K(X)\to K(X)$ — изоморфизм группы $K(X)$, индуцированный действием g. Доказать также, что $\pi_*(1)=[E]=X\times_G k^n$ (I.9.27), где $n=\operatorname{card}(G)$ и G действует на k^n с помощью регулярного представления.

6.7. Пусть f: $S^1\to S^1\approx P_1(\mathbb{R})$ — отображение, заданное формулой $f(z)=z^2$. Доказать, что конус отображения $C'(f)$ гомеоморфен $P_2(\mathbb{R})$ (3.28). Используя последовательность Пуппе

$$S^1\to P_1(\mathbb{R})\to P_2(\mathbb{R})\to S^2\to S^2,$$

доказать изоморфизмы $K_{\mathbb{C}}(P_2(\mathbb{R}))\approx\mathbb{Z}/2$ и $K_{\mathbb{R}}(P_2(\mathbb{R}))\approx\mathbb{Z}/4$. Тем же методом вычислить группы $K_{\mathbb{C}}(P_3(\mathbb{R}))$ и $K_{\mathbb{R}}(P_3(\mathbb{R}))$.

6.8. Пусть $\mathscr{E}^{Q}_{\mathbb{R}}(X)$ — категория вещественных векторных расслоений с компактной базой, снабженных невырожденной симметричной билинейной формой (I.8.11). Множество M классов изоморфизма таких векторных расслоений наделяется структурой моноида, индуцированной суммой Уитни. Показать, что симметризованная группа моноида M есть $K_{\mathbb{R}}(X) \oplus K_{\mathbb{R}}(X)$. Аналогично, исследовать вещественные векторные расслоения, снабженные невырожденной кососимметричной формой, и комплексные векторные расслоения, снабженные невырожденной симметричной или кососимметричной формой. Исследовать также случай комплексных расслоений, снабженных невырожденной эрмитовой формой.

6.9. Пусть X — конечное клеточное разбиение и X_n — его n-мерный остов. Положим $K_{(n)}(X) = \operatorname{Ker}[K(X) \to K(X_{n-1})]$. Показать, что $\cup$-произведение

$$K(X) \times K(Y) \to K(X \times Y),$$

где Y — некоторое другое конечное клеточное разбиение, переводит $K_n(X) \times K_{(p)}(Y)$ в $K_{(n+p)}(X \times Y)$. Таким образом, подгруппы $K_{(n)}(X)$ образуют фильтрацию кольца $K(X)$ в том смысле, что $K_{(n)}(X)$ $K_{(p)}(X) \subset K_{(n+p)}(X)$.

***6.10.** Пусть X — связное конечное клеточное разбиение размерности n, E и F — вещественные векторные расслоения ранга $> n$. Показать, что $[E] - [F] = 0$ в $K_{\mathbb{R}}(X)$ тогда и только тогда, когда расслоения E и F изоморфны (другими словами, отображение $[X, \mathrm{BO}(p)] \to [X, \mathrm{BO}]$, индуцированное вложением $\mathrm{O}(p)$ в O, инъективно для $p > n$). Доказать также, что каждый элемент из $K_{\mathbb{R}}(X)$ может быть представлен в виде $[E] \oplus [T] - [T']$, где T и T' — тривиальные векторные расслоения и E — векторное расслоение ранга $\leqslant n$ (другими словами, отображение $[X, \mathrm{BO}(p)] \to [X, \mathrm{BO}]$ сюръективно для $p \geqslant n$). Аналогично в комплексном случае показать, что отображение $[X, \mathrm{BU}(p)] \to [X, \mathrm{BU}]$ инъективно (соотв. сюръективно) для $p > (n-2)/2$ (соотв. для $p > (n-1)/2$). *

***6.11.** Пусть S — мультипликативное множество в $\mathbb{N}^*$, не совпадающее с $\{1\}$, и X связное конечное клеточное разбиение. Обозначим через $\mathscr{E}(X)_S$ подкатегорию категории $\mathscr{E}(X)$, состоящую из векторных расслоений, ранг которых принадлежит S. Тензорное произведение векторных расслоений снабжает множест о классов изоморфных объектов из $\mathscr{E}(X)_S$ структурой моноида. Обозначим через $KP_S(X)$ симметризованную группу этого моноида.

a) Пусть E — объект из $\mathscr{E}(X)_S$. Показать, что в $\mathscr{E}(X)_S$ существует такой объект F, что $E \otimes F$ — тривиальное расслоение. (Указание: запишите формально $[E] = n(1 + ([E] - n)/n)$, где n — ранг расслоения E.)

b) Пусть $\mathbb{Z}_S^*$ — мультипликативная группа дробей a/b, где a и $b \in S$. Доказать, что $KP_S(X) \approx \mathbb{Z}_S^* \oplus (1 \oplus \tilde{K}(X)_S)_X$, где $\tilde{K}(X)_S$ —

группа $\tilde{K}(X)$, локализованная в S, и $(1+\tilde{K}(X)_S)_X$ — *мультипликативная группа* $1+\tilde{K}(X)_S$, естественно вложенная в $K(X)_S$.

c) Положим $\widetilde{KP}_S(X) = \mathrm{Ker}[KP_S(X) \to KP_S(P_0)]$, где P_0 — точка. Доказать, что группа $\widetilde{KP}_S(X)$ является S-делимой. В случае $S = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ доказать, что $\widetilde{KP}_S(X) \approx \tilde{K}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

d) Доказать, что $\widetilde{KP}_S(X) \approx \operatorname{inj}\lim\limits_{s \in S} \Phi_S(X)$, где $\Phi_S(X)$ — множество классов изоморфных векторных расслоений ранга s и отображение $\Phi_s(X) \to \Phi_{st}(X)$ индуцировано тензорным умножением на тривиальное расслоение ранга t. *

6.12. Пусть $\mathscr{H}$ — категория гильбертовых пространств и $\check{\mathscr{H}}$ — категория с теми же объектами, но другими морфизмами: $\check{\mathscr{H}}(E, F) = \mathscr{H}(E, F)/\mathscr{K}(E, F)$, где $\mathscr{K}(E, F)$ — множество компактных операторов из E в F (т. е. операторов, являющихся пределами операторов конечного ранга).

a) Доказать, что морфизм D: $E \to F$ в категории $\mathscr{H}$ обратим в $\check{\mathscr{H}}$ тогда и только тогда, когда D — *фредгольмов оператор* (т. е. пространства $\mathrm{Ker}(D)$ и $\mathrm{Coker}(D)$ конечномерны).

b) Пусть d: $E \to F$ — обратимый морфизм в $\check{\mathscr{H}}$ и D — оператор в $\mathscr{H}$, принадлежащий классу d. Доказать, что *индекс* D (т. е. число $\dim(\mathrm{Ker}(D)) - \dim(\mathrm{Coker}(D))$) не зависит от выбора D и является локально-постоянной функцией от d.

c) Доказать изоморфизм $K^{-1}(\check{\mathscr{H}}) \approx \mathbb{Z}$.

Пусть $\check{\check{\mathscr{H}}}$ — псевдоабелева категория, ассоциированная с $\check{\mathscr{H}}$ (см. I.6.10). Доказать, что $K(\check{\check{\mathscr{H}}}) = K(\check{\mathscr{H}}) = 0$.

6.13. Пусть $\mathscr{C}$ — аддитивная категория. Рассмотрим множество пар (E, α), где E — объект категории $\mathscr{C}$ и α — автоморфизм E. *Группой Басса* $K_1(\mathscr{C})$ категории $\mathscr{C}$ называется факторгруппа свободной абелевой группы, порожденной такими парами, по подгруппе, порожденной соотношениями

$$(E \oplus F, \alpha \oplus \beta) = (E, \alpha) + (F, \beta),$$
$$(E, \beta\alpha) = (E, \alpha) + (E, \beta).$$

a) Доказать, что $K_1(\mathscr{L}(A)) \approx K_1(\mathscr{P}(A))$ (мы будем обозначать обе эти группы через $K_1(A)$).

b) Пусть $\mathrm{GL}'(A)$ — коммутант группы $\mathrm{GL}(A)$. Доказать, что $K_1(\mathscr{L}(A)) \approx \mathrm{GL}(A)/\mathrm{GL}'(A)$ и что группа $\mathrm{GL}'(A)$ совпадает со своим собственным коммутантом (т. е. что $\mathrm{GL}''(A) = \mathrm{GL}'(A)$).

c) Пусть $E_n(A)$ — подгруппа группы $\mathrm{GL}_n(A)$, порожденная *элементарными матрицами*, т. е. матрицами вида (a_{ji}), у которых $a_{ii} = 1$ и $a_{ji} \neq 0$ самое большее для одной пары индексов (i, j) с $i \neq j$. Для $n \geqslant 3$ доказать, что $E_n(A)$ совпадает со своим коммутантом и, следовательно, $E(A) \subset \mathrm{GL}'(A)$, где $E(A) = \operatorname{inj}\lim E_n(A)$.

d) Доказать, что любая треугольная матрица с 1 на главной диагонали принадлежит группе $E(A)$. Используя равенства

$$\begin{pmatrix}\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \alpha^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta & 0 & 0\\ 0 & \beta^{-1} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha^{-1} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta^{-1} & 0 & 0\\ 0 & \beta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix}u & 0\\ 0 & u^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -u\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ u^{-1} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -u\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

показать, что $E(A)=\mathrm{GL}'(A)$

e) Предположим теперь, что A — коммутативная банахова алгебра. Показать, что $K^{-1}(\mathscr{L}(A))\approx K^{-1}(\mathscr{P}(A))\approx\pi_0(\mathrm{GL}(A))$. Положим $SK^{-1}(A)=\pi_0(\mathrm{SL}(A))$ и $SK_1(A)=\mathrm{SL}(A)/E(A)$. Показать, что эти две группы естественно изоморфны.

* f) Доказать, что если A — коммутативная банахова алгебра, то $K_1(A)\approx A^*\oplus SK^{-1}(A)$. Используя результаты гл. III, вычислить явно $K_1(A)$ для случая, когда A — кольцо непрерывных комплекснозначных функций на торе T^n. *

6.14. Пусть A — банахова алгебра и X — компактное пространство. Обозначим через $A(X)$ кольцо непрерывных функций на X со значениями в A. Если Y — замкнутое подпространство в X, то мы имеем банахов функтор $\varphi\colon \mathscr{P}(A(X))\to\mathscr{P}(A(Y))$, ассоциированный с гомоморфизмом колец $A(X)\to A(Y)$. Определим группу $K(X, Y; A)$ как группу Гротендика функтора φ.

a) Используя материал § I.6, показать, что $K_{\mathbb{R}}(X, Y)\approx K(X, Y; \mathbb{R})$ и $K_{\mathbb{C}}(X, Y)\approx K(X, Y; \mathbb{C})$.

b) Положим $K^{-n}(X, Y; A)=K(X\times B^n, X\times S^{n-1}\cup Y\times B^n; A)$. Используя методы § 4, доказать точность последовательности

$$K^{-n-1}(X; A)\to K^{-n-1}(Y; A)\to K^{-n}(X, Y; A)\to K^{-n}(X; A)\to K^{-n}(Y; A).$$

c) Положим $K^{-n}(A)=K^{-n}(P; A)$, где P — точка. Если B — банахова алгебра без единицы, то положим $K^{-n}(B)=\mathrm{Ker}\,[K^{-n}(B^+)\to K^{-n}(\mathbb{R})]$, где B^+ — алгебра, полученная из B присоединением единичного элемента. Пусть

$$0\to A'\to A\to A''\to 0$$

— точная последовательность банаховых алгебр. Доказать точность последовательности

$$K^{-n-1}(A)\to K^{-n-1}(A'')\to K^{-n}(A')\to K^{-n}(A)\to K^{-n}(A'').$$

d) Пусть $A(X)$ — банахова алгебра непрерывных функций со значениями в A. Доказать, что $K^{-n}(X; A)\approx K^{-n}(A(X))$.

e) Доказать, что $K^{-n-1}(A)\approx\pi_n(\mathrm{GL}(A))$.

6.15 (*теорема о плотности*). Пусть A — банахова алгебра и $i: B \to A$ — непрерывное инъективное отображение банаховой алгебры B в A, удовлетворяющее следующим двум условиям:

(i) $i(B)$ плотно в A;

(ii) $\mathrm{GL}_n(A) \cap M_n(B) = \mathrm{GL}_n(B)$ для любого целого n (мы рассматриваем B как подалгебру, вложенную в A посредством отображения i).

Показать, что при этих предположениях i индуцирует изоморфизм $K^{-n}(B) \approx K^{-n}(A)$ для каждого $n \geqslant 0$. Обобщить эту теорему на индуктивные пределы банаховых алгебр, где $K^{-n}(B)$ интерпретируется как $\pi_{n-1}(\mathrm{GL}(B))$ для $n > 0$.

6.16. Пусть H — бесконечномерное гильбертово пространство, A — банахова алгебра $\mathrm{End}(H)$ и A'' — факторалгебра $\mathrm{End}(H)/A'$, где A' — идеал компактных операторов. Показать, что группа $K^{-n}(X; A') = \mathrm{Ker}[K^{-n}(X; A'^{+}) \to K^{-n}(X; \mathbb{R})]$ может быть отождествлена с группой $K^{-n}(X)$ (указание: примените теорему о плотности). Доказать, что $K^{-n}(X; A) = 0$ и что $K^{-n-1}(X; A'') \approx K^{-n}(X; A') \approx K^{-n}(X)$. Доказать также, что $K(X; A'') \approx [X, \mathcal{F}^1(H)]$, где $\mathcal{F}^1(H)$ — нетривиальная связная компонента множества самосопряженных фредгольмовых операторов.

* *6.17*. Пусть $M = (a_{ij})$, $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, — бесконечная матрица над кольцом A. Скажем, что матрица M имеет *конечный тип*, если существует такое целое число n, что в каждой строке и в каждом столбце матрицы M имеется самое большее n ненулевых элементов, причем все ненулевые элементы a_{ij} выбираются самое большее из n различных элементов кольца A.

a) Показать, что множество таких бесконечных матриц образует кольцо и что, если A — банахова алгебра, $\sup\limits_{j} \sum\limits_{i} \|a_{ij}\|$ — норма в этом кольце.

Обозначим через CA кольцо бесконечных матриц конечного типа над банаховой алгеброй A, пополненное по этой норме (это — *конус* над банаховой алгеброй A). Пусть $\tilde{A}$ — замыкание в CA подмножества конечных матриц и $SA = CA/\tilde{A}$.

b) Используя рассуждения, аналогичные рассуждениям из упр. 6.16, показать, что $\mathrm{BGL}(CA)$ — стягиваемое множество и $\Omega(\mathrm{BGL}(SA)) \sim K(A) \times \mathrm{BGL}(A)$. Вывести отсюда, что для произвольной банаховой алгебры A множество $\mathrm{BGL}(A)$ есть бесконечное пространство петель. *

6.18. Пусть $\mathscr{C}$ — банахова категория и $\varphi_n: \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ — функтор, определенный равенством $\varphi_n(E) = E^n$ (2.11). Положим $K^{-1}(\mathscr{C}; \mathbb{Z}/n) = K(\varphi_n)$.

a) Доказать, что если $n \neq 4p+2$ или если $\mathscr{C}$ — комплексная категория, то $n \cdot x = 0$ для любого $x \in K^{-1}(\mathscr{C}; \mathbb{Z}/n)$.

b) В случае $\mathscr{C} = \mathscr{E}(X)$ положим

$$K^{-1}(X;\ Z/n)=K^{-1}(\mathscr{C};\ Z/n),$$
$$\tilde{K}^{-1}(X;\ Z/n)=\operatorname{Coker}[K^{-1}(P;\ Z/n)\to K^{-1}(X;\ Z/n)],$$
$$K^{-p-1}(X,\ Y;\ Z/n)=\tilde{K}^{-1}(S^p(X/Y);\ Z/n).$$

Доказать точность следующих последовательностей:

$$K^{-p-2}(X;\ Z/n)\to K^{-p-2}(Y;\ Z/n)\to K^{-p-1}(X,\ Y;\ Z/n)\to K^{-p-1}(X;\ Z/n)\to K^{-p-1}(Y;\ Z/n),$$

$$K^{-p-1}(X,\ Y)\xrightarrow{\times n}K^{-p-1}(X,\ Y)\to K^{-p-1}(X,\ Y;\ Z/n)\to K^{-p}(X,\ Y)\xrightarrow{\times n}K^{-p}(X,\ Y).$$

c) Вычислить группы $K^{-1}(P;\ Z/n)$ и $K^{-2}(P;\ Z/n)$, где P — точка, в вещественном и комплексном случаях.

6.19. Пусть X — компактное пространство и Y — его замкнутое подпространство. Обозначим через $\mathscr{C}_n(X,\ Y)$ следующую категорию. Ее объекты — это такие последовательности E_n, E_{n-1}, …, E_0 векторных расслоений вместе с морфизмами α_i: $E_i|_Y\to E_{i-1}|_Y$, что последовательность

$$0\to E_n|_Y\xrightarrow{\alpha_n}E_{n-1}|_Y\xrightarrow{\alpha_{n-1}}\dots\xrightarrow{\alpha_1}E_0|_Y\to 0$$

точна. Морфизм φ: $E\to F$, где $E=(E_i,\ \alpha_i)$ и $F=(F_i,\ \beta_i)$, — это такая последовательность морфизмов расслоений φ_i: $E_i\to F_i$, что $\beta_i\varphi_i=\varphi_{i-1}\alpha_i$. Объект $E=(E_i,\ \alpha_i)$ из $\mathscr{C}_n(X,\ Y)$ называется *элементарным*, если он имеет вид $(0,\ \dots,\ E_p,\ E_{p+1},\ 0,\ \dots,\ 0)$, где $E_p=E_{p+1}$ и $\alpha_p=\mathrm{Id}$. Обозначим через $\mathscr{K}_{(n)}(X,\ Y)$ фактормножество множества классов изоморфных объектов из $\mathscr{C}_n(X,\ Y)$ по отношению эквивалентности, порожденному суммированием с элементарными объектами.

a) Показать, что $\mathscr{K}_{(1)}(X,\ Y)\approx K(X,\ Y)$

b) Пусть $(E_i,\ \alpha_i)$ — объект из $\mathscr{C}_n(X,\ Y)$. Показать, что, добавляя элементарный объект, можно добиться того, что α_1 будет ограничением на Y эфиморфизма векторных расслоений над X.

c) Показать, что включение $\mathscr{K}_{(l)}(X,\ Y)$ в $\mathscr{K}_{(l+1)}(X,\ Y)$ индуцирует изоморфизм $\mathscr{K}_{(l)}(X,\ Y)\approx\mathscr{K}_{(l+1)}(X,\ Y)$ (Атья [3]).

d) Два объекта из $\mathscr{C}_n(X,\ Y)$ называются *гомотопными*, если существует объект из $\mathscr{C}_n(X\times I,\ Y\times I)$, ограничения которого на $X\times\{0\}$ и $X\times\{1\}$ изоморфны этим двум объектам. Показать, что гомотопные объекты принадлежат одному и тому же классу в $\mathscr{K}_{(n)}(X,\ Y)$. (Указание: докажите, что точная последовательность над Y может быть продолжена на некоторую окрестность Y.)

e) Доказать, что тензорное произведение комплексов индуцирует билинейное отображение

$$\mathscr{K}_{(n)}(X,\ Y)\times\mathscr{K}_{(n')}(X',\ Y')\to\mathscr{K}_{(n+n')}(X\times X',\ X\times Y'\cup X'\times Y),$$

которое совпадает, по модулю изоморфизма $K\approx\mathscr{K}_{(n)}$, с $\cup$ произведением, определенным в этой главе.

f) Пусть V — комплексное векторное пространство размерности n, снабженное положительной эрмитовой формой, и $B(V)$ (соотв. $S(V)$) — единичный шар (соотв. единичная сфера), ассоциированный с этой формой. Пусть (E_i, α_i) — комплекс расслоений, где $E_i = B(V) \times \lambda^{n-i}(V)$, а морфизмы α_i: $S(V)^{n-i}(V) \to S(V) \times \lambda^{n-i+1}(V)$ заданы формулами $\alpha_i(v, w) = (v, v \wedge w)$. Доказать, что элемент из $K(B(V), S(V)) = K(B^{2n}, S^{2n-1})$, определяемый комплексом (E_i, α_i), равен n-й $\cup$-степени элемента из $K(B^2, S^1)$, определенного в 2.30.

7. Исторические замечания

Как уже указывалось в предисловии, определение группы $K(X)$ было впервые дано Гротендиком (см. Борель и Серр [2]) в контексте алгебраической геометрии. В контексте алгебраической топологии эти группы были изучены Атьей и Хирцебрухом [3]. Определение относительной группы $K(X, Y)$ принадлежит Атье и Хирцебруху [3], однако истоки принятого здесь способа изложения содержится в трудах семинара Картана—Шварца [1] и в диссертации автора [2]. Большинство остальных разультатов этой главы содержится в указанной работе Атьи и Хирцебруха. Часть материала, осносящегося к исследованию мультипликативных структур, основана на работе Атьи, Ботта и Шапиро [1].

f) Пусть V — комплексное векторное пространство размерности n, снабженное положительной эрмитовой формой, и $B(V)$ (соотв. $S(V)$) — единичный шар (соотв. единичная сфера), ассоциированный с этой формой. Пусть (E_i, α_i) — комплекс расслоений, где $E_i = B(V) \times \lambda^{n-i}(V)$, а морфизмы α_i: $S(V)^{n-i}(V) \to S(V) \times \lambda^{n-i+1}(V)$ заданы формулами $\alpha_i(v, w) = (v, v \wedge w)$. Доказать, что элемент из $K(B(V), S(V)) = K(B^{2n}, S^{2n-1})$, определяемый комплексом (E_i, α_i), равен n-й $\cup$-степени элемента из $K(B^2, S^1)$, определенного в 2.30.

7. Исторические замечания

Как уже указывалось в предисловии, определение группы $K(X)$ было впервые дано Гротендиком (см. Борель и Серр [2]) в контексте алгебраической геометрии. В контексте алгебраической топологии эти группы были изучены Атьей и Хирцебрухом [3]. Определение относительной группы $K(X, Y)$ принадлежит Атье и Хирцебруху [3], однако истоки принятого здесь способа изложения содержится в трудах семинара Картана—Шварца [1] и в диссертации автора [2]. Большинство остальных разультатов этой главы содержится в указанной работе Атьи и Хирцебруха. Часть материала, осносящегося к исследованию мультипликативных структур, основана на работе Атьи, Ботта и Шапиро [1].

Глава III

ПЕРИОДИЧНОСТЬ БОТТА

1. Периодичность в комплексной K-теории

1.1. В этом параграфе мы будем иметь дело только с комплексной K-теорией, и поэтому группы $K_{\mathbb{C}}(X)$, $K_{\mathbb{C}}(X, Y)$, ..., будут обозначаться просто $K(X)$, $K(X, Y)$, ...

1.2. Рассмотрим элемент $u \in K(B^2, S^1)$ (II.2.30.), определяемый как $d(E, F, \alpha)$, где $E = F = B^2 \times \mathbb{C}$ и α: $E|_{S^1} \to F|_{S^1}$ — изоморфизм $(x, v) \to (x, xv)$.

1.3. Теорема. *Пусть X — локально-компактное пространство и Y — замкнутое пространство X. Тогда $\cup$-произведение с элементом u индуцирует изоморфизм*

$$\beta\colon K^{-n}(X, Y) \xrightarrow{\approx} K^{-n}(X \times B^2, X \times S^1 \cup Y \times B^2) = K^{-n-2}(X, Y)$$

(*см. II.4.11*).

Заменяя пару (X, Y) парой $(X \times B^n, X \times S^{n-1} \cup Y \times B^n)$, мы можем свести эту теорему к случаю $n = 0$. Далее, коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} K(X, Y) & \xrightarrow{\beta} & K(X \times B^2, X \times S^1 \cup Y \times B^2) \\ \uparrow{\scriptstyle\approx} & & \uparrow{\scriptstyle\approx} \\ K(X/Y, \{\infty\}) & \xrightarrow{\beta} & K(X/Y \times B^2, X/Y \times S^1 \cup \{\infty\} \times B^2) \end{array}$$

сводит дело к случаю, когда пространство X компактно, а подпространство Y есть точка P. Наконец, рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} 0 & & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ K(X, P) & \longrightarrow & K(X \times B^2, X \times S^1 \cup P \times B^2) \approx K((X \setminus P) \times \mathbb{R}^2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K(X) & \longrightarrow & K(X \times B^2, X \times S^1) \approx K(X \times \mathbb{R}^2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K(P) & \longrightarrow & K(P \times B^2, P \times S^1) \approx K(P \times \mathbb{R}^2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 \end{array}$$

Поскольку P (соотв. $P \times \mathbb{R}^2$) является ретрактом пространства X (соотв. $X \times \mathbb{R}^2$), то столбцы этой диаграммы являются расщепляющимися точными последовательностями. Поэтому теорема 1.3 выводится из следующего частного случая:

1.4. Теорема. *Пусть X — компактное пространство. Тогда $\cup$-произведение с элементом u индуцирует изоморфизм*

$$K(X) \xrightarrow{\approx} K(X \times B^2,\ X \times S^1).$$

1.5. Оставшаяся часть этого параграфа посвящена доказательству теоремы 1.4. Наша цель — свести теорему 1.4 к некоторой общей теореме о банаховых алгебрах (1.11). Как мы уже видели в I.6.11 и II.1.11., группа $K(X)$ может быть описана в терминах банаховой алгебры $A = C(X)$ непрерывных комплекснозначных функций на компактном пространстве X. Более точно, $K(X) \approx K(A) \approx K(\mathcal{P}(A))$, где $\mathcal{P}(A)$ — категория конечно-порожденных проективных модулей над A. Соответствие между $K(X)$ и $K(A)$ задается с помощью проекционных операторов (см. I.6.17); если E — векторное расслоение над X, то E является образом проекционного оператора p: $X \times \mathbf{C}^n \to X \times \mathbf{C}^n$ для некоторого достаточно большого n (I.6.5.). Этот проекционный оператор p определяет такой элемент $\check{p} \in M_n(A)$, что $\check{p}^2 = \check{p}$ (I.1.12.). Проективный модуль, который ставится в соответствие расслоению E, — это модуль $\operatorname{Im}(\check{p})$. Обратно, если M — конечно-порожденный проективный модуль над A, то M является образом гомоморфизма q: $A^n \to A^n$, такого, что $q^2 = q$. Этот гомоморфизм q определяет отображение $p = \hat{q}$: $X \times \mathbf{C}^n \to X \times \mathbf{C}^n$, образом которого служит векторное расслоение (I.6.3).

Теперь мы дадим аналогичное описание группы $K(X \times B^2, X \times S^1)$ в терминах банаховой алгебры A. Первым шагом в этом направлении является следующая лемма.

1.6. Лемма. *Каждый элемент группы $K(X \times B^2,\ X \times S^1)$ может быть представлен в виде $d(T, T, \alpha)$, где T — тривиальное расслоение и α: $T|_{X \times S^1} \to T|_{X \times S^1}$ — такой автоморфизм, что $\alpha(x, e) = \mathrm{Id}$ для $x \in X$ и $e = (1, 0) \in S^1 \subset \mathbf{R}^2$ (такой автоморфизм называется* нормализованным*). Если α и β — нормализованные автоморфизмы, то $d(T, T, \alpha) = d(T, T, \beta)$ тогда и только тогда, когда существует такое тривиальное расслоение T', что гомоморфизм $\alpha \oplus \mathrm{Id}_{T'}|_{X \times S^1}$ гомотопен $\beta \oplus \mathrm{Id}_{T'}|_{X \times S^1}$ в множестве нормализованных автоморфизмов расслоения $(T \oplus T')|_{X \times S^1}$.*

Доказательство. Пусть $d(E, F, \gamma)$ — некоторый элемент из $K(X \times B^2, X \times S^1)$. Так как проекция π: $X \times B^2 \to X$ является гомотопической эквивалентностью, то, согласно I.7.3, мы можем предположить, что E и F имеют соответственно вид $\pi^*(E')$ и $\pi^*(F')$. С другой стороны, изоморфизм γ, ограниченный на подпространство $X \times \{e\} \subset X \times S^1$, определяет изоморфизм γ_e: $E' \to F'$. Отождествляя пространства X и $X \times \{e\}$, мы получаем, что изоморфизм γ_e является ограничением изоморфизма $\pi^*(\gamma_e)$: $\pi^*(E') \to \pi^*(F')$. Следовательно, мы имеем

$$d(\pi^*(E'),\ \pi^*(F'),\ \gamma)=d(\pi^*(E'),\ \pi^*(F'),\ \gamma)$$
$$+d(\pi^*(F'),\ \pi^*(E'),\ \pi^*(\gamma_e^{-1})|_{X\times S^1})=d(\pi^*(E'),\ \pi^*(E'),\sigma),$$

где σ — такой автоморфизм расслоения $\pi^*(E')|_{X\times S^1}$, что $\sigma(x, e)=\mathrm{Id}$. Если E'' — векторное расслоение над X, дающее в сумме с E' тривиальное расслоение T_1, то $d(\pi^*(E'),\pi^*(E'),\sigma)=d(\pi^*(E'),\ \pi^*(E'),\sigma)+d(\pi^*(E''),\ \pi^*(E''),\ \mathrm{Id})=d(T,\ T,\ \alpha)$, где $T=\pi^*(T_1)$ и автоморфизм α нормализован.

Предположим теперь, что $d(T,\ T,\alpha)=0$, где α — нормализованный автоморфизм. Согласно II.2,28, существуют такое тривиальное расслоение T' над $X\times B^2$ и такой автоморфизм α_1: $T\oplus T'\to T\oplus T'$, что $\alpha_1|_{X\times S^1}=\alpha\oplus\mathrm{Id}$. Пусть $n=\operatorname{rank}(T\oplus T')$ и f: $X\times S^1\times \mathrm{I}\to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ — непрерывное отображение, заданное формулой $f(x,\ z,\ t)=\check{\alpha}_1(x,\ zt)\check{\alpha}_1(x,\ et)^{-1}$. Тогда отображение f реализует нормализованную гомотопию между α и $\alpha\oplus\mathrm{Id}_{T\oplus T'}|_{X\times S^1}$.

Наконец, предположим, что $d(T,\ T,\alpha)=d(T,\ T,\ \beta)$, или, эквивалентно, что $d(T,\ T,\ \alpha\beta^{-1})=0$ (II.2.16). Тогда, по доказанному выше, существует такое тривиальное расслоение T', что автоморфизмы $\alpha\beta^{-1}\oplus\mathrm{Id}_{T'}|_{X\times S^1}$ и $\mathrm{Id}_{T\oplus T'}|_{X\times S^1}$ гомотопны в множестве нормализованных автоморфизмов. Если мы умножим эту гомотопию справа на $\beta\oplus\mathrm{Id}_{T'}|_{X\times S^1}$, то получим, что автоморфизмы $\alpha\oplus\mathrm{Id}_{T'}|_{X\times S^1}$ и $\beta\oplus\mathrm{Id}_{T'}|_{X\times S^1}$ гомотопны в множестве нормализованных автоморфизмов расслоения $(T\oplus T')|_{X\times S^1}$. $\square$

1.7. Тройка $(T,\ T,\alpha)$, где α — нормализованный автоморфизм, определяет такое непрерывное отображение $\check{\alpha}$: $X\times S^1\to\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, что $\check{\alpha}(x,\ e)=\mathrm{Id}$ (I.1 12). Следовательно, она определяет также непрерывное отображение σ: $S^1\to F(X,\ \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))\approx\mathrm{GL}_n(A)$ с $\sigma(e)=1$. При этом соответствии гомотопии между нормализованными автоморфизмами могут быть интерпретированны как гомотопии между петлями в $\mathrm{GL}_n(A)$, сохраняющие отмеченный элемент — единицу группы $\mathrm{GL}_n(A)$. Следующее предложение является переформулировкой леммы 1.6.

1.8. Предложение. *Соответствие* $\alpha\mapsto d(T,\ T,\ \alpha)$ *определяет изоморфизм групп* $\pi_1(\mathrm{GL}(A))=\operatorname{inj\,lim}\pi_1(\mathrm{GL}_n(A))$ *и* $K(X\times B^2,\ X\times S^1)$, *где* $A=C(X)$.

1.9. Пусть теперь A — комплексная банахова алгебра с единицей. Мы можем определить гомоморфизм

$$K(A)\to\pi_1(\mathrm{GL}(A)),$$

обобщающий гомоморфизм

$$K(X)\to K(X\times B^2,\ X\times S^1)\quad (A=C(X)).$$

Именно, пусть E — объект категории $\mathscr{P}(A)$ и p — такой проектор в модуле A^n при достаточно большом n, что $E\approx\operatorname{Im}(p)$. Тогда проектор p определяет в $\mathrm{GL}_n(A)$ петлю σ по формуле $\sigma(z)=pz+1-p$ $(z\in S^1\subset\mathbb{C})$. Переходя к прямому пределу, мы получаем корректно определенный элемент $\pi_1(\mathrm{GL}(A))=\operatorname{inj}\lim\pi_1(\mathrm{GL}_n(A))$.

1.10. Предложение. *Определенный выше элемент группы $\pi_1(\mathrm{GL}(A))$ не зависит от выбора p. Если мы обозначим этот элемент через $\gamma(E)$, то имеет место соотношение $\gamma(E\oplus F)=\gamma(E)\oplus\gamma(F)$. Следовательно, соответствие $E\mapsto\gamma(E)$ индуцирует гомоморфизм из $K(A)$ в $\pi_1(\mathrm{GL}(A))$, который мы также обозначим через γ. Наконец, если $A=C(X)$, то имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd} K(X) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\approx"', "\theta"] & K(X\times B^2, X\times S^1) \arrow[d, "\approx"', "\varphi"] \\ K(A) \arrow[r, "\gamma"] & \pi_1(\mathrm{GL}(A)) \end{tikzcd}$$

вертикальные изоморфизмы в которой определены в 1.5 и 1.8.

Доказательство. Временно обозначим элемент группы $\pi_1(\mathrm{GL}(A))$ ассоциированной с E и проекционным оператором p, через $\gamma(E, p)$. Прежде всего мы должны показать, что если $E\approx F$, то $\gamma(E, p)=(F, q)$. Так как мы будем переходить к прямому пределу, то без ограничения общности можно считать, что p и q — проекционные операторы в A^{2n} для некоторого достаточно большого n. Кроме того, мы можем предположить, что p и q представляются в виде $p'\oplus 0$ и $q'\oplus 0$, где p' и q' — проекционные операторы в A^n. Применяя рассуждение, использованное при доказательстве предложения I.7.7, мы убеждаемся в существовании в группе $\mathrm{GL}_{2n}(A)$ элемента δ, гомотопного 1 и такого, что $q=\delta\cdot p\cdot\delta^{-1}$. Если $\bar\delta\colon I\to\mathrm{GL}_{2n}(A)$ — такое непрерывное отображение, что $\bar\delta(0)=1$ и $\bar\delta(1)=\delta$, то нетрудно видеть, что петли, ассоциированные с p и q, связаны гомотопией $(z, t)\mapsto\bar\delta(t)(pz+1-p)\bar\delta(t)^{-1}$.

Пусть E и F — два таких объекта из категории $\mathcal{P}(A)$, что $E\approx\mathrm{Im}(p)$ и $F\approx\mathrm{Im}(q)$, где p и q — проекционные операторы в A^n и A^m соответственно. Тогда мы имеем $E\oplus F\approx\mathrm{Im}(p\oplus q)$, где $p\oplus q$ — проектор в $A^n\oplus A^m$. Следовательно, если мы заменим p на $p\oplus 0$ и q на $0\oplus q$, то получим формулу $(pz+1-p)(qz+1-q)=(p\oplus q)z+1-(p\oplus q)$. Из этой формулы вытекает, что $\gamma(E\oplus F)=\gamma(E)+\gamma(F)$, поскольку групповая операция в $\pi_1(\mathrm{GL}(A))$ индуцирована произведением в топологической группе $\mathrm{GL}(A)$ (Годбийон [2]).

Наконец, докажем коммутативность указанной диаграммы, т. е. соотношение $\varphi\beta=\gamma\theta$. Пусть E — векторное расслоение над X и E' — такое векторное расслоение, что $E\oplus E'=T_1$ тривиально. Тогда мы имеем $\beta([E])=d(\pi^*(E), \pi^*(E), \alpha)$, где $\pi^*(E)=E\times B^2$ и морфизм $\alpha\colon E\times S^1\to E\times S^1$ задается формулой $\alpha(e, z)=(ze, z)$. Элемент $\beta([E])$ может быть также представлен в виде $d(\pi^*(E\oplus E'), \pi^*(E\oplus E'), \alpha')$, где $\alpha'=\alpha\oplus\mathrm{Id}_{\pi^*(E')|X\times S^1}$. Если $p\colon T_1\to T_1$ — проектор, определяющий расслоение E, то мы имеем $\check\alpha'(x, z)=z\check p(x)$

$+1-\check{p}(x)$ (в обозначениях I.1.12). Следовательно, $(\varphi\beta)([E]) = (\gamma\theta)([E])$ и по линейности $(\varphi\beta)([E]-[F]) = (\gamma\theta)([E]-[F])$. $\square$

Предложение 1.10 показывает, что теорема 1.4 вытекает из следующего общего утверждения о банаховых алгебрах.

1.11. Теорема. *Пусть A — произвольная комплексная банахова алгебра с единицей. Тогда гомоморфизм*

$$\gamma\colon K(A) \to \pi_1(\mathrm{GL}(A)),$$

определенный в 1.9 и 1.10, является изоморфизмом.

Доказательство этой теоремы разбнвается на несколько этапов. Мы начнем с доказательства инъективности гомоморфизма γ. Для этого мы определим гомоморфизм $\gamma'\colon \pi_1(\mathrm{GL}(A)) \to K(A)$, левый обратный к γ (1.20). Затем с помощью серии редукций (1.21—1.25) мы докажем, что гомоморфизм γ сюръективен. Перед тем как двигаться дальше, нам нужны некоторые определения и предложения.

1.12. Определение. Пусть $\sigma\colon S^1 \to \mathrm{GL}_n(A)$ — петля в $\mathrm{GL}_n(A)$ с началом в точке 1. Петля σ называется *лорановской* (соотв. *полиномиальной*, соотв. *аффинной*) если в $M_n(A)$ она может быть представлена в виде $\sigma = \sum\limits_{k=-N}^{k=N} a_k z^k$ (соотв. $\sum\limits_{k=0}^{k=N} a_k z^k$, соотв. $a_0 + a_1 z$) для некоторого достаточно большого N. Обозначим через $\pi_1^L(\mathrm{GL}_n(A))$ множество гомотопических классов лорановских петель в $\mathrm{GL}_n(A)$, а через $\pi_1^L(\mathrm{GL}(A))$ обозначим $\mathrm{inj}\lim \pi_1^L(\mathrm{GL}_n(A))$.

1.13. Ясно, что гомоморфизм $K(A) \to \pi_1(\mathrm{GL}(A))$ можно разложить в композицию $K(A) \to \pi_1^L(\mathrm{GL}(A)) \to \pi_1(\mathrm{GL}(A))$. Первым шагом в доказательстве теоремы 1.11 будет следующее предложение.

1.14. Предложение. *Отображение.*

$$\pi_1^L(\mathrm{GL}(A)) \to \pi_1(\mathrm{GL}(A))$$

биективно. В частности, $\pi_1^L(\mathrm{GL}(A))$ является абелевой группой (относительно операции, индуцированной произведением в $\mathrm{GL}(A)$).

Доказательство. Пусть $\sigma\colon S^1 \to \mathrm{GL}(A)$ — непрерывное отображение. Так как окружность S^1 компактна, то образ $\sigma(S^1)$ принадлежит $\mathrm{GL}_n(A)$ для достаточно большого n.

Обозначим полученное таким образом отображение из S^1 в $\mathrm{GL}_n(A)$ снова через σ. Так как $\mathrm{M}_n(A)$ — банахово пространство, то теорема Фейера, примененная к $M_n(A)$, показывает, что σ является равномерным пределом свободных лорановских петель, определенных следующим образом. Положим

$$a_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \sigma(e^{i\theta})\, e^{-ik\theta} d\theta,\quad S_k(z) = \sum_{l=-k}^{+k} a_l z^l,\quad \sigma_k'(z) = \frac{S_0(z) + \ldots + S_k(z)}{k+1}.$$

Тогда $\sigma_k'(e)$ для достаточно больших k принадлежит открытому шару радиуса 1 с центром в единичном элементе. Кроме того, используя локальную выпуклость $\mathrm{GL}_n(A)$ в $\mathrm{M}_n(A)$, мы получаем, что $t\sigma_k'(z)+(1-t)\sigma(z)\in \mathrm{GL}_n(A)$ для достаточно больших k. Следовательно, если мы положим $\sigma_k(z)=\sigma_k'(z)\cdot\sigma_k'(e)^{-1}$, то σ_k является лорановской петлей. Используя гомотопию $(z, t)\mapsto (t\sigma_k'(z)+(1-t)\sigma(z))$ $[t\sigma'(e)+(1-t)\sigma(e)]^{-1}$, убеждаемся, что петля σ_k имеет в $\pi_1(\mathrm{GL}(A))$ тот же класс, что и исходная петля. Таким образом, мы заключаем, что отображение $\pi_1^L(\mathrm{GL}(A))\to\pi_1(\mathrm{GL}(A))$ сюръективно.

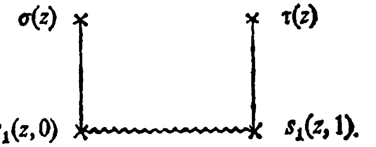


Рис. 14.

Инъективность отображения $\pi_1^L(\mathrm{GL}(A))\to\pi_1(\mathrm{GL}(A))$ доказывается аналогичными рассуждениями, примененными к банаховой алгебре $A(I)$ (алгебре непрерывных функций на I со значениями в A). Более точно, рассмотрим две лорановских петли σ и τ, которые имеют один и тот же класс в $\pi_1(\mathrm{GL}_n(A))$. Тогда существует такое непрерывное отображение s: $S^1\times I\to \mathrm{GL}_n(A)$, что $s(z, 0)=\sigma(z)$, $s(z, 1)=\tau(z)$ и $s(e, t)=1$. Так как

$$F(S^1\times I,\ \mathrm{GL}_n(A))\approx F(S^1,\ \mathrm{GL}_n(A(I))),$$

то использованная выше аргументация, примененная к банаховой алгебре $A(I)$, гарантирует нам существование для каждого $\varepsilon>0$ такого непрерывного отображения s_1: $S^1\times I\to\mathrm{GL}_n(A)$ что $s_1(e, t)=1$, $\|s_1(z, t)-s(z, t)\|<\varepsilon$ и $s_1(z, t)$ является лорановской функцией от z. Если взять ε меньшим, чем $1/\|\sigma^{-1}\|$ и $1/\|\tau^{-1}\|$, то можно определить лорановскую гомотопию r между σ и τ формулами (см. рис. 14)

$$r(z, t)=3t\sigma(z)+(1-3t)s_1(z, 0), \qquad 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{3},$$
$$r(z, t)=s^1(z, 3t-1), \qquad \frac{1}{3}\leqslant t\leqslant\frac{2}{3},$$
$$r(z, t)=(3t-2)s_1(z, 1)+(3-3t)\tau(z), \qquad \frac{2}{3}\leqslant t\leqslant 1.$$

Отметим, что ограничение, наложенное на ε, гарантирует нам, что первый и третий пути лежат в $\mathrm{GL}_n(A(I))\subset \mathrm{M}_n(A(I))$. □

1.15. Предложение. *Пусть E — проективный модуль над $A(I)$ и E_0 и E_1 суть A-модули, полученные „ограничением" E на $\{0\}$ и $\{1\}$. Тогда модули E_0 и E_1 изоморфны.*

Доказательство. Согласно I.6.16, мы можем интерпретировать „ограничение" модуля E на $\{0\}$ и $\{1\}$ и следующим образом. Представим E как образ проекционного оператора $p(t)\in\mathrm{M}_n(A)$, который непрерывно зависит от параметра $t\in I$. Мы хотим доказать, что $\mathrm{Im}(p(0))\approx\mathrm{Im}(p(1))$. Для этого достаточно найти такое $\alpha\in\mathrm{GL}_n(A)$, что $p(1)=\alpha^{-1}p(0)\alpha$.

Для t, $u\in I$ имеет место тождество $\alpha(t, u)p(u)=p(t)\alpha(t, u)$, где $\alpha(t, u)=1-p(t)-p(u)+2p(t)p(u)$. Если число u близко к t, то элемент $\alpha(t, u)$ близок к 1 и поэтому обратим. Следовательно, в силу компактности отрезка I, существует такая последовательность $0=t_0<t_1<\ldots t_p=1$, что $\alpha(t_i,\ t_{i+1})$ обратимы. Поэтому $p(1)=\alpha^{-1}p(0)\alpha$, где $\alpha=\alpha(t_p,\ t_{p-1})\ldots\alpha(t_1,\ t_0)$. $\square$

1.16. Замечание. Если $A=C(X)$, то, согласно I.6.18, это предложение — просто другая формулировка теоремы I.7.2.

1.17. Теперь мы в состоянии определить гомоморфизм

$$\gamma'\colon\ \pi_1(\mathrm{GL}(A))\approx\pi_1^L(\mathrm{GL}(A))\to K(A),$$

который является левым обратным к γ. С этой целью рассмотрим банахову алгебру $A\langle z\rangle$ (соотв. $A\langle z,\ z^{-1}\rangle$), состоящую из таких формальных рядов $\sum\limits_{r=0}^{+\infty}a_rz^r$ (соотв. $\sum\limits_{r=-\infty}^{+\infty}a_rz^r$), что $\sum\limits_{r=0}^{+\infty}\|a_r\|<+\infty$ (соотв. $\sum\limits_{r=-\infty}^{+\infty}\|a_r\|<+\infty$). Если $\sigma\colon S^1\to\mathrm{GL}_n(A)$ лорановская петля, то σ определяет элемент $\sigma_z\in M_n(A\langle z,\ z^{-1}\rangle)$, который представляется в виде $\sum\limits_{r=-\infty}^{+\infty}a_rz^r$. Заметим, что $a_r=0$, за исключением конечнего числа индексов r, и поэтому $M_n(A\langle z,\ z^{-1}\rangle)$ можно отождествить с алгеброй $M_n(A)\langle z,\ z^{-1}\rangle$. Если $\tau\colon S^1\to\mathrm{GL}_n(A)$ — петля, обратная к σ (определенная равенством $\tau(z)=(\sigma(z))^{-1}$), то τ является дифференцируемой функцией класса C^2 (в действительности, класса C^∞). Поэтому ряд Фурье функции τ абсолютно сходится и ряд $\tau_z=\sum\limits_{r=-\infty}^{+\infty}b_rz^r\in\mathrm{GL}_n(A\langle z,\ z^{-1}\rangle)$ является обратным для ряда σ_z.

Для $k\in\mathbb{N}$ положим $\sigma_z^k=\sum\limits_{r=0}^{\infty}a_{r-k}z^r$ и $\tau_z^k=\sum\limits_{r=0}^{\infty}b_{r-k}z^r$. Тогда мы имеем $\sigma_z^k\cdot\tau_z^k=z^{2k}(1+\varepsilon_k(z))$, где $\varepsilon_k(z)\to0$ при $k\to+\infty$.

1.18. Лемма. *Предположим, что число k выбрано настолько большим, что $\sigma_z^k\in M_n(A\langle z\rangle)$ и элемент $1+\varepsilon_k(z)$ обратим. Тогда A-модуль $M_n(\sigma,\ k)=\operatorname{Coker}(\sigma_z^k)$ является проективным модулем конечного типа. Кроме того, $M_n(\sigma,\ k+l)=M_n(\sigma,\ k)\oplus A^{nl}$ для $l\geqslant0$.*

Доказательство. A-модуль $M_n(\sigma,\ k)$ определяется точной последовательностью

$$(A\langle z\rangle)^n\xrightarrow{\sigma_z^k}(A\langle z\rangle)^n\to M_n(\sigma,\ k)\to0,$$

где, как обычно, мы отождествляем матрицу и естественным образом связанное с ней линейное отображение. Пусть $i\colon(A\langle z\rangle)^n\to(A\langle z,\ z^{-1}\rangle)^n$ (соотв. $P\colon(A\langle z,\ z^{-1}\rangle)^n\to(A\langle z\rangle)^n$) — естественное вложение (соотв. проекция $\sum\limits_{r=-\infty}^{r=+\infty}a_rz^r\mapsto\sum\limits_{r=0}^{+\infty}a_rz^r$). Определим, отображение θ_z^k: $(A\langle z\rangle)^n \to (A\langle z\rangle)^n$ формулой $\theta_z^k = P\cdot z^{-k}\cdot r_z\cdot i$. Тогда мы имеем $\theta_z^k\cdot\sigma_z^k = P\cdot z^{-k}\cdot\tau_z\cdot i\cdot z^k\cdot\sigma_z = P\cdot z^{-k}\cdot\tau_z\cdot z^k\cdot\sigma_z\cdot i = P\cdot i = \mathrm{Id}$, откуда следует, что гомоморфизм σ_z^k обратим слева. Поэтому A-модуль $M_n(\sigma, k)$ является прямым слагаемым A-модуля $(A\langle z\rangle)^n$.

Для того чтобы показать, что $M_n(\sigma, k)$ конечно-порожден и проективен, рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & (A\langle z\rangle)^n \arrow[r, "\sigma_z^k"] & (A\langle z\rangle)^n \arrow[r] & M_n(\sigma,k) \arrow[l, bend right, dotted] \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & (A\langle z\rangle)^n \arrow[r, "z^{2k}"] \arrow[u, "\tau_z^k\cdot\eta_k"] & (A\langle z\rangle)^n \arrow[r] \arrow[u, equal] & (A^n)^{2k} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \end{tikzcd}$$

где $\eta_k = (1+\varepsilon_k(z))^{-1}$. Из этой диаграммы следует, что гомоморфизм $(A^n)^{2k} \to M_n(\sigma, k)$ сюръективен и расщепляется. Поэтому модуль $M_n(\sigma, k)$ конечно-порожден и проективен.

Наконец, если $l \geqslant 0$, то последовательность A-модулей и гомоморфизмов

$$(A\langle z\rangle)^n \xrightarrow{\sigma_z^k} (A\langle z\rangle^n \xrightarrow{z^l} (A\langle z\rangle)^n$$

индуцирует точную последовательность

$$0 \to \mathrm{Coker}(\sigma_z^k) \to \mathrm{Coker}(\sigma_z^{k+l}) \to \mathrm{Coker}(z^l) \to 0,$$

т. е. точную последовательность

$$0 \to M_n(\sigma, k) \to M_n(\sigma, k+l) \to A^{nl} \to 0.$$

Следовательно, $M_n(\sigma, k+l) \approx M_n(\sigma, k) \oplus A^{nl}$. $\square$

1.19. Используя лемму 1.18, определим теперь гомоморфизм γ': $\pi_1^L(\mathrm{Gl}(A)) \to K(A)$. Пусть σ: $S^1 \to \mathrm{GL}(A)$ — лорановская петля и k, n — такие целые числа, что $z^k\sigma_z \in \mathrm{M}_n(A\langle z\rangle)$ и элемент $1+\varepsilon_k(z)$ обратим в $\mathrm{M}_n(A\langle z\rangle)$. Положим $\gamma'(\sigma) = [M_n(\sigma, k)] - [A^{nk}] \in K(A)$. Так как $M_{n+1}(\sigma, k) = M_n(\sigma, k) \oplus A^k$, то $\gamma'(\sigma)$ не зависит от выбора n. Кроме того, поскольку $1+\varepsilon_k(z)$ обратим и $z^k\sigma_k \in \mathrm{M}_n(A\langle z\rangle)$, то элемент $\gamma'(\sigma)$ не зависит от выбора k: в силу последней части леммы 1.18, $[M_n(\sigma, k+1)] - [A^{n(k+1)}] = [M_n(\sigma, k)] - [A^{nk}]$.

Рассмотрим теперь две гомотопные лорановские петли σ_0 и σ_1 в $\mathrm{GL}_n(A)$. Тогда существует такая лорановская петля σ: $S^1 \to \mathrm{CL}_n A(I))$, что $\sigma(z)(0) = \sigma_0(z)$ и $\sigma(z)(1) = \sigma_1(z)$. Если k достаточно велико, то модуль $M_n(\sigma, k)$ является конечно-порожденным проективным модулем над $A(I)$, ограничения которого на $\{0\}$ и $\{1\}$ суть $M_n(\sigma_0, k)$ и $M_n(\sigma_1, k)$ соответственно. Применяя предложение 1.15, мы видим, что модули $M_n(\sigma_0, k)$ и $M_n(\sigma_1, k)$ изоморфны. Следовательно, соответствие $\sigma \mapsto [M_n(\sigma, k)] - [A^{nk}]$ индуцирует корректно определенное отображение γ' из $\pi_1^L(\mathrm{CL}(A)) \approx \pi_1(\mathrm{GL}(A))$ в $K(A)$.

Наконец, сравним модули $M_n(\sigma, k)$, $M_n(\sigma', k')$ и $M_n(\sigma'\sigma, k+k')$ для достаточно больших k и k'. Так как $(\sigma'\sigma)_z^{k+k'} = \sigma_z'^{k'}\cdot\sigma_z^k$, то точная последовательность коядер

$$0 \to \operatorname{Coker}(\sigma_z^k) \to \operatorname{Coker}(\sigma_z'^{k'}\sigma_z^k) \to \operatorname{Coker}(\sigma_z'^{k'}) \to 0$$

может быть записана в виде

$$0 \to M_n(\sigma, k) \to M_n(\sigma'\sigma, k+k') \to M_n(\sigma', k') \to 0.$$

Отсюда следует, что $M_n(\sigma'\sigma, k+k') \approx M_n(\sigma, k) + M_n(\sigma', k')$. Так как

$$[M_n(\sigma, k+k')] - [A^{n(k+k')}] = [M_n(\sigma, k)] - [A^{nk}] + [M_n(\sigma', k')] - [A^{nk'}],$$

то отображение γ' является гомоморфизмом.

1.20. Теорема. *Гомоморфизм*

$$\gamma'\colon \pi_1^L(\mathrm{GL}(A) \approx \pi_1(\mathrm{GL})(A)) \to K(A)$$

является левым обратным к гомоморфизму

$$\gamma\colon K(A) \to \pi_1(\mathrm{GL}(A)),$$

определенному в 1.9 и 1.10. В частности, гомоморфизм γ инъективен.

Доказательство. Для любого банахова пространства E мы можем определить банахово пространство $E\langle z\rangle$ как пространство формальных степенных рядов $\sum_{n=0}^{\infty} e_n z^n$, где $e_n \in E$ и $\sum_{n=0}^{\infty} \|e_n\| < +\infty$. Если E является A-модулем, то $E\langle z\rangle$ также наделяется структурой A-модуля. В частности, $(A\langle z\rangle)^n \approx A^n\langle z\rangle$. Пусть теперь E — проективный A-модуль и E' — дополнительный модуль, такой что $E \oplus E' = A^n$. Пусть p — проектор в A^n, ассоциированный с этим разложением. Согласно 1.9, элемент из $\pi_1(\mathrm{GL}(A))$, ассоциированный с E, — это класс эквивалентности петли σ из $\mathrm{GL}_n(A)$, заданной формулой $\sigma_z = pz + 1 - p$. Следовательно, записав $A^n\langle z\rangle$ в виде $E\langle z\rangle \oplus E'\langle z\rangle$, мы получим точную последовательность

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & (A\langle z\rangle)^n & \xrightarrow{pz+1-p} & (A\langle z\rangle)^n & \to & E & \to 0 \\ & \wr\wr & & \wr\wr & & & \\ & A^n\langle z\rangle & & A^n\langle z\rangle. & & & \end{array}$$

(заметим, что гомоморфизм $pz + 1 - p$ является умножением на z на слагаемом $E\langle z\rangle$ и тождественным гомоморфизмом на слагаемом $E'\langle z\rangle$).

Так как γ' — гомоморфизм, мы имеем окончательно $(\gamma'\gamma)([E]-[F]) = (\gamma'\gamma)([E]) - (\gamma'\gamma)([F]) = [E] - [F]$. Следовательно, $\gamma'\gamma = \mathrm{Id}_{K(A)}$. □

Следуя плану, намеченному в 1.11, мы должны еще доказать, что гомоморфизм γ сюръективен. Этому будут посвящены следующие четыре леммы.

1.21. Лемма. *Каждый элемент группы $\pi_1^L(\mathrm{GL}(A))$ может быть представлен в виде $[\sigma_1] - [\sigma_2]$, где σ_1 и σ_2 — полиномиальные петли (1.12).*

Доказательство. В этой и следующих леммах через $[\sigma]$ будет обозначаться класс петли σ в группе $\pi_1^L(\mathrm{GL}_n(A))$. Для любого класса

$[\sigma]$ имеем $[z^k\sigma]=[z^k]+[\sigma]$; или $[\sigma]=[z^k\sigma]-[z^k]$. Утверждение леммы получается, если положить $\sigma_1=[z^k\sigma]$ и $\sigma_2=[z^k]$, где число k выбрано настолько большим, чтобы гарантировать $z^k\sigma\in M_n(A[z])$. □

1.22. Лемма. *Пусть $[\sigma]$—элемент группы $\pi_1^L(\mathrm{GL}(A))$, где σ—полиномиальная петля. Тогда в классе $[\sigma]$ имеется аффинная петля.*

Доказательство. В группе $\mathrm{GL}_n(A\langle z\rangle)$ петля σ записывается в виде $\sigma(z)=a_0+a_1z+\ldots+a_kz^k$, где $k>1$. Тогда

$$\sigma(t, z)=\begin{pmatrix}1 & -tz^{k-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma(z) & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ ta_kz & 1\end{pmatrix}$$

определяет непрерывное отображение из $I\times S^1$ в $\mathrm{GL}_{2n}(A)$, которое связывает $\sigma(z)$ с петлей степени $\leqslant k-1$. Мы „нормализуем" эту гомотопию, полагая $\bar\sigma(t, z)=\sigma(t, z)\,\sigma(t, 1)^{-1}$. Тогда $\bar\sigma(t, 1)=1$, $\bar\sigma(0, z)=\sigma(z)$ и $\bar\sigma(1, z)$—лорановская петля степени $\leqslant k-1$. Применяя теперь индукцию по k, получаем утверждение леммы. □

1.23. Лемма. *Пусть $\sigma(z)=a_0+a_1z$—аффинная петля в $\mathrm{GL}_n(A)$ и $\tau(z)=\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}b_kz^k\in\mathrm{GL}_n(A\langle z, z^{-1}\rangle)$—обратная петля. Тогда имеют место следующие соотношения:*

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(i)} & b_ia_0b_j=0,\\ \text{(ii)} & b_ia_1b_j=0,\\ \text{(iii)} & b_ib_j=b_jb_i=0,\end{array}\right\}\ \textit{если}\ \left\{\begin{array}{l}i<0\ \textit{и}\ j\geqslant 0\\ \textit{или}\\ i\geqslant 0\ \textit{и}\ j<0,\end{array}\right.$$

$$\begin{array}{ll}\text{(iv)} & b_ib_j=b_jb_i,\\ \text{(v)} & a_0b_i=b_ia_0,\\ \text{(v}'\text{)} & a_1b_i=b_ia_1.\end{array}$$

Доказательство. Так как τ—дифференцируемая функция класса C^∞, то ее ряд Фурье абсолютно сходится. Таким образом, мы сразу получаем соотношения

$$a_0b_0+a_1b_{-1}=b_0a_0+b_{-1}a_1=1,$$
$$a_0b_i+a_1b_{i-1}=b_ia_0+b_{i-1}a_1=0 \text{ для } i\neq 0.$$

Проверим теперь другие соотношения.

(i) Если $i<0$ и $j\geqslant 0$, то $b_ia_0b_j=-b_{i-1}a_1b_j=b_{i-1}a_0b_{j+1}=\ldots$ $\ldots=b_{i-r}a_0b_{j+r}$. При $r\to\infty$ последнее выражение стремится к нулю. Поэтому $b_ia_0b_j=0$. Аналогично если $i\geqslant 0$ и $j<0$, то $b_ia_0b_j=-b_ia_1b_{j-1}$ $=b_{i+1}a_0b_{j-1}=\ldots=b_{i+r}a_0b_{j-r}=0$.

(ii) Для $i<0$ и $j\geqslant 0$ мы имеем $b_ia_1b_j=b_ia_0b_{j+1}=0$, в силу (*i*). Для $i\geqslant 0$ и $j<0$ имеем $b_ia_1b_j=b_{i+1}a_0b_j=0$, в силу (i).

(iii) Так как $a_0+a_1=1$, то при тех же самых значениях пар (i, j) имеем $b_ib_j=b_i(a_0+a_1)b_j=b_ia_0b_j+b_ia_1b_j=0$.

(iv) Согласно (iii), достаточно рассмотреть случай, когда i и j не равны 0 и имеют один и тот же знак. Если, например, $0<i<j$,

то мы имеем

$$b_i a_0 b_j = -b_i a_1 b_{j-1} = b_{i+1} a_0 b_{j-1} = \ldots = b_j a_0 b_i,$$
$$b_i a_1 b_j = -b_{i+1} a_0 b_j = b_{i+1} a_1 b_{j+1} = \ldots = b_j a_1 b_i.$$

Складывая эти два соотношения, находим $b_i b_j = b_j b_i$. Для $i < j < 0$ соотношение $b_i b_j = b_j b_i$ получается аналогичным образом.

(v) Для $i \leqslant 0$ имеем $a_0 b_i - b_i a_0 = -a_1 b_{i-1} + b_{i-1} a_1 = a_0 b_{i-1} - b_{i-1} - b_{i-1} a_0$, так как $a_0 + a_1 = 1$. Следовательно, $a_0 b_i - b_i a_0 = a_0 b_{i-r} - b_{i-r} a_0 = 0$. Аналогично если $i > 0$, то $a_0 b_i - b_i a_0 = -a_1 b_i + b_i a_1 = a_0 b_{i+1} - b_{i+1} a_0 = a_0 b_{i+r} - b_{i+r} a_0 = 0$.

(v′) В силу (v) мы имеем $a_1 b_i - b_i a_1 = -a_0 b_i + b_i a_0 = 0$. □

1.24. Лемма. *В обозначениях леммы* 1.23 *морфизм* $q = a_0 b_0$ *является проектором и петля* σ *может быть представлена в виде*

$$\sigma(z) = \sigma^+(z)\, \sigma^-(z^{-1})\,(pz + q),$$

где $p = 1 - q$, $\sigma^+(z) \in \mathrm{GL}_n(A\langle z\rangle)$ *и* $\sigma^-(z^{-1}) \in \mathrm{GL}_n(A\langle z^{-1}\rangle)$.

Доказательство. Согласно 1.23, (ii), имеем $q^2 = a_0 b_0 a_0 b_0 = a_0 b_0 (1 - a_1 b_{-1}) = a_0 b_0 - a_0 (b_0 a_1 b_{-1}) = a_0 b_0$. Положим $\sigma^+(z) = p + \sigma(z) q$ и $\sigma^-(z^{-1}) = q + \sigma(z) p z^{-1}$. Тогда $\sigma^+(z)$ (соотв. $\sigma^-(z^{-1})$) является аффинной функцией от z (соотв. z^{-1}) и

$$\sigma^+(z)\, \sigma^{-1}(z^{-1})\,(pz + q) = (p + \sigma(z) q)(q + \sigma(z) p z^{-1})(pz + q)$$
$$= (\sigma(z) q + \sigma(z) p z^{-1})(q + pz) = \sigma(z) q + \sigma(z) p = \sigma(z).$$

Кроме того, элемент $p + \sigma(z) q$ (соотв. $q + \sigma(z) p z^{-1}$) обратим в банаховой алгебре $\mathrm{M}_n(A\langle z\rangle)$ (соотв. $\mathrm{M}_n(A\langle z^{-1}\rangle)$). Обратным к нему является элемент $p + \tau(z) q$ (соотв. $q + \tau(z) p z^{-1}$, так как, в силу леммы 1.23, $p + \tau(z) q$ (соотв. $q + \tau(z) p z^{-1}$) содержит только положительные степени z (соотв. только отрицательные степени z). □

1.25. Теорема. *Гомоморфизм*

$$\gamma\colon K(A) \to \pi_1(\mathrm{GL}(A))$$

сюръективен.

Доказательство. На основании леммы 1.22 достаточно доказать, что класс аффинной петли $\sigma(z) = a_0 + a_1 z$ лежит в образе гомоморфизма γ. Согласно 1.24, петля $\sigma(z)$ может быть представлена в виде $\sigma^+(z)\, \sigma^-(z^{-1})\,(pz + q)$. Пусть $\theta\colon I \times S^1 \to \mathrm{GL}(A)$ — непрерывное отображение, определенное формулой $\theta(t, z) = \sigma^+(zt)\, \sigma^-(z^{-1} t)\,(pz + q)$, и пусть $\theta_1\colon I \times S^1 \to \mathrm{GL}(A)$ — „нормализованная" гомотопия, определенная формулой $\theta_1(t, z) = \theta(t, z)\, \theta(t, 1)^{-1}$. Тогда θ_1 определяет гомотопию между петлей $\sigma(z)$ и петлей $\sigma_0(z) = pz + q$, класс которой в $\pi_1(\mathrm{GL}(A))$ равен $\gamma([\mathrm{Im}\, p])$. □

1.26. Замечание. Собирая вместе предложение 1.10 и теоремы 1.20 и 1.25, мы получаем доказательство теоремы 1.4 и, следовательно, теоремы 1.3. Другие варианты доказательства можно найти в ссылках в конце главы. Стоит отметить, что основные идеи этого „элементарного" доказательства содержатся в работе Атьи и Ботта [1].

1.27. Замечание. Вычисления, выполненные в 1.24, позволяют получить более полную информацию о соотношениях между a_0 и проекторами p и q. Элемент $t\sigma(z)+(1-t)(q+pz)=[ta_0+(1-t)q]+[ta_1+(1-t)p]z$ принадлежит $\mathrm{GL}_n(A\langle z, z^{-1}\rangle)$ для $t\in[0, 1]$. В частности, спектр элемента $ta_0+(1-t)a_1b_{-1}$ не пересекает оси $\mathcal{R}(z)=1/2$ (напомним, что *спектром* элемента α комплексной банаховой алгебры называется множество таких $\lambda\in\mathbb{C}$, что элемент $\alpha-\lambda$ необратим). Для доказательства заметим, что элемент $ta_0+(1-t)a_1b_{-1}$ является произведением

$$[p+a_0q+a_1q(tz+1-t)][q+a_1p+a_0p(tz^{-1}+1-t)]\cdot(p+qz),$$

или, эквивалентно,

$$\sigma^+(tz+1-t)\,\sigma^-(tz^{-1}+1-t)\,(q+pz).$$

Элемент $\sigma^+(tz+1-t)$ (соотв. $\sigma^-(tz^{-1}+1-t)$) принадлежит $\mathrm{GL}(A\langle z\rangle)$ (соотв. $\mathrm{GL}(A\langle z^{-1}\rangle)$) для $t\in[0, 1]$, поскольку его обратный получается подстановкой $z\mapsto tz+1-t$ (соотв. $z^{-1}\mapsto tz^{-1}+1-t$) в выражение $p+\beta(z)q$ (соотв. $q+\beta(z)pz^{-1}$), которое содержит только положительные (соотв. отрицательные) степени z. Заметим, что соответствующие ряды сходятся, так как они задают обращения для дифференцируемых функций $z\mapsto\sigma^+(tz+1-t)$ и $z^{-1}\mapsto\sigma^-(tz^{-1}+1-t)$.

Это замечание будет использовано в конце 6.20. Положим

$$g=\frac{2\alpha-1}{i},\ \text{где}\ \alpha=ta_0+(1-t)a_1b_{-1}.$$

Тогда спектр g не пересекает вещественной оси, т. е. $g-\lambda$ обратим для любого вещественного числа λ.

Упражнения: 1—3, 7, 11, 12.

2. Первые приложения теоремы периодичности Ботта в комплексной K-теории

Так как $K_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2)\approx K_{\mathbb{C}}(B^2, S^1)$, то теорема 1.3 может быть переформулирована следующим образом.

2.1. Теорема. *Пусть X-локально-компактное пространство. Тогда $\cup$-произведение с образующей и группы $K_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2)$ определяет изоморфизм $K_{\mathbb{C}}(X)\approx K_{\mathbb{C}}(X\times\mathbb{R}^2)$.*

2.2. Следствие. *Пусть u — образующая группы $\tilde{K}_{\mathbb{C}}(S^2)=K_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2)$. Тогда $\tilde{K}_{\mathbb{C}}(S^n)=0$ для нечетного n и $\tilde{K}_{\mathbb{C}}(S^{2p})\approx\mathbf{Z}$ с образующей u^p.*

2.3. Теорема. *Пусть* $\mathrm{GL}(\mathbb{C})=\operatorname{inj\,lim}\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *и* $\mathrm{U}=\operatorname{inj\,lim}\mathrm{U}(n)$. *Тогда вложение* U *в* $\mathrm{GL}(\mathbb{C})$ *индуцирует изоморфизм гомотопических групп, причем эти гомотопические группы периодичны с периодом 2. Более точно,* $\pi_i(\mathrm{U})\approx\pi_i(\mathrm{GL}(\mathbb{C}))=0$ *для четного i и* $\pi_i(\mathrm{U})\approx\pi_i(\mathrm{GL}(\mathbb{C}))\approx\mathbf{Z}$ *для нечетного i.*

Доказательство. Хорошо известно, что вложение $U(n)$ в $GL_n(\mathbb{C})$ является гомотопической эквивалентностью (Шевалле [1]). Следовательно, $\pi_i(U(n)) \approx \pi_i(GL_n(\mathbb{C}))$ и $\pi_i(U) \approx \pi_i(GL(\mathbb{C}))$. Поскольку $K^{-i}(P) \approx K(\mathbb{R}^i) \approx \tilde{K}(S^i) \approx \pi_{i-1}(GL(\mathbb{C}))$ (II.1.34), то теорема следует из 1.3. □

2.4. *Следствие.* *Для $n > i/2$ имеют место изоморфизмы*

$$\pi_i(U(n)) \approx \pi_i(GL_n(\mathbb{C})) \approx \mathbb{Z}, \text{ если } i \text{ нечетно},$$
$$\pi_i(U(n)) \approx \pi_i(GL_n(\mathbb{C})) = 0, \text{ если } i \text{ четно}.$$

Кроме того, если i нечетно и $n > (i-1)/2$, то естественное отображение $\pi_i(U(n-1)) \to \pi_i(U) \approx \mathbb{Z}$ сюръективно.

Доказательство. Рассмотрим локально-тривиальное расслоение

$$U(n) \to U(n+1) \to S^{2n+1}.$$

Точная последовательность гомотопических групп, ассоциированная с этим расслоением, может быть записана в виде

$$\pi_{i+1}(S^{2n+1}) \to \pi_i(U(n)) \to \pi_i(U(n+1)) \to \pi_i(S^{2n+1}).$$

Если $n > i/2$, то оба крайних члена этой последовательности равны нулю. Поэтому $\pi_i(U(n)) \approx \pi_i(U(n+1)) \approx \pi_i(U)$. Если же $n > (i-1)/2$, то последний член последовательности равен нулю и, значит, гомоморфизм $\pi_i(U(n)) \to \pi_i(U(n+1)) \approx \pi_i(U)$ сюръективен. □

2.5. *Замечание.* Позже мы докажем (5.22), что изоморфизм $\pi_i(U) \approx \pi_{i+2}(U)$ индуцирован слабой гомотопической эквивалентностью $U \sim \Omega^2(U)$, где $\Omega^2(U)$ — двукратное пространство петель на U.

2.6. Пусть E — комплексное векторное расслоение с компактной базой X. Обозначим через $\bar{E}$ расслоение, сопряженное с E (I.4.8, e)): слой $\bar{E}_x$ есть векторное пространство, сопряженное к E_x. Тривиально проверяется, что $\overline{E \oplus F} \approx \bar{E} \oplus \bar{F}$ и $\bar{\bar{E}} \approx E$. Следовательно, соответствие $E \mapsto \bar{E}$ индуцирует инволюцию на группе $K_{\mathbb{C}}(X)$, которую мы также обозначим через $x \mapsto \bar{x}$.

С другой стороны, операции овеществления и комплексификации расслоений индуцируют аддитивные функторы

$$r\colon \mathcal{E}_{\mathbb{C}}(X) \to \mathcal{E}_{\mathbb{R}}(X)$$

и

$$c\colon \mathcal{E}_{\mathbb{R}}(X) \to \mathcal{E}_{\mathbb{C}}(X)$$

соответственно. Первый функтор сопоставляет каждому комплексному векторному расслоению подстилающее его вещественное векторное расслоение. Второй функтор сопоставляет каждому вещественному векторному расслоению E комплексное расслоение $E \oplus_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = E \oplus E$, где умножение на i представляется матрицей

$$I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эти функторы индуцируют гомоморфизмы

$$K_{\mathbb{C}}(X) \to K_{\mathbb{R}}(X)$$

и

$$K_{\mathbb{R}}(X) \to K_{\mathbb{C}}(X),$$

которые мы также будем обозначать через r и c.

2.7. *Предложение.* *Композиции гомоморфизмов*

$$K_{\mathbb{R}}(X) \xrightarrow{c} K_{\mathbb{C}}(X) \xrightarrow{r} K_{\mathbb{R}}(X)$$

и

$$K_{\mathbb{C}}(X) \xrightarrow{r} K_{\mathbb{R}}(X) \xrightarrow{c} K_{\mathbb{C}}(X)$$

суть соответственно умножение на 2 *и гомоморфизм* $x \mapsto x + \bar{x}$.

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Для того чтобы доказать второе утверждение, достаточно показать, что для комплексного расслоения E две комплексные структуры на $E \oplus E$, задаваемые матрицами

$$I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad J = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

изоморфны. А этот факт является формальным следствием равенства $J = \alpha I \alpha^{-1}$, где $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$. □

2.8. *Замечание.* Если пространство X локально-компактно, то $K(X) \approx \operatorname{Ker}[K(\dot{X}) \to \mathbb{Z}]$. Следовательно, и в этом случае мы можем определить гомоморфизмы c: $K_{\mathbb{R}}(X) \to K_{\mathbb{C}}(X)$ и r: $K_{\mathbb{C}}(X) \to K_{\mathbb{R}}(X)$. Так же как и в компактном случае, выполняются равенства $(rc)(y) = 2y$ и $(cr)(x) = x + \bar{x}$. Аналогичные результаты имеют место и для относительной группы $K(X, Y) \approx K(X \setminus Y)$.

2.9. *Следствие.* *Обозначим через* $K_{\mathbb{C}}(X)^0$ *подгруппу группы* $K_{\mathbb{C}}(X)$, *состоящую из элементов, инвариантных относительно инволюции. Тогда гомоморфизм* c: $K_{\mathbb{R}}(X) \to K_{\mathbb{C}}(X)$ *индуцирует изоморфизм* $K_{\mathbb{R}}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} Z' \approx K_{\mathbb{C}}(X)^0 \otimes_{\mathbb{Z}} Z'$, *где* $Z' = \mathbb{Z}[1/2]$.

Доказательство. Очевидно, что $\operatorname{Im}(c) \subset K_{\mathbb{C}}(X)^0$. Если обозначить определенный таким образом гомоморфизм из $K_{\mathbb{R}}(X)$ в $K_{\mathbb{C}}(X)^0$ через c', а ограничение гомоморфизма r на $K_{\mathbb{C}}(X^0)$ через r', то $(r'c')(y) = 2y$ и $(c'r')(x) = x + \bar{x} = 2x$. Следовательно, r' и c' индуцируют изоморфизм $K_{\mathbb{R}}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} Z' \approx K_{\mathbb{C}}(X)^0 \otimes_{\mathbb{Z}} Z'$. □

Аналогично положим $K_{\mathbb{C}}(X)^1 = \{x \in K_{\mathbb{C}}(X) \mid \bar{x} = -x\}$. Тогда

$$K_{\mathbb{C}}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} Z' \approx (K_{\mathbb{C}}(X)^0 \otimes_{\mathbb{Z}} Z') \oplus (K_{\mathbb{C}}(X)^1 \otimes_{\mathbb{Z}} Z').$$

Кроме того, если X и Y — локально-компактные пространства, то $\cup$-произведение

$$K_{\mathbb{C}}(X) \times K_{\mathbb{C}}(Y) \to K_{\mathbb{C}}(X \times Y)$$

индуцирует билинейное отображение

$$K_{\mathbb{C}}(X)^i \otimes K_{\mathbb{C}}(Y)^j \to K_{\mathbb{C}}(X \times Y)^{i+j},$$

где индексы i и j рассматриваются как элементы $\mathbb{Z}/2$.

2.10. Предложение. *Имеют место изоморфизмы* $K_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2)^0 = 0$ *и* $K_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2)^1 = K_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2) \approx \mathbb{Z}$. *Кроме того,* $\cup$*-произведение с образующей* u *группы* $K_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2)$ *индуцирует изоморфизм*

$$\beta_i\colon K_{\mathbb{C}}(X)^i \to K_{\mathbb{C}}(X \times \mathbb{R}^2)^{i+1}.$$

Доказательство. Образующая u группы $K_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2) = K_{\mathbb{C}}(B^2, S^1)$ может быть представлена в виде $d(E, F, \alpha)$, где $E = F = B^2 \times \mathbb{C}$ и $\alpha(z, v) = (z, zv)$. Следовательно, $\bar{u} = d(\bar{E}, \bar{F}, \bar{\alpha})$, где $\bar{\alpha} = \alpha$ на подстилающих вещественных векторных расслоениях. Комплексное сопряжение позволяет нам отождествить расслоения $\bar{E}$ и $\bar{F}$ с $B^2 \times \mathbb{C}$ (где $\mathbb{C}$ снабжено стандартной комплексной структурой). При этом отождествлении $\bar{\alpha}$ переходит в α^{-1} (так как $\bar{z} = z^{-1}$ для $z \in S^1 \subset \mathbb{C}$). Следовательно, $\bar{u} = d(E, F, \alpha^{-1}) = -u$.

В общем случае мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} K_{\mathbb{C}}(X) & \xrightarrow{\beta} & K_{\mathbb{C}}(X \times \mathbb{R}^2) \\ \downarrow{\scriptstyle \varepsilon} & & \downarrow{\scriptstyle -\varepsilon} \\ K_{\mathbb{C}}(X) & \xrightarrow{\beta} & K_{\mathbb{C}}(X \times \mathbb{R}^2) \end{array}$$

где $\varepsilon(x) = \bar{x}$. Так как β — изоморфизм (2.1), то он индуцирует изоморфизм $\beta_i\colon K_{\mathbb{C}}(X)^i \approx K_{\mathbb{C}}(X \times \mathbb{R}^2)^{i+1}$. $\square$

2.11. Теорема. *Пусть* v — *образ элемента* $u \cup u$ *при гомомор-физме* $K_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^4) \to K_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)$. *Тогда для любого локально-компактного пространства* X $\cup$*-произведение с* v *индуцирует изоморфизм* $K_{\mathbb{R}}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}' \approx K_{\mathbb{R}}(X \times \mathbb{R}^4) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}'$, *где* $\mathbb{Z}' = \mathbb{Z}[1/2]$.

Доказательство. Согласно 2.9, группа $K_{\mathbb{R}}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}'$ может быть отождествлена с $K_{\mathbb{C}}(X)^0 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}'$ при помощи отображения c'. Рассмотрим теперь коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} K_{\mathbb{R}}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}' & \xrightarrow{\beta_{\mathbb{R}}} & K_{\mathbb{R}}(X \times \mathbb{R}^4) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}' \\ \downarrow{\scriptstyle c' \otimes 1} & & \downarrow{\scriptstyle c' \otimes 1} \\ K_{\mathbb{C}}(X)^0 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}' & \xrightarrow{2\beta_1\beta_0 \otimes 1} & K_{\mathbb{C}}(X \times \mathbb{R}^4)^0 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}' \end{array}$$

где $\beta_{\mathbb{R}}$ есть $\cup$-произведение с v, а $\beta_1\beta_0\otimes 1$ — композиция
$K_{\mathbb{C}}(X)^0\otimes_{\mathbb{Z}}Z' \xrightarrow{\beta_0\otimes 1} K_{\mathbb{C}}(X\times\mathbb{R}^2)^1\otimes_{\mathbb{Z}}Z' \xrightarrow{\beta_1\otimes 1} K_{\mathbb{C}}(X\times\mathbb{R}^4)^0\otimes_{\mathbb{Z}} Z'$ (2.10), т. е. гомоморфизм, индуцированный $\cup$-произведением с u^2 (заметим, что $c(v)=2u^2$). Так как $\beta_1\beta_0$ — изоморфизм в силу 2.10, а $c'\otimes 1$ — изоморфизм в силу 2.9, то $\beta_{\mathbb{R}}$ также является изоморфизмом. □

2.12. *Следствие.* *$\cup$-произведение с элементом $v\in K_{\mathbb{R}}^{-4}(P)$ индуцирует изоморфизмы*

$$K_{\mathbb{R}}^{-n}(X, Y)\otimes_{\mathbb{Z}}Z' \approx K_{\mathbb{R}}^{-n-4}(X, Y)\otimes_{\mathbb{Z}}Z'.$$

Кроме того, имеют место естественные изоморфизмы

$$K_{\mathbb{C}}^{-n}(X, Y)\otimes_{\mathbb{Z}}Z' \approx [K_{\mathbb{R}}^{-n}(X, Y)\oplus K_{\mathbb{R}}^{-n-2}(X, Y)]\otimes_{\mathbb{Z}}Z'.$$

Доказательство. Первая часть следствия получается из предложения 2.10 совершенно так же, как теорема 1.3 из теоремы 1.4. По тем же самым соображениям вторую часть следствия достаточно доказать для $n=0$ и $Y=\varnothing$. В этом случае группа $K_{\mathbb{C}}(X)\otimes_{\mathbb{Z}}Z'$ может быть представлена в виде

$$K_{\mathbb{C}}(X)\otimes_{\mathbb{Z}}Z'=(K_{\mathbb{C}}(X)^0\otimes_{\mathbb{Z}}Z')\oplus(K_{\mathbb{C}}(X)^1\otimes_{\mathbb{Z}}Z')\approx(K_{\mathbb{C}}(X)^0\otimes_{\mathbb{Z}}Z')\oplus$$
$$\oplus(K_{\mathbb{C}}(X\times\mathbb{R}^2)^0\otimes_{\mathbb{Z}}Z')\approx(K_{\mathbb{R}}(X)\otimes_{\mathbb{Z}}Z')\oplus(K_{\mathbb{R}}(X\times\mathbb{R}^2)\otimes_{\mathbb{Z}}Z'). \quad \square$$

2.13. Из этих результатов о вещественных K-группах мы получаем информацию о бесконечной ортогональной группе $\mathrm{O}=\operatorname{inj\,lim}\mathrm{O}(n)$ и о бесконечной общей линейной группе $\mathrm{GL}(\mathbb{R})=\operatorname{inj\,lim}\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (ср. с 2.3). В частности, $\pi_i(\mathrm{O})\otimes_{\mathbb{Z}}Z'\approx\pi_{i+4}(\mathrm{O})\otimes_{\mathbb{Z}}Z'$. Однако мы оставим эту тему на некоторое время, поскольку в следующих параграфах будут получены более сильные результаты.

Упражнение: 6.

3. Алгебры Клиффорда

3.1. Алгебры Клиффорда возникают как решение следующей задачи. Пусть k — поле и V — векторное пространство над k, снабженное квадратичной формой Q. Пусть C — алгебра над k (не обязательно коммутативная) и $j\colon V\to C$ — такой гомоморфизм подстилающих векторных пространств, что $j(v)^2=Q(v)\cdot 1$ (1 — единица в алгебре C). Мы хотим найти пару (C, j), которая удовлетворяла бы следующему условию универсальности. Для любой k-алгебры A и произвольного гомоморфизма $\varphi\colon V\to A$ подстилающих векторных пространств, такого что $(\varphi(v))^2=Q(v)\cdot 1$, существует и единствен гомоморфизм алгебр ψ: $C \to A$, превращающий диаграмму

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "\varphi"'] & C \arrow[d, "\psi"] \\ & A \end{tikzcd}$$

в коммутативную.

3.2. Определение и теорема. *Сформулированная выше задача допускает решение (C, j), которое единственно с точностью до изоморфизма. Мы будем обозначать его через $C(V, Q)$ или же просто через $C(V)$ или $C(Q)$. Алгебра $C(V, Q)$ называется* **алгеброй Клиффорда**, *ассоциированной с парой (V, Q).*

Доказательство. Единственность очевидна, так как мы имеем дело с универсальной задачей. Докажем существование. С этой целью рассмотрим тензорную алгебру $T(V) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} T^i(V)$, где $T^0(V) = k$ и $T^i(V) = V \otimes \ldots \otimes V$ (i раз) для $i > 0$. Пусть $I(Q)$ — двусторонний идеал, порожденный элементами вида $t(v) = v \otimes v - Q(v) \cdot 1$, где $v \in V$ и 1 — единичный элемент алгебры $T(V)$. Каждый элемент из $I(Q)$ может быть записан в виде $\sum \lambda_i t(v_i) \mu_i$, где λ_i, $\mu_i \in T(V)$ и $v_i \in V$. Пусть $C(V) = T(V)/I(Q)$ и j: $V \to C(V)$ — композиция мономорфизма i: $V \xrightarrow{\approx} T^1(V) \subset T(V)$ и проекции p: $T(V) \to C(V)$. Тогда пара $(C(V), j)$ является решением нашей задачи. По универсальному свойству тензорных алгебр гомоморфизм φ: $V \to A$ может быть пропущен через $T(V)$, т. е. имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\varphi"'] & T(V) \arrow[d, "\theta"] \\ & A \end{tikzcd}$$

где θ — гомоморфизм алгебр. Так как $(\varphi(v))^2 = Q(v) \cdot 1$, то гомоморфизм θ равен нулю на идеале $I(Q)$ и поэтому определяет требуемый гомоморфизм ψ. Единственность гомоморфизма ψ следует из единственности гомоморфизма θ. $\square$

3.3. Пример. Предположим, что $Q = 0$. Тогда $C(V, Q)$ — это просто внешняя алгебра векторного пространства V (в силу универсального свойства внешних алгебр).

3.4. Пример. Пусть $V = k$ и Q — квадратичная форма, заданная равенством $Q(x) = dx^2$ для некоторого $d \in k$. Тогда $T(V) \approx k[X]$ и $I(Q) = (X^2 - d)k[X]$. Следовательно, $C(V) \approx k[X]/(X^2 - d)$. В частности, если $k = \mathbb{R}$ и $d = -1$ (соотв. $d = +1$), то $C(V, Q) = \mathbb{C}$ (соотв. $C(V, Q) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$).

3.5. Очевидно, что алгебра Клиффорда функториально зависит от пары (V, Q). Более точно, если f: $V \to V'$ — такой гомоморфизм

k-векторных пространств, что $Q'(f(v))=Q(v)$, где Q (соотв. Q') — квадратичная форма на V (соотв. на V'), то f индуцирует гомоморфизм алгебр

$$C(f)\colon C(V, Q)\to C(V', Q')$$

и имеют место тождества $C(g\cdot f)=C(g)\cdot C(f)$ и $C(\mathrm{Id}_V)=\mathrm{Id}_{C(V)}$.

3.6. Тензорную алгебру $T(V)$ можно рассматривать как $\mathbb{Z}/2$-градуированную алгебру, если положить

$$T^{(0)}(V)=\sum_{i=0}^{\infty}T^{2i}(V) \quad \text{и} \quad T^{(1)}(V)=\sum_{i=0}^{\infty}T^{2i+1}(V).$$

Полагая $I^{(\alpha)}(Q)=I(Q)\cap T^{(\alpha)}(V)$, мы имеем $I(Q)=I^{(0)}(Q)\oplus I^{(1)}(Q)$ (для доказательства нужно разложить элементы λ_i и μ_i, введенные в 3.2, в сумму однородных элементов). Определим $C^{(\alpha)}(V, Q)$ как $p(T^{(\alpha)}(V))$, где $p\colon T(V)\to C(V, Q)$ — каноническая проекция. Тогда $C(V, Q)=C^{(0)}(V, Q)\oplus C^{(1)}(V, Q)$. Следовательно, алгебра Клиффорда также $\mathbb{Z}/2$-градуирована. Мы будем обозначать однородные компоненты $C^{(\alpha)}(V, Q)$ просто через $C^{(\alpha)}(V)$ или $C^{(\alpha)}(Q)$. Разумеется, функториальность, описанная в 3.5, согласована с $\mathbb{Z}/2$-градуировкой.

3.7. *Пример.* $\mathbb{Z}/2$-градуировка алгебры Клиффорда, описанной в примере 3.3, задается четными и нечетными внешними степенями:

$$C^{(0)}(V)=\lambda^{(0)}(V)=\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^{2i}(V), \quad C^{(1)}(V)=\lambda^{(1)}(V)=\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^{2i+1}(V).$$

Аналогично в примере 3.4 алгебра $k[X]/(X^2-d)$ становится $\mathbb{Z}/2$-градуированной, если записать каждый элемент из $C(V)$ в виде $a+bX$ и положить, что a и b имеют степень 0 и X имеет степень 1. Например, в случае $k=\mathbb{R}$ и $d=-1$ алгебра комплексных чисел $\mathbb{C}$ $\mathbb{Z}/2$-градуируется таким образом: $\mathbb{C}^{(0)}=\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}^{(1)}=i\mathbb{R}$.

Следующая лемма показывает, как можно использовать $\mathbb{Z}/2$-градуировку алгебры $C(V, Q)$.

3.8. *Лемма.* *Пусть v и w — векторы из V, ортогональные относительно симметричной билинейной формы, ассоциированной с Q. Тогда $j(v)j(w)=-j(w)j(v)$. Следовательно, если $x=\prod_{i=1}^{n}j(v_i)$ и $y=\prod_{s=1}^{m}j(w_s)$ — элементы из $C^{(\alpha)}(V, Q)$ и $C^{(\beta)}(V, Q)$, где $\alpha=n \bmod 2$ и $\beta=m \bmod 2$, и если вектор v_i ортогонален вектору w_s для каждой пары индексов (i, s), то $xy=(-1)^{\alpha\beta}yx$.*

Доказательство. В предположениях леммы мы имеем

$$Q(v)+Q(w)=Q(v+w)=(j(v+w))^2=(j(v))^2+(j(w))^2$$
$$+j(v)j(w)+j(w)j(v)=Q(v)+Q(w)+j(v)j(w)+j(w)j(v).$$

Следовательно, $j(v)j(w)=-j(w)j(v)$. □

3.9. Если A и B суть $\mathbb{Z}/2$-градуированные алгебры, то их градуированное тензорное произведение $A \hat{\otimes} B$ определяется как алгебра, низлежащим k-векторным пространством которой служит $A \otimes_k B$ и умножение в которой задается формулой

$$(x \otimes y)(z \otimes t) = (-1)^{\alpha\beta} xz \otimes yt,$$

где $y \in B^\beta$ и $z \in A^\alpha$.

3.10. Теорема (Шевалле [2]). *Пусть V и V' — векторные пространства над полем k, снабженные квадратичными формами Q и Q'. Тогда алгебра Клиффорда $C(V \oplus V', Q \oplus Q')$ естественно изоморфна $C(V, Q) \hat{\otimes} C(V', Q')$.*

Доказательство. Мы докажем эту теорему, явно указав требуемый изоморфизм. Пусть $j: V \to C(V, Q)$ и $j': V' \to C(V', Q')$ — канонические отображения и

$$j'': V \oplus V' \to C(V, Q) \hat{\otimes} C(V', Q')$$

— отображение, задаваемое формулой $j''(v, v') = j(v) \otimes 1 + 1 \otimes j'(v')$. Тогда мы имеем $(j''(v, v'))^2 = [(j(v))^2 + (j'(v'))^2] \cdot 1 = [Q(v) + Q'(v')] \cdot 1$. Следовательно, по свойству универсальности алгебр Клиффорда, отображение j'' индуцирует гомоморфизм

$$\psi: C(V \oplus V', Q \oplus Q') \to C(V, Q) \hat{\otimes} C(V', Q').$$

Рассмотрим теперь гомоморфизмы

$$\gamma: C(V, Q) \to C(V \oplus V', Q \oplus Q'),$$
$$\gamma': C(V', Q') \to C(V \oplus V', Q \oplus Q'),$$

индуцированные вложениями V и V' в $V \oplus V'$ (см. 3.5). Так как подпространства V и V' ортогональны в $V \oplus V'$, то, в силу леммы 3.8, для $x \in C^{(\alpha)}(V, Q)$ и $x' \in C^{(\alpha')}(V', Q')$ имеет место равенство $\gamma(x)\gamma'(x') = (-1)^{\alpha\alpha'}\gamma'(x')\gamma(x)$. Следовательно, гомоморфизмы γ и γ' задают гомоморфизм

$$\theta: C(V, Q) \hat{\otimes} C(V', Q') \to C(V \oplus V', Q \oplus Q')$$

по формуле $\theta(x \otimes x') = \gamma(x) \cdot \gamma'(x')$.

a) $\theta\psi = \mathrm{Id}_{C(V \oplus V', Q \oplus Q')}$. Так как алгебра $C(V \oplus V', Q \oplus Q')$ порождена элементами вида $j''(v, v')$, то достаточно вычислить $(\theta\psi)(j''(v, v'))$. Проделав это, мы находим, что

$$(\theta\psi)(j''(v, v')) = \theta(j(v) \otimes 1 + 1 \otimes j'(v')) = \gamma(j(v))\gamma'(j'(v')) \\ = j''(v, 0) + j''(0, v') = j''(v, v').$$

b) $\psi\theta = \mathrm{Id}_{C(V, Q) \hat{\otimes} C(V', Q')}$. Точно также алгебра $C(V, Q) \hat{\otimes} C(V', Q')$ порождается элементами вида $j(v) \otimes 1$ или $1 \otimes j'(v')$. Но

$$(\psi\theta)(j(v) \otimes 1) = \psi(\gamma(j(v))) = j(v) \otimes 1,$$
$$(\psi\theta)(1 \otimes j'(v')) = \psi(\gamma'(j'(v'))) = 1 \otimes j'(v'). \quad \square$$

3.11. Следствие. *Предположим, что в пространстве V выбран ортогональный базис e_i, $i=1, \ldots, n$, такой что $Q(e_i)=d_i$. Тогда алгебра Клиффорда $C(V, Q)$ имеет размерность 2^n над полем k, причем произведения $e_{i_1}e_{i_2} \ldots e_{i_r}$, $i_1<i_2<\ldots<i_r$, образуют ее аддитивный базис. Закон умножения в алгебре $C(V, Q)$ полностью определяется соотношениями*

$$(e_i)^2=d_i, \quad e_ie_j=-e_je_i \text{ для } i\neq j.$$

Доказательство. Векторное пространство V разлагается в ортогональную сумму $\bigoplus\limits_{i=1}^{n} ke_i$. Следовательно, применяя $n-1$ раз 3.4 и 3.10, получаем, что $C(V, Q)\approx(k\oplus ke_1)\hat{\otimes}(k\oplus ke_2)\hat{\otimes}\ldots\hat{\otimes}(k\oplus ke_n)$. Поэтому произведения $e_{i_1}e_{i_2}\ldots e_{i_r}$ образуют аддитивный базис алгебры $C(V, Q)$. Соотношения $e_ie_j=-e_je_i$ для $i\neq j$ следуют из леммы 3.8. □

3.12. Замечание. Рассуждения, приведенные выше, показывают, что отображение $j\colon V\to C(V, Q)$ инъективно. Таким образом, мы можем отождествить e_i и $j(e_i)$. Условие следствия 3.11 выполняется для любого поля k, характеристика которого не равна двум; следовательно, для всех таких полей отображение $V\to C(V, Q)$ инъективно. Можно показать (другим способом), что j инъективно для любого поля k (Бурбаки [2]), однако это нам не понадобится.

3.13. Мы главным образом будем интересоваться случаем, когда k — поле вещественных чисел, а V — векторное пространство $\mathbb{R}^{p+q}$, снабженное квадратичной формой $-x_1^2-\ldots-x_p^2+\ldots+x_{p+q}^2$. В этом случае мы будем обозначать алгебру Клиффорда через $C^{p,q}$. Согласно 3.11, алгебра $C^{p,q}$ порождается над $\mathbb{R}$ символами $e_1, e_2, \ldots, e_{p+q}$, удовлетворяющими соотношениям

$$\begin{aligned}
&(e_i)^2=-1, && 1\leqslant i\leqslant p,\\
&(e_i)^2=+1, && p+1\leqslant i\leqslant p+q,\\
&e_ie_j=-e_je_i, && i\neq j.
\end{aligned}$$

Основной целью этого параграфа является явное вычисление алгебр $C^{p,q}$ (см. 3.19, 3.21, 3.22).

3.14. Примеры. Мы уже вычислили алгебры $C^{1,0}\approx\mathbb{C}$ и $C^{0,1}\approx\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$ (3.4). Алгебра $C^{2,0}$ изоморфна телу кватернионов $\mathbb{H}$; для доказательства достаточно положить $I=e_1$, $J=e_2$, $K=e_1e_2$. Кроме того, полагая

$$e_1=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}, \quad e_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},$$

нетрудно убедиться, что $C^{1,1}\approx M_2(\mathbb{R})$ (кольцо матриц размера 2×2 с коэффициентами в $\mathbb{R}$). Аналогично, полагая

$$e_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}, \quad e_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},$$

мы получаем, что $C^{0,2}\approx M_2(\mathbb{R})$.

