С. Д. ИВАСИШЕН

ЛИНЕЙНЫЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ

КИЕВ
ГОЛОВНОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИЗДАТЕЛЬСКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ
«ВИЩА ШКОЛА»
1987

22.143
И 23

УДК 517.9

Линейные параболические граничные задачи / С. Д. Ивасишен — К.: Вища шк. Головное изд-во, 1987.— 72 с.— (Современные достижения математики и ее приложений).

Изложены результаты исследования корректной разрешимости и возможности представления в интегральной форме решений параболических граничных задач в простейших ситуациях. Эти результаты лежат в основе хорошо развитой общей теории линейных параболических граничных задач, которая находит важные приложения в теории уравнений с частными производными, математической физике, теории случайных процессов, в химической и биологической кинетике и др.

Кроме краткого обзора современного состояния теории параболических граничных задач приведены некоторые нерешенные проблемы, а также задачи для самостоятельного решения.

Для студентов и преподавателей вузов, а также лиц, интересующихся теорией уравнений с частными производными и ее приложениями.

Библиогр. 30 назв.

Рецензент доктор физико-математических наук, профессор *М. Л. Горбачук* (Институт математики АН УССР)

Редакция литературы по математике и физике
Зав. редакцией *Ю. Е. Кострица*

И $\frac{1702050000-277}{\text{М } 211\ (04)-87}$ БЗ—21—9—87

© Издательское объединение «Вища школа», 1987

ВВЕДЕНИЕ

Книга посвящена теории граничных задач для линейных параболических уравнений и систем уравнений с частными производными.

Параболические уравнения впервые появились при изучении явлений теплопроводности и диффузии. Простейшим из параболических уравнений является уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right)=f, \qquad (1)$$

описывающее процесс распространения тепла в однородном изотропном твердом теле. Это уравнение впервые было выведено французским математиком и физиком Ж. Фурье (1768—1830). В 1938 г. в работе «О проблеме Коши для линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций» (см. [1]) советский математик И. Г Петровский (1901—1973) определил широкий класс систем уравнений с частными производными, которые, как оказалось, обладают многими свойствами уравнения теплопроводности. В мировой литературе эти системы называются *системами, параболическими по Петровскому*. Позднее были предложены различные обобщения определения параболических по Петровскому систем (об этом см. в [1—4]).

Теория параболических уравнений постоянно вызывала и вызывает значительный интерес у многих исследователей. Причиной этому, по-видимому, является, с одной стороны, исключительная практическая важность параболических уравнений, а с другой — то, что их исследование связано с развитием различных разделов математики: теории рядов и интегралов, функционального анализа, теории приближений, теории вероятностей и случайных процессов.

К параболическим уравнениям и системам уравнений приводит математическое описание многих сложных явлений в современном естествознании, экономике и технике. Кроме классических задач теплопроводности и диффузии, параболические уравнения и системы встречаются, например, в теории тепло- и массопереноса при описании процессов сушки и охлаждения, в теории ядерных цепных реакций при изучении процесса замедления нейтронов, в теории сигналов при макроскопическом описании случайного процесса на выходе радиотехнического устройства, при изучении многих процессов в химической и биологической кинетике и в других задачах (об этом см. [5; 6] и приведенную там литературу).

Как известно, одних уравнений еще недостаточно для описания того или иного конкретного физического процесса. Пусть, например, требуется найти температуру u внутри тела в любой момент времени. В данном случае, кроме уравнения (1), которому удовлетворяет функция u, необходимо знать еще распределение температуры внутри тела в начальный момент времени (начальное условие):

$$u|_{t=0} = \varphi \tag{2}$$

и тепловой режим на границе S тела (граничное условие). Граничное условие может быть задано различными способами. Например, в каждой точке поверхности S может задаваться температура или тепловой поток. При этом граничное условие будет иметь соответственно вид

$$u|_S = g_1, \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_S = g_2, \tag{4}$$

где g_1 и g_2 — заданные функции от времени t и точки поверхности S, а $\frac{\partial}{\partial \nu}$ означает дифференцирование по нормали к S. Условия (3) и (4) называются соответственно *условиями Дирихле* и *Неймана*. Они содержат производные не выше первого порядка. Однако в приложениях встречаются задачи, приводящие к граничным условиям, которые содержат производные любого порядка. Такая задача поставлена и изучена, например, в работе [7].

Задача о нахождении решения уравнения (1), удовлетворяющего начальному условию (2) и некоторому граничному условию, называется *граничной задачей* для этого уравнения. В случае граничных условий (3) и (4) она называется соответственно *задачей Дирихле* и *Неймана*.

Если требуется определить температуру тела и по каким-либо причинам не сказывается влияние граничных условий, то можно предполагать, что границы не существует, тело занимает все пространство и остаются лишь начальные условия. Такая задача называется *задачей Коши*.

Приведенные выше граничные задачи для уравнения теплопроводности являются хорошо поставленными, то есть они корректно разрешимы в естественных классах функциональных пространств. Под корректной разрешимостью граничной задачи в функциональном пространстве X понимается, как обычно, факт существования решения из пространства X при любых допустимых правых частях уравнений, начальных и граничных условий, единственность этого решения и его непрерывную зависимость от правых частей задачи.

Если рассматривать произвольные параболические уравнения или системы уравнений, то вполне естественно возникает непростой вопрос: сколько и какие граничные условия следует задавать, чтобы соответствующая задача была хорошо поставленной? Ответ на этот вопрос дает общая теория линейных параболических граничных задач, созданная в 60-е годы [2—4; 8; 9]. Возникшее в ней алгебраическое условие дополнительности является аналогом условия, найденного ранее для случая эллиптических систем советским математиком Я. Б. Лопатинским (1906—1981). Условие дополнительности вместе с условием параболичности системы уравнений определяет параболическую граничную задачу. Отметим, что условия параболичности задачи задаются лишь группами старших в параболическом смысле членов системы уравнений и граничных условий.

Для параболических граничных задач доказаны теоремы об их корректной разрешимости в пространствах Гёльдера и Соболева — Слободецкого (шаудеровская теория и L_p-теория). Установленные при этом оценки решений (так называемые априорные оценки) являются, как оказалось, необходимыми и достаточными условиями параболичности задачи.

Здесь изложены основные результаты шаудеровской теории параболических граничных задач для случая параболических по Петровскому систем уравнений первого порядка по временной координате t и произвольного порядка по пространственным координатам $x_1, \ldots, x_n$. Доказательства приведены лишь для простейших задач. Ограниченный объем, к сожалению, не позволил изложить основные результаты L_p-теории, которая развивалась параллельно с шаудеровской.

Список основных обозначений

$\equiv$ — равно по определению.

n, b и N — фиксированные натуральные числа, $q \equiv \frac{2b}{2b-1}$.

$\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, \dots, x_n)$, $|x| \equiv (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$, $\mathbb{R}^1 \equiv \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n_+ \equiv \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$; точки в $\mathbb{R}^{n-1}$ обозначаются $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$, так что $x = (x', x_n)$; множество $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$ также будет обозначаться $\mathbb{R}^{n-1}$; точки в $\mathbb{R}^{n+1}$ обозначаются $(t, x) = (t, x_1, \dots, x_n)$, при этом t интерпретируется как временная координата, а $x_1, \dots, x_n$ — как пространственные координаты.

$$\Pi \equiv (0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \quad \Pi^+ \equiv (0, \infty) \times \mathbb{R}^n_+, \quad \Pi' \equiv (0, \infty) \times \mathbb{R}^{n-1},$$

Ω — область в $\mathbb{R}^n$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$.

