



M I D H A T J. G A Z A L É

G N O M O N

From Pharaohs to Fractals



P R I N C E T O N U N I V E R S I T Y P R E S S

P R I N C E T O N , N E W J E R S E Y

МИДХАТ ГАЗАЛЕ

ГНОМОН

От фараонов до фракталов

Перевод с английского А. Р. Логунова



Москва-Ижевск

2002

УДК 516.2

Интернет-магазин

MATHESIS

<http://shop.rcd.ru>

- **ф и з и к а**
 - **м а т е м а т и к а**
 - **б и о л о г и я**
 - **т е х н и к а**
-

Газале М.

ГНОМОН. От фараонов до фракталов. — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002, 272 стр.

Мидхат Газале описывает и объясняет свойства гномонов (самоповторяющихся форм), повествует об их долгой и живописной истории, исследует математические и геометрические чудеса, возможные с их помощью.

Этот информативный, увлекательный и прекрасно выполненный труд будет, несомненно, интересен всем, кого привлекают геометрические и математические чудеса, а также любителям математических головоломок и развлечений.

ISBN 5-93972-171-0

© Институт компьютерных исследований, 2002

<http://rcd.ru>

Стефану, Валери и Оливии

Оглавление

Предисловие	10
Введение: гномоны	14
Гномоны и солнечные часы	17
Геометрическое подобие	20
Геометрия и числа	22
Гномоны и обелиски	25
ГЛАВА I. Фигурные и m-адические числа	27
Фигурные числа	27
Свойство треугольных чисел	30
Свойство квадратных чисел	32
m -адические числа	33
Степени диадических чисел	34
Диадический гамильтонов путь	36
Степени триадических чисел	41
ГЛАВА II. Непрерывные дроби	43
Алгоритм Евклида	44
Непрерывные дроби	45
Простые непрерывные дроби	46
Подходящие дроби	47
Конечные регулярные непрерывные дроби	48
Периодические регулярные непрерывные дроби	49
Спектры иррациональных квадратных корней	51
Апериодические бесконечные регулярные непрерывные дроби	52
Обратноподходящие дроби	54
Приложение	55
Резюме в формулах	56
ГЛАВА III. Последовательности Фибоначчи	59
Рекурсивное определение	61
Затравка и гномонные числа	61
Определение $F_{m,n}$ в явном виде	62
Альтернативное явное определение	66

Моногномонная простая периодическая дробь	68
Дигномонная простая периодическая дробь	70
Произвольно оконченные простые периодические дроби	72
Когда m очень малó: от чисел Фибоначчи к гиперболическим и тригонометрическим функциям	75
Приложение: полигномонные простые периодические дроби	76
Резюме в формулах	77
ГЛАВА IV. Лестницы	82
Лестница из преобразователей	82
Электрическая лестница	84
Резисторные лестницы	85
Итерационные лестницы	87
Мнимые компоненты	91
Линия передачи	94
Несогласованная линия передачи	94
Распространение волны по линии передачи	96
Лестничные цепи из блоков	99
Заметки на полях	103
Топологическое сходство	103
ГЛАВА V. Витые фигуры	105
Витые прямоугольники	105
Алгоритм Евклида	105
Моногномонные витые прямоугольники	108
Дигномонные витые прямоугольники	112
Самоподобие	117
Витые прямоугольники с неправильной затравкой	119
Два витых треугольника	120
Заметки на полях	120
Еще раз о линиях передачи	120
ГЛАВА VI. Золотое сечение	124
От чисел к геометрии	127
Витой золотой прямоугольник	128
Завиток Фибоначчи	129
Витой золотой треугольник	130
Витой пятиугольник	132
Золотое сечение: от античности до эпохи Возрождения	132
Заметки на полях	141
Тысячелистник	141
Фокус с золотым сечением	143
Золотой узел	144

ГЛАВА VII. Серебряное сечение	147
От чисел к геометрии	149
Серебряный пятиугольник	150
Серебряная спираль	151
Улитка	154
Заметки на полях	156
Реп-тайлы Голомба	156
Commedia dell'Arte	157
Повторные корни	161
ГЛАВА VIII. Спирали	164
Матрица поворота	164
Моногномонная спираль	166
Самоподобие	171
Равноугольность	171
Длина спирали	174
Прямоугольная дигномонная спираль	178
Архимедова спираль	181
Затухающие колебания	182
Математический маятник	186
RLC-контур	189
Резистор	190
Конденсатор	191
Индуктор	191
Последовательный RLC-контур	192
Приложение: уравнения в конечных разностях	194
ГЛАВА IX. Позиционные системы счисления	199
Деление	199
Позиционные системы счисления со смешанным основанием	202
Нахождение цифр целого числа	206
ГЛАВА X. Фракталы	209
Кronecker произведение	210
Ассоциативность кронекерова произведения	212
Порядок матрицы	216
Коммутативность кронекерова произведения	216
Векторы	218
Фрактальные решетки	219
Треугольник Паскаля и теорема Люка	222
Салфетка и ковер Серпинского	226
Канторова пыль	228
Последовательность Туэ–Морса и замощение плоскости	234

Многомерные решетки	236
Коммутативность и многомерность	238
Трехмерная пирамида Серпинского и губка Менгера	239
Кронекерово произведение в отношении других операций	243
Фрактальные ломаные линии	245
Кривая Коха	246
Заполняющая пространство кривая Пеано	249
Коллекция регулярных фрактальных ломаных	250
Регулярные ломаные смешанного типа и соответствующие мозаики	251
Иррегулярная фрактальная ломаная: пятиугольная «Эйфеле- ва башня»	251
Приложение: некоторые упрощающие обозначения	253
Предметный указатель	263

Предисловие

Удивительной спиралью Бернулли я заинтересовался еще будучи студентом технологического факультета Каирского университета (хотя этот интерес так и не достиг того мистического накала, каким характеризовалось отношение к своему открытию самого Бернулли), в особенности же меня интриговало ее родство с фазовыми картинками систем затухающих колебаний, изучаемых в технических школах и колледжах. Почему, спрашивал я себя, уравнения, описывающие колебания простого маятника, в точности совпадают с уравнениями индуктивно-емкостно-резистивного контура, если не считать того, что математические символы в каждом из случаев имеют различный физический смысл?

Разумеется, в рассматриваемых физических системах неизбежно происходят потери энергии, в результате чего эти системы приходят в конце концов в состояние покоя. Почему же спиральная фазовая картина одинаково хорошо описывает характер зависимости друг от друга обеих пар величин (т. е. координаты точки и ее скорости в одном случае и напряжения и силы тока — в другом)?

Подобно многим другим практикам от математики, я одно время забавлялся с числами Фибоначчи, отмечая их поразительное сродство с непрерывными дробями и спиралями. Кстати говоря, в основе некоторых разработанных мною типов электрических фильтров лежат именно непрерывные дроби. В свободное время я собирал из струн и блоков маленькие механизмы, способные вычислить квадратный корень из двух и преобразовать число из двоичной записи в десятичную и обратно. После определенного ознакомления с непрерывными дробями, связанного с необходимостью вычисления иррациональных величин, выяснилось, что идеальными метафорами для этих в высшей степени необыкновенных дробей являются прямые предшественники логарифмической спирали — так называемые *витые фигуры*.

Я не нашел в себе сил сопротивляться очарованию золотого сечения и его многочисленного семейства, а когда узнал из статьи Иэна Стюарта в «Сайентифик Америкен»¹ о числах Падована, так и вовсе пришел в полный восторг. Рассматривая равносторонние треугольники, я неожиданно обнаружил странный маленький пятиугольник, обладающий некоторыми инте-

¹*Ian Stewart. Tales of a Neglected Number (Scientific American, June 1996), pp. 92–93. (Здесь и далее — примечания автора, за исключением особо оговоренных. — Прим. перев.)*

ресными свойствами золотого прямоугольника, и назвал его, по аналогии, серебряным пятиугольником.

Познакомившись с «Фрактальной геометрией природы» Бенуа Мандельброта² и «Красотой фракталов» Хайнца Пайтгена и Петера Рихтера³, я вспомнил о своей докторской диссертации 1959 года, в которой я широко пользовался кронекеровым произведением, и нашел, что это самое произведение способно весьма изящно генерировать простые фракталы — т. е. в большинстве случаев самоподобные фигуры и узоры.

Я никуда не мог скрыться от логарифмических спиралей — они заполнили все вокруг! Казалось, что логарифмическая спираль олицетворяет собой самую сущность самоподобия, для обозначения которого я даже изобрел собственный термин — *гномонность*. Именно *самоподобие* является центральным понятием этой книги.

Определение *гномона* было дано еще Героном Александрийским. По Герону, гномон — это фигура (под термином *фигура* здесь понимается геометрическая фигура или просто число), которая, будучи добавлена к какой-либо другой фигуре, образует новую фигуру, подобную исходной.

Вводная глава посвящена самому термину *гномон*, истории его возникновения и употребления. Начнем мы с исторического обзора — поговорим о гномонах в Древней Греции, разведем некоторые широко распространенные заблуждения, согласно которым египетские обелиски являются гномонами, и проследим этимологию слова *гномон* в его самом первом значении («нечто, что позволяет узнать») до древнеегипетских слов *сетшат* и *меркхет*.

В первой главе рассматриваются фигурные числа, приведшие древних греков к понятиям гномона и числового подобия. Далее мы исследуем *m*-адические числа, гамильтоновы пути на поверхностях трех- и четырехмерных тел, некоторые их практические приложения — такие, например, как двоичные (диадические) и троичные (триадические) коды Грея и кодирующие диски, — и поговорим о таких классических играх, как «ханойская башня» и «багенодье».

Ключевую роль в исследовании самоподобия играют числовые последовательности, которые я называю здесь последовательностями Фибоначчи порядка *m*, где $F_{m,n+2} = F_{m,n} + mF_{m,n+1}$. В главе III приводятся явные выражения для вычисления *n*-го члена таких последовательностей и отмечается их родство с непрерывными дробями. Наконец, устанавливается связь между последовательностями Фибоначчи и гиперболическими и тригонометрическими функциями при очень малом *m*.

²Benoit B. Mandelbrot. *The Fractal Geometry of Nature* (New York: W. H. Freeman, 1981). (Рус. перевод: Мандельброт Б. *Фрактальная геометрия природы* (Москва: Институт компьютерных исследований, 2002).)

³Heinz-Otto Peitgen, Peter H. Richter. *The Beauty of Fractals* (Heidelberg: Springer-Verlag, 1986). (Рус. перевод: Пайтген Х.-О., Рихтер П. Х. *Красота фракталов* (М.: Мир, 1993).)

Непрерывные дроби и последовательности Фибоначчи находят практическое приложение в так называемых цепях лестничного типа, состоящих из нескольких каскадов «преобразователей». Возможность познакомиться с такими лестничными электрическими схемами читатель получит в главе IV. Как это ни удивительно, но, начав с непрерывных дробей, мы шаг за шагом приходим к уравнению, описывающему распространение волны по линии передачи. Заключает главу раздел, посвященный лестничным структурам, составленным из блоков.

В главе V подробно рассматриваются витые фигуры — предшественники логарифмических спиралей. Представлены монономонные и дигномонные фигуры, квадраты и треугольники.

Глава VI посвящена знаменитому золотому сечению, о котором уже столько всего написано. Мой подход к золотому сечению опирается на витые фигуры и принимает в расчет историческую перспективу, что позволяет избежать многих подводных камней, подстерегающих приверженцев широко распространенных мистических взглядов.

На основании последовательности Падована я построил оригинальную фигуру («серебряный пятиугольник»), родственную по своим математическим свойствам золотому прямоугольнику. В конце главы VII мы познакомимся с необычной фигурой, называемой *улиткой* и впервые описанной С. Голомбом под названием «реп-тайл»⁴, — эту фигуру Кронекер, скорее всего, не стал бы рассматривать, сочтя ее нефинитной.

Ни одна геометрическая фигура не воплощает концепцию самоподобия лучше, чем чудесная логарифмическая спираль Бернулли. В главе VIII вниманию читателя предлагается поэтапный анализ постепенно усложняющихся матриц поворота, описывающих поведение логарифмической спирали. В конце главы приводится общее решение для затухающих колебаний с характерной спиральной фазовой картиной. Полученные результаты вполне применимы к описанию поведения простого маятника и электрического резистивно-индуктивно-емкостного контура; при этом необходимость в анализе отсутствует, достаточно одних лишь методов конечных разностей.

Книга о самоподобии не может считаться законченной, если в ней не упоминается о фракталах. После того как вышел в свет основополагающий труд Мандельброта, о фракталах и их приложениях едва ли не ко всякой области человеческой деятельности, от так называемых точных наук до менее строгих гуманитарных, исписаны уже целые тома. В мои намерения отнюдь не входит создание очередного учебного курса о фракталах. Напротив, представленный в последней главе подход несколько отличается от общепринятого, так как в его основе лежат теоретико-числовые соображения. Кроме того, там можно найти несколько оригинальных фрактальных фигур моего собственного «изготовления».

⁴От англ. *repeat* «повторять» и *tile* «плитка, черепица, элемент мозаики». — Прим. перев.

Прежде чем я закончу со вступительным словом, я хотел бы выразить особую признательность тем, кто — сам о том не подозревая — оказал на меня наибольшее влияние. Во-первых, Мартину Гарднеру, чьи обширные познания, остроумие и бескорыстная любезность стоят за многими представленными в этой книге идеями. Благодаря Гарднера, никак нельзя обойти молчанием Дональда Кнута. Не знаю, что бы я делал без его «Основных алгоритмов»⁵. Настоящим откровением стал для меня труд Тобиаса Данцига «Число: язык науки»⁶. Сам Эйнштейн сказал о ней: «Это, несомненно, самая интересная книга об эволюции математики из всех, что когда-либо попадали в мои руки». Со словом *гномон* я впервые столкнулся в книге д'Арси Томпсона «Рост и форма»⁷, в этом выдающемся манифесте учености и смирения, отличающемся, ко всему прочему, великолепным литературным стилем. Иэн Стюарт по-своему продолжает славные гарднеровские традиции, демонстрируя редкостный дар объяснять просто и доступно самые сложные вещи. Джону Хортону Конуэю я обязан многими бессонными ночами, проведенными за сотворением крошечных созданий, наделенных Жизнью. Эта игра весьма пригодилась мне для иллюстрации лекций по клеточным автоматам фон Неймана. Глубокий след оставили иррегулярные мозаики Роджера Пенроуза. Удивительно просветляющее воздействие оказали на меня книги Эли Маора «За пределы бесконечности»⁸ и «e: история числа»⁹. Хочется также упомянуть поистине энциклопедический *magnum opus*¹⁰ Жоржа Ифра «Всеобщая история чисел»¹¹ и выразить признательность профессору Каирского университета Фатхи Салеху, который открыл для меня мир древнеегипетской математики. Особо хочу поблагодарить своего доброго друга Арно Пензиаса, личным примером¹² вдохновившего меня на написание собственной книги. И еще: я очень благодарен Тревору Липскомбу, моему редактору из «Princeton University Press», за моральную поддержку и бесценные замечания.

⁵Donald F. Knut. *Fundamental Algorithms* (Reading, Mass.: Addison – Wesley, 1969). (Рус. перевод: Кнут Д. *Искусство программирования, т. 1 Основные алгоритмы* (М.: Мир, 1976).)

⁶Tobias Dantzig. *Number: The Language of Science* (New York: Doubleday, 1954).

⁷D'Arcy Wentworth Thompson. *On Growth and Form*, abr. ed. by John Tyler Bonner (Cambridge: Cambridge University Press, 1966).

⁸Eli Maor. *To Infinity and Beyond* (Princeton: Princeton University Press, 1991).

⁹Eli Maor. *e: The Story of a Number* (Princeton: Princeton University Press, 1994).

¹⁰Великий труд (лат.). — Прим. перев.

¹¹George Ifrah. *Histoire universelle des chiffres* (Paris: Editions Robert Laffont, 1994).

¹²Arno Penzias. *Ideas and Information* (New York: W. W. Norton, 1989).

Введение: гномоны

Самым, пожалуй, прекрасным из многочисленных открытий Бернулли является равноугольная, или логарифмическая, спираль. Эту кривую можно встретить в узорах паутины, в ракушках на морском берегу, в завитках далеких туманностей . . .

(Г. У. Тернбулл)¹

Повторяет ли форма спиральных галактик форму логарифмической спирали? Определенного ответа на этот вопрос мы дать пока не можем (по причине отсутствия последовательной теории, объясняющей, как образуются галактики и почему они закручиваются в спирали²); остается лишь отметить, что спиральные галактики представляют собой самую большую упорядоченную структуру, когда-либо наблюдавшуюся человеком (см. рис. 1 цветной вкладки). Мы и сами живем в такой закрученной в спираль конфигурации небесных тел, причем разглядывать наше жилище мы можем только сбоку — чем, собственно, и объясняется его молочная белизна, давшая имя всему звездному скоплению.

Мы не только живем в спиральной раковине, подобно самым заурядным брюхоногим, — спирали окружают нас повсюду на земле, и, по всей видимости, практически ни одна форма жизни без них не обходится. Раковина моллюска *Nautilus pompilius* (см. цв. илл. 2) начинается с микроскопически малой затравки и растет все последующие годы, образуя последовательность камер, постепенно увеличивающихся в размерах по мере роста своего обитателя. Независимо от того, насколько большим вырастает моллюск, каждый последующий слой раковины сохраняет форму исходной затравки. Хотя в бараньих рогах, зубах бобра и когтях тигра никто не живет, эти образования растут точно так же, как раковина наutilusа, наращивая новое вещество у основания спирали, соединенного с телом животного. Паук *Epeira* не строит себе жилище вокруг собственного тела, однако свою паутину он сооружает в форме логарифмической спирали, которой фран-

¹ *The World of Mathematics* (New York: Simon and Schuster, 1956), p. 147.

² Согласно Дэвиду Малину «сложность здесь заключается в том, что для получения хоть сколько-нибудь достоверных результатов необходимо учитывать наклонение галактики к плоскости эклиптики; спиральная же структура галактик весьма неустойчива и может легко измениться под влиянием гравитационных взаимодействий между ними и их ближайшими соседями».

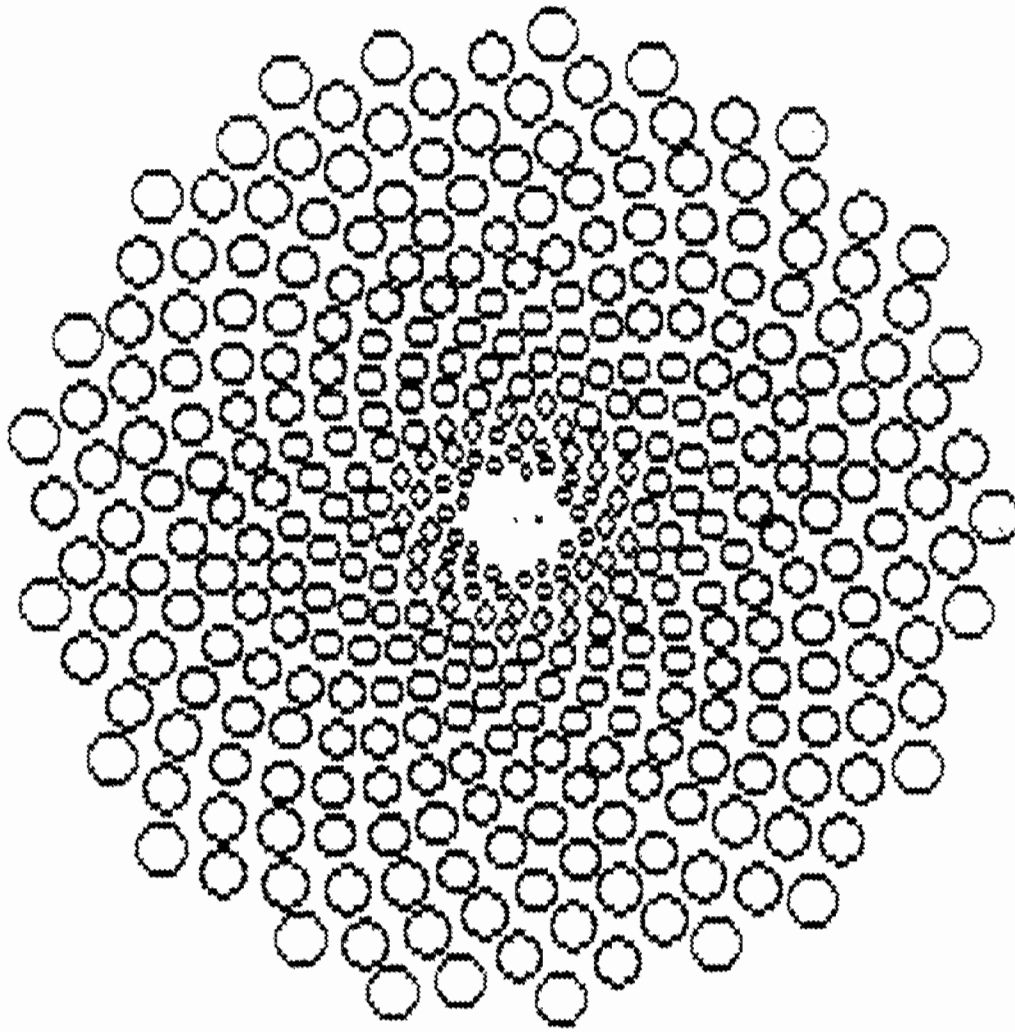


Рис. В1. Компьютерная модель изображенного на цветной иллюстрации 3 цветка, созданная автором: 34 левосторонних и 21 правосторонняя спираль (или парастих).

цузский энтомолог Жан Анри Фабр посвятил в своей знаменитой «*La vie de l'araignée*»³ специальное математическое приложение.

Те же логарифмические спирали управляют и размещением новых поколений ячеек в цветке подсолнечника (см. цв. илл. 3 и рис. В1), новых капустных листьев, а также чешуек ананасов и сосновых шишек; кроме того, в виде спирали часто закручиваются лепестки вокруг центра цветка и листья вокруг своей ветки. Леонардо да Винчи отмечает, что угол между вновь появляющимся листом и его предшественником (называемый *углом расхождения*) почти всегда постоянен. Этот феномен можно наблюдать на примере расположения ветвей дерева алоэ (см. цв. илл. 4).

Замечательно описывает присущее живым формам свойство самоподобия д'Арси Томпсон: «... характерной особенностью, например, спиральной раковины является то, что по мере своего роста она нисколько не изменяется; любой вновь выращиваемый фрагмент подобен предшествующему, в целом же на каждом из этапов роста общая форма остается той же, что и прежде»⁴.

³«Жизнь пауков» (фр.) — Прим. перев.

⁴*On Growth and Form*, ed. by John Tyler Bonner (Cambridge: Cambridge University Press, 1966), p. 179.

Мы говорим, что во всех упомянутых конструкциях каждое последующее приращение образует *гномон* по отношению к структуре в целом.

Французский ботаник XIX века Луи Браве́ и его брат Огюст, известный физик, обнаружили, что величина угла расхождения у многих видов растений приближается к $360^\circ/2.618\dots$ (где $2.618\dots$ есть не что иное, как квадрат золотого сечения), из чего следует, что количество образуемых листьями или чешуйками спиралей (или *парастихов*), закрученных по часовой стрелке и против часовой стрелки, равно двум последовательным числам Фибоначчи (каким именно числам — зависит от скорости, с которой чешуйки сменяют одна другую). Как отмечал в 1790 году сам великий Гёте (который был, ко всему прочему, выдающимся естествоиспытателем, о чем, к сожалению, многие и не подозревают): «Теперь мы можем в точности определить всю последовательность формирования листьев, ведь все действия Природы проходят шаг за шагом перед нашими глазами.»⁵

Такое изобилие спиралей и самоподобных фигур в природе не осталось незамеченным — с древнейших времен человек использует спиральные мотивы в архитектуре и декоративных искусствах, свидетельством чему могут послужить представленные на цветной иллюстрации 5 репродукции Присса д'Авенна, на которых изображены древнеегипетские орнаменты с переплетающимися спиралями; показательны также и замысловатые узоры, рожденные гением Морица Эшера (один из них можно видеть на цветной иллюстрации 6).

Открытые не так давно швейцарским математиком Бенуа Мандельбротом фракталы великолепно иллюстрируют концепцию самоподобия (см. рис. В2 и цв. илл. 7). Олицетворением же *самоподобия* является логарифмическая спираль: если начертить такую спираль и затем фотографически увеличить ее, то полученная фигура окажется абсолютно идентична исходной с точностью до поворота на угол, величина которого зависит от степени увеличения. Это уникальное свойство настолько очаровало Якоба Бернулли (еще одного швейцарского математика, на этот раз из XVII века), что он назвал обнаруженную им фигуру *spira mirabilis* (лат. «чудесная спираль») и велел выгравировать ее на своей надгробной плите вместе с эпитафией «*Eadem mutata resurgo*» (что в переводе с латинского означает приблизительно следующее: «Пусть измененный, восстану тем же»).

Темой этой книги является самоподобие (я называю его *гномонностью*), причем особое внимание уделяется логарифмической спирали и порождающим ее гномонам. Термин *гномон* употребляется здесь в своем оригинальном значении, определенном еще Героном Александрийским,

⁵ Johann Wolfgang von Goethe, *Versuch die Metamorphose der Pflanzen zu erklären* («Попытка интерпретации метаморфоза растений»). Цит. по: John E. Dale, «Power Plants», *The Sciences* (October 1994), p. 28.

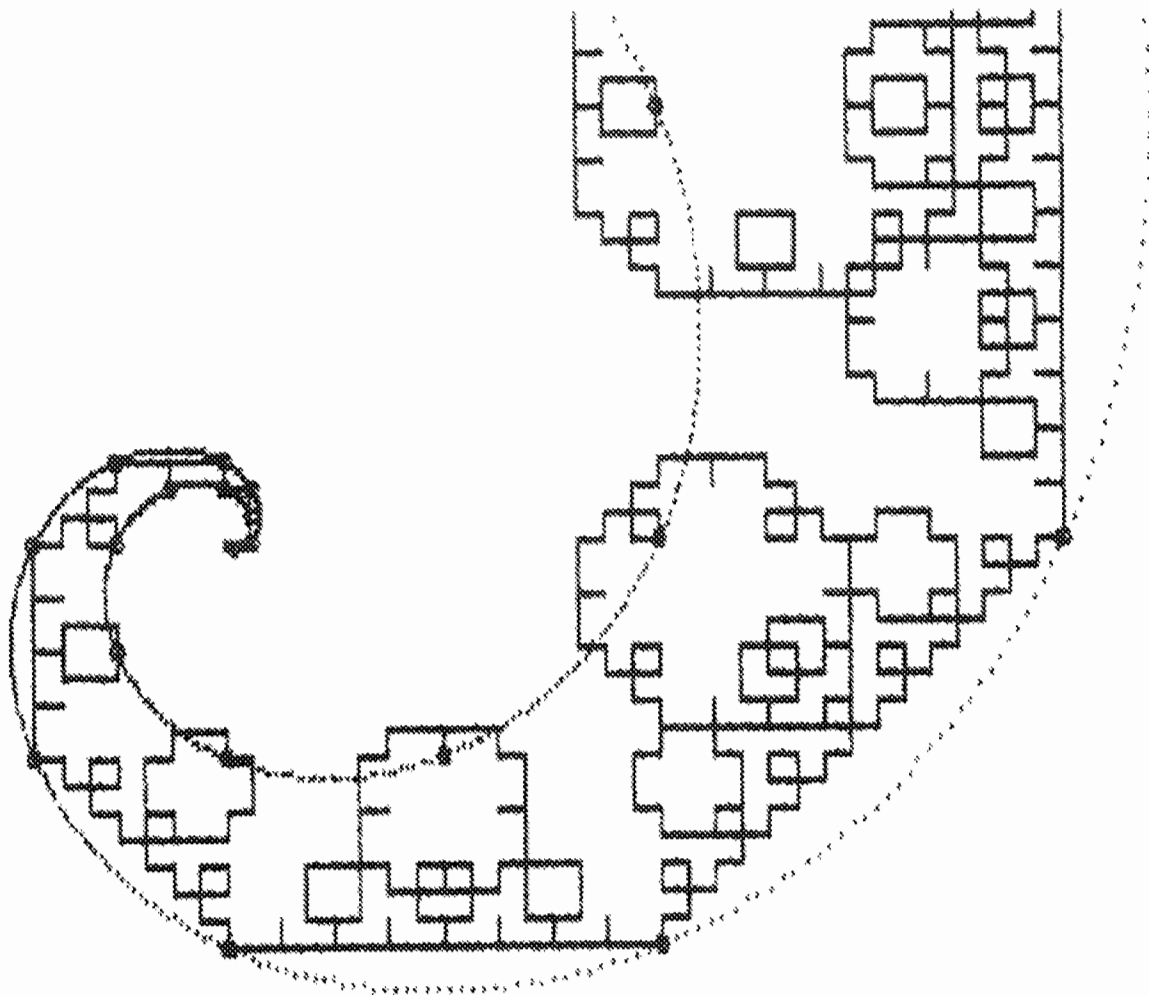


Рис. В2. Правильная фрактальная кривая, огибающая которой представляет собой логарифмическую спираль.

т. е.: «Гномон есть фигура, которая, будучи добавлена к иной фигуре, образует новую фигуру, подобную исходной».

Открывает книгу исторический обзор, который некоторым читателям может показаться (возможно, справедливо) не совсем здесь уместным. Я, тем не менее, склонен согласиться в этом отношении с французским социологом XIX века Огюстом Контом, который полагал, что «для понимания науки необходимо знать ее историю». В полном соответствии с этим принципом мы поговорим о египетском происхождении понятия «гномон» и убедимся в ошибочности одного широко распространенного заблуждения относительно предназначения древнеегипетских обелисков.

После непрерывных дробей и чисел Фибоначчи мы рассмотрим витые фигуры и их спиральные огибающие, а в завершение читатель познакомится с весьма необычным подходом к фракталам, основанным на арифметизированном варианте кронекерова произведения.

Гномоны и солнечные часы

Согласно древнеегипетским иероглифическим текстам измерение времени занимало центральное место в повседневной жизни египтян эпохи

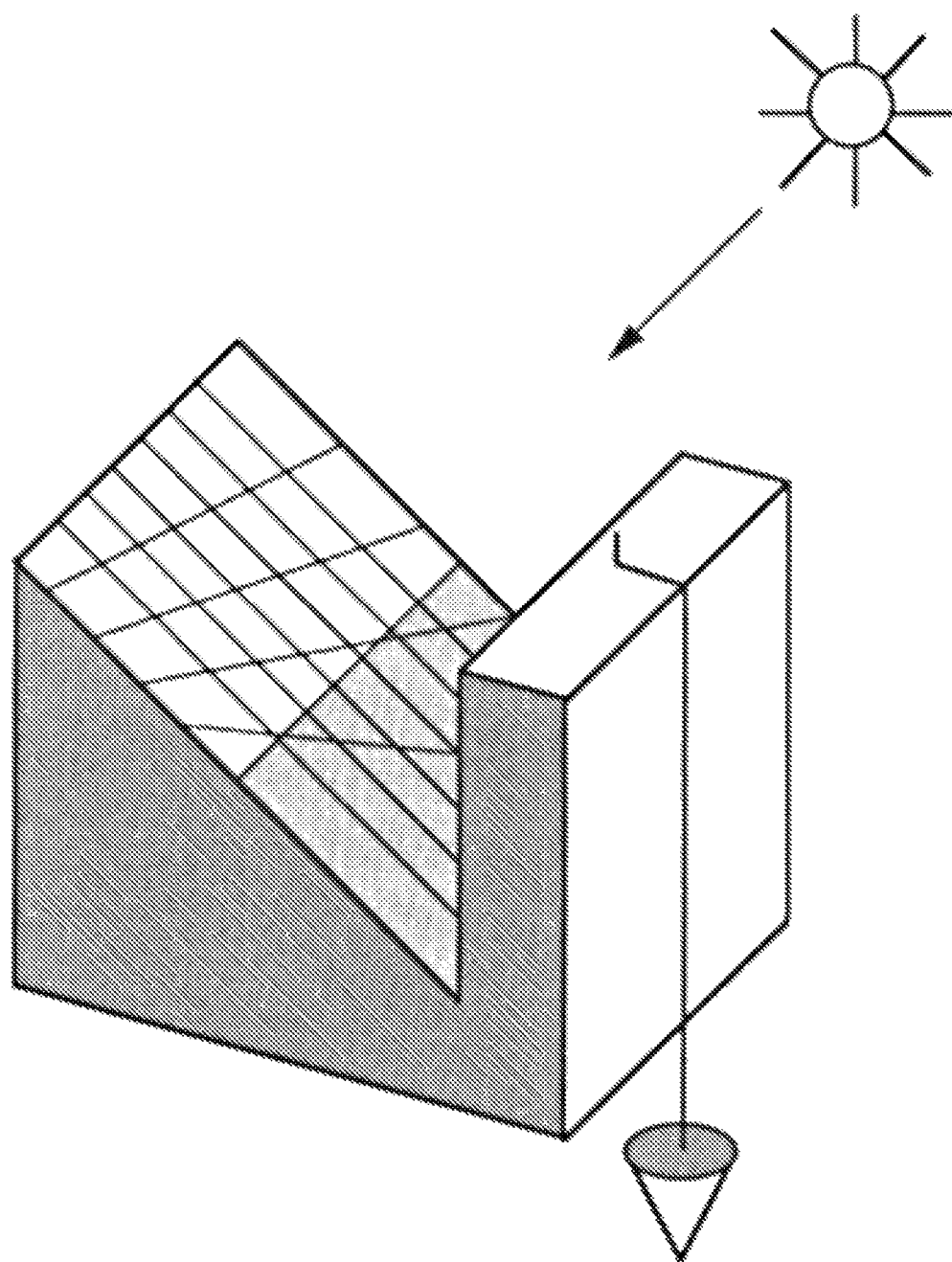


Рис. В3. Египетские солнечные часы.

Древнего и Среднего Царств. Однако самые ранние из найденных археологами солнечных часов датируются всего лишь Восемнадцатой Династией⁶. Этот инструмент представляет собой всего-навсего L-образную конструкцию, короткое плечо которой располагается вертикально, а длинное — горизонтально, причем длинное плечо определенным образом проградуировано. Для измерения времени часы располагаются так, чтобы тень от вертикального плеча падала на проградуированное горизонтальное плечо. Называлась эта конструкция *сетшат* или *меркхет*, что буквально означает «приспособление, дающее знание». Как свидетельствует текст, обнаруженный в кенотафе фараона Сети I (1294–1279 гг. до н. э.), первый и последний час дня этими часами не измерялись, так как отбрасываемая вертикальным плечом тень оказывалась слишком длинной. Эта проблема была решена позднее

⁶Эпоха Древнего Царства соответствует 2700–2200 гг. до н. э. Среднее Царство существовало с 2013 по 1710 годы до н. э. Упомянутые часы относятся к царствованию фараона Тутмоса III (1479–1425 гг. до н. э.).

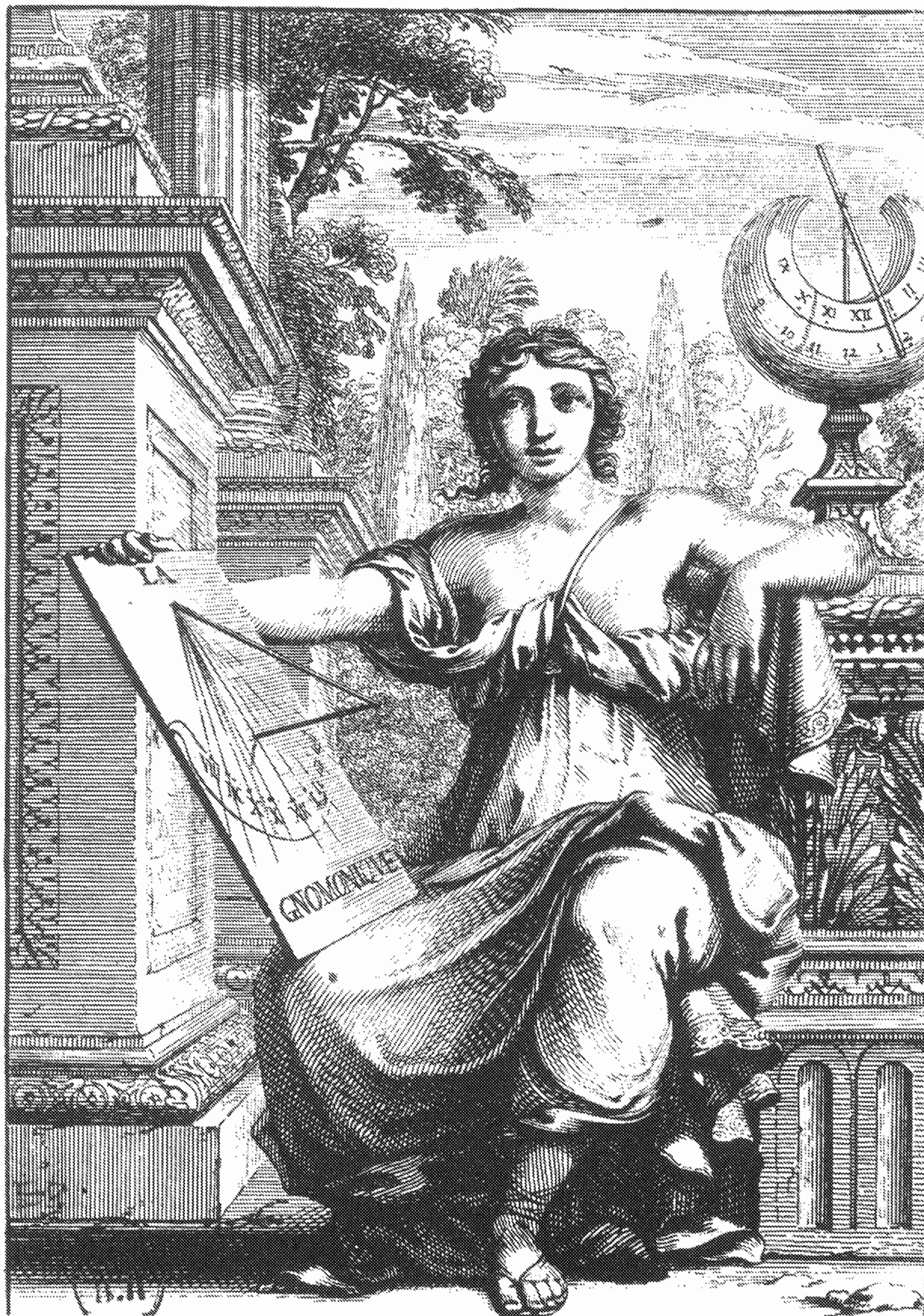


Рис. В4. Аллегория Жерара Дезарга «Гномоника». Национальная библиотека, Париж.

путем замены горизонтального плеча наклонным, образующим с вертикалью острый угол (рис. В3). На горизонтальную поверхность были нанесены шесть градуированных шкал по числу месяцев между солнцестояниями⁷.

Солнечные часы более привычного для нас вида впервые появились уже во времена Девятнадцатой Династии; они состояли из плоского диска с выгравированными на нем двенадцатью лучами и перпендикулярной к плоскости диска спицей в центре. В отличие от предыдущих L-образных солнечных часов, новые часы следовало располагать строго определенным образом.

Несколько столетий спустя (приблизительно в 575 г. до н. э.) изобретение солнечных часов припишут греку Анаксимандру, а термином *гномон*, означающим «нечто, что позволяет узнать» и являющимся буквальным переводом египетского *меркхет*, будут называть L-образный объект, помещаемый в центр диска этих самых солнечных часов.

Гравюра, помещенная на рис. В4, представляет собой аллегорическую картину под названием «Универсальный метод размещения оси на солнечных часах и расположения на них отметок часов и других обозначений», которая была создана в 1634 году Жераром Дезаргом (1591–1661). Под диском солнечных часов, стоящих на колене греческой фигуры, выгравировано слово *Gnomonique*. Жерар Дезарг считается основателем проективной геометрии и является автором знаменитой теоремы из этой области.

Геометрическое подобие

Греки были знакомы с понятием геометрического подобия еще со времен Фалеса Милетского, которому Плутарх приписывает вычисление высоты Великой пирамиды в Гизе (см. рис. В5). Фалес измерил длину тени, отбрасываемой на землю вертикально установленным шестом, и вычислил отношение ее длины к длине шеста. В тот же самый момент времени на другой день он измерил длину тени пирамиды и, применив известное свойство подобных треугольников, вычислил высоту пирамиды.

Фалес Милетский, современник Анаксимандра, много путешествовал как по Египту, где он учился у жрецов, так и по Месопотамии. Он совершенно справедливо считается родоначальником греческой геометрии, предтечей всей греческой науки⁸.

⁷Египетский календарь насчитывал три времени года, каждое из которых состояло из четырех 30-дневных месяцев. Поскольку в году 365 дней, пяти дней не хватало. Эти недостающие пять дней (так называемые *эпагоменальные* дни) добавлялись в начало года перед первым его днем — днем, когда на горизонте вместе с Солнцем восходила звезда Сот (Сириус), т. е., по нашему календарю, 19-го июля. В високосные годы добавлялся еще один день.

⁸Обычно полагают, что египетская и месопотамская науки носили, в основном, прикладной характер и представляли собой, по большей части, набор эмпирических правил, в то время

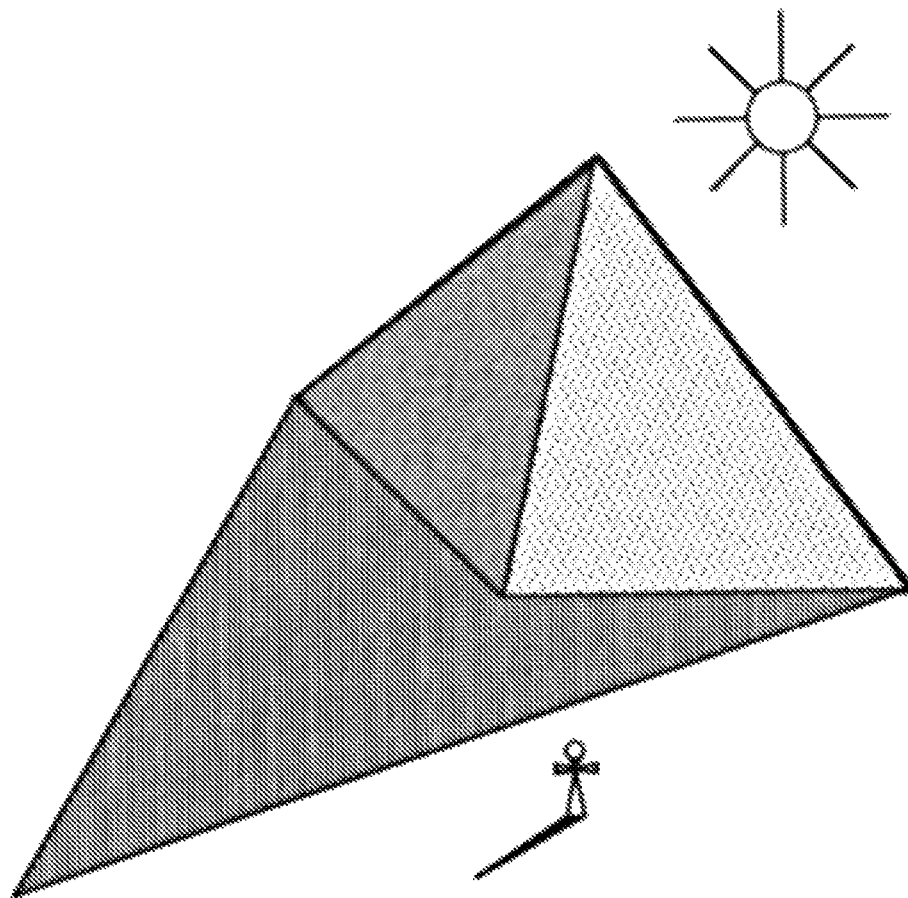


Рис. В5. Фалес Милетский измеряет высоту пирамиды.

Тремя столетиями позже (около 245 года до н. э.) Эратосфен, которого современники прозвали Пентатлом (греч. «чемпион в пяти видах»), а Птолемей назначил начальником Александрийской библиотеки, вычислил с помощью триангуляции длину окружности Земли: он определил величину угла α (см. рис. В6), измерив длину тени от расположенного в Александрии обелиска в точности в тот момент, когда в колодец, находящийся в Сиене (Асуане), солнечные лучи падали отвесно (по тогдашним представлениям, Сиена находилась на одном меридиане с Александрией). Расстояние между Сиеной и Александрией, таким образом, составило часть длины окружности, отсекаемую углом α , что позволило вычислить полную длину окружно-

как Фалес предпринял попытку с помощью индукции, *восходящего* процесса, опирающегося на результаты наблюдения, вывести некие абстрактные общие принципы, на основании которых впоследствии — с помощью всеобъемлющего и неумолимого *нисходящего* процесса дедукции, базирующегося исключительно на логических рассуждениях, — можно было бы построить цельную и непротиворечивую систему следствий, составляющую собственно знание. Однако подобное представление о египетской и месопотамской науке не совсем справедливо. Не так давно было установлено, что Пифагор, более молодой современник Фалеса, привез называемую сейчас его именем знаменитую теорему прямоком из Месопотамии. Как бы то ни было, именно греки, стоящие, если можно так выразиться, на плечах египетских и месопотамских великанов, являются основоположниками того, что впоследствии превратилось в величественную формальную доктрину, которая дошла до нас в виде тринадцати монументальных томов «Начал», написанных Евклидом и его учениками приблизительно в 300 году до н. э. в египетском городе Александрии.

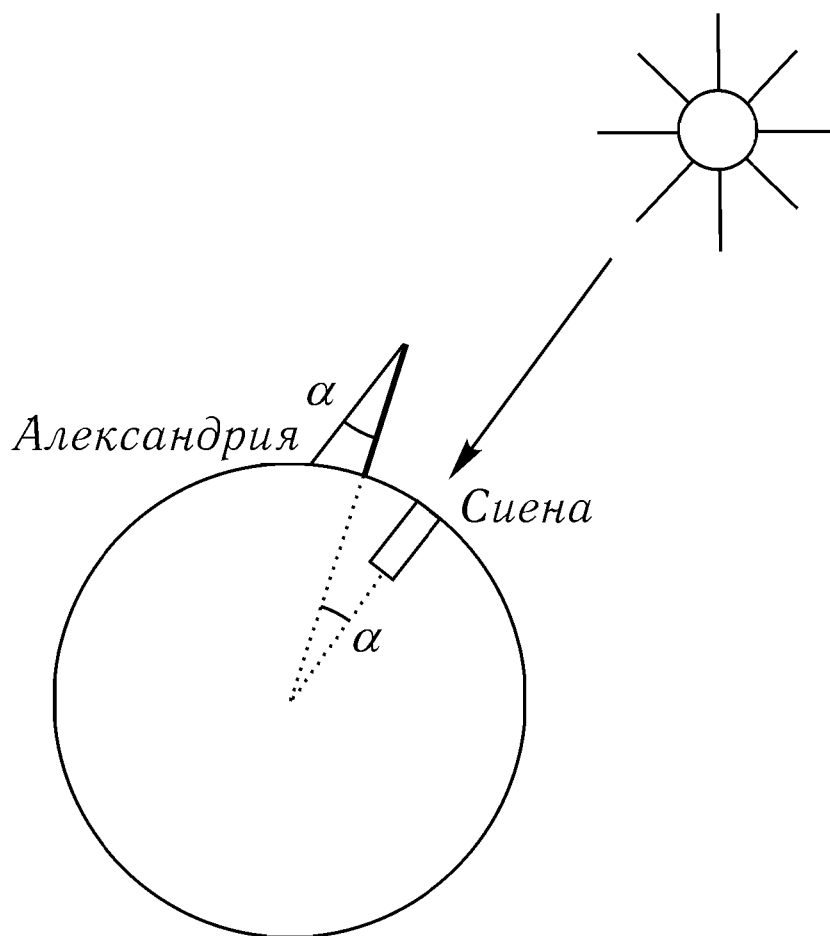


Рис. В6. Вычисление длины окружности Земли Эратосфеном.

сти⁹, причем отклонение полученных результатов от общепринятой сегодня величины 40 009 км не превышало 7–16%.

Геометрия и числа

Природа полна аналогий, и в любой отрасли человеческого знания можно найти бесчисленные метафоры для обозначения феноменов, наблюдаемых в какой-либо другой области. Именно так обстоит дело с числами и геометрией, двумя краеугольными камнями греческой науки.

Древние греки, изучавшие свойства как геометрических фигур, так и целых чисел, были одержимы поисками объединяющей эти две области теории, положения которой были бы выразимы в терминах, достаточно абстрактных для того, чтобы их можно было применить и к числам, и к

⁹Неизменное соотношение размеров объекта и его тени, будь то гигантская пирамида или простая деревянная палка, натолкнуло историка науки Мишеля Серре на следующее предположение: возможно, наблюдая постоянство этого *логоса* (т. е. отношения), греки начали задумываться о том, что огромный размер и мощь не имеют, в сущности, никаких преимуществ перед малостью и хрупкостью. Тень гномона являет собой вполне осязаемое отражение на поверхности земли — по сути, в прахе земном — небесных событий космического масштаба. Возможно, именно это наблюдение стоит за метафорой платоновой пещеры, обитатели которой способны видеть лишь тени, отбрасываемые на стены пещеры невидимыми совершенными объектами, и не могут поэтому делать никаких заключений об их неосязаемой природе, кроме чисто умозрительных.

геометрическим фигурам. А числа греки видели повсюду. Весь их мир в его наиболее чистом абстрактном виде — единственном виде, достойном изучения, — был построен на *соразмерных*, или рациональных, числах!

То, что они представляли себе как континуум рациональных чисел — бесконечную и непрерывную последовательность чисел, выражимых в виде отношения двух целых чисел, — составляло, по их мнению, совершенную метафору для описания столь же бесконечной и непрерывной геометрической фигуры, какой является прямая. (Недолгая жизнь этой иллюзии закончилась с открытием такой невероятной и невыразимой сущности, как *иррациональные числа* — по-гречески $\alpha\lambda\omicron\gamma\omicron\nu$ ¹⁰; здесь следует упомянуть Евдокса Книдского, который приблизительно в 360 году до н. э. предпринял до некоторой степени удачную попытку спасти положение.)

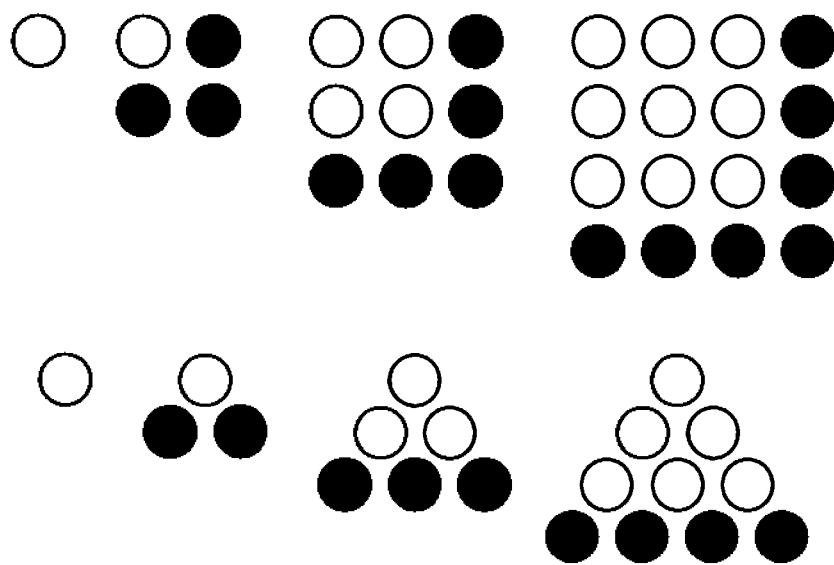


Рис. В7. Вверху: квадратные числа. Внизу: треугольные числа.

Грекам было известно, что два квадрата геометрически подобны, так же как и два равносторонних треугольника — в общем виде, подобны два любых правильных многоугольника с одинаковым числом сторон. Основываясь на геометрическом подобии, греки разработали концепцию числового подобия и потратили впоследствии немало времени и сил на изучение фигурных чисел: треугольных, квадратных, пятиугольных и т. д. Количество бусин, заключенных внутри какой-либо из квадратных рамок на рис. В7 (вверху), до сего дня называется *квадратом соответствующего числа*, в то время как другие фигурные числа (треугольные, например — см. рис. В7, внизу) не имеют ныне никакой практической ценности и могут служить разве что в качестве математических игрушек.

Греки видели закономерность $1+3=4$, $4+5=9$, $9+7=16$, $16+9=25$ и т. д. и, очевидно, понимали, что последовательность 1, 4, 9, 16, ... представляет собой последовательность квадратов натуральных чисел. Их пора-

¹⁰Невыразимый, неисчислимый (греч.) — Прим. перев.

зил тот факт, что сложение любого члена этой последовательности с соответствующим членом последовательности нечетных чисел $3, 5, 7, 9, \dots$ дает в результате следующий член последовательности квадратов. На рис. В7 (вверху) показана геометрическая интерпретация этого наблюдения: квадратные числа представлены квадратами, составленными из белых бусин, а добавляемые к ним нечетные числа изображены в виде L-образных фигур из черных бусин. Благодаря своей форме, эти L-образные фигуры и были названы гномонами. Добавление к фигуре каждого последующего геометрического гномона (подобного своему предшественнику) не изменяет ее пропорций; она лишь растет в размерах. Точно так же добавление каждого последующего нечетного числа лишь удлиняет последовательность квадратов, не изменяя при этом ее фигурной природы. Таким образом, последовательность квадратных чисел составляют числа $1, 4, 9, 16, \dots$, а ее гномонную последовательность — числа $3, 5, 7, 9, \dots$. Аналогично, последовательность треугольных чисел составляют числа $1, 3, 6, 10, 15, \dots$, а ее гномонную последовательность — числа $2, 3, 4, 5, \dots$.

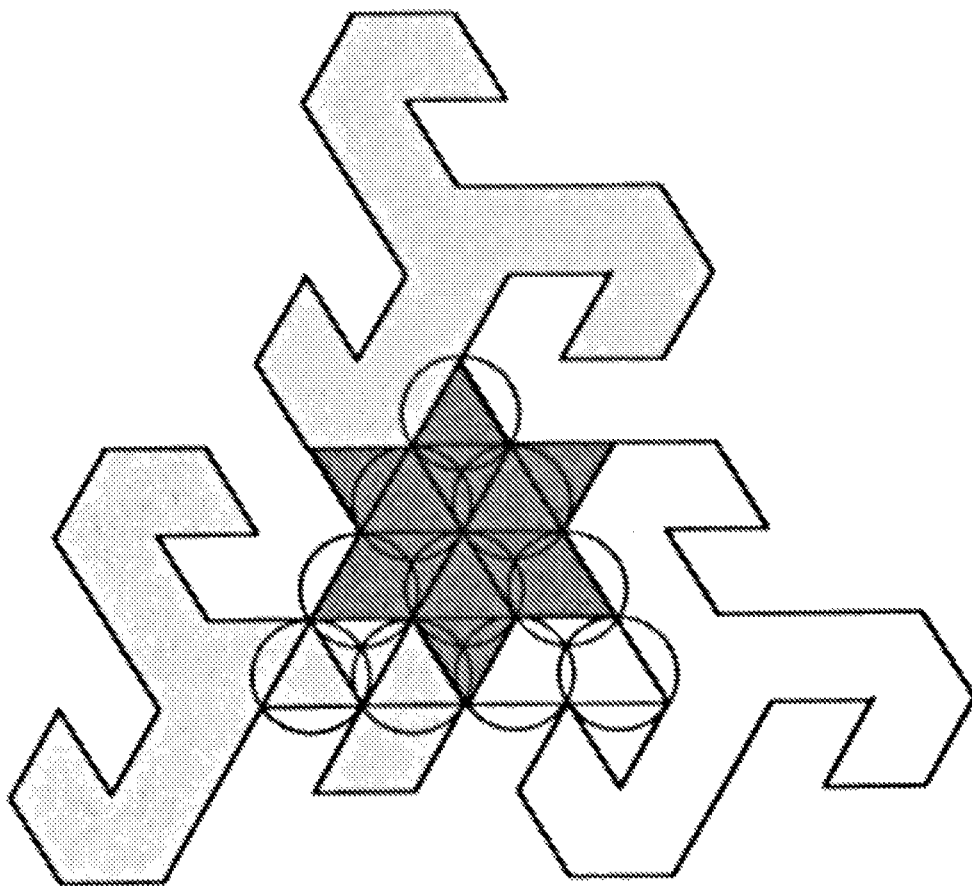


Рис. В8. Тетракт в исламском орнаменте, состоящем из звезд и переплетающихся друг с другом трехлучевых элементов.

Фигура, соответствующая числу 10 (четвертому треугольному числу), называлась *тетрактом* и считалась последователями Пифагора настолько мистической, что они избрали ее в качестве эмблемы своего тайного братства, Ордена пифагорейцев. Широко использовался тетракт и в исламских орнаментах, где на его основе выстраивались замысловатые узоры, содержа-

щие шестиконечную звезду и периодические структуры порядка 3 — такие, например, как узор, изображенный на рис. В8.¹¹

Гномоны и обелиски

Некоторые современные историки утверждают, что древние обелиски (включая и те, что были воздвигнуты в Египте) использовались в качестве солнечных часов. Утверждение это, мягко говоря, ничем не обосновано: достаточно отметить, как именно располагались обелиски, — а они, как правило, устанавливались по обе стороны от входов в храмы (ярким примером может служить храм в Луксоре, где, к сожалению, остался только один обелиск, в то время как второй служит украшением площади Согласия в Париже) — и сразу станет ясно, что египтяне строили свои обелиски ни для измерения времени, ни для какой-либо иной цели, а единственно ради восхваления бога Амона. Египтолог Лабиб Хабаши пишет: «На цоколе своего обелиска, что до сих пор стоит в Карнаке, (царица) Хатшепсут приказала сделать надпись о том, что «в честь отца своего Амона воздвигла она... два великих обелиска из цельнотесаных блоков красного гранита, добываемого в южной области; верхние же части этих обелисков сделаны из самого лучшего золота из разных стран»¹².

Римлянам, судя по всему, египетские обелиски очень понравились; они даже перевезли несколько штук через Средиземное море для украшения своего родного города, в результате чего в Риме сегодня находится — ни много ни мало — тринадцать обелисков, тогда как в самом Египте их осталось всего четыре; кроме того, по одному обелиску есть в Париже, Нью-Йорке, Лондоне и Стамбуле, причем многие из этих «увезенных» обелисков приобрели на вершиях в виде крестов и используются как солнечные часы (рис. В9).

Хотя нам достоверно известно, что солнечные часы были изобретены египтянами за восемь столетий до Анаксимандра, предположение о том, что обелиски Древнего Египта служили для измерения времени, представляет собой не что иное, как типичный случай «романоморфного» подхода к истории.

¹¹Большое количество таких орнаментов можно найти в книге Кейт Кричлоу «Исламские орнаменты»: Keith Critchlow. *Islamic Patterns* (London: Thames and Hudson, 1976).

¹²Labib Habashi. *The Obelisks of Egypt* (Cairo: American University in Cairo Press, 1988).

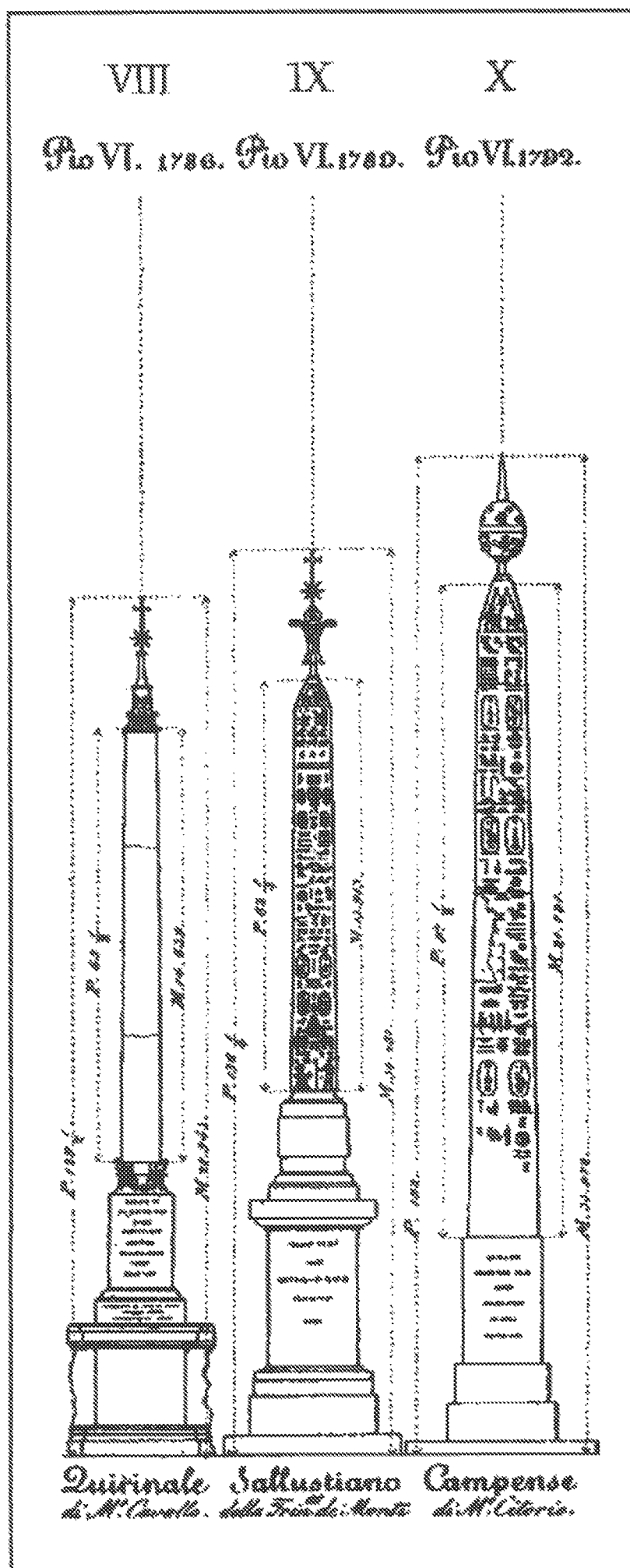


Рис. В9. Три египетских обелиска из тех, что находятся в Риме. Особый интерес представляет обелиск, изображенный справа и известный под названием Солнечный обелиск Монте-Читорио. Он используется в качестве гномона; кроме того, в шаре на его верхушке имеется отверстие (проделанное в 1788 году), проходя через которое узкий луч солнца падает на особым образом уложенные камни мостовой, что позволяет определять направление меридиана.

ГЛАВА I

Фигурные и m -адические числа

Во введении мы вкратце обсудили треугольные и квадратные числа¹. В данной главе мы исследуем и эти числа, и некоторые из более сложных. Кроме того, мы поговорим еще об одном семействе чисел, так называемых m -адических числах, и подробно рассмотрим диадические и триадические числа.

Фигурные числа

На иллюстрации 9 цветной вклейки показаны фигурные числа первых четырех рангов, причем для каждого ранга приведены числа первых четырех порядков, соответствующих $n = 1, 2, 3, 4$; из соображений удобства будем считать, что при $n = 0$ любое фигурное число равно нулю. Фигурное число ранга b и порядка n равно, таким образом, $n + n(n+1)b/2$. Например, треугольное число порядка n равно $n(n+1)/2$, а квадратное число порядка n равно n^2 . Начиная с античных времен, фигурные числа и их удивительные свойства продолжают завораживать математиков. Ферма высказал предположение, что любое целое число может быть представлено в виде суммы не более чем m m -угольных чисел. Возьмем, например, целое число 15. Получаем следующие суммы:

Треугольные числа:	$15 = 6 + 6 + 3.$
Квадратные числа:	$15 = 9 + 4 + 1 + 1.$
Пятиугольные числа:	$15 = 5 + 5 + 5.$
Шестиугольные числа:	$15 = 6 + 6 + 1 + 1 + 1.$
Семиугольные числа:	$15 = 7 + 7 + 1.$

Гаусс в своем трактате «Disquisitiones arithmeticae»² сумел доказать это предположение для случаев треугольных и квадратных чисел. Общее же доказательство было получено позднее, и автором его является Коши. К этому

¹Эта глава — в большей степени, нежели другие главы настоящей книги — обязана своим появлением трудам Мартина Гарднера, которому автор бесконечно признателен.

²«Арифметические изыскания» (лат.) — Прим. перев.

Таблица I.1a. Фигурные числа и их гномоны

Треугольные числа									
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
T_n	0	1	3	6	10	15	21	28	36
T'_n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
T''_n	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Квадратные числа									
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
S_n	0	1	4	9	16	25	36	49	64
S'_n	1	3	5	7	9	11	13	15	17
S''_n	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Пятиугольные числа									
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
P_n	0	1	5	12	22	35	51	70	92
P'_n	1	4	7	10	13	16	19	22	25
P''_n	3	3	3	3	3	3	3	3	3

моменту все остальные гипотезы Ферма были самым тщательным образом рассмотрены и доказаны, исключением является лишь его знаменитая «последняя теорема», доказательство которой потребовало нескольких веков упорного труда многих математиков, завершено совсем недавно Эндрю Уайлзом.

Пусть у нас есть некое фигурное число ранга b и порядка n . Какое число следует добавить к нему, чтобы получить число порядка $(n + 1)$? Найти такое число несложно:

$$\left[(n + 1) + \frac{(n + 1)nb}{2} \right] - \left[n + \frac{n(n - 1)b}{2} \right] = 1 + nb.$$

Таким образом, гномон фигурного числа равен в общем случае $1 + nb$. Тривиальное семейство чисел, получаемое при $b = 0$, можно назвать *линейным*. Линейное число порядка n есть не что иное, как само число n , а гномон его равен 1. Соответствующая геометрическая фигура представляет собой n -угольник, все стороны которого сжаты в одну прямую. В таблице I.1a даны первые несколько треугольных, квадратных и пятиугольных чисел (T_n , S_n и P_n соответственно), а также их гномоны T'_n , S'_n и P'_n . Отдельной строкой даны числа T''_n , S''_n и P''_n , т. е. гномоны гномонов, которые совпадают с целым числом b . Очевидно, что фигурное число ранга n равно сумме его первых n гномонов, а *сумма первых n нечетных чисел равна n^2* .

Читатели, знакомые с ньютоновским методом конечных разностей, несомненно, помнят, что если значениям переменной y поставить в со-

Таблица I.1b. Таблица конечных разностей Ньютона

x	0	1	2	3	4
y	y_0	y_1	y_2	y_3	...
	$A_1 = y_1 - y_0$	$B_1 = y_2 - y_1$	$C_1 = y_3 - y_2$	$D_1 = y_4 - y_3$	
		$A_2 = B_1 - A_1$	$B_2 = C_1 - B_1$	$C_2 = D_1 - C_1$	...
			$A_3 = B_2 - A_2$	$B_3 = C_2 - B_2$	$C_3 = D_2 - C_2$
			...	...	...

ответствие равноотстоящие значения переменной x , то можно построить таблицу разностей, аналогичную таблице I.1b. Положим $A_0 = y_0$, тогда ньютоновская формула, позволяющая выразить y в виде полинома, запишется следующим образом:

$$y = \sum_i A_i \binom{x}{i},$$

где выражение в скобках означает количество комбинаций, которые можно составить из x объектов, если брать их по i штук за один раз — иными словами,

$$\binom{x}{i} = \frac{x!}{i!(x-i)!}.$$

В случае фигурных чисел суммирование выполняется по $i = 0, 1, 2, \dots$. Пятиугольные числа, например, дают такую последовательность:

$$A_0 = 0, \quad A_1 = 1, \quad A_2 = 3 \quad (A_3 = A_4 = A_5 = \dots = 0);$$

отсюда, как и ожидалось, получаем

$$P_n = \binom{n}{1} + 3 \binom{n}{2} = n + \frac{3n(n-1)}{2}.$$

Свойство треугольных чисел

Чему равен гномон квадрата треугольного числа? Для ответа на этот вопрос обратимся к рис. I.1. На нем изображен квадрат со стороной $T_n = n(n+1)/2$, к которому добавлен L -образный гномон. Площадь гномона равна $2(n+1)T_n + (n+1)^2 = (n+1)^3$. На рис. I.2 показана последовательность треугольных чисел и их квадратов, при взгляде на которую можно прийти к одному странному выводу: *квадрат суммы первых n целых чисел равен сумме их кубов*.

Сирийский математик Никомах, автор знаменитого «Introductio Arithmetica»³, был неопифагорейцем и проживал неподалеку от Иерусалима приблизительно в 100 году н.э. Он пришел к выводам, тесно связанным с предыдущим нашим утверждением и проиллюстрированным в таблице I.1c. В самом деле, сумма нечетных чисел, помещенная после целого числа n в таблице I.1c, равна $n \times (2 \times \text{сумма первых } n-1 \text{ чисел}) + \text{сумма первых } n \text{ нечетных чисел} = 2nT_{n-1} + n^2 = (n^3 - n^2) + n^2 = n^3$.

³«Введение в арифметику» (лат.). — Прим. перев.

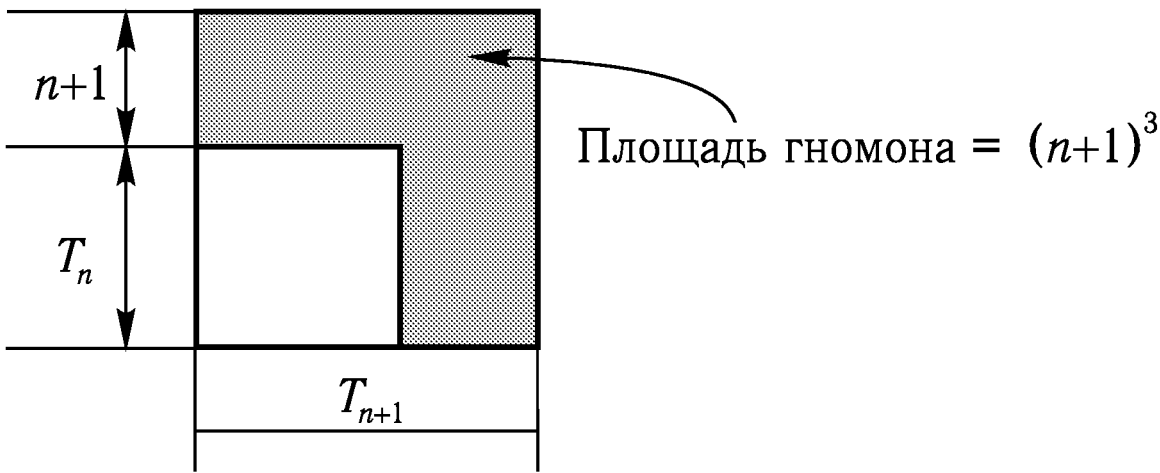


Рис. I.1. Квадрат треугольного числа.

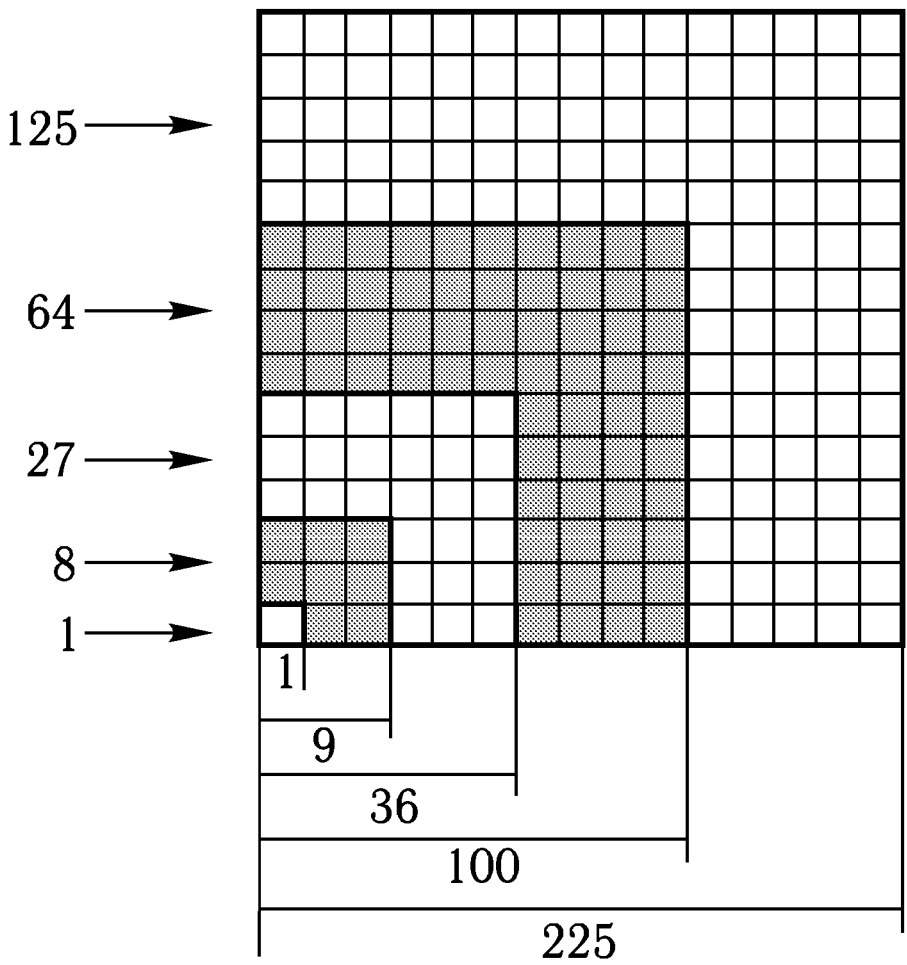


Рис. I.2. Квадраты треугольных чисел и их гномоны.

Таблица I.1с. Теорема Никомаха

n	Сумма следующих n нечетных чисел			n^3
1	1	$= 0 \times 1 + (1)$	$=$	$1^3 = 1$
2	3 + 5	$= 2 \times 2 + (1 + 3)$	$=$	$2^3 = 8$
3	7 + 9 + 11	$= 6 \times 3 + (1 + 3 + 5)$	$=$	$3^3 = 27$
4	13 + 15 + 17 + 19	$= 12 \times 4 + (1 + 3 + 5 + 7)$	$=$	$4^3 = 64$
...	...	$=$	$=$	...

Свойство квадратных чисел

На рис. 10 цветной вклейки показано, каким образом одно квадратное число переходит в следующее квадратное число — посредством добавления к себе своего *L*-образного гномона. Для преобразования квадрата с площадью $n \times n$ в квадрат с площадью $(n+1) \times (n+1)$ к двум из его сторон добавляется прямоугольник с площадью $n \times 1$ и еще квадрат с площадью 1×1 . Та-

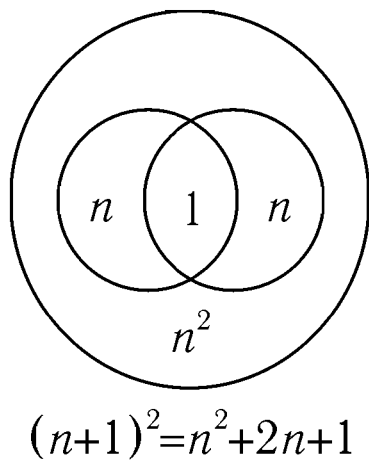


Рис. I.3. Диаграмма Венна для $(n+1)^2 = n^2 + (2n+1)$.

кая процедура является геометрическим эквивалентом алгебраического выражения $(n+1)^2 = n^2 + (2n+1)$. По другой геометрической метафоре этого выражения, называемой *диаграммой Венна*, можно проследить соотношения между членами 1, n , n^2 (рис. I.3). Как и на вклейке 10, область числа n^2 граничит с областью числа n , но не единицы, тогда как область числа n граничит и с областью n^2 , и с областью единицы, а область единицы граничит только с областью n . Иными словами, область числа n , возведенного в некоторую степень, граничит с теми и только с теми областями, которые соответствуют числу n в степени, на единицу отличающейся от заданной. На рис. I.4 показаны диаграммы Венна при $n = 1, 2, 3$.

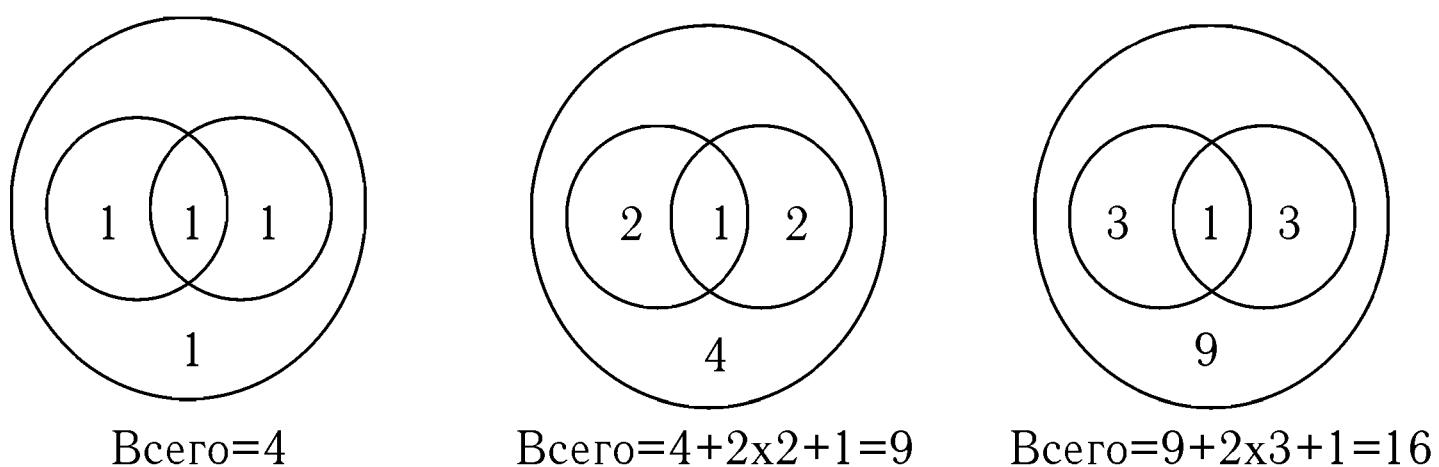


Рис. I.4. Диаграммы Венна для квадратных чисел при $n = 1, 2, 3$.

На цветной иллюстрации 11 представлена еще одна метафора выше-приведенного выражения, на этот раз в виде графов, в которых прямыми линиями соединены соседние степени n . Сами числа n помещены в разноцветные круги, причем каждой степени (0, 1 или 2) соответствует свой цвет. Переход от графа $(n+1)^1$ к графу $(n+1)^2$ заключается в построении образа первого графа и параллельном его переносе с одновременным увеличением степени n внутри каждого круга на единицу; затем полученная в результате переноса фигура соединяется с исходным образом. Граф $(n+1)^1$ получается из графа $(n+1)^0 = 1$ аналогичным образом. Оба упомянутых переноса

могут производиться по любым двум направлениям на плоскости — при условии, что эти направления не совпадают.

***m*-адические числа**

Определим *m*-адическое число порядка *n* как целое число вида

$$(n^{m-1} + n^{m-2} + n^{m-3} + \dots + n + 1).$$

Существует одно-единственное монадическое число ($m = 1$), а именно — единица. Диадические числа имеют вид $(n + 1)$, триадические — $(n^2 + n + 1)$ и т. д. В таблице I.2 представлены первые пять *m*-адических чисел вместе с соответствующими гномонами при значениях *n* от 0 до 5. В таблице I.3 даны формулы для вычисления гномонов порядка *n*. Коэффициенты, соответствующие последовательным степеням *n*, приведены на рис. I.5а; анализ этого рисунка, напоминающего до некоторой степени треугольник Паскаля, предлагается читателю в качестве самостоятельного упражнения.

Таблица I.2. *m*-адические числа и их гномоны

<i>n</i>	0	1	2	3	4	5
<i>Монадическое число</i>	1	1	1	1	1	1
Гномон	0	0	0	0	0	0
<i>Диадическое число</i>	1	2	3	4	5	6
Гномон	1	1	1	1	1	1
<i>Триадическое число</i>	1	3	7	13	21	31
Гномон	2	4	6	8	10	12
<i>Тетрадическое число</i>	1	4	15	40	85	156
Гномон	3	11	25	45	71	101
<i>Пентадическое число</i>	1	5	31	121	341	781
Гномон	4	26	90	220	440	774

Таблица I.3. Формулы для вычисления гномонов *m*-адических чисел

Монадические	0
Диадические	1
Триадические	$2 + 2n$
Тетрадические	$3 + 5n + 3n^2$
Пентадические	$4 + 9n + 9n^2 + 4n^3$
Гексадические	$5 + 14n + 19n^2 + 14n^3 + 5n^4$

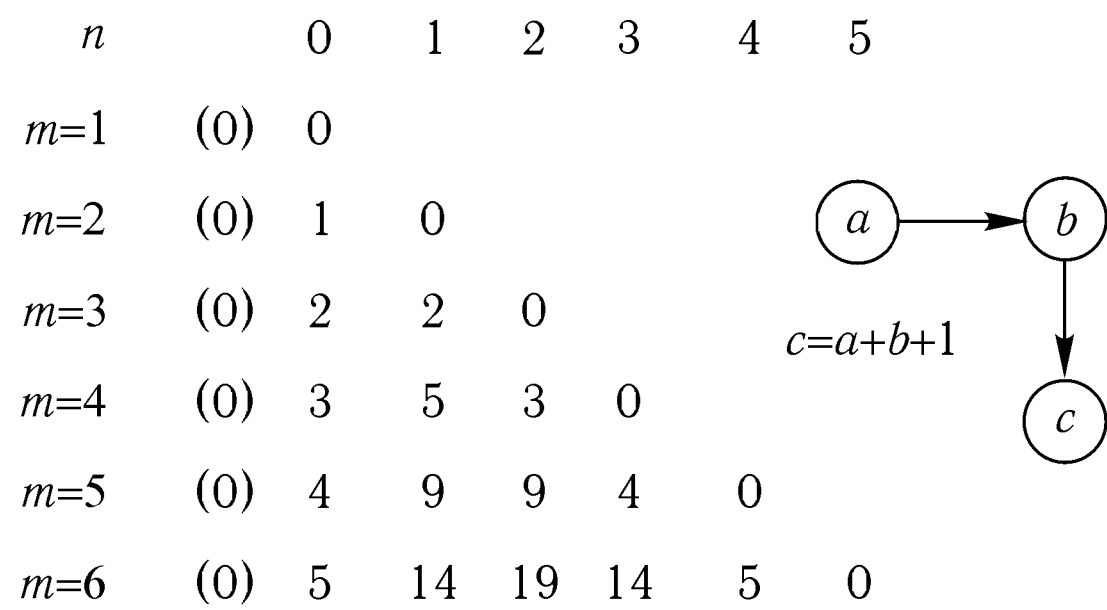


Рис. I.5a. Коэффициенты для таблицы I.3.

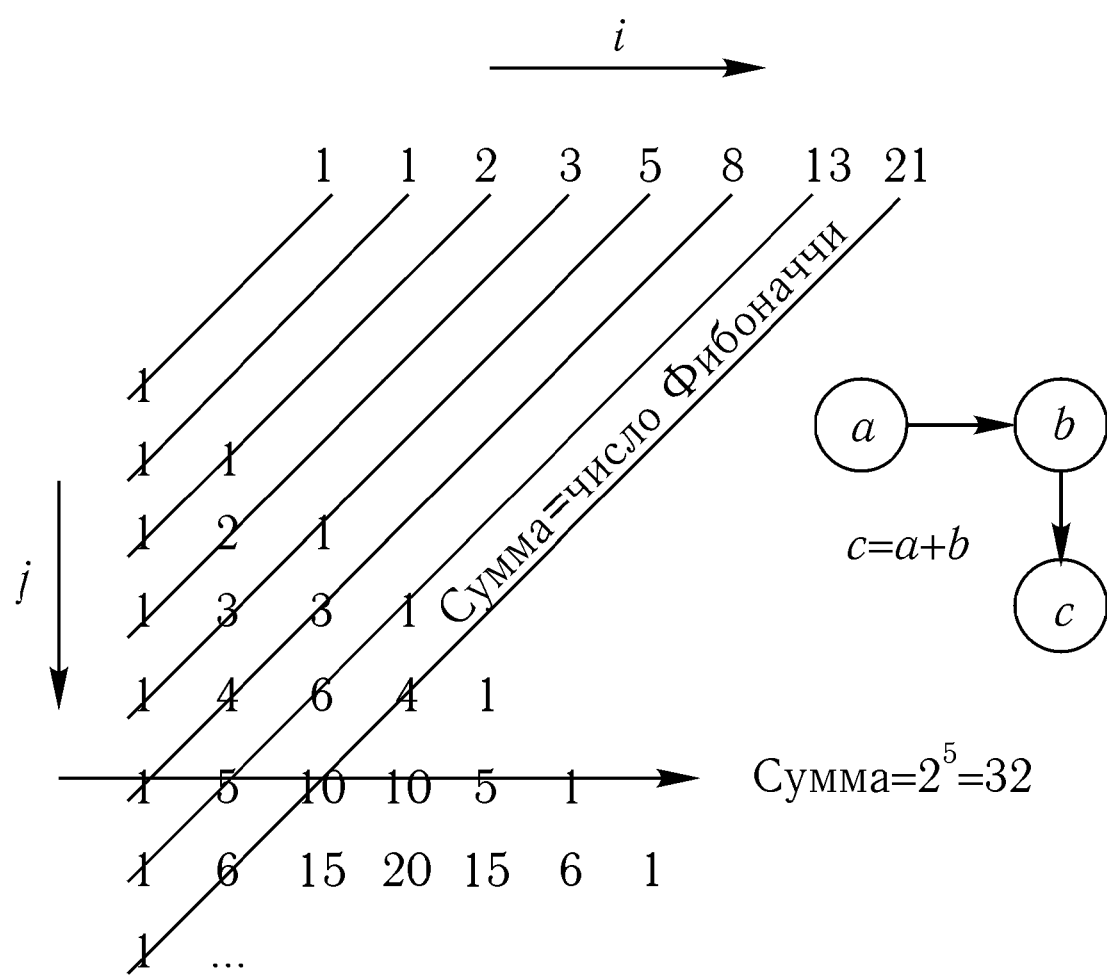


Рис. I.5b. Треугольник Паскаля.

Степени диадических чисел

Фигурное квадратное число порядка n представляет собой не что иное, как квадрат диадического числа $(1 + n)$. На цветной вклейке 11 показано, как можно преобразовать граф числа $(n + 1)^0$ в графы $(n + 1)^1$ и $(n + 1)^2$. На вклейке 12 изображен переход от графа $(n + 1)^2$ к графу $(n + 1)^3$, заключающийся в параллельном переносе квадрата вдоль какой-либо третьей оси (т. е. граф получается уже трехмерный) с одновременным умножением

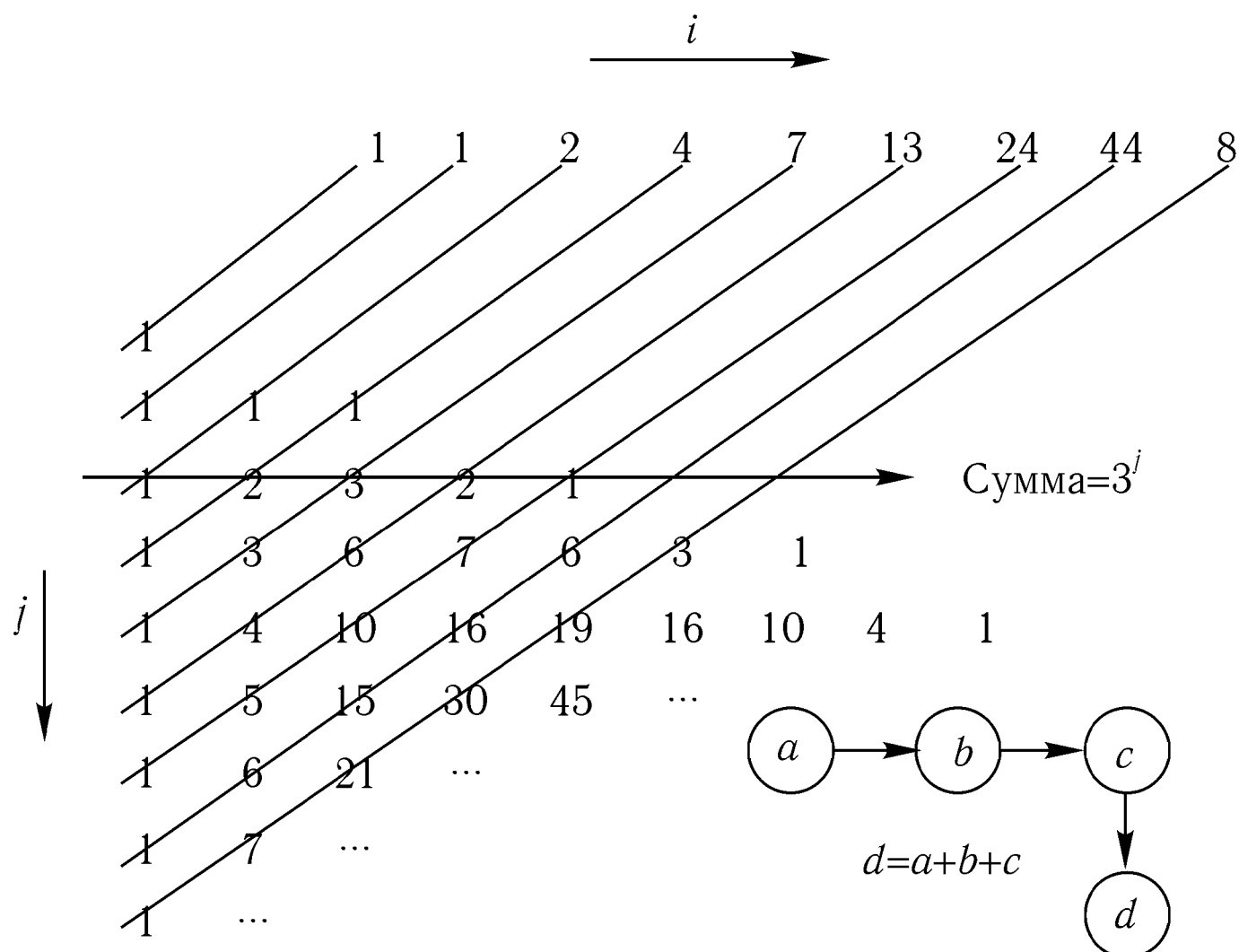


Рис. 1.5с. Вариант треугольника Паскаля для триадических чисел.

числа внутри каждого круга на n ; затем полученная в результате переноса фигура соединяется прямыми линиями с исходной. Перед нами *диадический куб*, содержащий одну вершину с единицей, три вершины с n , три вершины с n^2 и одну вершину с n^3 . Этой процедуре соответствует выражение

$$(n + 1)^3 = (n + 1)^2 + n(n + 1)^2 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1.$$

Значения индексов при вершинах получаются при изменении цифры ранга i с 0 на 1, происходящем при удвоении графа с размерностью $i - 1$ и его параллельном переносе. Читатель, очевидно, уже заметил, что показатель степени числа n в любом из кругов (вершин графа) оказывается равным количеству единиц в соответствующем индексе. На цветной вклейке 13 даны изометрические диаграммы и диаграммы Венна для $(n + 1)^3$. И здесь можно отметить, что показатели степени числа n в соседних областях всегда различаются лишь на единицу. На вклейке 14 изображена процедура построения *четырёхмерного диадического гиперкуба*, состоящая в параллельном переносе трёхмерного куба вдоль некоторой четвертой оси. Можно рассматривать этот рисунок как проекцию четырёхмерного гиперкуба на плоскость. Цветовая кодировка дается в соответствии с показателями степени при n в разложении $(n + 1)^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$. Отметим

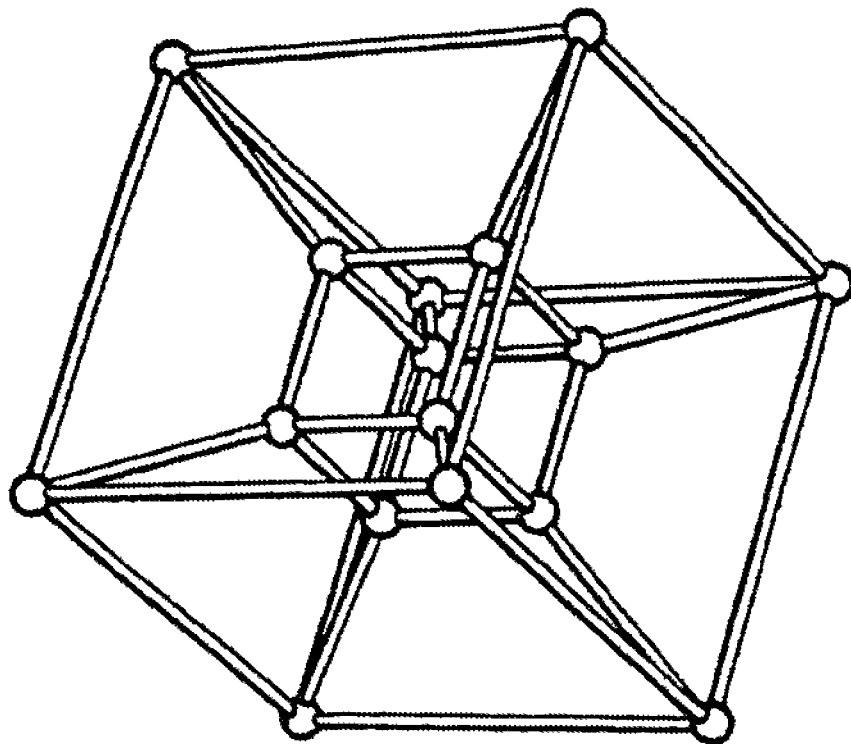


Рис. I.6. Центральная проекция четырехмерного диадического гиперкуба.

снова, что показатель степени числа n в любой из вершин графа равен числу единиц в соответствующем индексе (или его *весу*). Рис. I.6 представляет собой двумерное изображение проекции диадического четырехмерного гиперкуба на трехмерное пространство. На иллюстрации 15 цветной вклейки представлена плоская проекция диадического пятимерного гиперкуба, соответствующего выражению $(n + 1)^5 = n^5 + 4n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 4n + 1$.

Вышеописанное упражнение можно продолжать до бесконечности — для современных компьютеров сложные переплетения межвершинных связей вряд ли составят сколько-нибудь серьезную проблему — однако представить эти переплетения визуально становится при дальнейшем увеличении размерности весьма и весьма затруднительно. Очевидно, что коэффициенты в приведенных тождествах являются не чем иным, как *биномиальными коэффициентами*, которые можно легко получить, следуя правилу построения знаменитого *треугольника Паскаля* (см. рис. I.5b):

$$(n + 1)^x = \binom{x}{0} n^x + \binom{x}{1} n^{x-1} + \binom{x}{2} n^{x-2} + \dots + \binom{x}{j} n^{x-j} + \dots + \binom{x}{x} n^0.$$

Отметим, что сумма чисел, расположенных на любой линии x , равна 2^x , т. е. количеству вершин x -мерного диадического гиперкуба, тогда как сумма чисел, расположенных на диагонали $x = j$, равна числу Фибоначчи $F_{1,x}$.

Диадический гамильтонов путь

Приблизительно в середине XIX в. известный ирландский математик Уильям Роуан Гамильтон придумал игру, суть которой заключалась в прохо-

ждении ребер правильного многогранника таким образом, чтобы посетить каждую из его вершин один и только один раз и вернуться в исходную точку. Особое внимание он уделял додекаэдрам (12 граней) и икосаэдрам (20 граней). В честь последнего многогранника была даже названа сама игра («икосианская игра»), которую, как ни удивительно, Гамильтон даже умудрился продать за двадцать пять фунтов стерлингов! В эту игру можно сыграть и на трехмерном диадическом кубе, центральная проекция которого изображена на цветной вклейке 16; красной линией показано искомое прохождение, называемое *гамильтоновым путем*. Читателю, возможно, будет интересно отыскать все возможные для такой фигуры гамильтоновы пути. Задача несколько усложняется, если заменить трехмерный диадический куб четырехмерным гиперкубом (см. вклейку 14).

Один из возможных гамильтоновых путей для четырехмерного гиперкуба показан на вклейке 17. Не стоит и пытаться тут же выяснить, сколько существует таких путей, — если, конечно, у вас нет под рукой мощного компьютера⁴. Двигаясь по ребру гиперкуба на вклейке 17 из вершины 0000 в вершину 0001, можно счесть, что число 0000 есть кодированное представление целого числа 0, число 0001 — целого числа 1, число 0011 — целого числа 3 и т. д. При этом мы получаем безусловно допустимый четырехразрядный (или четырехбитный) двоичный код для шестнадцати целых чисел от 0 до 15. Соответствие между этим кодом (который называют также *двоичным рефлексивным кодом* или *кодом Грея*⁵) и его десятичным и классическим двоичным (или диадическим) эквивалентами представлено в таблице I.4. Отметим, что двоичные представления чисел — например, 7 и 8 — различаются во всех четырех знаках, двоичные коды некоторых других пар последовательных чисел различаются более чем одним знаком. С другой стороны, любые два последовательных кода Грея различаются в одном и только в одном знаке; более того, даже если последовательность из шестнадцати чисел замкнуть в петлю таким образом, чтобы 0 следовал за 15, коды, соответствующие этим двум целым числам, также будут различаться лишь одним знаком.

Построим мысленно следующий прибор: из какого-нибудь прозрачного материала сделаем кодирующий диск (аналогичный тем, что изображены на цветной вклейке 18), на визире разместим четыре миниатюрных источника света, по одному на каждое кольцо. С другой стороны диска аналогичным образом установим четыре фотоэлемента, по одному на каждый источник света. Получившаяся у нас конструкция может с успехом функционировать как осевой ротационный кодировщик с разрешением $2\pi/16$ радиан.

⁴См. «Gray codes and Paths on the *n*-cube», *Bell Systems Technical Journal* 37, No. 1 (May 1958), pp. 815–826

⁵Фрэнк Грей, научный сотрудник «Bell Labs», патент №2632058 от 17 марта 1953 года на кодирующую вакуумную трубку Грея.

Таблица I.4. Десятичный код, код Грея и двоичный (диадический) код

Десятичный код	Код Грея	Двоичный код
0	0000	0000
1	0001	0001
2	0011	0010
3	0010	0011
4	0110	0100
5	0111	0101
6	0101	0110
7	0100	0111
8	1100	1000
9	1101	1001
10	1111	1010
11	1110	1011
12	1010	1100
13	1011	1101
14	1001	1110
15	1000	1111

В случае кодирующего диска Грея переход от какого-либо кодового значения к следующему по порядку требует изменения всего лишь одного бита, тогда как двоичный диск может при этом сгенерировать большое количество паразитных промежуточных кодов, поскольку идеального совмещения источников и детекторов света добиться практически невозможно. Работы по конструированию цифровых механических датчиков смещения — таких, например, как осевые измерители угловой скорости, — а также разработка первых телеграфных аппаратов, систем импульсно-кодовой модуляции и т. п. привели к необходимости создания кодов, при применении которых при переходе между соседними значениями сигнала не генерируется никаких промежуточных значений. Французский инженер Эмиль Бодó разработал так называемый *циклический перестановочный код*, который считается предшественником кода Грея. Этот код, в сущности, и является основной

причиной феноменального успеха телеграфа Бодо. Преобразование из двоичного кода в код Грея осуществляется простой заменой в двоичном числе

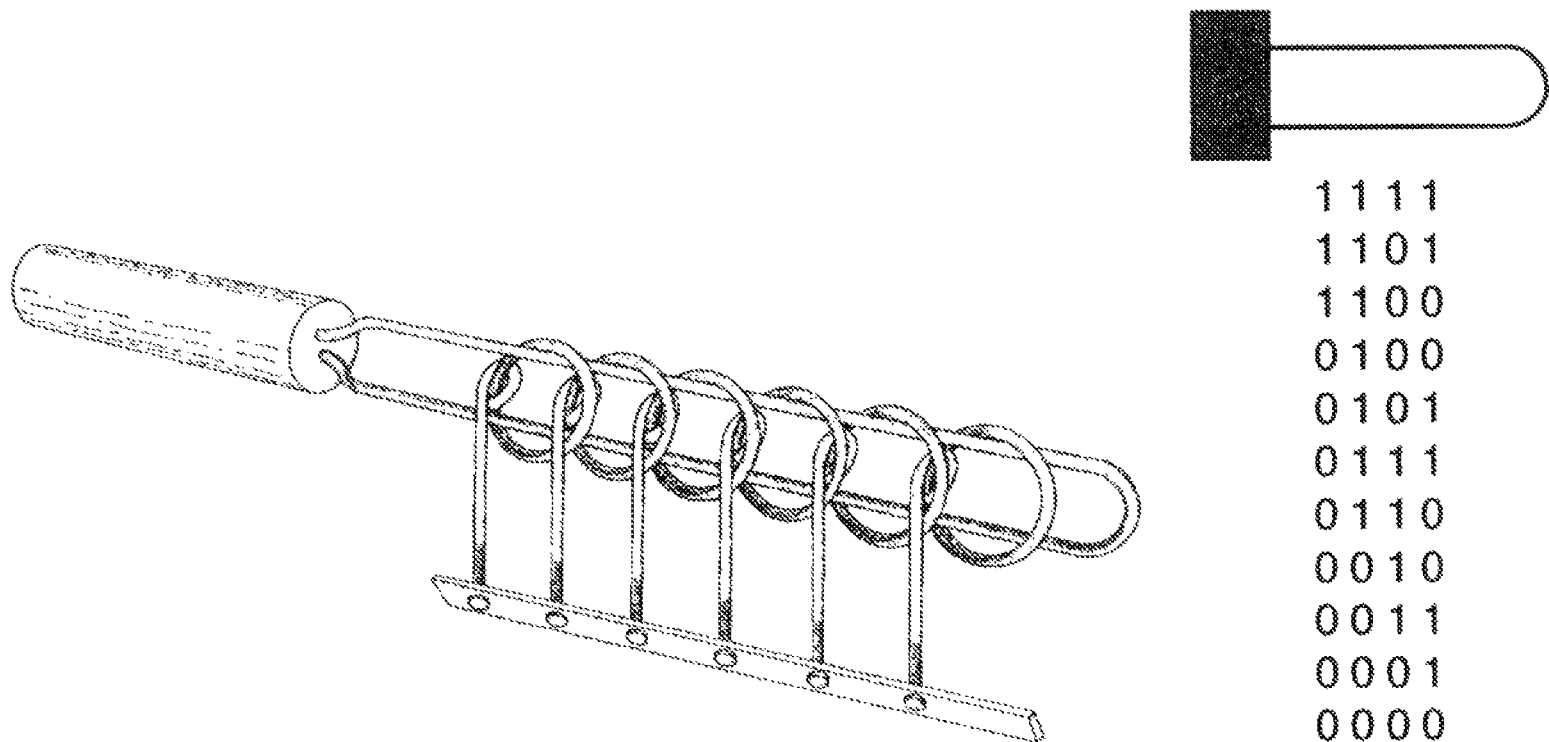


Рис. I.7. Багенодье. Из статьи Мартина Гарднера «Любопытные свойства кода Грея и его применение в решении головоломок» (Martin Gardner, «The Curious Properties of the Gray Code and How It Can Be Used to Solve Puzzles», *Scientific American* (August 1972), p. 66).

бита ранга i на сумму битов ранга i и $i + 1$ по модулю 2. Преобразование из кода Грея в двоичный код ничуть не сложнее: бит ранга i в числе Грея следует заменить на сумму этого бита и всех битов слева от него по модулю 2.

Рассмотрим теперь две знаменитые игрушки: «багенодье»⁶, известная в Англии под названием «китайские кольца», и «ханойскую башню», изобретенную французским математиком Эдуаром Люка́, плодовитым автором как всевозможных математических развлечений, так и серьезных исследований. Обе эти игры можно проанализировать с учетом кода Грея.

Головоломка из проволоки и колец, называемая багенодье, изображена на рис. I.7. Цель игры заключается в снятии цепочки колец с проволоочной петли. Структура головоломки такова, что кольцо можно снять только в том случае, если его ближайший правый (как показано на рисунке) сосед все еще находится на петле, а все остальные следующие за ним кольца уже сняты. Согласно Мартину Гарднеру эту головоломку рассматривал еще Джироламо Кардано в своем труде «*De Subtilitate Rerum*»⁷ (1550), а также Джон Валлис в своей «Алгебре» (1693). В 1872 году Луи Гро в «*Théorie du Baguenaudier*»⁸

⁶*Baguenaudier* — французское слово, произведенное от названия растения, плод которого наполнен воздухом и с громким шумом лопается, будучи сдавлен между пальцами. Соответствующий глагол имеет смысл «праздно, бесцельно бродить, слоняться».