С другой стороны, $C^{0,2}$ и $C^{1,1}$ *не* изоморфны как *градуированные* алгебры. Действительно, квадрат любого элемента первой степени принадлежит центру алгебры $C^{0,2}$, но, вообще говоря, не принадлежит центру алгебры $C^{1,1}$.

3.15. Рассмотрим в алгебре Клиффорда $C^{p,q}$, где $n=p+q$ — четное число, элемент $\varepsilon=e_1e_2\ldots e_n$. Тогда

$$(\varepsilon)^2=(-1)^{(n-1)+(n-2)+\ldots+1}(e_1)^2(e_2)^2\ldots(e_n)^2=\pm 1.$$

Если $(\varepsilon)^2=1$, алгебра $C^{p,q}$ называется *положительной*. Если $(\varepsilon)^2=-1$, алгебра $C^{p,q}$ называется *отрицательной*. Мы имеем $(\varepsilon)^2=(-1)^{n(n-1)/2}(-1)^p$. Следовательно, если $p-q\equiv 0$, $4 \bmod 8$, то алгебра $C^{p,q}$ положительна, если $p-q\equiv 2,6 \bmod 8$, то алгебра $C^{p,q}$ отрицательна (в случае когда $p-q$ нечетно, алгебра $C^{p,q}$ не имеет знака). Далее, если V — конечномерное вещественное векторное пространство, снабженное невырожденной квадратичной формой, то выбор подходящего ортогонального базиса определяет изоморфизм $C(V, Q)\approx C^{p,q}$, где p и q однозначно определены в силу теоремы Сильвестра. Следовательно, положительность или отрицательность алгебры Клиффорда, ассоциированной с конечномерным вещественным векторным пространством с невырожденной квадратичной формой, является внутренним понятием.

За исключением п. 3.23, мы будем рассматривать только невырожденные квадратичные формы на вещественных векторных пространствах конечной размерности.

3.16. Предложение. (i) *Если* $C(V, Q)>0$ *и размерность* $\dim(V)$ *четна, то*

$$C(V\oplus V', Q\oplus Q')\approx C(V, Q)\otimes C(V', Q').$$

(ii) *Если* $C(V, Q)<0$ *и размерность* $\dim(V)$ *четна, то*

$$C(V\oplus V', Q\oplus Q')\approx C(V, Q)\otimes C(V', -Q').$$

Доказательство. Если $\varepsilon=e_1e_2\ldots e_n$, то мы имеем $\varepsilon e_i=(-1)^{n-1}e_i\varepsilon$. Так как n четно, то $\varepsilon e_i=-e_i\varepsilon$ для каждого i и, следовательно, $\varepsilon v=-v\varepsilon$ для каждого вектора v из V (мы отождествляем V с соответствующим подпространством алгебры $C(V)$ посредством канонического отображения j). В случае (i) зададим отображение

$$\varphi\colon V\oplus V'\to C(V, Q)\otimes C(V', Q)$$

формулой $\varphi(v, v')=v\otimes 1+\varepsilon\otimes v'$. Тогда

$$\begin{aligned}(\varphi(v, v'))^2&=(v\otimes 1)^2+(\varepsilon\otimes v)^2+(v\otimes 1)(\varepsilon\otimes v')+(\varepsilon\otimes v')(v\otimes 1)\\&=v^2\otimes 1+\varepsilon^2\otimes v'^2+v\varepsilon\otimes v'+\varepsilon v\otimes v'=Q(v)+Q'(v').\end{aligned}$$

Согласно универсальному свойству алгебр Клиффорда, мы получаем гомоморфизм алгебр

$$\psi\colon C(V\oplus V', Q\oplus Q')\to C(V, Q)\otimes C(V', Q'),$$

являющийся продолжением отображения φ. Поскольку алгебры $C(V\oplus V', Q\oplus Q')$ и $C(V, Q)\otimes C(V', Q')$ имеют одинаковую размерность, то для доказательства изоморфизма достаточно убедиться, что ψ—эпиморфизм. Так как алгебра $C(V, Q)\otimes C(V', Q')$ порождена элементами вида $v\otimes 1$ или $1\otimes v'$, то достаточно показать, что $1\otimes v'$ и $v\otimes 1\in \operatorname{Im}(\psi)$. Но $v\otimes 1=\psi(v, 0)$ и $1\otimes v'=(\varepsilon\otimes v')(\varepsilon\otimes 1) = \psi(0, v')\psi(\varepsilon, 0)$.

В случае (ii) нужно рассмотреть отображение

$$\varphi\colon V\oplus V' \to C(V, Q)\otimes C(V', -Q').$$

Далее всё аналогично. □

3.17. Лемма. *Пусть A—алгебра над полем k. Тогда имеют место изоморфизмы алгебр*

(i) $A\otimes_k \mathrm{M}_n(k)\approx \mathrm{M}_n(A)$,
(ii) $\mathrm{M}_p(\mathrm{M}_n(A))\approx \mathrm{M}_{np}(A)$,
(iii) $\mathrm{M}_n(A)\otimes_k \mathrm{M}_p(k)\approx \mathrm{M}_{np}(A)$.

Доказательство. Для доказательства (i) рассмотрим k-билинейное отображение $\gamma\colon A\times \mathrm{M}_n(k)\to \mathrm{M}_n(A)$, задаваемое формулой

$$\left[a, \begin{pmatrix} \lambda_{11}\dots\lambda_{1n} \\ \dots \\ \lambda_{n1}\dots\lambda_{nn}\end{pmatrix}\right] \mapsto \begin{pmatrix} a\lambda_{11}\dots a\lambda_{1n} \\ \dots \\ a\lambda_{n1}\dots a\lambda_{nn}\end{pmatrix}.$$

Отображение γ индуцирует гомоморфизм алгебр $\bar\gamma\colon A\otimes_k \mathrm{M}_n(k)\to \mathrm{M}_n(A)$. Так как $A\otimes_k k^{n^2}\approx A^{n^2}$, то $\bar\gamma$—изоморфизм.

Изоморфизм $\mathrm{M}_p(\mathrm{M}_n(A))\approx \mathrm{M}_{np}(A)$ очевиден. Наконец, $\mathrm{M}_n(A)\otimes_k \mathrm{M}_p(k)\approx \mathrm{M}_p(\mathrm{M}_n(A))\approx \mathrm{M}_{np}(A)$. □

3.18. Предложение. *Алгебры $C^{p+n,\,q+n}$ и $\mathrm{M}_{2^n}(C^{p,\,q})$ изоморфны.*

Доказательство. Так как алгебра $C^{1,\,1}$ положительна, то, согласно 3.16 и 3.14, мы имеем $C^{p+1,\,q+1}\approx C^{p,\,q}\otimes C^{1,\,1}\approx C^{p,\,q}\otimes \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. Следовательно, в силу 3.17,

$$C^{p+n,\,q+n}\approx C^{p,\,q}\otimes\underbrace{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})\otimes\dots\otimes \mathrm{M}_2(\mathbb{R})}_{n}\approx C^{p,\,q}\otimes \mathrm{M}_{2^n}(\mathbb{R})$$
$$\approx \mathrm{M}_{2^n}(C^{p,\,q}).\ \square$$

3.19. Следствие. *Имеют место следующие изоморфизмы алгебр:*

$C^{n,\,n}\approx \mathrm{M}_{2^n}(\mathbb{R})$,
$C^{p,\,q}\approx \mathrm{M}_{2^q}(C^{p-q,\,0})$ *при* $p>q$,
$C^{p,\,q}\approx \mathrm{M}_{2^p}(C^{0,\,q-p})$ *при* $p<q$.

3.20. Предложение. *Если $C(V, Q) > 0$ и размерность пространства V четна, то градуированные алгебры $C(V, Q)$ и $C(V, -Q)$ изоморфны.*

Доказательство. Пусть $h: V \to C(V, Q)$ — отображение, задаваемое формулой $h(v) = \varepsilon v$, где элемент ε определен, как в 3.16. Тогда $(h(v))^2 = (\varepsilon v)^2 = (\varepsilon v)(\varepsilon v) = -\varepsilon^2 v^2 = -v^2 = -Q(v)$, и поэтому мы получаем гомоморфизм $\bar{h}: C(V, -Q) \to C(V, Q)$. Алгебры $C(V, -Q)$ и $C(V, Q)$ имеют одну и ту же размерность над полем k. Значит, для того чтобы доказать, что $\bar{h}$ — изоморфизм, достаточно установить эпиморфность $\bar{h}$. Для этого в свою очередь достаточно показать, что пространство V (рассматриваемое как подпространство в $C(V, Q)$) содержится в образе $\bar{h}$. Если $e_1, \ldots, e_n$ — такой ортогональный базис в V, что $Q(e_i) = \pm 1$, и если ε' обозначает произведение $e_1 e_2 \ldots e_n$ в $C(V, -Q)$, то мы имеем

$$\bar{h}(\varepsilon' v) = \bar{h}(e_1)\bar{h}(e_2)\ldots\bar{h}(e_n)\bar{h}(v) = (\varepsilon e_1)(\varepsilon e_2)\ldots(\varepsilon e_n)(\varepsilon v) = \pm\varepsilon^2 v = \pm v.$$

Следовательно, $v = \bar{h}(\varepsilon' v)$ или $v = \bar{h}(-\varepsilon' v)$. $\square$

3.21. Теорема. *Алгебры $C^{p+8, q}$, $C^{p, q+8}$ и $M_{16}(C^{p, q})$ изоморфны.*

Доказательство. Так как $C^{4,0} > 0$, то, согласно 3.16, мы имеем $C^{8,0} \approx C^{4,0} \otimes C^{4,0}$. Точно также, согласно 3.20 и 3.19, мы имеем $C^{4,0} \otimes C^{4,0} \approx C^{4,0} \otimes C^{0,4} \approx C^{4,4} \approx M_{16}(\mathbb{R})$. Поскольку $C^{8,0} > 0$, то из леммы 3.17 следует, что $C^{p+8,q} \approx C^{p,q} \otimes C^{8,0} \approx C^{p,q} \otimes M_{16}(\mathbb{R}) \approx M_{16}(C^{p,q})$. Аналогично доказывается изоморфизм $C^{p,q+8} \approx M_{16}(C^{p,q})$. $\square$

3.22. Из только что доказанной теоремы и следствия 3.19 вытекает, что для вычисления всех алгебр Клиффорда $C^{p,q}$ достаточно знать лишь алгебры $C^{p,0}$ и $C^{0,p}$, где $p < 8$. Действительно, так как алгебры $C^{0,2}$ и $C^{2,0}$ отрицательны, то из предложения 3.16 следуют изоморфизмы

$$C^{0,p+2} \approx C^{p,0} \otimes C^{0,2} \approx C^{p,0} \otimes M_2(\mathbb{R}) \approx M_2(C^{p,0}).$$

Аналогичным образом мы имеем изоморфизмы

$$C^{p+2,0} \approx C^{0,p} \otimes C^{2,0} \approx C^{0,p} \otimes \mathbb{H}.$$

Наконец, если $p < 4$, то

$$C^{p+4,0} \approx C^{p,0} \otimes C^{4,0} \approx C^{p,0} \otimes C^{0,4} \approx C^{p,4} \approx M_{2p}(C^{0,4-p}).$$

Выше мы уже показали, что $C^{0,0} = \mathbb{R}$, $C^{0,1} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, $C^{0,2} = M_2(\mathbb{R})$, $C^{1,0} = \mathbb{C}$, $C^{2,0} = \mathbb{H}$. Применяя эти тождества и лемму 3.17, мы получаем следующую таблицу (принадлежащую Атье, Ботту и Шапиро [1]):

p	$C^{p,0}$	$C^{0,p}$
0	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
1	$\mathbb{C}$	$\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$
2	$\mathbb{H}$	$M_2(\mathbb{R})$
3	$\mathbb{H}\oplus\mathbb{H}$	$M_2(\mathbb{C})$
4	$M_2(\mathbb{H})$	$M_2(\mathbb{H})$
5	$M_4(\mathbb{C})$	$M_2(\mathbb{H})\oplus M_2(\mathbb{H})$
6	$M_8(\mathbb{R})$	$M_4(\mathbb{H})$
7	$M_8(\mathbb{R})\oplus M_8(\mathbb{R})$	$M_8(\mathbb{C})$
8	$M_{16}(\mathbb{R})$	$M_{16}(\mathbb{R})$

3.23. Рассмотрим теперь алгебры Клиффорда над *комплексными* векторными пространствами, снабженными невырожденными квадратичными формами. Обозначим через C'^n алгебру Клиффорда пространства $\mathbb{C}^n$ с квадратичной формой $\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2$. Тогда на основании теоремы 3.10 мы имеем $C'^n = C'^1\hat{\otimes}\ldots\hat{\otimes}C'^1$ (n раз), где $C'^1 = \mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C} = \mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$. Следовательно, $C'^n \approx C^{n,0}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C} \approx C^{0,n}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$. Далее, рассуждения, использованные в 3.16, показывают, что $C'^{n+2} = C'^n\otimes C'^2$ (взяв $\varepsilon = ie_1e_2$, мы получаем изоморфизм $C(\mathbb{C}^{n+2}) \approx C(\mathbb{C}^n)\otimes C(\mathbb{C}^2)$). Так как $C'^2 = C^{0,2}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C} \approx M_2(\mathbb{R})\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C} \approx M_2(\mathbb{C})$, имеет место изоморфизм $C'^{n+2}\approx M_2(C'^n)$. Следовательно, $C'^{2p}\approx M_{2^p}(\mathbb{C})$ и $C'^{2p+1}\approx M_{2^p}(\mathbb{C})\oplus M_{2^p}(\mathbb{C})$. Итак, комплексные алгебры Клиффорда C'^n обладают *периодичностью*, с периодом 2, точно так же, как вещественные алгебры Клиффорда $C^{p,0}$ и $C^{0,p}$ периодичны с периодом 8. Эти *алгебраические* периодичности в дальнейшем будут использованы для доказательства *топологической* периодичности Ботта в комплексной и вещественной K-теории (см. 5.13).

3.24. В п. 3.22 мы полностью определили алгебры $C^{p,0}$ и $C^{0,p}$. Однако для наших целей необходима более полная информация об алгебрах Клиффорда. В частности, нам нужно описание вложений $C^{p,0}\subset C^{p+1,0}$ и $C^{0,p}\subset C^{0,p+1}$. В низших размерностях (первые строки в таблице п. 3.22) это описание очень просто: вложения

$$\begin{array}{ccccc} C^{0,0} & \subset & C^{1,0} & \subset & C^{2,0} \\ \wr\wr & & \wr\wr & & \wr\wr \\ \mathbb{R} & & \mathbb{C} & & \mathbb{H} \end{array}$$

суть стандартные вложения $\mathbb{R}$ в $\mathbb{C}$ и $\mathbb{C}$ в $\mathbb{H}$, а вложения

$$\begin{array}{ccccc} C^{0,0} & \subset & C^{0,1} & \subset & C^{0,2} \\ \wr\wr & & \wr\wr & & \wr\wr \\ \mathbb{R} & & \mathbb{R}\oplus\mathbb{R} & & M_2(\mathbb{R}) \end{array}$$

задаются соответственно формулами $a \mapsto (a, a)$ и $(a, b) \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ (заметим, что изоморфизм $\mathbb{R}\oplus\mathbb{R} \to C^{0,1}$ определяется правилом $(a, b) \mapsto \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} e_1$ и что e_1 представляется в $M_2(\mathbb{R})$ матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; см. 3.14). Далее, из формул п. 3.16 следует коммутативность диаграмм

$$\begin{array}{ccc} C^{0,p+2} & \longrightarrow & C^{0,p+3} \\ \wr\wr & & \wr\wr \\ C^{p,0}\otimes C^{0,2} & \longrightarrow & C^{p+1,0}\otimes C^{0,2} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} C^{p+2,0} & \longrightarrow & C^{p+3,0} \\ \wr\wr & & \wr\wr \\ C^{0,p}\otimes C^{2,0} & \longrightarrow & C^{0,p+1}\otimes C^{2,0} \end{array}$$

где горизонтальные отображения — искомые вложения. Следовательно, вложения

$$\begin{array}{ccccc} C^{0,2} & \subset & C^{0,3} & \subset & C^{0,4} \\ \wr\wr & & \wr\wr & & \wr\wr \\ M_2(\mathbb{R}) & & M_2(\mathbb{C}) & & M_2(\mathbb{H}) \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} C^{2,0} & \subset & C^{3,0} & \subset & C^{4,0} \\ \wr\wr & & \wr\wr & & \wr\wr \\ \mathbb{H} & & \mathbb{H}\oplus\mathbb{H} & & M_2(\mathbb{H}) \end{array}$$

— это просто тензорные произведения предыдущих вложений на $M_2(\mathbb{R})$ и $\mathbb{H}$ соответственно.

Точно также вложения

$$\begin{array}{ccccc} C^{0,4} & \subset & C^{0,5} & \subset & C^{0,6} \\ \wr\wr & & \wr\wr & & \wr\wr \\ M_2(\mathbb{H}) & & M_2(\mathbb{H})\oplus M_2(\mathbb{H}) & & M_4(\mathbb{H}) \end{array}$$

— это тензорные произведения на $M_2(\mathbb{R})$ вложений

$$\begin{array}{ccccc} C^{2,0} & \subset & C^{3,0} & \subset & C^{4,0} \\ \wr\wr & & \wr\wr & & \wr\wr \\ \mathbb{H} & & \mathbb{H}\oplus\mathbb{H} & & M_2(\mathbb{H}) \end{array}$$

3.25. Для того чтобы двигаться дальше, нам необходимо точное описание вложений

$$\mathbb{H} \subset \mathbb{H}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C} \subset \mathbb{H}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{H}.$$

Элементы тела кватернионов $\mathbb{H}$ могут быть записаны в виде $q = \alpha + \beta J$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Положим ${}^t q = \bar{\alpha} - \bar{\beta} J$, так что $q \mapsto {}^t q$ —

антиинволюция тела $\mathbb{H}$. Определим гомоморфизм алгебр

$$\varphi\colon \mathbb{H}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{H} \to \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}) = M_4(\mathbb{R})$$

формулой $\varphi(q\otimes q')(v) = q'v^tq$. Этот гомоморфизм отображает $\mathbb{H}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ в $\operatorname{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{H}) = M_2(\mathbb{C})$. Действительно, прямое вычисленне показывает, что индуцированный гомоморфизм

$$\varphi'\colon \mathbb{H}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C} \to M_2(\mathbb{C})$$

является гомоморфизмом $\mathbb{C}$-алгебр и что

$$\varphi'(I\otimes 1) = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},\quad \varphi'(J\otimes 1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\varphi'(K\otimes 1) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Из этих формул следует, что φ' — изоморфизм. Кроме того, $\varphi(1\otimes J)$ является антиавтоморфизмом тела $\mathbb{H}$, рассматриваемого как комплексное векторное пространство размерности 2. Так как каждый элемент из $M_4(\mathbb{R}) = \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^2)$ может быть записан в виде суммы $\mathbb{C}$-эндоморфизма и $\mathbb{C}$-антиэндоморфизма, то гомоморфизм φ сюрьективен и, следовательно, биективен. Поэтому вложения $\mathbb{H}\subset\mathbb{H}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}\subset\mathbb{H}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{H}$ суть не что иное, как

$$\mathbb{H} \xrightarrow[\subset]{u} M_2(\mathbb{C}) \xrightarrow[\subset]{v} M_4(\mathbb{R}).$$

Здесь $u(I) = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$, $u(J) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $u(K) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$, а отображение v индуцировано вложением $\operatorname{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2)\subset\operatorname{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^2)$, т. е. получается тензорным умножением на $M_2(\mathbb{R})$ вложения $\mathbb{C}\subset M_2(\mathbb{R})$, задаваемого формулой

$$a+bi \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

3.26. Теперь мы в состоянии завершить описание вложений $C^{p,0}\subset C^{p+1,0}$ и $C^{0,p}\subset C^{0,p+1}$. Так как $C^{p+4,0}\approx C^{p,0}\otimes C^{4,0}$, то вложения

$$\begin{array}{ccccc} C^{4,0} & \subset & C^{5,0} & \subset & C^{6,0} \\ \wr & & \wr & & \wr \\ \mathbf{M}_2(\mathbb{H}) & & \mathbf{M}_4(\mathbb{C}) & & \mathbf{M}_8(\mathbb{R}) \end{array}$$

— это просто тензорные произведения на $M_2(\mathbb{R})$ вложений $\mathbb{H}\subset M_2(\mathbb{C})\subset M_4(\mathbb{R})$, описанных выше. Далее, вложения

$$\begin{array}{ccccc} C^{6,0} & \overset{u'}{\subset} & C^{7,0} & \overset{v'}{\subset} & C^{8,0} \\ \wr & & \wr & & \wr \\ \mathbf{M}_8(\mathbb{R}) & & \mathbf{M}_8(\mathbb{R})\oplus\mathbf{M}_8(\mathbb{R}) & & \mathbf{M}_{16}(\mathbb{R}) \end{array}$$

являются тензорными произведениями на $M_2(\mathbb{H})$ вложений

$$\begin{array}{ccccc} C^{2,0} & \subset & C^{3,0} & \subset & C^{4,0} \\ \wr\wr & & \wr\wr & & \wr\wr \\ \mathbb{H} & & \mathbb{H}\oplus\mathbb{H} & & M_2(\mathbb{H}) \end{array}$$

Следовательно, мы имеем $u'(a)=(a, a)$ и $v'(a, b)=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, где a и b — матрицы размера 8×8 с вещественными коэффициентами. Наконец, вложения

$$\begin{array}{ccccc} C^{0,6} & \subset & C^{0,7} & \subset & C^{0,8} \\ \wr\wr & & \wr\wr & & \wr\wr \\ M_4(\mathbb{H}) & \subset & M_8(\mathbb{C}) & \subset & M_{16}(\mathbb{R}) \end{array}$$

— это тензорные произведения на $M_2(\mathbb{R})$ вложений $M_2(\mathbb{H})\subset M_4(\mathbb{C})\subset M_8(\mathbb{R})$.

4. Функторы $K^{p,q}(\mathscr{C})$ и $K^{p,q}(X)$

4.1. Пусть $\mathscr{C}$ — банахова категория (например, категория $\mathscr{E}(X)$ векторных расслоений с компактной базой X) и A — некоторая $\mathbb{R}$-алгебра конечной размерности. Обозначим через $\mathscr{C}^A$ категорию, объектами которой являются пары (E, ρ), где $E\in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ и $\rho\colon A\to \mathrm{End}(E)$ — гомоморфизм $\mathbb{R}$-алгебр. Морфизм из пары (E, ρ) в пару (E', ρ') — это такой $\mathscr{C}$-морфизм $f\colon E\to E'$, что $f\cdot\rho(\lambda)=\rho(\lambda)\cdot f$ для каждого элемента $\lambda\in A$. В частности, если A — алгебра Клиффорда $C^{p,q}$ (соотв. $M_n(\mathbb{R})$), мы будем обозначать соответствующую категорию $\mathscr{C}^A$ через $\mathscr{C}^{p,q}$ (соотв. через $\mathscr{C}(n)$). Заметим, что если $\mathscr{C}$ — псевдоабелева банахова категория, то $\mathscr{C}^A$ также банахова и псевдоабелева (I.6.10).

4.2. ***Пример.*** Пусть $\mathscr{C}=\mathscr{E}_{\mathbb{R}}(X)$ и $A=\mathbb{C}$. Тогда $\mathscr{C}^A\approx\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(X)$. Аналогично, если $A=\mathbb{H}$, то $\mathscr{C}^A\approx\mathscr{E}_{\mathbb{H}}(X)$.

4.3. ***Пример.*** Пусть $\mathscr{C}=\mathscr{E}(X)$ и $A=\mathbb{R}[x]/x^2$. Тогда категория $\mathscr{C}^A$ изоморфна категории векторных расслоений, снабженных эндоморфизмом, квадрат которого равен 0 (причем морфизмы перестановочны с этим эндоморфизмом).

4.4. ***Теорема.*** *Пусть $\mathscr{C}$ — псевдоабелева банахова категория* (I.6.7). *Тогда категории $\mathscr{C}$ и $\mathscr{C}(n)$ эквивалентны (эквивалентность Мориты).*

Доказательство. Мы хотим определить категорную эквивалентность

$$\varphi\colon \mathscr{C}\to\mathscr{C}(n).$$

Для произвольного объекта F из $\mathscr{C}$ положим $\varphi(F)=(E, \rho)$, где $E=F^n$ и $\rho\colon M_n(\mathbb{R})\to \mathrm{End}(E)=\mathrm{End}(F^n)$ — гомоморфизм, который сопоставляет каждой матрице $M=(a_{ij})$ эндоморфизм F^n, определенный матрицей (b_{jl}), где $b_{jl}=a_{jl}\cdot \mathrm{Id}_F$. Для краткости мы будем далее опускать Id_F и вместо b_{jl} писать просто a_{jl}. Если $f\colon F\to F'$ — морфизм в $\mathscr{C}$, определяем $\varphi(f)\colon (E,\rho)\to(E',\rho')$ как такой $\mathscr{C}(n)$-морфизм, что ассоциированный с ним $\mathscr{C}$-морфизм представляется диагональной матрицей

$$\begin{pmatrix} f & 0 & 0 & \\ 0 & f & & 0\\ & & \ddots & \\ & 0 & & f\end{pmatrix}.$$

Если мы запишем произвольный морфизм $g\colon (E,\rho)\to(E',\rho')$ в матричной форме $g=(g_{jl})$ и потребуем, чтобы матрица g коммутировала с действием группы $M_n(\mathbb{R})$, то получим соотношение $\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_{kj}g_{jl}=\sum\limits_{j=1}^{n}g_{kj}\lambda_{jl}$, где скаляры λ принадлежат $\mathbb{R}$. Если мы возьмем такую матрицу $(\lambda_{jl})\in M_n(\mathbb{R})$, в которой все элементы λ_{jl} равны нулю, за исключением ровно одного, то получим морфизм g вида $\varphi(f)$. Следовательно, функтор φ вполне унивалентен.

Пусть теперь (E,ρ) — произвольный объект из $\mathscr{C}(n)$. Пусть p_i — диагональная матрица

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} & & i & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & 0 & & 0 & \\ & & & & 0\end{pmatrix}\end{array}$$

и τ_{jl} для $l\neq j$ — матрица перестановки

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} j & i & \end{matrix}\\ \begin{matrix} j\\ i\\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\end{array}.$$

Наконец, положим $E_i = \operatorname{Im}(p_i) = \operatorname{Ker}(1-p_i)$ (такой объект существует, так как категория $\mathscr{C}$ псевдоабелева). Из соотношений $p_i p_j = 0$ для $i \neq j$ и $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ следует, что $E \approx \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$. Далее, матрица транспозиций τ_{ji} позволяет нам отождествить объекты E_i и E_j, поскольку $p_j = \tau_{ji} p_i \tau_{ji}^{-1}$. Полагая $E_1 = F$, мы можем, следовательно, считать, что $E = F^n$ и что действие p_i и τ_{ji} представляется матрицами указанных выше двух типов. Так как эти матрицы порождают $M_n(\mathbb{R})$ как $\mathbb{R}$-алгебру, то действие $M_n(\mathbb{R})$ на F^n описывается так же, как выше. Следовательно, функтор φ сюръективен. $\square$

4.5. Предложение. *Пусть A и B — конечномерные $\mathbb{R}$-алгебры и $\mathscr{C}$ — банахова категория. Тогда категории $(\mathscr{C}^A)^B$ и $\mathscr{C}^{A \otimes_{\mathbb{R}} B}$ изоморфны.*

Доказательство этого предложения очевидно.

4.6. Следствие. *Если $\mathscr{C}$ — псевдоабелева банахова категория, то с точностью до эквивалентности категория $\mathscr{C}^{p,q}$ зависит только от разности $p-q \bmod 8$.*

Доказательство. Если $p-q = p'-q' \bmod 8$, то, как было показано в 3.18, 3.21 и 3.22, $C^{p,q} \approx M_n(A)$ и $C^{p',q'} \approx M_{n'}(A)$ для некоторой алгебры A. Следовательно, в силу 4.4 и 4.5 мы имеем $\mathscr{C}^{p,q} \sim \mathscr{C}^{M_n(A)} \sim (\mathscr{C}^A)(n) \sim \mathscr{C}^A$ (заметим, что $M_n(A) \approx A \otimes_{\mathbb{R}} M_n(\mathbb{R})$). Те же самые рассуждения показывают, что $\mathscr{C}^{p',q'} \sim \mathscr{C}^A$. $\square$

4.7. Предложение. *Пусть $\mathscr{C}$ — псевдоабелева банахова категория, и пусть A и B суть $\mathbb{R}$-алгебры. Тогда категории $\mathscr{C}^{A \oplus B}$ и $\mathscr{C}^A \times \mathscr{C}^B$ эквивалентны.*

Доказательство. Если (E, ρ) и (F, σ) — объекты категорий $\mathscr{C}^A$ и $\mathscr{C}^B$ соответственно, то определим объект $(E \oplus F, \tau)$ категории $\mathscr{C}^{A \oplus B}$, полагая $\tau(a, b) = \rho(a) \oplus \sigma(b)$. Соответствие $((E, \rho), (F, \sigma)) \mapsto (E \oplus F, \tau)$ задает функтор из категории $\mathscr{C}^A \times \mathscr{C}^B$ в категорию $\mathscr{C}^{A \oplus B}$, который является вполне унивалентным функтором. Пусть теперь (G, τ) — некоторый объект из $\mathscr{C}^{A \oplus B}$. Тогда $p = \tau(1, 0)$ и $q = \tau(0, 1)$ являются проекторами в G, причем $p+q=1$. Если мы представим G в виде $E \oplus F$, где $E = \operatorname{Im}(p)$ и $G = \operatorname{Im}(q)$, то очевидно, что $G \approx \varphi(E, F)$. Это показывает, что функтор φ сюръективен. В частности, если $A = B$, то композиция $\mathscr{C}^A \times \mathscr{C}^A \sim \mathscr{C}^{A \oplus A} \to \mathscr{C}^A$, где функтор $\mathscr{C}^{A \oplus A} \to \mathscr{C}^A$ индуцирован гомоморфизмом алгебр $a \mapsto (a, a)$, задается соотношением $(E, F) \mapsto E \oplus F$. $\square$

4.8. Теорема. *Пусть $\mathscr{C}$ — псевдоабелева банахова категория, и пусть $\mathscr{C}'$ и $\mathscr{C}''$ — категории $\mathscr{C}^{\mathbb{C}}$ и $\mathscr{C}^{\mathbb{H}}$. Тогда мы имеем следующую таблицу категорий:*

p	$\mathscr{C}^{p,0}$	$\mathscr{C}^{p,1}$	$\mathscr{C}^{0,p}$
0	$\mathscr{C}$	$\mathscr{C}\times\mathscr{C}$	$\mathscr{C}$
1	$\mathscr{C}'$	$\mathscr{C}$	$\mathscr{C}\times\mathscr{C}$
2	$\mathscr{C}''$	$\mathscr{C}'$	$\mathscr{C}$
3	$\mathscr{C}''\times\mathscr{C}''$	$\mathscr{C}''$	$\mathscr{C}'$
4	$\mathscr{C}''$	$\mathscr{C}''\times\mathscr{C}''$	$\mathscr{C}''$
5	$\mathscr{C}'$	$\mathscr{C}''$	$\mathscr{C}''\times\mathscr{C}''$
6	$\mathscr{C}$	$\mathscr{C}'$	$\mathscr{C}''$
7	$\mathscr{C}\times\mathscr{C}$	$\mathscr{C}$	$\mathscr{C}'$
8	$\mathscr{C}$	$\mathscr{C}\times\mathscr{C}$	$\mathscr{C}$

Доказательство. Эта теорема непосредственно следует из 3.19, 3.22, 4.7 и 4.6. □

4.9. Для того чтобы лучше понять категории $\mathscr{C}^{p,q}$, сравним их между собой с помощью функторов „продолжения скаляров" и „ограничения скаляров". Более точно, рассмотрим, например, функтор φ: $\mathscr{C}^{0,q+1}\to\mathscr{C}^{0,q}$, индуцированный вложением алгебр $C^{0,q}\subset C^{0,q+1}$ (это — функтор *ограничения скаляров*). В силу периодичности алгебр Клиффорда нам нужно рассмотреть лишь случаи $0\leqslant q\leqslant 7$

$q=0$. С точностью до эквивалентности функтор φ совпадает с функтором из $\mathscr{C}\times\mathscr{C}$ в $\mathscr{C}$, заданным правилом $(E, F)\mapsto E\oplus F$.

$q=1$. С точностью до эквивалентности функтор φ: $\mathscr{C}(2)\to\mathscr{C}\times\mathscr{C}$ индуцирован вложением $\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$ в $M_2(\mathbb{R})$, описанным в 3.14. Следовательно, согласно 4.4 и 4.7, этот функтор есть, по существу, „диагональный" функтор $E\mapsto(E, E)$.

$q=2$. В этом случае φ — функтор ограничения скаляров из $\mathscr{C}'$ в $\mathscr{C}$ (мы игнорируем комплексную структуру).

$q=3$. Аналогичным образом функтор φ: $\mathscr{C}''\to\mathscr{C}'$ есть функтор ограничения скаляров (мы игнорируем кватернионную структуру).

$q=4$. Функтор $\mathscr{C}''\times\mathscr{C}''\to\mathscr{C}''$ — это просто $(E, F)\mapsto E\oplus F$.

$q=5$. Функтор $\mathscr{C}''\to\mathscr{C}''\times\mathscr{C}''$ — это снова диагональный функтор $E\mapsto(E, E)$.

$q=6$. Функтор $\mathscr{C}^{0,7}\to\mathscr{C}^{0,6}$ индуцирован вложением $M_4(\mathbb{H})\subset M_8(\mathbb{C})$, описанным в 3.26. С точностью до эквивалентности функтор φ совпадает с функтором $\mathscr{C}'(2)=\mathscr{C}^{M_2(\mathbb{C})}\to\mathscr{C}^{\mathbb{H}}=\mathscr{C}''$, индуцированным вложением $\mathbb{H}$ в $M_2(\mathbb{C})$, которое было описано в 3.25. Рассматривая композицию

$$\mathscr{C}'\xrightarrow{\sim}\mathscr{C}'(2)\to\mathscr{C}'',$$

мы видим, что функтор $\mathscr{C}' \to \mathscr{C}''$ определяется правилом $E \mapsto E \oplus E$, причем $\mathbb{H}$ действует на $E \oplus E$ посредством вложения $\mathbb{H}$ в $M_2(\mathbb{C})$. Следовательно, φ может быть интерпретирован как функтор продолжения скаляров. Например, если $\mathscr{C}$ — категория векторных расслоений, то функтор φ изоморфен функтору $E \mapsto \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{C}} E$.

$q=7$. По тем же причинам, что и в случае $q=6$, функтор $\mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ можно интерпретировать как функтор продолжения скаляров: он определяется правилом $E \mapsto E \oplus E$, где $\mathbb{C}$ действует на $E \oplus E$ посредством вложения $\mathbb{C}$ в $M_2(\mathbb{R})$. В категории векторных расслоений φ определяется формулой $E \mapsto \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} E$.

4.10. Из приведенного списка немедленно следует, что все рассматриваемые нами функторы являются банаховыми [более общим образом, если B — подалгебра A, то нетрудно показать, что $\mathscr{C}^A \to \mathscr{C}^B$ — банахов функтор]. Это позволяет нам дать следующее определение.

4.11. Определение. Пусть $\mathscr{C}$ — псевдоабелева банахова категория. *Группа* $K^{p,q}(\mathscr{C})$ определяется как группа Гротендика функтора

$$\mathscr{C}^{p,q+1} \to \mathscr{C}^{p,q}$$

в смысле п. II.2.13. В случае когда $\mathscr{C} = \mathscr{E}(X)$ (более точно, $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}(X)$ или $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(X)$), группа $K^{p,q}(\mathscr{C})$ будет обозначаться через $K^{p,q}(X)$ (соотв. $K^{p,q}_{\mathbb{R}}(X)$ или $K^{p,q}_{\mathbb{C}}(X)$).

С точностью до изоморфизма группа $K^{p,q}(\mathscr{C})$ зависит только от разности $p-q \bmod 8$. В этом легко убедиться, рассматривая следующие коммутативные диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{C}^{p,q+1} & \longrightarrow & \mathscr{C}^{p,q} \\ \wr & & \wr \\ \mathscr{C}^{p+1,q+2} & \longrightarrow & \mathscr{C}^{p+1,q+1} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^{p,q+1} & \longrightarrow & \mathscr{C}^{p,q} \\ \wr & & \wr \\ \mathscr{C}^{p,q+9} & \longrightarrow & \mathscr{C}^{p,q+8} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^{p,q+1} & \longrightarrow & \mathscr{C}^{p,q} \\ \wr & & \wr \\ \mathscr{C}^{p+8,q+1} & \longrightarrow & \mathscr{C}^{p+8,q} \end{array}$$

В случае комплексных векторных расслоений (или в более общем случае *комплексных* банаховых категорий) аналогичным способом можно показать, что группа $K^{p,q}$ зависит только от разности $p-q \bmod 2$.

4.12. Теорема. *Пусть $\mathscr{C}$ — псевдоабелева банахова категория. Тогда группы $K^{0,0}(\mathscr{C})$ и $K^{0,1}(\mathscr{C})$ канонически изоморфны группам $K(\mathscr{C})$ и $K^{-1}(\mathscr{C})$, определенным соответственно в II.1.7 и II.3.3. Аналогично $K^{0,4}(\mathscr{C}) \approx K(\mathscr{C}'')$ и $K^{0,5}(\mathscr{C}) \approx K^{-1}(\mathscr{C}'')$. Следовательно, $K^{0,0}(X) \approx K(X)$, $K^{0,1}(X) \approx K^{-1}(X)$, $K^{0,4}_{\mathbb{R}}(X) \approx K_{\mathbb{H}}(X)$ и $K^{0,5}_{\mathbb{R}}(X) \approx$ $\approx K^{-1}_{\mathbb{H}}(X)$.*

Доказательство. Так как, согласно 4.9, группа $K^{0,0}(\mathscr{C})$ является группой Гротендика функтора $\mathscr{C} \times \mathscr{C} \to \mathscr{C}$, то точная последовательность из II.3.22 может быть записана в виде

$$\begin{array}{ccccccccc} K^{-1}(\mathscr{C}\times\mathscr{C}) & \longrightarrow & K^{-1}(\mathscr{C}) & \longrightarrow & K^{0,0}(\mathscr{C}) & \longrightarrow & K(\mathscr{C}\times\mathscr{C}) & \longrightarrow & K(\mathscr{C}) \\ \wr\wr & & & & & & \wr\wr & & \\ K^{-1}(\mathscr{C})\oplus K^{-1}(\mathscr{C}) & & & & & & K(\mathscr{C})\oplus K(\mathscr{C}) & & \end{array}$$

Это показывает, что $K(\mathscr{C})\approx K^{0,0}(\mathscr{C})$, причем данный изоморфизм сопоставляет классу объекта E элемент $d(E_0, E_1, \alpha)$, где $E_0=(E, 0)$, $E_1=(0, E)$ и α: $0\bigoplus E\to 0\bigoplus E$ — канонический изоморфизм.

Аналогичные рассуждения, примененные к точной последовательности, ассоциированной с диагональным функтором $\mathscr{C}\to\mathscr{C}\times\mathscr{C}$, т. е. к последовательности

$$\begin{array}{ccccccccc} K^{-1}(\mathscr{C}) & \longrightarrow & K^{-1}(\mathscr{C}\times\mathscr{C}) & \longrightarrow & K^{0,1}(\mathscr{C}) & \longrightarrow & K(\mathscr{C}) & \longrightarrow & K(\mathscr{C}\times\mathscr{C}) \\ & & \wr\wr & & & & & & \wr\wr \\ & & K^{-1}(\mathscr{C})\oplus K^{-1}(\mathscr{C}) & & & & & & K(\mathscr{C})\oplus K(\mathscr{C}) \end{array}$$

показывают, что $K^{-1}(\mathscr{C})\approx K^{0,1}(\mathscr{C})$. Этот изоморфизм сопоставляет элементу $d(E,\alpha)$ элемент $d(E, E, \beta)$, где автоморфизм β: $(E, E)\to(E, E)$ задается формулой $\beta=(\alpha, 1)$.

Наконец, группа $K^{0,4}(\mathscr{C})$ является группой Гротендика функтора $\mathscr{C}^{0,5}\to\mathscr{C}^{0,4}$, или, согласно 4.9, функтора $\mathscr{C}''\times\mathscr{C}''\to\mathscr{C}''$. Следовательно, $K^{0,4}(\mathscr{C})\approx K(\mathscr{C}'')$. Группа $K^{0,5}(\mathscr{C})$ является группой Гротендика функтора $\mathscr{C}^{0,6}\to\mathscr{C}^{0,5}$, а значит, в силу 4.9, функтора $\mathscr{C}''\to\mathscr{C}''\times\mathscr{C}''$. Отсюда мы получаем изоморфизм $K^{0,5}(\mathscr{C})\approx K^{-1}(\mathscr{C}'')$. $\square$

4.13. В случае банаховой категории $\mathscr{C}=\mathscr{E}(X)$ важно отметить, что группы $K^{p,q}(X)=K^{p,q}(\mathscr{C})$ естественным образом наделяются структурой модулей над коммутативным кольцом $K(X)$. Именно, если $x=d(E, F, \alpha)\in K^{p,q}(X)$, где E и F суть $C^{p,q+1}$-расслоения и α — изоморфизм подстилающих их $C^{p,q}$-расслоений, мы определим произведение x и $[G]-[G']$ как элемент $d(E\otimes G,\ F\otimes G,\ \alpha\otimes 1) - d(E\otimes G',\ F\otimes G',\ \alpha\otimes 1)$. Используя приведенные выше явные формулы, нетрудно показать, что изоморфизмы $K^{0,0}(X)\approx K(X)$, $K^{0,1}(X)\approx K^{-1}(X)$, $K^{0,4}_{\mathbb{R}}(X)\approx K_{\mathbb{H}}(X)$ и $K^{0,5}_{\mathbb{R}}(X)\approx K^{-1}_{\mathbb{H}}(X)$ в действительности являются изоморфизмами $K(X)$-модулей. Возможно также определить *внешнее* произведение

$$K^{p,q}(X)\times K(Y)\to K^{p,q}(X\times Y).$$

Мы оставляем это читателю.

4.14. Теорема 4.12 позволяет выдвинуть гипотезу о том, что группы $K^{p,q}(X)$ и $K^{p-q}(X)$ (определенные в II.4.11 для $p-q\leqslant 0$) изоморфны. В ближайших параграфах мы докажем эту гипотезу. В результате мы завершим построение групп K^n для $n\in\mathbb{Z}$ и в то же время докажем периодичность Ботта в вещественной и комплексной K-теории.

4.15. Для того чтобы эффективно работать с группами $K^{p,q}(\mathscr{C})$ и $K^{p,q}(X)$, приведем еще одно определение этих групп (во избежание путаницы мы будем временно обозначать вновь определенные группы через $K'^{p,q}(\mathscr{C})$ и $K'^{p,q}(X)$).

Пусть $\mathscr{C}$ — псевдоабелева банахова категория и E — *$C^{p,q}$-модуль* (т. е. объект категории $\mathscr{C}^{p,q}$). Назовем *градуированием* E такой эндоморфизм η объекта E, рассматриваемого как объект из $\mathscr{C}$, что

(i) $\eta^2=1$,

(ii) $\eta\rho(e_i)=-\rho(e_i)\eta$, где e_i определены в 3.13 и $\rho\colon C^{p,q}\to \operatorname{End}(E)$ — гомоморфизм, задающий на E $C^{p,q}$-структуру.

Эквивалентным образом, градуирование E — это $C^{p,q+1}$-структура на E, продолжающая исходную $C^{p,q}$-структуру (полагаем $\eta=\rho(e_{p+q+1})$). Термин „градуирование" оправдывается разложением объекта E в прямую сумму $E_0\oplus E_1$, где $E_0=\operatorname{Ker}\left(\frac{1-\eta}{2}\right)$ и $E_1=\operatorname{Ker}\left(\frac{1+\eta}{2}\right)$. Тогда гомоморфизм $\rho\colon C^{p,q}\to\operatorname{End}(E_0\oplus E_1)$ является гомоморфизмом $\mathbb{Z}/2$-градуированных алгебр, $C^{p,q}$ имеет $\mathbb{Z}/2$-градуировку, описанную в 3.6, а $\operatorname{End}(E_0\oplus E_1)$ имеет $\mathbb{Z}/2$-градуировку $D_0\otimes D_1$, где D_0 (соотв. D_1) — множество „диагональных" матриц

$$\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix},\quad a\in\operatorname{End}(E_0),\quad b\in\operatorname{End}(E_1)$$

(соотв. „кодиагональных" матриц

$$\begin{pmatrix} 0 & a\\ b & 0\end{pmatrix},\quad a\in\mathscr{C}(E_1,\ E_0),\quad b\in\mathscr{C}(E_0,\ E_1)).$$

Определим $K'^{p,q}(\mathscr{C})$ (или $K'^{p,q}(X)$, если $\mathscr{C}=\mathscr{E}(X)$) как факторгруппу свободной абелевой группы, порожденной тройками (E,η_1,η_2), где E — $C^{p,q}$-модуль и η_1, η_1 — градуирования E, по подгруппе, порожденной соотношениями

(i) $(E,\ \eta_1,\ \eta_2)+(F,\ \xi_1,\ \xi_2)=(E\oplus F,\ \eta_1\oplus\xi_1,\ \eta_2\oplus\xi_2)$,

(ii) $(E,\ \eta_1,\ \eta_2)=0$, если η_1 гомотопно η_2 в множестве градуирований E.

Через $d(E,\ \eta_1,\ \eta_2)$ мы будем обозначать класс тройки $(E,\ \eta_1,\ \eta_2)$ в группе $K'^{p,q}(\mathscr{C})$.

4.16. Лемма. *Имеет место соотношение*

$$d(E,\ \eta_1,\ \eta_2)+d(E,\ \eta_2,\ \eta_1)=0.$$

Кроме того, две изоморфные (в очевидном смысле) тройки принадлежат одному и тому же классу в $K'^{p,q}(\mathscr{C})$.

Доказательство. Мы имеем $d(E,\ \eta_1,\ \eta_2)+d(E,\ \eta_2,\ \eta_1)=d(E\oplus E,\ \eta_1\oplus\eta_2,\ \eta_2\oplus\eta_1)$. Тогда гомотопия

$$\eta(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_1 & 0\\ 0 & \eta_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},\quad \theta\in[0,\ \pi/2],$$

связывает градуирования $\eta_1\oplus\eta_2$ и $\eta_2\oplus\eta_1$, и поэтому $d(E\oplus E, \eta_1\oplus\eta_2, \eta_2\oplus\eta_1)=0$.

Докажем теперь второе утверждение. Пусть f: $(E, \eta_1, \eta_2)\to (E', \eta_1', \eta_2')$ — изоморфизм троек. Это означает, что задан такой изоморфизм из E в E' (снова обозначаемый через f), что $\eta_i'=f\cdot\eta_i\cdot f^{-1}$. Имеет место соотношение

$$\begin{pmatrix}\eta_2 & 0\\ 0 & \eta_1'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -f^{-1}\\ f & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_1 & 0\\ 0 & \eta_2'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & f^{-1}\\ -f & 0\end{pmatrix}.$$

Матрицы

$$\begin{pmatrix}0 & -f^{-1}\\ f & 0\end{pmatrix}$$

и $\mathrm{Id}_{E\oplus E'}$ гомотопны в множестве автоморфизмов объекта $E\oplus E'$. Эта гомотопия задается, например, непрерывным семейством матриц

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -f^{-1}\sin\theta\\ f\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},\quad \theta\in[0, \pi/2].$$

Следовательно,

$$d(E, \eta_1, \eta_2)-d(E', \eta_1', \eta_2')=d(E, \eta_1, \eta_2)+d(E', \eta_2', \eta_1')=d(E\oplus E', \eta_1\oplus\eta_2', \eta_2\oplus\eta_1')=0. \ \square$$

4.17. *Лемма.* *Пусть η_1, η_2 и η_3 — градуирования объекта E. Тогда имеет место соотношение*

$$d(E, \eta_1, \eta_2)+d(E, \eta_2, \eta_3)=d(E, \eta_1, \eta_3).$$

Доказательство. Из леммы 4.16 следует, что

$$d(E, \eta_1, \eta_2)+d(E, \eta_2, \eta_3)-d(E, \eta_1, \eta_3)=d(E\oplus E\oplus E, \eta_1\oplus\eta_2\otimes\eta_3, \eta_2\oplus\eta_3\oplus\eta_1).$$

Кроме того, мы имеем тождество $\eta_2\oplus\eta_3\oplus\eta_1=\alpha(\eta_1\oplus\eta_2\oplus\eta_3)\alpha^{-1}$, где α — автоморфизм $E\oplus E\oplus E$, задаваемый матрицей

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Поскольку группа $SO(3)$ линейно-связна, а элемент α можно рассматривать как элемент из $SO(3)$, то очевидно, что градуирования $\eta_1\oplus\eta_2\oplus\eta_3$ и $\eta_2\oplus\eta_3\oplus\eta_1$ гомотопны. Следовательно,

$$d(E\oplus E\oplus E, \eta_1\oplus\eta_2\oplus\eta_3, \eta_2\oplus\eta_3\oplus\eta_1)=0. \ \square$$

4.18. *Лемма.* *Пусть η_1, η_2, η_1', η_2' — такие градуирования E, что η_i гомотопны η_i' для $i=1, 2$. Тогда*

$$d(E, \eta_1, \eta_2)=d(E, \eta_1', \eta_2').$$

Доказательство. Мы имеем $d(E, \eta_1', \eta_1) = d(E, \eta_2, \eta_2') = 0$. Следовательно, согласно 4.17, $d(E, \eta_1', \eta_2') = d(E, \eta_1', \eta_1) + d(E, \eta_1, \eta_2) + d(E, \eta_2, \eta_2') = d(E, \eta_1, \eta_2)$. $\square$

4.19. Предложение. *Каждый элемент группы $K'^{p,q}(\mathscr{C})$ может быть представлен в виде $d(E, \eta_1, \eta_2)$. Равенство $d(E, \eta_1, \eta_2) = d(E, \eta_1', \eta_2')$ эквивалентно существованию такой тройки (T, ζ, ζ), что градуирования $\eta_1 \oplus \eta_2' \oplus \zeta$ и $\eta_2 \oplus \eta_1' \oplus \zeta$ гомотопны.*

Доказательство. Первое утверждение непосредственно следует из леммы 4.16. Для доказательства второго утверждения введем промежуточное множество $K''^{p,q}(\mathscr{C})$, которое является фактормножеством множества троек (E, η_1, η_2) по следующему отношению эквивалентности. Тройки (E, η_1, η_2) и (E', η_1', η_2') эквивалентны тогда и только тогда, когда существует такая тройка (T, ζ, ζ), что градуирования $\eta_1 \oplus \eta_2' \oplus \zeta$ и $\eta_2 \oplus \eta_1' \oplus \zeta$ гомотопны. Для проверки того, что это — отношение эквивалентности, используется техника предыдущих лемм. Сложение троек индуцирует в $K''^{p,q}(\mathscr{C})$ структуру абелевой группы.

Определим гомоморфизм $K'^{p,q}(\mathscr{C}) \to K''^{p,q}(\mathscr{C})$ правилом $d(E, \eta_1, \eta_2) \mapsto [E, \eta_1, \eta_2]$, где $[E, \eta_1 \eta_2]$ — класс тройки (E, η_1, η_2) в группе $K''^{p,q}(\mathscr{C})$. Этот гомоморфизм корректно определен, поскольку $(E, \eta_1, \eta_2) \sim 0$, если градуирование η_1 гомотопно градуированию η_2. Обратно, мы можем определить гомоморфизм $K''^{p,q}(\mathscr{C}) \to K'^{p,q}(\mathscr{C})$ правилом $[E, \eta_1, \eta_2] \mapsto d(E, \eta_1, \eta_2)$. Согласно 4.17 и 4.18, этот гомоморфизм корректно определен. Очевидно, что эти гомоморфизмы взаимно обратны. $\square$

4.20. Следствие. *Равенство $d(E, \eta_1, \eta_2) = 0$ выполняется в группе $K'^{p,q}(\mathscr{C})$ тогда и только тогда, когда существует такая тройка (F, ζ, ζ), что $\eta_1 \oplus \zeta$ гомотопно $\eta_2 \oplus \zeta$.*

4.21. Лемма. *Пусть E — некоторый $C^{p,q}$-модуль и* $\mathrm{Grad}(E)$ *— пространство градуирований объекта E (снабженное топологией, индуцированной топологией пространства* $\mathrm{End}(E)$*). Если η: $I \to \mathrm{Grad}(E)$ — непрерывное отображение, то существует такое непрерывное отображение β: $I \to \mathrm{Aut}(E)$, что $\beta(0) = 1$ и $\eta(t) = \beta(t)\eta(0)\beta(t)^{-1}$.*

Доказательство. Для каждой пары чисел $(t, u) \in I \times I$ эндоморфизм $\beta(t, u) = \frac{1 + \eta(t)\eta(u)}{2}$ является эндоморфизмом $C^{p,q}$-модуля, таким что $\beta(u, u) = \mathrm{Id}_E$ и

$$\beta(t, u)\eta(u) = \eta(t)\beta(t, u).$$

Так как $\mathrm{End}(E)$ — банахова алгебра, то существует такое $\varepsilon > 0$, что $\beta(t, u)$ является автоморфизмом для $|t - u| < \varepsilon$. Пусть

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$$

— такое разбиение отрезка $[0, 1]$, что $|t_{i+1} - t_i| < \varepsilon$. Тогда для $t \in [t_i, t_{i+1}]$ мы определяем $\beta(t)$ как $\beta(t, t_i)\beta(t_i, t_{i-1}) \ldots \beta(t_1, t_0)$. $\square$

4.22. Теорема. *Группы $K^{p,q}(\mathscr{C})$ и $K'^{p,q}(\mathscr{C})$ естественно изоморфны. Следовательно, группы $K^{p,q}(X)$ и $K'^{p,q}(X)$ естественно изоморфны.*

Доказательство. Пусть $d(E, F, \alpha)$ — элемент группы $K^{p,q}(\mathscr{C}) = K(\varphi)$, где φ — функтор $\mathscr{C}^{p,q+1} \to \mathscr{C}^{p,q}$. Тогда E и F можно рассматривать как $C^{p,q}$-модули, снабженные градуированиями η_E и η_F соответственно; α: $E \to F$ — это изоморфизм $C^{p,q}$-модулей. Сопоставим элементу $d(E, F, \alpha)$ класс тройки (E, η_1, η_2), где E рассматривается как $C^{p,q}$-модуль, $\eta_1 = \eta_E$ и $\eta_2 = \alpha^{-1}\eta_F\alpha$. Если (E, F, α) и (E', F', α') изоморфны, то ассоциированные с ними тройки (E, η_1, η_2) и (E', η_1', η_2') также изоморфны. Если изоморфизмы α_0, α_1: $E \to F$ гомотопны, то ассоциированные с ними градуирования $\alpha_1^{-1}\eta_F\alpha_1$ и $\alpha_2^{-1}\eta_F\alpha_2$ также гомотопны. Наконец, если $E = F$ и $\alpha = \mathrm{Id}$, то $\eta_1 = \eta_2$. Поэтому из определения группы $K(\varphi)$ (§ II.2) и из леммы 4.16 следует, что соответствие $(E, F, \alpha) \mapsto (E, \eta_1, \eta_2)$ задает гомоморфизм из $K^{p,q}(\mathscr{C})$ в $K'^{p,q}(\mathscr{C})$.

Обратно, пусть $d(E, \eta_1, \eta_2)$ — некоторый элемент группы $K'^{p,q}(\mathscr{C})$. Пусть $E_i = (E, \eta_i)$ — $C^{p,q+1}$-модули (E, η_i) и α: $E_1 \to E_2$ — $C^{p,q}$-морфизм, тождественный на подстилающих $C^{p,q}$-модулях. Сопоставим элементу (E, η_1, η_2) элемент (E_1, E_2, α). Для проверки того, что это соответствие определяет гомоморфизм $K'^{p,q}(\mathscr{C}) \to K^{p,q}(\mathscr{C})$, мы должны доказать, что из гомотопности градуирований η_1 и η_2 следует равенство $d(E_1, E_2, \alpha) = 0$. Согласно лемме 4.21, существует такое непрерывное отображение β: $I \to \mathrm{Aut}(E)$, что $\beta(0) = 1$ и $\beta(1)\eta_1(\beta(1))^{-1} = \eta_2$. Следовательно, мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{CD}
E_1 @>{\alpha}>> E_2 \\
@| @VV{\beta(1)^{-1}}V \\
E_1 @>{\gamma}>> E_1
\end{CD}$$

где $\beta(1)$ — изоморфизм $C^{p,q+1}$-модулей (так как $\beta(1)\eta_1 = \eta_2\beta(1)$) и $\gamma = \beta(1)^{-1}\alpha$. Значит, $d(E_1, E_2, \alpha) = d(E_1, E_2, \gamma) = 0$, поскольку автоморфизмы γ и Id_{E_1} связаны гомотопией $t \mapsto \beta(t)^{-1}\alpha = \beta(t)^{-1}$.

Оставляем читателю тривиальную проверку того, что эти два гомоморфизма обратны друг к другу. $\square$

4.23. *Начиная с этого места мы отождествляем группы $K^{p,q}(\mathscr{C})$ и $K'^{p,q}(\mathscr{C})$ посредством изоморфизма, определенного в 4.22. Мы отождествляем также группы $K^{p,q}(X)$ и $K'^{p,q}(X)$.*

4.24. Определение групп $K^{p,q}(X)$ в терминах градуирований можно рассматривать с различных точек зрения. Однако наиболее полезный аспект данного определения — это возможность определить интересные классифицирующие пространства для функторов $K^{p,q}$. Более точно, мы уже знаем, что $K^{0,0}(X) \approx [X, \mathbb{Z} \times \mathrm{BGL}(k)]$ и $K^{0,1}(X) \approx [X, \mathrm{GL}(k)]$ (4.12, II.1.33 и II.3.17). Тем же самым методом можно доказать, что $K_{\mathbb{R}}^{0,4}(X) \approx [X, \mathbb{Z} \times \mathrm{BGL}(\mathbb{H})]$ и $K_{\mathbb{R}}^{0,5}(X) = [X, \mathrm{GL}(\mathbb{H})]$. В силу периодичности групп $K^{p,q}$ (4.11) остается рассмотреть еще четыре случая. Впрочем, рассматриваемый ниже метод работает во всех восьми случаях.

4.25. Пусть A — произвольное кольцо с единицей и (M_r) — последовательность объектов категории $\mathcal{P}(A^0)$ [1]. Мы скажем, что последовательность (M_r) *конфинальна* в $\mathcal{P}(A)^0$, если $M_r \oplus M_s = M_{r+s}$ и каждый объект из $\mathcal{P}(A)^0$ является прямым слагаемым некоторого M_r. Например, для $A = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ модули $M_r = \mathbb{R}^r \oplus \mathbb{R}^r$ образуют конфинальную систему, а модули $M_r = \mathbb{R}^r \oplus 0$ — нет (заметим, что $\mathcal{P}(A) \sim \mathcal{P}(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}(\mathbb{R})$; см. 4.7).

4.26. Предложение. *Пусть (M_r) — конфинальная система объектов категории $\mathcal{P}(C^{p,q+1})^0$. Тогда каждый элемент из $K^{p,q}(X)$ может быть представлен в виде $d(T_r, \eta_{(r)}, \eta)$, где $(T_r, \eta_{(r)})$ — тривиальное $C^{p,q+1}$-векторное расслоение $X \times M_r$, а η — градуирование $C^{p,q}$-расслоения, подстилающего T_r. Равенство $d(T_r, \eta_{(r)}, \eta) = d(T_r, \eta_{(r)}, \zeta)$ эквивалентно существованию такого натурального числа s, что $\eta \oplus \eta_{(s)}$ гомотопно $\zeta \oplus \eta_{(s)}$ в множестве градуирований объекта $T_r \oplus T_s = T_{r+s}$ (рассматриваемого как $C^{p,q}$-модуль).*

Доказательство. Согласно теореме 4.8, категория $\mathcal{E}(X)^{p,q+1}$ эквивалентна $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}(X)$, $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}(X)$, $\mathcal{E}_{\mathbb{H}}(X)$ или произведению двух из этих категорий. Следовательно, произвольное $C^{p,q+1}$-расслоение E является прямым слагаемым некоторого тривиального расслоения $X \times M$, где $M \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{P}(C^{p,q+1})^0$. Так как M есть прямое слагаемое модуля M_r для некоторого r, то расслоение E является прямым слагаемым расслоения $X \times M_r$. Поэтому, если $d(E, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \in K^{p,q}(X)$, то мы можем представить этот элемент (после прибавления тройки вида (F, ξ, ξ)) как $d(T_r, \eta_{(r)}, \eta)$ для некоторого r.

Предположим теперь, что $d(T_r, \eta_{(r)}, \eta) = d(T_r, \eta_{(r)}, \zeta)$. Согласно 4.19, существует такая тройка (T, T, ξ), которую можно считать имеющей вид $(T_u, T_u, \eta_{(u)})$, что $\eta_{(r)} \oplus \zeta \oplus \eta_{(u)}$ и $\eta \oplus \eta_{(r)} \oplus \eta_{(u)}$ — гомотопные градуирования объекта $T_r \oplus T_r \oplus T_u$. Отсюда следует, что для $s = r + u$ градуирования $\zeta \oplus \eta_{(s)}$ и $\eta \oplus \eta_{(s)}$ гомотопны. □

4.27. Теорема. *Пусть (M_r) — конфинальная система объектов $\mathcal{P}(C^{p,q+1})^0$ и $\mathrm{Grad}^{p,q}(M_r)$ — пространство градуирований $C^{p,q}$-модуля, подстилающего M_r. Тогда для компактного пространства X имеют место естественные изоморфизмы*

$$K_{\mathbb{R}}^{p,q}(X) \approx \operatorname{inj\,lim}\,[X, \mathrm{Grad}^{p,q}(M_r)] \approx [X, \mathrm{Grad}^{p,q}(\mathbb{R})],$$

где $\mathrm{Grad}^{p,q}(\mathbb{R}) \approx \operatorname{inj\,lim}\,\mathrm{Grad}^{p,q}(M_r)$.

Доказательство. Данное утверждение является простой переформулировкой предложения 4.26. □

4.28. Пространства $\mathrm{Grad}^{p,q}(\mathbb{R})$ могут быть описаны в более привычных терминах. Мы сейчас подробно опишем случай $p = 1$ и $q = 0$. Все другие случаи рассматриваются аналогичным образом.

---

[1] Через $\mathcal{P}(A)^0$ обозначается категория конечно-порожденных проективных левых A-модулей.

В случае $p=1$, $q=0$ алгебра Клиффорда $C^{p,q+1}$ (соотв. $C^{p,q}$) изоморфна алгебре $M_2(\mathbb{R})$ (соотв. $\mathbb{C}$). Возьмем последовательность $M_r=\mathbb{R}^{2r}=\mathbb{R}^r\oplus\mathbb{R}^r$, где M_r рассматриваются как $C^{p,q+1}$-модули относительно автоморфизмов

$$e_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} \text{ и } e_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Градуирование M_r, рассматриваемого как $C^{p,q}$-модуль,— это просто антилинейный инволютивный автоморфизм $\eta\colon \mathbb{C}^r\to\mathbb{C}^r$ (т. е. такой автоморфизм, что $\eta^2=1$ и $\eta(\lambda x)=\bar\lambda\eta(x)$ для $\lambda\in\mathbb{C}$). Группа $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ транзитивно действует на пространстве $\mathrm{Grad}^{1,0}(M_r)$ по формуле $\alpha\cdot\eta=\alpha\eta\alpha^{-1}$, и стационарная подгруппа элемента e_2 может быть отождествлена с $\mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$. Следовательно, непрерывное отображение $\varphi\colon \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})\to\mathrm{Grad}^{1,0}e(M_r)$, определенное формулой $\alpha\mapsto\alpha e_2\alpha^{-1}$, индуцирует непрерывную биекцию $\bar\varphi$ из $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})/\mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$ на $\mathrm{Grad}^{1,0}(M_r)$. Для доказательства того, что $\bar\varphi$—гомеоморфизм, достаточно построить локальное сечение $s\colon V\to\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ отображения φ в окрестности V каждой точки $\eta_0\in\mathrm{Grad}^{1,0}(M_r)$. Если $\varphi(\alpha_0)=\eta_0$, положим просто $s(\eta)=(1+\eta\eta_0)/2$ для $\eta\in V$. Переходя к индуктивному пределу, заключаем, что пространства $\mathrm{Grad}^{1,0}(\mathbb{R})$ и $\mathrm{GL}(\mathbb{C})/\mathrm{GL}(\mathbb{R})$ гомеоморфны. Если мы аналогичным образом рассмотрим остальные семь случаев, то получим следующую теорему.

4.29. Теорема. *Пусть X—компактное пространство. Тогда имеют место естественные изоморфизмы*

$$K_{\mathbb{R}}^{p,q}(X)\approx[X,\mathrm{Grad}^{p,q}(\mathbb{R})],$$

где пространства $\mathrm{Grad}^{p,q}(\mathbb{R})$ *зависят только от разности* $p-q \bmod 8$ *и определяются приводимой ниже таблицей:*

$p-q \bmod 8$	$\mathrm{Grad}^{p,q}(\mathbb{R})$
0	$\mathbb{Z}\times BGL(\mathbb{R})\sim\mathbb{Z}\times \mathrm{GL}(\mathbb{R})/\mathrm{GL}(\mathbb{R})\times \mathrm{GL}(\mathbb{R})$
-1	$\mathrm{GL}(\mathbb{R})\sim\mathrm{GL}(\mathbb{R})\times\mathrm{GL}(\mathbb{R})/\mathrm{GL}(\mathbb{R})$
-2	$\mathrm{GL}(\mathbb{R})/\mathrm{GL}(\mathbb{C})$
-3	$\mathrm{GL}(\mathbb{C})/\mathrm{GL}(\mathbb{H})$
-4	$\mathbb{Z}\times BGL(\mathbb{H})\sim\mathbb{Z}\times \mathrm{GL}(\mathbb{H})/\mathrm{GL}(\mathbb{H})\times \mathrm{GL}(\mathbb{H})$
-5	$\mathrm{GL}(\mathbb{H})\sim\mathrm{GL}(\mathbb{H})\times\mathrm{GL}(\mathbb{H})/\mathrm{GL}(\mathbb{H})$
-6	$\mathrm{GL}(\mathbb{H})/\mathrm{GL}(\mathbb{C})$
-7	$\mathrm{GL}(\mathbb{C})/\mathrm{GL}(\mathbb{R})$

В этом списке вложения $\mathrm{GL}(\mathbb{C}) \subset \mathrm{GL}(\mathbb{R})$ и $\mathrm{GL}(\mathbb{H}) \subset \mathrm{GL}(\mathbb{C})$ индуцированы вложениями $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \subset \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ и $\mathrm{GL}_n(\mathbb{H}) \subset \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C})$ (3.25). Следует отметить, что с точностью до гомотопии можно заменить однородные пространства, содержащиеся в этой таблице, их ортогональными, унитарными или симплектическими аналогами (это вытекает из полярного разложения автоморфизмов, см. Шевалле [1]). Тогда мы получаем, в том же порядке, следующие пространства: $\mathbb{Z} \times \mathrm{BO}$, O, O/U, U/Sp, $\mathbb{Z} \times \mathrm{BSp}$, Sp, Sp/U, U/O.

4.30. Замечание. Аналогично и более просто можно доказать, что в комплексной K-теории имеют место изоморфизмы $K_{\mathbb{C}}^{p,q}(X) \approx \approx [X, \mathrm{Grad}^{p,q}(\mathbb{C})]$, где $\mathrm{Grad}^{p,q}(\mathbb{C}) \sim \mathbb{Z} \times \mathrm{BGL}(\mathbb{C})$, если $p-q$ четно, и $\mathrm{Grad}^{p,q}(\mathbb{C}) \sim \mathrm{GL}(\mathbb{C})$, если $p-q$ нечетно.

5. Функторы $K^{p,q}(X, Y)$ и изоморфизм t. Периодичность в вещественной K-теории

5.1. Определение группы $K^{p,q}(X)$ в терминах градуирований (4.15) может быть обобщено на *относительный* случай $K^{p,q}(X, Y)$, где Y — замкнутое подпространство компактного пространства X. С этой целью рассмотрим множество троек (E, η_1, η_2), где E — $C^{p,q}$-векторное расслоение на X и η_1, η_2 — такие градуирования E, что $\eta_1|_Y = \eta_2|_Y$. Определим группу $K^{p,q}(X, Y)$ как факторгруппу свободной абелевой группы, порожденной этими тройками, по подгруппе, порожденной соотношениями

(i) $(E, \eta_1, \eta_2) + (F, \zeta_1, \zeta_2) = (E \oplus F, \eta_1 \oplus \zeta_1, \eta_2 \oplus \zeta_2)$;

(ii) $(E, \eta_1, \eta_2) = 0$, если градуирования η_1 и η_2 *гомотопны*, т. е. если существует такое непрерывное отображение $\eta\colon I \to \mathrm{Grad}(E)$, что $\eta(0) = \eta_1$, $\eta(1) = \eta_2$ и $\eta(t)|_Y = \eta_1|_Y = \eta_2|_Y$.

5.2. Часть предложений и лемм, доказанных в предыдущем параграфе, справедлива и для групп $K^{p,q}(X, Y)$. Например, легко видеть, что тензорное произведение расслоений индуцирует на $K^{p,q}(X, Y)$ структуру $K(X)$-модуля (ср. с 4.13) и что группы $K^{p,q}(X, Y)$ с точностью до изоморфизма зависят только от разности $p-q \bmod 8$ ($\bmod 2$ в комплексном случае). Доказательства лемм 4.16—4.17, предложения 4.19 и их следствий также переносятся на относительный случай. Кроме того, из доказательства предложения 4.26 вытекает следующее утверждение. Каждый элемент группы $K^{p,q}(X, Y)$ может быть представлен в виде $d(T_r, \eta_{(r)}, \eta)$, причем $d(T_r, \eta_{(r)}, \eta) = d(T_r, \eta_{(r)}, \zeta)$ тогда и только тогда, когда $\eta \oplus \eta_{(s)}$ гомотопно $\zeta \oplus \eta_{(s)}$ в множестве градуирований расслоения $T_r \oplus T_s = T_{r+s}$ (рассматриваются лишь гомотопии, постоянные над Y). Другими словами, группа $K^{p,q}(X, Y)$ может быть отождествлена с множеством гомотопических классов непрерывных отображений $\check{\eta}\colon X \to \mathrm{Grad}^{p,q}(k)$, $k = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, таких что $\check{\eta}(Y) = \{e_{p+q+1}\}$, где e_{p+q+1} — отмеченная точка пространства $\mathrm{Grad}^{p,q}(k)$.

5.3. Теорема. *Проекция p: $(X, Y) \to (X/Y, \{y\})$ индуцирует изоморфизм*

$$K^{p,q}(X/Y, \{y\}) \to K^{p,q}(X, Y).$$

Доказательство. Это немедленно следует из наблюдений, сделанных в п. 5.2. $\square$

5.4. Теорема. *Имеет место точная последовательность*

$$K^{p,q}(X, Y) \xrightarrow{i^*} K^{p,q}(X) \xrightarrow{j^*} K^{p,q}(Y).$$

Кроме того, если Y — ретракт пространства X, то имеет место расщепляющаяся точная последовательность

$$0 \to K^{p,q}(X, Y) \xrightarrow{i^*} K^{p,q}(X) \xrightarrow{j^*} K^{p,q}(Y) \to 0.$$

Доказательство. Ясно, что композиция $K^{p,q}(X, Y) \xrightarrow{i^*} K^{p,q}(X) \xrightarrow{j^*} K^{p,q}(Y)$ является нулевым гомоморфизмом. Пусть теперь $d(E, \eta_1, \eta_2)$ — такой элемент группы $K^{p,q}(X)$, что $j^*(d(E, \eta_1, \eta_2)) = d(E|_Y, \eta_1|_Y, \eta_2|_Y) = 0$. В силу 4.20, над пространством Y существует такая тройка (F, ζ, ζ), что $\eta_1|_Y \oplus \zeta$ и $\eta_2|_Y \oplus \zeta$ гомотопны. Так как любое $C^{p,q+1}$-расслоение является прямым слагаемым тривиального $C^{p,q+1}$-расслоения (ср. с доказательством предложения 4.26), мы можем предположить, что (F, ζ) является ограничением на Y некоторого $C^{p,q+1}$-расслоения (G, ξ). Заменяя тройку (E, η_1, η_2) тройкой $(E \oplus G, \eta_1 \oplus \xi, \eta_2 \oplus \xi)$, мы можем, таким образом, без ограничения общности считать, что $\eta_1|_Y$ и $\eta_2|_Y$ гомотопны. Следовательно, существует такое непрерывное отображение η: $I \to \mathrm{Grad}(E|_Y)$, что $\eta(0) = \eta_1|_Y$ и $\eta(1) = \eta_2$. Согласно лемме 4.21, мы можем считать, что $\eta(t) = \beta(t)\eta_1\beta(t)^{-1}$, где β: $I \to \mathrm{Aut}(E|_Y)$ — непрерывное отображение с $\beta(0) = 1$. В силу теоремы 4.8 мы можем рассматривать E как вещественное, комплексное или кватернионное расслоение (или сумму двух таких расслоений). Поэтому из предложения II.2.24 следует, что $\beta(t) = \alpha(t)|_Y$, где α: $I \to \mathrm{Aut}(E)$ — непрерывное отображение с $\alpha(0) = 1$. Полагая $\eta_2' = \beta(1)\eta_1\beta(1)^{-1}$, мы видим, что $d(E, \eta_1, \eta_2) = d(E, \eta_1, \eta_2')$. Так как $\eta_1|_Y = \eta_2'|_Y$, то элемент $d(E, \eta_1, \eta_2) = d(E, \eta_1, \eta_2')$ принадлежит образу i^*.

Предположим теперь, что Y — ретракт пространства X. Для доказательства того, что точная последовательность расщепляется, достаточно установить инъективность гомоморфизма $K^{p,q}(X, Y) \to K^{p,q}(X)$. Пусть $d(E, \eta_1, \eta_2)$ — некоторый элемент из $K^{p,q}(X, Y)$. Согласно 5.2 и 4.26, мы можем считать, что $E = X \times M_r$ и $\eta_1 = \eta_{(r)}$. Следовательно, η_1 и η_2 можно рассматривать как непрерывные отображения (также обозначаемые через η_1 и η_2) из X в $\mathrm{Grad}^{p,q}(M_r)$ (4.27), такие что $\eta_1|_Y = \eta_2|_Y$. Предположим, что образ элемента $d(E, \eta_1, \eta_2)$ в группе $K^{p,q}(X)$ равен 0. Тогда, после стабилизации, найдется такое непрерывное отображение η: $X \times I \to \mathrm{Grad}^{p,q}(M_r)$, что $\eta(x, 0) = \eta_1(x)$ и $\eta(x, 1) = \eta_2(x)$ (4.26). Согласно лемме 4.21, существует непрерывное отображение $\beta\colon X\times I\to \mathrm{Aut}(M_r)$, для которого $\beta(x, 0)=1$, причем $\eta_2(x)=\beta(x, 1)\eta_1(x)(\beta(x, 1))^{-1}$. Пусть $r\colon X\to Y$ — ретракция и $\gamma\colon X\times I\to \mathrm{Aut}(M_r)$ — непрерывное отображение, определенное равенством $\gamma(x, t)=\beta(r(x), t)$. Тогда в группе $K^{p,q}(X, Y)$ выполнены следующие равенства:

$$\begin{aligned} d(E, \eta_1(x), \eta_2(x)) &= d(E, \eta_1(x), \beta(x, 1)\eta_1(x)\beta(x, 1)^{-1}) \\ &= d(E, \gamma(x, 1)\eta_1(x)\gamma(x, 1)^{-1}, \beta(x, 1)\eta_1(x)\beta(x, 1)^{-1}) \\ &= d(E, \gamma(x, t)\eta_1(x)\gamma(x, t)^{-1}, \beta(x, t)\eta_1(x)\beta(x, t)^{-1}) \\ &= d(E, \eta_1(x), \eta_1(x))=0 \end{aligned}$$

(заметим, что $\gamma(x, 1)\eta_1(x)\gamma(x, 1)^{-1}=\eta_1(x)$, так как отображение $\eta_1(x)$ постоянно). □

5.5. Следствие. *Если X — компактное пространство и Y — его замкнутое подпространство, то $K^{p,q}(X/Y)\approx K^{p,q}(X, Y)\oplus K^{p,q}(P)$, где P — точка.*

5.6. Следствие. *Если Y — ретракт пространства X, то имеет место точная расщепляющаяся последовательность*

$$0\to K^{p,q}(X/Y, P)\to K^{p,q}(X, P)\to K^{p,q}(Y, P)\to 0.$$

Доказательство. Утверждение непосредственно следует из коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & K^{p,q}(X/Y, P) \arrow[r] \arrow[d, "\approx"'] & K^{p,q}(X, P) \arrow[r] \arrow[d] & K^{p,q}(Y, P) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K^{p,q}(X, Y) \arrow[r] \arrow[d] & K^{p,q}(X) \arrow[r] \arrow[d] & K^{p,q}(Y) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & 0 & K^{p,q}(P) \arrow[r, "\approx"] \arrow[d] & K^{p,q}(P) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & & 0 & 0 & \end{tikzcd}$$

□

5.7. Предложение. *Группы $K^{0,0}(X, Y)$ и $K^{0,1}(X, Y)$ (соотв. $K_{\mathbb{R}}^{0,4}(X, Y)$ и $K_{\mathbb{R}}^{0,5}(X, Y)$) как $K(X)$-модули (соотв. $K_{\mathbb{R}}(X)$-модули) канонически изоморфны группам $K(X, Y)$ и $K^{-1}(X, Y)$ (соотв. $K_{\mathbb{H}}(X, Y)$ и $K_{\mathbb{H}}^{-1}(X, Y)$).*

Доказательство. Определим гомоморфизм

$$g\colon K^{0,0}(X, Y)\to K(X, Y),$$

полагая $g(d(E, \eta_1, \eta_2))=d(E_1^0, E_2^0, \alpha)$, где $E_i^0=\mathrm{Ker}((1-\eta_i)/2)$ и $\alpha\colon E_1^0|_Y\to E_2^0|_Y$ — изоморфизм отождествления (заметим, что $\eta_1|_Y=\eta_2|_Y$). Если пространство Y пусто, то гомоморфизм g является обратным к изоморфизму $K^{0,0}(X) \approx K(X)$ (см. 4.12). Следовательно, в этом случае g — изоморфизм. Гомоморфизм g является изоморфизмом также в случае, когда Y — ретракт пространства X (например, когда Y — точка). Это следует из диаграммы

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K^{0,0}(X,Y) \arrow[r] \arrow[d] & K^{0,0}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\approx"] & K^{0,0}(Y) \arrow[r] \arrow[d, "\approx"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K(X,Y) \arrow[r] & K(X) \arrow[r] & K(Y) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

в которой горизонтальные строки являются точными последовательностями (5.4 и II.2.29). Наконец, если Y — произвольное пространство, то имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} K^{0,0}(X/Y, \{y\}) \arrow[r, "\approx"] \arrow[d, "g'"] & K^{0,0}(X, Y) \arrow[d, "g"] \\ K(X/Y, \{y\}) \arrow[r, "\approx"] & K(X,Y) \end{tikzcd}$$

горизонтальные стрелки которой суть изоморфизмы (5.3 и II.2.35). Так как $\{y\}$ — ретракт пространства X/Y, то гомоморфизм g' также является изоморфизмом. Следовательно, g — изоморфизм, как и требовалось. Кроме того, из формулы $g(d(E, \eta_1, \eta_2)) = d(E_1^0, E_2^0, \alpha)$ немедленно следует, что g является гомоморфизмом $K(X)$-модулей.

Тем же самым методом можно получить изоморфизм

$$g^{-1}\colon K^{0,1}(X, Y) \to K^{-1}(X, Y).$$

Более точно, каждый элемент из группы $K^{0,1}(X, Y)$ представляется в виде $d(E, \varepsilon, \eta_1, \eta_2)$, где (E, ε) — $C^{0,1}$-расслоение (т. е. ε — инволюция на E) и η_1, η_2 — градуирования на E (т. е. такие инволюции, что $\eta_i\varepsilon = -\varepsilon\eta_i$). Положим $g^{-1}(d(E, \varepsilon, \eta_1, \eta_2)) = d(F, \alpha)$, где $F = \operatorname{Ker}((1-\varepsilon)/2)$ и α — ограничение на F автоморфизма $\eta_2\eta_1$ (ср. II.3.25). Если пространство Y пусто, то очевидно, что g^{-1} является обратным гомоморфизмом к изоморфизму, определенному в 4.12. Следовательно, используя те же рассуждения, что и ранее (см. 5.5), мы получаем, что гомоморфизм g^{-1} является изоморфизмом и в общем случае. Далее, из формулы $g^{-1}(d(E, \varepsilon, \eta_1, \eta_2)) = d(E, \alpha)$ вытекает, что g^{-1} — изоморфизм $K(X)$-модулей

По тому же образцу доказываются изоморфизмы $K_{\mathbb{R}}(X)$-модулей $K_{\mathbb{R}}^{0,4}(X, Y) \approx K_{\mathbb{H}}(X, Y)$ и $K_{\mathbb{R}}^{0,5}(X, Y) \approx K_{\mathbb{H}}^{-1}(X, Y)$. □

5.8. Отождествляя группы $K(Z, T)$ и $K^{0,0}(Z, T)$, нетрудно получить еще одну формулу для произведения

$$K(X, X') \times K(Y, Y') \to K(X \times X', X \times Y' \cup X' \times Y),$$

где X и Y — компактные пространства, X' и Y' — замкнутые подмножества в X и Y соответственно (см. II.5.6). А именно, положим

$$d(E, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \cup d(F, \eta_1, \eta_2) = d(E \boxtimes F, \zeta_1, \zeta_2),$$

где

$$\zeta_1 = \varepsilon_1 \boxtimes \frac{1+\eta_1}{2} + \varepsilon_2 \boxtimes \frac{1-\eta_1}{2},$$

$$\zeta_2 = \varepsilon_1 \boxtimes \frac{1+\eta_2}{2} + \varepsilon_2 \boxtimes \frac{1-\eta_2}{2}.$$

Эти формулы согласованы со сложением троек, и если $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ или $\eta_1 = \eta_2$, то $\zeta_1 = \zeta_2$; поэтому приведенная формула для $\cup$-произведения корректна. Для того чтобы проверить, что она задает „правильное" $\cup$-произведение, в силу II.5.6 достаточно рассмотреть лишь случай, когда $X' = Y' = \varnothing$. В этом случае мы можем положить $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = 1$ и $\eta_1 = -\eta_2 = 1$. Тогда $\zeta_1 = -\zeta_2 = 1$ (см. 4.12). Значит, очевидным образом определенная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} K^{0,0}(X) \times K^{0,0}(Y) & \longrightarrow & K^{0,0}(X \times Y) \\ \wr\wr & & \wr\wr \\ K(X) \times K(Y) & \longrightarrow & K(X \times Y) \end{array}$$

коммутативна.

5.9. Для каждой пары чисел (p, q) мы определим сейчас фундаментальный гомоморфизм

$$t\colon K^{p,q+1}(X, Y) \to K^{p,q}(X \times B^1, X \times S^0 \cup Y \times B^1).$$

Для этого возьмем произвольный элемент $d(E, \eta_1(x), \eta_2(x))$ из группы $K^{p,q+1}(X, Y)$, где x — некоторая точка пространства X. Обозначим через $\pi\colon X \times B^1 \to X$ проекцию на первый сомножитель и отождествим B^1 с полуокружностью $B^1 = \{e^{i\theta}\colon 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\}$. Наконец, пусть E' — $C^{p,q}$-расслоение, подстилающее $C^{p,q+1}$-расслоение E, и $\varepsilon(x)$ — градуирование E', превращающее его в $C^{p,q+1}$-расслоение. Зададим на векторном расслоении $\pi^*(E') = E' \times B^1$ два семейства градуирований ζ_1 и ζ_2, полагая

$$\zeta_i(x, \theta) = \varepsilon(x) \cos\theta + \eta_i(x) \sin\theta.$$

Над пространством $X \times S^0 \cup Y \times B^1$ мы имеем $\zeta_1 = \zeta_2$. Кроме того, соответствие $(E, \eta_1, \eta_2) \mapsto (\pi^*(E'), \zeta_1, \zeta_2)$ согласовано со сложением троек и с гомотопиями градуирований. Следовательно, гомоморфизм t корректно определен.

5.10. Фундаментальная теорема. *Определенный выше гомоморфизм*

$$t\colon K^{p,q+1}(X, Y) \to K^{p,q}(X \times B^1, X \times S^0 \cup Y \times B^1)$$

является изоморфизмом.

Доказательству этой теоремы будет посвящен § 6. А сейчас мы выведем из фундаментальной теоремы ряд интересных следствий, в частности вещественную периодичность Ботта, которая является нашей главной целью.

5.11. Теорема. *Группы $K^{p,q+n}(X, Y)$ и $K^{p,q}(X\times B^n, X\times S^{n-1}\cup Y\times B^n)$ канонически изоморфны.*

Доказательство. Это немедленно получается из теоремы 5.10 индукцией по n. □

5.12. Теорема. *Группы $K^{p,q}(X, Y)$ и $K^{p-q}(X, Y)$ для $p\leqslant q$ канонически изоморфны.*

Доказательство. Так как группы $K^{p,q}(X, Y)$ с точностью до изоморфизма зависят только от разности $p-q$ (4.11 и 5.2), то мы можем предположить, что $p=0$. В этом случае из 5.7 и 5.11 следует, что $K^{0,q}(X, Y)\approx K^{0,0}(X\times B^q, X\times S^{q-1}\cup Y\times B^q)\approx K^{-q}(X, Y)$ (II.4.11). □

5.13. Теорема (слабая периодичность Ботта). *Группы $K_{\mathbb{C}}^{-n}(X, Y)$ (соотв. $K_{\mathbb{R}}^{-n}(X, Y)$) периодичны по n с периодом 2 (соотв. с периодом 8).*

Доказательство. Согласно 5.2 и 4.11, группы $K_{\mathbb{C}}^{0,n}(X, Y)$ (соотв. $K_{\mathbb{R}}^{0,n}(X, Y)$) периодичны с периодом 2 (соотв. с периодом 8). Отсюда и из теоремы 5.12 следует требуемое утверждение. □

5.14. Теорема. *Группы $K_{\mathbb{R}}^{-n}(X, Y)$ и $K_{\mathbb{H}}^{-n-4}(X, Y)$ (соотв. $K_{\mathbb{H}}^{-n}(X, Y)$ и $K_{\mathbb{R}}^{-n-4}(X, Y)$) канонически изоморфны.*

Доказательство. Согласно 5.11 и 5.13, достаточно показать, что $K_{\mathbb{H}}(X, Y)\approx K_{\mathbb{R}}^{-4}(X, Y)$. Но $K_{\mathbb{H}}(X, Y)\approx K_{\mathbb{R}}^{0,4}(X, Y)\approx K_{\mathbb{R}}^{0,0}(X\times B^4, X\times S^3\cup Y\times B^4)\approx K_{\mathbb{R}}^{-4}(X, Y)$ в силу 5.7 и 5.11. □

5.15. Теорема. *Определим $K^n(X, Y)$ для $n>0$ как группу $K^{n,0}(X, Y)$. Тогда для любого $p\in\mathbb{Z}$ имеет место точная последовательность*

$$K^{p-1}(X)\to K^{p-1}(Y)\to K^p(X, Y)\to K^p(X)\to K^p(Y).$$

Доказательство. Так как группы $K^n(X, Y)$ периодичны с периодом 8 (или даже с периодом 2), то они совпадают с группами $K^{n-8r}(X, Y)$ при сколь угодно больших $r>0$, так что нашу теорему достаточно доказать для случая, когда $p\leqslant 0$. Но для этого случая теорема уже доказана в II.4.13. □

5.16. Замечание. Эта теорема завершает реализацию плана, намеченного в II.3.1.

5.17. Теорема (сильная периодичность Ботта). *Группа $K_{\mathbb{R}}^{-8}(P)=K_{\mathbb{R}}(B^8, S^7)$ изоморфна группе $\mathbb{Z}$. Умножение на образующую этой группы индуцирует изоморфизм вещественной периодичности*

$$\beta_{\mathbb{R}}\colon K_{\mathbb{R}}^{-n}(X, Y)\xrightarrow{\approx} K_{\mathbb{R}}^{-n-8}(X, Y)$$

(см. II.5.26). Точно также группа $K_{\mathbb{C}}^{-2}(P)=K_{\mathbb{C}}(B^2, S^1)$ изоморфна $\mathbb{Z}$, и умножение на образующую этой группы индуцирует изоморфизм

комплексной периодичности (ср. с 1.3)

$$K_{\mathbf{O}}^{-n}(X, Y) \to K_{\mathbf{C}}^{-n-2}(X, Y).$$

Наконец, изоморфизм между $K_{\mathbf{R}}^{-n}(X, Y)$ *и* $K_{\mathbf{H}}^{-n-4}(X, Y)$ *опять-таки индуцируется умножением на образующую группы* $K_{\mathbf{H}}^{-4}(P) \approx \mathbf{Z}$.

Доказательство. Докажем лишь первое утверждение, поскольку два других устанавливаются совершенно аналогично. В силу теоремы о вырезании (II.4.15) мы можем считать, что Y пусто и $n=0$. В этом случае композиция

$$K_{\mathbf{R}}(X) \xrightarrow{\approx} K_{\mathbf{R}}^{0,0}(X) \xrightarrow{\approx} K_{\mathbf{R}}^{0,8}(X) \xrightarrow{\approx} K_{\mathbf{R}}^{0,0}(X\times B^8,\ X\times S^7) \approx K_{\mathbf{R}}(X\times B^8,\ X\times S^7)$$

является изоморфизмом $K_{\mathbf{R}}(X)$-модулей (см. 5.7 и 5.9). Следовательно, этот изоморфизм задается умножением на образ единичного элемента из кольца $K_{\mathbf{R}}(X)$, который принадлежит подгруппе $K_{\mathbf{R}}(B^8,\ S^7) \subset K_{\mathbf{R}}(X\times B^8,\ X\times S^7)$. □

5.18. Теорема. *Имеет место точная последовательность*

$$K_{\mathbf{R}}^{n-1}(X, Y) \xrightarrow{c} K_{\mathbf{O}}^{n-1}(X, Y) \xrightarrow{\gamma} K_{\mathbf{R}}^{n+1}(X, Y) \xrightarrow{r} K_{\mathbf{R}}^{n}(X, Y) \xrightarrow{c} K_{\mathbf{O}}^{n}(X, Y).$$

В этой последовательности гомоморфизм c: $K_{\mathbf{R}}^{n}(X, Y) \to K_{\mathbf{O}}^{n}(X, Y)$ *индуцирован комплексификацией векторных расслоений (2.6). Гомоморфизм* $K_{\mathbf{R}}^{n+1}(X, Y) \to K_{\mathbf{R}}^{n}(X, Y)$ *индуцирован умножением на образующую группы* $K_{\mathbf{R}}^{-1}(P) = \pi_0(\mathrm{GL}(\mathbf{R})) = \mathbf{Z}/2$. *Наконец, гомоморфизм* $K_{\mathbf{C}}^{n-1}(X, Y) \to K_{\mathbf{R}}^{n+1}(X, Y)$ *является композицией гомоморфизма овеществления (обозначаемого через* r*) и изоморфизма периодичности*

$$\beta_{\mathbf{C}}\colon K_{\mathbf{O}}^{n-1}(X, Y) \to K_{\mathbf{O}}^{n+1}(X, Y).$$

Доказательство. Группа $K_{\mathbf{R}}^{1,0}(X) = K_{\mathbf{R}}^{1}(X)$ является группой Гротендика функтора φ: $\mathscr{C}^{1,1} \to \mathscr{C}^{1,0}$, где $\mathscr{C} = \mathscr{E}_{\mathbf{R}}(X)$. Поэтому мы имеем точную последовательность

$$K^{-1}(\mathscr{C}^{1,1}) \to K^{-1}(\mathscr{C}^{1,0}) \to K(\varphi) \to K(\mathscr{C}^{1,1}) \to K(\mathscr{C}^{1,0})$$

(см. II.3.22), т. е. последовательность

$$K_{\mathbf{R}}^{-1}(X) \to K_{\mathbf{O}}^{-1}(X) \to K_{\mathbf{R}}^{1}(X) \to K_{\mathbf{R}}(X) \to K_{\mathbf{O}}(X)$$

(заметим, что, в силу 4.8, $\mathscr{C} \sim \mathscr{C}^{1,1}$).

Заменяя пространство X парой (X, Y) или, еще лучше, парой $(X\times B^p,\ X\times S^{p-1} \cup Y\times B^p)$ и применяя теоремы о вырезании (II.2.35, II.4.15 и 5.3), мы снова получнм точную последовательность. В случае $p = -n \bmod 8$ она превращается в последовательность, указанную в формулировке теоремы.

Теперь нам остается лишь описать гомоморфизмы этой точной последовательности, что является весьма непростым делом.

Гомоморфизм $K_{\mathbb{R}}^{n}(X, Y) \to K_{\mathbb{C}}^{n}(X, Y)$ индуцирован функтором φ и поэтому, в силу 4.9, равен c.

Гомоморфизм $K_{\mathbb{C}}^{-1}(X) \to K_{\mathbb{R}}^{1}(X)$ в рассматриваемой точной последовательности может быть описан следующим образом. Пусть $\mathscr{C}' = \mathscr{E}_{\mathbb{R}}(X)^{\mathbb{C}} = \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(X)$. Тогда мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C}^{1,1} \arrow[r] & \mathscr{C}^{1,0} \\
\mathscr{C}'^{1,1} \arrow[r] \arrow[u] & \mathscr{C}'^{1,0} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Эквивалентности категорий $\mathscr{C}'^{1,1} \sim \mathscr{C}'$ и $\mathscr{C}'^{1,0} \sim \mathscr{C}' \times \mathscr{C}'$, индуцированные изоморфизмами $C^{1,1} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \approx M_2(\mathbb{C})$ и $C^{1,0} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \approx \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, позволяют записать эту диаграмму в виде

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C} \arrow[r, "\varphi"] & \mathscr{C}' \\
\mathscr{C}' \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[u, "\mathscr{R}"] & \mathscr{C}' \times \mathscr{C}' \arrow[u, "\theta"']
\end{tikzcd}$$

где функторы φ', θ, φ, $\mathscr{R}$ определяются так. Каждый объект категории $\mathscr{C}'^{1,1}$ может быть представлен в виде $F = E \oplus E$, где $E \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}')$, и действие алгебры $C^{1,1}$ задается автоморфизмами

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, функтор $\mathscr{C}' \to \mathscr{C}'^{1,1} \to \mathscr{C}'^{1,0} \sim \mathscr{C}'^{0,1}$ действует на объект E по правилу $E \mapsto (E \oplus E, e_1, e_2) \mapsto (E \oplus E, ie_1)$. С другой стороны, инволюции

$$ie_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad e_1 e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

сопряжены посредством автоморфизма

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\varphi'(E) \approx E \oplus E$, и функтор φ' изоморфен диагональному функтору $\mathscr{C}' \to \mathscr{C}' \times \mathscr{C}'$.

Рассмотрим теперь композицию функторов

$$\mathscr{C}' \times \mathscr{C}' \longrightarrow \mathscr{C}'^{0,1} \longrightarrow \mathscr{C}'^{1,0} \longrightarrow \mathscr{C}^{1,0},$$

задаваемую соответствиями

$$(E, F) \mapsto (E \oplus F, \varepsilon) \mapsto (E \oplus F, i\varepsilon) \mapsto (E_{\mathbb{R}} \oplus F_{\mathbb{R}}, i\varepsilon),$$

где

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$E_{\mathbb{R}}$ и $F_{\mathbb{R}}$ — вещественные расслоения, подстилающие соответственно расслоения E и F, и $i\varepsilon$ обозначает действие алгебры $C^{1,0}$ на $(E \oplus F)_{\mathbb{R}}$. Вычисления, аналогичные проделанным выше, показывают, что функтор θ: $\mathscr{C}' \times \mathscr{C}' \longrightarrow \mathscr{C}'$ задается правилом $(E, F) \mapsto E \oplus \overline{F}$. Наконец, в силу 4.9 функтор φ (соотв. $\mathscr{R}$) индуцирован комплексификацией (соотв. овеществлением). Данная выше диаграмма категорий индуцирует коммутативную диаграмму K-групп (ср. II.3.21)

$$\begin{array}{ccc} K_{\mathbb{C}}^{-1}(X) \approx K^{-1}(\mathscr{C}) & \xrightarrow{\partial} & K(\varphi) = K_{\mathbb{R}}^{1}(X) \\ \uparrow{\scriptstyle u} & & \uparrow{\scriptstyle r} \\ K_{\mathbb{C}}^{-1}(X) \oplus K_{\mathbb{C}}^{-1}(X) \approx K^{-1}(\mathscr{C}') \oplus K^{-1}(\mathscr{C}') & \xrightarrow{\partial'} & K(\varphi') = K_{\mathbb{C}}^{1}(X) \approx K_{\mathbb{C}}^{-1}(X) \end{array}$$

где u действует по правилу $(x, y) \mapsto x + \overline{y}$ (т. е. индуцировано функтором θ). Если x — элемент из $K_{\mathbb{C}}^{-1}(X)$, то мы можем представить его в виде $x = u(x, 0)$. Так как связывающий гомоморфизм ∂' отождествляет первое слагаемое $K_{\mathbb{C}}^{-1}(X)$ суммы $K_{\mathbb{C}}^{-1}(X) \oplus K_{\mathbb{C}}^{-1}(X)$ с группой $K_{\mathbb{C}}^{1}(X) \approx K_{\mathbb{C}}^{-1}(X)$ (см. 4.12), то $\gamma(x) = (\partial u)(x, 0) = (r\partial')(x)\ (r\beta_{\mathbb{C}})(x)$.