Для фиксированного числа $T > 0$ $\Pi_T \equiv (0, T] \times \mathbb{R}^n$, $\Pi_T^+ \equiv (0, T] \times \mathbb{R}^n_+$, $\Pi_T' \equiv (0, T] \times \mathbb{R}^{n-1}$, $Q_T \equiv (0, T] \times \Omega$, $S_T \equiv (0, T] \times \partial\Omega$.

$D_t^1 \equiv \frac{\partial}{\partial t}$, $D_{x_j}^1 \equiv \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}$, i — мнимая единица, $1 \leqslant j \leqslant n$.

Если $k = (k_1, \dots, k_n)$, $k_1, \dots, k_n$ — целые неотрицательные числа, $x \in \mathbb{R}^n$, то $|k| = k_1 + \dots + k_n$, $D_x^k \equiv D_{x_1}^{k_1} \dots D_{x_n}^{k_n}$, $x^k \equiv x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$.

$\Delta_x \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ — оператор Лапласа.

$\Delta_t^\tau f(t, x) \equiv f(t, x) - f(\tau, x)$, $\Delta_x^y f(t, x) \equiv f(t, x) - f(t, y)$.

I — единичная матрица порядка N или тождественный оператор.

K_{rs} — совокупность всех матриц M размера $r \times s$, элементами M_{jk} которых являются комплексные числа. Если $M \in K_{rs}$, то

$$|M| \equiv \max\{|M_{jk}| \mid 1 \leqslant j \leqslant r,\ 1 \leqslant k \leqslant s\}.$$

$F_n[\cdot]$ и $F_n^{-1}[\cdot]$ — прямой и обратный операторы преобразования Фурье функций n переменных, то есть

$$F_n[f](\sigma) \equiv \int_{\mathbb{R}^n} \exp\{-i(x, \sigma)\} f(x)\, dx, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n,$$

$$F_n^{-1}[g](x) \equiv (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\{i(x, \sigma)\} g(\sigma)\, d\sigma, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где $(x, \sigma) \equiv \sum_{j=1}^n x_j \sigma_j$.

$L[\cdot]$ и $L^{-1}[\cdot]$ — прямой и обратный операторы преобразования Лапласа, то есть

$$L[f](p) \equiv \int_0^{\infty} \exp\{-pt\} f(t)\, dt, \quad p \in \mathbb{C}_a,$$

$$L^{-1}[g](t) \equiv (2\pi i)^{-1} \lim_{p_2 \to \infty} \int_{p_1 - ip_2}^{p_1 + ip_2} \exp\{pt\} g(p)\, dp, \quad t > 0,$$

где $\mathbb{C}_a \equiv \{p \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} p > a\}$, a — неотрицательная постоянная, определяемая функцией f, $p_1 > a$.

Необходимые сведения о преобразованиях Фурье и Лапласа можно найти, например, в книгах [10; 11].

В заключение определим используемые пространства Гёльдера. Пусть l, r и s — некоторые числа, причем $l > 0$ нецелое, r и s натуральные. Пусть $[l]$ — целая часть числа l. Обозначим через $C^l(\Omega, K_{rs})$ и $C^l(Q_T, K_{rs})$ соответственно линейные пространства непрерывных функций u: $\bar{\Omega} \to K_{rs}$ и v: $\bar{Q}_T \to K_{rs}$, имеющих непрерывные производные $D_x^k u$, $|k| \leqslant [l]$, и $D_t^{k_0} D_x^k v$, $2bk_0 + |k| \leqslant [l]$, и конечные значения величин

$$\|u\|_{\Omega}^{l} \equiv \sum_{|k| \leqslant [l]} \sup_{x \in \bar{\Omega}} |D_x^k u(x)| + \sum_{|k| = [l]} \sup_{\{x, y\} \subset \bar{\Omega}} \frac{|\Delta_x^y D_x^k u(x)|}{|x - y|^{l - [l]}} \tag{5}$$

и

$$\|v\|_{Q_T}^{l} \equiv \sum_{2bk_0 + |k| \leqslant [l]} \sup_{(t, x) \in \bar{Q}_T} |D_t^{k_0} D_x^k v(t, x)| +$$

$$+ \sum_{2bk_0 + |k| = [l]} \sup_{\{(t, x), (t, y)\} \subset \bar{Q}_T} \frac{|\Delta_x^y D_t^{k_0} D_x^k v(t, x)|}{|x - y|^{l - [l]}} +$$

$$+ \sum_{0 < l - 2bk_0 - |k| < 2b} \sup_{\{(t, x), (\tau, x)\} \subset \bar{Q}_T} \frac{|\Delta_t^{\tau} D_t^{k_0} D_x^k v(t, x)|}{|t - \tau|^{\frac{l - 2bk_0 - |k|}{2b}}} \tag{6}$$

(здесь и далее $\bar{\Omega}$ и $\bar{Q}_T$ обозначают замыкания множеств Ω и Q_T). Формулы (5) и (6) определяют в линейных пространствах $C^l(\Omega, K_{rs})$ и $C^l(Q_T, K_{rs})$ нормы, относительно которых эти пространства являются банаховыми.

Чтобы ввести пространство Гёльдера $C^l(S_T, K_{rs})$ функций, определенных на боковой поверхности цилиндра Q_T, предположим, прежде всего, что в каждой своей точке граница $\partial\Omega$ имеет касательную плоскость. Пусть y — фиксированная точка $\partial\Omega$. Рассмотрим локальную систему координат с центром в точке y, то есть прямоугольную декартову систему координат $\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n$, ось $\hat{x}_n$ которой направлена по внутренней нормали к $\partial\Omega$ в точке y, а остальные оси лежат в касательной плоскости. Предположим, что для каждой точки $y \in \partial\Omega$ существует такая окрестность O_y, что кусок границы $\partial\Omega \cap O_y$ задается уравнением

$$\hat{x}_n = F(\hat{x}'), \quad \hat{x}' \in B \equiv \{\hat{x}' \in \mathbb{R}^{n-1} \mid |\hat{x}'| < d\},$$

в котором $F \in C^l(B, K_{11})$, $\| F \|_B^l \leqslant c$, $l > 1$, причем постоянные d и c не зависят от точки y. Если это имеет место, то записываем $\partial\Omega \in C^l$.

Рассмотрим преобразование

$$\hat{x} \mapsto \bar{x}, \quad \bar{x}_k = \hat{x}_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1, \quad \bar{x}_n = \hat{x}_n - F(\hat{x}').$$

Пусть преобразование

$$x \mapsto \bar{x} \tag{7}$$

есть суперпозиция преобразований $\hat{x} \mapsto \bar{x}$ и $x \mapsto \hat{x}$. Оно переводит $\partial\Omega \cap O_y$ в шар B на гиперплоскости $\bar{x}_n = 0$.

Рассмотрим функцию u: $\bar{S}_T \to K_{rs}$. Для каждой фиксированной точки $y \in \partial\Omega$, в результате преобразования (7), функция $u(t, x)$, $(t, x) \in (0, T] \times (\partial\Omega \cap O_y)$, переходит в функцию $\bar{u}_y(t, \bar{x}')$, $(t, \bar{x}') \in (0, T] \times B$. Говорят, что $u \in C^l(S_T, K_{rs})$, если для любой точки $y \in \partial\Omega$ $\bar{u}_y \in C^l((0, T] \times B, K_{rs})$ и конечно выражение

$$\| u \|_{S_T}^l \equiv \sup_{y \in \partial\Omega} \| \bar{u}_y \|_{(0,T]\times B}^l,$$

определяющее норму в пространстве $C^l(S_T, K_{rs})$.

Пусть G обозначает множество Ω, Q_T или S_T, а G_T — множество Q_T или S_T.