⁷«О тонкости вещей» (лат.) — Прим. перев.

⁸«Теория багенодье» (фр.) — Прим. перев.

использовал для решения головоломки двоичную систему счисления. На рис. I.7 приведена таблица, описывающая решение головоломки, в которой число колец для простоты сокращено до четырех; 1 означает кольцо на петле, а 0 — уже снятое кольцо. Процесс начинается с конфигурации колец 1111, что соответствует десятичному числу 10, последующие конфигурации составляются так, чтобы соответствовать числам 9, 8, 7 и т. д., пока все кольца не окажутся снятыми с петли (конфигурация 0000).

Ханойская башня была изобретена Эдуаром Люка и продана как игрушка в 1883 году (рис. I.8). Цель игры заключается в переносе башни с одного колышка на другой, перемещая по одному диску за ход, при этом запрещается класть диск на диск меньшего диаметра.

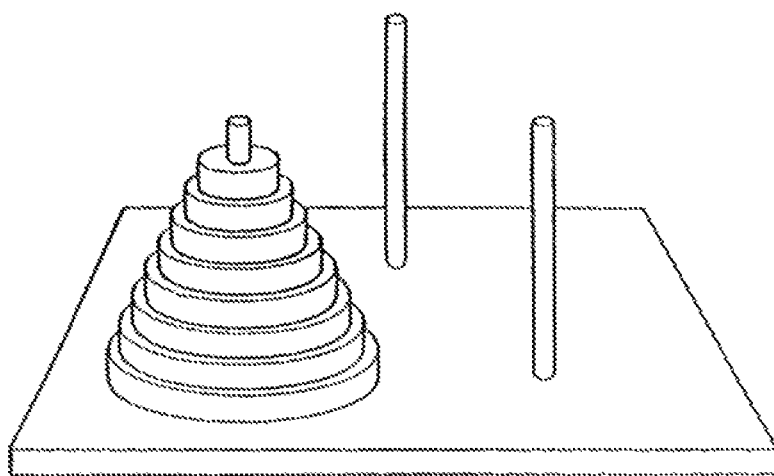


Рис. I.8. Ханойская башня.

Д. У. Кроу (Университет Британской Колумбии) обнаружил, что решение n -дискowej «ханойской» задачи можно найти с помощью гамильтонова пути на n -мерном диадическом гиперкубе. Для того чтобы понять, как это делается, рассмотрим четырехдискowej случай; на цветной вклейке 19 буквами A, B, C и D обозначены оси, образующие измерения гиперкуба с вклейки 17. Если начальная вершина имеет индекс 0000, конечная — индекс 1000, а гамильтонов путь мы сведем к простому перечислению осей, вдоль которых будет происходить наша прогулка, не учитывая при этом направления пути относительно этих осей, то результирующий путь можно записать как ABCABADABACABA. Обозначим четыре диска ханойской башни через A, B, C и D, начиная сверху. Головоломка решается посредством перемещения дисков в соответствии с только что описанной пятнадцатibuквенной последовательностью, соблюдая, разумеется, правило «неположения» большего диска на меньший.

Таким образом, для решения необходимо $2^n - 1$ шагов; из кажущейся простоты этого решения родилась легенда о «британской башне», составленной из 64 золотых дисков. Дерзнувшие переместить башню на другой колышек, следуя правилам игры, должно быть, и не подозревали о том,

что для завершения работы им потребуется несколько миллионов лет. Эта легенда напоминает о другой — об одном арабском математике, который в награду за какую-то услугу попросил у халифа некоторое количество рисовых зерен, для определения которого следовало положить одно зернышко на одну клетку шахматной доски, два на другую, четыре на третью и т. д., с каждой клеткой удваивая количество зерен.

Степени триадических чисел

Геометрическая фигура, соответствующая диадическому числу $(n + 1)$, одномерна. В случае триадического $(n^2 + n + 1)$ мы имеем дело уже с двухмерной фигурой, которую вы видите на цветной вклейке 20; здесь также показан один из вариантов индексирования вершин получаемого графа. На вклейке 21а обнаруживается наличие у триадического гиперкуба шести треугольных и шести параллелепипедных граней, а на вклейке 21b показано, как можно построить такую фигуру на поверхности тора. Кроме того, приведена пара дополняющих друг друга гамильтоновых путей. На вклейке 22b изображен шестимерный триадический гиперкуб, соответствующий выражению

$$(n^2 + n + 1)^3 = n^6 + 3n^5 + 6n^4 + 7n^3 + 6n^2 + 3n + 1,$$

и гамильтонов путь на нем. Для нахождения коэффициентов при n^j в разложении триадического числа $(n^2 + n + 1)^x$ треугольник Паскаля уже не годится; соответствующий триадическому случаю треугольник показан на рис. I.5с. Отметим, что сумма чисел, расположенных на любой линии j , равна 3^j , т. е. количеству вершин соответствующего триадического гиперкуба, а любое целое число в верхней последовательности равно сумме трех предыдущих чисел. Следуя вершинам гамильтонова пути, можно составить код, подобный коду Грея, как показано на рис. I.9. Если g_i — знак ранга i в числе кода Грея, а t_i — соответствующий троичный знак, то g_i задается выражением $g_i = (t_i - t_{i+1} \bmod 3)$. И наоборот, t_i равен сумме g_i и всех расположенных слева от него цифр по модулю 3. На рис. I.9 показана также конструкция кодирующего диска с разрешением 40° . Сочетания белых, серых и черных областей отражают любые перестановки цифр 0, 1 и 2.

Десятичный	Серый	Троичный
0	0 0 0	0 0 0
1	0 0 1	0 0 1
2	0 0 2	0 0 2
3	0 1 2	0 1 0
4	0 1 0	0 1 1
5	0 1 1	0 1 2
6	0 2 1	0 2 0
7	0 2 2	0 2 1
8	0 2 0	0 2 2
9	1 2 0	1 0 0
10	1 2 1	1 0 1
11	1 2 2	1 0 2
12	1 0 2	1 1 0
13	1 0 0	1 1 1
14	1 0 1	1 1 2
15	1 1 1	1 2 0
16	1 1 2	1 2 1
17	1 1 0	1 2 2
18	2 1 0	2 0 0
19	2 1 1	2 0 1
20	2 1 2	2 0 2
21	2 2 2	2 1 0
22	2 2 0	2 1 1
23	2 2 1	2 1 2
24	2 0 1	2 2 0
25	2 0 2	2 2 1
26	2 0 0	2 2 2

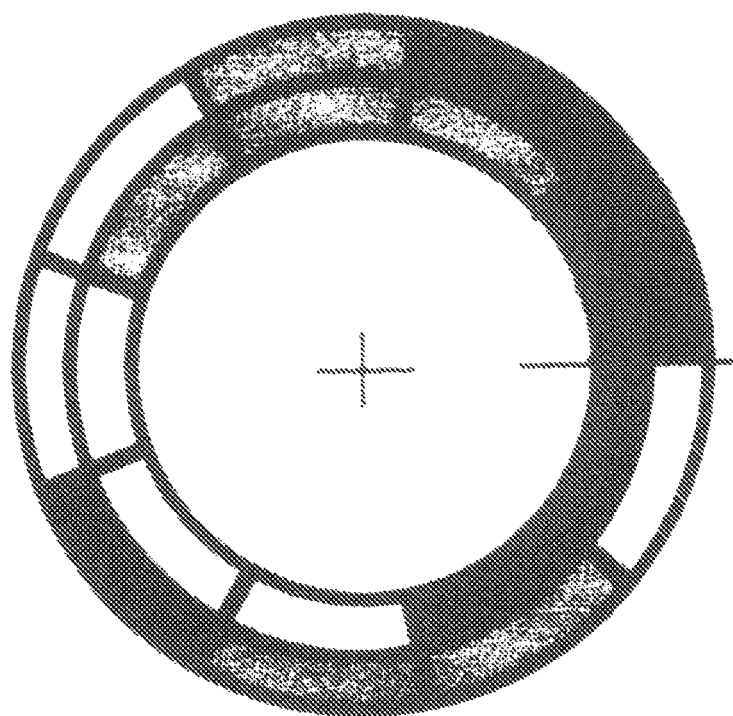


Рис. I.9. Троичный (триадический) код Грея и кодирующий диск.

ГЛАВА II

Непрерывные дроби

Непрерывные дроби принадлежат сегодня к области «ненужной математики», т. е. математики, которая считается слишком сложной для средней школы, но чересчур элементарной для колледжа.

(Петр Бекман)¹

Настоящая глава является ключевой для понимания последующих глав, посвященных итерационным процессам (таким как построение лестничных, или ступенчатых, схем), последовательностям Фибоначчи, витым фигурам и спиральям. Мы обсудим здесь особый род дробей, широко применяемый для вычисления алгебраических иррациональных чисел (таких как иррациональные квадратные корни), а также некоторых трансцендентных иррациональных чисел (например, e и π). Считается, что непрерывные (или цепные) дроби были впервые введены Уильямом Брункером (1620–1684), первым президентом Британского Королевского Общества, обнаружившим изящное выражение для вычисления трансцендентного числа π , которое мы вскоре рассмотрим. Итерационная природа непрерывных дробей видна невооруженным глазом. Позиционное представление квадратичных иррациональных чисел относительно периодического основания (десятичного или иного) само по себе периодическим не является, однако соответствующая непрерывная дробь периодична и может, как следствие, быть определена через конечное число элементов. Аналогичным образом, непрерывные дроби, представляющие числа e и π , следуют простым, пусть и не периодическим, схемам. Эти схемы исчерпывающе представлены в эйлеровых непрерывных дробях для e . Витые фигуры являются предшественниками спиралей и великолепными геометрическими метафорами для непрерывных дробей, что и объясняет центральную роль последних в последующих главах. В качестве вступления к разговору о непрерывных дробях рассмотрим один знаменитый алгоритм, доставшийся нам в наследство от древних греков.

¹*A History of π* (New York: St. Martin's Press, 1971), p. 129.

Алгоритм Евклида

Этот алгоритм приведен в седьмой книге «Начал» Евклида и предназначен для вычисления наибольшего общего делителя любых двух целых чисел. Хотя некоторые историки приписывают его авторство великому Евдоксу, алгоритм этот принято называть евклидовым.

Рассмотрим целые числа a и b , где $b > 0$. Несложно установить, что существует одна и только одна пара целых чисел q, r , удовлетворяющая следующим условиям:

$$a = bq + r, \quad b > r \geq 0. \quad (2.1)$$

Пусть d — целое число, на которое без остатка делится и число a , и число b . Запишем

$$\alpha = \frac{a}{d}, \quad \beta = \frac{b}{d}. \quad (2.2a)$$

Подставив эти выражения в (2.1), получим

$$\alpha = \beta q + \frac{r}{d}. \quad (2.2b)$$

В вышеприведенных выражениях α и βq — целые числа. Следовательно, r/d также должно быть целым числом, т. е. если d является делителем для a и b , то оно является делителем и для r , остатка от деления a на b . И наоборот, очевидно, что любой общий делитель чисел b и r является также делителем и для числа a . Множество общих делителей чисел a и b , таким образом, тождественно множеству общих делителей чисел b и r . Самое большое число этого множества называется *наибольшим общим делителем* (НОД) чисел a и b , оно же является НОД и для чисел b и r . Это записывается как

$$(a, b) = (b, r). \quad (2.3)$$

Это простое свойство деления и послужило фундаментом, на котором Евклид построил свой алгоритм, действующий следующим образом.

Для определения НОД целых чисел a_0 и a_1 , где $a_0 > a_1$, запишем, следуя модели выражения (2.1),

$$\begin{aligned} a_0 &= a_1 q_0 + a_2, & a_1 &> a_2 \\ a_1 &= a_2 q_1 + a_3, & a_2 &> a_3 \\ a_2 &= a_3 q_2 + a_4, & a_3 &> a_4 \\ a_3 &= a_4 q_3 + a_5, & a_4 &> a_5 \\ &\dots & & \\ a_{i-1} &= a_i q_{i-1} + a_{i+1}, & a_i &> a_{i+1} \\ a_{n-1} &= a_n q_{n-1} + 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Остаток $a_n = 0$ обязательно возникнет при некотором значении n , поскольку убывающая последовательность $a_0 > a_1 > a_2 > a_3 > a_4 \dots > a_n$ может содержать не более чем a_0 положительных целых чисел. Появление нулевого остатка говорит о том, что число a_n является НОД для числа a_{n-1} и себя самого, т. е. $(a_{n-1}, a_n) = a_n$. Согласно уравнению (2.3) из вышеприведенной последовательности делений получаем

$$(a_0, a_1) = (a_1, a_2) = (a_2, a_3) = \dots = (a_{n-1}, a_n).$$

Искомый НОД, таким образом, равен a_n . Определим, например, наибольший общий делитель чисел 1785 и 374:

$$\begin{aligned} 1785 &= 374 \times 4 + 289, \\ 374 &= 289 \times 1 + 85, \\ 289 &= 85 \times 3 + 34, \\ 85 &= 34 \times 2 + 17, \\ 34 &= 17 \times 2 + 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $(1785, 374) = 17$.

Непрерывные дроби

Положим $\phi_0 = \frac{a_0}{a_1}$, $\phi_1 = \frac{a_1}{a_2}$, $\phi_2 = \frac{a_2}{a_3}$, $\dots$, $\phi_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{a_n}$; тогда уравнения (2.4) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \frac{a_0}{a_1} = q_0 + \frac{a_2}{a_1} = q_0 + \frac{1}{\phi_1} \\ \phi_1 &= \frac{a_1}{a_2} = q_1 + \frac{a_3}{a_2} = q_1 + \frac{1}{\phi_2} \\ &\dots \\ \phi_{n-2} &= \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} = q_{n-2} + \frac{a_n}{a_{n-1}} = q_{n-2} + \frac{1}{\phi_{n-1}} \\ \phi_{n-1} &= \frac{a_{n-1}}{a_n} = q_{n-1} + 0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Или иначе:

$$\phi_0 = \frac{a_0}{a_1} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \dots + \frac{1}{q_{n-2} + \frac{1}{q_{n-1}}}}}}. \tag{2.6a}$$

Такое разложение принято называть *непрерывной* (или *цепной*) *дробью*, а числа $q_0, q_1, q_2, \dots$ — *неполными частными*. Следуя предыдущей схеме, можно записать

$$\begin{aligned}\phi_0 &= \frac{1785}{374} = 4 + \frac{1}{374/289}, & q_0 &= 4, \\ \phi_1 &= \frac{374}{289} = 1 + \frac{1}{289/85}, & q_1 &= 1, \\ \phi_2 &= \frac{289}{85} = 3 + \frac{1}{85/34}, & q_2 &= 3, \\ \phi_3 &= \frac{85}{34} = 2 + \frac{34}{17}, & q_3 &= 2, \\ \phi_4 &= \frac{34}{17} = 2, & q_4 &= 2\end{aligned}\tag{2.6b}$$

или

$$\phi_0 = \frac{1785}{374} = 4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}.\tag{2.6c}$$

Простые непрерывные дроби

Исходя из вышеизложенного, можно предложить для непрерывных дробей следующий общий вид:

$$\phi = q_0 + \frac{p_1}{q_1 + \frac{p_2}{q_2 + \frac{p_3}{q_3 + \dots \frac{p_{n-1}}{q_{n-1} + \frac{p_n}{q_n}}}}};\tag{2.7}$$

ниже приведены поразительные примеры таких дробей (выражения (2.17) и (2.18)). Положив $p_i = 1$ для всех i , получим частный случай непрерывных дробей — *простые непрерывные дроби* (ПНД). Если все q являются к тому же положительными целыми числами, то такая дробь называется *регулярной непрерывной дробью* (РНД). В дальнейшем для простых непрерывных

дробей (как регулярных, так и нерегулярных) мы будем использовать следующую форму записи:

$$[q_0, q_1, q_2, \dots, q_n] = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \dots + \frac{1}{q_{n-1} + \frac{1}{q_n}}}}}; \quad (2.8)$$

можно легко показать, что

$$\begin{aligned} [q_0, q_1, q_2, \dots, q_n] &= [q_0, [q_1, q_2, \dots, q_{n-1}]] = q_0 + \frac{1}{[q_1, q_2, \dots, q_n]}, \\ a[q_0, q_1, q_2, \dots] &= [aq_0, \frac{q_1}{a}, aq_2, \frac{q_3}{a}, \dots]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Подходящие дроби

Несократимую дробь

$$\delta_i = [q_0, q_1, q_2, \dots, q_i] = \frac{N_i}{D_i} \quad (2.10)$$

называют *i*-й *подходящей дробью* непрерывной дроби. Числа N_i и D_i являются, соответственно, *i*-ми числителем и знаменателем этой непрерывной дроби. Возвращаясь к нашему численному примеру, получаем

$$\begin{aligned} \delta_0 &= 4, \quad \delta_1 = 4 + \frac{1}{1} = 5, \quad \delta_2 = 4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{19}{4}, \\ \delta_3 &= 4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}} = \frac{43}{9}, \\ \delta_4 &= 4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}} = \frac{105}{22} = \frac{1785}{374}. \end{aligned}$$

Доведя идею до логического завершения и введя «виртуальные» числители

$$N_{-1} = 1, \quad N_{-2} = 0, \quad D_{-1} = 0, \quad D_{-2} = 1, \quad (2.11)$$

можно вывести два фундаментальных рекурсивных соотношения, которые в совокупности дают последовательные *несократимые* подходящие дроби:

$$N_i = N_{i-2} + q_i N_{i-1} \quad \text{и} \quad D_i = D_{i-2} + q_i D_{i-1}. \quad (2.12)$$

Соответствующая процедура проиллюстрирована в таблице II.1.

Таблица II.1. Подходящие дроби							
i	-2	-1	0	1	2	3	4
q_i	—	—	4	1	3	2	2
N_i	0	1	4	5	19	43	105
D_i	1	0	1	1	4	9	22
δ_i	—	—	4	5	4,75	4,7	4,7(72)

Гюйгенс показал, что в общем случае

$$N_{i-1}D_i - N_iD_{i-1} = (-1)^i. \quad (2.13)$$

В качестве упражнения читателю также предлагается самостоятельно убедиться в том, что если в непрерывной дроби (2.7) положить

$$N_{-1} = 1, \quad N_{-2} = 0, \quad D_{-1} = 0, \quad D_{-2} = 1 \quad \text{и} \quad p_0 = 1,$$

то числитель (N_i) и знаменатель (D_i) подходящей дроби δ_i будут иметь следующий вид:

$$N_i = p_i N_{i-2} + q_i N_{i-1} \quad \text{и} \quad D_i = p_i D_{i-2} + q_i D_{i-1}. \quad (2.14)$$

Конечные регулярные непрерывные дроби

Вернемся к разложению (2.6b), где число ϕ_0 не обязательно является целым, и запишем

$$\phi_0 = q_0 + \frac{1}{\phi_1}, \quad \text{где } \phi_1 > 1,$$

$$\phi_1 = q_1 + \frac{1}{\phi_2}, \quad \text{где } \phi_2 > 1,$$

$$\phi_2 = q_2 + \frac{1}{\phi_3}, \quad \text{где } \phi_3 > 1,$$

...

При некотором индексе s число $\phi_s = q_s$ может оказаться целым. Процесс остановится, и мы получим конечную РНД

$$\phi_0 = [q_0, q_1, q_2, \dots, q_s],$$

свидетельствующую о том, что число ϕ_0 рационально.

Таким образом, любая конечная РНД порождает рациональное число, а любое рациональное число — согласно алгоритму Евклида — можно представить в виде регулярной непрерывной дроби.

Коэффициент q_s называется *коэффициентом окончания* или просто *окончанием*.

Периодические регулярные непрерывные дроби

При некоторых s и t может случиться так, что ϕ_{s+t} окажется равным ϕ_s (под s следует понимать индекс, при котором упомянутое равенство проявилось впервые), что, в свою очередь, приводит к равенству $\phi_{s+a} = \phi_{s+(a \bmod t)}$ $a = 0, 1, 2, \dots$. Такую ПНД называют периодической дробью с длиной непериодической части s и периодом t .

Пример. Для нахождения регулярной непрерывной дроби, соответствующей числу $\sqrt{14}$, записываем²

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \sqrt{14} = 3 + (\sqrt{14} - 3), \\ \phi_1 &= \frac{1}{\sqrt{14} - 3} = 1 + \frac{\sqrt{14} - 2}{5}, \\ \phi_2 &= \frac{5}{\sqrt{14} - 2} = 2 + \frac{\sqrt{14} - 2}{2}, \\ \phi_3 &= \frac{2}{\sqrt{14} - 2} = 1 + \frac{\sqrt{14} - 3}{5}, \\ \phi_4 &= \frac{5}{\sqrt{14} - 3} = 6 + (\sqrt{14} - 3), \\ \phi_5 &= \frac{1}{\sqrt{14} - 3} \end{aligned} \tag{2.15}$$

²Метод, использованный для получения этих равенств, описан в приложении.

Таблица II.2. Сходимость к $\sqrt{2}$

i	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
q_i	-	-	1	2	2	2	2	2	2
N_i	0	1	1	3	7	17	41	99	239
D_i	1	0	1	2	5	12	29	70	169
δ_i	-	-	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{17}{12}$	$\frac{41}{29}$	$\frac{99}{70}$	$\frac{239}{169}$

В данном примере $\phi_5 = \phi_1$, т. е. получаемая РНД имеет длину непериодической части 1 и период 4. В самом деле, $\sqrt{14} = [3, 1, 2, 1, 6, 1, 2, 1, 6, 1, 2, \dots] = [3, (1, 2, 1, 6)]$. Другой несложный пример — вычисление $\sqrt{2}$. Зная, что $2\sqrt{2} + 3 = (\sqrt{2} + 1)^2$, можно записать

$$\phi_0 = \sqrt{2} + 1 = \frac{2\sqrt{2} + 3}{\sqrt{2} + 1} = 2 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = 2 + \frac{1}{\phi_0}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\sqrt{2} + 1 &= [2, 2, 2, 2, \dots], \\ \sqrt{2} &= [1, 2, 2, 2, \dots] = [1, (2)].\end{aligned}$$

Применив для вычисления последовательных подходящих к $\sqrt{2}$ дробей табличный метод, получим значения, приведенные в таблице II.2. Последовательные подходящие дроби колеблются около асимптотического значения $\sqrt{2}$:

$$\begin{array}{ccccccc} & 1,5 & & 1,41(6) & & 1,4142857\dots & & \dots \\ & \uparrow & \downarrow & \uparrow & \downarrow & \uparrow & \downarrow & \uparrow \\ 1 & & 1,4 & & 1,413793\dots & & 1,4142012\dots & \end{array}$$

Эта типичная для ПНД картина похожа на картину затухающих электрических колебаний, хорошо знакомую инженерам-электрикам. Как заметил однажды Г. У. Тернбулл: «Значения этих последовательных отношений, становясь попеременно то меньше, то больше некоей предельной величины, приближаются к ускользающему иррациональному числу с обеих сторон, напоминая лапки пинцета, которые все сжимаются и сжимаются, но никак не могут ухватить искомое. Колебания эти с каждым шагом становятся все слабее — подобно колебаниям маятника часов, у которых заканчивается завод; разница лишь в том, что в данном случае маятник так никогда и не остановится.»

Вышеприведенный пример иллюстрирует применение непрерывных дробей для нахождения приблизительных значений квадратичных иррациональных чисел. Достаточно хорошее и легкое для запоминания приближение $\sqrt{2}$ дает подходящая дробь δ_5 в таблице II.2, т. е. $99/70$. В точности таково отношение длин сторон стандартного листа французской писчей бумаги ($29,7 \times 21$ см), и это вовсе не случайное совпадение — вскоре мы узнаем, что именно толкает производителей бумаги придерживаться этой выдающейся пропорции.

Таблица II.3. Сходимость к $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$

i	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
q_i	−	−	1	1	1	1	1	1	1
N_i	0	1	1	2	3	5	8	13	21
D_i	1	0	1	1	2	3	5	8	13
δ_i	−	−	1	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{21}{13}$

В качестве еще одного примера можно взять такое популярное квадратичное иррациональное число, как золотое сечение, т. е. $\phi = (1 + \sqrt{5})/2 = [1, 1, 1, 1, \dots]$. В таблице II.3 даны его первые семь подходящих дробей. Можно показать, что периодическая РНД всегда сходится к квадратичному алгебраическому иррациональному числу, т. е. числу вида $(a + \sqrt{b})/c$, где a , b , c — целые числа, причем b не является полным квадратом. Обратное предположение (любое квадратичное иррациональное число можно выразить в виде периодической простой непрерывной дроби) было в свое время доказано Лагранжем.

Спектры иррациональных квадратных корней

В древних арабских математических трактатах квадратные корни назывались особым термином *samet*, что приблизительно означает «безмолвный, безголосый»; в первых латинских переводах с арабского этот термин превратился в *surdus* («глухой, глухо звучащий»), последствия чего мы можем наблюдать во многих современных европейских языках (напр., англ. *surd* «иррациональное число, квадратный корень»). Непрерывная дробь иррационального квадратного корня всегда имеет вид

$$\sqrt{N} = [\alpha, (\beta, \chi, \delta, \dots, \delta, \chi, \beta, \omega)], \quad \text{где } \omega = 2\alpha;$$

например,

$$\sqrt{2} = [1, (2)], \quad \sqrt{3} = [1, (1, 2)], \quad \sqrt{5} = [2, (4)], \quad \sqrt{14} = [3, (1, 2, 1, 6)].$$

Таблица II.4. Спектры иррациональных квадратных корней

N	α	ω	N	α	ω
2	1	2	17	4	8
3	1	1	18	4	4
5	2	4	19	4	2 1 3 1 2
6	2	2	20	4	2
7	2	1 1 1	21	4	1 1 2 1 1
8	2	1	22	4	1 2 4 2 1
10	3	6	23	4	1 3 1
11	3	3	24	4	1
12	3	2			
13	3	1 1 1 1			
14	3	1 2 1			
15	3	1			

Тобиас Данциг назвал совокупность целых чисел, заключенных между квадратными скобками непрерывной дроби, *спектром* иррационального числа. Несколько таких спектров приведены в таблице II.4. Эти регулярные непрерывные дроби включают в себя непериодическую часть длиной в одно число (целое число α , которое представляет собой целую часть квадратного корня) и периодическую часть. Такие дроби называют *квазипериодическими*. Если непериодическая часть отсутствует, то РНД является *строго периодической*.

Апериодические бесконечные регулярные непрерывные дроби

Такие ПНД не являются ни конечными, ни периодическими и служат для представления алгебраических иррациональных чисел порядка выше 2 и трансцендентных (неалгебраических) иррациональных чисел — таких как число e , представление которого в виде непрерывной дроби было найдено Эйлером (1707–1783):

$$e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \dots]. \quad (2.16)$$

Картина сходимости к e , представленная в таблице II.5, похожа на ту, что мы наблюдали в случае периодических непрерывных дробей: *приближение к иррациональному числу происходит через последовательность отношений, значение которых оказывается попеременно то меньше, то больше предельного значения, к которому сходится данная последовательность*. Вычисленная с точностью до десяти десятичных знаков подходящая дробь $\delta_6 \approx 2,717948718\dots$ отличается от истинного значения e всего лишь на 0,012%.

Таблица II.5. Сходимость к e

i	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
q_i	-	-	2	1	2	1	1	4	1
N_i	0	1	2	3	8	11	19	87	106
D_i	1	0	1	1	3	4	7	32	39
δ_i	-	-	2	3	$\frac{8}{3}$	$\frac{11}{4}$	$\frac{19}{7}$	$\frac{87}{32}$	$\frac{106}{39}$

Можно показать, что любая бесконечная РНД сходится к некоему пределу и что любое действительное число можно абсолютно однозначно разложить в регулярную непрерывную дробь. Если рассматривать разложение числа в РНД как «представление» этого числа в «системе» непрерывных дробей, то хорошо заметно сходство такого разложения с представлением числа в позиционной системе счисления — равно как и различия между ними. Для обоих представлений характерны неперемнная сходимость и однозначное соответствие числу. И наоборот, в каждой из этих систем любое число представляется совершенно однозначно. В обоих случаях конечные разложения соответствуют рациональным числам. В позиционной системе бесконечные периодические представления также соответствуют рациональным числам, тогда как в системе РНД такое представление указывает на то, что мы имеем дело с квадратичным иррациональным числом. Трансцендентные же иррациональные числа как в том, так и в другом случае выражаются, очевидно, бесконечными апериодическими представлениями. Приводимое ниже изящное выражение для трансцендентного числа π было найдено Брункером:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{9}{2 + \frac{25}{2 + \frac{49}{2 + \dots}}}}. \quad (2.17)$$

Значительный вклад в изучение непрерывных дробей внес Эйлер; ему же мы обязаны еще одним не менее изящным выражением, но уже для другого знаменитого трансцендентного числа, а именно для e :

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{2}{3 + \frac{3}{4 + \dots}}}}. \quad (2.18)$$

Непрерывные дроби позволяют по-новому взглянуть на бесконечные процессы — такие как позиционная система счисления, спирали и последовательности Фибоначчи. Однако прежде чем перейти к рассмотрению этих процессов, введем понятие обратноподходящей дроби.

Обратноподходящие дроби

Возьмем конечную непрерывную дробь

$$\phi = [q_0, q_1, q_2, \dots, q_{s-1}, q_s]$$

и запишем следующие равенства, двигаясь от ее конца к началу:

$$\rho_0 = q_s,$$

$$\rho_1 = [q_{s-1}, q_s] = q_{s-1} + \frac{1}{\rho_0},$$

$$\rho_2 = [q_{s-2}, q_{s-1}, q_s] = q_{s-2} + \frac{1}{\rho_{s-1}},$$

...

$$\rho_s = \phi.$$

Числа $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_s$ мы будем называть *обратноподходящими дробями*. Возвращаясь к непрерывной дроби $\phi = [4, 1, 3, 2]$, получаем

$$\rho_0 = 2,$$

$$\rho_1 = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2},$$

$$\rho_2 = 3 + \frac{2}{5} = \frac{17}{5},$$

$$\rho_3 = 1 + \frac{5}{17} = \frac{22}{17},$$

$$\phi = \rho_4 = 4 + \frac{17}{22} = \frac{105}{22} = \frac{1785}{374}.$$

Необходимость введения этого понятия и его смысл прояснятся несколько позднее, при рассмотрении *витых прямоугольников*, представляющих собой его геометрическую метафору.

Простые непрерывные дроби, с которым нам предстоит иметь дело в последующих главах, не всегда будут регулярными — например,

$$\sqrt{2} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2} \right]. \quad (2.19)$$

Сокращением ППД мы будем обозначать простые периодические непрерывные дроби, как регулярные, так и нерегулярные.

Приложение

Как доказать истинность равенства

$$\frac{5}{\sqrt{14}-2} = 2 + \frac{\sqrt{14}-2}{2}?$$

1) Положим

$$x = \frac{5}{\sqrt{14}-2}.$$

2) Умножив числитель и знаменатель на $\sqrt{14}+2$, получим

$$x = \frac{5(\sqrt{14}+2)}{10} = \frac{\sqrt{14}+2}{2};$$

следовательно, $2x - 2 = \sqrt{14}$, что дает

$$(x-1)^2 = \frac{14}{4}.$$

Теперь будем последовательно подставлять в полученное уравнение значения $x = 1, 2, 3, \dots$ до тех пор, пока значение в левой части не превысит значения в правой части:

$$x = 1 \quad \rightarrow \quad (x-1)^2 = 0,$$

$$x = 2 \quad \rightarrow \quad (x-1)^2 = 1,$$

$$x = 3 \quad \rightarrow \quad (x-1)^2 = 4 > \frac{14}{4}.$$

Наибольшее значение x , при котором значение левой части не превышает значения правой, равно 2; эта величина составляет целую часть числа x .

3) Следовательно, мы можем записать

$$x = \frac{\sqrt{14}+2}{2} = 2 + y,$$

где $y < 1$ есть дробная часть числа x . Решив уравнение для y , получим

$$y = \frac{\sqrt{14} - 2}{2},$$

то есть

$$\frac{5}{\sqrt{14} - 2} = 2 + \frac{\sqrt{14} - 2}{2}.$$

Резюме в формулах

Непрерывная дробь (НД), общий вид

$$\phi = q_0 + \frac{p_1}{q_1 + \frac{p_2}{q_2 + \frac{p_3}{q_3 + \dots \frac{p_n}{q_{n-1} + \frac{p_n}{q_n}}}}}.$$

Примеры. Конечная НД (величина n конечна):

$$\frac{105}{76} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{9}{2 + \frac{25}{2}}}.$$

Бесконечная НД (величина n бесконечна):

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{9}{2 + \frac{25}{2 + \frac{49}{2 + \dots}}}}.$$

Простые непрерывные дроби (ПНД): $p_i = 1$ для всех i

$$\phi = [q_0, q_1, q_2, \dots, q_n] = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \dots \frac{1}{q_{n-1} + \frac{1}{q_n}}}}},$$

$$[q_0, q_1, q_2, \dots, q_n] = [q_0, [q_1, q_2, \dots, q_n]] = q_0 + \frac{1}{[q_1, q_2, \dots, q_n]},$$

$$a[q_0, q_1, q_2, \dots] = \left[aq_0, \frac{q_1}{a}, aq_2, \frac{q_3}{a}, \dots \right].$$

Если q_i есть положительное целое число при всех i , то такая ПНД называется *регулярной непрерывной дробью* (РНД).

Примеры.

Конечная РНД (величина n конечна): $87/32 = [2, 1, 2, 1, 1, 4]$.

Бесконечная НД (величина n бесконечна): $e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, \dots]$.

Подходящие дроби

$$\delta_0 = q_0, \quad \delta_1 = q_0 + \frac{1}{q_1} = [q_0, q_1], \quad \delta_2 = [q_0, q_1, q_2] \quad \text{и т. д.}$$

Рекурсивные формулы для подходящей дроби:

$$\delta_i = [q_0, q_1, q_2, \dots, q_i] = \frac{N_i}{D_i},$$

$$N_{-1} = 1, \quad N_{-2} = 0, \quad D_{-1} = 0, \quad D_{-2} = 1,$$

$$N_i = N_{i-2} + q_i N_{i-1} \quad \text{и} \quad D_i = D_{i-2} + q_i D_{i-1}.$$

Формула Гюйгенса: $N_{i-1}D_i - N_iD_{i-1} = (-1)^i$.

Обратноподходящие дроби

$$\phi = [q_0, q_1, q_2, \dots, q_{s-1}, q_s],$$

$$\rho_0 = q_s,$$

$$\rho_1 = [q_{s-1}, q_s] = q_{s-1} + \frac{1}{\rho_0},$$

$$\rho_2 = [q_{s-2}, q_{s-1}, q_s] = q_{s-2} + \frac{1}{\rho_{s-1}},$$

...

$$\rho_s = \phi.$$

Полупериодические РНД с длиной неперидической части s и периодом t

$$\phi = [q_0, q_1, q_2, \dots, q_{s-1}, \alpha, \alpha', \alpha'', \alpha''', \dots, \alpha^{(t-1)},$$

$$\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha''', \dots, \alpha^{(t-1)}, \alpha, \alpha', \alpha'', \dots] =$$

$$= [q_0, q_1, q_2, \dots, q_{s-1}, (\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha''', \dots, \alpha^{(t-1)})].$$

Иррациональные квадратные корни: $\sqrt{N} = [\alpha, (\beta, \chi, \delta, \dots, \delta, \chi, \beta, \omega)]$,
где $\omega = 2\alpha$:

$$\sqrt{2} = [1, (2)], \quad \sqrt{3} = [1, (1, 2)], \quad \sqrt{5} = [2, (4)], \quad \sqrt{14} = [3, (1, 2, 1, 6)].$$

Периодические ПНД с периодом t

$$\begin{aligned} \phi &= [\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha''', \dots, \alpha^{(t-1)}, \alpha, \alpha', \alpha'', \alpha''', \dots, \alpha^{(t-1)}, \alpha, \alpha', \alpha'', \dots] = \\ &= [(\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha''', \dots, \alpha^{(t-1)})]. \end{aligned}$$

ГЛАВА III

Последовательности Фибоначчи

Последовательность Фибоначчи веками интриговала математиков, отчасти потому, что она имеет обыкновение обнаруживаться в самых неожиданных местах, но главным образом потому, что даже самый что ни на есть дилетант в теории чисел, не обладающий никакими специальными знаниями помимо элементарной арифметики, оказывается в состоянии исследовать ее удивительные свойства и открывать все новые и новые любопытные теоремы во всем их бесконечном разнообразии. Недавние разработки компьютерных программистов вновь пробудили интерес к этому ряду чисел, поскольку выяснилось, что его можно с успехом применять при сортировке данных, поиске информации [и] генерации случайных чисел.

(Мартин Гарднер)¹

Французский математик XIX века Эдуар Люка, опубликовавший монументальный четырехтомный труд, посвященный математическим играм и развлечениям, обнаружил в книге Леонардо Пизанского по прозвищу Фибоначчи «*Liber Abaci*»² некую числовую последовательность. И хотя сам Люка уже знал о существовании такой последовательности и даже немало времени посвятил ее исследованию, он все же признал первенство Леонардо, и этот ряд чисел приобрел широкую известность под именем *чисел Фибоначчи*. Очарованию чисел Фибоначчи оказались подвержены многие поколения как серьезных математических теоретиков, так и практикующих любителей; бесчисленные проявления этой числовой последовательности мы можем наблюдать в расположении семян в цветках подсолнечника и сосновых шишках, в божественном сечении, электрических цепях, удивительной спирали Бернулли и многих других естественных и искусственных

¹*Mathematical Circus* (Middlesex: Penguin Books, 1979), p. 155.

²«Книга абака» (лат.) — *Прим. перев.*

феноменах. Чуть ли не каждый день обнаруживаются какие-то новые или заново открываются забытые старые свойства числового ряда Фибоначчи; если собрать все эти открытия вместе, то наберется материала на несколько солидных томов. Создаются даже клубы любителей Фибоначчи, с 1963 года Ассоциацией Фибоначчи издается ежеквартальный журнал «The Fibonacci Quarterly»³ под редакцией Вернера Э. Хогарта из Колледжа штата Калифорния в Сан-Хосе. Что же касается настоящей книги, то глава о числах Фибоначчи вошла сюда по той простой причине, что этот числовой ряд имеет самое непосредственное отношение к исследованию рекурсивных процессов, в особенности тех из них, что порождают гномонные, или самоподобные, фигуры — такие как геометрические фракталы и их спиральные огибающие. Мы также полагаем, что нам удалось внести некоторый скромный вклад в данную область математических исследований, хотя в ее теперешнем крайне неупорядоченном состоянии достоверно оценить степень новизны чего бы то ни было весьма и весьма затруднительно.

Классическая последовательность Фибоначчи (ПФ) начинается с двух единиц, а каждый последующий ее член равен сумме двух непосредственно предшествующих ему членов. Получаемый при этом ряд чисел имеет следующий вид:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

Если продолжить такую последовательность влево, допустив существование отрицательных членов, то получится ряд, бесконечный в обоих направлениях:

$$\dots - 21, 13, -8, 5, -3, 2, -1, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

Этот ряд оказывается симметричным относительно нуля, если не считать того обстоятельства, что каждый четный его член слева от нуля отрицателен. Если же построить последовательность чисел, каждое из которых равно разности между двумя соседними числами Фибоначчи (назовем ее *гномонной последовательностью Фибоначчи*), то обнаружится, что полученная последовательность в точности совпадает с исходным рядом Фибоначчи, за исключением небольшого сдвига «по фазе». Можно сказать, что последовательность Фибоначчи *гомогномна*. Существуют многочисленные обобщения числового ряда Фибоначчи, среди которых числа Люка, числа Трибоначчи, придуманные Марком Фейнбергом, и др. Мы ограничимся одним простым обобщением, которое, на наш взгляд, наиболее удобно при рассмотрении свойств спиралей, а также некоторых других интересных математических феноменов и рукотворных объектов.

³«Ежеквартальный журнал Фибоначчи» (англ.) — Прим. перев.

Таблица III.1. Значения $F_{m,n}$ при $m = 1, 2, 1/\sqrt{2}$ и $n = -4 \div 5$										
n	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
m										
1	-3	2	-1	1	0	1	1	2	3	5
2	-12	5	-2	1	0	1	2	5	12	29
$1/\sqrt{2}$	$-5/(2\sqrt{2})$	$3/2$	$-1/\sqrt{2}$	1	0	1	$1/\sqrt{2}$	$3/2$	$5/(2\sqrt{2})$	$11/4$

Рекурсивное определение

Последовательность Фибоначчи порядка m , где m — действительное положительное число, определяется как последовательность, члены которой задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} F_{m,0} &= 0, & F_{m,1} &= 1, \\ F_{m,n+2} &= F_{m,n} + mF_{m,n+1}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

В качестве примера в таблице III.1 даны последовательности порядка 1, 2 и $1/\sqrt{2}$ для значений n от -4 до 5.

Затравка и гномонные числа

При известном порядке последовательности Фибоначчи m величина Φ_m определяется следующим образом:

$$m = \Phi_m - \frac{1}{\Phi_m}, \quad \text{где } \Phi_m > 1. \quad (3.2)$$

Отсюда следует, что

$$\Phi_m^2 - m\Phi_m - 1 = 0, \quad (3.3a)$$

$$\Phi_m = \frac{\sqrt{4 + m^2} + m}{2}, \quad \frac{1}{\Phi_m} = \frac{\sqrt{4 + m^2} - m}{2},$$

$$\Phi_m + \frac{1}{\Phi_m} = \sqrt{4 + m^2}. \quad (3.3b)$$

Можно также записать

$$\Phi_m = mD_m, \quad \text{где } D_m = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4}{m^2}} \right), \quad (3.3c)$$

$$\Phi_m^2 = \frac{D_m}{D_m - 1}, \quad D_m = \frac{\Phi_m^2}{\Phi_m^2 - 1}. \quad (3.3d)$$

Руководствуясь соображениями, которые прояснятся ниже, будем называть величину Φ_m *затравочным числом* числа m , а число m — *зномонным числом* числа Φ_m .

Примеры:

$$\Phi_1 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}, \quad \Phi_2 = 1 + \sqrt{2}, \quad \Phi_{1/\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Определение $F_{m,n}$ в явном виде

В уравнениях (3.1) число $F_{m,n}$ определяется рекурсивно. Ниже мы предлагаем *явную* формулировку через затравочное число Φ_m . Возможно, читатель пожелает самостоятельно доказать по индукции, что разностное уравнение

$$F_{m,n+2} = F_{m,n} + \left(\Phi_m - \frac{1}{\Phi_m} \right) F_{m,n+1}$$

допускает решение

$$F_{m,n} = A \left(\Phi_m^n - \left(\frac{-1}{\Phi_m} \right)^n \right),$$

из которого следует, что $F_{m,0} = 0$. Установив «граничное условие» $F_{m,1} = 1$, получим явное определение $F_{m,n}$:

$$F_{m,n} = \frac{\Phi_m^n - (-1/\Phi_m)^n}{\Phi_m + 1/\Phi_m}. \quad (3.4a)$$

В общем виде, положив $F_{m,0} = 0$ и $F_{m,1} = k$, получим

$$F_{m,n} = k \frac{\Phi_m^n - (-1/\Phi_m)^n}{\Phi_m + 1/\Phi_m}. \quad (3.4b)$$

С учетом уравнений (3.2) и (3.3) выражение (3.4a) преобразуется к виду:

$$F_{m,n} = \frac{1}{\sqrt{4+m^2}} \left(\left(\frac{m + \sqrt{4+m^2}}{2} \right)^n - \left(\frac{m - \sqrt{4+m^2}}{2} \right)^n \right). \quad (3.5)$$

В частном случае при $m = 1$:

$$F_{1,n} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right); \quad (3.6a)$$

первым это выражение получил де Муавр в 1718 году.

Следующее выражение, описывающее частный случай $m = 2$, было впервые получено английским математиком Джоном Пеллом (1610–1685):

$$F_{2,n} = \frac{1}{2\sqrt{2}}((1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n). \quad (3.6b)$$

В качестве дополнительного упражнения читателю предлагается также доказать весьма важное утверждение

$$\Phi_m^n = F_{m,n-1} + F_{m,n}\Phi_m, \quad (3.7)$$

из которого следует, что

$$\sqrt[n]{F_{m,n-1} + F_{m,n} \sqrt[n]{F_{m,n-1} + F_{m,n} \sqrt[n]{F_{m,n-1} + F_{m,n} \sqrt[n]{\dots}}}} \rightarrow \Phi_m. \quad (3.8a)$$

В частности,

$$\sqrt{1 + m \sqrt{1 + m \sqrt{1 + m \sqrt{\dots}}}} \rightarrow \Phi_m. \quad (3.8b)$$

Кроме того, из (3.7) также следует, что

$$\Phi_m = \frac{F_{m,n} + F_{m,n+1}\Phi_m}{F_{m,n-1} + F_{m,n}\Phi_m} \quad \text{при любом } n. \quad (3.8c)$$

Случай $m = 1$ подробно исследуется в главе VI. В случае $m = 2$ имеем $\Phi_2 = 1 + \sqrt{2}$, и уравнение (3.7) записывается как

$$\Phi_2^n = F_{2,n-1} + F_{2,n}\Phi_2.$$

Таким образом, последовательность неотрицательных степеней Φ_2 имеет вид:

$$1, \quad \Phi_2, \quad 1 + 2\Phi_2, \quad 2 + 5\Phi_2, \quad 5 + 12\Phi_2, \quad 12 + 29\Phi_2, \quad \dots \quad (3.9a)$$

Целочисленные коэффициенты в приведенной последовательности (0, 1, 2, 5, 12, 29, ...) являются членами последовательности Фибоначчи порядка $m = 2$. Можно продолжить эту последовательность влево, распространив ее на отрицательные степени Φ_2 :

$$\dots, \quad 5 - 2\Phi_2, \quad -2 + \Phi_2, \quad 1, \quad \Phi_2, \quad 1 + 2\Phi_2, \quad 2 + 5\Phi_2, \quad \dots \quad (3.9b)$$

Подставив в эту последовательность числовое значение Φ_2 , получим

$$\dots, \quad 3-2\sqrt{2}, \quad -1+\sqrt{2}, \quad 1, \quad 1+\sqrt{2}, \quad 3+2\sqrt{2}, \quad 7+5\sqrt{2}, \quad \dots \quad (3.9c)$$

Отметим, что если T_i, T_{i+1}, T_{i+2} суть любые три последовательных члена такого ряда, то верны равенства

$$\Phi_2 T_i = T_{i+1} \quad \text{и} \quad T_i + 2T_{i+1} = T_{i+2}.$$

В соответствии с уравнением (3.8) имеем

$$\Phi_2 = \frac{1 + 2\Phi_2}{\Phi_2} = \frac{2 + 5\Phi_2}{1 + 2\Phi_2} = \frac{5 + 12\Phi_2}{2 + 5\Phi_2} = \frac{12 + 29\Phi_2}{5 + 12\Phi_2} = \dots$$

или

$$\begin{aligned} &= \frac{3 - 2\sqrt{2}}{-7 + 5\sqrt{2}} = \frac{-1 + \sqrt{2}}{3 - 2\sqrt{2}} = \frac{1}{-1 + \sqrt{2}} = \\ &= 1 + \sqrt{2} = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = \frac{2 + 5\sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}} = \dots \end{aligned} \quad (3.10)$$

Эти результаты можно обобщить на любое значение m , т. е.

$$\Phi_m T_i = T_{i+1} \quad \text{и} \quad T_i + mT_{i+1} = T_{i+2}.$$

К частному случаю $m = 1$ мы вернемся в дальнейшем при рассмотрении золотого сечения. Положив

$$\psi_{m,n} = \frac{F_{m,n+1}}{F_{m,n}}, \quad (3.11)$$

получим из уравнений (3.4) следующий результат для больших значений n :

$$\psi_{m,n} = \frac{F_{m,n+1}}{F_{m,n}} = \frac{\Phi_m^{n+1} - (-1/\Phi_m)^{n+1}}{\Phi_m^n - (-1/\Phi_m)^n} \approx \Phi_m$$

или

$$\psi_{m,n} = \frac{F_{m,n+1}}{F_{m,n}} \xrightarrow{\text{при больших } n} \Phi_m. \quad (3.12a)$$

Далее установим, что $F_{m,n} = N_{n-2} = D_{n-1}$, где N_n и D_n являются, соответственно, числителем и знаменателем n -й подходящей дроби непрерывной дроби $[m, m, m, \dots]$. Согласно теореме Гюйгенса (см. главу II) $N_{n-1}D_n - N_nD_{n-1} = (-1)^n$. Таким образом,

$$(F_{m,n+1})^2 - F_{m,n}F_{m,n+2} = (-1)^n \quad \text{или} \quad (F_{m,n+1})^2 = F_{m,n}F_{m,n+2} + (-1)^n;$$

отсюда получаем

$$\begin{aligned}\psi_{m,n} - \frac{1}{\psi_{m,n}} &= \frac{F_{m,n+1}}{F_{m,n}} - \frac{F_{m,n}}{F_{m,n+1}} = \frac{(F_{m,n+1})^2 - (F_{m,n})^2}{F_{m,n}F_{m,n+1}} = \\ &= \frac{F_{m,n}(F_{m,n+2} - F_{m,n}) + (-1)^n}{F_{m,n}F_{m,n+1}} = \frac{m(F_{m,n}F_{m,n+1}) + (-1)^n}{F_{m,n}F_{m,n+1}}, \\ \psi_{m,n} - \frac{1}{\psi_{m,n}} &= m + \frac{(-1)^n}{F_{m,n}F_{m,n+1}},\end{aligned}$$

то есть

$$\psi_{m,n} - \frac{1}{\psi_{m,n}} \xrightarrow[\text{при больших } n]{} m. \quad (3.12b)$$

Например,

$$\begin{aligned}\psi_{1,6} &= \frac{13}{8}, & \frac{13}{8} - \frac{8}{13} &= \frac{105}{104} = 1 + \frac{1}{104} \approx 1, \\ \psi_{2,5} &= \frac{70}{29}, & \frac{70}{29} - \frac{29}{70} &= \frac{4059}{2030} = 2 - \frac{1}{2030} \approx 2;\end{aligned}$$

кроме того, из уравнений (3.4) имеем

$$\frac{\Phi_m^{n+1}}{\Phi_m^2 + 1} = \frac{\Phi_m^{n+1}}{m\Phi_m + 2} \xrightarrow[\text{при больших } n]{} F_{m,n}. \quad (3.12c)$$

Например,

$$\begin{aligned}\frac{\Phi_1^{16}}{\Phi_1 + 2} &\approx \frac{2\,206}{3,618034} \approx 609,7234 \approx 610 = F_{1,15}, \\ \frac{\Phi_2^8}{2\Phi_2 + 2} &\approx \frac{1\,154}{6,828427} \cong 169 = F_{2,7}.\end{aligned}$$

В качестве самостоятельного упражнения читателю предлагается убедиться в том, что вышеприведенный результат остается истинным вне зависимости от того, какое значение присвоить члену $F_{m,1}$ (отличное от 1 в определении (3.1)). Можно также показать, используя выражение (3.4а) для $F_{m,n}$, что

$$F_{m,2n+1} = F_{m,n}^2 + F_{m,n+1}^2, \quad (3.13)$$

$$F_{m,2n+2} = \frac{F_{m,n+2}^2 - F_{m,n}^2}{m}. \quad (3.14)$$

Выражения (3.13) и (3.14) вместе с начальными условиями $F_{m,0} = 0$, $F_{m,1} = 1$ можно использовать как альтернативный рекурсивный метод для построения последовательностей Фибоначчи.

Альтернативное явное определение

Ниже предлагается другой способ определения $F_{m,i}$ в явном виде. Обозначим через $\binom{i}{j}$ биномиальный коэффициент

$$\frac{i!}{j!(i-j)!}. \quad (3.15)$$

Фундаментальное свойство этой функции от целочисленных i и j имеет вид:

$$\binom{i+1}{j+1} = \binom{i}{j} + \binom{i}{j+1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (3.16)$$

Определим полином $P_i(x)$ как

$$P_i(x) = \sum_j \binom{i-j}{j} x^j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, i; \quad (3.17a)$$

применив свойство (3.16), можно легко показать, что

$$P_{i+1}(x) = xP_{i-1}(x) + P_i(x), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (3.17b)$$

Это, в свою очередь, позволяет записать (при $F_{m,0} = 0$)

$$F_{m,i+1} = m^i P_i \left(\frac{1}{m^2} \right). \quad (3.18a)$$

Это уравнение можно доказать по индукции следующим образом:

- 1) При $i = 0$ и $i = 1$ проверка истинности уравнения не представляет особой сложности.
- 2) Исходя из условий определения (3.1) и допустив, что уравнение истинно при $i = n$ и $i = n+1$, можно записать

$$\begin{aligned} F_{m,n+2} &= m^{n-1} P_{n-1} \left(\frac{1}{m^2} \right) + m^{n+1} P_n \left(\frac{1}{m^2} \right) = \\ &= m^{n+1} \left[\frac{1}{m^2} P_{n-1} \left(\frac{1}{m^2} \right) + P_n \left(\frac{1}{m^2} \right) \right], \quad (3.18b) \\ F_{m,n+2} &= m^{n+1} P_{n+1} \left(\frac{1}{m^2} \right). \end{aligned}$$

Утверждение (3.18a), таким образом, доказано для $i = n + 2$ и, следовательно, истинно для всех значений i . В явном виде его можно записать так:

$$F_{m,n+1} = m^n \sum_j \binom{n-j}{j} \left(\frac{1}{m^2}\right)^j, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (3.18c)$$

Таблица III.2. Биномиальные коэффициенты

		$j \longrightarrow$						
		0	1	2	3	4	5	6
$i \downarrow$	0	1						
	1	1	1					
	2	1	2	1				
	3	1	3	3	1			
	4	1	4	6	4	1		
	5	1	5	10	10	5	1	
	6	1	6	15	20	15	6	1
	7	1	7	21	35	35	...	
		$\binom{i}{j}$						

		$j \longrightarrow$			
		0	1	2	3
$i \downarrow$	0	1			
	1	1			
	2	1	1		
	3	1	2		
	4	1	3	1	
	5	1	4	3	
	6	1	5	6	1
	7	1	6	10	4
		$\binom{i-j}{j}$			

Примеры. Используя таблицу коэффициентов $\binom{i-j}{j}$ (см. табл. III.2), можно вычислить следующие значения $F_{m,j}$:

$$F_{1,5} = 1 + 3 + 1 = 5,$$

$$F_{3,3} = 3^2(1 + 1/9) = 10,$$

$$F_{2,3} = 2^2(1 + 1/4) = 5,$$

$$F_{3,4} = 3^3(1 + 2/9) = 33,$$

$$F_{2,4} = 2^3(1 + 2/4) = 12,$$

$$F_{3,5} = 3^4(1 + 3/9 + 1/81) = 109.$$

$$F_{2,5} = 2^4(1 + 3/4 + 1/16) = 29,$$

Отметим, что сумма чисел в i -м ряду правой таблицы равна $F_{1,i}$. Возможно, читатель пожелает также убедиться в истинности следующих утверждений:

$$\left. \begin{aligned} F_{m,2n} &= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n+j}{2j+1} m^{2j+1} \\ F_{m,2n+1} &= \sum_{j=0}^n \binom{n+j}{2j} m^{2j} \end{aligned} \right\}, \quad n, j = 0, 1, 2, \dots \quad (3.18d)$$

Моногномонная простая периодическая дробь

По определению, все неполные частные (q_i) регулярной непрерывной дроби являются целыми числами. В простых же непрерывных дробях (все числители которых равны 1) вполне могут присутствовать нецелочисленные и даже — как мы увидим чуть позже — комплексные «частные». Хотя в рамках алгоритма деления термин *частное* и содержит некоторую целочисленную коннотацию, мы все же будем и далее использовать его в общем случае. Такие непрерывные дроби, продолжая оставаться простыми, уже не могут считаться регулярными. Тем не менее, мы позволим себе и дальше записывать их в квадратных скобках, как показано ниже:

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} = \left[1, 1, \dots, 1, \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right], \quad (3.19a)$$

$$\sqrt{2} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \dots\right], \quad (3.19b)$$

$$\frac{\sqrt{3}+1}{2} = \left[1, 2, 1, 2, \dots, 1, 2, \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right], \quad (3.19c)$$

$$\frac{\sqrt{3}+1}{2} = [1, 2, 1, 2, \dots, 1, \sqrt{3}+1]. \quad (3.19d)$$

Несмотря на наличие окончаний (там, где они есть), выражения в квадратных скобках представляют собой строго периодические простые непрерывные дроби (ППД). Первые две ППД с периодом 1 называются *моногномонными*, две оставшиеся (с периодом 2) — *дигномонными*. В общем виде, ППД с периодом N будем называть N -гномонной.

Ниже будут рассмотрены только дигномонные и моногномонные ППД, поскольку они имеют непосредственное отношение к исследованию определенных классов итерационных процессов — таких как спирали и лестничные электрические схемы. Сравнив рекурсивные формулы (2.12) для непрерывных дробей

$$N_i = N_{i-2} + q_i N_{i-1}, \quad D_i = D_{i-2} + q_i D_{i-1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

где

$$N_{-1} = D_{-2} = 1, \quad N_{-2} = D_{-1} = 0, \quad (3.20a)$$

с рекурсивной формулой

$$F_{m,i+2} = F_{m,i} + m F_{m,i+1}, \quad \text{где } F_{m,0} = 0, \quad F_{m,1} = 1, \quad (3.20b)$$

и положив $q_0 = q_1 = q_2 = \dots = q_{i-1} = m$, получаем

$$F_{m,i} = N_{i-2} = D_{i-1} \quad (3.20c)$$

и

$$\delta_i = \frac{N_{i-2} + q_i N_{i-1}}{D_{i-2} + q_i D_{i-1}} = \frac{F_{m,i} + q_i F_{m,i+1}}{F_{m,i-1} + q_i F_{m,i}}. \quad (3.20d)$$

Рассмотрим простую непрерывную дробь

$$\phi = \underbrace{[m, m, m, \dots, m, m, \dots, m]}_n, \phi_\tau]; \quad (3.21)$$

положительное число ϕ_τ в такой записи называется *окончанием* и может быть как рациональным, так и иррациональным. Подходящие дроби этой непрерывной дроби (начиная с крайнего левого числа в квадратных скобках) имеют вид:

$$\begin{aligned} \delta_0 &= [m] = \frac{F_{m,0} + mF_{m,1}}{F_{m,-1} + mF_{m,0}} = \frac{F_{m,2}}{F_{m,1}} = m, \\ \delta_1 &= [m, m] = \frac{F_{m,1} + mF_{m,2}}{F_{m,0} + mF_{m,1}} = \frac{F_{m,3}}{F_{m,2}}, \\ &\dots \\ \delta_i &= \underbrace{[m, m, m, \dots, m]}_{i+1} = \frac{F_{m,i} + mF_{m,i+1}}{F_{m,i-1} + mF_{m,i}} = \frac{F_{m,i+2}}{F_{m,i+1}}, \\ &\dots \end{aligned} \quad (3.22)$$

Начав же с последнего числа в квадратных скобках, т. е. с окончания или, что в данном случае то же самое, с *затравки*, можно записать следующие *обратноподходящие дроби* ρ_j :

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \phi_\tau, \\ \rho_1 &= [m, \phi_\tau] = \frac{F_{m,1} + \phi_\tau F_{m,2}}{F_{m,0} + \phi_\tau F_{m,1}}, \\ \rho_2 &= [m, m, \phi_\tau] = \frac{F_{m,2} + \phi_\tau F_{m,1}}{F_{m,1} + \phi_\tau F_{m,2}}, \\ &\dots \\ \rho_j &= \underbrace{[m, m, m, \dots, m]}_j, \phi_\tau] = \frac{F_{m,j} + \phi_\tau F_{m,j+1}}{F_{m,j-1} + \phi_\tau F_{m,j}}, \\ &\dots ; \end{aligned} \quad (3.23)$$

то есть

$$\phi = \rho_n = \delta_n = \underbrace{[m, m, m, \dots, m]}_n, \phi_\tau] = \frac{F_{m,n} + \phi_\tau F_{m,n+1}}{F_{m,n-1} + \phi_\tau F_{m,n}}. \quad (3.24)$$

В качестве упражнения читателю предлагается самостоятельно доказать следующее утверждение: если окончание

$$\phi_\tau = \psi_{m,k} = \frac{F_{m,k+1}}{F_{m,k}},$$

то

$$\underbrace{[m, m, m, \dots, m]}_n, \psi_{m,k}] = \psi_{m,k+n}.$$

Моногномонная ППД считается *правильно оконченной* (иначе: *дробью с правильной затравкой*), если ее окончание ϕ_τ равно числу Φ_m , определенному в уравнении (3.2). Отсюда следует, что

$$\Phi_m = [m, \Phi_m] = [m, [m, \Phi_m]] = [m, m, \Phi_m] \quad (3.25)$$

и что при любом n истинно равенство

$$\Phi_m = \underbrace{[m, m, m, \dots, m]}_n, \Phi_m]. \quad (3.26)$$

Дигномонная простая периодическая дробь

Возьмем два числа:

$$\phi_0 = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}, \quad \phi_1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}.$$

Эти числа являются решениями уравнений

$$\phi_0 = 2 + \frac{1}{\phi_1} = [2, \phi_1], \quad \phi_1 = 3 + \frac{1}{\phi_0} = [3, \phi_0], \quad (3.27)$$

которые дают следующие шесть дигномонных ППД:

$$\phi_0 = [2, 3, 2, 3, \dots], \quad (3.28a)$$

$$\phi_1 = [3, 2, 3, 2, \dots], \quad (3.28b)$$

$$\phi_0 = [2, 3, 2, 3, \dots, 2, 3, \phi_0], \quad (3.28c)$$

$$\phi_0 = [2, 3, 2, 3, \dots, 3, 2, \phi_1], \quad (3.28d)$$

$$\phi_1 = [3, 2, 3, 2, \dots, 2, 3, \phi_0], \quad (3.28e)$$

$$\phi_1 = [3, 2, 3, 2, \dots, 3, 2, \phi_1]. \quad (3.28f)$$

Дроби (3.28a) и (3.28b) бесконечны. В уравнениях (3.28c) и (3.28f), начав с последнего неполного частного, т.е. с окончания, и двигаясь к началу дроби, мы можем наблюдать следующую картину: при любом четном количестве итераций обратноподходящая дробь всегда оказывается равной своему окончанию. В уравнениях же (3.28d) и (3.28e) ситуация несколько иная: при любом *нечетном* количестве итераций обратноподходящая дробь также оказывается равной окончанию, но не своему собственному, а окончанию другой дроби из пары.

Уравнения (3.28) можно переписать в общем виде, используя особые — назовем их *обобщающими* — символы. Обозначим первое неполное частное через α , второе — через α' , третье — снова через α и т.д. Аналогичным образом буква ω будет представлять предпоследнее перед произвольным окончанием ϕ_τ неполное частное, а ω' — последнее, как показано в (3.29). Если даны неполные частные q_0, q_1 , то любому из этих частных можно назначить любой из обобщающих символов α, α' с одним лишь ограничением: если символом α обозначить частное q_0 , то символом α' следует обозначить частное q_1 , и наоборот. *Независимо от этого обозначения*, каждый из символов ω, ω' может быть присвоен какому-либо из частных с учетом аналогичного ограничения. Итак, запишем

$$\phi = [\alpha, \alpha', \alpha, \dots, \omega, \omega', \phi_\tau]. \quad (3.29)$$

Кроме того, определим $\phi_{\alpha, \alpha'}$ и $\phi_{\alpha', \alpha}$ следующим образом:

$$\phi_{\alpha, \alpha'} = \alpha + \frac{1}{\phi_{\alpha', \alpha}}, \quad \phi_{\alpha', \alpha} = \alpha' + \frac{1}{\phi_{\alpha, \alpha'}}. \quad (3.30a)$$

Вследствие общего характера величин $\phi_{\alpha, \alpha'}$ и $\phi_{\alpha', \alpha}$, одно из вышеприведенных выражений оказывается, в сущности, излишним. Опустим его и запишем

$$\phi_{\alpha, \alpha'} = [\alpha, \phi_{\alpha', \alpha}] = [\alpha, \alpha', \phi_{\alpha, \alpha'}] = \quad (3.30b)$$

$$= [\alpha, \alpha', \dots, \omega, \omega', \phi_{\omega, \omega'}] = \quad (3.30c)$$

$$= [\alpha, \alpha', \alpha, \alpha', \dots]. \quad (3.30d)$$

Из (3.30а) следует, что

$$\phi_{\alpha,\alpha'}^2 - \alpha\phi_{\alpha,\alpha'} - \frac{\alpha}{\alpha'} = 0. \quad (3.31)$$

Положив $\alpha\alpha' = \omega\omega' = m^2$ и решив уравнение для действительных положительных значений $\phi_{\alpha,\alpha'}$, получим

$$\phi_{\alpha,\alpha'} = \alpha D_m = \frac{\alpha}{m} \Phi_m = \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha'}} \Phi_m, \quad (3.32a)$$

$$\Phi_m^2 = \phi_{\alpha,\alpha'} \phi_{\alpha',\alpha}, \quad (3.32b)$$

$$\alpha\phi_{\alpha,\alpha'} = m\Phi_m = \Phi_m^2 - 1, \quad (3.32c)$$

где

$$\Phi_m = mD_m, \quad D_m = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4}{m^2}} \right). \quad (3.33)$$

Дигномонная ППД считается *правильно оконченной*, если $\phi_\tau = \phi_{\omega,\omega'}$, как в (3.19а, с, d), (3.28с, d, е, f) и (3.30b, с).

Произвольно оконченные простые периодические дроби

Ниже вновь приводится полученный нами ранее (см. формулу (3.24)) результат, позволяющий вычислить значение обратноподходящей дроби произвольно оконченной моногномонной ППД:

$$\phi = \rho_n = \delta_n = \underbrace{[m, m, m, \dots, m]}_n, \phi_\tau] = \frac{F_{m,n} + \phi_\tau F_{m,n+1}}{F_{m,n-1} + \phi_\tau F_{m,n}}. \quad (3.34)$$

Например,

$$\phi = [1, 1, 1, 1, 1, 2] = \frac{F_{1,5} + 2F_{1,6}}{F_{1,4} + 2F_{1,5}} = \frac{5 + 16}{3 + 10} = \frac{21}{13} \approx 1,6153846.$$

При больших значениях n , вне зависимости от окончания ϕ_τ , это выражение принимает вид:

$$\rho_n = \underbrace{[m, m, m, \dots, m]}_n, \phi_\tau] = \frac{1 + \phi_\tau \psi_{m,n}}{\phi_\tau + 1/\psi_{m,n-1}} \approx \Phi_m. \quad (3.35)$$

При $m > 1$ сходимость достигается довольно быстро.

Рассмотрим следующую произвольно оконченную дигномонную ППД, окончание которой ϕ_τ есть произвольное положительное число:

$$\phi = [\underbrace{\alpha, \alpha', \alpha, \alpha', \dots, \mu, \mu', \mu, \mu', \dots, \omega, \omega'}_n, \phi_\tau]. \quad (3.36)$$

Случай 1. n — четное, т. е. $\alpha = \omega$. Запишем

$$\phi = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha\alpha'}} \left[\underbrace{\sqrt{\alpha\alpha'}, \sqrt{\alpha\alpha'}, \dots, \sqrt{\alpha\alpha'}}_n, \frac{\sqrt{\alpha\alpha'}}{\alpha} \phi_\tau \right];$$

положив $\sqrt{\alpha\alpha'} = \sqrt{\omega\omega'} = m$, получаем

$$\phi = \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha'}} \left[\underbrace{m, m, m, \dots, m}_n, \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \phi_\tau \right]. \quad (3.37)$$

Случай 2. n — нечетное, т. е. $\alpha' = \omega$. Запишем

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha\alpha'}} \left[\underbrace{\sqrt{\alpha\alpha'}, \sqrt{\alpha\alpha'}, \dots, \sqrt{\alpha\alpha'}}_n, \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha\alpha'}} \phi_\tau \right], \\ \phi &= \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha'}} \left[\underbrace{m, m, m, \dots, m}_n, \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \phi_\tau \right]. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Таким образом, при любом значении n справедливо следующее равенство:

$$\begin{aligned} \phi &= [\underbrace{\alpha, \alpha', \alpha, \dots, \omega, \omega'}_n, \phi_\tau] = \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha'}} \left[\underbrace{m, m, m, \dots, m}_n, \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \phi_\tau \right] = \\ &= \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha'}} \frac{F_{m,n} + F_{m,n+1} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \phi_\tau}{F_{m,n-1} + F_{m,n} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \phi_\tau}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Теперь можно определить подходящую дробь δ_i (начиная с левого конца дроби (3.36)):

$$\delta_i = [\underbrace{\alpha, \alpha', \alpha, \dots, \mu, \mu'}_{i+1}] = \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha'}} [\underbrace{m, m, m, \dots, m}_{i+1}] = \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha'}} \psi_{m,i+1}. \quad (3.40)$$

Пример. Вычислим значение дроби

$$\phi = \left[1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2} \right].$$

Обратившись к таблице III.1 при $m = 1/\sqrt{2}$, получим

$$\phi = \sqrt{\frac{1}{1/2} \frac{F_{(1/\sqrt{2}),5}}{F_{(1/\sqrt{2}),4}}} = \sqrt{2} \times \frac{11}{4} \times \frac{2\sqrt{2}}{5} = \frac{11}{5};$$

верно также и то, что обратноподходящая дробь (считая с правого конца дроби (3.36)) равна

$$1 + \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{1+2}} = \frac{11}{5}.$$

Кроме того, имеем

$$\begin{aligned} \rho_j &= [\underbrace{\mu, \mu', \dots, \omega, \omega'}_j, \phi_\tau] = \sqrt{\frac{\mu}{\mu'}} \left[\underbrace{m, m, m, \dots, m}_n, \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \phi_\tau \right] = \\ &= \sqrt{\frac{\mu}{\mu'}} \frac{F_{m,j} + F_{m,j+1} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \phi_\tau}{F_{m,j-1} + F_{m,j} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \phi_\tau}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Пример. Вычислим значение дроби $\phi = \left[1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \sqrt{2} \right]$:

$$\phi = \sqrt{2} \frac{5/(2\sqrt{2}) + 11/4}{3/2 + 5/(2\sqrt{2})} = \frac{5\sqrt{2} + 11}{3\sqrt{2} + 5}.$$

При большом n , независимо от окончания ϕ_τ ,

$$\phi = [\underbrace{(\alpha, \alpha', \alpha, \alpha', \dots, \omega, \omega')}_n, \phi_\tau] \approx \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha'}} \Phi_m \approx \phi_{\alpha, \alpha'}. \quad (3.42)$$

В главе о витых фигурах будет продемонстрирована потрясающая геометрическая иллюстрация данного утверждения.

Когда m очень мало: от чисел Фибоначчи к гиперболическим и тригонометрическим функциям

Случай, когда значение m очень мало, хотя и представляется, на первый взгляд, несколько академичным, оказывается на удивление полезен при рассмотрении определенных физических феноменов — таких, например, как поведение электрического сигнала в линиях передачи. Рассмотрим сначала затравочное число Φ_m . Согласно уравнению (3.3а) имеем

$$\Phi_m = \frac{\sqrt{4 + m^2} + m}{2}, \quad \frac{1}{\Phi_m} = \frac{\sqrt{4 + m^2} - m}{2}.$$

При очень малом m величина m^2 оказывается пренебрежимо малой по сравнению с 4, в результате чего получаем

$$\Phi_m \approx 1 + \frac{m}{2}, \quad \frac{1}{\Phi_m} \approx 1 - \frac{m}{2}. \quad (3.43a)$$

Перепишем уравнение (3.43а) для четных значений n :

$$F_{m,n} = \frac{\Phi_m^n - (-1/\Phi_m)^n}{\Phi_m + 1/\Phi_m} = \frac{\Phi_m^n - 1/\Phi_m^n}{\Phi_m + 1/\Phi_m} \approx \frac{\left(1 + \frac{m}{2}\right)^n - \left(1 - \frac{m}{2}\right)^n}{1 + \frac{m}{2} + 1 - \frac{m}{2}}.$$

Малость величины $m/2$ позволяет записать

$$\left(1 + \frac{m}{2}\right)^n = e^{\frac{m}{2} \times n} = e^{\frac{mn}{2}} \quad \text{и} \quad \left(1 - \frac{m}{2}\right)^n = e^{-\frac{mn}{2}}; \quad (3.43b)$$

следовательно, для четных значений n

$$F_{m,n} \approx \frac{e^{\frac{mn}{2}} - e^{-\frac{mn}{2}}}{2} = \sinh \frac{mn}{2}. \quad (3.43c)$$

Рассуждая аналогичным образом, при нечетных n получаем выражение:

$$F_{m,n} \approx \frac{e^{\frac{mn}{2}} + e^{-\frac{mn}{2}}}{2} = \cosh \frac{mn}{2}. \quad (3.43d)$$

Хорошо известно, что $\sinh jx = j \sin x$, а $\cosh jx = \cos x$ ($j = \sqrt{-1}$). Заменяя в уравнениях (3.43с) и (3.43d) m на jm , получим

$$F_{jm,n} \approx j \sin \frac{mn}{2} \quad \text{для четных } n, \quad (3.43e)$$

$$F_{jm,n} \approx \cos \frac{mn}{2} \quad \text{для нечетных } n. \quad (3.43f)$$

Приложение: полигномонные простые периодические дроби

Как уже говорилось, мы будем опираться в наших дальнейших рассуждениях только на моногномонные и дигномонные ППД. Тем не менее, отметим, что

$$\phi_{\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha''', \dots, \alpha^{(n)}} = [\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha''', \dots, \omega, \phi_{\omega', \omega'', \omega''', \dots, \omega^{(n)}, \omega}], \quad (3.44)$$

$$\phi_{\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha''', \dots, \alpha^{(n)}} = \alpha + \frac{1}{\phi_{\alpha', \alpha'', \alpha''', \dots, \alpha^{(n)}, \alpha}}. \quad (3.45)$$

Интересующемуся читателю предлагаем в качестве упражнения рассмотреть *тетрагномонную* ППД, т.е. дробь, соответствующую непрерывной дроби периода 4, где $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''$ — *обобщающие* символы, причем если символом α представлено какое-либо из неполных частных упомянутой непрерывной дроби, то символами $\alpha', \alpha'', \alpha'''$ — остальные три частных в порядке их размещения в периодической последовательности. Это же правило применимо и к обобщающим символам $\omega, \omega', \omega'', \omega'''$, которые назначаются конкретным неполным частным безотносительно к тому, как распределены $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''$. Итак, имеем

$$\begin{aligned} \phi_{\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''} &= \alpha + \frac{1}{\phi_{\alpha', \alpha'', \alpha''', \alpha}}, \\ \phi_{\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''} &= [\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha''', \dots, \omega, \phi_{\omega', \omega'', \omega''', \omega}]; \end{aligned}$$

далее читатель может самостоятельно убедиться в истинности следующих утверждений:

$$\begin{aligned} \phi_{1, 2, 1, 6} &= [1, 2, 1, 6, \dots, 6, 1, 2, 1, 6, \phi_{1, 2, 1, 6}] = \\ &= [1, 2, 1, 6, \dots, 1, 2, 1, \phi_{6, 1, 2, 1}] = \\ &= [1, 2, 1, 6, \dots, 1, 2, \phi_{1, 6, 1, 2}] = \\ &= [1, 2, 1, 6, \dots, 1, \phi_{2, 1, 6, 1}]. \end{aligned}$$

Аналогичным образом можно записать

$$\begin{aligned} \phi_{2, 1, 6, 1} &= [2, 1, 6, \dots, 6, 1, 2, 1, 6, \phi_{1, 2, 1, 6}] = \\ &= [2, 1, 6, \dots, 1, 2, 1, \phi_{6, 1, 2, 1}] = \\ &= [2, 1, 6, \dots, 1, 2, \phi_{1, 6, 1, 2}] = \\ &= [2, 1, 6, \dots, 1, \phi_{2, 1, 6, 1}], \\ &\dots, \end{aligned}$$

и, в частности,

$$\phi_{1,2,1,6} = [1, \phi_{2,1,6,1}] = \frac{\sqrt{14} + 3}{5},$$

$$\phi_{2,1,6,1} = [2, \phi_{1,6,1,2}] = \frac{\sqrt{14} + 2}{2},$$

$$\phi_{1,6,1,2} = [1, \phi_{6,1,2,1}] = \frac{\sqrt{14} + 2}{5},$$

$$\phi_{6,1,2,1} = [6, \phi_{1,2,1,6}] = \sqrt{14} + 3.$$

Читатель может также удостовериться в том, что вышеприведенные равенства вполне согласуются со спектром дроби $\sqrt{14} = [3, (1, 2, 1, 6)]$, из которого следует, что $1/(\sqrt{14} - 3) = (\sqrt{14} + 3)/5 = [(1, 2, 1, 6)] = \phi_{1,2,1,6}$.

Резюме в формулах

Определения и рекурсивные формулировки $F_{m,n}$

$$F_{m,n+2} = F_{m,n} + mF_{m,n+1}, \quad \text{при том, что } F_{m,0} = 0, \quad F_{m,1} = 1,$$

$$m = \Phi_m - \frac{1}{\Phi_m},$$

$$\psi_{m,n} = \frac{F_{m,n+1}}{F_{m,n}},$$

$$D_m = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4}{m^2}} \right).$$

Определение $F_{m,n}$ в явном виде

$$F_{m,n} = \frac{\Phi_m^n - (-1/\Phi_m)^n}{\Phi_m + 1/\Phi_m},$$

$$F_{m,n} = \frac{1}{\sqrt{4 + m^2}} \left(\left(\frac{m + \sqrt{4 + m^2}}{2} \right)^n - \left(\frac{m - \sqrt{4 + m^2}}{2} \right)^n \right),$$

$$F_{1,n} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right),$$

$$F_{m,n+1} = m^n \sum_j \binom{n-j}{j} \left(\frac{1}{m^2} \right)^j,$$

$$F_{m,2n} = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n+j}{2j+1} m^{2j+1},$$

$$F_{m,2n+1} = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n+j}{2j} m^{2j}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Свойства Φ_m

$$\Phi_m^2 - m\Phi_m - 1 = 0,$$

$$\Phi_m = mD_m,$$

$$\Phi_m = \frac{\sqrt{4+m^2}+m}{2}, \quad \frac{1}{\Phi_m} = \frac{\sqrt{4+m^2}-m}{2}, \quad \Phi_m + \frac{1}{\Phi_m} = \sqrt{4+m^2},$$

$$\Phi_m^2 = \frac{D_m}{D_m-1}, \quad D_m = \frac{\Phi_m^2}{\Phi_m^2-1},$$

$$\Phi_m^n = F_{m,n-1} + F_{m,n}\Phi_m,$$

$$\Phi_m = \sqrt[n]{F_{m,n-1} + F_{m,n} \sqrt[n]{F_{m,n-1} + F_{m,n} \sqrt[n]{F_{m,n-1} + F_{m,n} \sqrt[n]{\dots}}}},$$

$$\Phi_m = \sqrt{1 + m \sqrt{1 + m \sqrt{1 + m \sqrt{\dots}}}},$$

$$\Phi_m = \frac{F_{m,n} + F_{m,n+1}\Phi_m}{F_{m,n-1} + F_{m,n}\Phi_m} \quad \text{при любом } n,$$

$$\psi_{m,n} = \frac{F_{m,n+1}}{F_{m,n}} \xrightarrow{\text{при больших } n} \Phi_m,$$

$$\psi_{m,n} - \frac{1}{\psi_{m,n}} = m + \frac{(-1)^n}{F_{m,n}F_{m,n+1}},$$

$$\psi_{m,n} - \frac{1}{\psi_{m,n}} \xrightarrow{\text{при больших } n} m,$$

$$\frac{\Phi_m^{n+1}}{\Phi_m^2 + 1} = \frac{\Phi_m^{n+1}}{m\Phi_m + 2} \xrightarrow{\text{при больших } n} F_{m,n}.$$

Монономные ППД*Общий вид:*

$$\phi = [\underbrace{m, m, m, \dots, m, m, \dots, m}_n, \phi_\tau],$$

$$\delta_i = [\underbrace{m, m, m, \dots, m}_{i+1}] = \frac{F_{m,i} + mF_{m,i+1}}{F_{m,i-1} + mF_{m,i}} = \frac{F_{m,i+2}}{F_{m,i+1}} = \psi_{m,i+1},$$

$$\rho_j = [\underbrace{m, m, m, \dots, m}_j, \phi_\tau] = \frac{F_{m,j} + \Phi_\tau F_{m,j+1}}{F_{m,j-1} + \Phi_\tau F_{m,j}} = \frac{\phi_\tau \psi_{m,j} + 1}{\phi_\tau + 1/\psi_{m,j-1}}.$$

Правильно оконченные дроби: $\phi_\tau = \Phi_m$

$$\Phi_m = [\underbrace{m, m, m, \dots, m}_n, \Phi_m] \quad \text{для всех } n.$$

Неправильно оконченные дроби: $\phi_\tau \neq \Phi_m$

$$\phi = \delta_n = \rho_n = [\underbrace{m, m, m, \dots, m}_n, \phi_\tau] = \frac{F_{m,n} + \Phi_\tau F_{m,n+1}}{F_{m,n-1} + \phi_\tau F_{m,n}} = \frac{\phi_\tau \psi_{m,n} + 1}{\phi_\tau + 1/\psi_{m,n-1}},$$

$$[\underbrace{m, m, m, \dots, m}_n, \phi_\tau] \xrightarrow[\text{при больших } n]{} \Phi_m, \quad \text{независимо от } \phi_\tau,$$

$$[\underbrace{m, m, m, \dots, m}_n] = \psi_{m,n},$$

$$[\underbrace{m, m, m, \dots, m}_n, \psi_{m,k}] = \psi_{m,k+1}.$$

Бесконечная дробь:

$$[m, m, m, \dots] = \Phi_m.$$

Дигномонные ППД*Общий вид:*

$$\phi = [\underbrace{\alpha, \alpha', \alpha, \alpha', \dots, \mu, \mu', \mu, \mu', \dots, \omega, \omega'}_n, \phi_\tau],$$

$$\delta_i = [\underbrace{\alpha, \alpha', \alpha, \dots, \mu, \mu'}_{i+1}] = \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha'}} [\underbrace{m, m, m, \dots, m}_{i+1}] = \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha'}} \psi_{m,i+1},$$

$$\begin{aligned}\rho_j &= [\underbrace{\mu, \mu', \dots, \omega, \omega'}_j, \phi_\tau] = \sqrt{\frac{\mu}{\mu'}} \left[\underbrace{m, m, m, \dots, m}_j, \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \phi_\tau \right] = \\ &= \sqrt{\frac{\mu}{\mu'}} \frac{F_{m,j} + F_{m,j+1} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \phi_\tau}{F_{m,j-1} + F_{m,j} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \phi_\tau}.\end{aligned}$$

Правильно оконченные дроби: $\phi_\tau = \phi_{\omega, \omega'}$

$$\begin{aligned}\alpha &= \phi_{\alpha, \alpha'} - \frac{1}{\phi_{\alpha', \alpha}}, \quad \alpha = \phi_{\alpha', \alpha} - \frac{1}{\phi_{\alpha, \alpha'}}, \quad \alpha\alpha' = \omega\omega' = m^2, \\ \phi_{\alpha, \alpha'} &= [\underbrace{\alpha, \alpha', \alpha, \dots, \omega, \omega'}_n, \phi_{\omega, \omega'}] \quad \text{для всех } n, \\ \phi_{\alpha, \alpha'}^2 - \alpha\phi_{\alpha, \alpha'} - \frac{\alpha}{\alpha'} &= 0, \\ \phi_{\alpha, \alpha'} &= \alpha D_m = \frac{\alpha}{m} \Phi_m = \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha'}} \Phi_m, \\ \Phi_m^2 &= \phi_{\alpha, \alpha'} \phi_{\alpha', \alpha}, \quad \alpha\phi_{\alpha, \alpha'} = m\Phi_m = \Phi_m^2 - 1.\end{aligned}$$

Неправильно оконченные дроби: $\phi_\tau \neq \phi_{\omega, \omega'}$

$$\begin{aligned}\phi = \delta_n = \rho_n &= [\underbrace{\alpha, \alpha', \dots, \omega, \omega'}_n, \phi_\tau] = \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha'}} \left[\underbrace{m, m, m, \dots, m}_n, \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \phi_\tau \right] = \\ &= \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha'}} \frac{F_{m,n} + F_{m,n+1} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \phi_\tau}{F_{m,n-1} + F_{m,n} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \phi_\tau},\end{aligned}$$

$$[\underbrace{\alpha, \alpha', \alpha, \dots, \omega, \omega'}_n, \phi_\tau] = \xrightarrow{\text{при больших } n} \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha'}} \Phi_m = \phi_{\alpha, \alpha'} \text{ независимо от } \phi_\tau,$$

$$[\underbrace{\alpha, \alpha', \dots, \omega, \omega'}_n] = \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha'}} [\underbrace{m, m, m, \dots, m}_n] = \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha'}} \psi_{m,n}.$$

Бесконечная дробь:

$$[\alpha, \alpha', \alpha, \alpha', \dots] = \phi_{\alpha, \alpha'}.$$

Случай очень малого m

$$F_{m,n} \approx \sinh \frac{mn}{2} \text{ при четном } n \text{ и } F_{m,n} \approx \cosh \frac{mn}{2} \text{ при нечетном } n.$$

Случай очень малого и мнимого m

$$F_{jm,n} \approx j \sin \frac{mn}{2} \text{ при четном } n \text{ и } F_{jm,n} \approx \cos \frac{mn}{2} \text{ при нечетном } n.$$

Правильно оконченные полигномонные ППД

$$\begin{aligned} \phi_{\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha''', \dots, \alpha^{(n)}} &= [\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha''', \dots, \alpha^{(n)}, \alpha, \alpha', \alpha'', \alpha''', \dots, \alpha^{(n)}, \\ &\quad \alpha, \alpha', \alpha'', \dots, \omega, \phi_{\omega', \omega'', \omega''', \dots, \omega^{(n)}, \omega}], \end{aligned}$$

$$\phi_{\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha''', \dots, \alpha^{(n)}} = \alpha + \frac{1}{\phi_{\alpha', \alpha'', \alpha''', \dots, \alpha^{(n)}, \alpha}}.$$

ГЛАВА IV

Лестницы: от чисел Фибоначчи до распространения волн

Эта глава представляет собой результат непосредственного практического применения непрерывных дробей и иллюстрирует в занимательном свете *итерационные* процессы с *обратной связью* — от построения электрических лестничных схем до распространения сигнала по линиям передачи.

Предложена также и механическая метафора с использованием блоков. Из нее может получиться интересный проект для механика-любителя или студента, готовящегося к научной выставке в колледже.

Лестница из преобразователей

Изображенная на рис. IV.1a конструкция сродни устройству, называемому инженерами *операционным усилителем*. Она обладает двумя асимметричными *портами ввода* и одним *портом вывода* и характеризуется

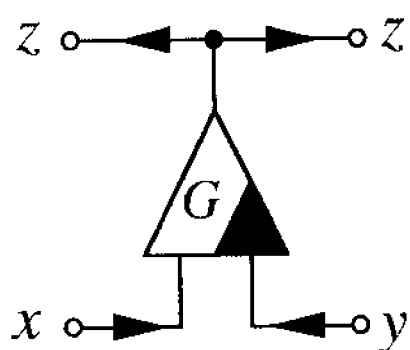


Рис. IV.1a. Преобразователь.

некоей *передаточной функцией* (или *коэффициентом усиления*) G , которая может быть как действительным, так и мнимым числом. Такую конструкцию мы будем называть *преобразователем*. Если к портам ввода подведены «сигналы» x и y , как показано на рисунке, то результирующий сигнал z на выходе определяется выражением $z = G(x - y)$. Для нас в данном случае не важна конкретная физическая природа сигналов, подаваемых на входы и измеряемых на выходе. Это может быть напряжение, сила тока, какие-либо механические деформации и т. д. Роль преобразователя заключается в преобразовании некоей физической величины в физическую той же либо иной природы.

Из описанных преобразователей можно построить рекурсивную конструкцию, изображенную на рис. IV.1b, с последовательными передаточными функциями $\mu_0, \tau_0, \mu_1, \tau_2, \dots$. Обозначив различные порты ввода и

Электрическая лестница

Не вдаваясь в излишние подробности, укажем лишь, что поведение электрического сигнала определяется двумя величинами: *разностью потенциалов* и *силой тока*. Каждая из этих величин полностью и однозначно характеризуется некоторым значением и направлением и может быть обозначена стрелкой с соответствующим символом. Электрическая схема состоит из взаимосвязанных элементов (или компонентов), которые в нашем случае являются *пассивными* (т. е. не могут содержать внутренних источников энергии) и *биполярными* (т. е. каждый компонент имеет по два и только по два «окончания»). Соединение окончаний разных компонентов образует *узел*. При построении схемы мы будем использовать следующие компоненты: резисторы, катушки индуктивности и конденсаторы. Поведение каждого отдельного компонента определяется разностью потенциалов *на* компоненте (т. е. между его окончаниями) и проходящим *сквозь* него током. Это поведение подчиняется особым законам, которые зависят от природы компонента. *Разность потенциалов* (т. е. разница между потенциалами двух произвольно взятых узлов) иногда не совсем строго называют *напряжением* и измеряют в *вольтах*. Электрический *ток*, *протекающий* сквозь элемент схемы, измеряется в *амперах*.

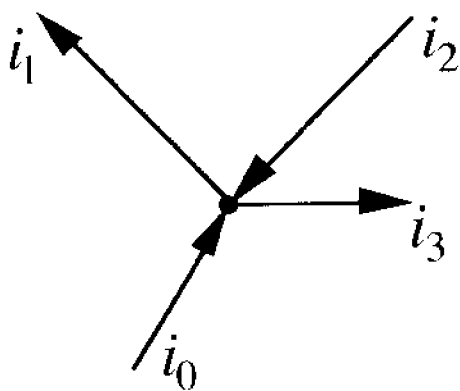


Рис. IV.2а. Узел тока.

Электрические цепи, взаимосвязи между элементами которых могут быть весьма сложными, подчиняются в конечном счете двум простым правилам, известным как *правила Кирхгофа*. На рис. IV.2а показан узел тока N со сходящимися в нем токами i_0, i_1, i_2, i_3 . Согласно первому правилу Кирхгофа алгебраическая сумма токов в любом узле равна нулю. Таким образом, $i_0 + i_2 - i_1 - i_3 = 0$. На рис. IV.2б изображена электрическая схема, состоящая из взаимосвязанных компонентов. Разности потенциалов $u_0, u_1, \dots, u_6$ обозначены стрелками. Второе правило Кирхгофа гласит: алгебраическая сумма разностей потенциалов на замкнутом контуре равна нулю.

В контуре А, таким образом, имеем $u_0 - u_1 - u_2 = 0$; иными словами, $u_1 = u_0 - u_2$. В контуре В $u_3 = u_2 - u_4$. Можно отметить и еще один, избыточный, замкнутый контур, окружающий контуры А и В, для которого $u_1 + u_3 = u_0 - u_4$. Последнее утверждение очевидным образом выводится из первых двух. Заметим также, что два нижних «компонента» в нашей схеме являются просто проводниками, т. е. $u_5 = u_6 = 0$. Как правило, инженеры-электрики говорят не о *разностях потенциалов* или *разностях напряжений*, а просто о *напряжениях*, подразумевая под этим, что напряжение на узле есть разность между потенциалами этого узла и некоторой

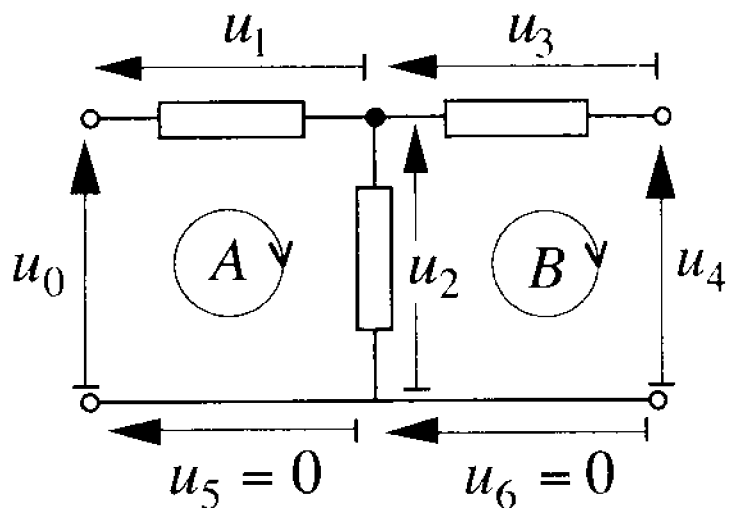


Рис. IV.2b. Контур напряжений.

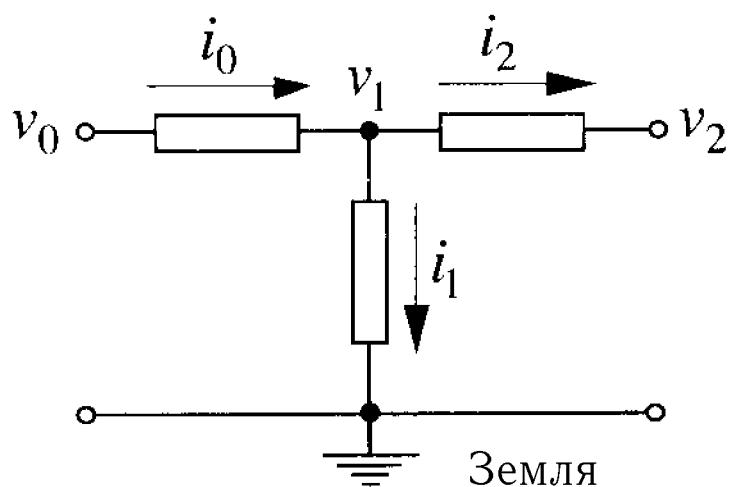


Рис. IV.2c. Напряжения и токи.

общей базы, называемой обычно «землей», потенциал которой условились считать нулевым. Таким образом, обозначения в схемах, с которыми нам предстоит иметь дело, будут аналогичны тем, что даны на схеме, изображенной на рис. IV.2c, где $u_0 = v_0$, $u_1 = v_0 - v_1$, $u_2 = v_2$, $u_3 = v_1 - v_2$, $u_4 = v_4$ и $i_0 = i_1 + i_2$.

Резисторные лестницы

На рис. IV.2d показан резистор — электрический компонент, составляющий основу любой электронной схемы. Его простейшим физическим воплощением является отрезок тонкой проволоки. Некоторые резисторы выполнены из углеродистых или других резистивных соединений. Самую сложную форму резистора можно наблюдать в интегральных схемах, где роль резистора выполняет соответствующим образом обработанная область кремниевой подложки. Резистор характеризуется величиной своего *сопротивления* r , измеряемого в *омах* (Ω). Разность потенциалов на резисторе $u = v_a - v_b$ вынуждает ток i протекать сквозь резистор в направлении от более высокого потенциала a к более низкому потенциалу b . Связь между этой разностью потенциалов и силой тока i описывается простейшим законом, известным каждому, кто хоть сколько-нибудь изучал электричество — законом Ома, согласно которому

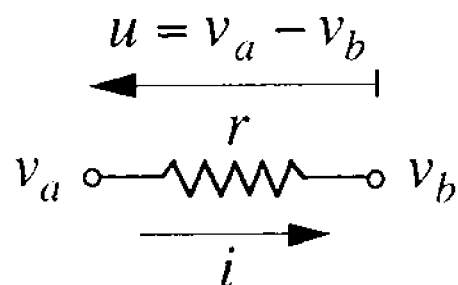


Рис. IV.2d. Резистор.

$$i = \frac{u}{r} = \frac{v_a - v_b}{r}.$$

Помимо того, что резистор в данном случае является пассивным, его еще называют *линейным* вследствие линейности соотношения между u и i . Обрат-

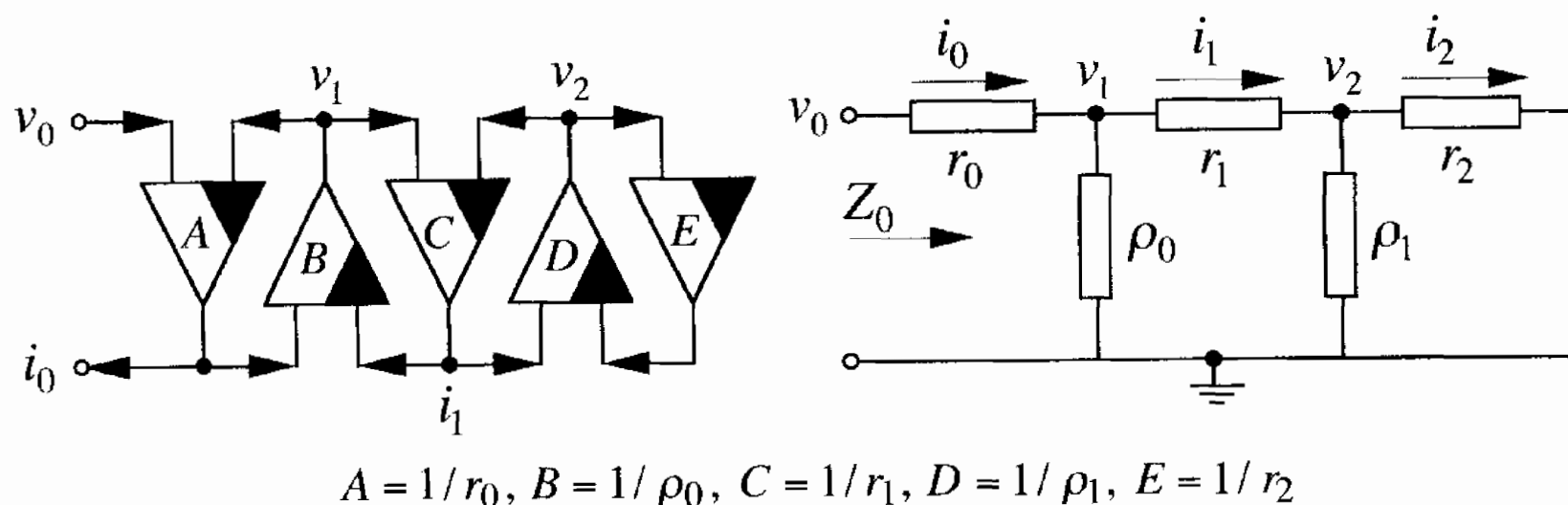


Рис. IV.3а. Аналогия между лестницей преобразователей и электрической лестничной цепью.

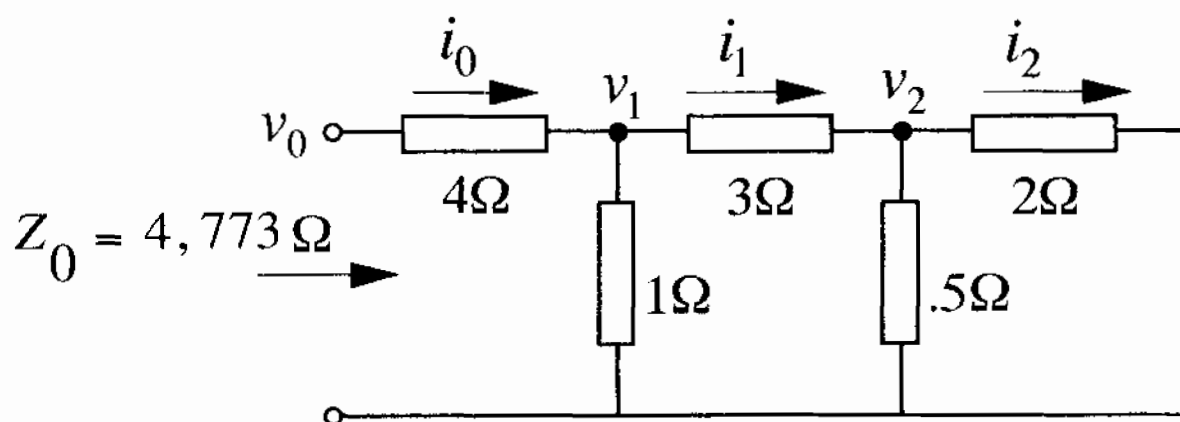


Рис. IV.3b. Резисторная лестничная схема.

ная сопротивлению величина называется *проводимостью*. Инженеры-электрики, отличающиеся порой просто невероятными творческими способностями, решили назвать единицу измерения проводимости *мо* (попробуйте догадаться, с чего бы это) и обозначать ее буквой Ω , перевернутой вверх ногами. На рис. IV.3а представлена самая что ни на есть обыкновенная электрическая схема, известная специалистам под названием *многозвенная электрическая резисторная цепь лестничного типа* (прямоугольниками обозначены резисторы). На последовательных (горизонтальных) участках указаны соответствующие значения сопротивлений r_0, r_1, r_2 (в омах), параллельные же (вертикальным) участки снабжены соответствующими значениями проводимости ρ_0, ρ_1 (в мо). Все отмеченные на схеме напряжения измерены по отношению к земле. На схему подано входное напряжение v_0 , как показано на рисунке, в результате чего на последовательных участках r_0, r_1, r_2 возникает электрический ток соответствующей силы (i_0, i_1, i_2). Читатель без труда установит, какие уравнения управляют поведением этой электрической схемы — в точности те же самые, что описывают схему на рис. IV.1b, т. е. уравнения (4.2) и (4.3). Отношение $Z_0 = v_0/i_0 = [r_0, \rho_0, r_1, \rho_1, r_2]$ определяет так называемое *входное полное сопротивление* (или *входной им-*

педанс) схемы, измеряемое в омах. В численном примере на рис. IV.3b

$$r_0 = 4 \text{ ом}, \quad r_1 = 3 \text{ ом}, \quad r_2 = 2 \text{ ом}, \quad \rho_0 = 1 \text{ мо}, \quad \rho_1 = 2 \text{ мо},$$

а входной импеданс всей системы (в данном случае сопротивление) равен $[4, 1, 3, 2, 2] = 105/22 \approx 4,773 \text{ ом}$. Величина Z_0 на рис. IV.3b есть входной импеданс, «измеренный» на входном конце схемы неким гипотетическим измерителем импеданса.

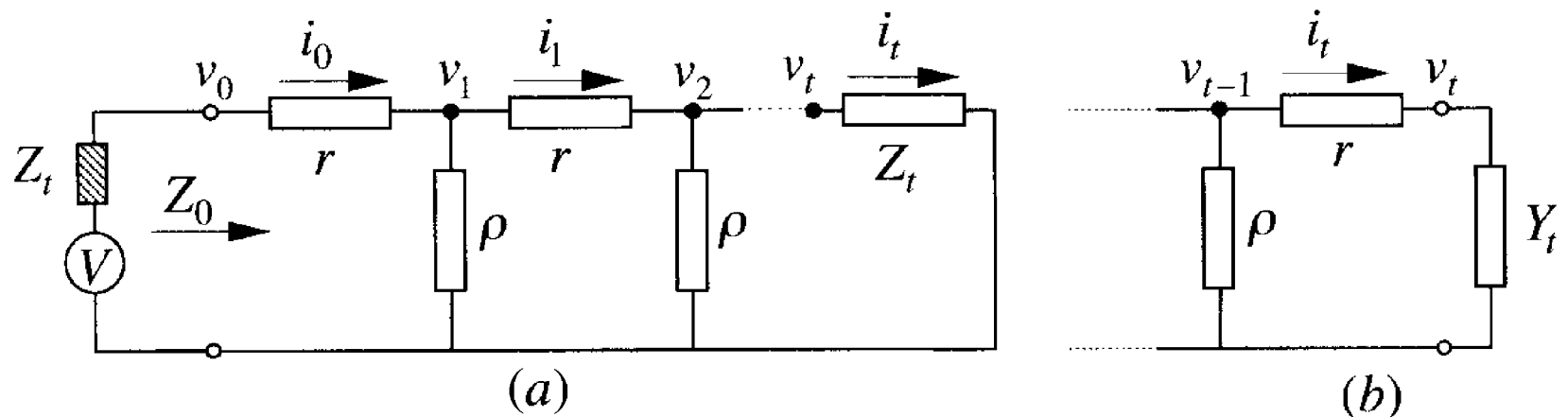


Рис. IV.4. Окончания итерационной лестницы.