Нам остается определить гомоморфизм σ: $K_{\mathbb{R}}^{n+1}(X) \longrightarrow K_{\mathbb{R}}^{n}(X)$. Так как это гомоморфизм $K_{\mathbb{R}}(X)$-модулей, то мы имеем $\sigma(x) = x \cup \sigma(1)$, где $\sigma(1)$ — образ единичного элемента при гомоморфизме σ: $K_{\mathbb{R}}(P) \longrightarrow K_{\mathbb{R}}^{-1}(P)$, получающемся, если положить $n = -1$ и $X = P$ (точка). Рассмотрим точную последовательность

$$K_{\mathbb{C}}(P) \xrightarrow{r} K_{\mathbb{R}}(P) \xrightarrow{\sigma} K_{\mathbb{R}}^{-1}(P).$$

Так как гомоморфизм r *не* является сюръективным, то $\sigma(1)$ — нетривиальный элемент группы $K_{\mathbb{R}}^{-1}(P) = \mathbb{Z}/2$ (II.3.20). Это завершает доказательство теоремы 5.18. ▯

5.19. Теорема. *Группы* $K_{\mathbb{C}}^{-n}(P)$, $K_{\mathbb{R}}^{-n}(P)$ *и* $K_{\mathbb{H}}^{-n}(P)$ *задаются следующей таблицей:*

n mod 8	$K_{\mathbb{C}}^{-n}(P)$	$K_{\mathbb{R}}^{-n}(P)$	$K_{\mathbb{H}}^{-n}(P)$
0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
1	0	$\mathbb{Z}/2$	0
2	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2$	0
3	0	0	0
4	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
5	0	0	$\mathbb{Z}/2$
6	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}/2$
7	0	0	0

Кроме того, если r (соотв. c)—гомоморфизм овеществления (соотв. гомоморфизм комплексификации) и если u (соотв. v) — образующая группы $K_{\mathbb{C}}^{-2}(P)$ (соотв. $K_{\mathbb{R}}^{-8}(P)$), то $u^4 = c(v)$ и элемент $w = r(u^2)$ является образующей группы $K_{\mathbb{R}}^{-4}(P)$. Если η — образующая группы $K_{\mathbb{R}}^{-1}(P)$, то $\eta^2 = r(u)$ — образующая группы $K_{\mathbb{R}}^{-2}(P)$ и $w^2 = 4v$.

Доказательство. Имеют место очевидные равенства $K_{\mathbb{R}}^{-1}(P) = \pi_0(\mathrm{GL}(\mathbb{R})) = Z/2$, $K_{\mathbb{C}}^{-1}(P) = \pi_0(\mathrm{GL}(\mathbb{C})) = 0$, $K_{\mathbb{H}}^{-1}(P) = K_{\mathbb{H}}^{-5}(P) = \pi_0(\mathrm{GL}(\mathbb{H})) = 0$. С другой стороны, элементарные вычисления показывают, что $K_{\mathbb{R}}^{-2}(P) \approx \pi_1(\mathrm{GL}(\mathbb{R})) \approx Z/2$, причем образующей группы $K_{\mathbb{R}}^{-2}(P)$ является гомотопический класс петли

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & \dots \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Следовательно, отображение $K_{\mathbb{C}}^{-2}(P) \longrightarrow K_{\mathbb{R}}^{-2}(P)$ сюръективно. Рассмотрим теперь точную последовательность

$$\begin{tikzcd} K_{\mathbb{C}}^{-3}(P) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, equal] & K_{\mathbb{R}}^{-1}(P) \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, equal] & K_{\mathbb{R}}^{-2}(P) \arrow[r, "c"] & K_{\mathbb{C}}^{-2}(P) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, equal] & K_{\mathbb{R}}(P) \arrow[d, equal] \\ 0 & \mathbb{Z}/2 & & \mathbb{Z} \arrow[r, "2"] & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

Так как гомоморфизм σ в этой диаграмме есть гомоморфизм умножения на η, то η^2 — образующая группы $K_{\mathbf{R}}^{-2}(P)$. Кроме того, мы имеем $K_{\mathbf{H}}^{-2}(P)=\pi_1(\mathrm{GL}(\mathbf{H}))=0$.

Так как композиция cr есть умножение на 2 и $K_{\mathbf{R}}^{-4}(P)\approx K_{\mathbf{C}}^{-4}(P)\approx\mathbf{Z}$ (2.7 и 5.4), то точные последовательности

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbf{Z} \arrow[d, equal] & \mathbf{Z} \arrow[d, equal] \\
K_{\mathbf{C}}^{-5}(P) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, equal] & K_{\mathbf{R}}^{-3}(P) \arrow[r, "\sigma"] & K_{\mathbf{R}}^{-4}(P) \arrow[r, "c"] & K_{\mathbf{C}}^{-4}(P) \\
K_{\mathbf{C}}^{-9}(P) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, equal] & K_{\mathbf{R}}^{-7}(P) \arrow[r, "\sigma"] & K_{\mathbf{R}}^{-8}(P) \arrow[r, "c"] \arrow[d, equal] & K_{\mathbf{C}}^{-8}(P) \arrow[d, equal] \\
0 & & \mathbf{Z} & \mathbf{Z}
\end{tikzcd}$$

показывают, что $K_{\mathbf{R}}^{-3}(P)=K_{\mathbf{R}}^{-7}(P)=0$.

С другой стороны, элемент u^4 является образующей группы $K_{\mathbf{C}}^{-8}(P)$, поскольку изоморфизм периодичности в комплексной K-теории задается умножением на u (1.3 и 5.17). Точная последовательность

$$\begin{tikzcd}
K_{\mathbf{R}}^{-7}(P) \arrow[r] \arrow[d, equal] & K_{\mathbf{R}}^{-8}(P) \arrow[r, "c"] & K_{\mathbf{C}}^{-8}(P) \arrow[r] & K_{\mathbf{R}}^{-6}(P) \arrow[d, equal] \\
0 & & & 0
\end{tikzcd}$$

показывает, что $u^4=c(v)$, где v — образующая группы $K_{\mathbf{R}}^{-8}(P)$.

Из точной последовательности

$$\begin{tikzcd}
K_{\mathbf{C}}^{-4}(P) \arrow[r, "r"] & K_{\mathbf{R}}^{-4}(P) \arrow[r, "\sigma"] & K_{\mathbf{R}}^{-5}(P) \arrow[d, equal] \\
 & & 0
\end{tikzcd}$$

вытекает, что элемент $w=r(u^2)$ является образующей группы $K_{\mathbf{R}}^{-4}(P)$. Так как $c(w)=(cr)(u^2)=u^2+u^2=2u^2$ (2.7), то $c(w^2)=(c(w))^2=4u^4=4c(v)$. Поскольку гомоморфизм c инъективен на группе $K_{\mathbf{R}}^{-8}(P)$, то мы имеем $w^2=4v$. $\square$

5.20. Замечание. Из точной последовательности

$$\begin{tikzcd}
K_{\mathbf{R}}^{-4}(P) \arrow[r, "c"] & K_{\mathbf{C}}^{-4}(P) \arrow[r, "\gamma"] & K_{\mathbf{R}}^{-2}(P) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr"] & K_{\mathbf{R}}^{-3}(P) \arrow[d, equal] \\
 & & \mathbf{Z}/2 & 0
\end{tikzcd}$$

вытекает, что гомоморфизм $\mathbb{Z} \approx K_{\mathbb{R}}^{-4}(P) \to K_{\mathbb{C}}^{-4}(P) \approx \mathbb{Z}$ есть гомоморфизм умножения на 2. Следовательно, гомоморфизм овеществления $K_{\mathbb{C}}^{-4}(P) \to K_{\mathbb{R}}^{-4}(P)$ является изоморфизмом. Так как изоморфизм периодичности $K^{-n} \approx K^{-n-8}$ согласован с гомоморфизмами овеществления и комплексификации, то мы имеем аналогичные результаты для групп $K_{\mathbb{R}}^{-8p-4}$, $K_{\mathbb{C}}^{-8p-4}$ и т. д.

5.21. Очевидно, что теорему 5.19 можно сформулировать в гомотопических терминах (ср. с 2.3). Однако, рассматривая итерированные пространства петель для групп $GL(\mathbb{R})$ и $GL(\mathbb{H})$, нетрудно получить существенно лучшие результаты. Для этого мы должны несколько изменить определение гомоморфизма t, которое было дано в 5.10. Если ε и η — антикоммутирующие градуирования, то имеет место равенство

$$\varepsilon\cos\theta+\eta\sin\theta=\left(\cos\frac{\theta}{2}+\eta\varepsilon\sin\frac{\theta}{2}\right)\varepsilon\left(\cos\frac{\theta}{2}-\eta\varepsilon\sin\frac{\theta}{2}\right).$$

Используя обозначения п. 5.9, положим $t(d(E, \eta_1, \eta_2)) = d(\pi^*(E'), \xi_1, \xi_2)$, где $\xi_1(x, \theta)=\eta_1(x)$ и

$$\xi_2(x,\theta)=\left(\cos\frac{\theta}{2}-\eta_1(x)\,\varepsilon(x)\sin\frac{\theta}{2}\right)(\varepsilon(x)\cos\theta+\eta_2(x)\sin\theta)\times\left(\cos\frac{\theta}{2}+\eta_1(x)\,\varepsilon(x)\sin\frac{\theta}{2}\right)\qquad(0\leqslant\theta\leqslant\pi).$$

Непосредственно из определения следует, что гомоморфизм t индуцирует непрерывное отображение

$$T\colon \operatorname{Grad}^{p,\,q+1}(k)\to\Omega\operatorname{Grad}^{p,\,q}(k)$$

($k=\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$; см. 4.28, 4.29 и 5.2). Более подробно, если (M_r) — кофинальная система $C^{p,\,q+2}\otimes_{\mathbb{R}} k$-модулей, то, как нетрудно видеть из таблицы алгебр Клиффорда (3.24), она является также кофинальной системой $C^{p,\,q+1}\otimes_{\mathbb{R}} k$-модулей. Если (M_r) рассматривается как система $C^{p,\,q+1}\otimes_{\mathbb{R}} k$-модулей, мы будем обозначать ее через (M_r^0). Определим теперь непрерывное отображение из $\operatorname{Grad}(M_r)$ в $\Omega\operatorname{Grad}(M_r^0)$, полагая $\eta\mapsto\xi$. Здесь ξ — петля

$$\xi(e^{i\theta})=\left(\cos\frac{\theta}{4}-\eta_r\varepsilon\sin\frac{\theta}{4}\right)\left(\varepsilon\cos\frac{\theta}{2}+\eta\sin\frac{\theta}{2}\right)\times\left(\cos\frac{\theta}{4}+\eta_r\varepsilon\sin\frac{\theta}{4}\right),\qquad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,$$

и ε — последняя образующая алгебры Клиффорда $C^{p,\,q+1}$, которая берется в качестве отмеченной точки пространства $\operatorname{Grad}(M_r^0)$. Так как t — изоморфизм (5.10) и

$$\operatorname{Grad}^{p,\,q+1}(k)\sim\operatorname{inj\,lim}\operatorname{Grad}(M_r),\ \operatorname{Grad}^{p,\,q}(k)\sim\operatorname{inj\,lim}\operatorname{Grad}(M_r^0),$$

то T — слабая гомотопическая эквивалентность [1]. Анализируя пространства $\mathrm{Grad}^{p,q}$ так, как это было сделано в 4.28 и 4.29, мы получаем следующую теорему.

5.22. Теорема (Ботт [1]). *Имеют место слабые гомотопические эквивалентности* [2]

$$\begin{aligned}
&\mathrm{GL}(\mathbb{R}) \sim \Omega(\mathbb{Z}\times \mathrm{BGL}(\mathbb{R})), \text{ или } \mathrm{O}\sim\Omega(\mathbb{Z}\times\mathrm{BO}),\\
&\mathrm{GL}(\mathbb{R})/\mathrm{GL}(\mathbb{C}) \sim \Omega(\mathrm{GL}(\mathbb{R})), \text{ или } \mathrm{O/U}\sim\Omega(\mathrm{O}),\\
&\mathrm{GL}(\mathbb{C})/\mathrm{GL}(\mathbb{H}) \sim \Omega(\mathrm{GL}(\mathbb{R})/\mathrm{GL}(\mathbb{C})), \text{ или } \mathrm{U/Sp}\sim\Omega(\mathrm{O/U}),\\
&\mathbb{Z}\times\mathrm{BGL}(\mathbb{H}) \sim \Omega(\mathrm{GL}(\mathbb{C})/\mathrm{GL}(\mathbb{H})), \text{ или } \mathbb{Z}\times\mathrm{BSp}\sim\Omega(\mathrm{U/Sp}),\\
&\mathrm{GL}(\mathbb{H}) \sim \Omega(\mathbb{Z}\times\mathrm{BGL}(\mathbb{H})), \text{ или } \mathrm{Sp}\sim\Omega(\mathbb{Z}\times\mathrm{BSp})\\
&\mathrm{GL}(\mathbb{H})/\mathrm{GL}(\mathbb{C}) \sim \Omega(\mathrm{GL}(\mathbb{H})), \text{ или } \mathrm{Sp/U}\sim\Omega(\mathrm{Sp}),\\
&\mathrm{GL}(\mathbb{C})/\mathrm{GL}(\mathbb{R}) \sim \Omega(\mathrm{GL}(\mathbb{H})/\mathrm{GL}(\mathbb{C})), \text{ или } \mathrm{U/O}\sim\Omega(\mathrm{Sp/U}),\\
&\mathbb{Z}\times\mathrm{BGL}(\mathbb{R}) \sim \Omega(\mathrm{GL}(\mathbb{C})/\mathrm{GL}(\mathbb{R})), \text{ или } \mathbb{Z}\times\mathrm{BO}\sim\Omega(\mathrm{U/O}),\\
&\mathrm{GL}(\mathbb{C}) \sim \Omega(\mathbb{Z}\times\mathrm{BGL}(\mathbb{C})), \text{ или } \mathrm{U}\sim\Omega(\mathbb{Z}\times\mathrm{BU}),\\
&\mathbb{Z}\times\mathrm{BGL}(\mathbb{C}) \sim \Omega(\mathrm{GL}(\mathbb{C})), \text{ или } \mathbb{Z}\times\mathrm{BU}\sim\Omega(\mathrm{U}).
\end{aligned}$$

В частности, каждое пространство из этого списка имеет тот же самый слабый гомотопический тип, что и его 8-кратное пространство петель (2-кратное пространство петель для двух последних строк списка).

5.23. Замечание. Слабые гомотопические эквивалентности вида $G\sim\Omega(\mathbb{Z}\times \mathrm{B}G)=\Omega(\mathrm{B}G)$, где $G=\mathrm{GL}(\mathbb{R})$, $\mathrm{GL}(\mathbb{C})$, $\mathrm{GL}(\mathbb{H})$ или O, U, Sp, могут быть доказаны „элементарными" методами. Остальные эквивалентности из предыдущего списка нетривиальны.

5.24. Замечание. Можно превратить эти „стабильные" гомотопические эквивалентности в „нестабильные" изоморфизмы вида $\pi_i(\mathrm{Grad}(M_r))\approx\pi_{i+1}(\mathrm{Grad}(M_r^0))$ для достаточно больших r (ср. I.3.13). Например, если $2p>i+1$, мы имеем $\pi_i(\mathrm{O}(2p)/\mathrm{U}(p))\approx\pi_{i+1}(\mathrm{O}(2p))$ и т. д.

5.25. Пример. Для того чтобы проиллюстрировать теорему 5.22, дадим точное описание слабой гомотопической эквивалентности между $\mathrm{Grad}^{0,2}(\mathbb{R})$ и $\Omega(\mathrm{Grad}^{0,1}(\mathbb{R}))$, т. е. между $\mathrm{GL}(\mathbb{R})/\mathrm{GL}(\mathbb{C})$ и $\Omega(\mathrm{GL}(\mathbb{R}))$. В качестве кофинальной системы $C^{0,3}$-модулей выберем пространства $M_r=\mathbb{C}^r\oplus\mathbb{C}^r$ (рассматриваемые как *вещественные* векторные пространства), с действием алгебры Клиффорда, задаваемым формулами

$$e_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\quad e_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad e_3=\begin{pmatrix}0&i\\-i&0\end{pmatrix}.$$

[1] Отображение $T\colon Z\to Z'$ называется *слабой гомотопической эквивалентностью*, если для любого компактного пространства X оно индуцирует биекцию $[X,Z]\approx[X,Z']$. * В рассматриваемой здесь ситуации отображение T фактически является гомотопической эквивалентностью, поскольку все наши пространства имеют гомотопический тип клеточных разбиений (см. Милнор [1]).*

[2] В действительности, гомотопические эквивалентности; см. предыдущее подстрочное примечание.

Как легко проверить, градуирования пространства M_r, рассматриваемого как $C^{0,2}$-модуль, должны иметь вид

$$\begin{pmatrix} 0 & J \\ -J & 0 \end{pmatrix},$$

где $J^2 = -1$. Следовательно, пространство $\operatorname{Grad}(M_r)$ можно отождествить с пространством комплексных структур на $\mathbb{R}^{2r}$. С другой стороны, пространство $\operatorname{Grad}(M_r^0)$ отождествляется с пространством автоморфизмов пространства $\mathbb{C}^r \oplus \mathbb{C}^r$ (рассматриваемого как вещественное векторное пространство), которые представляются в виде

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\operatorname{Grad}(M_r^0)$ можно отождествить с группой $\mathrm{GL}_{2r}(\mathbb{R})$. Положим $\eta_r = e_3$ и

$$\eta = \begin{pmatrix} 0 & J \\ -J & 0 \end{pmatrix}.$$

Короткое вычисление показывает, что

$$\xi(e^{i\theta}) = \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\theta/2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + J\sin\frac{\theta}{2}\right) \\ e^{i\theta/2}\left(\cos\frac{\theta}{2} - J\sin\frac{\theta}{2}\right) & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, *петля в* $\mathrm{GL}_{2r}(\mathbb{R})$, *ассоциированная с комплексной структурой* $J \in \mathrm{GL}_{2r}(\mathbb{R})/\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$, *определяется формулой*

$$e^{i\theta} \mapsto e^{-i\theta/2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + J\sin\frac{\theta}{2}\right), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

Переходя к пределу, мы получаем требуемую гомотопическую эквивалентность $\mathrm{GL}(\mathbb{R})/\mathrm{GL}(\mathbb{C}) \sim \Omega(\mathrm{GL}(\mathbb{R}))$. Предлагаем читателю в качестве упражнения явно описать остальные девять гомотопических эквивалентностей из теоремы 5.22.

Упражнения: 4, 5, 13—15.

6. Доказательство фундаментальной теоремы

6.1. Целью настоящего параграфа является доказательство теоремы 5.10, из которой в § III.5 мы вывели периодичность Ботта. Так же как и теорема 1.3, теорема 5.10 получается применением одного общего результата о банаховых алгебрах (6.12; ср. с 1.11). Докажем вначале некоторые вспомогательные леммы.

6.2. Прежде всего покажем, что теорему 5.10 достаточно доказать лишь в случае, когда пространство Y пусто. Действительно, коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
K^{p,q+1}(X, Y) & \xrightarrow{t} & K^{p,q}(X\times B^1, X\times S^0\cup Y\times B^1)\\
\wr\| & & \wr\| \\
K^{p,q+1}(X/Y, \{y\}) & \xrightarrow{t} & K^{p,q}(X/Y\times B^1, X/Y\times S^0\cup \{y\}\times B^1)
\end{array}$$

позволяет нам свести теорему 5.10 к случаю, когда Y — точка (ср. с 5.3). Далее, если Y — точка, мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & K^{p,q+1}(X, Y) & \to & K^{p,q+1}(X) & \to & K^{p,q+1}(Y) & \to & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & K^{p,q}(X\times B^1, X\times S^0\cup Y\times B^1) & \to & K^{p,q}(X\times B^1, X\times S^0) & \to & K^{p,q}(Y\times B^1, Y\times S^0) & \to & 0
\end{array}$$

Верхняя строка этой диаграммы точна в силу 5.4. Нижняя строка может быть представлена с точностью до изоморфизма в виде

$$0 \to K^{p,q}(X\times B^1/X\times S^0\cup Y\times B^1,\ *) \to K^{p,q}(X\times B^1/X\times S^0,\ *)$$
$$\to K^{p,q}(Y\times B^1/Y\times S^0,\ *) \to 0,$$

где $*$ — точка. Так как пространство $T = Y\times B^1/Y\times S^0$ является ретрактом пространства $Z = X\times B^1/X\times S^0$ и $X\times B^1/X\times S^0\cup Y\times B^1 \approx Z/T$, то в силу 5.6 эта последовательность точна. Следовательно, теорему 5.10 достаточно доказать для случая, когда Y пусто.

6.3. Если E — некоторое $C^{p,q}$-расслоение, снабженное градуированием ε, то через $\varepsilon(\theta)$ мы будем обозначать градуирование расслоения $p^*(E)$, индуцированного проекцией p: $X\times B^1 \to X$. Вообще, если α — эндоморфизм расслоения $p^*(E)$, мы часто будем подчеркивать зависимость α от точки $e^{i\theta}\in B^1$, записывая его в виде $\alpha(\theta)$ вместо α (напомним, что B^1 отождествляется с верхней полуокружностью; см. 5.9).

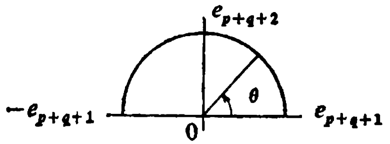


Рис. 15.

Пусть теперь (M_r) — кофинальная система $C^{p,q+2}$-модулей (над $k = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$; см. 4.25). Пусть $E_r = X\times M_r$ и E_r^0 — $C^{p,q}$-расслоение, подстилающее E_r. Если $e_1, \ldots, e_{p+q+2}$ — образующие алгебры Клиффорда $C^{p,q+2}$, то через $\xi_r(\theta)$ будет обозначаться градуирование расслоения $p^*(E_r^0)$, задаваемое равенством $\xi_r(\theta) = e_{p+q+1}\cos\theta + e_{p+q+2}\sin\theta$ (рис. 15). (Как всегда, мы отождествляем образующие алгебры Клиффорда с их действиями на векторных расслоениях.)

6.4. Лемма. *Каждый элемент группы $K^{p,q}(X\times B^1, X\times S^0)$ может быть представлен в виде $d(p^*E_r^0, \xi_r(\theta), \varepsilon(\theta))$, где ε — такое градуирование расслоения $p^*E_r^0$, что $\varepsilon|_{X\times S^0} = \xi_r|_{X\times S^0}$. Этот элемент равен 0 тогда и только тогда, когда существует такой номер s,* *что* $\varepsilon \bigoplus \xi_r$ *гомотопно* ξ_{r+s} *(рассматриваются лишь гомотопии, постоянные над* $X \times S^0$*).*

Доказательство. Согласно 5.2, каждый элемент группы $K^{p,q}(X \times B^1, X \times S^0)$ может быть представлен в виде $d(p^*E_r^0, e_{p+q+1}, \varepsilon'(\theta))$, где ε' — такое градуирование расслоения $p^*E_r^0$, что $\varepsilon'|_{X\times S^0} = e_{p+q+1}$, или, эквивалентно, $\varepsilon'(0) = \varepsilon'(\pi) = e_{p+q+1}$. Применяя внутренний автоморфизм, задаваемый элементом $h_r(0) = \cos\frac{\theta}{2} + e_{p+q+1}e_{p+q+2}\sin\frac{\theta}{2}$, мы получаем, что тройка $(p^*E_r^0, e_{p+q+1}, \varepsilon'(\theta))$ изоморфна тройке $(p^*E_r^0, e_{p+q+1}\cos\theta + e_{p+q+2}\sin\theta, \varepsilon(\theta))$, где

$$\varepsilon(\theta) = \left(\cos\frac{\theta}{2} - e_{p+q+1}e_{p+q+2}\sin\frac{\theta}{2}\right)\varepsilon'(\theta) \times \left(\cos\frac{\theta}{2} + e_{p+q+1}e_{p+q+2}\sin\frac{\theta}{2}\right).$$

Тем самым мы представили каждый элемент из $K^{p,q}(X \times B^1, X \times S^0)$ в требуемом виде. Заметим, что вторая тройка „ближе" к образу t, поскольку элемент $\xi_r(\theta)$ — это элемент $\zeta_1(\theta)$ для некоторого градуирования на $p^*E_r^0$ (см. определение гомоморфизма t в 5.9).

Докажем теперь второе утверждение леммы. Обозначим через e_i^r автоморфизм расслоения E_r или p^*E_r, ассоциированный с i-й образующей e_i алгебры Клиффорда $C^{p,q+2}$. Снова в силу 5.2, из равенства $d(p^*E_r^0, \xi_r(\theta), \varepsilon(\theta)) = 0$ следует существование такого номера s, что градуирование $\varepsilon(\theta) \bigoplus e_{p+q+1}^s$ гомотопно градуированию $\xi_r \bigoplus e_{p+q+1}^s$, причем эта гомотопия постоянна над $X \times S^0$. Подействуем на эту гомотопию внутренним автоморфизмом, определяемым элементом $1 \bigoplus h_s(\theta)$. В результате получим, что градуирования $\varepsilon(\theta) \bigoplus \xi_s$ и ξ_{r+s} связаны гомотопией, постоянной над $X \times S^0$. □

6.5. Лемма. *Каждый элемент группы* $K^{p,q}(X \times B^1, X \times S^0)$ *записывается в виде* $d(p^*E_r^0, \xi_r(\theta), \varepsilon(\theta))$, *где* $\varepsilon(\theta) = f(\theta)e_{p+q+1}f(\theta)^{-1}$, *а* f *— такой автоморфизм расслоения* p^*E, *что*

(i) $f(0) = \mathrm{Id}_{E_r^0}$,

(ii) $e_{p+q+1} \cdot f(\pi) = -f(\pi) \cdot e_{p+q+1}$.

Этот элемент равен нулю тогда и только тогда, когда существует такой номер s, *что* $f \bigoplus h_s$ *и* h_{r+s} *связаны в множестве автоморфизмов расслоения* $p^*E_{r+s}^0$ *гомотопией, которая удовлетворяет условиям* (i) *и* (ii) (заметим, что автоморфизмы $h_s(\theta)$, определенные в доказательстве предыдущей леммы, удовлетворяют условиям (i) и (ii)).

Доказательство. По лемме 4.21 (в которой интервал $[0, 1]$ заменен интервалом $[0, \pi]$) градуирование $\varepsilon(\theta)$ может быть представлено в виде $f(\theta)e_{p+q+1}f(\theta)^{-1}$, где $f(0) = 1$. Так как $\varepsilon(\theta) = \xi_r(\theta) = -e_{p+q+1}$, то условие (ii) выполняется автоматически; однако „поднятие" $f(\theta)$ не единственно.

Предположим теперь, что $d(p^*E_r^0,\ \xi_r(\theta),\ \varepsilon(\theta))=0$, где $\varepsilon(\theta)=f(\theta)\,e_{p+q+1}(f(\theta))^{-1}$. Согласно лемме 6.4, существует такой номер s, что градуирование $\varepsilon\oplus\xi_s$ гомотопно градуированию ξ_{r+s}. Следовательно, существует такое непрерывное отображение $\eta\colon B^1\times I\to\operatorname{Grad}(E_{r+s}^0)$, что $\eta(\theta,\ 0)=\varepsilon(\theta)\oplus\xi_s(\theta)$, $\eta(\theta,\ 1)=\xi_{r+s}(\theta)$, $\eta(0,\ t)=e_{p+q+1}$ и $\eta(\pi,\ t)=-e_{p+q+1}$. Таким образом, мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
B^1\times\{0,1\}\cup\{0\}\times I \arrow[r, "\tilde\eta"] \arrow[d] & \operatorname{Aut}(E_{r+s}^0) \arrow[d, "\gamma"] \\
B^1\times I \arrow[r, "\eta"] \arrow[ur, dashed, "f'"] & \operatorname{Grad}(E_{r+s}^0)
\end{tikzcd}$$

в которой $\gamma(\alpha)=\alpha e_{p+q+1}\alpha^{-1}$, а отображение $\tilde\eta$ определено условиями

$$\tilde\eta(\theta,\ 0)=f(\theta)\oplus h_s(\theta),\quad \tilde\eta(\theta,\ 1)=h_{r+s}(\theta),\quad \tilde\eta(0,\ t)=1.$$

Пары $(B^1\times I,\ B^1\times\{0,\ 1\}\cup\{0\}\times I)$ и $(B^1\times I,\ B^1\times\{0\})$ гомеоморфны. Поэтому лемма 4.21, примененная к векторному расслоению над $X\times B^1$, утверждает существование непрерывного отображения $f'\colon B^1\times I\to\operatorname{Aut}(E_{r+s}^0)$, которое превращает указанную выше прямоугольную коммутативную диаграмму в две треугольные коммутативные диаграммы. Следовательно, выполняются соотношения

$$f'(\theta,\ 0)=f(\theta)\oplus h_s(\theta),\quad f'(\theta,\ 1)=h_{r+s}(\theta),\quad f'(0,\ t)=1$$

и

$$e_{p+q+1}\cdot f'(\theta,\ t)=-f'(\theta,\ t)\cdot e_{p+q+1}.$$

Отсюда вытекает, что f' реализует требуемую гомотопию между градуированиями $f\oplus h_s$ и h_{r+s}. $\square$

6.6. Интерпретируем теперь группу $K^{p,q}(X\times B^1,\ X\times S^0)$ в терминах банаховых алгебр и применим к этой интерпретации доказанную выше лемму. Используя таблицу алгебр Клиффорда, нетрудно убедиться, что $C^{p,q+2}$-модули $N_r=(C^{p,q+2})^r$ образуют кофинальную систему. Если $C(X)$ обозначает алгебру непрерывных функций на пространстве X со значениями в поле $k=\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, то банахова алгебра A, которую мы будем изучать,— это алгебра эндоморфизмов тензорного произведения $C^{p,q+2}\otimes_k C(X)$, рассматриваемого как левый $C^{p,q}\otimes_k C(X)$-модуль (ранга 4). Согласно I.1.12, алгебру A можно также интерпретировать, более „геометрически“, как алгебру автоморфизмов $\operatorname{Aut}(F_1^0)$, где F_1^0—$C^{p,q}$-расслоение, подстилающее $X\times N_1$.

Мы можем рассматривать A как банахову алгебру с инволюцией, определяемой формулой $\alpha\mapsto\bar\alpha=e_{p+q+1}\cdot\alpha e_{p+q+1}^{-1}$. Ясно, что эта инволюция индуцирует инволюцию на алгебре матриц со значениями в A и, значит, инволюцию на группе $\mathrm{GL}_r(A)=\operatorname{Aut}(F_r^0)$, где F_r^0—$C^{p,q}$-расслоение, подстилающее $X\times N_r$. Положим $\mathrm{GL}_r^-(A)=\{\alpha\in\mathrm{GL}_r(A)\,|\,\bar\alpha=-\alpha\}$. В частности, элемент $e=e_{p+q+2}\cdot e_{p+q+1}\in$

$\in GL_1^-(A)$. В качестве отмеченной точки в $GL_{2r}^-(A)$ возьмем диагональную матрицу

$$e'^r = \begin{pmatrix} e & & & & & & \\ & -e & & & 0 & & \\ & & e & & & & \\ & & & -e & & & \\ & 0 & & & e & & \\ & & & & & -e & \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

и положим $GL^-(A) = \operatorname{inj}\lim GL_{2r}(A)$, где индуктивный предел берется относительно системы отображений $\alpha \mapsto \alpha \oplus e'^1$. Обозначим через $\tilde{N}_r$ $C^{p,q+1}$-модуль, подстилающий N_r, и снабдим его структурой $C^{p,q+2}$-модуля, которая получается при изменении знака у автоморфизма e_{p+q+2}. Тогда $C^{p,q+2}$-модули $M_r = N_r \oplus \tilde{N}_r$ также образуют кофинальную систему. Банахова алгебра $\operatorname{End}(E_r^0)$, где E_r^0 — $C^{p,q}$-расслоение, подстилающее расслоение $E_r = X \times M_r$, также наделена инволюцией, задаваемой формулой $\alpha \mapsto \bar{\alpha} = e_{p+q+1} \cdot \alpha \cdot e_{p+q+1}^{-1}$. Поэтому пространство $GL_{2r}^-(A)$ можно отождествить с пространством автоморфизмов α расслоения E_r^0, таких что $\bar{\alpha} = -\alpha$. Заметим, что в этом случае оператор e_{p+q+2} может быть отождествлен с e'^r.

Обозначим через $\Omega(GL_{2r}(A), GL_{2r}^-(A))$ пространство путей f в $GL_{2r}(A)$, параметризованных отрезком $[0, \pi]$ и таких, что $f(0) = 1$ и $f(\pi) \in GL_{2r}^-(A)$. Мы предполагаем, что пространство $\Omega(GL_{2r}(A), GL_{2r}^-(A))$ снабжено компактно-открытой топологией. Положим

$$\pi_1(GL_{2r}(A), GL_{2r}^-(A)) = \pi_0(\Omega(GL_{2r}(A), GL_{2r}^-(A))),$$
$$\pi_1(GL(A), GL^-(A)) = \operatorname{inj}\lim \pi_1(GL_{2r}(A), GL_{2r}^-(A)),$$

где индуктивный предел берется относительно системы отображений $f \mapsto f \oplus h_1$, $h_1(\theta) = \cos\frac{\theta}{2} + e'^1 \sin\frac{\theta}{2}$. Далее, положим

$$h_r(\theta) = \cos\frac{\theta}{2} + e'^r \sin\frac{\theta}{2} = h_1(\theta) \oplus h_1(\theta) \oplus \ldots \oplus h_1(\theta) \quad (r \text{ раз}).$$

Операция взятия прямой суммы матриц индуцирует на множестве $\pi_1(GL(A), GL^-(A))$ структуру моноида. Более подробно, пусть $\alpha \in \Omega(GL_{2r}(A), GL_{2r}^-(A))$ и $\beta \in \Omega(GL_{2s}(A), GL_{2s}^-(A))$. Рассмотрим путь $\alpha \oplus \beta \in \Omega(GL_{2r+2s}(A), GL_{2r+2s}^-(A))$. Нетрудно показать, что пути $\alpha \oplus \beta \oplus h_1 \oplus h_1$ и $\alpha \oplus h_1 \oplus \beta \oplus h_1$ лежат в одной компоненте связности (для этого достаточно заметить, что матрица перестановок гомотопна в группе $SO(2r+2s+4)$ единичной матрице). Следовательно, класс пути $\alpha \oplus \beta$ в $\pi_1(GL(A), GL^-(A))$ зависит только от классов путей α и β в $\pi_1(GL(A), GL^-(A))$. Ассоциативность этой операции и существование нулевого элемента (каковым является класс пути h_r) очевидны.

6.7. Предложение. *Имеет место естественная биекция*

$$K^{p,q}(X\times B^1,\ X\times S^0)\approx\pi_1(\mathrm{GL}(A),\ \mathrm{GL}^-(A)).$$

В частности, операция взятия прямой суммы матриц индуцирует в $\pi_1(\mathrm{GL}(A),\ \mathrm{GL}^-(A))$ *структуру абелевой группы.*

Доказательство. Это утверждение — просто переформулировка леммы 6.5. Более подробно, сопоставим каждому пути $f(\theta)$ в $\mathrm{GL}_{2r}(A)$, у которого $f(0)=1$ и $f(\pi)\in\mathrm{GL}_{2r}^-(A)$, класс эквивалентности тройки $(p^*E_r^0,\ \xi_r(\theta),\ \varepsilon(\theta))$, где $\varepsilon(\theta)=f(\theta)e_{p+q+1}(f(\theta))^{-1}$ (как обычно, мы отождествляем $f(\theta)$ с $\hat f(\theta)$ и $\varepsilon(\theta)$ с $\hat\varepsilon(\theta)$; см. I.1.12). Так как $f(\pi)\in\mathrm{GL}_{2r}^-(A)$, класс эквивалентности этой тройки корректно определен в группе $K^{p,q}(X\times B^1,\ X\times S^0)$ и зависит только от класса пути f в множестве $\pi_1(\mathrm{GL}(A),\ \mathrm{GL}^-(A))$. Согласно 6.5, только что определенное нами отображение из $\pi_1(\mathrm{GL}(A),\ \mathrm{GL}^-(A))$ в $K^{p,q}(X\times B^1,\ X\times S^0)$ является гомоморфизмом моноидов, сюръективным и имеющим нулевое ядро. Следовательно, $\pi_1(\mathrm{GL}(A),\ \mathrm{GL}^-(A))$ — абелева группа и построенный гомоморфизм является изоморфизмом. $\square$

6.8. Группа $K^{p,q+1}(X)$ может быть также отождествлена с группой компонент связности множества $I(A)$, инвариантного относительно инволюции в инволютивной банаховой алгебре A. Пусть G_r — пространство градуирований E_r^1, где E_r^1 — $C^{p,q+1}$-расслоение, подстилающее $C^{p,q+2}$-расслоение $X\times M_r$ (см. 6.6). Тогда G_r состоит из таких элементов η в $\mathrm{End}_{C(X)}(M_r\bigoplus_{\mathbf{k}}C(X))$, что $\eta^2=1$ и $\eta e_i=-e_i\eta$ для $i=1,\ \ldots,\ p+q+1$. Другими словами, элементы η — это антилинейные автоморфизмы A^{2r} (т. е. такие автоморфизмы, что $\eta(\lambda x)=\bar\lambda\eta(x)$ для $\lambda\in A$ и $x\in A^{2r}$), которые антикоммутируют с действием e_i для $i=1,\ \ldots,\ p+q$ (т. е. коммутируют с действием $e_ie_{p+q+1}\in\mathrm{GL}_{2r}^-(A)$). Например, $e_{p+q+2}\in G_r$. Возьмем этот элемент в качестве отмеченной точки и положим $G=\operatorname{inj\,lim}G_r$. Согласно 4.27 и 4.29, имеет место изоморфизм $K^{p,q+1}(X)\approx\pi_0(G)$.

Для того чтобы работать „внутри" групп $\mathrm{GL}_{2r}(A)$ и $\mathrm{GL}(A)$, удобнее рассмотреть пространство $I_r(A)\subset\mathrm{GL}_{2r}(A)$, гомеоморфное G_r. Пространство $I_r(A)$ состоит из таких матриц $g\in\mathrm{GL}_{2r}(A)$, что $\bar g=-g$ и $g^2=-1$. Отображение $g\mapsto g\cdot e_{p+q+1}$ задает гомеоморфизм между пространствами $I_r(A)$ и G_r. Следовательно, $G\approx\operatorname{inj\,lim}I_r(A)\equiv I(A)$, где индуктивный предел берется относительно системы отображений $g\mapsto g\bigoplus e'^1$ (здесь элемент $e'^1=e_{p+q+2}\cdot e_{p+q+1}$ действует на A^2; см. 6.6). Учитывая эти замечания, мы приходим к следующему предложению, аналогичному предложению 6.7.

6.9. Предложение. *Определенное выше отображение является изоморфизмом*

$$K^{p,q+1}(X)\approx\pi_0(I(A)).$$

В частности, операция взятия прямой суммы матриц индуцирует в $\pi_0(I(A))$ *групповую операцию.*

6.10. Всё сказанное выше приводит нас к следующим определениям. Пусть A — банахова алгебра с инволюцией, в которой существует такой элемент e, что $\bar{e} = -e$ и $e^2 = -1$. Положим $\mathrm{GL}_r^-(A) = \{\alpha \in \mathrm{GL}_r(A) \mid \bar{\alpha} = -\alpha\}$. В $\mathrm{GL}_{2r}^-(A)$ рассмотрим отмеченную точку, определяемую матрицей

$$e'^r = \begin{pmatrix} e & & & & & & \\ & -e & & & & 0 & \\ & & e & & & & \\ & & & -e & & & \\ & 0 & & & e & & \\ & & & & & -e & \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Пусть $\Omega(\mathrm{GL}_{2r}(A), \mathrm{GL}_{2r}^-(A))$ — пространство путей $f(\theta)$, параметризованных отрезком $[0, \pi]$, таких что $f(0) = 1$ и $f(\pi) \in \mathrm{GL}_{2r}^-(A)$. Обозначим через $\Omega(\mathrm{GL}(A), \mathrm{GL}^-(A))$ индуктивный предел $\operatorname{inj\,lim} \Omega(\mathrm{GL}_{2r}(A), \mathrm{GL}_{2r}^-(A))$ относительно системы отображений $f \mapsto f \oplus h^1$, где $h^1(\theta) = \cos\frac{\theta}{2} + e'^1 \sin\frac{\theta}{2}$. Определим множество $\pi_1(\mathrm{GL}(A), \mathrm{GL}^-(A))$, полагая

$$\pi_1(\mathrm{GL}(A), \mathrm{GL}^-(A)) = \pi_0(\Omega(\mathrm{GL}(A), \mathrm{GL}^-(A))) = \operatorname{inj\,lim} \pi_0(\Omega(\mathrm{GL}_{2r}(A), \mathrm{GL}_{2r}^-(A))).$$

Аналогично, рассмотрим множество $I_r(A)$, состоящее из таких элементов $g \in \mathrm{GL}_{2r}(A)$, что $\bar{g} = -g$ и $g^2 = -1$. Определим $I(A)$ как индуктивный предел $\operatorname{inj\,lim} I_r(A)$ относительно системы отображений $g \mapsto g \oplus e'^1$.

Множества $I(A)$ и $\Omega(\mathrm{GL}(A), \mathrm{GL}^-(A))$ связаны отображением

$$W\colon I(A) \to \Omega(\mathrm{GL}(A), \mathrm{GL}^-(A)),$$

которое определено формулой $g \mapsto f(\theta) = \cos\frac{\theta}{2} + g \sin\frac{\theta}{2}$ (в действительности эта формула определяет систему отображений из $I_r(A)$ в $\Omega(\mathrm{GL}_{2r}(A), \mathrm{GL}_{2r}^-(A))$ для каждого r и тем самым отображение индуктивных пределов). Отображение W индуцирует отображение

$$w\colon \pi_0(I(A)) \to \pi_1(\mathrm{GL}(A), \mathrm{GL}^-(A)).$$

Ниже (теорема 6.12) мы покажем, что это отображение является изоморфизмом. Согласно 6.7 и 6.9, отсюда будет следовать, что группы $K^{p,q+1}(X)$ и $K^{p,q}(X \times B^1, X \times S^0)$ изоморфны. Однако для этого мы должны сначала проверить, что отображение t в частном случае этих групп совпадает с отображением w (с точностью до изоморфизма).

6.11. **Предложение.** *Пусть A — банахова алгебра $\mathrm{End}(C^{p,q+2} \otimes_k C(X))$, где $C^{p,q+2} \otimes_k C(X)$ рассматривается как $C^{p,q} \otimes_k C(X)$-модуль (или, в обозначениях п. 6.6, $A = \mathrm{End}(F_1^0)$). Тогда имеет место* *коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \pi_0(I(A)) & \xrightarrow{w} & \pi_1(\mathrm{GL}(A), \mathrm{GL}^-(A)) \\ \wr\!\wr & & \wr\!\wr \\ K^{p, q+1}(X) & \xrightarrow{t} & K^{p, q}(X\times B^1, X\times S^0) \end{array}$$

вертикальные изоморфизмы которой определены в 6.7 и 6.8, а гомоморфизмы t и w определены соответственно в 5.9 и 6.10.

Доказательство. Пусть g — некоторый элемент из $I_{2r}(A)$. Тогда ассоциированный с ним элемент группы $K^{p, q+1}(X)$ задается тройкой (E_r, η_1, η_2), где $E_r = X\times M_r$ (в обозначениях п. 6.6), $\eta_1 = e_{p+q+2}$ и $\eta_2 = g\cdot e_{p+q+1}$ (мы опять отождествляем автоморфизм α с отображением $\check{\alpha}$). Следовательно,

$$t(d(E_r, \eta_1, \eta_2)) = d(p^*E_r, \zeta_1(\theta), \zeta_2(\theta)),$$

где

$$\zeta_i(\theta) = e_{p+q+1}\cos\theta + \eta_i \sin\theta = f_i(\theta)\, e_{p+q+1}\cdot (f_i(\theta))^{-1},$$

$$f_1(\theta) = \cos\frac{\theta}{2} + e'\sin\frac{\theta}{2},$$

$$f_2(\theta) = \cos\frac{\theta}{2} + g\sin\frac{\theta}{2}.$$

На основании 6.7 отсюда следует, что наша диаграмма коммутативна. □

Итак, мы получили интерпретацию групп $K^{p, q}(X\times B^1, X\times S^0)$ в терминах банаховых алгебр. Этот „перевод" позволяет свести теорему 5.10 к следующему общему утверждению о банаховых алгебрах.

6.12. Теорема. (Вуд [1]). *Пусть A — банахова алгебра с инволюцией, в которой существует такой элемент e, что $e^2 = -1$ и $\bar{e} = -e$. Тогда определенное в 6.10 отображение*

$$w\colon \pi_0(I(A)) \to \pi_1(\mathrm{GL}(A), \mathrm{GL}^-(A))$$

биективно.

6.13. Так же как в последней части п. 6.6, операция взятия прямой суммы матриц индуцирует на множествах $\pi_0(I(A))$ и $\pi_1(\mathrm{GL}(A), \mathrm{GL}^-(A))$ структуру моноида. Очевидно, что w является гомоморфизмом моноидов. Убедимся теперь, что $\pi_0(I(A))$ — абелева группа (для банаховой алгебры $A = \mathrm{End}(C^{p, q+2}\hat{\otimes}_k C(X))$ это доказано в предложении 6.9; поэтому читатель, интересующийся лишь алгеброй $A = \mathrm{End}(C^{p, q+2}\hat{\otimes}_k C(X))$, может опустить данную проверку).

Если $\alpha, \beta \in I_r(A) \subset \mathrm{GL}_{2r}(A)$, то гомотопия

$$\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2},$$

связывает элементы $\alpha\oplus\beta$ и $\beta\oplus\alpha$ из $I_{2r}(A) \subset \mathrm{GL}_{4r}(A)$. Следовательно, $\pi_0(I(A))$ — абелев моноид. Далее, если $g \in I_r(A)$ и $e' = e'^r$, то мы можем представить $e'\cdot g\cdot e'\oplus g$ в виде произведения матриц

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ -\alpha^{-1} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & e'\\ e' & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\alpha\\ \alpha^{-1} & 1\end{pmatrix},\quad \alpha=e'g,$$

или, эквивалентно, в виде $\beta\cdot e''\cdot\beta^{-1}$, где

$$e''=\begin{pmatrix}0 & e'\\ e' & 0\end{pmatrix}\text{ и }\beta=\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ -\alpha^{-1} & 1\end{pmatrix}.$$

В подгруппе $\mathrm{GL}_{4r}^{+}(A)=\{\gamma\in\mathrm{GL}_{4r}(A)\mid\bar{\gamma}=\gamma\}$ элемент β записывается в виде

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\alpha^{-1} & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Очевидно, что это произведение гомотопно матрице

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Следовательно, элемент $e'\cdot g\cdot e'\oplus g$ гомотопен в множестве $I_{2r}(A)$ произведению матриц

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & e'\\ e' & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1/2\end{pmatrix},$$

которое не зависит от элемента g. Поэтому $e'\cdot g\cdot e'\oplus g$ гомотопен элементу $e'\cdot e'\cdot e'\oplus e'=(-e')\oplus e'$, который совпадает с e'^{2r} с точностью до перестановки координат. Это показывает, что класс элемента $e'\cdot g\cdot e'$ противоположен классу элемента g в абелевом моноиде $\pi_0(I(A))$.

Используя доказываемые ниже леммы, мы установим, что гомоморфизм ϖ сюръективен и что $\operatorname{Ker}\varpi=0$. Отсюда будет следовать, что $\pi_1(\mathrm{GL}(A),\ \mathrm{GL}^-(A))$ также является абелевой группой и что ϖ — изоморфизм абелевых групп.

6.14. Для того чтобы доказать теорему 6.12, мы должны несколько иначе интерпретировать пространство $\Omega(\mathrm{GL}(A),\ \mathrm{GL}^-(A))$. Будем считать, что пути в $\mathrm{GL}(A)$ параметризованы отрезком $[0,\ \pi/2]$. Путь $h(\varphi)=f(2\varphi)$, где $\varphi\in[0,\ \pi/2]$, может быть единственным образом продолжен до периодической функции на $\mathbb{R}$ с периодом 2π, удовлетворяющей условиям

$$h(\varphi+\pi)=-h(\varphi),\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2,$$
$$h(-\varphi)=\overline{h(\varphi)}.$$

Вообще назовем непрерывную функцию α: $\mathbb{R} \to \mathrm{GL}(A)$ *допустимой*, если она периодична с периодом 2π и удовлетворяет условиям

$$\alpha(0)=1,$$
$$\alpha(\varphi+\pi)=-\alpha(\varphi),$$
$$\alpha(-\varphi)=\overline{\alpha(\varphi)}.$$

Если α_0 и α_1 — допустимые функции, то связывающая их *допустимая гомотопия* определяется как такое непрерывное отображение

$$\alpha\colon \mathbb{R}\times I \to \mathrm{GL}(A),$$

что $\alpha(\varphi, 0)=\alpha_0(\varphi)$, $\alpha(\varphi, 1)=\alpha_1(\varphi)$ и функция $\varphi \mapsto \alpha(\varphi, t)$ допустима для каждого $t\in I$. Таким образом, мы получаем биекцию между $\pi_1(\mathrm{GL}(A), \mathrm{GL}^-(A))$ и множеством гомотопических классов допустимых функций из $\mathbb{R}$ в $\mathrm{GL}(A)$. При этом отождествлении элементу $g\in I(A)$ сопоставляется допустимая функция $\varphi\mapsto\alpha(\varphi)=\cos\varphi+g\sin\varphi$ $(\varphi\in\mathbb{R})$. Если положить $\zeta=\cos\varphi+e'\sin\varphi$, то эта функция может быть записана в виде

$$\alpha(\varphi)=\frac{1+ge'}{2}\zeta^{-1}+\frac{1-ge'}{2}\zeta$$

(это выражение имеет смысл в $\mathrm{GL}_{2r}(A)$ для достаточно большого r; стабилизация задается отображением $\alpha\mapsto\alpha\oplus\zeta_1$). Основная идея доказательства теоремы 6.12 состоит в том, чтобы показать, что каждая допустимая функция гомотопна функции вида

$$\frac{1+ge'}{2}\zeta^{-1}+\frac{1-ge'}{2}\zeta.$$

6.15. Определение. Допустимая функция α: $\mathbb{R}\to\mathrm{GL}(A)$ называется *лорановской* (соотв. *квазиполиномиальной*, соотв. *квазиаффинной*), если для достаточно большого r ее можно представить в группе $\mathrm{GL}_{2r}(A)$ в виде $\sum\limits_{n=-N}^{N} a_n\zeta^{2n-1}$ $\left(\text{соотв. } \sum\limits_{n=0}^{N} a_n\zeta^{2n-1}, \text{ соотв. } a_0\zeta^{-1}+a_1\zeta\right)$, где $\bar{a}_n=a_n$. Если α_0 и α_1 — допустимые функции, то связывающая их гомотопия называется *лорановской* (соотв. *квазиполиномиальной*, соотв. *квазиаффинной*), если она может быть представлена в виде $\sum\limits_{n=-N}^{+N} a_n(t)\zeta^{2n-1}$ $\left(\text{соотв. } \sum\limits_{n=0}^{N} a_n(t)\zeta^{2n-1}, \quad \text{соотв. } a_0\zeta^{-1}+a_1\zeta\right)$, где $\overline{a_n}(t)=a_n(t)$ — непрерывная функция переменной t. Обозначим через $\pi_1^L=\pi_1^L(\mathrm{GL}(A), \mathrm{GL}^-(A))$ (соотв. через $\pi_1^P=\pi_1^P(\mathrm{GL}(A), \mathrm{GL}^-(A))$, соотв. через $\pi_1^A=\pi_1^A(\mathrm{GL}(A), \mathrm{GL}^-(A)))$ множество гомотопических классов лорановских (соотв. квазиполиномиальных, соотв. квазиаффинных) допустимых функций.

6.16. Множества π_1^L, π_1^P, π_1^A являются абелевыми моноидами (относительно операции взятия прямой суммы матриц). На самом деле из доказательства теоремы 6.12 будет следовать, что π_1^L, π_1^P, π_1^A — абелевы группы.

Если α — лорановская (соотв. квазиполиномиальная, соотв. квазиаффинная) функция, то мы обозначим через $d_L(\alpha)$ (соотв. $d_P(\alpha)$, соотв. $d_A(\alpha)$) ее класс в абелевом моноиде π_1^L (соотв. π_1^P, соотв. π_1^A). Так как каждая квазиаффинная (соотв. квазиполиномиальная) функция квазиполиномиальна (соотв. лоранова), то мы имеем очевидные гомоморфизмы

$$\pi_1^A \xrightarrow{w_3} \pi_1^P \xrightarrow{w_2} \pi_1^L \xrightarrow{w_1} \pi_1(\mathrm{GL}(A),\ \mathrm{GL}^-(A)).$$

Определим гомоморфизм

$$w_4\colon\ \pi_0(I(A)) \to \pi_1^A$$

формулой

$$g \mapsto \alpha(\varphi) = \frac{1+ge'}{2}\zeta^{-1} + \frac{1-ge'}{2}\zeta.$$

Таким образом, мы получаем разложение гомоморфизма w в композицию гомоморфизмов w_i, $i=1, 2, 3, 4$, как это показано на коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd}
\pi_0(I(A)) \arrow[rr, "w"] \arrow[d, "w_4"'] & & \pi_1(\mathrm{GL}(A); \mathrm{GL}^-(A)) \\
\pi_1^A \arrow[r, "w_3"] & \pi_1^P \arrow[r, "w_2"] & \pi_1^L \arrow[u, "w_1"']
\end{tikzcd}$$

Для доказательства теоремы 6.12 мы должны показать, что каждый гомоморфизм w_i, $i=1, 2, 3, 4$, сюръективен и имеет нулевое ядро. Так как все входящие в диаграмму множества являются абелевыми моноидами, а $\pi_0(I(A))$ есть группа (6.13), отсюда будет следовать, что все w_i (а значит, и w) — изоморфизмы.

6.17. Лемма. *Гомоморфизм w_1 сюръективен и имеет нулевое ядро.*

Доказательство. Мы используем тот же самый метод, который применялся при доказательстве предложения 1.14. Пусть $d(\alpha)$ — некоторый элемент из $\pi_1(\mathrm{GL}(A), \mathrm{GL}^-(A)) = \operatorname{inj\,lim} \pi_1(\mathrm{GL}_{2r}(A), \mathrm{GL}_{2r}^-(A))$. Можно считать, что α — класс эквивалентности отображения (снова обозначаемого через α) из $\mathbb{R}$ в $\mathrm{GL}_{2r}(A)$, периодического с периодом 2π. Положим

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \alpha(\varphi)\cos(m\varphi)\,d\varphi, \quad m > 0,$$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \alpha(\varphi)\sin(m\varphi)\,d\varphi, \quad m > 0,$$

$$\alpha_n(\varphi) = \sum_{m=1}^{n}\left(1-\frac{m}{n}\right)(a_m\cos(m\varphi) + b_m\sin(m\varphi)).$$

Согласно теореме Чезаро, α является равномерным пределом отображений α_n. Так как отображение α допустимо, то $a_m = b_m = 0$ для четных m. Кроме того, $\alpha_n(\varphi+\pi) = -\alpha_n(\varphi)$ и $\alpha_n(-\varphi) = \overline{\alpha_n(\varphi)}$. Поскольку $M_{2r}(A)$ — банахова алгебра, отображение $\alpha_n(\varphi)$ обратимо для достаточно больших n и $\alpha(\varphi) = \lim\limits_{n\to\infty} \tilde{\alpha}_n(\varphi)$, где $\tilde{\alpha}_n(\varphi) = \alpha_n(\varphi)\alpha_n(0)^{-1}$ — допустимые отображения. Наконец, отображения α_n и $\tilde{\alpha}_n$ являются лорановскими, так как $\cos(m\varphi) = \frac{\zeta^m+\zeta^{-m}}{2}$ и $\sin(m\varphi) = \frac{\zeta^m-\zeta^{-m}}{2}\cdot e'^{-1}$ (напомним, что $\zeta = \cos\varphi + e'\sin\varphi$; см. 6.13). Отсюда следует, что гомоморфизм w_1 сюръективен.

Доказательство инъективности гомоморфизма w_1 основывается на тех же самых рассуждениях, примененных к банаховой алгебре $A(I)$. Более подробно, пусть $d_L(\alpha)$ — такой элемент из $\pi_1^L(\mathrm{GL}(A), \mathrm{GL}^-(A))$, что $w_1(d_L(\alpha)) = d(\alpha) = 0$. Если мы рассмотрим α как отображение из $\mathbb{R}$ в $M_{2r}(A)$ для достаточно большого r, то существует гомотопия $\beta(u, \varphi)$, связывающая $\alpha(\varphi)$ и $\zeta(\varphi)$. Пусть $\beta_L(u, \varphi)$ — лорановская аппроксимация этой гомотопии. Если эта аппроксимация достаточно близка к $\beta(u, \varphi)$, то мы имеем $t\beta(u, \varphi) + (1-t)\beta_L(u, \varphi) \in \mathrm{GL}_{2r}(A)$ для $t \in [0, 1]$ (где u — параметр гомотопии). Полагая

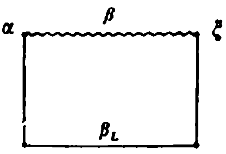


Рис. 16.

$$\tilde{\beta}_L(u, \varphi) = \begin{cases} 3u\beta_L(0, \varphi) + (1-3u)\alpha(\varphi), & 0 \leqslant u \leqslant \frac{1}{3}, \\ \beta_L(3u-1, \varphi), & \frac{1}{3} \leqslant u \leqslant \frac{2}{3}, \\ (3-3u)\beta_L(1, \varphi) + (3u-2)\zeta(\varphi), & \frac{2}{3} \leqslant u \leqslant 1, \end{cases}$$

получаем лорановскую гомотопию, связывающую отображения α и ζ (рис. 16). $\square$

6.18. Лемма. *Гомоморфизм w_2 сюръективен и имеет нулевое ядро.*

Доказательство. а) *Гомоморфизм w_2 сюръективен.* Пусть $\alpha = \sum\limits_{n=-N_1}^{N_2} a_{2n-1}\zeta^{2n-1}$ — допустимая функция, рассматриваемая как отображение из $\mathbb{R}$ в $\mathrm{GL}_{2r}(A)$ (для достаточно большого r), и пусть $\alpha' = \alpha\zeta^2$. Нам достаточно доказать, что $d_L(\alpha) = d_L(\alpha') + d_L(\zeta_{2r}^{-1})$ (мы обозначаем через ζ_{2r} допустимую функцию $\cos\varphi + e'^r\sin\varphi$ из $\mathbb{R}$ в $\mathrm{GL}_{2r}(A)$ и через ζ_{2r}^{-1} — обратную функцию; заметим, что обозначение ζ^{-1} не имеет смысла, если мы не фиксируем числа r) Рассмотрим следующее произведение матриц из группы $\mathrm{GL}_{4r}(A)$:

$$\begin{pmatrix} \alpha'(\varphi) & 0 \\ 0 & \zeta_{2r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \zeta_{2r}^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Для $t \in [0, \pi/2]$ это произведение определяет допустимую лорановскую гомотопию, связывающую $\alpha \oplus \zeta_{2r}$ и $\alpha' \oplus \zeta_{2r}^{-1}$, откуда и вытекает требуемое равенство.

b) $\mathrm{Ker}(w_2) = 0$. Предположим, что $d_L(\alpha) = 0$, где α — квазиполиномиальная функция. Тогда существует лорановская гомотопия $\gamma(\varphi, t)$, связывающая α и ζ. Пусть порядок этой гомотопии равен $-2p-1$ $(p > 1)$. Покажем, что порядок гомотопии может быть увеличен до $-2p+1$ за счет увеличения размера матрицы. Утверждение b) получается отсюда обратной индукцией („индукцией назад") по p.

Так как в нашем случае отображение α квазиполиномиально, то гомотопия между $\alpha \oplus \zeta_{2r}$ и $\alpha\zeta^2 \oplus \zeta_{2r}^{-1}$, задаваемая выписанным выше произведением четырех матриц, является квазиполиномиальной. Данная лорановская гомотопия порядка $-2p-1$ определяет лорановскую гомотопию порядка $-2p+1$, связывающую $\alpha\zeta^2 \oplus \zeta_{2r}^{-1}$ и $\zeta^3 \oplus \zeta_{2r}^{-1}$. Таким образом, мы имеем квазиполиномиальную гомотопию между $\zeta_{2r}^3 \oplus \zeta_{2r}^{-1}$ и $\zeta_{2r} \oplus \zeta_{2r}$. Следовательно,

$$\alpha \sim \alpha \oplus \zeta \sim \alpha\zeta^2 \oplus \zeta^{-1} \sim \zeta^3 \oplus \zeta^{-1} \sim \zeta \oplus \zeta \sim \zeta.$$

Композиция этих трех гомотопий задает требуемую лорановскую гомотопию порядка $-2p+1$, связывающую $\alpha \oplus \zeta$ и $\zeta \oplus \zeta$. □

6.19. Лемма. *Гомоморфизм w_3 сюръективен и имеет нулевое ядро.*

Доказательство. a) *Гомоморфизм w_3 сюръективен.* Пусть $d_P(\alpha)$ — элемент из $\pi_1^P(\mathrm{GL}(A), \mathrm{GL}^-(A))$, где $\alpha(\varphi) = a_{-1}\zeta^{-1} + a_1\zeta + \ldots + a_{2n-1}\zeta^{2n-1} \in \mathrm{GL}_{2r}(A)$, $n > 1$. Докажем, что существует квазиполиномиальная гомотопия, связывающая $\alpha \oplus \zeta_{2r}$ и некоторую допустимую квазиполиномиальную функцию степени $\leqslant 2n-3$. Для этого рассмотрим произведение следующих трех матриц в группе $\mathrm{GL}_{4r}(A)$ (где $\zeta = \zeta_{2r}$):

$$\alpha(t, \varphi) = \begin{pmatrix} 1 & t\zeta^{2n-2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -ta_{2n-1}\zeta^2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - t^2 a_{2n-1}\zeta^{2n-1} & t\zeta^{2n-3} \\ ta_{2n-1}\zeta & \zeta^{-1} \end{pmatrix}.$$

Положим $\tilde{\alpha}(t, \varphi) = \alpha(t, \varphi)\alpha(t, 0)^{-1}$. Тогда $\tilde{\alpha}(t, \varphi)$ будет квазиполиномиальной гомотопией степени $\leqslant 2n-1$, связывающей $\alpha \oplus \zeta^{-1}$ и функцию $\alpha' = \tilde{\alpha}(1, \varphi)$, имеющую степень $\leqslant 2n-3$. Следовательно, мы можем написать

$$d_P(\alpha') = d_P(\alpha') + d_P(\zeta_{2r}^{-1}) = d_P(\alpha) + w_3(d_A(\zeta_{2r}^{-1})).$$

В лемме 6.20 мы независимо от настоящей леммы докажем, что гомоморфизм w_4 сюръективен. Следовательно, $\pi_1^A(\mathrm{GL}(A), \mathrm{GL}^-(A))$ является группой и $d_P(\alpha) = d_P(\alpha') + w_3(-d_A(\zeta_{2r}^{-1}))$. Обратной индукцией по n отсюда получается, что гомоморфизм w_3 сюръективен.

b) $\operatorname{Ker}(w_3)=0$. Используем тот же самый метод, что и при доказательстве утверждения a). Мы должны установить следующий факт: пусть α — квазиполиномиальное отображение степени $\leqslant 2n-3$ $(n>1)$, связанное с ζ гомотопией γ степени $\leqslant 2n-1$ в $\mathrm{GL}_{2r}(A)$; тогда отображения $\alpha\oplus\zeta_{2r}^{-1}$ и $\zeta_{2r}\oplus\zeta_{2r}^{-1}$ связаны гомотопией степени $\leqslant 2n-3$. Положим

$$\gamma(t,\ \varphi)=a_{-1}(t)\,\zeta^{-1}+a_1(t)\,\zeta+\ldots+a_{2n-1}(t)\,\zeta^{2n-1}.$$

Тогда $\gamma(0,\ \varphi)=\alpha$ и $\gamma(1,\ \varphi)=\zeta$. В группе $\mathrm{GL}_{4r}(A)$ рассмотрим матрицу

$$\delta(t,\ \varphi)=\begin{pmatrix}\gamma(t,\ \varphi)-a_{2n-1}(t)\,\zeta^{2n-1} & \zeta^{2n-3}\\ a_{2n-1}(t)\,\zeta & \zeta^{-1}\end{pmatrix}.$$

Эта матрица определяет гомотопию степени $\leqslant 2n-3$, связывающую

$$\delta(0,\ \varphi)=\begin{pmatrix}\alpha & \zeta^{2n-3}\\ 0 & \zeta^{-1}\end{pmatrix}\ \text{и}\ \delta(1,\ \varphi)=\begin{pmatrix}\zeta & \zeta^{2n-3}\\ 0 & \zeta^{-1}\end{pmatrix}.$$

В свою очередь, эти две матрицы могут быть соединены путями степени $\leqslant 2n-3$ с матрицами

$$\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \zeta^{-1}\end{pmatrix}\ \text{и}\ \begin{pmatrix}\zeta & 0\\ 0 & \zeta^{-1}\end{pmatrix}$$

соответственно (рис. 17). Заменяя каждую из этих гомотопий ее нормализацией (*нормализацией* гомотопии $\sigma(t,\ \varphi)$ называется гомотопия $\tilde{\sigma}(t,\ \varphi)=\sigma(t,\ \varphi)\cdot\sigma(t,\ 0)^{-1}$), получаем требуемое утверждение. □

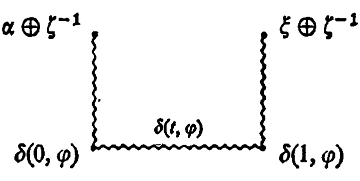


Рис. 17.

6.20. Лемма. *Гомоморфизм w_4 сюръективен и имеет нулевое ядро.*

Доказательство. Пусть $d_A(\alpha)$ — некоторый элемент из $\pi_1^A(\mathrm{GL}(A),\ \mathrm{GL}^-(A))$. Тогда α является классом пути вида $a_{-1}\zeta^{-1}+a_1\zeta$, где $a_{-1}+a_1=1$. Так как $\zeta=\cos\varphi+e'\sin\varphi$, то α может быть записан в виде $\cos\varphi+g\sin\varphi$, где g — такой элемент из $\mathrm{GL}(A)$, что $\bar{g}=-g$ и $g-\lambda$ обратим для любого вещественного числа λ. Обозначим через $J(A)$ пространство таких автоморфизмов g. Тогда $\pi_1^A(\mathrm{GL}(A),\ \mathrm{GL}^-(A))$ можно отождествить с $\pi_0(J(A))$. С другой стороны, $I(A)$ является подмножеством в $J(A)$, состоящим из автоморфизмов, которые удовлетворяют дополнительному условию $g^2=-1$. Поэтому всё, что остается доказать,— это что вложение $I(A)$ в $J(A)$ индуцирует биекцию $\pi_0(I(A))\approx\pi_0(J(A))$.

Пусть $g\in J(A)$ и $A'=A\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}$. Возьмем элемент $\beta=\beta_{-1}z^{-1}+\beta_1z$, где $\beta_1=\dfrac{1+ig}{2}$ и $\beta_{-1}=\dfrac{1-ig}{2}$ рассматриваются как функции переменной $z \in S^1$. Представляя z в виде $z=\cos\varphi+i\sin\varphi$, сразу видим, что β обратим и, значит, принадлежит группе $\mathrm{GL}(A'\langle z, z^{-1}\rangle)$. Вычисления, выполненные в 1.24 (в несколько иных обозначениях), показывают, что если представить β^{-1} в виде $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_{2n+1} z^{2n+1}$, то $\beta_1\gamma_{-1}$ — проектор. Следовательно, $\hat{g}=\frac{2\beta_1\gamma_{-1}-1}{i} \in \mathrm{GL}(A')$ и $\hat{g}^2=-1$. Кроме того, так как применение инволюции к элементу β заключается в замене z на z^{-1}, то $\bar{\hat{g}}=-\hat{g}$ относительно инволюции, заданной в алгебре A. Далее, элемент g самосопряжен относительно операции комплексного сопряжения, так как на β эта операция состоит в замене z на z^{-1} и i на $-i$. Поэтому $\hat{g} \in \mathrm{GL}(A) \subset \mathrm{GL}(A')$ и соответствие $g \mapsto \hat{g}$ определяет непрерывную ретракцию из $J(A)$ в $I(A)$. Следовательно, гомоморфизм w_4: $\pi_0(I(A)) \to \pi_0(J(A))$ инъективен.

С другой стороны, согласно замечанию 1.27, элемент $tg+(1-t)\hat{g}$ принадлежит $J(A)$ для каждого $t \in [0, 1]$. Это определяет в пространстве $J(A)$ путь между элементами g и $\hat{g}$. Следовательно, гомоморфизм w_4 сюръективен. □

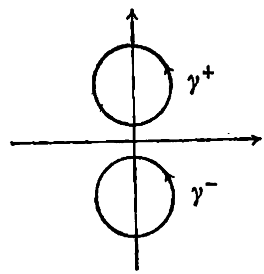


Рис. 18.

6.21. Замечание. Для читателей, знакомых с комплексным анализом в банаховых алгебрах, можно предложить другой способ доказательства последней леммы. Так как спектр g не пересекает вещественной оси, мы можем выбрать две окружности γ^+ и γ^-, которые содержат части спектра, расположенные соответственно в полуплоскостях $\mathrm{Im}(z)>0$ и $\mathrm{Im}(z)<0$ (рис. 18). Тогда отображение

$$g \mapsto \hat{g}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma^+}\frac{i\,dz}{z-g}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma^-}\frac{-i\,dz}{z-g}$$

определяет ретракцию из $J(A)$ в $I(A)$, такую что $tg+(1-t)\hat{g}$ принадлежит $J(A)$. В качестве упражнения предлагаем читателю проверить, что эти два определения $\hat{g}$ совпадают.

Упражнения: 8—11.

7. Упражнения

7.1. Доказать, что внешнее тензорное произведение расслоений (I.4.9) индуцирует изоморфизм

$$K_{\mathbb{C}}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} K_{\mathbb{C}}(S^{2n}) \approx K_{\mathbb{C}}(X \times S^{2n}),$$

и вывести отсюда, что $K_{\mathbb{C}}(X\times S^{2n})\approx K_{\mathbb{C}}(X)\oplus K_{\mathbb{C}}(X)$ как $K_{\mathbb{C}}(X)$-модули. Аналогичным образом, доказать, что $K_{\mathbb{C}}(X\times S^{2n+1})\approx K_{\mathbb{C}}(X)\oplus K_{\mathbb{C}}^{-1}(X)$, и вычислить $K_{\mathbb{R}}(X\times S^n)$.

7.2. Доказать, что $K_{\mathbb{C}}(P_n(\mathbb{C}))$ является свободной абелевой группой ранга $n+1$. Вычислить $K_{\mathbb{C}}(X\times P_n(\mathbb{C}))$ как $K_{\mathbb{C}}(X)$-модуль.

7.3. Пусть Y — компактное пространство и $\varnothing=Y_0\subset Y_1\subset\ldots\subset Y_n=Y$ — его фильтрация замкнутымн подмножествами, такая что $Y_{i+1}-Y_i\approx\mathbb{C}^{p_i}$. Доказать, что $K_{\mathbb{C}}(X\times Y)$ является свободным $K_{\mathbb{C}}(X)$-модулем ранга $p=\sum_{i=0}^{n-1}p_i$.

7.4. Пусть X — компактное дифференцируемое многообразие. Доказать существование такого конечного открытого покрытия (U_i) многообразия X, что пересечение любых p множеств U_i либо пусто, либо гомеоморфно $\mathbb{R}^n$. Применяя точную последовательность Майера — Вьеториса (II.4.18), доказать, что группы $K^{-n}(X)$ имеют конечный тип.

7.5. Пусть X — конечное клеточное разбиение размерности r. Применяя метод, аналогичный описанному в 7.4, доказать, что $K^{-n}(X)$ является группой конечного типа. Доказать также, что $K'(X)^{r+1}=0$ (ср. II.5.9).

7.6. Вычислить $K_{\mathbb{R}}^{i}(P_n(\mathbb{C}))\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}'$. Показать, что $\tilde{K}_{\mathbb{R}}(P_2(\mathbb{C}))\approx\mathbb{Z}$ и $\tilde{K}_{\mathbb{R}}^{-1}(P_2(\mathbb{C}))=0$. Показать, что $\tilde{K}_{\mathbb{R}}(P_2(\mathbb{R}))\approx\mathbb{Z}/4$.

7.7. Пусть A — комплексная банахова алгебра. Показать, что $\pi_2(\mathrm{GL}(A))\approx\pi_0(\mathrm{GL}(A))$. Вывести отсюда, что $\pi_n(\mathrm{GL}(A))\approx K(A)$ для нечетных n и что $\pi_n(\mathrm{GL}(A))\approx\pi_0(\mathrm{GL}(A))$, если n четно.

7.8. Пусть A — вещественная банахова алгебра, и пусть алгебра $A_n=A\otimes_{\mathbb{R}}C^{n,0}$ снабжена инволюцией $a\otimes b\mapsto a\otimes\bar{b}$, где $b\mapsto\bar{b}$ — такая инволюция на $C^{n,0}$, что $\bar{e}_i=-e_i$, $i=1,\ldots,n$.

a) Для $n\geqslant1$ доказать, что алгебра A_{n-1} может быть отождествлена с подалгеброй алгебры A_n, состоящей из элементов нулевой степени (т. е. таких, что $\bar{x}=x$). Доказать, также, что пространство $\Omega(\mathrm{GL}(A_n),\ \mathrm{GL}^-(A_n))$ имеет гомотопический тип пространства $\Omega(\mathrm{GL}(A_n)/\mathrm{GL}^+(A_n))$, где $\mathrm{GL}^{\pm}(A_n)=\{\alpha\in\mathrm{GL}(A_n)\mid\bar{\alpha}=\pm\alpha\}$.

b) Для $n\geqslant2$ доказать, что группа $\mathrm{GL}(A_{n-1})$ действует на $I(A_n)$ (в обозначениях 6.10) с помощью внутренних автоморфизмов и что связная компонента элемента $1\otimes e_n$ в $I(A_n)$ гомеоморфна связной компоненте класса элемента 1 в $\mathrm{GL}(A_{n-1})/\mathrm{GL}(A_{n-2})$.

c) Из теоремы 6.12 и упр. a) и b) вывести, что

$$[\mathrm{GL}(A_{n-1})/\mathrm{GL}(A_{n-2})]^0\sim[\Omega(\mathrm{GL}(A_n)/\mathrm{GL}(A_{n-1}))]^0\quad(\text{Вуд [1]})$$

(где через X^0, как обычно, обозначается связная компонента пространства X).

d) Доказать, что $[\mathrm{GL}(A)]^0\sim[\Omega^8(\mathrm{GL}(A))]^0$.

e) Доказать, что

$$K(A)\approx\pi_n(\mathrm{GL}(A_n),\ \mathrm{GL}(A_{n-1}))\approx\pi_7(\mathrm{GL}(A)).$$

f) Доказать, что $K(A\bigoplus_{\mathbb{R}}\mathbb{H})\approx\pi_3(\mathrm{GL}(A))$.

g) Доказать, что $\pi_0(\mathrm{GL}(A))\approx\pi_8(\mathrm{GL}(A))$, и установить гомотопическую эквивалентность $\mathrm{GL}(A)\sim\Omega^8(\mathrm{GL}(A))$.

7.9. Вычислить $\pi_n(\mathrm{GL}(A))$ для следующих вещественных и комплексных банаховых алгебр:

a) $A=C(X)$ — алгебра непрерывных функций на компактном пространстве X;

b) $A=C_r(X)$ — алгебра дифференцируемых функций класса C^r на компактном многообразии X;

c) $A=\mathrm{End}(H)$, где H — гильбертово пространство бесконечной размерности;

d) A — подалгебра в $\mathrm{End}(H)$, состоящая из операторов вида $\lambda+u$, где λ — скалярный и u — компактный оператор (т. е. предел операторов конечного ранга).

e) $A=\mathbb{C}\langle z,\ z^{-1}\rangle$ — алгебра рядов Лорана $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}a_nz^n$, где $a_n\in\mathbb{C}$ и $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|<\infty$.

7.10. Пусть H — гильбертово пространство бесконечной размерности над $k=\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ и $\mathrm{GL}_c(H)$ — подгруппа в $\mathrm{GL}(H)$, состоящая из операторов вида $1+u$, где u — компактный оператор (ср. 7.9).

a) Пусть X — компактное пространство. Доказать, что $[X,\mathrm{GL}_c(H)]\approx K^{-1}(X)\approx[X,\ \mathrm{GL}(k)]$.

b) Пусть $\mathcal{F}(H)$ — множество *фредгольмовых операторов* D в H (т. е. таких операторов, что $\mathrm{Ker}(D)$ и $\mathrm{Coker}(D)$ — конечномерные пространства). Используя тот факт, что группа $\mathrm{GL}(H)$ связна (Кёйпер [1]), доказать, что отображение $D\mapsto\dim(\mathrm{Ker}\,D)-\dim(\mathrm{Coker}\,D)$ $(:=\mathrm{ind}\,D)$ индуцирует биекцию $\pi_0(\mathcal{F}(H))\approx\mathbb{Z}$.

* c) Пусть $\mathcal{F}(H)^0$ — подмножество в $\mathcal{F}(H)$, состоящее из операторов индекса 0. Доказать, что отображение $\mathrm{GL}(H)\mapsto\mathcal{F}(H)^0$ определяет расслоение

$$\mathrm{GL}_c(H)\to\mathrm{GL}(H)\to\mathcal{F}(H)^0.$$

Используя тот факт, что группа $\mathrm{GL}(H)$ стягиваема (Кёйпер [1]), доказать, что $\Omega\mathcal{F}(H)^0\sim\mathrm{GL}_c(H)$ и $K(X)\approx[X,\ \mathcal{F}(H)]$ (Атья [3], Ених [1]). *

7.11. Пусть $\sigma\colon S^1\to\mathrm{GL}(\mathbb{C})$ — дифференцируемая функция, ряд Фурье которой имеет вид $\sigma(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}a_nz^n$, где $a_n\in M_p(\mathbb{C})$ для некоторого p, не зависящего от номера n.

a) Доказать, что вычет функции $\mathrm{Tr}(\sigma'(z)\sigma(z)^{-1})$ в точке $z=0$ является целым числом, которое с точностью до знака совпадает с числом, задающим изоморфизм периодичности $\pi_1(GL(\mathbb{C})) \approx K(\mathbb{C}) \approx \mathbb{Z}$ (1.11).

b) Показать, что бесконечная матрица

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_{-1} & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ a_{-2} & a_{-1} & a_0 & a_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

определяет фредгольмов оператор в гильбертовом пространстве $H = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \ldots \oplus \mathbb{C} \oplus \ldots$ (гильбертова сумма), индекс которого есть определенное выше целое число (Атья [7]).

7.12. Пусть A — произвольное кольцо и $A[z, z^{-1}]$ — кольцо *полиномов Лорана* (т. е. таких формальных степенных рядов $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$, в которых все коэффициенты a_n, за исключением конечного числа, равны нулю). Применяя методы § 1, доказать, что последовательность

$$0 \to K_1(A) \to K_1(A[z]) \oplus K_1(A[z^{-1}]) \to K_1(A[z, z^{-1}]) \to K(A) \to 0$$

точна (Басс [1], Каруби [5]).

7.13. (Атья [6]). Пусть X — компактное пространство, снабженное инволюцией. Определим *Вещественное* (с большой буквы!) векторное расслоение над X как комплексное векторное расслоение E с базой X, снабженное **антилинейной** инволюцией $\tau: E \to E$, которая коммутирует с инволюцией на X. Легко видеть, что такие векторные расслоения являются объектами некоторой банаховой категории $\mathcal{E}\mathcal{R}(X)$. Морфизмы в этой категории — это морфизмы комплексных векторных расслоений, которые коммутируют с инволюцией и индуцируют тождественное отображение на базе X. Обозначим через $KR(X)$ группу Гротендика категории $\mathcal{E}\mathcal{R}(X)$. Тензорное произведение векторных расслоений задает на $KR(X)$ структуру кольца.

a) Доказать, что если инволюция на X тривиальна, то $KR(X) \approx K_{\mathbb{R}}(X)$.

b) Обозначим через $S^{p,q}$ (соотв. через $B^{p,q}$) сферу (соотв. шар) в пространстве $\mathbb{R}^{p+q}$, снабженную инволюцией $(x, y) \mapsto (-x, y)$ для $x \in \mathbb{R}^p$, $y \in \mathbb{R}^q$. Доказать, что если пространство X снабжено тривиальной инволюцией, то $KR(X \times S^{1,0}) \approx K_{\mathbb{C}}(X)$.

c) Пусть X — пространство с тривиальной инволюцией. Рассмотрим множество пар (E, c), где E — комплексное векторное расслоение и $c: E \to E$ — антилинейный автоморфизм. Пусть $\Phi SC(X)$ — моноид, состоящий из *гомотопических* классов таких пар (E, c), и $KSC(X)$ — симметризованная группа этого моноида. Доказать, что $KSC(X) \approx KR(X \times S^{2,0})$.

d) Для каждой пары (X, Y) компактных пространств с инволюцией положим

$$KR^{-n}(X, Y) = KR(X \times B^{0,n}, X \times S^{0,n} \cup Y \times B^{0,n}).$$

Доказать точность последовательности

$$KR^{-n-1}(X) \to KR^{-n-1}(Y) \to KR^{-n}(X, Y) \to KR^{-n}(X) \to KR^{-n}(Y)$$

и изоморфизм вырезания

$$KR^{-n}(X, Y) \approx KR^{-n}(X/Y, \{y\}).$$

(ср. с II.4.12).

7.14. (продолжение упр. 7.13). Обозначим через $KR^{p,q}(X)$ группу $K^{p,q}$ банаховой категории $\mathscr{E}\mathscr{R}(X)$ (4.11).

a) Дать описание группы $KR^{p,q}(X)$ в терминах градуирований, подобно тому как это было проделано в 5.1 для группы $K^{p,q}(X)$. Получить из этого описания определение относительных групп $KR^{p,q}(X, Y)$.

b) Применяя идеи, использованные в доказательстве теоремы 5.10, определить изоморфизм

$$t\colon KR^{p,q+1}(X, Y) \to KR^{p,q}(X \times B^{0,1}, X \times S^{0,1} \cup Y \times B^{0,1}).$$

c) Определить гомоморфизм

$$KR(X, Y) \to KR(X \times B^{1,1}, X \times S^{1,1} \cup Y \times B^{1,1})$$

как гомоморфизм умножения на подходящую образующую группы $KR(B^{1,1}, S^{1,1}) \approx \mathbf{Z}$. Применяя идеи, использованные в доказательстве теоремы 1.3, доказать, что этот гомоморфизм является изоморфизмом. Вывести отсюда, что

$$KR^{n,n}(X, Y) \approx KR(X, Y) \approx KR(X \times B^{n,n}, X \times S^{n,n} \cup Y \times B^{n,n}).$$

d) Доказать, что $KR^{p,q}(X, Y) \approx KR(X \times B^{p,q}, X \times S^{p,q} \cup Y \times B^{p,q})$ и что с точностью до изоморфизма семейство групп $KR(X \times B^{p,q}, X \times S^{p,q} \cup Y \times B^{p,q})$ зависит только от разности $p - q \bmod 8$. Отметим, что этот изоморфизм придает смысл понятию „отрицательной сферы“: под нею надо понимать обычную сферу, снабженную антиподальной инволюцией.

7.15. (продолжение упр. 7.14). Положим $KR^n(X, Y) \approx KR^{p,q}(X, Y)$ для $n = p - q \in \mathbf{Z}$.

a) Используя тот факт, что $S^{p,0}/S^{q,0}$ и $S^{p-q,0} \times B^{q,0}/S^{p-q,0} \times S^{q,0}$ гомеоморфны как $\mathbf{Z}/2$-пространства, доказать изоморфизм

$$KR^n(X \times S^{p,0}, X \times S^{q,0}) \approx KR^{n+q}(X \times S^{p-q,0}) \quad (p \geqslant q).$$

b) Пусть $\eta_q\colon KR^q(X) \approx KR(X \times B^{q,0}, X \times S^{q,0}) \to KR(X)$ — морфизм, индуцированный очевидным вложением. Доказать, что η_q является морфизмом $KR(X)$-модулей. Доказать, что этот морфизм индуцирован умножением на некоторый элемент $\alpha_q \in KR^{-q}(P) = K_{\mathbb{R}}^{-q}(P)$, где P—точка.

c) Показать, что элементы α_1 и α_2 не равны нулю. Доказать что в случае $q \geqslant 3$ морфизм η_q равен нулю и последовательност $KR(X)$-модулей

$$0 \to KR(X) \to KR(X \times S^{q,0}) \to KR^{q+1}(X) \to 0,$$
$$0 \to KR^{-q-1}(X) \to KR^{-q-1}(X \times S^{q,0}) \to KR(X) \to 0$$

точны. Вывести отсюда, что $KR(X \times S^{q,0}) \approx KR(X) \oplus KR^{q+1}(X)$.

* d) Показать, что эти точные последовательности естественнс расщепляемы. *

e) Используя точные последовательности, ассоциированные с парами $(X \times S^{p,0},\ X \times S^{q,0})$ для $(p, q) = (2, 1)$, $(3, 1)$ и $(3, 2)$, доказать, что последовательности

$$\to K_{\mathbb{C}}^{n-1}(X) \to K_{\mathbb{C}}^{n-1}(X) \to KSC^n(X) \to K_{\mathbb{C}}^n(X) \to K_{\mathbb{C}}^n(X) \to,$$
$$\to K_{\mathbb{C}}^{n+1}(X) \to K_{\mathbb{R}}^n(X) \oplus K_{\mathbb{H}}^n(X) \to K_{\mathbb{C}}^n(X) \to KSC^{n+2}(X) \to,$$
$$\to KSC^{n-1}(X) \to K_{\mathbb{C}}^n(X) \to K_{\mathbb{R}}^n(X) \oplus K_{\mathbb{H}}^n(X) \to KSC^n(X) \to,$$

где X—компактное пространство с тривиальной инволюцией, точны.

* f) Явно описать все гомоморфизмы в приведенных выше точных последовательностях (Андерсон [1]). *

7.16. Пусть A—банахова алгебра, снабженная *антиинволюцией*, обозначаемой через $\lambda \mapsto \bar{\lambda}$, и пусть M—конечно-порожденный проективный правый A-модуль. *Эрмитова форма* на M задается таким $\mathbb{Z}$-билинейным отображением Φ: $M \times M \to A$, что $\Phi(x\lambda, y\mu) = \bar{\lambda}\Phi(x, y)\mu$ и $\Phi(y, x) = \overline{\Phi(x, y)}$. Форма Φ называется *невырожденной*, если индуцированный этой формой гомоморфизм из модуля M в его антидуальный модуль является изоморфизмом. Обозначим через $L(A)$ симметризованную группу моноида, состоящего из классов изоморфных модулей, снабженных невырожденными эрмитовыми формами.

a) Пусть банахова алгебра A удовлетворяет следующему условию: для любой матрицы $M = (a_{ji})$ с коэффициентами из A матрица $I + M^*M$, где $M^* = (\bar{a}_{ij})$, является обратимой. Показать, что в этом случае $L(A) \approx K(A) \oplus K(A)$.

b) Вычислить группу $L(A)$ для $A = M_2(C_k(X))$ с антиинволюцией, задаваемой формулой

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

($C_k(X)$—кольцо непрерывных функций на компактном пространстве X со значениями в поле $k = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$).

c) Вычислить группу $L(A)$ для кольца A непрерывных функций на X со значениями в $\mathbb{H}$, снабженного одной из следующих двух антиинволюций:

$$a+bI+cJ+dK \mapsto a-bI-cJ-dK,$$
$$a+bI+cJ+dK \mapsto a+bI+cJ-dK.$$

d) Пусть X — пространство с инволюцией $x \mapsto \bar{x}$ и A — (коммутативная) банахова алгебра комплексных непрерывных функций на X, снабженная инволюцией $f \mapsto \bar{f}$, где $\bar{f}(x) = \overline{f(\bar{x})}$. Доказать, что $L(A) \approx KR(X)$.

8. Исторические замечания

В настоящее время существует много различных вариантов доказательства теорем периодичности. В первоначальном доказательстве принадлежащем Ботту, использовалась теория Морса (Милнор [5], Ботт [2]). Следующее по времени доказательство (в комплексной K-теории) было получено Атьей и Боттом [1]; по существу, именно оно представлено в § 1 (правда, с некоторыми изменениями в способе изложения). Существует также принадлежащее Атье доказательство, основанное на теории фредгольмовых операторов в гильбертовых пространствах (Атья [7]; см. также работу автора [5], в которой дана алгебраическая интерпретация этого доказательства).

Не считая оригинального доказательства, принадлежащего Ботту, имеется в основном два различных „элементарных" способа доказательства периодичности Ботта в вещественной K-теории. Первый способ использует KR-теорию, построенную Атьей (Атья [6]; см. также 7.14). Второй способ, изложенный в нашем доказательстве теоремы 1.3, принадлежит Вуду [1] и автору [2]. Мы выбрали этот вариант доказательства потому, что из него немедленно получаются классифицирующие пространства групп $K^{-n}(X)$ и восемь гомотопических эквивалентностей Ботта (см. § III.5). Кроме того, у Мура [1] можно найти „гомологическое" доказательство этих гомотопических эквивалентностей.

Периодичность Ботта обобщалась в различных направлениях. Прежде всего, существует глубокая связь между периодичностью Ботта и методами, развитыми Атьей и Зингером для доказательства теоремы об индексе (Атья [7]). В алгебраической K-теории существует аналог теоремы I.11, принадлежащий Бассу, Хеллеру и Суону (см. 7.12). В эрмитовой K-теории имеются аналоги теорем 2.11 и 5.22 (и ряда других) (см. работу автора [4]).

Наконец, необходимо отметить, что алгебры Клиффорда, которые играют ключевую роль в нашем доказательстве периодичности, были введены в вещественную K-теорию в работе Атьи, Ботта и Шапиро [1]. Алгебры Клиффорда будут существенно использоваться в следующей главе при доказательстве изоморфизма Тома в вещественной и комплексной K-теориях.

Глава IV

ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕКОТОРЫХ K-ГРУПП

1. Изоморфизм Тома в комплексной K-теории для комплексных векторных расслоений

1.1. Цель этого параграфа состоит в том, чтобы определить изоморфизм $K_{\mathbb{C}}^q(X) \approx K_{\mathbb{C}}^q(V)$ для любого комплексного векторного расслоения V над локально-компактным пространством X (заметим, что $K_{\mathbb{C}}^q(V) \approx K_{\mathbb{C}}^q(B(V),\ S(V))$ относительно любой метрики на V; см. II.5.12). Если V — тривиальное расслоение, мы снова получаем периодичность Ботта в комплексной K-теории (см. III.1.3 и III.2.1); однако периодичность Ботта является существенной составной частью нашего доказательства. В случае когда X — компактное пространство, одноточечная компактификация $\dot{V}$ пространства расслоения V называется *пространством Тома* расслоения V. Следовательно, изоморфизм $K_{\mathbb{C}}^q(X) \approx K_{\mathbb{C}}^q(V) \approx \bar{K}_{\mathbb{C}}^q(\dot{V})$ позволит нам вычислить группу K пространства Тома комплексного векторного расслоения. Прежде чем определить этот изоморфизм, мы докажем некоторую общую теорему 1.3, которая окажется полезной в дальнейшем (*эта теорема является аналогом теоремы Лерэ — Хирша — Дольда*).

1.2. Пусть $\pi\colon P \to X$ — непрерывное отображение локально-компактных пространств. Тогда, используя ту же самую технику, что и в II.5.12, мы можем определить произведение

$$K(X) \times K(P) \to K(P)$$

как композицию комоморфизмов

$$K(X) \times K(P) \to K(X \times P) \xrightarrow{j^*} K(P),$$

где $j\colon P \to X \times P$ — *собственное* отображение, задаваемое формулой $j(p) = (\pi(p),\ p)$. Более точно, если мы отождествим группы K и K_0 из II.5.16 (см. II.5.20), то произведением элементов $\sigma(E,\ D) \in K(X)$ и $\sigma(F,\ \Delta) \in K(P)$ является элемент

$$\sigma(\pi^*E \otimes F,\ \pi^*D \hat{\otimes} 1 + 1 \hat{\otimes} \Delta).$$

Поэтому, учитывая указанное произведение, мы можем рассматривать $K(P)$ как модуль над кольцом $K(X)$ (которое, вообще говоря, не имеет единицы, если пространство X не компактно).

Более общим образом, если мы положим

$$K^*(Z) = \bigoplus_{q=0}^{\infty} K^{-q}(Z) = \bigoplus_{q=0}^{\infty} K(Z \times \mathbb{R}^q)$$

(ср. II.4.11) для произвольного локально-компактного пространства Z, то $K^*(P)$ может рассматриваться как $K^*(X)$-модуль относительно произведения

$$K(X\times\mathbb{R}^q)\times K(P\times\mathbb{R}^r)\to K(P\times\mathbb{R}^{q+r}),$$

которое определяется как композиция

$$K(X\times\mathbb{R}^q)\times K(P\times\mathbb{R}^r)\to K(X\times\mathbb{R}^q\times P\times\mathbb{R}^r)$$
$$\approx K(X\times P\times\mathbb{R}^{q+r})\xrightarrow{l^*} K(P\times\mathbb{R}^{q+r}),$$

где l — собственное отображение $(p, \lambda)\mapsto(\pi(p), p, \lambda)$. Более точно, если $\sigma(E, D)\in K(X\times\mathbb{R}^q)$ и $\sigma(F, \Delta)\in K(P\times\mathbb{R}^r)$ (ср. II.5.15), то их произведение есть элемент $\sigma(\pi_1^*E\otimes\pi_2^*F, \pi_1^*D\hat{\otimes}1+1\hat{\otimes}\pi_2^*\Delta)$, где

$$\pi_1\colon P\times\mathbb{R}^{q+r}\to X\times\mathbb{R}^q,\quad \pi_2\colon P\times\mathbb{R}^{q+r}\to P\times\mathbb{R}^r.$$

1.3. Теорема. *Пусть $\pi\colon P\to X$ — непрерывное отображение локально-компактных пространств и $e^1, \ldots, e^n$ — такие элементы из $K^0(P)$, что существует конечное замкнутое покрытие (W_i) пространства X со следующим свойством: для любого замкнутого подмножества Y в W_i ограничения $e^1, \ldots, e^n$ на $K^*(P_Y)$ образуют базис $K^*(P_Y)$ как $K^*(Y)$-модуля, где $P_Y=\pi^{-1}(Y)$. Тогда $K^*(P)$ является свободным $K^*(X)$-модулем с базисом $e^1, \ldots, e^n$.*

Доказательство. Пусть $e^i=\sigma(F^i, \Delta^i)$. Для любого локально-компактного подпространства $T\subset X$ положим $F_T^i=F^i|_T$, $\Delta_T^i=\Delta^i|_T$ и определим фундаментальный гомоморфизм

$$\varphi_T^q\colon K(T\times\mathbb{R}^q)^n\to K(P_T\times\mathbb{R}^q)$$

формулой

$$\varphi_T^q(x_1, \ldots, x_n)=x_1\cdot e_T^1+\ldots+x_n\cdot e_T^n,$$

где выражение $x_i\cdot e_T^i$ обозначает элемент $\sigma(\pi_T^*E_i\otimes\theta_T^*F_T^i, \pi_T^*D_i\hat{\otimes}1+1\hat{\otimes}\theta_T^*\Delta_T^i)$ для $x_i=\sigma(E_i, D_i)\in K(T\times\mathbb{R}^q)$, $\pi_T\colon P_T\times\mathbb{R}^q\to T\times\mathbb{R}^q$ и $\theta_T\colon P_T\times\mathbb{R}^q\to P_T$. Если подпространство T замкнуто, то $x_i\cdot e_T^i$ есть просто произведение x_i и ограничения e^i на $\pi^{-1}(T)$ (ср. со второй формулой п. 1.2). В общем случае (когда T не обязательно замкнуто) формула для φ_T^q также имеет смысл. Действительно отображение $\pi_T^*D_i\hat{\otimes}1+1\hat{\otimes}\theta_T^*\Delta_T^i$ допустимо в смысле п. II.5.15, поскольку оно определяет изоморфизм расслоений вне некоторого компактного подмножества в $P_T\times\mathbb{R}^q$ (ср. с вычислением, проделанным в II.5.21). Поэтому для того чтобы доказать теорему 1.3, достаточно показать, что φ_X^q — изоморфизм.