Из определения пространств $C^l(G, K_{rs})$ следует, что для любого нецелого положительного числа $m < l$ $C^m(G, K_{rs}) \subset C^l(G, K_{rs})$.

Через $C_0^l(G_T, K_{rs})$ обозначим множество функций $u \in C^l(G_T, K_{rs})$, удовлетворяющих условиям

$$D_t^j u |_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant j \leqslant \left[\frac{l}{2b} \right].$$

Будем использовать также следующие обозначения: $C^l(G) \equiv C^l(G, K_{11})$, $C_N^l(G) \equiv C^l(G, K_{N1})$, $C_{0N}^l(G_T) \equiv C_0^l(G_T, K_{N1})$.

§ 1. ПОСТАНОВКА ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ

1.1. Определение параболической системы. Будем рассматривать систему N линейных уравнений относительно N неизвестных функций u_ν, $1 \leqslant \nu \leqslant N$, коэффициенты которой определены на некотором множестве $Q \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Определение параболичности системы по Петровскому состоит из некоторого предположения о структуре системы и свойства корней специального алгебраического уравнения.

Дифференцированию по временной переменной t приписывается некоторый вес r таким образом, что однократному дифференцированию по t соответствует r-кратное дифференцирование по каждой из пространственных переменных $x_1, \ldots, x_n$. В соответствии с этим в систему должны входить только члены, содержащие производные от u_ν вида $D_t^{k_0} D_x^k u_\nu$, $rk_0 + |k| \leqslant rn_\nu$, $1 \leqslant \nu \leqslant N$, где $n_1, \ldots, n_N$ — фиксированные натуральные числа. Предполагается еще, что система разрешена относительно старших производных по t. Для случая $n_1 = \ldots = n_N = 1$ и $r = 2b$ рассматриваемая система имеет вид

$$D_t^1 u_\nu = \sum_{\mu=1}^{N} \sum_{|k| \leqslant 2b} a_k^{\nu\mu}(t, x) D_x^k u_\mu, \quad (t, x) \in Q, \quad 1 \leqslant \nu \leqslant N,$$

или в матричной форме записи

$$A(t, x, D_t, D_x) u \equiv D_t^1 - \sum_{|k| \leqslant 2b} a_k(t, x) D_x^k u = 0, \quad (t, x) \in Q. \tag{1.1}$$

Здесь a_k, $|k| \leqslant 2b$,— квадратные матрицы порядка N, u — матрица-столбец высоты N.

Обозначим через $A_0(t, x, D_t, D_x)$ главную часть дифференциального выражения $A(t, x, D_t, D_x)$, то есть

$$A_0(t, x, D_t, D_x) \equiv ID_t^1 - \sum_{|k|=2b} a_k(t, x) D_x^k. \tag{1.2}$$

Определение 1. *Система* (1.1) *называется* *параболической по Петровскому на множестве* Q, *если существует такая постоянная* $\delta > 0$, *что р-корни уравнения*

$$\det A_0(t, x, p, \sigma) \equiv \det\Big(Ip - \sum_{|k|=2b} a_k(t, x)\sigma^k\Big) = 0 \quad (1.3)$$

удовлетворяют неравенствам

$$\operatorname{Re} p_j(t, x, \sigma) \leqslant -\delta|\sigma|^{2b}, \quad 1 \leqslant j \leqslant N, \quad (1.4)$$

для любых $(t, x) \in Q$ и $\sigma \in \mathbb{R}^n$.

В случае одного уравнения ($N = 1$) второго порядка ($b = 1$) с вещественными коэффициентами:

$$D_t^1 u + \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(t, x) D_{x_j}^1 D_{x_k}^1 u + \sum_{j=1}^{n} a_j(t, x) D_{x_j}^1 u + \\ + a(t, x) u = 0, \quad (t, x) \in Q, \quad (1.5)$$

неравенство (1.4) приобретает вид

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(t, x)\sigma_j\sigma_k \geqslant \delta|\sigma|^2. \quad (1.6)$$

Так, для уравнения теплопроводности

$$D_t^1 u - a^2\Delta_x u = 0 \quad (1.7)$$

условие (1.6) выполнено с $\delta = a^2$.

В теории тепло- и массопереноса (см. [5]) встречается система уравнений второго порядка вида

$$D_t^1 u - M\Delta_x u = 0, \quad (1.8)$$

где M — квадратная матрица порядка N с постоянными вещественными элементами, характеристические числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ которой удовлетворяют условию $\operatorname{Re}\lambda_j > 0$, $1 \leqslant j \leqslant N$. Такая система является параболической по Петровскому с постоянной $\delta = \min\{\operatorname{Re}\lambda_j \mid 1 \leqslant j \leqslant N\}$. Действительно, уравнение (1.3) для системы (1.8) имеет вид $\det(Ip + M|\sigma|^2) = 0$, откуда

$$\operatorname{Re} p_j = -\operatorname{Re}\lambda_j|\sigma|^2 \leqslant -\delta|\sigma|^2, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n, \quad 1 \leqslant j \leqslant N.$$

В дальнейшем будем рассматривать только параболические по Петровскому системы, называя их просто параболическими.

Замечание 1. Если система (1.1) параболическая на множестве Q, то для всех $(t, x) \in Q$

$$\det a_{\bar{k}}(t, x) \neq 0, \quad \bar{k} = (0, \ldots, 0, 2b). \quad (1.9)$$

Действительно, если бы для некоторой точки $(t^0, x^0) \in Q$ $\det a_{\bar{k}}(t^0, x^0) = 0$, то это означало бы, что уравнение (1.3) имеет корень $p = 0$ при $\sigma = (0, \ldots, 0, \sigma_n) \neq 0$ и $(t, x) = (t^0, x^0)$, что противоречит условию (1.4).

Из условия (1.9) следует, что производную $D_{x_n}^{2b} u$ от решения u системы $A_0(t, x, D_t, D_x)\, u = 0$ можно представить в виде линейной комбинации производных $D_t^1 u$ и $D_x^k u$ с $|k| = 2b$ и $k_n < 2b$.

1.2. Постановка общей граничной задачи. Условие дополнительности. Пусть $A(t, x, D_t, D_x)$ — дифференциальное выражение из (1.1), коэффициенты которого определены на замыкании $\bar{Q}_T$ цилиндра Q_T. Рассмотрим m дифференциальных выражений с коэффициентами, определенными на замыкании $\bar{S}_T$ боковой поверхности этого цилиндра.

$$B_j(t, x, D_t, D_x) \equiv \sum_{2bk_0 + |k| \leqslant r_j} b_{jk_0k}(t, x)\, D_t^{k_0} D_x^k,$$

$$(t, x) \in \bar{S}_T, \quad 1 \leqslant j \leqslant m, \tag{1.10}$$

где b_{jk_0k}, $2bk_0 + |k| \leqslant r_j$, $1 \leqslant j \leqslant m$,— матрицы-строки длины N; m, r_j, $1 \leqslant j \leqslant m$,— целые числа, причем $m \geqslant 1$, $r_j \geqslant 0$.

Поставим задачу о нахождении функции u: $Q_T \to K_{N1}$, удовлетворяющей в Q_T системе уравнений

$$A(t, x, D_t, D_x)\, u = f, \tag{1.11}$$

на нижнем основании Ω цилиндра Q_T начальному условию

$$u|_{t=0} = \varphi \tag{1.12}$$

и на границе S_T граничным условиям

$$B_j(t, x, D_t, D_x)\, u|_{S_T} = g_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant m. \tag{1.13}$$

Символами $u|_{t=0}$ и $v|_{S_T}$ здесь и далее обозначены пределы функций u и v на множествах $\{t = 0\}$ и S_T соответственно. Характер этих пределов определяется теми функциональными пространствами, в которых рассматривается задача.