Итерационные лестницы

Обратимся теперь к рис. IV.4, на котором все последовательные сопротивления равны r , а все параллельные проводимости равны ρ . Такая лестница называется *итерационной*. Величина Z_t на схеме (a) представляет собой так называемый *оконечный* (или *нагрузочный*) импеданс, а Y_t на схеме (b) обозначает окончную полную проводимость (или *адмиттанс*). Имеем

$$Z_0 = \frac{v_0}{i_0} = [r, \rho, r, \rho, \dots, r, \rho, Z_t] \quad \text{для схемы (a)}$$

и

$$Z_0 = \frac{v_0}{i_0} = [r, \rho, r, \rho, \dots, r, Y_t] \quad \text{для схемы (b)}.$$

Положим

$$D_m = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4}{r\rho}} \right), \quad \text{где } m = r\rho; \quad (4.4)$$

тогда схема является правильно оконченной при $Z_t = rD_m$ или при $Y_t = \rho D_m$, причем в любом из этих случаев $Z_0 = Z_t$. Если же «собственный импеданс» источника энергии Z_t также оказывается равным Z_0 , то говорят, что источник согласован с лестничной цепью.

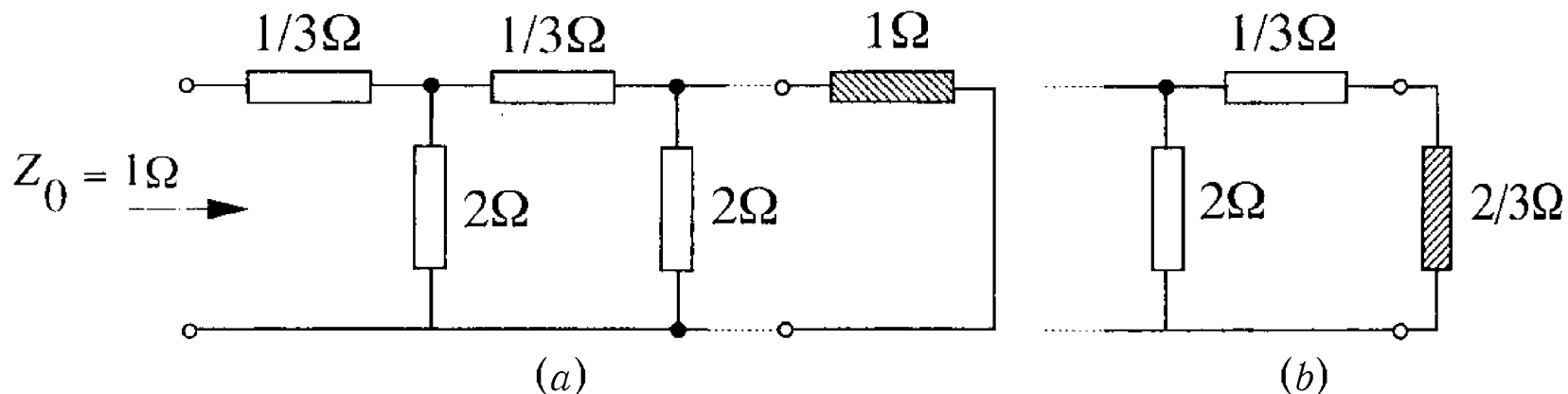


Рис. IV.5. Итерационная резисторная лестница с правильными окончаниями.

Примеры. На рис. IV.5 $r = 1/3$ ом, $\rho = 1/2$ мо (величина, обратная сопротивлению 2 ом). Положив $m = r\rho$, получаем

$$D_m = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4}{r\rho}} \right) = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{1 + 24}) = 3.$$

Для обеспечения правильного окончания схемы необходимо соблюсти условие $Z_t = rD_m = 1$ ом (рис. IV.5a), либо $Y_t = \rho D_m = 3/2$ мо (величина, обратная сопротивлению $2/3$ ом) (рис. IV.5b). В любом случае импеданс $Z_0 = 1$ ом. На рис. IV.6 $r = 2$ ом, $\rho = 2$ мо. Таким образом, $D_m = (\sqrt{2} + 1)/2$. Правильная оконечная нагрузка на рис. IV.6a составит $2D_m = (\sqrt{2} + 1)$ ом; на рис. IV.6b получим $Y_t = 2D_m = (\sqrt{2} + 1)$ мо, т. е. обратная величина составит $(\sqrt{2} - 1)$ ом.

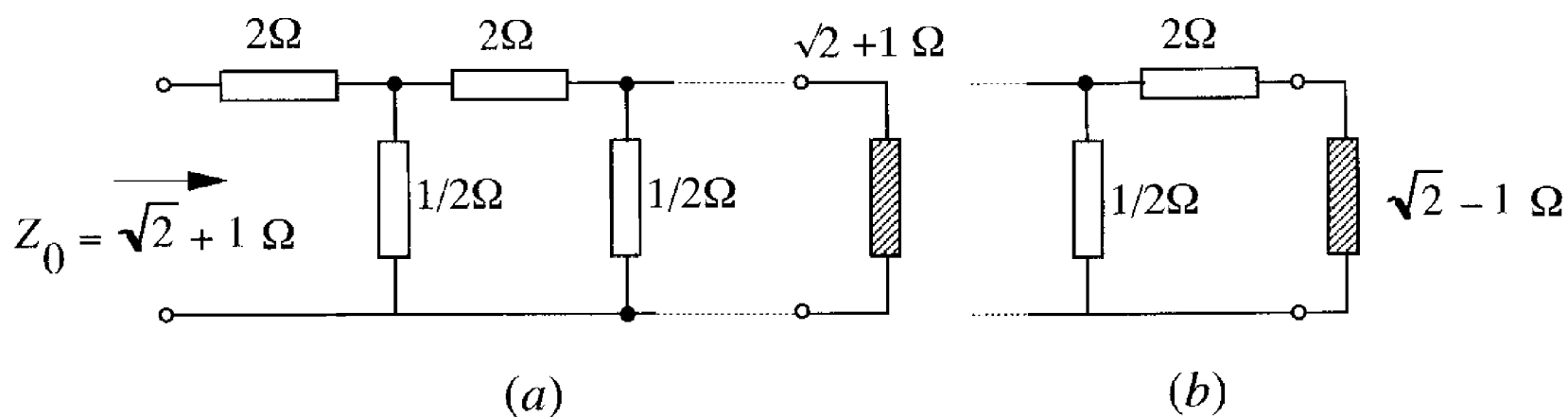


Рис. IV.6. Еще одна правильно оконченная итерационная резисторная лестница.

Если схема состоит из очень большого количества резисторных участков и оканчивается неким произвольным импедансом, то по мере добавления новых участков ее входной импеданс, независимо от действительной величины оконечного импеданса, сходится к Z_0 . Величина входного импеданса периодической «бесконечно длинной» лестничной цепи (по опреде-

лению совсем не имеющей никакой оконечной нагрузки) стремится к $Z_0 = rD_m$.

До сих пор мы рассматривали поведение периодических правильно оконченных лестничных схем с точки зрения входного импеданса. Теперь поговорим о том, что происходит с входным «сигналом» во время его передачи по проводнику от одного элемента схемы к другому. Глядя на рис. IV.4а, можно предположить, что если «обрезать» цепь непосредственно после параллельного участка, то входной импеданс оставшейся правильно оконченной лестницы будет равен Z_0 независимо от того, в каком именно месте произошел разрыв. Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{v_0}{i_0} = \frac{v_1}{i_1} = \dots = \frac{v_t}{i_t} = rD_m, \quad \frac{i_0}{v_1} = \frac{i_1}{v_2} = \dots = \frac{i_{t-1}}{v_t} = \rho D_m, \\ \frac{v_0}{v_1} = \frac{v_1}{v_2} = \dots = \frac{v_{t-1}}{v_t} = r\rho D_m^2 = \Phi_m^2. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Таким образом, с каждой последующей ступенью напряжение на параллельном участке уменьшается в Φ_m^2 раз. В строго резистивной цепи — а именно такие схемы мы и рассматривали до сих пор — величина Φ_m является действительным числом, бóльшим единицы, и такая схема работает как *аттенюатор* (или *ослабитель*).

Примеры.

- 1) Требуется построить аттенюатор, который уменьшал бы входное напряжение на каждой ступени в 2 раза; иными словами, должно соблюдаться условие $v_{i+1}/v_i = 1/\Phi_m^2 = 1/2$. Из равенства $m = \Phi_m - 1/\Phi_m$ получим $m = 1/\sqrt{2}$, т. е. $r\rho = 1/2$. Если произвольно выбрать $r = 1$ ом, то величина ρ должна составить $1/2$ мо (т. е. величину, обратную 2 ом). Получившийся у нас правильно оконченный аттенюатор показан на рис. IV.7а.

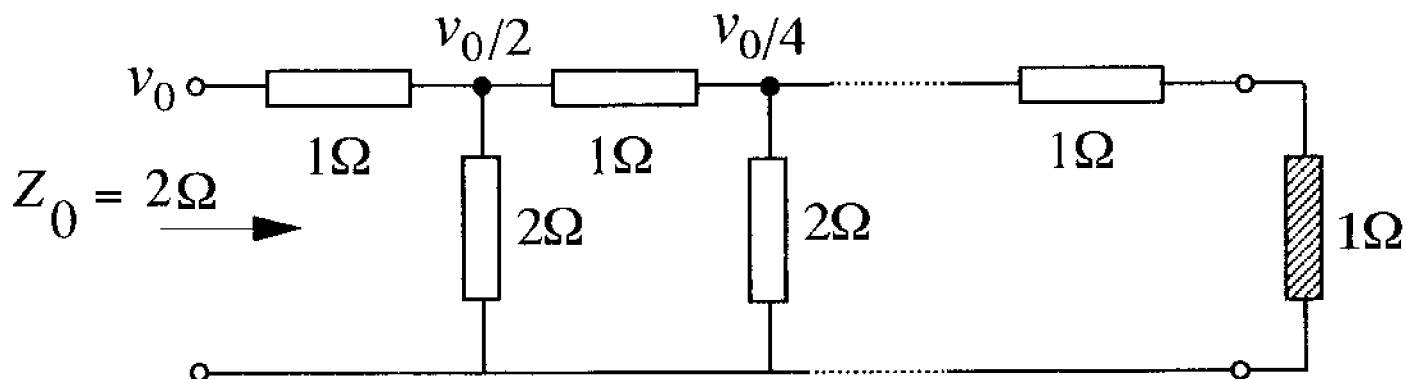


Рис. IV.7а. Аттенюатор по степеням 2.

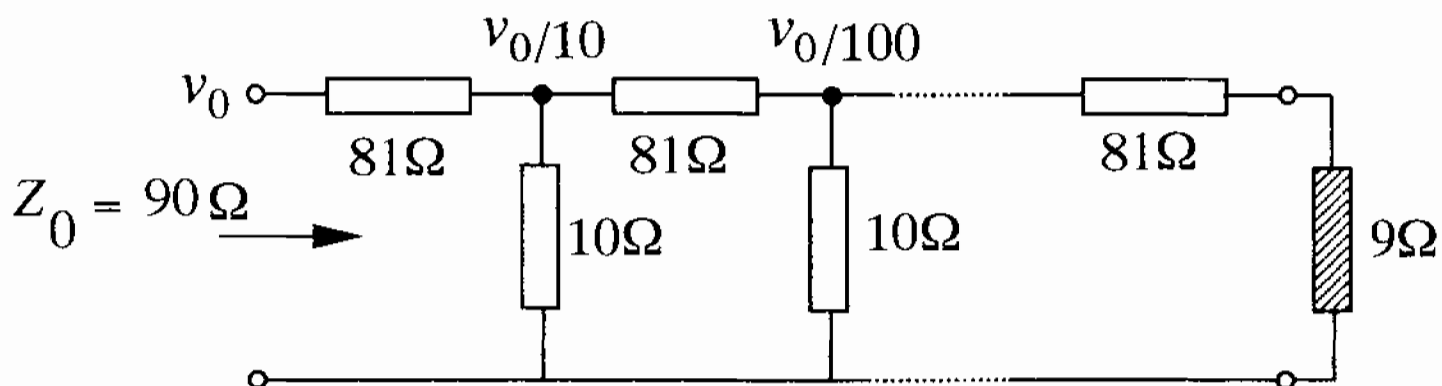


Рис. IV.7b. Атенюатор по степеням 10.

- 2) В аттенюаторе, уменьшающем входное напряжение на каждой ступени в 10 раз, $m^2 = r\rho = 81/10$. Его возможные характеристики: сопротивление последовательного участка $r = 81$ ом, сопротивление параллельного участка $1/\rho = 10$ ом, окончный импеданс 9 ом, входной импеданс 90 ом (рис. IV.7b).

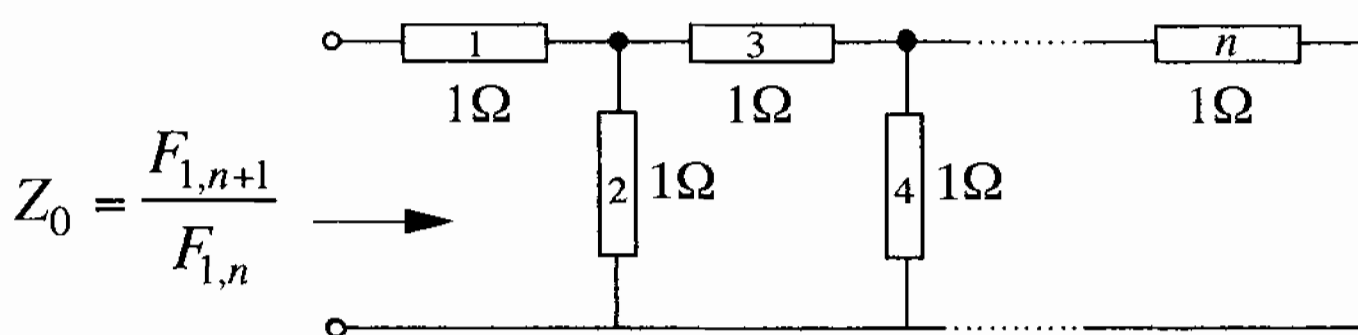


Рис. IV.8. «Лестница Фибоначчи».

- 3) Лестничную схему, изображенную на рис. IV.8, можно назвать «лестницей Фибоначчи». Все сопротивления пронумерованы (1, 2, 3, ...) и равны 1 ом. Входное сопротивление составляет

$$Z_0 = \frac{F_{1,n+1}}{F_{1,n}} \text{ ом.}$$

При достаточно большом количестве сопротивлений и достаточно высокой точности измерения входной импеданс такой лестницы приближается к 1,618 ом.

Часто бывает удобно рассматривать цепи лестничного типа, составленные из последовательных *симметричных T-образных звеньев*, как показано на рис. IV.9. Нетрудно показать, что входной импеданс такой лестницы при

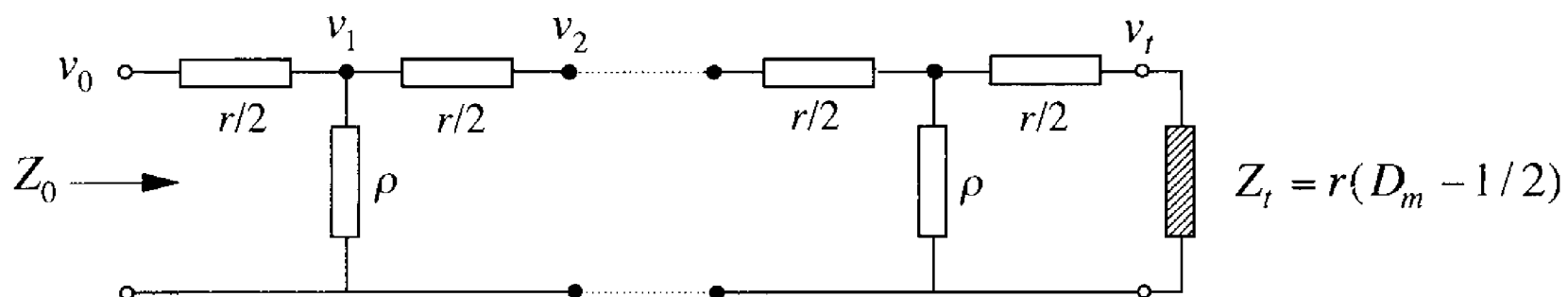


Рис. IV.9. Лестница из Т-образных звеньев.

наличии правильной оконечной нагрузки равен

$$Z_0 = Z_t = r \left(D_m - \frac{1}{2} \right) = \frac{r}{2} \sqrt{1 + \frac{4}{r\rho}}. \quad (4.6)$$

Мнимые компоненты

Рассмотренные до сих пор лестничные схемы были строго резистивными. Когда мы вводили понятие непрерывных дробей, мы указывали на то, что простые непрерывные дроби (ПНД) могут содержать как действительные, так и комплексные неполные «частные». Любой инженер-электрик не задумываясь назовет вам три фундаментальных пассивных строительных блока, на которых стоит величественное здание сложного и в высшей степени практичного искусства электротехники. Это *сопротивление*, *индуктивность* и *емкость*. Во вселенной, в которой электрические токи принимают с течением времени всевозможные формы, поведение резистора задается мгновенным значением силы тока, индуктивность зависит от скорости изменения силы тока, а вклад емкости определяется накоплением прошедших событий. Гениальности математиков прошлого и одному их весьма дерзкому изобретению обязаны мы тем, что такое сложное поведение, описываемое обыкновенно с помощью громоздких уравнений с привлечением дифференцирования и интегрирования, было сведено к виду, настолько простому, что инженер с минимальной математической подготовкой без труда манипулирует этим поведением на свое усмотрение. Само изобретение заключалось в создании понятия мнимой величины, т. е. числа, включающего в себя квадратный корень из -1 . Не вдаваясь в излишние здесь подробности, укажем лишь, что если на электрическую схему подать *синусоидальное напряжение*, то оказывается возможным распространить замечательно простой закон Ома и на поведение индуктивностей и емкостей, т. е. так называемых *реактивных* компонентов схем. Осуществляется это следующим образом: если обозначить квадратный корень из -1 символом j , а величину пульсации (или угловой частоты) синусоидального

переменного тока частоты f определить как $\omega = 2\pi f$, то эквивалентный импеданс индуктивности L будет равен $j\omega L$, а эквивалентный импеданс емкости C — величине $1/j\omega C$.¹

Рассмотрим LC -цепь лестничного типа, изображенную на рис. IV.10а, индуктивности L и конденсаторы C которой представляют собой *идеальные* реактансы (иначе: реактансы *без потерь*), т. е. не содержат никаких резистивных компонентов, рассеивающих электрическую энергию. Данная лестничная схема правильно окончена: и входной, и окончательный импедансы равны величине, которая называется характеристическим импедансом и обозначается Z_c . Очевидно, что $m = \sqrt{(jL\omega)(jC\omega)} = j\omega\sqrt{LC}$ является мнимой величиной.

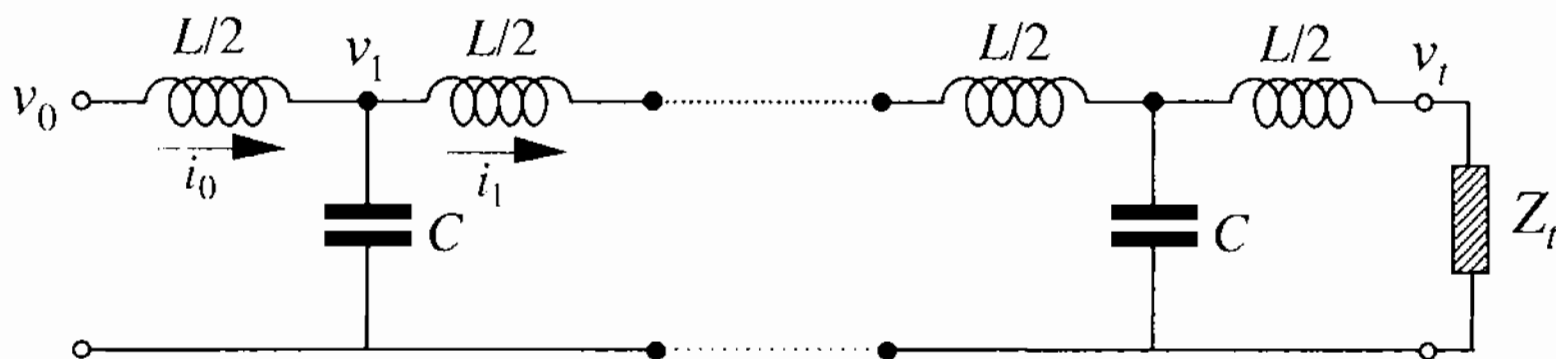


Рис. IV.10а. Индуктивно-емкостная лестница.

Применив уравнение (4.6), получим

$$Z_c = \frac{j\omega L}{2} \sqrt{1 - \frac{4}{LC\omega^2}} = j\omega L \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{LC\omega^2}},$$

¹Распространение понятия импеданса на емкости и индуктивности применимо только к так называемому *установившемуся состоянию*. В самом деле, при подаче на вход схемы синусоидального напряжения и возникновении в ней электрического тока наблюдается кратковременное переходное состояние, характеризующееся всплеском силы тока и ее последующим экспоненциальным затуханием. И лишь затем колебания силы тока принимают характерную для установившегося состояния синусоидальную форму, которую можно описать с помощью мнимых величин. Фундаментальное уравнение, связывающее напряжение с силой тока в случае наличия индуктивности L , имеет вид: $u = L di/dt$. Представив i в виде вращающегося вектора $i = Ie^{j\omega t}$, получим $u = j\omega LIe^{j\omega t} = j\omega Li$ или $u/i = j\omega L$. Это выражение представляет собой эквивалент закона Ома для цепей, содержащих катушку индуктивности. Аналогично, фундаментальное уравнение, связывающее напряжение с силой тока в случае наличия емкости C , имеет вид: $u = 1/C \int i dt$. Отсюда получаем $u/i = 1/j\omega C$, эквивалент закона Ома для цепей, содержащих конденсатор. Импедансы $j\omega L$ и $1/j\omega C$ называются *реактивными сопротивлениями* (или *реактансами*), соответственно, катушки индуктивности L и конденсатора C . В главе VIII мы рассмотрим решение для переходного состояния с применением методов конечных разностей, которые предлагают совершенно иной подход к решению и являются сами по себе неплохим упражнением для развития мышления.

а принимая во внимание, что

$$j\omega L = \sqrt{-L^2\omega^2} = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{-LC\omega^2},$$

можно записать

$$\begin{aligned} Z_c &= \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{(-LC\omega^2) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{LC\omega^2} \right)}, \\ Z_c &= \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{1 - \frac{LC\omega^2}{4}}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Вычислим значение отношения v_2/v_0 , иными словами, отношения напряжения непосредственно за Т-образным звеном ко входному напряжению цепи. Это отношение равно v_{i+2}/v_i для всех четных значений i , при условии, что цепь имеет правильное окончание, т. е. $Z_t = Z_c$. В этом случае входной импеданс (взятый в точке v_0) также равен Z_c . Таким образом, сила тока i_0 определяется отношением v_0/Z_c , а падение напряжения на начальной индуктивности составляет $j\omega L v_0/2Z_c$. Напряжение v_1 равно разности между напряжением v_0 и падением напряжения:

$$v_1 = v_0 \left(1 - \frac{j\omega L}{2Z_c} \right).$$

Импеданс лестницы «ниже по течению» (т. е. в точке v_2) тоже равен Z_c , из чего следует, что импеданс в точке v_1 составляет $(j\omega L/2) + Z_c$.

Таким образом,

$$i_1 = \frac{v_1}{\frac{j\omega L}{2} + Z_c}$$

и

$$v_2 = i_1 Z_c = \frac{v_1}{\frac{j\omega L}{2} + Z_c} Z_c = \frac{v_0 \left(1 - \frac{j\omega L}{2Z_c} \right) Z_c}{\frac{j\omega L}{2} + Z_c}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{v_2}{v_0} = \frac{2Z_c - j\omega L}{2Z_c + j\omega L}. \quad (4.8a)$$

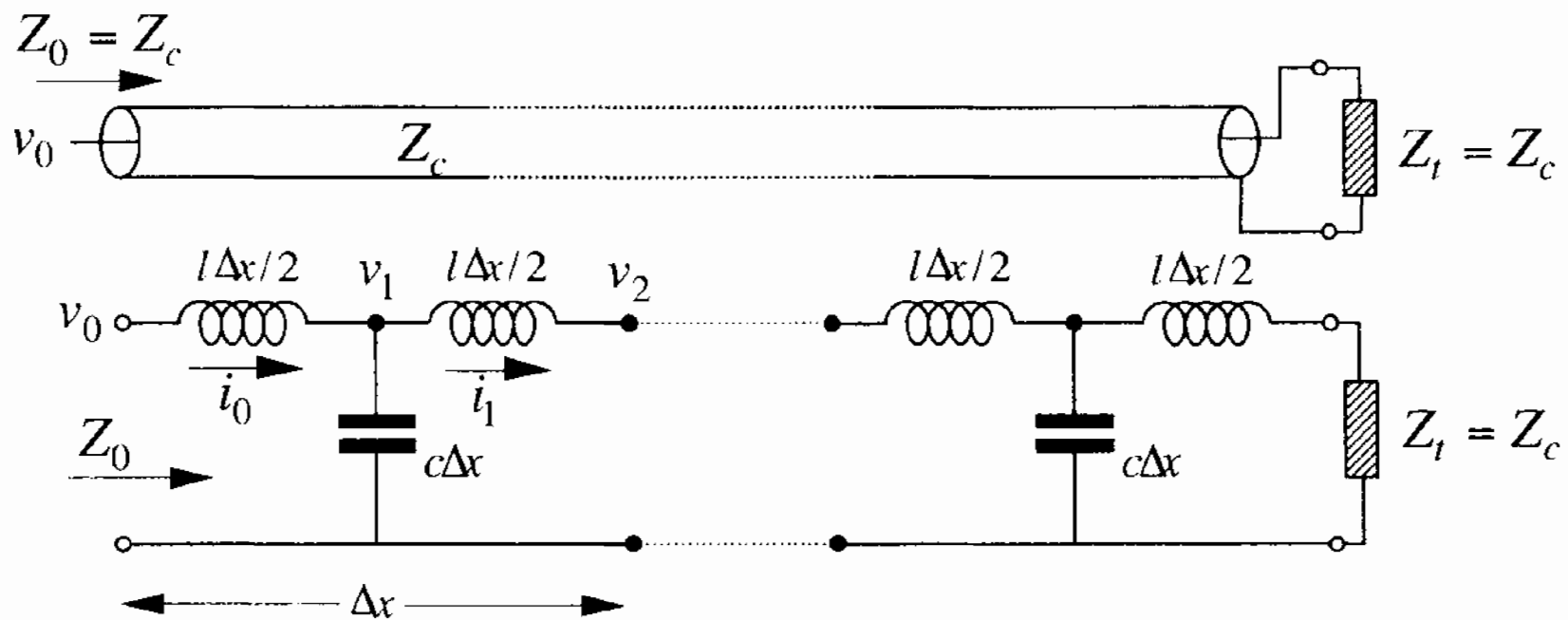


Рис. IV.10b. Правильно согласованная линия передачи.

Линия передачи

В простейшем случае линия передачи представляет собой пару параллельных медных проводников, разделенных воздушной прослойкой. Более сложные конструкции могут быть выполнены из коаксиальных трубок, заполненных соответствующим *диэлектриком* (непроводящим материалом). В реальных линиях передачи без потерь емкостные и индуктивные компоненты не сосредоточены в последовательных дискретных «кучках» (как на рис. IV.10a), но равномерно распределены вдоль всей линии передачи, как показано на рис. IV.10b. Элементарное Т-образное звено длины Δx состоит из двух одинаковых последовательных участков, индуктивность каждого из которых равна $l\Delta x/2$, и параллельного участка с емкостью $c\Delta x$, где l и c обозначают, соответственно, индуктивность и емкость линии передачи на единицу длины. Вернувшись к уравнению (4.7), можно пренебречь величиной $LC\omega^2 = lc\omega^2(\Delta x)^2$ и записать

$$Z_c = \sqrt{\frac{l}{c}}.$$

Величина Z_c представляет собой входной импеданс бесконечно длинной линии передачи без потерь или же импеданс некоторого конечного участка такой линии произвольной длины — при условии, что он правильно окончен.

Несогласованная линия передачи

Настало время задать естественный вопрос: что же происходит, если конечная нагрузка линии передач без потерь не равна характеристическому импедансу? Иными словами, каким будет входной импеданс Z_0 в том случае, когда линия длины x оканчивается произвольным импедансом Z_t ?

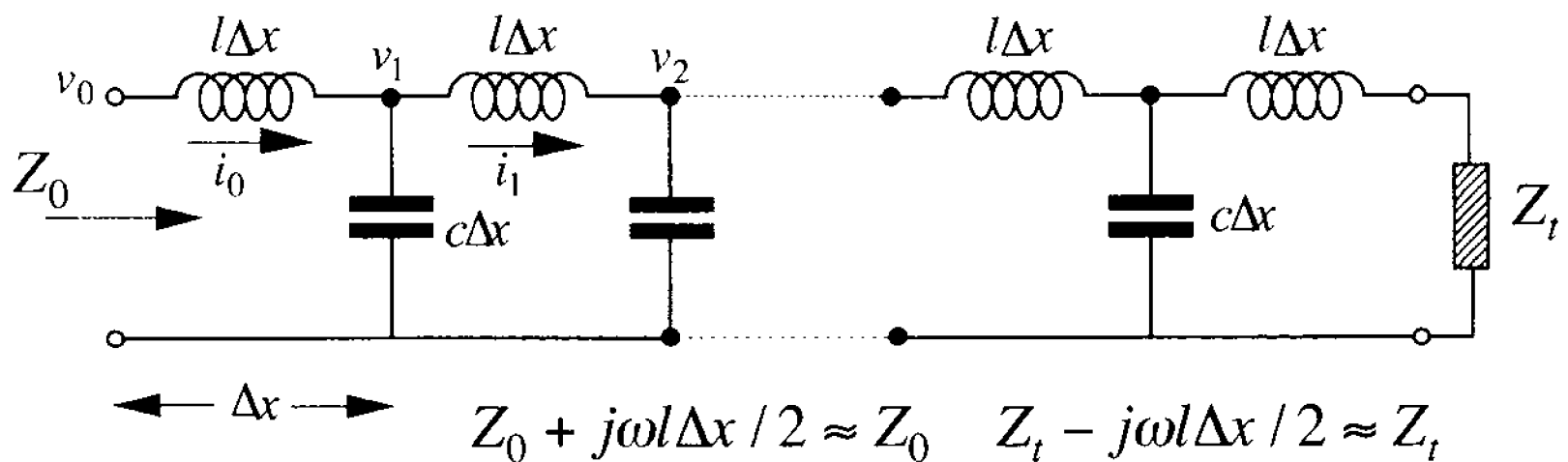


Рис. IV.10с. Реконфигурированная линия передачи.

Если пренебречь добавками $j\omega l\Delta x/2$ на каждом конце линии, получим цепь, изображенную на рис. IV.10с, которая в точности описывается уравнением (3.39) для неправильно оконченных простых непрерывных дробей из главы III. Букву ω нам пришлось заменить на β во избежание путаницы с угловой частотой, которую принято обозначать как раз этой буквой. (Рассматривая дигномонные ППД, мы использовали буквы α и ω для обозначения первого и последнего неполного частного соответствующей непрерывной дроби.)

$$\begin{aligned}
 \phi &= [\underbrace{\alpha, \alpha', \alpha, \dots, \beta, \beta'}_n, \phi_\tau] = \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha'}} \left[\underbrace{m, m, m, \dots, m}_n, \sqrt{\frac{\beta'}{\beta}} \phi_\tau \right] = \\
 &= \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha'}} \frac{F_{m,n} + \sqrt{\frac{\beta'}{\beta}} \phi_\tau F_{m,n+1}}{F_{m,n-1} + \sqrt{\frac{\beta'}{\beta}} \phi_\tau F_{m,n}}. \quad (4.9a)
 \end{aligned}$$

В применении к линии передачи на рис. IV.10с символы в уравнении (4.9a) имеют следующий смысл:

$$\alpha = \beta' = j\omega l\Delta x, \quad \alpha' = \beta = j\omega c\Delta x, \quad m = j\omega\sqrt{lc}\Delta x, \quad Z_0 = \phi, \quad Z_t = \phi_\tau.$$

Число n на рисунке четное, и каждому отрезку длины Δx соответствует пара значений m . Целому n , таким образом, соответствует линия длины $x = n\Delta x/2$. При очень малом m

$$Z_0 = \sqrt{\frac{l}{c}} \frac{F_{m,n \text{ четн}} + \sqrt{\frac{c}{l}} Z_t F_{m,n \text{ нечетн}}}{F_{m,n \text{ нечетн}} + \sqrt{\frac{c}{l}} Z_t F_{m,n \text{ четн}}}. \quad (4.9b)$$

Подставляя сюда равенства (3.43e) и (3.43f) из главы III, получаем

$$\begin{aligned}
 Z_0 &= \sqrt{\frac{l}{c}} \frac{j \sin(mn\Delta x/2) + \sqrt{\frac{c}{l}} Z_t \cos(mn\Delta x/2)}{\cos(mn\Delta x/2) + \sqrt{\frac{c}{l}} Z_t j \sin(mn\Delta x/2)} = \\
 &= Z_c \frac{j \sin(\omega\sqrt{lc}x) + \frac{Z_t}{Z_c} \cos(\omega\sqrt{lc}x)}{\cos(\omega\sqrt{lc}x) + j \frac{Z_t}{Z_c} \sin(\omega\sqrt{lc}x)}, \\
 Z_0 &= Z_c \frac{j Z_c \sin(\omega\sqrt{lc}x) + Z_t \cos(\omega\sqrt{lc}x)}{Z_c \cos(\omega\sqrt{lc}x) + j Z_t \sin(\omega\sqrt{lc}x)}.
 \end{aligned} \tag{4.9c}$$

Разумеется, реальные линии передач все же допускают некоторые потери. Медные проводники обладают ненулевым сопротивлением, а емкость между проводниками подвержена утечке. Можно показать, что в данном случае чисто мнимую константу $j\omega\sqrt{lc}$ следует заменить комплексной константой $\gamma = \alpha + j\omega\sqrt{lc}$, где действительная величина α есть функция от удельного сопротивления проводников и *проводимости* изолирующего материала между проводниками. Можно также показать, что

$$\alpha = \frac{r}{2} \sqrt{\frac{c}{l}} + \frac{g}{2} \sqrt{\frac{l}{c}},$$

где r — сопротивление проводника на единицу длины, а g — проводимость диэлектрика (размерность та же, что и «обычной» проводимости) на единицу длины.

В этом случае уравнение (4.9b) можно записать в следующем виде:

$$Z_0 = Z_c \frac{Z_c \sinh \gamma x + Z_t \cosh \gamma x}{Z_c \cosh \gamma x + Z_t \sinh \gamma x}. \tag{4.9d}$$

С этим выражением хорошо знакомы «телеграфисты» (как их называли несколько десятилетий назад): оно позволяет предсказывать величину входного импеданса (короткой) несогласованной линии передачи.

Распространение волны по линии передачи

Вернемся к линии передачи без потерь, показанной на рис. IV.10b, и, используя равенства (4.8) и (4.9a), вычислим отношение напряжений $v_{\Delta x}/v_0$,

где Δx есть длина элементарного Т-образного звена. Использованный метод несколько неортодоксален и допускает некоторые вольности со строгим формализмом; тем не менее, для нашей цели он вполне подходит. Равенство (4.8) в этом случае принимает вид:

$$\frac{v_{\Delta x}}{v_0} = \frac{2\sqrt{\frac{l}{c}} - j\omega l \Delta x}{2\sqrt{\frac{l}{c}} + j\omega l \Delta x}.$$

Умножив числитель и знаменатель на выражение, сопряженное последнему, и отбросив бесконечно малые второго порядка, получим

$$\frac{v_{\Delta x}}{v_0} = \frac{4\frac{l}{c} - 4j\omega l \sqrt{\frac{l}{c}} \Delta x}{4\frac{l}{c}} = 1 - j(\omega \sqrt{lc}) \Delta x. \quad (4.10)$$

Полагая, что $n\Delta x$ есть не что иное, как расстояние по абсциссе от точки x до начала координат, имеем

$$v_x = v_{n\Delta x} = v_0 (1 - j(\omega \sqrt{lc}) \Delta x)^n; \quad (4.11)$$

если при этом положить

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (1 - j(\omega \sqrt{lc}) \Delta x) = e^{-j(\omega \sqrt{lc}) \Delta x},$$

то получим

$$v_x = v_0 e^{-j(\omega \sqrt{lc}) n \Delta x} = v_0 e^{-j\omega \sqrt{lc} x}. \quad (4.12)$$

Представив синусоидальное входное напряжение в виде вращающегося вектора² $v_0 = V e^{j\omega t}$, получим следующее равенство:

$$v_x = V e^{j\omega(t - \sqrt{lc} x)}. \quad (4.13)$$

Это важное утверждение означает, что вектор, представляющий напряжение в точке с координатой x по абсциссе, пульсирует с той же частотой f (или с той угловой частотой $\omega = 2\pi f$), что и входное напряжение, но отстает от этого напряжения на угол θ_x , пропорциональный расстоянию x . Соответствующий коэффициент пропорциональности ($\omega \sqrt{lc}$) называется *постоянной распространения* линии передачи при угловой частоте ω .

²Отсюда, собственно, и термин *угловая частота*.

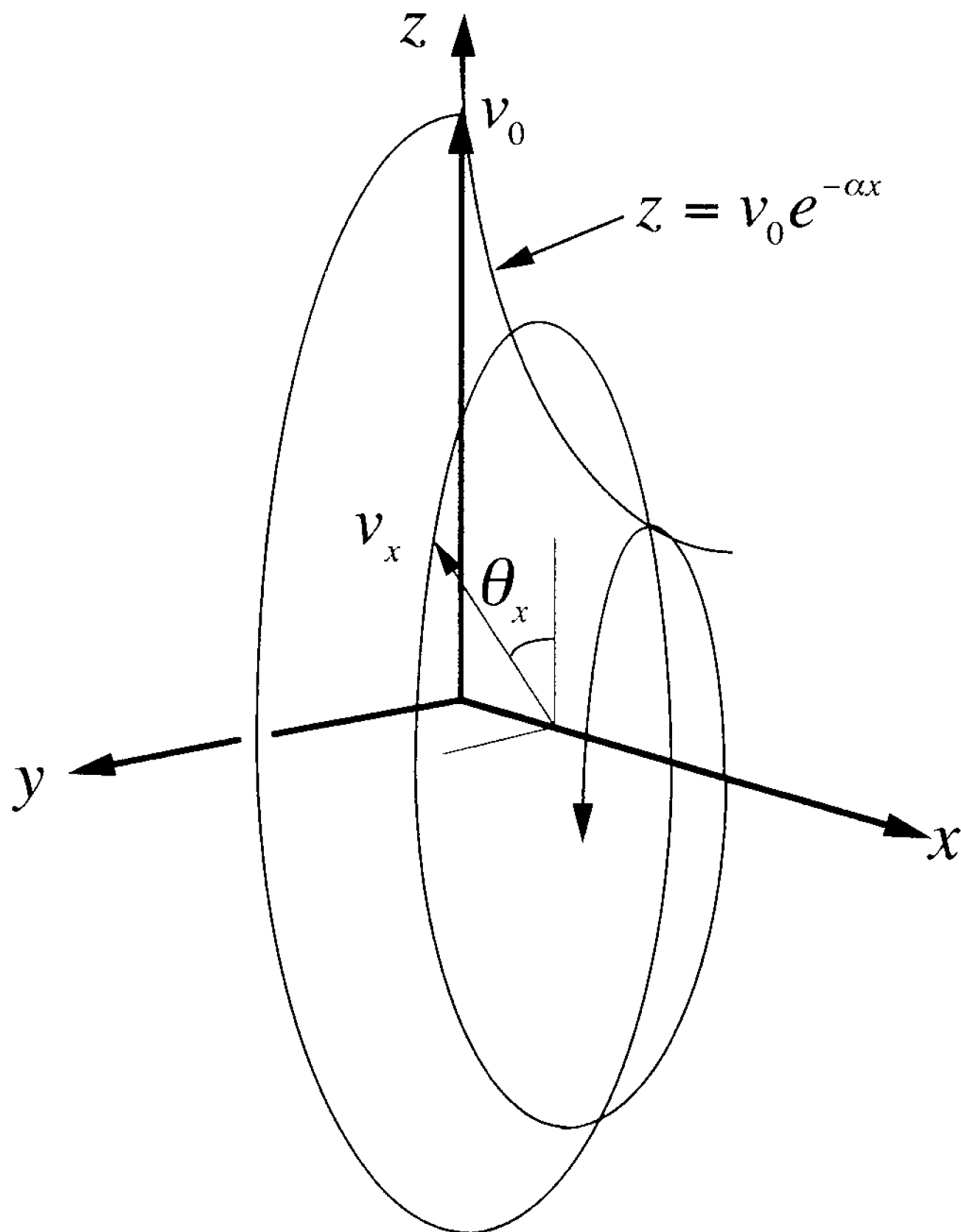


Рис. IV.10d. Распространение волны по линии передачи.

Таким образом, поданный на вход линии сигнал распространяется по ней в виде волны, которая завершает «полный оборот» вокруг оси x в каждой точке, расстояние x до которой от начала координат кратно $= \lambda$, где $(\omega\sqrt{lc})\lambda = 2\pi$, т. е. $\lambda = 2\pi/\omega\sqrt{lc}$. Величина λ называется *длиной волны*.

Если линия передачи не является идеальной, т. е. допускает потери, постоянная распространения равна $\gamma = \alpha + j\omega\sqrt{lc}$, а волновое уравнение принимает вид $v_x = V e^{-\alpha x + j\omega(t - \sqrt{lc}x)}$, свидетельствуя о том, что результирующая волна со временем экспоненциально убывает вдоль оси x , как

показано на рис. IV.10d. Проекция фигуры на плоскость $y - z$ в любой момент времени является не чем иным, как *логарифмической спиралью*. При каждом повороте на 360° радиус спирали уменьшается в $e^{\alpha\lambda}$ раз.

Если смотреть из некоторой удаленной точки на положительной оси x , то спираль вращается против часовой стрелки со скоростью ω радиан в секунду, что составляет превосходную метафору для описания распространения волны.

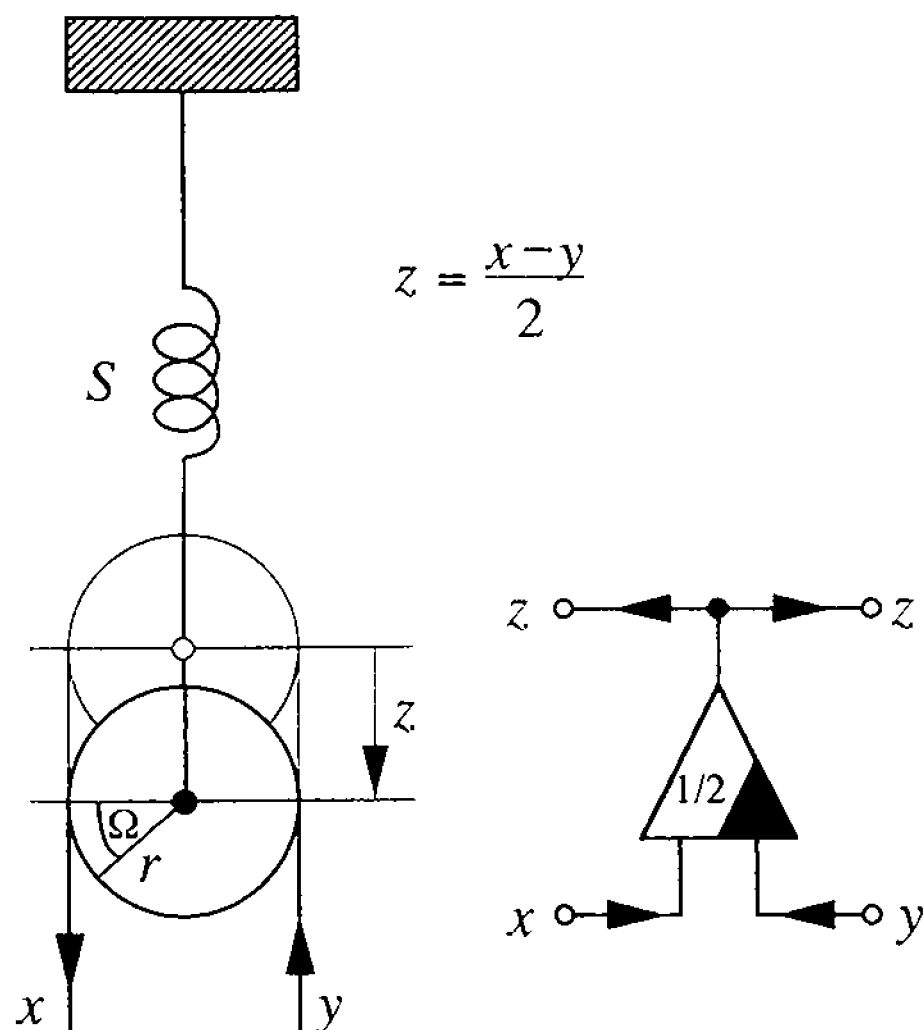


Рис. IV.11. Блок и эквивалентный ему преобразователь.

Лестничные цепи из блоков

Рассмотрим блок, изображенный на рис. IV.11. Ось блока может перемещаться в вертикальном направлении при натяжении охватывающей его нити, приложенном с любой стороны. Предназначение пружины S заключается лишь в обеспечении реакции на натяжение нити и сохранении устойчивости всей конструкции. В нижеследующем обсуждении нас будут занимать только продольные перемещения и повороты блока; стоящие за этим силы мы рассматривать не будем. Введем следующие обозначения: x и y — продольные смещения нити в соответствующих направлениях, показанных на

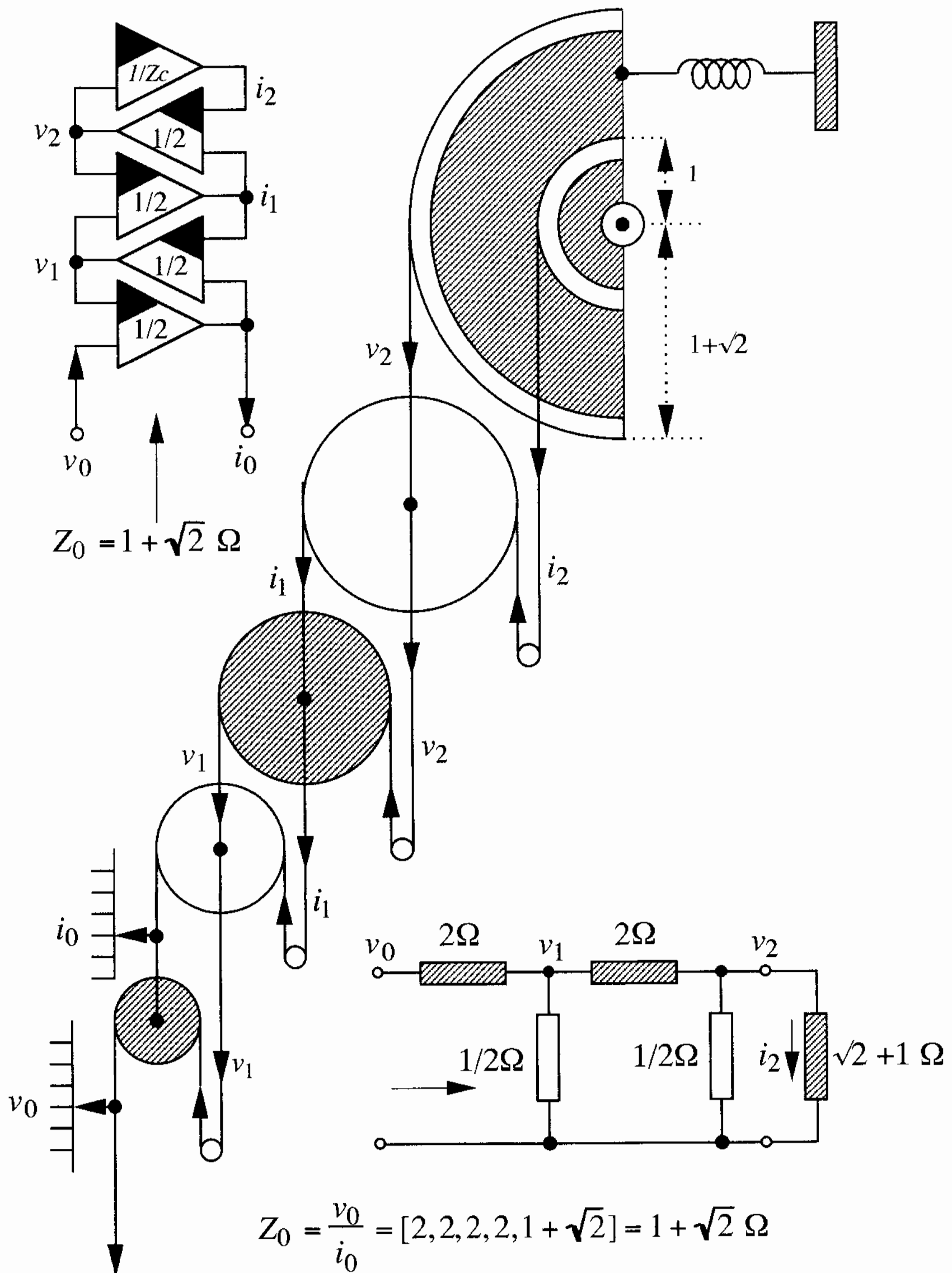


Рис. IV.14. Правильно оконченная лестничная цепь из блоков и эквивалентные ей преобразовательная и резистивная лестницы.

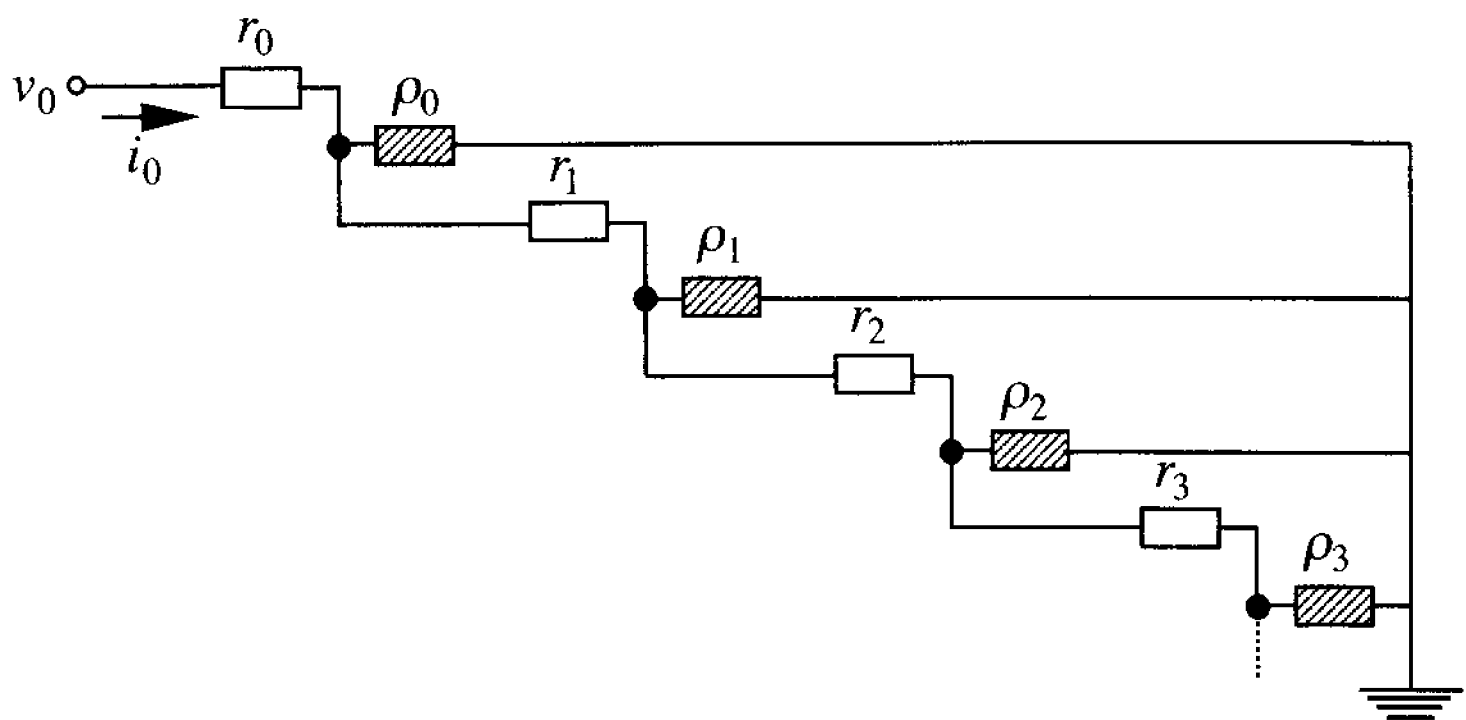
ли. Следующая конструкция (рис. IV.13) построена из трех блоков. Процесс можно продолжать, добавляя все новые и новые блоки. Входной импеданс n -блочной системы определяется выражением $v_0/i_0 = F_{2,n+1}/F_{2,n}$.

Ни одна из построенных в данном разделе цепей не была правильно оконченной. «Характеристический импеданс» этих цепей равен $Z_c = 1 + \sqrt{2}$. Будь цепи правильно оконченными, эта величина совпадала бы со значением входного импеданса. На рис. IV.14 показана правильно оконченная цепь, соответствующая непрерывной дроби $Z_0 = Z_c = [2, 2, 2, 2, Z_c] = 1 + \sqrt{2}$. Ее окончанием служат два жестко соединенных блока с радиусами 1 и $1 + \sqrt{2}$ и общей неподвижной осью; на эти же блоки наматываются свободные концы соответствующих нитей. В такой системе $v_0/i_0 = v_2/i_2 = 1 + \sqrt{2}$.

Заметки на полях

Топологическое сходство

На рис. IV.15 хорошо заметно поразительное *топологическое* сходство между принципиальной схемой электрической цепи лестничного типа и математически описывающей ее поведение непрерывной дробью. Тщательное исследование этой аналогии могло бы пролить некоторый свет на природу соответствующего физического процесса, равно как и на адекватность его математического представления. Начиная рассмотрение с нижнего конца непрерывной дроби, можно видеть, что в природе — а точнее, в размерности — последовательных обратных подходов дробей наблюдается чередование между адмиттансом (т. е. полной проводимостью; заштрихованные прямоугольники в верхней схеме) и импедансом (полным сопротивлением), тогда как все последовательные подходящие дроби имеют одинаковую размерность — размерность импеданса. Пожалуй, еще более наглядно эта метафора проявляется на рис. IV.14.



$$Z_0 = \frac{v_0}{i_0} = r_0 + \frac{1}{\rho_0 + \frac{1}{r_1 + \frac{1}{\rho_1 + \frac{1}{r_2 + \frac{1}{\rho_2 + \frac{1}{r_3 + \frac{1}{\rho_3 + \dots}}}}}}}$$

Рис. IV.15. Топологическое сходство между электрической лестницей и ее непрерывной дробью.

ГЛАВА V

Витые фигуры

В этой главе мы рассмотрим геометрическую метафору периодических непрерывных дробей, которая приведет нас в последующих главах к равноугольной (или логарифмической) и другим спиральям. В процессе рассмотрения мы встретимся с интересными гномонными фигурами — такими, например, как «завиток» Фибоначчи, гомогномонные прямоугольник и треугольник и др.

Витые прямоугольники

Процедура, называемая алгоритмом Евклида, служит для нахождения наибольшего общего делителя двух положительных чисел (см. главу II). Ниже мы воспроизводим этот алгоритм для чисел a_0 и a_1 ($a_0 > a_1$):

$$\begin{aligned}a_0 &= a_1q_0 + a_2, & a_1 &> a_2, \\a_1 &= a_2q_1 + a_3, & a_2 &> a_3, \\a_2 &= a_3q_2 + a_4, & a_3 &> a_4, \\a_3 &= a_4q_3 + a_5, & a_4 &> a_5, \\&\dots \\a_{i-1} &= a_iq_{i-1} + a_{i+1}, & a_i &> a_{i+1}, \\&\dots \\a_{n-1} &= a_nq_{n-1} + 0,\end{aligned}$$

где $q_0, q_1, q_2, \dots$ — целые числа.

Алгоритм Евклида

Рассмотрим изображенный на рис. V.1 прямоугольник $ABCD$ со сторонами a_0 и a_1 . Прямоугольник $CBEF$ со сторонами a_0 и a_1q_0 вписан в прямоугольник $ABCD$ и имеет с ним общую сторону BC . Сторона AE оставшегося прямоугольника $Aefd$ равна a_2 . Затем в $Aefd$ вписывается прямоугольник $AENG$, вертикальная сторона которого AG равна a_2q_1 .

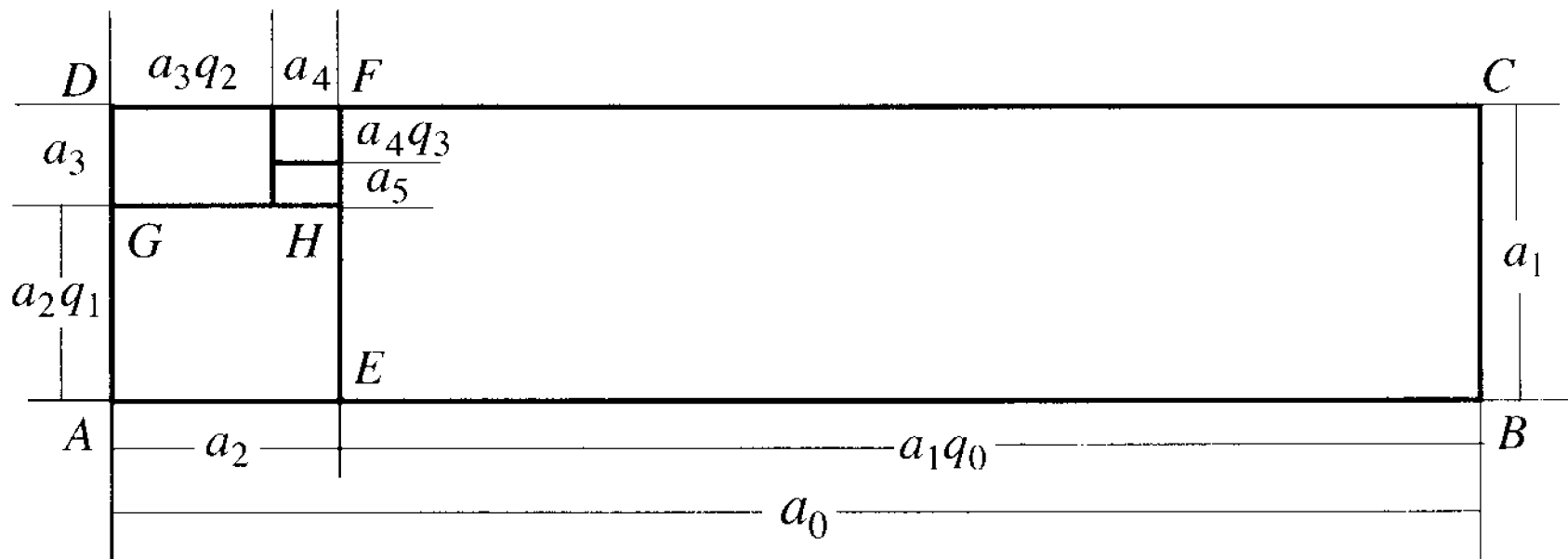
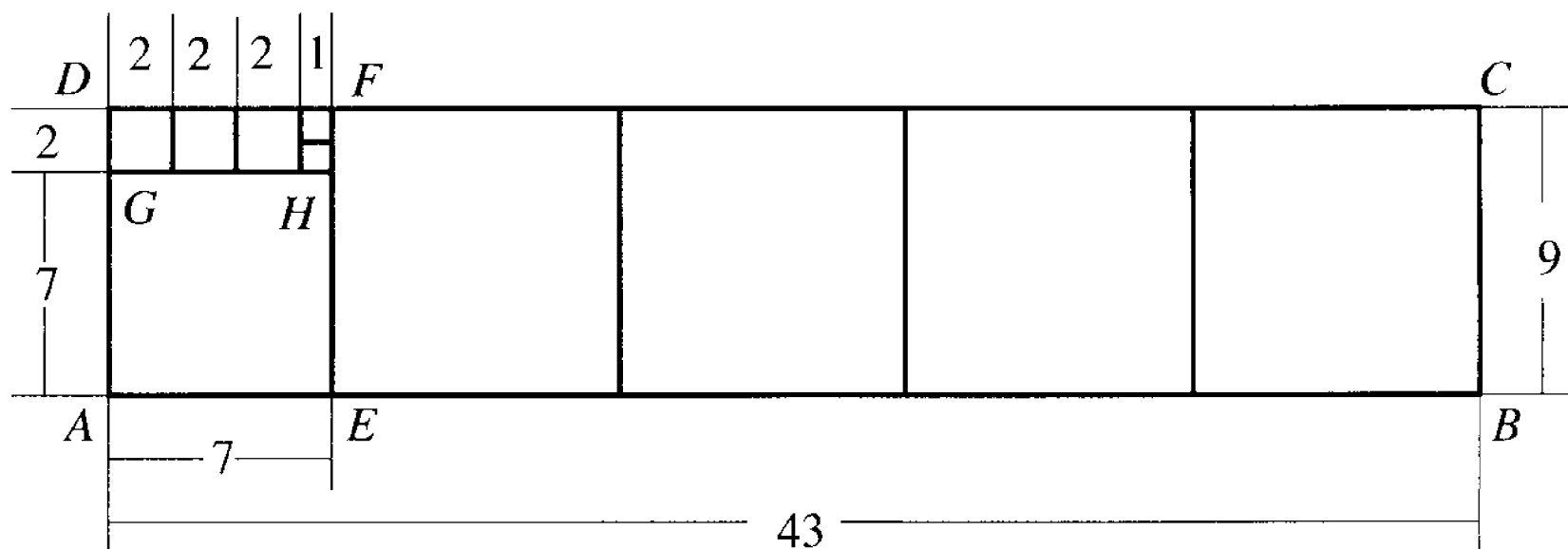


Рис. V.1. Геометрическая метафора для уравнений алгоритма Евклида.

Рис. V.2. Витой прямоугольник с соотношением сторон $43/9$.

Остаток GD равен a_3 . Этот процесс, который без труда экстраполируется и далее, представляет собой геометрическую метафору вышеприведенных уравнений.

Стороны прямоугольника $ABCD$ на рис. V.2 равны 43 и 9. Принято говорить, что такой прямоугольник обладает *горизонтальной пропорцией* (или *h-пропорцией*) $43/9$. Впишем в него, начиная с правого конца, наибольшее возможное количество примыкающих друг к другу квадратов. Получается четыре квадрата, занимающих площадь $EBCF$. Остается прямоугольник $AEDF$ с *вертикальной пропорцией* (или *v-пропорцией*) $9/7$. На данный момент наше построение представляет собой геометрический эквивалент равенства $43 = 4 \times 9 + 7$ или

$$\frac{43}{9} = 4 + \frac{1}{9/7},$$

то есть

$$\rho_3 = \frac{43}{9} = [4, 9/7] = [4, \rho_2].$$

Следующий шаг состоит во вписывании наибольшего количества квадратов в остаточный прямоугольник, начиная снизу. Как выясняется, можно изобразить только один такой квадрат ($AENH$), после чего в левом верхнем углу получаем остаточный прямоугольник $GHFD$ со сторонами 7 и 2 (т. е. с h -пропорцией $7/2$). Это эквивалентно записи

$$\rho_2 = \frac{9}{7} = 1 + \frac{2}{7},$$

то есть

$$\frac{43}{9} = [4, 1, 7/2] = [4, 1, \rho_1].$$

Третий шаг представляет собой эквивалент равенства

$$\rho_1 = \frac{7}{2} = 3 + \frac{1}{2};$$

в результате остается прямоугольник v -пропорции $2/1$. На этом процесс останавливается, так как 2 есть целое число, а мы записываем следующую непрерывную дробь:

$$\frac{43}{9} = [4, 1, 3, \rho_0] = [4, 1, 3, 2].$$

Частное 2 можно, в свою очередь, записать в виде $2 = 1 + (1/1)$, что дает

$$\frac{43}{9} = [4, 1, 3, 1, 1].$$

Отметим изменение направления рассмотрения слева направо и снизу вверх, образующее *завиток, направленный внутрь*, причем движение происходит по часовой стрелке. Прямоугольники, изображенные на рис. V.1–V.3, мы будем называть *витыми прямоугольниками*. Они являются предшественниками спиралей, о которых мы поговорим в главе VIII. Ту же фигуру можно получить, начав с внутренней квадратной затравки и добавляя к ней последовательно прямоугольники с отношением сторон 1, 3, 1, 4 по завитку, направленному *наружу*. Посмотрим, что произойдет, если непрерывная дробь окажется периодической.

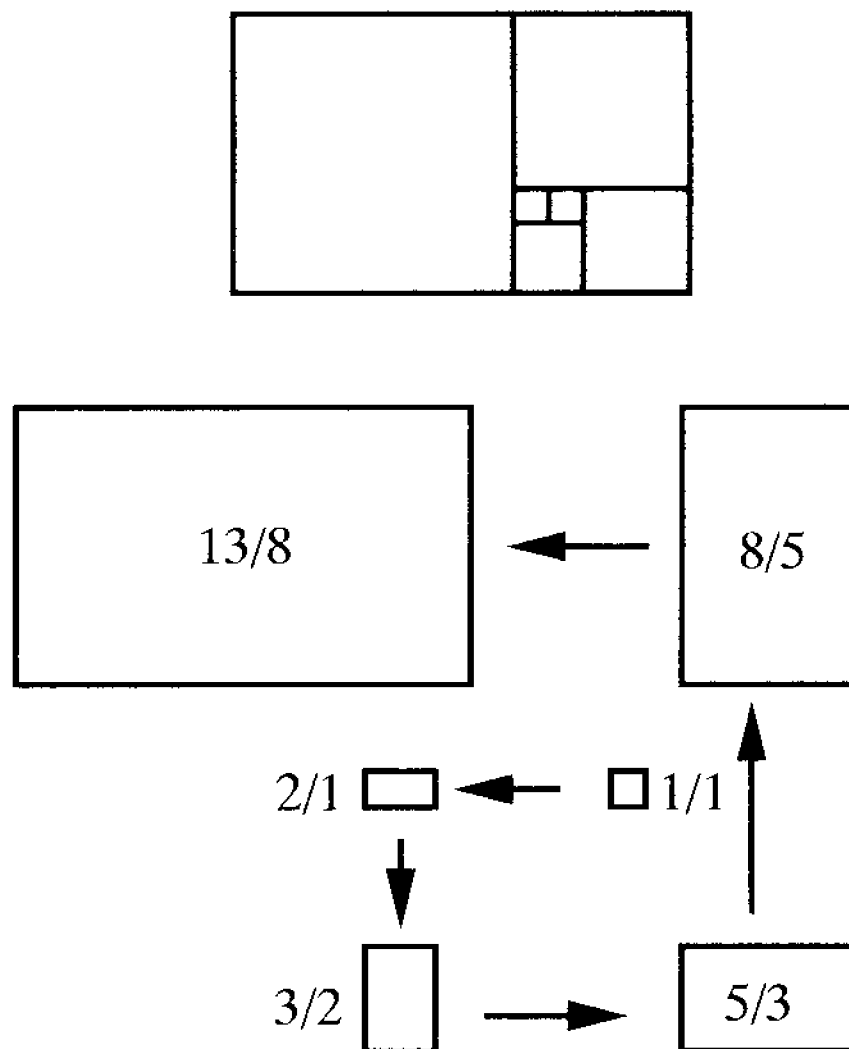


Рис. V.3. Последовательные поколения прямоугольников, соответствующие дроби $[1, 1, 1, 1, 1, 1]$, или завиток Фибоначчи первого порядка.

Моногномонные витые прямоугольники

Направленный наружу завиток на рис. V.3 соответствует непрерывной дроби $[1, 1, 1, 1, 1, 1]$. Начав с внутренней затравки с пропорцией $\rho_0 = 1$ и добавив слева квадрат, получим прямоугольник с h -пропорцией $\rho_1 = 2/1$. Последовательность пропорций такого завитка имеет вид: $1/1, 2/1, 3/2, 5/3, 8/5, 13/8$, что совпадает с последовательностью обратноподходящих дробей этой непрерывной дроби. Последовательность же $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13$, фигурирующая как в числителях, так и в знаменателях, есть не что иное, как последовательность Фибоначчи порядка 1.

На рис. V.4 представлен прямоугольник, соответствующий непрерывной дроби $[2, 2, 2, 2]$, обратноподходящие дроби которой образуют последовательность $2/1, 5/2, 12/5, 29/12$. Последовательность $1, 2, 5, 12, 29$ является последовательностью Фибоначчи порядка 2. Оба эти примера иллюстрируют неправильно оконченные ППД (или дроби с неправильной затравкой). Каждая обратноподходящая дробь таких дробей отличается от соседних в последовательности. Перейдем теперь к правильно оконченным ППД (т. е. к дробям с правильной затравкой). Рассмотрим в качестве примера правильно оконченную простую периодическую непрерывную дробь

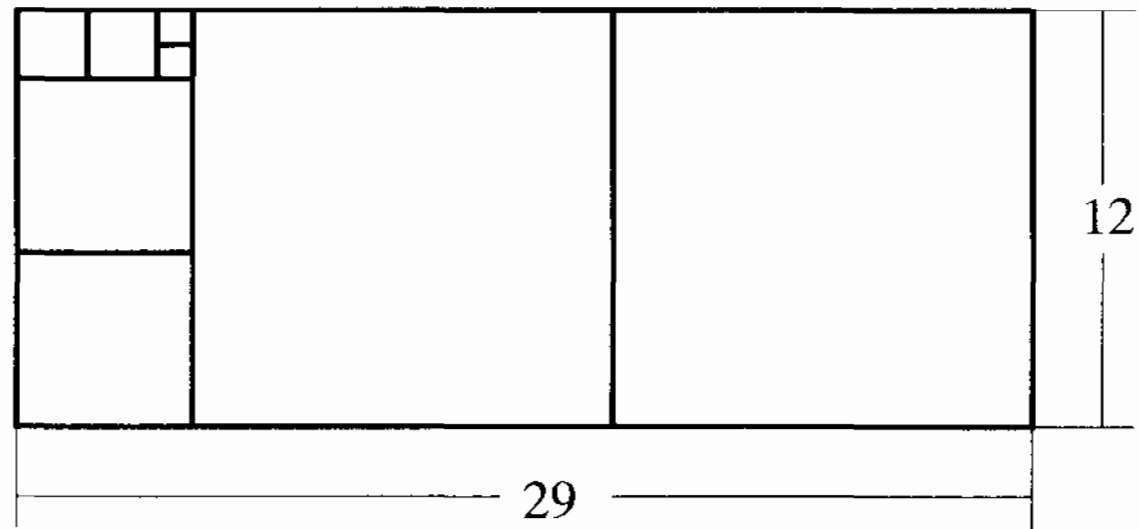


Рис. V.4. Витой прямоугольник $[2, 2, 2, 2]$ или завиток Фибоначчи порядка 2.

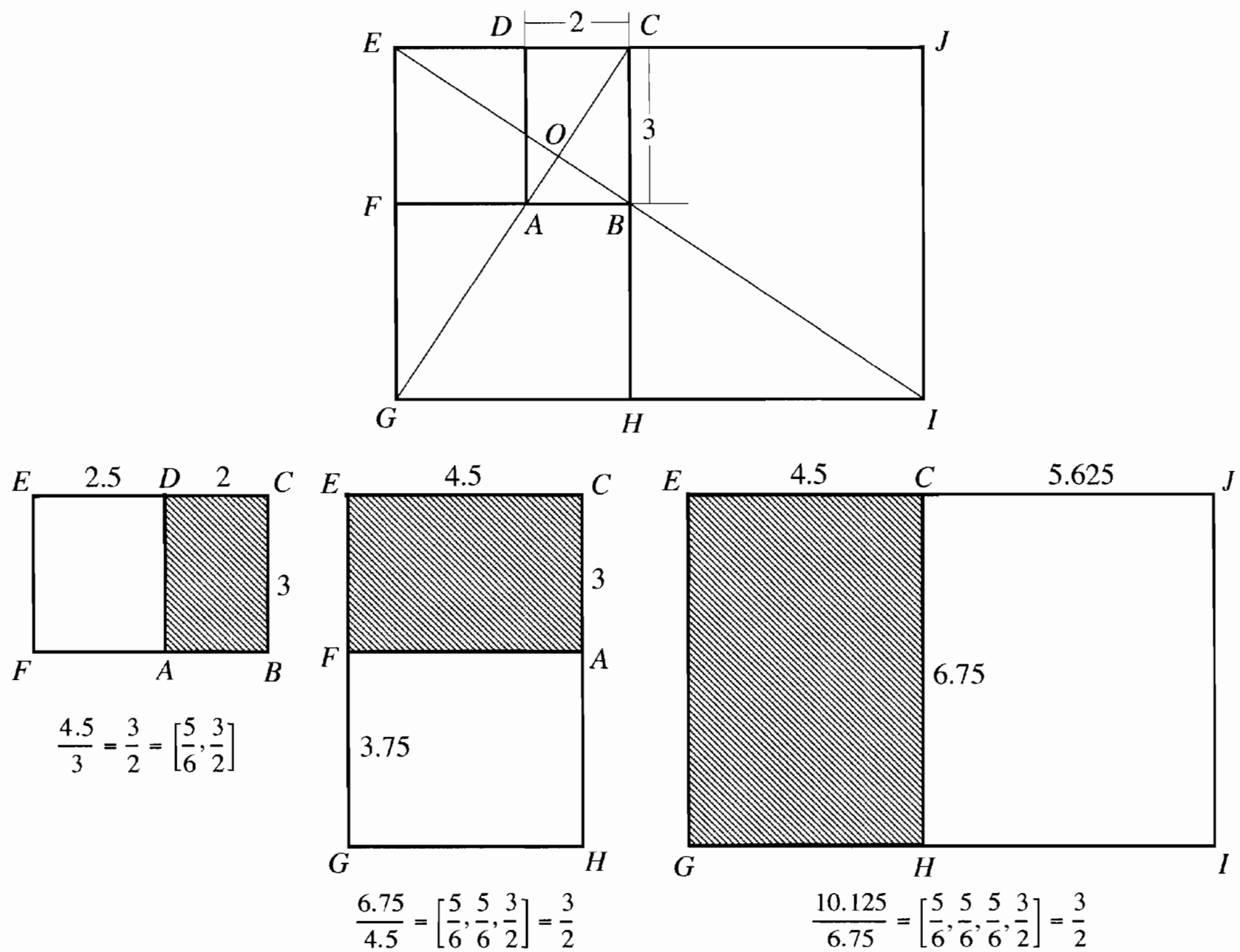


Рис. V.5a. Затравочный прямоугольник $3/2$ и гномон $5/6$.

с неполным частным $5/6$ и затравкой $3/2$ (рис. V.5a):

$$\Phi_{5/6} = \frac{3}{2} = \left[\frac{5}{6}, \frac{5}{6}, \frac{5}{6}, \dots, \frac{3}{2} \right].$$

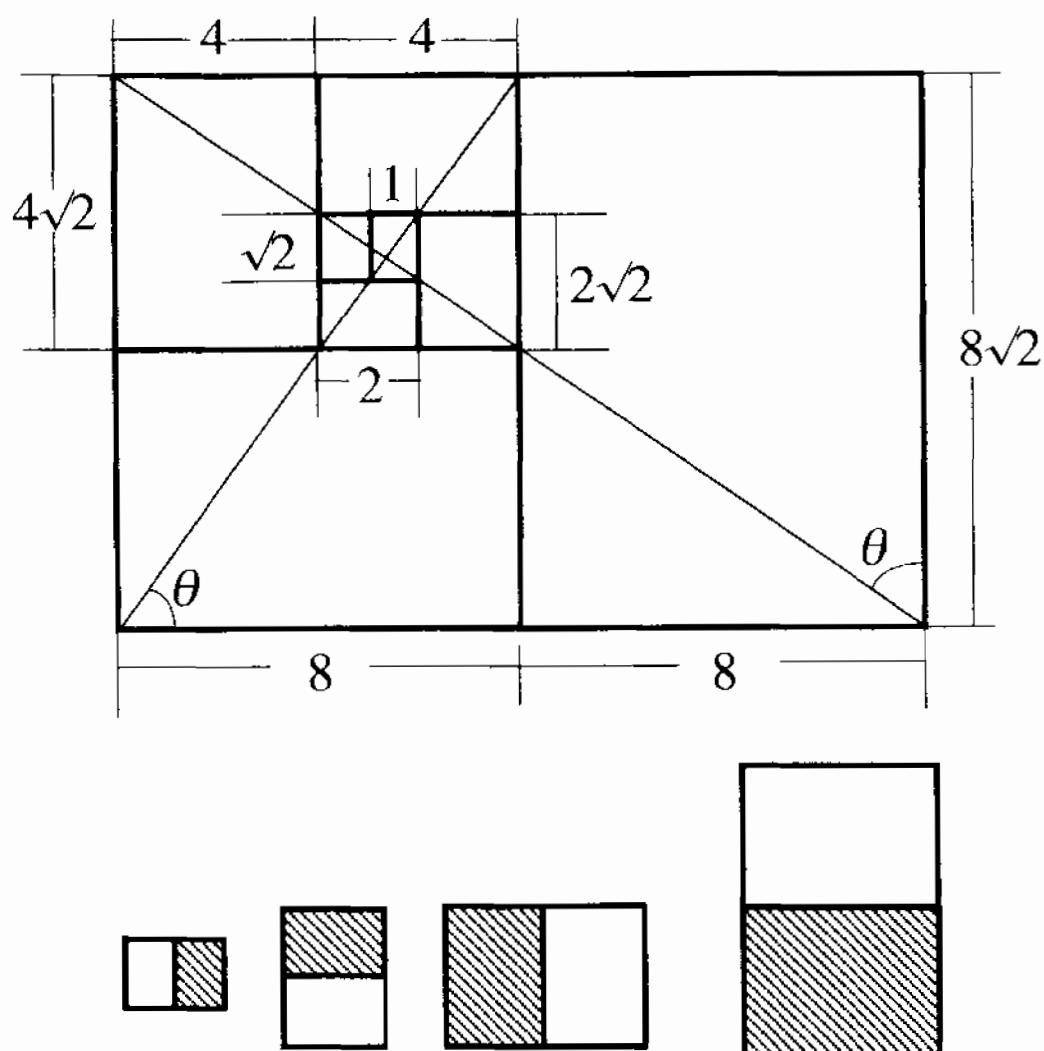
затравочный прямоугольник $\sqrt{2}$ и гномон $1/\sqrt{2}$

Рис. V.5b. Гомогномонный прямоугольник.

Начав с внутреннего прямоугольника-затравки $ABCD$ с v -пропорцией $3/2$, добавим к нему слева прямоугольник $ADEF$ с h -пропорцией $5/6$. Его высота равна 2,5, основание равно 3. Получившийся прямоугольник $BCEF$ обладает h -пропорцией $3/2$, тождественной пропорции затравки. Продолжая строить направленный наружу завиток, мы видим, что при добавлении каждого нового гномона пропорции $5/6$ получается прямоугольник, подобный затравке, но развернутый на 90° . Возьмем еще одну простую периодическую непрерывную дробь (ППД) с правильной затравкой, неполным частным $1/\sqrt{2}$ и затравкой $\sqrt{2}$ (рис. V.5b):

$$\Phi_{1/\sqrt{2}} = \sqrt{2} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2} \right].$$

Начав с внутреннего прямоугольника-затравки с v -пропорцией $\sqrt{2}$, добавим к нему слева точно такой же прямоугольник. При дальнейшем построении направленного наружу завитка площадь прямоугольника на каждом этапе удваивается, а отношение длин сторон (вертикальное или горизонтальное) остается постоянным и равным $\sqrt{2}$. Таким образом, прямоугольник с про-

порцией $\sqrt{2}$ является собственным гномоном. Такие фигуры называются *гомогномными*. Близкое к иррациональному $\sqrt{2}$ отношение длин сторон демонстрирует стандартный лист французской писчей бумаги (официальный формат: $29,7 \times 21$ см). Такой формат имеет одно замечательное свойство: сколько бы раз вы ни складывали лист бумаги пополам, отношение длин сторон будет оставаться прежним, $\sqrt{2}$. Каждый новый лист (ин-фолио, ин-кварто, ин-октаво) имеет то же отношение сторон, что и оригинал, давая в результате радующую глаз гармонию и, возможно, экономическую выгоду. В основе немецкого формата обозначения светочувствительности фотоматериалов DIN также лежит описанное свойство гомогномного прямоугольника.

На рис. V.6 показан общий вид строящегося наружу витого прямоугольника с затравкой Φ_m и гномоном m . Диагонали пересекаются под прямым углом, причем $\operatorname{tg} \theta_m = \Phi_m$. Заметим, что такие диагонали невозможно провести в случае неправильно оконченных ППД — таких, например, как на рис. V.3. Это свойство моногномных витых прямоугольников легко выводится из элементарной геометрии. Очевидно, что витую фигуру можно называть моногномной только в том случае, если она содержит правильную затравку (либо бесконечна). Свойства ее спиральной огибающей будут рассмотрены в следующей главе.

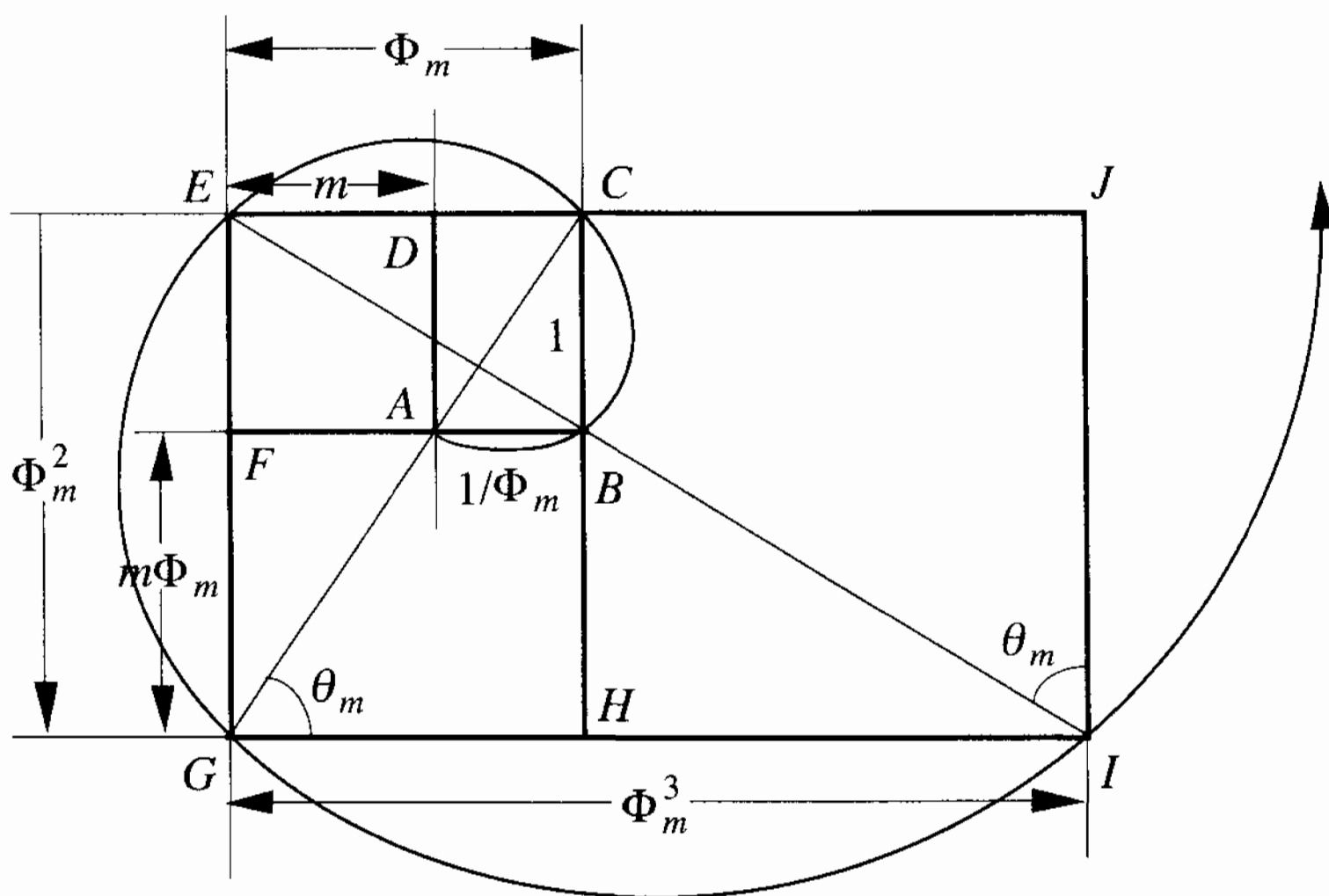


Рис. V.6. Прямоугольный моногномный завиток, направленный наружу.

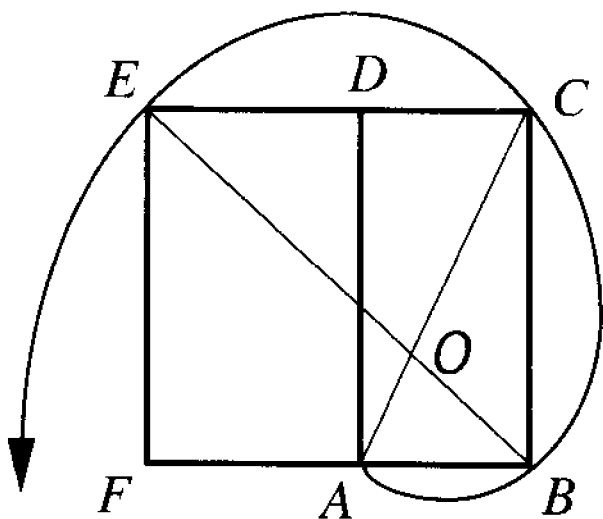


Рис. V.7a. Левосторонний завиток.

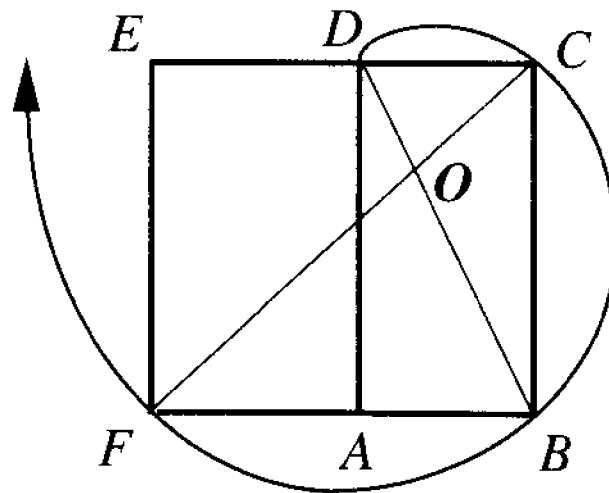


Рис. V.7b. Правосторонний завиток.

Дигномонные витые прямоугольники

На рис. V.7a и V.7b прямоугольник $ABCD$ вписан в прямоугольник $BCEF$ и имеет с ним общую сторону BC . Через вершины этих двух прямоугольников можно провести четыре диагонали и сгруппировать их в пары, по одной от каждого первичного прямоугольника. Всего таких пар четыре. Из них две пары таковы, что составляющие их диагонали пересекаются в одной из вершин прямоугольника. Диагонали двух оставшихся пар пересекаются где-то внутри вписанного прямоугольника. Мы рассмотрим только две последние пары, а именно: отрезки AC , BE на рис. V.7a и отрезки BD , CF на рис. V.7b. Точка пересечения диагоналей O называется точкой начала или полюсом. Из шести вершин, показанных на рисунке, на выбранные нами диагонали попадают только четыре. Эти особые вершины называются *диагональными вершинами*, а отрезок прямой, соединяющий полюс O с какой-либо из диагональных вершин, называется *радиусом*.

Начав на рис. V.7a с диагональной вершины, ближайшей к точке начала O , т. е. с вершины A , и посетив три остальные диагональные вершины в порядке увеличения радиуса, мы опишем расширяющуюся спираль $ABCE$, причем двигаться мы будем против часовой стрелки. Спираль, распространяющуюся против часовой стрелки, принято называть *левосторонней*. Если стартовать в точке D на рис. V.7b, то двигаться вдоль расширяющейся спирали нам придется в направлении по часовой стрелке. Такая спираль представляет собой зеркальное отражение предыдущей, развернутое на 180° , и называется *правосторонней*.

Отрезок прямой, соединяющий две соседние диагональные вершины, называется *хордой*. Двигаясь на рис. V.7c от точки A против часовой стрелки, измерим длины последовательных хорд AB , BC , CE и положим $BC/AB = \phi_s$ и $CE/BC = \phi_r$. Величина ϕ_s является в этом случае v -пропорцией прямоугольника $ABCD$, а ϕ_r — h -пропорцией прямоуголь-

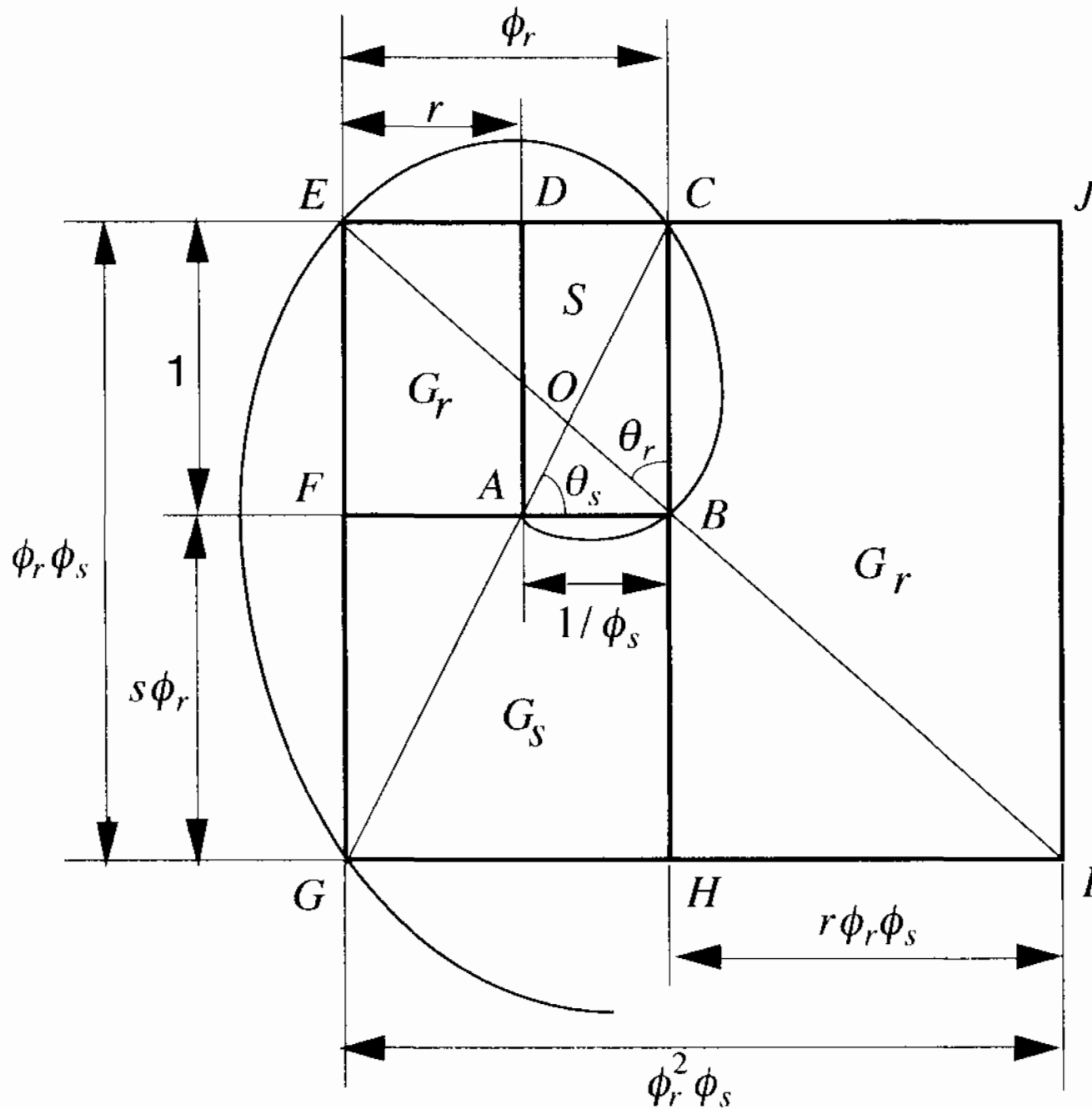


Рис. V.7с. Дигномонные витые прямоугольники.

ника $BCEF$. По мере расширения спирали в процесс вступает все большее количество прямоугольников. Необходимо, таким образом, договориться о правиле, с помощью которого можно было бы определить пропорцию прямоугольника. Прямоугольник, две из смежных сторон которого являются последовательными хордами спирали, будем считать *первичным*. Его первую (в направлении разворачивания спирали) хорду назовем *высотой*, а вторую — *основанием*. Пропорцию прямоугольника можно теперь определить через отношение «высота/основание». Эта пропорция горизонтальна, когда горизонтальна высота прямоугольника, и вертикальна в противном случае. Приравняем длину общей стороны BC к единице, тогда $AB = 1/\phi_s$, а $CE = \phi_r$. Величины r и s определим следующим образом:

$$r = \phi_r - \frac{1}{\phi_s} \quad s = \phi_s - \frac{1}{\phi_r}. \quad (5.1)$$

Число r , на первый взгляд, совпадает с длиной отрезка DE (в действитель-

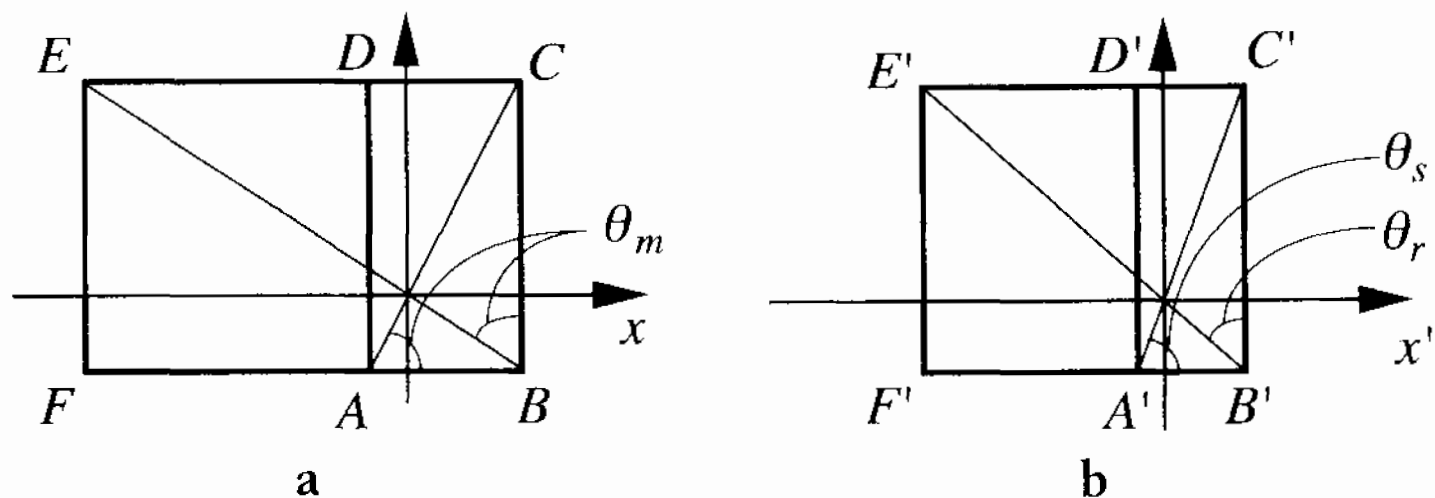


Рис. V.8. Дигномонный витой прямоугольник — проекция моногномонного прямоугольника.

ности, оно равно отношению DE/BC), тогда как число s на данном этапе в геометрическом смысле несколько менее очевидно. Поскольку числа r , ϕ_r , ϕ_s могут быть только действительными и положительными, мы вправе записать

$$\phi_r \phi_s > 1, \quad (5.2)$$

$$s\phi_r = r\phi_s = \phi_r \phi_s - 1; \quad (5.3)$$

число s , таким образом, также положительно. Вообразим, что плоскость, которой принадлежит фигура, изображенная на рис. V.8a и представляющая собой моногномонный витой прямоугольник с затравкой Φ_m , повернута вокруг оси Oy на некоторый угол a , измеряемый в горизонтальной плоскости. Теперь построим перпендикулярную проекцию спирали, огибающей новую фигуру, на прежнюю плоскость, как показано на рис. V.8b. В результате этих манипуляций получим следующие соотношения:

$$A'B' = AB \cos a, \quad C'E' = CE \cos a,$$

$$\phi_r = \frac{C'E'}{C'B'} = \frac{CE \cos a}{1} = \Phi_m \cos a,$$

$$\phi_s = \frac{C'B'}{A'B'} = \frac{1}{AB \cos a} = \frac{\Phi_m}{\cos a},$$

$$m = DE, \quad r = DE \cos a, \quad s = \frac{DE}{\cos a},$$

$$\phi_r \phi_s = \Phi_m^2, \quad \frac{\phi_r}{\phi_s} = \frac{r}{s} = \cos^2 a.$$

Дигномонная спираль получается в результате горизонтального сжатия моногномонной спирали; при этом угол $AOB \leq \pi/2$. При повороте вокруг оси x мы получили бы спираль, сжатую в вертикальном направлении.

Возвращаясь к фигуре на рис. V.7с, продолжим сторону EF вниз до ее пересечения с диагональю CA в точке G и построим прямоугольник $CEGH$. Имеем

$$\frac{EG}{DA} = \frac{CE}{CD} = \phi_r \phi_s;$$

следовательно,

$$FG = \phi_r \phi_s - 1 = s \phi_r = s \times CE$$

и

$$s = \frac{FG}{CE}.$$

Отметим следующую закономерность (построение начинается с затравки S):

Прямоугольник $R = (S + G_r)$ с h -пропорцией $\phi_r =$
 $=$ (прямоугольник-затравка S с v -пропорцией ϕ_s) +
 $+$ (прямоугольник G_r с h -пропорцией ϕ_r);
 Прямоугольник $(S + G_r + G_s)$ с v -пропорцией $\phi_s =$
 $=$ (прямоугольник $S + G_r$ с h -пропорцией ϕ_r) +
 $+$ (прямоугольник G_s с v -пропорцией ϕ_s);
 Прямоугольник $(S + G_r + G_s + G_{r'})$ с h -пропорцией $\phi_r =$
 $=$ (прямоугольник $S + G_r + G_s$ с v -пропорцией ϕ_s) +
 $+$ (прямоугольник $G_{r'}$ с h -пропорцией ϕ_r).

Вышеописанный процесс можно продолжать бесконечно, генерируя прямоугольники с чередующимися отношениями длин сторон ϕ_r и ϕ_s посредством добавления прямоугольников $G_r, G_s, G_{r'}, \dots$. Получаемая в результате спираль огибает последовательные первичные прямоугольники, соединяя их последовательные диагональные вершины. Возвращаясь к равенствам (5.1), можно записать

$$\phi_r = r + \frac{1}{\phi_s}, \quad \phi_s = s + \frac{1}{\phi_r}. \quad (5.4)$$

Эти выражения дают следующие периодические непрерывные дроби:

$$\phi_r = [r, s, r, s, \dots, r, \phi_s], \quad (5.5)$$

соответствующую прямоугольнику-затравке с v -пропорцией ϕ_s , и

$$\phi_s = [s, r, s, r, \dots, s, \phi_r], \quad (5.6)$$

соответствующую прямоугольнику-затравке с h -пропорцией ϕ_r . Аналогичным образом можно записать

$$\phi_s = [s, r, s, r, \dots, r, \phi_s], \quad (5.7)$$

$$\phi_s = [s, r, s, r, \dots, s, \phi_r]. \quad (5.8)$$

Эти выражения, вероятно, уже знакомы читателю по главе III, где с их помощью описывались дигномонные непрерывные дроби: $\alpha = r$, $\alpha' = s$, $\phi_{\alpha, \alpha'} = \phi_r$, $\phi_{\alpha', \alpha} = \phi_s$.

Утверждение $\phi_s = [s, \phi_r]$ можно интерпретировать геометрически следующим образом. При вертикальном добавлении к первичному прямоугольнику с h -пропорцией ϕ_r прямоугольника с v -пропорцией s получается новый первичный прямоугольник с v -пропорцией ϕ_s . Это утверждение останется верным и если поменять в нем местами горизонтальное и вертикальное и символы r и s . Построение следующего прямоугольника с h -пропорцией ϕ_r соответствует дроби $\phi_r = [r, s, \phi_r] = [r, \phi_s]$. L-образная фигура Γ_s на рис. V.9a, образуемая объединением прямоугольников G_r и G_s , является *гномоном* прямоугольника S , так как при ее добавлении к S получается геометрически подобный S прямоугольник. Таким образом, прямоугольники G_s и G_r с рис. V.7с можно назвать *полугномонами*. Гномон Γ'_s равен гномону Γ_s , увеличенному в $\phi_r \phi_s$ раз. Аналогично, L-образная фигура Γ_r на рис. V.9b, образуемая объединением прямоугольников G_s и G'_r , является гномоном прямоугольника R , где $R = S + G_r$. Гномон Γ'_r равен гномону Γ_r , увеличенному в $\phi_r \phi_s$ раз.

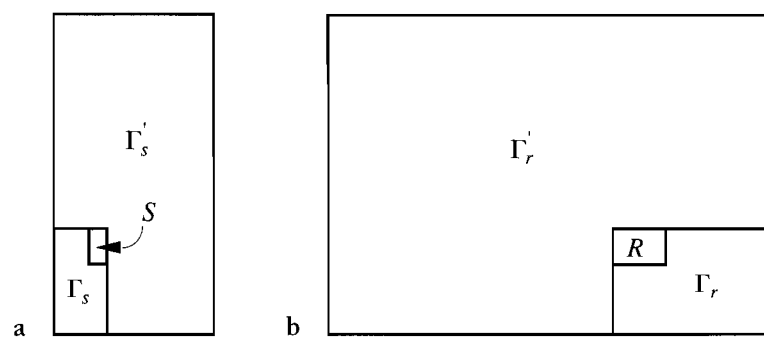


Рис. V.9. Гномоны и полугномоны.

На рис. V.10a изображен дигномонный витой прямоугольник при $r = 1$, $s = 1/2$. На рис. V.10b затравкой является внутренний квадрат со стороной 1, тогда как на рис. V.10с — прямоугольник 1×2 . Для прямоугольной затравки с соотношением сторон $\Phi_m > 1$ всегда существует ненулевой гномон $t = \Phi_m - 1/\Phi_m$, у квадратной же затравки *моногомона* быть не может, зато она допускает бесконечное множество *дигномонов*, каждый из которых удовлетворяет равенству $r - s - rs = 0$.