Гомоморфизмы φ_T^q обладают рядом „естественных“ свойств, которые можно легко вывести из указанных ранее явных формул. Если T' *замкнуто* в T, мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} K(T\times\mathbb{R}^q)^n & \xrightarrow{\varphi_T^q} & K(P_T\times\mathbb{R}^q) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K(T'\times\mathbb{R}^q)^n & \xrightarrow{\varphi_{T'}^q} & K(P_{T'}\times\mathbb{R}^q) \end{array}$$

где вертикальные гомоморфизмы индуцированы ограничениями.

Если T' *открыто* в T, мы также имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} K(T\times\mathbb{R}^q)^n & \xrightarrow{\varphi_T^q} & K(P_T\times\mathbb{R}^q) \\ \uparrow & & \uparrow \\ K(T'\times\mathbb{R}^q)^n & \xrightarrow{\varphi_{T'}^q} & K(P_{T'}\times\mathbb{R}^q) \end{array}$$

вертикальные гомоморфизмы которой определяются при помощи отображений вырезания, т. е. как композиции

$$K(T'\times\mathbb{R}^q)\approx K(T\times\mathbb{R}^q,\ (T\setminus T')\times\mathbb{R}^q)\to K(T\times\mathbb{R}^q),$$
$$K(P_{T'}\times\mathbb{R}^q)\approx K(P_T\times\mathbb{R}^q,\ (P_T\setminus P_{T'})\times\mathbb{R}^q)\to K(P_T\times\mathbb{R}^q)$$

(ср. II.5.19). Кроме того, диаграмма

$$\begin{array}{ccc} K(T\times\mathbb{R})^n & \xrightarrow{\varphi_T^1} & K(P_T\times\mathbb{R}) \\ {\scriptstyle\partial_{T,T\setminus T'}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\partial_{P_T,P_T\setminus P_{T'}}} \\ K(T')^n & \xrightarrow{\varphi_{T'}^0} & K(P_{T'}) \end{array}$$

где ∂ — связывающий гомоморфизм, определенный в II.4.9, также коммутативна. Это вытекает из того факта, что связывающий гомоморфизм ∂ является композицией двух гомоморфизмов α^{*-1} и β^*, где α^* и β^* индуцированы вырезанием открытых подмножеств (см. II.4.9). С помощью подстановки $T\mapsto T\times\mathbb{R}^q$, $T'\mapsto T'\times\mathbb{R}^q$, $P\mapsto P\times\mathbb{R}^q$ мы получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} K(T\times\mathbb{R}^{q+1})^n & \xrightarrow{\varphi_T^{q+1}} & K(P_T\times\mathbb{R}^{q+1}) \\ {\scriptstyle\partial}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\partial} \\ K(T'\times\mathbb{R}^q)^n & \xrightarrow{\varphi_{T'}^q} & K(P_{T'}\times\mathbb{R}^q) \end{array}$$

(с точностью до знака зависящего от соглашения; ср. II.5.27). Наконец, если S и T — замкнутые подмножества пространства

X и $q \leqslant 0$, мы имеем диаграмму

$$\begin{tikzcd}
K^{q-1}(S\times\mathbb{R})^n \oplus K^{q-1}(T\times\mathbb{R})^n \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_S^{-q+1}\oplus\varphi_T^{-q+1}"] & K^{q-1}(S\cap T\times\mathbb{R})^n \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\varphi_{S\cap T}^{-q+1}"] & K^q(S\cup T)^n \arrow[d, "\varphi_{S\cup T}^{-q}"] \\
K^{q-1}(P_S\times\mathbb{R})^n \oplus K^{q-1}(P_T\times\mathbb{R})^n \arrow[r] & K^{q-1}(P_{S\cap T}\times\mathbb{R})^n \arrow[r, "\Delta"] & K^q(P_{S\cup T})^n
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & K^q(S)^n \oplus K^q(T)^n \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_S^{-q}\oplus\varphi_T^{-q}"] & K^q(S\cap T)^n \arrow[d, "\varphi_{S\cap T}^{-q}"] \\
{} \arrow[r] & K^q(P_S) \oplus K^q(P_T) \arrow[r] & K^q(P_{S\cap T})
\end{tikzcd}$$

Горизонтальные последовательности в этой диаграмме представляют собой точные последовательности Майера — Вьеториса (II.4.18). Эта диаграмма коммутативна в силу сделанных выше замечаний и в силу того, что гомоморфизм Δ в точной последовательности Майера — Вьеториса является композицией гомоморфизмов ограничений, вырезаний и связывающих гомоморфизмов ∂ (ср. II.4.18).

Пусть теперь $W_1, \ldots, W_r$ — конечное замкнутое покрытие пространства X, удовлетворяющее предположениям теоремы, и пусть $Z_i = W_1 \cup \ldots \cup W_i$. Индукцией по i покажем, что гомоморфизмы $\varphi_{Z_i}^{-q}\colon K^q(Z_i) \to K^q(P_{Z_i})$ для $q \leqslant 0$ являются изоморфизмами. Полагая $S = W_1 \cup \ldots \cup W_i$ и $T = W_{i+1}$, мы можем записать две точные последовательности Майера — Вьеториса, указанные выше, с $S \cup T = Z_{i+1}$. Так как φ_Z^{-r} — изоморфизм для $Z = S$, T или $S \cap T$ по предположению индукции, то гомоморфизм $\varphi_{S\cup T}^{-q} = \varphi_{Z_{i+1}}^{-q}$ также является изоморфизмом. Теорема 1.3 полностью доказана. $\square$

1.3.1. Замечание. Приведенное выше доказательство показывает, что в теореме 1.3 мы можем ограничиться рассмотрением подпространств $Y = W_i$ или же подпространств, которые получаются пересечением W_i с $\bigcup\limits_{j<i} W_j$.

1.4. Мы хотим применить теорему 1.3 к случаю, когда P есть тотальное пространство комплексного векторного расслоения V, $\pi\colon V \to X$ — каноническая проекция и $K = K_{\mathbb{C}}$. Для случая компактного X мы покажем, что $K_{\mathbb{C}}(V)$ является $K_{\mathbb{C}}(X)$-модулем ранга 1, порожденным элементом U_V ($= e^1$ в обозначениях теоремы), который принадлежит $K_{\mathbb{C}}(V)$ и который будет называться *классом Тома* комплексного векторного расслоения V. Этот элемент U_V строится с использованием некоторой метрики φ на V (1.8.5) и метрики ψ, индуцированной на расслоении $\Lambda(V)$, ассоциированном с V (I.4.8, f)). Более точно, если V_x — слой расслоения V, то метрика ψ_x на $\Lambda(V_x) = \Lambda(V)_x$ задается формулами

$$\psi_x(v_1 \wedge \ldots \wedge v_n,\ w_1 \wedge \ldots \wedge w_p) = 0, \text{ если } p \neq n,$$
$$\psi_x(v_1 \wedge \ldots \wedge v_n,\ w_1 \wedge \ldots \wedge w_n) = \det(\varphi_x(v_i,\ w_j)).$$

В частности, если e_i — ортонормированный базис V_x, то произведения $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}$ для $i_1 < \ldots < i_p$ и $p \leqslant \dim(V_x)$ образуют ортонормированный базис пространства $\Lambda(V_x)$ (комплексной размерности $2^{\dim(V_x)}$). Из рассмотрения локальных координат следует, что метрика ψ непрерывна.

Для вектора $v \in V_x$ обозначим через d_v: $\Lambda(V_x) \to \Lambda(V_x)$ линейное отображение, задаваемое формулой $d_v(e) = v \wedge e$. Пусть ∂_v: $\Lambda(V_x) \to \Lambda(V_x)$ — отображение, сопряженное к d_v относительно введенной выше метрики.

1.5. ***Лемма.*** *Имеет место тождество*

$$(d_v + \partial_v)^2 = d_v\partial_v + \partial_v d_v = \varphi_x(v, v) = Q_x(v),$$

где Q_x — положительно-определенная квадратичная форма, ассоциированная с φ_x.

Доказательство. Каждый элемент e из $\Lambda(V_x)$ может быть записан в виде $e = v \wedge w + w'$, где w и w' ортогональны к v (в V можно выбрать такой ортонормированный базис (e_i), что $v = \lambda e_1$). Следовательно,

$$\partial_v(d_v(e)) = \partial_v(v \wedge w') = Q_x(v)\, w', \quad d_v(\partial_v(e)) = d_v(Q_x(v)\, w) = Q_x(v)\, v \wedge w$$

и

$$\partial_v(d_v(e)) + d_v(\partial_v(e)) = Q_x(v)\,(w' + v \wedge w).$$

Поэтому

$$(d_v + \partial_v)^2 = d_v\partial_v + \partial_v d_v = Q_x(v). \quad \square$$

1.6. С использованием леммы 1.5 элемент $U_V \in K_{\mathbb{C}}(V)$ может быть теперь описан следующим образом. Мы имеем $U_V = \sigma(\pi^*\Lambda(V), \Delta)$. В этой формуле π: $V \to X$ — каноническая проекция; $\Lambda(V)$ снабжено $\mathbf{Z}/2$-градуировкой, определенной в III.3.7, и метрикой ψ; отображение Δ: $\pi^*\Lambda(V) \to \pi^*\Lambda(V)$ в каждой точке $(x, v) \in \pi^*V$ для $x \in X$ и $v \in V_x$ определяется оператором $\Delta_{x,v} = d_v + \partial_v$. Так как $(D_{x,v})^2 = Q_x(v)$, то Δ является изоморфизмом вне нулевого сечения расслоения V. Следовательно, Δ допустимо в смысле п. II.5.15. Далее, если V тривиально, скажем $V = X \times \mathbb{C}^n$, то $\Lambda(V) = X \times \Lambda(\mathbb{C}^n)$ и $U_V = \sigma(E, \Delta)$, где $E = X \times \mathbb{C}^n \times \Delta(\mathbb{C}^n)$ и $\Delta(x, v, e) = (x, v, (d_v + \partial_v)(e))$. Следовательно, отображение Δ непрерывно.

Всё, что остается доказать,— это что $U_V = e^1$ удовлетворяет предположениям теоремы 1.3. Для этого нам понадобится следующее предложение.

1.7. ***Предложение.*** *Пусть V и V' — комплексные векторные расслоения с базами X и X' соответственно. Тогда $U_{V \boxplus V'} = U_V \cup U_{V'}$ (заметим, что $V \boxplus V' = V \times V'$; см.* I.4.9).

Доказательство. Пусть $U_V = \sigma(\pi^*\Lambda(V), \Delta)$ и $U_{V'} = \sigma(\pi'^*\Lambda(V'), \Delta')$ — классы Тома расслоений V и V' соответственно, где π: $V \to X$ и

$\pi': V' \to X'$. Согласно формуле для $\cup$-произведения, данной в II.5.21, мы имеем

$$U_V \cup U_{V'} = \sigma(\pi^*\Lambda(V) \boxtimes \pi'^*\Lambda(V'),\ \Delta \hat{\boxtimes} 1 + 1 \hat{\boxtimes} \Delta').$$

Пусть π_1, $\tilde{\pi}_1$, π_2, $\tilde{\pi}_2$, π'' — очевидные проекции:

$$\begin{tikzcd} V\times V' \arrow[r, "\tilde{\pi}_1"] \arrow[rr, bend right, "\pi_1"'] & V \arrow[r, "\pi"] & X, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V\times V' \arrow[r, "\tilde{\pi}_2"] \arrow[rr, bend right, "\pi_2"'] & V' \arrow[r, "\pi'"] & X', \end{tikzcd}$$

$$V\times V' \xrightarrow{\pi''} X\times X'.$$

По определению, мы имеем изоморфизм

$$\pi^*\Lambda(V) \boxtimes \pi'^*\Lambda(V') \approx \pi_1^*\Lambda(V) \otimes \pi_2^*\Lambda(V')$$

(I.4.9.). Кроме того, мы имеем изоморфизм

$$\pi_1^*\Lambda(V) \otimes \pi_2^*\Lambda(V') \xrightarrow{\theta} \pi''^*\Lambda(V\times V'),$$

задаваемый формулой

$$(v,\ v',\ \sum e_i \otimes e_i') \mapsto (v,\ v',\ \sum e_i \wedge e_i'),$$

где $\Lambda(V_x)$ и $\Lambda(V'_{x'})$ рассматриваются как очевидным образом вложенные в $\Lambda(V\times V')_{x,x'} = \Lambda(V_x \oplus V'_{x'}) \approx \Lambda(V_x) \otimes \Lambda(V'_{x'})$ (ср. III.3.10). Следовательно, наше предложение эквивалентно коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd} \pi_1^*\Lambda(V) \otimes \pi_2^*\Lambda(V') \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\Gamma"] & \pi''^*\Lambda(V\times V') \arrow[d, "\Delta''"] \\ \pi_1^*\Lambda(V) \otimes \pi_2^*\Lambda(V') \arrow[r, "\theta"] & \pi''^*\Lambda(V\times V') \end{tikzcd}$$

где $\Gamma = \tilde{\pi}_1^*\Delta \hat{\otimes} 1 + 1 \hat{\otimes} \tilde{\pi}_2^*\Delta'$ и $\sigma(\pi''^*\Lambda(V\times V'),\ \Delta'')$ — класс Тома расслоения $V\times V' = V \boxplus V'$. Установление коммутативности этой диаграммы — дело линейной алгебры: мы должны лишь доказать коммутативность диаграммы векторных пространств (V и V' теперь обозначают векторные пространства)

$$\begin{tikzcd} \Lambda(V) \otimes \Lambda(V') \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "(d_v+\partial_v)\hat{\otimes} 1 + 1 \hat{\otimes} (d_{v'}+\partial_{v'})"'] & \Lambda(V\oplus V') \arrow[d, "d_{v+v'}+\partial_{v+v'}"] \\ \Lambda(V) \hat{\otimes} \Lambda(V') \arrow[r, "\theta"] & \Lambda(V\oplus V') \end{tikzcd}$$

где $\theta(\sum e_i \otimes e_i') = \sum e_i \wedge e_i'$, $v \in V \subset V \oplus V'$, $v' \in V' \subset V \oplus V'$.

Поскольку θ — изометрия, достаточно установить коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd} \Lambda(V)\otimes\Lambda(V') \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "d_v\hat{\otimes}1+1\hat{\otimes}d_{v'}"'] & \Lambda(V\oplus V') \arrow[d, "d_{v+v'}"] \\ \Lambda(V)\otimes\Lambda(V') \arrow[r, "\theta"] & \Lambda(V\oplus V') \end{tikzcd}$$

Но если e и e' — однородные элементы пространств $\Lambda(V)$ и $\Lambda(V')$ соответственно, то мы имеем

$$\theta((d_v\hat{\otimes}1+1\hat{\otimes}d_{v'})(e\wedge e'))=v\wedge e\wedge e'+(-1)^{\deg(e)}e\wedge v'\wedge e'$$
$$=v\wedge e\wedge e'+v'\wedge e\wedge e'=(v+v')\wedge(e\wedge e')=d_{v+v'}(\theta(e\otimes e')).\quad\square$$

1.8. Следствие. *Пусть* $X=X'$ *и* $(\alpha,\beta)\mapsto\alpha\cdot\beta$ — *произведение*

$$K(V)\times K(V')\to K(V\oplus V'),$$

которое получается как композиция

$$K(V)\times K(V')\to K(V\times V')\xrightarrow{l^*}K(V\oplus V'),$$

где l — *каноническое вложение* $V\oplus V'\subset V\times V'$ (I.4.9). *Тогда имеет место формула* $U_{V\oplus V'}=U_V\cdot U_{V'}$.

1.9. Теорема (изоморфизм Тома). *Пусть* V — *комплексное векторное расслоение с компактной базой* X. *Тогда* $K_{\mathbb{C}}^*(V)$ *является свободным* $K_{\mathbb{C}}^*(X)$-*модулем ранга* 1, *порожденным классом Тома* U_V.

Доказательство. Пусть (W_i) — такое конечное замкнутое покрытие X, что ограничения $V|_{W_i}$ тривиальны, т. е. $V|_{W_i}=W_i\times\mathbb{C}^n$. Если $Y\subset W_i$, то $V|_Y\approx Y\times\mathbb{C}^n$ и класс Тома $U_V|_Y=U_{V|Y}$ может быть представлен в виде $1\cup u_n$, где u_n — класс Тома пространства $\mathbb{C}^n$, рассматриваемого как векторное расслоение над точкой. В силу периодичности Ботта в комплексной K-теории (III.2.1) и соображений п. 1.2, достаточно показать, что u_n является образующей группы $K_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)\approx K_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{2n})\approx Z$. Так как, согласно предложению 1.7 (примененному к расслоениям над точкой), $u_n=(u_1)^n$, то на самом деле достаточно показать, что u_1 является образующей группы $K(\mathbb{C})$. Однако это было уже доказано в II.5.25 и III.1.3. $\square$

1.10. Предположим теперь, что база векторного расслоения V, снабженного некоторой метрикой, локально-компактна. Тогда, даже если класс Тома и не определен (см., однако, упр. 8.14), всё же можно определить *гомоморфизм Тома*

$$\beta_{\mathbb{C}}\colon K_{\mathbb{C}}(X)\to K_{\mathbb{C}}(V)$$

(и, следовательно, гомоморфизм $K_{\mathbb{C}}^{-r}(X)\to K_{\mathbb{C}}^{-r}(V)$) формулой

$$\sigma(E,D)\mapsto\sigma(\pi^*E\hat{\otimes}\pi^*F,\ \pi^*D\hat{\otimes}1+1\hat{\otimes}\Delta),$$

где $\pi\colon V \to X$, $F = \pi^*\Lambda(V)$, а отображение Δ определено так же, как в 1.6. Поскольку Δ является изоморфизмом вне нулевого сечения расслоения V, а D является изоморфизмом вне некоторого компактного подмножества в X, то отображение $\pi^*D \hat{\otimes} 1 + 1 \hat{\otimes} \Delta$ допустимо в смысле п. II.5.15.

1.11. Теорема (изоморфизм Тома для локально-компактных пространств). *Пусть V — комплексное векторное расслоение над локально-компактной базой X. Тогда определенный выше гомоморфизм Тома $\beta_{\mathbb{C}}\colon K_{\mathbb{C}}(X) \to K_{\mathbb{C}}(V)$ является гомоморфизмом.*

Доказательство. Предположим сначала, что существует такая компактная пара (Z, T), что $X = Z \setminus T$. Кроме того, предположим, что над Z существует такое комплексное векторное расслоение V', что $V'|_X = V$. Тогда мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
K_{\mathbb{C}}(Z\times \mathbb{R}) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_T^1"] & K_{\mathbb{C}}(T\times \mathbb{R}) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\varphi_Z^1"] & K_{\mathbb{C}}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\beta_{\mathbb{C}}"] & K_{\mathbb{C}}(Z) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_Z^0"] & K_{\mathbb{C}}(T) \arrow[d, "\varphi_T^0"] \\
K_{\mathbb{C}}(V'\times \mathbb{R}) \arrow[r] & K_{\mathbb{C}}(V'_T\times \mathbb{R}) \arrow[r, "\partial"] & K_{\mathbb{C}}(V) \arrow[r] & K_{\mathbb{C}}(V') \arrow[r] & K_{\mathbb{C}}(V'_T)
\end{tikzcd}$$

горизонтальные строки которой точны (ср. с „естественными" свойствами гомоморфизмов φ_T^q и ∂, доказанными в 1.3 и II.4.9). Так как гомоморфизмы φ_T^1, φ_Z^1, φ_Z^0 и φ_T^0 являются изоморфизмами (1.9), то $\beta_{\mathbb{C}}$ — также изоморфизм.

В общем случае мы имеем $K_{\mathbb{C}}(X) \approx \operatorname{inj\,lim} K_{\mathbb{C}}(U_i)$, где (U_i) пробегает множество всех относительно компактных открытых подмножеств в X (II.4.21). Аналогичным образом $K_{\mathbb{C}}(V) \approx \operatorname{inj\,lim} K_{\mathbb{C}}(V_i)$, где $V_i = V|_{U_i}$. Так как $U_i = \bar{U}_i \setminus \operatorname{Fr}(U_i)$ (где $\operatorname{Fr}(U_i)$ обозначает границу U_i), то мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{inj\,lim} K_{\mathbb{C}}(U_i) \arrow[r, "\approx"] \arrow[d] & K_{\mathbb{C}}(X) \arrow[d, "\beta_{\mathbb{C}}"] \\
\operatorname{inj\,lim} K_{\mathbb{C}}(V_i) \arrow[r, "\approx"] & K_{\mathbb{C}}(V)
\end{tikzcd}$$

левый вертикальный гомоморфизм которой является изоморфизмом, как только что было доказано Следовательно, и $\beta_{\mathbb{C}}$ — также изоморфизм. □

1.12. Замечание. Заменяя пространство X на $X \times \mathbb{R}^q$ и V на $V \times \mathbb{R}^q$, мы получаем, что группы $K_{\mathbb{C}}^{-q}(X) = K_{\mathbb{C}}(X \times \mathbb{R}^q)$ и $K_{\mathbb{C}}^{-q}(V) = K_{\mathbb{C}}(V \times \mathbb{R}^q)$ изоморфны.

1.13. Если мы выберем метрику на V (что всегда возможно, если база X паракомпактна; см. I.8.7), то будем иметь $K_{\mathbb{C}}(V) \approx K_{\mathbb{C}}(B(V) \setminus S(V)) \approx K_{\mathbb{C}}(B(V), S(V))$ (II.5.19) Так как пространство $B(V)$ имеет гомотопический тип пространства X (X как нулевое сечение расслоения $B(V)$ является его деформационным ретрактом), то точная последовательность

$$K_{\mathbf{C}}^{-1}(B(V)) \to K_{\mathbf{C}}^{-1}(S(V)) \to K_{\mathbf{C}}(B(V), S(V)) \to K_{\mathbf{C}}(B(V)) \to K_{\mathbf{C}}(S(V))$$

может быть записана как

$$K_{\mathbf{C}}^{-1}(X) \xrightarrow{\pi'^*} K_{\mathbf{C}}^{-1}(S(V)) \to K_{\mathbf{C}}(X) \xrightarrow{\alpha} K_{\mathbf{C}}(X) \xrightarrow{\pi'^*} K_{\mathbf{C}}(S(V));$$

она называется *точной последовательностью Гизина*. Гомоморфизм π'^* в ней индуцирован проекцией π': $S(V) \to X$. Гомоморфизм α определен формулой

$$\sigma(E, D) \mapsto \sum_{i=0}^{\operatorname{rank}(V)} (-1)^i \sigma(E \otimes \lambda^i(V), D \otimes 1).$$

Если пространство X компактно, то α есть просто умножение на $\chi(V) = \sum_{i=0}^{\operatorname{rank}(V)} (-1)^i [\lambda^i(V)]$. Элемент $\chi(V)$ называется *классом Эйлера* (в смысле $K_{\mathbf{C}}$-теории; ср. V.3.4) расслоения V. Наконец, если мы заменим пространство X на $X \times \mathbb{R}^q$ и V на $V \times \mathbb{R}^q$, то снова получится точная последовательность

$$K_{\mathbf{C}}^{-q-1}(X) \xrightarrow{\pi'^*} K_{\mathbf{C}}^{-q-1}(S(V)) \to K_{\mathbf{C}}^{-q}(X) \xrightarrow{\alpha} K_{\mathbf{C}}^{-q}(X) \xrightarrow{\pi'^*} K_{\mathbf{C}}^{-q}(S(V)).$$

Здесь снова в случае компактного X гомоморфизм α есть гомоморфизм умножения на класс Эйлера.

1.14. Пример. Пусть CP_n — комплексное проективное пространство размерности n и ξ — каноническое линейное расслоение над CP_n (I.2.4). Расслоение ξ можно отождествить с факторпространством произведения $S^{2n+1} \times \mathbf{C}$ по отношенню эквивалентности $(x, t) \sim (\lambda x, \lambda^{-1} t)$, $\lambda \in S^1 \subset \mathbf{C}$. Следовательно, $\xi^{\otimes k} = \xi \otimes \ldots \otimes \xi$ (k раз) отождествляется с факторпространством пронзведения $S^{2n+1} \otimes \mathbf{C}$ по отношению эквивалентности $(x, t) \sim (\lambda x, \lambda^{-k} t)$. Далее, расслоение $\xi^{\otimes k}$ может быть наделено метрикой, которая определяется формулой $\varphi_x((x, t), (x, t')) = t \cdot \bar{t}'$. Отсюда вытекает, что $S(\xi^{\otimes k})$ может быть отождествлено с *линзовым пространством* $S^{2n+1}/(Z/k)$ (где Z/k действует на $S^{2n+1} \subset \mathbf{C}^{n+1}$ как корни k-й степени из единицы) посредством отображения $(x, t) \mapsto \sqrt[k]{t} \cdot x$. Таким образом, мы получаем точную последовательность (ср. 1.13)

$$K_{\mathbf{C}}(P_n(\mathbf{C})) \xrightarrow{\alpha} K_{\mathbf{C}}(P_n(\mathbf{C})) \xrightarrow{\pi'^*} K_{\mathbf{C}}(S^{2n+1}/(Z/k)) \to K_{\mathbf{C}}^1(P_n(\mathbf{C})),$$

где π'^* — гомоморфизм колец и α — умножение на класс Эйлера расслоения $\xi^{\otimes k}$, т. е. на элемент $1 - [\xi^{\otimes k}]$. В следующем параграфе мы используем эту точную последовательность для вычисления $K_{\mathbf{C}}(S^{2n+1}/(Z/k))$.

Упражнения: 2, 11, 13.

2. Комплексная K-теория комплексных проективных пространств и комплексных проективных расслоений

2.1. Так как мы не будем рассматривать в этом параграфе вещественную K-теорию, то комплексные группы $K_{\mathbf{C}}$ будут обозначаться просто через K. Таким образом, $K(X)=K_{\mathbf{C}}(X)$, $K(X, Y)=K_{\mathbf{C}}(X, Y)$ и т. д.

2.2. Пусть V — комплексное векторное расслоение с компактной базой X. Обозначим через $P(V)$ расслоение над X, слоем которого в точке x является проективное пространство $P(V_x)$. Более подробно, топология на $P(V)=\coprod_{x\in X} P(V_x)$ определяется с помощью той же самой процедуры, что и в п. I.4.5: функтор φ (I.4.3) заменяется теперь функтором из $\mathscr{E}'_{\mathbf{C}}$ в *Top*, задаваемым правилом $E\to P(E)$. Здесь *Top* — категория топологических пространств и $\mathscr{E}'_{\mathbf{C}}$ — категория, объектами которой служат конечномерные комплексные векторные пространства, а морфизмами — изоморфизмы таких пространств.

Цель настоящего параграфа состоит в том, чтобы вычислить $K_{\mathbf{C}}(P(V))$ в терминах $K_{\mathbf{C}}(X)$ (2.16). Это нетривиально даже в случае, когда X — точка, т. е. когда $P(V)=CP_n$ для некоторого n. В этих вычислениях важную роль играет *каноническое линейное расслоение* над $P(V)$, обозначаемое через ξ или ξ_V. Это — расслоение на X, слоем которого над x является каноническое линейное расслоение на $P(V_x)$. Из сказанного выше следует, что ξ_V наделено корректно определенной топологией. Кроме того, ξ_V может рассматриваться как линейное расслоение над $P(V)$, поскольку *локально* мы имеем изоморфизмы $V\approx X\times\mathbb{C}^{n+1}$ и $P(V)\approx X\times CP_n$; следовательно, $\xi_V\approx X\times\xi_n$.

2.3. Пусть теперь L — произвольное линейное расслоение на X. Тогда $P(L)$ изоморфно X (этот изоморфизм осуществляется посредством канонической проекции) и $P(V\oplus L)\setminus P(L)$ может быть отождествлено с линейным расслоением $\xi_V^*\otimes\pi^*L=\mathrm{HOM}(\xi_V, \pi^*L)$ над пространством X (I.4.8, d)), где $\pi: P(V)\to X$. Более точно, если $g:\xi_V\to L$ — общий морфизм над π:

$$\begin{array}{ccc}
\xi_V & \xrightarrow{g} & L \\
\downarrow & & \downarrow \\
P(V) & \xrightarrow{\pi} & X
\end{array}$$

(см. I.1.6), и v — ненулевой вектор из ξ_V, то пара $(v, g(v))$ определяет точку пространства $P(V\oplus L)\setminus P(L)$, которая не зависит от выбора вектора v в слое. В частности, пространство Тома расслоения $\xi_V^*\otimes\pi^*L$ (см. 1.1) гомеоморфно $P(V\oplus L)/P(L)=P(V\oplus L)/X$ (рис. 19).

2.4. Предложение. *Имеет место точная расщепляющаяся последовательность (ср. II.4.13)*

$$0\to K^r(P(V\oplus L)\setminus X)\xrightarrow{i_r^*}K^r(P(V\oplus L))\to K^r(X)\to 0.$$

Если $U\in K^0(P(V\oplus L)\setminus X)\approx K^0(\xi_V^*\otimes\pi^*L)$ — класс Тома линейного расслоения $\xi_V^*\otimes\pi^*L$ над $P(V)$, то $j_0^*(U)$ является классом Эйлера (1.12) векторного расслоения $\xi_{V\oplus L}^*\otimes\pi_1^*(L)$ над $P(V\oplus L)$, где $\pi_1: P(V\oplus L)\to X$. Наконец, если $x\in K^r(P(V\oplus L))$ и x' — ограничение элемента x на $K^r(P(V))$ (заметим, что $P(V)\subset P(V\oplus L)$), то мы имеем формулу $xj_0^*(U)=j_r(\Phi(x'))$, где $\Phi: K^r(P(V))\to K^r(P(V\oplus L)\setminus X)$ — изоморфизм Тома.

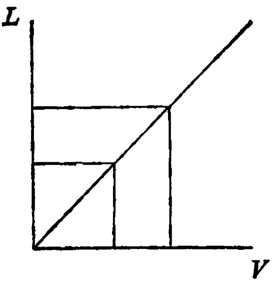


Рис. 19.

Доказательство. Так как $X\approx P(L)$ является ретрактом пространства $P(V\oplus L)$, то первая часть предложения следует из точной последовательности II.4.13. Рассмотрим теперь коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
\xi_V^*\otimes\pi^*L\approx P(V\oplus L)-P(L) & \xrightarrow{s} & P(V\oplus L\oplus L)-P(L)\approx\xi_{V\oplus L}^*\otimes\pi_1^*L\\
\downarrow & & \downarrow\\
P(V) & \longrightarrow & P(V\oplus L)
\end{array}$$

Так как

$$\xi_{V\oplus L}^*\otimes\pi_1^*L\,|_{P(V)}\approx\xi_V^*\otimes\pi^*L,$$

то отображение s является общим морфизмом векторных расслоений (I.1.6). Следовательно, класс Тома расслоения $\xi_V^*\otimes\pi^*L$ индуцируется отображением s из класса Тома U' расслоения $\xi_{V\oplus L}^*\otimes\pi_1^*L$. Кроме того, мы имеем следующую коммутативную диаграмму K-групп:

$$\begin{array}{ccc}
K(P(V\oplus L)-P(L)) & \xrightarrow{j_0^*} & K(P(V\oplus L))\\
\uparrow{\scriptstyle s^*} & & \uparrow{\scriptstyle s'^*}\\
K(P(V\oplus L\oplus L)-P(L)) & \xrightarrow{\bar{j}_0^*} & K(P(V\oplus L\oplus L))
\end{array}$$

В этой диаграмме горизонтальные гомоморфизмы определяются с помощью гомоморфизмов II.5.19, а отображение s' индуцировано отображением $(v, l)\to(v, 0, l)$. Но s' гомотопно отображению i':

$P(V\oplus L)\to P(V\oplus L\oplus L)$, задаваемому формулой $(v, l)\to(v, l, 0)$ (явный вид гомотопии: $(v, l)\to(v, l\cos\theta, l\sin\theta)$, $\theta\in[0, \pi/2]$). Следовательно,

$$j_0^*(U)=j_0^*(s^*(U'))=s'^*(\tilde{j}_0^*(U'))=i'^*(\tilde{j}_0^*(U')).$$

Если обозначить через i нулевое сечение линейного расслоения $\xi^*_{V\oplus L}\otimes\pi_1^*L$, то мы имеем коммутативную диаграмму K-групп

$$\begin{tikzcd}
K(P(V\oplus L\oplus L)-P(L)) \arrow[r, "j_0^*"] \arrow[dr, "i^*"'] & K(P(V\oplus L\oplus L)) \arrow[d, "i'^*"] \\
& K(P(V\oplus L))
\end{tikzcd}$$

поскольку образ i представляет собой компактное подмножество в $P(V\oplus L\oplus L)\setminus P(L)$. Так как эйлеров класс является ограничением на нулевое сечение класса Тома (1.13), то $j_0^*(U)=i^*(U')$ есть эйлеров класс расслоения $\xi^*_{V\oplus L}\otimes\pi_1^*L$.

Наконец, рассмотрим произвольный элемент x группы $K^r(P(V\oplus L))$. Так как $K^r(P(V\oplus L))\approx K^r(P(V\oplus L)\setminus X)\oplus K^r(X)$, то мы должны проверить формулу $xj_0^*(U)=j_r^*(\Phi(x'))$ в двух случаях:

а) $x\in K^r(X)\approx K^r(P(L))\subset K^r(P(V\oplus L))$. Поскольку j^* и Φ суть гомоморфизмы $K^*(X)$-модулей, то мы имеем $xj_0^*(U)=xj_0^*\Phi(1)=j_0^*\Phi(x\cdot 1)=j_0^*\Phi(x')$.

б) $x\in K^r(P(V\oplus L)\setminus X)$, или $x=j^*(\tilde{x})$. Тогда в силу II.5.31 имеем $xj_0^*(U)=j_r^*(\tilde{x}\cdot U)=j_r^*(x'\cdot U)=j_r^*(\Phi(x'))$ (здесь $(\alpha, \beta)\to\alpha\cdot\beta$ — произведение, определенное в II.5.30). □

2.5. Теорема. *Пусть X — компактное пространство и $P_n=CP_n$ — комплексное проективное пространство. Тогда $K^*(X\times P_n)$ является свободным $K^*(X)$-модулем с базисом $1, t, \ldots, t^n$, где $t=1-[\pi_n^*\xi_n^*]$ — эйлеров класс расслоения $\pi_n^*\xi_n^*$ для $\pi_n\colon X\times P_n\to P_n$* (I.2.4). *Кроме того, мы имеем $t^{n+1}=0$, откуда следует, что*

$$K^*(X\times P_n)\approx K^*(X)[t]/(t^{n+1}).$$

Доказательство. Докажем первую часть теоремы индукцией по n, начиная с $n=0$. Для того чтобы совершить переход от размерности n к размерности $n+1$, рассмотрим расщепляющуюся точную последовательность

$$0\to K^*(X\times P_{n+1}, X)\xrightarrow{j^*}K^*(X\times P_{n+1})\to K^*(X)\to 0.$$

Согласно 2.4, изоморфизм Тома (обозначим его через Φ_n) отождествляет первую группу в этой последовательности с группой $K^*(X\times P_n)$. Для удобства обозначим через t_r эйлеров класс расслоения $\pi_r^*\xi_r^*$. Так как $t_{n+1}|_{K(X\times P_n)}=t_n$, то мы имеем $j^*\pi_n^*(t_n^\alpha)=t_{n+1}^{\alpha+1}$, в силу последней части предложения 2.4. Следовательно, по предположению индукции, $j^*\Phi_n$ является изоморфизмом $K^*(X\times P_n)$ на свободный подмодуль в $K^*(X\times P_{n+1})$ с базисом $t_{n+1}, t_{n+1}^2, \ldots, t_{n+1}^{n+1}$. Так как фактормодуль $K^*(X\times P_{n+1})$ по этому подмодулю изоморфен

$K^*(X)$, то $1, t_{n+1}, \ldots, t_{n+1}^{n+1}$ представляет собой базис $K^*(X)$-модуля $K^*(X\times P_{n+1}.)$

Поскольку ограничение t на любую точку из P_n равно 0, то пример II.5.10 показывает, что $t^{n+1}=0$. Следовательно, $K^*(X\times P_n) \approx K^*(X)[t]/(t^{n+1})$. □

2.6. Замечание. Вместо того чтобы работать с градуированным кольцом $K^*(Z)=\bigoplus\limits_{r=0}^{\infty} K^{-r}(Z)$, с тем же успехом можно было работать с градуированным кольцом $K^\#(Z)=K^0(Z)\bigoplus K^{-1}(Z)$, где произведения $K^i\times K^j\to K^{i+j}$ для i и $j\in Z/2$ определяются с использованием периодичности Ботта.

2.7. Следствие. *Относительная группа $K^*(X\times P_n,\ X\times P_k)$ для $k<n$ является свободным подмодулем в $K^*(X\times P_n)$, порожденным элементами $t^{k+1}, \ldots, t^n$.*

Доказательство. Сформулированное утверждение непосредственно вытекает из расщепляющейся точной последовательности $K^*(X)$-модулей

$$0\to K^*(X\times P_n,\ X\times P_k)\xrightarrow{\alpha} K^*(X\times P_n)\xrightarrow{\beta} K(X\times P_k)\to 0,$$

где β — эпиморфизм (и, следовательно, α — мономорфизм) в силу предыдущего предложения. □

2.8. Следствие. *Имеют место соотношения $K^1(P_n)=0$ и $K^0(P_n) \approx Z[t]/(t^{n+1})$, где $t=1-[\xi_n^*]$ — эйлеров класс расслоения ξ_n^*.*

2.9. Следствие. *Пусть P_n и P_m — комплексные проективные пространства, и пусть $\eta_1=\pi_1^*\xi_n^*$ и $\eta_2=\pi_2^*\xi_m^*$, где $\pi_1: P_n\times P_m\to P_n$ и $\pi_2: P_n\times P_m\to P_m$. Обозначим через x и y соответственно эйлеровы классы линейных расслоений η_1 и η_2. Тогда $K^1(P_n\times P_m)=0$ и $K^0(P_n\times P_m)\approx Z[x,y]/(x^{n+1})(y^{m+1})$.*

2.10. Предложение. *Пусть L_1 и L_2 — линейные расслоения над компактной базой X. Тогда $\chi(L_1\otimes L_2)=\chi(L_1)+\chi(L_2)-\chi(L_1)\cdot\chi(L_2)$. Кроме того, элемент $z=\chi(L_1)$ нильпотентен и $\chi(L_1^*)=-z-z^2-\ldots-z^n-\ldots$. Наконец, элемент $\chi(L_1^*\otimes L_2)$ можно представить в виде $(\chi(L_2)-\chi(L_1))\cdot h$, где h — некоторый обратимый элемент.*

Доказательство. Так как, в силу 1.13, $\chi(V)=\sum\limits_{i=0}^{\operatorname{rank}(V)}(-1)^i\lambda^i(V)$, то мы имеем $\chi(V)=1-[V]$, если V — линейное расслоение. Следовательно,

$$\chi(L_1\otimes L_2)=1-[L_1\otimes L_2]=(1-[L_1])+(1-[L_2])-(1-[L_1])\times(1-[L_2]),$$

что доказывает первую часть предложения.

Далее, элемент $\chi(L_1)$, очевидно, принадлежит $K'(X)$ и, значит, нильпотентен в силу II.5.9. Если x — эйлеров класс расслоения L_1^*, то должно выполняться соотношение $x+z-zx=0$, поскольку $\chi(L_1\otimes L_1^*)=0$. Следовательно, $x=-z(1-z)^{-1}=-z-z^2-\ldots-z^n-\ldots$ в кольце $K(X)$.

Наконец, если мы положим $t_1=\chi(L_1)$ и $t_2=\chi(L_2)$, то

$$\chi(L_1^*\otimes L_2)=-t_2+(1-t_2)(-t_1-t_1^2-\ldots-t_1^n-\ldots)$$
$$=(t_2-t_1)(1+t_1+t_1^2+\ldots),$$

т. е. элемент $\chi(L_1^*\otimes L_2)$ имеет вид $(t_2-t_1)h$, где h — обратимый элемент. □

2.11. Следствие. *Пусть u — эйлеров класс расслоения $\pi^*\xi_n$, где π: $X\times P_n\to X$. Тогда*

$$K^*(X\times P_n)\approx K^*(X)[u]/(u^{n+1}).$$

2.12. С помощью 2.11 мы можем теперь окончить вычисления, начатые в 1.14. Если через $L_{n,k}$ обозначить пространство $S^{2n+1}/(Z/k)$, то имеет место точная последовательность

$$\begin{array}{ccccccc} 0\longrightarrow & K(P_n) & \xrightarrow{\alpha} & K(P_n) & \longrightarrow & K(L_{n,k}) & \longrightarrow 0 \\ & \wr\wr & & \wr\wr & & & \\ & \mathbf{Z}[u]/(u^{n+1}) & & \mathbf{Z}[u]/(u^{n+1}) & & & \end{array}$$

где α — умножение на эйлеров класс расслоения $\xi^{\otimes k}$, т. е. на элемент $1-(1-u)^k$. Следовательно, $\tilde{K}(L_{n,k})$ представляет собой конечную группу порядка не выше k^n. Например, если $k=2$, то $\tilde{K}(L_{n,k})\approx\tilde{K}(RP_{2n+1})\approx Z/2^nZ$ с образующей $[H']-1$, где H' — комплексификация канонического вещественного линейного расслоения над RP_{2n+1} (I.2.4; см. также 6.47).

2.13. Предложение. *Пусть X — компактное пространство и V — комплексное векторное расслоение ранга n над X. Пусть u — эйлеров класс линейного расслоения ξ_V (2.2). Тогда $K^*(P(V))$ представляет собой сводный $K^*(X)$-модуль с базисом $1, u, \ldots, u^{n-1}$. В частности, гомоморфизм $K^*(X)\to K^*(P(V))$ является мономорфизмом.*

Доказательство. Если расслоение V тривиально, скажем имеет вид $X\times\mathbf{C}^n$, то $\xi_V\approx\pi^*\xi_n$, где π: $P(V)\approx X\times P_n\to P_n$. Следовательно, согласно 2.11, в этом случае предложение верно. Пусть теперь $W_1,\ldots, W_r$ — такое конечное покрытие пространства X, что $V|_{W_l}$ тривиально, и $e^i=u^{i-1}$. Требуемое утверждение получается применением теоремы 1.3, поскольку расслоение $V|_Y$ тривиально, когда $Y\subset W_l$. □

2.14.1. Предложение. *В обозначениях предложения 2.13, предположим, что $V=L_1\oplus L_2\oplus\ldots\oplus L_n$, где все L_i — линейные расслоения. Тогда имеет место соотношение $\prod_{i=1}^{n}(u-\chi(L_i))=0$, где u — эйлеров класс расслоения ξ_V.*

Доказательство. Так как предложение очевидно для $n=1$, используем для доказательства индукцию по n. Рассмотрим линейное расслоение $L_{n+1}=L$ над X и произведение $y=\prod_{i=1}^{n+1}(v-\chi(L_i))$, где v — эйлеров класс линейного расслоения $\xi_{V\oplus L}$ над $P(V\oplus L)$. Тогда $y=x\cdot\tau$, где $x=\prod_{i=1}^{n}(v-\chi(L_i))$ и $\tau=-\chi(\xi^*_{V\oplus L}\otimes\pi_1^*L)$ для $\pi_1\colon P(V\oplus L)\to X$ с точностью до обратимого элемента (2.10). Используя обозначения п. 2.4, мы имеем $x\cdot\tau=j_0^*\Phi(x')$, где $x'=\prod_{i=1}^{n}[u-\chi(L_i)]=0$ по предположению индукции. Следовательно, $y=0$, как и требовалось. □

2.14.2. Замечание. Пусть $\pi\colon P(V)\to X$ — каноническая проекция. Тогда векторное расслоение

$$\xi_V^*\otimes(\pi^*L_1\oplus\ldots\oplus\pi^*L_n)\approx\xi_V^*\otimes\pi^*V\approx \mathrm{HOM}(\xi_V,\pi^*V)$$

имеет каноническое ненулевое сечение, поскольку ξ_V является подрасслоением в π^*V. Следовательно, его эйлеров класс, который с точностью до нильпотентного элемента равен $\prod_{i=1}^{n}(u-\chi(L_i))$ (в силу 1.13 и 2.10), обязан быть нулевым. Эти рассуждения доставляют еще одно доказательство предложения 2.14.1.

Нам остается еще определить кольцевую структуру на $K^*(P(V))$ в случае, когда V — произвольное комплексное векторное расслоение. Для этого и для многих других вычислений мы используем следующее утверждение, которое называется *принципом расщепления*:

2.15. Теорема. *Пусть V — комплексное векторное расслоение с компактной базой X. Тогда существуют такое пространство $\mathrm{F}(V)$ и отображение $\pi\colon \mathrm{F}(V)\to X$, естественно зависящие от V, что*

a) *гомоморфизм $\pi^*\colon K^*(X)\to K^*(F(V))$ является мономорфизмом,*

b) *векторное расслоение π^*V расщепляется в сумму Уитни линейных расслоений.*

Доказательство. Докажем теорему индукцией по рангу расслоения V. Если ранг равен 1, то, разумеется, годится $\mathrm{F}(V)=X$. Пусть ранг расслоения V больше 1. Рассмотрим проективное расслоение $P(V)$, ассоциированное с V. Каноническое линейное расслоение $\xi=\xi_V$ на $P(V)$ является подрасслоением расслоения $V'=p^*V$, где $p\colon P(V)\to X$. Положим $\mathrm{F}(V)=(V'/\xi)$ и зададим π как композицию $\mathrm{F}(V'/\xi)\xrightarrow{\pi'}P(V)\xrightarrow{p}X$. В силу 2.13 и предположения индукции, гомоморфизм $K^*(X)\xrightarrow{\pi^*}K^*(\mathrm{F}(V))$ является мономорфизмом. Сверх того, поскольку пространство $P(V)$ компактно, мы можем записать $V'\approx\xi\oplus V'/\xi$ (I.5.13). Так как по индуктивному предположению $\pi'^*(V'/\xi)$ является суммой линейных расслоений, мы видим, что $\pi^*(V)=\pi'^*p^*(V)$ также есть сумма линейных расслоений. □

2.16. Теорема. *Пусть $h\in K(P(V))$ — класс канонического линейного расслоения ξ_V. Тогда $K^*(P(V))$ является свободным $K^*(X)$-модулем с базисом $1, h, \ldots, h^{n-1}$. Кроме того, элемент h^n определяется соотношением*

$$h^n-[\lambda^1(V)]h^{n-1}+[\lambda^2(V)]h^{n-2}+\ldots+(-1)^n[\lambda^n(V)]=0,$$

где $\lambda^i(V)$ есть i-я внешняя степень V (I.4.8, f)).

Доказательство. Так как $u = 1 - h$, то в силу 2.14 очевидно, что элементы $1, h, \ldots, h^{n-1}$ образуют базис $K^*(X)$-модуля $K^*(P(V))$. Далее, при доказательстве утверждаемого теоремой соотношения мы можем на основании принципа расщепления (2.15) предположить, что V является суммой линейных расслоений. Если $V = \bigoplus_{r=1}^{n} L_r$, то мы имеем

$$\lambda^1(V) = \bigoplus_{i=1}^{n} L_r,$$
$$\lambda^2(V) = \bigoplus_{r_1 < r_2} L_{r_1} \otimes L_{r_2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\lambda^n(V) = L_1 \otimes L_2 \otimes \ldots \otimes L_n.$$

Следовательно, $\lambda^i(V)$ можно представить в кольце $K(X)$ как i-й симметрический многочлен от переменных $[L_r]$, так что наше соотношение записывается в виде $\prod_{i=1}^{n} (h - [L_i]) = 0$. Это эквивалентно соотношению $\prod_{i=1}^{n} (u - \chi(L_i)) = 0$, поскольку $\chi(L_i) = 1 - [L_i]$. Теорема следует теперь из 2.14. $\square$

Следующее наблюдение окажется очень полезным в § V.3.

2.17. Предложение. *Для любого векторного расслоения V ранга n с компактной базой X существуют* ***характеристические классы*** *$c_i(V) \in K(X)$, $i = 0, \ldots, n$, удовлетворяющие условию $c_0(V) = 1$ и следующим аксиомам:*

1) *Классы $c_i(V)$ естественны*, т. е. *$c_i(V) = f^*(c_i(V'))$ для любого общего морфизма $g: V \to V'$, который индуцирует отображение $f: X \to X'$ баз расслоений V и V' соответственно:*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "g"] \arrow[d] & V' \arrow[d] \\ X \arrow[r, "f"] & X' \end{tikzcd}$$

2) *Если V_1 и V_2 — векторные расслоения над X, то*

$$c_k(V_1 \oplus V_2) = \sum_{i+j=k} c_i(V_1)\, c_j(V_2).$$

3) *Если ранг расслоения V равен единице, то $c_1(V) = \chi(V) = -[V]$ и $c_i(V) = 0$ для $i > 1$.*

Более того, характеристические классы $c_i(V)$ однозначно определяются этими аксиомами.

Доказательство. Заметим прежде всего, что вторую аксиому можно более кратко записать в виде $c_t(V_1 \oplus V_2) = c_t(V_1)\,c_t(V_2)$, где $c_t(V) = \sum_{i=0}^{\infty} t^i c_i(V) \in K(X)[t]$.

Докажем теперь единственность этих классов. Если $\pi\colon F(V) \to X$ — отображение, описанное в 2.15, то $\pi^* V = \bigoplus_{r=1}^{n} L_r$, где L_r — линейные расслоения. Следовательно, мы должны иметь

$$\pi^*(c_i(V)) = c_i\left(\bigoplus_{r=1}^{n} L_r\right) = \sum_{r_1<r_2<\ldots<r_i} c_1(L_{r_1})\,c_1(L_{r_2})\ldots c_1(L_{r_i}) = \sum_{r_1<r_2<\ldots<r_i} \chi(L_{r_1})\,\chi(L_{r_2})\ldots\chi(L_{r_i}).$$

Так как отображение π^* инъективно (2.13), классы c_i определяются аксиомами однозначно.

Для доказательства существования рассмотрим кольцо $K(P(V))$. Согласно 2.13, элемент u^n является линейной комбинацией элементов $1, u, \ldots, u^{n-1}$ с коэффициентами в $K(X)$. Определим классы $c_i(V)$ уравнением

$$u^n - c_1(V)\,u^{n-1} + \ldots + (-1)^n c_n(V) = 0,$$

полагая $c_i(V) = 0$ для $i > \operatorname{rank}(V)$. Это определение очевидным образом удовлетворяет аксиомам 1) и 3). Для того чтобы проверить аксиому 2), рассмотрим пространство $F(V_2')$, где $V_2' = \pi_1^* V_2$, $\pi_1\colon F(V_1) \to X$. Пусть π — композиция $F(V_2') \to F(V_1) \to X$. Тогда гомоморфизм $\pi^*\colon K(X) \to K(F(V_2'))$ является мономорфизмом и $\pi^* V_1$ и $\pi^* V_2$ расщепляются в прямые суммы линейных расслоений. Следовательно, используя гомоморфизм π^* и естественность характеристических классов, мы получаем, что достаточно проверить аксиому 2 лишь в случае, когда V_1 и V_2 суть суммы линейных расслоений. Применяя индукцию по рангу расслоения V_2, видим, что в действительности достаточно проверить соотношение $c_t(V \oplus L) = c_t(V)\,c_t(L)$ для случая, когда V есть сумма линейных расслоений, а L — линейное расслоение. Если $V = \bigoplus_{i=1}^{n} L_i$, то теорема 2.14 дает нам возможность явно вычислить $c_i(V)$:

$$c_1(V) = \sum_{r=1}^{n} \chi(L_r),$$

$$c_2(V) = \sum_{r_1<r_2} \chi(L_{r_1})\,\chi(L_{r_2}),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$c_n(V) = \chi(L_1)\ldots\chi(L_n).$$

Следовательно,

$$c_1(V\oplus L)=\sum_{r=1}^{n}\chi(L_r)+\chi(L)=c_1(V)+c_1(L),$$

$$c_2(V\oplus L)=\sum_{r_1<r_2}\chi(L_{r_1})\chi(L_{r_2})+\left(\sum_{r=1}^{n}\chi(L_r)\right)\chi(L)$$

$$=c_2(V)+c_1(V)c_1(L),$$

. . . .

$$c_i(V\oplus L)=\sum_{r_1<\ldots<r_i}\chi(L_{r_1})\ldots\chi(L_{r_i})+\sum_{r_1<\ldots<r_{i-1}}\chi(L_{r_1})\ldots$$

$$\ldots\chi(L_{r_{i-1}})\chi(L)=c_i(V)+c_{i-1}(V)c_1(L)\ \text{для}\ i\leqslant n,$$

$$c_{n+1}(V\oplus L)=\chi(L_1)\chi(L_2)\ldots\chi(L_n)\chi(L)=c_n(V)c_1(L),$$

$$c_i(V\oplus L)=0\ \text{для}\ i>n+1.$$

Эти соотношения, которые можно записать в виде $c_t(V\oplus L)=$ $=c_t(V)\,c_t(L)$, как раз и представляют собой аксиому 2. □

2.18. В действительности можно определить характеристические классы $c_i(V)$ в терминах внешних степеней $\lambda^i(V)$, используя следующий метод. Согласно 2.16, справедливо уравнение

$$h^n-[\lambda^1(V)]h^{n-1}+\ldots+(-1)^n[\lambda^n(V)]=0.$$

Заменяя h на $1-u$, получаем уравнение

$$(u-1)^n-[\lambda^1(V)](u-1)^{n-1}+[\lambda^2(V)](u-1)^{n-2}+\ldots+[\lambda^n(V)]=0.$$

Следовательно, если обозначить коэффициент при u^i через $(-1)^{n-i}c_{n-i}(V)$, то мы должны иметь

$$c_1(V)=\binom{n}{1}[\lambda^0(V)]-\binom{n-1}{0}[\lambda^1(V)],$$

$$c_2(V)=\binom{n}{2}[\lambda^0(V)]-\binom{n-1}{1}[\lambda^1(V)]+\binom{n-2}{0}[\lambda^2(V)],$$

$$c_3(V)=\binom{n}{3}[\lambda^0(V)]-\binom{n-1}{2}[\lambda^1(V)]+\binom{n-2}{1}[\lambda^2(V)]$$

$$-\binom{n-3}{0}[\lambda^3(V)],$$

. . . .

$$c_n(V)=[\lambda^0(V)]-[\lambda^1(V)]+[\lambda^2(V)]+\ldots+(-1)^n[\lambda^n(V)].$$

Другая интерпретация этих результатов будет дана в § IV.7 (в рамках вещественной и комплексной K-теорий).

Упражнения: 3, 10.

3. Комплексная K-теория расслоений на флаги и грассмановых расслоений. K-теория произведений

3.1. Точно также как и в § 2, буква K будет обозначать группы комплексной K-теории ($K_{\mathbb{C}}$).

3.2. Пусть E — комплексное векторное пространство размерности n. *Флагом* в E называется последовательность подпространств $0=E_0 \subset E_1 \subset \ldots \subset E_n=E$, где подпространство E_i имеет размерность i. Обозначим множество всех флагов в E через $\mathrm{F}(E)$; оно может быть следующим образом наделено топологией. Если мы выберем некоторый базис в E, т. е. некоторый изоморфизм $\mathbb{C}^n \approx E$, то получим, что группа $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ транзитивно действует в $\mathrm{F}(E) \approx \mathrm{F}(\mathbb{C}^n)$, причем подгруппой, оставляющей неподвижной *канонический флаг* $0 \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{C}^2 \subset \ldots \subset \mathbb{C}^n$, является подгруппа τ_n^+ верхних треугольных матриц. Следовательно, $\mathrm{F}(E) \approx \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})/\tau_n^+$ может быть наделено фактортопологией, индуцированной из $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$; эта топология не зависит от выбора базиса. Далее, пространство $\mathrm{F}(E)$ компактно, поскольку $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})/\tau_n^+ \approx \mathrm{U}(n)/T^n$, где T^n — группа диагональных матриц с диагональными элементами, по модулю равными 1.

3.3. Пусть теперь V — комплексное векторное расслоение над компактным пространством X. Определим *расслоение на флаги* $\mathrm{F}(V)$ как расслоение на X, слоем которого над точкой x служит пространство $\mathrm{F}(V_x)$. Более точно, $\mathrm{F}(V)=\coprod_{x\in X} \mathrm{F}(V_x)$ и топология на $\mathrm{F}(V)$ определяется так же, как в I.4.5 (ср. с 2.2).

Пространство $\mathrm{F}(V)$ может быть построено также индукцией по размерности V с помощью следующей процедуры. Пусть $P(V)$ — проективное расслоение, ассоциированное с V, и пусть $V'=p^*V$, где $p\colon P(V) \to X$. Тогда $\mathrm{F}(V) \approx \mathrm{F}(V'/\xi)$, где ξ — каноническое линейное расслоение над $P(V)$. Более подробно, имеет место биекция $\mathrm{F}(V) \to \mathrm{F}(V'/\xi)$: она сопоставляет флагу $0 \subset E_1 \subset \ldots \subset E_{n-1} \subset V_x$ в V_x флаг $0 \subset E_2/E_1 \subset \ldots \subset V_x/E_1$ над $\{E_1\} \in P(V)$. Ясно, что это — непрерывное отображение. Так как пространства $\mathrm{F}(V)$ и $\mathrm{F}(V'/\xi)$ компактны, то это гомеоморфизм (нетрудно явно указать непрерывное отображение, обратное к данному). Эта конструкция показывает, что пространство $\mathrm{F}(V)$, введенное в 2.15 для доказательства принципа расщепления, с точностью до изоморфизма совпадает с только что определенным здесь пространством.

3.4. Над пространством $\mathrm{F}(V)$ мы имеем последовательность расслоений $0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_n=\pi^*V$, где $\pi\colon \mathrm{F}(V) \to X$ и слой V_i над флагом $\Delta=\{0 \subset E_1 \subset \ldots \subset E_n=V_x\} \in F(V_x)$ есть множество всех векторов v, принадлежащих E_i (с топологией, индуцированной вложением $V_i \subset \pi^*V$). Согласно теореме I.5.14, примененной $n-1$ раз, факторрасслоения V_i/V_{i-1} являются корректно определенными линейными расслоениями L_i над $F(V)$, причем $\bigoplus_{i=1}^{n} L_i \approx \pi^* V$. Обозначим класс L_i в $K(F(V))$ через h_i.

3.5. Теорема. *Пусть X — компактное пространство и V — комплексное векторное расслоение над X ранга n. Тогда $K^*(F(V))$ является свободным $K^*(X)$-модулем ранга $n!$ с базисом $h_1^{r_1} h_2^{r_2} \dots h_{n-1}^{r_{n-1}}$, $r_i \leqslant n-i$.*

Доказательство. Докажем это утверждение индукцией по n. Предположим, что $K^*(F(V'/\xi))$ является свободным $K^*(P(V))$-модулем с базисом $h_2^{r_2} h_3^{r_3} \dots h_{n-1}^{r_{n-1}}$, $r_i \leqslant n-i$. Поскольку $K^*(P(V))$ есть свободный $K^*(X)$-модуль с базисом $h_1^{r_1}$ для $r_1 \leqslant n-1$ (2.13), теорема доказана. □

Для того чтобы избежать рассмотрения элементов h_i, которые несимметрично входят в базис $K^*(F(V))$, докажем следующую теорему

3.6. Теорема. *Пусть*

$$\varphi\colon K^*(X)[x_1, \dots, x_n] \to K^*(F(V))$$

— гомоморфизм $K^*(X)$-алгебр, переводящий x_i в h_i. Тогда φ является эпиморфизмом и его ядро есть идеал I, порожденный элементами $\sigma_i - [\lambda^i(V)]$, где через σ_i обозначена i-я элементарная симметрическая функция переменных x_i. Следовательно, φ индуцирует изоморфизм

$$\varphi'\colon K^*(X)[x_1, \dots, x_n]/I \approx K^*(F(V)).$$

Доказательство. Согласно теореме 3.5, гомоморфизм φ сюръективен. С другой стороны, поскольку $\bigoplus_{i=1}^{n} L_i = V$, то $\sigma_i - [\lambda^i(V)]$ принадлежит ядру гомоморфизма φ. В силу хорошо известной алгебраической теоремы (3.28), $K^*(X)[x_1, \dots, x_n]$ является свободным $K^*(X)[\sigma_1, \dots, \sigma_n]$-модулем с базисом $x_1^{r_1} \dots x_{n-1}^{r_{n-1}}$, где $r_i \leqslant n-i$. Следовательно, фактор-алгебра M алгебры $K^*(X)[x_1, \dots, x_n]$ по идеалу, порожденному элементами $\sigma_i - [\lambda^i(V)]$, представляет собой свободный $K^*(X)$-модуль с базисом $x_1^{r_1} \dots x_{n-1}^{r_{n-1}}$. Так как $K^*(F(V))$ является свободным $K^*(X)$-модулем, а φ индуцирует гомоморфизм $\varphi'\colon M \to K^*(F(V))$, который переводит базис M в базис $K^*(F(V))$, то φ' является изоморфизмом. □

3.7. Пусть E — комплексное векторное пространство размерности n. Назовем множество всех q-мерных подпространств E *многообразием Грассмана* или *грассманианом* q-плоскостей в E. Обозначим это множество через $G_q(E)$. Как мы видели в I.7.16, $G_q(E)$ можно отождествить с $U(n)/U(q) \times U(n-q)$; тем самым $G_q(E)$ наделяется топологией компактного пространства. Кроме того, имеется непрерывное отображение $F(E) \to G_q(E)$: оно сопоставляет каждому флагу $E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_n = E$ его q-й элемент E_q. С точностью до изоморфизма это отображение совпадает с отображением $U(n)/T^n$

$\to U(n)/U(q)\times U(n-q)$, которое индуцировано вложением T^n в $U(q)\times U(n-q)$.

3.8. Лемма. *Отображение* $\pi\colon F(\mathbb{C}^n)\to G_q(\mathbb{C}^n)$ *является расслоением со слоем* $F(\mathbb{C}^q)\times F(\mathbb{C}^{n-q})$.

Доказательство. Термин „расслоение" означает здесь следующее: для любой точки S^0 из $G_q(\mathbb{C}^n)$ можно найти такую окрестность W этой точки, что $\pi^{-1}(W)\approx W\times F(\mathbb{C}^q)\times F(\mathbb{C}^{n-q})$. Для доказательства леммы заметим прежде всего, что пространство $F(E)$ можно описать как множество, состоящее из последовательностей $(L_1, \ldots, L_n)$ линейно-независимых взаимно ортогональных одномерных подпространств пространства E (чтобы получить флаг, достаточно взять $E_i=L_1\oplus\ldots\oplus L_i$; обратно, $L_i=E_{i+1}\cap E_i^{\perp}$). Далее, рассмотрим множество W всех элементов S из $G_q(\mathbb{C}^n)$, таких что ортогональная проекция S^0 на S является изоморфизмом. Если мы фиксируем ортонормированный базис $B^0=\{e_1^0, \ldots, e_q^0\}$ в S^0 и ортонормированный базис $C^0=\{e_{q+1}^0, \ldots, e_n^0\}$ в $S^{0\perp}$, то ортогональная проекция B (соотв. C) базиса B^0 (соотв. $S^{0\perp}$) будет базисом в S (соотв. $S^{\perp}$). Процесс ортогонализации Грама—Шмидта, примененный к $B\cup C$, дает новый ортонормированный базис $\mathbb{C}^n$ и, следовательно, унитарный изоморфизм $\alpha_S\colon\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$, непрерывно зависящий от $S\in W$ и такой, что $\alpha_S(S^0)=S$. Определим теперь изоморфизм

$$\theta\colon \pi^{-1}(W)\to W\times F(S^0)\times F(S^{0\perp}),$$

полагая

$$\theta(L_1, \ldots, L_n)=(S, \Delta, \Gamma),$$

где

$$S=L_1\oplus\ldots\oplus L_q,$$
$$\Delta=(\alpha_S^{-1}(L_1), \ldots, \alpha_S^{-1}(L_q)),$$
$$\Gamma=(\alpha_S^{-1}(L_{q+1}), \ldots, \alpha_S^{-1}(L_n)).$$

Обратный изоморфизм θ^{-1} определяется формулой

$$\theta^{-1}(S, \Delta^0, \Gamma^0)=(\alpha_S(L_1^0), \ldots, \alpha_S(L_q^0), \ldots, \alpha_S(L_n^0)),$$

в которой

$$\Delta^0=(L_1^0, \ldots, L_q^0),\ \Gamma^0=(L_{q+1}^0, \ldots, L_n^0). \ \square$$

3.9. Теорема. *Пусть X — компактное пространство и*

$$\beta\colon X\times F(\mathbb{C}^n)\to X\times G_p(\mathbb{C}^n)$$

— непрерывное отображение, задаваемое формулой $(x, e)\mapsto(x, \pi(e))$. *Тогда гомоморфизм*

$$\beta^*\colon K^*(X\times G_p(\mathbb{C}^n))\to K^*(X\times F(\mathbb{C}^n))$$

является мономорфизмом. Образ его представляет собой инвариантную подгруппу $K^*(X\times F(\mathbb{C}^n))^G$, *где* $G=S_p\times S_{n-p}$ *действует на* $F(\mathbb{C}^n)$

посредством перестановки подпространств L_i (см. описание пространства $F(\mathbb{C}^n)$, данное в доказательстве леммы 3.8).

Доказательство. Согласно 3.8, мы имеем расслоение

$$F(\mathbb{C}^p)\times F(\mathbb{C}^{n-p}) \to X\times F(\mathbb{C}^n) \xrightarrow{\beta} X\times G_p(\mathbb{C}^n).$$

Обозначим через $h_1, \ldots, h_n$ классы канонических линейных расслоений на $X\times F(\mathbb{C}^n)$. Тогда ограничения произведений

$$h_1^{r_1}\ldots h_{p-1}^{r_{p-1}}h_{p+1}^{s_{p+1}}\ldots h_{n-1}^{s_{n-1}}, \quad r_i \leqslant p-i, \quad s_j < n-j+1,$$

на подпространство $\beta^{-1}(X\times Y)$, где Y выбрано так, что $\pi^{-1}(Y) \approx Y\times F(\mathbb{C}^p)\times F(\mathbb{C}^{n-p})$, задают базис $K^*(X\times Y)$-модуля $K^*(\beta^{-1}(X\times Y))$ (для доказательства достаточно дважды применить теорему 3.5). Следовательно, в силу 1.3, $K^*(X\times F(\mathbb{C}^n))$ является свободным $K^*(X\times G_p(\mathbb{C}^n))$-модулем с указанным выше базисом. В частности, гомоморфизм $K^*(X\times G_p(\mathbb{C}^n)) \to K^*(X\times F(\mathbb{C}^n))$ инъективен.

Далее, отображение $F(\mathbb{C}^n) \xrightarrow{\pi} G_p(\mathbb{C}^n)$ эквивариантно относительно тривиального действия $S_p\times S_{n-p}$ на многообразии Грассмана. Отсюда вытекает, что β^* переводит $K^*(X\times G_p(\mathbb{C}^n))$ в инвариантное множество $K^*(X\times F(\mathbb{C}^n))^G$ относительно действия $G=S_p\times S_{n-p}$. Для того чтобы вычислить $K^*(X\times F(\mathbb{C}^n))^G$, представим $K^*(X\times F(\mathbb{C}^n))$ в виде факторалгебры алгебры полиномов $K^*(X)[x_1, \ldots, x_n]$ по идеалу, порожденному элементарными симметрическими полиномами $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ (3.6). Обозначим через τ_i (соотв. γ_j) i-й элементарный симметрический полином от переменных $x_1, \ldots, x_p$ (соотв. j-й элементарный симметрический полином от переменных $x_{p+1}, \ldots, x_n$). Простые вычисления показывают, что $K^*(X\times F(\mathbb{C}^n))^G$ изоморфно факторалгебре алгебры $K^*(X)[\tau_1, \ldots, \tau_p, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-p}]$ по идеалу, порожденному полиномами $\sigma_r = \sum_{i=0}^{r} \tau_i\gamma_{r-i}$, $r=1, \ldots, n$ (по определению, $\tau_0=\gamma_0=1$). Действительно, формула

$$\sigma_r = \sum_{i=0}^{r} \tau_i\gamma_{r-i}$$

выражает r-й элементарный симметрический полином от переменных $x_1, \ldots, x_n$ через элементарные симметрические полиномы τ_i и γ_j и получается путем вычисления произведения

$$\prod_{r=1}^{n}(1+tx_r) = \prod_{i=1}^{p}(1+tx_i)\prod_{j=1}^{n-p}(1+tx_{p+j})$$

двумя различными способами.

Наконец, рассмотрим каноническое векторное расслоение ξ ранга p на $G_p(\mathbb{C}^n)$ (см. I.7.8). Пространство расслоения ξ можно отождествить с подпространством произведения $G_p(\mathbb{C}^n)\times\mathbb{C}^n$, состоящим из пар (X, x), где X есть p-мерная плоскость в $\mathbb{C}^n$ и x — вектор из X. Пусть $\xi^\perp$ — расслоение, „ортогональное" к ξ, т. е. подмножество в $G_p(\mathbb{C}^n)\times\mathbb{C}^n$, состоящее из пар (X, x), где $X\in G_p(\mathbb{C}^n)$ и $x\in X^\perp$. Положим $T=\delta^*\xi$ и $T^\perp=\delta^*\xi^\perp$, где $\delta\colon X\times G_p(\mathbb{C}^n)\to G_p(\mathbb{C}^n)$, $r_i=[\lambda^i(T)]$ для $i\leqslant p$ и $s_j=[\lambda^j(T^\perp)]$ для $j\leqslant n-p$. Пусть

$$g\colon K^*(X)[\tau_1, \ldots, \tau_p, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-p}]\to K^*(X\times G_p(\mathbb{C}^n))$$

— гомоморфизм $K^*(X)$-алгебр, переводящий τ_i в r_i и γ_j в s_j. Поскольку расслоение $T\oplus T^\perp$ тривиально, то этот гомоморфизм равен нулю на идеале, порожденном полиномами $\sigma_r=\sum\limits_{i=0}^{r}\tau_i\gamma_{r-i}$. Следовательно, определен гомоморфизм

$$K^*(X\times F(\mathbb{C}^n))^G\approx K^*(X)\otimes K(F(\mathbb{C}^n))^G\to K^*(X\times G_p(\mathbb{C}^n)).$$

Так как $T=\bigoplus\limits_{i=1}^{p}L_i$ и $T^\perp=\bigoplus\limits_{j=p+1}^{n}L_j$, то композиция

$$K^*(X)\otimes K(F(\mathbb{C}^n))^G\to K^*(X\times G_p(\mathbb{C}^n))\to K^*(X)\otimes K(F(\mathbb{C}^n))^G$$

представляет собой тождественное отображение. Поскольку гомоморфизм $K^*(X\times G_p(\mathbb{C}^n))\to K^*(X)\otimes K(F(\mathbb{C}^n))^G$ является мономорфизмом, отсюда следует требуемое утверждение. $\square$

3.10. Следствие. *Пусть $d=\binom{n}{p}$. Тогда существуют такие полиномы $P_1, \ldots, P_d$ с целыми коэффициентами от переменных r_i и s_j, что $K^*(X\times G_p(\mathbb{C}^n))$ представляет собой свободный $K^*(X)$-модуль с базисом $P_1, \ldots, P_d$.*

Доказательство. Мы имеем цепочку вложений Z-модулей

$$K(F(\mathbb{C}^n))\supset K(F(\mathbb{C}^n))^G\supset Z,$$

где $K(F(\mathbb{C}^n))$ есть свободный Z-модуль ранга $n!$, а также свободный $K(F(\mathbb{C}^n))^G$-модуль ранга $p!(n-p)!$ в силу первой части доказательства теоремы 3.9. Следовательно, $K(F(\mathbb{C}^n))^G$ является свободным Z-модулем ранга d с базисом, образованным классами подходящих полиномов $P_1, \ldots, P_d$ от переменных τ_i и γ_j. Поэтому $K^*(X\times G_p(\mathbb{C}^n))\approx K^*(X)\otimes K(F(\mathbb{C}^n))^G$ является свободным $K^*(X)$-модулем, базис которого образуют полиномы P_α, выраженные в переменных r_i и s_j. $\square$

3.11. Следствие. *Пусть $d=\binom{n}{p}$. Тогда $K^{-1}(G_p(\mathbb{C}^n))=0$ и $K(G_p(\mathbb{C}^n))$ есть свободная абелева группа ранга d.*

Пусть теперь V — векторное расслоение ранга n с компактной базой X. Так как функтор $E\mapsto G_p(E)$ из категории n-мерных комплексных векторных пространств в категорию компактных пространств непрерывен в очевидном смысле, то методы п. I.4.5 позволяют нам построить компактное пространство $G_p(V)$, расслоенное над X, слоями которого являются грассманианы (в случае $p=1$ это определение сводится к определению $P(V)$; см. 2.2). Обозначим через T каноническое p-мерное векторное расслоение над $G_p(V)$ и через $T^{\perp}$ — ортогональное к нему расслоение относительно какой-нибудь метрики на V.

3.12. Теорема. *Пусть*

$$\psi\colon K^*(X)[\tau_1, \ldots, \tau_p, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-p}] \to K^*(G_p(V))$$

— гомоморфизм $K^*(X)$-алгебр, переводящий τ_i в $r_i=[\lambda^i(T)]$ и γ_j в $s_j=[\lambda^j(T^{\perp})]$. Тогда ψ является эпиморфизмом, ядро которого есть идеал J, порожденный элементами $\sigma_r-\lambda^r(V)$, где $\sigma_r=\sum_{i+j=r}\tau_i\gamma_j$. Следовательно, ψ индуцирует изоморфизм

$$\psi'\colon K^*(X)[\tau_1, \ldots, \tau_p, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-p}]/J \to K^*(G_p(V)).$$

Доказательство. Поскольку расслоение $T\oplus T^{\perp}$ изоморфно $\pi^*(V)$, где $\pi\colon G_p(V)\to X$, то ясно, что ядро ψ содержит идеал, порожденный элементами $\sigma_r-\lambda^r(V)$. Согласно теореме 1.3, $K^*(G_p(V))$ является свободным $K^*(X)$-модулем, базисом которого служат полиномы $P_1, \ldots, P_d$, определенные в 3.10. Следовательно, отображение ψ' корректно определено и сюръективно. С другой стороны, мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
K^*(X)[\tau_1,\ldots,\tau_p,\gamma_1,\ldots,\gamma_{n-p}]/J \arrow[r, "\psi'"] \arrow[d, "\theta"] & K^*(G_p(V)) \arrow[d] \\
K^*(X)[x_1,\ldots,x_n]/I \arrow[r, "\varphi'"] & K^*(F(V))
\end{tikzcd}$$

Здесь φ' — изоморфизм, определенный в 3.6, а гомоморфизм θ переводит τ_i (соотв. γ_j) в i-й (соотв. j-й) элементарный симметрический полином от $x_1, \ldots, x_p$ (соотв. $x_{p+1}, \ldots, x_n$). Поскольку гомоморфизм θ, очевидно, инъективен, то и ψ' также инъективен. □

3.13. Все сказанное выше легко обобщается на так называемые *обобщенные расслоения на флаги*. Более точно, пусть $p_1, \ldots, p_s$ — целые числа, удовлетворяющие соотношению $p_1+p_2+\ldots+p_s=n$. Рассмотрим расслоение $F_{p_1,\ldots,p_s}(V)$ над X, слоем которого в точке $x\in X$ является множество таких взаимно ортогональных подпространств $L_1, \ldots, L_s$, что $L_1\oplus\ldots\oplus L_s=V$ и $\dim(V_i)=p_i$. На $F_{p_1,\ldots,p_s}(V)$ мы имеем канонические расслоения $T_1, \ldots, T_s$ рангов $p_1, \ldots, p_s$ соответственно. Следующая теорема доказывается точно так же, как теорема 3.12.

3.14. Теорема. *Пусть*

$$\psi\colon K^*(X)[\tau_i^j] \to K^*(F_{p_1,\ldots,p_s}(V)),\quad 1\leqslant i\leqslant p_j,$$

— гомоморфизм $K^*(X)$-алгебр, переводящий τ_i^j в $[\lambda^i(T_j)]$. Тогда ψ является эпиморфизмом, ядро которого представляет собой идеал,

порожденный элементами $\sigma_r - [\lambda^r(V)]$, *где*

$$\sigma_r = \sum_{l_1+\ldots+l_s=r} \tau_{l_1}^1 \tau_{l_2}^2 \ldots \tau_{l_s}^s.$$

3.15. *Пример.* Пусть X — пространство $U(n)/U(p_1)\times\ldots\times U(p_s)$, где $p_1+\ldots+p_s=n$. Тогда $K^{-1}(X)=0$ и $K(X)$ есть свободная абелева группа ранга $n!/p_1!p_2!\ldots p_s!$.

3.16. Полученные выше результаты были сформулированы в терминах внешних степеней векторных расслоений. Иногда бывает более удобно работать с характеристическими классами $c_i(V)$ расслоения V, а не с его внешними степенями $\lambda^i(V)$. Например, теорема 3.14 (которая включает в себя как частные случаи все другие теоремы) может быть сформулирована следующим образом:

3.17. *Теорема.* *Пусть*

$$\psi\colon K^*(X)\left[\tau_i^j\right] \to K^*(F_{p_1,\ldots,p_s}(V)),\quad 1\leqslant i\leqslant p_j,$$

— *гомоморфизм* $K^*(X)$-*алгебр, переводящий* τ_i^j в $c_i(T_j)$. *Тогда* ψ *является эпиморфизмом, а ядро его представляет собой идеал, порожденный элементами* $\sigma_r - c_r(V)$, *где*

$$\sigma_r = \sum_{l_1+\ldots+l_s=r} c_{l_1}^1 c_{l_2}^2 \ldots c_{l_s}^s.$$

3.18. *Пример.* Предположим, что $s=2$ и $p_1=1$. Полагая $\tau_1^1=\tau_1$ и $\tau_j^2=\gamma_j$, получаем соотношения

$$\begin{aligned}
&\gamma_1+\tau_1=c_1(V),\\
&\gamma_2-\gamma_1\tau_1=c_2(V),\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&\gamma_{n-1}+\gamma_{n-2}\gamma_1=c_{n-1}(V),\\
&\gamma_{n-1}\gamma_1=c_n(V).
\end{aligned}$$

Следовательно, если $u=c_1(T_1^*)$, то $K^*(F_{1,n-1}(V))\approx K^*(P(V))$ является свободным $K^*(X)$-модулем с базисом $1, u, \ldots, u^{n-1}$. Кроме того, мы имеем соотношение

$$u^n - c_1(V)\,u^{n-1}+\ldots+(-1)^n c_n(V)=0.$$

Таким образом, полученная теорема покрывает и часть результатов § IV.2. Если положить $h=[T_1]$, нетрудно доказать этим же методом и теорему 2.16.

3.19. *Следствие.* *Пусть* $c_i=c_i(T)$ *и* $d_j=c_j(T^\perp)$ *для* $i\leqslant p$ *и* $j\leqslant n-p$ — *характеристические классы векторных расслоений* T *и* $T^\perp$ *на* $G_p(\mathbb{C}^n)$. *Пусть*

$$\psi\colon \mathbb{Z}[\tau_1,\ \ldots,\ \tau_p,\ \gamma_1,\ \ldots,\ \gamma_{n-p}] \to K(G_p(\mathbb{C}^n))$$

— *гомоморфизм* $\mathbb{Z}$-*алгебр, переводящий* τ_i *в* c_i *и* γ_j *в* d_j. *Тогда* ψ — *эпиморфизм, ядро которого есть идеал, порожденный произведениями вида* $\sigma_r=\sum_{i+j=r}\tau_i\gamma_j$.

3.20. Пример. Пусть $X = \mathrm{U}(4)/\mathrm{U}(2)\times \mathrm{U}(2) = G_2(\mathbb{C}^4)$. Если мы положим $x = c_1$ и $y = c_2$, то тривиальные вычисления показывают, что $K(X)$ есть свободная абелева группа ранга 6 с базисом 1, x, x^2, y, y^2, xy. Мультипликативная структура в $K(X)$ задается соотношениями $x^3 = 2xy$ и $x^2y = y^2$ (из этих соотношений следует, что $xy^2 = 0$ и $y^3 = 0$).

3.21. Преимущество формулировок в терминах характеристических классов c_i и d_j заключается в том, что эти классы нильпотентны (2.10 и 2.17). Это позволяет вычислить $\mathrm{proj}\lim K(\mathrm{G}_p(\mathbb{C}^n))$. Более подробно, если X — произвольное топологическое пространство, обозначим через $\mathcal{K}(X)$ проективный предел $\mathrm{proj}\lim K(X_\alpha)$, где X_α пробегает семейство всех компактных подмножеств в X. Если (X_n) — конфинальная система компактных пространств, то мы имеем $\mathcal{K}(X) = \mathrm{proj}\lim K(X_n)$. В частности если p фиксировано и пространство $X = \mathrm{inj}\lim \mathrm{G}_p(\mathbb{C}^n)$ наделено топологией индуктивного предела, то $\mathcal{K}(X) \approx \mathrm{proj}\lim K(\mathrm{G}_p(\mathbb{C}^n))$. Заметим, что X имеет тот же самый гомотопический тип, что и пространство $\mathrm{BU}(p)$, рассмотренное в I.7.14.

3.22. Теорема (Атья [3]). *Пусть*

$$\Gamma\colon\ \mathbb{Z}[[\tau_1, \ \ldots, \ \tau_p]] \to \mathrm{proj}\lim K(\mathrm{G}_p(\mathbb{C}^n))$$

— гомоморфизм $\mathbb{Z}$*-алгебр, переводящий формальный ряд*

$$\sum a_{i_1\ldots i_p}(\tau_1)^{i_1}\ldots(\tau_p)^{i_p} \ \text{ в } \ \sum a_{i_1\ldots i_p}(c_1)^{i_1}\ldots(c_p)^{i_p}.$$

Тогда Γ *— изоморфизм. В частности,* $\mathcal{K}(\mathrm{BU}(p)) \approx \mathbb{Z}[[c_1, \ \ldots, \ c_p]]$, *где* c_i *— характеристические классы канонического векторного расслоения на* $\mathrm{BU}(p)$.

Доказательство. Запишем соотношения из следствия 3.19 в развернутом виде:

$$\begin{cases} \tau_1+\gamma_1=0,\\ \tau_2+\tau_1\gamma_1+\gamma_2=0,\\ \ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \tau_p\gamma_{n-2p}+\tau_{p-1}\gamma_{n-2p+1}+\ldots+\gamma_{n-p}=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tau_p\gamma_{n-2p+1}+\tau_{p-1}\gamma_{n-2p+2}+\ldots+\tau_1\gamma_{n-p}=0,\\ \ \cdot\\ \tau_p\gamma_{n-p}=0. \end{cases}$$

Из первых $n-p$ соотношений следует, что γ_j являются функциями от τ_i. Более точно, γ_j является полиномом веса j от переменных τ_i. Последние p соотношений можно записать в виде $P_i(\tau_1, \ \ldots, \ \tau_p) = 0$, где P_i — однородные полиномы веса $n-p+i$. Следовательно, $K(\mathrm{G}_p(\mathbb{C}^n)) \approx \mathbb{Z}[\tau_1, \ \ldots, \ \tau_p]/I_{p,n}$, где $I_{p,n}$ — идеал, порожденный полиномами порядка $> (n-p)/p$. Если мы обозначим идеал, порожденный всеми полиномами порядка $\geqslant r$, через I_r, то $I_{p,n} \subset I_r$, где $n > rp+p$.

С другой стороны, пусть $u_1, \ldots, u_n$ — эйлеровы классы канонических линейных расслоений на $\mathrm{F}(\mathbb{C}^n)$. Эти классы получаются из эйлерова класса канонического линейного расслоения на $F(\mathbb{C}^n)$ с помощью канонических отображений $\mathrm{F}(\mathbb{C}^n) \to P(\mathbb{C}^n)$. Следовательно, $(u_i)^n = 0$ в силу 2.11. Кроме того, теорема 3.6, записанная в терминах характеристических классов, как в 3.14, показывает, что $K(\mathrm{F}(\mathbb{C}^n))$ является свободным $\mathbf{Z}$-модулем с базисом $u_1^{r_1} \ldots u_{n-1}^{r_{n-1}}$, где $r_i \leqslant n-i$. Таким образом, если $\alpha \in \tilde{K}(\mathrm{F}(\mathbb{C}^n))$, то α^m является суммой одночленов вида $u_1^{r_1} \ldots u_{n-1}^{r_{n-1}}$, где $r_1 + \ldots + r_{n-1} \geqslant m$. Если мы выберем m так, чтобы $m > (n-1)^2$, то по крайней мере одно из чисел r_i будет $\geqslant n$. Следовательно, $(\tilde{K}(\mathrm{F}(\mathbb{C}^n)))^m = 0$. Значит, каждый элемент группы $\tilde{K}(\mathrm{G}_p(\mathbb{C}^n)) \subset \tilde{K}(\mathrm{F}(\mathbb{C}^n))$ (3.9) нильпотентен порядка $\leqslant (n-1)^2 + 1$ — факт, который можно записать в виде вложения $I_r \subset I_{p,n}$, $r > (n-1)^2$. Это показывает, что фильтрации кольца $\mathbf{Z}[\tau_1, \ldots, \tau_p]$ идеалами $I_{p,n}$ и I_n эквивалентны. Таким образом,

$$\mathcal{K}(\mathrm{BU}(p)) \approx \operatorname{proj\,lim} K(\mathrm{G}_p(\mathbb{C}^n)) \approx \operatorname{proj\,lim} \mathbf{Z}[\tau_1, \ldots, \tau_p]/I_{p,n}$$
$$\approx \operatorname{proj\,lim} \mathbf{Z}[\tau_1, \ldots, \tau_p]/I_n \approx \mathbf{Z}[[\tau_1, \ldots, \tau_p]]. \ \square$$

3.23. Пусть X — локально-компактное пространство и (X_i), $i=1, \ldots, n$, — конечное замкнутое покрытие X. Покрытие (X_i) называется *приспособленным*, если любое пересечение $X_{i_1} \cap X_{i_2} \cap \ldots \cap X_{i_r}$ либо пусто, либо гомеоморфно произведению $Z \times \mathbb{R}^p$, где Z — стягиваемое компактное пространство. Говорят, что пространство X имеет *конечный тип*, если у него существует приспособленное покрытие. Например, компактные дифференцируемые многообразия и конечные клеточные разбиения являются пространствами конечного типа. Если пространство X имеет конечный тип, то произведение $X \times \mathbb{R}^p$ также имеет конечный тип. Более общим образом, произведение любых двух пространств конечного типа есть пространство конечного типа.

Положим $K^*(Z) = K^0(Z) \oplus K^{-1}(Z)$.

3.24. Предложение. *Пусть X — локально-компактное пространство конечного типа и Y — такое локально-компактное пространство, что $K(Y)$ и $K^{-1}(Y)$ — свободные абелевы группы. Тогда $\cup$-произведение индуцирует изоморфизм*

$$K^*(X) \otimes K^*(Y) \xrightarrow{\approx} K^*(X \times Y);$$

более подробно:

$$[K^0(X) \otimes K^0(Y)] \oplus [K^{-1}(X) \otimes K^{-1}(Y)] \approx K^0(X \times Y),$$
$$[K^0(X) \otimes K^{-1}(Y)] \oplus [K^{-1}(X) \otimes K^0(Y)] \approx K^{-1}(X \times Y).$$

Доказательство. Для любого замкнутого подпространства Z пространства X обозначим через Φ_Z гомоморфизм из $K^*(Z) \otimes K^*(Y)$ в $K^*(Z \times Y)$, индуцированный $\cup$ произведением. Пусть (X_i) — приспособленное покрытие пространства X. Покажем индукцией по p, что Φ_Z является изоморфизмом в случае, когда $Z=X_{i_1}\cup\ldots\cup X_{i_p}$ и Y произвольно. Если $p=1$, то предложение 3.24 есть просто переформулировка теоремы периодичности Ботта в комплексном случае: $K^{\#}(\mathbb{R}^n)\otimes K^{\#}(Y)\approx K^{\#}(\mathbb{R}^n\times Y)$. Для того чтобы сделать шаг индукции от $p-1$ к p, положим $Z'=X_{i_1}\cup\ldots\cup X_{i_{p-1}}$ и $Z''=X_{i_p}$. Тогда подмножества $X_{i_r}\cap X_{i_p}$ для $r=1,\ldots,p-1$ образуют приспособленное покрытие пространства $Z'\cap Z''$. Следовательно, по предположению индукции, $\Phi_{Z'}$, $\Phi_{Z'}$ и $\Phi_{Z'\cap Z''}$ являются изоморфизмами. Так как группа $K^{\#}(Y)$ свободна, мы имеем следующую коммутативную диаграмму, вертикальные гомоморфизмы которой образуют точные последовательности (II.4.18 и II.4.9):

$$
\begin{tikzcd}
{[K^*(Z'\times\mathbb{R})\oplus K^*(Z''\times\mathbb{R})]\otimes K^*(Y)} \arrow[r, "\Phi_{Z'\times\mathbb{R}}\oplus\Phi_{Z''\times\mathbb{R}}"] \arrow[d] & K^*(Z'\times Y\times\mathbb{R})\oplus K^*(Z''\times Y\times\mathbb{R}) \arrow[d] \\
K^*((Z'\cap Z'')\times\mathbb{R})\otimes K^*(Y) \arrow[r, "\Phi_{(Z'\cap Z'')\times\mathbb{R}}"] \arrow[d] & K^*((Z'\cap Z'')\times Y\times\mathbb{R}) \arrow[d] \\
K^*(Z'\cup Z'')\otimes K^*(Y) \arrow[r, "\Phi_{Z'\cup Z''}"] \arrow[d] & K^*(Z'\cup Z'')\times Y) \arrow[d] \\
{[K^*(Z')\oplus K^*(Z'')]\otimes K^*(Y)} \arrow[r, "\Phi_{Z'}\oplus\Phi_{Z''}"] \arrow[d] & K^*(Z'\times Y)\oplus K^*(Z''\times Y) \arrow[d] \\
K^*(Z'\cap Z'')\otimes K^*(Y) \arrow[r, "\Phi_{Z'\cap Z''}"] & K^*((Z'\cap Z'')\times Y)
\end{tikzcd}
$$

По предположению индукции $\Phi_{Z'\times\mathbb{R}}$, $\Phi_{Z''\times\mathbb{R}}$ и $\Phi_{(Z'\cap Z'')\times\mathbb{R}}$ — изоморфизмы (поскольку $(X_i\times\mathbb{R})$ представляет собой приспособленное покрытие произведения $X\times\mathbb{R}$). Следовательно, на основании леммы о пяти гомоморфизмах, гомоморфизм $\Phi_{Z'\cup Z''}$ также является изоморфизмом. $\square$

3.25. Замечание. Пусть Y' и Y'' — такие компактные пространства, что $K(Y', Y'')$ — свободная абелева группа. Применяя только что доказанное предложение к пространству $Y=Y'\setminus Y''$, мы получим изоморфизм

$$K^{\#}(X\times Y', X\times Y'')\approx K^{\#}(X)\otimes K^{\#}(Y', Y'').$$

Конечно же, этот изоморфизм задается $\cup$-произведением.

3.26. Лемма. *Пусть Z — такое компактное пространство, что $K^{\#}(Z)$ — конечно-порожденная абелева группа. Тогда существуют компактное пространство Y_1 и непрерывное отображение $f\colon S'(Z)\to Y_1$, такие что*

a) *$K^{\#}(Y_1)$ является конечно-порожденной абелевой группой,*

b) *индуцированный гомоморфизм $K^{\#}(Y_1)\to K^{\#}(S'(Z))$ является эпиморфизмом* (надстройка $S'(Z)$ определена, как в I.3.14; заметим, что $K^{\#}(S'(Z))\approx K^{\#}(S(Z))$; см. II.3.27).

Доказательство. Пусть $G_{p,n} = -\{n, n\} \times \mathrm{G}_p(\mathbb{C}^n)$ и $\alpha_{p,n} \in K^0(G_{p,n})$ — элемент, представимый над $\{i\} \times \mathrm{G}_p(\mathbb{C}^n)$ классом $[\xi]-p+i$, где ξ — каноническое расслоение ранга p над $\mathrm{G}_p(\mathbb{C}^n)$. Согласно II.1.33, каждый элемент из $K^0(Z)$ может быть записан в виде $f^*(\alpha_{p,n})$ для подходящих целых чисел p и n и подходящего непрерывного отображения $f\colon Z \to G_{p,n}$. Пусть теперь $a_1, \ldots, a_r$ — образующие группы $K^0(Z)$ и $b_1, \ldots, b_s$ — образующие группы $K^{-1}(Z) = K^0(S'(Z))$. Пусть $f_i\colon Z \to G_{p_i, n_i}$ (соотв. $g_j\colon S'(Z) \to G_{p_j, n_j}$) — такие непрерывные отображения, что $f_i^*(\alpha_{p_i, n_i}) = a_i$ (соотв. $g_j^*(\alpha_{p_j, n_j}) = b_j$). Если мы рассмотрим пространство

$$Y_1 = \prod_{j=1}^{s} G_{p_j, n_j} \times S'\left(\prod_{i=1}^{r} G_{p_i, n_i}\right),$$

то

$$K^*(Y_1) \approx [\otimes K^*(G_{p_j, n_j})]^2 \otimes K^{*+1}(G_{p_i, n_i}).$$

Применяя $r+s$ раз теорему 3.5, получаем, что $K^*(Y_1)$ — свободная абелева группа. Кроме того, если $f\colon S'(Z) \to Y_1$ — очевидное отображение, то индуцированный гомоморфизм

$$K^*(Y_1) \to K^*(S'(Z))$$

в силу нашей конструкции является эпиморфизмом. $\square$

3.27. Теорема. (ср. Атья [2]). *Пусть Y — такое компактное пространство, что $K^*(Y)$ — конечно-порожденная абелева группа, и X — компактное пространство конечного типа. Тогда имеет место естественная точная последовательность*

$$0 \to \sum_{i+j=n} K^i(X) \otimes K^j(Y) \to K^n(X \times Y) \to$$
$$\to \sum_{i+j=n+1} \mathrm{Tor}\,(K^i(X), K^j(Y)) \to 0,$$

где i и j — целые числа, рассматриваемые по модулю 2.

Доказательство. Предположим сперва, что $Y = S'(Z)$, и пусть Y_1 — пространство, построенное в 3.26. Пусть Y_2 — цилиндр отображения f, т. е. факторпространство несвязного объединения $Y \times [0, 1] \sqcup Y_1$ по отношению эквивалентности $(y, 1) \sim f(y)$. Тогда мы имеем коммутативную (с точностью до гомотопий) диаграмму

$$\begin{tikzcd} & Y_1 \arrow[d, "h"] \\ Y \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "g"'] & Y_2 \end{tikzcd}$$

где $g(y)$ — класс элемента $(y, 0) \in Y \times [0, 1]$ и $h(y_1)$ — класс $y_1 \in Y_1$. Поскольку отображение h является гомотопической эквивалентностью, мы можем заменить пару (Y_1, f) парой (Y_2, g), где g—вложение.

Рассмотрим точную последовательность II.4.13, ассоциированную с парой (Y_2, Y) Используя III.1.3, эту последовательность можно записать в виде

$$K^{\#-1}(Y) \to K^{\#}(Y_2/Y, P) \to K^{\#}(Y_2) \to K^{\#}(Y) \to K^{\#+1}(Y_2/Y, P),$$

где P—точка. Так как гомоморфизм $K^{\#}(Y_2) \to K^{\#}(Y)$ сюръективен, то эта последовательность превращается в короткую точную последовательность

$$0 \to K^{\#}(Y_2/Y, P) \to K^{\#}(Y_2) \to K^{\#}(Y) \to 0.$$

В частности, группа $K^{\#}(Y_2/Y, P)$ свободна и конечно-порожденна. Таким образом, эта короткая точная последовательность определяет свободную резольвенту абелевой группы $K^{\#}(Y)$, состоящую из двух членов.

Аналогично точная последовательность II.4.13, ассоциированная с парой $(X \times Y_2, X \times Y)$, может быть записана в виде

$$K^{\#-1}(X \times Y) \to K^{\#}(X \times Y_2/Y, X \times P) \xrightarrow{\alpha} K^{\#}(X \times Y_2)$$
$$\to K^{\#}(X \times Y) \xrightarrow{\beta} K^{\#+1}(X \times Y_2/Y, X \times P).$$

Так как, в силу 3.24 и 3.25, $K^{\#}(X \times Y_2) \approx K^{\#}(X) \otimes K^{\#}(Y_2)$ и

$$K^{\#}(X \times Y_2/Y, X \times P) \approx K^{\#}(X) \otimes K^{\#}(Y_2/Y, P),$$

то группа $\operatorname{Coker} \alpha$ изоморфна $K^{\#}(X) \otimes K^{\#}(Y)$. С другой стороны, по определению функтора Tor имеем $\operatorname{Im} \beta = \operatorname{Ker}(\alpha^{\#+1}) = \operatorname{Tor}(K^{\#}(X), K^{\#+1}(Y))$. Значит, наша точная последовательность может быть записана в виде

$$0 \to K^{\#}(X) \otimes K^{\#}(Y) \to K^{\#}(X \times Y) \to \operatorname{Tor}(K^{\#}(X), K^{\#+1}(Y)) \to 0.$$

Используя естественность функтора Tor, легко показать, что эта последовательность не зависит от выбора пары (Y_2, g) и естественна по X и $Y = S'(Z)$. Таким образом, теорема 3.27 в этом частном случае доказана.