Через $B_{j0}(t, x, D_t, D_x)$, $1 \leqslant j \leqslant m$, обозначим главные в параболическом смысле части выражений (1.10), то есть

$$B_{j0}(t, x, D_t, D_x) \equiv \sum_{2bk_0 + |k| = r_j} b_{jk_0k}(t, x)\, D_t^{k_0} D_x^k, \quad 1 \leqslant j \leqslant m, \tag{1.14}$$

а через r_0 число

$$r_0 \equiv \max(0, r_1 - 2b, \ldots, r_m - 2b). \tag{1.15}$$

Будем предполагать выполненным следующее условие.

Условие 1. *Система* (1.11) *является параболической на* $\bar{Q}_T$.

Найдем условия, накладываемые на граничные выражения (1.10), в том числе и на m, при которых задача (1.11) — (1.13) хорошо поставлена.

Сначала рассмотрим модельный случай этой задачи. Предположим, что система и граничные условия содержат лишь главные в параболическом смысле части выражений A и B_j, $1 \leqslant j \leqslant m$, причем их коэффициенты постоянны, $T = \infty$, $\Omega = \mathbb{R}^n_+$, $f = 0$ и $\varphi = 0$. Рассматриваемая модельная задача имеет вид

$$A_0(D_t, D_{x'}, D_{x_n})\, u(t, x) = 0, \quad (t, x) \in \Pi^+,$$

$$u(t, x)|_{t=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^k_+, \tag{1.16}$$

$$B_{j0}(D_t, D_{x'}, D_{x_n})\, u(t, x)|_{x_n=0} = g_j(t, x'), \quad (t, x') \in \Pi',$$

$$1 \leqslant j \leqslant m.$$

Для решения этой задачи будем использовать преобразование Фурье $F_{n-1}[\cdot]$ по x' и преобразование Лапласа $L[\cdot]$ по t. Предположим, что граничные функции g_j, $1 \leqslant \leqslant j \leqslant m$, обладают всеми необходимыми для дальнейших рассуждений свойствами, в частности, существует их преобразование Фурье по x' и преобразование Лапласа по t:

$$\psi_j = (LF_{n-1})[g_j], \quad 1 \leqslant j \leqslant m. \tag{1.17}$$

Ищем решение задачи (1.16) в виде

$$u(t, x) = (F^{-1}_{n-1}L^{-1})[v(p, \sigma', x_n)](t, x), \quad (t, x) \in \Pi^+. \tag{1.18}$$

Чтобы эта функция действительно была решением задачи (1.16), функция v должна быть решением следующей граничной задачи на полуоси $\{x_n > 0\}$ для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$A_0(p, \sigma', D_{x_n})\, v(p, \sigma', x_n) = 0, \quad x_n > 0, \tag{1.19}$$

$$B_{j0}(p, \sigma', D_{x_n})\, v(p, \sigma', x_n)|_{x_n=0} = \psi_j(p, \sigma'), \quad 1 \leqslant j \leqslant m. \tag{1.20}$$

По самому смыслу формулы (1.18) следует предполагать, что задача (1.19), (1.20) разрешима, по крайней мере, при любых $\sigma' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $p \in \mathbb{C}_a$ (a — некоторая неотрицательная постоянная) и ψ_j, имеющих вид (1.17). К тому же будем рассматривать только такие решения, для которых имеют смысл интегралы, входящие в формулу (1.18), то есть решения, являющиеся преобразованиями Фурье по x' и преобразованиями Лапласа по t функций, определенных в Π^+.

Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений хорошо известно, что система (1.19) как линейная система N уравнений порядка $2b$ имеет $2bN$ линейно независимых решений вида

$$v_j(p, \sigma', x_n) = P_j(p, \sigma', x_n) \exp\{\mu_j(p, \sigma') x_n\},$$
$$x_n > 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant 2bN. \tag{1.21}$$

Здесь P_j, $1 \leqslant j \leqslant 2bN$,— матрицы-столбцы высоты N, элементами которых являются многочлены от x_n, а μ_j, $1 \leqslant j \leqslant 2bN$,— корни характеристического уравнения $\det A_0(p, \sigma', -i\mu) = 0$, среди которых могут быть одинаковы. При этом общее решение системы (1.19) есть линейная комбинация решений (1.21) с произвольными коэффициентами. Пусть τ_j, $1 \leqslant j \leqslant 2bN$, —$\tau$-корни уравнения

$$\det A_0(p, \sigma', \tau) = 0. \tag{1.22}$$

Тогда формулы (1.21) можно записать в виде

$$v_j(p, \sigma', x_n) = P_j(p, \sigma', x_n) \exp\{i\tau_j(p, \sigma') x_n\},$$
$$x_n > 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant 2bN. \tag{1.23}$$

Свойства функций (1.23) существенно определяются свойствами τ-корней уравнения (1.22). Поэтому нужна подробная информация об этих корнях, которую читатель может найти в книгах [2; 3]. Приведем лишь необходимые в дальнейшем сведения о расположении τ-корней и некоторые оценки для них.

Прежде всего отметим, что в силу условия параболичности системы уравнение (1.22) при любых фиксированных p и σ' действительно имеет $2bN$ τ-корней, считая кратность. Чтобы в этом убедиться, достаточно заметить, что коэффициент при τ^{2bN} в уравнении (1.22) отличен от нуля. В противном случае при всех $\tau \in \mathbb{R}$ выполнялось бы равенство $\det A_0(0, 0, \tau) = 0$, которое означает, что при $(\sigma', \tau) \neq 0$ уравнение (1.22) по переменной p имеет нулевой корень. А это противоречит условию параболичности

$$\operatorname{Re} p_j(\sigma', \tau) \leqslant -\delta(|\sigma'|^2 + \tau^2)^b, \quad \delta > 0,$$
$$(\sigma', \tau) \in \mathbb{R}^n, \quad 1 \leqslant j \leqslant N. \tag{1.24}$$

Пусть, далее, δ_1 — фиксированная постоянная из промежутка $(0, \delta)$, где δ — постоянная из условия (1.24).

Положим

$$\Gamma \equiv \{(p, \sigma') \mid \operatorname{Re} p \geqslant -\delta_1 |\sigma'|^2, \quad \sigma' \in \mathbb{R}^{n-1},$$

$$|p| + |\sigma'|^{2b} > 0\}. \qquad (1.25)$$

Лемма 1. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *при любых* $(p, \sigma') \in \Gamma$ *среди* τ*-корней* τ_j, $1 \leqslant j \leqslant 2bN$, *уравнения* (1.22) *ровно* bN *корней имеют положительную мнимую часть* (*их обозначим* τ_j^+, $1 \leqslant j \leqslant bN$) *и столько же отрицательную* (*их обозначим* τ_j^-, $1 \leqslant j \leqslant bN$), *считая их кратность;*

2) *существуют такие постоянные* $\gamma_1 > 0$ *и* $\gamma_2 > 0$, *что для любых* $(p, \sigma') \in \Gamma$

$$|\tau_j(p, \sigma')| \leqslant \gamma_1 (|p| + |\sigma'|^{2b})^{\frac{1}{2b}}, \quad 1 \leqslant j \leqslant 2bN,$$

$$\operatorname{Im} \tau_j^+ (p, \sigma') \geqslant \gamma_2 (|p| + |\sigma'|^{2b})^{\frac{1}{2b}}, \quad 1 \leqslant j \leqslant bN.$$