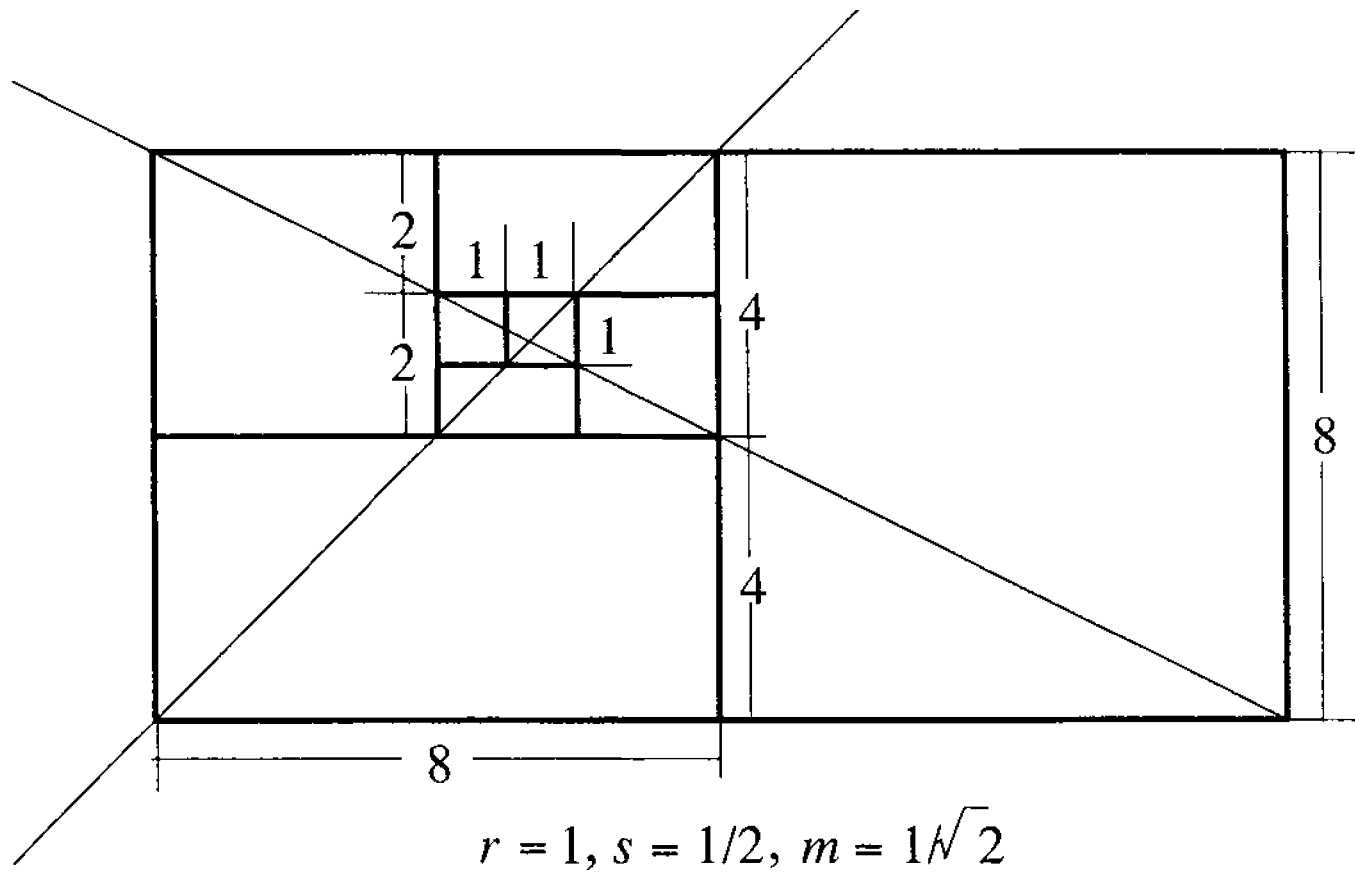
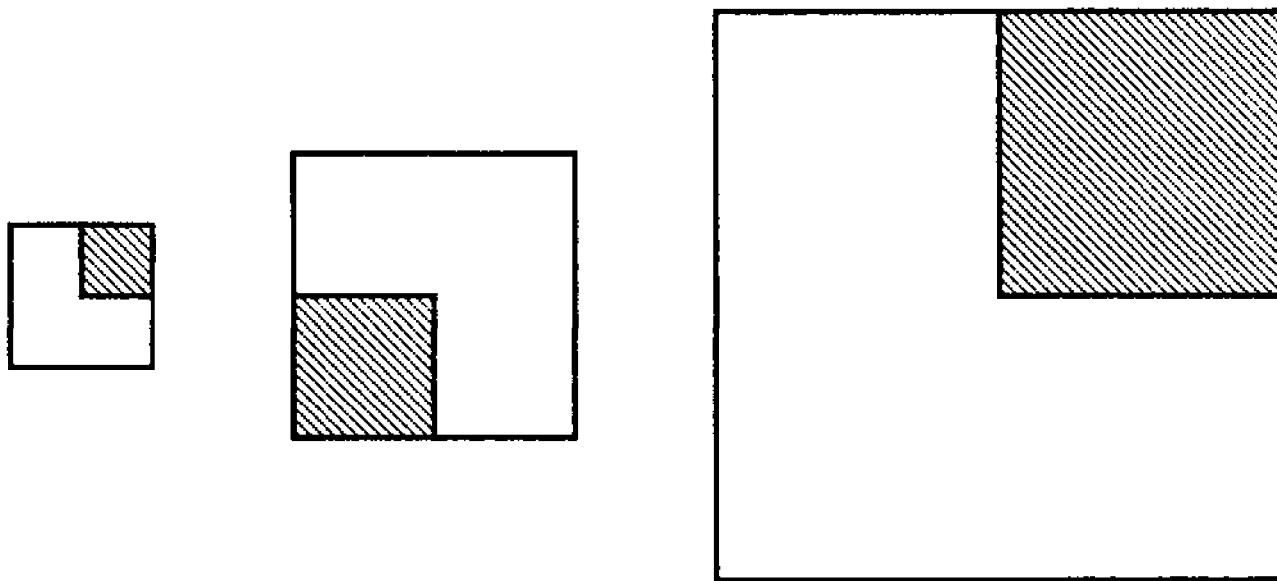


Рис. V.10a. Дигномонный витой прямоугольник при $r = 1, s = 1/2$.



$$\phi_s = \left[\frac{1}{2}, 1, \dots, \frac{1}{2}, 1, 1 \right] = \left[\frac{1}{2}, 1, \dots, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 2 \right] = 1$$

Рис. V.10b. Построение прямоугольника, изображенного на рис. V.10a, из квадратной заправки.

Самоподобие

Рассмотрим правильно оконченную дигномонную ППД

$$\phi_{\alpha, \alpha'} = [\alpha, \alpha', \dots, \omega, \omega', \phi_{\omega, \omega'}]. \quad (5.9a)$$

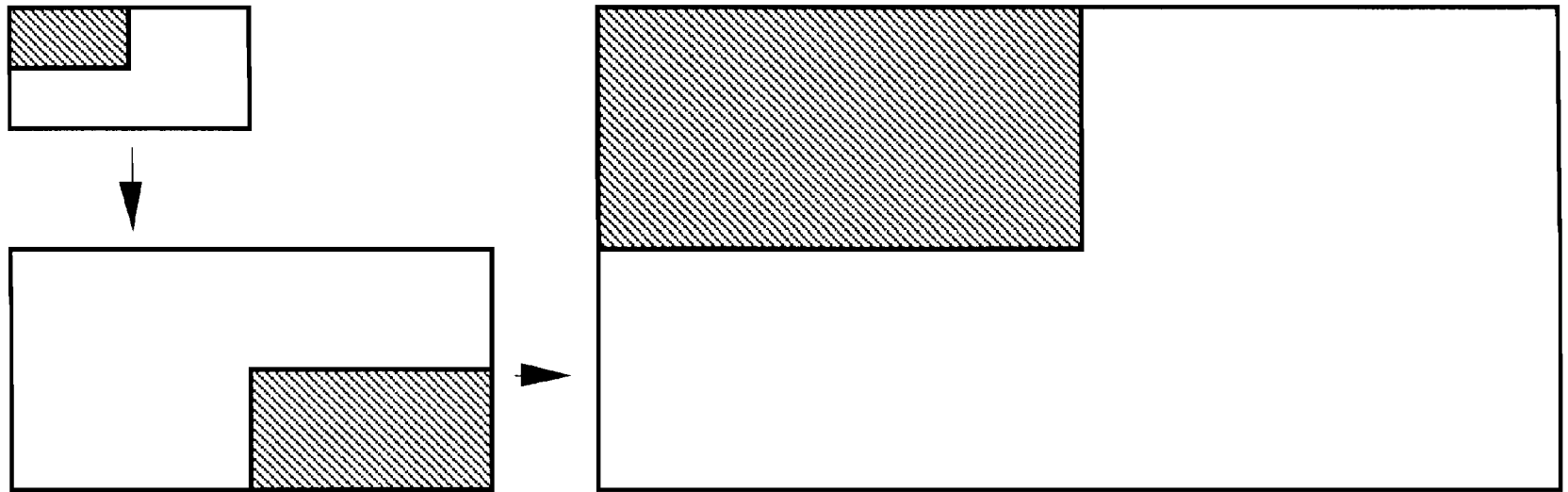


Рис. V.10с. Построение прямоугольника, изображенного на рис. V.10а, из прямоугольной затравки.

Можно записать

$$\phi_{\alpha, \alpha'} = [\overbrace{\alpha, \alpha', \alpha, \dots, \mu, \mu'}^p, \overbrace{[\mu, \mu', \dots, \omega, \omega', \phi_{\omega, \omega'}]}^q] = \quad (5.9b)$$

$$= [\alpha, \alpha', \dots, \mu, \mu', \phi_{\mu}], \quad (5.9c)$$

где каждый из обобщающих символов μ, μ' обозначает либо α , либо α' . Ниже приводится геометрическая интерпретация этих выражений.

Начав с затравки $\phi_{\omega, \omega'}$ и совершив $p + q$ итераций, получаем прямоугольник с пропорцией $\phi_{\alpha, \alpha'}$. Начав с той же затравки, получаем после q итераций прямоугольник с пропорцией $\phi_{\mu, \mu'}$, который становится затравкой для p дополнительных итераций, приводящих в итоге все к тому же прямоугольнику с пропорцией $\phi_{\alpha, \alpha'}$. Дробь (5.9) правильно окончены, т. е. любой первичный прямоугольник, возникающий в процессе построения, можно рассматривать в качестве новой затравки, причем от этой произвольно выбранной затравки построение можно вести в любом направлении, образуя расширяющуюся или сужающуюся спираль. В обоих направлениях процесс бесконечен, поскольку и сам прямоугольник $\phi_{\alpha, \alpha'}$ также можно считать затравкой. Предположим, что мы уже совершили достаточно большое число итераций в каком-либо из направлений. Предположим также, что у нас имеется некий фотокопировальный аппарат, с помощью которого можно увеличивать или уменьшать получаемую картину в точности в $\phi_{\alpha, \alpha'} \phi_{\alpha', \alpha} = \Phi_m^2$ раз. Если увеличить или уменьшить нашу фигуру в любое кратное указанному количество раз, напечатать результат на прозрачной бумаге, а затем наложить его на исходную фигуру, то мы увидим, что обе фигуры полностью совпадают, за исключением некоторых выступов по краям, так как точность нашего рисунка по необходимости конечна. Добейся мы в обо-

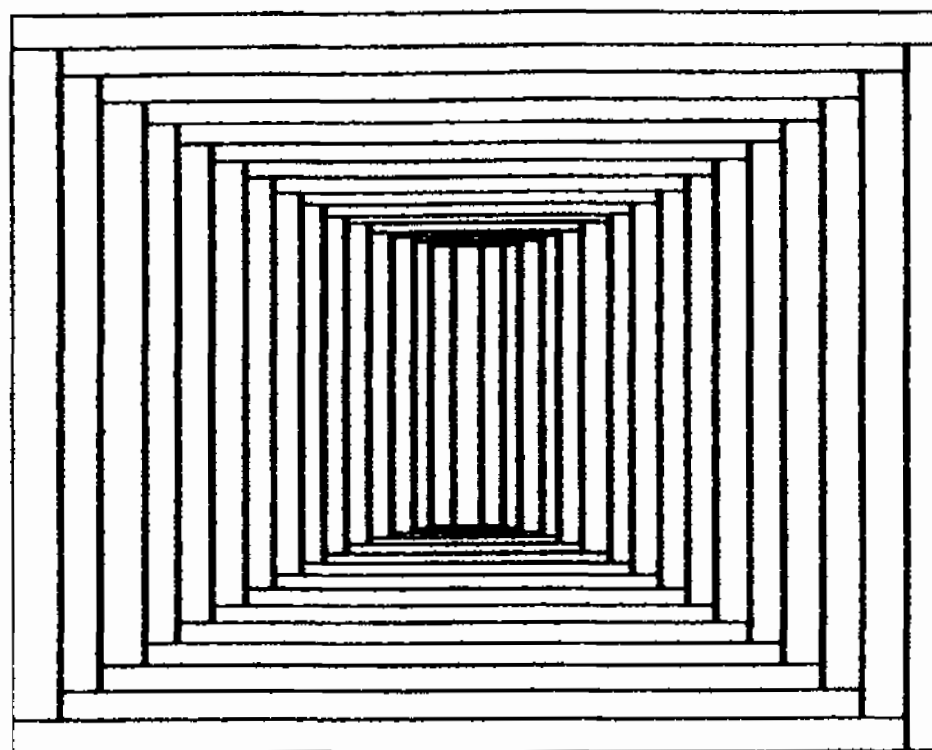


Рис. V.11a. Дигномонные витые прямоугольники с неправильной затравкой.

их направлениях бесконечной точности, совпадение было бы абсолютным, а фигуры неотличимы одна от другой.

В случае моногномных витых прямоугольников увеличение или уменьшение фигуры в Φ_m раз дает совпадение обеих фигур при каждом повороте на 90° в любом направлении. Такой характер самоподобия составляет самую сущность спиралей и вызывает восхищение уже не у первого поколения математиков; не избежал этой участи и Бернулли, считавший спирали чудесными кривыми.

Витые прямоугольники с неправильной затравкой

Осознавая, что наша терминология семантически может показаться в некотором роде двусмысленной, все же уточним: отношение длин сторон прямоугольника-затравки представляет собой, по сути дела, *окончание* непрерывной дроби. Термин «окончание» (оконечная нагрузка) хорошо подходит для обозначения физического импеданса, помещаемого в «конец» электрической цепи или линии передачи, тогда как термин «затравка» представляется более естественным при описании процессов роста. Нам уже известно, что при больших значениях n , вне зависимости от окончания ϕ_τ , верно следующее:

$$\phi = [\alpha, \alpha', \alpha, \dots, \omega, \omega', \phi_\tau] \xrightarrow{\text{при больших } n} \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha'}} \Phi_m = \phi_{\alpha, \alpha'}.$$

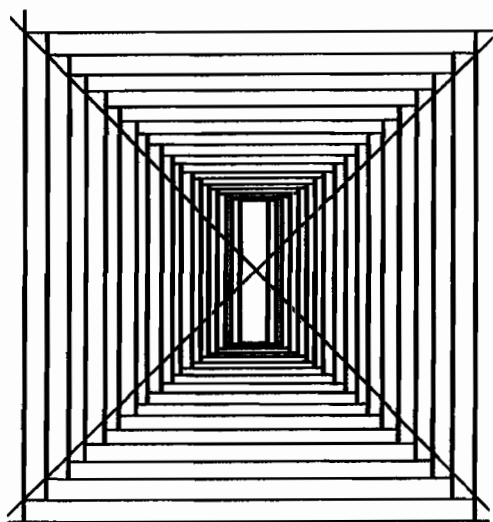


Рис. V.11b. Моногномонные витые прямоугольники с неправильной заправкой.

Можно предположить, что если начать построение с произвольной заправки с пропорцией ϕ_τ , то с каждой последующей итерацией отношение длин сторон прямоугольника будет приближаться к $\phi_{\alpha, \alpha'}$ или $\phi_{\alpha', \alpha}$, в зависимости от того, было число итераций четным или нет. На рис. V.11a показан дигномонный расширяющийся завиток при $\alpha = 0,07$, $\alpha' = 0,035$ и пропорции прямоугольника-заправки $\phi_\tau = 10$. Этим значениям соответствует $D \approx 20,709237$, т.е. $\phi_{\alpha, \alpha'} \approx 1,4496466$ и $\phi_{\alpha', \alpha} \approx 0,7248233$. Вычисленные значения являются пропорциями двух наиболее удаленных от центра прямоугольников, к которым столь изящно устремляются последовательные первичные прямоугольники. Фигура на рис. V.11b получена итерациями моногномонного расширяющегося завитка при $\phi_\tau = 5$, $m = 0,05$, что соответствует $\Phi_m \approx 1,02531245$. К этому значению приближаются пропорции внешних первичных прямоугольников уже после нескольких итераций. Предлагаем читателю самостоятельно поразмышлять о перпендикулярности асимптот в этом последнем случае.

Два витых треугольника

Очевидно, что витыми могут быть не только прямоугольники. На рис. V.12a изображен витой равносторонний треугольник (моногомонная фигура). При каждом повороте на 60° длина хорды увеличивается в 2 раза, тогда как радиус, соединяющий полюс O с вершинами $A, B, C, D, \dots$, увеличивается во столько же раз при каждом повороте на 120° . Гномоном равностороннего треугольника ABC является трапеция $ACDE'$. На рис. V.12b представлен витой равнобедренный прямоугольный треугольник. Этот треугольник оказывается тождественным своему гномону и, следовательно, является гомогномонным. Можно идентифицировать две различные конфигурации: $ABCDE$ и $A'B'C'D'E'$. В обеих конфигурациях длина хорды удваивается при каждом повороте на 90° . О других витых многоугольниках мы поговорим после рассмотрения золотого и серебряного сечений.

Заметки на полях

Еще раз о линиях передачи

Витые фигуры на рис. V.11b аналогичны электрическим линиям передачи, описанным в главе IV. Если конечная нагрузка линии передачи

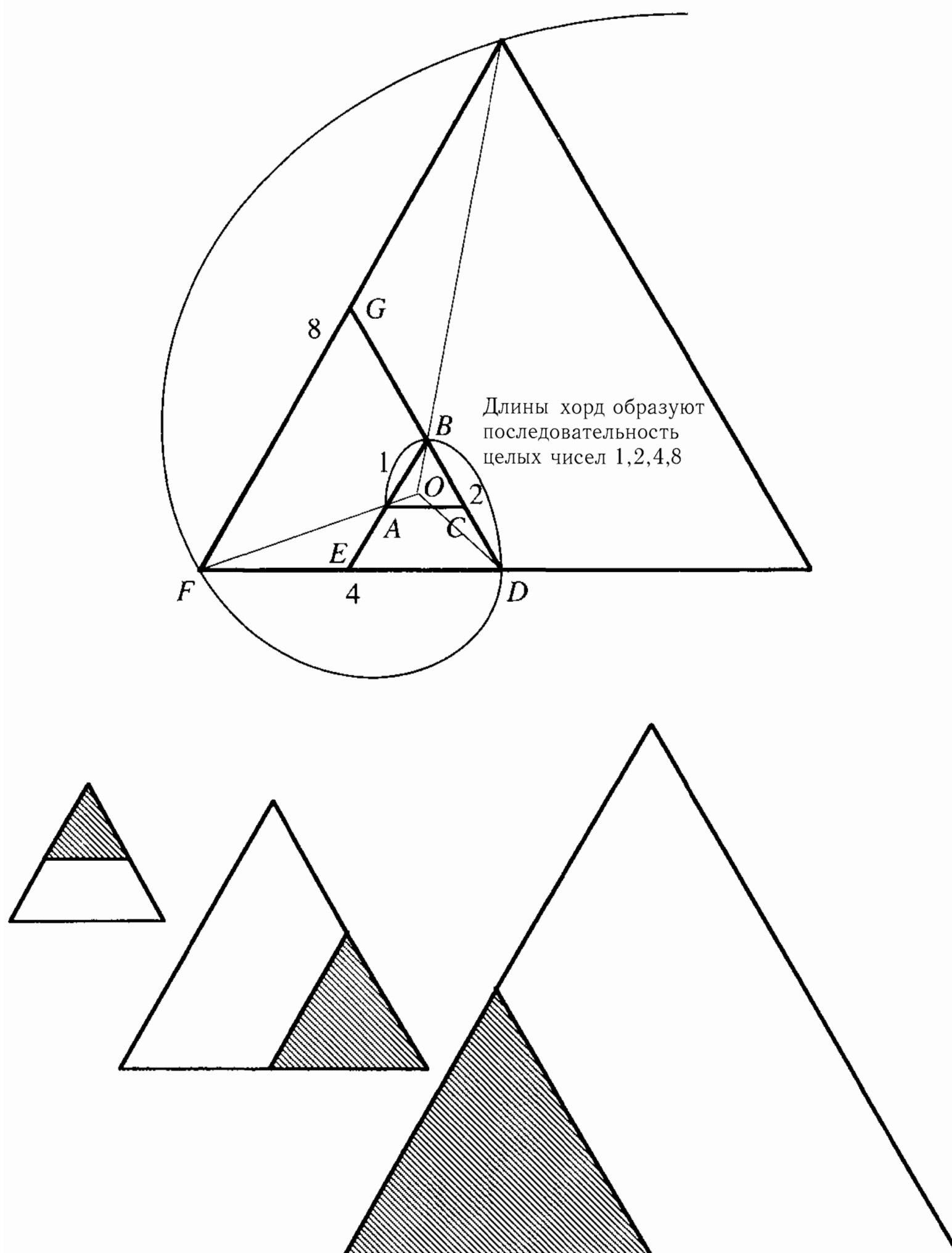


Рис. V.12а. Витой равносторонний треугольник.

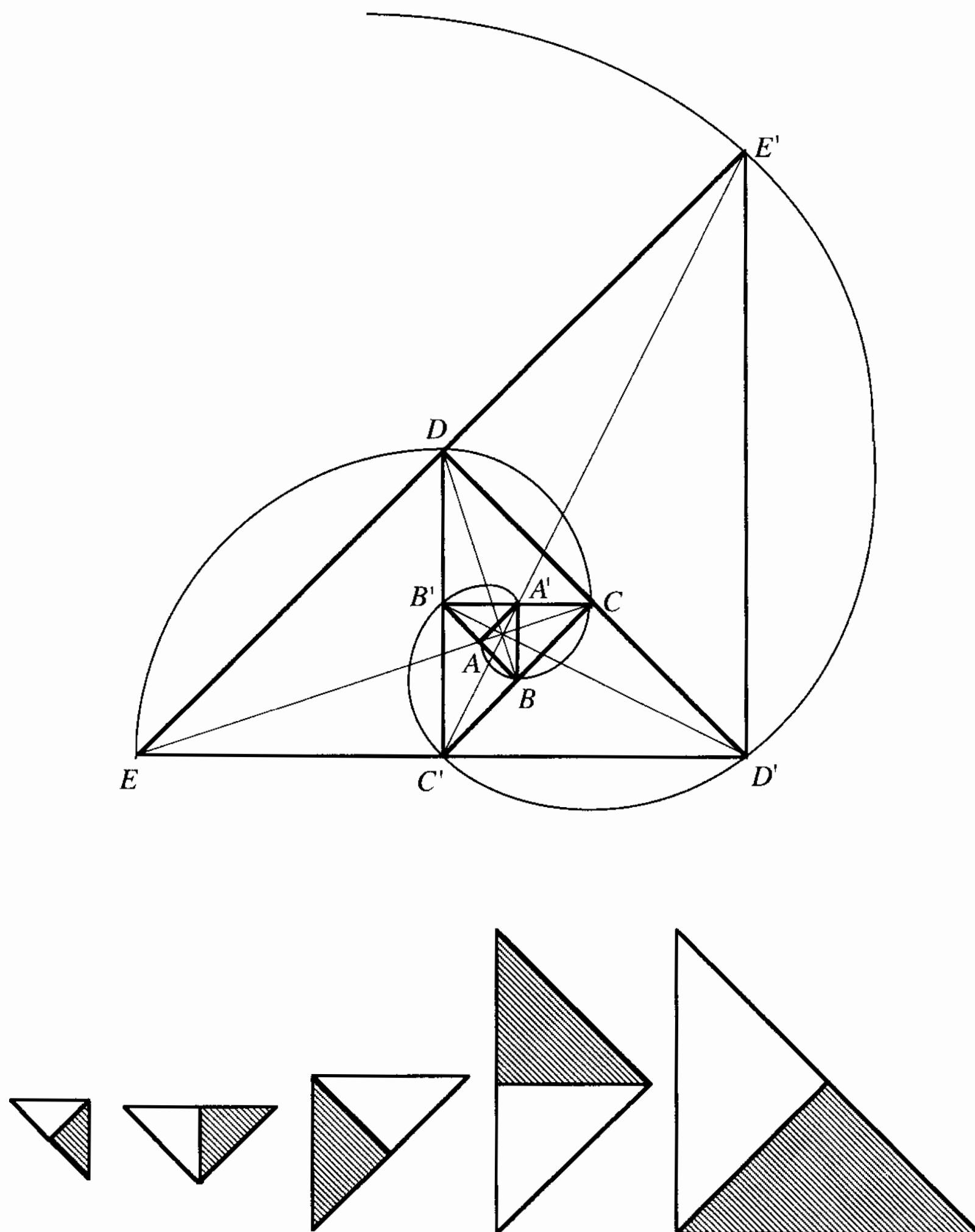


Рис. V.12b. Витой гомогномонный треугольник.

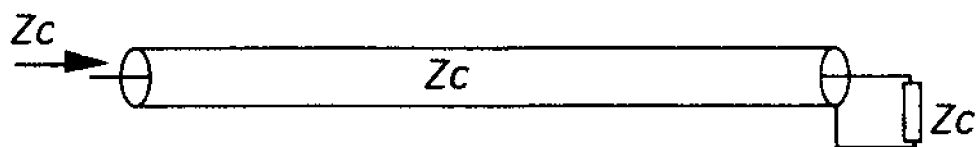


Рис. V.13а. Правильно оконченная линия передачи.

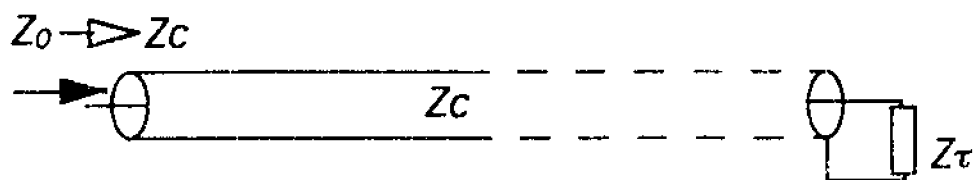


Рис. V.13b. Неправильно оконченная линия передачи.



Рис. V.13с. Бесконечная линия передачи.

в точности совпадает с ее *характеристическим импедансом* Z_c , то входной импеданс линии также равен этому значению и линия называется *согласованной* или *правильно оконченной* (рис. V.13а). Этому утверждению соответствует выражение $\Phi_m = [\underbrace{m, m, \dots, m}_n, \Phi_m]$. Если импеданс на-

грузки Z_r не совпадает с характеристическим импедансом, то входной импеданс линии Z_0 не равен ни одному из этих значений и линия называется *несогласованной* или *неправильно оконченной*. По мере увеличения длины такой линии значение входного импеданса приближается к значению характеристического импеданса, независимо от величины импеданса нагрузки (рис. V.13b). Этому утверждению соответствует, в свою очередь, выражение $[\underbrace{m, m, m, \dots, m}_n] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi_m$. Входной импеданс бесконечно длинной

линии передачи равен ее характеристическому импедансу (рис. V.13с).

ГЛАВА VI

Золотое сечение

Геометрия таит в себе два великих сокровища. Одно из них — теорема Пифагора, другое — деление отрезка на две части в крайнем и среднем отношении. Первое подобно слитку золота, второе же — драгоценному камню.

(Иоганн Кеплер)

Число, вот уже несколько веков не дающее покоя математикам, архитекторам, философам, музыкантам и естествоиспытателям, есть положительный корень уравнения

$$\Phi_1^2 - \Phi_1 - 1 = 0, \quad (6.1a)$$

равный

$$\Phi_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618033989. \quad (6.1b)$$

Это число известно как *золотое сечение*, *золотое отношение* или же *божественная пропорция*. В дальнейшем вместо Φ_1 мы будем пользоваться символом ϕ , общепринятым в математической литературе для обозначения золотого сечения. На букву ϕ начинается имя Фидия, украсившего Парфенон своими великолепными скульптурами. Любопытно, что, согласно легенде, чрезмерная любовь к золоту подвигла Фидия на кражу большого количества этого драгоценного металла, в результате чего он попал в тюрьму, где и умер.

Из уравнения (6.1a) следует, что

$$\phi = \sqrt{1 + \phi} = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \phi}} = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \phi}}} = \dots, \quad (6.2a)$$

и можно показать, что к ϕ сходится выражение (6.2b):

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}} \rightarrow \phi. \quad (6.2b)$$

Аналогично,

$$\sqrt[3]{1 + 2\sqrt[3]{1 + 2\sqrt[3]{1 + 2\sqrt[3]{\dots}}}} \rightarrow \phi. \quad (6.2c)$$

Непрерывные дроби (6.3a) и (6.3b) демонстрируют похожие сходимости:

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\phi}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\phi}}} = \dots \quad (6.3a)$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}}} \rightarrow \phi. \quad (6.3b)$$

Рассмотрим следующую последовательность, уходящую в бесконечность в обоих направлениях:

$$\dots, \frac{1}{\phi^3}, \frac{1}{\phi^2}, \frac{1}{\phi}, 1, \phi, \phi^2, \phi^3, \dots \quad (6.4a)$$

Подставив $\phi^2 = 1 + \phi$, можно переписать ее в следующем виде:

$$\dots, (2\phi - 3), (2 - \phi), (\phi - 1), 1, \phi, (1 + \phi), (1 + 2\phi), (2 + 3\phi), \dots \quad (6.4b)$$

Целочисленные коэффициенты в вышеприведенной последовательности суть не что иное, как члены F_i последовательности Фибоначчи, где $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ и $F_{i+1} = F_{i-1} + F_i$ (см. табл. VI.1). Несложно убедиться, что общий член последовательности (6.4b) равен

$$\phi^i = \phi F_i + F_{i-1}; \quad (6.5a)$$

Таблица VI.1. Значения $F_{1,i} = F_i$ для $i = -3 \div 11$

i	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
F_i	2	-1	1	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

этот результат можно также доказать индукцией по i . Отсюда следует, что ϕ является действительным положительным решением уравнения

$$x^i - F_i x - F_{i-1} = 0 \quad (6.5b)$$

при всех значениях i . Например,

$$x^3 - 2x - 1 = 0, \quad x^5 - 5x - 3 = 0.$$

Каждый из членов последовательностей (6.4a) и (6.4b) является суммой двух предыдущих членов, отношение двух последовательных членов всегда одинаково. Эту уникальную последовательность принято называть *золотой последовательностью*. Можно записать

$$\phi = \frac{1 + \phi}{\phi} = \frac{1 + 2\phi}{1 + \phi} = \frac{2 + 3\phi}{1 + 2\phi} = \frac{3 + 5\phi}{2 + 3\phi} = \frac{5 + 8\phi}{3 + 5\phi} = \dots \quad (6.5c)$$

В уравнении (6.5a) общий член ϕ^i выражается через числа Фибоначчи, в уравнении же (6.6a), которое впервые было получено при изучении последовательностей Фибоначчи, имеет место обратная операция:

$$F_i = \frac{\phi^i - \left(-\frac{1}{\phi}\right)^i}{\phi + \frac{1}{\phi}} = \frac{\phi^i - (1 - \phi)^i}{2\phi - 1}. \quad (6.6a)$$

Отсюда можно вывести знаменитое выражение, полученное в 1718 году де Муавром:

$$F_i = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^i - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^i \right). \quad (6.6b)$$

При больших i уравнение (6.6a) дает

$$F_i \approx \frac{\phi^i}{2\phi - 1} \quad (6.6c)$$

и

$$\phi \approx \frac{F_{i+1}}{F_i}, \quad (6.6d)$$

а также

$$\phi^i \approx 2F_{i+1} - F_i. \quad (6.6e)$$

Например,

$$(6.6c) \rightarrow \frac{\phi^{10}}{2\phi - 1} \approx \frac{122,9918693}{2,236067977} \approx 55,00363368, \text{ тогда как } F_{10} = 55,$$

$$(6.6d) \rightarrow \frac{F_{11}}{F_{10}} = \frac{89}{55} = 1,6181818\dots \text{ и } \frac{F_{25}}{F_{24}} = \frac{75\,025}{46\,368} \approx 1,618033989,$$

$$(6.6e) \rightarrow 2F_{11} - F_{10} = 2 \times 89 - 55 = 123, \text{ тогда как } \phi^{10} \approx 122,9918693.$$

От чисел к геометрии

Рис. VI.1 иллюстрирует один из нескольких способов построения прямоугольника, отношение длин сторон которого равно золотому сечению, с помощью линейки и циркуля. Сначала начертим два прямых отрезка OA и OD единичной длины, затем построим прямоугольный треугольник OAD , в котором $AD = 2$. Длина гипотенузы OD составит $\sqrt{5}$ единиц. Если теперь провести окружность радиуса OD с центром в точке O , то можно построить два прямоугольника $ABCD$ и $BCEF$, как показано на рисунке. Аспектное отношение (отношение длины длинной стороны к длине короткой) каждого из этих прямоугольников равно золотому сечению.

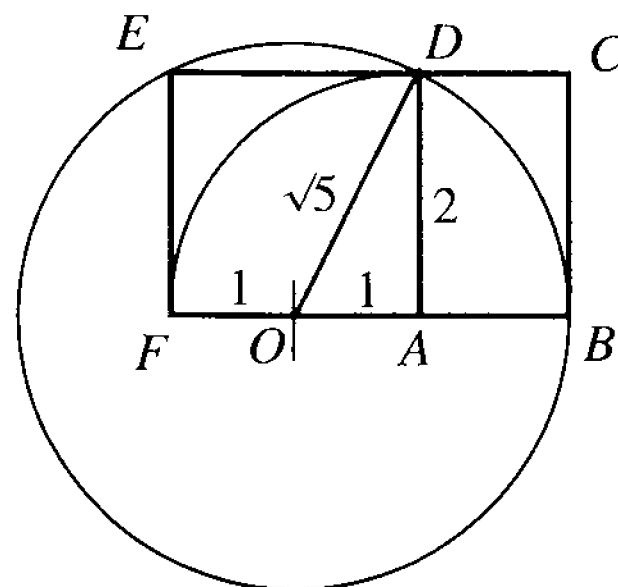


Рис. VI.1. Построение золотых прямоугольников.

Если к длинной стороне «божественного» прямоугольника добавить квадратный гномон, то полученный при этом прямоугольник также будет божественным. Иными словами,

$$\frac{\text{длина}}{\text{ширина}} = \frac{\text{длина} + \text{ширина}}{\text{длина}}.$$

Если рассечь (поэтому, собственно, оно и называется *сечением*) отрезок BF (рис. VI.1) на отрезки AB и AF таким образом, чтобы «среднее отношение» AF/AB было равно ϕ , то «крайнее отношение» BF/AF также будет равно ϕ . Эквивалентное утверждение: мантисса золотого сечения $\phi' = 0,6180339\dots$ такова, что верно равенство $1 + \phi' = 1/\phi'$.

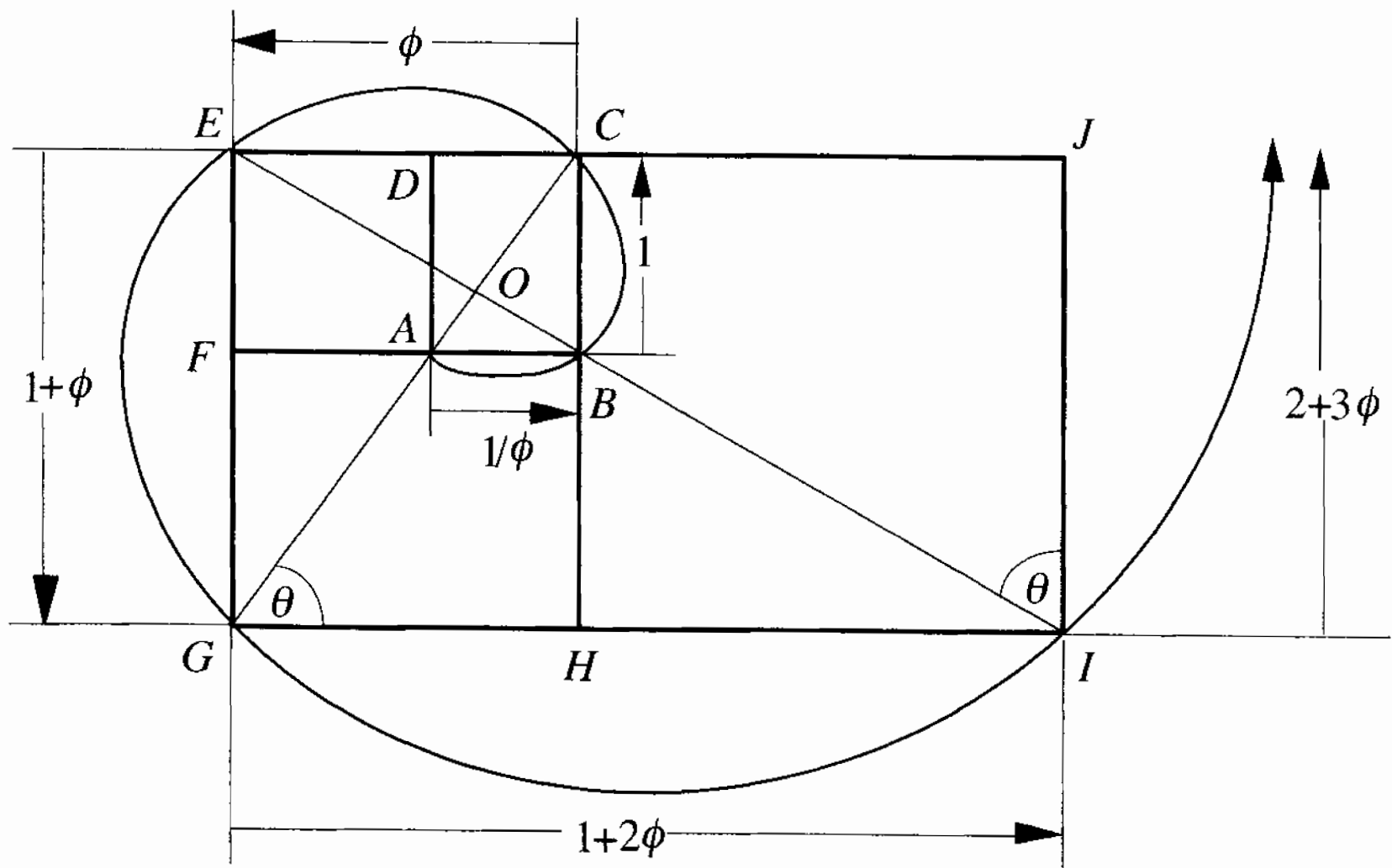


Рис. VI.2а. Левосторонний витой золотой прямоугольник.

Витой золотой прямоугольник

На рис. VI.2а изображен левосторонний¹ завиток с началом из внутреннего прямоугольника-затравки $ABCD$ с вертикальной пропорцией ϕ . Чтобы не тратить впустую бумагу, показаны только начальные этапы бесконечного процесса построения. Уравнению (6.5с) соответствует запись

$$\frac{BC}{AB} = \frac{CE}{BC} = \frac{EG}{CE} = \frac{GI}{EG} = \phi.$$

Если изменить направление движения на противоположное, то мы получим правосторонний витой прямоугольник, для которого

$$\phi = \frac{1}{\phi - 1} = \frac{\phi - 1}{2 - \phi} = \frac{2 - \phi}{2\phi - 3} = \frac{2\phi - 3}{5 - 3\phi} = \dots \quad (6.7)$$

Рис. VI.2b демонстрирует одно замечательное свойство золотого сечения: при добавлении квадрата $ADEF$ к прямоугольнику $ABCD$, вертикаль-

¹Левосторонний — расширяющийся или разворачивающийся в направлении против часовой стрелки.

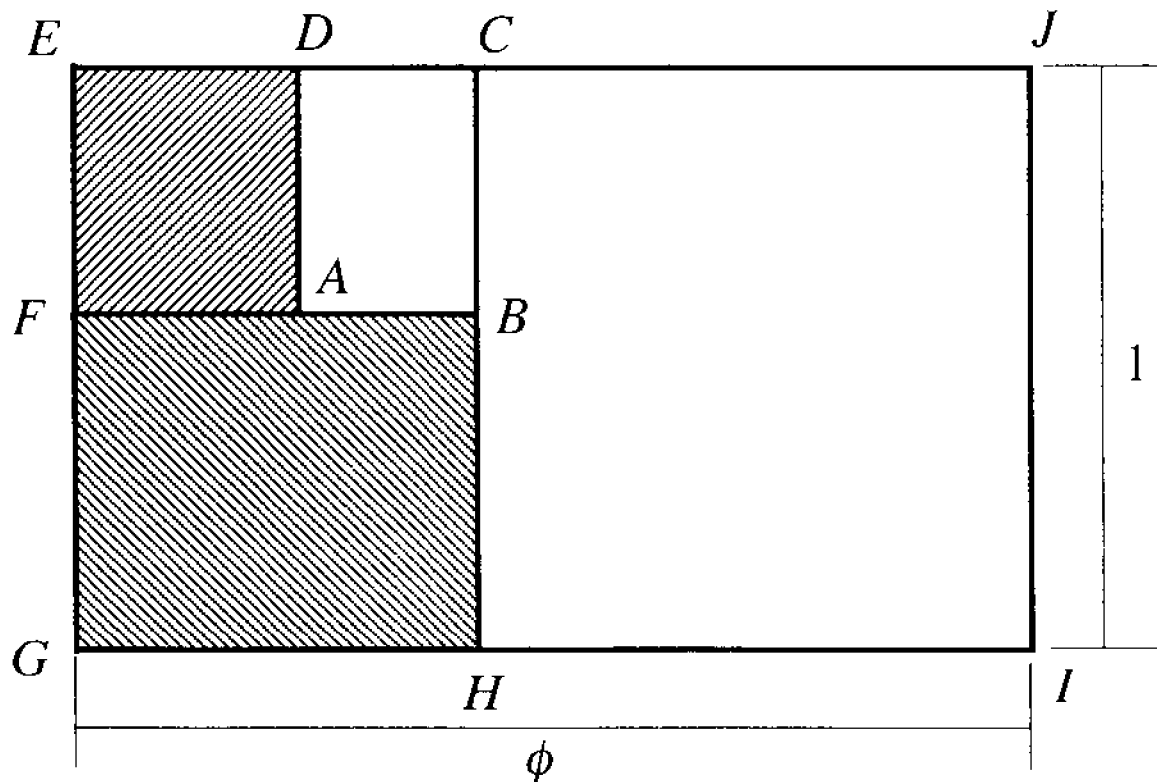


Рис. VI.2b. Квадратный гномон золотого прямоугольника.

ная пропорция² которого равна золотому сечению, получаем прямоугольник $BCEF$, горизонтальная пропорция которого также равна золотому сечению. Квадрат $ADEF$ является гномоном прямоугольника $ABCD$. Аналогично, квадрат $BFGH$ есть гномон прямоугольника $BCEF$ и т. д. Это свойство, очевидно, находится в соответствии с тем, что все неполные частные непрерывной дроби (6.3b) равны единице.

Завиток Фибоначчи

На рис. VI.3 изображен *левосторонний завиток*, начинающийся с квадратной *затравки* со стороной единичной длины (серый квадрат). Затем слева добавлен еще один квадрат со стороной 1, затем снизу — квадрат со стороной 2, затем — квадрат со стороной 3, квадрат со стороной 5, квадрат со стороной 8 и т. д. Процесс можно продолжать до бесконечности, получая на каждом этапе следующее число Фибоначчи.

Важное замечание: то, что выглядит на рисунке как логарифмическая спиральная огибающая, логарифмической спиралью в действительности не является. Спираль на рис. VI.2а имеет полюс O и порождающие диагонали CG и EF , на которых лежат последовательные вершины; на рис. VI.3 ничего подобного нет. Изображенная здесь спираль приближается к логарифмической.

²Напомним, что под термином *вертикальная пропорция* мы понимаем отношение длины вертикальной стороны прямоугольника к длине его горизонтальной стороны, термином же *горизонтальная пропорция* обозначается обратное отношение.

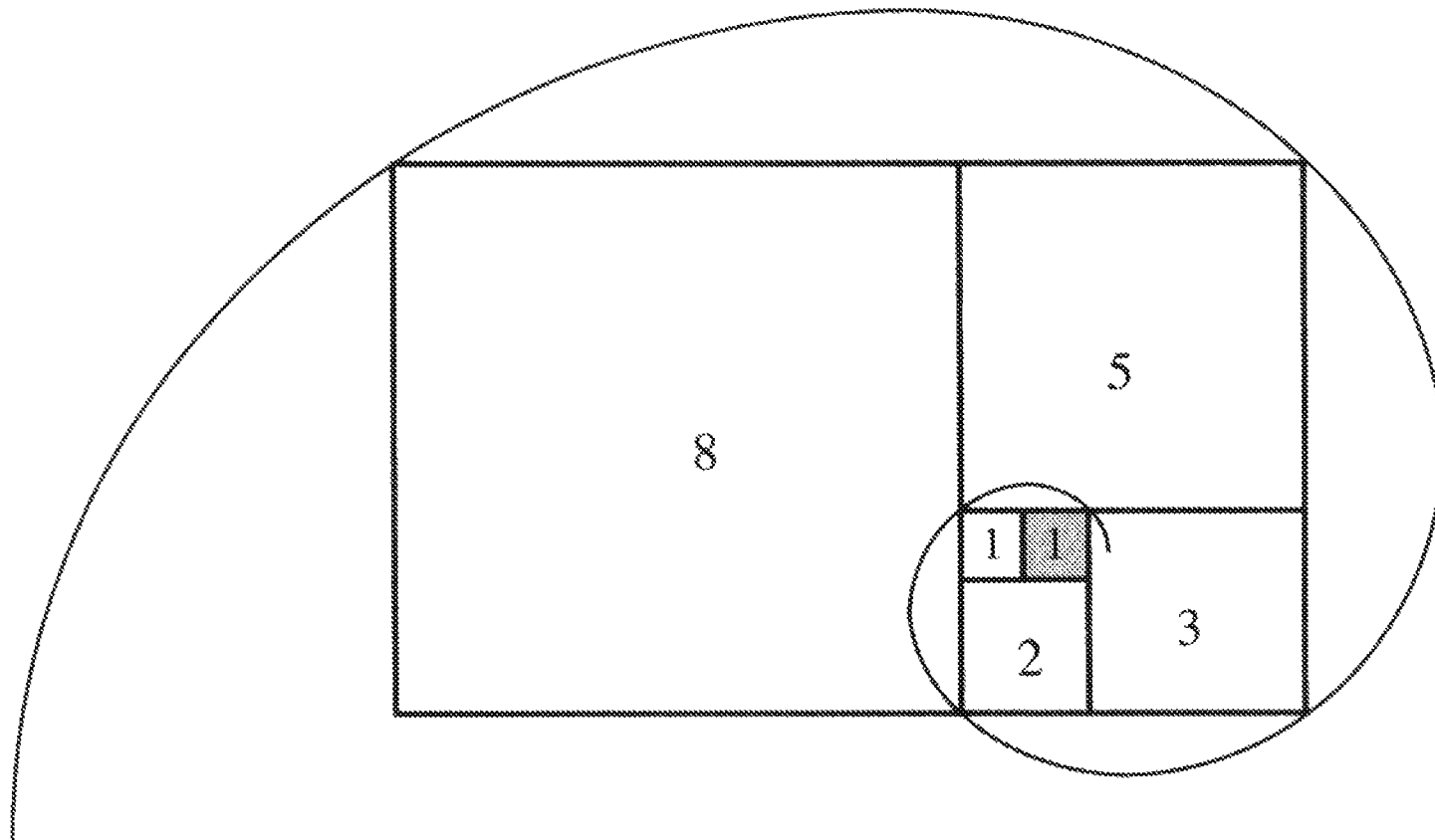


Рис. VI.3. Завиток Фибоначчи.

рифмической только после большого числа итераций. Завиток на рис. VI.2а имеет *правильную затравку*, у завитка же на рис. VI.3 затравка *неправильная*. Спиральная огибающая витой фигуры является логарифмической только при наличии правильной затравки.

Витой золотой треугольник

Есть серьезные основания полагать, что этот треугольник изучался пифагорейцами особо, поскольку он лежит в основе многих интересных геометрических построений — таких, например, как правильный пятиугольник и его мистическая «пентальфа» или «пентаграмма», а также целого ряда других столь любимых математиками древности любопытных фигур, наиболее выдающейся из которых является правильный пятиугольный додекаэдр, символизировавший саму Вселенную и завершающий евклидову геометрию.

(д'Арси Уэнтворт Томпсон)³

На рис. VI.4 приведен один из красивейших примеров геометрических гномонов и самоподобия — последовательные этапы построения витых равнобедренных треугольников. Здесь можно наблюдать два семейства равнобедренных треугольников: «остроугольное» и «тупоугольное». Угол

³On Growth and Form, p. 183.

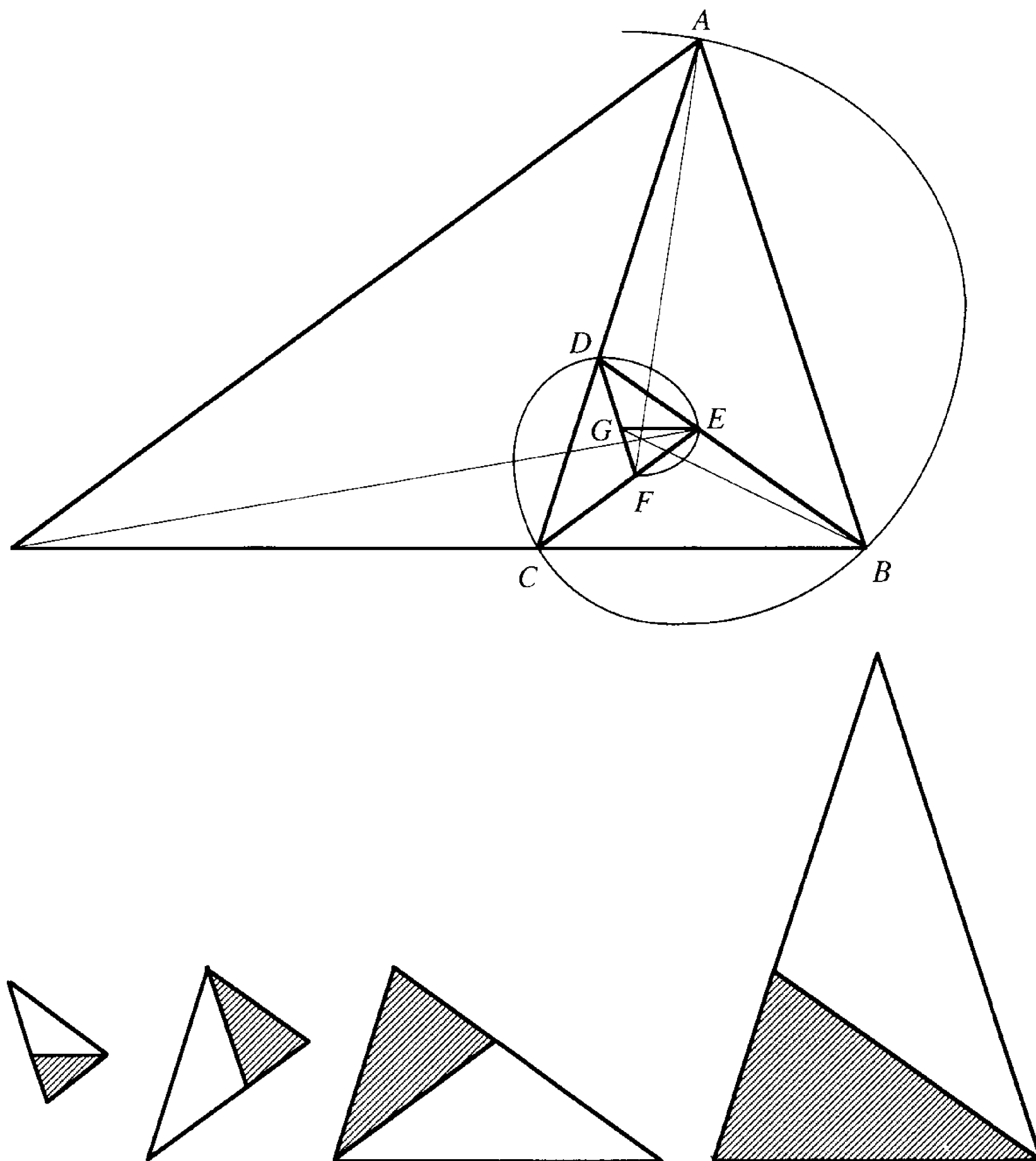


Рис. VI.4. Витой золотой треугольник.

при основании остроугольного треугольника $СВА$ составляет 72° или $\pi/5$. Угол при вершине A , таким образом, равен 36° . Остроугольный треугольник DCB подобен треугольнику $СВА$, который получен добавлением тупоугольного треугольника BAD к треугольнику DCB . Треугольник BAD является гномоном треугольника DCB , а углы при его основании равны 36° .

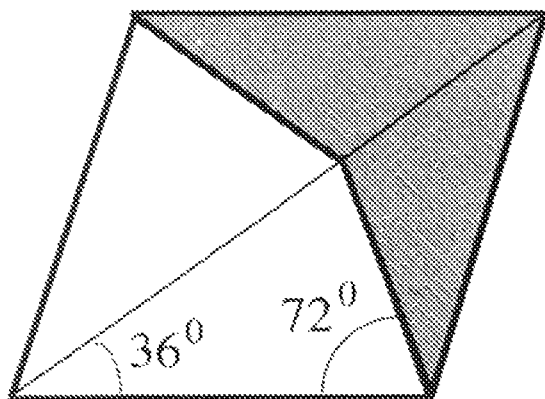


Рис. VI.5. Элементы мозаик Пенроуза.

При тщательном рассмотрении фигуры обнаруживается, что треугольник DCB сам получен посредством добавления к остроугольному треугольнику CED его гномона, тупоугольного треугольника CEB . Процесс можно повторять бесконечно — каждый остроугольный треугольник оказывается равным сумме подобного себе остроугольного треугольника и соответствующего гномона, причем все гномоны также подобны. Отношение длины длинной стороны остроугольного треугольника к длине его основания равно все тому же магическому золотому сечению. Интересно отметить, *en passant*⁴, что из этих треугольников построены две элементарные фигуры (рис. VI.5), которые Роджер Пенроуз использовал для своего иррегулярного замощения плоскости (см. цв. илл. 23b). Кроме того, именно такой треугольник Г. А. Набер в своей книге «Теорема Пифагора»⁵ окрестил неудобнопроизносимым «Dreifachgleichschenkliges Dreieck»⁶.

Витой пятиугольник

На рис. VI.6 изображен витой пятиугольник, радиус которого умножается на золотое сечение при каждом повороте на 72° , так как длина основания каждого золотого треугольника равна длине длинной стороны его предшественника.

Золотое сечение: от античности до эпохи Возрождения

Да не прочтет сих принципов тот, кто чужд математике.

(Леонардо да Винчи)

Золотое сечение присутствует (или предполагается) при всяком разделении окружности на пять или десять частей, мысль же о таком разделении могла, вероятно, прийти в голову еще первобытному человеку, поскольку на

⁴Мимоходом, между прочим (фр.). — Прим. перев.

⁵Н. А. Naber. *Das Theorem der Pythagoras* (Haarlem, 1908).

⁶Трижды равнобедренный треугольник (нем.). — Прим. перев.

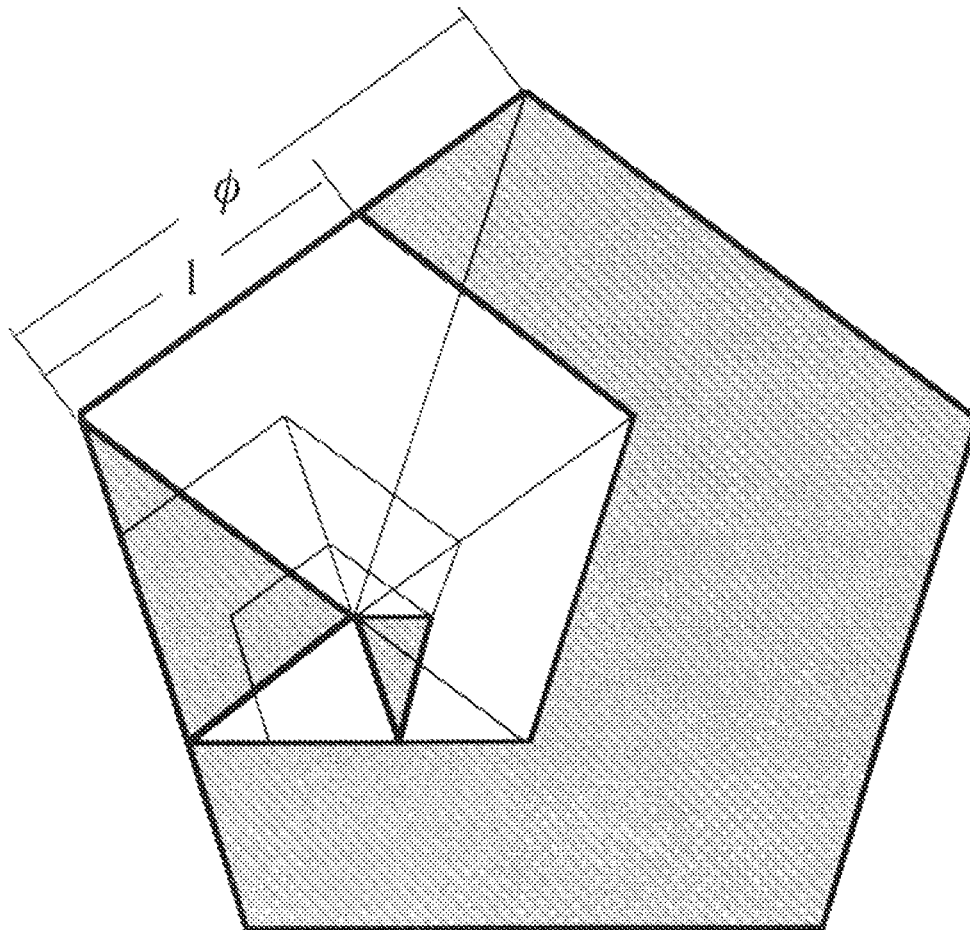


Рис. VI.6. Витой пятиугольник с последовательностью «божественных треугольников».

руке у него было пять пальцев, а в окружающей природе он мог наблюдать бесчисленные примеры пятисторонней симметрии: цветы, раковины и т. д. (рис. VI.7). Уже почти наш современник Иоганн Кеплер был, например, убежден, что у большинства цветов — пять лепестков. Таким образом, предки могли неосознанно познакомиться с золотым сечением, пытаясь изобразить правильный выпуклый пятиугольник или пятиконечную звезду. Начнем нашу экскурсию с так называемого *египетского прямоугольника*, показанного на рис. VI.8a. Его диагональ AC равна $\sqrt{1 + \phi} = \phi$, т. е. длины сторон AB , BC и CA треугольника ABC образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\sqrt{\phi}$. Более того, треугольники CDA и DEA подобны. Таким образом,

$$\frac{AE}{AD} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AE = \frac{(AD)^2}{AC} = 1 \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \phi.$$

Иными словами, точка E делит диагональ прямоугольника на два отрезка, отношение длин которых равно отношению длины диагонали к длине более длинного из них.

Говорят, что древнегреческий историк Геродот узнал от египетских жрецов о том, что квадрат высоты Великой пирамиды равен площади ее треугольной боковой грани (рис. VI.8b), что означает, что отношение высоты пирамиды h к половине длины стороны ее квадратного основания $b/2$

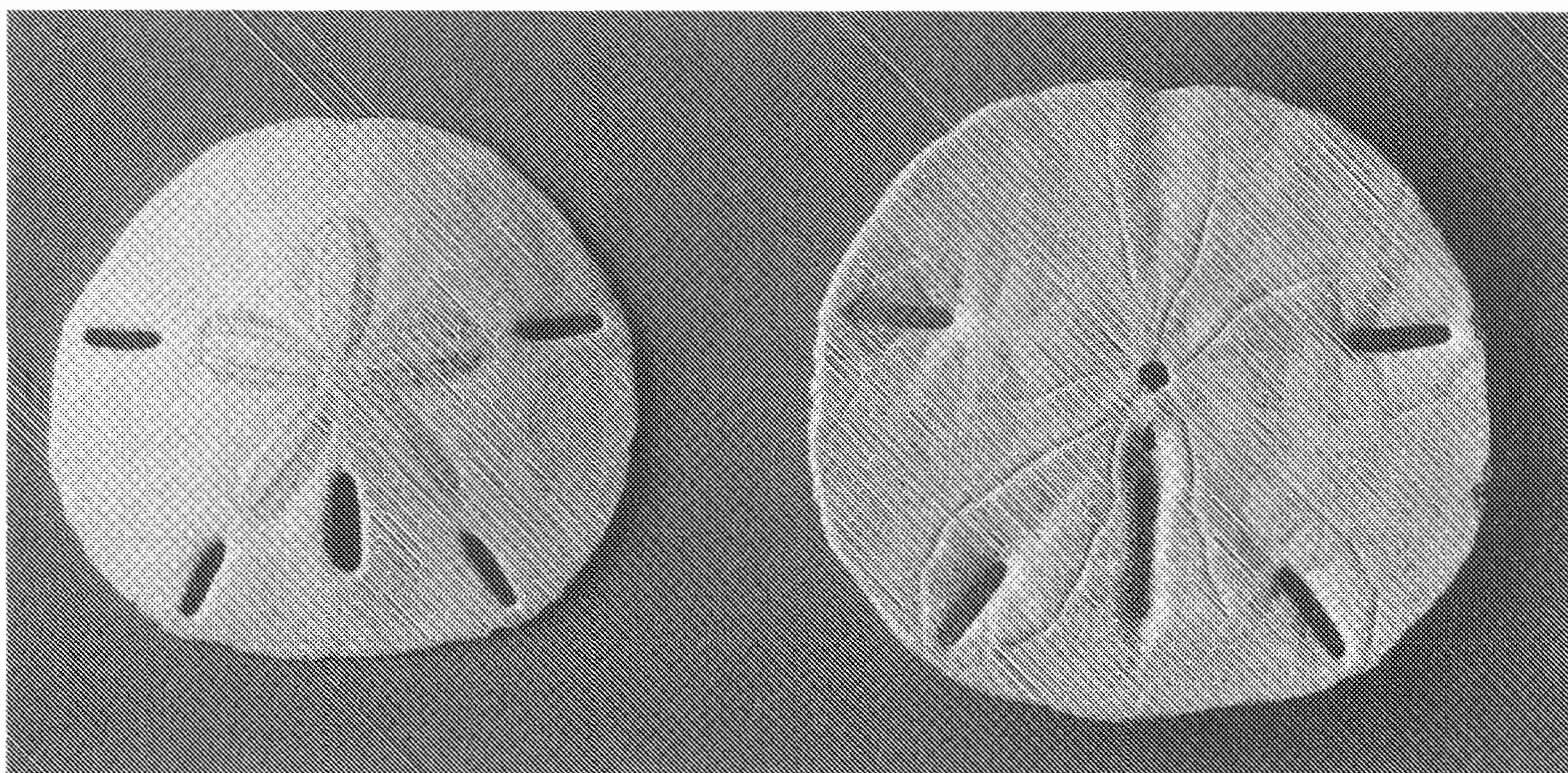


Рис. VI.7. Пятисторонняя симметрия панциря плоского песчаного морского ежа.

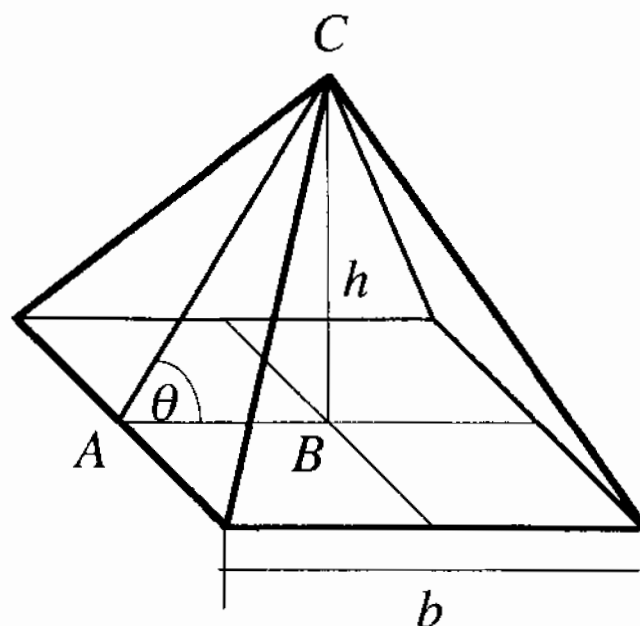
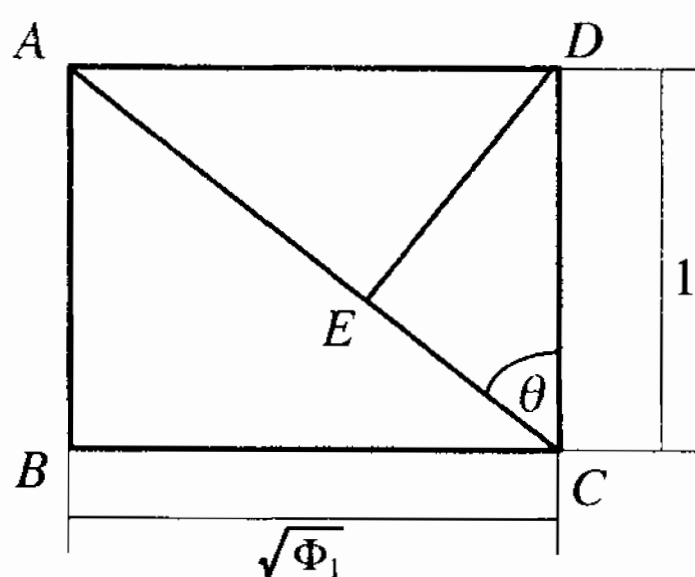


Рис. VI.8a. «Египетский» прямоугольник. Рис. VI.8b. Египетская пирамида.

в точности равно золотому сечению. До сих пор остается спорным, знали ли египтяне о золотом сечении как таковом, или просто случайно наткнулись на него, как утверждают многие критики математического таланта египтян. Как бы то ни было, первоначальная высота пирамиды h , в соответствии с наиболее достоверными оценками, составляла 280 королевских локтей, а ее основание b насчитывало 440 локтей⁷. Таким образом, отношение $h/(b/2)$

⁷Королевский локоть равнялся приблизительно 52,5 см, т.е. длине человеческого предплечья. Королевский локоть делился на семь ладоней по 7,5 см, а ладонь, в свою очередь, составлялась из четырех пальцев по 1,875 см. Английское название этой меры длины *cubit* происходит от латинского слова *cubitus*, что означает «локоть». Французы также иногда пользуются аналогичной устаревшей мерой длины, называемой *coudée*.

равно $14/11 = 1,27272\dots$. Сравните это число с $\sqrt{\phi} \approx 1,27202$. Разница составляет всего лишь 0,06%. Может быть, именно поэтому треугольник на рис. VI.8а называется египетским треугольником! Согласно данным Р. Дж. Джиллингса угол наклона (или *seked*) θ треугольной грани пирамиды составляет $51^\circ 52'$. Сравните это значение с $\arctg \sqrt{\phi} = 51^\circ 49' 38''$.

Перейдем к древним грекам: некоторые авторы полагают, что Парфенон, построенный архитекторами Актином и Калликратом в сотрудничестве с Фидием и освященный в 438 году до н. э., является первым воплощением золотого сечения в архитектуре. Храм будто бы вписывается в золотой прямоугольник (как показано на рис. VI.9а) и является моделью для последующих греческих построек.

Следует, однако, заметить, что никаких упоминаний о математических свойствах золотого сечения в греческих источниках, предшествующих «Началам» Евклида (308 г. до н. э.), обнаружено не было. Евклид же просто полагал это отношение интересным иррациональным числом, связанным с крайним и средним отношениями. Должным образом была отмечена также причастность золотого сечения к пяти- и десятиугольникам, равно как и к додекаэдрам (правильным многогранникам, грани которых представляют собой правильные пятиугольники). Весьма показательным то, что великий Евклид, в отличие от последующих поколений мистиков от математики, смотрел на это число с позиций здравого смысла и не пытался приписать ему иных свойств, кроме тех, какими оно реально обладает.

Несмотря на многочисленные научные достижения арабов, в Европе в средние века заметного прогресса науки не наблюдалось. Одним из немногих выдающихся европейских мыслителей того времени по праву считается Леонардо Пизанский по прозвищу Фибоначчи, автор знаменитой «*Liber abaci*» (1202 г.) и первооткрыватель еще более знаменитой последовательности, носящей ныне его имя. Другая значительная фигура в средневековой науке — Иоганнес Кампанус из Новары, который обессмертил свое имя переводом «Начал» Евклида на латынь с арабской версии этого монументального трактата (ок. 1260 г.). В комментарии, сопровождавшем перевод, упоминались средние и крайние сечения («*proportionem habentem medium duoque extrema*»).

В последующие века пятиконечная звезда (*пентаграмма*, *пентальфа*) стала предметом многочисленных суеверий, что отражено в готическом тексте на рис. VI.9b. Пятиконечная звезда также встречается в качестве мотива в мавританских орнаментах (рис. VI.9c).

Золотым веком золотого сечения стало Итальянское Возрождение. Термин «божественная пропорция» ввел в употребление Лука Пачоли в своей книге «*De divina proportionem*»⁸, написанной в 1509 году. Лука Пачоли родился около 1445 года в Борго-Сан-Сепулькро в Тоскане, где и изучал

⁸«О божественной пропорции» (лат.). — Прим. перев.

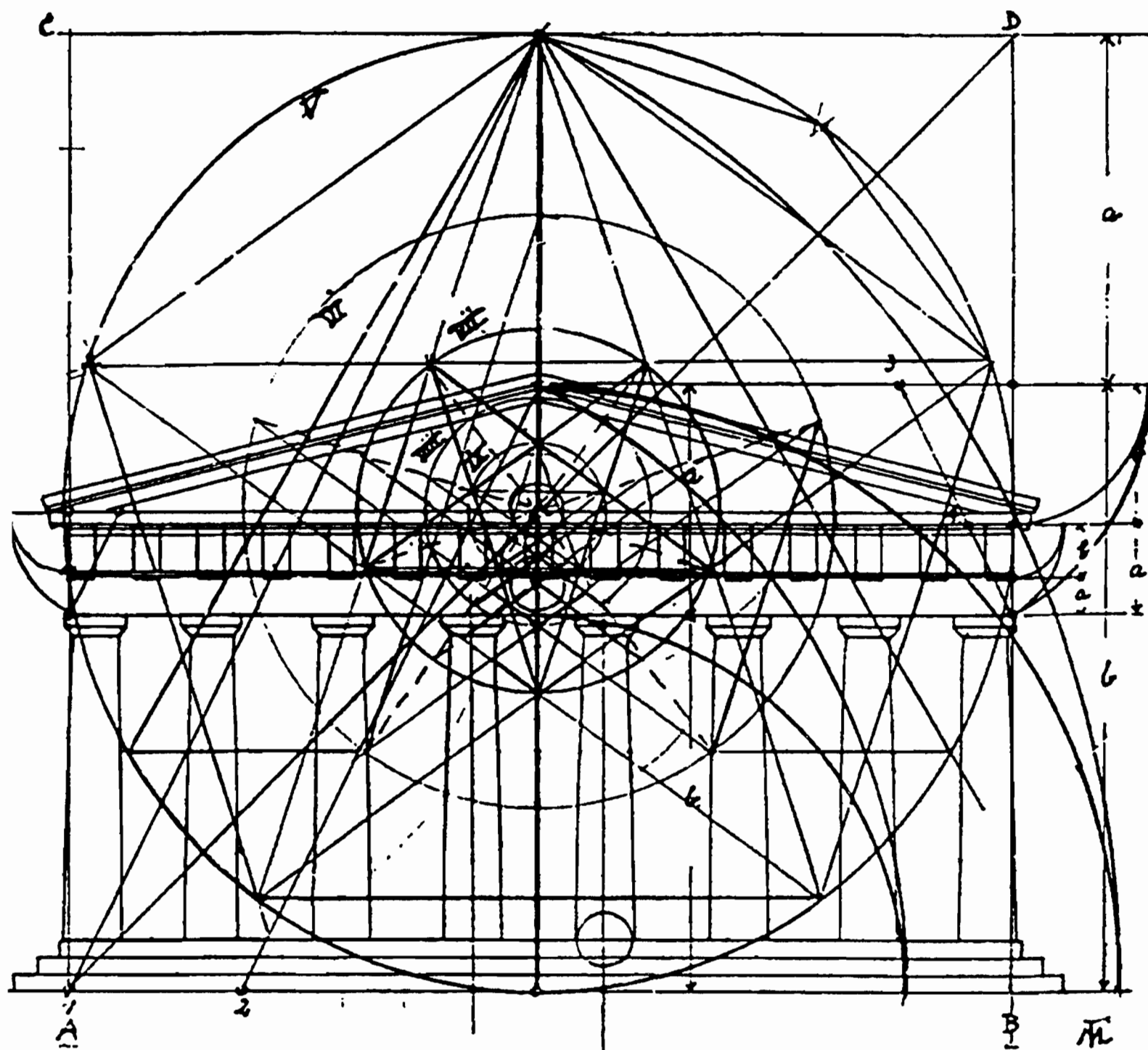


Рис. VI.9а. Парфенон, скрывающийся за безумным нагромождением прямых, окружностей и пентальф, призванных убедить нас в том, что пропорции храма основаны на золотом сечении. Из книги Маргерит Невё «Золотое число: радиография мифа» (Marguerite Neveaux. *Le Nombre d'or: radiographie d'un mythe*. Paris: editions du Seuil, 1995).

математику под руководством знаменитого художника Пьеро делла Франческа, автора трактата «De quinque corporis regularibus»⁹. Кроме того, прежде чем стать монахом-францисканцем, он изучал философию и теологию. В 1496 году герцог Людовик Сфорца предложил Пачоли кафедру математики в Милане, однако уже в 1498 году по причине смерти покровителя Пачоли был вынужден уехать во Флоренцию. В 1514 году он был вызван папой Львом X в Рим, где и оставался до самой своей смерти, наступившей

⁹«О пяти правильных телах» (лат.). — Прим. перев.

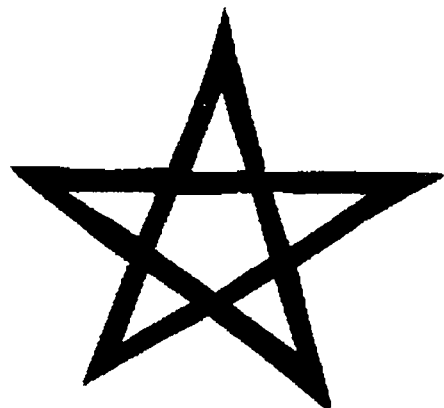


Рис. VI.9b. Звездчатая пентаграмма. Из книги Рудольфа Коха «Книга знаков» (Rudolf Koch. *The Book of Signs*. New York: Dover, 1930). Готическая надпись под пентаграммой гласит: «Пентаграмма, или пятиконечная звезда, вычерчиваемая одним росчерком пера: этот знак — подобно многим другим, описываемым здесь, — известен с глубокой древности, задолго до появления письменности. Знаки такого рода являются, вероятно, древнейшими документами человеческой цивилизации. В различные эпохи истории пентаграмма имела различные значения. Пифагорейцы называли ее *пентальфой*, а кельтские жрецы — *ведьминым следом*. Она известна также как *Соломонова печать*, в средние же века ее называли *гоблинским крестом*.»

The pentagram, a five-pointed star drawn with one stroke of the pen: this sign belongs, as do many others depicted here, to the most primitive of mankind, and is certainly much older than written characters. Signs of this kind are quite the most ancient human documents we possess. The pentagram has had several different significations at different times in the history of man. The Pythagoreans called it the pentalpha, and the Celtic priests the witch's foot. It is also Solomon's seal, known in the Middle Ages as the goblin's cross.

в этом же году. Трактат «De divina proportionе» написан, по большей части, под влиянием «Начал» Евклида, причем сорок семь из его глав посвящены платоновым телам. В неаполитанском музее Каподимонте хранится знаменитый портрет Пачоли кисти Иакопо де Барбери (1495 г.) (рис. VI.10a). На портрете математик левой рукой указывает на свою книгу, а правой вычерчивает вписанный в окружность треугольник, как он был изображен в «Началах» Евклида. На столе лежит додекаэдр, а с потолка свисает прозрачный двадцатишестигранник.

По мнению Пачоли, золотое сечение — помимо того, что оно лежит в основе пяти- и десятиугольников, а также додекаэдра, который, согласно Платону, представляет саму идею Вселенной, — уникально и таинственно еще и потому, что являет нам образ Божий. В (святом) триединстве величин оно определяет неизменное отношение одного к другому. Его иррациональность также является проявлением его божественной, снизошедшей с небес сущности. Лука Пачоли обладал значительным влиянием на мыслителей и

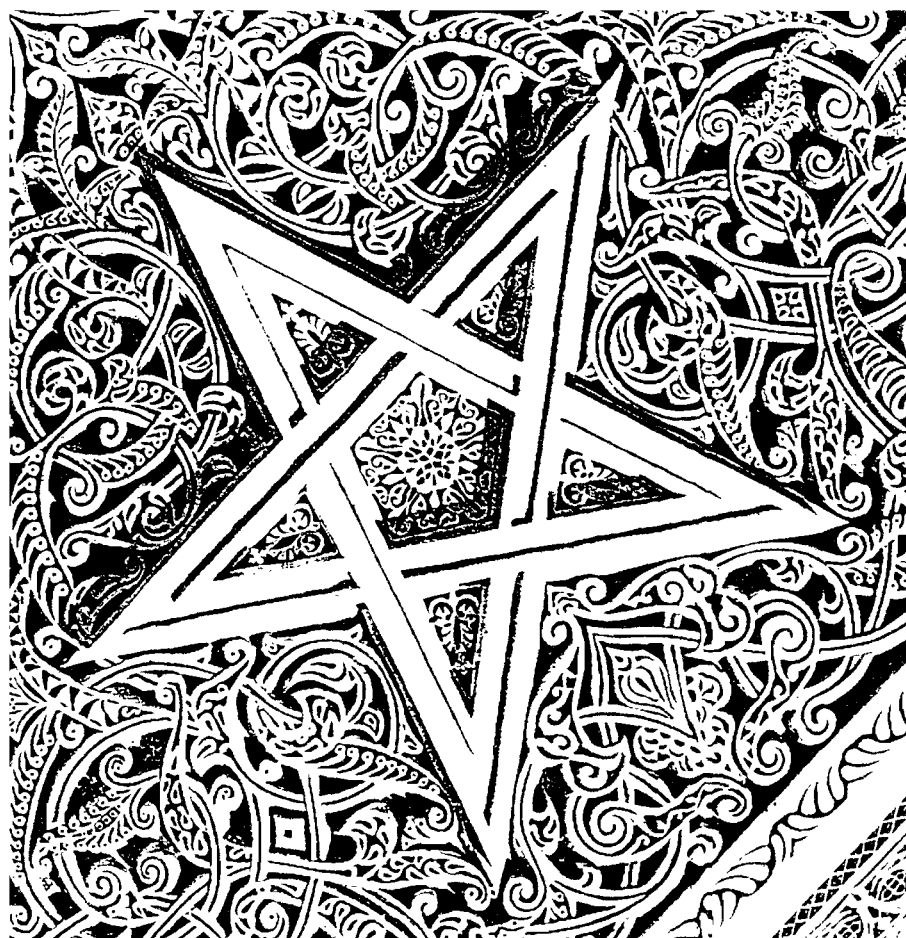


Рис. VI.9с. Пятиконечная звезда в мавританском орнаменте — пентаграмма-арабеска.

художников своего времени. Встреча с Пачоли стала поворотным моментом в жизни художника Леонардо да Винчи, который в возрасте сорока лет открыл для себя красоту математики и даримую ею радость. Математика настолько восхитила Леонардо, что он немедленно с большим тщанием изучил ранний трактат Пачоли «*Summa de arithmetica, geometria proportioni et proportionalita*»¹⁰ (1487 г.) (рис. VI.10b) и скопировал оттуда весьма изощренное *генеалогическое древо пропорций*, содержащее не менее сорока категорий, разбитых на классы и подклассы. Полагают, что и сам термин *sectia aurea*¹¹ придумал не кто иной, как Леонардо. Леонардо также изучил «Начала» Евклида и потратил значительное количество времени в тщетных попытках найти квадратуру круга. Готовя к изданию «*De divina proportione*», Пачоли решил было отказаться от попытки точного изображения на бумаге платоновых тел ввиду неимоверной сложности задачи. Вместо этого он построил из *презренной материи* их деревянные реберные модели. Видя бедственное положение Пачоли, Леонардо, как говорят, согласился иллюстрировать его книгу, в результате чего потомкам осталось шестьдесят великолепных изображений многоугольников (рис. VI.11). Сообщают также, что Пачоли в Болонье посетил сам Альбрехт Дюрер с целью обучиться у великого магистра «тайнам перспективы».

¹⁰«Основы арифметики, геометрических пропорций и пропорциональности» (лат.). — Прим. перев.

¹¹Золотое сечение (лат.). — Прим. перев.

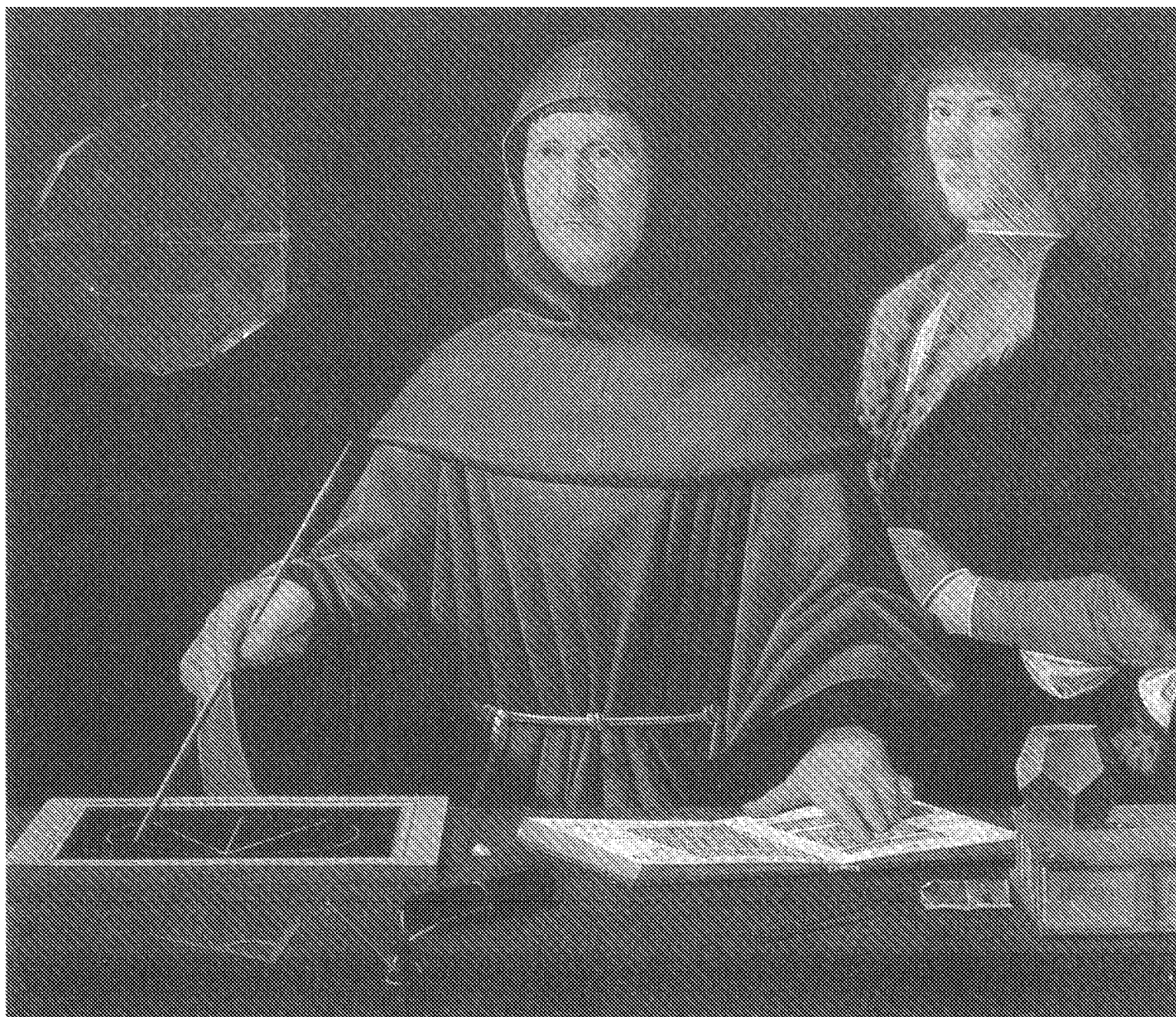


Рис. VI.10а. Портрет Луки Пачоли кисти Иакопо де Барбери. Музей Каподимонте, Неаполь.

О роли золотого сечения в искусстве задумываются и авторы нашего времени: диапазон их изысканий простирается от анализа работ старых мастеров в свете того, что нам известно о свойствах золотого сечения (например, анализ картины Ван-дер-Вейдена «Схождение с креста» (музей Прадо, Мадрид), предпринятый французским архитектором Ле Корбюзье) до намеренного использования золотого сечения в живописи («Цирк» Сёра) и введения в широкий обиход термина *модуль* (сокращение от сочетания *module d'or*¹², предложенного Ле Корбюзье).

¹²Золотой модуль (фр.). — Прим. перев.

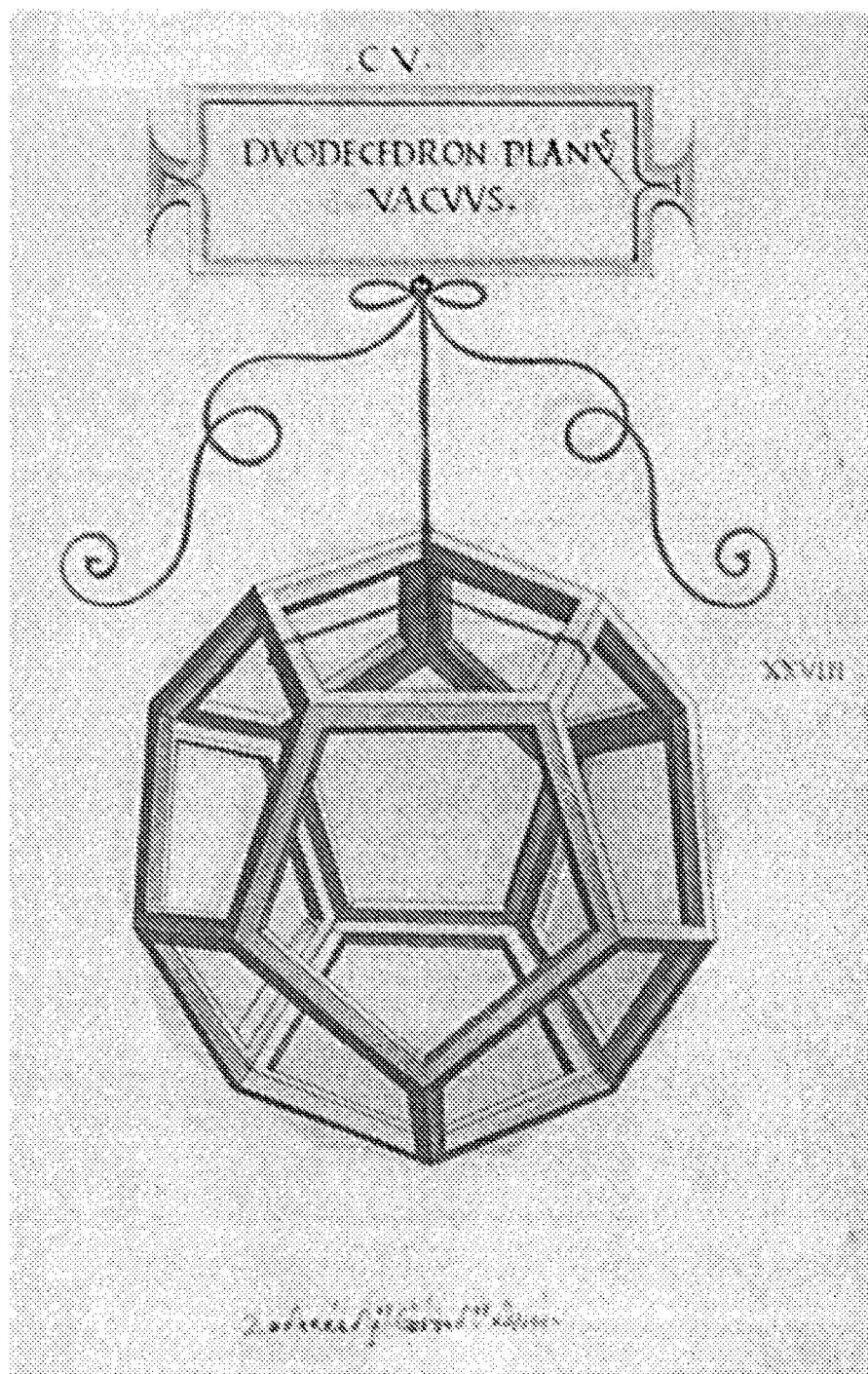


Рис. VI.11. Додекаэдр, нарисованный Леонардо да Винчи для книги Пачоли «De divina proportione».

Заметки на полях

Тысячелистник

Представьте себе, что ваш садовник посадил однажды утром в саду некий мифический троичный куст. Каждая ветвь такого куста каждый год дает три новых побега. Садовник тщательно собирает ветви в живую изгородь, следуя неизменному правилу: одну в центр и по одной по краям. Если куст не подрезать, то количество ветвей к концу первого, второго,

¹²Об этом странном растении, называемом учеными *Achillea ptarmica*, я узнал из замечательной книжицы профессора Х. Э. Хантли «Божественная пропорция» (H. E. Huntley. *The Divine Proportion*. New York: Dover, 1970).

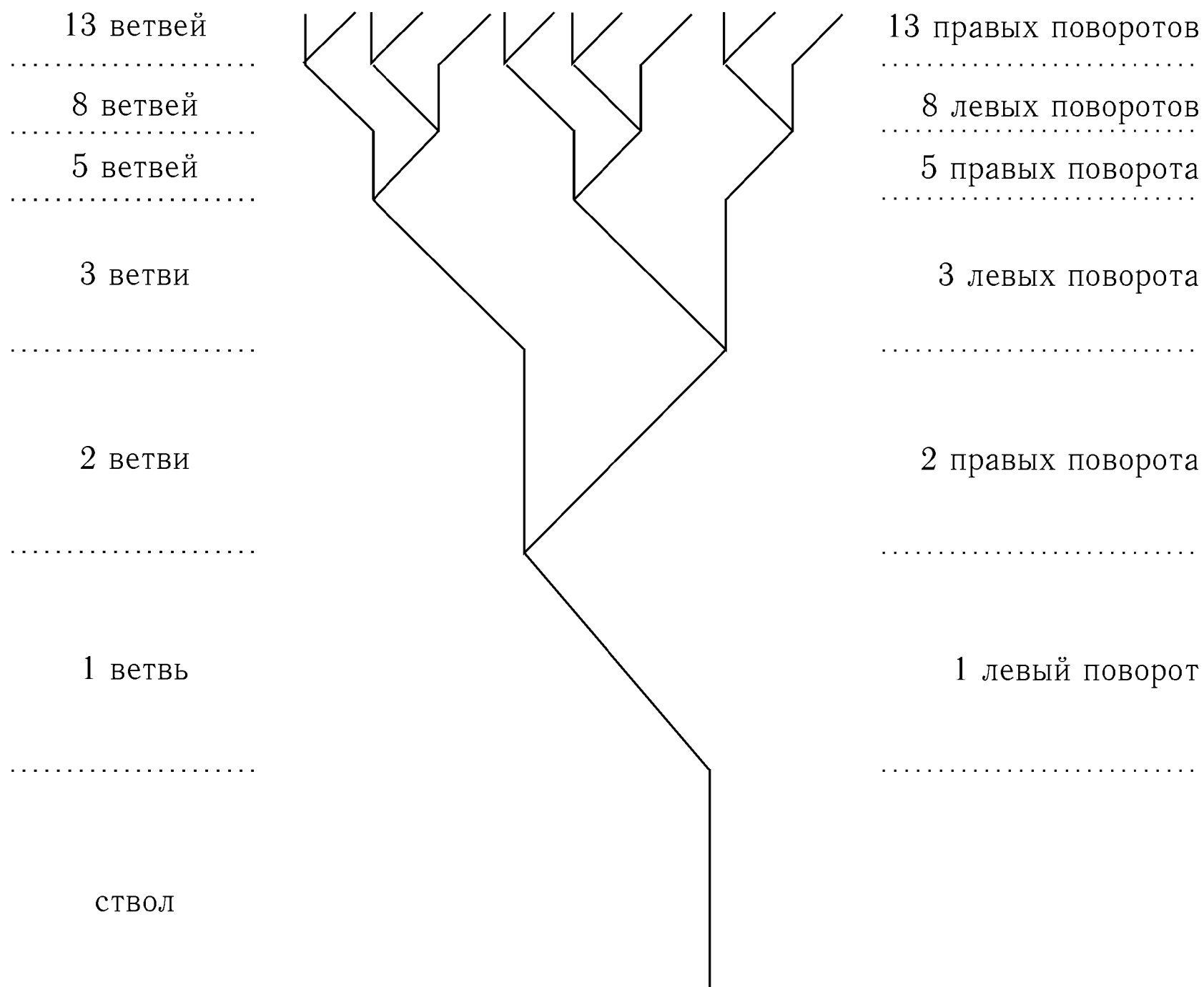


Рис. VI.12а. Триади́ческий куст после подрезки.

третьего и т. д. года составит 1, 3, 9 и т. д. Ваш садовник, известный своими чудачествами, решил проводить подрезку ветвей строго по следующему плану: каждый четный год он будет обрезать все ветви, которые отклоняются от родительской ветви влево, по нечетным же годам будут обрезаться все ветви, отклоняющиеся вправо. Программа подрезки показана на рис. VI.12а, а предполагаемый вид куста на исходе седьмого года представлен на рис. VI.12b; подрезанные ветви заменены на рисунке листьями, и наш куст стал немного похож на куст этакого воображаемого тысячелистника. Количество ветвей в каждом поколении совпадает с последовательными членами ряда Фибоначчи первого порядка, т. е. 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, На рис. VI.12с показано, как добиться того же результата с троичными числами. В колонках, помеченных знаком (+), к числу справа приписывается каждая возможная цифра, *бóльшая* крайней справа цифры этого числа, в ко-

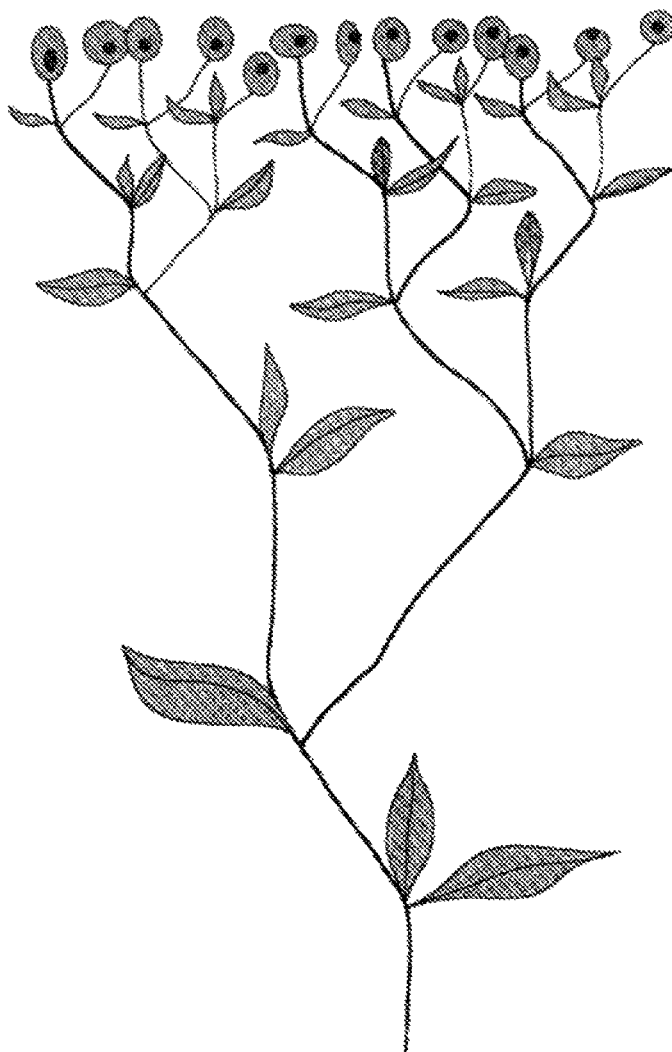


Рис. VI.12b. Воображаемый тысячелистник.

лонках же, помеченных знаком (—), к числу справа приписывается каждая возможная цифра, *меньшая* крайней справа цифры этого числа.

Наука о росте листьев, *филлотаксия*, изобилует проявлениями золотого сечения. Во Введении мы уже упоминали об углах расхождения ветвей алоэ, ячеек в цветах подсолнечника и чешуек в сосновых шишках. По всей видимости, рост ветвей тысячелистника также можно занести в этот список поразительных примеров. В книге профессора Хантли проиллюстрированы и многие другие весьма интересные свойства золотого сечения. Он проводит параллели между моделью размножения пчел, гистограммой энергетических состояний атома водорода и древовидной структурой, изображенной на рис. VI.12a. Рассматривается и такой классический пример, как множественные отражения между тремя полуотражающими стеклянными пластинами.

Фокус с золотым сечением

На рис. VI.13 представлена занятная геометрическая конструкция: на первый взгляд, прямоугольник на рис. VI.13b получен перестановкой фигур, из которых сложен квадрат на рис. VI.13a. Однако при этом площадь фигуры каким-то образом уменьшилась с $13^2 = 169$ до $8 \times 21 = 168$ единиц! Куда же

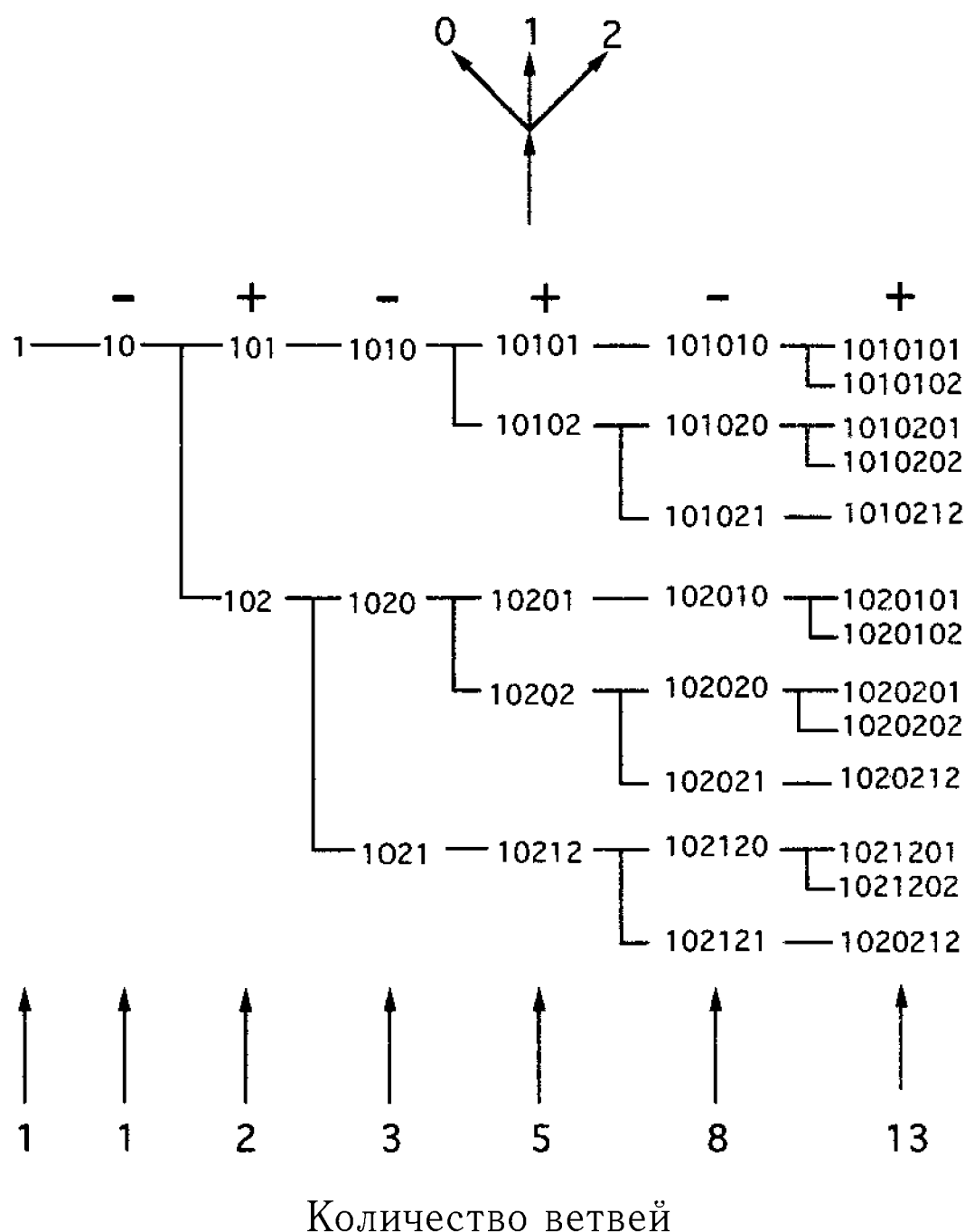


Рис. VI.12с. Подрезка куста троичных чисел.

пропала одна единица площади? Дело в том, что линия AEC на рис. VI.13b только кажется прямой, в действительности таковой не являясь. Будь эта линия прямой, было бы истинным равенство $DE/BC = AD/AB$. А это не так, поскольку $5/8 \neq 13/21$. Близко, но все же не равно. Правильный ответ дают фигуры на рис. VI.13c и VI.13d, где $(1+2\phi)/(1+\phi) = \phi$. На рис. VI.13e показана фигура с рис. VI.13c, перерисованная в том же масштабе, что и квадрат с рис. VI.13a.

Золотой узел

На рис. VI.14 показано, как посредством простого завязывания в самый обыкновенный узел полоски бумаги можно построить совершенный пятиугольник. Интересно также отметить, что, соединив концы A и B , мы получим ленту Мёбиуса, так как при завязывании узла бумажная лента разворачивается на 180° .