Если теперь Y—произвольное пространство, то мы имеем две точные последовательности

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \sum\limits_{i+j=n} K^i(X) \otimes K^j(S'^2(Y)) \arrow[r] \arrow[d] & K^n(X \times S'^2(Y)) \arrow[r] \arrow[d] & \sum\limits_{i+j=n+1} \operatorname{Tor}(K^i(X), K^j(S'^2(Y))) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \sum\limits_{i+j=n} K^i(X) \otimes K^j(P) \arrow[r] & K^n(X \times P) \arrow[r] & \sum\limits_{i+j=n+1} \operatorname{Tor}(K^i(X), K^j(P)) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
& & & 0 &
\end{tikzcd}$$

Так как в силу периодичности Ботта

$$K^n(X \times Y) \approx \operatorname{Ker}[K^n(X \times S'^2(Y)) \to K^n(X \times P)],$$

мы получаем утверждение теоремы в общем случае. □

В заключение докажем следующую теорему, которую мы использовали в п. 3.6:

3.28. Теорема. *Пусть A — произвольное кольцо с единицей и $A[x_1, \ldots, x_n]$ — кольцо полиномов от n переменных с коэффициентами в A. Пусть $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ — элементарные симметрические функции переменных $x_1, \ldots, x_n$. Тогда относительно очевидного вложения $A[\sigma_1, \ldots, \sigma_n] \to A[x_1, \ldots, x_n]$ (см. Ленг [1]) кольцо $A[x_1, \ldots, x_n]$ является свободным модулем над кольцом $A[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]$ с базисом, образованным одночленами $x_1^{h_1} \ldots x_{n-1}^{h_{n-1}}$, $0 \leqslant h_i \leqslant n-i$.*

Доказательство. Будем доказывать эту теорему индукцией по n. Для $n=1$ теорема очевидна. Пусть теперь $n>1$ и σ'_{n-1} — элементарные симметрические функции переменных $x_2, \ldots, x_n$. Тогда мы имеем вложения

$$A[\sigma_1, \ldots, \sigma_n] \subset A[\sigma'_1, \ldots, \sigma'_{n-1}][x_1] \subset A[x_1, \ldots, x_n] = A[x_2, \ldots, x_n][x_1].$$

По предположению индукции, произведения $x_2^{h_2} \ldots x_{n-1}^{h_{n-1}}$ образуют базис кольца $A[x_1, \ldots, x_n]$, рассматриваемого как модуль над кольцом $A[\sigma'_1, \ldots, \sigma'_{n-1}][x_1]$. Следовательно, достаточно показать, что одночлены $1, x_1, \ldots, x_1^{n-1}$ образуют базис кольца $A[\sigma'_1, \ldots, \sigma'_{n-1}][x_1]$, рассматриваемого как модуль над кольцом $A[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]$.

Соотношения

$$\sigma_1 = \sigma'_1 + x_1, \quad \sigma_2 = \sigma'_2 + \sigma'_1 x_1, \quad \ldots, \quad \sigma_{n-1} = \sigma'_{n-1} + \sigma'_{n-2} x_1$$

показывают, что $1, x, \ldots, x_1^{n-1}$ порождают кольцо $A[\sigma'_1, \ldots, \sigma'_{n-1}][x_1]$ как модуль над кольцом $A[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]$. Далее, если имеет место соотношение

$$P_0 + P_1 x_1 + \ldots + P_{n-1} x_1^{n-1} = 0,$$

где P_i — полиномы от переменных σ_j, то, применяя к нему соответствующую перестановку из симметрической группы, мы видим, что справедливо также соотношение

$$P_0 + P_1 x_r + \ldots + P_{n-1} x_r^{n-1} = 0$$

(мы рассматриваем $A[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]$ как подкольцо в $A[x_1, \ldots, x_n]$).

Таким образом, получается линейная система из уравнений относительно P_i. Эта система имеет только нулевое решение, так как определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-1} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i>j} (x_i - x_j)$$

отличен от нуля. $\square$

Упражнения: 4, 12.

4. Некоторые дополнительные сведения об алгебрах Клиффорда

4.1. Пусть V — конечномерное вещественное векторное пространство, на котором задана невырожденная квадратичная форма Q. Согласно III.3.12, каноническое отображение $V \to C(V)$ является мономорфизмом, так что мы можем отождествить пространство V с его образом в $C(V)$. С другой стороны, эндоморфизм $v \mapsto -v$ пространства V индуцирует инволюцию на $C(V)$, которую мы обозначим $x \mapsto \bar{x}$. Таким образом, если $x \in C^{(0)}(V)$ (соотв. $x \in C^{(1)}(V)$), то $\bar{x} = x$ (соотв. $\bar{x} = -x$) (III.3.6).

4.2. Определение. (Атья — Ботт — Шапиро [1]). *Скрученной группой Клиффорда* $\tilde{\Gamma}(V)$ называется множество таких элементов x из $C(V)^*$, что $\bar{x}Vx^{-1} \subset V$.

Ясно, что $\tilde{\Gamma}(V)$ можно также определить как множество таких элементов из $C(V)$, что $\bar{x}Vx^{-1} = V$. Это позволяет рассматривать $\tilde{\Gamma}(V)$ как подгруппу в $C(V)^*$, что и объясняет используемое нами название. Пусть $\tilde{\rho}$: $\tilde{\Gamma}(V) \to \mathrm{GL}(V)$ — гомоморфизм, задаваемый формулой $x \mapsto \tilde{\rho}_x$, где $\tilde{\rho}_x(v) = \bar{x}vx^{-1}$.

4.3. Предложение. *Ядро гомоморфизма* $\tilde{\rho}$: $\tilde{\Gamma}(V) \to \mathrm{GL}(V)$ *представляет собой подгруппу* $\mathbb{R}^* \subset \tilde{\Gamma}(V)$.

Доказательство. Пусть $\{e_i\}$ — такой ортогональный базис пространства V, что $Q(e_i) \neq 0$. Пусть $x \in \mathrm{Ker}(\tilde{\rho})$ и $x = x^0 + x^1$ — разложение элемента x в сумму однородных элементов относительно $Z/2$-градуировки алгебры Клиффорда. Элемент x^0 можно представить в виде $x^0 = a_i^0 + e_ib_i^1$, где a_i^0 и b_i^1 не содержат e_i и имеют степень 0 и 1 соответственно. Таким образом, из тождества $x^0e_i = e_ix^0$ вытекает соотношение

$$a_i^0 + e_ib_i^1 = e_i(a_i^0 + e_ib_i^1)e_i^{-1} = a_i^0 - e_ib_i^1.$$

Следовательно, $b_i^1 = 0$ для всех i и x^0 принадлежит подгруппе $\mathbb{R}^* \subset \tilde{\Gamma}(V)$.

Аналогично тождество $x^1e_i = -e_ix^1$ может быть переписано в виде

$$a_i^1 + e_ib_i^0 = -e_i(a_i^1 + e_ib_i^0)e_i^{-1} = a_i^1 - e_ib_i^0.$$

Следовательно, $b_i^0 = 0$ для всех i, откуда $x^1 = 0$. Итак, $x = x^0 + x^1 = x^0 \in \mathbb{R}^*$. □

4.4. Пусть $C(V)^0$ — алгебра, противоположная алгебре $C(V)$ ($C(V)^0$ имеет ту же самую аддитивную структуру, что и $C(V)$, а произведение xy в $C(V)^0$ определяется как произведение yx в $C(V)$). Каноническое отображение j: $V \to C(V)$ можно интерпретировать как линейное отображение $V \to C(V)^0$, удовлетворяющее универсальному свойству алгебр Клиффорда (III.3.1; надо взять $A = C(V)^0$). Следовательно, определен гомоморфизм алгебр $C(V) \to C(V)^0$, который мы будем рассматривать как антиинволюцию $C(V)$ и обозначать $x \mapsto {}^t x$. Более точно, если y — элемент алгебры $C(V)$, представимый в виде $y = v_1 \ldots v_n$, $v_i \in V$, то ${}^t y = v_n \ldots v_1$. Легко проверить, что $\overline{{}^t y} = {}^t\bar{y} = (-1)^n v_n \ldots v_1$. Так как каждый элемент x из $C(V)$ является суммой элементов указанного вида, то формула $\overline{{}^t x} = {}^t\bar{x}$ справедлива и в общем случае. Определим *спинорную норму* произвольного элемента x из $C(V)$, полагая $N(x) = {}^t\bar{x} \cdot x \in C(V)$.

4.5. Предложение. *Если x — элемент из $\tilde{\Gamma}(V)$, то $N(x) \in \mathbb{R}^*$. Отображение $x \mapsto N(x)$ индуцирует гомоморфизм из $\tilde{\Gamma}(V)$ в $\mathbb{R}^*$.*

Доказательство. По определению группы $\tilde{\Gamma}(V)$ элементы $\bar{x}$ и ${}^t x \in \tilde{\Gamma}(V)$. Следовательно, если $x \in \tilde{\Gamma}(V)$, то $N(x) \in \tilde{\Gamma}(V)$. Для доказательства включения $N(x) \in \mathbb{R}^*$ в силу предложения 4.3 достаточно проверить, что $N(x) \in \operatorname{Ker}(\tilde{\rho})$. Если $v \in V$, то ${}^t(\rho_x(v)) = \rho_x(v)$, т. е. ${}^t(\bar{x}vx^{-1}) = \bar{x}vx^{-1}$. Следовательно, ${}^t x^{-1} v {}^t\bar{x} = \bar{x}vx^{-1}$ и поэтому $\overline{N(x)}\, v N(x)^{-1} = v$, что доказывает первую часть предложения.

Далее, если x и x' — элементы из $\tilde{\Gamma}(V)$, то мы имеем

$$N(xx') = ({}^t\bar{x}'\, {}^t\bar{x})(xx') = {}^t\bar{x}'\,({}^t\bar{x}x)\,x' = ({}^t\bar{x}x)({}^t\bar{x}'x') = N(x)\,N(x').$$

Поскольку, кроме того, $N(1) = 1$, то N определяет гомоморфизм из $\tilde{\Gamma}(V)$ в $\mathbb{R}^*$. $\square$

4.6. Замечание. Если $v \in V$, то $N(v) = -Q(v)$, и рассуждения, полностью аналогичные приведенным выше, показывают, что $N(xv) = N(x)\,N(v) = N(vx)$ для любого $x \in \tilde{\Gamma}(V)$. Точно также $N(xvy) = N(x)\,N(v)\,N(y)$ для любых $x,\ y \in \tilde{\Gamma}(V)$.

4.7. Теорема. *Для любого элемента x из $\tilde{\Gamma}(V)$ элемент $\tilde{\rho}(x)$ принадлежит ортогональной группе $\mathrm{O}(V) \subset \mathrm{GL}(V)$, отвечающей данной квадратичной форме Q на пространстве V. Обратно, любой элемент из $\mathrm{O}(V)$ имеет вид $\tilde{\rho}(x)$, где x определен однозначно с точностью до умножения на скаляр. Следовательно, имеет место точная последовательность групп*

$$1 \to \mathbb{R}^* \to \tilde{\Gamma}(V) \xrightarrow{\tilde{\rho}} \mathrm{O}(V) \to 1.$$

Наконец, каждый элемент из $\tilde{\Gamma}(V)$ может быть представлен в виде $v_1 \ldots v_n$, где $v_i \in V$ и $Q(v_i) \neq 0$. В частности, каждый элемент из $\Gamma(V)$ однороден относительно $\mathbb{Z}/2$-градуировки алгебры Клиффорда $C(V)$.

Доказательство. Если $x \in \tilde{\Gamma}(V)$ и $v \in V$, то в силу 4.6 мы имеем $N(\bar{x}vx^{-1}) = N(\bar{x})\,N(v)\,N(x^{-1})$. С другой стороны, $N(\bar{x}) = \overline{N(x)} = N(x)$, так как $N(x) \in \mathbb{R}^*$. Следовательно, $Q(\tilde{\rho}_x(v)) = -N(\bar{x}vx^{-1}) = -N(\bar{x})\,N(v)\,N(x)^{-1} = -N(v) = Q(v)$ и $\tilde{\rho}(x) \in \mathrm{O}(V)$.

Хорошо известно, что любой элемент из $\mathrm{O}(V)$ является произведением ортогональных симметрий относительно гиперплоскостей, Поэтому для доказательства эпиморфности гомоморфизма $\tilde{\rho}$: $\tilde{\Gamma}(V) \to O(V)$ достаточно показать, что любая такая симметрия принадлежит образу $\tilde{\rho}$. Если H — гиперплоскость, ортогональная вектору v с $Q(v) \neq 0$, то мы можем представить любой вектор $w \in V$ в виде $w = \lambda v + v'$, где $v' \in H$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. Так как векторы v и v' антикоммутируют в $C(V)$ (III.3.8), то $\tilde{\rho}(v)(w) = -v(\lambda v + v')v^{-1} = -\lambda v + v'$. Следовательно, $\tilde{\rho}(v)$ является симметрией, что доказывает эпиморфность $\tilde{\rho}$ и тем самым точность последовательности фигурирующей в формулировке теоремы.

Для произвольного вектора $v \in V$, такого что $Q(v) \neq 0$, обозначим через S_v ортогональную симметрию относительно гиперплоскости, ортогональной к v. Если $x \in \tilde{\Gamma}(V)$, то мы имеем $\tilde{\rho}(x) = S_{v_1} \times S_{v_2} \cdot \ldots \cdot S_{v_n}$ для некоторых векторов $v_1, \ldots, v_n$. Следовательно, $\tilde{\rho}(x) = \tilde{\rho}(v_1 v_2 \ldots v_n)$ и $x = \lambda v_1 \ldots v_n$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$. □

4.8. Следствие. *Пусть* $\Gamma^0(V) = \tilde{\Gamma}(V) \cap C^0(V)$ *и* $SO(V) = \{u \in O(V) \mid \det(u) = 1\}$. *Тогда имеет место точная последовательность*

$$1 \to \mathbb{R}^* \to \Gamma^0(V) \xrightarrow{\rho^0} SO(V) \to 1,$$

в которой $\rho^0 = \tilde{\rho}|_{\Gamma^0(V)}$. (Группа $\Gamma^0(V)$ называется *специальной группой Клиффорда.*)

Доказательство. Каждый элемент из $SO(V)$ может быть записан в виде $\tilde{\rho}(v_1) \cdot \tilde{\rho}(v_2) \cdot \ldots \cdot \tilde{\rho}(v_n)$, где n четно. Следовательно, ρ^0 — эпиморфизм. Кроме того, $\operatorname{Ker} \rho^0 = \mathbb{R}^*$, поскольку $\mathbb{R}^* \subset C^0(V)$. □

4.9. Следствие. *Пусть*

$$\operatorname{Pin}(V) = \{x \in \tilde{\Gamma}(V) \mid |N(x)| = 1\}$$

и

$$\operatorname{Spin}(V) = \operatorname{Pin}(V) \cap C^0(V).$$

Тогда имеют место точные последовательности

$$1 \to Z/2 \to \operatorname{Pin}(V) \to O(V) \to 1,$$
$$1 \to Z/2 \to \operatorname{Spin}(V) \to SO(V) \to 1.$$

Следовательно, если обозначить через $\operatorname{Spin}(n)$ *группу* $\operatorname{Spin}(V)$ *для пространства* $V = \mathbb{R}^n$, *снабженного квадратичной формой* $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$, *то имеет место точная последовательность*

$$1 \to Z/2 \to \operatorname{Spin}(n) \to SO(n) \to 1.$$

Доказательство. Если $x \in \tilde{\Gamma}(V)$ (соотв. $\Gamma^0(V)$), то $\lambda x \in \operatorname{Pin}(V)$ (соотв. $\operatorname{Spin}(V)$) для $\lambda = 1/\sqrt{|N(x)|}$. Это доказывает сюръективность гомоморфизмов $\operatorname{Pin}(V) \to O(V)$ и $\operatorname{Spin}(V) \to SO(V)$. Ядро этих гомоморфизмов состоит из таких элементов $\lambda \in \mathbb{R}^2$, что $N(\lambda) = \lambda^2 = 1$, т. е. изоморфно $\mathbb{Z}/2$. $\square$

4.10. Выбор ортогонального базиса (e_i) в пространстве V, удовлетворяющего условию $Q(e_i) = \pm 1$, позволяет нам отождествить $C(V)$ с $\mathbb{R}^n$ (III.3.11) и снабдить $C(V)$ топологией, которая не зависит от выбора конкретного базиса. Более точно, переход к новому ортогональному базису осуществляется с помощью ортогонального преобразования, которое индуцирует линейное преобразование в $C(V)$, непрерывно зависящее от базиса. Следовательно, соответствие $V \longmapsto C(V)$ можно рассматривать как непрерывный функтор в смысле I.4.1 из категории конечномерных векторных пространств с заданными на них квадратичными формами в категорию конечномерных алгебр.

Из этих рассмотрений следует, что группы $\tilde{\Gamma}(V)$, $\mathrm{Pin}(V)$, $\Gamma^0(V)$ и $\mathrm{Spin}(V)$ являются непрерывными группами, а отображения $\tilde{\rho}$ и ρ^0 — непрерывными отображениями. В действительности, отображения

$$\tilde{\Gamma}(V) \to \mathrm{O}(V), \ \Gamma^0(V) \to \mathrm{SO}(V), \ \mathrm{Pin}(V) \to \mathrm{O}(V) \text{ и } \mathrm{Spin}(V) \to \mathrm{SO}(V)$$

определяют локально-тривиальные расслоения. Докажем это, например, для отображения $\tilde{\Gamma}(V) \to \mathrm{O}(V)$ (доказательство в трех остальных случаях аналогично). Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — такой ортогональный базис, что $Q(e_i) = \pm 1$. Индукцией по p, где $0 \leqslant p \leqslant n$, определим окрестность V_p единичного элемента группы $\mathrm{O}(V)$ и непрерывное отображение

$$s_p \colon V_p \to \tilde{\Gamma}(V),$$

такие что

(i) $V_0 = \mathrm{O}(V)$, $s_0(\alpha) = 1$;

(ii) $s_{p+1}(\alpha) = \begin{cases} (1 + tw)\, s_p(\alpha), & \text{если } Q(e_{p+1}) = 1, \\ (1 - tw)\, s_p(\alpha), & \text{если } Q(e_{p+1}) = -1; \end{cases}$

здесь $t = \alpha(e_{p+1})$ и $w = \tilde{\rho}(s_p(\alpha))(e_{p+1})$;

(iii) V_{p+1} является подмножеством в V_p, задаваемым условием $Q(t + w) \neq 0$.

Тогда индукцией по p можно доказать, что отображение $\alpha^{-1}\tilde{\rho}(s_p(\alpha))$ оставляет векторы $e_1, \ldots, e_p$ неподвижными. Следовательно, $\tilde{\rho}(s_n(\alpha)) = \alpha$ и отображение $\alpha \longmapsto s_n(\alpha)$ представляет собой сечение отображения $\tilde{\rho}$ в окрестности V_n. Таким образом, отображение $V_n \times \mathbb{R}^* \to \tilde{\rho}^{-1}(V_n)$, определяемое формулой $(\alpha, \lambda) \longmapsto \lambda s_n(\alpha)$, является гомоморфизмом. Отсюда следует, что $\tilde{\rho}^{-1}(aV_n) \approx aV_n \times \mathbb{R}^*$ для любого элемента a из $\mathrm{O}(V)$.

4.11. Так как функтор $V \mapsto C(V)$ непрерывен, мы можем продолжить его на категорию векторных расслоений. Если теперь V — векторное расслоение, то мы получаем расслоение алгебр, снова обозначаемое через $C(V)$, такое что $C(V)_x = C(V_x)$. Умножение в каждом слое определяет непрерывное отображение $C(V) \times_X C(V) \to C(V)$. Если E — векторное расслоение над полем k ($k = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), то структура $C(V)$-модуля на E задается таким непрерывным отображением $C(V) \times_X E \to E$, что каждый слой E_x наделяется структурой $C(V_x)$-модуля, согласованной с его k-модульной структурой. Поскольку $V \subset C(V)$, то мы получаем послойное отображение $V \times_X E \to E$, обозначаемое $(v, e) \mapsto v \cdot e$, для которого $v \cdot (v \cdot e) = Q(v) e$ и которое индуцирует на каждом слое отображение $V_x \times E_x \to E_x$, $\mathbb{R}$-линейное по первому сомножителю и k-линейное по второму сомножителю. Обратно, каждое такое билинейное отображение определяет на E структуру $C(V)$-модуля в силу универсального свойства алгебр Клиффорда (III.3.1). Эквивалентно, указанное выше билинейное отображение определяет морфизм вещественных векторных расслоений m: $V \to \mathrm{HOM}(E, E)$, такой что $(m(v))^2 = Q(v)$ над каждой точкой базы (I.4.8).

Векторные расслоения, наделенные $C(V)$-модульными структурами, являются объектами категории, морфизмы которой — это морфизмы векторных расслоений, индуцирующие над каждой точкой x базы морфизмы $C(V_x)$-модулей. Мы обозначим эту категорию через $\mathcal{E}^V(X)$ и отметим, что она является банаховой категорией, содержащейся в $\mathcal{E}(X)$.

4.12. ***Пример.*** Рассмотрим тривиальное расслоение $V = X \times \mathbb{R}^{p+q}$, наделенное „тривиальной квадратичной формой" $-x_1^2 - \ldots - x_p^2 + x_{p+1}^2 + \ldots + x_{p+q}^2$. Тогда структура $C(V)$-модуля на расслоении E задается $p+q$ автоморфизмами e_i, где $e_i e_j + e_j e_i = 0$ для $i \neq j$, $e_i^2 = -1$, если $1 \leqslant i \leqslant p$, и $e_i^2 = 1$, если $p+1 \leqslant i \leqslant p+q$. Следовательно, в этом случае категория $\mathcal{E}^V(X)$ изоморфна категории $\mathcal{E}^{p, q}(X)$, рассмотренной в § III.4.

4.13. ***Определение.*** Пусть V — вещественное векторное расслоение с компактной базой X. *Ориентацией* на V называется элемент α из $H^1(X; \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}))$, образ которого при отображении $H^1(X; \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})) \to H^1(X; \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))$ является классом расслоения V (I.3.5). *Спинорной структурой* на V называется элемент $\beta \in H^1(X; \mathrm{Spin}(n))$, образ которого относительно композиции $H^1(X; \mathrm{Spin}(n)) \to H^1(X; \mathrm{SO}(n)) \to H^1(X; \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))$ является классом V.

4.14. Это определение можно переформулировать в терминах главных расслоений. Если G — топологическая группа и если (g_{ji}) является G-коциклом в смысле п. I.3.5, то мы можем рассмотреть пространство P, которое определяется как факторпространство несвязного объединения $\coprod U_i \times G$ по отношению эквивалентности $(x_i, g_i) \sim (x_j, g_j)$, если $x_i = x_j \in U_i \cap U_j$ и $g_j = g_{ji}(x_i) g_i$. Группа G действует справа на P по формуле $(x_i, g_i) \cdot g = (x_i, g_i \cdot g)$. Это действие является свободным, и мы имеем $X \approx P/G$. Если G действует слева на векторном пространстве F размерности n над полем k, то сопоставим с P векторное квазирасслоение $E=P\times_G F$, которое определяется как факторпространство произведения $P\times F$ по отношению эквивалентности $(p, f)\sim(pg, g^{-1}f)$ для $g\in G$.

4.15. Предложение. *Определенное выше векторное квазирасслоение $E=P\times_G F$ является векторным расслоением. Это — векторное расслоение над полем k, ассоциированное с коциклом g_{ji}.*

Доказательство. Пространство $P\times_G F$ можно отождествить с факторпространством $\bigsqcup U_i\times G\times F$ по отношению эквивалентности, порожденному соотношениями $(x_i, g, f)\sim(x_j, g_{ji}(x_i)g, f)\sim(x_j, g_{ji}(x_i), gf)$. В частности, каждый элемент пространства $P\times_G F=\bigsqcup U_i\times G\times F/\sim$ является классом тройки $(x_i, 1, f)=[x_i, f]$. Следовательно, $P\times_G F$ можно отождествить с факторпространством несвязного объединения $\bigsqcup U_i\times F$ по отношению эквивалентности: $[x_i, f_i]\sim[x_j, f_j]$, если $f_j=g_{ji}(x_i)f_i$. А это — расслоение, ассоциированное с коциклом (g_{ji}) в смысле I.3.6. $\square$

4.16. Следствие. *Пусть V — вещественное векторное расслоение ранга n с компактной базой. Если существует такое главное расслоение P со структурной группой* $\mathrm{SO}(n)$ *(соотв.* $\mathrm{Spin}(n)$*), что $V\approx P\times_G\mathbb{R}^n$, где $G=\mathrm{SO}(n)$ (соотв. $\mathrm{Spin}(n)$), то расслоение V можно наделить ориентацией (соотв. спинорной структурой). Это расслоение P ассоциировано с элементом $\alpha\in H^1(X;\ \mathrm{SO}(n))$ (соотв. $\beta\in H^1(X;\ \mathrm{Spin}(n))$), определенным в 4.13.*

4.17. Пример. Пусть W — вещественное векторное расслоение и P — такое главное расслоение со структурной группой $\mathrm{O}(n)$, что $W\approx P\times_{\mathrm{O}(n)}\mathbb{R}^n$ (I.8.7; для построения этого расслоения нужно выбрать тривиализации $W|_{U_i}\xrightarrow{\approx}U_i\times\mathbb{R}^n$, согласованные с метрикой, и применить конструкцию теоремы I.3.6; см. также замечание 4.21). Главное расслоение P ассоциировано с коциклом (g_{ji}), где $g_{ji}(x)\in\mathrm{O}(n)$. Тогда расслоение $V=W\oplus W$ можно представить в виде $P'\times_{\mathrm{O}(2n)}\mathbb{R}^{2n}$, где P' ассоциировано с коциклом

$$h_{ji}(x)=\begin{pmatrix} g_{ji}(x) & 0 \\ 0 & g_{ji}(x)\end{pmatrix}.$$

Так как $h_{ji}(x)\in\mathrm{SO}(2n)$, то V является канонически ориентированным расслоением.

4.18. Пример. Пусть W — ориентированное векторное расслоение и P — такое главное расслоение со структурной группой $\mathrm{SO}(n)$, что $W\approx P\times_{\mathrm{SO}(n)}\mathbb{R}^n$. Покажем, что расслоение $W\oplus W$ допускает спинорную структуру. Рассуждения, использованные в предыдущем примере, показывают, что достаточно доказать следующее утверждение: композиция гомоморфизмов

$$\mathrm{SO}(n)\xrightarrow{\Delta}\mathrm{SO}(n)\times\mathrm{SO}(n)\longrightarrow\mathrm{SO}(2n),$$

где Δ — диагональный гомоморфизм, может быть поднята до гомоморфизма $j\colon \mathrm{SO}(n) \to \mathrm{Spin}(2n)$, превращающего диаграмму

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Spin}(2n) \arrow[d] \\ \mathrm{SO}(n) \arrow[ur, "j"] \arrow[r] & \mathrm{SO}(2n) \end{tikzcd}$$

в коммутативную.

Пусть $D\colon \mathrm{Spin}(n)\times\mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{Spin}(2n)$ — гомоморфизм, заданный формулой $D(\alpha_1, \alpha_2) = i_1(\alpha_1)\, i_2(\alpha_2)$, где i_1 (соотв. i_2) индуцировано каноническим вложением $\mathbb{R}^n \oplus 0$ (соотв. $0 \oplus \mathbb{R}^n$) в $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$ (см. III.3.5). Ясно, что $D(\varepsilon\alpha_1, \eta\alpha_2) = \varepsilon\eta D(\alpha_1, \alpha_2)$, где $\varepsilon = \pm 1$ и $\eta = \pm 1$. Если теперь u — некоторый элемент из $\mathrm{SO}(n)$ и $\tilde{u}$ — такой элемент из $\mathrm{Spin}(n)$, что $\rho^0(\tilde{u}) = u$, то $v = D(\tilde{u}, \tilde{u})$ является корректно определенным элементом группы $\mathrm{Spin}(2n)$, не зависящим от выбора $\tilde{u}$. Соответствие $u \mapsto v$ (непрерывное в силу 4.10) определяет требуемый гомоморфизм.

4.19. Замечание. Примеры 4.17 и 4.18 показывают, что для каждого вещественного расслоения W расслоение $W \oplus W \oplus W \oplus W$ каноническим образом наделяется спинорной структурой.

$*$**4.20.** Для читателей, знакомых с алгебраической топологией, заметим, что вещественное векторное расслоение ориентировано тогда и только тогда, когда его первый *класс Штифеля—Уитни* $w_1(V) \in H^1(X; \mathbb{Z}/2)$ равен 0. Это можно показать, ставя в соответствие расслоению, имеющему класс $\alpha \in H^1(X; \mathrm{O}(n))$, элемент в $H^1(X; \mathbb{Z}/2)$, который получается применением к α гомоморфизма, индуцированного гомоморфизмом взятия определителя $\mathrm{O}(n) \to \mathbb{Z}/2$. Так как это соответствие „естественно", то оно задается однозначно определенным элементом $w_1(V) \in H^1(\mathrm{BO}(n); \mathbb{Z}/2) \approx \mathbb{Z}/2$. Этот элемент нетривиален: в качестве примера можно рассмотреть пространство $X = RP_1$ и расслоение $V = \xi \oplus \eta$, где ξ — каноническое расслоение и η — тривиальное расслоение ранга $n-1$.

Пусть теперь V — ориентированное векторное расслоение, определенное коциклом (g_{ji}), где $g_{ji}(x) \in \mathrm{SO}(n)$. Если покрытие (U_i) достаточно мелкое, то, используя 4.10, мы получаем непрерывное отображение $\tilde{g}_{ji}\colon U_i \cap U_j \to \mathrm{Spin}(n)$, для которого $\rho^0(\tilde{g}_{ji}(x)) = g_{ji}(x)$, $\tilde{g}_{ii}(x) = 1$. Рассмотрим тогда для точки $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$ отображения $h_{ijk}(x) = g_{ij}(x)\, g_{jk}(x)\, g_{ki}(x)$. Они задают элемент группы $Z^2(X; \mathbb{Z}/2)$ и, следовательно, корректно определенный элемент $w_2(V)$ группы $H^2(X; \mathbb{Z}/2)$ (второй группы когомологий Чеха с коэффициентами в $\mathbb{Z}/2$). Так как $H^2(\mathrm{BSO}(n); \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2$, то из соображений функториальности следует, что соответствие $V \mapsto w_2(V)$ либо тривиально, либо представляет собой второй класс Штифеля—Уитни. Кроме того, $w_2(V) = 0$ тогда и только тогда, когда расслоение допускает спинорную структуру.

Для того чтобы доказать, что элемент $w_2(V)$ нетривиален, рассмотрим расслоения над S^2. Тогда аргументация, использованная в теореме I.7.6, показывает, что из тривиальности $w_2(V)$ следовало бы, что отображение $\pi_1(\mathrm{Spin}(n)) \to \pi_1(\mathrm{SO}(n))$ сюръективно. Для $n=2$ имеем $\mathrm{Spin}(n) \approx \mathrm{SO}(2) \approx S^1$, и отображение ρ^0 совпадает с отображением окружности на себя, задаваемым формулой $z \mapsto z^2$. Следовательно, $\pi_1(\mathrm{Spin}(n)) \approx \pi_1(\mathrm{SO}(n)) \approx Z$ и гомоморфизм $Z \approx \pi_1(\mathrm{Spin}(n)) \to Z \approx \pi_1(\mathrm{SO}(n))$ есть гомоморфизм умножения на 2 и поэтому не сюръективен. Если же $n > 2$, то $\pi_1(\mathrm{Spin}(n)) = 0$ и $\pi_1(\mathrm{SO}(n)) = Z/2$ из элементарных топологических соображений (заметим, что $\mathrm{Spin}(3) \approx S^3$ и что $\mathrm{Spin}(3) \to \mathrm{SO}(3)$ — нетривиальное накрытие). *

4.21. Замечание. Если V — вещественное векторное расслоение с паракомпактной базой X, то мы всегда можем найти такое главное расслоение P со структурной группой $\mathrm{O}(n)$, что $V \approx P \times_{\mathrm{O}(n)} \mathbb{R}^n$. Это следует из теоремы I.8.7, поскольку мы всегда можем снабдить расслоение V положительно-определенной квадратичной формой. Если $\varphi\colon U \times \mathbb{R}^n \to E_U$ — тривиализация E, то φ однозначно представляется в виде $\varphi = \psi \cdot \theta$, где $\theta^* = \theta > 0$ и ψ — изометрия на каждом слое (положим $\theta = \sqrt{\varphi^* \varphi}$ и $\psi = \varphi\theta^{-1}$). Заменяя φ на ψ, можно считать, что φ — изометрия на каждом слое. Следовательно, векторное расслоение V можно построить, отправляясь от $O(n)$-коцикла. Рассуждения п. 4.20 показывают, что, вообще говоря, расслоение V не может быть построено ни с помощью $\mathrm{SO}(n)$-коцикла, ни с помощью $\mathrm{Spin}(n)$-коцикла.

4.22. Теорема. *Пусть V — вещественное векторное расслоение ранга n с заданной спинорной структурой. Тогда, в предположении что на V задана положительно-определенная квадратичная форма, категории $\mathscr{E}^{0,n}(X)$ и $\mathscr{E}^V(X)$ эквивалентны (см. 4.11).*

Доказательство. Пусть T — тривиальное векторное расслоение ранга n, снабженное „тривиальной“ квадратичной формой $\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2$. Согласно 4.12, категории $\mathscr{E}^{0,n}(X)$ и $\mathscr{E}^T(X)$ эквивалентны. С другой стороны, категория $\mathscr{E}^V(X)$ не зависит от выбора метрики, так как любые две метрики изоморфны (I.8.8). Если мы представим расслоение V в виде $V = P \times_{\mathrm{Spin}(n)} \mathbb{R}^n$, то метрику можно выбрать так, чтобы она индуцировалась канонической квадратичной формой на $\mathbb{R}^n$.

Используя спинорную структуру на V, определим теперь две категорные эквивалентности

$$\theta\colon \mathscr{E}^T(X) \to \mathscr{E}^V(X) \quad \text{и} \quad \varphi\colon \mathscr{E}^V(X) \to \mathscr{E}^T(X),$$

обратные друг к другу (с точностью до изоморфизма). Для того чтобы определить θ, представим расслоение V в виде $V = P \times_{\mathrm{Spin}(n)} \mathbb{R}^n$. Для $E \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{E}^T(X)$ положим $\theta(E) = P \Delta_{\mathrm{Spin}(n)} E$, где через $P \Delta_{\mathrm{Spin}(n)} E$ обозначено факторпространство расслоенного произведения $P \times_X E$

по отношению эквивалентности $(p, e) \sim (pg, g^{-1}e)$ (элемент $g \in \mathrm{Spin}(n) \subset C^{0, n}$ естественно действует на E). Если $f: E \to E'$ — морфизм, то формула $\theta(f) = (\mathrm{Id}_P, f)$ определяет морфизм из $\theta(E)$ в $\theta(E')$.

Для того чтобы определить эквивалентность φ, заметим, что $C(V) = P \times_{\mathrm{Spin}(n)} C^{0, n}$, где группа $\mathrm{Spin}(n)$ действует на $C^{0, n}$ при помощи внутренних автоморфизмов. Более подробно, расслоение $C(V)$ можно отождествить с факторпространством произведения $P \times C^{0, n}$ по отношению эквивалентности $(p, \lambda) \sim (pg, g^{-1}\lambda g)$, где $g \in \mathrm{Spin}(n) \subset C^{0, n}$. Следовательно, „расслоение на группы" $\mathrm{Spin}(V) = Q$ можно отождествить с факторпространством произведения $P \times G$, где $G = \mathrm{Spin}(n)$, по отношению эквивалентности $(p, g) \sim (ph, h^{-1}gh)$. Если теперь F есть $C(V)$-модуль, то определим правое действие Q на P формулой $p \cdot (p, \alpha) = p\alpha^{-1}$ и определим $\varphi(F)$ как $P\Delta_Q F$. Здесь $P\Delta_Q F$ — факторпространство расслоенного произведения $P \times_X F$ по отношению эквивалентности $(p, f) \sim (p\lambda, \lambda^{-1}f)$, где $\lambda = (p, g) \in Q \subset C(V)$.

$C(T)$ — модуль $(\varphi\theta)(E)$ является факторпространством расслоенного произведения $P \times_X P \times_X E$ по отношению эквивалентности, порожденному соотношениями $(p', p, e) \sim (p, p'g, g^{-1}e)$ и $(p, p, e) \sim (pg^{-1}, p, g^{-1}e)$. Следовательно, отображение $e \mapsto (p, p, e) \sim (pg, pg, e)$, где $p \in P_x$ для $e \in E_x$, определяет естественный изоморфизм $E \approx (\varphi\theta)(E)$.

Обратно, $(\theta\varphi)(F)$ является факторпространством расслоенного произведения $P \times_X P \times_X F$ по отношению эквивалентности, порожденному соотношениями $(p', p, f) \sim (p', p\lambda, \lambda^{-1}f)$ для $\lambda = (p, g) \in Q$ и $(p, p, f) \sim (p\alpha, p, \alpha^{-1}f)$ для $\varphi = (p, \alpha) \in Q$. Следовательно, отображение $f \mapsto (p, p, f) \sim (p\alpha, p\alpha, f)$, где $p \in P_x$ для $f \in F_x$, определяет естественный изоморфизм между F и $(\theta\varphi)(F)$. $\square$

4.23. *Замечание.* Пусть W — произвольное векторное расслоение, снабженное невырожденной квадратичной формой. Тогда совершенно аналогично можно доказать, что $\mathscr{E}^{T \oplus W}(X) \sim \mathscr{E}^{V \oplus W}(X)$.

4.24. *Замечание.* Если V и V' — спинорные векторные расслоения рангов n и n' соответственно, то $V \oplus V'$ является спинорным векторным расслоением ранга $n+n'$. Более подробно, включения $C^{0, n} \subset C^{0, n+n'}$ и $C^{0, n'} \subset C^{0, n+n'}$ индуцируют гомоморфизм из группы $\mathrm{Spin}(n) \times \mathrm{Spin}(n')$ в группу $\mathrm{Spin}(n+n')$, который делает диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spin}(n) \times \mathrm{Spin}(n') \arrow[r, "s"] \arrow[d] & \mathrm{Spin}(n+n') \arrow[d] \\
O(n) \times O(n) \arrow[r] & \dot{O}(n+n')
\end{tikzcd}$$

коммутативной. Следовательно, $\mathscr{E}^{V \oplus V'}(X) \sim \mathscr{E}^{0, n+n'}(X)$.

4.25. Предположим теперь, что основное поле k является полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Несколько изменим наши предыдущие конструкции, вводя в рассмотрение вместо $\mathrm{Spin}(n)$ группу $\mathrm{Spin}^c(n)$ (где

$\mathrm{Spin}^c(n) = \mathrm{Spin}(n) \times_{\mathbb{Z}/2} \mathrm{U}(1)$ — факторгруппа произведения $\mathrm{Spin}(n) \times \mathrm{U}(1)$ по отношению эквивалентности $(p, z) \sim (-p, -z)$). Тогда имеет место точная последовательность

$$1 \to \mathrm{U}(1) \to \mathrm{Spin}^c(n) \xrightarrow{\rho^c} \mathrm{SO}(n) \to 1,$$

где $\rho^c(p, z) = \rho^0(p)$. Если V — ориентированное вещественное векторное расслоение ранга n, то *комплексная спинорная структура* (или, короче, ^{c}spin-*структура*) на V задается главным расслоением P со структурной группой $\mathrm{Spin}^c(n)$ и изоморфизмом $V \approx P \times_{\mathrm{Spin}^c(n)} \mathbb{R}^n$. Определим для таких расслоений V категорную эквивалентность

$$\theta^c \colon \mathscr{E}^T_{\mathbb{C}}(X) \to \mathscr{E}^V_{\mathbb{C}}(X),$$

полагая $\theta^c(E) = P\Delta_{\mathrm{Spin}^c(n)} E$. Здесь $P\Delta_{\mathrm{Spin}^c(n)} E$ — факторпространство расслоенного произведения $P \times_X E$ по отношению эквивалентности $(p, e) \sim (pg^{-1}, ge)$, где $g \in \mathrm{Spin}^c(n)$ действует на E посредством вложения $\mathrm{Spin}(n) \subset C^{0,n}$ и посредством естественного действия $\mathrm{U}(1) \subset \mathbb{C}$ на *комплексном* векторном расслоении E. Рассуждения, использованные при доказательстве теоремы 4.22, показывают, что θ^c — категорная эквивалентность.

4.26. Возможна ситуация, когда вещественное векторное расслоение обладает комплексной спинорной структурой, не будучи спинорным расслоением. Этот случай реализуется, например, для расслоения V, которое является овеществлением комплексного векторного расслоения ранга n (также обозначаемого через V). Так как на любом комплексном векторном расслоении можно задать метрику (I.8.7), то всегда можно найти такое главное расслоение со структурной группой $\mathrm{U}(n)$, что $V \approx P \times_{\mathrm{U}(n)} \mathbb{R}^{2n}$. Следовательно, для доказательства сформулированного выше утверждения достаточно установить существование гомоморфизма $\sigma \colon \mathrm{U}(n) \to \mathrm{Spin}^c(2n)$, который превращает диаграмму

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Spin}^c(2n) \arrow[d, "\rho^c"] \\
\mathrm{U}(n) \arrow[ur, "\sigma"] \arrow[r] & \mathrm{SO}(2n)
\end{tikzcd}$$

в коммутативную. Пусть $\alpha \in \mathrm{U}(n)$, и пусть $\tau(t)$ — такой путь в $\mathrm{U}(n)$, что $\tau(0) = 1$ и $\tau(1) = \alpha$ (группа $\mathrm{U}(n)$ линейно-связна). Так как отображение $\mathrm{Spin}(2n) \to \mathrm{SO}(2n)$ является накрытием (4.10), то существует и единствен путь $\tilde{\tau}$ в $\mathrm{Spin}(2n)$, такой что $\tilde{\tau}(0) = 1$ и $\rho^c(\tilde{\tau}(t)) = \tau(t)$ (Годбийон [2]). Аналогично, путь $t \mapsto \gamma(t) = \det(\tau(t)) \in \mathrm{U}(1) = \mathrm{SO}(2)$ может быть поднят до пути $\bar{\gamma}(t) \in \mathrm{Spin}(2) \approx \mathrm{U}(1)$. Тогда пара $(\tilde{\tau}(1), \bar{\gamma}(1))$ определяет элемент группы $\mathrm{Spin}^c(2n)$, который не зависит от пути $\tau(t)$, связывающего α с 1. Для доказательства этого утверждения рассмотрим другой путь τ', связывающий α с 1. Тогда τ и τ' отличаются на петлю в $U(n)$. Следовательно, $\tilde{\tau}(1)$ и $\tilde{\tau}'(1)$ различаются лишь знаком, который получается применением гомоморфизма

$$\pi_1(U(n)) \to Z/2,$$

индуцированного накрытием $\mathrm{Spin}(2n)|_{U(n)}$, к гомомотопическому классу этой петли (см Годбийон [2]). Так как отображение взятия определителя индуцирует изоморфизм из $\pi_1(U(n))$ в $\pi_1(U(1))$, обратный к изоморфизму $\pi_1(U(1)) \to \pi_1(U(n))$, порожденному вложением $U(1)$ в $U(n)$, то мы должны иметь $(\tilde{\tau}(1), \bar{\gamma}(1)) = (\tilde{\tau}'(1), \bar{\gamma}'(1))$ или $(\tilde{\tau}(1), \bar{\gamma}(1)) = (-\tilde{\tau}'(1), -\bar{\gamma}'(1))$. Следовательно, отображение σ корректно определено. Далее, отображение σ является гомоморфизмом, посколь у группа $U(n)$ связна и $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$ для элементов x и y, достаточно близких к 1.

4.27. (Атья—Ботт—Шапиро [1]). Гомоморфизм σ можно описать более точно. Для этого рассмотрим такой ортонормированный базис $f_1, \ldots, f_n$ в $\mathbb{C}^n$, что $\alpha(f_r) = \exp(i\theta_r)\cdot f_r$. Пусть $e_{2r-1} = f_r$ и $e_{2r} = if_r$ — соответствующий ортонормированный базис в $\mathbb{R}^{2n}$, и пусть S — элемент группы $\mathrm{Spin}^c(2n)$, определенный формулой

$$S = \prod_{r=1}^{n} (\cos\theta_r/2 - e_{2r-1}e_{2r}\sin\theta_r/2)\exp(i\theta_r/2).$$

Тогда $\rho^c(S) = \alpha \in U(n) \subset SO(2n)$ и

$$\tilde{\tau}(t) = \prod_{r=1}^{n} (\cos t\theta_r/2 - e_{2r-1}e_{2r}\sin t\theta_r/2)\exp(it\theta_r/2)$$

является поднятием, соединяющим 1 и S, причем $\tilde{\tau}(0) = 1$. Следовательно, $S = \sigma(\alpha)$.

4.28. Согласно 1.5, пространство $\Lambda(\mathbb{C}^n)$ является $C^{0,2n}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$-модулем. Так как $C^{0,2n}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C} \approx M_{2^n}(\mathbb{C})$, а пространство $\Lambda(\mathbb{C}^n)$ имеет размерность 2^n, то, в силу теоремы III.4.4, $\Lambda(\mathbb{C}^n)$ является образующей группы $K(\mathscr{E}_{\mathbb{C}}^{0,2n}) \approx Z$. Следовательно, функтор

$$\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(X) \to \mathscr{E}_{\mathbb{C}}^{0,2n}(X),$$

определенный соответствием $E \mapsto \Lambda(\mathbb{C}^n)\otimes E$, является категорной эквивалентностью, описанной в III.4.6.

4.29. Если V — комплексное расслоение ранга n, то в силу 4.26 на нем можно задать комплексную спинорную структуру. Таким образом, согласно 4.25, мы имеем категорную эквивалентность

$$\mathscr{E}_{\mathbb{C}}^{0,2n}(X) \to \mathscr{E}_{\mathbb{C}}^{V}(X).$$

Мы утверждаем, что композиция $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(X) \sim \mathscr{E}_{\mathbb{C}}^{0,2n}(X) \sim \mathscr{E}_{\mathbb{C}}^{V}(X)$ представляет собой просто функтор $E \mapsto \Lambda(V)\otimes E$, корректно определенный в силу 1.5 и 4.11. Действительно, если мы запишем расслоение V в виде $P\times_{U(n)}\mathbb{C}^n$, то композиция двух указанных категорных эквивалентностей определяется формулой $E\mapsto(P'\times_{\mathrm{Spin}^c(2n)}\times\Lambda(\mathbb{C}^n))\otimes E$, где P' — главное расслоение со структурной группой $\mathrm{Spin}^c(2n)$, ассоциированное с P, т. е. $P'=P\times_{U(n)}\mathrm{Spin}^c(2n)$. С другой стороны, функтор $E\mapsto\Lambda(V)\otimes E$ можно представить в виде $E\mapsto(P\times_{U(n)}\Lambda(\mathbb{C}^n))\otimes E$. Поэтому тот факт, что эти два функтора изоморфны, будет прямо следовать из коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd} U(n) \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d] & \mathrm{Spin}^c(2n) \arrow[d, "\gamma"] \\ \mathrm{End}(\mathbb{C}^n) \arrow[r, "\Lambda"] & \mathrm{End}(\Lambda(\mathbb{C}^n)) \end{tikzcd}$$

где σ — гомоморфизм, описанный в 4.26, γ — гомоморфизм, задающий действие $\mathrm{Spin}^c(2n)\subset C^{0,2n}\otimes\mathbb{C}$ на $\Lambda(\mathbb{C}^n)$ (1.5), и Λ — гомоморфизм, индуцированный операцией взятия внешней степени. Если $(f_1,\ldots,f_n)$ — такой ортонормированный базис в $\mathbb{C}^n$, что $\alpha(f_r)=\exp(i\theta_r)\cdot f_r$ для $\alpha\in U(n)$, то в силу 4.27 мы имеем

$$\sigma(\alpha)=\prod_{r=1}^{n}(\cos\theta_r/2-e_{2r-1}e_{2r}\sin\theta_r/2)\exp(i\theta_r/2).$$

Пусть теперь $x=a+f_r\wedge b$ — такой элемент из $\Lambda(\mathbb{C}^n)$, что a и b не содержат f_r. Тогда

$$\begin{aligned}\gamma(\sigma(\alpha))(x)&=(\cos\theta_r/2-e_{2r-1}e_{2r}\sin\theta_r/2)\exp(i\theta_r/2)(a+f_r\wedge b)\\&=a+\exp(i\theta_r)f_r\wedge b\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\gamma(\sigma(\alpha))(f_{r_1}\wedge\ldots\wedge f_{r_s})=\alpha(f_{r_1})\wedge\ldots\wedge\alpha(f_{r_s}).$$

4.30. Вернемся теперь к общему случаю, когда V — комплексное спинорное расслоение ранга n.

Пусть

$$l\colon \mathrm{Spin}^c(n)\times_{\mathbb{Z}/2}U(1)\to U(1)$$

— гомоморфизм, определенный формулой $l(\beta,z)=z^2$. Если P — главное расслоение со слоем $\mathrm{Spin}^c(n)$, свяжем с ним комплексное линейное расслоение $L(V)=P\times_{\mathrm{Spin}^c(n)}\mathbb{C}$, которое получается как факторпространство произведения $P\times\mathbb{C}$ по отношению эквивалентности $(pg,\lambda)\sim(p,l(g)^{-1}\lambda)$, где $g\in\mathrm{Spin}^c(n)$. Линейное расслоение $L(V)$ называется расслоением, *ассоциированным* с комплексной спинорной структурой на V.

Если $n=2p$ и P ассоциировано с комплексной структурой на V, как в 4.26, то явная формула п. 4.27 показывает, что $L=P'\times_{U(p)}\mathbb{C}$. В этих обозначениях P' является главным расслоением со слоем $U(p)$, которое определяет на V комплексную структуру, и $P'\times_{U(p)}\mathbb{C}$ —

факторпространство произведения $P' \times \mathbb{C}$ по отношению эквивалентности $(p'g, \lambda) \sim (p', d(g)^{-1}\lambda)$, где $d\colon \mathrm{U}(p) \to \mathrm{U}(1)$ — отображение взятия определителя. Следовательно, расслоение $L(V)$ изоморфно $\lambda^p(V)$ (p-й комплексной внешней степени расслоения V).

Если V и V' — комплексные спинорные расслоения, то $V \oplus V'$ естественным образом наделяется структурой комплексного спинорного расслоения. Это следует из рассмотрения гомоморфизма

$$s^c\colon \mathrm{Spin}^c(n) \times \mathrm{Spin}^c(n') \to \mathrm{Spin}^c(n+n'),$$

задаваемого формулой $[(\beta, z), (\beta', z')] \mapsto [s(\beta, \beta'), zz']$, где s определен в 4.24 и $z, z' \in \mathrm{U}(1)$. Заметим, что $L(V \oplus V') \approx L(V) \otimes L(V')$.

4.31. Теорема. *Пусть V — комплексное спинорное расслоение ранга n и W — вещественное расслоение $V \oplus V$, снабженное комплексной структурой, определенной в I.4.8: умножение на i задается матрицей*

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда с точностью до изоморфизма имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{V \oplus V}(X) \\ \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{0,2n}(X) \arrow[ur, "\theta^c"] \arrow[dr, "\theta'^c"'] & \\ & \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{W}(X) \arrow[uu, "\mathcal{L}"'] \end{tikzcd}$$

где θ^c и θ'^c определены так же, как в 4.25 (с использованием комплексных спинорных структур, представленных соответственно в 4.30 и 4.26), а $\mathcal{L}$ — функтор $E \mapsto E \otimes L(V)$.

Доказательство. Вычислим композицию j'^c гомоморфизмов

$$\mathrm{Spin}^c(2n) \xrightarrow{\pi} \mathrm{SO}(n) \xrightarrow{r} \mathrm{U}(n) \xrightarrow{\sigma} \mathrm{Spin}^c(2n) = \mathrm{Spin}(2n) \times_{\mathbb{Z}/2} \mathrm{U}(1).$$

Если $\delta = (\beta, z) \in \mathrm{Spin}^c(n)$ и $\alpha = \pi(\delta) \in \mathrm{SO}(n) \subset \mathrm{U}(n)$, то существует такой ортонормированный базис $f_1, \ldots, f_p, \bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_p, f_{2p+1}, \ldots, f_n$ пространства $\mathbb{C}^n$, что $\alpha(f_r) = \exp(i\theta_r)(f_r)$, $\alpha(\bar{f}_r) = \exp(-i\theta_r)(\bar{f}_r)$ для $r \leqslant p$ и $\alpha(f_r) = f_r$ для $r > 2p$. Из формулы, данной в 4.27, следует, что $(\sigma r \pi)(\delta) \in \mathrm{Spin}(2n) \subset \mathrm{Spin}^c(2n)$. Таким образом, σr определяет гомоморфизм $j\colon \mathrm{SO}(n) \to \mathrm{Spin}(2n)$, который делает диаграмму

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Spin}(2n) \subset \mathrm{Spin}^c(2n) \arrow[d] \\ \mathrm{SO}(n) \arrow[ur, "j"] \arrow[r] & \mathrm{SO}(2n) \end{tikzcd}$$

коммутативной. Поскольку такой гомоморфизм единствен, он должен совпадать с гомоморфизмом (также обозначаемым через j), определенным в 4.18. Следовательно, мы имеем формулу $(j\pi)(\beta, z) = (s(\beta, \beta), 1) \in \mathrm{Spin}(2n) \times_{\mathbb{Z}/2} \mathrm{U}(1)$, где s определено так же, как в 4.24. Если мы обозначим через j^c композицию

$$\mathrm{Spin}^c(n) \xrightarrow{\Delta} \mathrm{Spin}^c(n) \times \mathrm{Spin}^c(n) \xrightarrow{s^c} \mathrm{Spin}^c(2n),$$

где гомоморфизм s^c определен в 4.30 и Δ — диагональный гомоморфизм, то получим формулу

$$j^c(g) = j'^c(g) \cdot l(g).$$

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы. Рассмотрим главное $\mathrm{Spin}^c(n)$-расслоение P, для которого $V \approx \approx P \times_{\mathrm{Spin}^c(n)} \mathbb{R}^n$. По определению, главное $\mathrm{Spin}^c(2n)$-расслоение, ассоциированное с $V \oplus V$, является факторпространством произведения $P \times \mathrm{Spin}^c(2n)$ по отношению эквивалентности $(pq, h) \sim \sim (p, j^c(g)^{-1} h)$. Мы обозначим это расслоение через $P \times_{\mathrm{Spin}^c(n)} \mathrm{Spin}^c(2n)$. Таким образом, в обозначениях 4.22 и 4.25, $\theta^c(E) = P \times_{\mathrm{Spin}^c(n)} \mathrm{Spin}^c(2n) \Delta_{\mathrm{Spin}^c(2n)} E$. Более точно, $\theta^c(E)$ является факторпространством произведения $P \times \mathrm{Spin}^c(2n) \times_X E$ по отношению эквивалентности, порожденному соотношениями $(pg, h, e) \sim (p, j^c(g)^{-1} h, e)$ и $(p, h_1 h_2, e) \sim (p, h_1, h_2^{-1} e)$ (где проекции элементов p и e на базу X совпадают). Так как каждый элемент этого пространства есть класс тройки $(p, 1, e)$, мы можем представить его в виде $P \Delta_{\mathrm{Spin}^c(n)} E$, т. е. как факторпространство расслоенного произведения $P \times_X E$ по отношению эквивалентности $(pg, e) \sim (p, j^c(g)^{-1} e)$, где $g \in \mathrm{Spin}^c(n)$.

С другой стороны, главное $\mathrm{Spin}^c(2n)$-расслоение, ассоциированное с комплексной структурой на $V \oplus V$, есть $P \times_{\mathrm{Spin}^c(n)} \mathrm{Spin}^c(2n)$. Следовательно, как и выше, мы можем представить $\theta'^c(E)$ в виде $P \Delta_{\mathrm{Spin}^c(n)} E$, т. е в виде факторпространства $P \Delta E$ по отношению эквивалентности $(pg, e) \sim (p, j'^c(g)^{-1} e)$, где $g \in \mathrm{Spin}^c(n)$.

Наконец, представим $L(V)$ как факторпространство расслоенного произведения $P \times_{\mathrm{Spin}^c(n)} \mathbf{C}$ по отношению эквивалентности $(pg, \lambda) \sim (p, l(g)^{-1} \lambda)$ и определим морфизм

$$\theta'^c(E) \otimes L(V) \to \theta^c(E),$$

полагая

$$(p, e) \otimes (p, \lambda)\, (p, \lambda e).$$

Заметим, что

$$(pg, e) \otimes (pg, \lambda) \mapsto (pg, \lambda e) = (p, j^c(g)^{-1} \lambda e),$$
$$(p, j'^c(g)^{-1} e) \otimes (p, l(g)^{-1} e) \mapsto (p, j'^c(g)^{-1} l(g)^{-1} \lambda e).$$

Следовательно, этот морфизм корректно определен и является изоморфизмом на каждом слое. Таким образом, в силу 1.2.7 мы имеем изоморфизм. □

4.32. Следствие. *Пусть V — комплексное спинорное расслоение ранга n и W — вещественное расслоение $V \oplus V$, снабженное комплексной структурой, определенной в 1.4.8. Тогда (с точностью до изо-*

морфизма) имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
 & \mathscr{E}_{\mathbf{C}}^{V\oplus V}(X) \\
\mathscr{E}_{\mathbf{C}}(X) \arrow[ur, "\psi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \\
 & \mathscr{E}_{\mathbf{C}}^{W}(X) \arrow[uu, "\mathscr{L}"']
\end{tikzcd}$$

В этой диаграмме φ — функтор $E \mapsto \Lambda(W) \otimes E$, описанный в 4.29; ψ — композиция $\mathscr{E}_{\mathbf{C}}(X) \sim \mathscr{E}_{\mathbf{C}}^{0,2n}(X) \xrightarrow{\theta^c} \mathscr{E}_{\mathbf{C}}^{V\oplus V}(X)$, где θ^c — категорная эквивалентность, индуцированная комплексной спинорной структурой на $V \oplus V$ (см. 4.25 и 4.29). Наконец, $\mathscr{L}$ — это функтор $E \mapsto E \otimes L(V)$, где $L(V)$ — линейное расслоение, ассоциированное с комплексной спинорной структурой на V (см. 4.30).

Доказательство. Это утверждение является непосредственным следствием теоремы 4.31 и коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathscr{E}_{\mathbf{C}}^{V\oplus V}(X) \\
\mathscr{E}_{\mathbf{C}}(X) \arrow[r, "\sim"] & \mathscr{E}_{\mathbf{C}}^{0,2n}(X) \arrow[ur, "\theta^c"] \arrow[dr, "\theta''"'] & \\
 & & \mathscr{E}_{\mathbf{C}}^{W}(X) \arrow[uu, "\mathscr{L}"']
\end{tikzcd}$$

где композиция $\mathscr{E}_{\mathbf{C}}(X) \xrightarrow{\sim} \mathscr{E}_{\mathbf{C}}^{0,2n}(X) \xrightarrow{\theta^c} \mathscr{E}_{\mathbf{C}}^{W}(X)$ отождествляется с φ (см. 4.29). □

Упражнение: 1.

5. Изоморфизм Тома в вещественной и комплексной K-теориях для вещественных векторных расслоений

5.1. Пусть V — вещественное векторное расслоение, снабженное невырожденной симметричной билинейной формой (или квадратичной формой) (I.8.4). Обозначим через 1 тривиальное расслоение ранга 1, снабженное формой $\lambda \mapsto \lambda^2$. Пусть φ^V — функтор из $\mathscr{E}^{V\oplus 1}(X)$ в $\mathscr{E}^V(X)$, сопоставляющий каждому $C(V \oplus 1)$-модулю соответствующий ему $C(V)$-модуль (заметим, что $C(V) \subset C(V \oplus 1)$). Определим группу $K^V(X)$ как группу Гротендика банахова функтора φ^V (см. II.2.13). Если $V = X \times \mathbb{R}^{p+q}$ с квадратичной формой

$$(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_{p+q}) \mapsto -(\lambda_1)^2 - \ldots - (\lambda_p)^2 + (\lambda_{p+1})^2 + \ldots + (\lambda_{p+q})^2,$$

то пример 4.12 показывает, что $K^V(X)$ изоморфна группе $K^{p,q}(X)$, определенной в III.4.11. Эквивалентное описание группы $K^V(X)$ может быть получено на основании III.4.14—23 в терминах градуирований. Более подробно, градуирование расслоения E, снабженного структурой $C(V)$-модуля (т. е. таким морфизмом $m: V \to \mathrm{HOM}(E, E)$, что $(m(v))^2 = Q(v)$; см. 4.11), — это морфизм $\eta: E \to E$, такой что $\eta^2 = 1$ и $\eta m(v) = -m(v)\eta$ для каждого $v \in V$. Тогда, так же как в

§ III.4, мы рассматриваем множество троек (E, η_1, η_2), где E есть $C(V)$-модуль, а η_1 и η_2 — его градуирования. Группа $K^V(X)$ определяется как факторгруппа свободной группы, порожденной такими тройками, по подгруппе, порожденной соотношениями

(i) $(E, \eta_1, \eta_2)+(F, \zeta_1, \zeta_2)=(E\oplus F, \eta_1\oplus\zeta_1, \eta_2\oplus\zeta_2)$,

(ii) $(E, \eta_1, \eta_2)=0$, если η_1 гомотопно η_2 в множестве градуирований E.

5.2. Теорема. *Предположим, что на расслоении V задана невырожденная положительная квадратичная форма и, кроме того, спинорная структура (соотв. ^{c}spin-структура). Тогда категорная эквивалентность θ (соотв. θ^c), определенная в 4.22 (соотв. в 4.25), индуцирует изоморфизм*

$$K^{0,n}(X)\approx K^V(X) \quad (\textit{соотв.}\ K_{\mathbf{C}}^{0,n}(X)\approx K_{\mathbf{C}}^V(X)),$$

где $n=\operatorname{rank}(V)$.

Доказательство. Пусть T_p — тривиальное расслоение ранга p. Если V является $\operatorname{Spin}(n)$-расслоением (соотв. $\operatorname{Spin}^c(n)$-расслоением), то $V\oplus T_1$ в силу 4.24 (соотв. 4.29) есть $\operatorname{Spin}(n+1)$-расслоение (соотв. $\operatorname{Spin}^c(n+1)$-расслоение). Следовательно, мы имеем коммутативные (с точностью до изоморфизма) диаграммы категорий

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{E}^{T_{n+1}}(X) \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\varphi^{T_n}"'] & \mathscr{E}^{V\oplus 1}(X) \arrow[d, "\varphi^V"] \\
\mathscr{E}^{T_n}(X) \arrow[r, "\theta"] & \mathscr{E}^{V}(X)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathscr{E}_{\mathbf{C}}^{T_{n+1}}(X) \arrow[r, "\theta^c"] \arrow[d, "\varphi_{\mathbf{C}}^{T_n}"'] & \mathscr{E}_{\mathbf{C}}^{V\oplus 1}(X) \arrow[d, "\varphi_{\mathbf{C}}^V"] \\
\mathscr{E}_{\mathbf{C}}^{T_n}(X) \arrow[r, "\theta^c"] & \mathscr{E}_{\mathbf{C}}^{V}(X)
\end{tikzcd}$$

Так как горизонтальные функторы являются эквивалентностями банаховых категорий, то они индуцируют изоморфизмы $K^{0,n}(X)\approx K(\varphi^{T_n})\approx K(\varphi^V)$ (соотв. $K_{\mathbf{C}}^{0,n}(X)\approx K(\varphi_{\mathbf{C}}^{T_n})\approx K(\varphi_{\mathbf{C}}^V)$). Заметим, что $K^{0,n}(X)\approx K^{-n}(X)$ и $K_{\mathbf{C}}^{0,n}(X)\approx K_{\mathbf{C}}^{-n}(X)$ (см. III.5.12). $\square$

5.3. Если на расслоении V задана комплексная структура, то оно может быть наделено комплексной спинорной структурой. Следовательно, если $\operatorname{rank}(V)=2p$, то имеют место изоморфизмы

$$K_{\mathbf{C}}(X)\approx K_{\mathbf{C}}^{0,2p}(X)\approx K_{\mathbf{C}}^V(X).$$

Мы опишем композицию этих изоморфизмов более подробно, так как это послужит нам образцом для последующего обобщения (теоремы 5.8).

Прежде всего, изоморфизм $K_{\mathbf{C}}(X)\approx K_{\mathbf{C}}^{0,2p}(X)$ получается из диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{E}_{\mathbb{C}}^{0,1}(X) \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{E}_{\mathbb{C}}^{0,2p+1}(X) \arrow[d] \\
\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(X) \arrow[r] & \mathscr{E}_{\mathbb{C}}^{0,2p}(X)
\end{tikzcd}$$

горизонтальные функторы которой суть эквивалентности категорий (III.4.6). Более точно, если ввести обозначение $D^{0,q} = C^{0,q} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, то имеет место изоморфизм $D^{0,2p+1} \to D^{0,2p} \hat{\otimes} D^{0,1}$. Этот изоморфизм индуцирован $\mathbb{R}$-линейным отображением $\mathbb{R}^{2p} \oplus \mathbb{R} \to D^{0,2p} \hat{\otimes} D^{0,1}$, которое определяется формулой $(v, \lambda) \mapsto v \hat{\otimes} 1 + \varepsilon \hat{\otimes} \lambda$; здесь $\varepsilon = e_1 (ie_2) e_3 (ie_4) \ldots (ie_{2p})$, $e_1, \ldots e_{2p}$ — канонический базис пространства $\mathbb{R}^{2p}$, вложенного в $C^{0,2p} \subset D^{0,2p}$ (ср. с III.3.16; заметим, что $(\varepsilon)^2 = 1$). Если M — неприводимый $D^{0,2p}$-модуль, то эквивалентность категорий $\mathscr{E}^{0,1}_{\mathbb{C}}(X) \xrightarrow{\sim} \mathscr{E}^{0,2p+1}_{\mathbb{C}}(X)$ определяется соответствием $E \mapsto M \hat{\otimes} E$, где $\mathbb{R}^{2p} \oplus \mathbb{R} = \mathbb{R}^{2p+1} \subset D^{0,2p+1}$ действует на $M \hat{\otimes} E$ по формуле $[(u, \lambda), (u \hat{\otimes} e)] \mapsto vu \hat{\otimes} e + \varepsilon u \hat{\otimes} \lambda e$ (см. III.4.6). Согласно 1.5, мы можем считать, что $M = \Lambda(\mathbb{C}^p)$. Для того чтобы двигаться далее, нам потребуется следующая лемма.

5.4. Лемма. *Отождествим пространства $\mathbb{R}^{2p}$ и $\mathbb{C}^p$ при помощи отображения*

$$(x_1, \ldots, x_{2p}) \mapsto (x_1 + ix_2, \ldots, x_{2p-1} + ix_{2p})$$

Тогда элемент $\varepsilon = e_1 (ie_2) e_3 \ldots (ie_{2p})$ равен $+1$ на $\Lambda^{(0)}(\mathbb{C}^p)$ и -1 на $\Lambda^{(1)}(\mathbb{C}^p)$.

Доказательство. Если V и W — комплексные векторные пространства, снабженные невырожденными эрмитовыми формами, то канонический изоморфизм

$$f\colon \Lambda(V) \hat{\otimes} \Lambda(W) \approx \Lambda(V \oplus W)$$

(см. III.3.10) является изоморфизмом $C(V) \hat{\otimes} C(W) \approx C(V \oplus W)$-модулей. По существу, изоморфизм f задается формулой $w_1 \hat{\otimes} w_2 \mapsto w_1 \Lambda w_2$, и мы имеем равенства (ниже ω обозначает степень)

$$d_v (w_1 \Lambda w_2) = d_v (w_1) \Lambda w_2, \text{ если } v \in V;$$
$$d_w (w_1 \Lambda w_2) = (-1)^{\omega(w)} w_1 \Lambda d_w (w_2), \text{ если } w \in W;$$
$$\partial_v (w_1 \Lambda w_2) = \partial_v (w_1) \Lambda w_2, \text{ если } v \in V;$$
$$\partial_w (w_1 \Lambda w_2) = (-1)^{\omega(w)} w_1 \Lambda \partial_w (w_2), \text{ если } w \in W.$$

Следовательно,

$$d_{v+w} + \partial_{v+w} = (d_v + \partial_v) \hat{\otimes} 1 + 1 \hat{\otimes} (d_w + \partial_w)$$

на пространстве $\Lambda(V) \hat{\otimes} \Lambda(W)$ (ср. с III.3.10). Поэтому нам достаточно доказать лемму лишь для случая $V = \mathbb{C}$ с базисом f_1. В этом случае мы имеем $\Lambda(V) = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ с базисом 1 и f_1. Кроме того,

$$d_{f_1}(1) = f_1, \quad \partial_{f_1}(1) = 0,$$
$$d_{f_1}(f_1) = 0, \quad \partial_{f_1}(f_1) = 1.$$

Если обозначить через $\rho(v)$ действие элемента $v \in \mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$ на $\Lambda(V)$, то мы имеем

$$\rho(e_1) = d_{f_1} + \partial_{f_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\rho(e_2) = d_{if_1} + \partial_{if_1} = i(d_{f_1} - \partial_{f_1}) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$i\rho(e_1)\rho(e_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \ \square$$

5.5. Предложение. *Эквивалентность категорий*

$$\mathscr{E}_{\mathbb{C}}^{0,1}(X) \to \mathscr{E}_{\mathbb{C}}^{0,2p+1}(X),$$

определенная в § III.4, задается соответствием $E \mapsto \Lambda(\mathbb{C}^p) \hat{\otimes} E$ (градуированное тензорное произведение), где $\Lambda(\mathbb{C}^p) \otimes E$ рассматривается как модуль над $D^{0,2p} \hat{\otimes} D^{0,1} \approx D^{0,2p+1}$.

Доказательство. Данное утверждение непосредственно следует из леммы 5.4 и предыдущих рассмотрений (с $M = \Lambda(\mathbb{C}^p)$). $\square$

5.6. Предложение. *Пусть V — комплексное векторное расслоение ранга p (вещественного ранга $n = 2p$). Тогда композиция эквивалентностей категорий*

$$\mathscr{E}_{\mathbb{C}}^{0,1}(X) \to \mathscr{E}_{\mathbb{C}}^{0,2p+1}(X) \xrightarrow{\theta^c} \mathscr{E}_{\mathbb{C}}^{V\oplus 1}(X)$$

задается соответствием $E \mapsto \Lambda(V) \hat{\otimes} E$, где $\Lambda(V) \hat{\otimes} E$ рассматривается как модуль над $C(V) \hat{\otimes} C(T_1) \approx C(V \oplus 1)$.

Доказательство получается почти дословным повторением вычислений, проделанных в 4.29. $\square$

5.7. Теорема. *Пусть V — комплексное векторное расслоение ранга p (вещественного ранга $2p$). Тогда композиция изоморфизмов*

$$K_{\mathbb{C}}(X) \approx K_{\mathbb{C}}^{0,0}(X) \to K_{\mathbb{C}}^{0,n}(X) \to K_{\mathbb{C}}^{V}(X),$$

определенных в п.4.22 и § III.4, задается правилом

$$[E] \mapsto d(\Lambda(V) \otimes E,\ \eta \otimes 1,\ -\eta \otimes 1),$$

где η — каноническое $\mathbb{Z}/2$-градуирование внешней алгебры $\Lambda(V)$.

Доказательство. Пусть E — объект категории $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(X)$. Ему соответствует элемент $d(E^{(0)}, E^{(1)}, \alpha) \in K^{0,0}(X)$, где $E^{(i)}$ — составляющая E степени i и α — тождественное отображение неградуированных модулей (III.4.12). Следовательно, в силу 5.6, образ $[E]$ относительно композиции изоморфизмов представляет собой элемент

$$d(\Lambda(V) \hat{\otimes} E^{(0)},\ \Lambda(V) \hat{\otimes} E^{(1)},\ 1 \hat{\otimes} \alpha).$$

Согласно определению группы $K^V(X)$ в терминах градуирований, это то же самое, что элемент

$$d(\Lambda(V) \otimes E,\ \eta \otimes 1,\ -\eta \otimes 1). \ \square$$

5.8. Теорема. *Пусть V является таким $\mathrm{Spin}(8n)$-расслоением (соотв. $\mathrm{Spin}^c(2n)$-расслоением), что $V \approx P \times_{\mathrm{Spin}(8n)} \mathbb{R}^{8n}$ (соотв. $V \approx P \times_{\mathrm{Spin}^c(2n)} \mathbb{R}^{2n}$). Пусть M — неприводимый $C^{0,8n}$-модуль (соотв. неприводимый $D^{0,2n} = C^{0,2n} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$-модуль) и η_M — градуирование, задаваемое формулой $\eta_M = e_1 \ldots e_{8n}$ (соотв. $\eta_M = (-1)^n e_1(ie_2) \ldots e_{2n}(ie_{2n})$). Тогда композиция изоморфизмов*

$$K_{\mathbb{R}}(X) \approx K_{\mathbb{R}}^{0,0}(X) \approx K_{\mathbb{R}}^{0,8n}(X) \approx K_{\mathbb{R}}^{V}(X)$$

(соотв. $K_{\mathbb{C}}(X) \approx K_{\mathbb{C}}^{0,0}(X) \approx K_{\mathbb{C}}^{0,2n}(X) \approx K_{\mathbb{C}}^{V}(X)$)

определяется соответствием

$$E \mapsto d(M(V) \otimes E,\ \eta \otimes 1,\ -\eta \otimes 1),$$

где $M(V) = P \times_{\mathrm{Spin}(8n)} M$ (соотв. $M(V) = P \times_{\mathrm{Spin}^c(2n)} M$) и $\eta = (\mathrm{Id}_P, \eta_M)$.

Доказательство. Доказательство этой теоремы вполне аналогично доказательству теоремы 5.7; используются явные категорные эквивалентности θ и θ^c (см. 4.22 и 4.25). Единственный момент, нуждающийся в объяснении, — это выбор градуирования η_M, с помощью которого производится отождествление алгебр $C^{0,8n+1}$ и $C^{0,8n} \otimes C^{0,1}$ (соотв. $D^{0,2n+1}$ и $D^{0,2n} \otimes D^{0,1}$). На самом деле существуют всего лишь два градуирования модуля M: η_M и $-\eta_M$; они отвечают двум неприводимым $C^{0,8n+1}$-модулям (соотв. $D^{0,2n+1}$-модулям) вещественной размерности 16^n (соотв. комплексной размерности 2^n); см. § III.3. Для того чтобы избежать неопределенности в знаке, заметим, что η_M действует на пространстве $\Lambda^0(\mathbb{C}^n) \subset \Lambda(\mathbb{C})^n$, рассматриваемом как $D^{0,2n}$-модуль, посредством умножения на $(-1)^n$ (см. 5.4). Поэтому изменение знака градуирования η_M влечет изменение знака изоморфизма $K_{\mathbb{R}}(X) \approx K_{\mathbb{R}}^{V}(X)$ (соотв. $K_{\mathbb{C}}(X) \approx K_{\mathbb{C}}^{V}(X)$). □

5.9. Предложение. *Пусть V является $\mathrm{Spin}^c(n)$-расслоением, и пусть W (соотв. W') — вещественное расслоение $V \oplus V$, снабженное структурой $\mathrm{Spin}^c(2n)$-расслоения, описанной в 4.30 (соотв. снабженное комплексной структурой, описанной в I.4.8 и 4.31). Тогда имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
 & K_{\mathbb{C}}^{W}(X) = K_{\mathbb{C}}^{V \oplus V}(X) \\
K_{\mathbb{C}}(X) \arrow[ur, "\psi^*"] \arrow[dr, "\varphi^*"'] & \\
 & K_{\mathbb{C}}^{W'}(X) = K_{\mathbb{C}}^{V \oplus V}(X) \arrow[uu, "\mathcal{L}^*"']
\end{tikzcd}$$

где гомоморфизмы ψ^* и μ^* определены так же, как в 4.32, а $\mathcal{L}^*$ определяется тензорным произведением с линейным расслоением $L(V)$ (см. 4.30).

Доказательство. Это утверждение непосредственно следует из 4.32. □

5.10. Рассмотрим теперь произвольное вещественное векторное расслоение V с компактной базой, снабженное положительной квадратичной формой. Пусть $B(V)$ (соотв. $S(V)$) — расслоение на шары (соотв. на сферы), ассоциированное с V. Напомним, что $K(B(V), S(V)) \approx K(V) \approx \tilde{K}(\dot{V})$, где $\dot{V}$ — одноточечная компактификация V, т. е. пространство Тома расслоения V. Мы хотим определить фундаментальный гомоморфизм

$$t\colon K^V(X) \to K(B(V), S(V)),$$

в некотором смысле обобщающий гомоморфизм t, определенный в III.5.9 (см. теорему 6.21 ниже). Для того чтобы определить этот гомоморфизм, отождествим расслоение на шары $B(V)$ с „верхней полусферой" $S^+(V \oplus 1)$ расслоения на сферы $S(V \oplus 1)$ (рис. 20). Это — множество точек (v, λ), где $v \in V$ и $\lambda \in \mathbb{R}^+$, таких что $Q(v) + \lambda^2 = 1$. Обозначим через $\pi\colon S^+(V \oplus 1) \approx B(V) \to X$ каноническую проекцию.

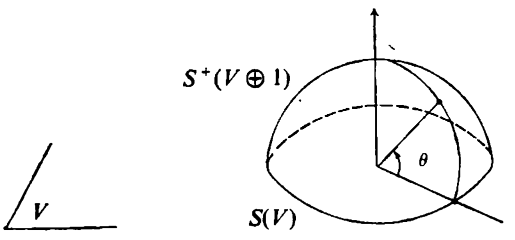


Рис. 20.

Пусть $x = d(E, \eta_1, \eta_2) \in K^V(X)$ и $E' = \pi^* E$. Над каждой точкой пространства $S^+(V \oplus 1)$ можно рассмотреть два градуирования расслоения $\pi^* E$, определяемых формулами $\rho(v) + \lambda\eta_1$ и $\rho(v) + \lambda\eta_2$ соответственно (здесь $\rho\colon V \to \mathrm{HOM}(E, E)$ — действие V на E, восходящее к структуре $C(V)$-модуля; см. 4.11). Используя полярные координаты и обозначая для краткости $\rho(v)$ просто через v, указанные выше два градуирования можно записать над точкой с полярными координатами (v, θ) в виде $v\cos\theta + \eta_i \sin\theta$, $i = 1, 2$, где $v \in S(V)$ и $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Определим гомоморфизм t формулой

$$t(d(E, \eta_1, \eta_2)) = d(\pi^* E,\ v\cos\theta + \eta_1 \sin\theta,\ v\cos\theta + \eta_2 \sin\theta),$$

где выражение в правой части понимается как элемент группы $K^{0,0}(B(V), S(V)) \approx K(B(V), S(V))$ (см. III.5.7). Этот гомоморфизм корректно определен, поскольку два градуирования $\zeta_i(\theta) = v\cos\theta + \eta_i \sin\theta$ для $i = 1, 2$ совпадают на $S(V) \subset S^+(V \oplus 1)$. Следующую теорему мы докажем несколько позже (6.21) в более общем виде.

5.11. Теорема. *Определенный выше гомоморфизм*

$$t\colon K^V(X) \to K(B(V), S(V))$$

является изоморфизмом.

В этом параграфе мы докажем эту теорему лишь для случая, когда $\mathrm{Rank}(V) \equiv 0 \bmod 8$ (соотв. $\equiv 0 \bmod 2$), причем расслоение V снабжено спинорной структурой (соотв. ^{c}spin-структурой) и рассматривается вещественная (соотв. комплексная) K-теория. Для этого мы вначале вычислим композицию гомоморфизмов

$$K^V(X) \xrightarrow{t} K^{0,0}(B(V),\ S(V)) \xrightarrow{g} K(B(V),\ S(V)),$$

где гомоморфизм g определен так же, как в III.5.7.

Пусть $d(E,\ \eta_1,\ \eta_2)$ — некоторый элемент из $K^V(X)$. Расслоение π^*E с заданным градуированием η_i изоморфно расслоению π^*E с градуированием $\zeta_i(\theta) = v\cos\theta + \eta_i \sin\theta$. Изоморфизм

$$f_i\colon (E,\ \eta_i) \to (E,\ v\sin\varphi + \eta_i\cos\varphi), \quad \varphi = \pi/2 - \theta,$$

этих расслоений задается формулой

$$f_i = \cos\frac{\varphi}{2} + v\eta_i\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Он корректно определен, поскольку

$$\left(\cos\frac{\varphi}{2} + v\eta_i\sin\frac{\varphi}{2}\right)\eta_i = (v\sin\varphi + \eta_i\cos\varphi)\left(\cos\frac{\varphi}{2} + v\eta_i\sin\frac{\varphi}{2}\right).$$

Согласно III.5.7, элемент из $K(B(V),\ S(V)) = K(S^+(V \oplus 1),\ S(V))$, ассоциированный с $d(\pi^*E,\ \zeta_1(\theta),\ \zeta_2(\theta))$, есть $d(E_{1,\theta},\ E_{2,\theta},\ \alpha)$, где $E_{i,\theta}$ — расслоение $\operatorname{Ker}\left(\frac{1-\zeta_i(\theta)}{2}\right)$ на $S^+(V \oplus 1)$ и α — отображение отождествления этих двух расслоений на $S(V)$ (это возможно, так как $\zeta_1(\theta) = \zeta_2(\theta)$ на $S(V)$). Используя изоморфизмы f_i, мы можем записать $d(E_{1,\theta},\ E_{2,\theta},\ \alpha)$ в виде $d(\pi^*E_1,\ \pi^*E_2,\ \beta)$, где $E_i = \operatorname{Ker}\left(\frac{1-\eta_i}{2}\right)$ и β есть композиция $f_2^{-1}f_1$, ограниченная на $S(V)$:

$$\begin{tikzcd}
(E,\eta_1) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f_1"'] & (E,\eta_2) \arrow[d, "f_2"] \\
(E, v\sin\varphi + \eta_1\cos\varphi) \arrow[r, "\beta"] & (E, v\sin\varphi + \eta_2\cos\varphi)
\end{tikzcd}$$

Если $\varphi = \pi/2$, то $\beta = (1/2)(1 - v\eta_2)(1 + v\eta_1)$. В частности, полагая $\eta_2 = -\eta_1$, мы получаем следующее предложение (см. III.4.12):

5.12. Предложение. *Пусть V является* $\operatorname{Spin}(8n)$*-расслоением (соотв.* $\operatorname{Spin}^c(2n)$*-расслоением). Тогда композиция гомоморфизмов*

$$K_{\mathbf{R}}(X) \xrightarrow{\approx} K_{\mathbf{R}}^V(X) \xrightarrow{t} K_{\mathbf{R}}(B(V),\ S(V))$$

(соотв. $K_{\mathbf{C}}(X) \xrightarrow{\approx} K_{\mathbf{C}}^V(X) \xrightarrow{t} K_{\mathbf{C}}(B(V),\ S(V))$*)*

индуцирована соответствием

$$[E] \mapsto d(\pi^*M(V)^0 \otimes E,\ \pi^*M(V)^1 \otimes E,\ \alpha \otimes 1),$$

где $M(V) = M(V)^0 \oplus M(V)^1$ — градуированный $C(V)$-модуль, определенный в 5.8, и $\alpha\colon \pi^*M(V)^0|_{S(V)} \to \pi^*M(V)^1|_{S(V)}$ — изоморфизм, который *над каждой точкой $v \in S(V)$ является умножением на число Клиффорда $v \in V \subset C(V)$.*

5.13. Элемент $d(\pi^* M(V)^0, \pi^* M(V)^1, \alpha)$ называется *классом Тома* $\mathrm{Spin}(8n)$-расслоения V (соотв. $\mathrm{Spin}^c(2n)$-расслоения V) и обозначается через T_V. Он принадлежит группе $K(B(V), S(V))$ (соотв. $K_{\mathbb{C}}(B(V), S(V))$). Явные формулы, приведенные в II.5.21, показывают, что композиция гомоморфизмов

$$K_{\mathbb{R}}(X) \to K_{\mathbb{R}}^V(X) \to K_{\mathbb{R}}(B(V), S(V))$$

(соотв. $K_{\mathbb{C}}(X) \to K_{\mathbb{C}}^V(X) \to K_{\mathbb{C}}(B(V), S(V))$)

представляет собой умножение на класс Тома. Если на расслоении V задана комплексная структура (и, значит, $\mathrm{Spin}^c(2n)$-структура), то из результатов пп. 1.6, 4.28, 5.8 и 5.12 следует, что с точностью до знака $(-1)^n$ класс Тома T_V совпадает с классом Тома U_V, введенным в 1.6 (см. соглашение о знаках, принятое в V.4.8). Из теоремы 1.9 вытекает, что в этом случае композиция

$$K_{\mathbb{C}}(X) \to K_{\mathbb{C}}^V(X) \to K_{\mathbb{C}}(B(V), S(V))$$

является изоморфизмом.

5.14. Теорема (изоморфизм Тома). *Пусть V является* $\mathrm{Spin}(8n)$-*расслоением (соотв.* $\mathrm{Spin}^c(2n)$-*расслоением) с компактной базой X. Тогда умножение на элемент $T_V \in K_{\mathbb{R}}(B(V), S(V))$ (соотв. $T_V \in K_{\mathbb{C}}(B(V), S(V))$) индуцирует изоморфизм $K_{\mathbb{C}}(X) \approx K_{\mathbb{C}}(B(V)), S(V))$. Более общим образом, $K_{\mathbb{R}}^*(V) \approx K_{\mathbb{R}}^*(B(V), S(V))$ (соотв. $K_{\mathbb{C}}^*(V) \approx K_{\mathbb{C}}^*(B(V), S(V))$) является свободным $K_{\mathbb{R}}^*(X)$-модулем (соотв. $K_{\mathbb{C}}^*(X)$-модулем), порожденным классом Тома T_V.*

Доказательство. Согласно теореме 1.3, достаточно доказать сформулированные утверждения лишь для тривиального расслоения V. В комплексном случае ($K = K_{\mathbb{C}}$) тривиальное расслоение V ранга $2n$ может быть наделено комплексной структурой и $T_V = (-1)^n U_V$ (5.13). Следовательно, в этом случае теорема верна. В вещественном случае ($K = K_{\mathbb{R}}$) класс Тома T_V равен $p^* u_{8n}$, где u_{8n} — класс Тома пространства $\mathbb{R}^{8n}$, рассматриваемого как расслоение над точкой P ($p\colon X \to P$). Если M — неприводимый $C^{0,8n}$-модуль, то $M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ является неприводимым $C^{0,8n} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$-модулем (III.3.22). Следовательно, комплексификация элемента T_V служит образующей группы $K_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{8n})$. Поскольку комплексификация

$$K_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{8n}) \to K_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{8n})$$

является изоморфизмом (III.5.19), то u_{8n} есть образующая группы $K_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{8n}) \approx Z$. Согласно 1.3, отсюда следует, что $K_{\mathbb{R}}^*(V)$ представляет собой свободный $K^*_{\mathbb{R}}(X)$-модуль, порожденный классом Тома T_V. $\square$

5.15. В качестве приложения предыдущей теоремы рассмотрим расслоение $V=\xi^*\oplus\ldots\oplus\xi^*$ (m раз), где ξ — каноническое линейное расслоение над RP_n. Пространство V можно отождествить с факторпространством $Q/\mathbb{R}^*$, где Q — множество точек $(x_0, \ldots, x_{n+m}) \in \mathbb{R}^{n+m+1}$, для которых $(x_0, \ldots, x_n) \neq (0, \ldots, 0)$. Следовательно, пространство Тома $\dot{V}$ гомеоморфно одноточечной компактификации пространства $RP_{n+m} \setminus RP_{m-1}$, т.е. пространству RP_{n+m}/RP_{m-1}. В частности, если $m \equiv 0 \bmod 8$ (соотв. $m \equiv 0 \bmod 2$), то $\tilde{K}_{\mathbb{R}}(RP_{n+m}/RP_{m-1}) \approx K_{\mathbb{R}}(RP_n)$ (соотв. $\tilde{K}_{\mathbb{C}}(RP_{n+m}/RP_{m-1}) \approx K_{\mathbb{C}}(RP_n)$), так как в силу 4.19 (соотв. 4.26) расслоение V обладает спинорной структурой (соотв. ^{c}spin-структурой).

5.16. Точно также как в 1.10, можно определить *гомоморфизм Тома*

$$K_{\mathbb{R}}(X) \to K_{\mathbb{R}}(V) \quad (\text{соотв. } K_{\mathbb{C}}(X) \to K_{\mathbb{C}}(V))$$

и в случае, когда пространство X не обязательно компактно, однако является локально-компактным. Действительно, если пространство X компактно, то элемент $\sigma(M(V), \Delta)$, где Δ_v — умножение на $v \in V$, принадлежит группе $K(V)$ и совпадает с классом Тома T_V по модулю изоморфизма между группами K и K_0, описанного в II.5.20. Следовательно, как и в 1.10, гомоморфизм Тома

$$K_{\mathbb{R}}(X) \to K_{\mathbb{R}}(V) \quad (\text{соотв } K_{\mathbb{C}}(X) \to K_{\mathbb{C}}(V))$$

определяется формулой

$$\sigma(E, D) \mapsto \sigma(\pi^*E \otimes M(V), \pi^*D \hat{\otimes} 1 + 1 \hat{\otimes} \Delta).$$

Оказывается, что эта формула остается корректной и для локально-компактного пространства X.

5.17. Теорема. *Пусть X — локально-компактное пространство и V — некоторое* $\mathrm{Spin}(8n)$*-расслоение (соотв.* $\mathrm{Spin}^c(2n)$*-расслоение). Тогда определенный выше гомоморфизм Тома*

$$K_{\mathbb{R}}(X) \to K_{\mathbb{R}}(V) \quad (\textit{соотв. } K_{\mathbb{C}}(X) \to K_{\mathbb{C}}(V))$$

является изоморфизмом.

Доказательство. Доказательство этого утверждения вполне аналогично доказательству теоремы 1.11. $\square$

5.18. Теорема. *Пусть X — компактное пространство, V и V' — спинорные расслоения (соотв.* ^{c}spin — *расслоения) ранга* $\equiv 0 \bmod 8$ *(соотв.* $\equiv 0 \bmod 2$*). Тогда в группе $K(V \boxplus V') = K(V \times V')$ выполняется равенство*

$$T_{V \boxplus V'} = T_V \cup V_{V'}.$$

В частности, $T_{V \oplus V'} = i^*(T_V \cup T_{V'})$, где $i\colon V \oplus V' \to V \times V'$ — каноническое вложение (I.6.1).

Доказательство. Мы рассмотрим только вещественный случай, так как комплексный случай разбирается совершенно аналогично. Если $\operatorname{rank}(V)=8n$ и $\operatorname{rank}(V')=8n'$, то $M(V)=P\times_{\mathrm{Spin}(8n)}M_{8n}$, где P — главное расслоение с группой $\mathrm{Spin}(8n)$, которая задает на V спинорную структуру. Тогда $T_V=\sigma(M(V), \Delta)$, где отображение Δ определяется так же, как в 5.16. Аналогично $T_{V'}=\sigma(M(V'), \Delta')$, где $M(V')=P'\times_{\mathrm{Spin}(8n')}M_{8n'}$. Легко видеть, что имеет место изоморфизм градуированных модулей $M(V)\,\hat{\boxplus}\,M(V')\approx P\times P'\times_{G_n\times G_{n'}}M_{8n}\hat{\otimes}M_{8n'}$, где $G_n=\mathrm{Spin}(8n)$ и $G_{n'}=\mathrm{Spin}(8n')$. Главное расслоение, ассоциированное с $V\boxplus V'$,— это расслоение $P\times P'\times_{G_n\times G_{n'}}G_{n+n'}$; кроме того, $M_{8n+8n'}=M_{8n}\hat{\otimes}M_{8n'}$. Следовательно, $M(V\boxplus V')\approx M(V)\,\hat{\boxtimes}\,M(V')$. Используя эти отождествления, мы получаем

$$\begin{aligned}T_V\cup T_{V'}=\sigma(M(V)\,\hat{\boxtimes}\,M(V'),\ \Delta\,\hat{\boxtimes}\,1+1\,\hat{\boxtimes}\,\Delta')\\ =\sigma(M(V\boxplus V'),\ \Delta''),\end{aligned}$$

где морфизм Δ'' задается над точкой $(v, v')\in V\times V'=V\boxplus V'$ формулой $\Delta''_{v,v'}=\Delta_v\hat{\otimes}1+1\hat{\otimes}\Delta_{v'}$ (ср. с III.3.10; заметим, что $C(V\boxplus V')\approx C(V)\,\hat{\boxtimes}\,C(V')$). $\square$

5.19. Теорема. *Пусть V и V' — спинорные расслоения (соотв. ^{c}spin-расслоения) ранга $\equiv 0 \bmod 8$ (соотв. $\equiv 0 \bmod 2$) с локально-компактной базой X. Тогда композиция гомоморфизмов Тома*

$$K(X)\xrightarrow{\beta}K(V)\xrightarrow{\beta'}K(V\oplus V'),$$

где $V\oplus V'$ рассматривается как расслоение на V, совпадает с гомоморфизмом Тома

$$K(X)\xrightarrow{\beta''}K(V\oplus V'),$$

ассоциированным с расслоением $V''=V\oplus V'$ (транзитивность гомоморфизмов Тома).

Доказательство. Так же как в теореме 5.18, отождествим $M(V)\hat{\otimes}M(V')$ с $M(V\oplus V')$ и $C(V\oplus V')$ с $C(V)\hat{\otimes}C(V')$. Если $\pi\colon V\to X$, $\pi'\colon V'\to X$ и $\pi''\colon V\oplus V'\to X$ — проекции расслоений, то мы имеем

$$\begin{aligned}&\beta(\sigma(E, D))=\sigma(\pi^*E\hat{\otimes}M(V),\ \pi^*D\hat{\otimes}1+1\hat{\otimes}\Delta),\\ &\beta'(\beta(\sigma(E, D)))=\sigma(\pi''^*E\hat{\otimes}M(V)\hat{\otimes}M(V'),\ D\hat{\otimes}1\hat{\otimes}1\\ &\qquad\qquad+1\hat{\otimes}\Delta\hat{\otimes}1+1\hat{\otimes}\Delta').\end{aligned}$$

Производя указанные выше отождествления, мы получаем, что

$$D''=\pi''^*D\hat{\otimes}1\hat{\otimes}1+1\hat{\otimes}\Delta\hat{\otimes}1+1\hat{\otimes}1\hat{\otimes}\Delta'$$

является допустимым эндоморфизмом, который связан с элементом $\sigma(E, D)$ при помощи изоморфизма Тома $K(X)\to K(V\oplus V')$, определяемого формулой

$$\sigma(E,\ D) \mapsto \sigma(\pi''^* E \mathbin{\hat{\otimes}} M(V \oplus V'),\ \pi''^* D \mathbin{\hat{\otimes}} 1 + 1 \mathbin{\hat{\otimes}} \Delta'')$$

(заметим, что $\Delta''_{v,\,v'} = \Delta_v \mathbin{\hat{\otimes}} 1 + 1 \mathbin{\hat{\otimes}} \Delta_{v'}$). □

5.20. Определение. Пусть X — компактное пространство и V есть $\mathrm{Spin}(8n)$-расслоение (соотв. $\mathrm{Spin}^c(2n)$-расслоение). Определим *эйлеров класс* $\chi(V)$ расслоения V как ограничение класса T_V на нулевое сечение i: $X \to V$

Если на расслоении V задана комплексная структура и, значит, канонически ассоциированная с ней структура $\mathrm{Spin}^c(2n)$-расслоения, то эйлеров класс $\chi(V)$ совпадает с эйлеровым классом, определенным в комплексной K-теории (1.13). Следовательно, $\chi(V) = \sum(-1)^i \lambda^i(V)$ (комплексные внешние степени). Кроме того, если f: $Y \to X$ — непрерывное отображение, то $\chi(f^*(V)) = f^*(\chi(V))$ (естественность).

Если W — еще одно $\mathrm{Spin}(8p)$-расслоение (соотв. $\mathrm{Spin}^c(2p)$-расслоение), то $V \oplus W$ естественным образом наделяется структурой $\mathrm{Spin}(8n+8p)$-расслоения (соотв. $\mathrm{Spin}^c(2n+2p)$-расслоения). В силу 5.18 мы имеем $T_{V \boxplus W} = T_V \cup T_W$). Следовательно, $\chi(V \oplus W) = \chi(V) \cdot \chi(W)$.