Используя лемму 1, видим, что среди решений (1.23) имеется ровно bN решений, для которых существуют преобразования $L^{-1} [\cdot]$ и $F_{n-1}^{-1} [\cdot]$. Это решения, соответствующие корням τ_j^+, $1 \leqslant j \leqslant bN$. Они, очевидно, удовлетворяют условию

$$|v(p, \sigma', x_n)| \to 0, \quad x_n \to +\infty. \qquad (1.26)$$

Пусть такими решениями являются первые bN функций (1.23). Тогда решения системы (1.19), удовлетворяющие условию (1.26), определяются формулой

$$v(p, \sigma', x_n) = \sum_{k=1}^{bN} c_k(p, \sigma') v_k(p, \sigma', x_n), \quad x_n > 0, \quad (1.27)$$

где c_k, $1 \leqslant k \leqslant bN$,— произвольные функции от параметров p, σ'. Чтобы найти интересующее нас решение задачи (1.19), (1.20) для любых $(p, \sigma') \in \Gamma$, функции c_k, $1 \leqslant k \leqslant bN$, следует выбрать так, чтобы удовлетворялись условия (1.20):

$$\sum_{k=1}^{bN} B_{j0}(p, \sigma', D_{x_n}) v_k(p, \sigma', x_n)|_{x_n=0} c_k(p, \sigma') = \psi_j(p, \sigma'),$$

$$(p, \sigma') \in \Gamma, \quad 1 \leqslant j \leqslant m. \qquad (1.28)$$

Получили систему m линейных алгебраических уравнений относительно c_k, $1 \leqslant k \leqslant bN$. Она однозначно разрешима при любых ψ_j, $1 \leqslant j \leqslant m$, тогда и только тогда, когда $m = bN$ и

$$\det (B_{j0}(p, \sigma', D_{x_n}) v_k(p, \sigma', x_n)|_{x_n=0})_{j,k=1}^{bN} \neq 0, \quad (p, \sigma') \in \Gamma. \qquad (1.29)$$

Итак, чтобы задача (1.16) была хорошо поставленной, число граничных условий следует брать равным bN и должно выполняться условие (1.29), называемое *условием дополнительности* для задачи (1.16).

Оказывается, что это условие можно сформулировать в более удобном алгебраическом виде. Пусть B_0 — матрица, строками которой являются B_{j0}, $1 \leqslant j \leqslant bN$, а $\hat{A}_0$ — взаимная матрица для A_0, то есть $\hat{A}_0 = A_0^{-1} \det A_0$. Введем обозначения:

$$C(p, \sigma', \tau) \equiv B_0(p, \sigma', \tau)\, \hat{A}_0(p, \sigma', \tau),$$

$$A^+(p, \sigma', \tau) \equiv \prod_{j=1}^{bN} (\tau - \tau_j^+(p, \sigma')).$$

В работах [3; 4] доказано, что условие (1.29) равносильно следующему условию: для любых $(p, \sigma') \in \Gamma$ строки матрицы $C(p, \sigma', \tau)$, как многочлены по τ, линейно независимы по модулю многочлена $A^+(p, \sigma', \tau)$.

Теперь можно привести условия того, чтобы общая граничная задача (1.11) — (1.13) была хорошо поставленной. Они состоят в том, что приведенные выше условия должны выполняться для каждой модельной задачи вида (1.16), полученной из задачи (1.11) — (1.13) отбрасыванием младших членов, «замораживанием» коэффициентов у выражениях A_0 и B_{j0} в любой точке $(t^0, x^0) \in \bar{S}_T$ и переходом к локальной системе координат $\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n$, начало которой совпадает с точкой x^0, а ось $\hat{x}_n$ направлена по внутренней нормали к $\partial\Omega$ в этой точке. Приведем точную формулировку этих условий.

Пусть (t^0, x^0) — произвольно фиксированная точка $\bar{S}_T$, ν — орт внутренней нормали к $\partial\Omega$ в точке x^0. Произвольный вектор $\sigma \in \mathbb{R}^n$ можно однозначно представить в виде $\sigma = \xi + \tau\nu$, где ξ — вектор, лежащий в касательной плоскости к поверхности $\partial\Omega$ в точке x^0, τ — вещественный параметр. Обозначим через Γ_{x^0} множество всех точек (p, ξ), для которых $p \in \mathbb{C}$, ξ — касательный вектор к $\partial\Omega$ в точке x^0 и удовлетворяются условия $|p| + |\xi|^{2b} > 0$, $\operatorname{Re} p \geqslant -\delta_1 |\xi|^{2b}$ с некоторым $\delta_1 \in (0, \delta)$, где δ — постоянная из условия параболичности (1.4).

Рассмотрим многочлен $\det A_0(t^0, x^0, p, \xi + \tau\nu)$ относительно τ. В силу леммы 1 при любых $(p, \xi) \in \Gamma_{x^0}$ он имеет bN корней $\tau_j^+(t^0, x^0, p, \xi)$, $1 \leqslant j \leqslant bN$, с положительной мнимой частью. Отсюда следует, что число m граничных условий (1.13) должно быть равным bN. Как и выше, обозначим

$$C(t^0, x^0, p, \xi, \tau) \equiv B_0(t^0, x^0, p, \xi + \tau\nu)\, \tilde{A}_0(t^0, x^0, p, \xi + \tau\nu),$$

$$A^+(t^0, x^0, p, \xi, \tau) \equiv \prod_{j=1}^{bN} (\tau - \tau_j^+(t^0, x^0, p, \xi)).$$

Условие дополнительности для задачи (1.11) — (1.13) можно сформулировать следующим образом: для любой точки $(t^0, x^0) \in \bar{S}_T$ строки матрицы $C(t^0, x^0, p, \xi, \tau)$, как многочлены по τ, линейно независимы по модулю многочлена $A^+(t^0, x^0, p, \xi, \tau)$, если $(p, \xi) \in \Gamma_{x^0}$.

Замечание 2. Пусть $C'(t^0, x^0, p, \xi, \tau)$ — матрица, элементами которой являются остатки от деления элементов матрицы $C(t^0, x^0, p, \xi, \tau)$ на многочлен $A^+(t^0, x^0, p, \xi, \tau)$. Элементы C'_{jk} матрицы C' запишем в виде

$$C'_{jk}(t^0, x^0, p, \xi, \tau) = \sum_{l=1}^{bN} d_{jk}^{(l)}(t^0, x^0, p, \xi)\, \tau^{l-1}, \quad 1 \leqslant j,\ k \leqslant bN,$$

и рассмотрим матрицу $D(t^0, x^0, p, \xi)$, составленную из коэффициентов $d_{jk}^{(l)}(t^0, x^0, p, \xi)$, $1 \leqslant j,\ k,\ l \leqslant bN$.

Очевидно, что условие дополнительности равносильно следующему условию: при любых $(t^0, x^0) \in \bar{S}_T$ и $(p, \xi) \in \Gamma_{x^0}$ ранг матрицы $D(t^0, x^0, p, \xi)$ равен bN или

$$\sum_{j=1}^{r} |\Delta_j(t^0, x^0, p, \xi)| > 0,$$

где Δ_j, $1 \leqslant j \leqslant r$,— всевозможные миноры порядка bN матрицы D.

В дальнейшем будем считать выполненным следующее равномерное условие дополнительности.

Условие 2. *Число m граничных условий* (1.13) *равно bN и существует постоянная $\delta_2 > 0$ такая, что для любых $(t^0, x^0) \in \bar{S}_T$ и $(p, \xi) \in \Gamma_{x^0}$, $|p| + |\xi|^{2b} = 1$, справедливо неравенство*

$$\sum_{j=1}^{r} |\Delta_j(t^0, x^0, p, \xi)| \geqslant \delta_2.$$

Определение 2. *Задача* (1.11) — (1.13), *для которой выполняются условия* 1 *и* 2, *называется* ***параболической граничной задачей.***

1.3. Примеры. Приведем простейшие примеры параболических граничных задач (во всех задачах 1—6 рассматривается случай $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ с произвольным $n \geqslant 1$, только в задаче 4 считается $n = 1$).