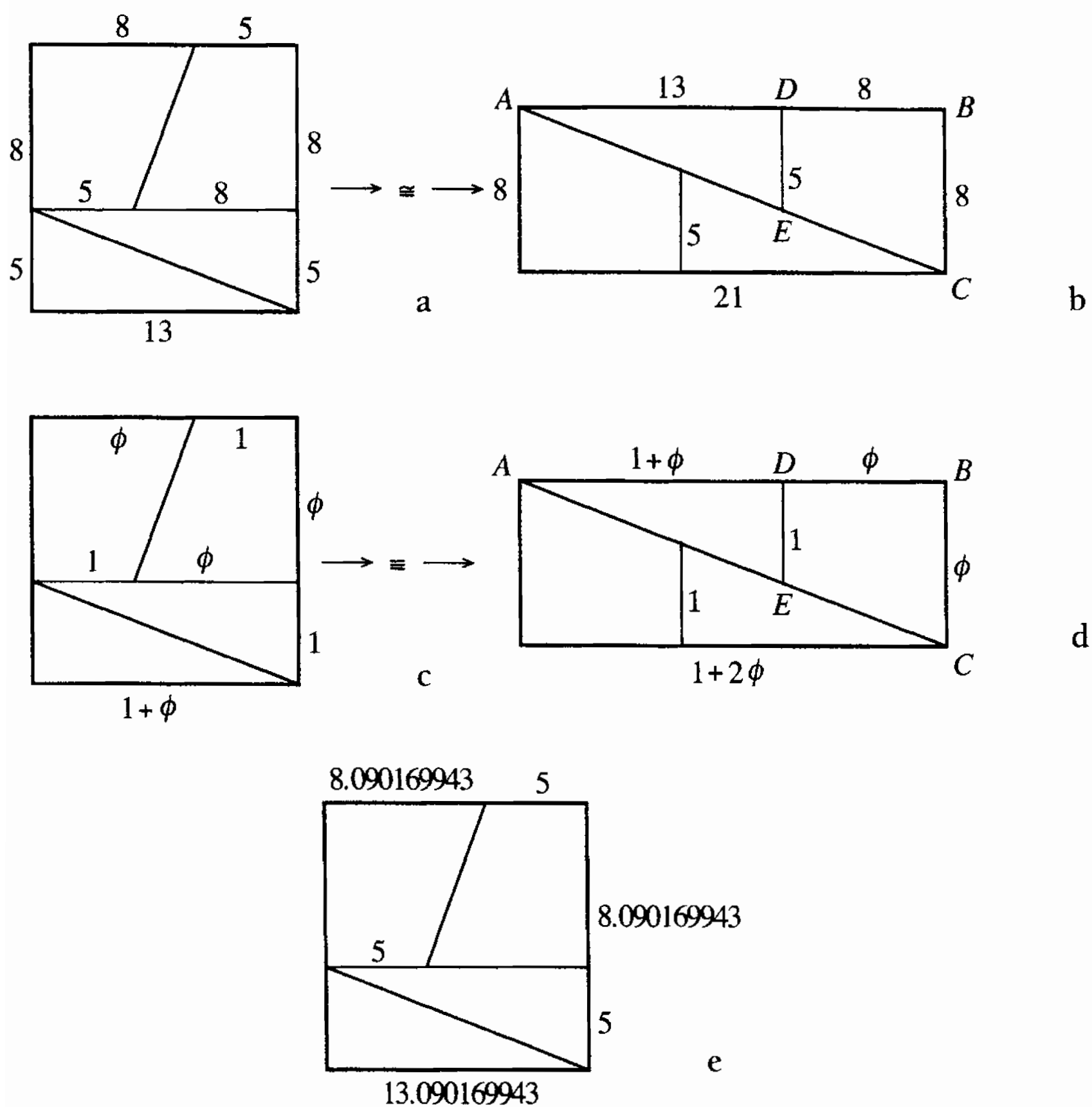


Рис. VI.13. Фокус с золотым сечением.

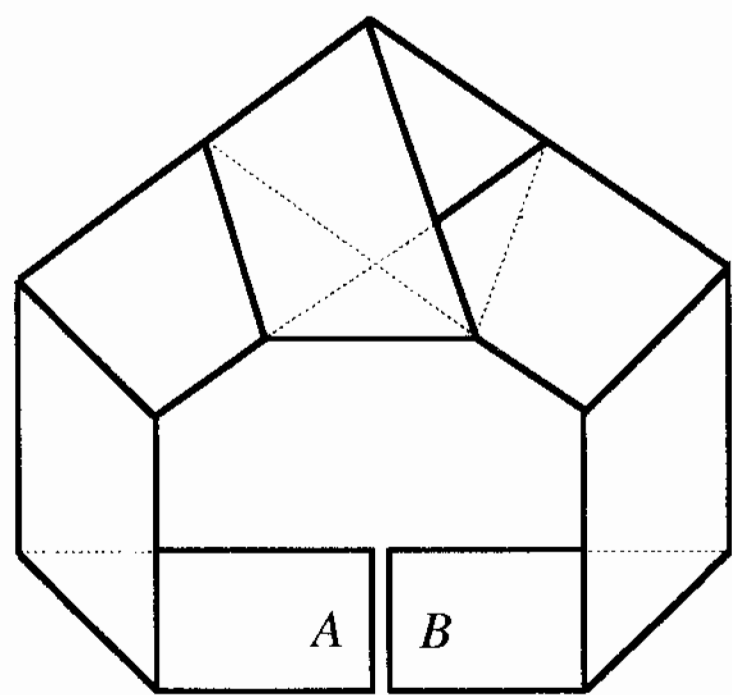


Рис. VI.14. Золотой узел.

ГЛАВА VII

Серебряное сечение

Истории о невостребованном числе.
(Иэн Стюарт)¹

Архитектор Ричард Падован обнаружил некую последовательность целых чисел, которую, не обладая она весьма интересной геометрической метафоричностью и не допуская некоторых поразительных параллелей с золотым сечением, можно было бы считать достаточно тривиальной — в связи с чем злые языки поспешили обозвать ее «искусственной» и «пластмассовой». Тривиальной она ни в коем случае не является, в чем нам вскоре предстоит убедиться. Эта последовательность определяется рекуррентным соотношением

$$P_{i+3} = P_i + P_{i+1}, \quad (7.1)$$

причем

$$P_0 = P_1 = 0, \quad P_2 = 1. \quad (7.2)$$

Полученную таким образом последовательность можно распространить и на отрицательные i и записать:

i	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
P_i	1	-1	1	0	0	1	0	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16	21	28	37	49

В качестве начальных условий можно использовать любую тройку соседних членов последовательности. Как мы установили, с вышеприведенным выбором начальных членов согласуется помещенный ниже анализ. Рассмотрим сначала уравнение

$$p^3 - p - 1 = 0, \quad (7.3a)$$

аналогичное уравнению

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0, \quad (7.3b)$$

решением которого является золотое сечение ϕ .

¹«Tales of a Neglected Number», *Scientific American* (June 1996), pp. 92–93.

Приблизительное значение p , удовлетворяющее уравнению (7.3а), можно вычислить до любого желаемого знака посредством итераций выражения

$$\sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \dots \sqrt[3]{1 + s}}} \rightarrow p, \quad (7.4)$$

где s — некоторая произвольная «затравка». Итерации можно выполнять на карманном калькуляторе до тех пор, пока мы не получим два одинаковых последовательных значения. С точностью до десяти значащих цифр

$$p \approx 1,324717957. \quad (7.5)$$

В математической литературе последних лет это число называется *пластмассовым числом* или *пластмассовым сечением*. Пренебрегая мнением всевозможных критиканов, мы все же полагаем, что это число имеет не меньшее право на благородный титул, чем его прославленный предок, и в дальнейшем будем называть его *серебряным* числом или сечением. Золотое сечение обозначается греческой буквой ϕ в честь древнегреческого скульптора Фидия, одного из строителей Парфенона. Представляется уместным обозначить серебряное сечение первой буквой фамилии архитектора Падована, т. е. латинской буквой p .²

Подставив в последовательность

$$\dots \quad \frac{1}{p^2}, \quad \frac{1}{p}, \quad 1, \quad p, \quad p^2, \quad p^3, \quad p^4, \quad \dots$$

равенство $p^3 = p + 1$, получим

$$\dots \quad (-p^2 + p + 1), \quad (p^2 - 1), \quad 1, \quad p, \quad p^2, \quad (p + 1), \quad (p^2 + p), \quad \dots$$

Сопоставив коэффициенты при $1, p, p^2$ в членах вышеприведенной последовательности с членами числовой последовательности Падована, мы обнаружим, что

$$p^i = P_i p^2 + P_{i+1} p + P_{i-1}; \quad (7.6)$$

этот результат можно также доказать индукцией по i . Приведем для сравнения выражение для вычисления i -й степени золотого сечения с помощью чисел Фибоначчи:

$$\phi^i = F_i \phi + F_{i-1}.$$

²Тем из читателей, кто склонен верить в знаки, возможно, будет интересно узнать, что родство между этими двумя числами простирается несколько глубже, чем может показаться на первый взгляд. Как отмечает Иэн Стюарт, итальянский город Падуя (Padova) расположен не далее чем в ста милях от Пизы, родины Леонардо, известного как Фибоначчи.

Из (7.6) следует, что число p является действительным решением уравнения

$$x^i - P_i x^2 - P_{i+1} x - P_{i-1} = 0 \quad (7.7)$$

при всех значениях i . Например,

$$x^5 - x^2 - x - 1 = 0, \quad x^7 - 2x^2 - 2x - 1 = 0. \quad (7.8)$$

Как и в последовательности Фибоначчи, значение отношений двух последовательных чисел Падована сходится к p , хотя и медленнее. При больших i имеем

$$p \approx \frac{P_{i+1}}{P_i}. \quad (7.9a)$$

С помощью уравнения (7.6) читатель может самостоятельно убедиться в истинности следующего утверждения:

$$(3p^2 - 1)P_i - p^i = 2P_i p^2 - P_{i+1} p - P_{i+2}.$$

При больших i , применяя (7.9a), получаем $P_i p^2 \approx P_{i+1} p \approx P_{i+2}$. Следовательно, $2P_i p^2 - P_{i+1} p - P_{i+2}$ и

$$P_i \approx \frac{p^i}{(3p^2 - 1)} \quad \left(\text{для сравнения: } F_i \approx \frac{\phi^i}{(2\phi - 1)} \right); \quad (7.9b)$$

кроме того,

$$p^i \approx 2P_{i+1} p + P_{i-1} \quad (\text{для сравнения: } \phi^i \approx 2F_{i+1} - F_i). \quad (7.9c)$$

Например,

$$(7.9a) \rightarrow \frac{P_{19}}{P_{18}} = \frac{49}{37} \approx 1,324324324 \approx p,$$

$$(7.9b) \rightarrow \frac{p^{19}}{3p^2 - 1} \approx \frac{209,0956721}{4,26432997} \approx 49,03365208 \approx P_{19},$$

$$(7.9c) \rightarrow 2P_{20}p + P_{18} = 209,2133344 \approx p^{19}.$$

От чисел к геометрии

На рис. VII.1a изображен правосторонний завиток равносторонних треугольников, начинающийся с затравки, составленной из трех одинаковых

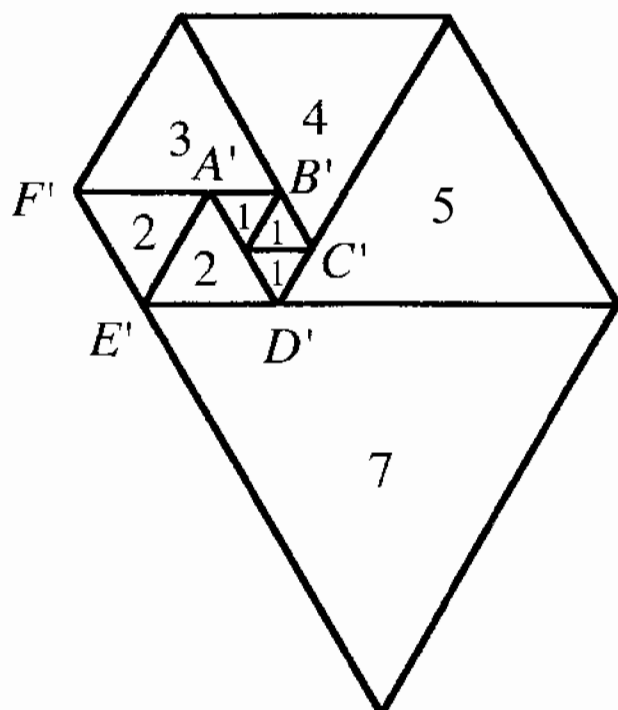


Рис. VII.1a. Треугольный завиток Падована.

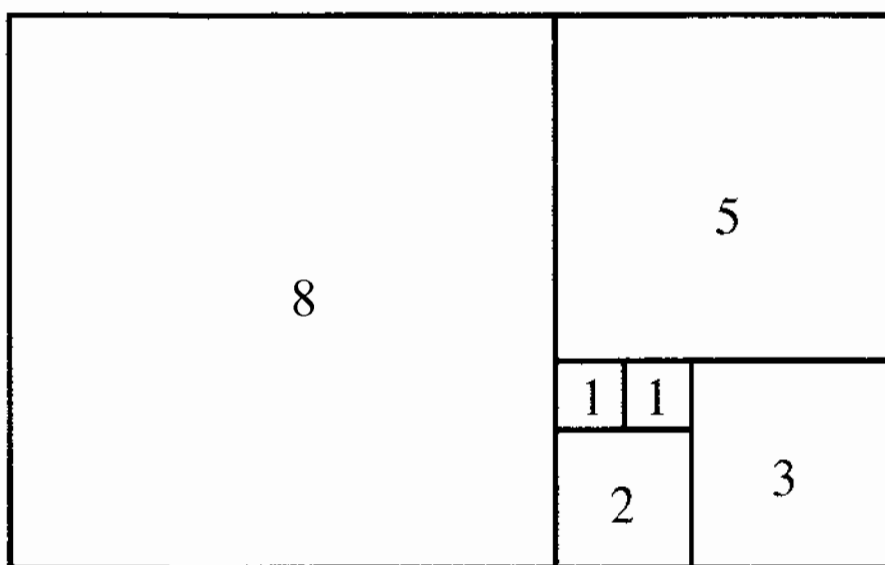


Рис. VII.1b. Прямоугольный завиток Фибоначчи.

треугольников с длиной стороны 1. Длины сторон последующих треугольников равны 2, 2, 3, 4, 5, Длина стороны треугольника $i + 1$ равна сумме длин сторон треугольников i и $i + 1$. Таким образом, треугольники следуют один за другим в соответствии с числовым рядом Падована, начиная с P_4 . Для сравнения на рис. VII.1b показан левосторонний прямоугольный завиток Фибоначчи, в котором читатель без труда найдет последовательность чисел Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... В статье «Истории о невостребованном числе» Иэн Стюарт, которому я очень признателен за предоставленную возможность познакомиться с числами Падована, вписывает *внутрь* завитка Падована спираль, признавая при этом, что эта спираль лишь приближается к истинной логарифмической спирали. Ниже мы — следуя принципам, аналогичным тем, что применял Стюарт при построении приведенной на рис. VII.1a фигуры, хотя и отличным от них — построим несколько иной завиток, *вокруг* которого описывается самая что ни на есть настоящая логарифмическая спираль.

Серебряный пятиугольник

Рассмотрим изображенный на рис. VII.2a усеченный параллелограмм $ABCDE$, который мы будем называть *серебряным пятиугольником*. Длины сторон AB , BC , CD , DE , EA равны, соответственно, 1, p , p^2 , p^3 , p^4 . Угол AED равен 60° . Продолжив стороны AB и CD до их пересечения в точке Q , мы можем видеть, что $DE = AB + BQ$, т.е. $p^3 = p + 1$, и $AE = QC + CD$, т.е. $p^4 = p^2 + p$. Таким образом, учитывая выбранные при

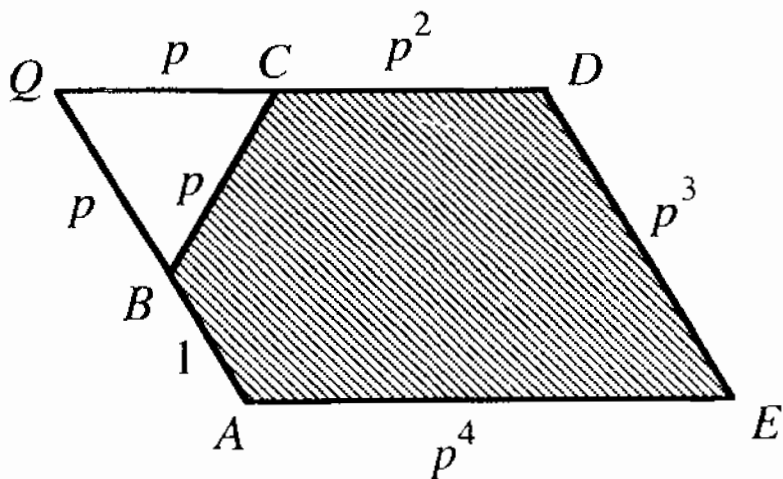


Рис. VII.2а. Серебряный пятиугольник.

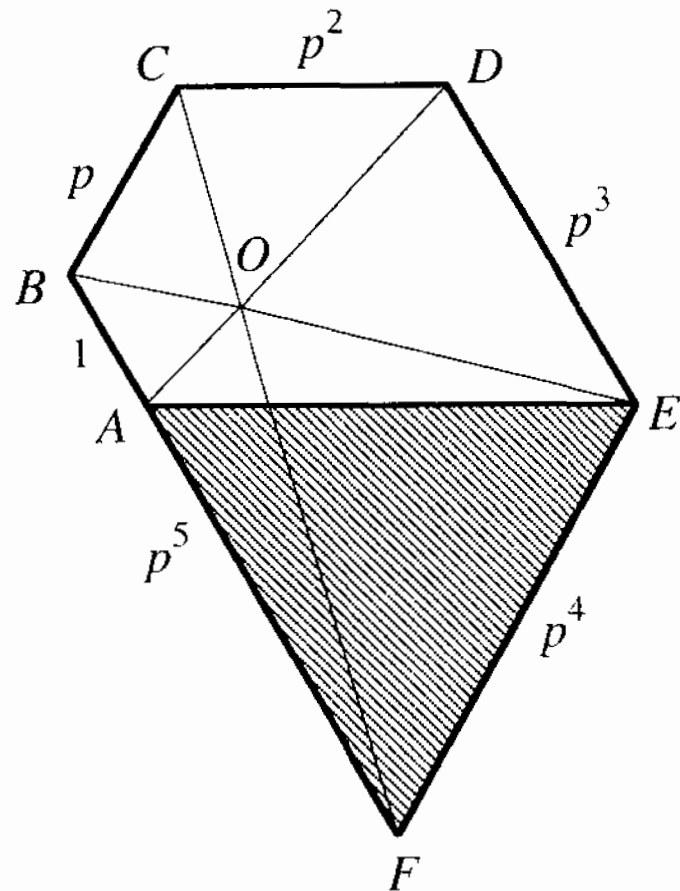


Рис. VII.2б. Гномон серебряного пятиугольника.

построении усеченного параллелограмма длины сторон, следует признать, что данная конструкция имеет полное право на существование. Если теперь добавить к ней равносторонний треугольник AEF , как показано на рис. VII.2б, то мы получим усеченный параллелограмм $BCDEF$, длины сторон которого BC , CD , DE , EF , FB , соответственно, равны p , p^2 , p^3 , p^4 , p^5 . Иными словами, серебряный пятиугольник, длины сторон которого равны длинам соответствующих сторон пятиугольника $ABCDE$, умноженным на p . Равносторонний треугольник AEF является, таким образом, *гномон* серебряного пятиугольника. На рис. VII.3 дана последовательность фигур, в которой добавление равностороннего треугольника к любому из серебряных пятиугольников дает новый серебряный пятиугольник с увеличенными в p раз длинами сторон.

Серебряная спираль

На рис. VII.4а изображен правосторонний завиток вокруг полюса O , начинающийся с *затравки* $ABCDE$. Отметим, что диагонали AD , BE , CF пересекаются в полюсе O . Завиток, таким образом, имеет правильную затравку, а его спиральная огибающая является логарифмической. При каждом повороте на 60° ее радиус увеличивается в p раз. Ее уравнение в полярных координатах имеет вид $r = r_0 e^{\lambda \vartheta}$ с коэффициентом расширения,

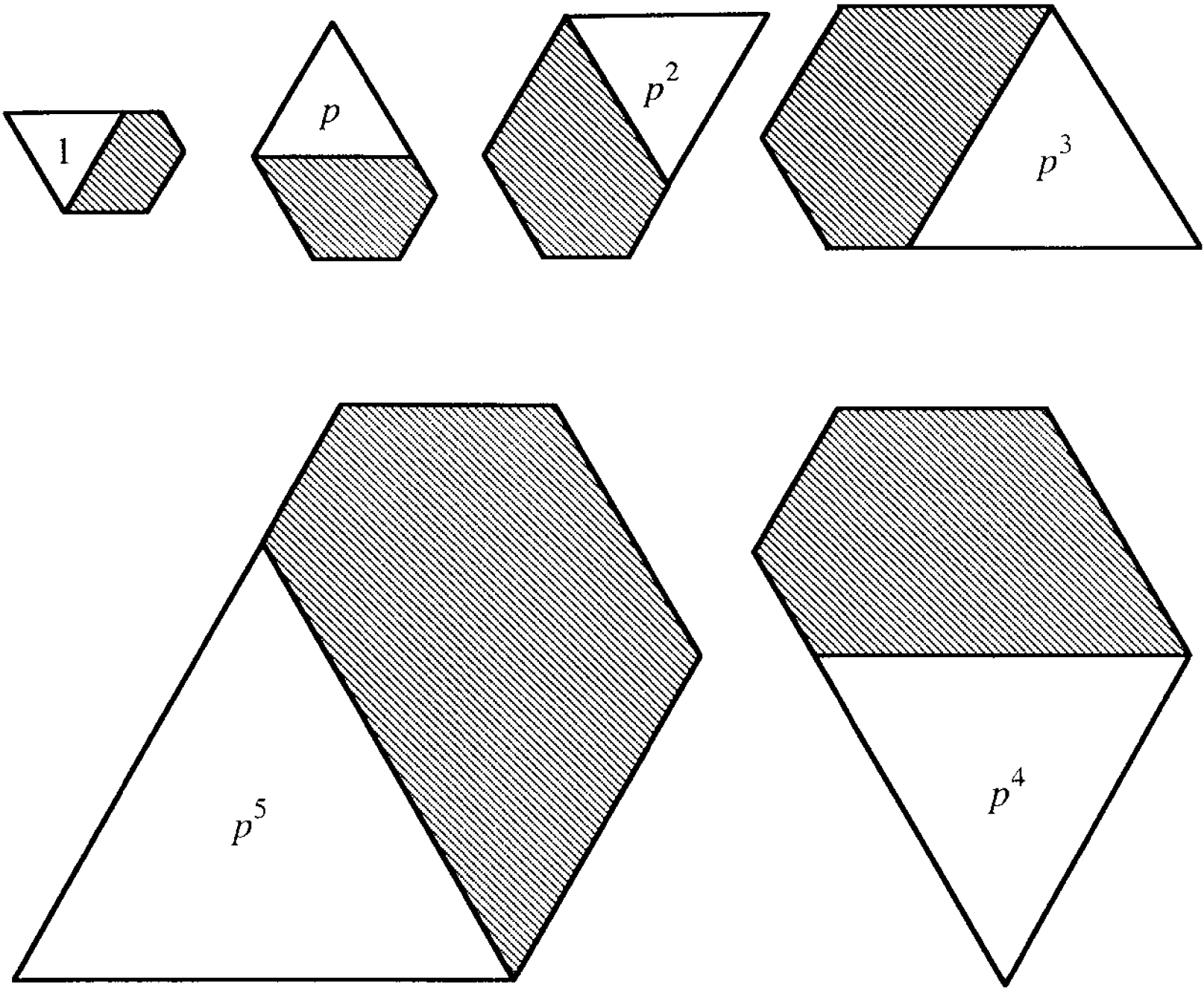


Рис. VII.3. Завиток из серебряных пятиугольников.

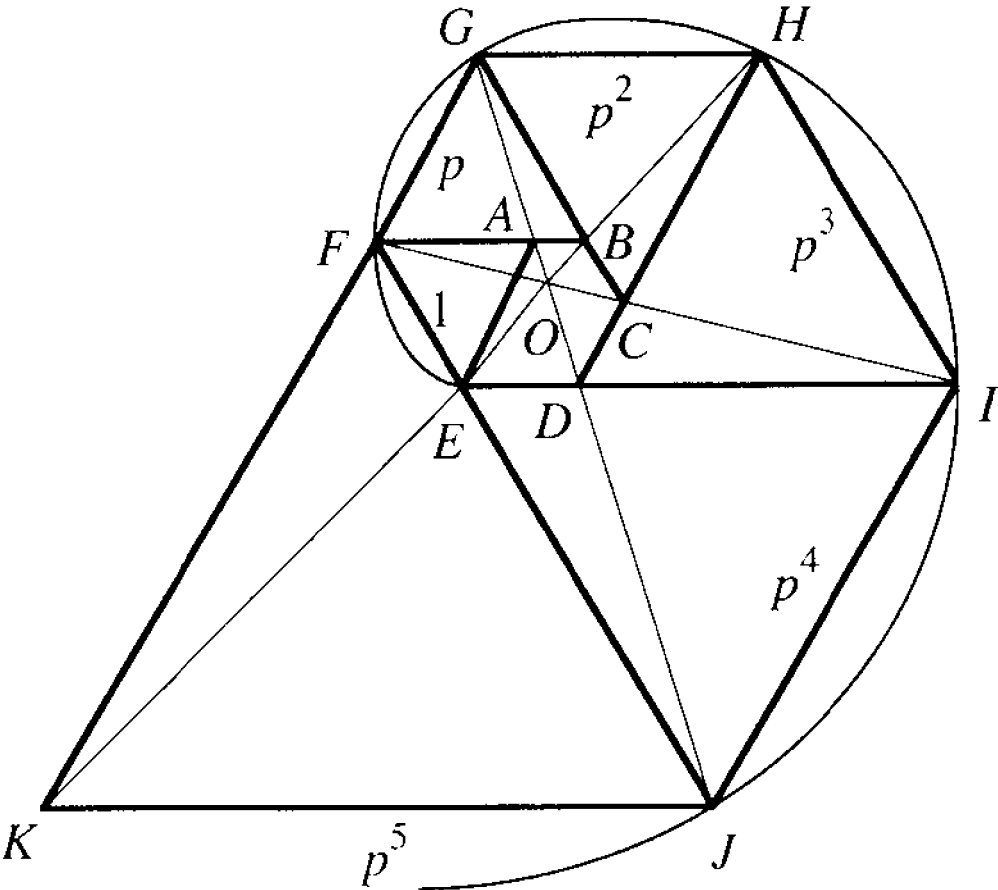


Рис. VII.4а. Серебряная спираль.

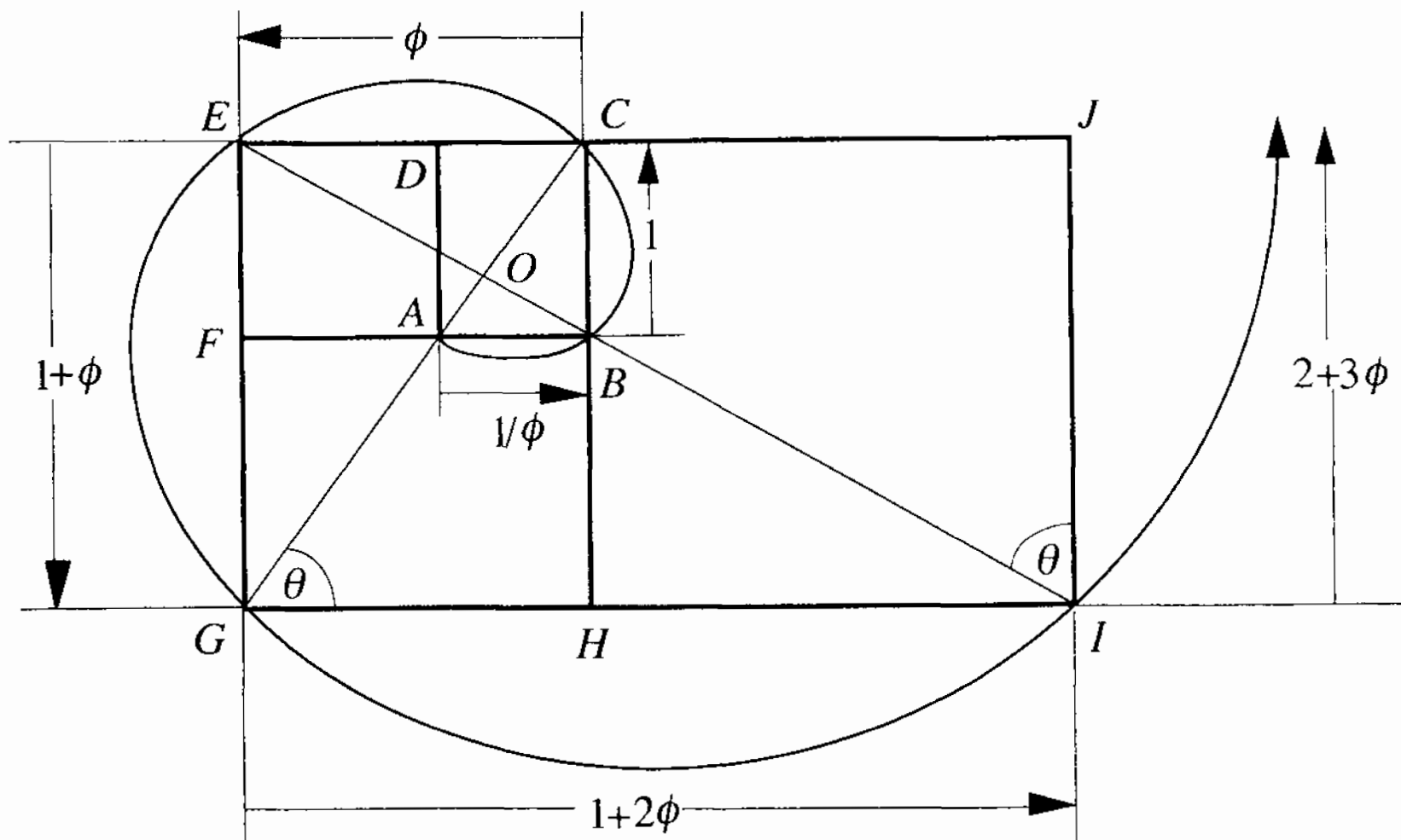


Рис. VII.4b. Золотая прямоугольная спираль.

равным

$$\lambda = \frac{3 \ln(1,324718)}{\pi} = 0,8834145. \quad (7.10)$$

Для сравнения на рис. VII.4b показан левосторонний золотой прямоугольный завиток. Радиус логарифмической спирали, описанной вокруг него, увеличивается в ϕ раз при каждом повороте на 90° . Коэффициент расширения такой спирали равен

$$\lambda = \frac{2 \ln(1,618034)}{\pi} = 0,30635. \quad (7.11)$$

Если сравнить рисунки VII.1a и VII.4a, можно заметить, что хотя пятиугольники $ABCDE$ и $A'B'C'D'E'$ похожи, они все же не подобны. Добавление к $A'B'C'D'E'$ равностороннего треугольника $A'E'F'$ дает пятиугольник $B'C'D'E'F'$, не подобный $A'B'C'D'E'$. То есть равносторонний треугольник не является гномоном такого пятиугольника. При дальнейшем построении завитка к усеченным пятиугольникам рис. VII.1a добавляются все новые и новые равносторонние треугольники, и пятиугольники все сильнее приближаются к серебряному пятиугольнику, так как при достаточно большом i отношение P_i/P_{i-1} стремится к p . Аналогично, если сравнить

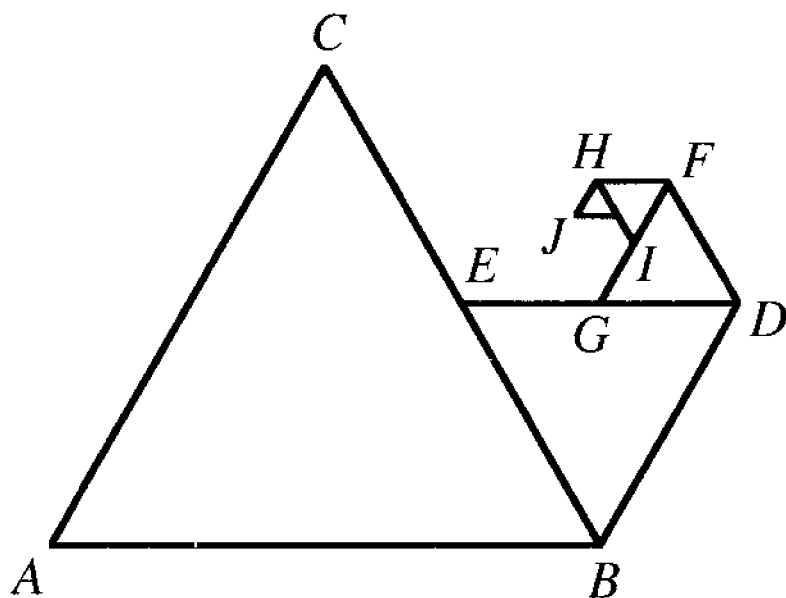


Рис. VII.5. Треугольная улитка (начальные этапы построения).

фигуры на рис. VII.1b и VII.1b, то обнаружится, что только вторая из них имеет правильную затравку и что только вокруг нее можно описать логарифмическую спираль.

Улитка

Геометрическая фигура, представленная на рис. VII.5, получена последовательным добавлением друг к другу равносторонних треугольников, при этом длина стороны каждого последующего треугольника выбиралась в два раза меньшей, чем у предшествующего треугольника. *Продолжив процесс до бесконечности* — и только в этом случае, — мы получим в результате фигуру, которую можно назвать *треугольной улиткой*, благодаря ее сходству с одноименным моллюском, обитающим в спиральной раковине, откуда его весьма непросто извлечь. На рис. VII.6 показано, как при добавлении к улитке равностороннего треугольника получается новая улитка, каждая сторона которой в два раза длиннее соответствующих сторон исходной улитки. Не будь процесс построения фигуры на рис. VII.5 бесконечным, фигура, получаемая добавлением равностороннего треугольника к усеченной улитке, не была бы геометрически подобна несчастному изувеченному моллюску. Каждое добавление равностороннего треугольника давало бы новую фигуру, не подобную ни одной из своих предшественниц.

Характер самоподобия (или гномонности) улитки позволяет описать ее логарифмической спиралью, радиус которой удваивается с каждым поворотом на 60° , как показано на рис. VII.6. Коэффициент расширения такой спирали равен $\lambda = 3/\pi \ln 2 \approx 0,661906801$. Рис. VII.7 иллюстрирует, как с помощью аналогичного процесса можно построить квадратную улитку. Коэффициент расширения спирали в этом случае составит $\lambda = 2/\pi \ln 2 \approx 0,4412712$. Хотя процесс построения улиток бесконечен,

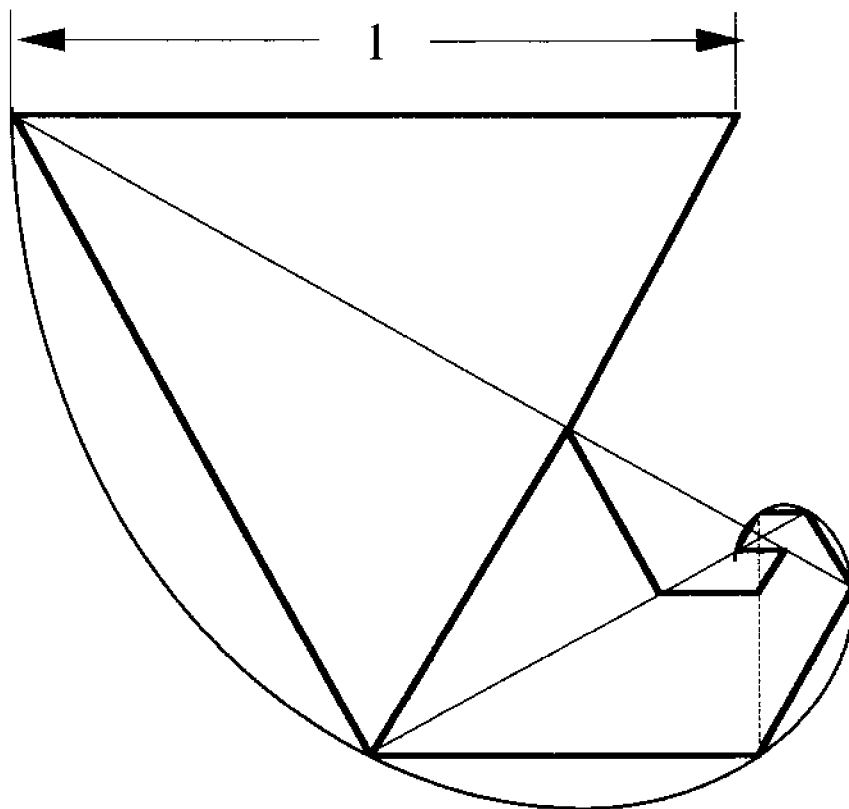


Рис. VII.6. Треугольный гномон треугольной улитки.

и треугольная, и квадратная улитки обладают конечными периметрами. Периметр треугольной улитки равен $2(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots) = 4$, квадратной — 6. Аналогично, величины их площадей определяются сходящимися рядами, следовательно, также конечны.

Несмотря на конечный характер периметров и площадей обеих разновидностей улиток, мы воздержимся от называния их финитными полигонами, оставив это обозначение для многоугольников, содержащих конечное количество конечных сторон. Отсюда — следующее удивительное утверждение:

Квадрат является гномоном золотого прямоугольника, а равносторонний треугольник — гномоном серебряного пятиугольника. Кроме золотого прямоугольника и серебряного пятиугольника, не существует (по всей вероятности) других финитных многоугольников, гномонами которых были бы правильные многоугольники.

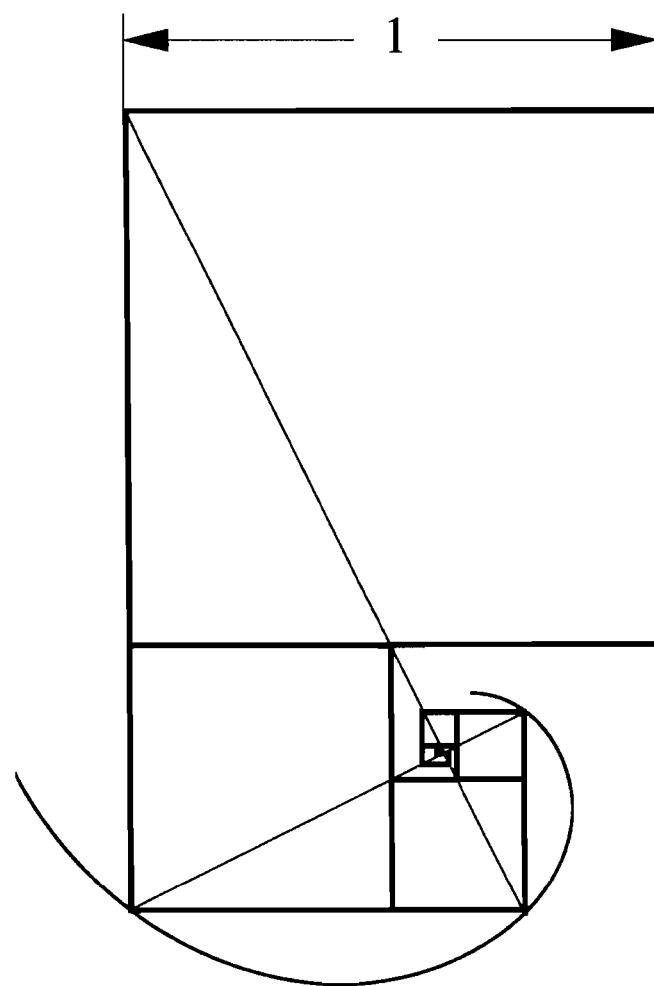


Рис. VII.7. Гномон квадратной улитки.

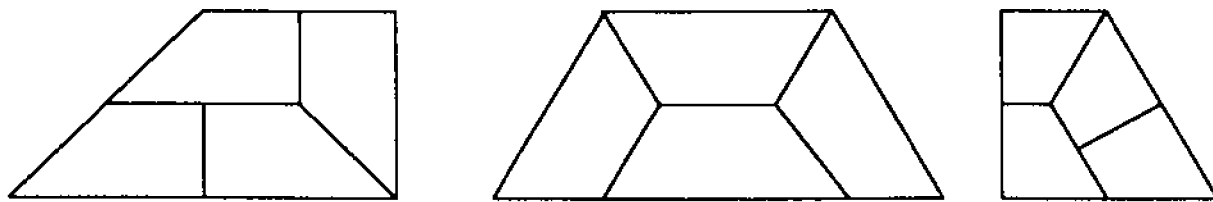


Рис. VII.8.

Заметки на полях

Реп-тайлы Голомба

Существуют определенные семейства фигур, с помощью которых изучать гномоны — одно удовольствие. К таким фигурам относятся *реп-тайлы*; термин был предложен американским математиком Соломоном Голомбом для обозначения всех тех удивительных форм, которые представлял в своей колонке в «Scientific American», а затем собрал под одной обложкой в своей книге «Математические досуги» Мартин Гарднер³ (вместе с другими замечательными, развивающими воображение очерками).

На рис. VII.8 изображены три трапеции, каждая из которых состоит из четырех конгруэнтных трапеций, каждая из которых, в свою очередь, геометрически подобна большой фигуре, и имеет в четыре раза меньшую площадь. Такую малую трапецию называют *реп-4-фигурой* или *реплицирующей фигурой четвертого порядка*, имея в виду, что для построения подобной ей большой фигуры этих малых трапеций потребуется четыре штуки. Процесс можно повторять сколько угодно раз, можно даже вымостить элементарными трапециями какую-либо плоскую поверхность — поэтому, собственно, Голомб и назвал их реп-тайлами⁴.

Голомб обнаружил еще одно интересное свойство реп-тайлов: параллелограмм $1 \times \sqrt{k}$ является реп- k -фигурой. То есть для построения подобного ему параллелограмма требуется k параллелограммов $1 \times \sqrt{k}$, как показано на рис. VII.9. В переводе на язык гномонов наблюдение Голомба эквивалентно следующему утверждению:

$$\Phi_m = \sqrt{k} \quad \text{или} \quad m = \Omega_m - \frac{1}{\Phi_m} = \frac{k-1}{\sqrt{k}}.$$

Пусть дан параллелограмм-затравка с длинами сторон 1 и $\sqrt{k}$, иначе говоря, с пропорцией $\sqrt{k}$. Тогда длина одной из сторон его гномона — общая

³Martin Gardner. *The Unexpected Hanging and Other Mathematical Diversions* (New York: Simon and Schuster, 1969). (Рус. перевод: Гарднер М. *Математические досуги* (М.: Мир, 1972).)

⁴См. прим. к с. 12. — *Прим. перев.*

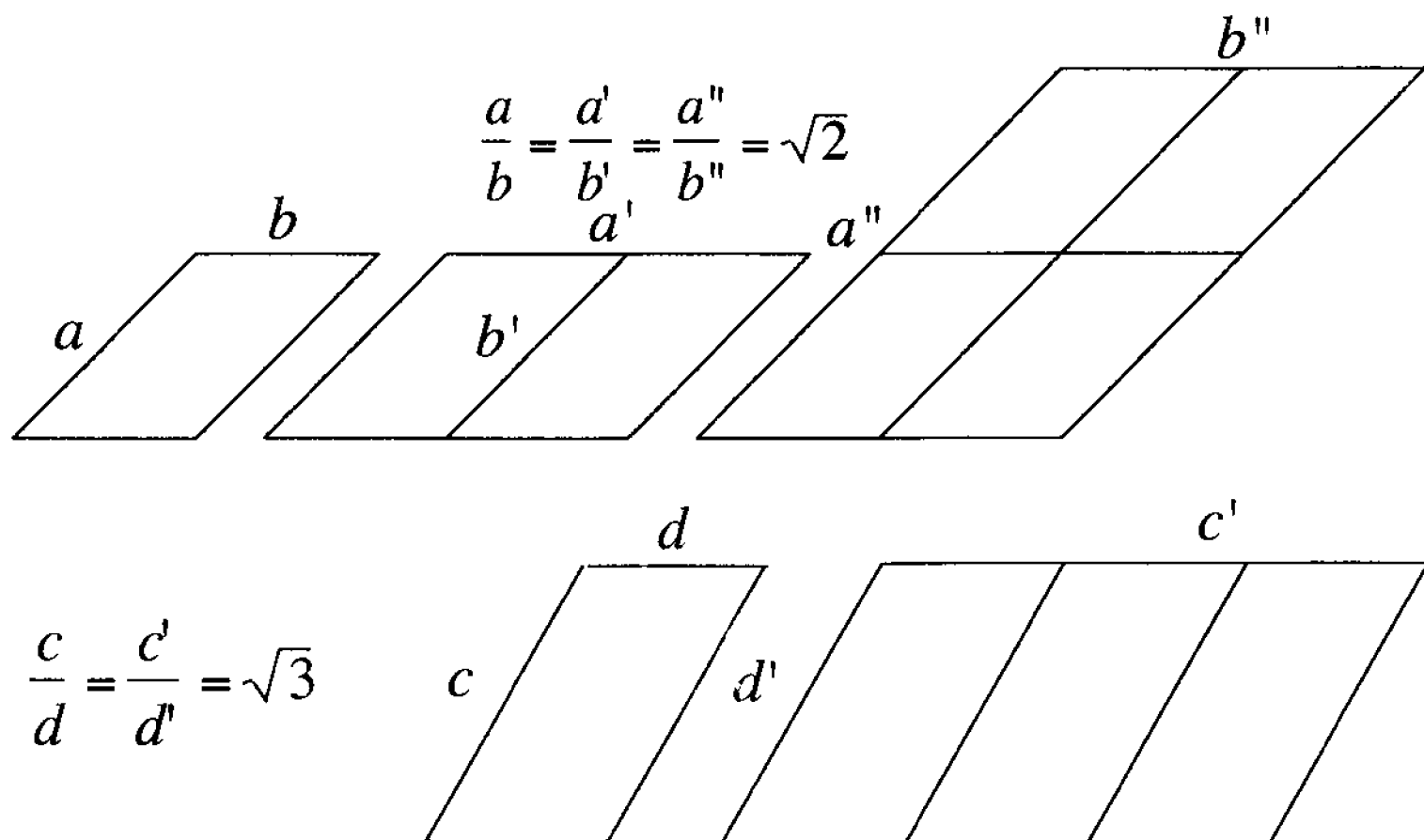


Рис. VII.9. Параллелограммы $1 \times \sqrt{k}$ являются реп- k -фигурами.

с затравкой — равна $\sqrt{k}$, а другая —

$$\Phi_m \sqrt{k} = \frac{(k-1)\sqrt{k}}{\sqrt{k}} = k-1.$$

Таким образом, гномон состоит из $k-1$ параллелограммов, каждый из которых конгруэнтен затравке. В сумме затравка и гномон составляют фигуру, подобную затравке, но в k раз бóльшую. Кстати, именно Голомб принадлежит честь следующего открытия (суть которого мы выразим сразу в гномонных терминах): существует только две гомогномонных (т. е. конгруэнтных собственному гномону) фигуры — параллелограмм с пропорцией $\sqrt{2}$ и равнобедренный прямоугольный треугольник.

Много лет назад плодовитый Голомб обнаружил также фигуру, которая представляет собой не что иное, как уже знакомую нам треугольную улитку (рис. VII.10). Она является реп-4-фигурой, поскольку при продолжении построения в бесконечность три внутренних завитка смыкаются друг с другом и малый треугольный просвет в центре полностью исчезает.

Commedia dell'Arte

В своем эпохальном трактате «Ars Magna»⁵, увидевшем свет в 1545 году, итальянский математик Джироламо Кардано (1501–1576, рис. VII.11)

⁴Комедия масок, комедия дель арте (ит., театр. жанр). — Прим. перев.

⁵«Великое искусство» (лат.). — Прим. перев.

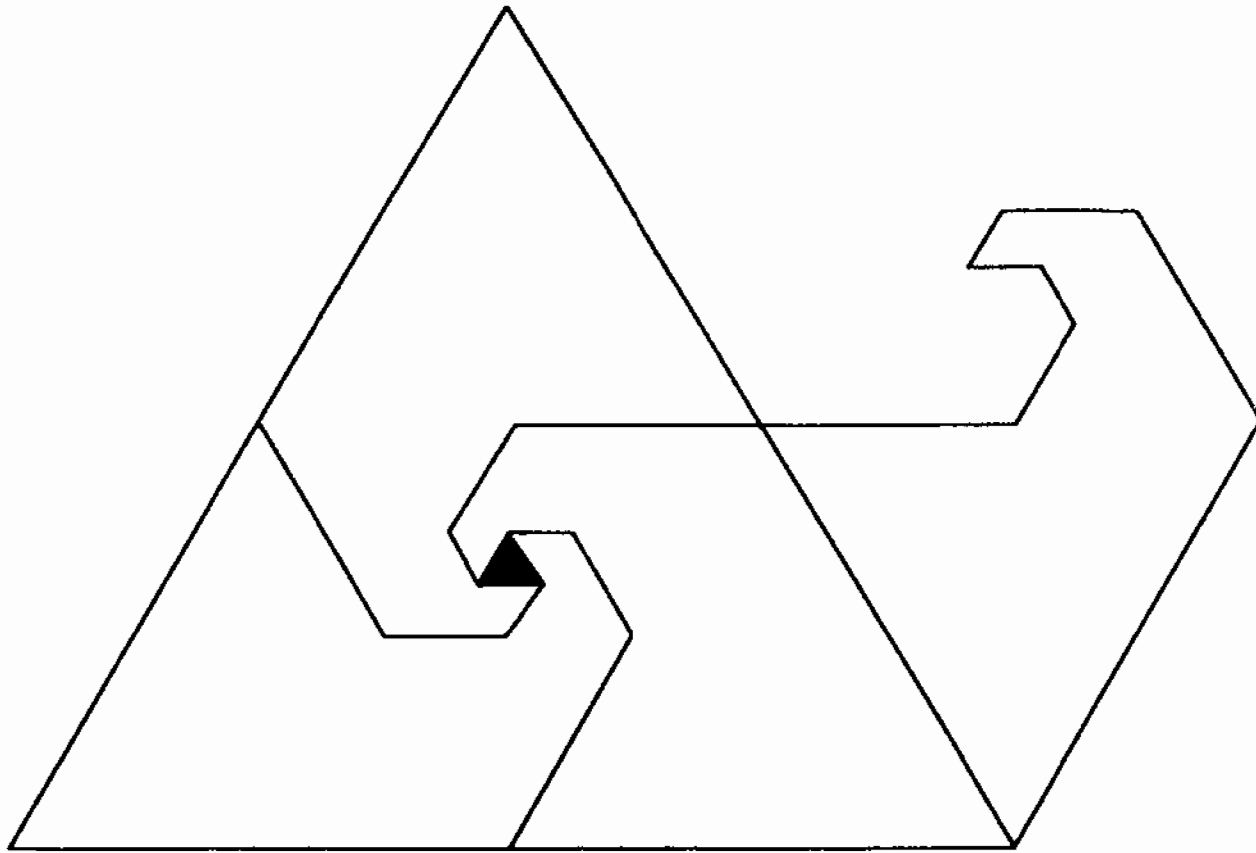


Рис. VII.10. Треугольная улитка — реп-4-фигура.

предложил следующее решение кубического уравнения $x^3 + ax = b$:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^3 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} + \frac{b}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^3 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}}. \quad (7.12)$$

Подставив в это выражение $a = -1$ и $b = 1$, можно найти решение уравнения $p^3 - p - 1 = 0$:

$$\begin{aligned} p &= \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{-1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{-1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1}{2}} = \\ &= \sqrt[3]{\sqrt{\frac{23}{108}} + \frac{1}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{23}{108}} - \frac{1}{2}} \approx \\ &\approx \sqrt[3]{0,461479103 + 0,5} - \sqrt[3]{0,461479103 - 0,5} \approx \\ &\approx 0,986991206 + 0,337726751 \approx \\ &\approx 1,324717957, \end{aligned} \quad (7.13)$$

что с точностью до десяти значащих цифр совпадает со значением, вычисленным последовательными итерациями выражения

$$\sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \dots \sqrt[3]{1 + s}}}} \rightarrow p. \quad (7.14)$$



Рис. VII.11. Джироламо Кардано.

Как отмечает Карл Б. Бойер⁶, 1545 год ознаменовал начало современной эпохи в математике. До публикации «Ars Magna» в течение одного недолгого года наиболее полной книгой по алгебре была «Arithmetica Integra»⁷ Михаэля Штифеля, изданная в 1544 году, сменив такие трактаты, как «Coss» Кристоффа Рудоффа (1525) и «Rechnung»⁸ Петера Апиана (1527). Штифель, Рудофф и Апиан являются наиболее выдающимися из математиков немецкой школы, которая в ту эпоху была особенно плодотворна. Следует также отметить, что в 1543 году Николай Коперник опубликовал «De revolutionibus orbium coelestium»⁹, а Андреас Везалий — «De Humani Corporis Fabrica»¹⁰.

Хотя Кардано и признал, что автором решения кубического уравнения является не он, а его соотечественник Никколо Фонтана (1500–1557), все же вышло так, что он лишил первооткрывателя заслуженных лавров. Как оказалось, Кардано, узнав об открытии Фонтаны, обещал тому, что он воздержится от его обнародования, поскольку Фонтана как раз готовил к изданию собственный трактат по алгебре, изюминкой которого и призвано было стать решение кубического уравнения. Это недоразумение является, однако, лишь одним из эпизодов истинной комедии дель арте XVI века, главными действующими лицами которой выступали Кардано и Фонтана по прозвищу Тарталья, т. е. Заика. Дефектом речи злополучный Тарталья обзавелся вследствие сабельного удара, полученного в 1512 году при захвате французами города Брешиа. Помимо прочего, Тарталья обладал скверной привычкой приписывать себе открытия и достижения других. У некоего Мербеке он украл и выдал за собственный перевод сочинений Архимеда; кроме того, есть основания полагать, что не является его заслугой и закон наклонной плоскости, открытый Иорданием Неморарием. Не менее вероятно и то, что решением кубического уравнения Тарталья обязан некоему профессору математики в Болонском университете — весьма уважаемому, надо сказать, учебном заведении — по имени Сципионе дель Ферро, который поделился тайной со своим студентом Фьоре (Флоридусом, если на латыни). После математического состязания между Фьоре и Тартальей, которое последний, конечно же, без труда выиграл, Тарталья был приглашен в дом Кардано на обед, куда он не преминул отправиться, привлеченный перспективой быть представленным патрону, в поддержке которого Тарталья отчаянно нуждался. Кардано в «Ars Magna» приводит также решение уравнения четвертой степени, которое, по его словам, нашел «по его просьбе» Луиджи Феррари. Врач по образованию, уроженец Павии Джироламо

⁶Carl B. Boyer and Uta C. Merzbach. *A History of Mathematics* (New York: John Wiley & Sons, 1989), p. 282.

⁷«Полная арифметика» (лат.). — Прим. перев.

⁸«Счет» (нем.). — Прим. перев.

⁹«О вращении небесных тел» (лат.). — Прим. перев.

¹⁰«О строении человеческого тела» (лат.). — Прим. перев.

Кардано прожил жизнь игрока и авантюриста. Занявшись астрологией, он однажды составил гороскоп самого Иисуса Христа. Кардано был еретиком и незаконнорожденным и все же сумел добиться от Папы пенсии. Сага о деяниях членов его семьи могла бы заполнить объемистый том: один из сыновей — мошенник, другой — убийца собственной жены. Несмотря на все это, Джироламо Кардано, верный последователь Аль-Хаваризми, остается наиболее выдающимся алгебраистом своего времени.

Повторные корни

На настоящий момент мы познакомились с двумя типами итерационных форм, способных породить числа: позиционную систему счисления и представление в виде непрерывной дроби. Кроме того, на этих страницах нам встречались примеры еще одной итерационной формы, состоящей из так называемых *повторных корней*, а именно:

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}} \rightarrow \phi \quad (7.15)$$

и

$$\sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \dots}}}} \rightarrow p. \quad (7.16)$$

Эти выражения можно рассматривать как частные случаи одной общей формы

$$\sqrt[n]{b + a \sqrt[n]{b + a \sqrt[n]{b + a \sqrt[n]{\dots}}}} \quad (7.17)$$

Допустив, что вышеприведенное выражение сходится к некоторому значению x , можно записать

$$x = \sqrt[n]{b + a \sqrt[n]{b + a \sqrt[n]{b + a \sqrt[n]{\dots}}}} \quad (7.18)$$

Суть метафоры, известной под названием «гильбертов отель», заключается в следующем: будучи владельцем отеля с бесконечным числом номеров, все из которых в настоящий момент заняты, вы всегда сможете поселить нового постояльца, просто попросив жильца 1-го номера переехать во 2-й, жильца 2-го — в 3-й и т. д., при этом вы можете быть совершенно уверены, что мест хватит всем. В данном случае мы вполне можем прибегнуть к этой метафоре и счесть, что, поскольку $x = \sqrt[n]{\dots}$, мы имеем полное право

«переселить» его в следующую комнату и записать $x = \sqrt[n]{b + ax}$, что дает нам уравнение

$$x^n - ax - b = 0. \quad (7.19)$$

Уравнения (7.15) и (7.16) соответствуют, очевидно, случаю $a = b = 1$.

В главе III мы могли видеть, что уравнению

$$x^n - F_{m,n}x - F_{m,n-1} = 0 \quad \text{и, в частности,} \quad x^2 - mx - 1 = 0 \quad (7.20)$$

соответствует решение $x = \Phi_m = (m + \sqrt{m^2 + 4})/2$ для всех значений n . Следовательно,

$$\Phi_m = \sqrt[n]{F_{m,n-1} + F_{m,n}\Phi_m}, \quad \text{для всех } n \neq 0, 1, \quad (7.21)$$

что, следуя предписаниям Гильберта, можно преобразовать к виду

$$\Phi_m = \sqrt[n]{F_{m,n-1} + F_{m,n} \sqrt[n]{F_{m,n-1} + F_{m,n} \sqrt[n]{F_{m,n-1} + F_{m,n} \sqrt[n]{\dots}}}} \quad (7.22)$$

Например, припомним, что $F_{1,1} = 1$, $F_{1,2} = 1$, $F_{1,3} = 2$, $F_{1,4} = 3$, $F_{1,5} = 5$, ..., получим

$$\begin{aligned} \phi = \Phi_1 &= \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 \dots}}}} = \sqrt[3]{1 + 2\sqrt[3]{1 + 2\sqrt[3]{1 + 2\sqrt[3]{\dots}}}} = \\ &= \sqrt[4]{2 + 3\sqrt[4]{2 + 3\sqrt[4]{2 + 3\sqrt[4]{\dots}}}} = \sqrt[5]{3 + 5\sqrt[5]{3 + 5\sqrt[5]{3 + 5\sqrt[5]{\dots}}}} \\ &\dots \end{aligned} \quad (7.23)$$

При $m = 2$ и $\Phi_2 = 1 + \sqrt{2}$ уравнение (7.21) принимает вид:

$$\Phi_2^n - F_{2,n-1}\Phi_2 - F_{2,n} = 0.$$

Последовательность Фибоначчи порядка $m = 2$ составляют числа 0, 1, 2, 5, 12, 29, Следовательно, мы можем записать

$$\begin{aligned} 1 + \sqrt{2} &= \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 2\sqrt{\dots}}}} = \\ &= \sqrt[3]{2 + 5\sqrt[3]{2 + 5\sqrt[3]{2 + 5\sqrt[3]{\dots}}}} \end{aligned} \quad (7.24)$$

Ниже представлен один довольно занятый, хотя, возможно, и не слишком полезный, результат наших рассуждений. Известно, что

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \left(e^x - \frac{1}{e^x} \right);$$

положим $m = 2 \sinh x$, следовательно, при положительных значениях x

$$e^x = \sqrt{1 + 2 \sinh x \sqrt{1 + 2 \sinh x \sqrt{1 + 2 \sinh x \sqrt{\dots}}}} \quad (7.25)$$

Можно также записать, каков бы ни был смысл этого выражения,

$$e^x = 2 \sinh x + \frac{1}{2 \sinh x + \frac{1}{2 \sinh x + \frac{1}{2 \sinh x + \dots}}} \quad (7.27)$$

Невозможно закончить обсуждение повторных корней, не упомянув о знаменитой формуле, предложенной в 1593 французским математиком Франсуа Виетом в трактате «*Variorum de rebus mathematicis responsorum liber VIII*»:

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} \dots}}, \quad (7.27)$$

а также о замечательно красивой формуле, обнаруженной Рамануджаном:

$$\sqrt{1 + 2 \sqrt{1 + 3 \sqrt{1 + 4 \sqrt{1 + \dots}}}} = 3. \quad (7.28)$$

Если вас теперь кто-нибудь попросит назвать *целое* число x , удовлетворяющее равенству

$$\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots}}} = x, \quad (7.29)$$

то вряд ли у вас возникнут трудности с ответом¹¹.

¹¹ $x = 2$.

ГЛАВА VIII

Спирали

Спираль — это одухотворенный круг. В спирали круг расцепляется, разворачивается, перестает быть порочным — освобождается.
(Владимир Набоков, *Speak Memory*)

Что такое спираль и какое отношение — не считая их «удивительной» природы, столь очаровавшей Бернулли, — имеют спирали к изучению итерационных процессов и гномонов? Попыткой ответить на этот вопрос и является настоящая глава. Начнем мы с выражения уравнения спирали в декартовых и полярных координатах. Затем обобщим наши рассуждения на случай дигномонных спиралей и завершим главу рассмотрением конечно-разностного подхода к исследованию колебаний в линейных системах, проиллюстрированным анализом поведения простого маятника и электрического резистивно-индуктивно-емкостного (RLC-) контура. Таким образом, решение стоящей перед нами проблемы мы осуществим в три этапа, двигаясь от простого к более сложному — а не от общего к частному, как подобает всякому доброму «картезианцу».

Матрица поворота

Рассмотрим рис. VIII.1. Возьмем некоторую произвольную точку A_i с декартовыми координатами x_i, y_i и соединим ее с началом координат O радиусом r_i , угол наклона которого к оси x равен ϑ_i радиан. Переместимся по кривой c в точку A_{i+1} с координатами x_{i+1}, y_{i+1} . При этом происходит поворот радиуса против часовой стрелки на *элементарное угловое приращение* φ , а длина радиуса умножается на некоторый коэффициент k . Запишем

$$\begin{aligned}x_{i+1} &= kr_i \cos(\vartheta_i + \varphi) = kr_i (\cos \vartheta_i \cos \varphi - \sin \vartheta_i \sin \varphi), \\y_{i+1} &= kr_i \sin(\vartheta_i + \varphi) = kr_i (\sin \vartheta_i \cos \varphi + \cos \vartheta_i \sin \varphi),\end{aligned}\tag{8.1}$$

а поскольку

$$x_i = r_i \cos \vartheta_i, \quad y_i = r_i \sin \vartheta_i,$$

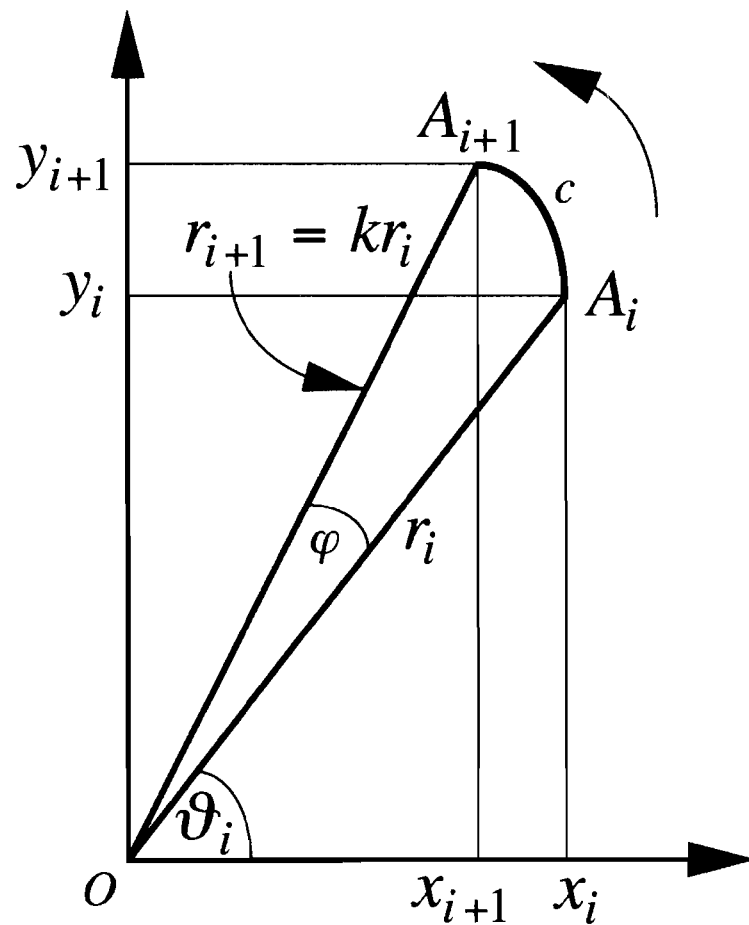


Рис. VIII.1. Поворот с удлинением.

то

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= k (x_i \cos \varphi - y_i \sin \varphi), \\ y_{i+1} &= k (x_i \sin \varphi + y_i \cos \varphi). \end{aligned} \quad (8.2)$$

Записанная в матричной форме

$$\begin{vmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_i \\ y_i \end{vmatrix}, \quad (8.3)$$

эта система уравнений называется *матрицей поворота*.После n поворотов на одинаковое приращение φ с постоянным k координаты x_{i+n} , y_{i+n} принимают вид:

$$\begin{vmatrix} x_{i+n} \\ y_{i+n} \end{vmatrix} = k^n \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix}^n \begin{vmatrix} x_i \\ y_i \end{vmatrix}.$$

Можно показать по индукции (или применив, например, метод Кэли–Гамильтона), что n -я степень матрицы вычисляется следующим образом:

$$\begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix}^n = \begin{vmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{vmatrix}; \quad (8.4)$$

тогда, положив $i = 0$, получим

$$\begin{vmatrix} x_n \\ y_n \end{vmatrix} = k^n \begin{vmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{vmatrix}^n \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}. \quad (8.5)$$

Иными словами,

$$\begin{aligned} x_n &= k^n (x_0 \cos n\varphi - y_0 \sin n\varphi), \\ y_n &= k^n (x_0 \sin n\varphi + y_0 \cos n\varphi). \end{aligned} \quad (8.6)$$

Уравнения (8.6) задают координаты x_n, y_n точки с начальными координатами x_0, y_0 после n поворотов на одинаковое приращение φ . Когда $k = 1$, соответствующая уравнениям (8.6) фигура представляет собой окружность радиуса $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$.

Моногномонная спираль

Если точка A_0 лежит на оси x , то $y_0 = 0$ и уравнения (8.6) принимают вид

$$x_n = k^n x_0 \cos n\varphi, \quad y_n = k^n x_0 \sin n\varphi,$$

то есть

$$r_n = \sqrt{x_n^2 + y_n^2} = k^n r_0 \sqrt{\cos^2 n\varphi + \sin^2 n\varphi} = k^n r_0. \quad (8.7)$$

Кроме того, имеем

$$\frac{y_n}{x_n} = \operatorname{tg} \vartheta_n = \operatorname{tg} n\varphi; \quad \text{следовательно,} \quad \vartheta_n = n\varphi. \quad (8.8)$$

Применив элементарные тригонометрические тождества, можно показать, что смысл вышеприведенных выражений сводится к следующему утверждению: если при повороте на некоторый инкрементный угол φ радиус умножается на k , то после n таких поворотов радиус умножится на k^n , независимо от точки начала процесса.

Теперь мы можем сделать очень ответственный шаг, который перенесет нас из области *дискретных* величин в царство *непрерывности*, и заявить, что, исходя из уравнений (8.7) и (8.8), при повороте на произвольный угол ϑ радиус увеличивается в $k^{\vartheta/\varphi}$ раз. Символом r_n мы обозначили радиус после поворота на угол $n\varphi$, радиус же после поворота на произвольный угол ϑ от оси x будем обозначать через $r(\vartheta)$. При $r(0) = 0$ имеем

$$r(\vartheta) = r_0 k^{\vartheta/\varphi},$$

а если положить

$$\mu = \frac{\lg k}{\varphi}, \quad \text{то есть} \quad k = 10^{\mu\varphi}, \quad (8.9)$$

то можно записать следующее уравнение:

$$r(\vartheta) = r_0 \times 10^{\mu\vartheta}. \quad (8.10)$$

Это рассуждение применимо и к тем случаям, когда *основание* не равно 10. Можно, в частности, написать и так:

$$r(\vartheta) = r_0 e^{\lambda\vartheta}, \quad \text{где} \quad \lambda = \frac{\ln k}{\varphi}. \quad (8.11)$$

Уравнение моногномонной спирали в полярных координатах определяет радиус r как функцию от угла ϑ и имеет вид $r = r_0 e^{\lambda\vartheta}$; отсюда, кстати, и термин — *логарифмическая спираль*.

Очевидно, что положения последовательных диагональных вершин витого моногномонного прямоугольника образуют моногномонную спираль. Мы будем называть такую спираль *прямоугольной моногномонной спиралью порядка m* . Принимая во внимание, что при повороте против часовой стрелки на $\pi/2$ радиан радиус увеличивается в Φ_m раз, можно по заданной величине m вычислить *коэффициент расширения* λ_m для *левосторонней спирали* (т. е. такой спирали, которая разворачивается в направлении против часовой стрелки); иными словами,

$$r\left(\frac{\pi}{2}\right) = r_0 \Phi_m = r_0 e^{\lambda_m \pi/2}, \quad \lambda_m = \frac{2 \ln \Phi_m}{\pi}. \quad (8.12)$$

Радиус правосторонней спирали умножается на $1/\Phi_m$ при повороте на угол $\pi/2$ против часовой стрелки и на Φ_m при повороте на угол $\pi/2$ по часовой стрелке. В обоих случаях величина коэффициента расширения одинакова, меняется только знак.

Спираль, соответствующая золотому прямоугольнику, характеризуется следующим значением коэффициента расширения:

$$\lambda_1 = \frac{2}{\pi} \ln \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0,306349,$$

коэффициент же расширения спирали, описываемой вокруг витого гомогномонного прямоугольника, равен

$$\lambda_{1/\sqrt{2}} = \frac{2}{\pi} \ln \sqrt{2} \approx 0,2206356.$$

Это рассуждение применимо не только к прямоугольникам, но и к другим витым фигурам. Например, радиус спирали, описываемой вокруг витого золотого треугольника, увеличивается в Φ_m раз при повороте на угол 108° . Таким образом, $\lambda = 5 \ln(1,618034\dots)/3\pi = 0,2252908$. В случае гомогномного треугольника $\lambda = 0,4412712$.

Рассмотрим матрицу

$$\begin{vmatrix} 1 & -\tau \\ \tau & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{array}{c} \sqrt{1+\tau^2} \\ \nearrow \varphi \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \tau \\ \downarrow \end{array}$$

где τ — некоторое произвольное число. Положив $\tau = \operatorname{tg} \varphi$, запишем

$$\begin{vmatrix} 1 & -\tau \\ \tau & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\operatorname{tg} \varphi \\ \operatorname{tg} \varphi & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\cos \varphi} \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix},$$

откуда следует, что матричное уравнение

$$\begin{vmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{vmatrix} = \frac{k}{\sqrt{1+\tau^2}} \begin{vmatrix} 1 & -\tau \\ \tau & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_i \\ y_i \end{vmatrix} \quad (8.13a)$$

имеет следующее решение:

$$\begin{vmatrix} x_n \\ y_n \end{vmatrix} = k^n \begin{vmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}, \quad \text{при } \operatorname{tg} \varphi = \tau. \quad (8.13b)$$

Сравнив полученный результат с уравнением (8.5), отметим, что оба уравнения (8.13) описывают спираль, радиус которой увеличивается в k раз при каждом повороте на угол $\varphi = \operatorname{arctg} \tau$.

Коэффициент $\cos \varphi = 1/\sqrt{1+\tau^2}$ в уравнении (8.13a) есть функция от грубости выбранного углового разрешения и стремится к единице при уменьшении величины угла φ . Назовем этот коэффициент *коэффициентом дискретизации*, связанным с угловым разрешением φ . Например, для построения на экране компьютерного монитора окружности радиуса r с угловым разрешением φ радиан можно применить следующий простой алгоритм:

$$\begin{vmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}} \begin{vmatrix} 1 & -\tau \\ \tau & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_i \\ y_i \end{vmatrix}, \quad \text{где } x_0 = r, y_0 = 0, \tau = \operatorname{tg} \varphi. \quad (8.14)$$

Вернемся к прямоугольной моногномонной спирали. Обозначим через $k_{m,\varphi}$

значение коэффициента k , соответствующего некоторому угловому приращению φ . Положив $y_0 = 0$, $x_0 = r_0$, имеем

$$\Phi_m = \frac{r\left(\frac{\pi}{2}\right)}{r_0} = (k_{m,\varphi})^{\pi/2\varphi}, \quad k_{m,\varphi} = e^{\lambda_m\varphi}. \quad (8.15)$$

Ниже даны три уравнения в конечных разностях, каждое из которых описывает прямоугольную моногномонную спираль порядка m с угловым приращением $\varphi = \arctg \tau$:

$$\begin{vmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{vmatrix} = \frac{e^{\lambda_m \arctg \tau}}{\sqrt{1 + \tau^2}} \begin{vmatrix} 1 & -\tau \\ \tau & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_i \\ y_i \end{vmatrix}, \quad (8.16a)$$

$$\begin{vmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{vmatrix} = e^{\lambda_m \varphi} \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_i \\ y_i \end{vmatrix}, \quad (8.16b)$$

$$\begin{vmatrix} x_n \\ y_n \end{vmatrix} = e^{\lambda_m n \varphi} \begin{vmatrix} \cos n \varphi & -\sin n \varphi \\ \sin n \varphi & \cos n \varphi \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}. \quad (8.16c)$$

Матричное уравнение такой спирали в декартовых координатах от параметра ϑ имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = e^{\lambda_m \vartheta} \begin{vmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}. \quad (8.16d)$$

Запишем также ее уравнение в полярных координатах, выражающее радиус r в виде функции от угла ϑ :

$$r = r_0 e^{\lambda_m \vartheta}, \quad (8.16e)$$

где

$$\lambda_m = \frac{2 \ln \Phi_m}{\pi}, \quad \Phi_m = \frac{m + \sqrt{4 + m^2}}{2}.$$

Напомним, что величина $e^{\lambda_m \varphi}$ представляет собой коэффициент, на который умножается радиус r при его повороте на угол, равный элементарному приращению φ , а величина $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2}}$ есть коэффициент дискретизации.

Важно понимать, что все уравнения (8.16) относятся к одной и той же кривой. Уравнения (8.16d) и (8.16e) описывают *каждую* точку этой кривой, тогда как уравнения (8.16a, b, c) представляют собой описания бесконечного множества точек, разделенных вполне дискретными (не бесконечно малыми) интервалами. Итерационные уравнения (8.16a, b) определяют каждую

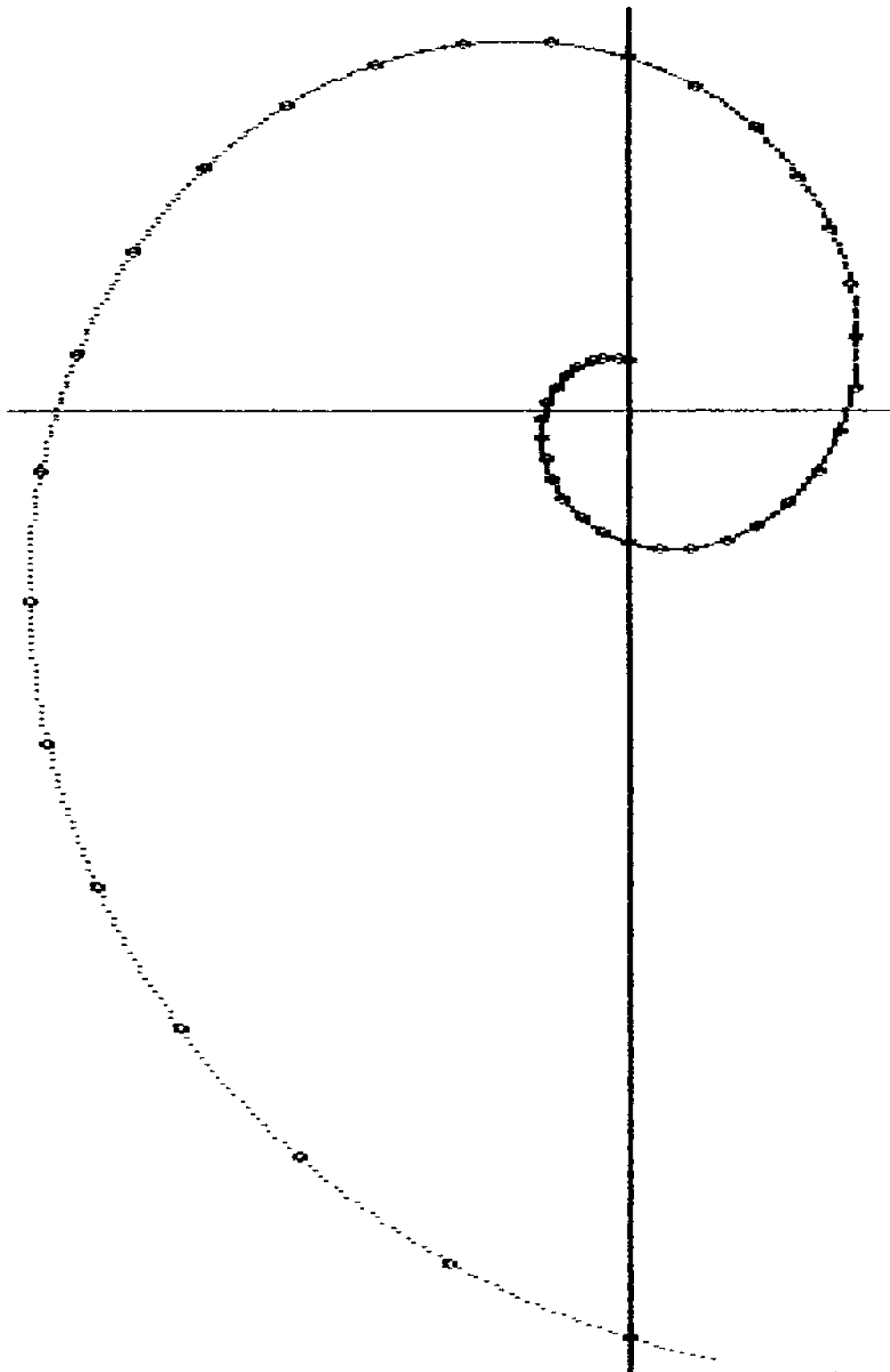


Рис. VIII.2. Золотая прямоугольная монотонная спираль с точками дискретизации.

такую точку через предыдущую точку, а уравнение (8.16с) описывает каждую точку в явном виде через общее количество итераций. На рис. VIII.2 построена золотая прямоугольная монотонная спираль, на которой жирными точками показаны точки дискретизации, соответствующие приращению $\varphi = 2\pi/30$ радиан, т. е. задаваемые итерационным уравнением с $\tau = 0,2125566$ и $e^{\lambda_m \varphi} = 1,066265$:

$$\begin{vmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{vmatrix} = 1,066265 \begin{vmatrix} 1 & -0,2125566 \\ 0,2125566 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_i \\ y_i \end{vmatrix}. \quad (8.17a)$$

Если выбранное значение φ очень мало, имеем

$$k_{m,\varphi} = e^{\lambda_m \varphi} = (1 + \lambda_m \varphi) \quad \text{и} \quad \cos \varphi \approx 1;$$

то же для правосторонней спирали:

$$k_{m,\varphi} = e^{-\lambda_m \varphi} = (1 - \lambda_m \varphi).$$

При $\tau = 0.001$ получаем для левосторонней золотой прямоугольной спирали следующие итерационные уравнения:

$$\begin{vmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{vmatrix} = 1,000306 \begin{vmatrix} 1 & -0,001 \\ 0,001 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_i \\ y_i \end{vmatrix}. \quad (8.17b)$$

Уравнения (8.17) также описывают одну и ту же спираль (при условии, что x_0 и y_0 в обоих случаях одинаковы), различие лишь в степени дискретизации.

Самоподобие

Представьте себе, что с изображения логарифмической спирали сделали фотокопию с увеличением k . Уравнение новой спирали $r' = kr_0 e^{\lambda \vartheta}$ можно переписать в следующем виде:

$$r' = r_0 e^{\lambda \vartheta} e^{\lambda \theta} = r_0 e^{\lambda(\vartheta + \theta)},$$

где $\theta = (\ln k)/\lambda$.

Таким образом, увеличенная спираль оказывается идентичной оригиналу, но развернутой против часовой стрелки на угол θ . Читатель может убедиться в этом самостоятельно, построив увеличенную спираль на листе прозрачной бумаги, а затем наложив его на изображение исходной спирали полюс к полюсу. Поворачивая лист прозрачной бумаги, вы рано или поздно наткнетесь на такой угол θ , при котором спирали полностью совпадут. При известном коэффициенте увеличения можно определить коэффициент расширения спирали λ , и наоборот.

Равноугольность

На рис. VIII.3 изображен сегмент логарифмической спирали, ограниченный двумя положениями радиуса; углы наклона радиусов к горизонтальной оси, на которой длина радиуса равна r_0 , составляют, соответственно, ϑ и $\vartheta + d\vartheta$. Воспользовавшись соотношением $e^x \approx (1 + x)$ при малых значениях x , вычислим разницу между длинами радиусов:

$$r_0 e^{\lambda(\vartheta + d\vartheta)} - r_0 e^{\lambda \vartheta} = r_0 e^{\lambda \vartheta} (e^{\lambda d\vartheta} - 1) = r_0 \lambda e^{\lambda \vartheta} d\vartheta. \quad (8.18)$$

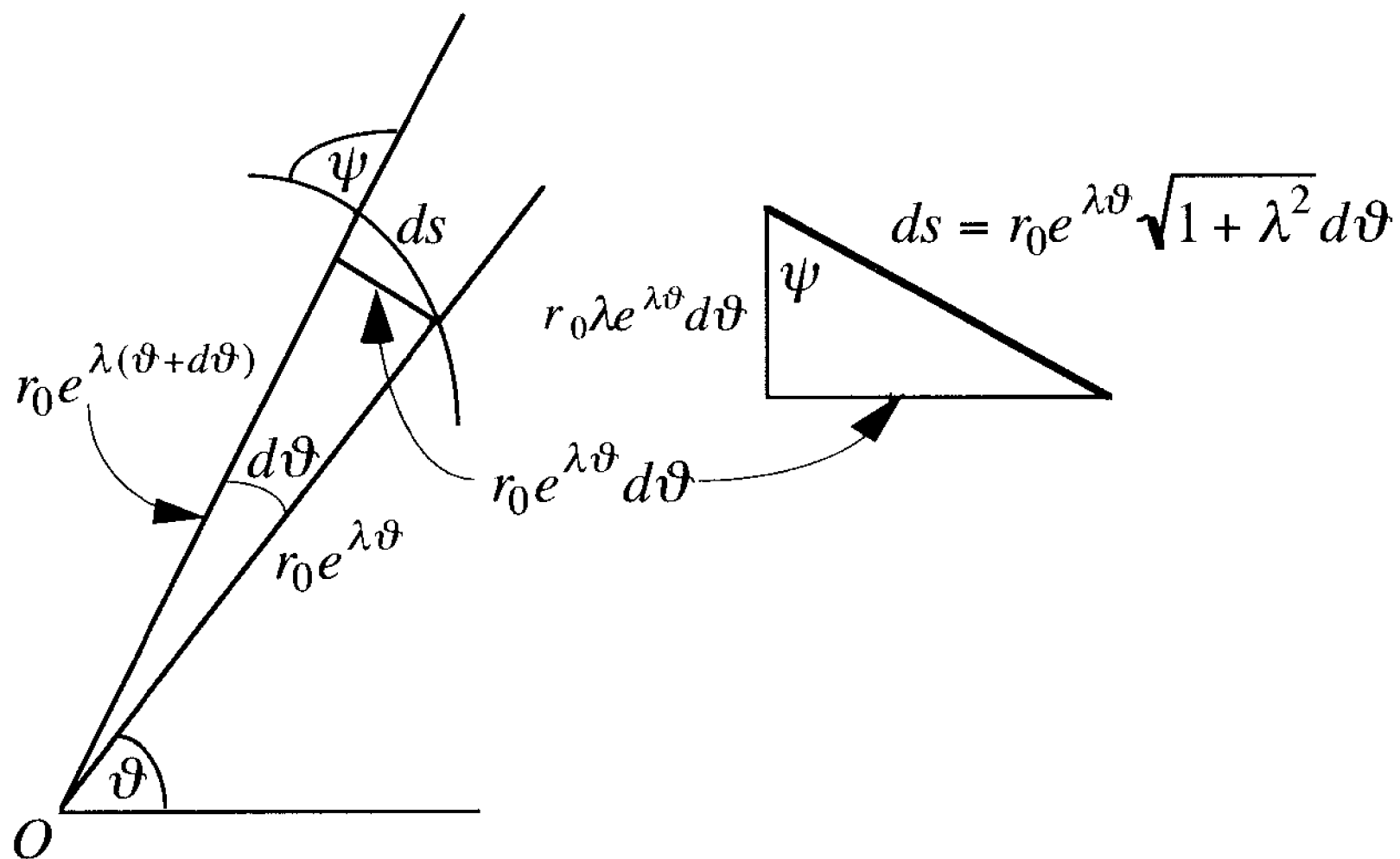


Рис. VIII.3. Равноугольность.

Обозначим буквой ψ угол между касательной к спирали в некоторой точке и радиусом, проведенным к этой же точке. Тогда

$$\operatorname{ctg} \psi = \frac{r_0 \lambda e^{\lambda \vartheta} d\vartheta}{r_0 e^{\lambda \vartheta} d\vartheta} = \lambda. \quad (8.19)$$

Следовательно, угол ψ постоянен. Из-за этого любопытного свойства логарифмической спирали ее часто называют *равноугольной* спиралью. Термин этот впервые употребил в своей книге «*Harmonia mensurarum*»¹ Роже Котé, познакомившийся с ее описанием в одном из писем Декарта к Мерсенну (1638 год)². Очевидно, что предельными формами спирали являются окружность ($\operatorname{ctg}^{-1} \lambda = \pi/2$, т. е. $\lambda = 0$) и прямая ($\operatorname{ctg}^{-1} \lambda = 0$, т. е. $\lambda = \infty$).

Если поднести игрушечный перископ к глазу горизонтально, слегка отклонив перед этим дальнее зеркальце от его обычного угла в 90° , и попытаться идти вперед, все время глядя через перископ на какой-либо объект в комнате, то ваши друзья увидят любопытную картину: вы будете двигаться по спирали вокруг этого объекта, постепенно приближаясь к нему. Как пишет д'Арси Томпсон, некоторые насекомые, благодаря составной структуре

¹«Гармония мер» (лат.). — Прим. перев.

²Эти письма можно найти в книге Адама и Таннери «Труды Декарта» (*Oeuvres de Descartes*, Paris, 1898).

своих глаз, видят объекты как бы сбоку, вследствие чего, направляясь к какому-либо объекту, движутся по спирали.

Основываясь на свойстве равноугольности, Мартин Гарднер создал весьма остроумный инструмент для построения равноугольных спиралей, изображенный на рис. VIII.4. Предоставим слово самому изобретателю: «... угол $[\psi]$ может быть какой угодно величины в интервале от 0° до 180° . Придерживая планку в соприкосновении с полюсом спирали и прочерчивая короткие прямые отрезки вдоль скошенной кромки планки, по мере необходимости придвигая эту кромку к полюсу или отдаляя от него, мы получаем в результате ряд коротких хорд спирали — примерно также плетет свою паутину паук *Epeira*. Прибор же гарантирует, что все эти хорды пересекают радиус-вектор под одинаковым углом.»³

Представьте себе самолет, который взлетает в какой-либо точке земного шара и в полете пересекает меридианы под некоторым постоянным углом. Если этот угол равен 0° , то самолет будет вечно кружить вокруг Земли от полюса к полюсу по тому меридиану, с которого он стартовал. Если угол равен 90° , то самолет всегда будет лететь вдоль одной параллели. Если же угол не равен ни 0° , ни 90° , то траектория самолета в конце концов завершится на каком-нибудь из полюсов, но только после бесконечного количества все сужающихся кругов вокруг этого самого полюса. И все же длина этой траектории, называемой *локсодромой*, конечна! Нельзя не поражаться присущему Морицу Эшеру чрезвычайно тонкому чувству самоподобия и бесконечности, что в очередной раз подтверждается рис. VIII.5, на котором изображена совокупность локсодром, интуитивно названных автором *сферическими спиралями*. Ширина полос и просветов между полосами одинаковы.

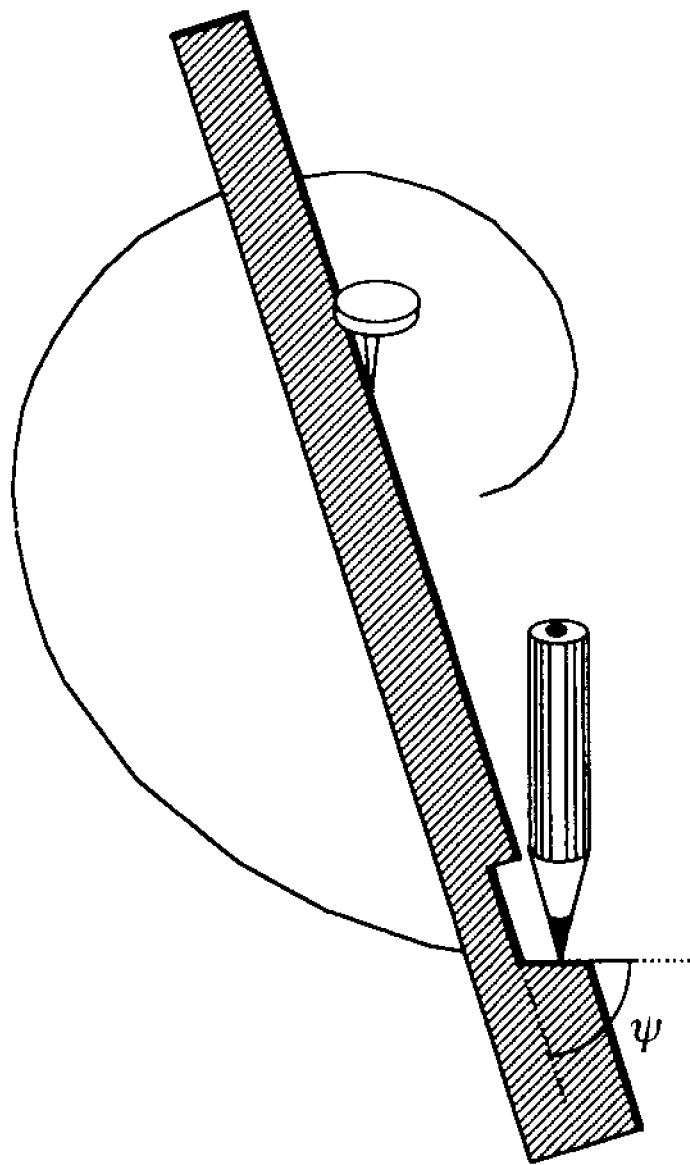


Рис. VIII.4. Построение равноугольной спирали. По книге Мартина Гарднера «Математические досуги» (Martin Gardner. *The Unexpected Hanging and Other Mathematical Diversions* (New York: Simon and Schuster, 1969), p. 108).

³The *Unexpected Hanging*, p.108.



Рис. VIII.5. Локсодрома Эшера. (М. С. Escher, *Sphere Spirals*. © 1998 Cordon Art B. V.–Baarn–Holland. All rights reserved.)

Длина спирали

Гипотенуза ds малого треугольника на рис. VIII.3 представляет собой, в сущности, сегмент спирали:

$$ds = \sqrt{(r_0 e^{\lambda \vartheta} d\vartheta)^2 + (r_0 \lambda e^{\lambda \vartheta} d\vartheta)^2} = r_0 \sqrt{1 + \lambda^2} e^{\lambda \vartheta} d\vartheta.$$

Для того чтобы вычислить длину спирали между некоторой начальной точкой и полюсом, необходимо проинтегрировать сегмент ds от $\vartheta = 0$ до $-\infty$. Эта длина равна

$$S = \int_0^{-\infty} r_0 \sqrt{1 + \lambda^2} e^{\lambda \vartheta} d\vartheta = \frac{r_0 \sqrt{1 + \lambda^2}}{\lambda}. \quad (8.20)$$

Рис. VIII.6 иллюстрирует смысл этого уравнения, который заключается в том, что длина спирали от точки T , соответствующей радиусу r_0 , до полюса

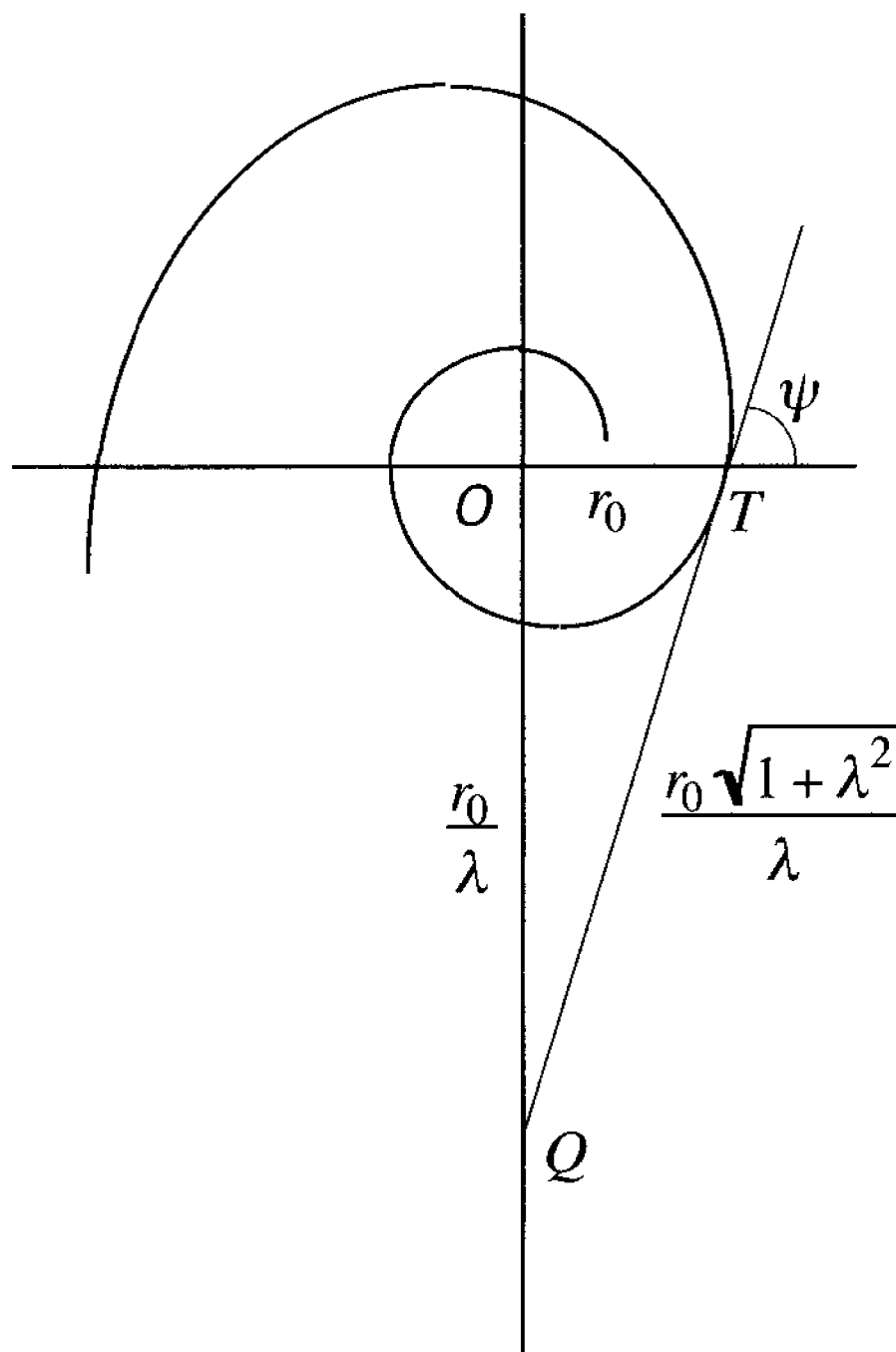


Рис. VIII.6. Спрявление логарифмической спирали.

равна длине отрезка TQ прямой, касательной к спирали в точке T . Это свойство известно под названием *спрявление логарифмической спирали*. Поскольку угол ψ между радиусом и касательной равен $\operatorname{ctg}^{-1} \lambda$, имеем

$$S = \frac{r_0}{\cos \psi}. \quad (8.21)$$

Как это ни удивительно, но логарифмическая спираль обладает *конечной* длиной, несмотря на бесконечный характер процесса построения этой самой спирали от точки с некоторым произвольным радиусом до полюса, где радиус равен нулю. Этот факт был обнаружен в 1645 году Эванджелистой Торричелли, который более известен нам как изобретатель барометра⁴. Упомянутый парадокс схож с парадоксом об Ахилле и черепахе тем, что в обоих

⁴Торричелли был учеником Галилея, который в своем труде «Discorsi et dimostrazioni mathematiche intorno, a due nove scienze» (1638) высказывался в том смысле, что человек, не смущаясь утверждениями Аристотеля относительно Природы, не терпящей пустоты, может собственноручно творить пустоту в лабораторных условиях.

случаях бесконечное количество геометрически уменьшающихся расстояний дает в сумме величину конечную. История об Ахилле и черепахе — один из четырех парадоксов Зенона Элейского, ученика Парменида, жившего в V веке до н. э., — известна, наверное, каждому школьнику. Ахилл, который бежит в два раза быстрее черепахи, вызывает ее на состязание в беге и дает ей фору, допустим, в 10 метров. К тому моменту, когда быстрый Ахилл пробегает эту начальную дистанцию, медленная, но упорная черепаха уползает на пять метров вперед. Ахилл пробегает эти пять метров, но черепаха успевает уползти еще на 2,5 метра. Ахилл пробегает и их, но черепаха опять впереди. Так они могут бежать целую вечность, однако черепаха всегда опережает Ахилла на половину некоторого только что покрытого им расстояния, и Ахилл никак не может догнать черепаху.

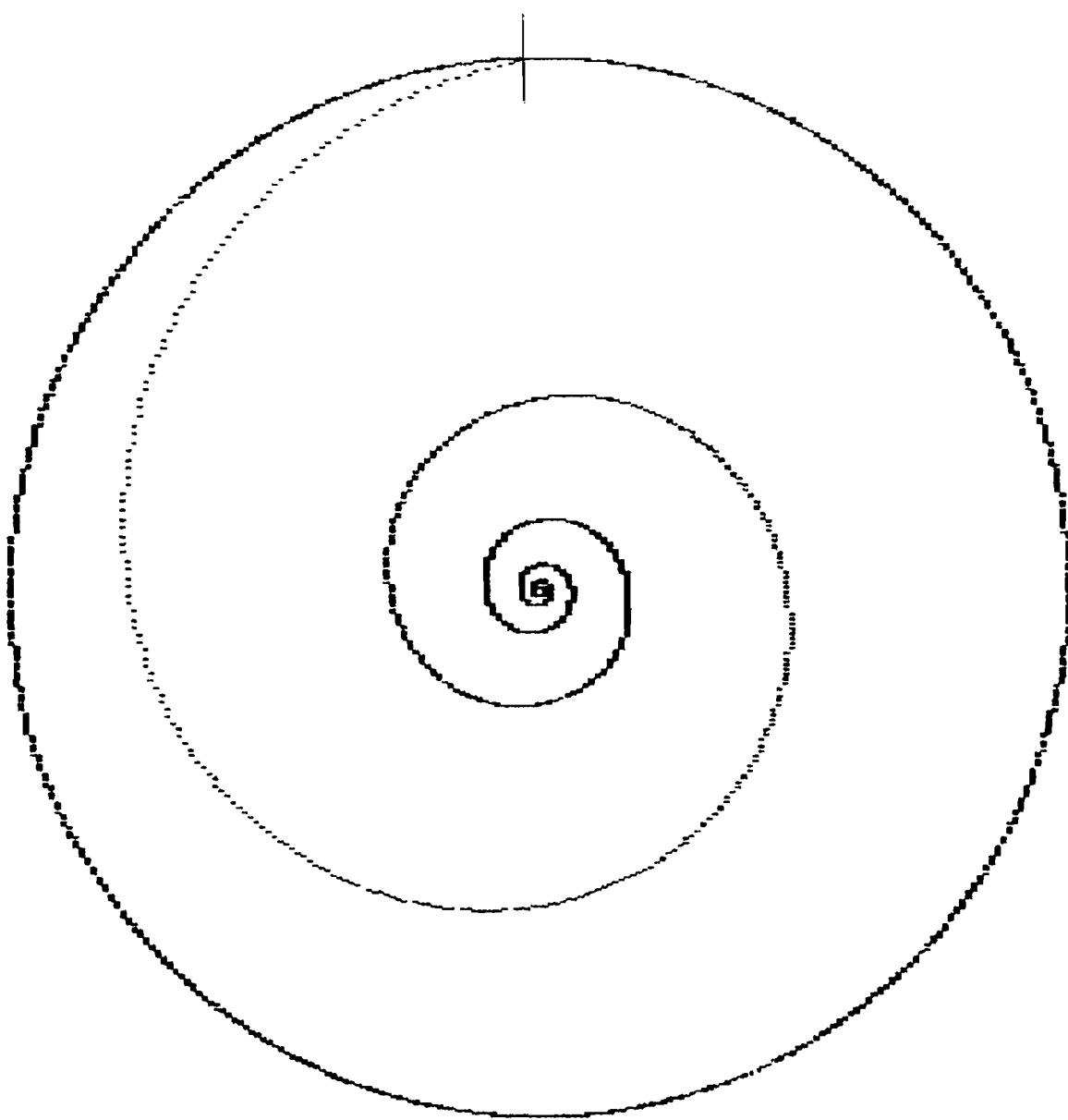


Рис. VIII.7. Длина спирали равна длине окружности.

В самом деле, пусть длина некоторой произвольной хорды равна, скажем, c ; тогда длина следующей хорды составит c/Φ_m . Длины последующих хорд — c/Φ_m^2 , c/Φ_m^3 , ..., а сумма такого бесконечного ряда равна, как известно, $c/(\Phi_m - 1)$, т. е. вполне конечное число. В качестве самостоятель-

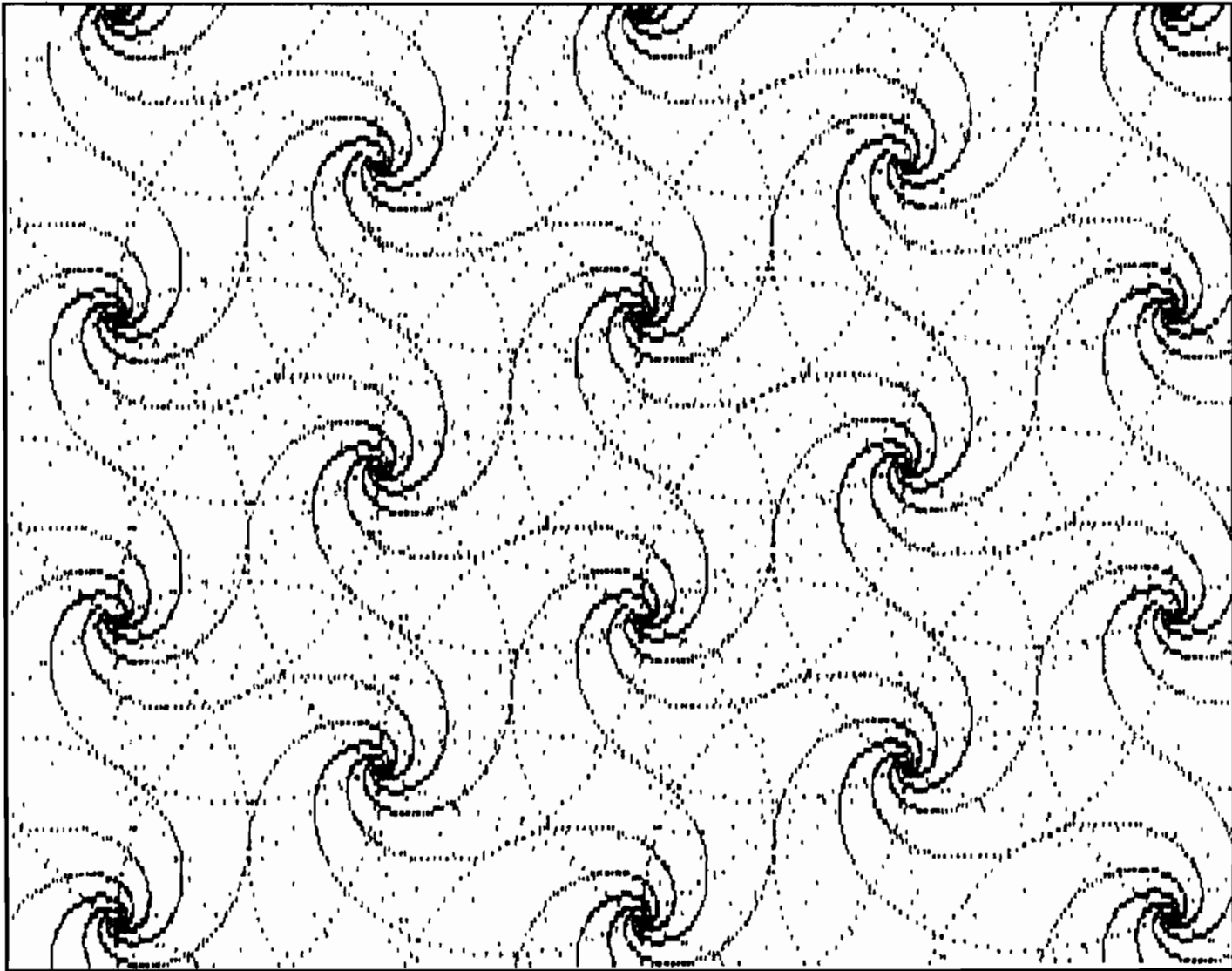


Рис. VIII.8. Сплетающиеся спирали.