Наконец, пусть V является $\mathrm{Spin}^c(2n)$-расслоением и пусть $L(V)$ — ассоциированное с ним линейное расслоение (4.30). Тогда векторное расслоение $W = V \oplus V$ допускает комплексную структуру (I.4.8, e)). Согласно 5.9, мы имеем $T_{V \oplus V} = L(V)\, T_W$; следовательно,

$$(\chi(V))^2 = [L(V)]\left(\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \lambda^i(W)\right).$$

5.21. Рассмотрим теперь два таких локально-компактных многообразия X и Y, что $\dim(Y) - \dim(X) \equiv 0 \bmod 8$ (соотв. $\dim(Y) - \dim(X) \equiv 0 \bmod 2$ для $K = K_{\mathbf{C}}$). Предположим, что на многообразии X задана риманова метрика (см. Ленг [2]), и рассмотрим такое *собственное* вложение f: $X \to Y$, что нормальное расслоение к X в Y допускает спинорную структуру (соотв. ^{c}spin-структуру, если $K = K_{\mathbf{C}}$). Отождествим это нормальное расслоение с некоторой *трубчатой окрестностью* N многообразия X в Y (см. рис. 21), а также с расслоением $f^*(TY)/TX$.

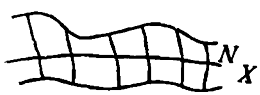


Рис. 21.

Например, если X и Y — комплексные многообразия, то нормальное расслоение N каноническим образом наделяется ^{c}spin-структурой (4.26). Для того чтобы согласовать наши обозначения с обозначениями Хирцебруха [2], мы будем считать, что ^{c}spin-структура на N задается с помощью комплексной структуры, *сопряженной* к канонической комплексной структуре на N,

Определим теперь *гомоморфизм Гизина*

$$f_*\colon K(X) \to K(Y)$$

как композицию изоморфизма Тома $K(X) \to K(N)$ (5.16) и гомоморфизма $K(N) \to K(Y)$, индуцированного морфизмом $Y \dashrightarrow N$ локально-компактных пространств (т. е. морфизмом $\dot{Y} \to \dot{N}$; см. II.4.1). Гомоморфизм Гизина не зависит от выбора трубчатой окрестности. Действительно, если N' — другая трубчатая окрестность, ассоциированная с тем же самым нормальным расслоением (с заданной спинорной или ^{c}spin-структурой), то можно найти такую трубчатую окрестность N'' произведения $X \times \mathbb{R}$ в $Y \times \mathbb{R}$, что $N''|_{X \times \{0\}} = N$ и $N''|_{X \times \{1\}} = N'$ (см. Ленг [2]). Так как K-функтор гомомотически инвариантен (II.1.25), то гомоморфизмы Гизина, соответствующие окрестностям N и N', совпадают. Аналогичным образом показывается, что гомоморфизм f_* зависит только от гомотопического класса отображения f (в пространстве всех собственных вложений многообразия X в Y).

Для того чтобы сформулировать очередное предложение, нам понадобится следующее определение. Пусть Z — произвольное локально-компактное пространство и $\mathscr{E}'(Z)$ — категория, рассмотренная в I.6.24. Два объекта E_0 и E_1 этой категории называются *гомотопными*, если существует объект E категории $\mathscr{E}'(Z \times I)$, ограничения которого на $Z \times \{0\}$ и $Z \times \{1\}$ изоморфны соответственно объектам E_0 и E_1. Множество гомотопических классов очевидным образом наделяется структурой абелева моноида. Обозначим через $\overline{K}(Z)$ абелеву группу, полученную симметризацией этого моноида. Тензорное произведение расслоений задает в $\overline{K}(Z)$ кольцевую структуру. Группа $K(Z) \approx K_0(Z)$ является модулем над этим кольцом. Если пространство Z компактно, то $K(Z)$ является свободным $\overline{K}(Z)$-модулем ранга 1.

5.22. Предложение. *Гомоморфизм Гизина*

$$f_*\colon K(X) \to K(Y),$$

определенный для любого собственного вложения $f\colon X \to Y$, удовлетворяющего перечисленным выше условиям, обладает следующими свойствами:

a) *Если $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$ — два таких собственных вложения, то $(g \cdot f)_* = g_* \cdot f_*$.*

b) *Для $x \in K(X)$ и $y \in \overline{K}(Y)$ имеет место формула*

$$f_*(x \cdot f^*(y)) = f_*(x) \cdot y.$$

c) *Если пространство X компактно, то*

$$f^*(f_*(x)) = x \cdot \chi(N),$$

где N — нормальное расслоение вложения f и $\chi(N)$ — его эйлеров класс (5.20).

Доказательство. Пусть N' — нормальное расслоение вложения $Y \to Z$ и $N_1' = N'|_X$. Тогда $(g \cdot f)_*$ представляет собой композицию

$$K(X) \to K(N \oplus N_1') \to K(Z).$$

С другой стороны, $g_* \cdot f_*$ есть композиция

$$K(X) \to K(N) \to K(Y) \to K(N') \to K(Z).$$

Так как изоморфизм Тома естествен в очевидном смысле, мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} K(X) \arrow[r] & K(N) \arrow[r] \arrow[d] & K(N \oplus N_1') \arrow[r] \arrow[d] & K(Z) \\ & K(Y) \arrow[r] & K(N') & \end{tikzcd}$$

Следовательно, гомоморфизм $g_* \cdot f_*$ совпадает с композицией

$$K(X) \to K(N) \to K(N \oplus N_1') \to K(Z),$$

которая, согласно 5.19, равна $(g \cdot f)_*$.

Для того чтобы доказать свойство b), покажем, что гомоморфизм $K(X) \to K(N)$ является гомоморфизмом $\overline{K}(N)$-модулей, а гомоморфизм $K(N) \xrightarrow{\alpha} K(Y)$ — гомоморфизмом $\overline{K}(Y)$-модулей. Поскольку X — деформационный ретракт пространства N, то любое векторное расслоение E над N имеет гомотопический тип $\pi^* F$, где $F = E|_X$ и π: $N \to X$. Следовательно, из определения вытекает, что отображение $K(X) \to K(N)$ является гомоморфизмом $\overline{K}(N)$-модулей тогда и только тогда, когда оно является гомоморфизмом $\overline{K}(X)$-модулей. Пусть теперь $[G]$ — некоторый элемент из $\overline{K}(Y)$ и $\sigma(H, D)$ — элемент из $K(N)$ (II.5.20). Без ограничения общности мы можем считать, что $H = H'|_N$ и $D = D'|_N$, где D' ациклично вне некоторого компактного подмножества в N. Согласно II.5.19, образ в группе $K(Y)$ элемента $\sigma(H, D)$ при гомоморфизме α есть элемент $\sigma(H', D')$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \alpha(\sigma(H, D) \cdot [G|_N]) &= \alpha(\sigma(H \otimes G_N, D \otimes 1)) \\ &= \sigma(H' \otimes G, D \otimes 1) = \alpha(\sigma(H, D)) \cdot [G]. \end{aligned}$$

Для доказательства свойства c) заметим, что для любого локально-компактного пространства T существует корректно определенный гомоморфизм

$$K(T) \to \overline{K}(T),$$

который в обозначениях II.5.15 задается формулой $\sigma(E, D) \mapsto [E_0] - [E_1]$. Кроме того, согласно II.5.15, мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} K(N) \arrow[r] \arrow[d] & K(Y) \arrow[d] \\ \overline{K}(N) & \overline{K}(Y) \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Следовательно, гомоморфизм $f^* \cdot f_*$ совпадает с композицией

$$K(X) \to K(N) \to \overline{K}(N) \to \overline{K}(X) \to K(X).$$

Поскольку эта композиция является гомоморфизмом $K(X)$-модулей и переводит 1 в $\chi(N)$ по определению эйлерова класса, то $f^*(f_*(x)) = \chi(N) \cdot x$. □

5.23. Пусть теперь $f\colon X \to Y$ — произвольное дифференцируемое *собственное* отображение (не обязательно вложение), такое что $\dim(Y) - \dim(X) \equiv 0 \bmod 8$ (соотв. $\dim(Y) - \dim(X) \equiv 0 \bmod 2$ для $K = K_{\mathbb{C}}$). Покажем, что при подходящих предположениях это отображение индуцирует гомоморфизм (снова обозначаемый через f_*) из группы $K(X)$ в группу $K(Y)$. Как и ранее, гомоморфизм f_* будет называться *гомоморфизмам Гизина.*

Пусть $\nu_f = [f^*(TY)] - [TX]$. Тогда $\nu_f + [T_n]$, где $T_n = X \times \mathbb{R}^n$, является классом некоторого расслоения E_n для достаточно большого n (так как многообразия X и Y вкладываются в эвклидово пространство, то расслоения TX и $f^*(TY)$ суть объекты категории $\mathscr{E}'(X)$, рассмотренной в I.6.24). Расслоение E_n определено однозначно с точностью до стабильной эквивалентности (т. е. по модулю прибавления тривиальных расслоений). Назовем *спинорной структурой* на ν_f спинорную структуру на E_n для достаточно большого n. Условимся отождествлять между собой две спинорные структуры на E_n, если они гомотопны на расслоении $E_n \oplus T_p$ для достаточно большого p.

Аналогичным образом на ν_f определяется ${}^c\mathrm{spin}$-*структура.*

В силу хорошо известной теоремы существует собственное вложение $i\colon X \to \mathbb{R}^m$ с $m \equiv 0 \bmod 8$ ($m \equiv 0 \bmod 2$, когда мы имеем дело с комплексной K-теорией). Отображение f можно представить в виде композиции вложения $j\colon X \to Y \times \mathbb{R}^m$ и проекции $Y \times \mathbb{R}^m \to Y$. Следовательно, $\nu_f + [T_m]$ есть класс расслоения $E_m = j^*(T(Y \times \mathbb{R}^m))/TX$ и спинорная структура (соотв. ^{c}spin-структура) на ν_f — это спинорная структура (соотв. ^{c}spin-структура) на E_m для некоторого достаточно большого числа m. Определим теперь *гомоморфизм Гизина*

$$f_*\colon K(X) \to K(Y)$$

как композицию гомоморфизма $j_*\colon K(X) \to K(Y \times \mathbb{R}^m)$, описанного в 5.21, и, изоморфизма периодичности $K(Y \times \mathbb{R}^m) \approx K(Y)$ (III.5.17).

5.24. Предложение. *Гомоморфизм Гизина*

$$f_*\colon K(X) \to K(Y)$$

не зависит от выбора собственного вложения j, а зависит лишь от гомотопического класса отображения f (в пространстве собственных дифференцируемых отображений). Гомоморфизм f_* обладает следую-

щими свойствами:

a) *Если* $f\colon X\to Y$ *и* $g\colon Y\to Z$ *— собственные дифференцируемые отображения, то* $(g\cdot f)_*=g_*\cdot f_*$.

b) *Для любых* $x\in K(X)$ *и* $y\in \widetilde{K}(Y)$

$$f_*(x\cdot f^*(y))=f_*(x)\cdot y$$

Доказательство. Покажем прежде всего, что гомоморфизм f_* не зависит от выбора вложения $X\to\mathbb{R}^m$. Если $X\to\mathbb{R}^p$ — еще одно вложение, то, согласно 5.22, а), мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & K(Y\times\mathbb{R}^m) \arrow[d, "\approx"] \arrow[dr, "\approx"] & \\
K(X) \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr, "f_*"'] & K(Y\times\mathbb{R}^{m+p}) \arrow[r, "\approx"] & K(Y) \\
 & K(Y\times\mathbb{R}^p) \arrow[u, "\approx"] \arrow[ur, "\approx"'] &
\end{tikzcd}$$

(заметим, что изоморфизм периодичности $K(Z)\approx K(Z\times\mathbb{R}^q)$ совпадает с гомоморфизмом r_*, где $r\colon Z\to Z\times\mathbb{R}^q$ — каноническое вложение и $q\equiv 0 \bmod 8$ или 2 в зависимости от того, какую K-теорию мы рассматриваем).

Если отображения f_0 и f_1 гомотопны, то соответствующие им вложения X в $Y\times\mathbb{R}^m$ для достаточно большого m также гомотопны. Следовательно, согласно 5.21, $(f_0)_*=(f_1)_*$.

Если $f\colon X\to Y$ и $g\colon Y\to Z$ — произвольные собственные дифференцируемые отображения, а $X\to\mathbb{R}^m$ и $Y\to\mathbb{R}^p$ — собственные вложения, то мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
K(X) \arrow[r, "f'_*"] \arrow[dr] & K(Y\times\mathbb{R}^m) \arrow[r, "g'_*"] \arrow[d, "\approx"] & K(Z\times\mathbb{R}^{m+p}) \arrow[d, "\approx"] \\
 & K(Y) \arrow[r] \arrow[dr, "g_*"'] & K(Z\times\mathbb{R}^p) \arrow[d, "\approx"] \\
 & & K(Z)
\end{tikzcd}$$

Так как $(g'\cdot f')_*=g'_*\cdot f'_*$, то из этой диаграммы следует равенство $(g\cdot f)_*=g_*\cdot f_*$.

Наконец, формула $f_*(x\cdot f^*(y))=f_*(x)\cdot y$ доказывается точно так же, как соответствующая формула в предложении 5.22. Нужно только заметить, что изоморфизм $K(X)\approx K(X\times\mathbb{R}^m)$ является изоморфизмом $\widetilde{K}(X)$-модулей. $\square$

5.25. Пример. Пусть X — компактное дифференцируемое многообразие размерности $m\equiv 0 \bmod 8$ (соотв. $\equiv 0 \bmod 2$). Предположим, что нормальное расслоение на X, соответствующее некоторому вложению, снабжено спинорной структурой (соотв. ^{c}spin-структурой).

Если взять в качестве пространства Y точку P, то получим гомоморфизм

$$K(X) \to K(Y) \approx \mathbb{Z}.$$

Образ класса $[TX]$ (или $[TX \otimes \mathbb{C}]$, если $K = K_{\mathbb{C}}$) в группе $\mathbb{Z}$ представляет собой важный инвариант многообразия X. Он будет вычислен в следующей главе (§ V.4).

5.26. Замечание. Можно доказать, что существует взаимно-однозначное соответствие между спинорными структурами (соотв. ^{c}spin-структурами) на расслоении ν_f, где f: $X \to$ *точка*, и стабильными спинорными структурами (соотв. ^{c}spin-структурами) на расслоении TX.

5.27. Отметим наконец, что гомоморфизм f_*: $K(X) \to K(Y)$ можно определить для любого собственного *непрерывного* отображения f: $X \to Y$, такого что расслоение ν_f допускает спинорную структуру (соотв. ^{c}spin-структуру) и $\operatorname{rank}(\nu_f) \equiv 0 \bmod 8$ (соотв. $\equiv 0 \bmod 2$). Действительно, отображение f гомотопно в классе собственных непрерывных отображений некоторому собственному дифференцируемому отображению f'. Поэтому можно положить $f_* = f'_*$. Гомоморфизм f_* корректно определен этой формулой, поскольку любые два таких дифференцируемых собственных отображения f'_0 и f'_1 гомотопны в классе собственных дифференцируемых отображений. Предложение 5.24 остается справедливым и в непрерывном случае.

6. Вещественная и комплексная K-теории вещественных проективных пространств и вещественных проективных расслоений

6.1. В этом параграфе мы вычислим группу K для пространства $P(V)$, где V — вещественное векторное расслоение с компактной базой X. Кроме того, мы вычислим группу $K P((V), P(W) \cup P(V)|_Y)$, где W — подрасслоение V и Y — замкнутое подпространство в X.

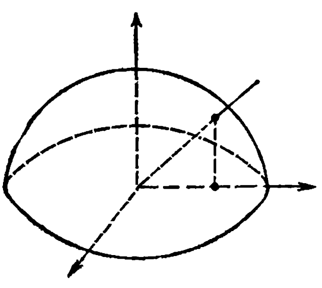


Рис. 22.

В случае когда $V = W \oplus 1$, эта группа изоморфна группе $K(W|_{X \setminus Y})$, так как $P(W \oplus 1) \setminus P(W) \cup P(W \oplus 1)|_Y$ гомеоморфно пространству $W|_{X\setminus Y}$ (рис. 22). Например, если W является $\mathrm{Spin}(8n)$-расслоением (или $\mathrm{Spin}^c(2n)$-расслоением, для $K = K_{\mathbb{C}}$), то мы имеем $K(P(W \oplus 1), P(W) \cup P(W \oplus 1)_Y) \approx K(W|_{X\setminus Y}) \approx K(X \setminus Y)$ (5.14). Отсюда следует, что вычисления настоящего параграфа обобщают в некотором смысле вычисления § 5.

Для того чтобы начать эти вычисления (см. 6.34), нам понадобятся различные технические определения и леммы о группе Гротендика функтора „ограничения скаляров“

$$\mathscr{E}^V(X) \to \mathscr{E}^W(X).$$

Здесь предполагается, что на расслоении V задана невырожденная квадратичная форма (4.11), которая индуцирует на подрасслоении W также невырожденную квадратичную форму.

6.2. Лемма. *Пусть E и F — объекты категории $\mathscr{E}^V(X)$ и α: $E|_Y \to F|_Y$ — морфизм $C(V|_Y)$-модулей, где Y — замкнутое подпространство X. Тогда существует такой морфизм β: $E \to F$, что $\beta|_Y = \alpha$. В частности, если α — изоморфизм, то β является изоморфизмом в некоторой окрестности подпространства Y.*

Доказательство. Используя, как обычно, разбиение единицы (см. I.5.7), можно считать, что E, F и V — тривиальные расслоения. Итак, $E = X \times k^n$, $F = X \times k^p$ и $V = X \times \mathbb{R}^r$ ($k = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ в зависимости от того, какая из K-теорий рассматривается). Пусть e_i, $i = 1, \ldots, r$, — образующие алгебры Клиффорда пространства $\mathbb{R}^r$ (III.3.13). Пусть, далее, G — конечная группа порядка 2^{r+1}, мультипликативно порожденная образующими $\pm e_i$; каждый элемент этой группы представляется в виде $\pm e_{i_1} \ldots e_{i_s}$, где $i_1 < i_2 < \ldots < i_s$. Обозначим через β': $E \to F$ морфизм векторных расслоений (не обязательно согласованный с модульной структурой), удовлетворяющий условию $\beta'|_Y = \alpha$ (I.5.7), и определим морфизм β: $E \to F$, полагая

$$\beta(e) = \frac{1}{2^{r+1}} \sum_{g \in G} g^{-1}\beta'(ge).$$

Тогда $\beta(he) = h\beta(e)$ для любого элемента h из G. По линейности получаем, что равенство $\beta(\lambda e) = \lambda\beta(e)$ выполняется для любого элемента λ алгебры Клиффорда (III.3.13). $\square$.

6.3. Лемма. *Пусть π: $X \times I \to X$ и E — векторное расслоение на $X \times I$, снабженное структурой $C(\pi^*V)$-модуля. Тогда E изоморфно расслоению π^*F, где $F = E|_{X \times \{0\}}$.*

Доказательство. С учетом леммы 6.2 доказательство полностью аналогично доказательству теоремы I.7.3. $\square$

6.4. Лемма. *Пусть E — векторное расслоение на замкнутом подпространстве Y пространства X, снабженное структурой $C(V_Y)$-модуля. Тогда существуют замкнутая окрестность Z подпространства Y и $C(V_Z)$-модуль F, такие что $F|_Y = E$.*

Доказательство. Для любой точки $y \in Y$ существуют такая окрестность U_y этой точки в пространстве X и такое векторное расслоение F_{U_y} с базой U_y, что $F_{U_y}|_{U_y \cap Y} = E|_{U_y \cap Y}$. Поскольку пространство Y компактно, найдутся такие замкнутые подмножества U_i, $i = 1, \ldots, n$, что $Y \subset \bigcup U_i$, и такие векторные расслоения E_i

на U_i, что $E_i|_{U_i \cap Y} = E|_{U_i \cap Y}$. При этом E_i обладает структурой $C(V_i)$-модуля, где $V_i = V|_{U_i}$.

Так как $E_1|_{U_1 \cap U_2 \cap Y} = E_2|_{U_1 \cap U_2 \cap Y}$, то в U_1 существует замкнутое подмножество U_1', которое является окрестностью $U_1 \cap Y$ в U_1. Имеет место изоморфизм g_{21}: $E_1|_{U_1' \cap U_2} = E_2|_{U_1' \cap U_2}$. Пусть E_2'—векторное расслоение, полученное склеиванием расслоений $E_1|_{U_1'}$ и E_2 с помощью этого изоморфизма (I.3.2). Тогда E_2' является $C(V_2')$-модулем, где $V_2' = V|_{U_1' \cup U_2}$ и $E_2'|_{(U_1' \cup U_2) \cap Y} \approx E|_{(U_1' \cap U_2) \cap Y}$. Полагая $U_2' = U_1' \cup U_2$, $U_3' = U_3$, ..., $U_n' = U_n$, повторим только что проделанное построение для U_2' и U_2', и т. д. В результате мы получим требуемую окрестность Z и требуемое векторное расслоение F. □

6.5. Лемма (двойное продолжение структур). *Пусть E — векторное расслоение на X, снабженное структурой $C(W)$-модуля, и v — структура $C(V_Y)$-модуля на E_Y, согласованная со структурой $C(W_Y)$-модуля. Тогда существуют замкнутая окрестность Z подпространства Y и структура $C(V_Z)$-модуля $\tilde{v}$ на E_Z, согласованная со структурой $C(W_Z)$-модуля, такие, что $\tilde{v}|_Y = v$.*

Доказательство. Согласно лемме 6.4, существуют замкнутая окрестность Z подпространства Y и векторное расслоение F на Z, снабженное структурой $C(V_Z)$-модуля, такие что $F|_Y = E$. Если окрестность Z достаточно мала, то, в силу 6.2, $F|_Z$ и $E|_Z$ изоморфны как $C(W)$-модули. □

6.6. Лемма. *Пусть E — некоторый $C(V)$-модуль. Тогда E является прямым слагаемым $C(V)$-модуля вида $C(V) \otimes F$, где F — тривиальное векторное расслоение (структура $C(V)$-модуля на $C(V) \otimes F$ индуцирована с сомножителя $C(V)$).*

Доказательство. Эта лемма является по существу локальной, так как любой $C^{p,q}$-модуль есть прямое слагаемое некоторого тривиального $C^{p,q}$-модуля (III.4.8). Используя разбиение единицы, мы получим таким образом, что E есть прямое слагаемое $C(V) \otimes F$. □

6.7. Лемма. *Пусть E — векторное расслоение на X, снабженное структурой $C(V)$-модуля, и $\alpha(t)$: $E|_Y \to E|_Y$, $t \in [0, 1]$,— такое непрерывное семейство автоморфизмов расслоения $E|_Y$, что $\alpha(0) = 1$. Тогда существует такое непрерывное семейство $\beta(t)$ автоморфизмов расслоения E, что $\beta(t)|_Y = \alpha(t)$.*

Доказательство. С учетом леммы 6.2 доказательство полностью аналогично доказательству предложения II.2.24. □

6.8. Лемма. *Пусть E — векторное расслоение на X, снабженное структурой $C(V)$-модуля, которую мы обозначим через v (таким образом, v представляет собой морфизм $V \to \mathrm{END}(E)$ со свойствами, описанными в 4.11). Пусть Y — замкнутое подпространство в X и $v'(t)$ — непрерывное семейство $C(V')$-модульных структур на $E' = E|_Y$, где $V' = V|_Y$ и $v'(0) = v|_Y$. Тогда на E существует такое непрерывное семейство $v(t)$ $C(V)$-модульных структур, что $v(t)|_Y = v'(t)$ и $v(0) = v$. Кроме того, если $v'(t)|_W = v'(0)|_W$, где W —*

подрасслоение V, то семейство $v(t)$ можно выбрать так, чтобы $v(t)|_W = v(0)|_W$.

Доказательство. Для простоты мы будем обозначать ограничения расслоений V, W и т. д на подпространство, а также прообразы этих расслоений относительно непрерывных отображений $T \to X$ теми же символами V, W и т. д.

Существование v и $v'(t)$ эквивалентно существованию структуры $C(V)$-модуля на расслоении $\pi^* E|_{X\times\{0\}\cup Y\times I}$, где π: $X\times I \to X$. Согласно лемме 6.5, для некоторой окрестности U подпространства Y в X существует структура $C(V)$-модуля на $\pi^* E|_{X\times\{0\}\cup U\times I}$, которая продолжает структуру $C(V)$-модуля на $\pi^* E|_{X\times\{0\}\cup Y\times I}$ и для которой $\tilde{v}|_W = \pi^* v|_W$. Пусть теперь η: $X \to [0, 1]$ — непрерывная функция, равная 1 на Y и 0 вне U. Обозначим через θ непрерывное отображение θ: $X\times I \to X\times\{0\}\cup U\times I$, задаваемое формулой $(x, t) \mapsto (x, \eta(x)t)$. Тогда $\theta(x, t) = (x, t)$ для $(x, t) \in X\times\{0\}\cup Y\times I$. Следовательно, $\theta^*\tilde{v}$ является требуемым продолжением. □

6.9. Определение. Пусть V — вещественное векторное расслоение с заданной невырожденной квадратичной формой и W — его подрасслоение. Предположим, что квадратичная форма на W, индуцированная квадратичной формой объемлющего расслоения V, также невырожденна. Через $K^{V, W}(X)$ мы обозначим группу Гротендика функтора ограничения скаляров (см. II.2.13)

$$\mathcal{E}^V(X) \to \mathcal{E}^W(X).$$

Если $V = W \oplus 1$, то $K^{V, W}(X)$ совпадает с группой $K^V(X)$, определенной в 5.1. Подобно $K^V(X)$, группа $K^{V, W}(X)$ может быть описана следующим образом. Обозначим через $\mathcal{T}^{V, W}(X)$ множество троек вида (E, v_1, v_2), где E — некоторый $C(W)$-модуль, а v_i — две $C(V)$-модульные структуры, продолжающие данную структуру $C(W)$-модуля (заметим снова, что $C(W) \subset C(V)$). Назовем такую тройку *элементарной*, если v_1 и v_2 гомотопны, причем эта гомотопия постоянна на W. Тогда группа $K^{V, W}(X)$ есть фактормножество $\mathcal{T}^{V, W}(X)$ по отношению эквивалентности, порожденому суммированием элементарных троек (см. III.4.16—22, вместе с 6.3). Аналогичным образом определяется относительная группа $K^{V, W}(X, Y)$, где подпространство Y замкнуто в X (см. III.5.1). Отметим, что $K^W(X, Y) \approx K^{W\oplus 1, W}(X, Y)$ и что группа $K^{V, W}(X, Y)$ обладает теми же формальными свойствами, что и описанная в §§ III.4 и III.5 группа $K^{p, q}(X, Y)$.

6.10. Предложение. *Пусть X_1 и X_2 — такие замкнутые подпространства в X, что $X_1 \cup X_2 = X$. Тогда естественный гомоморфизм*

$$g\colon K^{V, W}(X_1 \cup X_2, X_1) \to K^{V, W}(X_2, X_1 \cap X_2)$$

является изоморфизмом.

Доказательство. а) *Эпиморфность.* Пусть $d(E, v_1, v_2)$ — некоторый элемент из $K^{V, W}(X_2, X_1 \cap X_2)$. В силу леммы 6.6 мы можем считать, что (E, v_1) является $C(V)$-модулем вида $C(V)\otimes F$, где F — тривиальное расслоение Следовательно, (E, v_1) есть ограничение на X_2 некоторого $C(V)$ — модуля на X (обозначаемого через $(E, \tilde{v}_1)$). Пусть $\tilde{v}_2$ — структура $C(V)$-модуля на E над X, которая совпадает на X_1 с $\tilde{v}_1$ и на X_2 с $\tilde{v}_2$ (1.3.1). Тогда $g(d(E, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2))=d(E, v_1, v_2)$.

b) *Мономорфность.* Пусть $d(E, v_1, v_2)$ — элемент из $K^{V, W}(X_1\cup X_2, X_1)$, ограничение которого на $(X_2, X_1\cap X_2)$ равно нулю. Прибавляя, если надо, элементарную тройку, мы можем считать, что $v_1|_{X_2}$ и $v_2|_{X_2}$ гомотопны, причем связывающая их гомотопия постоянна на $X_1\cap X_2$ (см. III.4.20). Пусть $v'(t)$ — такая гомотопия и $v(t)$ — такое непрерывное семейство $C(V)$-модульных структур на E над X, что $v(t)|_{X_2}=v'(t)$, $v(t)|_{X_1}=v_1|_{X_1}$ и $v(t)|_W=v_1|_W$ (лемма 6.8). Тогда $d(E, v_1, v_2)=d(E, v(1), v_2)=0$, поскольку $v(1)|_{X_2}=v_2|_{X_2}$ и $v(1)|_{X_1}=v_2|_{X_1}$ □

6.11. Предложение. *Пусть Y — замкнутое подпространство в X и*

$$K_n^{V, W}(X, Y)=K^{V, W}(X\times B^n, X\times S^{n-1}\cup Y\times B^n).$$

Тогда в обозначениях 6.10 естественный гомоморфизм

$$K_n^{V, W}(X_1\cup X_2, X_1)\to K_n^{V, W}(X_2, X_1\cap X_2)$$

является изоморфизмом.

Доказательство. Это немедленно следует из предложения 6.10, примененного к пространству $X\times B^n=Y_1\cup Y_2$, где $Y_1=X_1\times B^n$, $Y_2=X_2\times B^n\cup(X_1\cup X_2)\times S^{n-1}$. □

6.12. Для любой тройки (X, Y, Z), где Z замкнуто в Y, а Y замкнуто в компактном пространстве X, определим *связывающий гомоморфизм*

$$\partial\colon K_1^{V, W}(Y, Z)\to K^{V, W}(X, Y).$$

С этой целью рассмотрим тройку (E, v_1, v_2), где E является $C(W)$-модулем над $Y\times B^1$, а v_1 и v_2 — две $C(V)$-модульные структуры на E, продолжающие исходную $C(W)$-модульную структуру и такие, что $v_1|_{Y\times S^0\cup Z\times B^1}=v_2|_{Y\times S^0\cup Z\times B^1}$. Тройка $(E, v_1 v_2)$ называется *нормализованной*, если E имеет вид $C(V)\otimes F$, где F — тривиальное векторное расслоение, а v_1 — структура $C(V)$-модуля на $C(V)\otimes F$, индуцированная с сомножителя $C(V)$. Определим элемент $\delta(F, v_2)$, или $\delta(F, v_2(t))$, как класс тройки (E, v_1, v_2) в группе $K_1^{V, W}(X, Y)$.

6.13. Лемма. *Каждый элемент группы $K_1^{V, W}(Y, Z)$ может быть записан в виде $\delta(F, v_2)$. Равенство $\delta(F, v_2)=\delta(F, v_2')$ имеет место тогда и только тогда, когда существует такое тривиальное расслоение G, что $v_2\oplus\bar{v}_1$ гомотопно $v_2'\oplus\bar{v}_1$ (где $\bar{v}_1$ обозначает структуру $C(V)$-модуля на $C(V)\otimes G$, индуцированную с сомножителя $C(V)$), причем данная гомотопия постоянна над $Y\times S^0\cup Z\times B^1$.*

Доказательство. Эта лемма является непосредственным следствием леммы 6.6. □

6.14. Пусть $\delta(F, v_2(t))$ — некоторый элемент группы $K_1^{V, W}(Y, Z)$. Согласно лемме 6.8, существует такое непрерывное семейство $\tilde{v}_2(t)$ $C(V)$-модульных структур на $C(V)\otimes F$ над X, что $\tilde{v}_2(t)|_Y = v_2(t)$, $\tilde{v}_2(0) = v_1$ и $\tilde{v}_2(t)|_W = \tilde{v}_2(0)|_W = v_1|_W$. Положим

$$\partial(\delta(F, v_2(t))) = d(C(V)\otimes F, v_1, \tilde{v}_2(1)) \in K^{V, W}(X, Y).$$

Это определение не зависит от выбора семейства $v_2(t)$ и от его продолжения на X. Действительно, пусть $v_2'(t)$ — другое семейство и $\tilde{v}_2'(t)$ — другое продолжение. Докажем, что в группе $K^{V, W}(X, Y)$ выполняется равенство

$$d(C(V)\otimes F, v_1, \tilde{v}_2(1)) = d(C(V)\otimes F, v_1, \tilde{v}_2'(1)).$$

По лемме 6.13 (после добавления элементарной тройки) существует такое непрерывное семейство $v_2(t, u)$, $t\in[0, 1]$, $u\in[0, 1]$, структур $C(V)$-модулей на $C(V)\otimes F$ над Y, что $v_2(t,u) = v_1$ над $Y\times S^0\cup Z\times B^1$, $v_2(t, u)|_W = v_1$, $v_2(t) = v_2(t, 0)$ и $v_2'(t) = v_2(t, 1)$. Пусть K — квадрат $[0, 1]\times[0, 1]$ и L — его замкнутое подмножество, представляющее собой объединение $[0, 1]\times\{0\}$, $[0, 1]\times\{1\}$ и $\{0\}\times[0, 1]$ (рис. 23). Тогда K гомеоморфен произведению $L\times[0, 1]$, где $L\times\{0\}$ отождествляется с L. Следовательно, по лемме 6.8, на E над X существует такое непрерывное семейство $\tilde{v}_2(t, u)$ структур $C(V)$-модулей, что $\tilde{v}_2(t, u)|_W = v_1$, $\tilde{v}_2(t, 0) = \tilde{v}_2(t)$, $\tilde{v}_2(t, 1) = \tilde{v}_2'(t)$, $\tilde{v}_2(t, u)|_Y = v_2(t, u)$. Поэтому отображение $u \longmapsto \tilde{v}_2(1, u)$ задает гомотопию между $\tilde{v}_2(1)$ и $\tilde{v}_2'(1)$ (которая постоянна над Y).

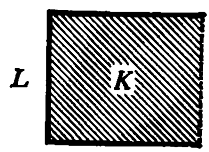


Рис. 23.

6.15. Теорема. *Пусть X, Y, Z — такие компактные пространства, что $Z\subset Y\subset X$. Тогда последовательность*

$$K_1^{V, W}(X, Z) \xrightarrow{\beta_1} K_1^{V, W}(Y, Z) \xrightarrow{\partial} K^{V, W}(X, Y) \xrightarrow{\alpha} K^{V, W}(X, Z) \xrightarrow{\beta} K^{V, W}(Y, Z)$$

точна.

Доказательство. а) *Точность в члене* $K^{V, W}(X, Z)$. Пусть $d(E, v_1, v_2)$ — некоторый элемент из $K^{V, W}(X, Y)$. Тогда $(\beta\alpha)(d(E, v_1, v_2)) = d(E, v_1|_Y, v_2|_Y) = 0$, поскольку $v_1|_Y = v_2|_Y$.

Обратно, пусть $d(E, v_1, v_2)$ — такой элемент из $K^{V, W}(X, Z)$, что $d(E, v_1|_Y, v_2|_Y) = 0$. Добавляя элементарную тройку вида $(C(V)\otimes F, \zeta, \zeta)$, где ζ — каноническая $C(V)$-модульная структура на $C(V)\otimes F$ и F тривиально, мы можем считать, что $v_1|_Y$ и $v_2|_Y$ гомотопны. Более точно, пусть $v(t)$ — такое непрерывное семейство $C(V)$-модульных структур на $E|_Y$, что $v(0) = v_1|_Y$, $v(1) = v_2|_Y$, $v(t)_Z = v_1|_Z$ и $v(t)|_W = v_1|_W$. Согласно лемме 6.8, на E над X существует такое непрерывное семейство $\tilde{v}(t)$ $C(V)$-модульных структур, что $\tilde{v}(t)|_Y = v(t)$ и $\tilde{v}(0) = v_1$. Следовательно, $d(E, v_1, v_2) = d(E, \tilde{v}(0), v_2) = d(E,$

$\tilde{v}(1)$, v_2). Элемент $d(E, \tilde{v}(1), v_2)$ принадлежит образу α, поскольку $\tilde{v}(1)|_Y = v_2|_Y$.

b) *Точность в члене* $K^{V, W}(X, Y)$. Пусть $x = \delta(E, v_2(t)) = d(C(V) \otimes F, v_1, v_2(t))$ — элемент группы $K_1^{V, W}(Y, Z)$. В обозначениях п. 6.14 имеем $(\alpha\partial)(x) = d(E, v_1|_Y, \tilde{v}_2(1)|_Y = 0$, так как $v_1|_Y = \tilde{v}_2(1)|_Y$.

Обратно, пусть $d(E, v_1, v_2)$, где $(E, v_1) = C(V) \otimes F$, — такой элемент из $K^{V, W}(X, Y)$, что $\alpha(d(E, v_1, v_2)) = 0$. Прибавляя элементарную тройку вида $(C(V) \otimes G, \zeta, \zeta)$, мы можем считать, что v_1 и v_2 гомотопны (причем гомотопия постоянна над Z). Обозначая эту гомотопию через $v_2(t)$, мы получаем $d(E, v_1, v_2) = \partial(\delta(F, v_2(t)))$.

c) *Точность в члене* $K_1^{V, W}(Y, Z)$. Пусть $x = \delta(F, v_2(t))$ — некоторый элемент из $K_1^{V, W}(Y, Z)$. Тогда

$$(\alpha\partial)(x) = d(C(V) \otimes F, v_1, v_2(1)) = 0,$$

поскольку $v_2(1) = v_1$.

Обратно, пусть $\delta(F, v_2(t))$ — такой элемент из $K_1^{V, W}(Y, Z)$, что

$$d(C(V) \otimes F, v_1, \tilde{v}_2(1)) = 0.$$

Как и ранее, прибавляя элементарную тройку вида $C(V) \otimes G$, мы можем считать, что эта гомотопия постоянна над Y. Если мы обозначим „композицию“ $v_2(t)$ с этой гомотопией через $v(t)$, то получим $\delta(F, v_2(t)) = \delta(F, v(t)|_Y) = \beta_1(\delta(F, v(t)))$. □

6.16. Следствие. *Пусть X, Y и Z — такие компактные пространства, что $Z \subset Y \subset X$. Тогда для $n \geqslant 0$ имеет место точная последовательность*

$$K_{n+1}^{V, W}(X, Z) \to K_{n+1}^{V, W}(Y, Z) \to K_n^{V, W}(X, Y) \to K_n^{V, W}(X, Z) \to K_n^{V, W}(Y, Z),$$

где $K_0^{V, W} = K^{V, W}$.

Доказательство. Рассмотрим тройку $(X \times B^n, X \times S^{n-1} \cup Y \times B^n, X \times S^{n-1} \cup Z \times B^n)$. Применяя предложение 6.11 к пространствам $X_1 = X \times S^{n-1} \cup Z \times B^n$ и $X_2 = Y \times B^n$, получаем $K_i(X \times S^{n-1} \cup Y \times B^n, X \times S^{n-1} \cup Z \times B^n) \approx K_i(Y \times B^n, Y \times S^{n-1} \cup Z \times B^n)$. □

6.17. Теорема. *Пусть (X, Y) — пара компактных пространств, X_1 и X_2 — замкнутые подпространства X. Положим $Y_i = Y \cap X_i$. Тогда имеет место* т о ч н а я п о с л е д о в а т е л ь н о с т ь М а й е р а — В ь е т о р и с а

$$K_{n+1}^{V, W}(X_1, \tilde{Y}_1) \oplus K_{n+1}^{V, W}(X_2, \tilde{Y}_2) \to K_{n+1}^{V, W}(X_1 \cap X_2, \tilde{Y}_1 \cap \tilde{Y}_2)$$
$$\to K_n^{V, W}(X_1 \cup X_2, \tilde{Y}_1 \cup \tilde{Y}_2) \to K_n^{V, W}(X_1, \tilde{Y}_1) \oplus K_n^{V, W}(X_2, \tilde{Y}_2)$$
$$\to K_n^{V, W}(X_1 \cap X_2, \tilde{Y}_1 \cap \tilde{Y}_2).$$

Здесь $\tilde{Y}_1 = Y_1 \cup (X_1 \cap Y_2)$, $\tilde{Y}_2 = Y_2 \cup (X_2 \cap Y_1)$, $\tilde{Y}_1 \cup \tilde{Y}_2 = Y_1 \cup Y_2$, $\tilde{Y}_1 \cap \tilde{Y}_2 = (Y_1 \cap X_2) \cup (X_1 \cap Y_2)$.

Доказательство. Рассмотрим тройку $(X_1 \cup X_2,\ X_1 \cup Y_2,\ Y_1 \cup Y_2)$. Полагая

$$G_n = K_n^{V,W}(X_1 \cup X_2,\ X_1 \cup Y_2),$$
$$H_n = K_n^{V,W}(X_1 \cup X_2,\ Y_1 \cup Y_2),$$
$$L_n = K_n^{V,W}(X_1 \cup Y_2,\ Y_1 \cup Y_2),$$

мы получаем точную последовательность

$$H_{n+1} \to L_{n+1} \to G_n \to H_n \to L_n.$$

Кроме того, согласно предложению 6.11, $G_n \approx K_n^{V,W}(X_2, (X_1 \cap X_2) \cup Y_2)$ и $L_n \approx K_n^{V,W}(X_1, \tilde{Y}_1)$.

Точно так же рассмотрим тройку $(X_2, (X_1 \cap X_2) \cup Y_2, \tilde{Y}_2)$. Как только что было отмечено, $K_n^{V,W}(X_2, (X_1 \cap X_2) \cup Y_2) \approx G_n$. Поэтому, если мы положим $L'_n = K_n^{V,W}(X_2, \tilde{Y}_2)$ и $P_n = K_n^{V,W}((X_1 \cap X_2) \cup Y_2, \tilde{Y}_2) \approx K_n^{V,W}(X_1 \cap X_2,\ X_1 \cap Y_2 \cup X_2 \cap Y_1)$, то получим точную последовательность

$$L'_{n+1} \to P_{n+1} \to G_n \to L'_n \to P_n$$

и коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc}
H_{n+1} & \longrightarrow & L_{n+1} & \longrightarrow & G_n & \longrightarrow & H_n & \longrightarrow & L_n \\
\downarrow & & \downarrow & & \| & & \downarrow & & \downarrow \\
L'_{n+1} & \longrightarrow & P_{n+1} & \longrightarrow & G_n & \longrightarrow & L'_n & \longrightarrow & P_n
\end{array}$$

Из нее элементарным диаграммным поиском получаем точную последовательность

$$L_{n+1} \oplus L'_{n+1} \to P_{n+1} \to H_n \to L_n \oplus L'_n,\quad n \geqslant 0.$$

Нам осталось лишь проверить точность последовательности

$$H_0 \to L_0 \oplus L'_0 \to P_0,$$

т. е. последовательности

$$K^{V,W}(X_1 \cup X_2,\ \tilde{Y}_1 \cup \tilde{Y}_2) \xrightarrow{l} K^{V,W}(X_1, \tilde{Y}_1) \oplus K^{V,W}(X_2, \tilde{Y}_2) \xrightarrow{h} K^{V,W}(X_1 \cap X_2,\ \tilde{Y}_1 \cap \tilde{Y}_2).$$

Пусть $x_1 = d(E_1, v_1, v'_1)$ и $x_2 = d(E_2, v_2, v'_2)$ — такие элементы групп $K^{V,W}(X_1, \tilde{Y}_1)$ и $K^{V,W}(X_2, \tilde{Y}_2)$ соответственно, что $h(x_1, x_2) = 0$. Без ограничения общности мы можем считать, что v_1 и v_2 являются ограничениями на X_1 и X_2 $C(V)$-модульной структуры v вида $E = C(V) \otimes F$, где F — тривиальное расслоение, и что v_1 и v_2 суть $C(V)$-модульные структуры на E_1 и E_2, индуцированные с сомножителя $C(V)$. Кроме того, мы можем предположить, что $v'_1|_{X_1 \cap X_2}$ и $v'_2|_{X_1 \cap X_2}$ связаны гомотопией $v(t)$, для которой $v(t)|_W = v_2|_W = v_1|_W$ и $v(t)|_{\tilde{Y}_1 \cap \tilde{Y}_2} = v(0)|_{\tilde{Y}_1 \cap \tilde{Y}_2}$. По лемме 6.8. существует такое непрерывное семейство $\tilde{v}(t)$ $C(V)$-модульных структур на $E|_{X_1}$, что $\tilde{v}(t)|_W = v|_W$, $\tilde{v}(0) = v_1'$, $\tilde{v}(t)|_{X_1 \cap X_2} = v(t)$ и $v(t)|_{\tilde{Y}_1} = v|_{\tilde{Y}_1}$. Тогда $(x_1, x_2) = l(x)$, где $x = d(C(V) \oplus F, v, v')$, $v'|_{X_1} = \tilde{v}(1)$ и $v'|_{X_2} = v_2'$. $\square$

6.18. В качестве приложения точной последовательности Майера — Вьеториса рассмотрим отображение $f\colon (X, Y) \to (X', Y')$ компактных пар, индуцирующее гомеоморфизм $X \setminus Y \approx X' \setminus Y'$. Если V' — векторное расслоение на X' с заданной невырожденной квадратичной формой и W' — подрасслоение V' с невырожденной индуцированной квадратичной формой, то мы имеем гомоморфизм

$$K_n^{V', W'}(X', Y') \to K_n^{f^*V', f^*W'}(X, Y).$$

Покажем, что этот гомоморфизм является изоморфизмом. Так как $X'/Y' \approx X/Y$, то рассуждения, аналогичные использованным в III.5.3, показывают, что это изоморфизм в случае, когда расслоения V' и W' тривиальны. Пусть теперь (X_i') — такое замкнутое конечное покрытие пространства X', что $V'|_{X_i'}$ и $W'|_{X_i'}$ тривиальны. Положим

$$X_i = f^{-1}(X_i'), \quad Y_i' = X_i' \cap Y' \text{ и } Y_i = f^{-1}(Y_i').$$

Пусть, наконец,

$$X'^i = X_1' \cup \ldots \cup X_i', \; Y'^i = X'^i \cap Y', \; X^i = f^{-1}(X'^i) \text{ и } Y^i = f^{-1}(Y'^i).$$

Тогда, применяя рассуждения, использованные при доказательстве теоремы 1.3, получаем индукцией по i, что гомоморфизм

$$K_n^{V'|_{X'^i},\, W'|_{X'^i}}(X'^i, Y'^i) \to K_n^{f^*(V')|_{X^i},\, f^*(W')|_{X^i}}(X^i, Y^i)$$

является изоморфизмом.

6.19. Предположим теперь, что расслоение V над компактной базой X снабжено *положительной* квадратичной формой. Пусть T — еще одно расслоение на X с заданной невырожденной квадратичной формой. Мы хотим определить гомоморфизм

$$t\colon K^{T \oplus V}(X, Y) \to K^{\pi^* T}(B(V), S(V) \cup B(V)|_Y)$$

(где $\pi\colon B(V) \to X$), который обобщал бы гомоморфизмы, обозначаемые также через t, определенные в III.5.9 и 5.10. Аналогично тому как это делалось в 5.10, отождествим расслоение на шары $B(V)$ с верхней полусферой $S^+(V \oplus 1)$ расслоения $V \oplus 1$. Формула

$$t(d(E, \eta_1, \eta_2)) = d(\pi^* E, v\cos\theta + \eta_1 \sin\theta, v\cos\theta + \eta_2 \sin\theta),$$

где $\pi\colon S^+(V \oplus 1) \to X$ и расслоение $\pi^* E$ снабжено структурой $C(T)$-модуля, определяет искомый гомоморфизм t (с учетом соглашений, принятых в 5.10).

Если $V = V_1 \oplus V_2$, $\pi_2\colon S^+(V_2 \oplus 1) \to X$ и $Z = S(V_2) \cup S^+(V_2 \oplus 1)|_Y$, то определим отображение

$$f\colon (S^+(\pi_2^* V_1 \oplus 1), S(\pi_2^* V_1) \cup S^+(\pi_2^* V_1 \oplus 1)|_Z) \to (S^+(V_1 \oplus V_2 \oplus 1), S(V_1 \oplus V_2) \cup S^+(V_1 \oplus V_2 \oplus 1)|_Y$$

следующим образом. Любая точка пространства $S^+(\pi_2^*V_1\oplus 1)\approx S^+(V_1\oplus 1)\times_X S^+(V_2\oplus 1)$ может быть записана в виде $(v_1\cos\theta_1+e_1\sin\theta_1,\ v_2\cos\theta_2+e_2\sin\theta_2)$, где e_1 и e_2 — „единичные векторы" соответственно $S^+(V_1\oplus 1)$ и $S^+(V_2\oplus 1)$ и где векторы $v_1\in S(V_1)$ и $v_2\in S(V_2)$ проектируются в одну и ту же точку X (рис. 24). Поставим в соответствие этой точке точку пространства $S^+(V_1\oplus V_2\oplus 1)$, задаваемую формулой $v_1\cos\theta_1+v_2\sin\theta_1\cos\theta_2+e\sin\theta_1\sin\theta_2$, где e — единичный вектор из $S^+(V_1\oplus V_2\oplus 1)$. Определенное таким образом отображение f индуцирует гомеоморфизм пространств

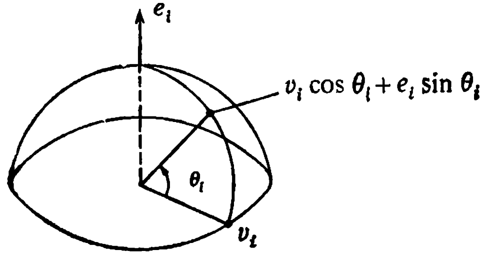


Рис. 24.

$$S^+(\pi_2^*V_1\oplus 1)\setminus(S(\pi_2^*V_1)\cup S^+(\pi_2^*V_1\oplus 1)|_Z)$$

и

$$S^+(V_1\oplus V_2\oplus 1)\setminus(S(V_1\oplus V_2)\cup S^+(V_1\oplus V_2\oplus 1)|_Y).$$

6.20. Предложение. *Определенный в 6.19 гомоморфизм t „транзитивен" относительно расслоения V. Более точно, имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
K^{W\oplus V_1\oplus V_2}(X,Y) \arrow[r, "t_2"] \arrow[d, "t"'] & K^{W\oplus V_1}(S^+(V_2\oplus 1), S(V_2)\cup S^+(V_2\oplus 1)|_Y) \arrow[d, "t_1"] \\
K^W(S^+(V_1\oplus V_2\oplus 1), S(V_1\oplus V_2)\cup S^+(V_1\oplus V_2\oplus 1)|_Y) \arrow[r, "f^*"] & K^W(S^+(\pi_2^*V_1\oplus 1), S(\pi_2^*V_1)\cup S^+(\pi_2^*V_1\oplus 1)|_Z)
\end{tikzcd}$$

где f — гомеоморфизм, определенный в 6.19 (f^* — изоморфизм в силу 6.18).

Доказательство. Пусть $x=d(E,\ \eta,\ \eta')$ — некоторый элемент из $K^{W\oplus V_1\oplus V_2}(X,\ Y)$. Используя очевидные обозначения, получаем

$$\begin{aligned}
t_2(x)&=d(E,\ v_2\cos\theta_2+\eta\sin\theta_2,\ v_2\cos\theta_2+\eta'\sin\theta_2),\\
t_1(t_2(x))&=d(E,\ v_1\cos\theta_1+(v_2\cos\theta_2+\eta\sin\theta_2)\sin\theta_1,\\
&\qquad\qquad v_1\cos\theta_1+(v_2\cos\theta_2+\eta'\sin\theta_2)\sin\theta_1)\\
&=d(E,\ v_1\cos\theta_1+v_2\cos\theta_2\sin\theta_1+\eta\sin\theta_2\sin\theta_1,\\
&\qquad\qquad v_1\cos\theta_1+v_2\cos\theta_2\sin\theta_1+\eta'\sin\theta_1\sin\theta_1).
\end{aligned}$$

Таким образом, по определению гомоморфизма f^*, мы имеем

$$f^*(t(x))=t_1(t_2(x)).\ \square$$

6.21. Теорема. *Гомоморфизм*

$$t\colon K^{W\oplus V}(X,\ Y)\to K^{\pi^*W}(B(V),\ S(V)\cup B(V)|_Y)$$

является изоморфизмом. Более общим образом, гомоморфизм

$$t_n\colon K_n^{W\oplus V}(X, Y)\to K_n^W(B(V),\ S(V)\cup B(V)|_Y),$$

который получается подстановкой $(X, Y)\mapsto(X\times B^n,\ X\times S^{n-1}\cup Y\times B^n)$, *также является изоморфизмом.*

Доказательство. Используя точную последовательность Майера — Вьеториса (6.17), мы можем считать, что расслоения V и W тривиальны. Кроме того, ввиду транзитивности гомоморфизма t (предложение 6.20), достаточно лишь рассмотреть случай, когда расслоение V имеет ранг 1 и квадратичная форма на нем имеет вид $+x^2$. Но тогда теорема 6.21 становится просто переформулировкой фундаментальной теоремы III.5.10, доказанной в § III.6. □

6.22. Замечание. Эта теорема обобщает теорему 5.11, для доказательства которой мы использовали дополнительную спинорную или комплексную спинорную структуру. Таким образом, мы получили новое, независимое (но более сложное) доказательство теоремы 5.11.

6.23. Рассмотрим теперь такие векторные расслоения V, W, T, что $V=W\oplus T$. Предположим, что расслоение V наделено такой невырожденной квадратичной формой, что ее ограничения на W и T также невырожденны и W ортогонально к T. Сравним группы $K_n^{V,W}(X, Y)$, $K_n^{V,T}(X, Y)$ и $K_n^{W,T}(X, Y)$. Именно, докажем точность последовательности

$$K_{n+1}^{V,T}(X, Y)\to K_{n+1}^{W,T}(X, Y)\xrightarrow{\gamma} K_n^{V,W}(X, Y)\to K_n^{V,T}(X, Y)\to K_n^{W,T}(X, Y),$$

все гомоморфизмы которой очевидны, за исключением связывающего гомоморфизма γ, который будет определен в 6.25.

6.24. Лемма. *Каждый элемент группы* $K^{W,T}(X, Y)$ *представляется в виде* $d(C(V)\otimes F,\ w_1,\ w_2)$, *где* F *— тривиальное расслоение и* w_1 *— структура* $C(W)$*-модуля на* $C(V)\otimes F$, *индуцированная с первого сомножителя* $C(V)$ *(заметим, что* $C(W)\subset C(V)$*). Кроме того,* $d(C(V)\otimes F,\ w_1,\ w_2)=d(C(V)\otimes F,\ w_1\ w_2')$ *тогда и только тогда, когда существует такое тривиальное расслоение* G, *что* $w_2\oplus w_3$ *гомотопно* $w_2'\oplus w_3$, *где* w_3 *— каноническая* $C(W)$*-модульная структура на* $C(V)\otimes G\approx C(W)\otimes C(V/W)\otimes G$.

Доказательство. Доказательство этой леммы аналогично доказательству предложения III.4.26 (заметим, что каждый $C(W)$-модуль является прямым слагаемым в

$$C(V)\otimes F\approx C(W)\otimes C(V/W)\otimes F,$$

где F — некоторое тривиальное расслоение; это следует из рассуждений, использованных при доказательстве леммы 6.6). □

6.25. Обозначим через $\delta(F,\ w_2)$ класс тройки $(C(V)\otimes F,\ w_1,\ w_2)$ в группе $K^{W,T}(X, Y)$. В частности, если мы делаем подстановку $(X, Y)\mapsto(X\times B^1,\ X\times S^0\cup Y\times B^1)$, то типичный элемент группы

$K_1^{W,I}(X, Y)$ также будет обозначаться через $\delta(F, w_2)$ или $\delta(F, w_2(t))$.

Согласно лемме 6.3, существует такое непрерывное семейство автоморфизмов расслоения $E = C(W) \otimes F$, рассматриваемого как объект из $\mathscr{E}^T(X)$, что $w_2(t) = \alpha(t) w_2(0) \alpha(t)^{-1}$ и $\alpha(t)|_Y = 1$. Определим теперь гомоморфизм

$$\gamma\colon K_1^{W,I}(X, Y) \to K^{W,T}(X, Y),$$

полагая $\gamma(\delta(F, w_2(t))) = d(C(V) \otimes F, v_1, \alpha(1) v_1 \alpha(1)^{-1})$. Это определение не зависит от выбора $w_2(t)$ и $\alpha(t)$. Действительно, пусть $w_2'(t)$ и $\alpha'(t)$ — другие семейства. Тогда существует такое непрерывное семейство $w_2(t, u)$, $(t, u) \in I \times I$, $C(W)$-модульных структур на $E = C(V) \otimes F$, что $w_2(t, 0) = w_2(t)$, $w_2(t, 1) = w_2'(t)$, $w_2(0, u) = w_2(1, u) = w_1$, $w_2(t, u)|_T = w_1|_T$ и $w_2(t, u)|_Y = w_1|_Y$. Пусть K — единичный квадрат и L — объединение $I \times \{0\} \cup I \times \{1\} \cup \{0\} \times I$. Так как квадрат K гомеоморфен произведению $L \times I$, то из леммы 6.7 следует существование такого непрерывного семейства $\alpha(t, u)$ автоморфизмов $C(T)$-модуля E, что $\alpha(t, 0) = \alpha(t)$, $\alpha(t, 1) = \alpha'(t)$, $\alpha(0, u) = 1$, $\alpha(t, u)|_Y = 1$ и $w_2(t, u) = \alpha(t, u) w_1 \alpha(t, u)^{-1}$. Поэтому непрерывное отображение $u \mapsto \alpha(1, u) v_1 \alpha(1, u)^{-1}$ задает гомотопию $v_1(u)$, соединяющую $\alpha(1) v_1 \alpha(1)^{-1}$ и $\alpha'(1) v_1 \alpha'(1)^{-1}$, такую что $v_1(u)|_W = v_1|_W$ и $v_1(u)|_Y = v_1 = v_1|_Y$.

6.26. Теорема. *Последовательность*

$$K_1^{V,T}(X, Y) \xrightarrow{\chi_1} K_1^{W,T}(X, Y) \xrightarrow{\gamma} K^{V,W}(X, Y) \xrightarrow{\varphi} K^{V,T}(X, Y) \xrightarrow{\chi} K^{W,T}(X, Y)$$

точна.

Доказательство. Прямая проверка показывает, что композиция любых двух последовательных гомоморфизмов равна 0. Поэтому нам нужно доказать лишь следующие включения:

$$\operatorname{Ker}(\chi) \subset \operatorname{Im}(\varphi), \quad \operatorname{Ker}(\varphi) \subset \operatorname{Im}(\gamma), \quad \operatorname{Ker}(\gamma) \subset \operatorname{Im}(\chi_1).$$

a) $\operatorname{Ker}(\chi) \subset \operatorname{Im}(\varphi)$. Пусть $x = d(E, v_1, v_2)$ — такой элемент из $K^{V,T}(X, Y)$, что $\chi(x) = 0$. Положим $w_i = v_i|_W$. Существует такая гомотопия $w(t)$ между w_1 и w_2 (с точностью до прибавления элементарной тройки), что $w(t)|_T = w_1|_T$ и $w(t)|_Y = w_1|_Y$. Эту гомотопию $w(t)$ можно представить в виде $w(t) = \alpha(t) w_1 \alpha(t)^{-1}$, где $\alpha(0) = 1$ и $\alpha(t)|_Y = 1$. Отсюда видно, что $d(E, v_1, v_2) = d(E, \alpha(1) v_1 \alpha(1)^{-1}, v_2) \in \operatorname{Im}(\varphi)$, поскольку $\alpha(1) v_1 \alpha(1)^{-1}|_W = v_2|_W$.

b) $\operatorname{Ker}(\varphi) \subset \operatorname{Im}(\gamma)$. Пусть $x = d(E, v_1, v_2)$ — такой элемент из $K^{V,W}(X, Y)$, что $\varphi(x) = 0$. Без ограничения общности мы можем считать, что E имеет вид $C(V) \otimes F$, где F — тривиальное расслоение, и что v_1 — каноническая $C(V)$-модульная структура на $E = C(V) \otimes F$. С точностью до прибавления элементарной тройки существует такое непрерывное семейство $v(t)$ $C(V)$-модульных структур на E, что $v(0) = v_1$, $v(1) = v_2$, $v(t)|_Y = v_1|_Y$ и $v(t)|_T = v_1|_T$. Полагая $w(t) = v(t)|_W$, имеем $d(E, v_1, v_2) = \gamma(\delta(E, w(t)))$.

c) $\operatorname{Ker}(\gamma)\subset\operatorname{Im}(\chi_1)$. Пусть $x=\delta(F, \omega_2(t))$ — такой элемент из $K_1^{W,T}(X, Y)$, что $\gamma(x)=0$. В обозначениях леммы 6.24, положим $v_2(t)=\alpha(t)v_1\alpha(t)^{-1}$ Ясно, что $v_2(1)$ и v_1 связаны некоторой гомотопией $v_2'(t)$, представляющей собой непрерывное семейство $C(V)$-модульных структур Кроме того, мы имеем $v_2'(0)=v_2(1)$, $v_2'(1)=v_1$, $v_2'(t)|_W=v_1|_W$ и $v_2'(t)|_Y=v_1|_Y$. Обозначим через $\bar v_2(t)$ гомотопию, которая получается композицией $v_2(t)$ и $v_2'(t)$, и пусть $\bar\omega_2(t)=\bar v_2(t)|_W$. Тогда $\delta(F, \bar\omega_2(t))=\delta(F, \omega_2(t))$, поскольку $v_2'(t)|_W=v_1|_W$, и $x=\chi_1(\delta(F, \bar v_2(t)))$, поскольку $\bar v_2(0)=\bar v_2(1)=v_1$, $\bar v_2(t)|_T=v_1|_T$ и $\bar v_2(t)|_Y=v_1|_Y$. □

6.27. Следствие. *Для $n\geqslant 0$ имеет место точная последовательность*

$$K_{n+1}^{V,T}(X, Y)\to K_{n+1}^{W,T}(X, Y)\to K_n^{V,W}(X, Y)\to K_n^{V,T}(X, Y)\to K_n^{W,T}(X, Y).$$

6.28/29. Тензорное произведение векторных расслоений определяет билинейное отображение

$$K_n^{V,W}(X, Y)\times K(X')\to K_n^{V,W}(X\times X', Y\times X').$$

Рассуждения, использованные в II.5.6, показывают, что существует и единственно естественное билинейное отображение

$$K_n^{V,W}(X, Y)\times K(X', Y')\to K_n^{V,W}(X\times X', X\times Y'\cup Y\times X'),$$

которое совпадает с указанным выше отображением в случае, когда $Y'=\varnothing$. Заменяя пару (X', Y') парой $(X'\times B^p, X'\times S^{p-1}\cup Y'\times B^p)$, мы получаем, так же как в II.5.6, билинейное отображение

$$K^{V,W}(X, Y)\times K_p(X', Y')\to K_{n+p}^{V,W}(X\times X', X\times Y'\cup Y\times X')$$

(снова называемое $\cup$-произведением).

6.30. Теорема. *Пусть α — образующая группы $K_{\mathbb{R}}^{-8}(P)$ (соотв. $K_{\mathbb{C}}^{-2}(P)$). Тогда умножение на элемент α индуцирует изоморфизм*

$$K_{\mathbb{R}}^{V,W}(X, Y)\approx K_{\mathbb{R}}^{V,W}(X\times B^8, X\times S^7\cup Y\times B^8)$$

(соотв. $K_{\mathbb{C}}^{V,W}(X, Y)\approx K_{\mathbb{C}}^{V,W}(X\times B^2, X\times S^1\cup Y\times B^2)$*).*

Доказательство. С помощью точной последовательности из теоремы 6.15 доказательство сводится к установлению изоморфизма $K_n^{V,W}(X)\approx K_{n+8}^{V,W}(X)$ (соотв. $K_n^{V,W}(X)\approx K_{n+2}^{V,W}(X)$). Далее, точная последовательность Майера — Вьеториса позволяет свести доказательство теоремы к случаю, когда расслоения V и W тривиальны и $n=0$. Рассмотрим точную последовательность

$$K^{-1}(\mathscr{E}^V(X))\to K^{-1}(\mathscr{E}^W(X))\to K^{V,W}(X)\to K(\mathscr{E}^V(X))\to K(\mathscr{E}^W(X)),$$

ассоциированную с функтором φ: $\mathscr{E}^V(X) \to \mathscr{E}^W(X)$ (III.3.22). Согласно III.4.8, группы $K(\mathscr{E}^V(X))$, $K(\mathscr{E}^W(X))$, $K^{-1}(\mathscr{E}^V(X))$ и $K^{-1}(\mathscr{E}^W(X))$ изоморфны группам $K_F^n(X)$ для $n=0$ или -1 и $F=\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ или $\mathbb{H}\times\mathbb{H}$. Следовательно, умножение на элемент α индуцирует изоморфизм $K_F^n(X) \approx K_F^n(X\times B^8,\ X\times S^7)$ ($K_F^n(X) \approx K_F^n(X\times B^2,\ X\times S^1)$ в комплексном случае). Из леммы о пяти гомоморфизмах вытекает, что умножение на α индуцирует также изоморфизм

$$K_{\mathbb{R}}^{V,\,W}(X) \approx K_{\mathbb{R}}^{V,\,W}(X\times B^8,\ X\times S^7)$$

(соотв. $K_{\mathbb{C}}^{V,\,W}(X) \approx K_{\mathbb{C}}^{V,\,W}(X\times B^2,\ X\times S^1)$). $\square$

6.31. После этой длинной серии лемм мы подошли, наконец, к нашей исходной задаче о вычислении группы $K(P(V),\ P(W))$ и о связи этой группы с группами $K^{V,\,W}$, где расслоение V (а следовательно, и W) наделено *положительной* квадратичной формой. Обозначая через n тривиальное расслоение $X\times\mathbb{R}^n$, снабженное „тривиальной" положительной квадратичной формой, определим фундаментальный гомоморфизм

$$\rho\colon K^{V\oplus n,\ W\oplus n}(X,\ Y) \to K^{\xi\oplus n,\ n}(P(V),\ P(W)\cup P(V)|_Y)$$

(где ξ — каноническое линейное расслоение над $P(V)$). С этой целью рассмотрим элемент $d(E,\ u;\ v_1,\ v_2)$ группы $K^{V\oplus n,\ W\oplus n}(X,\ Y)$. Здесь v_1 и v_2 представляют собой два таких „действия" расслоения V, что $v_1|_W = v_2|_W$ (6.9), а u представляет собой действие тривиального расслоения ранга n. Пусть $\pi'\colon S(V) \to X$, и пусть $\tilde v_i$ — действие на π^*E тривиального расслоения ранга 1, задаваемое инволюцией $v_i(v)$ над точкой $v \in S(V)$. Так как $v_i(-v) = -v_i(v)$, то v_i индуцирует действие канонического линейного расслоения на π^*E, где $\pi\colon P(V) \to X$. Обозначим это действие снова через $\tilde v_i$, а через $\tilde u$ обозначим действие тривиального расслоения ранга n на π^*E, индуцированное u. Тогда гомоморфизм ρ определяется формулой

$$\rho(d(E,\ u;\ v_1,\ v_2)) = d(\pi^*E,\ \tilde u;\ \tilde v_1,\ \tilde v_2)).$$

6.32. Теорема. *Определенный выше гомоморфизм*

$$\rho\colon K^{V\oplus n,\ W\oplus n}(X,\ Y) \to K^{\xi\oplus n,\ n}(P(V),\ P(W)\cup P(V)|_Y)$$

является изоморфизмом.

Доказательство. Если мы заменим пару $(X,\ Y)$ парой $(X\times B^r,\ X\times S^{r-1}\cup Y\times B^r)$, то получим несколько более общий гомоморфизм

$$\rho_r\colon K_r^{V\oplus n,\ W\oplus n}(X,\ Y) \to K_r^{\xi\oplus n,\ n}(P(V),\ P(W)\cup P(V)|_Y).$$

Прямая проверка показывает, что гомоморфизм ρ_r согласован со всеми гомоморфизмами точных последовательностей 6.16 и 6.27. Следовательно, используя точную последовательность Майера — Вьеториса, можно свести доказательство общего изоморфизма к случаю, когда расслоения V и W тривиальны. Далее, предложение 6.27 сводит этот случай к ситуации $V = W \oplus 1$. Так как пространства

$$S^+(W \oplus 1) \setminus S^+(W \oplus 1)|_Y \cup S(W) \text{ и } P(W \oplus 1) \setminus P(W \oplus 1)|_Y \cup P(W)$$

гомеоморфны (6.27), то проекция

$$\pi_1\colon (S^+(W \oplus 1),\ S^+(W \oplus 1)|_Y \cup S(W)) \to (P(W \oplus 1),\ P(W \oplus 1)|_Y \cup P(W))$$

индуцирует изоморфизм групп

$$K_r^{\pi_1^*(\xi \oplus n),\ \pi_1^*(n)}(S^+(W \oplus 1),\ S^+(W \oplus 1)|_Y \cup S(W)) \text{ и}$$
$$K_r^{\xi \oplus n,\ n}(P(W \oplus 1),\ P(W \oplus 1)|_Y \cup P(W)).$$

Кроме того, по определению мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & K_r^{n \oplus 1, n}(S^+(W \oplus 1), S(W) \cup S^+(W \oplus 1)|_Y) \\
K_r^{n \oplus W \oplus 1, n \oplus W}(X, Y) \arrow[ur, "t"] \arrow[dr, "p_r"'] & \\
 & K_r^{\xi \oplus n, n}(P(W \oplus 1), P(W) \cup P(W \oplus 1)|_Y) \arrow[uu, "\approx"', "\pi_1^*"]
\end{tikzcd}$$

где t — изоморфизм, описанный в III.5.10 и 6.21. Поскольку t — изоморфизм (III.5.10), то p_r — также изоморфизм. □

6.33. Рассмотрим частный случай $n = 1$. Каждый элемент x группы $K^{\xi \oplus 1,\ 1}(P(V),\ P(W) \cup P(V)|_Y)$ может быть записан в виде $x = d(E,\ \eta,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2)$, где E — векторное расслоение над $P(V)$, снабженное инволюцией η, которая определяется действием тривиального расслоения $X \times \mathbb{R}$. В этих обозначениях ε_1 и ε_2 представляют собой два таких действия ξ на E, что $\varepsilon_1|_{P(W) \cup P(V)|_Y} = \varepsilon_2|_{P(W) \cup P(V)|_Y}$. Так как $\xi \otimes \xi = P(V) \times \mathbb{R}$, то произведение $\varepsilon_1\varepsilon_2$ определяет автоморфизм α расслоения E, который коммутирует с η. Ограничение α на $\operatorname{Ker}(\eta - 1)$ определяет некоторый элемент группы $K^{-1}(P(V),\ P(W) \cup P(V)|_Y)$ (II.3.25).

6.34. Предложение. *Описанное выше соответствие определяет изоморфизм групп*

$$K^{\xi \oplus 1,\ 1}(P(V),\ P(W) \cup P(V)|_Y) \approx K^{-1}(P(V),\ P(W) \cup P(V)|_Y).$$

Доказательство. Построим гомоморфизм, действующий в противоположном направлении. Пусть F — векторное расслоение на $P(V)$ и β — такой автоморфизм F, что $\beta|_{P(W) \cup P(V)|_Y} = 1$. Положим $E = F \oplus (\xi \otimes F)$ и зададим на этом расслоении инволюцию η матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Пусть, наконец, ε_1: $\xi \times E \to E$ — (билинейный) гомоморфизм, индуцированный изоморфизмом $\xi \otimes E \approx E$, и $\varepsilon_2 = \beta\varepsilon_1$. Очевидно, что два указанных соответствия являются обратными друг к другу. □

*6.35. **Следствие.** Группы*

$$K_r^{\xi \oplus 1,\, 1}(P(V),\ P(W) \cup P(V)|_Y) \quad \text{и} \quad K^{-r-1}(P(V),\ P(W) \cup P(V)|_Y)$$

изоморфны.

*6.36. **Теорема.** Пусть r — целое число, рассматриваемое по модулю 8 (по модулю 2 в комплексном случае). Тогда группы*

$$K^{-r}(P(V),\ P(W) \cup P(V)|_Y) \quad \text{и} \quad K_{r-1}^{V \oplus 1,\, W \oplus 1}(X,\ Y)$$

естественно изоморфны (как $K(X)$-модули).

Доказательство. Это непосредственно следует из 6.34, 6.31 и 6.28/29. □

6.37. Для того чтобы использовать теорему 6.36, нам надо вычислить группы $K_r^{V,\,W}(X,\ Y)$ в более классических терминах. Для простоты ограничимся случаем $Y = \varnothing$. Обозначим через $K_r^{(V)}(X)$ группу Гротендика функтора

$$\mathscr{E}^V(X \times B^r) \to \mathscr{E}^V(X \times S^{r-1}).$$

В силу аксиомы вырезания это также группа Гротендика функтора

$$\mathscr{E}^V(X \times S^r) \to \mathscr{E}^V(X \times P),$$

где P — точка.

6.38. Имеет место точная последовательность

$$K_{r+1}^{(V)}(X) \to K_{r+1}^{(W)}(X) \xrightarrow{\partial} K_r^{V,\,W}(X) \to K_r^{(V)}(X) \to K_r^{(W)}(X).$$

Доказательство. Пусть φ: $\mathscr{E}^V(X) \to \mathscr{E}^W(X)$ — очевидным образом определенный банахов функтор. Тогда точная последовательность, ассоциированная с функтором φ (II.3.22.), может быть записана в виде

$$K^{-1}(\mathscr{E}^V(X)) \to K^{-1}(\mathscr{E}^W(X)) \to K^{V,\,W}(X) \to K(\mathscr{E}^V(X)) \\ \to K(\mathscr{E}^W(X)).$$

Применяя теорему II.3.22 к функтору $\mathscr{E}^V(X \times B^1) \to \mathscr{E}^V(X \times S^0)$, находим $K^{-1}(\mathscr{E}^V(X)) \approx K_1^{(V)}(X)$. Аналогично $K^{-1}(\mathscr{E}^W(X)) \approx K_1^{(W)}(X)$. Следовательно, мы получаем точную последовательность теоремы для $r = 0$. Для $r > 0$ мы имеем в силу 6.18

$$K_r^{V,\,W}(X) \approx \operatorname{Ker}[K^{V,\,W}(X \times S^r) \to K^{V,\,W}(X \times P)].$$

Аналогично

$$K_r^{(V)}(X) \approx \operatorname{Ker}[K^{(V)}(X \times S^r) \to K^{(V)}(X \times P)],$$
$$K_{r+1}^{(V)}(X) \approx \operatorname{Ker}[K_1^{(V)}(X \times S^r) \to K_1^{(V)}(X \times P)].$$

Таким образом, случай $r > 0$ следует из случая $r = 0$. □

6.39. Рассмотрим теперь случай, когда W и V/W являются спинорными расслоениями рангов p и $n-p$ соответственно. Тогда V есть спинорное расслоение ранга n и, согласно теореме 4.22, мы имеем эквивалентности категорий

$$\mathscr{E}^{0,n}(X) \sim \mathscr{E}^V(X) \text{ и } \mathscr{E}^{0,p}(X) \sim \mathscr{E}^W(X).$$

Далее, композиция

$$\alpha\colon \mathscr{E}^{0,n}(X) \sim \mathscr{E}^V(X) \to \mathscr{E}^W(X) \sim \mathscr{E}^{0,p}(X)$$

определяется соответствием

$$E \mapsto P\Delta_{\mathrm{Spin}\,(n-p)} E,$$

где P — главное расслоение, задающее спинорную структуру на V/W (4.22).

6.40. Теорема. *Предположим, что V и V/W являются спинорными расслоениями рангов p и $n-p$ соответственно. Тогда имеет место точная последовательность*

$$K^i\left(\mathscr{E}_{\mathbb{R}}^{0,\,n+1}(X)\right) \xrightarrow{\alpha^i} K^i\left(\mathscr{E}_{\mathbb{R}}^{0,\,p+1}(X)\right) \to K^i_{\mathbb{R}}(P(V),\,P(W))$$
$$\to K^{i+1}\left(\mathscr{E}_{\mathbb{R}}^{0,\,n+1}(X)\right) \xrightarrow{\alpha^{i+1}} K^{i+1}\left(\mathscr{E}_{\mathbb{R}}^{0,\,p+1}(X)\right),$$

где гомоморфизм α^i индуцирован функтором α, а группы $K^i\left(\mathscr{E}_{\mathbb{R}}^{0,\,r}(X)\right)$ определяются следующей таблицей:

$r \bmod 8$	0	1	2	3
$K^i(\mathscr{E}_{\mathbb{R}}^{0,r}(X))$	$K^i_{\mathbb{R}}(X)$	$K^i_{\mathbb{R}}(X) \oplus K^i_{\mathbb{R}}(X)$	$K^i_{\mathbb{R}}(X)$	$K^i_{\mathbb{C}}(X)$
$r \bmod 8$	4	5	6	7
$K^i(\mathscr{E}_{\mathbb{R}}^{0,r}(X))$	$K^i_{\mathbb{H}}(X)$	$K^i_{\mathbb{H}}(X) \oplus K^i_{\mathbb{H}}(X)$	$K^i_{\mathbb{H}}(X)$	$K^i_{\mathbb{C}}(X)$

Доказательство. Данная теорема является простой переформулировкой предложения 6.38 и теоремы 6.36, использующей категорные эквивалентности, описанные в 4.22. ∎

6.41. Пример. Предположим, что расслоение V/W имеет ранг $8t$ и наделено спинорной структурой и что W — спинорное расслоение ранга $8r+1$. Тогда имеет место точная последовательность

$$K^i_{\mathbb{R}}(X) \xrightarrow{\alpha^i} K^i_{\mathbb{R}}(X) \to K^i_{\mathbb{R}}(P(V),\,P(W)) \to K^{i+1}_{\mathbb{R}}(X) \xrightarrow{\alpha^{i+1}} K^{i+1}_{\mathbb{R}}(X).$$

Гомоморфизм α^i в этой последовательности индуцирован функтором $\varphi\colon \mathscr{E}_{\mathbb{R}}(X) \to \mathscr{E}_{\mathbb{R}}(X)$, определяемым равенством $\varphi(E) = F \otimes E$. Здесь F — векторное расслоение $P \times_{\mathrm{Spin}\,(8t)} M$, P — главное расслоение, задающее спинорную структуру на V/W, и M — неприводимый $C^{0,8t}$-модуль. Если расслоение V/W тривиально, то функтор $\varphi\colon \mathscr{E}_{\mathbb{R}}(X) \to \mathscr{E}_{\mathbb{R}}(X)$ имеет просто вид $E \mapsto E \oplus E \oplus \ldots \oplus E$ (16^t раз).

Если расслоение V/W нетривиально, то вычислить векторное расслоение F в общем случае довольно трудно. Однако если V/W можно представить в виде $U \oplus U$, где U ориентировано (4.18), то V/W является спинорным расслоением и F может быть отождествлено с $\Lambda(U)$.

Полученные выше результаты имеют очевидные аналоги в комплексной K-теории. Например, комплексный аналог теоремы 6.39 выглядит так:

6.42. Теорема. *Предположим, что W и V/W являются комплексными спинорными расслоениями рангов p и $n-p$ соответственно. Тогда имеет место точная последовательность*

$$K^i\left(\mathscr{E}_{\mathbf{C}}^{0,\,n+1}(X)\right) \xrightarrow{\alpha^i} K^i\left(\mathscr{E}_{\mathbf{C}}^{0,\,p+1}(X)\right) \to K_{\mathbf{C}}^i(P(V),\ P(W))$$
$$\to K^{i+1}\left(\mathscr{E}_{\mathbf{C}}^{0,\,n+1}(X)\right) \xrightarrow{\alpha^{i+1}} K^{i+1}\left(\mathscr{E}_{\mathbf{C}}^{0,\,p+1}(X)\right).$$

В этой последовательности гомоморфизм α^i индуцирован функтором $E \mapsto P\Delta_{\mathrm{Spin^c}\,(n-p)}E$ (где P — главное расслоение, определяющее на V/W комплексную спинорную структуру), $K^i\left(\mathscr{E}_{\mathbf{C}}^{0,\,r}(X)\right) = K_{\mathbf{C}}^i(X)$, если r четно, и $K^i\left(\mathscr{E}_{\mathbf{C}}^{0,\,r}(X)\right) = K_{\mathbf{C}}^i(X) \oplus K_{\mathbf{C}}^i(X)$, если r нечетно.

6.43. Особый интерес представляет случай, когда расслоение V/W наделено комплексной структурой (и W — комплексное спинорное расслоение). Тогда гомоморфизм α^i индуцирован функтором $E \mapsto \Lambda(V/W) \otimes E$, где $\Lambda(V/W)$ — расслоение, слоем которого служит *комплексная* внешняя алгебра (1.4).

6.44. Теперь мы хотим более точно описать как в вещественном, так и в комплексном случае гомоморфизм

$$K^i(X) \oplus K^i(X) \approx K^i(\mathscr{E}^{0,\,1}(X)) \to K^i(P(V))$$

в точных последовательностях пп. 6.40 и 6.42 для $W=0$. Если $i=-1$, то этот гомоморфизм представляет собой композицию

$$K^{-1}(\mathscr{E}^{0,\,1}(X)) \xrightarrow{\partial} K^{V\oplus 1,\,1}(X) \underset{\approx}{\xrightarrow{p}} K^{\xi\oplus 1,\,1}(P(V)) \underset{\approx}{\xrightarrow{u}} K^{-1}(P(V)),$$

где гомоморфизм p определен в 6.31, ∂ — в 6.38 и u — в 6.34. Более точно, элемент x из $K^{-1}(\mathscr{E}^{0,\,1}(X))$ может быть представлен $\mathbf{Z}/2$-градуированным векторным расслоением E вида $E=E_0 \oplus E_1$ и автоморфизмом α вида

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Эти два автоморфизма α_0 и α_1 определяют разложение в прямую сумму $K^{-1}(\mathscr{E}^{0,\,1}(X)) \approx K^{-1}(X) \oplus K^{-1}(X)$.

Так как функтор $\mathscr{E}^{V\oplus 1}(X) \to \mathscr{E}^{0,\,1}(X)$ квазисюръективен, то без ограничения общности можно считать, что расслоение E наделено градуированной $C(V)$-модульной структурой, представленной v, соответствующей разложению $E=E_0\bigoplus E_1$. Следовательно, в обозначениях теоремы 6.30, $\partial(x)=d(E, v, \alpha^{-1}v\alpha)$ и $(up\partial)(x)$ представляет собой ограничение на E_0 автоморфизма $v\alpha^{-1}\tilde{v}\tilde{\alpha}=(\tilde{v}\alpha^{-1}\tilde{v})\tilde{\alpha}$. В действительности $\tilde{v}$ индуцирует изоморфизм расслоений π^*E_0 и π^*E_1, где $\pi\colon P(V)\to X$ и класс автоморфизма $\tilde{v}\alpha^{-1}\tilde{v}$ в группе $K^{-1}(P(V))$ есть просто $\pi^*\alpha^{-1}\bigotimes \mathrm{Id}_\xi$. Следовательно, $(up\partial)(x)$ есть сумма $\pi^*(x_0)-\theta^*(x_1)$, где x_0 и x_1 — две компоненты элемента x, гомоморфизм π^* индуцирован проекцией $\pi\colon P(V)\to X$, а гомоморфизм θ^* — проекцией $P(V)\to X$ и произведением с линейным расслоением ξ. Заменяя X на $X\times S^r$, мы получаем следующую теорему.

6.45. Теорема. *Имеет место точная последовательность*

$$K^i(\mathscr{E}^{V\oplus 1}(X))\to K^i(X)\bigoplus K^i(X)\xrightarrow{(\pi^*,\,-\theta^*)}K^i(P(V))\\ \to K^{i+1}(\mathscr{E}^{V\oplus 1}(X))\to K^{i+1}(X)\bigoplus K^{i+1}(X),$$

где гомоморфизм π^* индуцирован проекцией $\pi\colon P(V)\to X$, а гомоморфизм θ^* — функтором $E\mapsto\xi\bigotimes\pi^*E$.

6.46. Следствие. (Адамс [1]). *Пусть RP_{n-1} — проективное пространство. Тогда группа $\tilde{K}_{\mathbb{R}}(RP_{n-1})$ порождается элементом $\lambda_{n-1}=[\xi]-1$, удовлетворяющим соотношениям $(\lambda_{n-1})^2=-2\lambda_{n-1}$ и $2^f\lambda_{n-1}=0$, где f — число таких целых чисел i, что $0<i<n$ и $i\equiv 0$, 1, 2 или 4 mod 8.*

Доказательство. Из теоремы 6.45 следует, что группа $K_{\mathbb{R}}(RP_{n-1})$ может быть отождествлена с коядром гомоморфизма

$$K(C^{0,\,n+1})\to K(C^{0,\,1})$$

(в обозначениях § III.3). Таким образом, согласно III.4.9,

$$\tilde{K}_{\mathbb{R}}(RP_{n-1})\approx \operatorname{Coker}(K(C^{0,\,n+1})\to K(C^{0,\,2}))\\ \approx \operatorname{Coker}(K(C^{n-1,\,0})\dashrightarrow K(C^{0,\,0}))\approx \mathbb{Z}/2^f\mathbb{Z}.$$

Далее, в силу теоремы 6.45, образующим этой группы является элемент λ_{n-1}. Соотношение $(\lambda_{n-1})^2=-2\lambda_{n-1}$ следует из соотношения $\xi\bigotimes\xi=1$. □

6.47. Следствие. *Пусть RP_{n-1} — проективное пространство. Тогда группа $\tilde{K}_{\mathbb{C}}(RP_{n-1})$ порождается элементом $\lambda'_{n-1}=[\xi']-1$, где $\xi'=\xi\bigotimes\mathbb{C}$. Элемент λ'_{n-1} удовлетворяет соотношениям $(\lambda'_{n-1})^2=-2\lambda'_{n-1}$ и $2^g\lambda'_{n-1}=0$, где g — число таких целых i, что $0<i<n$ и $i\equiv 0 \bmod 2$.*

6.48. Следствие. *Пусть X — такое пространство, что $K^1\left(\mathscr{E}^{n,\,0}_{\mathbb{R}}(X)\right)=0$. Тогда*

$$K_{\mathbb{R}}(X\times RP_n, X)\approx \operatorname{Coker}\left[K\left(\mathscr{E}^{n,\,0}_{\mathbb{R}}(X)\right)\to K(\mathscr{E}_{\mathbb{R}}(X))\right].$$

Упражнение: 8.

7. Операции в K-теории

7.1. *Операцией* в K-теории называется отображение $K(X) \to K(X)$ (вообще говоря, не являющееся гомоморфизмом), определенное для любого компактного пространства X и естественное по X. Для простоты мы начнем с рассмотрения операций в комплексной K-теории $K_{\mathbb{C}}(X)$; вплоть до п.7.24 мы будем обозначать группы $K_{\mathbb{C}}(X)$ просто через $K(X)$. Очень часто мы будем обозначать класс эквивалентности векторного расслоения E в $K(X)$ той же буквой E (а не символом $[E]$).

7.2. Наш первый пример операции в K-теории принадлежит Гротендику [1]. Для любого векторного расслоения E обозначим через $\lambda^i(E)$ его i-ю внешнюю степень (см. I.4.8). Допуская вольность, через $\lambda^i(E)$ мы будем обозначать также класс эквивалентности расслоения $\lambda^i(E)$ в группе $K(X)$. Положим

$$\lambda_t(E) = 1 + t\lambda^1(E) + t^2\lambda^2(E) + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} t^i\lambda^i(E) \in K(X)[[t]].$$

Так как $\lambda^n(E \oplus F) = \bigoplus_{i+j=n} \lambda^i(E)\lambda^j(F)$ (см. III.3.10), то мы имеем $\lambda_t(E \oplus F) = \lambda_t(E)\lambda_t(F)$. Следовательно, соответствие $E \mapsto \lambda_t(E)$ определяет гомоморфизм из моноида $\Phi(X)$ в мультипликативную группу формальных степенных рядов со свободным членом, равным 1. В силу универсального свойства групп Гротендика (II.1.1) мы получаем гомоморфизм из аддитивной группы $K(X)$ в мультипликативную группу $1 + tK(X)[[t]]$; этот гомоморфизм мы снова обозначим через λ_t. Явная формула для гомоморфизма λ_t имеет вид

$$\lambda_t(E - F) = \lambda_t(E)\lambda_t(F^{-1});$$

следовательно,

$$\lambda_t(E - n) = \lambda_t(E)(1+t)^{-n},$$

где n — класс эквивалентности тривиального расслоения ранга n.

Для $x \in K(X)$ положим

$$\lambda_t(x) = \sum_{i=0}^{\infty} t^i\lambda^i(x).$$

Обозначение $\lambda^i(x)$ является обобщением обозначения $\lambda^i(E)$, и мы получаем корректно определенную операцию $x \mapsto \lambda^i(x)$ в K-теории. Имеет место тождество

$$\lambda^n(x+y) = \sum_{i+j=n} \lambda^i(x)\lambda^j(y).$$

7.3. Аналогично введем операции $x \mapsto \gamma^i(x)$. С этой целью для $x \in K(X)$ положим

$$\gamma_t(x) = \lambda_{t/1-t}(x) \in K(X)[[t]] \text{ и } \gamma_t(x) = \sum_{i=0}^{\infty} t^i\gamma^i(x).$$

Так как $\gamma_t(x+y)=\gamma_t(x)\cdot\gamma_t(y)$, то мы имеем

$$\gamma^n(x+y)=\sum_{i+j=n}\gamma^i(x)\cdot\gamma^j(y).$$

7.4. Предложение. *Пусть E — векторное расслоение ранга n и $c_i(E)$ его i-й характеристический класс в смысле п.2.17. Тогда $c_i(E)=(-1)^i\gamma^i(E-n)$ В частности, $\gamma^i(E-n)=0$ для $i>n$.*

Доказательство. Согласно предложению 2.17, достаточно доказать это утверждение для линейного расслоения $E=L$ В этом случае $c_1(L)=1-L$ и $c_i(L)=0$ для $i>1$ С другой стороны, $\gamma_t(L-1)=1+t(L-1)$. Следовательно, $\gamma^1(L-1)=-c_1(L)$ и $\gamma^i(L-1)=0$ для $i>1$. □

7.5. Следствие. *Пусть $\xi_{n,m}$ — каноническое расслоение на $G_n(\mathbb{C}^m)$ и γ^i — образ элемента $\gamma^i(\xi_{n,m}-n)$ в* $\mathrm{proj\,lim}\,K(G_n(\mathbb{C}^m))=\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(BU(n))$ (3.22) *Тогда группа $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(BU(n))$ изоморфна алгебре формальных степенных рядов $Z[[\gamma^1,\ldots,\gamma^n]]$.*

Доказательство. Это непосредственно следует из предложения 7.4 и теоремы 3.22. □

7.6. Пусть α — элемент из $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(BU(n))$ и E — векторное расслоение ранга n с компактной базой X. Тогда E изоморфно обратному образу расслоения $\xi_{n,m}$ относительно подходящего непрерывного отображения

$$f\colon X\to G_n(\mathbb{C}^m).$$

Если обозначить через α_m „ограничение" элемента α на группу $K(G_n(\mathbb{C}^m))$, то элемент $\alpha_*(E)+f^*(\alpha_m)$ из $K(X)$ зависит только от векторного расслоения E и класса элемента α (I.7.2).

Пусть $\mathrm{Op}(\Phi_n, K)$ — множество всех естественных отображений из $\Phi_n(X)$ в $K(X)$ Кольцевая структура на $K(X)$ очевидным образом превращает множество $\mathrm{Op}(\Phi_n, K)$ в коммутативное кольцо; соответствие $\alpha\mapsto[E\to\alpha_*(E)]$ определяет гомоморфизм

$$\theta\colon \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(BU(n))\to\mathrm{Op}(\Phi_n, K).$$

7.7. Теорема. *Определенное выше отображение θ является изоморфизмом между кольцами $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(BU(n))$ и $\mathrm{Op}(\Phi_n, K)$. В частности, $\mathrm{Op}(\Phi_n, K)\approx Z[[\gamma^1,\ldots,\gamma^n]]$.*

Доказательство. Если $c\in\mathrm{Op}(\Phi_n, K)$, то элементы $c(\xi_{n,m})\in K(G_n(\mathbb{C}^m))$ образуют проективную систему, которая определяет некоторый элемент $\alpha\in\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(BU(n))$. Соответствие $c\mapsto\alpha$ является гомоморфизмом, обратным к гомоморфизму θ. □

7.8. Так как $K(X)=H^0(X;Z)\oplus K'(X)$ (см II.1.29), то нетрудно видеть, что наиболее интересные операции в K-теории получаются из операций $K'(X)\to K(X)$. Обозначим через $\mathrm{Op}(K', K)$ определенное таким образом подмножество в $\mathrm{Op}(K, K)$. Поскольку $K'(X)\approx\mathrm{inj\,lim}\,\Phi_n(X)$ (II.1.31), то мы имеем $\mathrm{Op}(K', K)\approx\mathrm{proj\,lim}\,\mathrm{Op}(\Phi_n, K)$.

Следовательно, $\mathrm{Op}(K', K)$ — кольцо. Из сказанного вытекает следующая теорема, которая описывает почти все операции в (комплексной) K-теории.

7.9. Теорема. *Отображение, сопоставляющее переменной t_i нильпотентную операцию γ^i, индуцирует изоморфизм*

$$\mathbb{Z}[[t_1, \ldots, t_n, \ldots]] \to \mathrm{Op}(K', K).$$

Доказательство. Если $x \in K'(X)$, то, согласно 7.4, $\gamma^i(x) = 0$ для некоторого достаточно большого номера i. Более того поскольку элемент $\gamma^j(x) \in K'(X)$, то он нильпотентен для каждого положительного i. $\square$

7.10. Займемся теперь изучением операций в K-теории, которые обладают „хорошими" алгебраическими свойствами, а именно такими операциями γ из K' в K, что $\gamma(x+y) = \gamma(x) + \gamma(y)$. Множество этих операций образует подгруппу в $\mathrm{Op}(K', K)$, которую мы обозначим через $\mathrm{Op}^{++}(K', K)$. Пусть $\varphi\colon \mathrm{Op}^{++}(K', K) \to \mathrm{Op}(\Phi_1, K)$ — групповой гомоморфизм, который сопоставляет каждой такой операции ее „ограничение" на Φ_1 посредством канонического отображения $\Phi_1 \to K'$ Согласно 7.7, $\mathrm{Op}(\Phi_1, K) \approx \mathbb{Z}[[u]]$, где $u = \xi - 1$ и ξ — каноническое линейное расслоение на $BU(1) = P(\mathbb{C}^\infty)$.

7.11. Предложение. *Гомоморфизм*

$$\varphi\colon \mathrm{Op}^{++}(K', K) \to \mathrm{Op}(\Phi_1, K) \approx \mathbb{Z}[[u]]$$

является мономорфизмом. Его образ представляет собой группу формальных степенных рядов без свободного члена.

Доказательство. Пусть c — некоторая *аддитивная* операция (т. е. элемент группы $\mathrm{Op}^{++}(K', K)$), ограничение которой на Φ_1 равно нулю, и пусть $x = V - n \in K'(X)$. Обозначим через $\mathrm{F}(V)$ расслоение на флаги над X, описанное в § 3. Тогда гомоморфизм $K(X) \to K(\mathrm{F}(V))$ является мономорфизмом и расслоение $\pi^*(V)$, где $\pi\colon \mathrm{F}(V) \to X$, расщепляется в прямую сумму $\bigoplus_{i=1}^{n} L_i$ линейных расслоений. Следовательно, $\pi^*(c(V-n)) = c(\pi^* V - n) = \sum_{i=1}^{n} c(L_i - 1) = 0$; значит, $c(V-n) = 0$ и гомоморфизм φ есть мономорфизм.

Рассмотрим теперь образ гомоморфизма φ. Так как $K'(X) = 0$, когда пространство X состоит из одной точки, то $\varphi(c)$ обязано быть рядом без свободного члена

$$f(u) = a_1 u + a_2 u^2 + \ldots,$$

где все $a_i \in \mathbb{Z}$. Покажем теперь, что любому такому ряду соответствует аддитивная операция.

Обозначим через Q_k, $k \geqslant 1$, *полиномы Ньютона* — однозначно определенные полиномы, с помощью которых симметрические функции $\sum_{i=1}^{k} u_i^k$ выражаются через элементарные симметрические функции $\sigma_r = \sum\limits_{i_1 < i_2 < \ldots < i_r} u_{i_1} \ldots u_{i_r}$, $1 \leqslant r \leqslant k$. Например,

$$Q_1(\sigma_1) = \sigma_1,$$
$$Q_2(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1^2 - 2\sigma_2,$$
$$Q_3(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 \text{ и т. д.}$$

Так как полином $Q_k(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k)$ имеет вес k, то ряд

$$S(\gamma^1, \gamma^2, \ldots, \gamma^k, \ldots) = a_1Q_1(\gamma^1) + a_2Q_2(\gamma^1, \gamma^2) + \ldots + a_kQ_k(\gamma^1, \gamma^2, \ldots, \gamma^k) + \ldots$$

сходится в кольце $Z[[\gamma^1, \gamma^2, \ldots, \gamma^k, \ldots]]$. Искомая операция имеет вид

$$x \longmapsto S(\gamma^1(x), \gamma^2(x), \ldots, \gamma^k(x), \ldots)$$

(заметим опять, что $\gamma^k(x) = 0$ для достаточно большого k и что каждый элемент $\gamma^l(x)$ нильпотентен). Если элемент x имеет вид $L - 1$, где L — линейное расслоение, то мы получаем $a_1u + a_2u^2 + \ldots + a_ku^k + \ldots$, где $u = \gamma^1(x) = x$.