Задача 1 (задача Дирихле для уравнения теплопроводности).

$$D_t^1 u - a^2 \Delta_x u = f, \quad u|_{t=0} = \varphi, \quad u|_{x_n=0} = g.$$

Задача 2 (задача Неймана для уравнения теплопроводности).

$$D_t^1 u - a^2 \Delta_x u = f, \quad u|_{t=0} = \varphi, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x_n}\right|_{x_n=0} = g.$$

Задача 3 (задача с косой производной для уравнения теплопроводности).

$$D_t^1 u - a^2 \Delta_x u = f, \quad u|_{t=0} = \varphi, \quad \left.\sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial u}{\partial x_j}\right|_{x_n=0} = g,$$

где $b_1, \ldots, b_n$ — заданные вещественные числа, причем, $b_n \neq 0$.

Задача 4.

$$D_t^1 u - a^2 \Delta_x u = f, \quad u|_{t=0} = \varphi, \quad D_t^1 u|_{x_n=0} = g.$$

Задача 5.

$$D_t^1 u - a^2 \Delta_x u = f, \quad u|_{t=0} = \varphi, \quad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right|_{x_n=0} = g.$$

Задача 6 (задача Дирихле для одного параболического уравнения порядка $2b$ с постоянными коэффициентами).

$$\begin{gathered} D_t^1 u - \sum_{|k|=2b} a_k D_x^k u = f, \quad u|_{t=0} = \varphi, \quad u|_{x_n=0} = g_1, \\ \left.\frac{\partial u}{\partial x_n}\right|_{x_n=0} = g_2, \ \ldots, \ \left.\frac{\partial^{b-1} u}{\partial x_n^{b-1}}\right|_{x_n=0} = g_b. \end{gathered} \tag{1.30}$$

Количество граничных условий в каждой из задач равно bN, что соответствует требованию из условия 2. Проверим выполнение условия дополнительности.

В задачах 1 — 5, очевидно, имеем $A_0(p, \sigma', \tau) = p + a^2(|\sigma'|^2 + \tau^2)$, $\delta = a^2$, $\tau_1^+ = i\sqrt{a^{-2}p + |\sigma'|^2}$, $A^+(p, \sigma' \tau) = \tau - \tau_1^+, \hat{A}_0(p, \sigma', \tau) = 1$, где под $\sqrt{\cdot}$ понимается значение корня с положительной вещественной частью. Выражение $B_0(p, \sigma', \tau)$ в задачах 1 — 5 соответственно равно 1, $i\tau$, $i\sum_{j=1}^{n-1} b_j\sigma_j + ib_n\tau$, p и $-\tau^2$. Во всех этих примерах $C(p, \sigma', \tau) =$

$= B_0(p, \sigma', \tau)$ и условием дополнительности является условие $C'(p, \sigma') \neq 0$ для любых $(p, \sigma') \in \Gamma$, где $C'(p, \sigma')$ — остаток от деления $C(p, \sigma', \tau)$ на $A^+(p, \sigma', \tau)$ как многочленов по τ, а множество Γ определено в (1.25). Так как в задачах 1 — 5 $C'(p, \sigma')$ равно соответственно 1, $i\tau_1^+$, $ib_n\tau_1^+ + i\sum_{j=1}^{n-1} b_j\sigma_j$, p и $-\tau_1^{+2}$, то получаем, что условие дополнительности выполняется для задач 1, 2, 5, а также 3, если $b_n \neq 0$, и для 4 при $n = 1$. Для задачи 4 в случае $n > 1$ условие дополнительности не выполняется.

Чтобы проверить условие дополнительности для задачи 6, рассмотрим соответствующую ей задачу (1.19), (1.20). Решения последней задачи, удовлетворяющие условию (1.26), очевидно, совпадают с решениями следующей задачи:

$$A^+(p, \sigma', D_{x_n})\, v(p, \sigma', x_n) = 0, \quad x_n > 0,$$

$$\frac{\partial^{j-1}}{\partial x_n^{j-1}} v(p, \sigma', x_n)\,|_{x_n=0} = \psi_j(p, \sigma'), \quad 1 \leqslant j \leqslant b. \tag{1.31}$$

Здесь $A^+(p, \sigma', D_{x_n}) \equiv \prod_{j=1}^{b} [D_{x_n}^1 - \tau_j^+(p, \sigma')]$, где $\tau_j^+(p, \sigma')$, $1 \leqslant j \leqslant b$, — τ-корни с положительной мнимой частью уравнения $p - \sum_{|k|=2b} a_k(\sigma')^{k'}\tau^{k_n} = 0$, $k = (k', k_n)$. Но задача (1.31) есть задача Коши для линейного обыкновенного дифференциального уравнения порядка b, которая, как хорошо известно, имеет единственное решение при любых ψ_j, $1 \leqslant j \leqslant b$. Следовательно, для задачи 6 выполнено условие дополнительности.

Заметим, что для задачи Дирихле в случае параболической системы (то есть задачи (1.30), в которой a_k, $|k| = 2b$, — квадратные матрицы порядка N, а u — матрица-столбец высоты N) условие дополнительности может не выполняться, если $n > 1$ (об этом см. в [4]).

Проверка выполнения условия дополнительности, вообще, является довольно сложной задачей. Непосредственно она может быть проведена лишь в отдельных частных случаях. Иногда удается доказать выполнение условия дополнительности косвенным путем с помощью теорем 3, § 3, и 1, § 4.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Доказать, что вес r любой параболической системы является непременно четным числом.

2. Провести полное доказательство леммы 1.

3. Для системы (1.8) с $N = 2$ в области Π^+ рассмотреть граничную задачу с начальными условиями

$$u_j|_{t=0} = \varphi_j, \quad j = 1, 2,$$

и граничными условиями вида

$$\sum_{j=1}^{2} \alpha_j \frac{\partial u_j}{\partial x_n}\bigg|_{x_n=0} = g_1, \quad \sum_{j=1}^{2} \beta_j u_j|_{x_n=0} = g_2,$$

где α_j, β_j, $j = 1, 2$, — заданные вещественные числа.

Для каких чисел α_j и β_j, $j = 1, 2$, эта задача является параболической в следующих случаях:

а) $M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, $0 < \lambda_1 < \lambda_2$;

б) $M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar\lambda \end{pmatrix}$, $\operatorname{Re}\lambda > 0$, $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$;

в) $M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda > 0$;

г) $M = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda > 0$?

4. Доказать, что задача Дирихле (1.30) для параболической системы в случае $n = 1$ всегда параболическая.

§ 2. ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЙ ПРОСТЕЙШИХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ

2.1. Ядра Пуассона. Рассмотрим следующую параболическую граничную задачу:

$$A_0 u(t, x) = f(t, x), \quad (t, x) \in \Pi^+, \tag{2.1}$$

$$u(t, x)|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n_+, \tag{2.2}$$

$$B_{j0} u(t, x)|_{x_n=0} = g_j(t, x'), \quad (t, x') \in \Pi', \quad 1 \leqslant j \leqslant m. \tag{2.3}$$

Здесь $A_0 \equiv A_0(D_t, D_x)$ и $B_{j0} \equiv B_{j0}(D_t, D_x)$ — дифференциальные выражения, определяемые формулами (1.2) и (1.14), только в них коэффициенты a_k и b_{jk_0k} постоянны.

Найдем формулы, определяющие решения этой задачи. Будем пока считать функции f, φ и g_j, $1 \leqslant j \leqslant m$, бесконечно дифференцируемыми и финитными.