го упражнения читателю предлагается вычислить коэффициент расширения спирали, целиком вписанной в некоторую заданную окружность и пересекающей ее в одной точке, причем длина спирали равна длине окружности. Ответ можно подсмотреть ниже:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{4\pi^2 - 1}} \approx 0,1612098.$$

Такому коэффициенту расширения соответствует угол $\psi \approx 80^\circ 50' 31''$, а сама спираль представлена на рис. VIII.7 — соразмерность ее и в самом деле уникальна. Бернулли обнаружил еще одну уникальную спираль, совпадающую с собственной эвольвентой. Можно показать, что такая спираль обладает коэффициентом расширения $\lambda \approx 0,2745$, т. е. $\psi \approx 74^\circ 39'$. Еще одно упражнение: читатель может самостоятельно построить узор, составленный из переплетающихся логарифмических спиралей, радиусы которых удваиваются с каждым поворотом на 60° , соответствующим значению $(3 \ln 2)/\pi$, а полюсы располагаются в узлах решетки из равносторонних треугольников (см. рис. VIII.8).

Прямоугольная дигномонная спираль

Теперь мы в состоянии сделать следующий шаг и обратиться к матрице

$$\begin{vmatrix} \cos \varphi & -\frac{1}{a} \sin \varphi \\ a \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix}.$$

Читатель может самостоятельно доказать по индукции, что

$$\begin{vmatrix} \cos \varphi & -\frac{1}{a} \sin \varphi \\ a \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix}^n = \begin{vmatrix} \cos n\varphi & -\frac{1}{a} \sin n\varphi \\ a \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{vmatrix}. \quad (8.22)$$

Рассмотрим матрицу

$$\begin{vmatrix} 1 & -\frac{r}{m} \tau \\ \frac{s}{m} \tau & 1 \end{vmatrix}, \quad (8.23)$$

где r и m — положительные числа, причем $m = \sqrt{rs}$. Положим $\tau = \operatorname{tg} \varphi$; тогда матричное уравнение

$$\begin{vmatrix} x_{i+1} & y_{i+1} \end{vmatrix} = \frac{k}{\sqrt{1 + \tau^2}} \begin{vmatrix} 1 & -\frac{r}{m} \tau \\ \frac{s}{m} \tau & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_i & y_i \end{vmatrix} \quad (8.24a)$$

имеет решение

$$\begin{vmatrix} x_n & y_n \end{vmatrix} = k^n \begin{vmatrix} \cos n\varphi & -\frac{r}{m} \sin n\varphi \\ \frac{s}{m} \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_0 & y_0 \end{vmatrix}, \quad \text{где } \varphi = \operatorname{arctg} \tau. \quad (8.24b)$$

При $y_0 = 0$ имеем

$$x_n = x_0 k^n \cos n\varphi, \quad y_n = x_0 \frac{s}{m} k^n \sin n\varphi, \quad (8.25)$$

$$\frac{y_n}{x_n} = \operatorname{tg} \vartheta_n = \frac{s}{m} \operatorname{tg} n\varphi. \quad (8.26)$$

Если в случае моногномонной спирали $\vartheta_n = n\varphi$ при любом значении n , то в уравнении (8.26) это верно только тогда, когда ϑ_n кратно $\pi/2$. Положив

$$\frac{y\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x_0} = \frac{s}{m} k^{\frac{\pi}{2\varphi}} = \phi_s, \quad (8.27)$$

получим

$$k^{\frac{\pi}{\varphi}} = \frac{m^2}{s^2} \phi_s^2 = \frac{r}{s} \phi_s^2 = \phi_r \phi_s. \quad (8.28)$$

С другой стороны,

$$\frac{x(\pi)}{x_0} = k^{\frac{\pi}{\varphi}} \cos(\pi) = -k^{\frac{\pi}{\varphi}}, \quad \text{то есть} \quad \frac{x(\pi)}{x_0} = -\phi_r \phi_s. \quad (8.29)$$

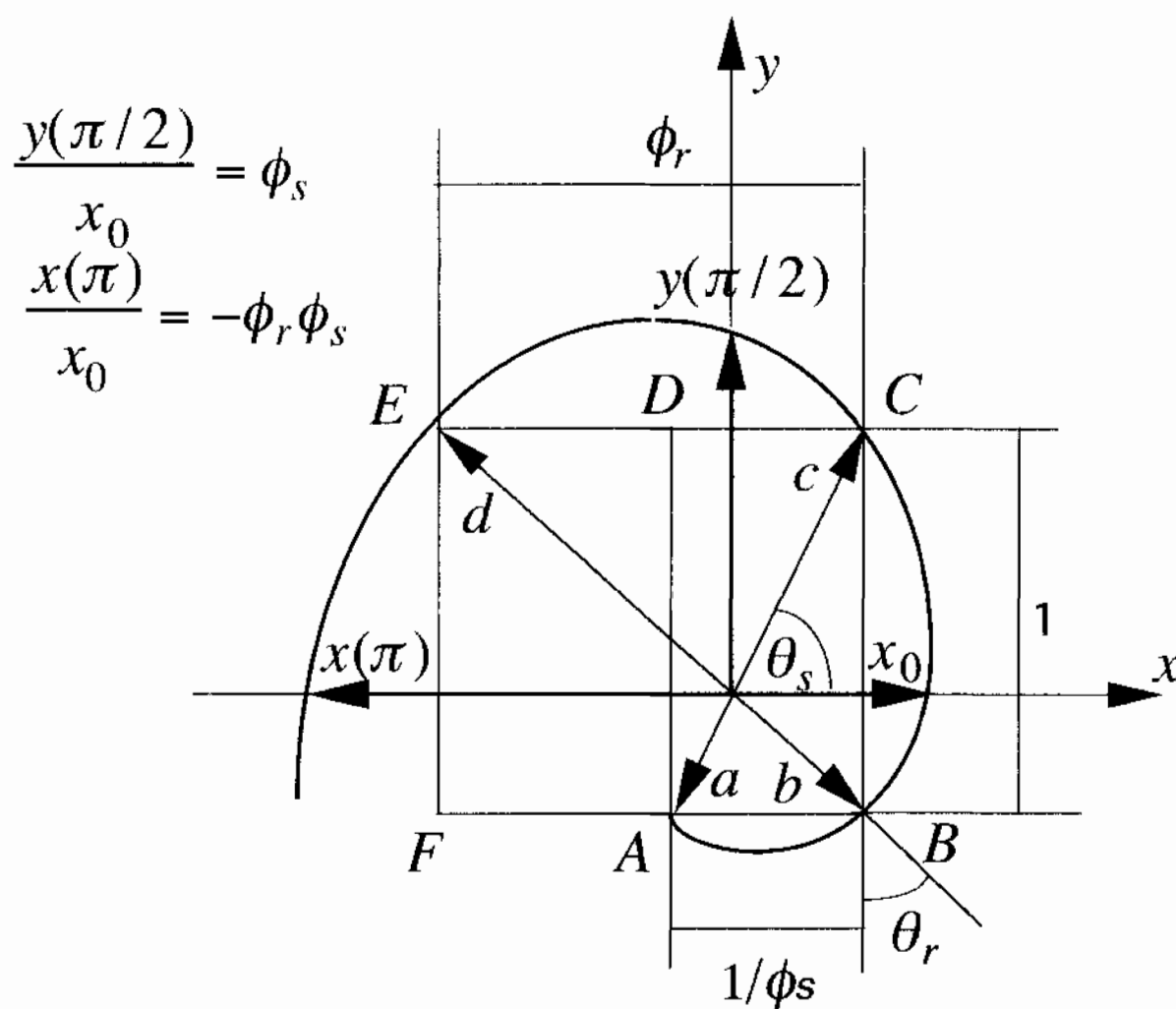


Рис. VIII.9. Дигномонная спираль.

Кривая, описываемая матричными уравнениями (8.24), представляет собой дигномонную спираль с пропорциями ϕ_s и ϕ_r и показана на рис. VIII.9. Принимая во внимание, что

$$m = \sqrt{rs}, \quad \phi_r \phi_s = \Phi_m^2, \quad \frac{\phi_r}{\phi_s} = \frac{r}{s},$$

из уравнения (8.28) получаем

$$k^{\frac{\pi}{2\varphi}} = \sqrt{\phi_r \phi_s} = \Phi_m.$$

Сравнив полученный результат с уравнением (8.15), заметим, что $k = k_{m,\varphi}$, и запишем уравнения прямоугольной дигномонной спирали в конечных разностях:

$$\begin{vmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{vmatrix} = \frac{e^{\lambda_m \operatorname{arctg} \tau}}{\sqrt{1 + \tau^2}} \begin{vmatrix} 1 & -\frac{r}{m} \tau \\ \frac{s}{m} \tau & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_i \\ y_i \end{vmatrix}, \quad (8.30a)$$

$$\begin{vmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{vmatrix} = e^{\lambda_m \varphi} \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\frac{r}{m} \sin \varphi \\ \frac{s}{m} \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_i \\ y_i \end{vmatrix}, \quad (8.30b)$$

$$\begin{vmatrix} x_n \\ y_n \end{vmatrix} = e^{\lambda_m n \varphi} \begin{vmatrix} \cos n \varphi & -\frac{r}{m} \sin n \varphi \\ \frac{s}{m} \sin n \varphi & \cos n \varphi \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}. \quad (8.30c)$$

Ее аналитические уравнения от переменного параметра ρ имеют вид:

$$\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = e^{\lambda_m \rho} \begin{vmatrix} \cos \rho & -\frac{r}{m} \sin \rho \\ \frac{s}{m} \sin \rho & \cos \rho \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}, \text{ где } \tau = \operatorname{tg} \varphi, \lambda_m = \frac{2 \ln \Phi_m}{\pi}. \quad (8.30d)$$

Для обозначения параметра мы выбрали букву ρ , а не ϑ , как в уравнении (8.16d), поскольку через ϑ у нас обозначен только угол $\operatorname{arctg} y/x$.

Например, можно построить семейство дигномонных спиралей с $rs = 1$, подставляя различные значения α в уравнение

$$\begin{vmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{vmatrix} = 1,000306 \begin{vmatrix} 1 & -0,001\alpha \\ \frac{0,001}{\alpha} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_i \\ y_i \end{vmatrix}. \quad (8.31)$$

Пусть даны прямоугольники $ABCD$ и $ADEF$, как показано на рис. VIII.9; тогда соответствующую спиральную огибающую можно построить следующим образом. Радиусы $OA = a$ и $OC = c$ коллинеарны. Так как при каждом повороте на угол π радиус умножается на $\phi_r \phi_s$, имеем $AC = a(1 + \phi_r \phi_s)$, а поскольку

$$AC = \sqrt{1 + \frac{1}{\phi_s^2}},$$

то

$$a = \frac{\sqrt{1 + \phi_s^2}}{\phi_s (1 + \phi_r \phi_s)}.$$

Декартовы координаты принадлежащих спирали точек x_i, y_i относительно начала координат O задаются матричными уравнениями (8.30), где

$$x_0 = -a \cos \theta_s = -\frac{1}{\phi_s (1 + \phi_r \phi_s)}, \quad y_0 = -a \sin \theta_s = -\frac{1}{1 + \phi_r \phi_s}. \quad (8.33)$$

Можно также для каждого значения i отложить координаты точек спирали x' , y' относительно нового начала координат A :

$$x'_i = x_i + a \cos \theta_s, \quad y'_i = y_i + a \sin \theta_s,$$

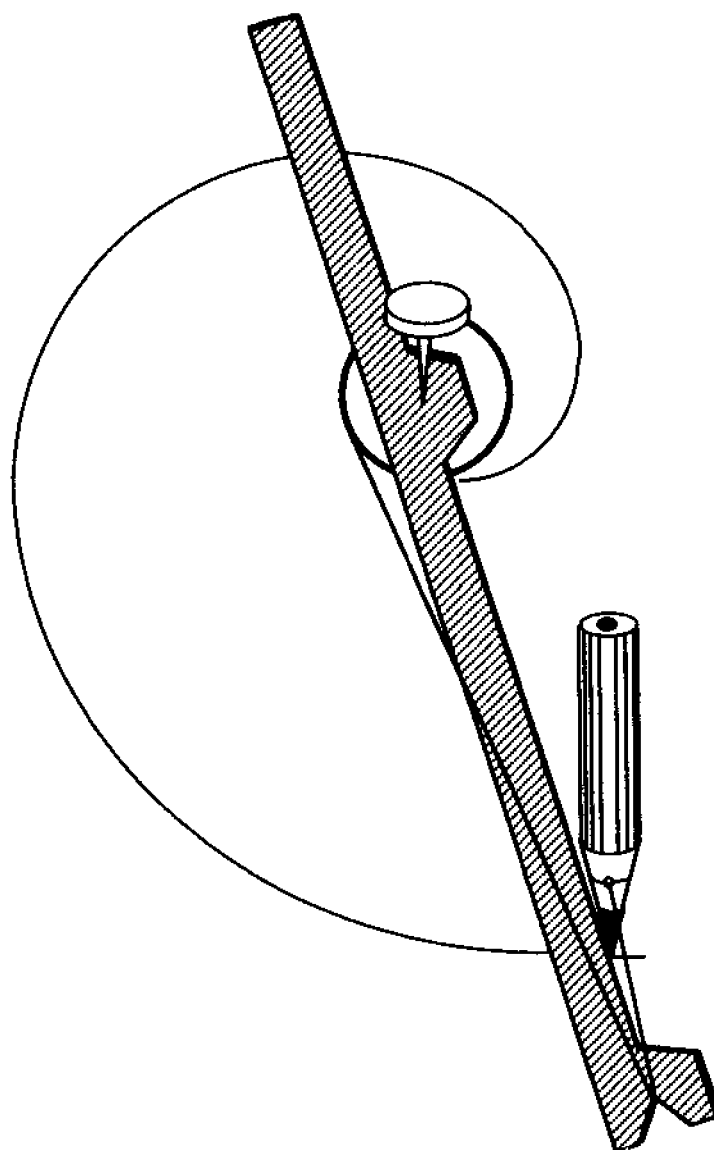
где $(a \cos \theta_s, a \sin \theta_s)$ — декартовы координаты полюса O относительно начала координат A .

Архимедова спираль

На примере другой широко известной, хотя и менее удивительной спирали, называемой *уравновешенной*, или *архимедовой*, спиралью, наблюдается один любопытный парадокс. Если радиус логарифмической спирали возрастает с увеличением угла поворота *геометрически*, то радиус архимедовой спирали возрастает или уменьшается *линейно*. Уравнение такой спирали имеет вид $r = k\theta$, и можно показать, что по мере того, как спираль сходится к своему полюсу, ее длина устремляется в бесконечность. Этим свойством она напоминает *гармонический* ряд $1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \dots$, члены которого очень быстро становятся исчезающе малыми, однако ряд все же расходится. Бесконечность суммы гармонического ряда доказал один из братьев Бернулли, Иоганн; опубликовал этот результат в 1713 году другой брат, Якоб, сославшись, разумеется, на Иоганна. Архимедова спираль воплощается в траектории объекта, движущегося с постоянной радиальной скоростью к центру или от центра вращения по некоторой поверхности, вращающейся с равномерной угловой скоростью, — так движется, например, игла звукоснимателя по поверхности граммофонной пластинки. Приближение к архимедовой спирали можно получить, разматывая бухту веревки, намотанной на барабан: такая спираль, называемая *эвольвентной* спиралью, строго говоря, не является архимедовой, так как в этом случае с увеличением угла поворота линейно возрастает не радиус, а длина отрезка прямой, касательной к барабану. Остроумные инструменты для построения эвольвентной и архимедовой спирали можно найти все в тех же «Математических досугах» Мартина Гарднера (рис. VIII.10).

Древние греки были в восторге от архимедовой спирали, так как с ее помощью находились замечательные псевдорешения задач о квадратуре круга и трисекции угла. Предположим, что существует некий точный метод построения архимедовой спирали, и нам необходимо разделить на три равные части угол CPB на рис. VIII.11а. Строим сегмент архимедовой спирали с полюсом в точке P . Далее проводим дугу AB окружности и делим отрезок AC обычным образом на три равные части. Через полученные точки проводим дуги, которые пересекают спираль в точках D и E . Наконец, строим лучи PD и PE , которые, как можно удостовериться, и делят угол CPB на три равные части.

Рис. VIII.10. Построение архимедовой спирали. По книге Мартина Гарднера «Математические досуги» (Martin Gardner. *The Unexpected Hanging*, p. 105).



На рис. VIII.11b показано, как можно найти квадратуру круга. Архимедова спираль с полюсом в точке O завершает свой первый оборот в точке T . Через эту точку проводится касательная AT , пересекающая перпендикуляр к прямой OT , восстановленный из полюса O , в точке A . Можно показать, что $OA = \pi \times OT$. Поскольку задача о вычислении квадратуры круга, в сущности, сводится к определению числа π , данный метод, судя по всему, дает на нее достаточно однозначный ответ. Как бы то ни было, вышеописанные построения нарушают главное условие, согласно которому обе задачи должны быть решены исключительно с помощью угольника и циркуля, — соблюсти это условие, по всей видимости, невозможно. Какими бы изящными ни были рассмотренные методы, они ни в коей мере не являются истинными решениями платоновых задач, как не являются ими и тысячи других методов, предложенных за все прошедшие столетия.

Затухающие колебания

Одно из обобщений полученных выше результатов оказывается особенно полезным при изучении простого гармонического движения и поведения электрических колебательных контуров. В приложении к настоящей главе мы воспользуемся возможностью и познакомим читателя с одним

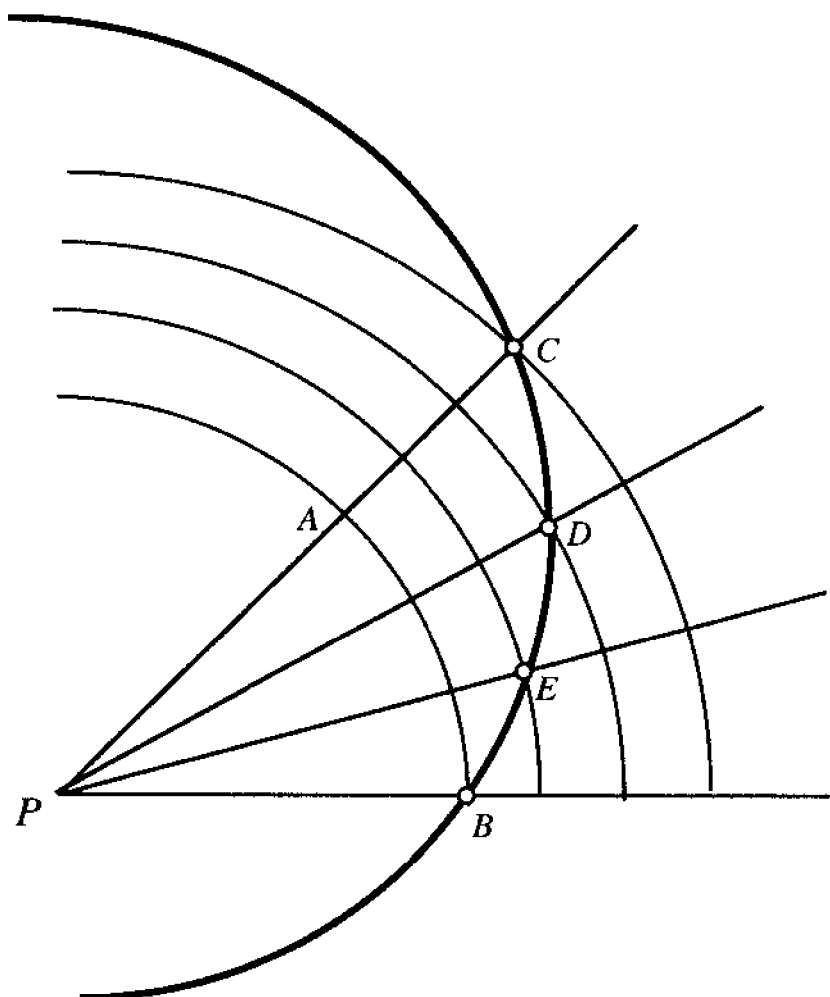


Рис. VIII.11a. Трисекция угла с помощью архимедовой спирали.

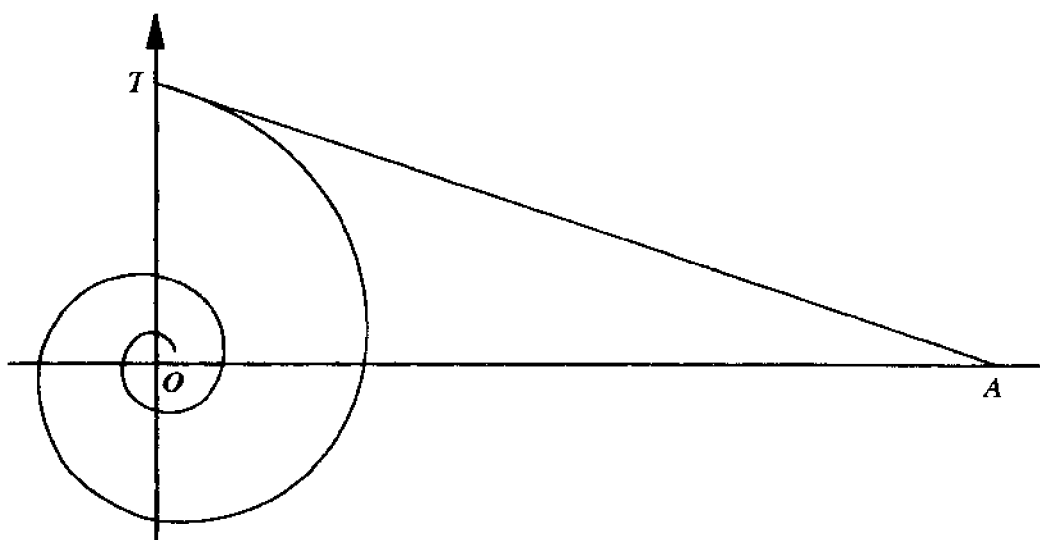


Рис. VIII.11b. Нахождение квадратуры круга с помощью архимедовой спирали.

важным следствием из *исчисления конечных разностей*, которое мы, разумеется, могли бы применять с самого ее начала. Вместо этого мы предпочли прибегнуть к постепенному, последовательному подходу в надежде сделать изложение материала по возможности более доступным. Введем для начала следующую фундаментальную матрицу:

$$\begin{vmatrix} \cos \varphi + b \sin \varphi & -c \sin \varphi \\ a \sin \varphi & \cos \varphi - b \sin \varphi \end{vmatrix}, \quad \text{где } b = \sqrt{ac - 1}. \quad (8.34)$$

Нетрудно показать по индукции, что

$$\begin{vmatrix} \cos \varphi + b \sin \varphi & -c \sin \varphi \\ a \sin \varphi & \cos \varphi - b \sin \varphi \end{vmatrix}^n = \\ = \begin{vmatrix} \cos n\varphi + b \sin n\varphi & -c \sin n\varphi \\ a \sin n\varphi & \cos n\varphi - b \sin n\varphi \end{vmatrix}, \quad (8.35)$$

откуда следует, что уравнение

$$\begin{vmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi + b \sin \varphi & -c \sin \varphi \\ a \sin \varphi & \cos \varphi - b \sin \varphi \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_i \\ y_i \end{vmatrix} \quad (8.36)$$

имеет решение

$$\begin{vmatrix} x_n \\ y_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos n\varphi + b \sin n\varphi & -c \sin n\varphi \\ a \sin n\varphi & \cos n\varphi - b \sin n\varphi \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}. \quad (8.37)$$

Матрицу (8.34) можно записать следующим образом:

$$\cos \varphi \begin{vmatrix} 1 + b \operatorname{tg} \varphi & -c \operatorname{tg} \varphi \\ a \operatorname{tg} \varphi & 1 - b \operatorname{tg} \varphi \end{vmatrix}. \quad (8.38)$$

Положив

$$a = \frac{\lambda}{\omega}, \quad b = \frac{\rho}{\omega}, \quad c = \frac{\gamma}{\omega}, \quad (8.39)$$

где γ , λ , ρ и ω — действительные положительные числа, получим из матрицы (8.34)

$$\omega = \sqrt{\gamma\lambda - \rho^2}. \quad (8.40)$$

Если теперь ввести «элементарное приращение времени» τ такое, что

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega\tau}{1 - \rho\tau}, \quad \begin{array}{c} \triangle \\ \text{угол } \varphi \\ \text{катеты } 1 - \rho\tau, \omega\tau \end{array} \quad (8.41)$$

то можно записать

$$1 + b \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{1 - \rho\tau}, \quad 1 - b \operatorname{tg} \varphi = \frac{1 - 2\rho\tau}{1 - \rho\tau}. \quad (8.42)$$

При этом матрица (8.38) принимает вид:

$$\frac{\cos \varphi}{1 - \rho\tau} \begin{vmatrix} 1 & -\gamma\tau \\ \lambda\tau & 1 - 2\rho\tau \end{vmatrix}, \quad (8.43)$$

из чего следует, что матричное уравнение

$$\begin{vmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\gamma\tau \\ \lambda\tau & 1 - 2\rho\tau \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_i \\ y_i \end{vmatrix} \quad (8.44)$$

имеет решение

$$\begin{vmatrix} x_n \\ y_n \end{vmatrix} = \left(\frac{1 - \rho\tau}{\cos \varphi} \right)^n \begin{vmatrix} \cos n\varphi + \frac{\rho}{\omega} \sin n\varphi & -\frac{\gamma}{\omega} \sin n\varphi \\ \frac{\lambda}{\omega} \sin n\varphi & \cos n\varphi - \frac{\rho}{\omega} \sin n\varphi \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}, \quad (8.45)$$

где

$$\omega = \sqrt{\gamma\lambda - \rho^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega\tau}{1 - \rho\tau}.$$

К вышеприведенному утверждению следует добавить «и наоборот». Оба матричных уравнения, в сущности, эквивалентны: первое представляет собой итерационное уравнение, второе же — явную функцию от n .

Если учесть, что при малых значениях τ справедливы равенства $(1 - \rho\tau)^n = e^{-\rho n\tau}$, $\cos \varphi = 1$ и $\varphi = \operatorname{tg} \varphi = \omega\tau$, то уравнение (8.45) принимает вид:

$$\begin{vmatrix} x_n \\ y_n \end{vmatrix} = e^{-\rho n\tau} \begin{vmatrix} \cos \omega n\tau + \frac{\rho}{\omega} \sin \omega n\tau & -\frac{\gamma}{\omega} \sin \omega n\tau \\ \frac{\lambda}{\omega} \sin \omega n\tau & \cos \omega n\tau - \frac{\rho}{\omega} \sin \omega n\tau \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}.$$

Положив $t = n\tau$ и обозначив буквами x, y без индексов *непрерывные* переменные x, y как функции от *непрерывного* параметра t , получим следующие аналитические выражения:

$$x = e^{-\rho t} \left(x_0 \left(\cos \omega t + \frac{\rho}{\omega} \sin \omega t \right) - y_0 \frac{\gamma}{\omega} \sin \omega t \right), \quad (8.46a)$$

$$y = e^{-\rho t} \left(x_0 \frac{\lambda}{\omega} \sin \omega t + y_0 \left(\cos \omega t - \frac{\rho}{\omega} \sin \omega t \right) \right), \quad \text{где } \omega = \sqrt{\gamma\lambda - \rho^2}. \quad (8.46b)$$

Уравнения (8.46) можно также записать в виде

$$x = e^{-\rho t} \left(x_0 \cos \omega t + \frac{\rho x_0 - \gamma y_0}{\omega} \sin \omega t \right), \quad (8.47a)$$

$$y = e^{-\rho t} \left(y_0 \cos \omega t + \frac{\lambda x_0 - \rho y_0}{\omega} \sin \omega t \right). \quad (8.47b)$$

При очень малых ρ имеем

$$\begin{aligned} x &= e^{-\rho t} \left(x_0 \cos \omega t + y_0 \sqrt{\frac{\gamma}{\lambda}} \sin \omega t \right), \\ y &= e^{-\rho t} \left(x_0 \sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}} \sin \omega t + y_0 \cos \omega t \right), \quad \text{где } \omega = \sqrt{\gamma \lambda}. \end{aligned} \quad (8.48)$$

На рис. VIII.12а показаны кривые x и y в зависимости от времени t ; хорошо виден колебательный и затухающий характер изменения переменных x и y . На рис. VIII.12б построен график величины y в зависимости от x . Полученную таким образом спираль называют *фазовой картиной* наблюдаемого феномена, а систему координат $x-y$, в которой строится фазовая картина, — *фазовым пространством*.

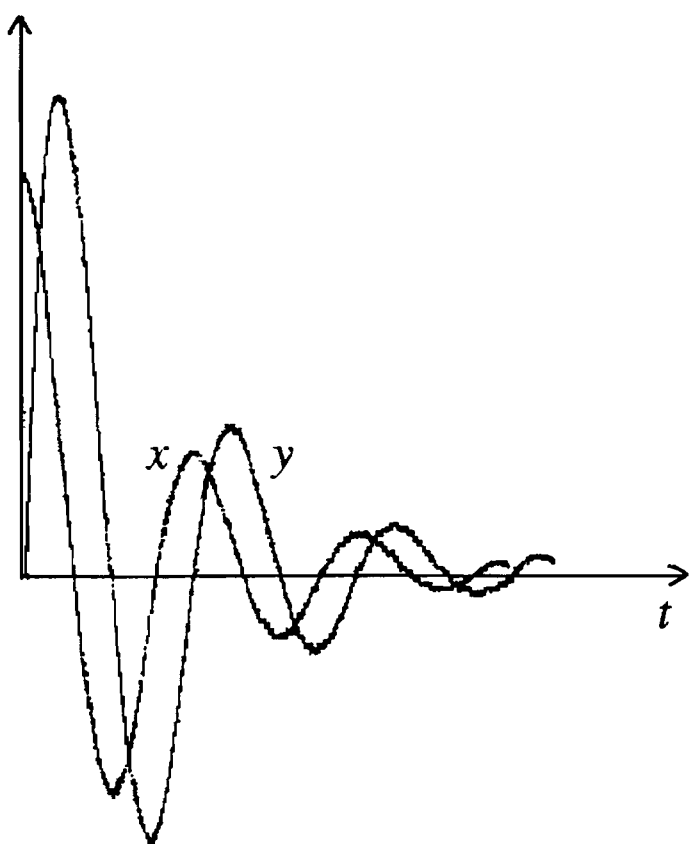


Рис. VIII.12а. Кривые x и y в зависимости от t .

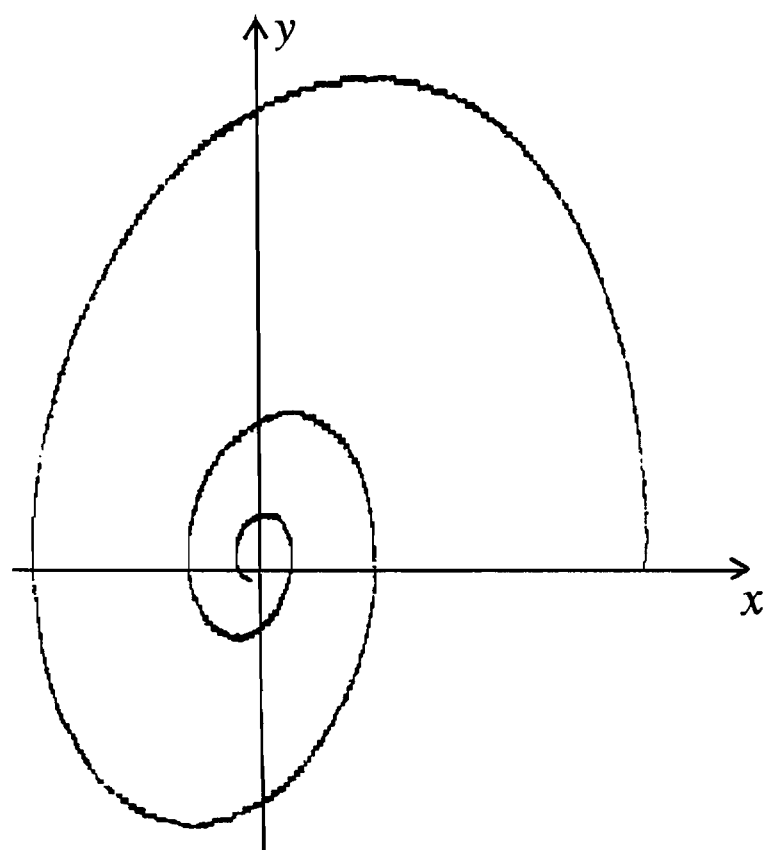


Рис. VIII.12б. Фазовая картина в пространстве x, y .

Математический маятник

Возможно, простейшим из известных человеку механических устройств является простой, или математический, маятник (рис. VIII.13). Он состоит из малого плотного тела массы m , подвешенного на конце нити длины l . В идеале вся масса m сосредоточена в одной-единственной безразмерной

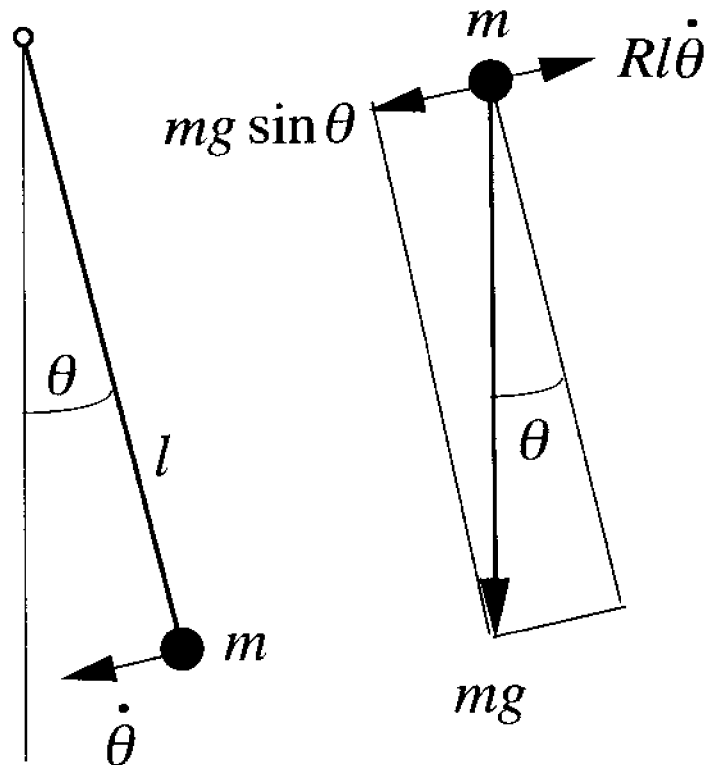


Рис. VIII.13. Математический маятник.

точке. Нить не имеет веса и не оказывает никакого сопротивления колебательному движению вокруг оси вращения O . Обозначим через θ угловое смещение нити относительно вертикальной прямой отсчета, а через $\dot{\theta}$ — ее угловую скорость в радианах в секунду. Предположим, что перемещение массы m в воздухе встречает вязкостное сопротивление $Rl\dot{\theta}$, пропорциональное линейной тангенциальной скорости $l\dot{\theta}$, где R есть сила на единицу линейной скорости. Результирующая тангенциальная сила равна $mg \sin \theta - Rl\dot{\theta}$, где g — ускорение свободного падения. В данном рассуждении мы всегда предполагаем, что угловое смещение θ очень малó, что позволяет нам положить $\sin \theta = \theta$. В этом случае угловое ускорение тела массы m определяется следующим выражением:

$$\ddot{\theta} = \frac{mg\theta - Rl\dot{\theta}}{ml} = \frac{g}{l}\theta - \frac{R}{m}\dot{\theta},$$

а обозначив через τ бесконечно малое приращение времени, можно записать

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_{i+1} &= \dot{\theta}_i + \ddot{\theta}_i \tau = \dot{\theta}_i + \frac{g}{l} \tau \theta_i - \frac{R}{m} \tau \dot{\theta}_i = \\ &= \frac{g}{l} \tau \theta_i + \left(1 - \frac{R}{m}\right) \dot{\theta}_i. \end{aligned} \quad (8.49)$$

Мы также имеем

$$\theta_{i+1} = \theta_i - \dot{\theta}_i \tau, \quad (8.50)$$

откуда следует матричное уравнение

$$\begin{vmatrix} \theta_{i+1} \\ \dot{\theta}_{i+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\tau \\ \frac{g}{l}\tau & 1 - \frac{R}{m}\tau \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \theta_i \\ \dot{\theta}_i \end{vmatrix}. \quad (8.51)$$

Маятник называется «слабо затухающим» (см. приложение к настоящей главе), если $(g/l) > (R/2m)$, и мы можем записать

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l} - \frac{R^2}{4m^2}}. \quad (8.52)$$

Следовательно, решение уравнения (8.36) имеет вид:

$$\begin{vmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{vmatrix} = e^{-\frac{R}{2m}t} \begin{vmatrix} \cos \omega t + \frac{R}{2m\omega} \sin \omega t & -\frac{1}{\omega} \sin \omega t \\ \frac{g}{l\omega} \sin \omega t & \cos \omega t - \frac{R}{2m\omega} \sin \omega t \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \theta_0 \\ \dot{\theta}_0 \end{vmatrix}.$$

Полагая, что $\dot{\theta}_0 = 0$, т. е. масса m начинает движение из исходного углового положения, θ_0 радиан относительно вертикали, с нулевой начальной скоростью, имеем

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_0 e^{-\frac{R}{2m}t} \left(\cos \omega t + \frac{R}{2m\omega} \sin \omega t \right), \\ \dot{\theta} &= \theta_0 \frac{g}{l\omega} e^{-\frac{R}{2m}t} \sin \omega t. \end{aligned} \quad (8.53)$$

При малом трении массы о воздух

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \theta = \theta_0 e^{-\frac{R}{2m}t} \cos \omega t, \quad \dot{\theta} = \theta_0 \sqrt{\frac{g}{l}} e^{-\frac{R}{2m}t} \sin \omega t. \quad (8.54)$$

С угловой скоростью ω маятник колеблется относительно вертикальной оси в комплексной плоскости (эту скорость ни в коем случае не следует смешивать с физической угловой скоростью $\dot{\theta}$). Период колебаний T определяется выражением

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (8.55)$$

С течением времени амплитуда колебаний уменьшается экспоненциально со скоростью $\exp(-Rt/2m)$.

Смысл выражения (8.55) заключается в том, что при малом начальном угловом смещении (длина нити l велика) и не чрезмерно быстром затухании период колебаний маятника зависит исключительно от его длины (для определенного географического положения, поскольку ускорение свободного падения g в различных точках земного шара различно, хоть различие это и не слишком велико). Именно на этом принципе основано действие многих поколений маятниковых часов.

RLC-контур

В главе о лестницах мы рассматривали поведение электрической цепи лестничного типа при наличии внешнего источника энергии, которая во входном каскаде цепи преобразовывалась во входное напряжение v_0 . При использовании в цепи реактивных компонентов, т. е. индуктивности и емкости, можно предположить, что такое *вынужденное* напряжение является синусоидальным. Ниже, применив совершенно иной подход, мы рассмотрим *переходное* поведение электрической цепи, содержащей реактивные компоненты, в том случае, когда колебания в ней ничем не вынуждены, т. е. *свободны*.

Все компоненты и в данном случае являются пассивными, т. е. не содержат никаких внутренних источников электрической энергии. Они линейны, т. е. их индивидуальное поведение, проявляющееся в изменениях двух фундаментальных физических величин, *силы тока* и *разности потенциалов*, описывается линейными математическими выражениями. Линейность, в сущности, представляет собой упрощающее допущение, в рамках которого возможна суперпозиция токов, генерируемых различными источниками внутри того или иного компонента, без учета их взаимодействия. Еще одним следствием линейности является сохранение частоты. Когда через какой-либо линейный компонент проходит ток некоторой заданной частоты, никаких других частот сам компонент не генерирует.

Реальные физические компоненты являются приближенно-линейными только в очень ограниченном диапазоне значений, вследствие чего инженерам приходится прилагать множество специальных усилий, чтобы компоненты схем работали исключительно в пределах этого самого диапазона. Любая демонстрируемая компонентом нелинейность рассматривается при этом не иначе как краевое отклонение от номинального поведения. В последние годы, однако, мы оказались свидетелями впечатляющего свержения этой парадигмы, выразившегося в повсеместном переходе к систематическому изучению *хаотического* поведения, в основе которого лежит именно нелинейность. Родилась новая парадигма, приверженцы которой устремились на поиски хаотического поведения не только в электрических контурах, но и в других феноменах во всех известных человеку областях — от

прогнозирования погоды (где, собственно, и зародилось это движение) до рынка ценных бумаг, фибрилляций сердечной мышцы, осциллирующих химических реакций, электрической активности мозга и т. д. Дело дошло до того, что в качестве отличительного знака нового течения и эмблемы его подчас фанатичных поборников был избран так называемый *эффект бабочки*. Впрочем, вернемся к нашим прозаическим линейным компонентам и попытаемся применить при исследовании их поведения (сначала индивидуального, а затем коллективного) конечно-разностный подход.

Прежде чем мы продолжим, необходимо дать понятиям электрического тока и разности потенциалов простые определения. Электрический ток внутри компонента можно представить как протекающий сквозь него в заданном направлении поток чрезвычайно большого количества элементарных частиц — электронов. Каждый электрон характеризуется некоторой элементарной величиной, называемой *электрическим зарядом*. Совокупный заряд (измеряемый в *кулонах*), протекающий сквозь компонент за одну секунду, называется *электрическим током* и измеряется в *амперах*. Электрический потенциал можно рассматривать как некоторую силу электрической природы, которая потенциально способна *принудить* ток идти сквозь компонент. Такую силу часто называют *электродвижущей силой*. Разность потенциалов измеряется в *вольтах*. Отношение между напряжением *на* компоненте и током *внутри* компонента зависит от природы самого компонента и, как мы вскоре увидим, связано с временным фактором.

Резистор

Простейшим электрическим компонентом является резистор, схематически изображенный на рис. VIII.14. Направление электрического тока сквозь резистор показано обыкновенной стрелкой, напряжение на резисторе показано стрелкой с «хвостом», символизирующим точку отсчета, относительно которой измеряется разность потенциалов. Сопротивление R измеряется в омах. Ток I_R (в амперах), движимый сквозь резистор разностью потенциалов в V_R вольт, задается очень простым (абсолютно линейным) отношением

$$I_R = \frac{V_R}{R}. \quad (8.56)$$

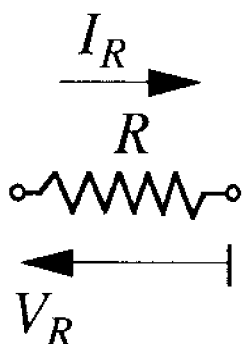


Рис. VIII.14. Резистор.

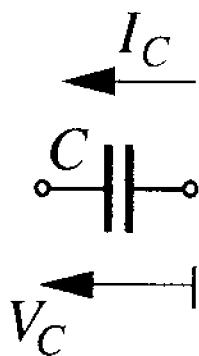


Рис. VIII.15. Конденсатор.

Конденсатор

Конденсатор состоит из тонкой непроводящей пленки (*изолятора*), вложенной между двумя проводящими пластинами (*электродами*). Схематическое изображение конденсатора приведено на рис. VIII.15. Еще на заре экспериментирования с электричеством было замечено, что подобное устройство, предком которого была неизвестная *лейденская банка*, способно накапливать электрический заряд. Емкость C конденсатора, измеряемая в *фарадах*, определяется как отношение накапливаемого электрического заряда Q_C , измеряемого в кулонах, к соответствующей разности потенциалов V_C (в вольтах) между его электродами. Иными словами,

$$C = \frac{Q_C}{V_C}. \quad (8.57)$$

Напряжение и заряд имеют одинаковый знак. Таким образом, стрелка с хвостом на схеме может обозначать и заряд. Из схемы ясно, что ток, представленный обыкновенной стрелкой, соответствует уменьшению заряда за единицу времени. То есть можно записать

$$(Q_C)_{i+1} = (Q_C)_i - (I_C)_i \Delta t.$$

Для простоты перепишем вышеприведенное выражение в следующем виде (буквой τ здесь обозначено *бесконечно малое* приращение времени):

$$Q'_C = Q_C - I_C \tau,$$

и, учитывая, что $Q_C = CV_C$ и $Q'_C = CV'_C$, получим

$$V'_C = V_C - \frac{I_C}{C} \tau. \quad (8.58)$$

Индуктор

Индуктором (или *катушкой индуктивности*) называется простое устройство, представляющее собой кусок проволоки, намотанной на стержень, называемый сердечником (рис. VIII.16); индуктивность его зависит

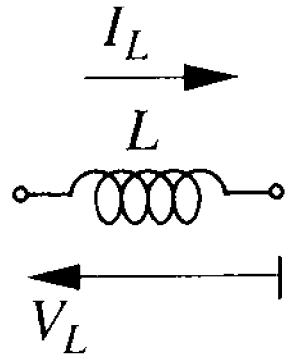


Рис. VIII.16. Индуктор.

от количества витков проволоки и от магнитных свойств (т. е. магнитной проницаемости) сердечника⁵. Высокие значения индуктивности достигаются использованием сердечников, изготавливаемых из соединений железа и потому обладающих высокой магнитной проницаемостью. Индукторы, в которых проволока наматывается на так называемый *воздушный сердечник*, характеризуются малыми значениями индуктивности и применяются в высокочастотных контурах. Известно, что при подсоединении к контуру батареи через индуктор, последний сопротивляется установлению в контуре тока, при отключении же батареи индуктор сопротивляется затуханию тока. С учетом направления стрелок на схеме, индуктивность L определяется как отношение напряжения на катушке к скорости затухания тока внутри катушки. Таким образом, уравнение, соответствующее схеме на рис. VIII.16, имеет вид:

$$L = \frac{V_L}{(I'_L - I_L)/\tau},$$

то есть

$$I'_L = I_L + \frac{V_L}{L}\tau. \quad (8.59)$$

Последовательный RLC-контур

Определив поведение каждого отдельного компонента, рассмотрим представленную на рис. VIII.17 схему, в которой все три компонента соединены *последовательно*. Не будем пока обращать внимания на батарею B слева на схеме и представим, что переключатель K находится в правом положении. Можно записать

$$I_C = I_R = I_L = I, \quad V_C = V_L + V_R,$$

откуда следует, что

$$I' = I + \frac{V_L}{L}\tau = I + \frac{V_C - RI}{L}\tau.$$

⁵В принципе, ненулевой индуктивностью обладает любой кусок проволоки.

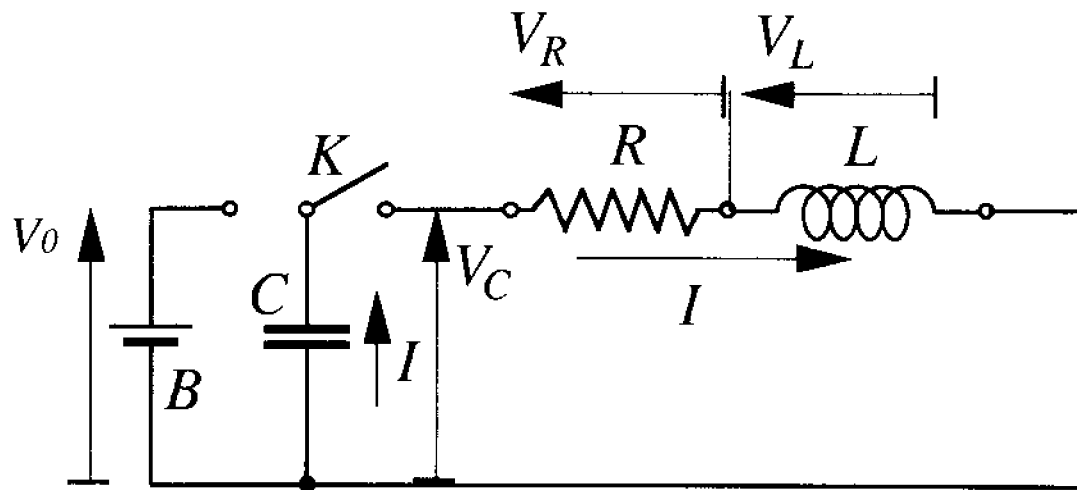


Рис. VIII.17. Последовательный RLC-контур.

Положив $V_C = V$, получим

$$I' = \frac{V}{L}\tau + I \left(1 - \frac{R}{L}\tau\right), \quad (8.60)$$

а уравнение (8.58) принимает вид:

$$V' = V - \frac{I}{C}\tau. \quad (8.61)$$

Уравнения (8.60) и (8.61) можно объединить в матричной форме:

$$\begin{vmatrix} V_{i+1} \\ I_{i+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{C}\tau \\ \frac{1}{L}\tau & 1 - \frac{R}{L}\tau \end{vmatrix} \begin{vmatrix} V_i \\ I_i \end{vmatrix}, \quad (8.62)$$

где V есть напряжение на конденсаторе, а I — ток в контуре. Положим

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}; \quad (8.63)$$

тогда число ω является действительным, когда затухание в контуре ниже критического (*слабо затухающий* контур, см. приложение к настоящей главе). Произведя в уравнениях (8.47) и (8.48) для очень малых значений приращения времени τ соответствующие замены, получим для очень малых τ следующие уравнения:

$$V = e^{-\frac{R}{2L}t} \left(V_0 \left(\cos \omega t + \frac{R}{2L\omega} \sin \omega t \right) - I_0 \frac{1}{C\omega} \sin \omega t \right), \quad (8.64a)$$

$$I = e^{-\frac{R}{2L}t} \left(V_0 \frac{1}{L\omega} \sin \omega t + I_0 \left(\cos \omega t - \frac{R}{2L\omega} \sin \omega t \right) \right), \quad (8.64b)$$

где $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}.$

Величина $f = 2\pi/\omega$ называется *резонансной частотой* контура, $L\omega$ есть *импеданс* индуктивности L , а $1/C\omega$ — импеданс емкости C на частоте f . Отношение $L\omega/R$ обозначается буквой Q и называется *добротностью* контура. При высокой добротности и очень малом значении отношения R/L имеем

$$V = e^{-\frac{R}{2L}t} \left(V_0 \cos \omega t - I_0 \sqrt{\frac{L}{C}} \sin \omega t \right), \quad (8.65a)$$

$$I = e^{-\frac{R}{2L}t} \left(V_0 \sqrt{\frac{C}{L}} \sin \omega t + I_0 \cos \omega t \right), \quad \text{где } \omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}. \quad (8.65b)$$

Проведем небольшой физический эксперимент. Сначала переключатель K разомкнут. Ток I и напряжение $V = V_C$ равны нулю. Переведем переключатель в левое положение, соединив тем самым конденсатор с батареей B . Конденсатор накапливает полный заряд, и напряжение на его контактах становится равным V_0 . Переведем переключатель в правое положение, отметив момент времени $t = 0$, соответствующий $V = V_0$ и $I_0 = 0$. Начиная с этого момента, напряжение V на конденсаторе и ток I , протекающий через контур, задаются уравнениями

$$V = V_0 e^{-\frac{R}{2L}t} \cos \omega t, \quad I = V_0 e^{-\frac{R}{2L}t} \sqrt{\frac{C}{L}} \sin \omega t, \quad \text{где } \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \quad (8.66)$$

Приложение: уравнения в конечных разностях

Рассмотрим уравнение в конечных разностях второго порядка

$$X_{i+2} + a_1 X_{i+1} + a_2 X_i = 0,$$

где a_1 и a_2 — постоянные, причем $a_2 \neq 0$. Для простоты его можно переписать следующим образом:

$$X'' + a_1 X' + a_2 X = 0.$$

Поиск решения вида $X_n = t^n$ приводит нас к *характеристическому уравнению*

$$t^2 + a_1 t + a_2 = 0,$$

корни которого равны

$$m_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}, \quad m_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}.$$

Из теории исчисления конечных разностей известно следующее:

- 1) Если $a_1^2 > 4a_2$, то корни действительны и различны и решение имеет вид

$$X_n = C_1 m_1^n + C_2 m_2^n.$$

Такая система называется системой с *избыточным затуханием* или с *затуханием выше критического*.

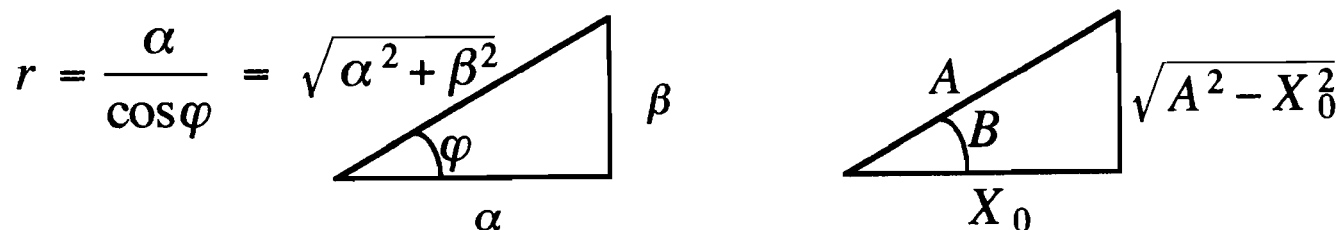
- 2) Если $a_1^2 = 4a_2$, то существует единственный действительный корень t и решение имеет вид

$$X_n = (C_1 + nC_2)t^n.$$

Перед нами система с *критическим затуханием*.

- 3) Если $a_1^2 < 4a_2$, то корни уравнения комплексны и различны. Положим $\sqrt{4a_2 - a_1^2} = \beta$ и $-a_1 = \alpha$; тогда корни равны $m_1 = \alpha + i\beta$ и $m_2 = \alpha - i\beta$, где $i = \sqrt{-1}$. Такая система называется *слабо затухающей* или системой с затуханием ниже критического и ее решение имеет вид

$$X_k = Ar^k \cos(k\varphi + B), \quad \text{где } r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{\beta}{\alpha},$$



где коэффициенты A и B определяются *начальными*, или *граничными*, условиями. Рассмотрим матричное уравнение

$$\begin{vmatrix} X_{i+1} \\ Y_{i+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -b \\ d & c \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_i \\ Y_i \end{vmatrix}, \quad (8.67)$$

где b, c, d — положительные числа. Для простоты это уравнение можно переписать в виде

$$\begin{vmatrix} X' \\ Y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -b \\ d & c \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X \\ Y \end{vmatrix};$$

запишем

$$X' = X - bY, \quad \text{то есть } Y = \frac{X - X'}{b},$$

$$X'' = X' - bY'.$$

Учитывая, что $Y' = dX + cY$, получаем

$$X'' = X' - b \left(dX + c \frac{X - X'}{b} \right) = X'(1 + c) - X(bd + c),$$

откуда следует разностное уравнение второго порядка

$$X'' - X'(1 + c) + X(bd + c) = 0.$$

Этому уравнению соответствует *вспомогательное, или характеристическое*, уравнение второго порядка

$$m^2 - m(1 + c) + (bd + c) = 0,$$

корни которого равны

$$m = \frac{(1 + c) \pm \sqrt{(1 - c)^2 - 4bd}}{2}.$$

Рассмотрим матричное уравнение

$$\begin{vmatrix} X_{i+1} \\ Y_{i+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\gamma\tau \\ \lambda\tau & 1 - 2\rho\tau \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_i \\ Y_i \end{vmatrix}, \quad (8.68)$$

где γ, λ, ρ и τ — действительные положительные числа; число τ мы будем называть *элементарным приращением времени*. Произведя соответствующие подстановки, получим следующие корни характеристического уравнения:

$$m = (1 - \rho\tau) \pm \sqrt{\rho^2 - \gamma\lambda\tau}.$$

Затухание в системе

выше критического, если $\rho^2 > \gamma\lambda$,

критическое, если $\rho^2 = \gamma\lambda$,

ниже критического, если $\rho^2 < \gamma\lambda$.

Мы рассмотрим лишь последний случай, поскольку он имеет непосредственное отношение к изучению спиралей. Положим $\omega = \sqrt{\gamma\lambda - \rho^2}$ (величину ω называют *угловой скоростью в комплексной плоскости*, или *угловой частотой*; это всего лишь математическая абстракция, и не следует путать ее с физической угловой скоростью вращающегося тела); тогда

$$\begin{aligned} m &= (1 - \rho\tau) \pm i\omega\tau, \\ \varphi &= \operatorname{arctg} \frac{\omega\tau}{1 - \rho\tau}, \\ X_n &= Ar^n \cos(n\varphi + B), \quad Y_n = Cr^n \cos(n\varphi + D). \end{aligned}$$

Сначала разберемся с X_n . Имеем

$$X_n = A \left(\frac{1 - \rho\tau}{\cos \varphi} \right)^n (\cos n\varphi \cos B - \sin n\varphi \sin B);$$

отсюда

$$\begin{aligned} X_1 &= A \frac{1 - \rho\tau}{\cos \varphi} \left(\frac{X_0}{A} \cos \varphi - \frac{\sqrt{A^2 - X_0^2}}{A} \sin \varphi \right) = \\ &= (1 - \rho\tau)(X_0 - \sqrt{A^2 - X_0^2} \operatorname{tg} \varphi). \end{aligned}$$

Приняв во внимание, что $X_1 = X_0 - \gamma\tau Y_0$, можно записать

$$\begin{aligned} X_0 - \gamma\tau Y_0 &= X_0 - \rho\tau X_0 - (1 - \rho\tau) \sqrt{A^2 - X_0^2} \operatorname{tg} \varphi, \\ \sqrt{A^2 - X_0^2} &= \frac{\gamma Y_0 - \rho X_0}{\sqrt{\gamma\lambda - \rho^2}} = \frac{\gamma Y_0 - \rho X_0}{\omega}; \end{aligned}$$

$r = \left(\frac{1 - \rho\tau}{\cos \varphi} \right)$
 $\frac{\gamma Y_0 - \rho X_0}{\omega}$
 $\frac{\rho Y_0 - \lambda X_0}{\omega}$

в результате получаем

$$X_n = \left(\frac{1 - \rho\tau}{\cos \varphi} \right)^n \left(X_0 \cos n\varphi - \frac{\gamma Y_0 - \rho X_0}{\omega} \sin n\varphi \right)$$

или

$$X_n = \left(\frac{1 - \rho\tau}{\cos \varphi} \right)^n \left(X_0 \left(\cos n\varphi + \frac{\rho}{\omega} \sin n\varphi \right) - Y_0 \frac{\gamma}{\omega} \sin n\varphi \right).$$

Аналогичное рассуждение дает для Y_n следующее уравнение:

$$Y_n = \left(\frac{1 - \rho\tau}{\cos \varphi} \right)^n \left(X_0 \frac{\lambda}{\omega} \sin n\varphi + Y_0 \left(\cos n\varphi - \frac{\rho}{\omega} \sin n\varphi \right) \right).$$

ГЛАВА IX

Позиционные системы счисления

Denaria enum ex institute hominum, non ex necessitate naturae ut vulgus arbitratur, et sane satis inepte, posita est.

Десятичная система счисления была создана в соответствии с человеческими обычаями (что само по себе не совсем умно), а вовсе не повинаясь естественной необходимости, как думают многие.

(Блез Паскаль, *De Numerus multiplicibus*)

Эта глава представляет собой введение в изучение позиционного представления чисел. Кроме того, ее можно рассматривать как необходимую преамбулу к следующей главе, в которой речь пойдет о фракталах. Начнем мы с анализа алгоритма деления, на котором основывается всякая позиционная система счисления. После краткого предварительного обзора кодов и их алгебраических представлений вводится понятие смешанных систем счисления.

Деление

Даны два произвольных числа 24, 5 и 7, 2, называемые, соответственно, *делимое* и *делитель*. Запишем

$$24,5 = 1 \times 7,2 + 17,3,$$

$$24,5 = 2 \times 7,2 + 10,1,$$

$$24,5 = 3 \times 7,2 + 2,9,$$

$$24,5 < 4 \times 7,2.$$

Поскольку число 3 является наибольшим неотрицательным целым числом, произведение которого на 7, 2 не превосходит 24, 5, оно называется *частным*. Число 2, 9 является *остатком* и по определению не превышает делителя. Вышеприведенный процесс, приводящий к определению частного и остатка, называют *алгоритмом деления*.

В общем виде при заданных неотрицательном делимом D и положительном делителе d алгоритм деления дает следующий результат:

$$D = dq + \rho \quad (0 \leq \rho < d, \quad q \text{ — целое число}). \quad (9.1)$$

Можно легко показать, что паре чисел (D, d) соответствует одна и только одна пара неотрицательных чисел, удовлетворяющих равенству (9.1): частное q и остаток ρ .

Пусть дано некоторое целое число $m > 1$. Мы говорим, что *целочисленная переменная* δ принадлежит диапазону m , если она может принимать исключительно целочисленные значения $0, 1, 2, \dots, m - 1$. Записывается это так:

$$0 \leq \delta \leq m - 1. \quad (9.2)$$

Обозначим через $\delta_0, \delta_1, \gamma$ целочисленные переменные, принадлежащие, соответственно, диапазонам m_0, m_1, m_0m_1 , т. е.

$$0 \leq \delta_0 \leq m_0 - 1, \quad 0 \leq \delta_1 \leq m_1 - 1, \quad 0 \leq \gamma \leq m_0m_1 - 1. \quad (9.3)$$

Переменные δ_0 и δ_1 *независимы*, т. е. каждая из них может принимать внутри своего диапазона любое значение независимо от значения, присвоенного другой переменной.

Если диапазоны m_0 и m_1 некоторым общепринятым образом упорядочены (m_0, m_1) , то любая упорядоченная пара значений (δ_0, δ_1) , присвоенная переменным δ_0 и δ_1 в пределах их диапазонов, называется *конфигурацией*. Существует, очевидно, $m_0 \times m_1$ различных конфигураций. Например, при $m_0 = 3$ и $m_1 = 2$ имеем $0 \leq \delta_0 \leq 2$, $0 \leq \delta_1 \leq 1$ и $0 \leq \gamma \leq 5$.

Можно произвольно определить однозначное соответствие, или *отображение*, между конфигурациями (δ_0, δ_1) , количество которых равно m_0m_1 , и значениями, присвоенными переменной γ , количество которых также равно m_0m_1 . Каждое такое отображение называют *кодом*. В рамках данного кода любая конкретная конфигурация (δ_0, δ_1) является *представлением* соответствующего значения γ .

В таблице IX.1 представлены два из $6! = 720$ различных возможных кодов, соответствующих значениям $m_0 = 3$, $m_1 = 2$. Рассматривая величину γ как *функцию* от независимых переменных δ_0, δ_1 , можно для любого из 720 кодов записать многочленное выражение γ от δ_0, δ_1 . Кодам, приведенным в таблице IX.1, соответствуют полиномы

$$\begin{aligned} \text{Код } a \quad \gamma &= \delta_0 + 3\delta_1; \\ \text{Код } b \quad \gamma &= \delta_1 + 2\delta_0. \end{aligned}$$

Обратим внимание на простоту этих полиномов первой степени; соответствующие им коды называются *линейными*. Любой другой, кроме двух вы-

Таблица IX.1. Линейные коды

<i>Kod</i>	<i>a</i>		<i>b</i>	
γ	δ_1	δ_0	δ_1	δ_0
0	0	0	0	0
1	0	1	1	0
2	0	2	0	1
3	1	0	1	1
4	1	1	0	2
5	1	2	1	2

шеприведенных, код содержит переменные в степенях, бóльших единицы, либо произведения переменных, например, $\delta_0\delta_1$. Вернемся к уравнению (9.1) и произведем следующую подстановку: делимое D заменим на γ , делитель d — на m_0 , а остаток ρ — на δ_0 ; запишем

$$\gamma = \delta_0 + m_0\delta_1, \quad \text{где } 0 \leq \delta_0 \leq m_0 - 1. \quad (9.4)$$

Из неравенства $0 \leq \delta_1 \leq m_1 - 1$ следует, что $0 \leq \gamma \leq m_0m_1 - 1$, и наоборот. В целом же, при заданных диапазонах m_0, m_1 и переменных $\delta_0, \delta_1, \gamma$, удовлетворяющих неравенствам (9.3), получается, что для каждого значения γ существует одна и только одна конфигурация (δ_0, δ_1) , удовлетворяющая уравнению (9.4), и наоборот — каждой конфигурации (δ_0, δ_1) соответствует одно и только одно значение γ .

Двинемся дальше и рассмотрим диапазоны m_0, m_1, m_2 и независимые переменные $\delta_0, \delta_1, \delta_2$, каждая из которых принадлежит соответствующему диапазону. Добавим сюда и переменную γ , принадлежащую диапазону $m_0m_1m_2$:

$$0 \leq \gamma \leq m_0m_1m_2 - 1. \quad (9.5)$$

Понятие *конфигурации* можно распространить и на совокупность целочисленных значений трех переменных. Каждому значению γ соответствует одна и только одна конфигурация $(\delta_0, \delta_1, \delta_2)$, удовлетворяющая уравнению (9.6), и наоборот:

$$\gamma = \delta_0 + m_0(\delta_1 + m_1\delta_2) = \delta_0 + m_0\delta_1 + m_0m_1\delta_2 \quad (9.6)$$

или

$$\gamma = \pi_0\delta_0 + \pi_1\delta_1 + \pi_2\delta_2. \quad (9.7)$$

Коэффициенты $\pi_0 = 1, \pi_1 = m_0, \pi_2 = m_0m_1$ называются *весовыми*. Уравнение (9.7) определяет некий линейный код и составляет основание, на

котором строится любая *позиционная система счисления* — десятичная, например, или двоичная.

В качестве упражнения назначим диапазонам m_0, m_1, m_2 целочисленные значения 2, 3, 4 всеми $3! = 6$ возможными способами и приведем полином, соответствующий каждой последовательности. Запишем

	m_2	m_1	m_0		$\gamma = \pi_0\delta_0 + \pi_1\delta_1 + \pi_2\delta_2$
Код 1	(4,	3,	2)	$\rightarrow$	$\gamma = \delta_0 + 2\delta_1 + 6\delta_2;$
Код 2	(4,	2,	3)	$\rightarrow$	$\gamma = \delta_0 + 3\delta_1 + 6\delta_2;$
Код 3	(3,	4,	2)	$\rightarrow$	$\gamma = \delta_0 + 2\delta_1 + 8\delta_2;$
Код 4	(3,	2,	4)	$\rightarrow$	$\gamma = \delta_0 + 4\delta_1 + 8\delta_2;$
Код 5	(2,	4,	3)	$\rightarrow$	$\gamma = \delta_0 + 3\delta_1 + 12\delta_2;$
Код 6	(2,	3,	4)	$\rightarrow$	$\gamma = \delta_0 + 4\delta_1 + 12\delta_2.$

Для значения $\gamma = 14$, кодам 1–6 соответствуют следующие конфигурации:

	δ_2	δ_1	δ_0		
Код 1	(2,	1,	0)	$\rightarrow$	$14 = 0 + 2 \times 1 + 6 \times 2;$
Код 2	(2,	0,	2)	$\rightarrow$	$14 = 2 + 3 \times 0 + 6 \times 2;$
Код 3	(1,	3,	0)	$\rightarrow$	$14 = 0 + 2 \times 3 + 8 \times 1;$
Код 4	(1,	1,	2)	$\rightarrow$	$14 = 2 + 4 \times 1 + 8 \times 1;$
Код 5	(1,	0,	2)	$\rightarrow$	$14 = 2 + 3 \times 0 + 12 \times 1;$
Код 6	(1,	0,	2)	$\rightarrow$	$14 = 2 + 4 \times 0 + 12 \times 1.$

Символы m_0, m_1, m_2 и $\delta_0, \delta_1, \delta_2$ выстроены в *арабском порядке*, т. е. справа налево.

Позиционные системы счисления со смешанным основанием

Основание b определяется как упорядоченная последовательность целых чисел

$$b = (m_0, m_1, m_2, m_3, \dots, m_i, \dots, m_{n-1}), \quad m_i > 1 \text{ для всех } i. \quad (9.8)$$

Мы говорим, что основание имеет длину (или разрядность) n , а целые числа $m_0, m_1, m_2, \dots, m_i, \dots, m_{n-1}$ называются *диапазонами*, или *корнями* основания b . Любой набор целочисленных значений, назначенных переменным $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_i, \dots, \delta_{n-1}$ в соответствии с их индивидуальными диапазонами, называется *соответствующей*, или *конформной*, *конфигурацией*. Иными словами, конфигурацию называют *конформной* основанию b , если

$$0 \leq \delta_i \leq m_i - 1, \quad \text{для всех } i. \quad (9.9)$$

Каждому члену с индексом i назначается *весовой коэффициент* π_i :

$$\pi_i = m_0 m_1 m_2 m_3 \dots m_{i-1}, \quad \text{при этом } \pi_0 = 1. \quad (9.10)$$

Следовательно, любому значению целочисленной переменной γ , принадлежащей диапазону π_n (т. е. $0 \leq \gamma \leq \pi_n - 1$), соответствует одна и только одна конформная конфигурация $(\delta_0, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_i, \dots, \delta_{n-1})$, удовлетворяющая уравнению (9.11), и наоборот:

$$\begin{aligned} \gamma &= \delta_0 + m_0(\delta_1 + m_1(\delta_2 + m_2(\delta_3 + m_3(\delta_4 + \dots + m_{n-2}\delta_{n-1})))) = \\ &= \pi_0\delta_0 + \pi_1\delta_1 + \pi_2\delta_2 + \pi_3\delta_3 + \dots + \pi_{n-1}\delta_{n-1}. \end{aligned} \quad (9.11)$$

Скобки здесь помещены с целью дать ключ к доказательству, которое можно осуществить индукцией по n . Поскольку имеет место однозначное соответствие, мы будем говорить, что конфигурация $(\delta_0, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_i, \dots, \delta_{n-1})$ является *представлением числа γ по основанию n* . Это представление мы будем записывать *справа налево*, в соответствии с арабской нумерацией. После крайнего справа числа, соответствующего $i = 0$, может стоять точка. Целое число δ_i будем называть *i -м знаком числа γ* , или знаком *ранга i* по основанию b , и записывать $(\delta_i^\gamma)_b$ или просто δ_i^γ в тех случаях, когда основание очевидно из контекста. Таким образом, представление числа γ имеет вид:

$$\gamma = (\delta_{n-1}^\gamma, \dots, \delta_i^\gamma, \dots, \delta_2^\gamma, \delta_1^\gamma, \delta_0^\gamma)_b = \sum_{i=0}^{n-1} \delta_i^\gamma \pi_i. \quad (9.12)$$

Справившись по таблице IX.2, получим

$$14 = (210.)_a = (202.)_b = (130.)_c = (112.)_d = (102.)_e = (102.)_g,$$

где

$$\begin{aligned} a &= (4, 3, 2), & b &= (4, 2, 3), & c &= (3, 4, 2), \\ d &= (3, 2, 4), & e &= (2, 4, 3), & e &= (2, 3, 4). \end{aligned}$$

Если $m_1 = m_2 = \dots = m_i \dots = m$, то перед нами система счисления с *однородным основанием m* , для которой $\pi_i = m^i$. То есть

$$\gamma = (\delta_{n-1}^\gamma, \dots, \delta_i^\gamma, \dots, \delta_2^\gamma, \delta_1^\gamma, \delta_0^\gamma)_m = \sum_{i=0}^{n-1} \delta_i^\gamma m^i. \quad (9.13)$$

Во всех остальных случаях говорят о системах счисления *со смешанным основанием*. В таблице IX.2 показано соответствие между числом γ , представленным по основанию 10, и другими его представлениями: по основаниям 2, 3 и 5. Система счисления по основанию 10 — это хорошо известная

Таблица IX.2. Позиционная нумерация по основанию m для $m = 2, 3, 5$

<i>десятичная</i>	<i>по основанию 5</i>	<i>по основанию 3</i>	<i>по основанию 2</i>
0	0	0	0
1	1	1	1
2	2	2	10
3	3	10	11
4	4	11	100
5	10	12	101
6	11	20	110
7	12	21	111
8	13	22	1000
9	14	100	1001
10	20	101	1010
11	21	102	1011
12	22	110	1100
13	23	111	1101
14	24	112	1110
15	30	120	1111
16	31	121	10000
17	32	122	10001
18	33	200	10010
19	34	201	10011
20	40	202	10100
21	41	210	10101
22	42	211	10110
23	43	212	10111
24	44	220	11000

нам индийско-арабская десятичная система, система же по основанию 2 — не менее известная двоичная. На протяжении своей истории человечество успело попользоваться огромным множеством систем счисления, самыми выдающимися из которых являются месопотамская шестидесятиричная и двадцатиричная индейцев майя. Буффон настойчиво предлагал ввести в употребление двенадцатеричную систему представления чисел, существенным достоинством которой, по его мнению, является делимость ее основания 12 на 2, 3, 4 и 6. Приверженцы двенадцатеричной системы дошли до того, что подготовили и опубликовали таблицы логарифмов в двенадцатеричном представлении. Немалые достоинства были обнаружены и у других систем счисления, не являющихся, правда, позиционными, — таких, например, как

биномиальная система, система Фибоначчи и сбалансированная десятичная система Шеннона.

Кроме тех случаев, когда основание равно 10 или очевидно из контекста, мы будем записывать представления чисел в круглых скобках и добавлять символ, идентифицирующий основание — как для систем со смешанным, так и для систем с однородным основанием. Во избежание возможных противоречий, представления чисел, равно как и последовательности оснований, будут записываться справа налево. Между знаками могут стоять запятые, но могут и не стоять. Например,

$$\begin{aligned}(101.)_2 &= (12.)_3 = 5, \\ (211.)_a &= 15 \text{ при } a = (4, 3, 2), \\ (132.)_b &= 2 \text{ при } b = (3, 4, 2).\end{aligned}$$

Очевидно, что слева к такой записи можно добавить какое угодно количество нулей, значение представленного числа при этом не изменится. Крайний слева не равный нулю знак называется *наибольшей значащей цифрой*, все цифры справа от него являются значащими. Если s есть количество значащих цифр целого числа γ или (что одно и то же) если $s - 1$ есть ранг его наибольшей значащей цифры, то

$$\pi_{s-1} \leq \gamma \leq \pi_s - 1 \quad \text{или} \quad \pi_{s-1} - 1 < \gamma < \pi_s. \quad (9.14)$$

Например, любое число γ , состоящее из трех значащих десятичных цифр, таково, что

$$100 \leq \gamma \leq 999 \quad \text{или} \quad 99 < \gamma < 1000.$$

Аналогично, любое число γ , состоящее из трех значащих двоичных цифр, или битов, таково, что

$$(1000.)_2 \leq \gamma \leq (1111.)_2 \quad \text{или} \quad (111.)_2 < \gamma < (10000.)_2,$$

то есть

$$8 \leq \gamma \leq 15 \quad \text{или} \quad 7 < \gamma < 16.$$

Многие авторы употребляют в своих трудах такие конструкции, как «десятичные числа» или «двоичные числа». Совершенно очевидно, однако, что относить эти атрибуты следует вовсе не к числам, но к их представлениям. И все же для простоты мы также будем прибегать к таким языковым сокращениям, распространяющим на числа признаки их представлений, и наоборот. Таким же сокращением является запись $\gamma = (101.)_2 = (12.)_3 = 5$, т. е. целое число, десятичное представление которого есть 5, имеет также

представления $(101.)_2$ в двоичной системе счисления и $(12.)_3$ в троичной. Все четыре представления, включая и саму букву γ , соответствуют одному и тому же целому числу, абстрактной математической сущности, и абсолютно эквивалентны друг другу. Для достижения наилучшего понимания мы рекомендуем читателю четко уяснить для себя грань между числом и его представлением.

Нахождение цифр целого числа

Допустим, нам необходимо представить в системе счисления по основанию b некое целое число γ , выраженное в системе счисления с каким-либо другим основанием, скажем, в десятичной; для нахождения знаков нового представления числа γ существует несколько алгоритмов. Описанные ниже методы (как, впрочем, и все остальные, если уж на то пошло) вытекают непосредственно из алгоритма деления и включают в себя следующие шаги:

Метод 1.

- | | |
|------------------------------------|--|
| 1. Делим γ на m_0 | Получаем частное q_1 и остаток δ_0^γ |
| 2. Делим q_1 на m_1 | Получаем частное q_2 и остаток δ_1^γ |
| 3. Делим q_2 на m_2 | Получаем частное q_3 и остаток δ_2^γ |
| ... | |
| s . Делим q_{s-1} на m_{s-1} | Получаем частное 0 и остаток δ_{s-1}^γ |

Примеры для $b = (5, 4, 3, 2)$: $\pi_0 = 1$, $\pi_1 = 2$, $\pi_2 = 6$, $\pi_3 = 24$, $\pi_4 = 120$.

1. $\gamma = 115 = 2 \times 57 + 1$
 $57 = 3 \times 19 + 0$
 $19 = 4 \times 4 + 3$
 $4 = 5 \times 0 + 4$ $115 = (4301.)_b$
2. $\gamma = 24 = 2 \times 12 + 0$
 $12 = 3 \times 4 + 0$
 $4 = 4 \times 1 + 0$
 $1 = 5 \times 0 + 1$ $24 = (1000.)_b = \pi_3$
3. $\gamma = 119 = 2 \times 59 + 1$
 $59 = 3 \times 19 + 2$
 $19 = 4 \times 4 + 3$
 $4 = 5 \times 0 + 4$ $119 = (4321.)_b = \pi_4 - 1$

(119 — наибольшее четырехразрядное конформное целое число).

Метод 2. Вышеописанный алгоритм смены основания можно шаг за шагом представить следующим образом ($[A]$ обозначает целую часть числа A):

$$\begin{aligned}
 1. \quad \gamma &= m_0 \left[\frac{\gamma}{m_0} \right] + \delta_0^\gamma \\
 1. \quad \left[\frac{\gamma}{m_0} \right] &= m_1 \left[\frac{\left[\frac{\gamma}{m_0} \right]}{m_1} \right] + \delta_1^\gamma = m_1 \left[\frac{\gamma}{m_0 m_1} \right] + \delta_1^\gamma \\
 1. \quad \left[\frac{\gamma}{m_0 m_1} \right] &= m_2 \left[\frac{\gamma}{m_0 m_1 m_2} \right] + \delta_2^\gamma \\
 &\dots,
 \end{aligned}$$

или, в общем виде,

$$\delta_i^\gamma = \left[\frac{\gamma}{\pi_i} \right] - m_i \left[\frac{\gamma}{\pi_{i+1}} \right] = \left[m_i \frac{\gamma}{\pi_{i+1}} \right] - m_i \left[\frac{\gamma}{\pi_{i+1}} \right]. \quad (9.15)$$

Согласно одной из теорем теории чисел $[mA] - m[A] = ([mA] \bmod m)$, где $(N \bmod m)$ означает остаток от деления N на m . Таким образом,

$$\delta_i^\gamma = \left(\left[\frac{\gamma}{\pi_i} \right] \bmod m_i \right). \quad (9.16)$$

Вернемся к примеру с числом $\gamma = 115$:

$$\begin{aligned}
 \delta_0^\gamma &= \left(\left[\frac{115}{1} \right] \bmod 2 \right) = 1, & \delta_2^\gamma &= \left(\left[\frac{115}{6} \right] \bmod 4 \right) = 3, \\
 \delta_1^\gamma &= \left(\left[\frac{115}{2} \right] \bmod 3 \right) = 0, & \delta_3^\gamma &= \left(\left[\frac{115}{24} \right] \bmod 5 \right) = 4.
 \end{aligned}$$

Применим этот метод к преобразованию числа $\gamma = 315$ из десятичной системы в двоичную:

$$\begin{aligned}
 \delta_0^\gamma &= \left(\left[\frac{315}{1} \right] \bmod 2 \right) = 1, & \delta_5^\gamma &= \left(\left[\frac{315}{32} \right] \bmod 2 \right) = 4, \\
 \delta_1^\gamma &= \left(\left[\frac{315}{2} \right] \bmod 2 \right) = 1, & \delta_6^\gamma &= \left(\left[\frac{315}{64} \right] \bmod 2 \right) = 0, \\
 \delta_2^\gamma &= \left(\left[\frac{315}{4} \right] \bmod 2 \right) = 0, & \delta_7^\gamma &= \left(\left[\frac{315}{128} \right] \bmod 2 \right) = 0, \\
 \delta_3^\gamma &= \left(\left[\frac{315}{8} \right] \bmod 2 \right) = 1, & \delta_8^\gamma &= \left(\left[\frac{315}{256} \right] \bmod 2 \right) = 1. \\
 \delta_4^\gamma &= \left(\left[\frac{315}{16} \right] \bmod 2 \right) = 1,
 \end{aligned}$$

Так как $315 < 2^i$ для всех $i > 8$, цифра δ_8^γ является наибольшей значащей, а искомое число равно $(1\,0\,0\,1\,1\,1\,0\,1\,1)_2$. Первый метод смены основания является *итерационным*. Для того чтобы, пользуясь этим методом, вычислить цифру δ_i^γ , необходимо знать все цифры δ_j^γ , где $0 < j < i - 1$. Преимущество второго метода в том, что он основывается на явном выражении для δ_i^γ , позволяя вычислять каждую цифру отдельно, *d'emblée*¹ — настолько, разумеется, насколько вычисление целой части числа можно рассматривать как результат его выражения в истинно явном виде, не требующем итераций, несмотря на алгоритмическую сущность самого процесса деления.

¹Сразу (фр.). — Прим. перев.

ГЛАВА X

Фракталы

Существование таких феноменов бросает нам вызов и побуждает заняться подробным изучением тех из форм, которые Евклид отложил в сторону из-за их «бесформенности», — исследовать, так сказать, морфологию «аморфного».

(Бенуа Мандельброт)¹

С момента выхода в свет эпохального труда Мандельброта появилось огромное количество всевозможной литературы о фракталах и их проявлениях чуть ли не в каждой области человеческой деятельности — от так называемых точных наук до наук более гуманитарной направленности. Фракталы наблюдаются повсюду и вызывают нешуточное возбуждение как среди серьезных ученых, так и среди дилетантов. В мои намерения не входит написание очередного курса по фракталам. В равной мере не намерен я обсуждать все аспекты теории фракталов — такие, например, как фрактальная размерность или множество Мандельброта. Напротив, я склонен полагать, что представленный в данной главе подход несколько необычен, поскольку в основе его лежат теоретико-числовые соображения. Причем нам удалось построить некоторые классические фракталы и обнаружить несколько новых фрактальных форм.

Отступая от традиционной практики, которая заключается в нумерации строк матриц от 1 до m , а столбцов от 1 до m' , мы будем нумеровать их, соответственно, от 0 до $m - 1$ и от 0 до $m' - 1$, как показано на рис. X.1. Это простое, но существенное изменение даст нам право совершать арифметические операции над индексами строк и столбцов и оправдает осуществленное таким образом переопределение кронекерова произведения матриц в отношении других арифметических операций². Аналогичным образом, в смысле осуществления арифметических операций над индексами

¹*The Fractal Geometry of Nature* (New York: W. H. Freeman, 1981), p. 1.

²Когда я был еще юным студентом, меня всегда приводил в недоумение тот факт, что верхний левый элемент матрицы непременно обозначается $A_{1,1}$, а не $A_{0,0}$. Ведь, в конце концов, думал я, первым целым (пусть и не первым *натуральным*) числом является ноль, а вовсе не единица!

их элементов, можно определить и произведения решеток более высоких размерностей.

$$\begin{bmatrix} M_{0,0} & M_{0,1} & \dots & M_{0,m'-1} \\ M_{1,0} & M_{1,1} & \dots & M_{1,m'-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{m-1,0} & M_{m-1,1} & \dots & M_{m-1,m'-1} \end{bmatrix}$$

Рис. X.1. Матрица M .

Кронекерово произведение

Рассмотрим матрицу M , состоящую из m строк и m' столбцов (рис. X.1).

Мы пишем

$$M = [M_{\mu,\mu'}], \quad \text{где } 0 \leq \mu \leq m-1, \quad 0 \leq \mu' \leq m'-1, \quad (10.1)$$

подразумевая, что $M_{\mu,\mu'}$ — это элемент, расположенный на пересечении строки μ и ряда μ' . Элемент $M_{0,0}$ называется *начальным элементом* матрицы. Рассмотрим $r \times r'$ матрицу R :

$$R = [R_{\rho,\rho'}], \quad \text{где } 0 \leq \rho \leq r-1, \quad 0 \leq \rho' \leq r'-1. \quad (10.2)$$

Кронекерово произведение $G = M \otimes R$ определяется как матрица $G = [G_{\gamma,\gamma'}]$, где

$$G_{\gamma,\gamma'} = M_{\mu,\mu'} \times R_{\rho,\rho'}, \quad \text{при } \gamma = \mu + t\rho, \quad \gamma' = \mu' + t'\rho'. \quad (10.3)$$

Из главы IX нам известно, что любой паре целых чисел (μ, ρ) соответствует одно и только одно значение целочисленной переменной $\gamma = \mu + t\rho$, и наоборот (t, r — натуральные числа $1, 2, 3, \dots$), и что

$$0 \leq \mu \leq m-1, \quad 0 \leq \rho \leq r-1, \quad 0 \leq \gamma \leq mr-1.$$

Любой паре элементов $(M_{\mu,\mu'}, R_{\rho,\rho'})$, таким образом, соответствует один и только один элемент $G_{\gamma,\gamma'} = G_{\mu+t\rho, \mu'+t'\rho'}$, и наоборот. Значит, матрица G состоит из mr строк и $m'r'$ столбцов, и мы можем записать

$$G_{\gamma,\gamma'} = (M \otimes R)_{(\mu+t\rho),(\mu'+t'\rho')} = M_{\mu,\mu'} \times R_{\rho,\rho'}. \quad (10.4)$$

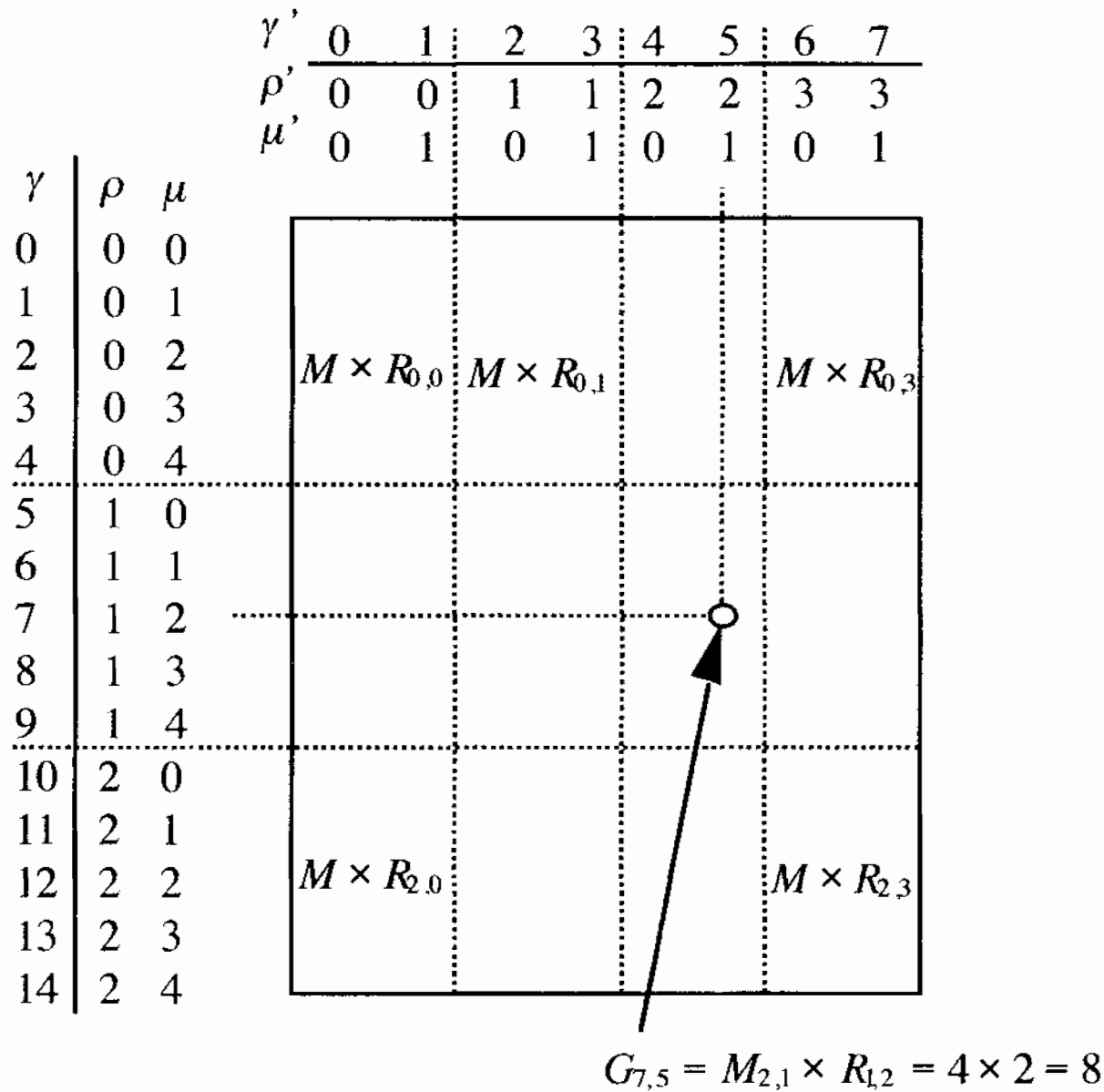
Пример. На рис. X.2a представлены 5×2 матрица M и 3×4 матрица R . На рис. X.2b построена 15×8 матрица $G = M \otimes R$. В вертикальной таблице слева даны значения γ от 0 до 14 и их цифры по основанию (3, 5.), т. е. $0 \leq \mu \leq 4$ и $0 \leq \rho \leq 4$. Аналогично, в таблице вверху рисунка даны значения γ' от 0 до 7 и их цифры по основанию (4, 2.), т. е. $0 \leq \mu' \leq 1$ и $0 \leq \rho' \leq 3$.

$$\begin{array}{c}
 \xrightarrow{\mu'} \\
 \begin{array}{cc}
 0 & 1 \\
 \downarrow \mu & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 1 & 4 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \\
 & M
 \end{array}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \xrightarrow{\rho'} \\
 \begin{array}{cccc}
 0 & 1 & 2 & 3 \\
 \downarrow \rho & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\
 & R
 \end{array}
 \end{array}$$

Рис. X.2a. Матрицы M и R .

			γ'	0	1	2	3	4	5	6	7
			ρ'	0	0	1	1	2	2	3	3
			μ'	0	1	0	1	0	1	0	1
γ	ρ	μ									
0	0	0	2	0	1	0	3	0	-1	0	
1	0	1	4	-6	2	-3	6	-9	-2	3	
2	0	2	2	8	1	4	3	12	-1	-4	
3	0	3	4	-2	2	-1	6	-3	-2	1	
4	0	4	6	4	3	2	9	6	-3	-2	
5	1	0	-1	0	3	0	2	0	4	0	
6	1	1	-2	3	6	-9	4	-6	8	-12	
7	1	2	-1	-4	3	12	2	8	4	16	
8	1	3	-2	1	6	-3	4	-2	8	-4	
9	1	4	-3	-2	9	6	6	4	12	8	
10	2	0	1	0	0	0	0	0	2	0	
11	2	1	2	-3	0	0	0	0	4	-6	
12	2	2	1	4	0	0	0	0	2	8	
13	2	3	2	-1	0	0	0	0	4	-2	
14	2	4	3	2	0	0	0	0	6	4	

Рис. X.2b. Матрица $G = M \otimes R$.

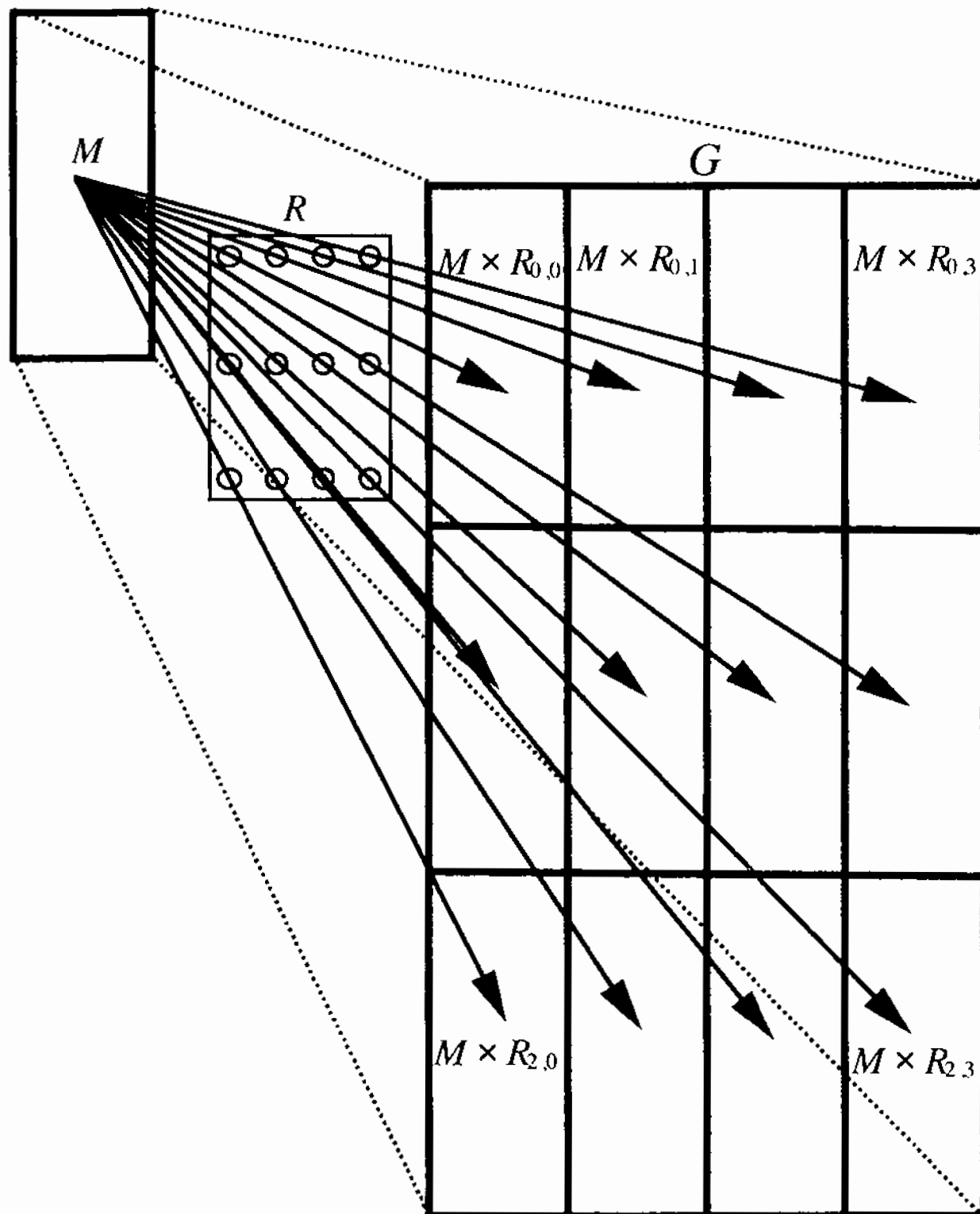
Рис. X.2с. Структура матрицы $G = M \otimes R$.

На рис. X.2с показано, что для вычисления элемента матрицы G , расположенного в строке γ и столбце γ' , число γ записывается по основанию $(r, m.)$ и составляет, таким образом, $(\rho, \mu.)$. Аналогично, число γ' записывается по основанию $(r', m'.)$ и имеет вид $(\rho', \mu'.)$. После того, как мы получили цифры μ, μ', ρ, ρ' , находим элементы $M_{\mu, \mu'}$ и $R_{\rho, \rho'}$ в соответствующих матрицах и получаем искомый элемент $G_{\gamma, \gamma'} = M_{\mu, \mu'} \times R_{\rho, \rho'}$. Макроскопический взгляд на матрицу G (рис. X.2d) позволяет увидеть, что она состоит из $r \times r'$ малых матриц, каждая из которых является результатом умножения матрицы M на элемент матрицы R , расположенный в точке матрицы R с теми же «координатами», какие описывают положение данной малой матрицы внутри матрицы G . По этой причине матрицу M мы будем называть матрицей-затравкой, а матрицу R — матрицей-шаблоном.

Ассоциативность кронекерова произведения

Пусть даны матрицы $M = [M_{\mu, \mu'}]$, $R = [R_{\rho, \rho'}]$, $S = [S_{\sigma, \sigma'}]$; можно записать

$$((M \otimes R) \otimes S)_{(\mu + m\rho) + mr\sigma, (\mu' + m'\rho') + m'r'\sigma'} = (M_{\mu, \mu'} \times R_{\rho, \rho'}) \times S_{\sigma, \sigma'}. \quad (10.5a)$$


 Рис. X.2d. Макроскопический вид матрицы $G = M \otimes R$.

Если бы мы начали с вычисления произведения $R \otimes S$, то наша запись выглядела бы так:

$$(M \otimes (R \otimes S))_{\mu+m(\rho+r\sigma), \mu'+m'(\rho'+r'\sigma')} = M_{\mu,\mu'} \times (R_{\rho,\rho'} \times S_{\sigma,\sigma'}). \quad (10.5b)$$

Положим

$$\gamma = \mu + m\rho + mr\sigma \quad \text{и} \quad \gamma' = \mu' + m'\rho' + m'r'\sigma'; \quad (10.6)$$

тогда

$$((M \otimes R) \otimes S)_{\gamma,\gamma'} = (M \otimes (R \otimes S))_{\gamma,\gamma'} = M_{\mu,\mu'} \times R_{\rho,\rho'} \times S_{\sigma,\sigma'}. \quad (10.7)$$

Кронекерово произведение *ассоциативно*; мы можем убрать скобки и записать

$$(M \otimes R) \otimes S = M \otimes (R \otimes S) = M \otimes R \otimes S. \quad (10.8)$$

Таким образом, следующие два утверждения следуют одно из другого:

$$G = M \otimes R \otimes S \Leftrightarrow G_{\gamma, \gamma'} = M_{\mu, \mu'} \times R_{\rho, \rho'} \times S_{\sigma, \sigma'}, \quad (10.9a)$$

где

$$\gamma = \mu + m\rho + mr\sigma, \quad 0 \leq \gamma \leq mrs - 1 \quad (10.9b)$$

и

$$\gamma' = \mu' + m'\rho' + m'r'\sigma', \quad 0 \leq \gamma' \leq m'r's' - 1 \quad (10.9c)$$

(см. рис. X.3a и X.3b).

$$\begin{array}{ccc} \mu' & 0 & 1 & 2 \\ \mu & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} \\ & M \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \rho' & 0 & 1 \\ \rho & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \\ & R \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \sigma' \rightarrow & 0 & 1 \\ \sigma=0 & \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \\ & S \end{array}$$

Рис. X.3a. Матрицы M , R , S .

	γ'	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
σ_1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
ρ_1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1
μ_1	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	2

σ_0	ρ_0	μ_0											
0	0	0	3	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0
0	0	1	3	6	12	0	0	0	4	8	16	0	0
0	0	2	3	9	27	0	0	0	4	12	36	0	0
0	1	0	6	0	0	9	0	0	8	0	0	12	0
0	1	1	6	12	24	9	18	36	8	16	32	12	24
0	1	2	6	18	54	9	27	81	8	24	72	12	36
0	2	0	-6	0	0	3	0	0	-8	0	0	4	0
0	2	1	-6	-12	-24	3	6	12	-8	-16	-32	4	8
0	2	2	-6	-18	-54	3	9	27	-8	-24	-72	4	12

Рис. X.3b. Матрица $G = M \otimes R \otimes S$.

$$\begin{aligned}
 G_{2,1} &= M_{2,1} \times R_{0,0} \times S_{0,0} = 3 \times 1 \times 3 = 9 \\
 G_{4,5} &= M_{1,2} \times R_{1,1} \times S_{0,0} = 4 \times 3 \times 3 = 36 \\
 G_{8,7} &= M_{2,1} \times R_{2,0} \times S_{0,1} = 3 \times (-2) \times 4 = -24 \\
 G_{3,9} &= M_{0,0} \times R_{1,1} \times S_{0,1} = 1 \times 3 \times 4 = 12
 \end{aligned}$$

 Рис. X.3с. Элементы матрицы G .

Пример. Если δ_i^γ обозначает i -ю цифру числа γ по основанию $(s, r, m.)$, а $\delta_i^{\gamma'}$ есть i -я цифра числа γ' по основанию $(s', r', m'.)$, т. е.

$$\gamma = (\delta_2^\gamma, \delta_1^\gamma, \delta_0^\gamma.)_{(s, r, m.)}, \quad \gamma' = (\delta_2^{\gamma'}, \delta_1^{\gamma'}, \delta_0^{\gamma'}.)_{(s', r', m'.)}, \quad (10.10)$$

то уравнение (10.9а) можно переписать в следующем виде:

$$(M \otimes R \otimes S)_{\gamma, \gamma'} = M_{\delta_0^\gamma, \delta_0^{\gamma'}} \times R_{\delta_1^\gamma, \delta_1^{\gamma'}} \times S_{\delta_2^\gamma, \delta_2^{\gamma'}}. \quad (10.11)$$

Обобщая вышеизложенные рассуждения на любое количество матриц вида

$$M_{(0)} = [M_{(0)\mu_0, \mu'_0}], \quad M_{(1)} = [M_{(1)\mu_1, \mu'_1}], \quad M_{(2)} = [M_{(2)\mu_2, \mu'_2}], \quad \dots,$$

где

$$\begin{aligned}
 0 \leq \mu_0 < m_0 - 1, & \quad 0 \leq \mu_1 < m_1 - 1, & \quad 0 \leq \mu_2 < m_2 - 1, & \quad \dots, \\
 0 \leq \mu'_0 < m'_0 - 1, & \quad 0 \leq \mu'_1 < m'_1 - 1, & \quad 0 \leq \mu'_2 < m'_2 - 1, & \quad \dots,
 \end{aligned}$$

запишем

$$(M_{(0)} \otimes M_{(1)} \otimes M_{(2)} \otimes \dots)_{\gamma, \gamma'} = M_{(0)\delta_0^\gamma, \delta_0^{\gamma'}} \times M_{(1)\delta_1^\gamma, \delta_1^{\gamma'}} \times M_{(2)\delta_2^\gamma, \delta_2^{\gamma'}} \times \dots, \quad (10.12a)$$

где

$$\begin{aligned}
 \gamma &= (\dots, \delta_2^\gamma, \delta_1^\gamma, \delta_0^\gamma.)_{(\dots, m_2, m_1, m_0.)}, \\
 \gamma' &= (\dots, \delta_2^{\gamma'}, \delta_1^{\gamma'}, \delta_0^{\gamma'}.)_{(\dots, m'_2, m'_1, m'_0.)}.
 \end{aligned} \quad (10.12b)$$

Введем для обозначения многократного кронекерова произведения сим-

вол $\bigotimes_{i=0}^{n-1}$; тогда

$$G = \bigotimes_{i=0}^{n-1} M_{(i)} \Leftrightarrow G_{\gamma, \gamma'} = \prod_{i=0}^{n-1} M_{(i)\delta_i^\gamma, \delta_i^{\gamma'}}. \quad (10.13)$$

Напомним еще раз, что δ_i^γ — это i -я цифра числа γ по основанию $(m_{n-1}, \dots, m_i, \dots, m_2, m_1, m_0.)$, а $\delta_i^{\gamma'}$ — i -я цифра числа γ' по основанию $(m'_{n-1}, \dots, m'_i, \dots, m'_2, m'_1, m'_0.)$.