Теперь мы должны проверить, что определенная выше операция c аддитивна, т. е. удовлетворяет условию $c(x+y) = c(x) + c(y)$ для $x = V - n$ и $y = W - p$. Используя принцип расщепления (2.15), мы можем считать, что $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} L_i$ и $W = \bigoplus\limits_{j=1}^{p} R_j$, где L_i и R_j — линейные расслоения. Пусть $u_i = L_i - 1 = \gamma^1(L_i - 1)$ и $v_j = R_j - 1 = \gamma^1(R_j - 1)$. Тогда мы имеем $\gamma_t(V - n) = \prod\limits_{i=1}^{n} \gamma_t(L_i - 1) = \prod\limits_{i=1}^{n} (1 + tu_i)$ и $\gamma_t(W - p) = \prod\limits_{j=1}^{p} \gamma_t(R_j - 1) = \prod\limits_{j=1}^{p} (1 + tv_j)$. Следовательно, $\gamma^r(x) = \gamma^r(V - n) = \sigma_r(u_1, \ldots, u_n)$ и $\gamma^s(y) = \gamma^s(W - p) = \sigma_s(v_1, \ldots, v_p)$. Аналогично устанавливается, что $\gamma^k(x+y) = \sigma_k(u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_p)$. Поэтому

$$Q_k(\gamma^1(x+y), \ldots, \gamma^k(x+y)) = \sum_{i=1}^{n} (u_i)^k + \sum_{j=1}^{p} (v_j)^k = Q_k(\gamma^1(x), \ldots, \gamma^k(x)) + Q_k(\gamma^1(y), \ldots, \gamma^k(y)).$$

Взяв линейную комбинацию этих соотношений, мы получим $c(x+y) = c(x) + c(y)$, как и требовалось. □

7.12. Рассмотрим теперь такие операции c из $K(X)$ в $K(X)$, которые являются гомоморфизмами колец, сохраняющими единицу. Любая такая операция превращает диаграмму

$$\begin{tikzcd} K(X) \arrow[rr, "c"] \arrow[dr] & & K(X) \arrow[dl] \\ & H^0(X; Z) & \end{tikzcd}$$

в коммутативную. Поэтому из предложения 7.11 следует, что такие операции образуют подмножество в кольце $Z[[u]]$. Наша ближайшая цель будет заключаться в описании этого подмножества.

Если ξ — каноническое линейное расслоение на $BU(1)$, то положим

$$c(\xi)=1+a_1u+\ldots+a_nu^n,$$

где $u=\xi-1=\gamma^1(\xi-1)$.

Пусть теперь L_1 и L_2 — линейные расслоения на компактном пространстве X. Тогда $c(L_i)=f(u_i)$, где $u_i=L_i-1$, и $c(L_1\otimes L_2)=f(u_1+u_2+u_1u_2)$, поскольку в группе $K(X)$ имеет место равенство $L_1L_2-1=L_1-1+L_2-1+(L_1-1)(L_2-1)$. В частности, если $X=P(\mathbb{C}^m)\times P(\mathbb{C}^m)$ для достаточно большого m и если L_1 и L_2 — два канонических линейных расслоения на $P(\mathbb{C}^m)\times P(\mathbb{C}^m)$, то в силу 2.11 мы имеем

$$K(X)\approx Z[u_1, u_2]/I_m, \text{ где } I_m=(u_1)^{m+1}(u_2)^{m+1}.$$

Следовательно, формальный ряд f должен удовлетворять в кольце $Z[u_1, u_2]/I_m$ для любого целого m уравнению $f(u_1+u_2+u_1u_2)=f(u_1)f(u_2)$; значит, это уравнение должно выполняться и в кольце $Z[[u_1, u_2]]$. Продифференцируем это уравнение по u_1 и положим $u_1=0$. В результате получим уравнение

$$(1+u_2)f'(u_2)=f'(0)\cdot f(u_2).$$

Единственными решениями этого последнего уравнения являются формальные степенные ряды вида $f(u)=(1+u)^k$, где $k\in Z$. Другими словами, характеристический класс c задается на линейном расслоении L формулой $c(L)=L^k$ (заметим, что $L^k=\overline{L}^{-k}$ для $k<0$). Итак, мы имеем следующую теорему.

7.13. Теорема. *Для всякого $k\in Z$ существует операция*

$$\psi^k\colon K(X)\to K(X),$$

называемая операцией Адамса, которая характеризуется следующими свойствами:

1) $\psi^k(x+y)=\psi^k(x)+\psi^k(y)$;

2) $\psi^k(L)=L^k$, *если L — класс эквивалентности линейного расслоения.*

Кроме того, для нее выполняются соотношения

3) $\psi^k(xy)=\psi^k(x)\psi^k(y)$ *и* $\psi^k(1)=1$.

Операции Адамса ψ^k, $k\in Z$, являются единственными операциями в комплексной К-теории, которые представляют собой кольцевые гомоморфизмы (т. е. удовлетворяют условиям 1) и 3)).

Доказательство. В силу предложения 7.11, условия 1) и 2) однозначно определяют операцию ψ^k. Согласно принципу расщепления, достаточно проверить условие 3) в случае, когда x и y — линейные расслоения. Но это непосредственно следует из тождества $(LR)^k = L^kR^k$, где L и R — линейные расслоения. Наконец, последняя часть теоремы вытекает из результатов п. 7.12. □

7.14. Замечание. Пусть $x \in K(X)$ и $x' \in K(X')$. Тогда в группе $K(X \times X')$ выполняется равенство

$$\psi^k(x \cup x') = \psi^k(x) \cup \psi^k(x').$$

7.15. Теорема. *Пусть Q_k — полиномы Ньютона, определенные в 7.11. Тогда для каждого элемента $x \in K(X)$ имеем $\psi^k(x) = Q_k(\lambda^1(x), \ldots, \lambda^k(x))$. Кроме того, $\psi^k(\psi^l(x)) = \psi^{kl}(x)$ и $\psi^p(x) = x^p \operatorname{mod} p$, если p — простое число.*

Доказательство. В кольце $K(X)[[t]]$ положим

$$\psi_{-t}(x) = -t\,\frac{\lambda_t'(x)}{\lambda_t(x)}.$$

Так как $\lambda_t(x+y) = \lambda_t(x)\cdot\lambda_t(y)$, то $\psi_t(x+y) = \psi_t(x) + \psi_t(y)$. Если x — класс эквивалентности линейного расслоения L, то $\psi_{-t}(L) = -tL + t^2L^2 - t^3L^3 + \ldots$, или, эквивалентно, $\psi_t(L) = tL + t^2L^2 + t^3L^3 + \ldots$. Поэтому, согласно принципу расщепления, для любого элемента $x \in K(X)$ имеем $\psi_t(x) = t\psi^1(x) + t^2\psi^2(x) + t^3\psi^3(x) + \ldots$.

Формула, выражающая $\psi_t(x)$ через $\lambda_t(x)$ и $\lambda_t'(x)$, показывает, что элемент $\psi_t(x)$ может быть представлен в виде

$$\psi_t(x) = \sum_{m=1}^{\infty} t^m Q_m'(\lambda^1(x), \ldots, \lambda^m(x)),$$

где Q_m' — некоторые полиномы от $\lambda^1(x), \ldots, \lambda^m(x)$. Более точно, пусть

$$\lambda_t = 1 + \sum_{m=1}^{k} t^m\lambda^m$$

— элемент из факторкольца $Z[\lambda^1, \ldots, \lambda^k][t]/(t^{k+1})$ и

$$\psi_{-t} = -t\lambda_t'/\lambda_t.$$

Тогда $\psi_t = \sum_{m=1}^{k} t^m Q_m'$, где Q_m' — некоторый полином от переменных $\lambda^1, \ldots, \lambda^m$, не зависящий от k. Для того чтобы вычислить коэффициенты полинома Q_m', вложим $Z[\lambda^1, \ldots, \lambda^k]$ в $Z[u_1, \ldots, u_k]$, отображая λ^i в i-ю элементарную симметрическую функцию от переменных u_α. В результате мы получим равенства

$$\lambda_t = \prod_{i=1}^{k}(1 + tu_i)$$

и

$$\lambda_t'/\lambda_t = \sum_{i=1}^{k} u_i/(1 + tu_i) = S_1 - tS_2 + t^2S_3 - \ldots,$$

где $S_r = \sum\limits_{r=1}^{k} (u_i)^r$. Поэтому

$$\psi_t = \sum_{m=1}^{k} Q_m(\lambda^1, \ldots, \lambda^m)\, t^m.$$

Итак, $Q'_m(\lambda^1, \ldots, \lambda^m) = Q_m(\lambda^1, \ldots, \lambda^m)$ и $\psi^k(x) = Q_k(\lambda^1(x), \ldots, \lambda^k(x))$.

Соотношение $\psi^k(\psi^l(x)) = \psi^{kl}(x)$ следует из равенства $\psi^k(\psi^l(L)) = (L^l)^k = L^{lk} = \psi^{kl}(L)$, где L — линейное расслоение.

В кольце $Z[u_1, \ldots, u_p]$, где p — простое число, справедливо соотношение $(u_1 + \ldots + u_p)^p = (u_1)^p + \ldots + (u_p)^p \bmod p$. Следовательно, $Q(\lambda^1, \ldots, \lambda^p) = (\lambda^1)^p \bmod p$ и $\psi^p(x) = x^p \bmod p$. □

7.16. Пусть $\dot{V}$ — пространство Тома комплексного векторного расслоения V с компактной базой X. Пусть U_V — класс Тома расслоения V (1.6) и φ_V: $K(X) \to K(V) \approx \tilde{K}(\dot{V})$ — изоморфизм Тома, задаваемый умножением на элемент U_V. Положим

$$\rho^k(V) = \varphi_V^{-1}(\psi^k(U_V)) \in K(X).$$

7.17. Предложение. *Пусть x — элемент из $K(X)$. Тогда $\varphi_V^{-1}(\psi^k(\varphi_V(x))) = \psi^k(x)\,\rho^k(V)$. Другими словами, имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
K(V) \arrow[r, "\psi^k"] & K(V) \arrow[d, "\varphi_V^{-1}"] \\
K(X) \arrow[u, "\varphi_V"] \arrow[r, "T_V^k"] & K(X)
\end{tikzcd}$$

где отображение T_V^k определяется равенством

$$T_V^k(x) = \psi^k(x)\,\rho^k(V).$$

Доказательство. Это следует из теоремы 7.13 и того факта, что φ_V является изоморфизмом $K(X)$-модулей. □

7.18. Теорема. *Пусть V и V' — комплексные векторные расслоения над пространствами X и X' соответственно. Тогда $\rho^k(V \times V') = \rho^k(V)\,\rho^k(V')$. В частности, если $X = X'$, то в кольце $K(X)$ выполняется равенство $\rho^k(V \oplus V') = \rho^k(V)\,\rho^k(V')$.*

Доказательство. Это следует из коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
& K(V \times V') \arrow[rr, "\psi^k"] & & K(V \times V') \\
K(V) \times K(V') \arrow[ur] \arrow[rr, "\psi^k \times \psi^k"] & & K(V) \times K(V') \arrow[ur] & \\
& K(X \times X') \arrow[uu, dashed, "\varphi_{V \times V'}"] \arrow[rr, dashed, "\psi^k"] & & K(X \times X') \arrow[uu, "\varphi_{V \times V'}"'] \\
K(X) \times K(X') \arrow[uu, "\varphi_V \times \varphi_{V'}"] \arrow[ur, dashed] \arrow[rr, "\psi^k \times \psi^k"] & & K(X) \times K(X') \arrow[uu, "\varphi_V \times \varphi_{V'}"'] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

гомоморфизмы $K(X)\times K(X')\to K(X\times X')$ и $K(V)\times K(V')\to \tilde K(V\times V')$ в которой индуцированы $\cup$-произведением. □

7.19. Следствие. *Пусть x — некоторый элемент из $K(\mathbb{R}^{2n})\approx \tilde K(S^{2n})$. Тогда $\psi^k(x)=k^n x$.*

Доказательство. Рассмотрим $\mathbb{C}^n$ как векторное расслоение над точкой. Тогда $\varphi_{\mathbb{C}^n}(1)$ является образующей группы $K(\mathbb{C}^n)\approx \tilde K(S^{2n})\approx \mathbb{Z}$, так что мы должны проверить равенство $\rho^k(\mathbb{C}^n)=k^n$. На основании только что доказанной теоремы достаточно проверить равенство $\rho^k(\mathbb{C}^n)=k^n$ лишь для $n=1$, т. е. показать, что $\rho^k(x)=kx$ для любого элемента x из $\tilde K(S^2)$. Группа $\tilde K(S^2)$ порождается элементом $\xi-1$, где ξ — линейное расслоение Хопфа (см. III.1.1 и 2.5). Так как $(\xi-1)^2=0$, то $\psi^k(\xi-1)=\xi^k-1=(1+(\xi-1))^k-1=k(\xi-1)$. □

7.20. Предложение. *Отображение $V\mapsto\rho^k(V)$ множества классов изоморфных комплексных векторных расслоений над X в группу $K(X)$ характеризуется следующими свойствами:*

1) $\rho^k(f^*(V))=f^*(\rho^k(V))$ *для любого непрерывного отображения $f\colon X'\to X$ (другими словами, отображение ρ^k естественно)*;

2) $\rho^k(V\oplus V')=\rho^k(V)\,\rho^k(V')$;

3) $\rho^k(L)=1+L+\ldots+L^{k-1}$, *если L — линейное расслоение.*

Доказательство. Для доказательства предложения достаточно проверить равенство 3) в случае, когда X — проективное пространство CP_n, а L — каноническое расслоение над CP_n. Далее, пространство Тома расслоения L отождествляется с пространством CP_{n+1} (см. 2.3), так что изоморфизм Тома

$$\begin{array}{ccc} K(CP^n) & \xrightarrow{\varphi_L} & \tilde K(CP_{n+1}) \\ \wr\wr & & \wr\wr \\ \mathbf{Z}[u]/u^{n+1} & & \mathbf{Z}[u]/u^{n+2} \end{array}$$

— это просто умножение на элемент u (ср. 2.4). Следовательно,

$$\rho^k(L)=\varphi_L^{-1}(\psi^k(1-L))=(1-L^k)/(1-L)=1+L+\ldots+L^{k-1}. \ □$$

7.21. Пример. Если $k=2$, то класс $\rho^k(V)$ совпадает с классом $\Lambda(V)=1+V+\lambda^2(V)+\lambda^3(V)+\ldots$, так как $\Lambda(V)$ удовлетворяет всем условиям предложения 7.20.

7.22. Обозначим через $\mathbb{Q}_k$ подкольцо кольца $\mathbb{Q}$, состоящее из дробей, знаменатели которых суть степени числа k. Определим операцию

$$\rho^k\colon K(X)\to K(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}_k,$$

полагая для каждого элемента $x\in K(X)$, записанного в виде $x=V-n$,

$$\rho^k(x)=\rho^k(V)/k^n.$$

Так как $\rho^k(n) = k^n$ для любого целого числа n (7.19), то эта операция корректно определена.

В качестве важного примера вычисления операции ρ^k рассмотрим *вещественное* проективное пространство RP_{n-1}. В 6.47 мы показали, что $K(RP_{n-1}) = K_{\mathbb{C}}(RP_{n-1})$ является факторалгеброй алгебры $\mathbb{Z}[\lambda']$ по идеалу, порожденному соотношениями $2^g\lambda' = 0$ и $(\lambda')^2 = -2\lambda'$, где g — число целых чисел i, таких что $0 < i < n$ и $i \equiv \operatorname{mod} 2$. При этом $\lambda' = \xi' - 1$, где ξ' — комплексификация канонического линейного расслоения.

7.23. Предложение. *Если k нечетно, то операция*

$$\rho^k\colon K_{\mathbb{C}}(RP_{n-1}) \to K_{\mathbb{C}}(RP_{n-1}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Q}_k$$

определяется равенством

$$\rho^k(l\lambda') = 1 + \frac{k^l - 1}{2k^l}\lambda'.$$

Доказательство. Если $l = 1$, то

$$\rho^k(\lambda') = \rho^k(\xi')/k = \frac{1}{k}(1 + \xi' + \ldots + \xi'^{k-1}).$$

Так как $\xi'^2 = 1$, то мы видим, что

$$\rho^k(\lambda') = \frac{1}{k}\left(\frac{k+1}{2} + \frac{k-1}{2}\xi'\right) = 1 + \frac{k-1}{2k}\lambda'.$$

Применяя индукцию по l, получаем формулу

$$\rho^k(l\lambda') = \left(1 + \frac{k-1}{2k}\lambda'\right)^l = 1 + \frac{k^l - 1}{2k^l}\lambda',$$

как и требовалось. □

7.24. Исследуем теперь операции в *вещественной* K-теории. Без труда определяются операции λ^i, γ^i, λ_t и γ_t. Операции Адамса $\psi^k\colon K_{\mathbb{R}}(X) \to K_{\mathbb{R}}(X)$, $k \in \mathbb{N}$, определяются формулой $\psi^k(x) = Q_k(\lambda^1(x), \ldots, \lambda^k(x))$, где Q_k — полином Ньютона. Очевидно, что $\psi^k(x+y) = \psi^k(x) + \psi^k(y)$ и $\psi^k(L) = L^k$ для вещественных линейных расслоений L. *Единственными нетривиальными результатами являются соотношения $\psi^k(xy) = \psi^k(x)\cdot\psi^k(y)$ и $\psi^k(\psi^l(x)) = \psi^{kl}(x)$, которые будут доказаны в конце этого параграфа с помощью теории представлений* (другое доказательство дано в упр. 8.5).

7.25. Предложение. *Имеют место коммутативные диаграммы*

$$\begin{array}{ccc} K_{\mathbb{R}}(X) & \xrightarrow{c} & K_{\mathbb{C}}(X) \\ \downarrow{\scriptstyle\lambda^k} & & \downarrow{\scriptstyle\lambda^k} \\ K_{\mathbb{R}}(X) & \xrightarrow{c} & K_{\mathbb{C}}(X) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} K_{\mathbb{R}}(X) & \xrightarrow{c} & K_{\mathbb{C}}(X) \\ \downarrow{\scriptstyle\psi^k} & & \downarrow{\scriptstyle\psi^k} \\ K_{\mathbb{R}}(X) & \xrightarrow{c} & K_{\mathbb{C}}(X) \end{array}$$

горизонтальные гомоморфизмы которых суть гомоморфизмы комплексификации.

Доказательство. Естественный гомоморфизм $\lambda^i(E)\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}\to\lambda^i(E\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C})$, где E — вещественное векторное расслоение, является изоморфизмом. Для каждого элемента $x\in K_{\mathbb{R}}(X)$ имеет место равенство $c(\lambda^i(x))=\lambda^i(c(x))$. Так как ψ^k есть полином от переменных λ^i для $i\leqslant k$ и так как c — кольцевой гомоморфизм, то мы имеем также $c(\psi^k(x))=\psi^k(c(x))$. $\square$

7.26. Рассмотрим вещественное векторное расслоение V ранга $8n$, снабженное спинорной структурой. Согласно 5.12, имеет место изоморфизм Тома

$$\varphi_V\colon K_{\mathbb{R}}(X)\to K_{\mathbb{R}}(V).$$

Определим теперь $\rho^k_{\mathbb{R}}(V)$ как класс $\varphi_V^{-1}(\psi^k(U_V))$, где $U_V=\varphi_V(1)$ — класс Тома расслоения V. Согласно 7.24, $\rho^k_{\mathbb{R}}(V\oplus V')=\rho^k_{\mathbb{R}}(V)\rho^k_{\mathbb{R}}(V')$. Кроме того, мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} K_{\mathbb{R}}(V) & \xrightarrow{\psi^k} & K_{\mathbb{R}}(V) \\ \uparrow{\scriptstyle\varphi_V} & & \uparrow{\scriptstyle\varphi_V} \\ K_{\mathbb{R}}(X) & \xrightarrow{T^k_V} & K_{\mathbb{R}}(X) \end{array}$$

где $T^k_V(x)=\psi^k(x)\rho^k_{\mathbb{R}}(x)$.

Для того чтобы избежать путаницы, будем обозначать через $\rho^k_{\mathbb{C}}$ класс ρ^k, определенный в комплексной K-теории (7.16).

7.27. Предложение. *Пусть V — ориентированное вещественное векторное расслоение ранга $4p$. Тогда расслоение $W=V\oplus V$ может быть наделено комплексной и спинорной структурами и выполняется равенство*

$$c(\rho^k_{\mathbb{R}}(W_{\mathbb{R}}))=\rho^k_{\mathbb{C}}(W),$$

где $W_{\mathbb{R}}$ — спинорное расслоение, подстилающее комплексное расслоение W.

Доказательство. Элементарно проверяется, что имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spin}(8p) & \longrightarrow & \mathrm{Spin}^c(8p) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathrm{SO}(4p) & \longrightarrow & \mathrm{U}(8p) \end{array}$$

где вертикальные гомоморфизмы определены так же, как в 4.18 и 4.26. Из предложения 5.12 вытекает, что мы имеем следующую коммутативную диаграмму с изоморфизмами Тома:

$$\begin{tikzcd} K_{\mathbb{R}}(X) \arrow[r, "\varphi_{W_{\mathbb{R}}}"] \arrow[d, "c'"] & K_{\mathbb{R}}(W_{\mathbb{R}}) \arrow[d, "c"] \\ K_{\mathbb{C}}(X) \arrow[r, "\varphi_{W}"] & K_{\mathbb{C}}(W) \end{tikzcd}$$

Следовательно, $c(U_{W_{\mathbb{R}}}) = U_W$. Так как операции ψ^k коммутируют с комплексификацией (7.25), то из последнего равенства получается требуемое утверждение. □

7.28. Следствие. *Пусть V — спинорное расслоение ранга 8 ч. Тогда $c(\rho^k_{\mathbb{R}}(V)^2) = \rho^k_{\mathbb{C}}(W)$, где $W = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ — комплексификация расслоения V*

**7.29. Замечание.* Обозначим через $K_{\mathrm{spni}}(X)$ подгруппу в $K_{\mathbb{R}}(X)$, порожденную спинорными расслоениями ранга $\equiv 0 \bmod 8$. Согласно 4.20, мы можем отождествить $K_{\mathrm{spin}}(X)$ с подгруппой в $K_{\mathbb{R}}(X)$, состоящей из таких элементов x, что $\operatorname{rank}(x) \equiv 0 \bmod 8$ и $w_1(x) = w_2(x) = 0$. Если $x = [V] - [V'] \in K_{\mathrm{spin}}(X)$, то на расслоениях V и V' корректно определены спинорные структуры, с точностью до умножения на линейное расслоение. Следовательно, если число k нечетно, то класс $\rho^k(x) \in K_{\mathbb{R}}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_k$ корректно определен. С другой стороны, если k четно, то класс $\rho^k(x) \in K_{\mathbb{R}}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_k$ определен лишь с точностью до умножения на линейное расслоение. Однако если $H^1(X; Z/2) = 0$, то все линейные расслоения тривиальны и, следовательно, в этом случае класс $\rho^k(x)$ также корректно определен. *

7.30. Предложение. *Пусть ξ — каноническое линейное расслоение над RP_{n-1} и k — целое нечетное число. Тогда*

$$\rho^k(4l\xi + 4l) = k^{4l}\left(1 + \frac{k^{2l}-1}{2k^{2l}}\lambda\right),$$

где $\lambda = \xi - 1$.

Доказательство. Так как гомоморфизм $K_{\mathbb{R}}(RP_{m-1}) \to K_{\mathbb{R}}(RP_{n-1})$ является эпиморфизмом при $m \geqslant n$ (6.44), то для доказательства достаточно рассмотреть случай $n - 1 \equiv 0 \bmod 8$. В этом случае гомоморфизм комплексификации

$$K_{\mathbb{R}}(RP_{n-1}) \to K_{\mathbb{C}}(RP_{n-1})$$

является изоморфизмом (следствие 6.46). Поскольку расслоение $2\xi = \xi \oplus \xi$ ориентируемо, из предложения 7.28 следует, что $c(\rho^k_{\mathbb{R}}(4l\xi \oplus 4l)) = \rho^k_{\mathbb{C}}(2l\xi' + 2l)$, где $\xi' = \xi \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Поэтому, согласно предложению 7.23, $c(\rho^k_{\mathbb{R}}(4l\xi + 4l)) = \rho^k_{\mathbb{C}}(2l\lambda' + 4l) = k^{4l}\left(1 + \frac{k^{2l}-1}{2k^{2l}}\lambda'\right)$.

Так как $c(\lambda) = \lambda'$, мы получаем требуемую формулу. □

7.31. Вернемся теперь к упомянутым в 7.24 равенствам $\psi^k(xy) = \psi^k(x)\psi^k(y)$ и $\psi^k(\psi^l(x)) = \psi^{kl}(x)$. Для доказательства этих равенств нам понадобятся некоторые сведения из теории представлений компактных групп Ли (соответствующий материал можно найти, например, в книге Адамса [3]).

Пусть G — компактная группа Ли. Обозначим через $R_F(G)$, где $F = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, группу Гротендика категории конечномерных над F представлений группы G. Группа $R_F(G)$ является свободной группой, базис которой образован множеством неприводимых представлений группы G. Композиция $R_{\mathbb{R}}(G) \xrightarrow{c} R_{\mathbb{C}}(G) \xrightarrow{r} R_{\mathbb{R}}(G)$, где c — комплексификация, а r — овеществление, представляет собой гомоморфизм умножения на 2. Следовательно, $R_{\mathbb{R}}(G)$ можно рассматривать как подгруппу $R_{\mathbb{C}}(G)$.

7.32. Сопоставим каждому представлению $\rho\colon G \to \mathrm{Aut}(V)$ его *характер* $\chi = \chi_\rho\colon G \to F$, определяемый формулой $\chi(g) = \mathrm{Tr}(\rho(g))$. Очевидно, что $\chi(tgt^{-1}) = \chi(g)$. Отображение из $R_F(G)$ в $\mathcal{F}(G, F)$ (пространство непрерывных отображений из G в F), которое сопоставляет каждому представлению его характер, является инъективным (Адамс [3]). Обозначим через $\lambda^k(\rho)$ представление группы G в пространство $\lambda^k(V)$, задаваемое формулой $\lambda^k(\rho)(g) = \lambda^k(\rho(g))\colon \lambda^k(V) \to \lambda^k(V)$. Определим теперь $\psi^k(\rho)$ как элемент $Q_k(\lambda^1(\rho), \ldots, \lambda^k(\rho)) \in R_F(G)$, где Q_k — полином Ньютона. Рассуждения, использованные при доказательстве теоремы 7.15, показывают, что $\psi^k(\rho + \sigma) = \psi^k(\rho) + \psi^k(\sigma)$.

7.33. Предложение. (см. Адамс [3]). *Пусть $\chi_\rho\colon G \to F$ — характер представления ρ. Тогда характер представления $\psi^k(\rho)$ равен $g \mapsto \chi_\rho(g^k)$.*

Доказательство. Так как отображение из $R_{\mathbb{R}}(G)$ в $R_{\mathbb{C}}(G)$ мономорфно и так как $\lambda^i(\rho \otimes \mathbb{C}) = \lambda^i(\rho) \otimes \mathbb{C}$, мы можем ограничиться рассмотрением случая $F = \mathbb{C}$. Поскольку группа G компактна, то представление ρ может быть разложено в композицию $G \to \mathrm{U}(n) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$ (где второе отображение есть очевидный мономорфизм) при подходящем выборе изоморфизма $\mathbb{C}^n \approx V$. Если $t_1, \ldots, t_n$ — собственные значения $\rho(g)$, то мы имеем $\mathrm{Tr}(\rho(g)) = t_1 + \ldots + t_n$, $\mathrm{Tr}(\lambda^2(\rho)(g)) = \sum\limits_{i<j} t_i t_j$ и $\mathrm{Tr}(\lambda^k(\rho)(g)) = \sigma_k$, где σ_k есть k-я элементарная симметрическая функция от переменных t_i. Следовательно, $\mathrm{Tr}(\psi^k(\rho)(g)) = Q_k(\sigma_1, \ldots, \sigma_k) = \mathrm{Tr}(\rho(g))^k = \mathrm{Tr}(\rho(g^k)) = \chi_\rho(g^k)$. $\square$

7.34. Предложение. *Пусть ρ и σ — представления группы G. Тогда в кольце $R_F(G)$ имеет место равенство $\psi^k(\rho\sigma) = \psi^k(\rho)\psi^k(\sigma)$. Следовательно, $\psi^k\colon R_F(G) \to R_F(G)$ — кольцевой гомоморфизм.*

Доказательство. Нам нужно лишь проверить формулу $\chi_{\psi^k(\rho\sigma)}(g) = \chi_{\psi^k(\rho)}(g) \cdot \chi_{\psi^k(\rho)}(g)$. Так как $\chi_{\psi^k(\rho)}(g) = \chi_\rho(g^k)$ и $\chi_{\psi^k(\sigma)}(g) = \chi_\sigma(g^k)$, то мы имеем $\chi_{\psi^k(\rho\sigma)}(g) = \chi_{\rho\sigma}(g^k) = \chi_\rho(g^k) \cdot \chi_\sigma(g^k) = \chi_{\psi^k(\rho)}(g) \cdot \chi_{\psi^k(\sigma)}(g)$. $\square$

7.35. Замечание. Если G_1 и G_2 — компактные группы Ли, то существует билинейное спаривание

$$R_F(G_1)\times R_F(G_2)\to R_F(G_1\times G_2),$$

обозначаемое через $(\rho_1, \rho_2)\mapsto\rho_1\cup\rho_2$ (так называемое *внешнее тензорное произведение* представлений). Если π_i: $G_1\times G_2\to G_i$ — очевидные проекции, то, по определению, $\rho_1\cup\rho_2=\pi_1^*(\rho_1)\cdot\pi_2^*(\rho_2)$ в $R_F(G_1\times G_2)$. Отсюда мы приходим к формуле $\psi^k(\rho_1\cup\rho_2)$ $=\psi^k(\rho_1)\cup\psi^k(\rho_2)$.

7.36. Предложение. *В группе $R_F(G)$ имеет место формула*

$$\psi^k(\psi^l(\rho))=\psi^{kl}(\rho).$$

Доказательство. $\chi_{\psi^k(\psi^l(\rho))}(g)=\chi_{\psi^k}(g^l)=\chi((g^l)^k)=\chi(g^{kl})=\chi_{\psi^{kl}(\rho)}(g)$. □

7.37. Теорема. *Пусть c: $R_{\mathbb{R}}(G)\to R_{\mathbb{C}}(G)$ (соотв. r: $R_{\mathbb{C}}(G)$ $\to R_{\mathbb{R}}(G)$) — гомоморфизм комплексификации (соотв. гомоморфизм овеществления). Тогда имеют место две коммутативные диаграммы*

$$\begin{array}{ccc} R_{\mathbb{R}}(G) & \xrightarrow{\psi^k} & R_{\mathbb{R}}(G)\\ \downarrow{c} & & \downarrow{c}\\ R_{\mathbb{C}}(G) & \xrightarrow{\psi^k} & R_{\mathbb{C}}(G)\end{array}\qquad\qquad \begin{array}{ccc} R_{\mathbb{C}}(G) & \xrightarrow{\psi^k} & R_{\mathbb{C}}(G)\\ \downarrow{r} & & \downarrow{r}\\ R_{\mathbb{R}}(G) & \xrightarrow{\psi^k} & R_{\mathbb{R}}(G)\end{array}$$

Доказательство. Так как c — кольцевой гомоморфизм, то коммутативность первой диаграммы следует из тождества $\lambda^i(\rho\otimes\mathbb{C})$ $=\lambda^i(\rho)\otimes\mathbb{C}$. Пусть теперь σ: $G\to\mathrm{Aut}(V)$ — произвольное комплексное представление и ρ — соответствующее ему вещественное представление. Тогда мы имеем $\chi_\rho(g)=\chi_\sigma(g)+\overline{\chi_\sigma(g)}$. Следовательно, $\chi_{\psi^k(\rho)}(g)=\chi_\sigma(g^k)+\overline{\chi_\sigma(g)^k}=\chi_{r(\psi^k(\sigma))}(g)$. □

7.38. Вернемся к исследованию свойств операций Адамса

$$\psi^k\colon K_{\mathbb{R}}(X)\to K_{\mathbb{R}}(X).$$

Заметим, что применяемый нами метод может быть использован также и для комплексных операций Адамса ψ^k: $K_{\mathbb{C}}(X)\to K_{\mathbb{C}}(X)$ и дает другое, более „элементарное" доказательство теорем 7.13 и 7.15.

Пусть E — вещественное векторное расслоение. Мы можем представить его в виде $E=P\times_G\mathbb{R}^n$, где P — главное G-расслоение (4.14) и G действует на $\mathbb{R}^n$ при помощи представления ρ: $G\to\mathrm{O}(n)$. Например, можно взять в качестве G группу $\mathrm{O}(n)$ и в качестве P главное $\mathrm{O}(n)$-расслоение, ассоциированное с расслоением E (4.14). Таким образом, $\lambda^k(E)=P\times_G\lambda^k(\mathbb{R}^n)$, где G естественным образом действует на пространстве $\lambda^k(\mathbb{R}^n)$. Более общим образом, если $V=V^+-V^-\in R_{\mathbb{R}}(G)$, где V^+ и V^- — ортогональные представления, то мы имеем корректно определенный элемент $E_V=[P\times_G V^+]$ $-[P\times_G V^-]\in K(X)$; мы будем записывать этот элемент просто как

$E_V = P \times_G V$. В частности, $\psi^k(E)$ является элементом вида E_V, с $V = \psi^k(\rho)$.

Если $E_1 = P_1 \times_{O(n_1)} \mathbb{R}^{n_1}$ и $E_2 = P_2 \times_{O(n_2)} \mathbb{R}^{n_2}$, то

$$E_1 \otimes E_2 = (P_1 \times_X P_2) \times_{O(n_1) \times O(n_2)} (\mathbb{R}^{n_1} \otimes \mathbb{R}^{n_2}),$$

где пространство $\mathbb{R}^{n_1} \otimes \mathbb{R}^{n_2}$ естественным образом снабжено структурой $O(n_1) \times O(n_2)$-модуля. Пусть $\psi^k(\mathbb{R}^{n_1}) = V_1^+ - V_1^-$ и $\psi^k(\mathbb{R}^{n_2}) = V_2^+ - V_2^-$. Согласно 7.35,

$$\psi^k(\mathbb{R}^{n_1} \otimes \mathbb{R}^{n_2}) = \psi^k(\mathbb{R}^{n_1}) \cup \psi^k(\mathbb{R}^{n_2}) = V_1^+ \otimes V_2^+ + V_1^- \otimes V_2^- - V_1^+ \otimes V_2^- - V_1^- \otimes V_2^+.$$

Следовательно, если положить $P = P_1 \times_X P_2$ и $G = O(n_1) \times O(n_2)$, то мы получим

$$\begin{aligned}\psi^k(E_1 \otimes E_2) &= [P \times_G V_1^+ \otimes V_2^+] + [P \times_G V_1^- \otimes V_2^-] - [P \times_G V_1 \otimes V_2^-] - [P \times_G V_1^- \otimes V_2^+] \\ &= (P_1 \times_{O(n_1)} V_1^+) \otimes (P_2 \times_{O(n_2)} V_2^+) + (P_1 \times_{O(n_1)} V_1^-) \otimes (P_2 \times_{O(n_2)} V_2^-) \\ &\quad - (P_1 \times_{O(n_1)} V_1^+) \otimes (P_2 \times_{O(n_2)} V_2^-) - (P_1 \times_{O(n_1)} V_1^-) \otimes (P_2 \times_{O(n_2)} V_2^+) \\ &= (P_1 \times_{O(n_1)} (V_1^+ - V_1^-)) \otimes (P_2 \times_{O(n_2)} (V_2^+ - V_2^-)) = \psi^k(E_1) \otimes \psi^k(E_2).\end{aligned}$$

Так как $\psi^k\colon K_{\mathbb{R}}(X) \to K_{\mathbb{R}}(X)$ — гомоморфизм групп, то соотношение $\psi^k(xy) = \psi^k(x)\,\psi^k(y)$ справедливо для всех $x, y \in K_{\mathbb{R}}(X)$.

7.39. Если $E = P \times_{O(n)} \mathbb{R}^n$, то мы имеем $\psi^l(E) = P \times_{O(n)} V^+ - P \times_{O(n)} V^-$, где $\psi^l(\mathbb{R}^n) = V^+ - V^- \in R_{\mathbb{R}}(O(n))$. Аналогично

$$\psi^k(\psi^l(E)) = P \times_{O(n)} W^+ - P \times_{O(n)} W^- - P \times_{O(n)} T^+ + P \times_{O(n)} T^-,$$

где $W^+ - W^- = \psi^k(V^+)$ и $T^+ - T^- = \psi^k(V^-) \in R_{\mathbb{R}}(O(n))$. Так как $\psi^k(\psi^l(\mathbb{R}^n)) = \psi^{kl}(\mathbb{R}^n)) = W^+ - W^- - T^+ + T^-$ (7.37), то $\psi^k(\psi^l(E)) = \psi^{kl}(E)$. По аддитивности, для любого элемента x из $K_{\mathbb{R}}(X)$ получаем $\psi^k(\psi^l(x)) = \psi^{kl}(x)$.

7.40. Предложение. *Имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd} K_{\mathbb{C}}(X) \arrow[r, "\psi^k"] \arrow[d, "r"'] & K_{\mathbb{C}}(X) \arrow[d, "r"] \\ K_{\mathbb{R}}(X) \arrow[r, "\psi^k"] & K_{\mathbb{R}}(X) \end{tikzcd}$$

в которой r — гомоморфизм овеществления.

Доказательство. Пусть $E = P \times_{U(n)} \mathbb{C}^n$ — комплексное векторное расслоение (4.14). Тогда $r(\psi^k(E)) = P \times_{U(n)} \psi^k(\mathbb{C}^n)$, где $\psi^k(\mathbb{C}^n)$ рассматривается как элемент группы $R_{\mathbb{R}}(U(n))$. С другой стороны, $\psi^k(r(E)) = P \times_{U(n)} \psi^k(\mathbb{C}^n)$, где $\mathbb{C}^n$ рассматривается как *вещественный* $U(n)$-

модуль $\mathbb{R}^{2n}$. Так как, согласно теореме 7.37, диаграмма

$$\begin{tikzcd} R_{\mathbb{C}}(\mathrm{U}(n)) \arrow[r, "\psi^k"] \arrow[d, "r"'] & R_{\mathbb{C}}(\mathrm{U}(n)) \arrow[d, "r"] \\ R_{\mathbb{R}}(\mathrm{U}(n)) \arrow[r, "\psi^k"] & R_{\mathbb{R}}(\mathrm{U}(n)) \end{tikzcd}$$

коммутативна, то $\psi^k(\mathbb{R}^{2n}) = \psi^k(\mathbb{C}^n)$ как элемент из $R_{\mathbb{R}}(\mathrm{U}(n))$. Следовательно, $r(\psi^k(E)) = \psi^k(r(E))$ и, по аддитивности, $r(\psi^k(x)) = \psi^k(r(x))$ для любого элемента $x \in K_{\mathbb{C}}(X)$. □

Упражнения: 5—7, 15, 16.

8. Упражнения

**8.1.* Пусть E — ориентированное расслоение. Вычислить число спинорных структур (соотв. ^{c}spin-структур), которые могут быть заданы на E, в предположении что $w_2(E) = 0$ (соотв. $\beta(w_2(E)) = 0$, где β: $H^2(X; \mathbb{Z}/2) \to H^3(X; \mathbb{Z}/2)$ — гомоморфизм Бокштейна). Рассмотреть, в частности, случай односвязного пространства X. *

8.2. Пусть ρ: $\mathrm{U}(n) \to \mathrm{U}(n)/\mathrm{U}(n-1) \approx S^{2n-1}$ — каноническая проекция и γ — каноническая образующая группы $K_{\mathbb{C}}^{-1}(S^{2n-1})$. Показать, что с точностью до знака элемент $\rho^*(\gamma)$ равен альтернированной сумме $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\lambda^i$, где λ^i — элемент из $K_{\mathbb{C}}^{-1}(\mathrm{U}(n))$, индуцированный i-й внешней степенью канонического представления $\mathrm{U}(n) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$ (см. II.3.17).

Доказать индукцией по n, что $K_{\mathbb{C}}^{\#}(\mathrm{U}(n))$ является внешней алгеброй, порожденной элементами $\lambda^1, \ldots, \lambda^n$ (применить теорему 1.3).

8.3. Пусть V — Вещественное векторное расслоение в смысле п. III.7.13. Используя технику, развитую в § IV.2 и в упр. III.7.13 и 14, показать, что $KR(P(V))$ является свободным $KR(X)$-модулем ранга $n = \mathrm{rank}(V)$ с базисом $1, h, h^2, \ldots, h^{n-1}$, где h — класс эквивалентности канонического линейного расслоения над $P(V)$ (это расслоение является Вещественным расслоением). Кроме того, доказать равенство

$$h^n - \lambda^1(V)h^{n-1} + \lambda^2(V)h^{n-2} + \ldots + (-1)^n\lambda^n(V) = 0$$

(ср. с 2.16).

8.4 (продолжение упр. 8.3). Используя метод § 3, вычислить $KR(F(V))$ и $KR(G_k(V))$. В частности, доказать, что каноническое отображение $KR(X) \to KR(F(V))$ является мономорфизмом и что π^*V есть сумма Вещественных линейных расслоений (*принцип расщепления в KR-теории*).

8.5. Доказать существование и единственность операций Адамса ψ^k: $KR(X) \to KR(X)$, определенных для любого компактного пространства X с инволюцией и таких, что $\psi^k(x+y) = \psi^k(x) + \psi^k(y)$ и $\psi^k(L) = L^k$ для Вещественных линейных расслоений L. Доказать, что если пространство X снабжено тривиальной инволюцией и группа $KR(X)$ отождествлена с $K_{\mathbb{R}}(X)$, то эти операции Адамса совпадают с операциями, оперделенными в 7.24. Показать, наконец, что ψ^k — кольцевой гомоморфизм (это дает новое доказательство результатов п. 7.38).

8.6. Пусть T^n — тор размерности n, рассматриваемый как топологическая группа. Доказать, что $R_{\mathbb{C}}(T^n)$ — алгебра полиномов Лорана $Z[t_1, \ldots, t_n, t_1^{-1}, \ldots, t_n^{-1}]$, где t_i — класс эквивалентности одномерного представления

$$T^n \xrightarrow{\mathrm{pr}_n} T^1 = \mathrm{U}(1) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{C}).$$

Обозначим через $\mathcal{I}$ идеал кольца $R_{\mathbb{C}}(T^n)$, равный $\mathrm{Ker}[R_{\mathbb{C}}(T^n) \xrightarrow{\varepsilon} Z]$, где $\varepsilon(t_i) = 1$. Показать, что пополнение $\hat{R}_{\mathbb{C}}(T^n)$ кольца $R_{\mathbb{C}}(T^n)$ относительно $\mathcal{I}$-адической топологии есть кольцо $Z[[x_1, \ldots, x_n]]$, где $x_i = t_i - 1$ (по определению, $\hat{R}_{\mathbb{C}}(T^n) = \mathrm{proj\,lim}\, R_{\mathbb{C}}(T^n)/\mathcal{I}^r$).

Доказать существование изоморфизма

$$Z[[x_1, \ldots, x_n]] \approx \hat{R}_{\mathbb{C}}(T^n) \xrightarrow{\approx} \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(\underbrace{\mathrm{BU}(1) \times \ldots \times \mathrm{BU}(1)}_{n \text{ раз}}).$$

8.7. Пусть $\mathrm{U}(n)$ — унитарная группа ранга n, рассматриваемая как топологическая группа. Доказать что кольцо $R_{\mathbb{C}}(\mathrm{U}(n))$ изоморфно алгебре $Z[\lambda^1, \ldots, \lambda^n, (\lambda^n)^{-1}]$, где λ^i является i-й внешней степенью канонического представления $\mathrm{U}(n) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$. Используя тот же самый метод, что и в упр. 8.6, доказать существование изоморфизма

$$Z[[y_1, \ldots, y_n]] \approx \hat{R}_{\mathbb{C}}(\mathrm{U}(n)) \xrightarrow{\approx} \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(\mathrm{BU}(n)).$$

8.8. Используя теорему 6.40, полностью вычислить группы $K^i_{\mathbb{R}}(RP_n, RP_m)$ и $K^i_{\mathbb{C}}(RP_n, RP_m)$.

8.9. Пусть S, X — компактные многообразия и $S \xrightarrow{\pi} X$ — расслоение на сферы, причем $\dim(S) - \dim(X) \equiv 0 \bmod 8$, и пусть $i\colon X \to S$ — сечение этого расслоения. В предположении, что расслоение $TX - i^*(TS)$ наделено стабильной спинорной структурой, доказать, что $K^*_{\mathbb{R}}(S)$ является свободным $K^*_{\mathbb{R}}(X)$-модулем ранга 2.

Сформулировать и доказать аналогичное утверждение в комплексной K-теории.

8.10. Пусть HP_n — проективное пространство размерности n над телом кватернионов $\mathbb{H}$. Показать, что $K_{\mathbb{C}}(HP_n) \approx Z[\beta]/\beta^{n+1}$, где β — класс канонического расслоения над HP_n, рассматриваемого как комплексное расслоение ранга 2. Пусть $\pi\colon CP_{2n+1} \to HP_n$ — очевидное отображение. Показать, что гомоморфизм $K_{\mathbb{C}}(HP_n) \xrightarrow{\pi^*} K_{\mathbb{C}}(CP_{2n+1})$ является мономорфизмом и что $\pi^*(\beta) = h + \bar{h}$, где h — класс канонического линейного расслоения над CP_{2n+1}. Вычислить $\psi^k(\beta)$. Проделать аналогичные вычисления для $K_{\mathbb{R}}(HP_n)$ и $K_{\mathbb{H}}(HP_n)$.

8.11. Пусть G — конечная абелева группа и V — комплексное G-расслоение над G-пространством X (в смысле п. I.9.29), являющееся суммой линейных G-расслоений. Обозначим через K_G комплексный эквивариантный K-функтор (I.9.30). Показать, что $K_G(V)$ является свободным $K_G(X)$-модулем ранга 1, порожденным описанным в 1.6 классом Тома. Пусть G свободно действует на сферическом расслоении $S(V)$ и X — точка. Доказать точность последовательности

$$R_{\mathbb{C}}(G) \xrightarrow{\sigma} R_{\mathbb{C}}(G) \to K_{\mathbb{C}}(S(V)/G) \to 0,$$

где σ — гомоморфизм умножения на $\sum_{i=0}^{\dim(V)} (-1)^i \lambda^i(V)$, а $\lambda^i(V)$ рассматривается как элемент из $R_{\mathbb{C}}(G)$.

8.12. Пусть X — пространство конечного типа (3.23). Определим *характеристику Эйлера — Пуанкаре* $\chi(X)$ пространства X, полагая

$$\chi(X) = \dim K_{\mathbb{C}}^0(X) \otimes \mathbb{Q} - \dim K_{\mathbb{C}}^{-1}(X) \otimes \mathbb{Q}$$

(в силу V.3.25, это — обычная характеристика Эйлера — Пуанкаре). Доказать следующие свойства χ:

a) $\chi(X_1 \cup X_2) - \chi(X_1 \cap X_2) = \chi(X_1) + \chi(X_2)$;

b) $\chi(X_1 \times X_2) = \chi(X_1) \cdot \chi(X_2)$;

c) более общим образом, если $E \to B$ — расслоение со слоем F, то $\chi(E) = \chi(B) \cdot \chi(F)$.

Вывести из свойства c) следующее утверждение: если конечная группа G свободно действует на компактном пространстве X конечного типа и пространство X/G имеет конечный тип, то порядок группы G делит характеристику Эйлера — Пуанкаре пространства X.

8.13. Пусть V — ориентированное векторное расслоение ранга n над компактным пространством X. Доказать изоморфизм $K(X)$-модулей $K(X) \otimes Z[1/2] \approx K^n(V) \otimes Z[1/2]$ (см. Каруби [2]).

**8.14.* Пусть X — локально-компактное пространство и Φ — семейство замкнутых подмножеств в X, удовлетворяющее следующим условиям:

1) любое конечное объединение элементов из Φ принадлежит Φ;
2) всякое замкнутое подмножество элемента из Φ принадлежит Φ;
3) каждый элемент из Φ имеет окрестность из семейства Φ.

Используя материал § II.5, „разумным образом“ определить комплексную K-теорию с носителями из Φ (обозначение: $K_\Phi(X)$) и доказать изоморфизм $K_\Phi(X)\otimes\mathbb{Q}\approx H_\Phi^{\text{чёт}}(X;\mathbb{Q})$, где H_Φ — когомологии с носителями из семейства Φ. *

8.15. Пусть S^{2n} — сфера размерности $2n$.

а) Доказать, что для $x\in K'_{\mathbb{C}}(S^{2n})$

$$\lambda_t(x)=1+\left[\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!\,t^{n-1}}{(1+t)^n}f_n(t)-1\right]x,$$

где $f_n\in Z[t]$ и $f_n(-1)=1$.

b) Используя a), показать, что для любого комплексного векторного расслоения ранга n над S^{2n} имеет место равенство $\lambda_{-1}(E)=(n-1)!\,x$, где $x=[E]-n$.

c) Пусть M — неприводимый комплексный $C^{0,2n}$-модуль и ε — градуирование M (IV.5.2). Пару (M,ε) можно рассматривать как $C^{0,2n+1}$-модуль, который мы снова обозначим через M. Пусть π — отображение сферы S^{2n} в точку и $V=TS^{2n}$ — касательное расслоение. Над каждой точкой $w\in S^{2n}\subset\mathbb{R}^{2n+1}$ умножение Клиффорда на векторы, ортогональные к w, задает в π^*M структуру $C(V)$-модуля. С другой стороны, умножение Клиффорда на вектор w задает градуирование $C(V)$-модуля π^*M, которое мы будем обозначать через η. Следовательно, тройка $(\pi^*M,\eta,-\eta)$ определяет элемент группы $K_{\mathbb{C}}^V(X)$, описанной в IV.5.1, где $X=S^{2n}$.

Доказать, что образ этого элемента при забывающем гомоморфизме

$$K_{\mathbb{C}}^V(X)\to K_{\mathbb{C}}(X)\to \tilde K_{\mathbb{C}}(X)$$

есть дважды взятая образующая группы $\tilde K(X)\approx Z$.

Доказать также, что этот элемент является образующей группы $K_{\mathbb{C}}^V(X)\approx K_{\mathbb{C}}(V)\approx Z$ (IV.6.21).

d) Вывести из b) и c), что касательное расслоение TS^{2n} может быть наделено комплексной структурой тогда и только тогда, когда $n=1$ или 3. (Это упражнение дает чисто K-теорное доказательство старого результата Бореля — Серра [1]. Другое доказательство будет дано в § V.3.)

8.16. Пусть X — такое компактное пространство, что группа $K(X)$ порождается линейными расслоениями L_i, причем $(L_i)^p=1$ для фиксированного простого числа p. Показать, что кручение группы $K(X)$ p-примарно.

9. Исторические замечания

Изоморфизм Тома в комплексной K-теории используется как главное техническое средство в теореме Атьи — Хирцебруха — Римана — Роха (для категории почти-комплексных многообразий). Гомоморфизм Тома в вещественной K-теории имеет аналогичные применения; он установлен Атьёй, Боттом и Шапиро [1].

Вычисления комплексного K-функтора для комплексных проективных расслоений, расслоений на флаги и грассмановых расслоений основаны на работах Атьи [3] и Гротендика [2]. Доказательство формулы Кюннета в § IV.3 взято из работы Атьи [2].

Вычисление групп K для вещественного проективного пространства имеет существенное значение для решения проблемы о векторных полях на сферах (§ V.3). Этот результат (принадлежащий Адамсу [1]) обобщен в § IV.6 на случай вещественных проективных расслоений.

Наконец, понятие операций в K-теории, очень важное для приложений, принадлежит Гротендику [1], Адамсу [4] и Атье [5].

Глава V

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ K-ТЕОРИИ

1. Структуры H-пространства на сферах и инвариант Хопфа

1.1. Пусть α: $S^{n-1} \to S^{n-1}$ — непрерывное отображение. Тогда $\tilde{K}_{\mathbf{C}}^{n-1}(S^{n-1}) \approx \mathbb{Z}$ и отображение α индуцирует эндоморфизм группы $\mathbb{Z}$ вида $x \mapsto \lambda x$, где $\lambda \in \mathbb{Z}$. Целое число λ называется *степенью* отображения α и обозначается через $\deg(\alpha)$. В частности, если α — гомеоморфизм, то $\deg(\alpha) = \pm 1$. Можно доказать (см. Ху [1]), что $\pi_{n-1}(S^{n-1}) \approx \mathbb{Z}$, причем этот изоморфизм задается степенью. Однако в настоящем параграфе этот результат нам не понадобится.

1.2. Пусть m: $S^{n-1} \times S^{n-1} \to S^{n-1}$ — непрерывное отображение. Говорят, что отображение m имеет *бистепень* (p, q), если отображения $x \mapsto m(x, x_0)$ и $y \mapsto m(x_0, y)$ имеют соответственно степени p и q (это определение не зависит от выбора точки x_0). Сфера S^{n-1} называется *H-пространством* (относительно отображения m), если отображения $x \mapsto m(x, x_0)$ и $y \mapsto m(x_0, y)$ гомотопны тождественному отображению (откуда следует, что $p = q = 1$). Например, сферы S^1, S^3 и S^7 являются H-пространствами относительно умножения комплексных чисел, кватернионов и чисел Кэли соответственно. В этом параграфе мы докажем, что перечисленные сферы и сфера S^0 являются единственными сферами, допускающими структуру H-пространства. Более точно, мы докажем, что нечетные степени p и q указанных выше отображений могут встречаться лишь в размерностях $n = 1, 2, 4$ и 8. Отсюда будет следовать, что конечномерные вещественные векторные пространства, допускающие структуру алгебры с делением (не обязательно ассоциативной и не обязательно имеющей единицу), могут иметь лишь размерности 1, 2, 4 или 8. При доказательстве этих результатов основную роль играет понятие инварианта Хопфа.

1.3. Инвариант Хопфа. Пусть n — четное число и f: $S^{2n-1} \to S^n$ — непрерывное отображение, переводящее отмеченную точку $(1, 0, \ldots$ $\ldots, 0) \in S^{2n-1}$ в точку $(1, 0, \ldots, 0) \in S^n$. *Инвариантом Хопфа* отображения f называется целое число $h(f)$, зависящее только от гомотопического класса f в $\pi_{2n-1}(S^n)$, которое определяется следующим образом. Рассмотрим последовательность Пуппе, ассоциированную с отображением f (II.3.29):

$$S^{2n-1} \to S^n \xrightarrow{i} Cf \xrightarrow{j} S^{2n} \to S^{n+1}.$$

Применяя к этой последовательности функтор $\tilde{K} = \tilde{K}_{\mathbf{C}}$, мы получаем короткую точную последовательность

$$0 \to \tilde{K}(S^{2n}) \xrightarrow{j^*} \tilde{K}(Cf) \xrightarrow{i^*} \tilde{K}(S^n) \to 0.$$

Следовательно, $\tilde{K}(C_f) \approx Z \oplus Z$ с образующими u и v, где $v = j^*(\beta_{2n})$, $i^*(u) = \beta_n$, β_n — произвольная образующая группы $\tilde{K}(S^n)$ и $\beta_{2n} = \beta_n \cup \beta_n$. Таким образом, в кольце $\tilde{K}(Cf)$ выполнены соотношения $v^2 = uv = 0$ и $u^2 = \lambda v$ для некоторого целого λ. Так как $(u + mv)^2 = u^2$ для некоторого $m \in Z$, то это целое число λ не зависит от выбора u. Положим $\lambda = h(f)$. Легко проверить, что соответствие $f \mapsto h(f)$ определяет гомоморфизм из $\pi_{2n-1}(S^n)$ в Z. Если r: $S^n \to S^n$ и s: $S^{2n-1} \to S^{2n-1}$ — непрерывные отображения, то имеет место формула $h(rfs) = \deg(s)\deg(r)^2 h(f)$.

Существуют и другие определения инварианта Хопфа, однако можно показать, что все они эквивалентны данному выше.

1.4. Вернемся теперь к нашему „умножению" m: $S^{n-1} \times S^{n-1} \to S^{n-1}$ бистепени (p, q), где число n предполагается четным (случай нечетного n много проще и будет рассмотрен в конце этого параграфа). Для простоты мы (без потери общности) будем считать, что $m(e, e) = e$, где $e = (1, 0, \ldots, 0)$ — отмеченная точка сферы S^{n-1}. Покажем, как, исходя из отображения m, получить отображение f: $S^{2n-1} \to S^n$ с инвариантом Хопфа, равным pq. С этой целью рассмотрим каждый из сомножителей S_1 и S_2 произведения $S^{n-1} \times S^{n-1}$ как границу шара B_1 (соотв. B_2) размерности n. Следовательно, B_i является фактопространством произведения $S_i \times [0, 1]$ по отношению эквивалентности, склеивающему в точку подпространство $S_i \times \{1\}$.

Пусть S^n_+ (соотв. S^n_-) — верхняя (соотв. нижняя) полусфера сферы S^n, задаваемая условием $x_{n+1} \geqslant 0$ (соотв. $x_{n+1} \leqslant 0$). Тогда $S^n_+ \cup S^n_- = S^n$, $S^n_+ \cap S^n_- = S^{n-1}$ и обе полусферы S^n_+ и S^n_- можно отождествить с факторпространством произведения $S^{n-1} \times [0, 1]$ по отношению эквивалентности, которое склеивает в точку подпространство $S^{n-1} \times \{1\}$.

Исходя из отображения m: $S^{n-1} \times S^{n-1} \to S^{n-1}$, определим отображение f_1: $S_1 \times B_2 \to S^n_+$, полагая $f_1(x, y, t) = (m(x, y), t)$ для $t \in [0, 1]$. Аналогичным образом определяется отображение f_2: $B_1 \times S_2 \to S^n_-$. В пространстве $B_1 \times B_2$ подмножество $S_1 \times B_2 \cup B_1 \times S_2$ отождествляется со сферой S^{2n-1}. Это отождествление позволяет нам определить отображение f: $S^{2n-1} \to S^n$ формулой

$$f(x, y, t) = \begin{cases} f_1(x, y, t), & \text{если } (x, y, t) \in S_1 \times B_2, \\ f_2(x, y, t), & \text{если } (x, y, t) \in B_1 \times S_2. \end{cases}$$

Так как $f_1|_{S_1 \times S_2} = f_2|_{S_1 \times S_2}$, то отображение f корректно определено. Покажем, что инвариант Хопфа отображения f равен pq (при *нашем* определении инварианта Хопфа).

1.5. По определению, *конус* Cf отображения f — это факторпространство пространства $Z = (B_1 \times B_2) \cup S^n$ по отношению эквивалентности, которое отождествляет точки x и $f(x)$, где $x \in S^{2n-1} = S_1 \times B_2 \cup B_1 \times S_2 \subset B_1 \times B_2$. Обозначим через f_0: $B_1 \times B_2 \to Cf$ ограничение на $B_1 \times B_2$ канонического отображения θ: $Z \to Cf$. Заметим, что S^n, а значит, S^n_+ и S^n_- естественно вложены в Cf. Пусть

$$g=(f_0, f_1, f_2)\colon (B_1\times B_2,\ S_1\times B_2,\ B_1\times S_2)\to (Cf,\ S^n_+,\ S^n_-)$$

— отображение троек. Тогда g обладает следующими свойствами:

a) g индуцирует гомеоморфизм пространств $(B_1\times B_2)\setminus(S_1\times B_2 \cup B_1\times S_2)$ и $Cf\setminus S^n$ Следовательно, g индуцирует изоморфизм групп $K(B_1\times B_2,\ S_1\times B_2\cup B_1\times S_2)\approx \tilde K(S^{2n})$ и $K(Cf,\ S^n)\approx \tilde K(Cf/S^n)$, определяемый гомоморфизмом j^*.

b) Гомоморфизм

$$\gamma_1\colon \tilde K(Cf)\approx K(Cf,\ S^n_+)\to K(B_1\times B_2,\ S_1\times B_2)\approx K(B_1,\ S_1) \approx \tilde K(S^n)$$

переводит элемент u в элемент $p\beta_n$. Действительно, отображение

$$(f_0, f_1)\colon (B_1\times B_2,\ S_1\times S_2)\to (Cf,\ S^n_+)$$

с точностью до гомотопии разлагается в композицию отображений

$$(B_1\times B_2,\ S_1\times B_2)\to (B_1\times\{e\},\ S_1\times\{e\})\to (S^n,\ S^n_+)\to (Cf,\ S^n_+).$$

Первое отображение является гомотопической эквивалентностью. Третье индуцировано вложением S^n в Cf и также является гомотопической эквивалентностью. Наконец, второе отображение это — по существу, надстройка отображения $x\mapsto m(x,\ e)$. Следовательно, отождествляя B_1/S_1 и S^n/S^n_+ со сферой S^n, мы находим, что это отображение имеет степень p.

c) Аналогичные соображения показывают, что гомоморфизм

$$\gamma_2\colon \tilde K(Cf)\approx K(Cf,\ S^n_-)\to K(B_1\times B_2,\ B_1\times S_2)\approx$$
$$\approx K(B_2,\ S_2)\approx \tilde K(S^n)$$

переводит элемент u в элемент $q\beta_n$.

Обозначим через β'_n и β''_n соответственно образующие групп $K(B_1\times B_2,\ S_1\times B_2)$ и $K(B_1\times B_2,\ B_1\times S_2)$. Тогда имеет место следующая коммутативная диаграмма, горизонтальные строки которой представляют собой $\cup$-произведения (II.5.8):

$$\begin{tikzcd}
\tilde K(Cf)\times\tilde K(Cf) \arrow[rr] \arrow[d, equal] & & \tilde K(Cf) \\
K(Cf,S^n_+)\times K(Cf,S^n_-) \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[d, "\gamma=(\gamma_1,\gamma_2)"'] & & K(Cf,S^n) \arrow[u] \arrow[d, equal] \\
K(B_1\times B_2,S_1\times B_2)\times K(B_1\times B_2,B_1\times S_2) \arrow[rr, "\tau"] & & K(B_1\times B_2,S_1\times B_2\cup B_1\times S_2)\approx\tilde K(S^{2n}) \arrow[uu, bend right=60, "j^*"']
\end{tikzcd}$$

Согласно III.1.3, произведение элементов β'_n и β''_n, задаваемое гомоморфизмом τ, является образующей β_{2n} группы $K(B_1\times B_2,\ S_1\times B_2 \cup B_1\times S_2)$. Далее, в силу указанных выше свойств b) и c), образ пары (u, u) при гомоморфизме $\tau\gamma$ (соотв. σ) равен $pq\beta_{2n}$ (соотв. u^2). Так как $j^*(\beta_{2n})=v$, мы имеем $h(f)=pq$.

Таким образом, утверждения п. 1.2 (для четного n) являются следствиями сформулированной ниже теоремы.

1.6. Теорема. *Пусть n четно и $f\colon S^{2n-1}\to S^n$ — непрерывное отображение, инвариант Хопфа которого нечетен. Тогда $n=2$, 4 или 8. В частности, если сфера S^{n-1} может быть наделена структурой H-пространства, то n обязано быть равным 2, 4 или 8.*

Доказательство. Из общих свойств операций ψ^k (IV.7.19) следует, что $\psi^k(v)=k^{2r}v$ и $\psi^k(u)=k^r u+\sigma(k)v$, где $n=2r$ и $\sigma(k)\in\mathbb{Z}$ С другой стороны, поскольку $\psi^2=(\lambda^1)^2-2\lambda^2$ (IV.7.15), мы имеем $\psi^2(u)=u^2 \bmod 2=h(f)v \bmod 2$. Следовательно, число $\sigma(2)$ имеет ту же четность, что и $h(f)$, т. е. является нечетным (для доказательства нужно положить $k=2$ в приведенных выше соотношениях).

Из соотношения $\psi^k\psi^l=\psi^l\psi^k$ (IV.7.15) вытекает, что

$$k^r(k^r-1)\sigma(l)=l^r(l^r-1)\sigma(k).$$

В частности, если взять $l=2$ и нечетное k, то мы получим, что число 2^r должно делить k^r-1 для каждого нечетного k. Таким образом, для доказательства теоремы достаточно показать, что это условие делимости выполняется, лишь когда $r=1$, 2 или 4.

Если $r>1$, то группа $(\mathbb{Z}/2^r\mathbb{Z})^*$ имеет четный порядок. Поэтому из сравнения $k^r\equiv 1 \bmod 2^r$ следует, что число r четно. Положим $k=1+2^{r/2}$. Тогда из биномиального разложения получаем $k^r\equiv 1+r2^{r/2} \bmod 2^r$. Следовательно, число r должно делиться на $2^{r/2}$, что возможно только при $r=2$ или 4. $\square$

1.7. Замечание. Можно доказать (см. Хьюзмоллер [1]), что для любых *четных* n и λ существует непрерывное отображение $f\colon S^{2n-1}\to S^n$ с инвариантом Хопфа, равным λ.

1.8. Теорема. *Пусть n — нечетное число и*

$$m\colon S^{n-1}\times S^{n-1}\to S^{n-1}$$

— непрерывное отображение бистепени (p, q). Тогда либо p, либо q равно нулю.

Доказательство. Согласно III.1.3 и IV.3.24, мы имеем

$$K_{\mathbb{C}}(S^{n-1}\times S^{n-1})\approx K_{\mathbb{C}}(S^{n-1})\otimes K_{\mathbb{C}}(S^{n-1})\approx(\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}u)\otimes(\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}v),$$

где u (соотв. v) — образующая первого сомножителя $\tilde{K}_{\mathbb{C}}(S^{n-1})$ (соотв. второго сомножителя $\tilde{K}_{\mathbb{C}}(S^{n-1})$). Если записать $K_{\mathbb{C}}(S^{n-1})$ в виде $K_{\mathbb{C}}(S^{n-1})=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}w$, то гомоморфизм

$$m^*\colon \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}w\to(\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}u)\otimes(\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}v)$$

переводит элемент w в элемент вида $pu\otimes 1+1\otimes qv+su\otimes v$, где s — некоторое целое число. Так как m^* — кольцевой гомоморфизм, то элемент $0=w^2$ должен отобразиться в $(pu\otimes 1+1\otimes qv+su\otimes v)^2=2pqu\otimes v$. Следовательно, $pq=0$. $\square$

2. Решение проблемы о векторных полях на сферах

2.1. В этом параграфе мы вычислим максимальное число линейно-независимых векторных полей на сферах (см. I.5.5). Используя процесс ортогонализации Грама — Шмидта, мы можем заменить произвольное поле, состоящее из $n-1$ линейно-независимых касательных векторов, полем, состоящим из $n-1$ попарно ортогональных касательных векторов единичной длины. Следовательно, если обозначить через $O_{n,t}$ *многообразие Штифеля* $O(t)/O(t-n)$, то существование поля, состоящего из $n-1$ линейно-независимых касательных векторов на S^{t-1}, эквивалентно существованию непрерывного сечения $\sigma\colon O_{1,t}=S^{t-1}\to O_{n,t}$ для естественной проекции $O_{n,t}\to O_{1,t}$, задаваемой формулой $(a_1,\ldots,a_n)\mapsto a_n$, где (a_i) — некоторая ортонормированная система в $\mathbb{R}^t$.

2.2. Для исследования вопроса о существовании сечения σ применим следующий прием. Каждый элемент a из $O_{n,t}$ определяет инъективное линейное отображение $\varphi_a\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^t$, непрерывно зависящее от a. Пусть $\theta\colon S^{n-1}\times S^{t-1}\to S^{n-1}\times S^{t-1}$ — непрерывное отображение, задаваемое формулой $\theta(v,b)=(v,\varphi_{\sigma(b)}(v))$. Отождествляя точки v и $-v$, мы находим, что θ индуцирует непрерывное отображение

$$\bar\theta\colon (S^{n-1}/Z_2)\times S^{t-1}\to(S^{n-1}\times S^{t-1})/Z_2.$$

Пространства $(S^{n-1}/Z_2)\times S^{t-1}$ и $(S^{n-1}\times S^{t-1})/Z_2$ являются пространствами сферических расслоений $S(t\varepsilon)$ и $S(t\xi)$, где ε обозначает тривиальное расслоение ранга 1 над $RP_{n-1}=S^{n-1}/Z_2$, а ξ — каноническое линейное расслоение над RP_{n-1} (I.2.4).

2.3. Предложение. *Предположим, что сфера S^{t-1} допускает $n-1$ линейно-независимых касательных векторных полей. Тогда существует непрерывное отображение $\bar\theta\colon S(t\varepsilon)\to S(t\xi)$, превращающее диаграмму*

$$\begin{tikzcd} S(t\varepsilon) \arrow[rr, "\bar\theta"] \arrow[dr] & & S(t\xi) \arrow[dl] \\ & RP_{n-1} & \end{tikzcd}$$

в коммутативную. Кроме того, над каждой точкой $x\in RP_{n-1}$ отображение

$$\bar\theta_x\colon S(t\varepsilon)_x\to S(t\xi)_x$$

является гомотопической эквивалентностью.

Доказательство. В доказательстве нуждается лишь последняя часть предложения. Если $n=1$, то $\bar\theta$ — биекция и наше утверждение очевидно. Пусть $n>1$. Мы должны показать, что отображения $b\mapsto\varphi_{\sigma(b)}(v)$, $v\in S^{n-1}$, являются гомотопическими эквивалентностями сферы S^{t-1} с самой собой. Так как сфера S^{n-1} линейно-связна, то все эти отображения гомотопны. Полагая $v=e_n$ (последний вектор канонического базиса $\mathbb{R}^n$), мы видим, что $\varphi_{\sigma(b)}(v)=b$, поскольку σ есть сечение отображения $O_{n,t}\to O_{1,t}$. □

2.4. Только что доказанное предложение доставляет нам важную информацию о пространствах Тома расслоений $t\varepsilon$ и $t\xi$. В общем случае, пусть V и W — векторные расслоения с компактной базой X, и пусть $f\colon S(V)\to S(W)$ — такое непрерывное отображение сферических расслоений, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} S(V) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & S(W) \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

коммутативна. Посредством радиального продолжения отображение f индуцирует собственное непрерывное отображение $\tilde{f}\colon V\to W$ и, следовательно, гомоморфизм $\tilde{f}^*\colon K_{\mathbb{R}}(W)\to K_{\mathbb{R}}(V)$. Если предположить, что $f_x\colon S(V_x)\to S(W_x)$ — гомотопическая эквивалентность для каждого $x\in X$[1], то f индуцирует гомотопическую эквивалентность $\dot{f}_x\colon \dot{V}_x\to \dot{W}_x$ (заметим, что пространства $\dot{V}_x$ и $\dot{W}_x$ можно отождествить с надстройками пространств $S(V_x)$ и $S(W_x)$). Следовательно, гомоморфизм $\tilde{f}^*$ обладает тем свойством, что для каждой точки x имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} K_{\mathbb{R}}(W) \arrow[r, "\tilde{f}^*"] \arrow[d] & K_{\mathbb{R}}(V) \arrow[d] \\ K_{\mathbb{R}}(W_x) \arrow[r, "\tilde{f}^*_x"] & K_{\mathbb{R}}(V_x) \end{tikzcd}$$

где $\tilde{f}^*_x$ — изоморфизм.

Предположим теперь, что расслоения V и W имеют ранг $8p$ и снабжены некоторой спинорной структурой. Пусть T_W — класс Тома расслоения W (IV.5.13). Тогда элемент $\tilde{f}^*(T_W)$ можно записать в виде λT_V, где T_V — класс Тома расслоения V и $\lambda\in K_{\mathbb{R}}(X)$.

Рассматривая ограничение $\tilde{f}^*$ на точку x пространства X, мы видим, что λ является обратимым элементом в $K_{\mathbb{R}}(X)$. Следовательно, существует такое покрытие (X_i) пространства X, что $\lambda|_{X_i}=\varepsilon_i(1+y_i)$, где $\varepsilon_i=\pm 1$, $y\in K'_{\mathbb{R}}(X)$ и $y_i=y|_{X_i}$. Заметим, что

$$\frac{\psi^k(1+y)}{1+y}=\frac{\psi^k(\lambda)}{\lambda}.$$

2.5. Предложение. *Пусть V и W — такие же расслоения, как и выше. Тогда существует такой элемент $y\in K'_{\mathbb{R}}(X)$, что для каждо-*

---

[1] В этом случае говорят, что сферические расслоения $S(V)$ и $S(W)$ имеют один и тот же *послойный гомотопический тип* (см. Дольд и Лашеф [1]).

го k выполняется соотношение

$$\rho^k(V)=\rho^k(W)\frac{\psi^k(1+y)}{1+y},$$

где $\rho^k=\rho^k_{\mathbb{R}}$ — операция, определенная в IV.7.26.

Доказательство. Пусть $\varphi_V\colon K_{\mathbb{R}}(X)\to K_{\mathbb{R}}(V)$ (соотв. $\varphi_W\colon K_{\mathbb{R}}(X)\to K_{\mathbb{R}}(W)$) — изоморфизм Тома (см. IV.5.14). Так как $T_V=\varphi_V(1)=\bar{f}^*[(1+y)T_W]$, где $y\in K'_{\mathbb{R}}(X)$, то мы имеем

$$\rho^k(V)=\psi_V^{-1}(\varphi^k(T_V))=\frac{\psi^k(T_V)}{T_V}=\frac{\psi^k(T_W)\cdot\psi^k(\lambda)}{T_W\cdot\lambda}=\rho^k(W)\frac{\psi^k(1+y)}{1+y}. \ \square$$

2.6. *Следствие.* *Пусть W — такое спинорное расслоение ранга $8p$ над $\mathbb{R}P_{n-1}$, что сферические расслоения $S(8p\varepsilon)$ и $S(W)$ имеют один и тот же послойный гомотопический тип. Тогда, если k нечетно, то $\rho^k(W)=k^{4p}$.*

Доказательство. Так как k нечетно, то $\psi^k(\xi)=\xi$. Следовательно, используя тот факт, что $K'_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}P_{n-1})\approx\tilde{K}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}P_{n-1})$ порождается элементом $\xi-1$ (IV.6.46), мы видим, что сомножитель $\dfrac{\psi^k(1+y)}{1+y}$ равен единице Поэтому $\rho^k(V)=\rho^k(8p\varepsilon)=k^{4p}$. $\square$

2.7. *Предложение.* *Пусть a_n — порядок группы $\tilde{K}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}P_{n-1})$, т. е. $a_n=2^f$, где f — число таких целых i, что $0<i<n$ и $i=0,\ 1,\ 2$ или* $4 \bmod 8$ (IV.6.46). *Если сфера S^{t-1} допускает $n-1$ линейно-независимых касательных векторных полей, то число t кратно a_n*

Доказательство. Докажем прежде всего, что если сферические расслоения $S(t\varepsilon)$ и $S(t\xi)$ имеют один и тот же послойный гомотопический тип, то расслоение $t\xi$ стабильно тривиально. В случае $n=2$ векторное расслоение $\xi\oplus\xi$ тривиально. Следовательно, если t четно, то доказывать нечего Если же t нечетно, т. е. имеет вид $t=2r+1$, то пространство Тома $\dot{\widehat{t\xi}}$ может быть отождествлено с $S^{2r}(RP_2)$ и $K^{2r}_{\mathbb{R}}(\dot{\widehat{t\xi}})=K_{\mathbb{R}}(RP_2)\neq K^{2r}_{\mathbb{R}}(\dot{\widehat{t\varepsilon}})$ (IV.6.45). Таким образом пространства Тома $\dot{\widehat{t\xi}}$ и $\dot{\widehat{t\varepsilon}}$ имеют различный послойный гомотопический тип, откуда следует, что $S(t\xi)$ и $S(t\varepsilon)$ также имеют различный послойный гомотопический тип.

Рассмотрим теперь случай $n>2$. Докажем, что из эквивалентности $\dot{\widehat{t\varepsilon}}\sim\dot{\widehat{t\xi}}$ следует, что t кратно 4. Множество таких натуральных чисел u, что $\dot{\widehat{u\xi+m\varepsilon}}$ имеет гомотопический тип пространства $\dot{\widehat{(u+m)\varepsilon}}$ для некоторого m, содержит наименьший элемент α, который делит все такие числа (заметим, что имеет место гомеоморфизм $\dot{\widehat{V\times W}}\approx\dot{V}\wedge\dot{W}$). Так как $a_n=2^f$, то число α может быть представлено в виде 2^g с $g\leqslant f$. Поэтому мы должны показать, что $g\neq 0,\ 1$.

Пространство Тома $\dot{\widehat{u\xi}}$ отождествляется с пространством RP_{n+u-1}/RP_{u-1} посредством гомеоморфизма $(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})\times\mathbb{R}^u/\mathbb{R}^* \to RP_{n+u-1}\setminus RP_{u-1}$, индуцированного вложением $(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})\times\mathbb{R}^u$ в $\mathbb{R}^{n+u}\setminus\{0\}$. Поэтому из гомотопической эквивалентности пространств $\dot{\widehat{\alpha\xi+m\varepsilon}}$ и $\dot{\widehat{(\alpha+m)\varepsilon}}$ следует, что $K_{\mathbb{R}}^{-\alpha}(RP_{n-1})\approx\tilde{K}_{\mathbb{R}}(S^{\alpha}(RP_{n-1}))\approx\tilde{K}_{\mathbb{R}}(RP_{n+\alpha-1}/RP_{\alpha-1})$. Но в силу IV.6.45 мы имеем

$$K_{\mathbb{R}}^{-1}(RP_{n-1})=\mathbb{Z}/2;\quad K_{\mathbb{R}}(RP_n/RP_0)\approx\mathbb{Z}/2^{\beta}\text{ с }\beta\geqslant 2;$$

$$K_{\mathbb{R}}^{-2}(RP_{n-1})=\begin{cases}\mathbb{Z}/2, & \text{если } 3\leqslant n<7,\\ \text{группа порядка 2 или 4,} & \text{если } n\geqslant 7.\end{cases}$$

Кроме того, согласно IV.6.42,

$$K_{\mathbb{R}}(RP_{n+1}/RP_1)=\operatorname{Coker}(K(C^{n+1,0})\to K(C^{1,0}))=\begin{cases}\mathbb{Z}/4, & \text{если } 3\leqslant n<7,\\ \mathbb{Z}/2^{\beta}\text{ с }\beta>2, & \text{если } n\geqslant 7.\end{cases}$$

Следовательно, $\alpha\neq 1, 2$, т. е. число t кратно четырем

Пусть теперь $t=4l$. Согласно 2.6, для нечетного k мы должны иметь $\rho^k(4l\xi+4l)=k^{4l}$. Таким образом, используя предложение IV.7.30, мы получаем в мультипликативной группе $1+\tilde{K}_{\mathbb{R}}(RP_{n-1})$ тождество

$$1+\frac{k^{2l}-1}{2k^{2l}}\lambda=1$$

для каждого нечетного k. Пусть θ: $K_{\mathbb{R}}(RP_{n-1})\to\mathbb{Z}/2^{f+1}\mathbb{Z}$ — кольцевой гомоморфизм, задаваемый формулой $\theta(\lambda)=-2$. Тогда θ индуцирует отображение групп

$$\theta'\colon\ 1+\tilde{K}_{\mathbb{R}}(RP_{n-1})\to(\mathbb{Z}/2^{f+1}\mathbb{Z})^*,$$

такое что

$$\theta'\left(1+\frac{k^{2l}-1}{2k^{2l}}\lambda\right)=(1/k)^{2l}.$$

Как хорошо известно (и легко доказать), группа $(\mathbb{Z}/2^{f+1}\mathbb{Z})^*$ изоморфна группе $\mathbb{Z}/2^{f-1}\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2$, причем в качестве образующей сомножителя $\mathbb{Z}/2^{f-1}\mathbb{Z}$ можно выбрать любой элемент из $(\mathbb{Z}/2^{f+1}\mathbb{Z})^*$ вида $4p+1$ с нечетным p. Если k выбрано так, что $1/k$ имеет такой вид, то $(1/k)^{2l}=1$ в $(\mathbb{Z}/2^{f+1}\mathbb{Z})^*$ тогда и только тогда, когда $2l$ кратно 2^{f-1}. Следовательно, $t=4l$ кратно $a_n=2^f$ □

****2.8. Замечание.*** Доказательство того, что число t кратно 4 в случае $n>2$, можно получить также, используя характеристические классы Штифеля — Уитни (см. IV.4.20 и Том [1]).*

2.9. Теорема. *Сфера S^{t-1} допускает $n-1$ линейно-независимых касательных векторных полей тогда и только тогда, когда число t кратно a_n.*

Доказательство. Согласно 2.7, достаточно построить такие линейно-независимые касательные векторные поля лишь для случая, когда t кратно a_n. Из определения a_n следует, что t кратно a_n тогда и только тогда, когда $\mathbb{R}^t$ допускает структуру $C^{n-1,0}$-модуля, т. е. когда существуют такие $n-1$ автоморфизмов $e_1, \ldots, e_{n-1}$ пространства $\mathbb{R}^t$, что $(e_i)^2=-1$ и $e_ie_j+e_je_i=0$ для $i\neq j$. Если G — мультипликативная конечная группа порядка 2^n, порожденная элементами $\pm e_i$, то мы можем так выбрать метрику на $\mathbb{R}^t$, чтобы G действовало ортогональными автоморфизмами. Следовательно, без ограничения общности можно предположить, что $e_i^*=-e_i$. Таким образом, для каждого вектора v из S^{t-1} векторы $e_1\cdot v, \ldots, e_{n-1}\cdot v$ являются касательными векторами. Для доказательства линейной независимости этих векторов положим $e_0=\mathrm{Id}$ и заметим, что скалярные произведения $\langle e_i\cdot v, e_j\cdot v\rangle=0$ для $i\neq j$ и $i, j\in\{0, 1, \ldots, n-1\}$, поскольку $e_j^*e_i=-e_i^*e_j$. □

2.10. Теорема. (Адамс [1]). *Представим каждое целое число t в виде $t=(2\alpha-1)\cdot 2^\beta$, где $\beta=\gamma+4\delta$ с $0\leqslant\gamma\leqslant 3$, и положим $\rho(t)=2^\gamma+8\delta$. Тогда максимальное число линейно-независимых касательных векторных полей на сфере S^{t-1} равно $\rho(t)-1$.*

Доказательство. Согласно теореме 2.9, это число равно $n-1$, где n — такое наибольшее число $\sigma(t)$, что t кратно a_n. Так как a_n есть степень 2, то это число зависит только от β. С другой стороны, $\sigma(16t)=\sigma(t)+8$, поскольку $C^{p+8,0}\approx C^{p,0}(16)$ (III.3.21). Так как $\rho(16t)=\rho(t)+8$, то нам достаточно рассмотреть лишь случаи $t=2, 4, 8$ и 16. В этих случаях мы имеем: $\rho(2)=\sigma(2)=2$, $\rho(4)=\sigma(4)=4$, $\rho(8)=\sigma(8)=8$ и $\rho(16)=\sigma(16)=9$. □

3. Характеристические классы и характер Чженя

3.1. В этом параграфе мы предполагаем, что читатель знаком с некоторыми основными понятиями теории когомологий (см. Гринберг [1], Эйленберг и Стинрод [1], Дольд [1], Спеньер [2], ...). Напомним, что все теории когомологий, удовлетворяющие аксиомам Стинрода—Эйленберга, совпадают на конечных клеточных разбиениях и, следовательно, на компактных многообразиях. Как наиболее подходящие для нужд K-теории далее будут использоваться главным образом когомологии Чеха с целочисленными коэффициентами. Определим *когомологии Чеха* с компактными носителями (для) локально-компактного пространства X как $\operatorname{Ker}[H^i(\dot{X})\to H^i(\{\infty\})]$, где $\dot{X}$ — одноточечная компактификация X. В случае когда не может возникнуть недоразумений, мы будем обозначать когомологии Чеха просто $H^i(X)$.

Ближайшей задачей, которой мы займемся в этом параграфе, будет сопоставление каждому векторному расслоению V некоторых характеристических классов, аналогичных классам, построенным в гл. IV.

3.2. Пусть V — вещественное векторное расслоение ранга n с базой X. По определению, *ориентация* расслоения V задается ориентациями ω_x вещественных векторных пространств V_x для каждой точки $x \in X$, которые „непрерывно" зависят от x. Это означает, что для каждой точки y из X существуют окрестность U точки y и тривиализация $U \times \mathbb{R}^n \to V_U$, индуцирующая изоморфизм ориентированных векторных пространств $\mathbb{R}^n \to V_x$ для каждой точки $x \in U$. Легко видеть, что это определение совпадает с определением ориентации в терминах главных расслоений (IV.4.13).

Важный пример доставляют *комплексные* векторные расслоения. Действительно, если E — комплексное векторное пространство размерности p и если $e_1, \ldots, e_p$ — базис E, то векторы $e_1, ie_1, \ldots, e_p, ie_p$ можно выбрать в качестве ориентированного базиса подстилающего вещественного векторного пространства. Эта ориентация не зависит от выбора базиса и инвариантна относительно комплексных автоморфизмов, поскольку группа $\mathrm{GL}_p(\mathbb{C})$ связна. Далее, если E' — другое комплексное векторное пространство, то естественная ориентация $E \oplus E'$ является произведением ориентаций E и E' в очевидном смысле. Наконец, если V — комплексное векторное расслоение, то оно может быть наделено ориентацией, получающейся из канонических ориентаций его слоев.

Для любого ориентированного вещественного векторного расслоения V ранга n мы имеем каноническую образующую ω_x группы $H^n(V_x)$ для каждой точки x из X.

3.3. Теорема (Том). *Предположим, что база X компактна. Тогда существует и единствен такой класс когомологий $U_V \in H^n(V)$, что ограничение U_V на любую группу $H^n(V_x)$ совпадает с ее образующей ω_x. Кроме того, умножение на класс U_V определяет изоморфизм*

$$\varphi_V\colon H^i(X) \to H^{i+n}(V)$$

(U_V *называется* *классом Тома в когомологиях*, *а* φ_V — *изоморфизмом Тома*).

Доказательство. Используя приведенные в IV.1.3 рассуждения, основанные на точной последовательности Майера — Вьеториса, мы видим, что если такой класс U_V существует, то он определяет изоморфизм $H^i(X) \approx H^{i+n}(V)$. Пусть теперь (X_i), $i = 1, \ldots, p$, — такое конечное покрытие X замкнутыми множествами, что $V|_{X_i}$ — тривиальное векторное расслоение для каждого i Доказательство существования класса U_V будем вести индукцией по p. Если $Y = \bigcup_{i=1}^{p-1} X_i$ и $Z = X_p$, то мы имеем точную последовательность Майера — Вьеториса

$$H^{n-1}(V|_{Y \cap Z}) \to H^n(V) \to H^n(V|_Y) \oplus H^n(V|_Z) \to H^n(V|_{Y \cap Z}).$$

Первая группа в этой последовательности равна нулю по предположению индукции. Таким образом, мы получаем существование и единственность класса U_V (и, следовательно, изоморфизма φ_V) для покрытия, состоящего из p таких замкнутых подмножеств X_i, что $V|_{X_i}$ — тривиальные расслоения. □

3.4. Определение. Ограничение $\chi(V)$ класса Тома U_V на $H^n(V) \approx H^n(X)$ называется *эйлеровым классом* ориентированного векторного расслоения V (более точно, *когомологическим эйлеровым классом* в противоположность K-теорному эйлерову классу, определенному в IV.1.13).

Объяснение этой терминологии дается следующим предложением.

3.5. Предложение. *Пусть V — касательное расслоение ориентированного многообразия X. Тогда значение эйлерова класса $\chi(V)$ на фундаментальном классе многообразия X совпадает с характеристикой Эйлера — Пуанкаре этого многообразия.*

Это предложение доказано в книге Хьюзмоллера [1], с. 255—258. Поскольку нам нигде далее не понадобится этот результат (за исключением одного только п. 3.28), мы опускаем его доказательство.

3.6. Предложение. *Пусть V_1 и V_2 — векторные расслоения с базами X_1 и X_2 соответственно. Тогда $U_{V_1 \times V_2} = U_{V_1} \cup U_{V_2}$. Если $X_1 = X_2 = X$, то $\chi(V_1 \oplus V_2) = \chi(V_1) \cdot \chi(V_2)$.*

Доказательство. Первая формула следует из единственности класса Тома и из элементарных свойств $\cup$-произведения в когомологиях. Вторая формула получается из первой применением диагонального отображения $X \to X \times X$. □

3.7. Предложение. *В обозначениях п. IV.2.3, мы имеем расщепляющуюся точную последовательность*

$$\begin{array}{c} 0 \longrightarrow H^r(P(V \oplus L), X) \xrightarrow{j^*} H^r(P(V \oplus L)) \longrightarrow H^r(X) \longrightarrow 0 \\ \wr\wr \\ H^r(\xi_V^* \otimes \pi^* L) \\ \wr\wr \\ H^{r-2}(P(V)) \end{array}$$

Обозначим через U класс Тома линейного расслоения $\xi_V^* \otimes \pi^* L$. Если $r = 2$, то $j^*(U)$ есть эйлеров класс σ расслоения $\xi_{V \oplus L}^* \otimes \pi_1^*(L)$, где $\pi_1 \colon P(V \oplus L) \to X$. Наконец, если x — элемент группы $\operatorname{Ker}(H^r(P(V \oplus L)) \to H^r(X))$ *и $x' = x|_{H^r(P(V))}$, то имеет место формула $j^*\Phi(x') = x \cdot j^*(U)$.*

Доказательство этого предложения аналогично доказательству предложения IV.2.4.

3.8. Предложение. *Пусть X — компактное пространство и $P_n = P(\mathbb{C}^{n+1})$ — комплексное проективное пространство размерности n. Тогда $H^*(X \times P_n)$ является свободным $H^*(X)$-модулем с базисом 1, $t, \ldots, t^n$, где t — эйлеров класс линейного расслоения $p^*\xi_n$ с p:*

$X\times P_n \to P_n$. *Кроме того,* $t^{n+1}=0$; *следовательно,* $H^*(X\times P_n) \approx H^*(X)[t]/(t^{n+1})$.

Доказательство этого предложения аналогично доказательству теоремы IV.2.5.

3.9. Следствие. *Пусть* P_n *и* P_m — *комплексные проективные пространства,* $\eta_1=\pi_1^*\xi_n^*$ *и* $\eta_2=\pi_2^*\xi_m^*$, *где* π_1: $P_n\times P_m \to P_n$ *и* π_2: $P_n\times P_m \to P_m$ *Пусть* x *и* y — *эйлеровы классы расслоений* η_1 *и* η_2 *соответственно. Тогда*

$$H^*(P_n\times P_m)\approx \mathbf{Z}[x,\ y]/(x^{n+1})(y^{m+1}).$$

3.10. Предложение. *Пусть* L_1 *и* L_2 — *линейные расслоения. Тогда* $\chi(L_1\otimes L_2)=\chi(L_1)+\chi(L_2)$, *элемент* $\chi(L_1)$ *нильпотентен и* $\chi(L_1^*\otimes L_2) = -\chi(L_1)+\chi(L_2)$.

Доказательство. Согласно I.7.10, это предложение достаточно доказать лишь в случае, когда база есть $P_n\times P_m$, $L_1=\pi_1^*\xi_n^*$ и $L_2=\pi_2^*\xi_m^*$. Используя ограничения на сомножители P_n и P_m (с выбранными в них отмеченными точками) и соображения естественности, мы получаем из следствия 3.9, что $\chi(L_1\otimes L_2)=x+y=\chi(L_1)+\chi(L_2)$ в группе $H^2(P_n\times P_m)$. Нильпотентность элемента $\chi(L_1)$ следует из нильпотентности элемента t, который рассматривался в предложении 3.8. Наконец, $0=\chi(L_1^*\otimes L_1)=\chi(L_1^*)+\chi(L_1)$ и $\chi(L_1^*\otimes L_2) =\chi(L_1^*)+\chi(L_2)=-\chi(L_1)+\chi(L_2)$. □

3.11. Замечание. Если мы обозначим через u эйлеров класс расслоения $\pi^*\xi_n$, где π: $X\times P_n\to P_n$, то $u=-t$ и $H^*(X\times P_n) \approx H^*(X)[u]/(u^{n+1})$.

3.12. Предложение. *Пусть* X — *компактное пространство и* V — *комплексное векторное расслоение ранга* n *над* X. *Обозначим через* u *эйлеров класс линейного расслоения* $\xi=\xi_V$ *над* $P(V)$ *(см. IV.2.2). Тогда* $H^*(P(V))$ *является свободным* $H^*(X)$*-модулем с базисом* 1, u, $\ldots$, u^{n-1}. *В частности, гомоморфизм* $H^*(X)\to H^*(P(V))$ *является мономорфизмом.*

Доказательство этого предложения аналогично доказательству предложения IV.2.13.

3.13. Предложение. *Предположим, что расслоение* V *может быть представлено в виде* $L_1\oplus\ldots\oplus L_n$, *где все* L_i — *линейные расслоения. Тогда соотношение*

$$\prod_{i=1}^{n}(u-\chi(L_i))=0$$

определяет u^n *как функцию переменных* u^i, $i<n$.

Доказательство этого предложения аналогично доказательству предложения IV.2.14.1 (где единичный элемент есть просто 1).

Принцип расщепления в K-теории имеет следующий аналог в теории когомологий:

3.14. Предложение. *Пусть* V — *комплексное векторное расслоение с компактной базой* X, *и пусть* π: $F(V)\to X$, *где* $F(V)$ — *расслоение на флаги* V *(см. IV.3.3). Тогда*

a) *гомоморфизм* $\pi^*\colon H^*(X) \to H^*(F(V))$ *является мономорфизмом;*

b) *векторное расслоение* $\pi^*(V)$ *расщепляется в сумму Уитни линейных расслоений.*

Доказательство этого предложения аналогично доказательству теоремы IV.2.15, с учетом замечаний, сделанных в IV.3.3.

3.15. Теорема. *Каждому комплексному векторному расслоению* V *фиксированного ранга с компактной базой* X *можно единственным образом сопоставить классы когомологий* $c_i(V) \in H^{2i}(X)$, *называемые* классами Чженя *расслоения* V. *Эти классы удовлетворяют следующим аксиомам:*

1) *Классы* $c_i(V)$ *функториальны, т. е.* $c_i(V) = f^*(c_i(V'))$ *для любого общего морфизма* $V \to V'$, *который является изоморфизмом на слоях и индуцирует отображение* $f\colon X \to X'$ *баз (см. I.1.6).*

2) *Если* V_1 *и* V_2 — *два векторных расслоения с одной и той же базой* X, *то* $c_k(V_1 \oplus V_2) = \sum\limits_{i+j=k} c_i(V_1)\cdot c_j(V_2)$.

3) *Если ранг расслоения* V *равен* 1, *то* $c_0(V) = 1$, $c_1(V) = \chi(V)$ *и* $c_i(V) = 0$ *для* $i > 1$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству предложения IV.2.17. Более того, из этого доказательства вытекает следующее утверждение.

3.16. Предложение. *Пусть* X — *компактное пространство и* V — *комплексное векторное расслоение ранга* n *над* X. *Пусть* u — *эйлеров класс линейного расслоения* $\xi = \xi_V$ *и* $c_i(V)$ — *классы Чженя расслоения* V (заметим, что $c_i(V) = 0$ для $i > n$). *Тогда имеет место соотношение*

$$u^n - c_1(V)\,u^{n-1} + \ldots + (-1)^n c_n(V) = 0,$$

которое полностью определяет кольцевую структуру $H^*(P(V))$ *(см. 3.12).*

3.17. Предложение. *Пусть* V — *такое же расслоение, как выше. Тогда* $c_n(V)$ *совпадает с эйлеровым классом* $\chi(V)$ *расслоения* V.

Доказательство. Согласно принципу расщепления, нам нужно проверить предложение лишь в случае, когда $V = L_1 \oplus \ldots \oplus L_n$, где все L_i — линейные расслоения. В силу 3.6 мы имеем тогда

$$\chi(L_1 \oplus \ldots \oplus L_n) = \prod_{i=1}^{n} \chi(L_i) = \prod_{i=1}^{n} c_1(L_i) = c_n(V). \ \square$$

3.18. Замечания. Положим $c(V) = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i(V) \in H^{\text{чёт}}(X)$. Элемент $c(V)$ называется *полным классом Чженя* расслоения V. Тогда соотношение 2) теоремы 3.15 можно записать в более простом виде: $c(V_1 \oplus V_2) = c(V_1)\cdot c(V_2)$. Можно продолжить аналогию с K-теорией и дальше, вычислив когомологии расслоений на флаги, когомологии грассманианов и т. д. (см. Дольд [2]).

Мы предоставляем это в качестве упражнения читателю.

3.19. По аналогии с характеристическими классами $\psi^k(V)$, построенными в IV.7.15, определим классы $s_k(V) \in H^{2k}(X)$, такие что $s_k(V_1 \oplus V_2) = s_k(V_1) + s_k(V_2)$. А именно, положим $s_k(V) = Q_k(c_1, c_2, \ldots, c_n)$, где $c_i = c_i(V)$ и Q_k — полиномы Ньютона. Условимся, что $s_0(V) = \operatorname{rank}(V)$. Повторяя формально вычисления, проделанные в IV.7.15, убеждаемся, что, действительно, $s_k(V_1 \oplus V_2) = s_k(V_1) + s_k(V_2)$.