Прежде всего рассмотрим случай, когда $f = 0$ и $\varphi = 0$. Как было выяснено в п. 1.2, решение задачи (2.1) — (2.3) в этом случае определяется формулами (1.18), (1.27), в которых функции c_k, $1 \leqslant k \leqslant m$, находятся из системы алгебраических уравнений (1.28). Решив эту систему, получим

$$v(p, \sigma', x_n) = \sum_{j=1}^{m} V_j(p, \sigma', x_n)\, \psi_j(p, \sigma'), \quad x_n > 0.$$

В силу формулы для преобразований Лапласа и Фурье свертки имеем

$$u(t, x) = \sum_{j=1}^{m} \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} G_j(t-\tau, x-\xi')\, g_j(\tau, \xi')\, d\xi',$$
$$(t, x) \in \Pi^+, \tag{2.4}$$

где

$$G_j(t, x) = (F_{n-1}^{-1} L^{-1})\,[V_j(p, \sigma', x_n)]\,(t, x),$$
$$(t, x) \in \Pi^+, \quad 1 \leqslant j \leqslant m. \tag{2.5}$$

Функции G_j, $1 \leqslant j \leqslant m$, называются *ядрами Пуассона* задачи (2.1) — (2.3).

Для простейших граничных задач ядра Пуассона могут быть непосредственно вычислены. Так, для задач 1 и 2, § 1, V_1 (p, σ', x_n) соответственно равно $\exp\{-\sqrt{a^{-2}p + |\sigma'|^2}\, x_n\}$ и $-\exp\{-\sqrt{a^{-2}p + |\sigma'|^2}\, x_n\} \times (\sqrt{a^{-2}p + |\sigma'|^2})^{-1}$. Используя равенство (2.5) и формулы (см. [10; 11])

$$L[f(t)\exp\{-\alpha t\}] = L[f](p+\alpha),$$
$$F_{n-1}^{-1}[\exp\{-\beta^2|\sigma'|^2\}] = (2\beta\sqrt{\pi})^{-n+1}\exp\left\{-\frac{|x'|^2}{4\beta^2}\right\}, \tag{2.6}$$
$$L^{-1}[\exp\{-\sqrt{\gamma p}\}] = \frac{\sqrt{\gamma}}{2\sqrt{\pi}}\, t^{-\frac{3}{2}} \exp\left\{-\frac{\gamma}{4t}\right\},$$

в которых α, β и γ — постоянные, причем $\gamma > 0$, получаем

$$G_1(t, x) = (F_{n-1}^{-1} L^{-1})\left[\exp\left\{-\sqrt{\left(\frac{x_n}{a}\right)^2 (p + a^2|\sigma'|^2)}\right\}\right] =$$
$$= F_{n-1}^{-1}[\exp\{-a^2 t|\sigma'|^2\}]\, L^{-1}\left[\exp\left\{-\sqrt{\left(\frac{x_n}{a}\right)^2 p}\right\}\right] =$$
$$= (2a\sqrt{\pi t})^{-n+1}\exp\left\{-\frac{|x'|^2}{4a^2 t}\right\}\frac{x_n}{2a\sqrt{\pi}}\, t^{-\frac{2}{3}}\exp\left\{-\frac{x_n^2}{4a^2 t}\right\},$$
$$(t, x) \in \Pi^+.$$

Следовательно, для задачи 1, § 1,

$$G_1(t, x) = (2a\sqrt{\pi})^{-n} t^{-\frac{n+2}{2}} x_n \exp\left\{-\frac{|x|^2}{4a^2t}\right\},$$

$$(t, x) \in \Pi^+. \tag{2.7}$$

Точно так же, только заменяя последнюю формулу из (2.6) формулой

$$L^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{p}}\exp\{-\sqrt{\gamma p}\}\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} t^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{\gamma}{4t}\right\},$$

для ядра Пуассона задачи 2, § 1, получаем выражение

$$G_1(t, x) = -2a^2(2a\sqrt{\pi t})^{-n} \exp\left\{-\frac{|x|^2}{4a^2t}\right\},$$

$$(t, x) \in \Pi^+. \tag{2.8}$$

Значительно сложнее вычисляется ядро Пуассона задачи 3, § 1. В книге [4] для него получена формула

$$G_1(t, x) = -\frac{2a^2}{(2a\sqrt{\pi t})^n |\bar{b}|^2}\left(b_n \exp\left\{-\frac{|x|^2}{4a^2t}\right)\right\} +$$

$$+\frac{|\bar{b}|^2 x_n - b_n(\bar{b}, x)^2}{a|\bar{b}|\sqrt{t}} \exp\left\{-\frac{|\bar{b}|^2|x|^2 - (\bar{b}, x)}{4a^2|\bar{b}|^2 t}\right\} \times$$

$$\times \int\limits_{\frac{(\bar{b}, x)}{2a|\bar{b}|\sqrt{t}}}^{\infty} \exp\{-z^2\}\, dz\Bigg),$$

$$\bar{b} = (b_1, \ldots, b_n), \quad (t, x) \in \Pi^+. \tag{2.9}$$

Вычислим еще ядро Пуассона G_1 задачи 4, § 1. Эта задача сводится, очевидно, к следующей задаче типа 1, § 1:

$$D_t^1 u + a^2 D_x^2 u = f, \quad u|_{t=0} = \varphi, \quad u|_{x=0} = \varphi(0) + \int\limits_0^t g(\tau)\, d\tau. \tag{2.10}$$

Поэтому ее решение в случае $f = 0$ и $\varphi = 0$, с учетом выражения (2.7), определяется формулой

$$u(t, x) = \int\limits_0^t \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} (t-\beta)^{-\frac{3}{2}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4a^2(t-\beta)}\right\} \times$$

$$\times \left(\int\limits_0^\beta g(\tau)\, d\tau\right) d\beta, \quad t > 0, \quad x > 0.$$

Если поменять порядок интегрирования и сделать замену переменной интегрирования β с помощью формулы $\frac{x}{2a\sqrt{t-\beta}} = z$, то получим

$$u(t, x) = \int_0^t G_1(t-\tau, x)\, g(\tau)\, d\tau, \quad t>0, \quad x>0,$$

где

$$G_1(t, x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} \exp\{-z^2\}\, dz, \quad t>0, \quad x>0. \quad (2.11)$$

В случае общей граничной задачи (2.1) — (2.3) явные выражеиия типа (2.7) — (2.9) и (2.11) для ядер Пуассона G_j, $1 \leqslant j \leqslant m$, конечно, отсутствуют, но удается получить их точные оценки и на основании этих оценок строго обосновать справедливость формулы (2.4) для решений рассматриваемой задачи. Полное исследование ядер G_j, $1 \leqslant j \leqslant m$, и соответствующих интегралов из формулы (2.4) проведено в работах [2; 3]. Для ядер G_j получено представление в следующей дивергентной форме по переменным t и x':

$$G_j(t, x) = (D_t^1 + (1+\delta_1)(-\Delta_{x'})^b)^r\, G_j^{(r)}(t, x),$$
$$(t, x) \in \Pi^+, \quad 1 \leqslant j \leqslant m, \quad (2.12)$$

где r — любое целое неотрицательное число, δ_1 — постоянная из (1.22), а для функций $G_j^{(r)}$ справедливы оценки

$$|D_t^{k_0} D_x^k G_j^{(r)}(t, x)| \leqslant$$
$$\leqslant C_{k_0 k}\, t^{-\frac{n+2b(1+k_0-r)-r_j-1+|k|}{2b}} \exp\left\{-c\frac{|x|^q}{t^{q-1}}\right\}, \quad (2.13)$$
$$(t, x) \in \Pi^+, \quad 1 \leqslant j \leqslant m, \quad r \geqslant 0, \quad k_0 \geqslant 0, \quad |k| \geqslant 0,$$
$$C_{k_0 k} > 0, \quad c > 0.$$

Поскольку $G_j = G_j^{(0)}$, то из (2.13) при $r = 0$ получаем оценки ядер G_j и их производных.