Порядок матрицы

Запишем в качестве определения: $M^{(1)} = M$, $M^{(2)} = M \otimes M$, $M^{(3)} = M \otimes M \otimes M$ и т. д. Иными словами, каждый последующий шаблон тождествен первоначальной заправке. В силу ассоциативности кронекерова произведения справедливо следующее утверждение:

$$\begin{aligned} M^{(3)} &= M \otimes M \otimes M = (M \otimes M) \otimes M = M \otimes (M \otimes M) = \\ &= M^{(2)} \otimes M = M \otimes M^{(2)}. \end{aligned}$$

Это утверждение можно легко обобщить в виде

$$M^{(a)} \otimes M^{(b)} = M^{(b)} \otimes M^{(a)} = M^{(a+b)}, \quad a, b = 0, 1, 2, \dots \quad (10.14)$$

и, в частности,

$$M^{(n+1)} = M^{(n)} \otimes M = M \otimes M^{(n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (10.15)$$

Положим $M^{(0)} = U = [1]$, что согласуется с равенством (10.14), и будем называть матрицу U *единичной*.

С учетом вышеизложенных соображений, равенство (10.13) принимает вид

$$M_{\gamma, \gamma'}^{(n)} = \prod_{i=0}^{n-1} M_{\delta_i^\gamma, \delta_i^{\gamma'}}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (10.16)$$

где

$$\delta_i^\gamma = (\delta_i^\gamma)_m, \quad \delta_i^{\gamma'} = (\delta_i^{\gamma'})_{m'}. \quad (10.17)$$

Матрицу $M^{(n)}$ будем называть матрицей M порядка n в отношении кронекерова умножения. На рис. X.4 даны примеры матриц первого и второго порядка.

Коммутативность кронекерова произведения

Для рассмотрения свойства коммутативности в применении к кронекерову произведению обратите внимание на рис. X.5а–X.5с, где даны матрицы M и R и их произведения $G = M \otimes R$ и $H = R \otimes M$. Читатель без труда поймет, почему элементы обеих матриц произведений тождественны, хотя и иначе расположены. Для этих матриц $m = 3$, $r = 3$, $m' = 3$, $r' = 2$, поэтому для всех значений μ, μ', ρ, ρ' в пределах соответствующих диапазонов имеем

$$G_{\mu+3\rho, \mu'+3\rho'} = H_{\rho+3\mu, \rho'+2\mu'} = M_{\mu, \mu'} \times R_{\rho, \rho'}.$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \mu' \\ \mu \end{array} \begin{array}{c} 0 \quad 1 \\ \left[\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{array} \right] \end{array} \\
 M
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \gamma \quad \delta_1^\gamma \quad \delta_0^\gamma \\
 \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} \quad \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{array} \quad \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \gamma' \rightarrow 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \\
 \delta_1^{\gamma'} \rightarrow 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \\
 \delta_0^{\gamma'} \rightarrow 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \\
 \left[\begin{array}{cccc} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 9 \\ -1 & 1 & \textcircled{-3} & 3 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right] \\
 M^{(2)}
 \end{array}$$

Рис. X.4. Матрицы первого и второго порядка.

$$\begin{array}{c}
 \mu_1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \\
 \mu_0 \quad \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{array} \right] \\
 \rho_1 \quad 0 \quad 1 \\
 \rho_0 \quad \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Рис. X.5а. Матрицы M и R .

$$\begin{array}{c}
 \gamma' \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \\
 \rho_1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\
 \mu_1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 0 \quad 1 \quad 2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \gamma \quad \rho_0 \quad \mu_0 \\
 \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} \quad \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{array} \quad \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 8 & 3 & 6 & 12 \\ 2 & 6 & \textcircled{18} & 3 & 9 & 27 \\ \hline -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & -8 & 1 & 2 & 4 \\ -2 & -6 & -18 & 1 & 3 & 9 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Рис. X.5b. Произведение $G = M \otimes R$.

			γ'	0	1	2	3	4	5
			μ_1	0	0	0	1	1	1
			ρ_1	0	1	2	0	1	2
η	μ_0	ρ_0							
0	0	0	[1 0 0 0 0 0]						
1	0	1	[2 3 0 0 0 0]						
2	0	2	[-2 1 0 0 0 0]						
3	1	0	[-1 0 2 0 4 0]						
4	1	1	[2 3 4 6 8 12]						
5	1	2	[-2 1 -4 2 -8 4]						
6	2	0	[-1 0 3 0 9 0]						
7	2	1	[2 3 6 9 18 27]						
8	2	2	[-2 1 -6 3 -18 9]						

Рис. X.5с. Произведение $H = R \otimes M$.

Если выбрать $\mu = 2$, $\mu' = 2$, $\rho = 1$, $\rho' = 2$, то получим

$$G_{2+3 \times 1, 2+3 \times 0} = H_{1+3 \times 2, 0+2 \times 2} = M_{2,2} \times R_{1,0},$$

$$G_{5,2} = H_{7,4} = 9 \times 2 = 18.$$

Элементы $G_{5,2}$ и $H_{7,4}$ в соответствующих матрицах на рисунках выделены кружками.

Таким образом, кронекерово произведение двух матриц в общем случае некоммутативно, так как расположение элементов получаемой в результате матрицы зависит от порядка, в котором производилось умножение. Мы, однако, знаем (10.14), что

$$M^{(a)} \otimes M^{(b)} = M^{(b)} \otimes M^{(a)} = M^{(a+b)}, \quad a, b = 0, 1, 2, \dots$$

Данное равенство описывает единственный случай, где кронекерово произведение коммутативно. (Очевидно, что коммутативность кронекерова произведения любой матрицы на единичную матрицу является частным случаем вышеприведенного правила, где либо a , либо b равно нулю.)

Векторы

Вектор — это одномерная матрица, как показано в нижеследующих примерах:

Примеры.

- 1) $[1 \ 3 \ 2 \ 5] \otimes [3 \ 4 \ 2] = [3 \ 9 \ 6 \ 15 \mid 4 \ 12 \ 8 \ 20 \mid 2 \ 6 \ 4 \ 10]$
- 2) $[3 \ 4 \ 2] \otimes [1 \ 3 \ 2 \ 5] = [3 \ 4 \ 2 \mid 9 \ 12 \ 6 \mid 6 \ 8 \ 4 \mid 15 \ 20 \ 10]$

3) Нижняя строка матрицы на рис. X.5b:

$$[1 \ 3 \ 9] \otimes [-2 \ 1] = [-2 \ -6 \ -18 \mid 1 \ 3 \ 9]$$

4) Нижняя строка матрицы на рис. X.5c:

$$[-2 \ 1] \otimes [1 \ 3 \ 9] = [-2 \ 1 \mid -6 \ 3 \mid -18 \ 9]$$

5)

$$\vec{V} = [2 \ 1 \ 3],$$

$$\vec{V}^{(2)} = [4 \ 2 \ 6 \mid 2 \ 1 \ 3 \mid 6 \ 3 \ 9],$$

$$\vec{V}^{(3)} = [8 \ 4 \ 12 \ 4 \ 2 \ 6 \ 12 \ 6 \ 18 \mid 4 \ 2 \ 6 \ 2 \ 1 \ 3 \ 6 \ 3 \ 9 \mid 12 \ 6 \ 18 \ 6 \ 3 \ 9 \ 18 \ 9 \ 27].$$

В двумерном пространстве вектор можно рассматривать как матрицу, состоящую либо из одной строки, либо из одного столбца, и в этом случае возможна, например, следующая ситуация:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 5 \\ M \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ R \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 5 \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 9 & 12 & 6 \\ 6 & 8 & 4 \\ 15 & 20 & 10 \end{bmatrix}.$$

Здесь $m' = 1$ (т.е. $\mu' = 0$) и $r = 1$ (т.е. $\rho = 0$). Значит, для любой пары (γ, γ') , где $0 \leq \gamma \leq m - 1$, $0 \leq \gamma' \leq r' - 1$, справедливы равенства

$$\begin{aligned} (M \otimes R)_{\mu+m\rho, \mu'+m'\rho'} &= (M \otimes R)_{\mu, \rho'} = M_{\mu, 0} \times R_{0, \rho'}, \\ (R \otimes M)_{\rho+r\mu, \rho'+r'\mu'} &= (R \otimes M)_{\mu, \rho'} = R_{0, \rho'} \times M_{\mu, 0}; \end{aligned}$$

следовательно,

$$(M \otimes R) = (R \otimes M).$$

Таким образом, кронекерово произведение двух векторов коммутативно, если они принадлежат разным измерениям (а также тогда, когда один из векторов есть единичная решетка, что является частным случаем описанной конфигурации).

Фрактальные решетки

Мы говорим, что матрица $M^{(n)}$ порядка $n > 1$ *гномонна*, или *фрактальна*, если ее начальный элемент $M_{0,0}$ равен единице. Позже мы обобщим понятие кронекерова произведения на пространства более высоких размерностей, а также на иные, нежели арифметическое умножение, операторы.

$$\begin{array}{c}
 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 M \\
 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 M^{(2)}
 \end{array}$$

Рис. X.6. Фрактальная матрица $M^{(2)}$.

Пример. Эпитет *фрактальная* применим к матрице $M^{(2)}$, построенной на рис. X.6, в силу демонстрируемого этой матрицей свойства *самоподобия*: матрица M в точности повторяется в левом верхнем углу матрицы $M^{(2)}$. Обобщая, можно сказать, что в данном случае матрица $M^{(n)}$ повторяется в левом верхнем углу матрицы $M^{(n+1)}$ при любом n . Это самоподобие хорошо заметно на рис. X.7. Аналогично, фрактальным называется вектор $\vec{V}^n$ порядка n , если его начальный элемент имеет вид $\vec{V}_0 = 1$.

Пример. Дано:

$$\begin{aligned}
 \vec{V} &= [1 \ 2 \ 3], \\
 \vec{V}^{(2)} &= [1 \ 2 \ 3 \mid 2 \ 4 \ 6 \mid 3 \ 6 \ 9], \\
 \vec{V}^{(3)} &= [1 \ 2 \ 3 \ 2 \ 4 \ 6 \ 3 \ 6 \ 9 \mid 2 \ 4 \ 6 \ 4 \ 8 \ 12 \ 6 \ 12 \ 18 \mid 3 \ 6 \ 9 \ 6 \ 12 \ 18 \ 9 \ 18 \ 27].
 \end{aligned}$$

Из определения гномонной матрицы $M^{(n)}$, где $n > 1$, следует, что

$$M_{\mu, \mu'}^{(n)} = M_{\mu, \mu'} \quad \text{при} \quad M_{0,0} = 1. \quad (10.18)$$

Таким образом, пишем

$$M_{\gamma, \gamma'}^{(n)} = \prod_{i=0}^{n-1} M_{\delta_i^\gamma, \delta_i^{\gamma'}}^{(n)}. \quad (10.19)$$

Отсюда можно вывести следующее определение фрактальной, или гномонной, матрицы: матрица $F = [F_{\gamma, \gamma'}]$ фрактальна, или гномонна, тогда и только тогда, когда существует пара таких целых чисел m, m' , что для каждого

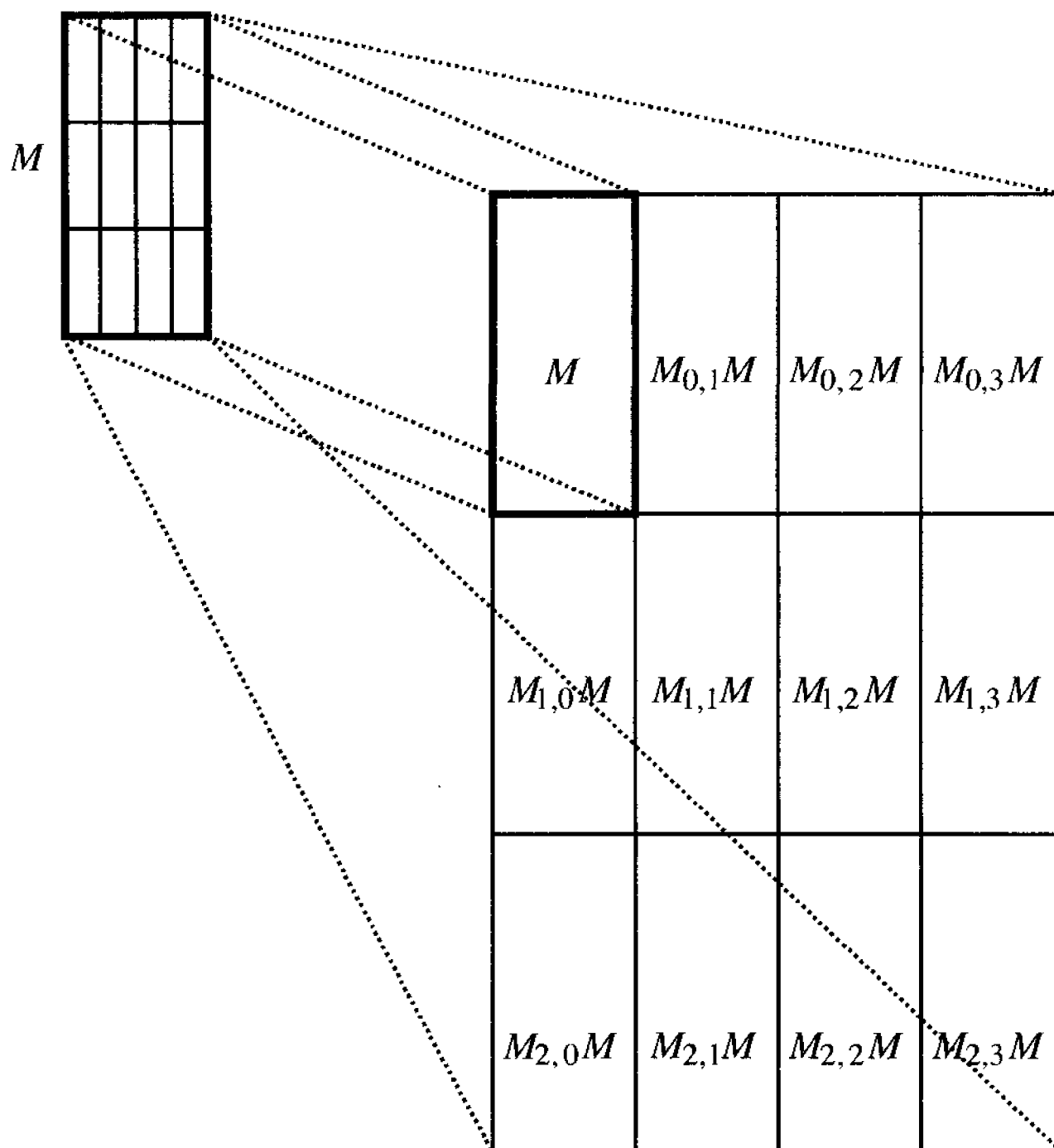


Рис. X.7. Самоподобие фрактальной матрицы.

элемента $F_{\gamma, \gamma'}$ справедливо равенство

$$F_{\gamma, \gamma'} = \prod_i F_{\delta_i^\gamma, \delta_i^{\gamma'}}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (10.20a)$$

где

$$\gamma = (\dots, \delta_i^\gamma, \dots, \delta_2^\gamma, \delta_1^\gamma, \delta_0^\gamma)_m, \quad \gamma' = (\dots, \delta_i^{\gamma'}, \dots, \delta_2^{\gamma'}, \delta_1^{\gamma'}, \delta_0^{\gamma'})'_m. \quad (10.20b)$$

Отсутствие верхнего предела над символом многократного произведения указывает на то, что диапазон произведения охватывает все значащие цифры чисел γ и γ' .

Модель роста матрицы при увеличении ее порядка напоминает о некоторых формах растительной и животной жизни, и просто невозможно удержаться и не процитировать еще раз д'Арси Томпсона: «Однако рог или,

скажем, раковина улитки имеют одно любопытное отличие: в каждый момент времени структура этих образований оказывается, так сказать, отчасти стара, а отчасти нова. Структура эта обусловлена последовательным и непрерывным процессом наращивания нового вещества, причем результат каждой последующей стадии роста, начиная с исходной, становится *неотъемлемой и неизменной* частью растущего целого... Слоновьи бивни, зубы бобра, кошачьи когти, ... — все они состоят из вещества, выделенного и отложенного живым организмом, и во всех них однажды сформировавшиеся части остаются живыми, но не способными к изменениям.»

Треугольник Паскаля и теорема Люка

Кстати, о Люка... Мне помнится, он был из великих дилетантов — в том смысле, что, хотя он и был знаком с большей частью высшей математики того времени, он воздерживался от серьезной работы над теми вещами, над которыми тогда было принято работать, посвящая весь свой талант свободной математической игре.

(Эрик Темпл Белл)³

Наибольшую, пожалуй, известность французскому математику Блезу Паскалю принес названный в его честь треугольник, позволяющий легко вычислять число возможных сочетаний b объектов из общего их количества a . Это число, называемое *биномиальным коэффициентом* и обозначаемое $\binom{a}{b}$, равно $a!/b!(a-b)!$, где $a! = a \times (a-1) \times (a-2) \times \dots \times 1$, а $0! = 1$. Этот коэффициент играет центральную роль в теореме Ньютона о разложении бинома (отсюда и его название):

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^nb^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{i}a^{n-i}b^i + \\ + \dots + \binom{n}{n}a^0b^n, \quad \text{или} \quad (a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}a^{n-i}b^i. \quad (10.21)$$

Рисунок X.8а иллюстрирует процесс построения треугольника Паскаля; пустые ячейки матрицы заняты нулями.

Эдуар Люка (1842–1891), еще один французский математик, является автором огромного количества теорем в теории чисел. Он внес значительный вклад в изучение чисел Фибоначчи (кстати, именно он так окрестил этот знаменитый ряд чисел), которые он активно использовал для доказательства того, что тридцатидевятизначное число $2^{127} - 1$ является простым.

³*The World of Mathematics*, ed. James R. Newman (New York: Simon & Schuster, 1956), p. 504.

		b							
		0	1	2	3	4	5	6	7
	0	1							
	1	1	2	1					
	2	1	3	3	1				
a	3	1	4	6	4	1			
	4	1	5	10	10	5	1		
	5	1	6	15	20	15	6	1	
	6	1	7	21	35	35	21	7	1
	...								

$\textcircled{A} \rightarrow \textcircled{B}$
 $A+B=C$
 $\downarrow$
 $\textcircled{C}$

Рис. X.8a. Треугольник Паскаля и его построение.

1															
1	1														
1		1													
1	1	1	1												
1				1											
1	1			1	1										
1		1		1		1									
1	1	1	1	1	1	1	1								
1								1							
1	1							1	1						
1		1						1		1					
1	1	1	1					1	1	1	1				
1				1				1				1			
1	1			1	1			1	1			1	1		
1		1		1		1		1		1		1		1	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Рис. X.8b. $p = 2$.

В 1893 году⁴ было опубликовано его собрание математических развлечений «Récréations mathématiques»⁵. Люка принадлежит и одна очень изящная, но мало известная теорема, согласно которой при записи биномиального коэффициента $\binom{\gamma}{\gamma'}$ по основанию p , где p — простое число, справедливо

⁴Эрик Белл пишет в «Мире математики» («The World of Mathematics»): «Труд Люка «Théorie des nombres, première partie» («Теория чисел, часть первая» (фр.). — Прим. перев.) (1891; продолжения, к сожалению, не последовало) — замечательная книга для любителей математики и специалистов в теории чисел, не слишком приверженных академическим канонам. Думаю, следует собрать все его разрозненные работы, а также разыскать и изучить неопубликованные рукописи» (с. 504).

⁵«Математические развлечения» (фр.). — Прим. перев.

1								
1	1							
1	2	1						
1			1					
1	1		1	1				
1	2	1	1	2	1			
1			2			1		
1	1		2	2		1	1	
1	2	1	2	1	2	1	2	1

Рис. X.8с. $p = 3$.

1														
1	1													
1	2	1												
1	3	3	1											
1	4	1	4	1										
1					1									
1	1				1	1								
1	2	1			1	2	1							
1	3	3	1		1	3	3	1						
1	4	1	4	1	1	4	1	4	1					
1					2					1				
1	1				2	2				1	1			
1	2	1			2	4	2			1	2	1		
1	3	3	1		1	3	3	1		1	3	3	1	
1	4	1	4	1	2	3	2	3	2	1	4	1	4	1

Рис. X.8d. $p = 5$.

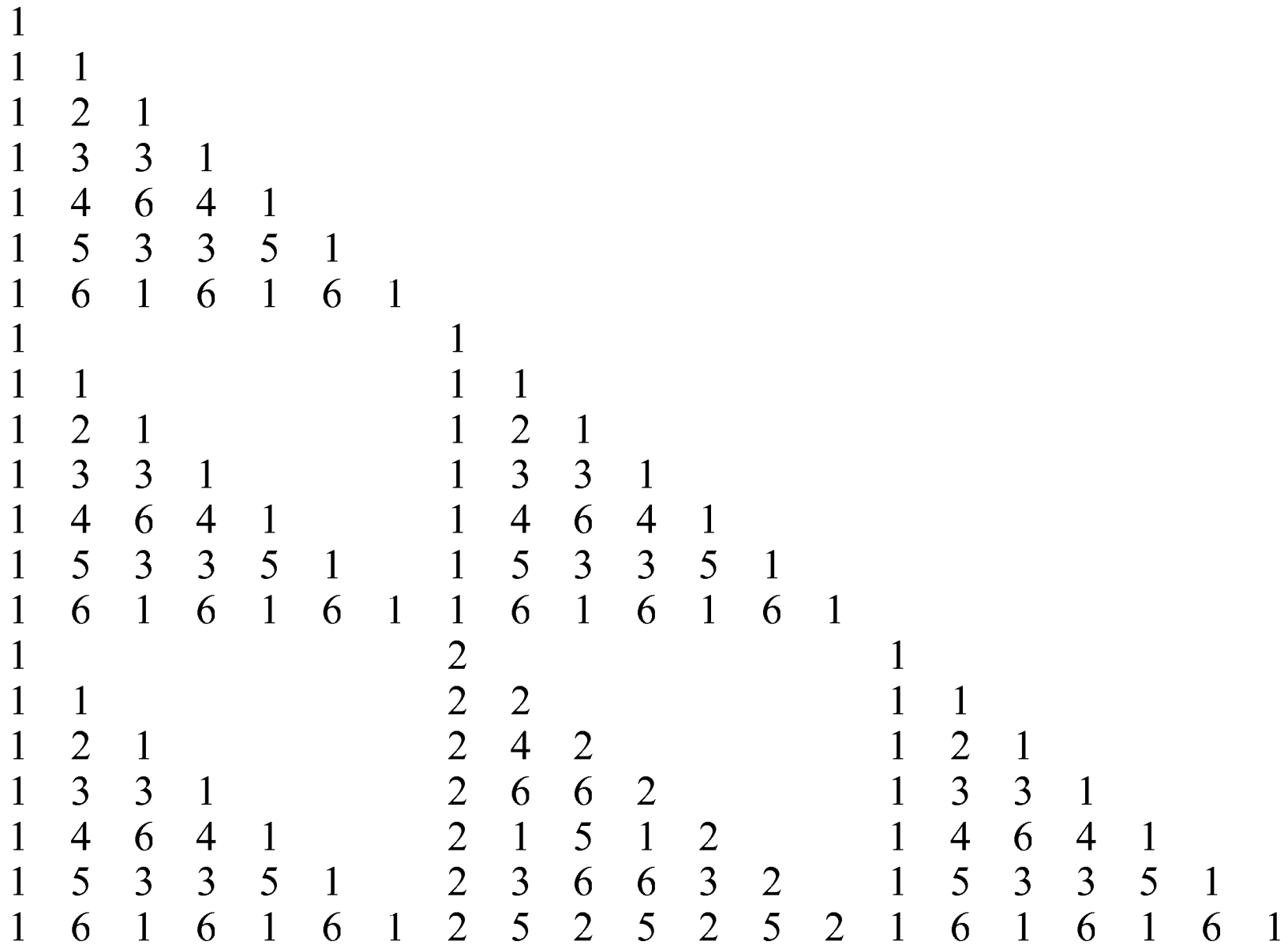
следующее тождество:

$$\binom{\gamma}{\gamma'} \equiv \prod_i \binom{\delta_i^\gamma}{\delta_i^{\gamma'}} \pmod{p}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (10.22a)$$

$$\text{где } \delta_i^\gamma = (\delta_i^\gamma)_p, \quad \delta_i^{\gamma'} = (\delta_i^{\gamma'})_p.$$

Если рассматривать таблицу биномиальных коэффициентов $\binom{\gamma}{\gamma'}$ как квадратную матрицу $P = [p_{\gamma, \gamma'}]$, то тождество (10.22a) принимает вид:

$$P_{\gamma, \gamma'} \equiv \prod_i P_{\delta_i^\gamma, \delta_i^{\gamma'}} \pmod{p}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (10.22b)$$


 Рис. X.8e. $p = 7$.

свидетельствуя о том, что $(P \bmod p)$ есть фрактальная матрица. На рис. X.8b–X.8e представлены четыре примера, иллюстрирующие эту теорему (при $p = 2, 3, 5, 7$). Если через P_q обозначить верхний левый угол матрицы P , содержащий q строк и q столбцов, а через $P_q^{(n)}$ — эту же матрицу в n -й степени, то рисунки имеют следующий смысл:

Рис. X.8b: $P_{16}^{(1)} \equiv P_4^{(2)} \equiv P_2^{(4)} \pmod{2}$,

Рис. X.8c: $P_9^{(1)} \equiv P_3^{(2)} \pmod{3}$,

Рис. X.8d — фрагмент матрицы $P_5^{(n)} \pmod{5}$,

Рис. X.8e — фрагмент матрицы $P_7^{(n)} \pmod{7}$.

То есть теорему Люка можно переформулировать в терминах кронекеровых произведений следующим образом:

$$P_{p^a}^{(b)} \equiv P_{p^c}^{(d)} \pmod{p}, \text{ где } ab = cd, \ a, b, c, d = 0, 1, 2, \dots \quad (10.22c)$$

и, в частности,

$$P_p^{(n)} \equiv P_{p^n} \pmod{p}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (10.22d)$$

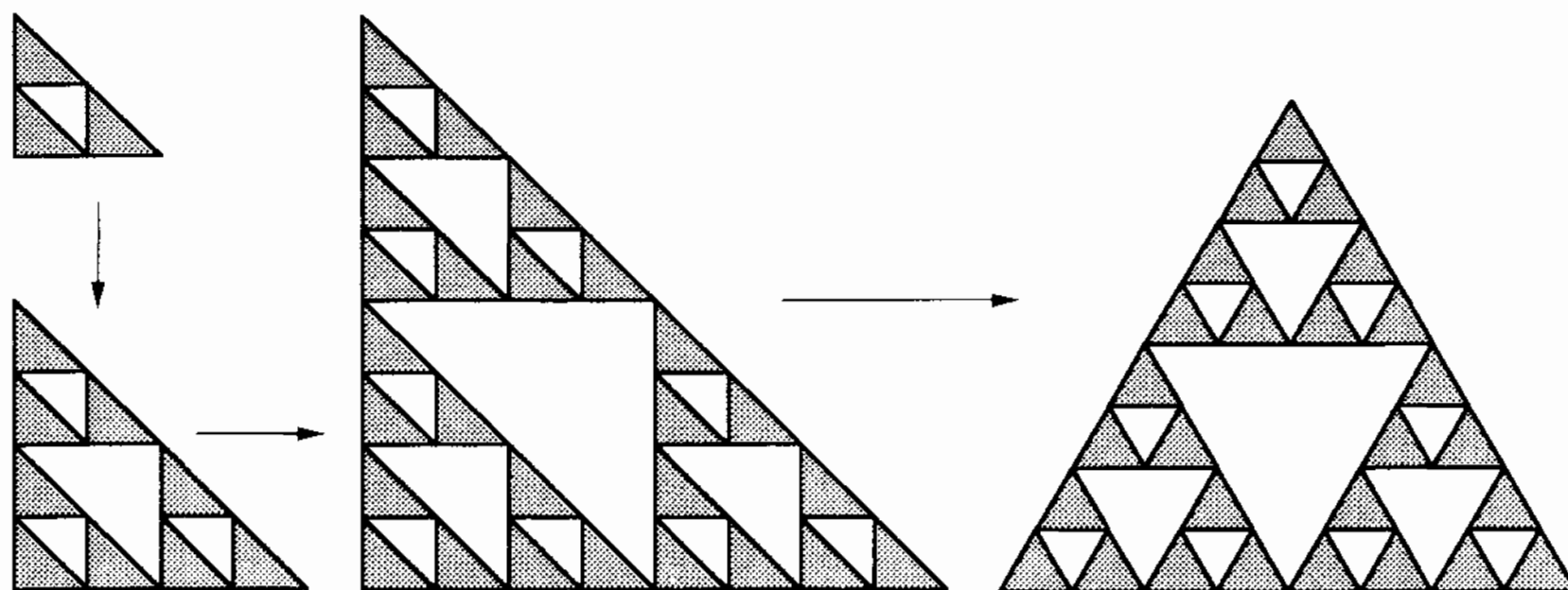


Рис. X.9. Треугольник Паскаля по модулю 2.

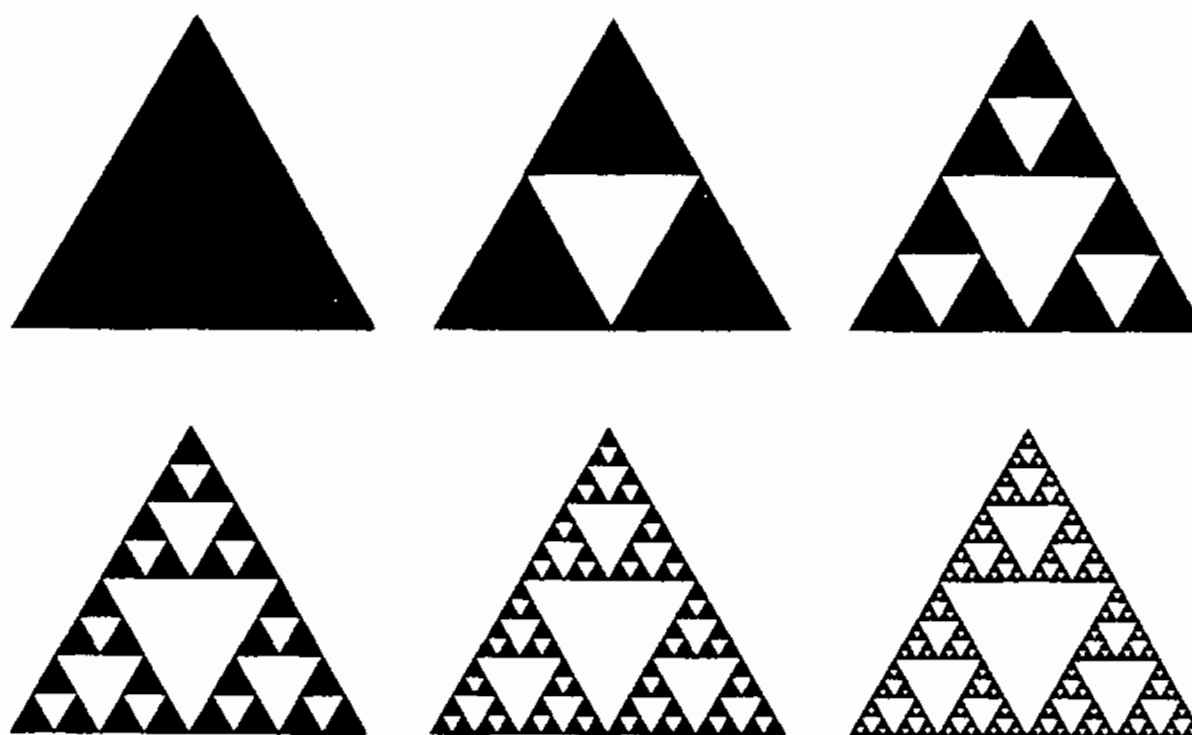


Рис. X.10. Геометрическое построение салфетки Серпинского посредством последовательного деления треугольника.

Салфетка и ковер Серпинского

Фигура, изображенная на рис. X.9, получена из матрицы с рис. X.8b путем замещения цифр треугольниками: единиц — серыми, а нулей — белыми. Затем большой треугольник слегка деформировали, как показано на рисунке, с тем, чтобы он стал симметричен относительно вертикальной оси. Результирующая фигура известна под названием *салфетка Серпинского*. Такую салфетку можно получить и другим способом (см. рис. X.10): последовательным вырезанием из исходного сплошного треугольника все более мелких в соответствии с определенными правилами. На рис. X.11 представлена геометрическая транспозиция матрицы ($P_{27} \bmod 3$).

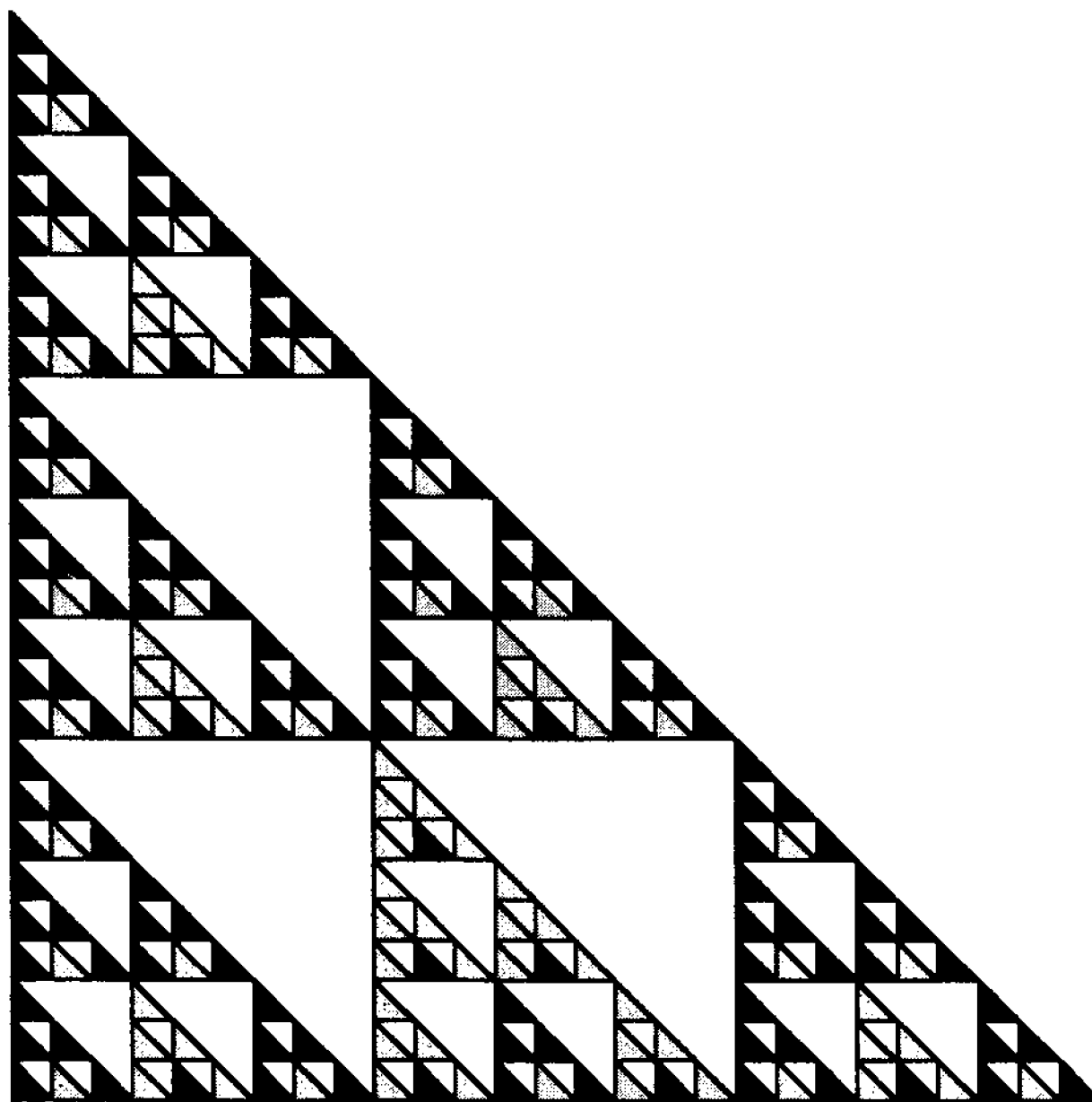


Рис. X.11. Вариант салфетки Серпинского: $P_{27} \pmod{3}$, черные треугольники = 1, серые = 2, белые = 0.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

матрица S

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

матрица $S^{(2)}$

Рис. X.12а. Матрица для ковра Серпинского.

Рис. X.12b демонстрирует еще одну интересную фигуру, придуманную Серпинским. Ее обычно получают путем последовательного вырезания все

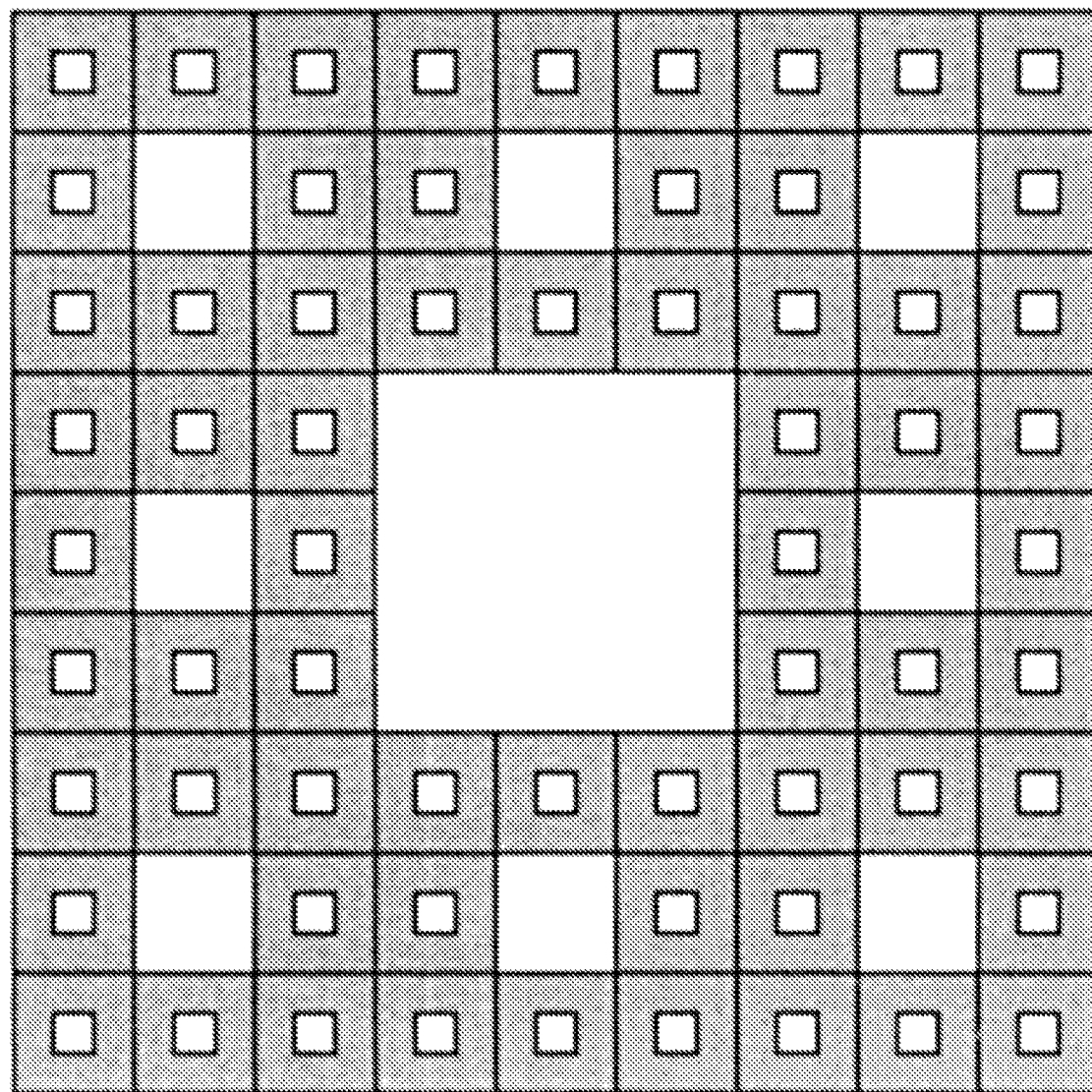


Рис. X.12b. Ковер Серпинского.

уменьшающихся квадратов из исходного большого квадрата. Можно построить такую фигуру и с помощью процедуры кронекерова умножения, начав с матрицы S , показанной на рис. X.12a. Ковер Серпинского (так называется эта фигура) допускает бесконечные вариации и модификации, одну из которых можно видеть на рис. X.13a и X.13b. Еще одна модификация представлена на рис. X.14a и X.14b.

Канторова пыль

Нельзя допустить возможности непрерывного наблюдения. Наблюдение следует рассматривать как дискретную, разрывную совокупность событий. Между этими событиями существуют пустоты, заполнить которые мы не можем. . . . Иногда события выстраиваются в цепочки, создавая иллюзию перманентного процесса, — однако лишь при особых условиях и каждый раз лишь на чрезвычайно краткий промежуток времени.

(Эрвин Шредингер)⁶

Неизмеримо огромный вклад в такую концептуально-сложную отрасль математики (да — по большому счету — и всего человеческого знания в це-

⁶Цит. по Bell, *The World of Mathematics*, p. 1057.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

матрица G

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

матрица $G^{(2)} \pmod{3}$

Рис. X.13а. Матрица для модифицированного ковра Серпинского.

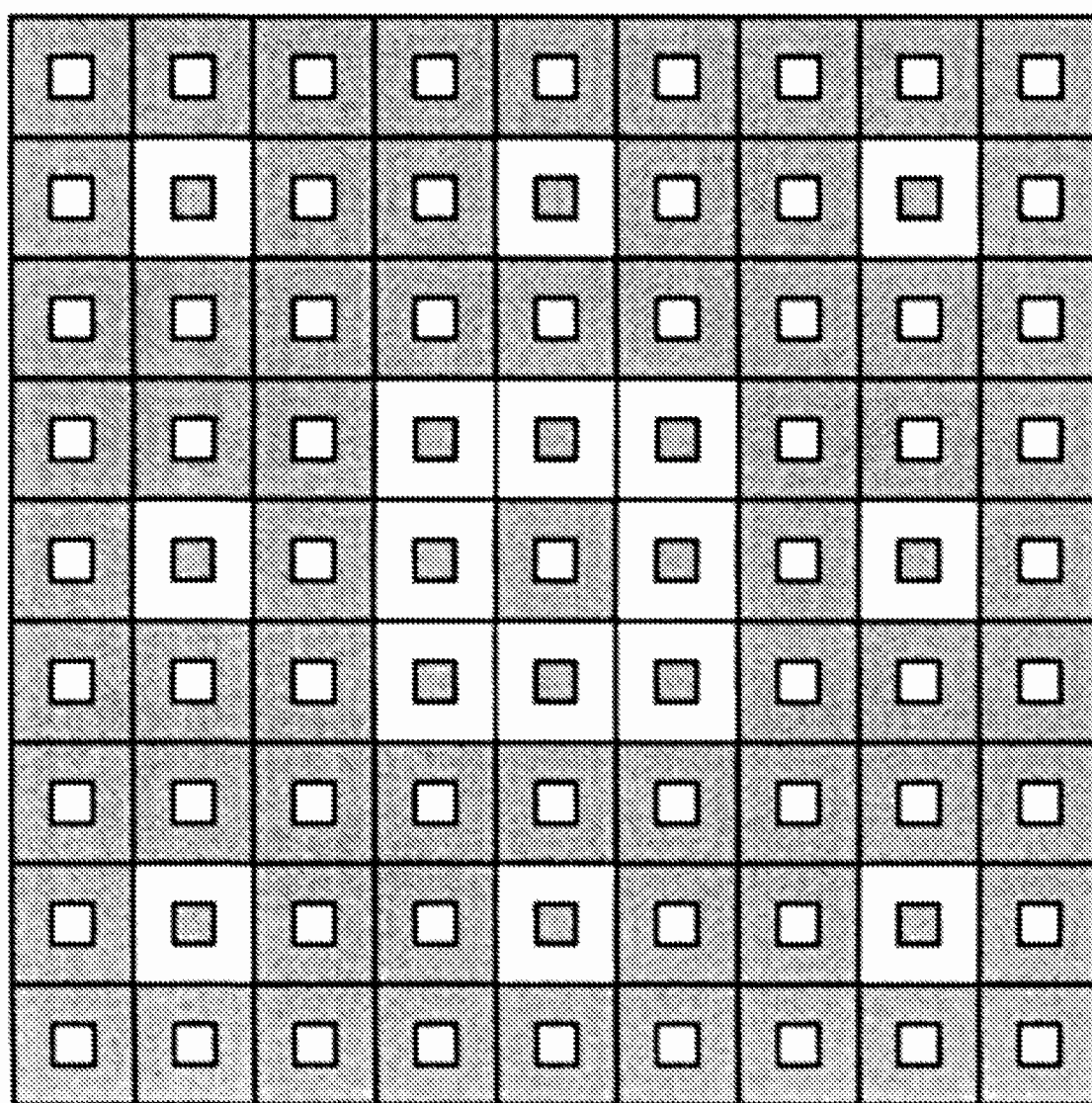


Рис. X.13b. Модифицированный ковер Серпинского.

лом), как исследование бесконечности, внес Георг Кантор. Фигура, введенная Кантором для иллюстрации парадоксов бесконечного и известная под названием *канторова пыль*, строится следующим образом. Начинается построение с отрезка прямой, показанного на рис. X.15а с пометкой «этап 0». Длина этого отрезка принимается равной единице. Он включает в себя свое

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
1	2	2	2	1	1	2	2	2	1	1	2	2	2	1	1	2	2	2	1	1	2	2	2	1
1	2	0	2	1	1	2	0	2	1	1	2	0	2	1	1	2	0	2	1	1	2	0	2	1
1	2	2	2	1	1	2	2	2	1	1	2	2	2	1	1	2	2	2	1	1	2	2	2	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1
1	2	2	2	1	2	1	1	1	2	2	1	1	1	2	2	1	1	1	2	1	2	2	2	1
1	2	0	2	1	2	1	0	1	2	2	1	0	1	2	2	1	0	1	2	1	2	0	2	1
1	2	2	2	1	2	1	1	1	2	2	1	1	1	2	2	1	1	1	2	1	2	2	2	1
1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	0	0	0	0	0	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1
1	2	2	2	1	2	1	1	1	2	0	0	0	0	0	2	1	1	1	2	1	2	2	2	1
1	2	0	2	1	2	1	0	1	2	0	0	0	0	0	2	1	0	1	2	1	2	0	2	1
1	2	2	2	1	2	1	1	1	2	0	0	0	0	0	2	1	1	1	2	1	2	2	2	1
1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	0	0	0	0	0	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1
1	2	2	2	1	2	1	1	1	2	2	1	1	1	2	2	1	1	1	2	1	2	2	2	1
1	2	0	2	1	2	1	0	1	2	2	1	0	1	2	2	1	0	1	2	1	2	0	2	1
1	2	2	2	1	2	1	1	1	2	2	1	1	1	2	2	1	1	1	2	1	2	2	2	1
1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	2	2	1	1	2	2	2	1	1	2	2	2	1	1	2	2	2	1	1	2	2	2	1
1	2	0	2	1	1	2	0	2	1	1	2	0	2	1	1	2	0	2	1	1	2	0	2	1
1	2	2	2	1	1	2	2	2	1	1	2	2	2	1	1	2	2	2	1	1	2	2	2	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Рис. X.14а. Матрицы H (левый верхний угол) и $H^{(2)}$.

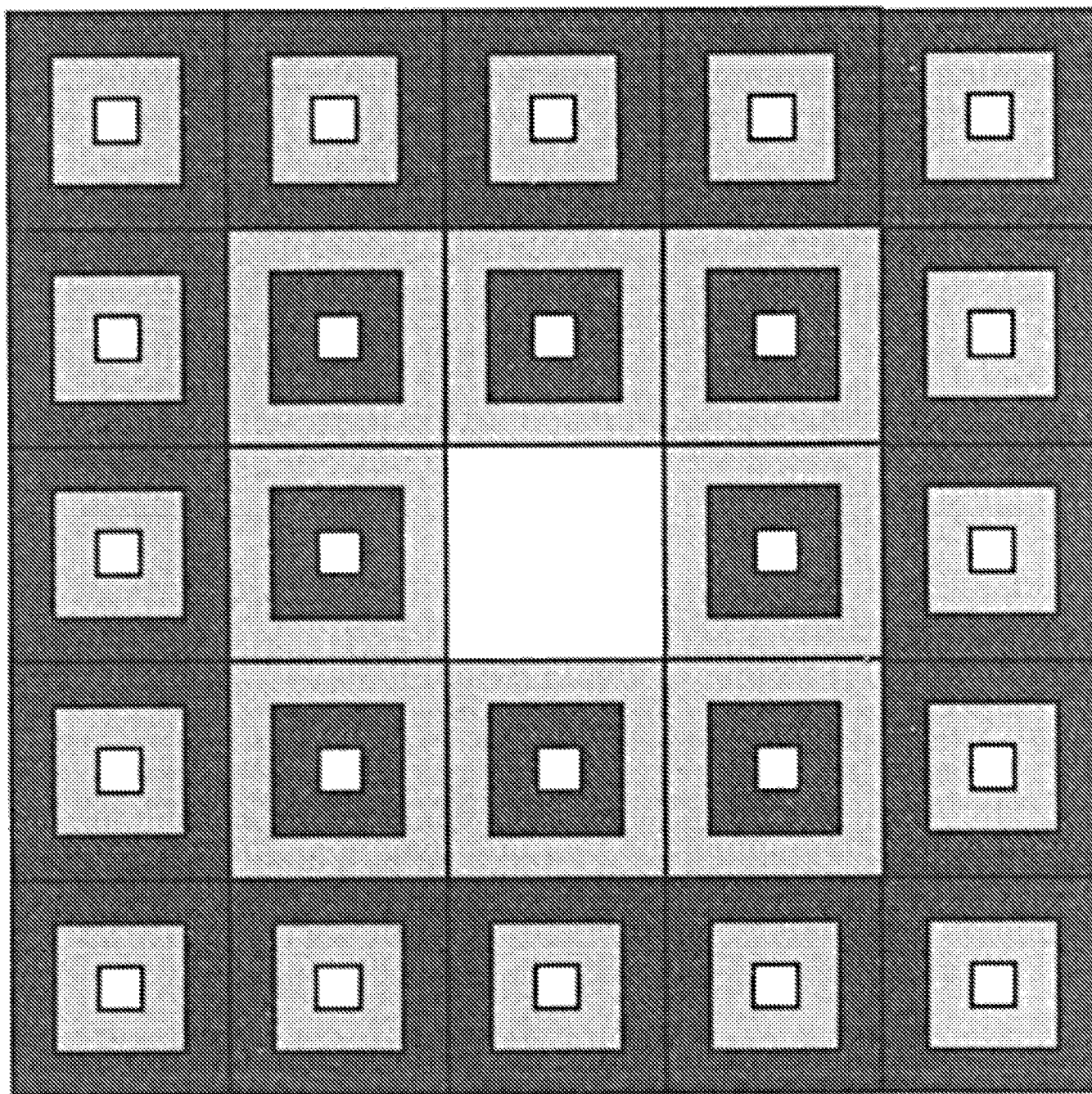


Рис. X.14b. Модифицированный ковер Серпинского; темно-серые квадраты = 1, светло-серые = 2, а белые = 0.

начало 0 и приближается бесконечно близко к отметке 1, однако не достигает ее. Затем удаляется его средняя треть, включающая в себя отметку $1/3$ и приближающаяся бесконечно близко к отметке $2/3$, но не достигающая ее. Результат удаления снабжен на рисунке пометкой «этап 1». На каждом последующем этапе удаляется средняя треть из каждого оставшегося отрезка, причем удаляемая часть включает в себя свою начальную точку, но исключает конечную. На этапе n количество пустот достигает $2^n - 1$ и столько же остается нетронутых конечных точек: точка $2/3$ на первом этапе, точки $2/3$, $2/9$ и $8/9$ на втором этапе, $2/3$, $2/9$, $8/9$, $2/27$, $8/27$, $20/27$ и $26/27$ — на третьем и т. д. Таким образом, получается, что отрезок постепенно теряет свои точки, однако при этом появляется все больше конечных точек.

При продолжении процесса в бесконечность мы получаем бесконечное количество конечных точек, разделенных бесконечным количеством пустот,

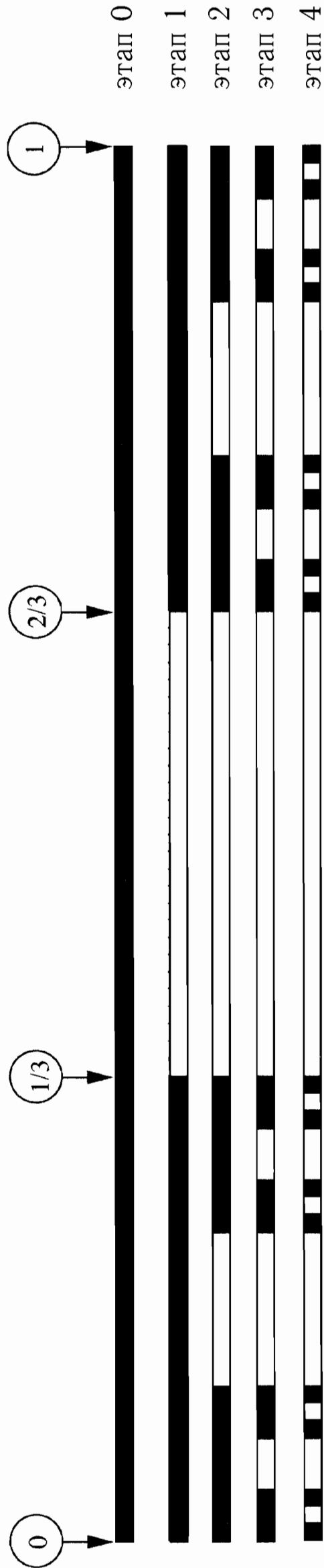


Рис. X.15a. Канторова пыль.

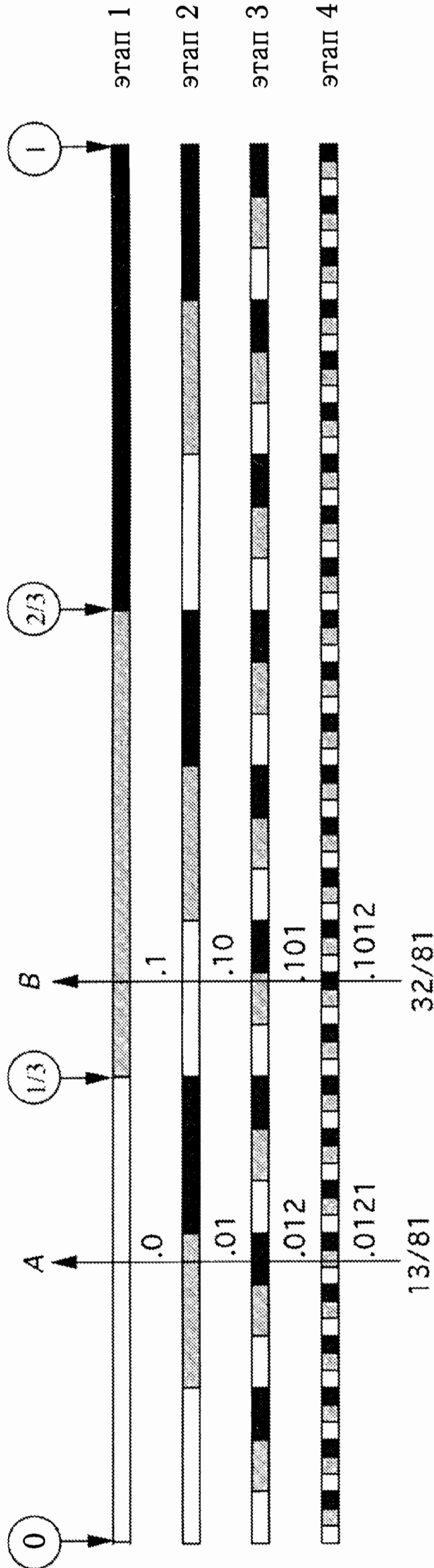


Рис. X.15b. Троичный измерительный стержень.

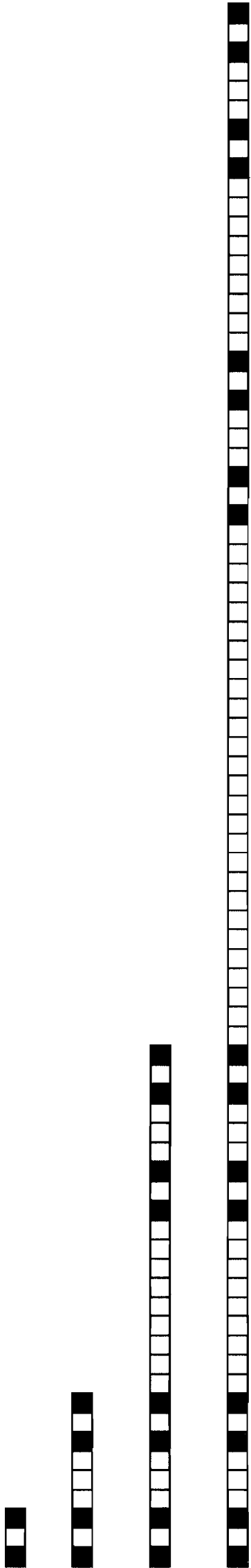


Рис. X.15c. Канторова пыль фрактальна.

γ	:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
$(\delta_0^\gamma)_3:$		0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
$(\delta_1^\gamma)_3:$		0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	1	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2
$(\delta_2^\gamma)_3:$		0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*									*	*		*			*	*		*

Рис. X.15d. Числа γ , не содержащие единиц в своих представлениях по основанию 3.

каждая из которых содержит бесконечно много точек. Более странно, однако, то, что оставшаяся *пыль* имеет ту же мощность, что и континуум; она не является счетной. Для доказательства этого утверждения воспользуемся троичной, или триадической, позиционной системой счисления. На рис. X.15b показано, как можно построить троичный измерительный стержень для измерения расстояний, заключенных в интервале от нуля до единицы, в приращениях вида $1/3^n$, где n — количество этапов построения. Белый цвет соответствует нулю, серый — единице, а черный — двум. С каждым этапом к мантиссе числа добавляется справа новый разряд. На первом этапе можно видеть лишь, что координата A равна нулю или больше него, но меньше $1/3$, а координата B равна или больше $(0, 1.)_3 = 1/3$, но меньше $2/3$. Четвертый этап дает следующие результаты: $(0, 0121.)_3 \leq A < (0, 0122.)_3$ и $(0, 1012.)_3 \leq B < (0, 1020.)_3$. Знаки $\leq$ и $<$ указывают на то, что каждый интервал включает в себя свою начальную точку, но исключает конечную. Применив наш измерительный стержень к канторовой фигуре, мы убедимся, что «пыль» не содержит в себе ни одной точки, в мантиссе координаты которой присутствовала бы цифра 1. Все имеющиеся в наличии мантиссы состоят исключительно из нулей и двоек, причем в любой возможной конфигурации бесконечной длины. Если заменить в них цифру 2 цифрой 1 и рассмотреть полученные конфигурации как мантиссы по основанию 2, то мы обнаружим, что среди них представлены всевозможные числа интервала $[0, 1]$, иными словами, перед нами *континуум*. В оставшейся после всех удалений пыли столько же точек, сколько было в исходном отрезке!

Рассмотрим следующий вектор и его последующие степени:

$$\begin{aligned}\vec{V} &= [1 \quad 0 \quad 1], \\ \vec{V}^{(2)} &= [1 \quad 0 \quad 1 \mid 0 \quad 0 \quad 0 \mid 1 \quad 0 \quad 1], \\ \vec{V}^{(3)} &= [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \mid 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \mid 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1].\end{aligned}$$

На рис. X.15c представлена геометрическая транскрипция этих векторов. Процесс построения порождает канторову пыль и подчеркивает ее фрактальную природу. Кроме того, такой процесс эквивалентен процессу, проиллюстрированному рисунком X.15a, но протекает в обратном направлении (вместо удаления существующих точек на каждом этапе добавляются новые). На рис. X.15d показан аналогичный процесс, заключающийся в написании чисел от 0 до $3^n - 1$ и удалении тех, что содержат в своих представлениях единицу.

Последовательность Туэ–Морса и замощение плоскости

В 1906 году норвежский математик Аксель Туэ представил на суд общественности последовательность, которая была впоследствии названа

$$\begin{aligned}
 \vec{T} &= [1\ 2] \\
 \vec{T}^{(2)} \pmod{3} &= [1\ 2*2\ 1] \\
 \vec{T}^{(3)} \pmod{3} &= [1\ 2\ 2\ 1*2\ 1\ 1\ 2] \\
 \vec{T}^{(4)} \pmod{3} &= [1\ 2\ 2\ 1\ 2, 1\ 1, 2*2\ 1\ 1\ 2\ 1\ 2\ 2\ 1] \\
 \vec{T}^{(5)} \pmod{3} &= [1\ 2\ 2\ 1\ 2\ 1\ 1\ 2\ 2\ 1\ 1\ 2\ 1\ 2\ 2\ 1*2\ 1\ 1\ 2\ 1\ 2\ 2\ 1\ 1\ 2\ 2\ 1\ 2\ 1\ 1\ 2] \\
 \text{Последовательность Т. – М.} &= [0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0*1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1]
 \end{aligned}$$

Рис. X.16а. Последовательность Туэ – Морса фрактальна.

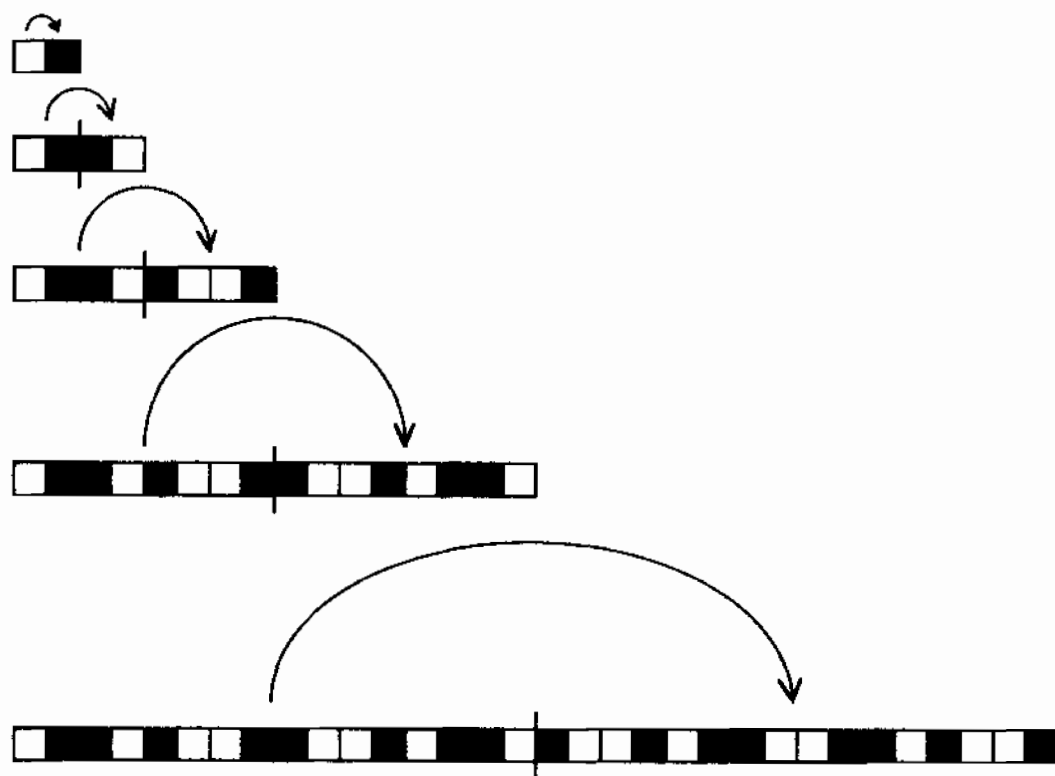


Рис. X.16b. Первые пять этапов построения последовательности Туэ – Морса в геометрической интерпретации; черные квадраты = 1, белые = 0.

последовательностью Туэ – Морса. Процедура построения последовательности представлена на рис. X.16а: на заключительном этапе единицы заменяются нулями, а двойки — единицами; наглядно показан фрактальный характер последовательности. Число, мантисса которого по основанию 2 составлена из цифр бесконечной последовательности Туэ – Морса, *трансцендентно*. Рис. X.16b иллюстрирует геометрический способ построения такой последовательности. Каждая новая последовательность получается посредством добавления к существующему участку его «негатива».

Распространив этот процесс на два перпендикулярных направления, как показано на рис. X.16с, получаем замощение плоскости (рис. X.16d). Несмотря на то, что оно симметрично относительно диагоналей и вообще выглядит довольно регулярным, результатом любого из этапов построения нельзя замостить результат последующего этапа.

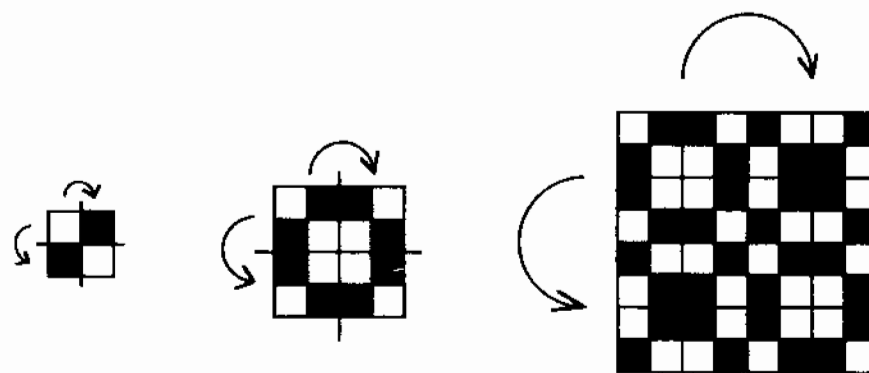


Рис. X.16с. Последовательные поколения замощения.

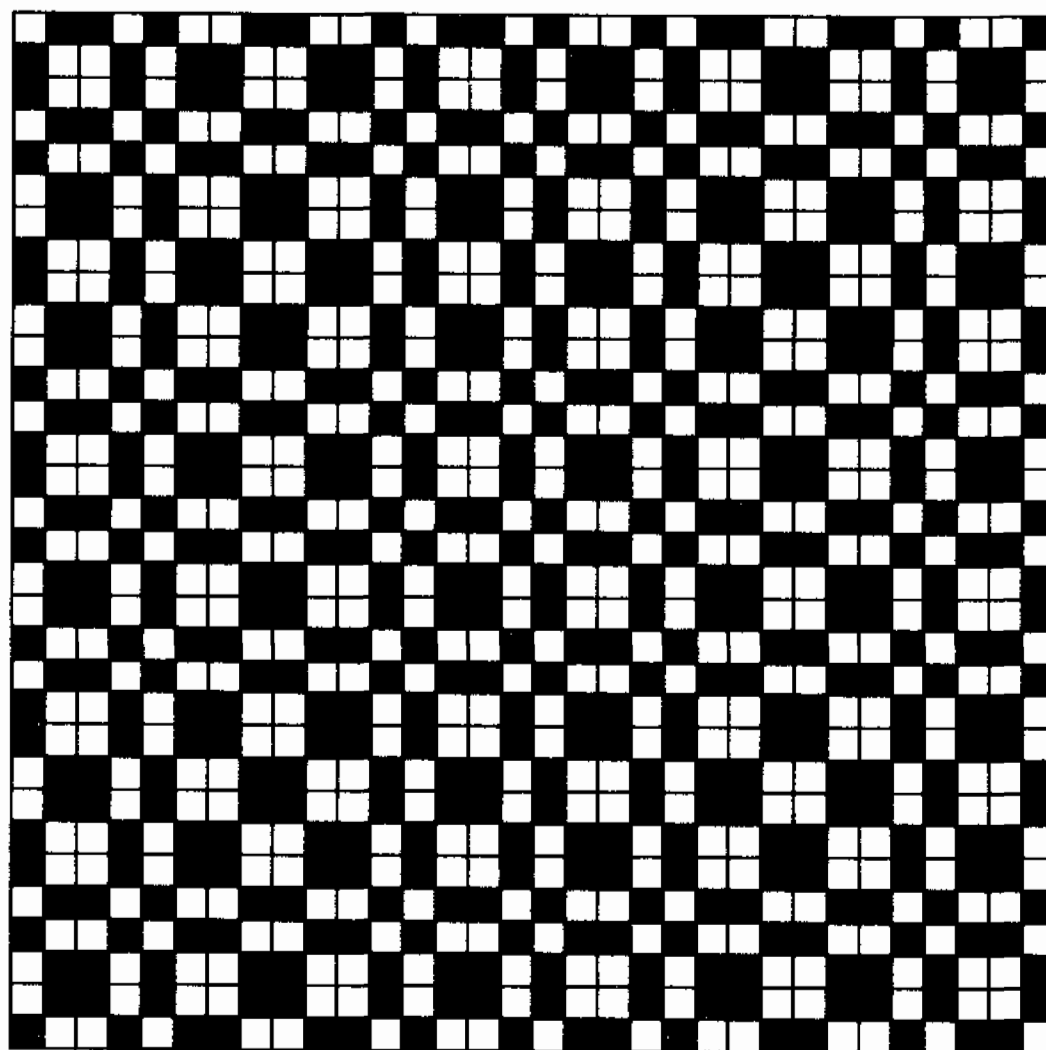
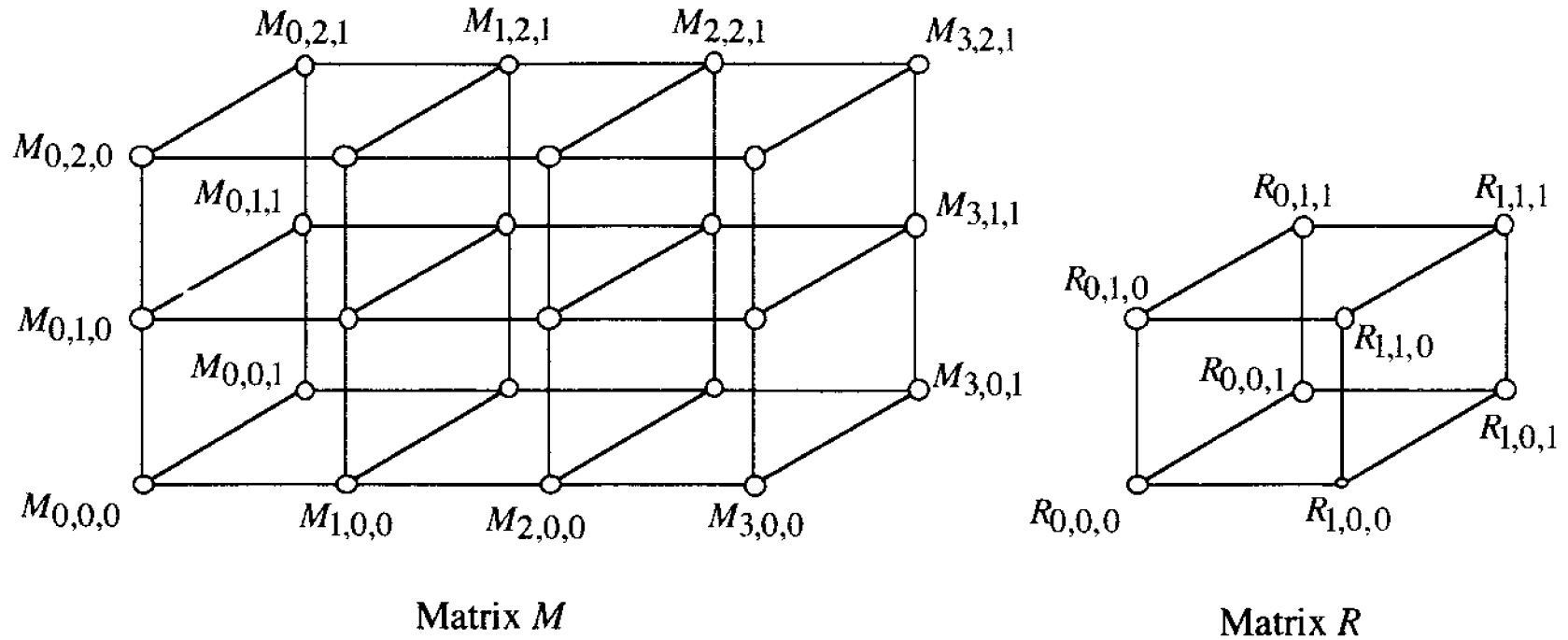


Рис. X.16d. Замощение пятого порядка, порожденное последовательностью Туэ – Морса.

Многомерные решетки

До сих пор мы рассматривали одно- и двумерные решетки, т. е. векторы и матрицы. Мы убедились в том, что кронекерово умножение матрицы и вектора вполне возможно, иными словами, нет необходимости в том, чтобы умножаемые решетки имели одинаковую размерность. При умножении на двумерную матрицу вектор следует рассматривать как одномерную матрицу, состоящую либо из одной строки, либо из одного столбца. Это приме-

Рис. X.17а. Трехмерные матрицы M и R .

нимо и к решеткам любой другой размерности d , вложенным в D -мерное пространство, где $D \leq d$.

Имея это в виду, мы можем обобщить понятие кронекерова произведения на любое количество измерений. Начнем с рис. X.17а, на котором построены две трехмерные матрицы M и R . Индексы μ, μ', μ'' матрицы M и индексы ρ, ρ', ρ'' матрицы R откладываются, соответственно, по осям d, d', d'' (см. схему координатных осей в правом нижнем углу рис. X.17b). На рис. X.17b показано кронекерово произведение $M \otimes R$, элемент которого $G_{\gamma, \gamma', \gamma''}$ задается выражением

$$G_{\gamma, \gamma', \gamma''} = (M \otimes R)_{(\mu+m\rho), (\mu'+m'\rho'), (\mu''+m''\rho'')} = M_{\mu, \mu', \mu''} \times R_{\rho, \rho', \rho''}. \quad (10.23)$$

Увеличение количества решеток (или измерений) приводит к ощутимому увеличению сложности вычисления элементов кронекерова произведения. Ниже предложен табличный метод, проиллюстрированный на примере с вычислением произведения трех четырехмерных решеток, — с его помощью можно организовать процесс и избежать ошибок. Индексы $\gamma, \gamma', \gamma'', \gamma'''$ записываются, как показано, вместе со своими представлениями по соответствующему основанию:

G	S	R	M
γ по основанию $(s, r, m.) =$	σ	ρ	μ
γ' по основанию $(s', r', m'.) =$	σ'	ρ'	μ'
γ'' по основанию $(s'', r'', m''.) =$	σ''	ρ''	μ''
γ''' по основанию $(s''', r''', m'''.) =$	σ'''	ρ'''	μ'''

Индексы множеств M, R и S вычисляются затем в графах с соответствующими символами в порядке возрастания.

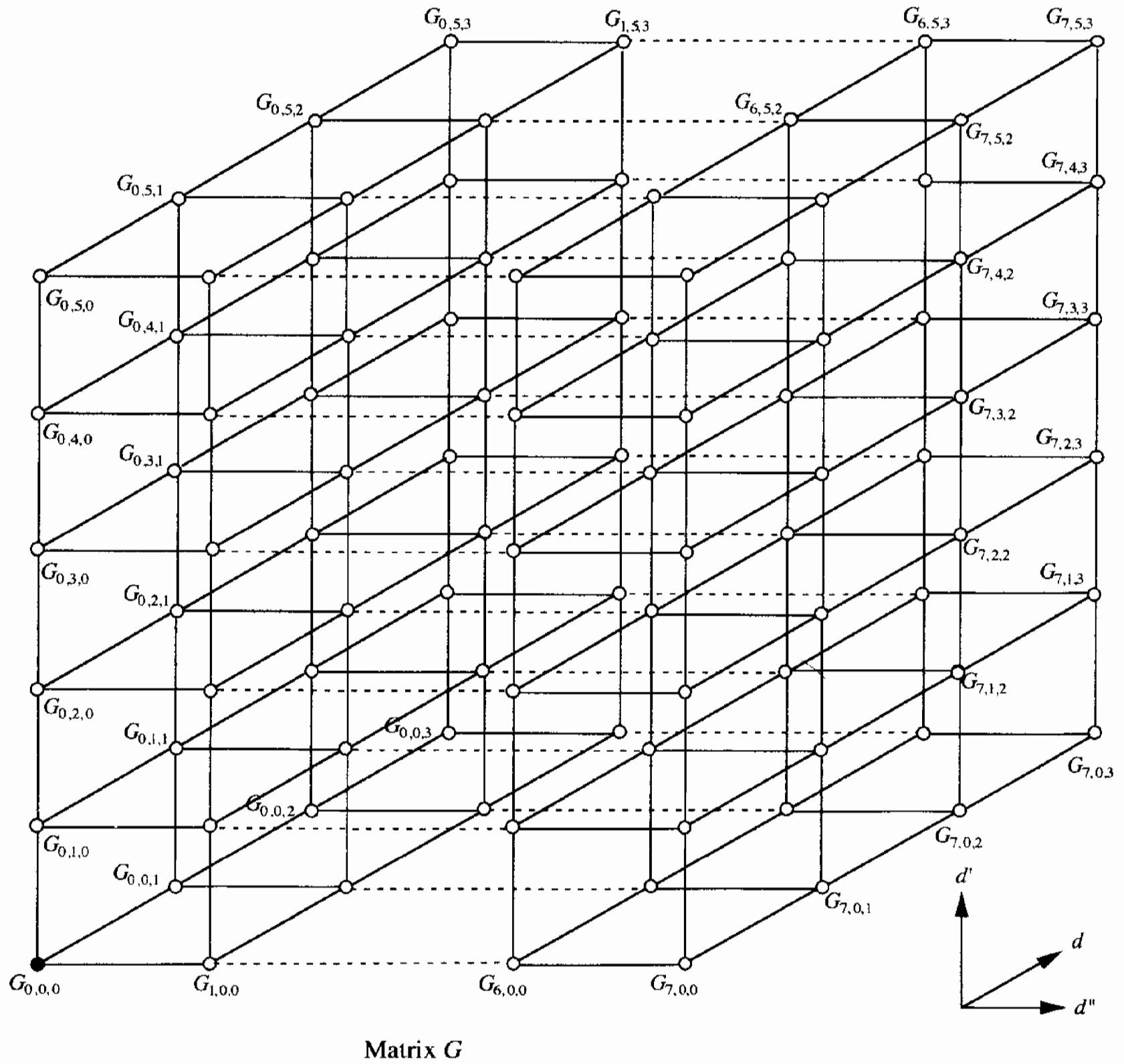


Рис. X.17b. Трехмерное кронекерово произведение $G = M \otimes R$.

Коммутативность и многомерность

Рис. X.18 иллюстрирует коммутативность кронекерова произведения вектора и матрицы в трехмерном пространстве, причем

$$m = m'' = 1, \quad r' = 1, \quad \text{т.е.} \quad \mu = \mu'' = 0, \quad \rho' = 0;$$

следовательно,

$$\begin{aligned} G_{\mu+m\rho, \mu'+m'\rho', \mu''+m''\rho''} &= G_{\rho, \mu', \rho''} = \\ &= (M \otimes R)_{\rho, \mu', \rho''} = (R \otimes M)_{\rho, \mu', \rho''} = M_{0, \mu', 0} R_{\rho, 0, \rho''}. \end{aligned}$$

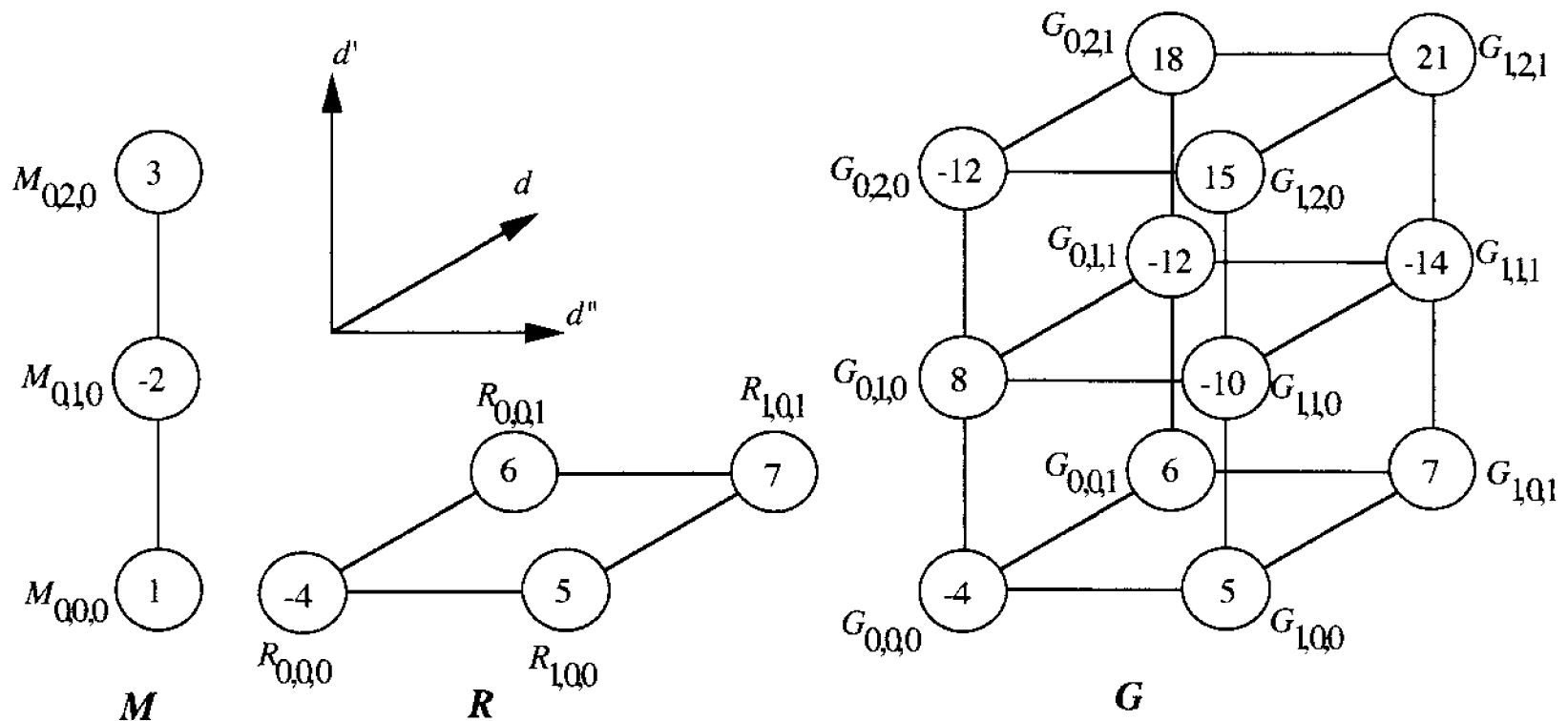


Рис. X.18. Кронекерово произведение матрицы и перпендикулярного ей вектора.

Говоря вообще, кронекерово произведение двух решеток в многомерном пространстве коммутативно тогда и только тогда, когда не существует общего для обоих измерения. В трехмерном пространстве так бывает в случае умножения двух векторов или вектора и матрицы. В четырехмерном пространстве коммутативным может оказаться и произведение двух матриц. Если решеток, произведение которых необходимо найти, больше двух, то общей размерности не должно быть ни у одной пары решеток. Эти правила, очевидно, никак не объясняют коммутативности произведения двух различных степеней одной решетки.

Трехмерная пирамида Серпинского и губка Менгера

Рис. X.19а и цветная вклейка 24b иллюстрируют, в полном соответствии с выражением (10.23), процесс построения трехмерной салфетки Серпинского в форме правильного тетраэдра, пронизанного многочисленными отверстиями. На рис. X.19а показана структура затравки пирамиды, в которой семи из 27 вершин решетки A были присвоены значения 1, остальные вершины содержат нули. Таким образом,

$$A_{0,0,0} = A_{1,0,0} = A_{1,0,1} = A_{2,0,0} = A_{2,0,2} = A_{1,1,0} = A_{2,2,0} = 1.$$

На цветной вклейке представлено построение решетки $A^{(3)}$. На каждом этапе построения (или при каждом увеличении порядка решетки на единицу) пирамида вырастает по одной, тождественной самой себе, пирамиде в каждой из трех своих свободных вершин, помеченных на рис. X.19а черным цветом и соответствующих элементам $A_{\gamma,\gamma',\gamma''} = 1$.

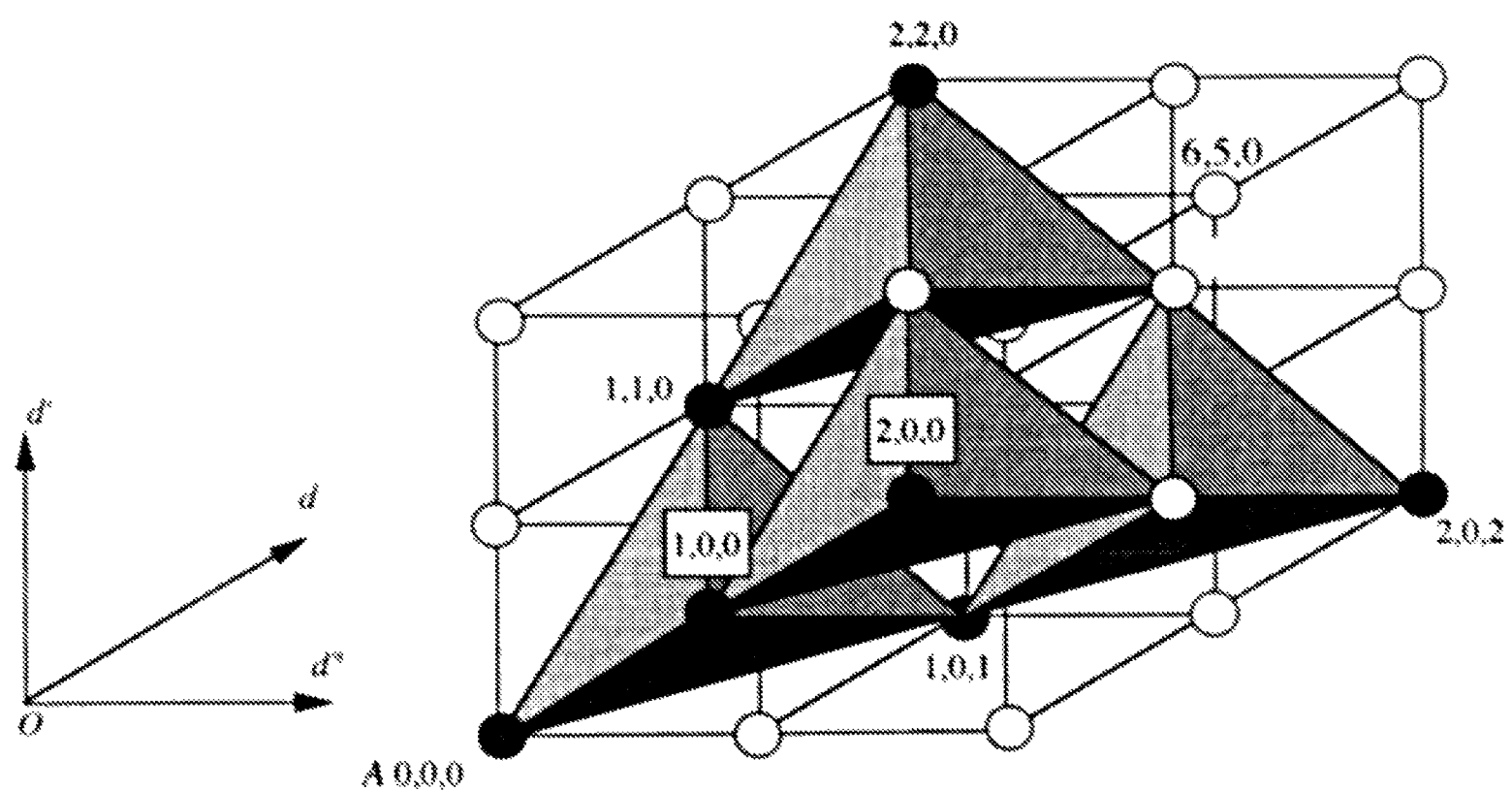


Рис. X.19а. Затравка пирамиды, состоящая из трех тетраэдрических пирамидок.

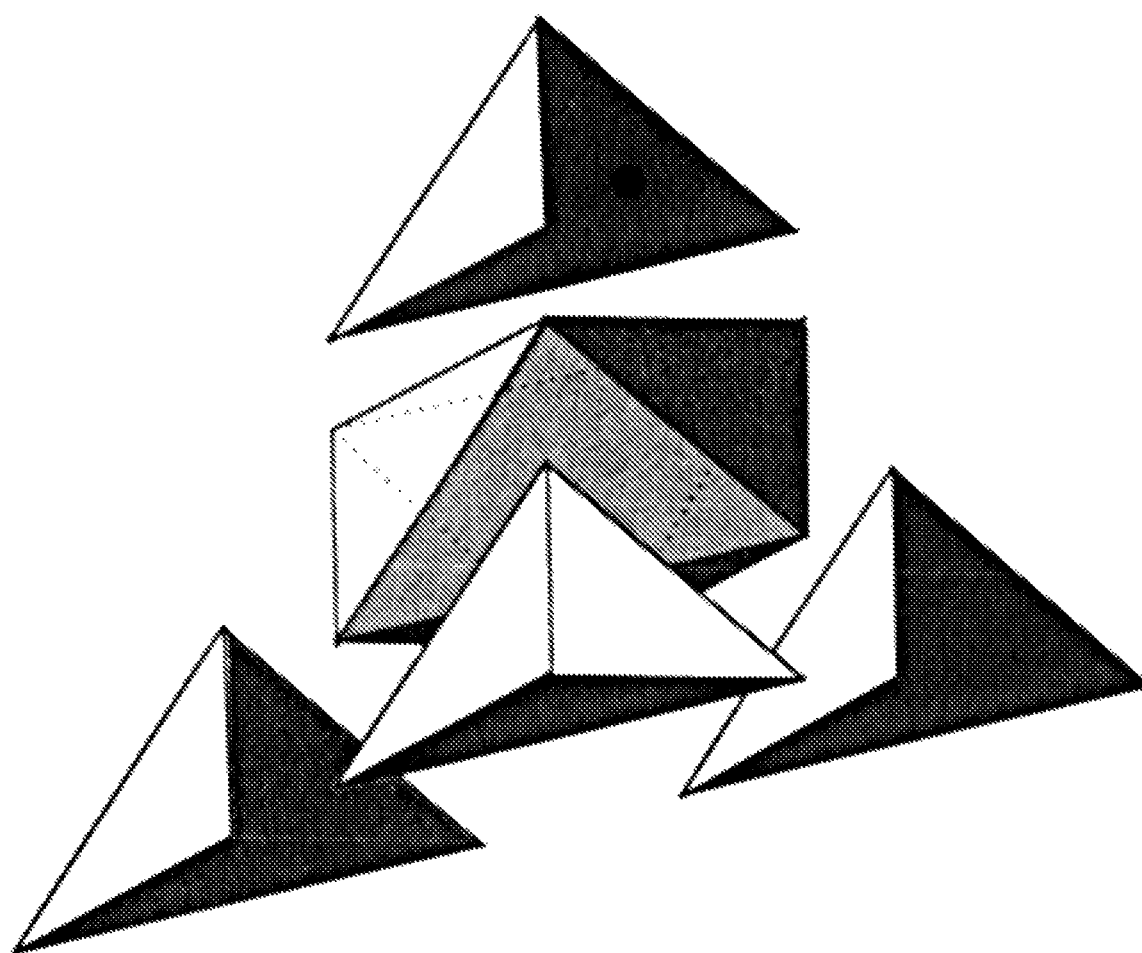


Рис. X.19б. Разобранная пирамида, демонстрирующая свое восьмигранное внутреннее пространство.

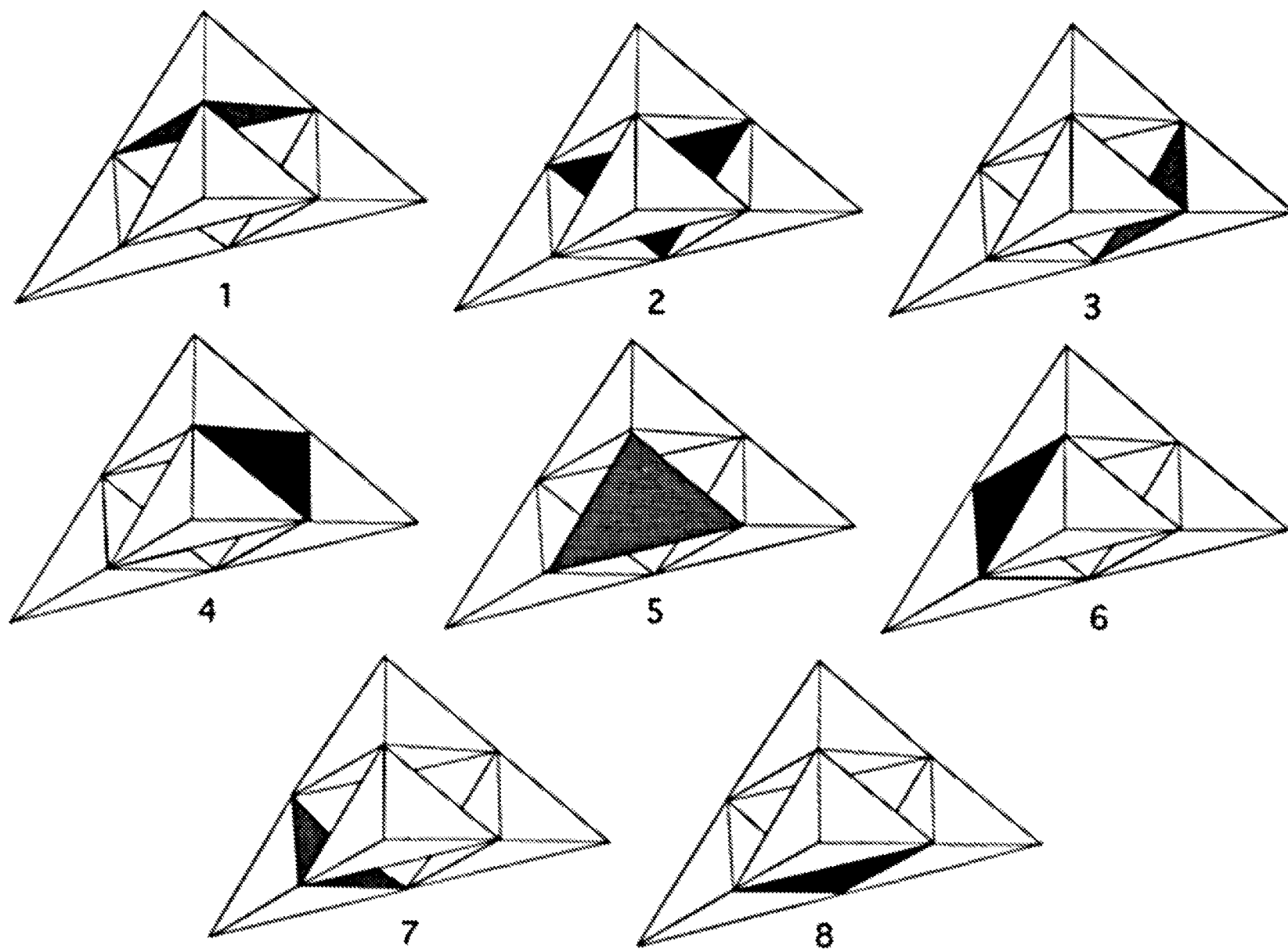


Рис. X.19с. Внутреннее пространство затравки — октаэдр.

Примеры.

	δ_2	δ_1	δ_0
$\gamma = 4$	1	0	0
$\gamma' = 3$	0	1	1
$\gamma'' = 1$	0	0	1

	δ_2	δ_1	δ_0
$\gamma = 7$	1	1	1
$\gamma' = 3$	0	1	1
$\gamma'' = 4$	1	0	0

	δ_2	δ_1	δ_0
$\gamma = 7$	1	1	1
$\gamma' = 4$	1	0	0
$\gamma'' = 3$	0	1	1

$$A_{4,3,1} = A_{0,1,1} \times A_{0,1,0} \times A_{1,0,0} = 0 \times 0 \times 1 = 0,$$

$$A_{7,3,4} = A_{1,1,0} \times A_{1,1,0} \times A_{1,0,1} = 1 \times 1 \times 1 = 1,$$

$$A_{7,4,3} = A_{1,0,1} \times A_{1,0,1} \times A_{1,1,0} = 1 \times 1 \times 1 = 1.$$

Попробуйте представить себе, какую форму имеет пустота внутри фрактальной пирамиды. Внутреннее пространство между пирамидками затравки — восьмигранник, или октаэдр. На рис. X.19b можно видеть изометрическую проекцию «разобранной» пирамиды вместе с вписанным в нее виртуальным октаэдром. Грани этого октаэдра показаны по отдельности на

рис. X.19с. Грани 1, 3, 5 и 7, которые мы можем назвать *сплошными*, принадлежат также пирамидкам затравки, грани же 2, 4, 6 и 8, так сказать, *виртуальны*, поскольку кроме пустоты, там ничего нет.

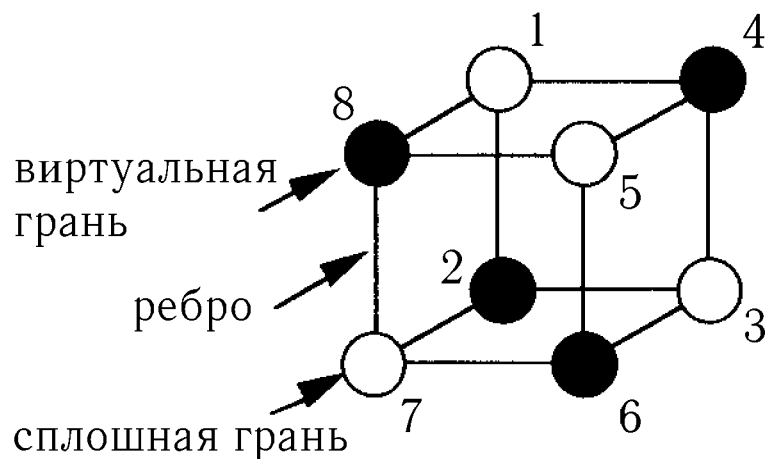


Рис. X.19d. Взаимосвязи между гранями внутреннего октаэдра в пирамиде первого порядка.

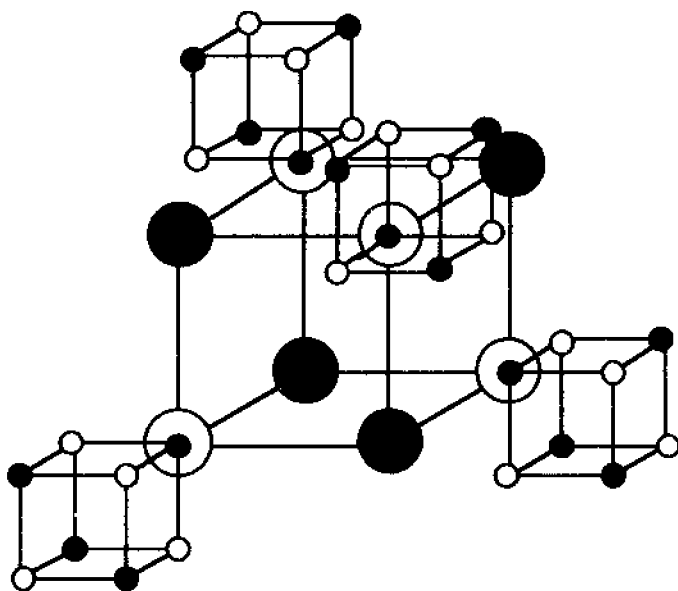


Рис. X.19е. Взаимосвязи между гранями внутреннего октаэдра в пирамиде второго порядка.

На рис. X.19d схематически, в виде шариков, представлены грани внутреннего октаэдра. Линия, соединяющая два соседних шарика, указывает на то, что соответствующие грани октаэдра имеют общее ребро. Это упражнение подтверждает предварительное наблюдение, заключающееся в том, что центральные точки граней правильного октаэдра совпадают с вершинами куба (и наоборот, центральные точки граней куба совпадают с вершинами правильного октаэдра). В качестве следующего упражнения можно попытаться представить, как выглядит внутренняя область пирамиды второго порядка. С кубами иметь дело все же проще, чем с октаэдрами, поэто-

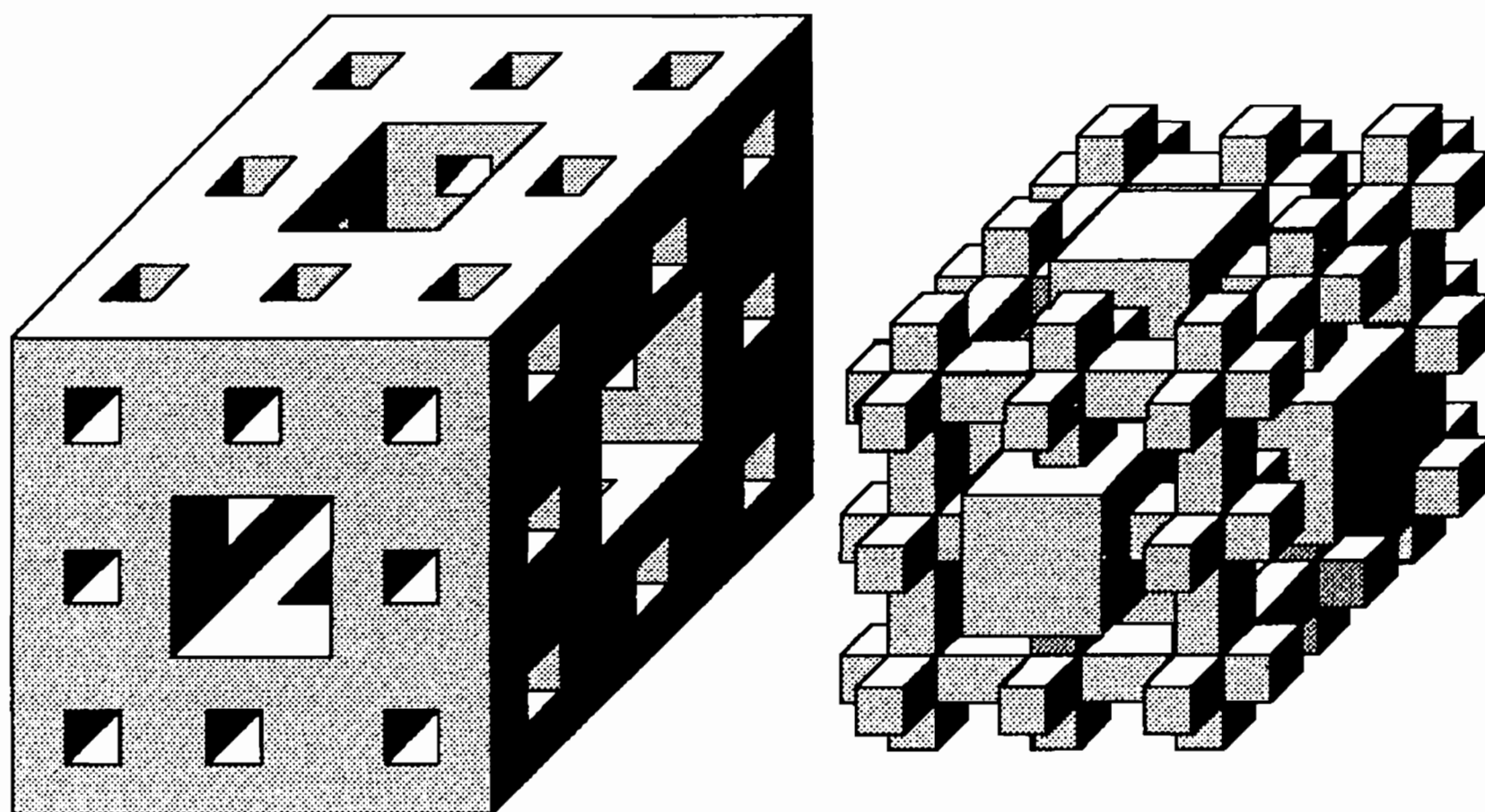


Рис. X.19f. Трехмерная губка Менгера и ее фрактальная внутренняя область.