3.20. Предложение. *Пусть V_1 и V_2 — комплексные векторные расслоения. Тогда имеет место соотношение*

$$s_k(V_1 \otimes V_2) = \sum_{i+j=k} \frac{k!}{i!\,j!} s_i(V_1)\, s_j(V_2).$$

Доказательство. Снабдим группу $H^{\text{чёт}}(X)$ новым законом умножения, который обозначим символом $*$. Для однородных элементов x_i и x_j степеней $2i$ и $2j$ соответственно это умножение задается формулой

$$x_i * x_j = \frac{(i+j)!}{i!\,j!} x_i x_j.$$

Группа $H^{\text{чёт}}(X)$ с этим умножением по-прежнему является коммутативным кольцом, и доказываемая формула принимает вид

$$s_k(V_1 \otimes V_2) = \sum_{i+j=k} s_i(V_1) * s_j(V_2).$$

Положим $s(V) = \sum_{i=0}^{\infty} s_i(V) \in H^{\text{чёт}}(X)$. Тогда указанная формула эквивалентна следующей:

$$s(V_1 \otimes V_2) = s(V_1) * s(V_2).$$

Используя принцип расщепления и основное свойство классов s_k (3.19), мы видим, что эту формулу достаточно доказать лишь в случае, когда расслоения V_1 и V_2 имеют ранг 1. Положим $x_1 = \chi(V_1)$, $x_2 = \chi(V_2)$ Тогда $x_1 + x_2 = \chi(V_1 \otimes V_2)$, в силу предложения 3.10. Следовательно, $s_k(V_1 \otimes V_2) = (x_1 + x_2)^k$, $s_i(V_1) = x_1^i$ и $s_j(V_2) = x_2^j$. Таким образом, доказываемое равенство принимает вид

$$(x_1 + x_2)^k = \sum_{i+j=k} x_1^i * x_2^j = \sum_{i+j=k} \frac{k!}{i!\,j!} x_1^i x_2^j,$$

что является хорошо известным биномиальным тождеством. □

3.21. Замечание. Определение классов $c_i(V)$ и $s_i(V)$ может быть обобщено на случай, когда ранг расслоения V не обязательно постоянен. Пусть $X = \bigcup X_\alpha$ — такое разложение X в сумму открытых множеств, что ранг $V|_{X_\alpha}$ постоянен. Определим $c_i(V)$ (соотв. $s_i(V)$) как такой класс когомологий, что $c_i(V)|_{X_\alpha} = c_i(V|_{X_\alpha})$ (соотв. $s_i(V)|_{X_\alpha} = s_i(V|_{X_\alpha})$). Это условие определяет класс $c_i(V)$ (соотв. $s_i(V)$) единственным образом.

3.22. Для того чтобы избежать введенного выше „скрученного" умножения в $H^{\text{чёт}}(X)$, нужно работать с рациональными когомологиями, т. е. с теорией когомологий, коэффициентами в которой являются рациональные числа $\mathbb{Q}$. Как хорошо известно (см. Эйленберг и Стинрод [1]), $H^i(X; \mathbb{Q}) \approx H^i(X) \otimes \mathbb{Q}$. Положим

$$Ch_k(V) = \frac{1}{k!} s_k(V) = \frac{1}{k!} Q_k(c_1(V), c_2(V), \ldots, c_n(V)) \in H^{2k}(X; \mathbb{Q}),$$

$$Ch(V) = \sum_{k=0}^{\infty} Ch_k(V) \in H^{\text{чёт}}(X; \mathbb{Q})$$

(заметим, что $Ch_k(V) = 0$ для достаточно больших k, поскольку классы $c_i(V)$ нильпотентны, согласно принципу расщепления и предложению 3.10).

3.23. Теорема. *Пусть V_1 и V_2 — векторные расслоения с компактной базой X. Тогда имеют место формулы*

$$Ch(V_1 \oplus V_2) = Ch(V_1) + Ch(V_2),$$
$$Ch(V_1 \otimes V_2) = Ch(V_1) \cdot Ch(V_2).$$

Кроме того, если L — линейное расслоение, то $Ch(L) = \exp(\chi(L))$.

Доказательство. Поскольку $s_k(V_1 \oplus V_2) = s_k(V_1) + s_k(V_2)$, то очевидно равенство $Ch_k(V_1 \oplus V_2) = Ch_k(V_1) + Ch_k(V_2)$; следовательно, $Ch(V_1 \oplus V_2) = Ch(V_1) + Ch(V_2)$. Аналогично

$$Ch_k(V_1 \otimes V_2) = \frac{1}{k!} s_k(V_1 \otimes V_2) = \sum_{i+j=k} \frac{1}{i!} \frac{1}{j!} s_i(V_1)\, s_j(V_2)$$

$$= \sum_{i+j=k} Ch_i(V_1) \cdot Ch_j(V_2).$$

Поэтому $Ch(V_1 \otimes V_2) = Ch(V_1) \cdot Ch(V_2)$. Наконец, если расслоение V имеет ранг 1, то

$$Ch(V) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} s_k(V) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \chi(V)^k = \exp(\chi(V)). \ \square$$

3.24. Определение. Кольцевой гомоморфизм

$$Ch\colon K_{\mathbb{C}}(X) \to H^{\text{чёт}}(X; \mathbb{Q}) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} H^{2i}(X; \mathbb{Q}),$$

определенный формулой

$$Ch([E] - [F]) = Ch(E) - Ch(F),$$

называется *характером Чженя.*

3.25. Теорема. *Характер Чженя обладает следующими свойствами:*

а) *если X — сфера S^{2n}, то Ch является мономорфизмом и его образ есть $H^*(S^{2n}) \subset H^*(S^{2n}; \mathbb{Q})$;*

b) *для любого компактного пространства X гомоморфизм Ch индуцирует изоморфизм*

$$K_{\mathbf{C}}(X) \otimes \mathbf{Q} \xrightarrow{\approx} H^{\text{чёт}}(X;\ \mathbf{Q})$$

(все фигурирующие здесь когомологии суть когомологии Чеха).

Полное доказательство этой теоремы можно найти в трудах семинара Картана—Шварца 1963/64, сообщение 16 (Каруби [1]).

3.26. Так как $K_{\mathbf{C}}(X,\ Y) \approx \tilde{K}_{\mathbf{C}}(X/Y) = \operatorname{Ker}[K_{\mathbf{C}}(X/Y) \to K_{\mathbf{C}}(\textit{точка})]$ и $H^{\text{чёт}}(X,\ Y;\ \mathbf{Q}) \approx \tilde{H}^{\text{чёт}}(X/Y;\ \mathbf{Q}) = \operatorname{Ker}[H^{\text{чёт}}(X/Y;\ \mathbf{Q}) \to H^{\text{чёт}}(\textit{точка};\ \mathbf{Q})]$, мы можем продолжить характер Чженя до гомоморфизма, также обозначаемого через Ch, из $K_{\mathbf{C}}(X,\ Y)$ в $H^{\text{чёт}}(X,\ Y;\ \mathbf{Q})$. Применяя это замечание к паре $(X \times B^1,\ X \times S^0)$, мы получаем гомоморфизм из $K_{\mathbf{C}}^{-1}(X,\ Y)$ в $H^{\text{неч}}(X,\ Y;\ \mathbf{Q})$. Вводя обозначение $K_{\mathbf{C}}^{\#}(X,\ Y) = K_{\mathbf{C}}^{0}(X,\ Y) \oplus K_{\mathbf{C}}^{-1}(X,\ Y)$, окончательно получаем гомоморфизм

$$Ch\colon K_{\mathbf{C}}^{\#}(X,\ Y) \to H^{*}(X,\ Y;\ \mathbf{Q}),$$

согласованный с мультипликативными структурами и индуцирующий изоморфизм

$$K_{\mathbf{C}}^{\#}(X,\ Y) \otimes \mathbf{Q} \approx H^{*}(X,\ Y;\ \mathbf{Q}).$$

3.27. Теорема. *Пусть*

$\psi_H^k\colon H^{\text{чёт}}(X;\ \mathbf{Q}) \to H^{\text{чёт}}(X;\ \mathbf{Q})$ *— гомоморфизм алгебр, определенный формулой* $\psi_H^k(x) = k^r x$ *для* $x \in H^{2r}(X;\ \mathbf{Q})$. *Тогда имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} K_{\mathbf{C}}(X) & \xrightarrow{Ch} & H^{\text{чёт}}(X;\ \mathbf{Q}) \\ \downarrow{\scriptstyle \psi^k} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_H^k} \\ K_{\mathbf{C}}(X) & \xrightarrow{Ch} & H^{\text{чёт}}(X;\ \mathbf{Q}) \end{array}$$

где ψ^k — операция Адамса (см. IV.7.13).

Доказательство. Достаточно доказать, что для любого векторного расслоения V ранга n выполняется равенство $Ch(\psi^k(V)) = \psi_G^k(Ch(V))$. Используя принцип расщепления, мы можем считать, что $n = 1$. Тогда $\psi^k(V) = V^k$ и $c_1(V^k) = kc_1(V)$ (IV.7.13) и 3.10). Следовательно,

$$Ch(\psi^k(V)) = \exp(kc_1(V)) = 1 + \frac{k}{1!}c_1(V) + \frac{k^2}{2!}(c_1(V))^2 + \ldots =$$

$$= \psi_H^k\left(1 + \frac{1}{1!}c_1(V) + \frac{1}{2!}(c_1(V))^2 + \ldots\right) = \psi_H^k(Ch(V)). \quad \square$$

Применим полученные результаты о характеристических классах к задаче, которая впервые была решена иным методом Борелем и Серром [1].

3.28. Теорема. *Пусть TS^{2n} — касательное расслоение к сфере. Тогда для $n \neq 1$ или 3 в расслоении TS^{2n} не может быть введена комплексная структура.*

Доказательство. Если E — произвольное комплексное векторное расслоение на S^{2n}, то $Ch(E)$ принадлежит подгруппе $H^*(S^{2n}; \mathbb{Z}) \subset H^*(S^{2n}; \mathbb{Q})$. Так как $c_i(E) = 0$ для $i < n$, то из формул Ньютона следует, что

$$Ch(E) = (-1)^{n-1} \frac{c_n(E)}{(n-1)!}.$$

Согласно предложениям 3.5 и 3.17, элемент $c_n(E)$ представляет собой умноженную на 2 каноническую образующую группы $H^{2n}(S^{2n}; \mathbb{Z})$. Следовательно, число $(n-1)!$ является делителем 2, что возможно, лишь когда $n = 1$, 2 или 3.

В случае $n = 2$, т. е. для сферы S^4, проделанные выше вычисления показывают, что если TS^4 наделяется комплексной структурой, то его класс в $K_{\mathbb{C}}(X)$ не равен нулю. Но класс этого расслоения в $K_{\mathbb{R}}(S^4)$ равен нулю, поскольку расслоение $TS^4 \oplus \theta_1$ тривиально (I.5.5). Так как гомоморфизм $K_{\mathbb{C}}(S^4) \to K_{\mathbb{R}}(S^4)$ является мономорфизмом (IV.5.19), мы приходим к противоречию. Следовательно, $n \neq 2$. $\square$

3.29. Замечание. Набросок чисто „K-теорного" доказательства этой теоремы дан в упр. IV.8.15.

4. Теорема Римана — Роха и теоремы целочисленности

4.1. Следуя Хирцебруху [2], опишем вкратце общий метод построения характеристических классов исходя из формальных степенных рядов. Пусть $f(x)$ — формальный степенной ряд с коэффициентами в кольце Λ, который может быть записан в виде $1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$. Если $x_1, \ldots, x_n$ суть n переменных, то $f(x_1) f(x_2) \ldots f(x_n)$ является формальным степенным рядом, симметричным по $x_1, \ldots, x_n$. Следовательно, мы можем записать его в виде $\sum_{k=0}^{\infty} P_f^k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где P_f^k — однозначно определенные симметрические полиномы степени k. Если $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ — элементарные симметрические функции от переменных $x_1, \ldots, x_n$, то полиномы $P_f^k(x_1, \ldots, x_n)$ единственным образом представляются в виде $R_f^k(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, где R_f^k — полином веса k от переменных $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$. Таким образом, для каждого векторного расслоения V ранга n класс когомологий $T_f^k(V) = R_f^k(c_1(V), c_2(V), \ldots, C_n(V))$ представляет собой корректно определенный элемент из $H^{2k}(X) \otimes \Lambda$ (заметим, что $T_f^0(V) = 1$).

4.2. Теорема. *Пусть $T_f(V) = \sum_{k=0}^{\infty} T_f^k(V) \in H^{\text{чёт}}(X)$. Тогда класс T_f характеризуется следующими свойствами:*

a) T_f *функториален (см. 3.15);*

b) $T_f(V_1 \oplus V_2) = T_f(V_1) \cdot T_f(V_2)$;

c) $T_f(V) = f(\chi(V))$, *если расслоение* V *имеет ранг* 1 (*здесь* $\chi(V) = c_1(V)$ — *эйлеров класс расслоения* V).

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 3.15.

4.3. Примеры. Если $f(x) = x$ и $\Lambda = \mathbb{Z}$, то класс $T_f(V)$ — это просто полный класс Чженя $c(V) = 1 + c_1(V) + \ldots + c_n(V)$ векторного расслоения V.

Если $\Lambda = \mathbb{Q}$ и $f(x) = (1 - e^{-x})/x$, то характеристический класс T_f называется *классом Тодда* расслоения V и обозначается $\tau(V)$.

Следующая теорема частично иллюстрирует ту важную роль, которую играет этот класс.

4.4. Теорема. *Пусть* V — *комплексное векторное расслоение ранга* n, *и пусть* $\varphi_K: K_{\mathbb{C}}(X) \to K_{\mathbb{C}}(\bar{V})$ *и* $\varphi_H: H^*(X; \mathbb{Q}) \to H^*(V; \mathbb{Q})$ — *изоморфизмы Тома в* K*-теории и в когомологиях соответственно (через* H^* *мы обозначаем здесь когомологии Чеха с компактными носителями). Тогда* $\varphi_H^{-1}(Ch(\varphi_K(1))) = \tau(V)$. *Кроме того, для каждого элемента* x *из* $K_{\mathbb{C}}(X)$

$$Ch(\varphi_K(x)) = \varphi_H(Ch(x) \cdot \tau(V))$$

(Заметим, что V *и* $\bar{V}$ *имеют одно и то же подстилающее вещественное векторное расслоение, а значит, одно и то же подстилающее топологическое пространство.)*

Доказательство. Временно обозначим класс $\varphi_H^{-1}(Ch(\varphi_K(1)))$ через $\tilde{\tau}(V)$. Метод, использованный в IV.7.18, показывает, что $\tilde{\tau}(V_1 \oplus V_2) = \tilde{\tau}(V_1) \cdot \tilde{\tau}(V_2)$. Поэтому, на основании принципа расщепления, достаточно проверить первую формулу лишь для канонического линейного расслоения L над $P_n = P_n(\mathbb{C})$. Обозначим в этом случае через s нулевое сечение расслоения L, и пусть $s_K^*: K_{\mathbb{C}}(\bar{L}) \to K_{\mathbb{C}}(X)$ и $s_H^*: H^*(L; \mathbb{Q}) \to H^*(X; \mathbb{Q})$ — индуцированные гомоморфизмы в K-теории и теории когомологий соответственно. Тогда в силу 3.10 имеют место соотношения

$$\tilde{\tau}(L)\chi(L) = s_H^*(Ch(\varphi_K(1))) = Ch(s_K^*(\varphi_K(1))) = Ch(1 - \bar{L}) = 1 - \exp(-\chi(L)).$$

Поскольку $\tilde{\tau}(L)\chi(L) = 1 - \exp(-\chi(L))$ для любого целого числа n, мы видим, что класс $\tilde{\tau}(L)$ получается из формального степенного ряда $\frac{1 - e^{-x}}{x}$ подстановкой $x \mapsto f(L)$. Таким образом, $\tilde{\tau}(L) = \tau(L)$; следовательно, $\tilde{\tau}(V) = \tau(V)$ и для любого расслоения V.

Далее,

$$\varphi_H^{-1}(Ch(\varphi_K(x))) = \varphi_H^{-1}(Ch(x) \cdot Ch(\varphi_K(1))) = Ch(x) \cdot \varphi_H^{-1}(Ch(\varphi_K(1))) = \tau(V) \cdot Ch(x).$$

Поэтому $Ch(\varphi_K(x)) = \varphi_H(\tau(V) \cdot Ch(x))$. $\square$

4.5. Замечания. Это — первое место, где нужно учитывать соглашение о знаке в определении изоморфизма φ_K. Соглашение, которого мы придерживаемся, совпадает с соглашением, принятым в книге Хирцебруха [2] (при определении класса Тодда); его мотивировки лежат в алгебраической геометрии. Для того чтобы лучше уяснить это соглашение, удобно представлять себе комплексное векторное расслоение как вещественное векторное расслоение, снабженное ^{c}spin-структурой, ассоциированной с комплексно-сопряженной структурой, а не с исходной комплексной структурой.

Еще один аспект этого соглашения, заслуживающий внимания, заключается в том, что в случае тривиального векторного расслоения V мы имеем $\tau(V)=1$ Следовательно, в этом случае гомоморфизм Ch согласован с изоморфизмом Тома. Другими словами, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
K(X\times\overline{\mathbf{C}}^n) \arrow[r, "Ch"] & H^*(X\times\mathbf{C}^n) \\
K(X) \arrow[u, "\varphi_K"] \arrow[r, "Ch"] & H^*(X) \arrow[u, "\varphi_H"']
\end{tikzcd}$$

Наконец, следует отметить, что наиболее важным для нас характеристическим классом окажется не $\tau(V)$, а его обратный $\tau'(V)=\tau(V)^{-1}$. В самом деле, функция $\frac{x}{1-e^{-x}}$ может быть представлена в виде

$$1+\frac{x}{2}+\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}\frac{B_s}{(2s)!}x^{2s},$$

где B_s — числа Бернулли (Харди и Райт [1]). Например, $B_1=\frac{1}{6}$, $B_2=\frac{1}{30}$, $B_3=\frac{1}{42}$, $B_4=\frac{1}{30}$ и т. д. Следовательно,

$$\tau_1'(V)=\frac{1}{2}c_1,$$

$$\tau_2'(V)=\frac{1}{12}(c_2+c_1^2),$$

$$\tau_3'(V)=\frac{1}{24}c_2c_1,$$

$$\tau_4'(V)=\frac{1}{720}(-c_4+c_3c_1+3c_2^2+4c_2c_1^2-c_1^4),$$

$$\tau_5'(V)=\frac{1}{1440}(-c_4c_1+c_3c_1^2+3c_1c_2^2-c_2c_1^3),$$

$$\tau_6'(V)=\frac{1}{60\,480}(2c_6-2c_5c_1-9c_4c_2-5c_4c_1^2-c_3^2$$
$$+11c_3c_2c_1+5c_3c_1^2+10c_2^3+11c_2^2c_1^2-12c_2c_1^4+2c_1^6).$$

Эти вычисления принадлежат Хирцебруху [2].

4.6. Предложение. *Пусть $\bar{V}$ — расслоение, комлексно-сопряженное расслоению V (I.4.8, e)). Тогда $c_i(\bar{V}) = (-1)^i c_i(V)$. В частности, если $V \approx \bar{V}$, то классы Чженя $c_i(V)$ для нечетных i лежат в подгруппе 2-кручения группы $H^{2i}(X)$.*

Доказательство. Положим $c_i'(V) = (-1)^i c_i(\bar{V})$. Для доказательства равенства $c_i'(V) = c_i(V)$ нам надо проверить, что классы $c_i'(V)$ удовлетворяют аксиомам классов Чженя (3.15). Так как первые две аксиомы очевидны, то достаточно лишь показать, что $c_1(\bar{V}) = -c_1(V)$, если V — комплексное линейное расслоение. Но это немедленно следует из предложения 3.10.

Далее, если $V \approx \bar{V}$, то $c_i(V) = (-1)^i c_i(V)$. Следовательно, для нечетных i имеем $2c_i(V) = 0$. □

4.7. Определение. Пусть W — вещественное векторное расслоение. Определим его *классы Понтрягина* $p_i(W)$ формулой

$$p_i(W) = (-1)^i c_{2i}(V),$$

где $V = W \otimes \mathbf{C}$ — комплексификация расслоения W (I.4.8, e)).

Классы Понтрягина удовлетворяют некоторым формальным аксиомам, аналогичным аксиомам для классов Чженя. Если $p(W) = 1 + p_1(W) + \ldots + p_n(W) + \ldots$, где $p_n(W) \in H^{4n}(X)$, обозначает *полный класс Понтрягина*, то имеет место соотношение $p(W_1 \oplus W_2) = p(W_1)\, p(W_2)$ по модулю 2-кручения. Если W — вещественное векторное расслоение ранга 2, подстилающее комплексное линейное расслоение V, то расслоение $W \otimes \mathbf{C}$ можно отождествить с $V \oplus \bar{V}$ (I.4.8, e)). Следовательно, $p_1(W) = (c_1(V))^2$.

4.8. Предположим теперь, что W — *вещественное* векторное расслоение ранга $2n$, снабженное ^{c}spin-структурой (IV.4.25). В силу теоремы IV.5.14 мы имеем изоморфизм Тома $\varphi_K\colon K_{\mathbf{C}}(X) \to K_{\mathbf{C}}(W)$ и, следовательно, характеристический класс $A(W) = \varphi_H^{-1}(Ch(\varphi_K(1)))$, который называется *классом Атьи — Хирцебруха* расслоения W. Мы хотим вычислить этот класс в терминах классов Понтрягина расслоения W. Заметим, что в силу нашего соглашения о знаках (см. IV.5.8, IV.5.13, 5.4) $A(W) = 1$, если расслоение W тривиально.

Для того чтобы вычислить класс $A(W)$, рассмотрим гомоморфизм $\mathrm{Spin}^c(2n) \to \mathrm{U}(1)$, определенный формулой $(\alpha, z) \mapsto z^2$ (VI.4.30). Этот гомоморфизм индуцирует отображение $H^1(X;\ \mathrm{Spin}^c(2n)) \to H^1(X;\ \mathrm{U}(1)) \approx \Phi_1^{\mathbf{C}}(X)$. Таким образом, каждому векторному расслоению W можно сопоставить комплексное линейное расслоение L. Обозначим класс Чженя $c_1(L)$ этого расслоения через $d(W)$. (* В действительности, как нетрудно показать, $d(W)$ определяет ^{c}spin-структуру на W. *)

4.9. Предложение. *Пусть V — комплексификация вещественного векторного расслоения W. Тогда $A(W) = e^{d/2}\sqrt{\tau(V)}$, где $d = d(W)$ и $\tau(V)$ — класс Тодда расслоения V (4.3). Более общо, $Ch(\varphi_K(x)) = \varphi_H(e^{d/2}\sqrt{\tau(V)} \cdot Ch(x))$.*

Доказательство. Класс $A(W)$ обладает следующими свойствами: $A(W_1 \oplus W_2) = A(W_1) \cdot A(W_2)$ (ср. с 4.4) и $A(W) = 1$, если W — тривиальное расслоение.

Векторное расслоение $W \oplus W$ обладает одновременно комплексной структурой V и ^{c}spin-структурой. Согласно IV.5.9, соответствующие классы Тома отличаются лишь множителем L. Так как $V \approx \overline{V}$, мы имеем $A(W \oplus W) = e^d \tau(V)$. Следовательно, $A(W) = \sqrt{A(W^2)} = \sqrt{A(W \oplus W)} = e^{d/2}\sqrt{\tau(V)}$. Вторая часть предложения доказывается точно так же, как предложение 4.4. □

4.10. Для того чтобы выразить класс $\sqrt{\tau(V)}$ через классы Понтрягина расслоения W, запишем формально $c(V) = \prod_{i=1}^{n}(1+x_i)(1-x_i)$, так что классы Понтрягина расслоения W, которое по предположению имеет ранг $2n$, представляют собой элементарные симметрические функции от x_i^2. Это возможно сделать в рациональных когомологиях, поскольку $c_i(V) = 0$ по модулю 2-кручения для нечетных i (4.6). С учетом этого замечания мы формально имеем

$$\sqrt{\tau(V)} = \prod_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{1-e^{-x_i}}{x_i}\cdot\frac{1-e^{x_i}}{-x_i}} = \prod_{i=1}^{n}\frac{\operatorname{sh}\frac{x_i}{2}}{\frac{x_i}{2}}$$

(что является функцией от x_i^2). Из этих вычислений вытекает следующая теорема, дающая явное описание класса $A(W)$ в терминах классов Понтрягина.

4.11. Теорема (Атья — Хирцебрух). *Пусть W — вещественное векторное расслоение ранга $2n$ с ^{c}spin — структурой, и пусть $d(W)$ — класс когомологий, ассоциированный с W (4.8). Для каждого элемента $x \in K_{\mathbf{C}}(X)$ имеет место соотношение*

$$Ch(\varphi_K(x)) = \varphi_H(A(W)\cdot Ch(x)),$$

где

$$A(W) = e^{d(W)/2}\prod_{i=1}^{n}\frac{\operatorname{sh}\frac{x_i}{2}}{\frac{x_i}{2}}$$

и где мы рассматриваем классы Понтрягина расслоения W как элементарные симметрические функции от x_i^2.

4.12. Пусть W — вещественное векторное расслоение, подстилающее комплексное векторное расслоение T. Снабдим его ^{c}spin-структурой, ассоциированной с $\overline{T}$, в соответствии с нашим соглашением о знаках. Тогда $d(W) = -c_1(T) = -\sum_{i=1}^{n} x_i$ и классы Чженя расслоения T могут рассматриваться как элементарные симметрические функции от x_i. Следовательно,

$$A(W)=e^{d(W)/2}\prod_{i=1}^{n}\frac{\operatorname{sh}\frac{x_i}{2}}{\frac{x_i}{2}}=\prod_{i=1}^{n}\frac{1-e^{-x_i}}{x_i}=\tau(T).$$

Характеристический класс $\prod\limits_{i=1}^{n}\frac{\operatorname{sh}\frac{x_i}{2}}{\frac{x_i}{2}}$, выраженный через классы Понтрягина, будет называться *приведенным классом Атьи — Хирцебруха* расслоения W и обозначаться $\hat{A}(W)$. В действительности более часто используется класс, обратный к $\hat{A}(W)$. Если мы положим $\hat{A}'(W)=\frac{1}{\hat{A}(W)}$, то

$$\hat{A}'_1(W)=-\frac{1}{24}p_1,$$

$$\hat{A}'_2(W)=\frac{7}{5760}p_1^2-\frac{1}{1440}p_2,$$

. .

4.13. Предыдущие рассмотрения можно распространить и на вещественную K-теорию при помощи соответствующего изоморфизма Тома (IV.5.14). Пусть W — вещественное векторное расслоение ранга $8n$, снабженное спинорной структурой. Тогда мы имеем изоморфизмы Тома

$$\varphi_K\colon K_{\mathbb{R}}(X)\to K_{\mathbb{R}}(V) \text{ и } \varphi_H\colon H^*(X;\,\mathbb{Q})\to H^*(V;\,\mathbb{Q}).$$

Для любого локально-компактного пространства Y можно рассмотреть *характер Понтрягина* $P\colon K_{\mathbb{R}}(Y)\to\bigoplus\limits_{i=0}^{\infty}H^{4i}(Y;\,\mathbb{Q})$, который представляет собой композицию гомоморфизма комплексификации $K_{\mathbb{R}}(Y)\to K_{\mathbb{C}}(Y)$ и характера Чженя $K_{\mathbb{C}}(Y)\to H^*(Y;\,\mathbb{Q})$.

4.14. Теорема. *Пусть W — вещественное векторное расслоение ранга $8n$, снабженное некоторой спинорной структурой. Для любого элемента x из $K_{\mathbb{R}}(X)$ имеет место соотношение*

$$P(\varphi_K(x))=\varphi_H(\hat{A}(W)\cdot P(x)),$$

где

$$\hat{A}(W)=\prod_{i=0}^{4n}\frac{\operatorname{sh}\frac{x_i}{2}}{\frac{x_i}{2}}$$

и где снова мы рассматриваем классы Понтрягина расслоения W как элементарные симметрические функции от x_i^2.

4.15. Замечание. Пусть x — некоторый элемент группы $K_{\mathbb{C}}(X)$ (соотв. $K_{\mathbb{R}}(X)$), представленный в виде $x=[E]-[F]$, где E и F — векторные расслоения. Тогда мы можем положить по определению $\tau(x)=\tau(E)\tau(F)^{-1}$ (соотв. $\hat{A}(x)=\hat{A}(E)\hat{A}(F)^{-1}$). Аналогично, если x наделен стабильной ^{c}spin-структурой (§ IV.5), положим $d(x)=d(E)-d(F)$.

4.16. Пусть теперь X и Y — такие компактные дифференцируемые многообразия, что $\dim(Y)-\dim(X)=0 \bmod 2$, и $f\colon X\to Y$ — такое непрерывное отображение, что расслоение $\nu_f=f^*(TY)-TX$ наделяется стабильной ^{c}spin-структурой (IV.5.23). В IV.5.27 мы определили гомоморфизм Гизина

$$f_*=f_*^K\colon K_{\mathbb{C}}(X)\to K_{\mathbb{C}}(Y).$$

Таким же способом можно определить гомоморфизм Гизина в когомологиях

$$f_*^H\colon H^*(X;\,\mathbb{Q})\to H^*(Y;\,\mathbb{Q}),$$

который фактически представляет собой гомоморфизм, дуальный (в смысле двойственности Пуанкаре) к гомоморфизму

$$f_*\colon H_*(X;\,\mathbb{Q})\to H_*(Y;\,\mathbb{Q}).$$

4.17. Теорема (теорема Римана — Роха в формулировке Атьи — Хирцебруха). *Пусть элемент $d=d(\nu_f)$ определен, как в 4.15. Тогда для любого элемента x из $K_{\mathbb{C}}(X)$ имеет место соотношение*

$$Ch(f_*^K(x))=f_*^H(e^{d/2}\cdot\hat{A}(\nu_f)\cdot Ch(x)),$$

где отображение $f\colon X\to Y$ удовлетворяет предположениям п. 4.16 и где $\nu_f=[f^*(TY)]-[TX]$.

Доказательство. Так как обе части указанной выше формулы зависят только от гомотопического класса отображения f (см. IV.5.24), мы можем считать без ограничения общности, что f — дифференцируемое отображение. Прежде всего рассмотрим случай, когда f есть вложение с нормальным расслоением N. Тогда классы расслоений ν_f и N совпадают в группе $K_{\mathbb{R}}(X)$. Следовательно, $\hat{A}(\nu_f)=\hat{A}(N)$. С другой стороны, если мы представим N в виде трубчатой окрестности многообразия X в Y, то диаграмма

$$\begin{tikzcd}
K_{\mathbb{C}}(\dot N) \arrow[r, "u"] \arrow[d, "Ch"'] & K_{\mathbb{C}}(Y) \arrow[d, "Ch"] \\
H^*(\dot N;\,\mathbb{Q}) \arrow[r, "v"] & H^*(Y;\,\mathbb{Q})
\end{tikzcd}$$

где u и v индуцированы каноническим отображением $Y\to\dot{N}$ (см. IV.5.21), коммутативна.

Рассмотрим теперь диаграмму

$$\begin{array}{ccc} K_{\mathbb{C}}(X) & \xrightarrow{\varphi_K} & K_{\mathbb{C}}(N) \\ {\scriptstyle Ch}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Ch} \\ H^*(X;\mathbb{Q}) & \xrightarrow{\varphi_H} & H^*(N;\mathbb{Q}) \end{array}$$

Вообще говоря, эта диаграмма *не* коммутативна. В действительности, если $x \in K_{\mathbb{C}}(X)$, то $Ch(\varphi_K(x)) = \varphi_H(A(N)\cdot Ch(x))$ (в силу теоремы 4.11). Следовательно, $Ch(f_*^K(x)) = Ch(u(\varphi_K(x))) = v(Ch(\varphi_K(x))) = v(\varphi_H(e^{d/2}\cdot \hat{A}(\nu_f)\cdot Ch(x))) = f_*^H(e^{d/2}\cdot \hat{A}(\nu_f)\cdot Ch(x))$. Это равенство доказывает теорему в случае, когда f — вложение.

В общем случае дифференцируемое отображение f распадается в композицию вложения и проекции: $f = p\cdot i$, где $i\colon X \to Y\times S^{2n}$ и $p\colon Y\times S^{2n} \to Y$ (проекция на первый сомножитель). Следовательно, $f_*^K = p_*^K\cdot i_*^K$ (IV.5.24), и аналогично $f_*^H = p_*^H\cdot i_*^H$. Заметим также, что $\nu_f = \nu_i$ в группе $\tilde{K}_{\mathbb{R}}(X)$. Так как диаграмма

$$\begin{array}{ccc} K_{\mathbb{C}}(Y\times S^{2n}) & \xrightarrow{p_*^K} & K_{\mathbb{C}}(Y) \\ {\scriptstyle Ch}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Ch} \\ H^*(Y\times S^{2n};\mathbb{Q}) & \xrightarrow{p_*^H} & H^*(Y;\mathbb{Q}) \end{array}$$

коммутативна в силу мультипликативности характера Чженя, то мы имеем

$$Ch(f_*^K(x)) = Ch(p_*^K\cdot i_*^K(x)) = p_*^H(Ch(i_*^K(x)))$$
$$= p_*^H(i_*^H(e^{d/2}\cdot \hat{A}(\nu_f)\cdot Ch(x))) = f_*^H(e^{d/2}\cdot A(\nu_f)\cdot Ch(x)). \quad \square$$

4.18. Следствие. *Предположим, что ν_f наделено стабильной комплексной структурой (и, следовательно, стабильной* ^{c}spin-*структурой; см. IV.5.27). Тогда элемент $e^{d/2}\cdot \hat{A}(\nu_f)$ является классом Тодда $\tau(\nu_f)$ расслоения ν_f. Таким образом, имеет место соотношение*

$$Ch(f_*^K(x)) = f_*^H(\tau(\nu_f)\cdot Ch(x)).$$

4.19. Теорема. *Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение таких дифференцируемых многообразий, что* $\dim(Y) - \dim(X) = 0 \bmod 8$. *Предположим, что расслоение $\nu_f = f^*(TY) - TX$ снабжено стабильной спинорной структурой. Тогда имеет место соотношение*

$$P(f_*^K(x)) = f_*^H(\hat{A}(\nu_f)\cdot P(x)),$$

где f_*^K — гомоморфизм Гизина в вещественной K-теории, а P — характер Понтрягина (4.13).

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 4.17.

4.20. Применим полученные результаты к случаю, когда Y — точка. Тогда гомоморфизм Гизина $f_*^H\colon H^*(X;\mathbb{Q}) \to H^*(Y;\mathbb{Q})$ является изоморфизмом $H^p(X;\ \mathbb{Q})\approx H^0(Y;\ \mathbb{Q})\approx\mathbb{Q}$ для $p=\dim(X)$ и отображает $H^i(X;\ \mathbb{Q})$ в 0, если $i\neq\dim(X)$. Другими словами $f_*^H(z)$ есть значение класса когомологий z на фундаментальном классе многообразия X. Так как с точностью до изоморфизма Ch: $K(Y)\to H^0(Y;\ \mathbb{Q})$ представляет собой каноническое вложение $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Q}$, мы в качестве следствия теоремы 4.17 получаем следующую теорему целочисленности.

4.21. Теорема (Атья — Хирцебрух [1]). *Пусть X — такое компактное дифференцируемое многообразие четной размерности, что расслоение TX допускает стабильную ^{c}spin-структуру с ассоциированным классом когомологий $d\in H^2(X;\ \mathbb{Z})$. Тогда для каждого элемента x из $K_{\mathbb{C}}(X)$ значение $e^{-d/2}Ch(x)/\hat{A}(TX)$ на фундаментальном классе X представляет собой целое число.*

4.22. Пример. Пусть X — четырехмерное многообразие. Если мы возьмем $x=1$, то найдем, что элемент p_1-3d^2 делится на 24. Если $\dim(X)=6$, то d^3-dp_1 делится на 48. Если $\dim(X)=8$, то элемент $15d^4+30p_1d^2+7p_1^2-4p_2$ делится на 5760, и т. д.

4.23. Следствие. *Пусть X — такое компактное дифференцируемое многообразие четной размерности, что расслоение TX допускает стабильную комплексную структуру. Тогда для любого элемента $x\in K_{\mathbb{C}}(X)$ значение $Ch(x)/\tau(TX)$ на фундаментальном классе X представляет собой целое число.*

4.23a. Пример. Если мы снова возьмем элемент $x=1$, то вычисления, проведенные в 4.5, показывают, что некоторые рациональные характеристические классы являются целочисленными. Например, в случае $\dim(X)=8$ мы находим, что значение класса $c_4-c_3c_1-3c_2^2-4c_2c_1^2+c_1^4$ на фундаментальном классе многообразия X делится на 720 (здесь c_i — классы Чженя расслоения TX, снабженного стабильной комплексной структурой).

4.24. Теорема (см. Хирцебрух [1]). *Пусть X — такое компактное многообразие размерности $8l+4$, что касательное расслоение TX допускает спинорную структуру (т. е. $w_2(TX)=0$; см. IV.4.20). Тогда для каждого элемента $x\in K_{\mathbb{R}}(X)$ значение $P(x)/\hat{A}(TX)$ на фундаментальном классе X представляет собой целое число.*

Доказательство. Применим теорему 4.19 к постоянному отображению из X в S^4. Тогда характер Понтрягина P: $K_{\mathbb{R}}(S^4)\to H^*(S^4;\ \mathbb{Q})$ изоморфно отображает $K_{\mathbb{R}}(S^4)$ на $2H^4(S^4;\ \mathbb{Z})=2\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}=H^4(S^4;\ \mathbb{Q})$, поскольку Ch изоморфно отображает $K_{\mathbb{C}}(S^4)$ на $H^4(S^4;\ \mathbb{Z})$ (3.25), а гомоморфизм комплексификации $K_{\mathbb{R}}(S^4)\approx\mathbb{Z}\to K_{\mathbb{C}}(S^4)\approx\mathbb{Z}$ является умножением на 2 (III.5.20). С другой стороны, гомоморфизм f_*^H разлагается в композицию $\beta_*^H\alpha_*^H$, где α: $X\to$ *точка* и β: *точка* $\to S^4$. Так как β_* представляет собой изоморфизм из H^0 (*точка*) в $H^4(S^4)$, то $f_*^H(P(x)\cdot\hat{A}(\nu_f))$ есть значение $P(x)/\hat{A}(TX)$ на фундаментальном классе X, в предположении что мы отождествили группу $H^4(S^4)$ с $\mathbb{Z}$. ▯

4.25. Пример. Пусть многообразие X имеет размерность 4. Тогда, если $w_2(TX)=0$, то значение p_1 делится на 48 (заметим, что если $w_2(TX)$ получается из целочисленного класса, то $p_1(TX)$ в общем случае делится на 24; см. IV.4.20 и 25). Аналогично, если $\dim(X)=8$ и $w_2(TX)=0$, то значение $7p_1^2-4p_2$ делится на 11520, и т. д. Здесь p_i — классы Понтрягина касательного расслоения.

4.26. Замечание. Можно избежать использования ^{c}spin- или спинорной структур, если рассмотреть теорию $K_{\mathbb{C}}(X)\otimes\mathbb{Z}[1/2]$ (см. IV.8.13). Мы предоставляем читателю в качестве упражнения доказать тот факт, что *с точностью до степени двух* приведенный класс Атьи — Хирцебруха *любого* ориентированного многообразия, вычисленный на фундаментальном классе, представляет собой целое число. Например, если $\dim(X)=4$ (соотв. 8), то значение p_1 (соотв. $7p_1^2-4p_2$) на фундаментальном классе делится на 3 (соотв. на 45), и т. д.

4.27. В дифференциальной топологии хорошо известно, что классы Понтрягина многообразий не являются гомотопическими инвариантами. Однако, используя предыдущий метод, можно показать, что подходящие классы являются инвариантами по модулю m. Более точно, пусть p_i' — классы Понтрягина, рассматриваемые в факторгруппе $H^{4i}(X;\mathbb{Z})/\Gamma^{4i}(X)$, где $\Gamma^{4i}(X)$ — подгруппа кручения в $H^{4i}(X;\mathbb{Z})$. Если $f\colon X\to Y$ — гомотопическая эквивалентность, то мы имеем $p'(\nu_f)=f^*(p'(TY))\cdot p'(TX)^{-1}$. Так как ν_f — спинорное расслоение, то $\hat{A}(\nu_f)\in P(K_{\mathbb{R}}(X))$, в силу теоремы 5.24. В качестве применения этих рассуждений получаем следующую теорему:

4.28. Теорема (Хирцебрух [1]). *Пусть X — компактное многообразие и TX — его касательное расслоение. Тогда образ класса $p_1(TX)$ в факторгруппе $H^4(X;\mathbb{Z})/\Gamma^4(X)$ является гомотопическим инвариантом по модулю* 24. *Если $H^2(X;\mathbb{Z}/2)=0$, то этот образ является инвариантом по модулю* 48.

4.29. Мы завершим этот параграф еще одним приложением теоремы Римана—Роха. Рассмотрим дифференцируемое расслоение

$$E\xrightarrow{\pi}B,$$

где E и B — компактные многообразия, слой которого F есть компактное многообразие четной размерности. Предположим, что расслоения TF и TB (а следовательно, и расслоение ν_π) допускают ^{c}spin-структуры.

4.30. Теорема (Атья — Хирцебрух [3]). *Обозначим через $\mathcal{A}(F)$ значение $e^{d(TF)}A(TF)$ на фундаментальном классе многообразия F. Тогда композиция $\pi_*\pi^*$ представляет собой гомоморфизм $K_{\mathbb{C}}(B)$-модулей, определяемый умножением на некоторый элемент из $K_{\mathbb{C}}(B)$. Этот элемент можно записать в виде $\mathcal{A}(F)+x'$, где $x'\in K'_{\mathbb{C}}(B)$. В частности, если многообразие B связно и $\mathcal{A}(F)=\pm1$, то гомоморфизм $\pi^*\colon K_{\mathbb{C}}(B)\to K_{\mathbb{C}}(E)$ является мономорфизмом.*

Доказательство. Поскольку π^* и π_* суть гомоморфизмы $K_{\mathbb{C}}(B)$-модулей, композиция $\pi_*\pi^*$ представляет собой корректно определенный гомоморфизм умножения на некоторый элемент x из $K_{\mathbb{C}}(B)$. Для того чтобы записать их в требуемом виде, используем коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd} K_{\mathbb{C}}(B) \arrow[r, "\pi^*"] \arrow[d] & K_{\mathbb{C}}(E) \arrow[d] \\ K_{\mathbb{C}}(P) \arrow[r, "(\pi_F)^*"] & K_{\mathbb{C}}(F) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} K_{\mathbb{C}}(E) \arrow[r, "\pi_*"] \arrow[d] & K_{\mathbb{C}}(B) \arrow[d] \\ K_{\mathbb{C}}(F) \arrow[r, "(\pi_F)_*"] & K_{\mathbb{C}}(P) \end{tikzcd}$$

где P — точка. Очевидно, достаточно доказать теорему лишь для случая, когда B есть точка. Но в этом случае она непосредственно следует из определения класса Атьи — Хирцебруха. □

4.31. Пример. Читатель может проверить, что многообразия флагов и комплексные проективные пространства представляют собой примеры таких многообразий F, для которых $\mathcal{A}(F) = \pm 1$. Это дает апостериорное обоснование принципа расщепления в комплексной K-теории.

5. Приложения K-теории к исследованию стабильных гомотопий

5.1. Пусть E — векторное расслоение с компактной базой X. Расслоению E с точностью до гомотопии можно сопоставить некоторую метрику (I.8.5) и, следовательно, некоторое сферическое расслоение $S(E)$. Пусть E' — другое векторное расслоение. Расслоения $S(E)$ и $S(E')$ называются *послойно гомотопически эквивалентными*, если существует непрерывное отображение $f\colon S(E) \longrightarrow S(E')$, превращающее диаграмму

$$\begin{tikzcd} S(E) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & S(E') \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

в коммутативную и такое, что для каждой точки $x \in X$ отображение $f_x\colon S(E_x) \longrightarrow S(E'_x)$ является гомотопической эквивалентностью. Согласно одной теореме Дольда—Лашефа [1], определенное таким образом отношение между расслоениями E и E' есть отношение эквивалентности; однако здесь этот результат нам не понадобится. Если обозначить через $\Gamma(X)$ фактормножество множества $\Phi(X)$ по этому отношению эквивалентности, то очевидно, что $\Gamma(X)$ является абелевым моноидом относительно операции взятия суммы Уитни векторных расслоений. Более точно, пространство $S(E \oplus F)$ можно отождествить с факторпространством произведения $S(E) \times S(F) \times I$

по отношению эквивалентности $(x, y, 0) \sim (x', y, 0)$ и $(x, y, 1) \sim \sim (x, y', 1)$. Следовательно, если $S(E) \sim S(E')$ и $S(F) \sim S(F')$, то $S(E \oplus F) \sim S(E' \oplus F')$. Симметризация моноида $\Gamma(X)$ обозначается через $J(X)$; она представляет собой факторгруппу группы $K_{\mathbb{R}}(X)$ (см. Атья [1]).

5.2. Для группы $J(X)$ можно повторить некоторые рассуждения, относящиеся к $K_{\mathbb{R}}(X)$. Например, если пространство X связно, то $J(X) \approx \mathbf{Z} \oplus \tilde{J}(X)$, где $\tilde{J}(X)$ — факторгруппа моноида $\Gamma(X)$ по отношению *стабильной* послойной гомотопической эквивалентности; $S(E)$ *стабильно эквивалентно* $S(E')$, если $S(E \oplus n)$ эквивалентно $S(E' \oplus n')$ для некоторых n и n'. Поэтому $J(X) \approx \operatorname{inj}\lim \Gamma_p(X)$, где $\Gamma_p(X)$ — подмножество в $\Gamma(X)$, порожденное сферическими расслоениями $S(E)$, отвечающими расслоениям E ранга p.

5.3. Выберем в компактном пространстве Y отмеченную точку y_0 и обозначим через $\mathrm{H}(p)$ пространство *гомотопических самоэквивалентностей* сферы S^{p-1}, т. е. пространство классов гомотопически эквивалентных отображений из S^{p-1} в S^{p-1}. Пусть $[Y, \mathrm{O}(p)]'$ (соотв. $[Y, \mathrm{H}(p)]'$) — множество гомотопических классов отображений $f\colon Y \to \mathrm{O}(p)$ (соотв. $f\colon Y \to \mathrm{H}(p)$, таких что $f(y_0) = 1$. Обозначим через $X = SY$ надстройку пространства Y. На основании вычислений, проделанных в I.3.9, множество $\Phi_p^{\mathbb{R}}(SY)$ можно отождествить с фактормножеством $[Y, \mathrm{O}(p)]'$ по действию группы $\mathbb{Z}/2 \approx \pi_0(\mathrm{O}(p))$. Пусть $[Y, \mathrm{O}(p)]''$ (соотв. $[Y, \mathrm{H}(p)]''$) — фактормножество множества $[Y, \mathrm{O}(p)]'$ (соотв. $[Y, \mathrm{H}(p)]'$) по действию группы $\pi_0(\mathrm{O}(p))$ (соотв. $\pi_0(\mathrm{H}(p))$). Это последнее действие определяется формулой $(a, f) \mapsto afa^{-1}$, где a^{-1} — класс, гомотопически обратный к классу a [1].

Если $S(E)$ — сферическое расслоение, ассоциированное с векторным расслоением E над SY то $S(E)$ определяет некоторый элемент множества $[Y, \mathrm{O}(p)]''$, а значит, некоторый элемент множества $[Y, H(p)]''$.

5.4. **Предложение.** *Пусть E и E' — такие векторные расслоения ранга p над SY, что сферические расслоения $S(E)$ и $S(E')$ гомотопически эквивалентны. Тогда они определяют один и тот же класс в $[Y, \mathrm{H}(p)]''$. Кроме того, определенное таким образом отображение*

$$\Gamma_p(SY) \mapsto [Y, \mathrm{H}(p)]''$$

инъективно (но, вообще говоря, не сюръективно).

Доказательство. Обозначим верхнюю полусферу (соотв. нижнюю полусферу) расслоения SY через S^+Y (соотв. S^-Y). Векторное расслоение E (соотв. E') получается склеиванием тривиальных расслоений $E_1 = S^+Y \times \mathbb{R}^p$ и $E_2 = S^-Y \times \mathbb{R}^p$ с помощью функции перехода $f\colon Y \to \mathrm{O}(p)$ (соотв. $f'\colon Y \to \mathrm{O}(p)$), такой что $f(y_0) = 1$ (соотв.

[1] Можно доказать, что $\pi_0(\mathrm{H}(p)) \approx \pi_0(\mathrm{O}(p)) \approx \mathbb{Z}/2$, но нам этот результат здесь не понадобится.

$f'(y_0)=1$). Если $S(E)$ и $S(E')$ гомотопически эквивалентны, то мы имеем коммутативную диаграмму, аналогичную рассмотренной в I.3.9:

$$\begin{tikzcd} S(E) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, dashed, "f"'] & S(E) \arrow[d, dashed, "f'"] \\ S(E') \arrow[r, "\alpha'"] & S(E') \end{tikzcd}$$

Здесь отображения, обозначенные штриховыми стрелками, определены только над Y и α, α' — послойные гомотопические эквивалентности. Из этой диаграммы следует, что отображения f и $\lambda f'\mu$ (где λ, $\mu \in \mathrm{H}(p)$) гомотопны как отображения из Y в $\mathrm{H}(p)$. Следовательно, классы f и f' в $[Y, \mathrm{H}(p)]''$ совпадают и отображение $\Gamma_p(SY) \to [X, \mathrm{H}(p)]''$ корректно определено.

Покажем теперь, что это отображение инъективно. Пусть f и f' — отображения из Y в $\mathrm{O}(p)$, определяющие один и тот же класс в $[Y, \mathrm{H}(p)]''$, и пусть E и E' — векторные расслоения, ассоциированные с этими отображениями. Зададим послойное отображение из $S(E)$ в $S(E')$ с помощью той же диаграммы, что и выше, в которой $\alpha'=\mathrm{Id}$, а α задается гомотопией $\hat{f}'^{-1}\hat{f}$ и тождественного отображения в классе всех гомотопических самоэквивалентностей сферы S^{p-1} (см. I.3.9). По построению это отображение является послойной гомотопической эквивалентностью. □

5.5. Предложение. *Пусть* $\mathrm{H}=\mathrm{inj\,lim}\,\mathrm{H}(p)$ *и* $[Y,\mathrm{H}]'$ *— множество гомотопических классов отображений* f *из* Y *в* H, *таких что* $f(y_0)=1$. *Тогда*

$$[Y, \mathrm{H}]' = \mathrm{inj\,lim}\,[Y, \mathrm{H}(p)]' = \mathrm{inj\,lim}\,[Y, \mathrm{H}(p)]''.$$

В частности, $\tilde{J}(SY)$ *является подмножеством множества* $[Y, \mathrm{H}]'$).

Доказательство. Достаточно доказать, что действие группы $\pi_0(\mathrm{H}(p))$ на $[X, \mathrm{H}(2p)]'$ тривиально. Если a и b — гомотопические самоэквивалентности сферы S^{p-1}, то пара (a, b) определяет гомотопическую самоэквивалентность джойна[1] $S^{p-1} * S^{p-1} = S^{2p-1}$; обозначим эту самоэквивалентность через $\theta_{a,b}$. Ясно, что $\theta_{a,b}=\theta_{a,1}\cdot\theta_{1,b}$ и отображение $\theta_{a,1}$ гомотопно $\theta_{1,a}$ (используем вращение сферы S^{2p-1}, меняющее местами сомножители S^{p-1}). Следовательно, $\theta_{a,b}$ гомотопно $\theta_{ab,1}$. Пусть теперь $f\colon Y \to \mathrm{H}(p)$ — такое непрерывное отображение, что $f(y_0)=1$, $a \in \mathrm{H}(p)$ и $a' \in \mathrm{H}(p)$ представляет собой гомотопическую экивалентность, обратную к a. Тогда $\theta_{af(y)a',1}$ гомотопно $\theta_{af(y)a', a'a} = \theta_{a,a'}\cdot\theta_{f(y),1}\cdot\theta_{a',a} \sim \theta_{f(y),1}$. □

5.6. Пусть $\mathrm{H}_1(p)$ (соотв. $\mathrm{H}_{-1}(p)$) — подмножество в $\mathrm{H}(p)$, состоящее из тех гомотопических самоэквивалентностей сферы S^{p-1}, ко-

---

[1] *Джойн* (или *соединение*) $Z*T$ двух пространств Z и T — это факторпространство произведения $Z\times T\times I$ по отношенню эквивалентности $(x, z, 0) \sim (x', z, 0)$ и $(x, z, 1) \sim (x, z', 1)$.

торые гомотопны $\mathrm{Id}_{S^{p-1}}$ (соотв. гомотопны отображению $(x_1, \ldots, x_p) \mapsto (x_1, \ldots, -x_p)$). Обозначим через $\mathrm{H}_0(p)$ множество всех непрерывных отображений из S^{p-1} в S^{p-1}, которые гомотопны постоянному отображению. Наконец, обозначим через $\mathrm{H}_n^0(p)$ (для $n=0$, 1 или -1) подмножество в $\mathrm{H}_n(p)$, состоящее из всех таких отображений σ, что $\sigma(e)=e$, где e — отмеченная точка сферы S^{p-1}. Пространство $\mathrm{H}_n^0(p)$ служит слоем *расслоения Гуревича*

$$\mathrm{H}_n^0(p) \longrightarrow \mathrm{H}_n(p) \xrightarrow{\tau} S^{p-1},$$

где $\tau(\sigma)=\sigma(e)$. В частности, для любого пространства Y с отмеченной точкой мы имеем следующую „точную последовательность" пунктированных множеств

$$[Y, \Omega S^{p-1}]' \longrightarrow [Y, \mathrm{H}_n^0(p)]' \longrightarrow [Y, \mathrm{H}_n(p)]' \longrightarrow [Y, S^{p-1}]'.$$

Если мы положим $\mathrm{H}_n^0 = \operatorname{inj}\lim \mathrm{H}_n^0(p)$, то $[Y, \mathrm{H}_n^0]' \approx [Y, \mathrm{H}_n]'$, поскольку сфера S^{p-1} стягиваема в S^p. В частности,

$$[Y, \mathrm{H}_1^0] \approx [Y, \mathrm{H}_1] \approx \operatorname{inj}\lim [Y, \mathrm{H}_1^0(p)].$$

5.7. Пусть c: $S^{p-1} \longrightarrow S^{p-1} \vee S^{p-1}$ — непрерывное отображение, переводящее S^{p-2} в отмеченную точку пространства $S^{p-1} \vee S^{p-1}$ (рис. 25). Это отображение определяет два непрерывных отображения

$$\alpha\colon\ \mathrm{H}_0^0(p) \times \mathrm{H}_1^0(p) \longrightarrow \mathrm{H}_1^0(p) \quad \text{и}$$
$$\beta\colon\ \mathrm{H}_1^0(p) \times \mathrm{H}_{-1}^0(p) \longrightarrow \mathrm{H}_0^0(p).$$

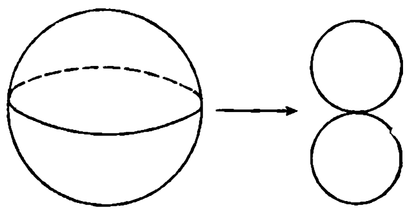


Рис. 25.

Элементарные рассуждения показывают, что если $a \in \mathrm{H}_1^0(p)$ и $b \in \mathrm{H}_{-1}^0(p)$, то отображения $x \mapsto \alpha(x, a)$ и $y \mapsto \beta(y, b)$ определяют гомотопические эквивалентности между пространствами $\mathrm{H}_0^0(p)$ и $\mathrm{H}_1^0(p)$, обратные друг к другу. Так как $[Y, \mathrm{H}_0^0(p)]' \approx [S^{p-1} \wedge Y, S^{p-1}]'$, мы получаем следующую теорему:

5.8. Теорема. *Пусть Y — линейно-связное компактное пространство. Тогда при помощи определенного выше отображения группу $\tilde{J}(SY)$ можно отождествить с некоторой подгруппой в* $\operatorname{inj}\lim[S^{p-1} \wedge Y, S^{p-1}]'$. *В частности, группа $\tilde{J}(S^r) = \tilde{J}(SS^{r-1})$ изоморфна некоторой подгруппе группы*

$$\pi_{r-1}^S = \operatorname{inj}\lim \pi_{p+r-1}(S^p).$$

5.9. Полученные результаты служат мотивировкой для систематического изучения групп $J(X)$. В ближайших пунктах мы опишем некую группу $J'(X)$, которую можно рассматривать как „нижнюю грань" для $J(X)$ в том смысле, что существует эпиморфизм $J(X) \longrightarrow$

$\to J'(X)$. Кроме того, группа $J'(X)$ эффективно вычислима в терминах K-теории.

Итак, пусть $T(X)$ — подгруппа в $K_{\mathbb{R}}(X)$, порожденная элементами вида $[E]-n$, где E — такое векторное расслоение ранга n, что $S(E)$ имеет тривиальный стабильный послойный гомотопический тип. Ясно, что $J(X)=K_{\mathbb{R}}(X)/T(X)$.

Можно показать (мы используем этот результат без доказательства), что препятствие к поднятию структурной группы векторного расслоения до группы $\mathrm{Spin}(n)$ зависит только от послойного гомотопического типа расслоения $S(E)$ и что, если такое поднятие невозможно, послойный гомотопический тип нетривиален [1]. Другими словами, $T(X)\subset T_1(X)$, где через $T_1(X)$ обозначено множество элементов из $K_{\mathbb{R}}(X)$, имеющих вид $[E]-n$; здесь E — векторное расслоение ранга $n=8k$, снабженное спинорной структурой.

Пусть теперь $T'(X)$ — подгруппа в $T_1(X)$, состоящая из таких элементов вида $x=[E]-n$, что $\rho^k(x)=\psi^k(1+y)/(1+y)$ для каждого k, где $y\in K'_{\mathbb{R}}(X)$ не зависит от выбора k. Конечно же, определение отображения ρ^k неявно предполагает выбор изоморфизма Тома φ: $K_{\mathbb{R}}(X)\to K_{\mathbb{R}}(E)$. Но, как было указано в IV.7.29, если φ и φ' — два изоморфизма Тома, то классы $(\varphi^{-1}\psi^k\varphi)(1)$ и $(\varphi'^{-1}\psi^k\varphi')(1)$ различаются лишь множителем вида $\psi^k(1+y)/(1+y)$, где $y\in \tilde{K}_{\mathbb{R}}(X)$. Вложение $T(X)\subset T'(X)$, доказанное в предложении 2.5, индуцирует эпиморфизм $J(X)\to J'(X)$, где $J'(X)=K_{\mathbb{R}}(X)/T'(X)$.

5.10. Пример. Пусть $X=RP_{n-1}$. Вычисления, проделанные в п. 2.7, показывают, что $J(X)=J'(X)=K_{\mathbb{R}}(X)=Z\oplus Z/a_nZ$.

5.11. Для того чтобы выполнить явные вычисления, воспользуемся когомологическими методами. Следующее предложение является первым шагом в этом направлении.

5.12. Предложение. *Пусть E — комплексное векторное расслоение ранга n. Тогда $Ch(\rho^k_{\mathbb{C}}(\bar{E}))=k^n\psi^k_H(\tau(E))/\tau(E)$, где $\tau(E)$ — класс Тодда расслоения E (см. 4.3).*

Доказательство. Согласно принципу расщепления, это предложение достаточно доказать лишь в случае, когда E — линейное расслоение. Тогда $\rho^k_{\mathbb{C}}(\bar{E})=1+\bar{E}+\ldots+\bar{E}^{k-1}$ и $Ch(\rho^k_{\mathbb{C}}(\bar{E}))=1+e^{-x}+\ldots$ $\ldots e^{-(k-1)x}$, где $x=c_1(E)$. С другой стороны,

$$k\psi^k_H(\tau(E))/\tau(E)=k\psi^k_H\left(\frac{1-e^{-x}}{x}\right)\cdot\frac{x}{1-e^{-x}}=k\frac{1-e^{-kx}}{kx}\cdot\frac{x}{1-e^{-x}}=$$
$$=1+e^{-x}+\ldots+e^{-(k-1)x}. \ \square$$

---

[1] Этот результат следует из теории характеристических классов Штифеля — Уитни (см. Том [1] и Милнор и Сташеф [1]). В случае когда X — сфера S^r с $r\geqslant 2$, нетрудно непосредственно показать, что расслоение E допускает спинорную структуру, рассматривая точную гомотопическую последовательность, ассоциированную с расслоением $\mathbb{Z}/2\to\mathrm{Spin}(n)\to SO(n)$, и учитывая, что ориентированные расслоения над S^r описываются группой $\pi_{r-1}(SO(n))$.

5.13. Напомним, что *числа Бернулли* B_s определяются на основе степенного ряда

$$\frac{x}{1-e^{-x}}=\sum_{s=0}^{\infty}\beta_s\frac{x^s}{s!}$$

формулой

$$B_s=(-1)^{s-1}\beta_{2s}$$

(заметим, что $\beta_{2s+1}=0$ для $s>0$).

5.14. Лемма. *Пусть* $\sum_{t=1}^{\infty}\alpha_t\frac{x^t}{t!}$ *— разложение в ряд функции* $\operatorname{Log}\left(\frac{1-e^{-x}}{x}\right)$ *Тогда* $\alpha_t=\frac{\beta_t}{t}$ *для* $t>0$.

Доказательство. Продифференцируем указанное разложение. □

5.15. Предложение. *Для любого элемента* $x\in K_{\mathbb{C}}(X)$ *имеет место формула*

$$\operatorname{Log}(\tau(x))=\sum_{t=1}^{\infty}(-1)^t\alpha_t Ch_t(x).$$

В этой формуле $\tau(x)$ *— класс Тодда элемента* x, $Ch_t(x)\in H^{2t}(X;\mathbb{Q})$ *— однородная компонента степени* $2t$ *класса* $Ch(x)$, $\alpha_1=\frac{1}{2}$, $\alpha_{2s+1}=0$ *для* $s>0$ *и* $\alpha_{2s}=(-1)^{s-1}\frac{B_s}{2s}$.

Доказательство. Это немедленно следует из принципа расщепления и сделанных выше замечаний. □

5.16. Теорема. *Пусть* $x=E-n$ *— элемент группы* $K_{\mathbb{R}}(X)$, *причем* $\operatorname{rank}(E)=n$. *Если класс элемента* x *в группе* $J(x)$ *равен* 0, *то существует такой элемент* $y\in K'_{\mathbb{R}}(X)$, *что*

$$\sum_{t=1}^{\infty}\frac{\alpha_t}{2}Ch_t(cx)=\operatorname{Log}(Ch(1+cy)). \qquad (1)$$

Если $X=SY$, *то это соотношение записывается просто в виде*

$$\frac{\alpha_t}{2}Ch_t(cx)=Ch_t(cy).$$

Наконец, если группа $K_{\mathbb{R}}(X)$ *не имеет кручения, то соотношение* (1) *представляет собой необходимое и достаточное условие того, что* $x\in T'(X)$.

Доказательство. Рассмотрим уравнение $\rho^k_{\mathbb{R}}(x)=\psi^k(1+y)/(1+y)$, где $y\in K'_{\mathbb{R}}(X)$. В силу IV.7.28, $c(\rho^k_{\mathbb{R}}(x))^2=\rho^k_{\mathbb{C}}(cx)=\psi^k(1+cy)^2/(1+cy)^2$. Следовательно,

$$Ch(\rho^k_{\mathbb{C}}(cx))=\psi^k_H(\tau(cx))/\tau(cx)=\psi^k_H(Ch(1+cy)^2)/Ch(1+cy)^2,$$

или, согласно 4.12,

$$\psi_H^k\left(\frac{\tau(cx)}{Ch(1+cy)^2}\right)=\frac{\tau(cx)}{Ch(1+cy)^2}.$$

Так как единственными элементами в $H^{\text{чёт}}(X;\,\mathbb{Q})$, инвариантными относительно операции ψ_H^k, являются константы, то

$$\tau(cx)=Ch(1+cy)^2.$$

Применяя к обеим частям логарифмическую функцию, получаем

$$\sum_{t=1}^{\infty}\frac{\alpha_t}{2}Ch_t(cx)=\operatorname{Log}(Ch(1+cy)),$$

что и требовалось.

Если $X=SY$, то $\cup$-произведение в когомологиях тривиально. Следовательно, $\operatorname{Log}(Ch(1+cy))=\operatorname{Log}(1+Ch(cy))=Ch(cy)$ и $\frac{\alpha_t}{2}Ch_t(cx)=$ $=Ch_t(cy)$. □

5.17. Теорема. *Пусть d_n — знаменатель дроби $B_n/4n$, где B_n — число Бернулли с номером n (см. 5.13). Тогда $\tilde{J}'(S^{4n})$ является циклической группой порядка d_n, так что мы имеем эпиморфизм $\tilde{J}(S^{4n})\to\mathbb{Z}/d_n\mathbb{Z}$. В частности, π_{4n-1}^s имеет подфакторгруппу (т.е. факторгруппу подгруппы), изоморфную $\mathbb{Z}/d_n\mathbb{Z}$.*

Доказательство. Применим теорему 5.16 к случаю, когда $X=S^{4n}$. Соотношение $\frac{\alpha_t}{2}Ch_t(cx)=Ch_t(cy)$ в этом случае есть просто $\frac{\alpha_n}{2}\cdot x=y$, или, эквивалентно, $\frac{B_n}{4n}\cdot x=y$. Следовательно, элемент x делится на d_n. □

5.18. Примеры. Ниже приведена таблица нескольких первых чисел Бернулли. Из этой таблицы мы находим, например, что $|\pi_{31}^s|\geqslant 16\,230$.

n	B_n	d_n	π_{4n-1}^s
1	1/6	24	π_3^s
2	1/30	240	π_7^s
3	1/42	504	π_{11}^s
4	1/30	480	π_{15}^s
5	5/66	264	π_{19}^s
6	691/2730	65 520	π_{23}^s
7	7/6	24	π_{27}^s
8	3617/510	16 230	π_{31}^s

5.19. В заключение кратко наметим, как можно применять K-теорию в гомотопической топологии, исходя из другой т чки зрения. Пусть $f\colon X \to S^{2p}$ — непрерывное отображение, индуцирующее нулевой гомоморфизм $\tilde{K}^*(S^{2p}) \to \tilde{K}^*(X)$ (здесь K обозначает комплексную K-теорию $K_{\mathbf{C}}$). Тогда, используя точную последовательность Пуппе отображения f (II.3.29)

$$X \xrightarrow{f} S^{2p} \xrightarrow{i} Cf \xrightarrow{j} SX \xrightarrow{Sf} S^{2p+1},$$

мы получаем, что $\tilde{K}(Cf) \approx Z \oplus \tilde{K}(SX)$ (ср. с 1.3). Если x — такой элемент из $\tilde{K}(Cf)$, что $i^*(x) = \beta_{2p}$ есть образующая группы $\tilde{K}(S^{2p})$, то $\psi^k(x)$ можно записать в виде $k^p x + j^*(a_k)$, где a_k — элемент из $\tilde{K}(SX)$. При замене x на $x + j^*(y)$ элемент a_k преобразуется в $a_k + (\psi^k - k^p)(y)$. Следовательно, класс элемента a_k в $\tilde{K}(SX)$ корректно определен по модулю подгруппы $(\psi^k - k^p)(\tilde{K}(SX))$ и зависит только от гомотопического класса отображения f. Это задает некоторый инвариант гомотопического класса отображения f.

Классы a_k независимы, так как из соотношения $\psi^k\psi^l = \psi^l\psi^k$ (см. IV.7.15) следует, что $(\psi^l - l^p)(a_k) = (\psi^k - k^p)(a_l)$. Если $H^{2p-1}(X; Q) = 0$, то $\psi^k - k^p$ и $\psi^l - l^p$ — изоморфизмы $\tilde{K}(SX)$ по модулю кручения (см. 3.25 и 3.27). Следовательно, $(\psi^k - k^p)^{-1}(a_k) = (\psi^l + l^p)^{-1}(a_l)$ представляет собой корректно определенный элемент группы $\tilde{K}(SX) \otimes Q/Z$, не зависящий от k. В случае когда X — нечетномерная сфера, этот инвариант был обстоятельно изучен, главным образом Дж. Ф. Адамсом. Он был использован для доказательства изоморфизма $J(S^{4n}) \approx J'(S^{4n})$, из которого следует, что группа $Z/d_n Z$ является прямым слагаемым в π^s_{4n-1}.

6. Исторические замечания

Задача нахождении отображений сфер в сферы, имеющих нечетный инвариаит Хопфа, представляет собой одну из известнейших топологических проблем, имеющую долгую историю (см. дополнение к книге Стинрода [1] [1]). Полное решение этой проблемы было впервые получено Адамсом с помощью вторичных когомологических операций. Адамс показал, что не существует отображений $S^{2n-1} \to S^n$ с нечетным инвариантом Хопфа, за исключеннем случаев $n=2$, 4 или 8. Отсюда следует, что единственными сферамн, допускающимн структуру H-пространства, являются классические S^1, S^3 и S^7. Другое доказательство этих результатов было получено Адамсом и Атьёй [1]. Их доказательство основано на методах K-теории и много проще первоначального. Оно и воспронзведено здесь с незначительными усовершенствованнями, прннадлежащими Хьюзмоллеру [1].

Проблема существования векторных полей иа сферах также была впервые решена Адамсом [1] с помощью вторичных когомологических операций; позже им было получено другое доказательство, использующее K-теорию. Это доказательство опиралось на ранние работы Джеймса [1] и Атьи [1]. Прнведенное здесь доказательство основано на тех же идеях, но с существенными упрощениями, принадлежащнми Вудварду [1].

[1] К последнему английскому изданию. — *Прим. перев.*

Характеристические классы имеют свою историю, начинающуюся работами Чженя, Понтрягина, Штифеля и Уитни (см. предисловие к книге Милнора и Сташефа [1]). В §§ 3 и 4 представлены те аспекты теории характеристических классов, которые непосредственно связаны с предметом настоящей книги. Эти аспекты играют существенную роль в приложениях K-теории к теоремам целочисленности (Хирцебрух [2], Борель и Хирцебрух [1], Атья и Хирцебрух [1]). Теоремы целочисленности в свою очередь тесно связаны с теоремой Атьи — Сингера об индексе (Атья и Хирцебрух [2]).

В § 5 дан лишь беглый набросок возможных приложений K-теория к гомотопической топологии. Более полное изложение вопроса можно найти в цикле работ Адамса [2].

ЛИТЕРАТУРА [1]

Адамс (J. F. Adams)
[1] Vector fields on spheres. Ann. Math. **75**, 603—632 (1962). [Имеется перевод: Векторные поля на сферах.— Математика, 1963, **7**:6, с. 49—80.]
[2] On the groups $J(X)$. I—IV. Topology **2**, 181—195 (1963); **3**, 137—171, 193—222 (1965); **5**, 21—71 (1966). [Имеется перевод: О группах $J(X)$. I—IV.— Математика, 1966, **10**:5, с. 70—84; 1967, **11**:4, с. 42—69; 1968, **12**:3, с. 3—36; 1968, **12**:3, с. 37—97.]
[3] Лекции по группам Ли.— М.: Наука, 1979 (1969).
[4] Algebraic Topology. A student's guide. New York and London: Cambridge University Press 1972.

Адамс, Атья (J. F. Adams, M. F. Atiyah)
[1] K-theory and the Hopf invariant. Quart. J. Math. Oxford (2) **17**, 31—38 (1966).

Адамс, Уолкер (J. F. Adams, G. Walker)
[1] On complex Stiefel manifolds. Proc. Cambridge Phil. Soc. **61**, 81—103 (1965). [Имеется перевод: О комплексных многообразиях Штифеля.— Математика, 1967, **11**:4, с. 42—69.]

Андерсон (D. W. Anderson)
[1] The real K-theory of classifying spaces. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **51**, 634—636 (1964).

Атья (M. F. Atiyah)
[1] Thom complexes. Proc. London Math. Soc. **11**, 291—310 (1961). [Имеется перевод: Пространства Тома.— Математика, 1966, **10**:5, с. 48—69.]
[2] Vector bundles and the Künneth formula. Topology **1**, 245—248 (1962).
[3] Лекции по K-теории.— М.: Мир, 1967 (1965).
[4] On the K-theory of compact Lie groups. Topology **4**, 95—99 (1965). [Имеется перевод: О K-теории компактных групп Ли.— Приложение к книге Атьи [3].]
[5] Power operations in K-theory. Quart. J. Math. Oxford (2) **17**, 165—193 (1966). [Имеется перевод: Степенные операции в K-теории.— Математика, 1970, **14**:2, с. 35—65.]
[6] K-theory and Reality. Quart. J. Math. Oxford (2) **17**, 367—386 (1966). [Имеется перевод: K-теория и вещественность.— Приложение к книге Атьи [3].]
[7] Bott periodicity and the index of elliptic operators. Quart. J. Math. Oxford **74**, 113—140 (1968).

Атья, Ботт (M. F. Atiyah, R. Bott)
[1] On the periodicity theorem for complex vector bundles. Acta Math. **112**, 229—247 (1964).

Атья, Ботт, Шапиро (M. F. Atiyah, R. Bott, A. Shapiro)
[1] Clifford modules. Topology **3**, 3—38 (1964).

Атья, Сингер [2] (M. F. Atiyah, I. M. Singer)
[1] The index of elliptic operators on compact manifolds. Bull. Amer. Math. Soc. **69**, 422—433 (1963). [Имеется перевод: Индекс эллиптических операторов на компактных многообразиях.— Математика, 1966, **10**:3, с. 29—38.]
[2] The index of elliptic operators. I—III. Ann. Math. **87**, 484—530, 531—545 (with G. Segal), 546—604 (1968). [Имеется перевод: Индекс эллиптических операторов. I—III.— УМН, 1968, **23**:5, с. 99—111; **23**:6, с. 23:135—149; 1969, **24**:1, с. 127—182.]
[3] Index theory for skew-adjoint Fredholm operators. Publ. Math. I. H. E. S. **37**, 5—26 (1969).

---

[1] Для переводных книг в круглых скобках указан год оригинального издания (а также год оригинального повторного издания, если автор ссылается на более позднее издание, чем то, с которого делался перевод).— *Прим. ред.*

[2] = Зингер.— *Прим. ред.*

Атья, Хирцебрух (M. F. Atiyah, F. Hirzebruch)
[1] Riemann—Roch theorems for differentiable manifolds. Bull. Amer. Math. Soc. **65**, 276—281 (1959).
[2] Quelques théorèmes de non-plongement pour les variétés différentiables. Bull. Soc. Math. France 87, 383—396 (1959). [Имеется перевод: Несколько теорем о непогружаемости дифференцируемых многообразий.— Математика, 1961, **5**:3, с. 3—15.]
[3] Vector bundles and homogeneous spaces. Proc. Symposium in Pure Math., Amer. Math. Soc. **3**, 7—38 (1961). [Имеется перевод: Векторные расслоения и однородные пространства.— Математика, 1962, **6**:2, с. 3—39.]
Басс (H. Bass)
[1] Алгебраическая K-теория.— М.: Мир, 1973 (1968).
Басс, Хеллер, Суон (H. Bass, A. Heller, R. G. Swan)
[1] The Whitehead group of a polynomial extension. Publ. Math. I. H. E. S. **22**, 61—79 (1964).
Борель, Серр (A. Borel, J.-P. Serre)
[1] Groupes de Lie et puissances réduites de Steenrod. Amer. J. Math. **75**, 409—448 (1953). [Имеется перевод: Группы Ли и приведенные степени Стинрода.— В сб.: Расслоенные пространства.— М.: ИЛ, 1958, с. 247—281.]
[2] Le théorème de Riemann—Roch (d'aprés Grothendieck). Bull. Soc. Math. France **86**, 97—136 (1958). [Имеется перевод: Теорема Римана—Роха.— Математика, 1961, **5**:5, с. 17—54.]
Борель, Хирцебрух (A. Borel, F. Hirzebruch)
[1] Characteristics classes and homogeneous spaces. I—III. Amer. J. Math. **80**, 458—538 (1958); **81**, 315—382 (1959); **82**, 491—504 (1960).
Ботт (R. Bott)
[1] An application of the Morse theory to the topology of Lie groups. Bull. Soc. Math. France. **84**, 251—281 (1956).
[2] The stable homotopy of the classical groups. Ann. Math. **70**, 313—337 (1959).
[3] Lectures on $K(X)$ (mimeographed notes). Cambridge, Mass.: Harvard University 1962. [Имеется перевод: K-теория.— Математика, 1967, **11**:2, с. 3—57; **11**:3, с. 3—36.]
[4] A note on the KO-theory of sphere bundles. Bull. Amer. Math. Soc. **68**, 395—400 (1962).
Бурбаки (N. Bourbaki)
[1] Общая топология. Гл. 1—3.— М.: Наука, 1966; гл. 9, 10.— М.: Наука, 1975.
[2] Алгебра. Гл. 9.— М.: Наука, 1966.
Вуд (R. Wood)
[1] Banach algebras and Bott periodicity. Topology **4**, 371—389 (1966).
Вудвард (L. M. Woodward)
[1] Vector fields on spheres and a generalization. Quart. J. Math. Oxford (2) **24**, 357—366 (1973).
Годбийон (C. Godbillon)
[1] Дифференциальная геометрия и аналитическая механика.— М.: Мир, 1973 (1969).
[2] Éléments de Topologie Algébrique. Paris: Hermann 1971.
Грин (P. S. Green)
[1] A cohomology theory based upon self-conjugacies of complex vector bundles. Bull. Amer. Math. Soc. **70**, 522—524 (1964).
Гринберг (M. J. Greenberg)
[1] Lectures on Algebraic Topology. New York: Benjamin 1967.
Гротендик (A. Grothendieck)
[1] Théorie des classes de Chern. Bul. Soc. Math. France **86**, 137—154 (1958).
[2] Séminaire Chevalley, exposé 4. Paris: Société Mathématique de France, 11 rue P. et M. Curie 1958.
Гуревич, Волмэн (W. Hurewicz, H. Wallman)
[1] Теория размерности.— М.: ИЛ, 1948 (1941).

Дайер (E. Dyer)
[1] Cohomology theories. New York: Benjamin 1969.
Джеймс (I. M. James)
[1] Spaces associated with Stiefel manifolds. Proc. London Math. Soc. (3) **9**, 115—140 (1959).
Дольд (A. Dold)
[1] Лекции по алгебраической топологии.— М.: Мир, 1976 (1972).
[2] Chern classes in general cohomology. Symposia Mathematica 1970, p. 385—410.
Дольд, Лашеф (A. Dold, R. Lashof)
[1] Principal quasifibrations and fibre homotopy equivalences of bundles. Illinois J. Math. **3**, 285—305 (1959).
Дупонт (J. Dupont)
[1] K-theory. Aarhus, Danemark: Publ. of the Matematisk Institut 1968.
Енех (K. Jänich)
[1] Vektorraumbündel und der Raum der Fredholm Operatoren. Math. Ann. **161**, 129—142 (1965).
Картан (H. Cartan)
[1] Espaces fibrés et homotopie. Séminaire 1949/1950. New York: Benjamin 1967.
Картан, Шварц (H. Cartan, L. Schwartz)
[1] La théorème d'Atiyah—Singer. Séminaire 1963/1964. New York: Benjamin 1967.
Картан, Эйленберг (H. Cartan, S. Eilenberg)
[1] Гомологическая алгебра.— М.: ИЛ, 1960 (1956).
Каруби (M. Karoubi)
[1] Séminaire Cartan—Schwartz 1963/64, exposé 16. New York: Benjamin 1967.
[2] Algèbres de Clifford et K-théorie. Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. 4^e sér. **1**, 161—270 (1968).
[3] Espaces classifiants en K-théorie. Trans. Amer. Math. Soc. **14**, 74—115 (1970).
[4] Périodicité de la K-théorie hermitienne. Lecture Notes in Math. **343**, 301—411. Berlin—Heidelberg—New York: Springer 1973.
[5] La périodicité de Bott en K-théorie générale. Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. 4^e sér. **1**, 63—95 (1971).
[6] K-théorie équivariants des fibrés en sphères. Topology **12**, 275—281 (1973).
Каруби, Виллььямайор (M. Karoubi, O. Villamayor)
[1] K-théorie algébrique et K-théorie topologique. I. Math. Scand. **28**, 265—307 (1971).
Квиллен (D. Quillen)
[1] Higher algebraic K-theory. Lecture Notes in Math. **341**, 85—147. Berlin—Heidelberg—New York: Springer 1973.
Келли (J. Kelley)
[1] Общая топология.— М.: Наука, 1968 (1955).
Кёйпер (N. H. Kuiper)
[1] The homotopy type of the unitary group of Hilbert space. Topology **3**, 19—30 (1965). [Имеется перевод: Гомотопический тип унитарной группы гильбертова пространства.— Приложение к книге Атьи [3].]
Коннер, Флойд (P. E. Conner, E. E. Floyd)
[1] The relation of cobordism to K-theories. Lecture Notes in Math. **28**. Berlin—Heidelberg—New York: Springer 1966. [Имеется перевод: О соотношении кобордизмов и K-теории.— Дополнение к книге: Коннер П., Флойд Э. Гладкие периодические отображения.— М.: Мир, 1969 (1966), с. 231—333.]
Ланделл, Вайнграм (A. T. Lundell, S. Weingram)
[1] The topology of CW-complexes. Princeton, N. J.: Van Nostrand 1969.
Ленг (S. Lang)
[1] Алгебра.— М.: Мир, 1968 (1964).
[2] Введение в теорию дифференцируемых многообразий.— М.: Мир, 1967 (1962).
Лорк (E. Lorch)
[1] Spectral theory. University Tests in Mathematical Sciences. New York: Oxford University Press 1962.

Майкл (E. Michael)
[1] Convex structures and continuous selections. Canad. J. Math. **11**, 556—575 (1959).
Милнор (J. Milnor)
[1] On spaces having the homotopy type of a CW-complex. Trans. Amer. Math. Soc. **90**, 272—280 (1959).
[2] Construction of universal bundles. I, II. Ann. Math. **63**, 272—284, 430—436 (1963).
[3] Введение в алгебраическую K-теорию.— М.: Мир, 1974 (1971).
[4] Теория Морса.— М.: Мир, 1965 (1963).
Милнор, Кервер (J. Milnor, M. A. Kervaire)
[1] Bernoulli numbers, homotopy groups and a theorem of Rohlin. Proc. Intern. Congr. Math. (1958).
Милнор, Сташеф (J. Milnor, J. Stasheff)
[1] Характеристические классы.— М.: Мир, 1979 (1974).
Митчелл (B. Mitchell)
[1] Theory of categories. New York: Academic Press 1965.
Мур (J. C. Moore)
[1] On the periodicity theorem for complex vector bundles. Séminaire H. Cartan 1959/1960.
Норскотт (D. G. Northcott)
[1] An introduction to homological algebra. Cambridge and London: Cambridge University Press 1962.
Пале (R. Palais)
[1] Семинар по теореме Атьи—Зингера об индексе.— М.: Мир, 1970 (1965).
Серр (J.-P. Serre)
[1] Линейные представления конечных групп.— М.: Мир, 1970 (1967).
[2] Modules projectifs et espaces fibrés à fibre vectorielle, exposé 23. Paris: Séminaire Dubreil-Pisot, 11 rue P. et M. Curie, 1958.
Сигал (G. Segal)
[1] Equivariant K-theory. Publ. Math. I. H. E. S, **34**, 129—151 (1968).
Спеньер (E. Spanier)
[1] A formula of Atiyah and Hirzebruch. Math. Z. **80**, 154—162 (1962).
[2] Алгебраическая топология.— М.: Мир, 1971 (1966).
Спивак (M. Spivak)
[1] Математический анализ на многообразиях.— М.: Мир, 1968 (1965).
Стинрод (N. Steenrod)
[1] Топология косых произведений.— М.: ИЛ, 1953 (1949, 1965).
Суон (R. G. Swan)
[1] Vector bundles and projective modules. Trans. Amer. Math. Soc. **105**, 264—277 (1962).
Тода (H. Toda)
[1] Composition methods in homotopy groups of spheres. Ann. of Math. Studies **49**, Princeton 1962. [Готовится перевод в изд-ве „Наука".]
Том (R. Thom)
[1] Espaces fibrés an sphères et carrés de Steenrod. Ann. Sc. Éc. Norm. Sup. **69**, 109—182 (1952).
[2] Quelques propriétés globales des variétés différentiables. Comment. Math. Helv. 28, 17—86 (1954). [Имеется перевод: Некоторые свойства „в целом" дифференцируемых многообразий.— В сб.: Расслоенные пространства.— М.: ИЛ, 1958, с. 291—351.]
Уайтхед (G. W. Whitehead)
[1] Generalized homology theories. Trans. Amer. Math. Soc. **102**, 227—283 (1962).
Франкель (J. Frenkel)
[1] Cohomologie non abélienne et espaces fibrés. Bull. Soc. Math. France **85**, 135—220 (1957).

Харди, Райт (G. H. Hardy, E. M. Wright)
[1] An introduction to the theory of numbers. London: Oxford University Press 1960.
Хилтон (P. J. Hilton)
[1] An introduction to homotopy theory. Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics **43**. New York: Cambridge University Press 1953.
[2] General cohomology theory and K-theory. New York: Cambridge University Press 1971.
Хирцебрух (F. Hirzebruch)
[1] A Riemann—Roch theorem for differentiable manifolds. Séminaire Bourbaki **177** (1959).
[2] Топологические методы в алгебраической геометрии.— М.: Мир, 1973 (1966).
Ходжкин (L. Hodgkin)
[1] On the K-theory of Lie groups. Topology **6**, 1—36 (1967).
Ху[1] (S. T. Hu)
[1] Теория гомотопий.— М.: Мир, 1964 (1959).
Хьюзмоллер (D. Husemoller)
[1] Расслоенные пространства.— М.: Мир, 1970 (1966, 1975).
Шевалле (C. Chevalley)
[1] Теория групп Ли. Т. 1.— М.: ИЛ, 1948 (1946).
[2] The construction and study of certain important algebras. Tokyo: Publ. of the Mathematical Society of Japan 1955.
Ши (W. Shih)
[1] Une remarque sur les classes de Thom. C. R. Acad. Sc. Paris **260**, 6259—6262 (1965).
Эйленберг, Стинрод (S. Eilenberg, N. Steenrod)
[1] Основания алгебраической топологии.— М: Физматгиз, 1958 (1952).

[1] = Ху Сы-цзян.— *Прим. ред.*

Харди, Райт (G. H. Hardy, E. M. Wright)
[1] An introduction to the theory of numbers. London: Oxford University Press 1960.
Хилтон (P. J. Hilton)
[1] An introduction to homotopy theory. Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics **43**. New York: Cambridge University Press 1953.
[2] General cohomology theory and K-theory. New York: Cambridge University Press 1971.
Хирцебрух (F. Hirzebruch)
[1] A Riemann—Roch theorem for differentiable manifolds. Séminaire Bourbaki **177** (1959).
[2] Топологические методы в алгебраической геометрии.— М.: Мир, 1973 (1966).
Ходжкин (L. Hodgkin)
[1] On the K-theory of Lie groups. Topology **6**, 1—36 (1967).
Ху [1] (S. T. Hu)
[1] Теория гомотопий.— М.: Мир, 1964 (1959).
Хьюзмоллер (D. Husemoller)
[1] Расслоенные пространства.— М.: Мир, 1970 (1966, 1975).
Шевалле (C. Chevalley)
[1] Теория групп Ли. Т. 1.— М.: ИЛ, 1948 (1946).
[2] The construction and study of certain important algebras. Tokyo: Publ. of the Mathematical Society of Japan 1955.
Ши (W. Shih)
[1] Une remarque sur les classes de Thom. C. R. Acad. Sc. Paris **260**, 6259—6262 (1965).
Эйленберг, Стинрод (S. Eilenberg, N. Steenrod)
[1] Основания алгебраической топологии.— М: Физматгиз, 1958 (1952).

[1] = Ху Сы-цзян.— *Прим. ред.*

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

CP_n	комплексное проективное пространство размерности n I.9.11
$C(X)$, $C_k(X)$	кольцо непрерывных функций $f\colon X \to k$ ($k = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$)
C'^n	алгебра Клиффорда пространства $\mathbb{C}^n$, снабженного квадратичной формой $x_1^2 + \ldots + x_n^2$ III.3.23
$d(E, F, \alpha)$	класс тройки (E, F, α) в группе $K(\varphi)$ (или $K(X, Y)$) II.2.13
$d(E, \alpha)$	класс пары (E, α) в группе $K^{-1}(\mathscr{C})$ (или $K^{-1}(X, Y)$) II.3.3
$d(E, \eta_1, \eta_2)$	класс тройки (E, η_1, η_2) в группе $K^{p,q}(\mathscr{C})$ (или $K^{p,q}(X, Y)$) III.4.15
$d = d(W)$	класс когомологий, ассоциированный с комплексным спинорным расслоением V.4.8
$\mathscr{E}$ или $\mathscr{E}_k$	категория конечномерных векторных пространств над полем k ($k = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$)
$\mathscr{E}(X)$ или $\mathscr{E}_k(X)$	категория k-векторных расслоений над X I.2.6
$\mathscr{E}'(X)$	категория векторных расслоений, являющихся прямыми слагаемыми тривиальных расслоений I.6.24
$\mathscr{E}^V(X)$	категория векторных расслоений над X с действием клиффордова расслоения $C(V)$ IV.4.11
$\mathscr{E}_T(X)$	категория тривиальных расслоений над X I.6.13
E_U или $E\|_U$	ограничение расслоения E на множество U I.1.15
E_x	слой расслоения E над точкой x I.1.2, I.1.5
$\overline{E}$	сопряженное расслоение I.4.8, e)
$[E]$	класс объекта E в группе Гротендика II.1.15
$\dot{E}$	в зависимости от контекста: класс объектов, изоморфных E, или пространство Тома расслоения E II.1.7, IV.1.1
$\mathrm{E}(A)$	группа, порожденная элементарными матрицами из $\mathrm{GL}(A)$ II.6.13, c)
$f_\bullet$	гомоморфизм Гизина IV.5.23
$\mathrm{F}(V)$	расслоение на флаги, ассоциированное с векторным расслоением V IV.3.3
$F(X, Y)$	пространство непрерывных отображений из X в Y
$\mathrm{F}_{p_1 \ldots p_s}(V)$	расслоение на флаги типа $(p_1, \ldots, p_s)$ IV.3.13
$f\colon X \to Y$	морфизм в категории локально-компактных пространств II.4.1
$\mathrm{GL}_p(A)$	группа автоморфизмов свободного модуля A^p II.3.10
$\mathrm{GL}_r^-(A)$, $\mathrm{GL}^-(A)$	III.6.6
$\mathrm{GL}(A)$	$\operatorname{inj\,lim} \mathrm{GL}_p(A)$ II.3.10
$\mathrm{G}_n(k^N)$	грассманиан n-мерных плоскостей в k^N ($k = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) I.7.12
$\mathrm{G}_q(E)$	грассманово расслоение IV.3.7
$\mathrm{Grad}(M_r) = \mathrm{Grad}^{p,q}(M_r)$, $\mathrm{Grad}^{p,q}(\mathbb{R})$, $\mathrm{Grad}^{p,q}(\mathbb{C})$	пространства градуирований III.4.27—30

S^n	сфера в $\mathbb{R}^{n+1}$ I.1.3
S^n_+, S^n_-	соответственно верхняя и нижняя полусферы сферы S^n I.3.4
$S^{p,q}$	сфера S^{p+q-1}, снабженная специальной инволюцией III.7.13, b
$S(V)$	расслоение на сферы, ассоциированное с векторным расслоением V II.5.12
$S^+(V \oplus 1)$	верхняя полусфера векторного расслоения $V \oplus 1$ IV.5.10
$S(Z)$	приведенная надстройка пространства Z II.2.41
$S'(Z)$	надстройка пространства Z I.3.14
$S^n(Z)$	n-кратная приведенная надстройка пространства Z II.2.41
$\mathrm{Spin}(n)$	спинорная группа IV.4.9
$\mathrm{Spin}^c(n)$	комплексная спинорная группа IV.4.25
$\mathrm{Spin}(V)$	IV.4.9
$S(M)$	симметризация моноида M II.1.2
$S^i(E)$	i-я симметрическая степень векторного расслоения E I.4.8, f)
$\mathrm{Sp}_{2n}(k)$	симплектическая группа I.9.23, b)
$SK_1(A)$	приведенная группа Басса II.6.13, e)
TS^n	касательное расслоение сферы S^n I.1.14
TM	касательное расслоение многообразия M I.3.18
$T(V)$	тензорная алгебра векторного пространства V III.3.2
T_V	класс Тома (общий случай) IV.5.13
t	фундаментальный изоморфизм III.5.9, IV.5.10, IV.6.19
U_V	класс Тома (комплексный случай) IV.1.4
U_V	класс Тома в когомологиях V.3.3
$\mathrm{U}(p)$	унитарная группа (Шевалле [1])
U	бесконечномерная унитарная группа II.3.19
$w_1(V)$, $w_2(V)$, …	классы Штифеля—Уитни IV.4.20
α_t	числа, ассоциированные с числами Бернулли V.5.14—15
$\tilde{\Gamma}(V)$	скрученная группа Клиффорда IV.4.2
$\Gamma^0(V)$	специальная группа Клиффорда IV.4.8
$\Gamma(X, E)$	пространство сечений векторного расслоения E над X I.5.6
γ^i, γ_t	характеристические классы в K-теории IV.7.3
$\partial_{X,Y}$	связывающий гомоморфизм II.4.9
ξ, ξ_V, ξ_n	каноническое линейное расслоение над проективным пространством или проективным расслоением IV.2.2
$\lambda^i(E)$	внешняя степень векторного расслоения E I.4.8, IV.7.2
$\lambda^i(x)$, $\lambda_t(x)$	характеристические классы в K-теории IV.7.2, IV.7.24

$\Lambda(V)$	расслоение на внешние алгебры, ассоциированное с расслоением V IV.1.4
$\pi_i(X)$	i-мерная гомотопическая группа пространства X (Ху [1])
$\pi_i^L(\mathrm{GL}(A))$	III.1.12
ρ^k, $\rho_{\mathbf{C}}^k$, $\rho_{\mathbf{R}}^k$	характеристические классы в K-теории IV.7.16, IV.7.26
$\sigma(E, D)$	II.5.16
$\tau(V)$	класс Тодда расслоения V V.4.3
$\Phi_n(X)$, $\Phi_n^k(X)$	множество классов изоморфных k-векторных расслоений ранга n над пространством X I.3.6
$\chi(V)$	эйлеров класс (в K-теории или в когомологиях) IV.1.13, IV.5.20, V.3.4
ψ^k	операции Адамса IV.7.13, IV.7.24, IV.7.32
ψ_H^k	V.3.27
$\hat{\oplus}$	градуированное тензорное произведение III.3.9
$\cup$	$\cup$-произведение в K-теории II.5.1
$\xi = (E, \pi, X)$	векторное расслоение с тотальным пространством E, базой X и проекцией π I.1.5
X/Y	факторпространство пространства X по подпространству Y II.2.34
$Z \vee T$, $Z \wedge T$	II.2.40
$Z * T$	джойн (соединение) двух пространств или расслоений V.5.5
$\boxtimes$	операция взятия внешнего тензорного произведения векторных расслоений I.4.9
$\boxplus$	операция взятия внешней суммы Уитни векторных расслоений I.4.9
$\mathscr{C}(E, F)$ или $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(E, F)$	множество морфизмов из E в F в категории $\mathscr{C}$
$X' \times_X E$	расслоенное произведение пространств X' и E над пространством X I.1.16
$[X, Y]$	множество гомотопических классов непрерывных отображений из X в Y
$h \mapsto \hat{h}$, $g \mapsto \check{g}$	I.1.11—12
$\square$	конец доказательства

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ [1]

[1] В скобках даны оригинальные английские термины. Термины-прилагательные приводятся в мужском роде и при повторениях заменяются тире, даже если они повторяются в другом роде. На возможность варьирования рода указывает курсивный шрифт окончания (например: невырожденн*ый*). — *Прим. ред.*

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Макс Каруби

K-ТЕОРИЯ

Введение

Ст. научный редактор В. И. Авербух. Мл. научный редактор Л. С. Суркова. Художник Е. К. Самойлов. Художественный редактор В. И. Шаповалов. Технический редактор Л. П. Бирюкова. Корректор М. А. Смирнов.

ИВ № 2211

Сдано в набор 12.03.81. Подписано к печати 31.07.81. Формат 60×90$^1/_{16}$. Бумага типографская № 2 Гарнитура литературная Печать высокая. Объем 11,25 бум. л. Усл. печ. л. 22,5. Усл. кр.-отт. 22,5. Уч.-изд. л. 23,63. Изд № 1/0726. Тираж 5400 экз. Зак. 1304. Цена 2 р. 80 к.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Отпечатано в Ленинградской типографии № 2 головном предприятии ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 198052, г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29, с матриц ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени Первой Образцовой типографии имени А. А. Жданова Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, М-54, Валовая, 28.