му обратите внимание на рис. X.19е: маленькие черные шарики внутри бóльших пустых соответствуют прорастанию виртуальных граней малых октаэдров из сплошных граней предшественника. Продолжив построение, читатель без труда убедится, что внутренняя область пирамиды также фрактальна.

Фигура, изображенная на рис. X.19f, представляет собой губку Менгера третьего порядка (третий этап построения), получаемую из ковра Серпинского путем добавления третьего измерения; также показана форма внутренней области такой губки.

Кroneckerovo произведение в отношении других операций

До этого момента мы рассматривали кронекерovo произведение только в отношении арифметического умножения. Ничто, однако, не мешает нам дать определение решеточных произведений в отношении других математических операций. Например, в случае операции арифметического сложения имеем

$$\vec{V} = (1 \ 2 \ -3),$$

$$\vec{V}^{(2)} = (2 \ 3 \ -2 \mid 3 \ 4 \ -1 \mid -2 \ -1 \ -6) \quad (\text{в отн. сложения}).$$

Интересный пример:

$$\begin{aligned}(0\ 1) \otimes (0\ 2) &= (0\ 1\ 2\ 3) \quad (\text{в отн. сложения}), \\ (0\ 1) \otimes (0\ 2) \otimes (0\ 4) &= (0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7), \\ (0\ 1) \otimes (0\ 2) \otimes (0\ 4) \otimes (0\ 8) &= (0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15), \quad \dots\end{aligned}$$

Для сложения *нейтральным элементом* является 0, т.е. для любого a справедливо равенство $a + 0 = 0 + a = a$. Решетка A , *начальный элемент* $A_{0,0,0,\dots}$ которой является нейтральным в отношении некоторой операции, порождает *фрактальную решетку* $A^{(n)}$, где $n > 0$, в отношении *этой операции*, поскольку матрица A в этом случае всегда будет находиться в неизменном виде у начального элемента решетки более высокого порядка, — в точности такую же картину мы наблюдали в отношении умножения.

В следующем примере мы воспользовались последовательностью Туэ–Морса:

$$\begin{aligned}\vec{T} &= (0\ 1), \\ \vec{T}^{(2)} &= (0\ 1\ 1\ 0), \\ \vec{T}^{(3)} &= (0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1) \quad (\text{в отн. сложения по модулю } 2).\end{aligned}$$

Еще один пример:

$$\begin{aligned}\vec{S} &= (0\ 1\ 2\ 3), \\ \vec{S}^{(2)} &= (0\ 1\ 2\ 0\ 1\ 2\ 0\ 1\ 2\ 0\ 1\ 2\ 0\ 1\ 2\ 0), \\ \vec{S}^{(n)} &= (0\ 1\ 2\ 0\ 1\ 2\ 0\ 1\ 2\ \dots) \quad (\text{в отн. сложения по модулю } 3).\end{aligned}$$

В общем виде можно записать, что если

$$\vec{S} = (0\ 1\ 2\ 3\ \dots\ m-1),$$

то

$$\begin{aligned}\vec{S}^{(n)} &= (0\ 1\ 2\ \dots\ (m-2)\ 0\ 1\ 2\ (m-2)\ 0\ 1\ 2\ \dots) \\ &\quad (\text{в отн. сложения по модулю } (m-1)).\end{aligned}$$

Иными словами, $S_\gamma^{(n)} \equiv \gamma \pmod{(m-1)}$ при любом n . Это объясняется следующим образом:

$$\vec{S}_\gamma^{(n)} \equiv \sum_{i=0}^{n-1} \vec{S}_{(\delta_i^\gamma)_m} \pmod{(m-1)},$$

а поскольку $\vec{S}_{(\delta_i^\gamma)_m} = (\delta_i^\gamma)_m$, то $\vec{S}_\gamma^{(n)} \equiv \sum_{i=0}^{n-1} (\delta_i^\gamma)_m \pmod{(m-1)}$.

Из главы IX нам известно, что сумма по модулю $(m - 1)$ цифр представления какого-либо целого числа по основанию m равна остатку по модулю $(m - 1)$ этого целого числа. Следовательно, $S_\gamma^{(n)} \equiv \gamma \pmod{(m - 1)}$ при любом n .

Вполне допустимы и другие операции: например, та, что задается нижеследующей таблицей, отражающей, помимо прочего, коммутативный характер операции и наличие нейтрального элемента, равного единице. В самом деле, для любого элемента a справедливо равенство $a \oplus 1 = 1 \oplus a = a$:

$\oplus$	0	1	2
0	1	0	2
1	0	1	2
2	2	2	0

Например,

$$\left. \begin{aligned} \vec{V} &= (1 \ 2 \ 0), \\ \vec{V}^{(2)} &= (1 \ 2 \ 0 \ 2 \ 0 \ 2 \ 0 \ 2 \ 1) \end{aligned} \right\} \quad (\text{в отн. операции } \oplus).$$

Разумеется, выбираемая для такого рассмотрения операция вовсе не обязана быть коммутативной. Вспомним, что и само кронекерово произведение коммутативным не является.

Фрактальные ломаные линии

Представим себе старинную мерную цепь, состоящую из m соединенных шарнирами прямолинейных звеньев единичной длины. Когда такая цепь растянута на всю длину, ее звенья можно уподобить маленьким стрелам, направленным в одну сторону. Представим также, что на земле начерчен отрезок прямой, разделенный на l частей, каждая из которых равна по длине звену цепи (см. рис. X.20а, где $l = 3$, а $m = 4$). Возьмем два колышка и вобьем их в землю в концевых точках нашего отрезка. Прямолинейный интервал, заключенный между колышками, называется *инициатором*, а соответствующий участок цепи — *генератором*, или *затравкой*. Геометрическую форму, подобную форме генератора, все звенья которого имеют одинаковую длину, будем называть *регулярной ломаной*. В противном случае будем считать ломаную *иррегулярной*. Количество m звеньев в генераторе называется *основанием*.

Обратимся к рис. X.20b и определим *элементарные векторы* для случаев $d = 3, 4, 5, 6, \dots$ (буквой j обозначена мнимая единица $\sqrt{-1}$). Каждому значению d , называемому *модулем*, соответствуют d векторов $e^0, e^\phi, e^{2\phi}, \dots, e^{(d-1)\phi}$. Очевидно, что $e^{d\phi} = e^0 = 1$, $e^{(d+1)\phi} = e^\phi, \dots$ и, в общем случае, $e^{q\phi} = e^{(q \bmod d)\phi}$.

Рис. X.20а. Инициатор и генератор.

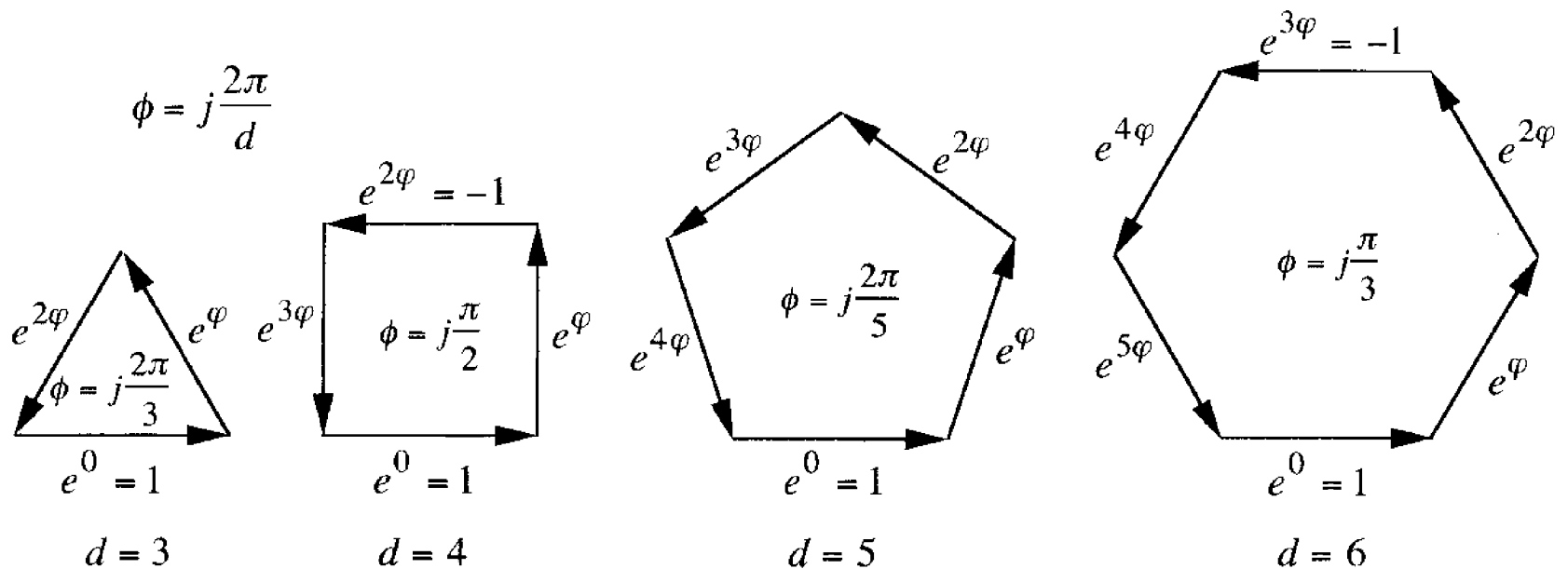
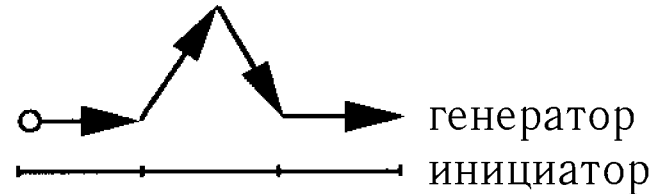


Рис. X.20b. Элементарные векторы.

Кривая Коха

Блох больших кусают блошки,
Блошек тех — малютки-крошки,
Нет конца тем паразитам,
Как говорят, *ad infinitum*.

(Джонатан Свифт)

Генератор, изображенный на рис. X.20а, можно, таким образом, представить в виде вектора

$$\vec{V} = (e^0, e^\phi, e^{5\phi}, e^0), \quad \text{где } d = 6, m = 4, \phi = j\frac{\pi}{3}, \quad (10.24a)$$

или вектора

$$(e^0, -e^{2\phi}, -e^\phi, e^0), \quad \text{где } d = 3, m = 4, \phi = j\frac{2\pi}{3}. \quad (10.24b)$$

Принимая во внимание только коэффициенты при ϕ в последовательности (10.24а), можно записать

$$\begin{aligned} \vec{\Phi} &= (0 \ 1 \ 5 \ 0), \\ \vec{\Phi}^2 &= (0 \ 1 \ 5 \ 0 \ 1 \ 2 \ 0 \ 1 \ 5 \ 0 \ 4 \ 5 \ 0 \ 1 \ 5 \ 0) \quad (\text{в отн. сложения по модулю 6}), \\ &\dots; \end{aligned} \quad (10.25)$$

при этом любое звено $\vec{\Phi}_\gamma^{(n)}$, соответствующее элементу $K_\gamma^{(n)}$, образует с горизонтальной осью угол $(\pi/3)$ радиан (углы измеряются в направлении против часовой стрелки). Этот угол мы будем называть *аргументом* звена, а вектор Φ — *генератором аргумента*. В общем случае,

$$\vec{\Phi}_\gamma^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} \vec{\Phi}_{(\delta_i^\gamma)_m} \pmod{d}, \quad (10.26)$$

где $(\delta_i^\gamma)_m$ есть i -я цифра представления числа γ по основанию m , причем $0 \leq \gamma \leq m^n - 1$.

В случае генератора (10.25) аргумент звена номер γ равен

$$\frac{\pi}{3} \vec{\Phi}_\gamma^{(n)} = \frac{\pi}{3} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \vec{\Phi}_{(\delta_i^\gamma)_4} \pmod{6} \right). \quad (10.27)$$

Например, угол наклона 55-го звена на рис. X.21a равен

$$\frac{\pi}{3} \vec{\Phi}_{55}^{(n)} = \frac{\pi}{3} \left(\sum_{i=0}^2 \vec{\Phi}_{(\delta_i^{55})_4} \pmod{6} \right).$$

А поскольку $55 = (3 \ 1 \ 3)_4$, получаем следующий результат:

$$\frac{\pi}{3} \vec{\Phi}_{55}^{(3)} = \frac{\pi}{3} (\vec{\Phi}_3 + \vec{\Phi}_1 + \vec{\Phi}_3) = \frac{\pi}{3} (0 + 1 + 0) = \frac{\pi}{3}.$$

(Отметим, что $\vec{\Phi}_\gamma^{(n')} = \vec{\Phi}_\gamma^{(n)}$ для всех $n' \geq n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $0 \leq \gamma < m^n - 1$.)

Ломаная линия, первые три этапа построения которой представлены на рис. X.21a, известна как *кривая Коха*. На рис. же X.21b изображена *снежинка Коха*, которая строится следующим образом: на первом этапе каждая из сторон равностороннего треугольника заменяется на затравку Коха, на каждом последующем этапе этой же затравкой заменяются все обнаруженные прямолинейные отрезки, причем процесс продолжается до бесконечности. С каждой новой итерацией периметр кривой Коха умножается на $4/3$. Таким образом, после бесконечного числа итераций получаем бесконечно длинный периметр и парадоксальную ситуацию, в которой конечная площадь ограничена кривой бесконечной длины! До недавнего времени этот парадокс приводил математиков в полное замешательство, вследствие чего кривую Коха характеризовали не иначе, как «чудовищную» и «патологическую», а Бенуа Мандельброт даже придумал для нее название — *химерический*

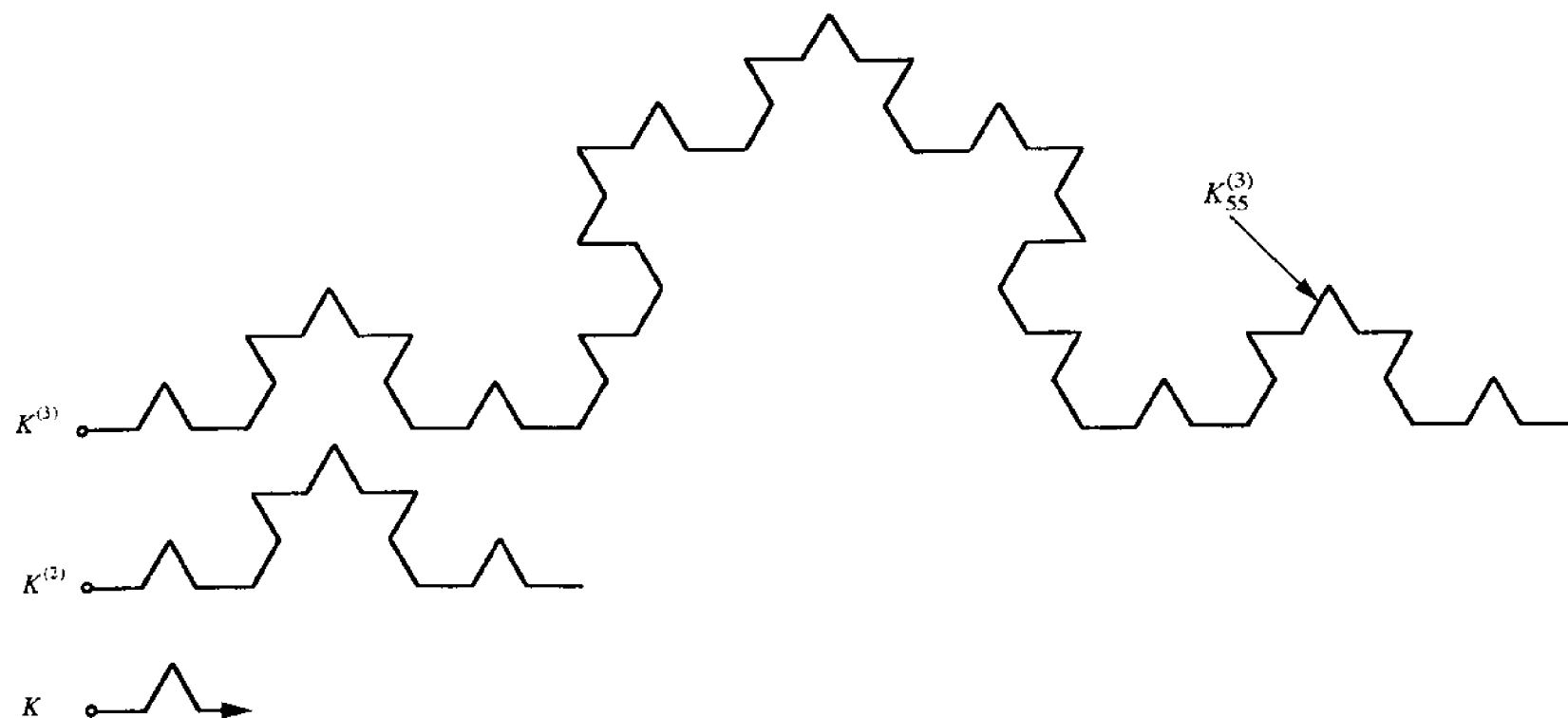


Рис. X.21a. Первые три этапа построения кривой Коха.

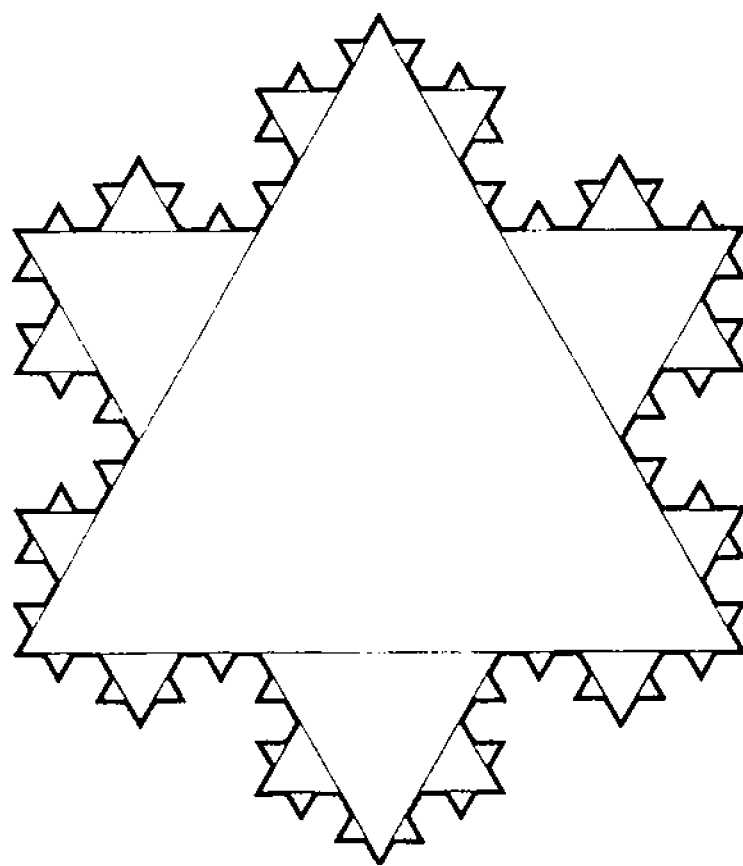


Рис. X.21b. Снежинка Коха.

остров. (В греческой мифологии химера — это огнедышащее чудовище женского пола с львиной головой, драконьим хвостом и козлиным туловищем.) Кроме того, кривая Коха относится к тем кривым, к которым ни в одной точке нельзя провести касательную. Отметим, что на каждом из трех этапов построения кривой общая форма фигуры, в сущности, не меняется и повторяет форму затравки, причем «кирпичи» для каждого последующего этапа построения целиком копируются с результата предыдущего этапа.

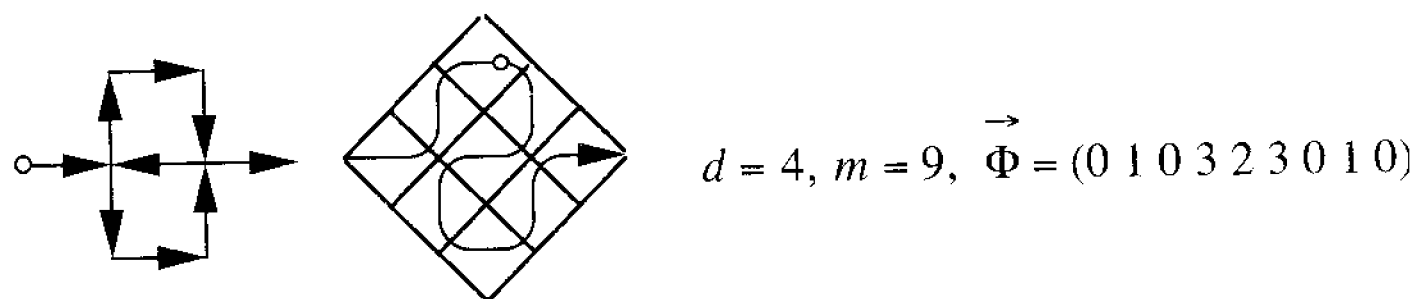


Рис. X.22а. Генератор кривой Пеано.

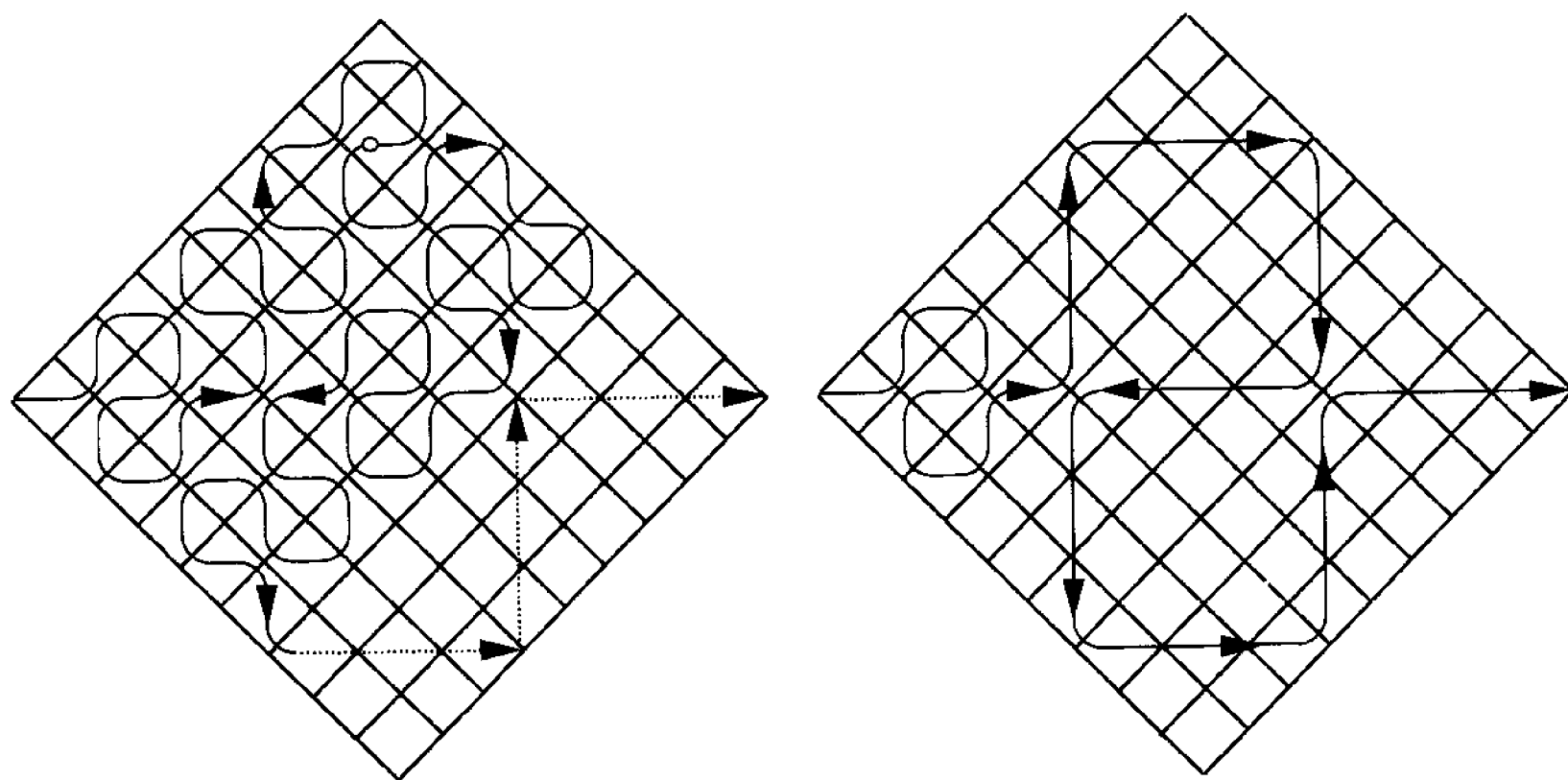


Рис. X.22б. Прохождение квадрата кривой Пеано (квадрат с рис. X.22а, увеличенный в три раза).

Заполняющая пространство кривая Пеано

Возможно ли установить однозначное соотношение между точками сплошного квадрата и точками линии? Иными словами, совпадает ли мощность множества точек квадрата с континуумом? Этот вопрос оставался открытым до тех пор, пока Джузеппе Пеано (1858–1932) и Давид Гильберт (1862–1943) не описали некую странную извилистую кривую, которая оказалась способна каким-то чудесным образом проходить по всем точкам заданного квадрата (Пеано в 1890 году⁷, а Гильберт — в 1891). Эта регулярная ломаная линия, генератор аргумента которой показан на рис. X.22а (углы закруглены для наглядности), фрактальна. Кривая на рисунке вписана

⁷Peano, G. «Sur une courbe, qui remplit une aire plane», *Mathematische Annalen*. 36 (1890), pp. 157–160.

в квадрат, который на последующих этапах (рис. X.22b) используется в качестве «кирпича» для построения большего квадрата. Этот квадрат, в свою очередь, используется для построения следующего, еще большего, квадрата и т. д. При построении большего квадрата «кирпичи» ориентируются аналогично звеньям генератора. Предположим, что длина стороны квадрата на рис. X.22a равна $1/3\sqrt{2}$ единиц. Тогда длина кривой составляет ровно единицу. Пометим кривую в некоторой произвольной точке на расстоянии, скажем, в $8/27$ единицы от ее начала (расстояние измеряется по кривой).

Кривую на рис. X.22b также пометим на расстоянии в $8/27$ единицы от ее начала. Если теперь уменьшить размер рисунка до размера рис. X.22a, то наши пометки практически совпадут. На последующих этапах построения все такие точки будут почти совпадать со своими предшественницами. Продолжив процесс до бесконечности, мы обнаружим, что последовательные точки сходятся к некоторому «аттрактору», однозначно соответствующему дроби $8/27$. Таким образом, каждой дробной доле единицы соответствует одна и только одна точка внутри квадрата, т. е. перед нами искомое однозначное соответствие.

Коллекция регулярных фрактальных ломаных

На рис. X.23–X.30 представлена подборка фрактальных ломаных линий, являющихся, по большей части, вариантами кривой Коха.

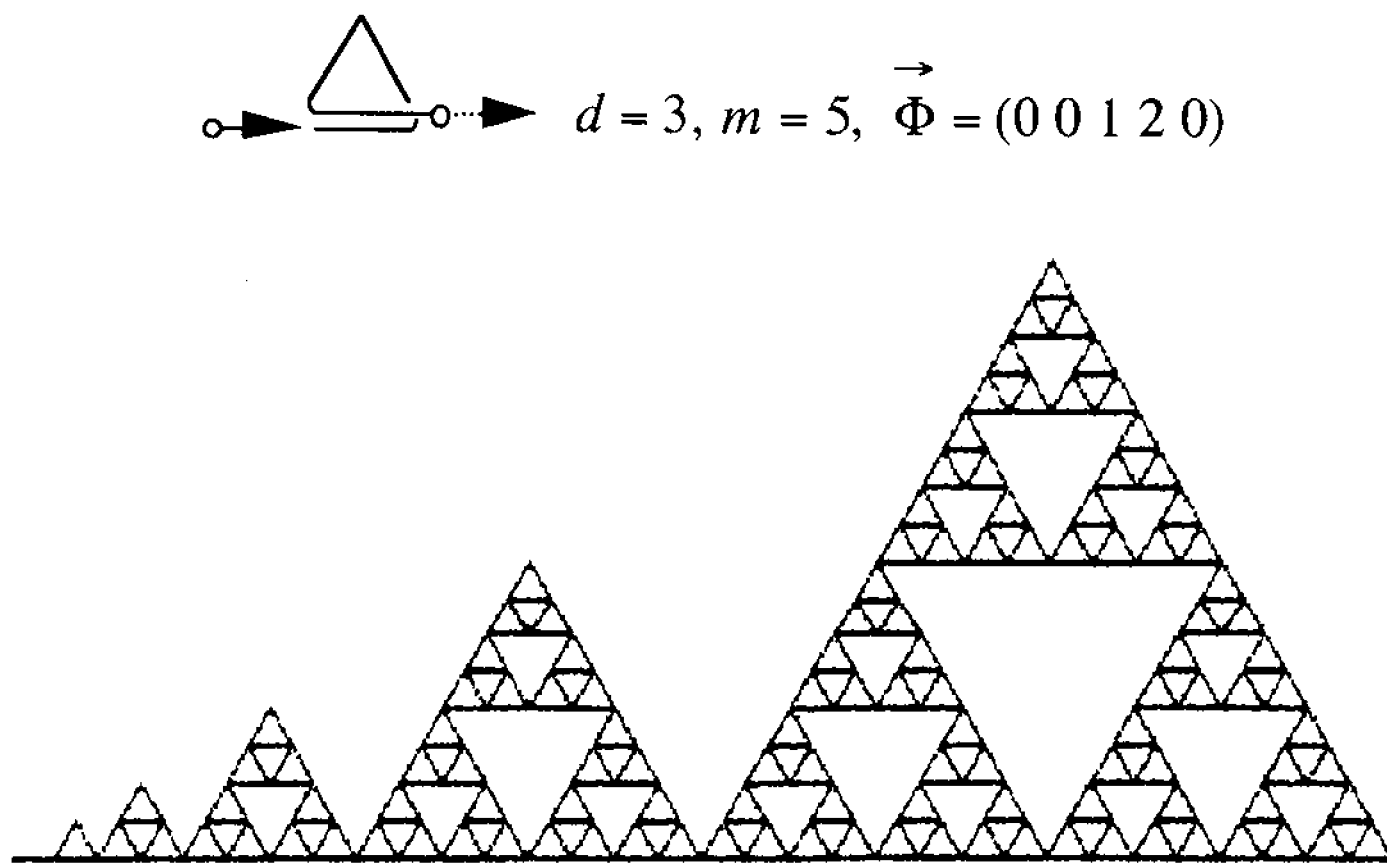


Рис. X.23. Пирамиды Гизы. Один-единственный треугольник Серпинского, размер которого увеличивается на каждом последующем этапе построения ($d = 3$, $m = 5$, $\vec{\Phi}_1 = (0\ 1\ 2\ 0\ 0)$).

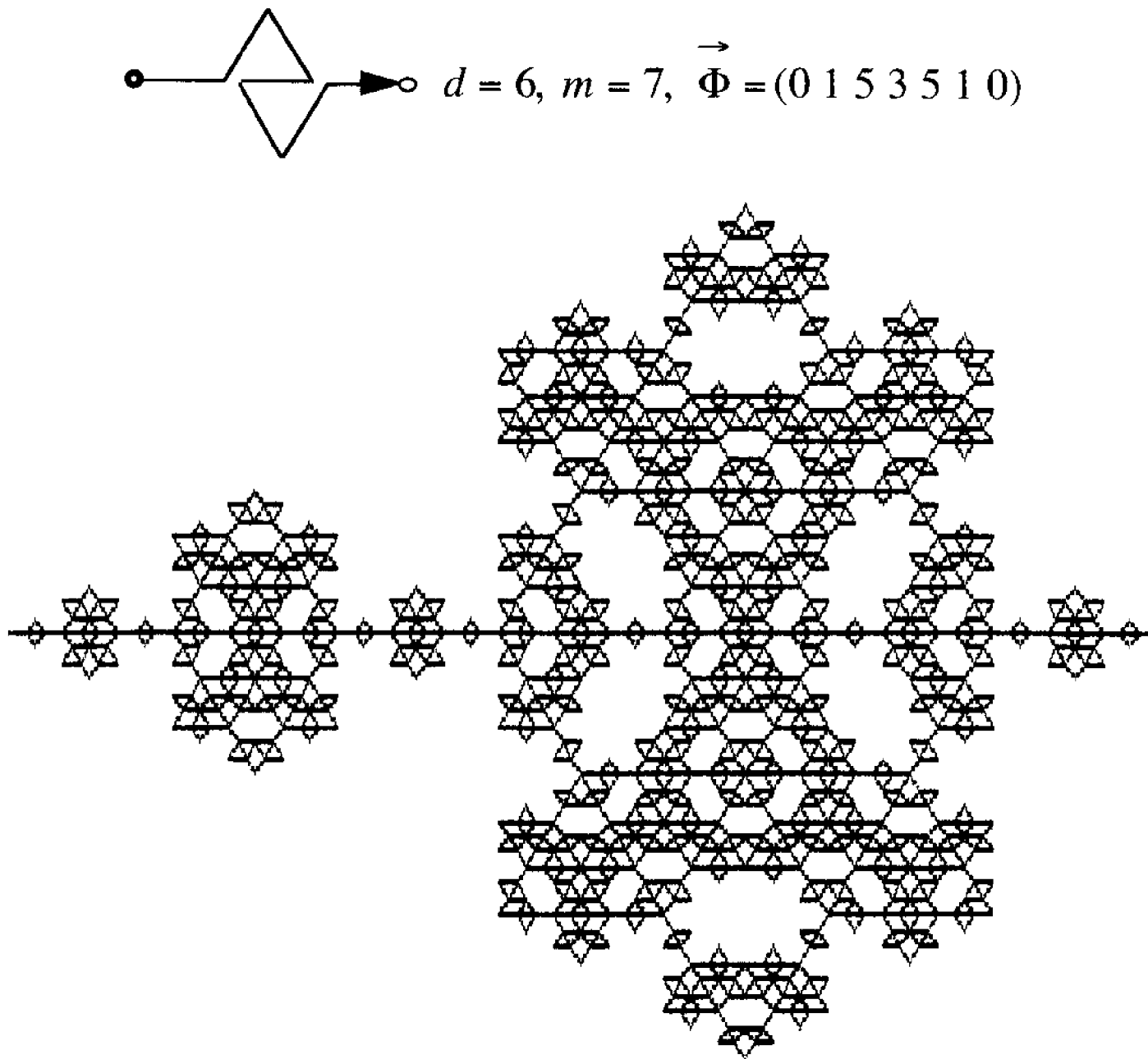


Рис. X.24. Еще одна снежинка.

Регулярные ломаные смешанного типа и соответствующие мозаики

Описываемые до сих пор ломаные линии были получены путем возведения во все более высокие степени единичного векторного генератора. Ломаные, рассматриваемые ниже (рис. X.31–X.34), генерируются двумя различными векторами, первый из которых ($\vec{V}_1$) называется затравкой, а второй ($\vec{V}_2$) — шаблоном. Оба вектора характеризуются одинаковым модулем d , и ломаная строится по операции $\vec{V}_1 \otimes \vec{V}_2^{(n)}$. Если обозначить соответствующие генераторы аргумента через $\vec{\Phi}_1$, $\vec{\Phi}_2$, то ломаная строится по

$$\vec{\Phi}_1 \otimes \vec{\Phi}_2^{(n)} \quad (\text{в отн. сложения по модулю } d).$$

Иррегулярная фрактальная ломаная: пятиугольная «Эйфелева башня»

Все рассмотренные ранее ломаные были регулярными, т. е. состояли из элементарных звеньев одинаковой длины. Используя векторный генератор,

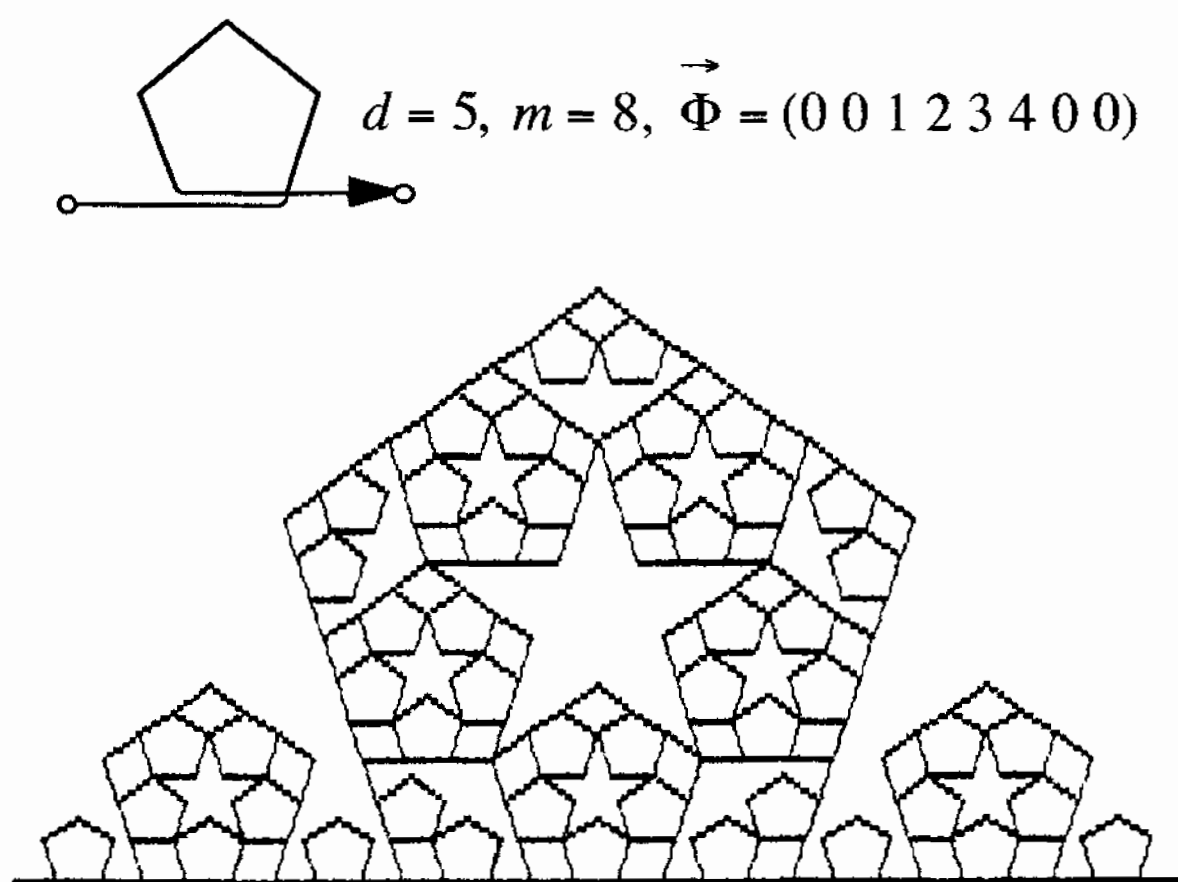


Рис. X.25. Пятиугольная вариация 1 на тему кривой Коха.

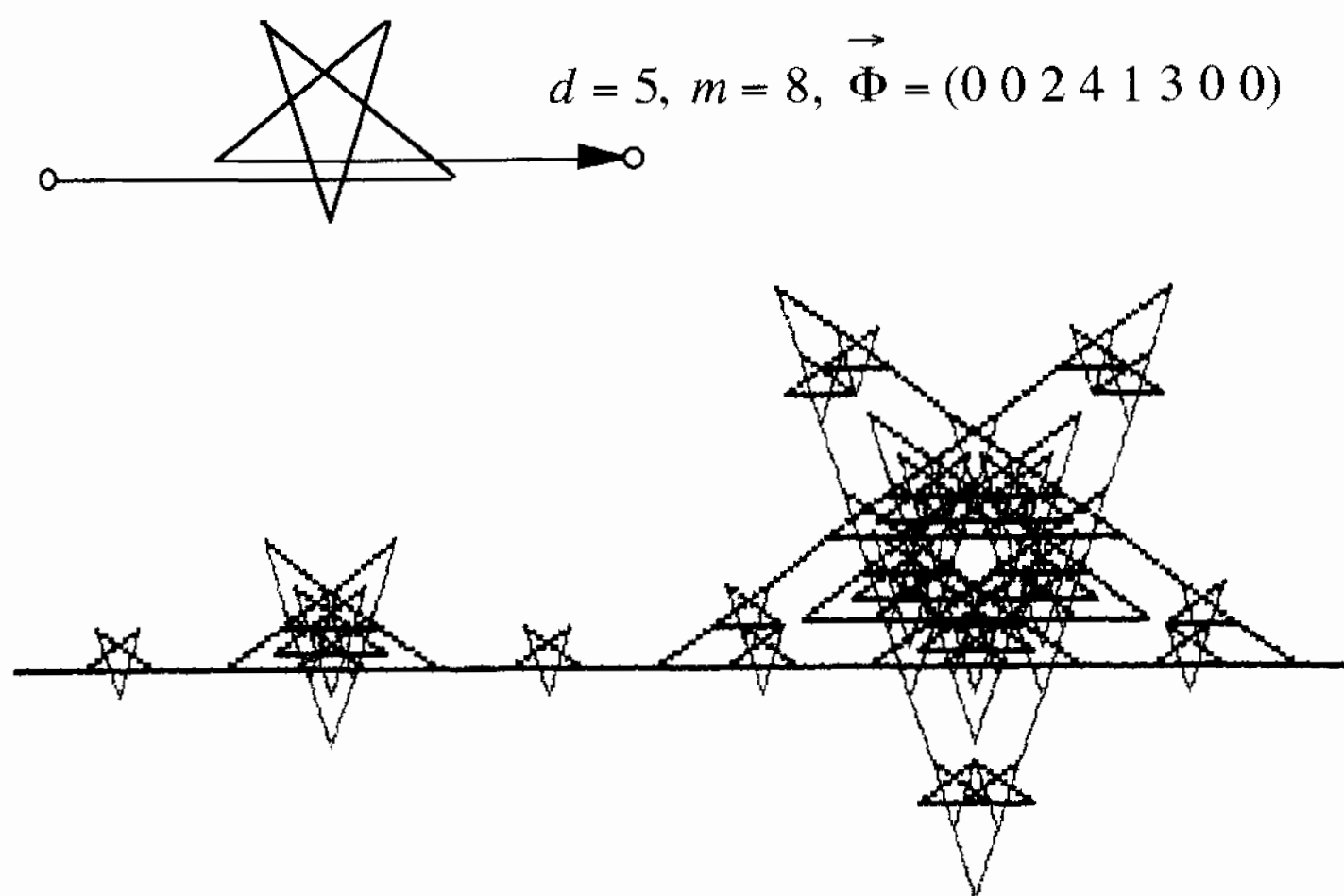


Рис. X.26. Пятиугольная вариация 2 на тему кривой Коха.

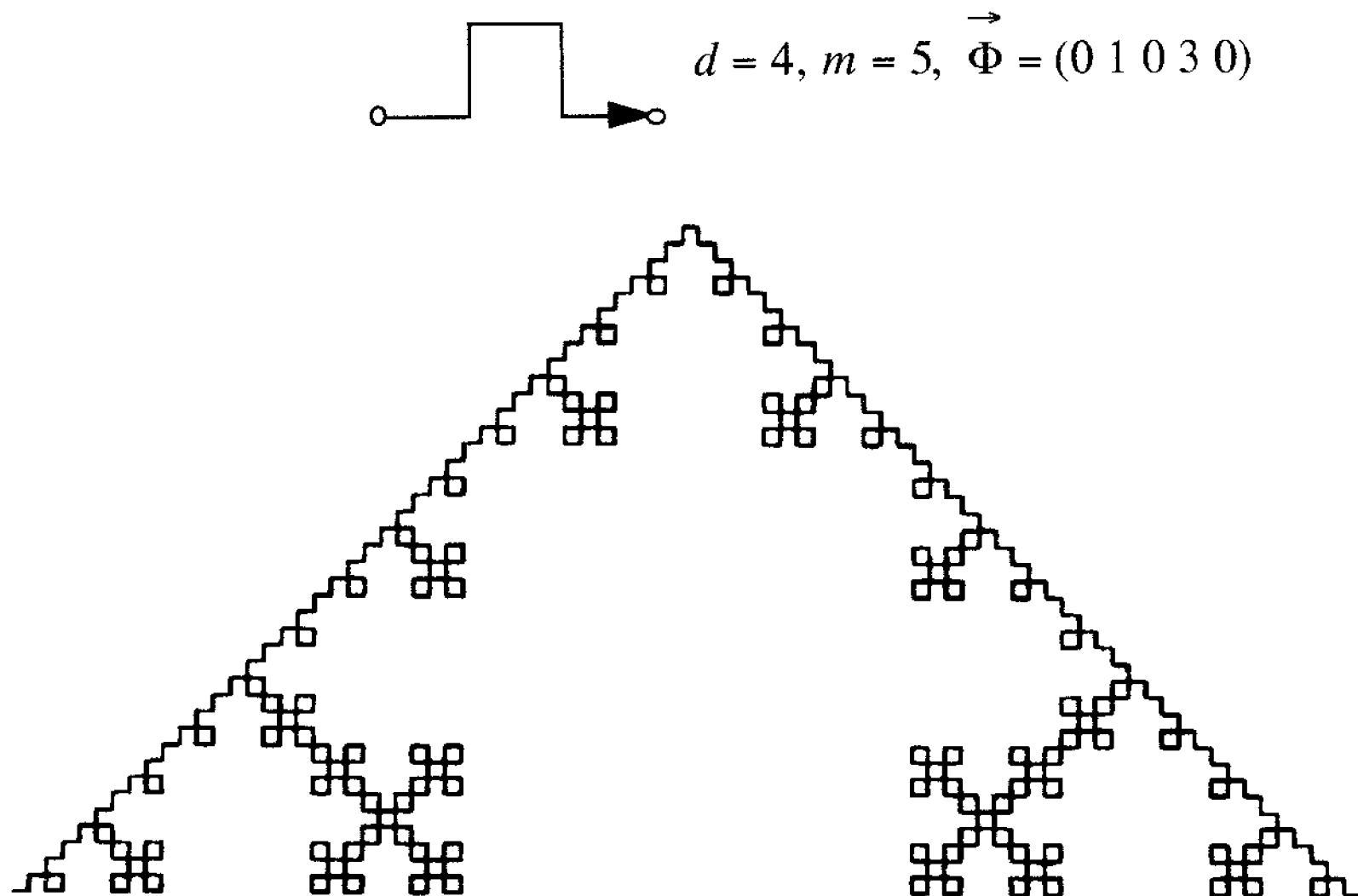


Рис. X.27. Квадратура кривой Коха.

изображенный на рис. X.35, вверху, можно построить иррегулярную фрактальную ломаную, которая весьма сильно напоминает пифагорову лютню⁸ и которую мы называем пятиугольной «Эйфелевой башней». Башня строится в горизонтальном положении, а затем устанавливается вертикально (рис. X.35).

Приложение: некоторые упрощающие обозначения

При большом количестве размерностей запись $\gamma, \gamma', \gamma'', \gamma''', \gamma^{IV}, \dots$ становится слишком громоздкой. В этом случае можно применять следующие однозначные обозначения, значительно упрощающие запись:

$$\begin{aligned} \{\mu\} &= \mu, \mu', \mu'', \mu''', \dots, & \{\rho\} &= \rho, \rho', \rho'', \rho''', \dots, \\ \{\sigma\} &= \sigma, \sigma', \sigma'', \sigma''', \dots, & \{\gamma\} &= \gamma, \gamma', \gamma'', \gamma''', \dots \end{aligned}$$

⁸С пифагоровой лютней я впервые встретился в восхитительной книге Яна Гульберга «Математика: рождение чисел» (Jan Gullberg. *Mathematics: From the Birth of Numbers* (New York: W. W. Norton, 1996), p. 420).

Так, уравнение

$$\begin{aligned} G_{\gamma, \gamma', \gamma''} &= (M \otimes R \otimes S)_{(\mu+m\rho+m'r\sigma), (\mu'+m'\rho'+m'r'\sigma'), (\mu''+m''\rho''+m''r''\sigma'')} = \\ &= M_{\mu, \mu', \mu''} R_{\rho, \rho', \rho''} S_{\sigma, \sigma', \sigma''} \end{aligned}$$

можно переписать в виде

$$G_{\{\gamma\}} = (M \otimes R \otimes S)_{\{\mu+m\rho+m'r\sigma\}} = M_{\{\mu\}} R_{\{\rho\}} S_{\{\sigma\}}.$$

Кроме того, можно писать

$$\{\delta_0^\gamma\} \equiv \delta_0^\gamma, \delta_0^{\gamma'}, \delta_0^{\gamma''}, \delta_0^{\gamma'''}, \dots \quad \{\delta_1^\gamma\} \equiv \delta_1^\gamma, \delta_1^{\gamma'}, \delta_1^{\gamma''}, \delta_1^{\gamma'''}, \dots$$

или, в общем виде,

$$\{\delta_i^\gamma\} \equiv \delta_i^\gamma, \delta_i^{\gamma'}, \delta_i^{\gamma''}, \delta_i^{\gamma'''}, \dots,$$

где

$$\begin{aligned} \delta_i^\gamma &= (\delta_i^\gamma)_{(\dots, m_2, m_1, m_0)} \\ \delta_i^{\gamma'} &= (\delta_i^{\gamma'})_{(\dots, m'_2, m'_1, m'_0)} \\ \delta_i^{\gamma''} &= (\delta_i^{\gamma''})_{(\dots, m''_2, m''_1, m''_0)} \dots \end{aligned}$$

Это позволяет нам записать $M_{(0)\delta_0^\gamma, \delta_0^{\gamma'}, \delta_0^{\gamma''}, \dots} = M_{(0)\{\delta_0^\gamma\}}, M_{(1)\delta_1^\gamma, \delta_1^{\gamma'}, \delta_1^{\gamma''}, \dots} = M_{(1)\{\delta_1^\gamma\}}$ или, в общем виде, $M_{(i)\delta_i^\gamma, \delta_i^{\gamma'}, \delta_i^{\gamma''}, \dots} = M_{(i)\{\delta_i^\gamma\}}$. Полученное выражение можно далее упростить до $M_{\{\delta_i^\gamma\}}$ в силу избыточного характера индекса (i) . Таким образом, мы можем заменить выражение

$$G_{\gamma, \gamma', \gamma'', \dots} = \prod_{i=0}^{n-1} M_{(i)\delta_i^\gamma, \delta_i^{\gamma'}, \delta_i^{\gamma''}, \dots}$$

на более простое

$$G_{\{\gamma\}} = \prod_{i=0}^{n-1} M_{\{\delta_i^\gamma\}},$$

которое, если не считать скобок вокруг индексов, совпадает с выражением, определяющим кронекерово произведение n векторов.

Эта упрощенная форма записи может оказаться полезной при изучении тензоров. Но это уже совсем другая история.

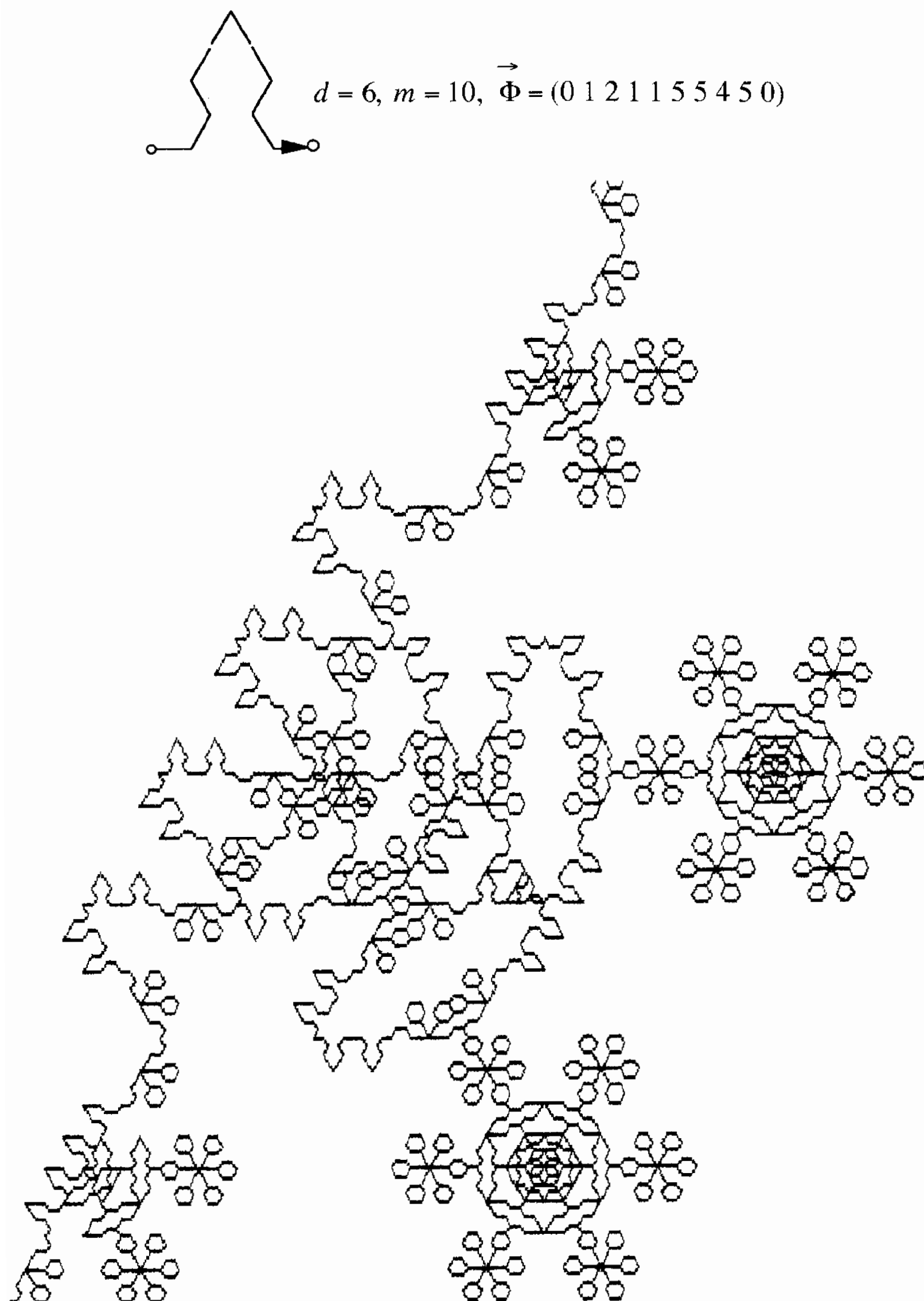


Рис. X.28. Рождественская елка.

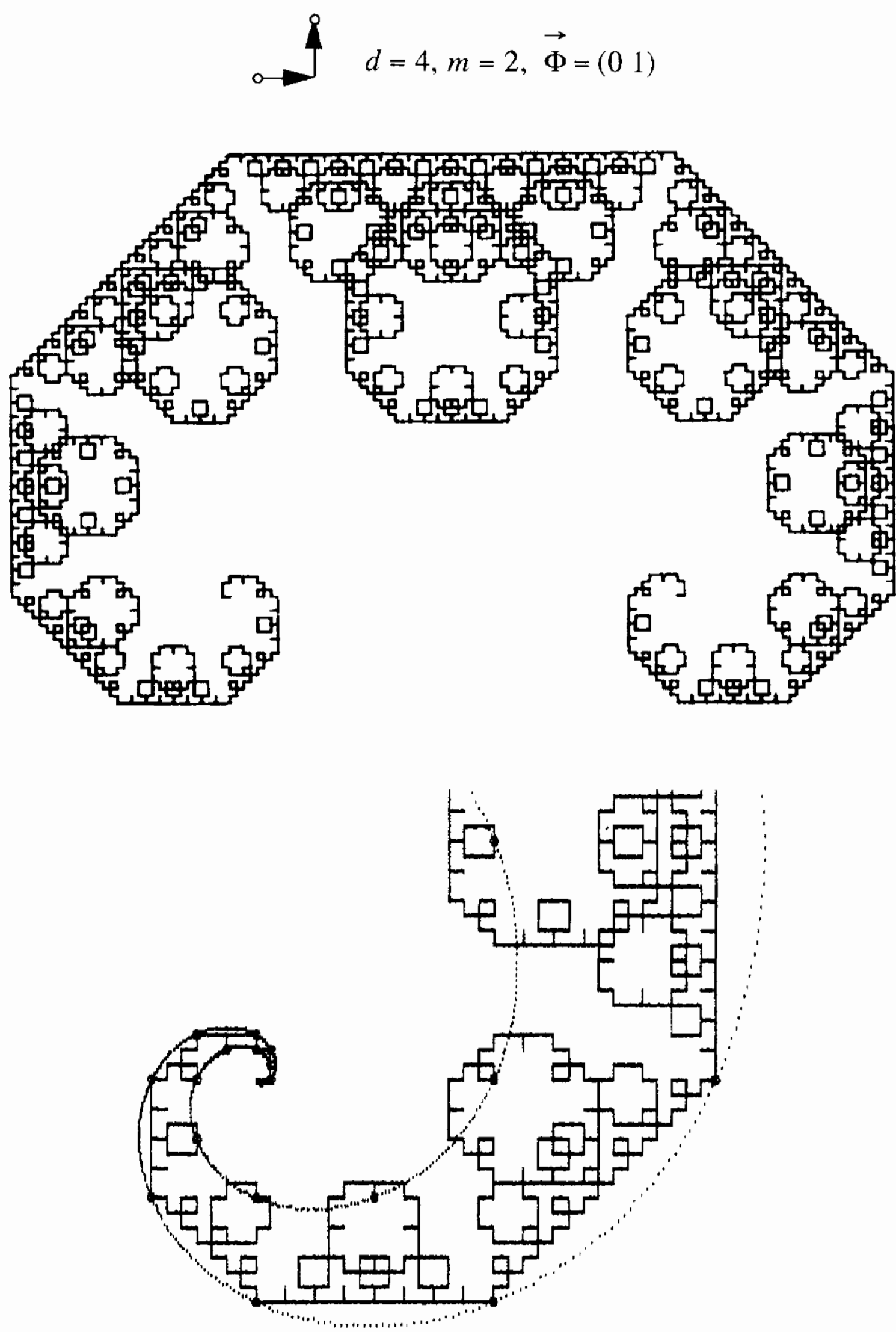


Рис. X.29. Фрактал Леви и его фрагмент, вписанный между двумя логарифмическими спиралями.

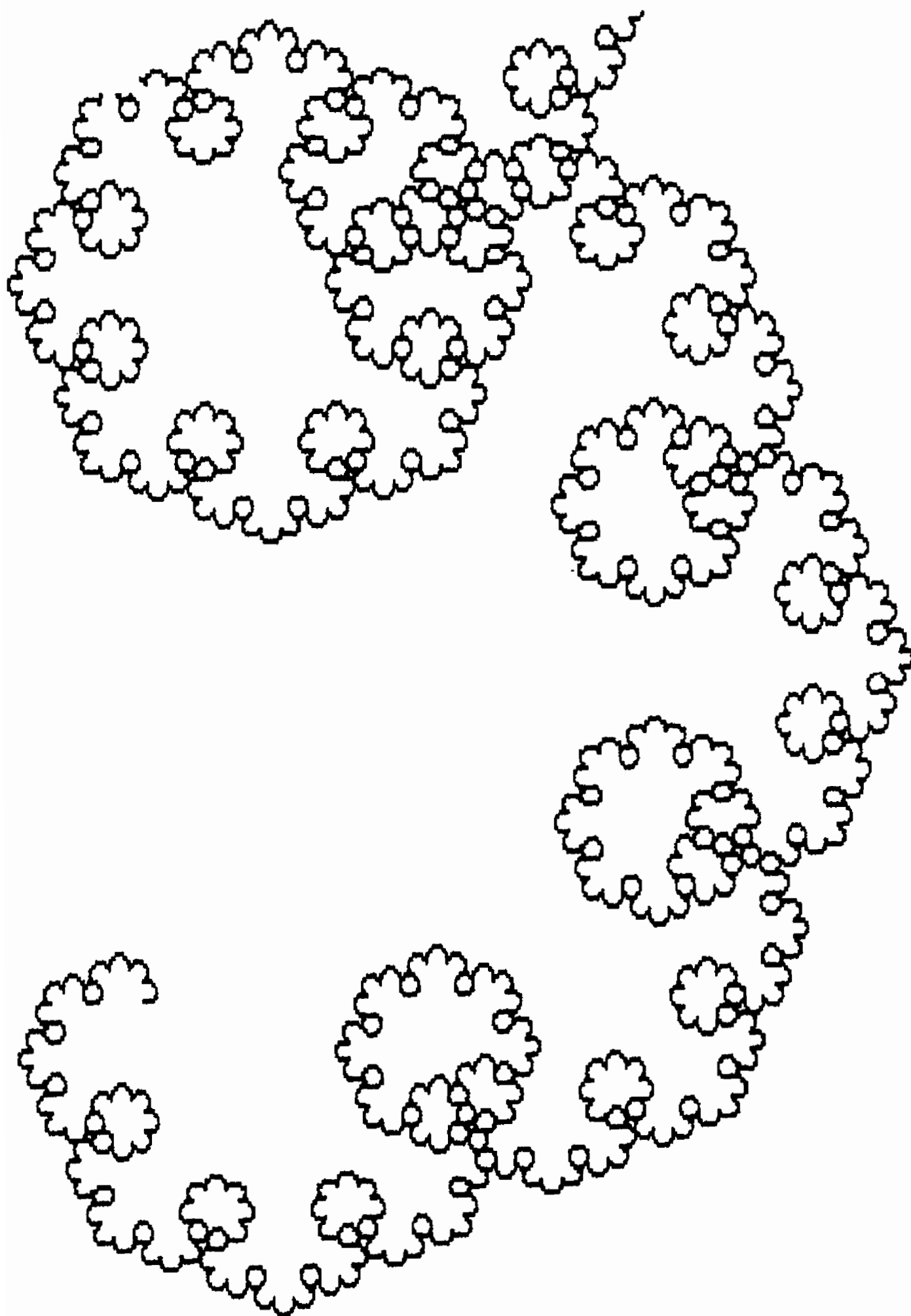
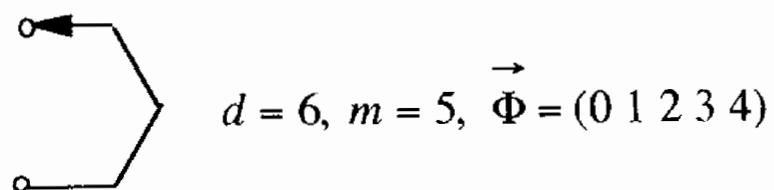


Рис. X.30. Капуста.

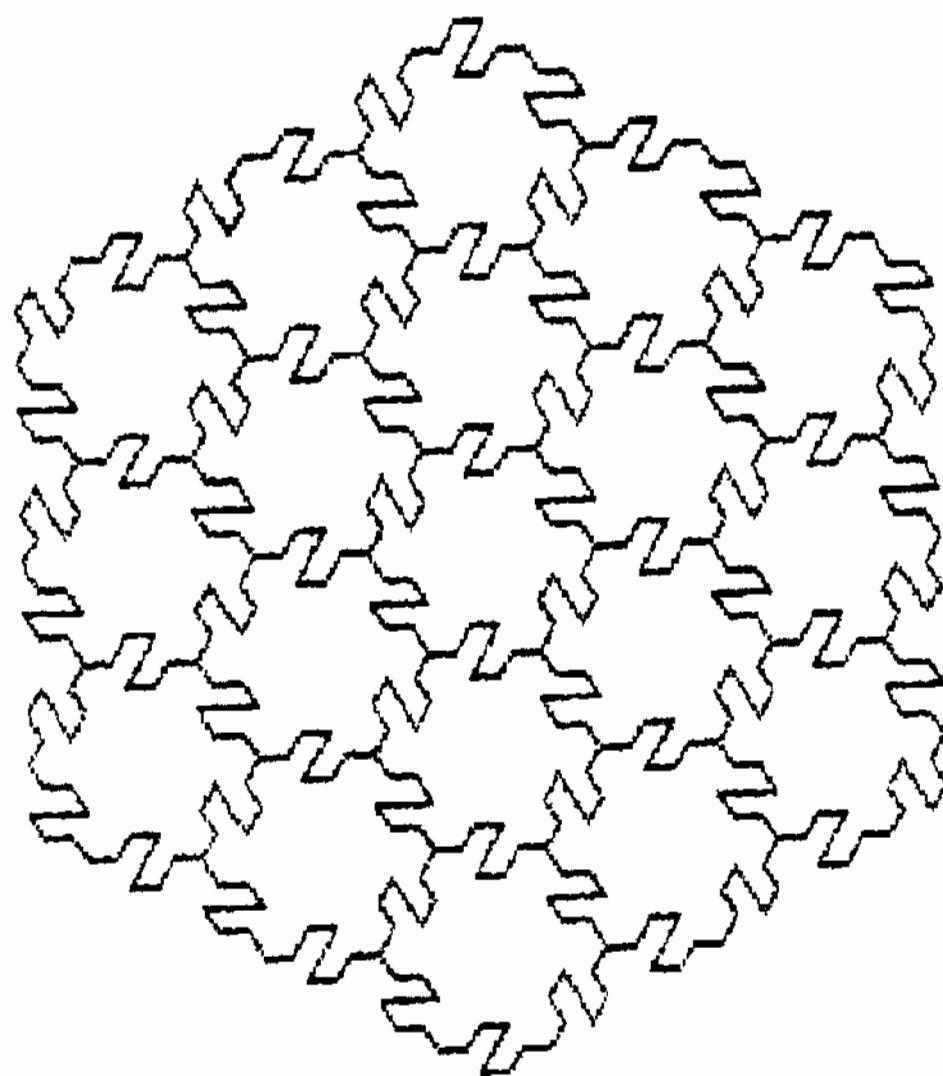


Рис. X.31. Шестеренки.

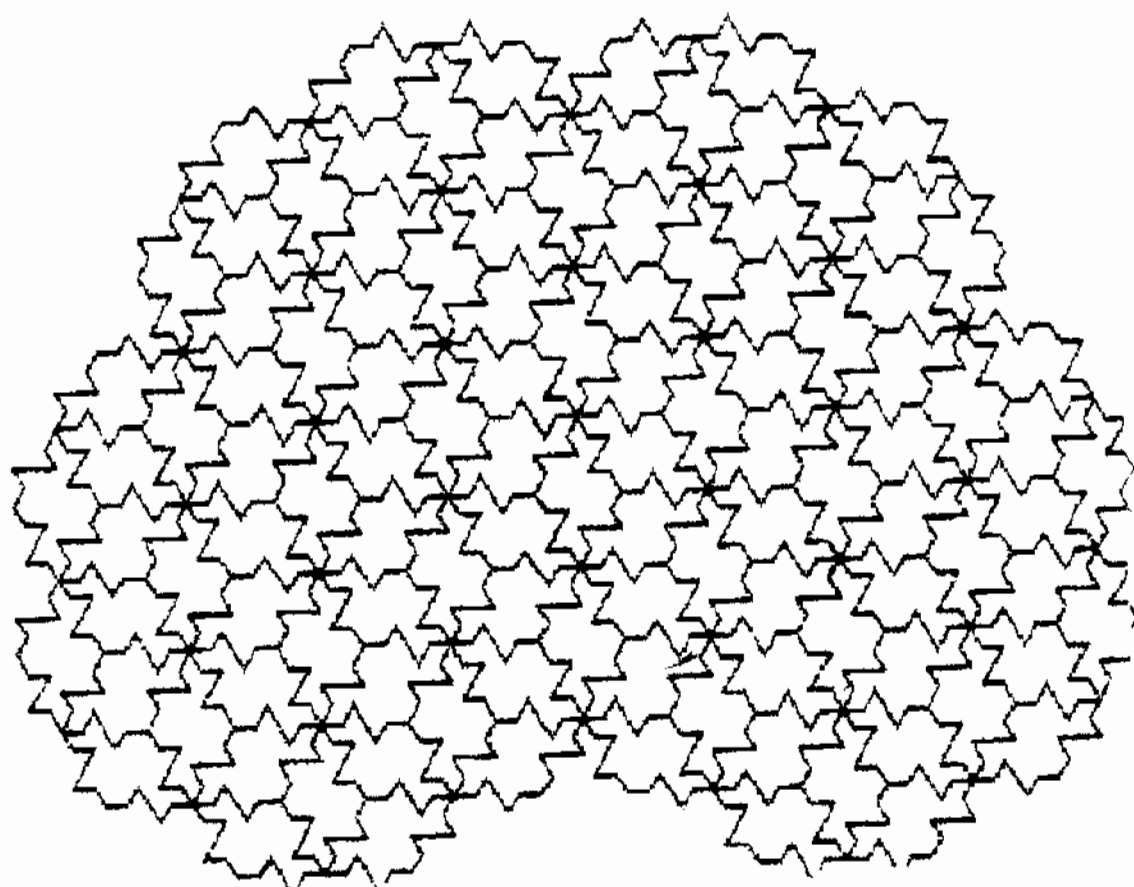


Рис. X.32. Мозг.

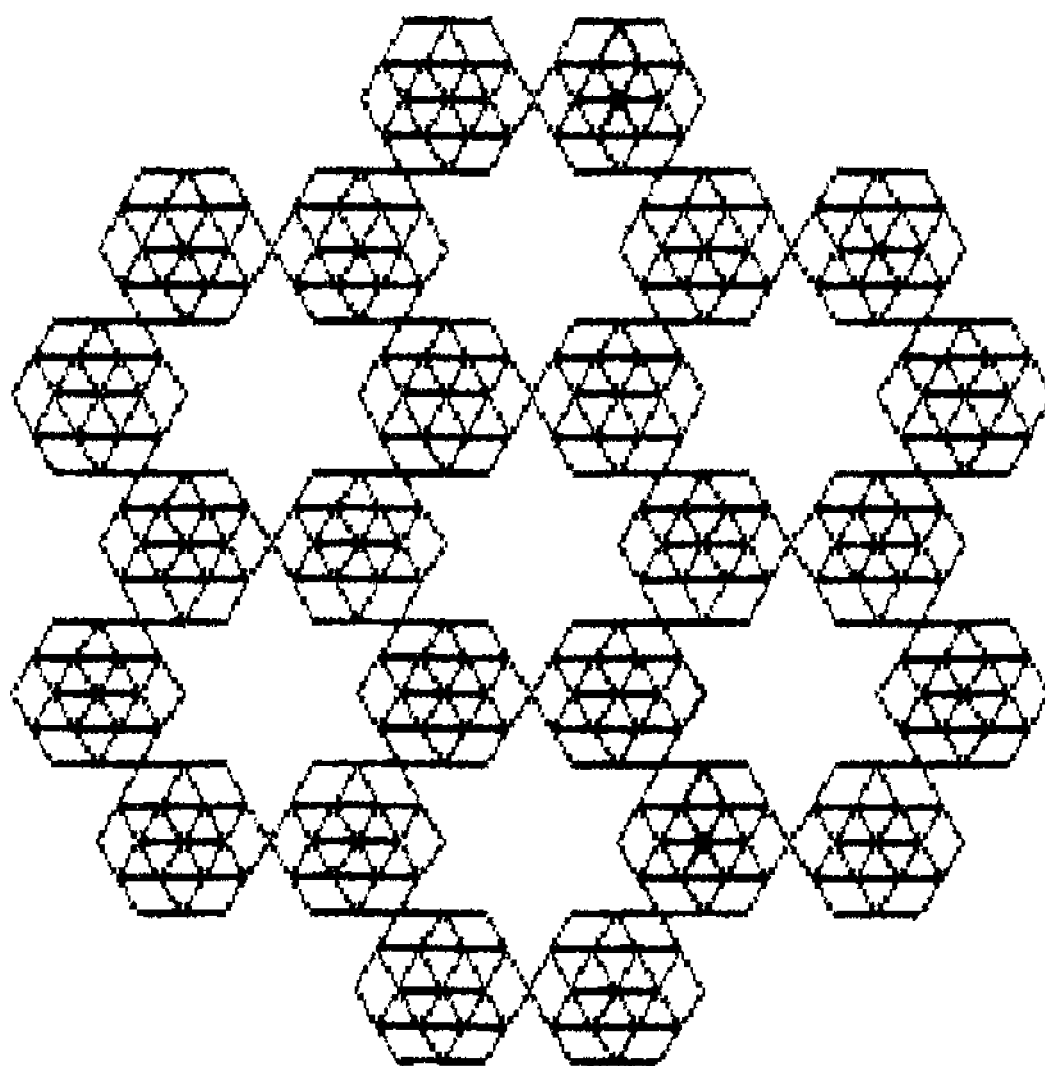


Рис. X.33. Звезда Давида.

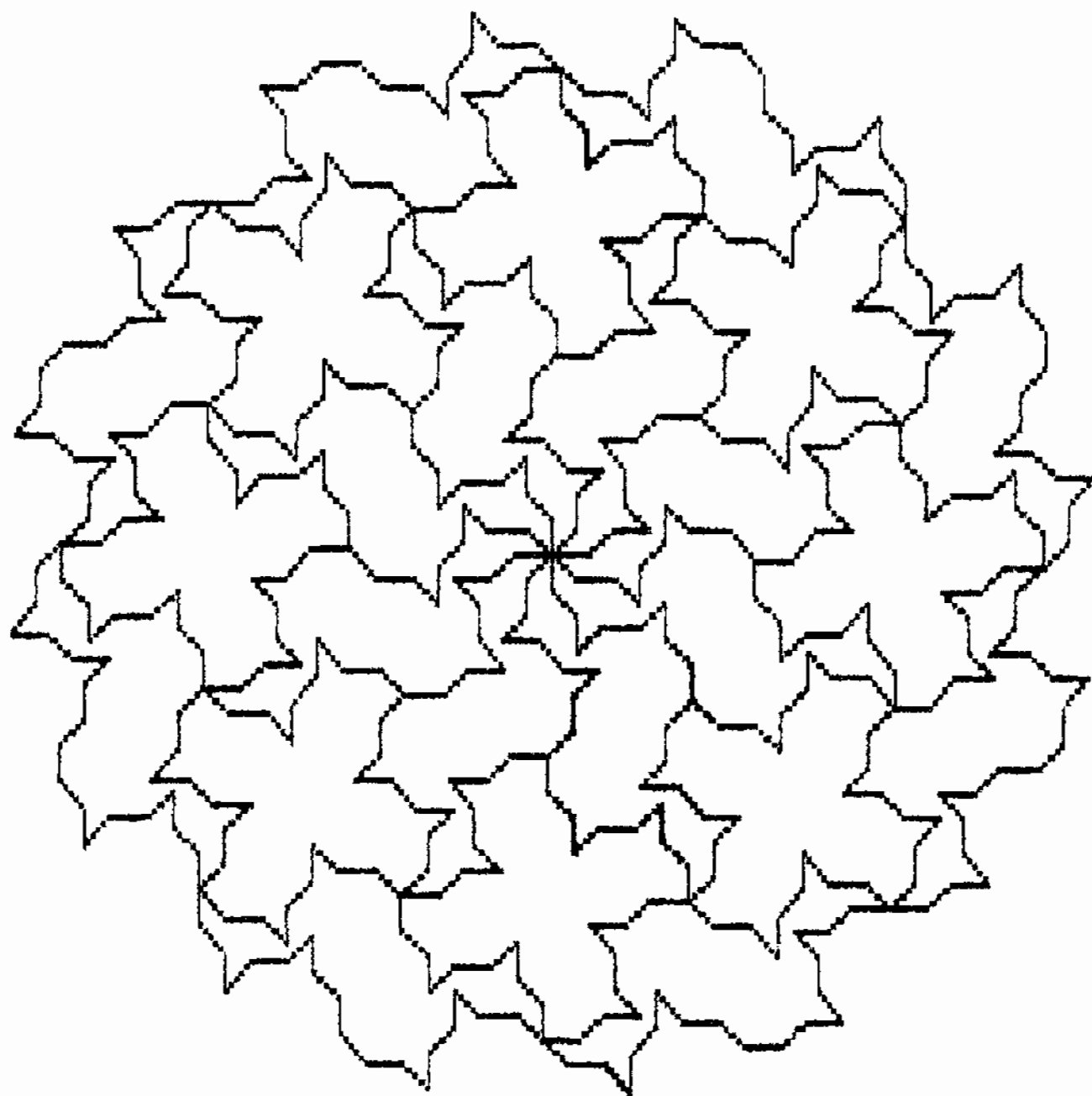
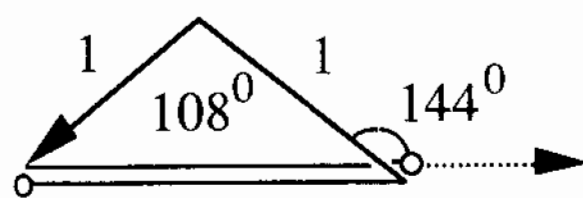


Рис. X.34. Кресты и кони.



$$\vec{V} = (\Phi, e^{2\phi}, e^{3\phi}, \Phi), \quad \text{где} \quad \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \phi = j\frac{2\pi}{5}$$

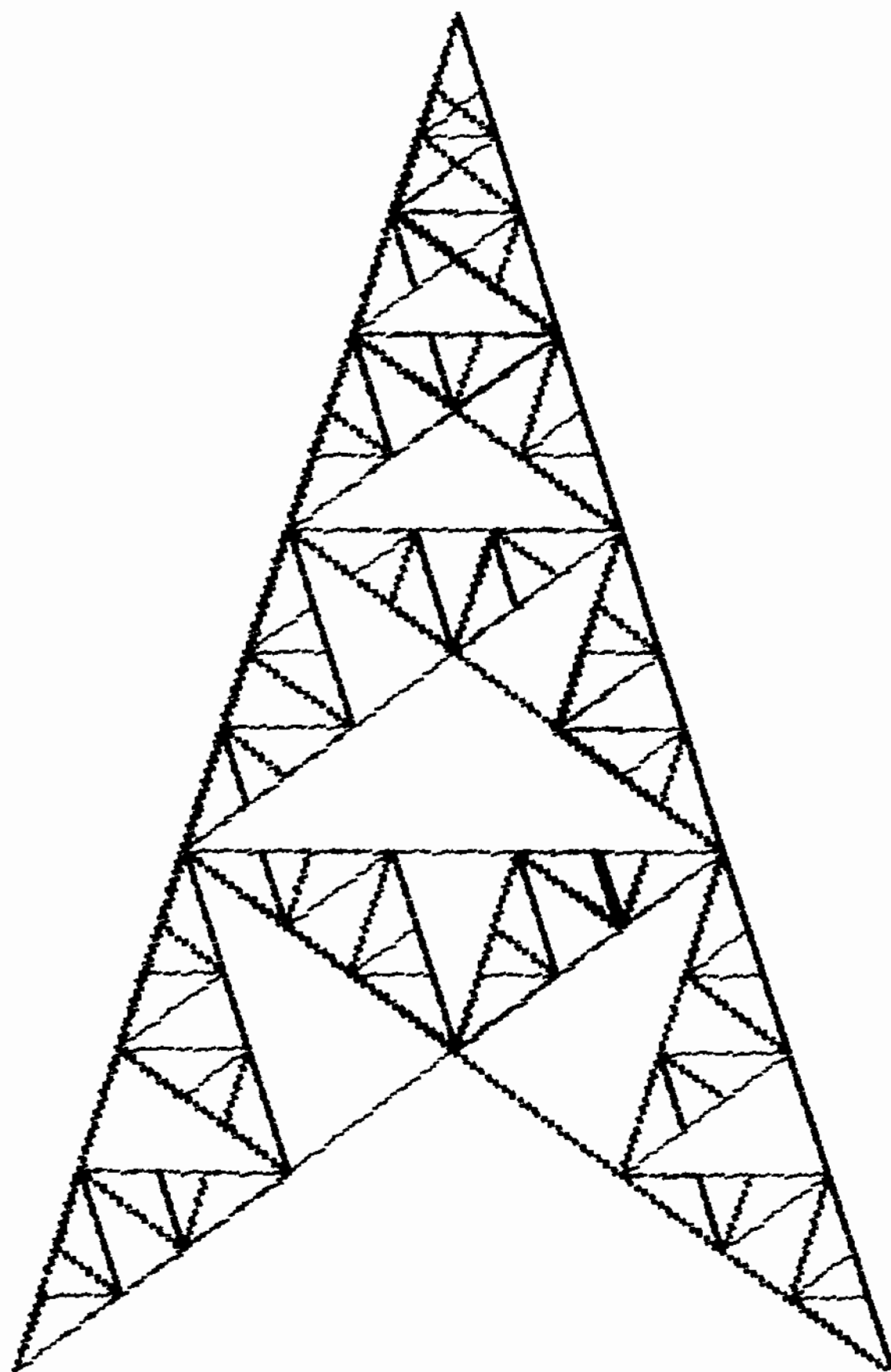


Рис. X.35. Иррегулярная фрактальная ломаная: пятиугольная «Эйфелева башня».

... Ведь наш безжизненный язык,
Наш разум в суете напрасной
Природы искажают лик,
Разъяв на части мир прекрасный.

Искусств не надо и наук.
В стремлении к подлинному знанью
Ты сердце научи, мой друг,
Вниманию и пониманью.

Уильям Вордсворт

(пер. с англ. И. Меламеда)

Предметный указатель

- Актин 134
«Алгебра» (*Algebra*, Валлис) 38
Алгоритм деления 199–202
— Евклида 43–45, 106–107
Александрия (Египет) 17, 20, 22
Алогон ($\alpha\lambda\omicron\gamma\omicron\nu$) 23
Алоэ 15, 142
Аль-Хаваризми 161
Ампер 84
Анаксимандр 18, 20
Античность 132–134
Апиан, Петер 159
«Арифметические изыскания» (*Disquisitiones arithmeticae*, Гаусс) 27
«Ассоциация Фибоначчи» 59
Асуан 22
Аттенюатор 89
Ахилл и черепаха 176
- Багенодье (китайские кольца) 38–39
Барометр 176
Бекман, Петр 43
Bell Systems Technical Journal 36
Белл, Эрик Темпл 222
Бернулли, Иоганн 181
Бернулли, Якоб 10, 17, 59, 120, 181
Бодó, Эмиль 37
Бойер, Карл Б. 159
Бравé, Луи 15
Бравé, Огюст 15
Британское Королевское Общество 43
Брункер, Уильям 43
- Валлис, Джон 38
- Variorum de rebus mathematicis responsorum liber VIII* (Виет) 163
«Введение в арифметику» (*Introductio Arithmetica*, Никомах) 30
Везалий, Андреас 159
Векторы кронекеро-произведение матрицы и 235
— примеры 218–219
— элементарные 246
Векторы, элементарные 246
«Великое искусство» (*Ars Magna*, Кардано) 157, 161
Венна, диаграмма 32–34
Виет, Франсуа 163
Витые фигуры (завитки) 103
— гомогномный прямоугольник 110–112, 168
— гомогномный треугольник 120, 124
— завиток Падована 149–150
— завиток Фибоначчи 108, 129–130
— золотой прямоугольник 128, 129
— золотой треугольник 127–128, 130, 132
— непрерывные дроби и 55
— обратноподходящие дроби и 55
— прямоугольник 55, 103–119, 128–132
— пятиугольник 130, 132
— равносторонний треугольник 120
— серебряный пятиугольник 152
Водовороты (Эшер) см. цв. илл. 6
Возрождение, эпоха 193
Вордсворт, Уильям 255

- «Всеобщая история чисел» (*Histoire universelle des chiffres*, Ифр́а) 13
- Гёте, Иоганн Вольфганг фон 16
- Галилей 176
- Гамильтон, Уильям Роуан 36
- Гамильтонов путь 36–41
- диадический 36–41
 - триадический 36, 39, 41
- Гарднер, Мартин 12, 38, 59, 156, 172, 181
- «Гармония мер» (*Harmonia mensuratum*, Котé) 171
- Гаусс, Карл Фридрих 27
- Генератор 243, 245
- Геометрия древнегреческие корни 20–22
- число и 22–24
- Геродот 133
- Герон Александрийский 11, 17
- Гильберт, Давид 249
- Гильбертов отель 162
- Гиперкуб (диадический, триадический) 34–35, 39, 41
- Гномон 15, 17
- m -адического числа 34
 - витого прямоугольника 115
 - гомогномонного прямоугольника 110–112, 168
 - гомогномонного треугольника 120
 - золотого прямоугольника 128–129
 - золотого треугольника 127–128
 - серебряного пятиугольника 151
 - улитки 154–156
 - фигурного числа 27–32
- «Гномоника», аллегория (*Gnomonique*, Дезарг) 18, 19
- Гномонное число Φ_m 61
- Гномонность (самоподобие) 17, 130
- Голомб, Соломон 12, 156
- Гравитация 14
- Грей, Фрэнк 36
- Греки древние изобретение геометрии 22–24
- о геометрии и числе 22–24
- Гро, Луи 38
- Гулльберг, Ян 251
- Гюйгенс, Христиан 47
- Гюйгенса, теорема 57, 64–65
- д’Авенн, Присс 16
- Данциг, Тобиас 12, 51
- де Барбери, Иакопо 137
- Дедукция 20
- Дезарг, Жерар 18, 19
- Декарт, Рене 171
- делла Франческа, Пьеро 135
- дель Ферро, Сципионе 161
- де Муавр, Абрахам 127
- «*De Numerus multiplicibus*» (Паскаль) 199
- Десятиугольник 137
- Джиллингс, Р. Дж. 134
- Диаграммы, изометрические 32, 34
- Диск, кодирующий 36–37
- Додекаэдр 137, 139
- Дроби апериодические бесконечные непрерывные 52–54
- дигномонные простые периодические непрерывные (ППД) 70–72, 79–80
 - иррациональные квадратные корни и непрерывные дроби 51
 - конечные непрерывные 48–49
 - моногномонные простые периодические непрерывные 68–70, 78
 - неправильно оконченные простые периодические (с неправильной затравкой) 109
 - обратноподходящие дроби непрерывной дроби 54–55, 57
 - периодические непрерывные 49–51
 - периодические регулярные непрерывные 49–51

- подходящие дроби непрерывной дроби 47–48, 57
- полигномонные простые периодические непрерывные 76–77, 81
- правильно оконченные простые периодические (с правильной затравкой) 109–112, 117–119
- представление непрерывных дробей 45–46
- произвольно оконченные простые периодические 72–75
- простые непрерывные 46–47
- простые непрерывные, общий вид 46–47
- простые непрерывные, периодические 49–51, 58
- простые непрерывные, формулы 56
- регулярные непрерывные 47, 49–51, 54, 57
- регулярные непрерывные, аперидические бесконечные 51, 54
- регулярные непрерывные, периодические 49–51
- регулярные непрерывные, полупериодические 51
- топологическое сходство электрических схем лестничного типа и непрерывных дробей 101–102
- формулы для непрерывных дробей 56–58
- Дюрер, Альбрехт 139
- Евклид 134
- Евклида, алгоритм 43–45, 106–107
- Египетские обелиски 25–26
- Египетские пирамиды 133–134
- Египетские солнечные часы 17–18
- Египетский календарь 18
- Египетский прямоугольник 133–134
- «Ежеквартальный журнал Фибоначчи» (*The Fibonacci Quarterly*) 59
- «e: История числа» (*e: The Story of a Number*, Маор) 13
- «Жизнь пауков» (*La vie de l'araignée*, Фабр) 14
- Завиток левосторонний 112
 - правосторонний 112
 - прямоугольный моногномонный, направленный наружу 112
 - серебряный пятиугольный 112
- «За пределы бесконечности» (*To Infinity and Beyond*, Маор) 13
- Затравка 61, 109–112
- Затравочное число Φ_m задание числа Фибоначчи $F_{m,n}$ в явном виде 62–66
 - определение 61
 - при очень малом m 75–76
 - свойства 78
- Земля, длина окружности 22
- Зенон Элейский 176
- «Золотое число: радиография мифа» (*Le Nombre d'or: radiographie d'un mythe*, Невó) 135
- Золотая последовательность 128
- Золотое сечение, пропорция 132–134
- Золотое сечение, фокус 142–143
- Золотое сечение, число 50–51, 124–143
- Золотой прямоугольник 128, 129
- Золотой треугольник 127–128, 130, 132
- Золотой угол 143
- Игра, икосианская 36
- Измерение времени древними египтянами 17–18
- Измерительный стержень, троичный 231
- Импеданс входной 86, 88–90, 124
 - характеристический 92
- Индуктивность (индуктор) 191
- Индукция 20

- Инициатор 245
 Исламские орнаменты 24
 Исчисление конечных разностей 182, 194–197
 Ифр́а, Жорж 13

 Калликрат 134
 Кампанус, Иоганнес 134
 Кантор, Георг 229
 Канторова пыль 228–234
 Каподимонте, музей 137
 Кардано, Джироламо 38, 157–161
 Карнак (Египет) 26
 Квадратные корни, иррациональные 51
 Квадратура кривой Коха 250
 — круга 181–182
 Кенотаф фараона Сети I (1294–1279 гг. до н. э.) 17
 Кеплер, Иоганн 124
 Кирхгофа, правила 84–85
 Китайские кольца 38
 «Книга знаков» (*The Book of Signs*, Кох 136
 «Книга абака» (*Liber Abaci*, Леонардо Пизанский) 59, 134
 Кнут, Дональд Э. 12
 Код Грея 36–38, 42
 — двоичный 36–38
 — десятичный 36–37
 — диадический 36–41
 — линейный 200
 — циклический перестановочный 37
 Колебания 187–189
 — затухающие 182–186, 188–189
 Конденсатор (емкость) 190–191
 Конт, Огюст 17
 Континуум 23
 Контур индуктивно-емкостный лестничного типа 91
 — реактивные элементы 91
 — электрический (RLC-контур) 189–191
 — электрический (RLC-контур), последовательный 191–193
 Конуэй, Джон Хортон 13
 Координаты декартовы 164, 169
 — полярные 167
 Коперник, Николай 159
 Coss (Рудофф) 159
 Котé, Рожé 171
 Кох, Рудольф 136
 Коха, кривая 246–248, 250
 Коха, снежинка 247, 248
 Коши, Огюстен-Луи 27
 Коэффициент дискретизации 168, 170
 Коэффициент расширения спирали 167, 171, 177
 Коэффициенты биномиальные 34, 66–68, 223, 224
 «Красота фракталов» (*The Beauty of Fractals*, Пейтген и Рихтер) 10
 Кроу, Д. У. 39
 Куст, триадический 141–142
 Кэли–Гамильтона, метод 165

 Ле Корбюзье 139
 Лев X, папа римский 137
 Леонардо Пизанский 59, 134
 Леонардо да Винчи 15, 132, 138–139
 Лестницы Т-образное звено 90
 — Фибоначчи 90
 — из преобразователей 82–84, 86
 — индуктивно-емкостные 91
 — итерационные 87–90
 — резистивные 85–86
 — цепи из блоков 98–102
 — цепи из блоков, правильно оконченные 98
 — электрические 84–96
 Линии передачи правильно оконченные 120, 124
 — распространение волны по 96–98
 — согласованные и несогласованные 94–96

- Липскомб, Тревор 13
 Логос 22
 Локоть 133
 Локсодрома 174
 Ломаные линии иррегулярные 251–252
 — регулярные 250
 — регулярные смешанного типа 251
 Луксор (Египет) 26
 Луксорский обелиск (площадь Согласия) см. цв. илл. 8
 Люка́, Эдуар 38, 39, 59, 223–224
 Люка́, теорема 222, 225, 226
- Малин, Дэвид 14
 Мандельброт, Бенуа 10, 12, 16, 209, 247
 Маор, Эли 13
 «Математические досуги» (*The Unexpected Hanging and Other Mathematical Diversions*, Гарднер) 156, 172, 181
 «Математические развлечения» (*Récréations mathématiques*, Люка́) 223–224
 Матрицы кронекерово произведение и фрактальные матрицы 235
 — поворота 164–166
 — пример фрактальной матрицы 219
 — самоподобие фрактальной матрицы 220–222
 — трехмерные 237
 Маятник (простой) 186–189
 Менгера, губка 238, 242–243
 Меридиан 25
Меркхет 17, 18
 Мерсенн, Марен 171
 Месопотамия 20
 Многоугольники, правильные 23, 156
Module d'or (Ле Корбюзье) 139
 Мозаики 251
- Монте-Читорио (солнечный обелиск) 25
- Набер, Г. А. 130
 Набоков, Владимир 164
 Наибольший общий делитель 43–44
 Напряжение 91–94, 189, 190
 — синусоидальное 91
Nautilus pompilius (моллюск) 14
 Национальная библиотека, Париж 19
 «Начала» (Евклид) 43, 134, 137, 138
 Невó, Маргерит 135
 Неморарий, Иорданий 161
 Никомах 30, 32
 Никомаха, теорема 32
 Ньютона таблица конечных разностей 30
 — теорема о разложении бинома 223
- Обелиски 25–26
 «О божественной пропорции» (*De divina proportione*), Пачоли 135, 139
 Обратная связь 82, 83
 «О вращении небесных тел» (*De revolutionibus orbium coelestium*), Коперник 159
 Окончание 120
 Октаэдр 237
 Ом 85–86
 «О пяти правильных телах» (*De quinque corporis regularibus*), делла Франческа 135
 «Основные алгоритмы» (*Fundamental Algorithms*), Кнут 12
 «Основы арифметики, геометрических пропорций и пропорциональности» (*Summa de arithmetica, geometria proportioni et proportionalita*), Пачоли 138
 «О строении человеческого тела» (*De Humani Corporis Fabrica*), Везалий 159

- «О тонкости вещей» (*De Subtilitate Rerum*), Кардано 38
- Падован, Ричард 12, 147, 148
- Падована, треугольный завиток 149–150
- Пайтген, Хайнц-Отто 10
- Парастихи 16
- Парменид 176
- Парфенон 135
- Паскаль, Блез 199, 222–223
- Паскаля, треугольник 34, 35, 223, 225
- Пачоли, Лука 137
- Пеано, Джузеппе 249
- Пеано, заполняющая пространство кривая 249–250
- Пелл, Джон 62
- Пензиас, Арно 13
- Пенроуз, Роджер 130
- Пенроуза, мозаика 130, 132, см. цв. илл. 23b
- Пентаграмма (пентальфа) 134–136
- Пентаграмма звездчатая 136
- Пентаграмма-арабеска 136
- Пентатл (Эратосфен) 22
- Передаточная функция 82
- Песчаный морской еж, симметрия 133
- Пирамиды Фалес и 20
- египетские 133–134
- фрактальные 246
- Пирамиды Гизы 250
- Пифагор 24
- Пифагорейцы, орден 24
- Пифагорова лютня 251
- «Пластмассовая» последовательность 147
- Платон 137
- Площадь Согласия (Париж) 26, см. цв. илл. 8
- Повторные корни 161–163
- Подобие, геометрическое 20–23, см. также Самоподобие
- Позиционные системы счисления
- анализ алгоритма деления и 199–202
- нахождение цифр целого числа и 209
- по основанию m 204
- со смешанным основанием 202–209
- «Полная арифметика» (*Arithmetica Integra*), Штифель 159
- Полугномоны (дигномонный витой прямоугольник) 115
- Постоянная распространения 97
- линии передачи 97
- Природа спирали в 14–17
- феномен расхождения в 15–16
- Произведение кронекеро *см. также* Фракталы 04
- ассоциативность 212–218
- в отношении других операций 243–245
- коммутативность 216–218, 238
- матрицы и перпендикулярного ей вектора 238
- переопределение 209–212
- трехмерное 237
- Пропорция 106–107
- Пропорция, божественная 135
- Процессы, итерационные 87–90
- Прямоугольники гомогномонные 110–112, 168
- дигномонные витые 112–117
- левосторонние витые золотые 128–129
- моногномонные витые 108–113, 117
- Пятиугольная Эйфелева башня 251–252
- Равноугольность 171–174
- Разность потенциалов 84

- Разрешение, угловое 168–169
 Рамануджан, Шриниваса 163
 Ранг фигурного числа 27
 Распространение волны 96–98
 Резистор 190–191
 Реп-тайлы 156
 Рим 25, 26
 Рихтер, Петер Х. 10
 «Рост и форма» (*On Growth and Form*), д'Арси Томпсон 12
 Рудофф, Кристофф 159
 Ряд, гармонический 181
- Scientific American* колонка Гарднера 156
 — статьи Стюарта 10
 Салех, Фатхи 13
 Самоподобие *см. также* Гномонность
 — витых прямоугольников с правильной затравкой 116–117
 — логарифмических спиралей 16–17, 116–120, 129–130, 171, 250
 — фракталов 16–17, 219–220
 — фрактальной матрицы 220–222
 Свифт, Джонатан 246
sectia aurea (золотое сечение) 138
 Серпинского ковер 226–228
 — пирамида 226–228
 — салфетка 226, 235–236
 — треугольник 226, 250
 Серре, Мишель 22
Сетиат 17
 Сиена (Асуан) 22
 Сила 187
 — электродвижущая 190
 Скорость тангенциальная 187–189
 — угловая 97, 196–197
 Спектры иррациональных квадратных корней 51
spira mirabilis (чудесная спираль) 17
 Спирали в природе 14–17
 — затухающие колебания и 182–186, 188–189
 — исчисление конечных разностей и 182, 194–197
 — логарифмические, длина 174–177
 — логарифмические, равноугольность 171–174
 — логарифмические, самоподобие 16–17, 116–120, 167, 171, 250
 — логарифмические, спрямление 175
 — матрица поворота 164–166
 — моногномонные 166–171
 — прямоугольные дигномонные 178–181
 — сплетающиеся 177
 — сферические 174
 Спираль Архимедова 181–182
 — дигномонная 180
 — золотая прямоугольная 153–170
 — золотая прямоугольная моногномонная 170
 — золотая треугольная 132
 — серебряная 151–153
 — уравновешенная (Архимедова) 181–182
 Стюарт, Иэн 10, 147
 Сфорца, герцог Людовик 135
 Схемы электрические лестничного типа входной импеданс 86
 — итерационные 87–90
 — компоненты 84–85
 — линии передачи 94
 — мнимые компоненты 90–92
 — сопротивление 85–87
 — топологическое сходство с непрерывными дробями 101–102
 — характеристический импеданс 194, 195
 «Схождение с креста» (Ван-дер-Вейден) 139
 «Счет» (*Rechnung*), Апиан 159

- Таблица конечных разностей Ньютона 30
- Тарталья (Никколо Фонтана) 159–161
- Тензоры 251
- Теорема Ньютона о разложении бинома 223
- «Теорема Пифагора» (*Das Theorem der Pythagoras*), Набер 130
- «Теория багенодье» (*Théorie du Baguenodier*), Гро 38
- Тернбулл, Г. У. 14, 50
- Тетракт 24
- Ток, электрический 84–85, 189–193
- Томпсон, д'Арси Уэнтворт 12, 15, 130, 222
- Top plate 21b
- Торричелли, Эванджелиста 176
- Треугольник золотой 127–128
- Треугольники витые гомогномонные 119, 120
- витые равносторонние 119, 120
- гомогномонные 120, 124
- египетские 133–134
- Трисекция угла 181
- Тутмос 17
- Туэ, Аксель 234
- Туэ – Морса, последовательность 234–235, 244–245
- и замощение 231, 234–235
- Тысячелистник 141–143
- Уайлз, Эндрю 27
- Угловая скорость 97, 196–197
- Угловое разрешение 168–169
- Угол расхождения 15–16
- Улитка 156
- треугольная 154–156
- Уравнения в конечных разностях 190, 194–197
- Ускорение 232
- Фабр, Жан-Анри 14
- Фазовая картина 186
- Фазовое пространство 186
- Фалес Милетский 20
- Фейнберг, Марк 61
- Ферма́, Пьер де 27
- Ферма́, последняя теорема 27
- Феррари, Луиджи 161
- Фибоначчи последовательность биномиальный коэффициент и 66–68
- гиперболические и тригонометрические функции и 75–76
- дигномонные простые периодические дроби и 70–72, 79–80
- завиток Фибоначчи 108, 129–130
- затравка и гномонные числа 61
- лестница Фибоначчи 90
- моногномонные простые периодические дроби и 68–70, 78
- описание 61
- определение в явном виде 62–66
- полигномонные простые периодические дроби и 76–77, 81
- произвольно оконченные простые периодические дроби и 72–75
- рекурсивное определение 61
- формулы 77–81
- Фидий 124, 134, 148
- Филлотаксия 142
- Фонтана, Никколо (Тарталья) 159–161
- Фракта́лы см. также Произведение кронекерово; Матрицы 04
- губка Менгера 238, 242
- замощение плоскости 249–250
- звенья и цепи 250–252
- иррегулярные ломаные 251–252
- канторова пыль 232
- ковер Серпинского 226–228
- кривая Коха 244, 246, 248
- кривая Пеано 246–247
- логарифмическая спиральная огибающая 16–17

- ломаная Леви 250
- матрицы 219
- многомерные решетки 229–238
- отображение см. цв. илл. 7
- пирамида Серпинского 238–243
- последовательность Туэ–Морса 234–235, 240–241
- примеры 245–249
- регулярные ломаные смешанного типа 251
- решетки 219–229
- салфетка Серпинского 226
- смешанные 202–209
- «Фрактальная геометрия природы» (*The Fractal Geometry of Nature*), Мандельброт 10, 209
- Фьоре (Флоридус) 161

- Хабаша, Лабиб 26
- Ханойская башня 38–41
- Хантли, Х. Э. 141–143
- Характеристическое уравнение 194, 195
- Хатшепсут 26
- Химерический остров 248
- Хогарт, Вернер Э., мл. 59

- Царство (Древнее, Среднее; Египет) 17
- «Цирк» (*Parade de Cirque*), Сёра 139
- Цифры целого числа, нахождение 206–208

- Частные, неполные 46
- Частота 191, 193
- «Число: язык науки» (*Number: The Language of Science*), Данциг 12
- Числа Падована 10
- Трибоначчи 61
- гексадические 34
- диадические, степени 33–35
- золотое 124–143
- и геометрия 22–24
- квадратные 31–32
- m -адические 33–34
- мнимые 82
- монадические 34
- натуральные 23–24
- пентадические 34
- «пластмассовое» 148
- простые 223–224
- рациональные 23
- серебряное 147–163
- соразмерные 23
- тетрадические 34
- треугольные, свойство 30–31
- триадические 34, 41–42
- триадические, степени 41–42
- фигурные 27–42
- фигурные, порядок 27–28

- Шредингер, Эрвин 228
- Штифель, Михаэль 159

- Эйлер, Леонард 43, 51
- Эйнштейн, Альберт 12
- Элементарное приращение времени 196
- угловое 164
- Ереира (паук) 172
- Эратосфен (Пентатл) 22
- Эффект бабочки 190
- Эшер, Мориц 16
- Эшера, локсодрома 174

Интересующие Вас книги нашего издательства можно заказать почтой или электронной почтой:

subscribe@rcd.ru

Внимание: дешевле и быстрее всего книги можно приобрести через наш Интернет-магазин:

<http://shop.rcd.ru>

Книги также можно приобрести:

1. Москва, ФТИАН, Нахимовский проспект, д. 36/1, к. 307, тел.: 332–48–92 (почтовый адрес: Нахимовский проспект, д. 34).
2. Москва, ИМАШ, ул. Бардина, д. 4, корп. 3, к. 414, тел. 135–54–37.
3. МГУ им. Ломоносова (ГЗ, 15 этаж).
4. Магазины:

Москва: «Дом научно-технической книги» (Ленинский пр., 40)

«Московский дом книги» (ул. Новый Арбат, 8)

«Библиоглобус» (м. Лубянка, ул. Мясницкая, 6)

С.-Пб.: «С.-Пб. дом книги» (Невский пр., 28)

Мидхат ГАЗАЛЕ

ГНОМОН ОТ ФАРАОНОВ ДО ФРАКТАЛОВ

Дизайнер М. В. Ботя

Технический редактор А. В. Ширококов

Компьютерная верстка С. В. Высоцкий

Корректор М. А. Ложкина

Подписано в печать 29.05.02. Формат 60 × 84¹/₁₆.

Печать офсетная. Усл. печ. л. 15,81. Уч. изд. л. 15,88.

Гарнитура Computer Modern Roman. Бумага офсетная №1.

Тираж 1000 экз. Заказ №

АНО «Институт компьютерных исследований»

426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.

Лицензия на издательскую деятельность ЛУ №084 от 03.04.00.

<http://rcd.ru> E-mail: borisov@rcd.ru