При исследовании ядер Пуассона наиболее трудным является вывод оценок (2.13). Эти оценки получаются из представления (2.5) для G_j и аналогичных представлений для $G_j^{(r)}$ через функции V_j с помощью вариации контуров, по которым в этих представлениях ведется интегрирование. При этом используются точные оценки функций V_j и свойство их аналитичности по аргументам p и σ' в определенной области.

Замечание 1. С помощью оценок (2.13) в работе [3] доказано, что формула (2.4) определяет решение в Π_T^+ задачи (2.1) — (2.3) с $f = 0$ и $\varphi = 0$, если $g_j \in C_0^{2b-r_j+l}(\Pi_T')$, $1 \leqslant j \leqslant m$, где l — нецелое число, большее числа r_0 из (1.15).

Отметим, что ядра G_k, $1 \leqslant k \leqslant m$, в пространстве обобщенных функций являются решениями задач

$$A_0 G_k = 0, \quad B_{j0} G_k|_{x_n=0} = \delta_{j,k}\delta(t, x'), \quad 1 \leqslant j \leqslant m, \quad G_k = 0, \quad t < 0,$$

где $\delta_{j,k}$ — символ Кронекера, $\delta(t, x')$ — дельта-функция с носителем в точке (0, 0).

2.2. Фундаментальное решение задачи Коши. Чтобы получить формулу для решений задачи (2.1) — (2.3) в случае, когда функции f и φ не равны тождественно нулю, построим фундаментальное решение задачи Коши для системы (2.1) и изучим его свойства, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Итак, рассмотрим задачу о нахождении функции u: $\overline{\Pi} \to K_{N1}$, являющейся в Π решением системы

$$A_0 u = 0 \tag{2.14}$$

и удовлетворяющей начальному условию

$$u|_{t=0} = \varphi, \tag{2.15}$$

где $\varphi : \mathbb{R}^n \to K_{N1}$ — заданная непрерывная и ограниченная функция.

Определение 1. *Фундаментальным решением задачи* (2.14), (2.15) *называется такая функция* Z: $\Pi \to K_{NN}$, *что для любой непрерывной и ограниченной функции* φ *решение задачи* (2.14), (2.15) *определяется формулой*

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} Z(t, x-\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi, \quad (t, x) \in \Pi. \tag{2.16}$$

Фундаментальное решение Z задачи (2.14), (2.15) можно определить также как решение в пространстве обобщенных функций задачи Коши

$$A_0 Z = 0, \quad Z|_{t=0} = I\delta(x), \tag{2.17}$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция с носителем в точке $x = 0$.

Рассмотрим задачу, двойственную к задаче (2.17) относительно преобразования Фурье обобщенных функций (см. [12]). Эта задача имеет вид

$$D_t^1 Q = \sum_{|k|=2b} a_k \sigma^k Q, \quad Q|_{t=0} = I, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n. \qquad (2.18)$$

Ее решением, как хорошо известно из теории обыкновенных дифференциальных уравнений, является нормальная фундаментальная матрица решений $Q(t, \sigma) = \exp\left\{\sum_{|k|=2b} a_k \sigma^k t\right\}$, $t \geqslant 0$, $\sigma \in \mathbb{R}^n$. Обратное преобразование Фурье этой матрицы и есть решение задачи (2.17). Следовательно, фундаментальное решение задачи (2.14), (2.15) определяется формулой

$$Z(t, x) = F_n^{-1}[Q(t, \sigma)](t, x), \quad (t, x) \in \Pi. \qquad (2.19)$$

Исходя из формулы (2.19), в отдельных случаях фундаментальное решение задачи Коши может быть вычислено. Так, для одного параболического уравнения второго порядка с вещественными коэффициентами

$$D_t^1 u + \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} D_{x_j}^1 D_{x_k}^1 u = 0 \qquad (2.20)$$

оно определяется формулой

$$Z(t, x) = (2\sqrt{\pi t})^{-n} (\det A)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{4t} \sum_{j,k=1}^{n} a^{jk} x_j x_k\right\}, \qquad (2.21)$$
$$(t, x) \in \Pi,$$

где матрица $A = (a_{jk})_{j,k=1}^n$, а a^{jk}, $1 \leqslant j, k \leqslant n$,— элементы матрицы, обратной к A.

Действительно, для уравнения (2.20) $Q(t, \sigma) = \exp\{-(A\sigma, \sigma)t\}$ и формула (2.21) является непосредственным следствием равенства (2.19) и выражения (6.2) из книги [12] для преобразования Фурье функции $\exp\{-(A\sigma, \sigma)\}$, $\sigma \in \mathbb{R}^n$. Подробный вывод формулы (2.21) имеется, например, в работе [6].

Поскольку для уравнения теплопроводности (1.7) $a_{jk} = a^2 \delta_{j,k}$, $1 \leqslant j, k \leqslant n$, то из формулы (2.21) получаем, что для этого уравнения

$$Z(t, x) = (2a\sqrt{\pi t})^{-n} \exp\left\{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}\right\}, \quad (t, x) \in \Pi. \qquad (2.22)$$

Явные формулы (2.21) и (2.22) позволяют получить полную информацию о свойствах фундаментального решения задачи Коши для уравнений (2.20) и (1.7). Такого же типа информацию о фундаментальном решении задачи Коши для общей параболической системы (2.14) можно получить из формулы (2.19) путем детального изучения аналитического продолжения функции $Q(t, \sigma)$, $t > 0$, $\sigma \in \mathbb{R}^n$, в область комплексных значений аргумента σ и применения точной теоремы о преобразовании Фурье целых функций. При этом получаем (см. [2]) полное аналитическое описание функции Z, из которого следует, что внутренние свойства этой функции для общей параболической системы совершенно аналогичны свойствам фундаментального решения (2.22) для уравнения теплопроводности. Для функции Z справедливы, в частности, оценки

$$|D_t^{k_0} D_x^k Z(t, x)| \leqslant C_{k_0 k} t^{-\frac{n+2bk_0+|k|}{2b}} \exp\left\{-c\frac{|x|^q}{t^{q-1}}\right\},$$

$$(t, x) \in \Pi, \quad k_0 \geqslant 0, \quad |k| \geqslant 0, \tag{2.23}$$

а также равенства

$$\int_{\mathbb{R}^n} D_t^{k_0} D_x^k Z(t, x-\xi)\, d\xi = \delta_{2bk_0+|k|,0} I, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.24}$$

$$Z(t-\tau, x) = \int_{\mathbb{R}^n} Z(t-\beta, x-y)\, Z(\beta-\tau, y)\, dy, \tag{2.25}$$

$$-\infty < \tau < \beta < t < +\infty, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

С помощью оценок (2.23) и равенств (2.24) можно непосредственно доказать (см. [2; 13]), что функция (2.19) действительно является фундаментальным решением задачи Коши в смысле определения 1. Кроме того, с помощью этой функции по формуле

$$u(t, x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} Z(t-\tau, x-\xi) f(\tau, \xi)\, d\xi +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^n} Z(t, x-\xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi, \quad (t, x) \in \Pi, \tag{2.26}$$

определяется решение задачи Коши

$$A_0 u = f, \quad u|_{t=0} = \varphi,$$

если функция $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to K_{N1}$ непрерывна и ограничена, а функция $f\colon \overline{\Pi} \to K_{N1}$ непрерывна, ограничена и удовлетворяет условию Гёльдера по x равномерно на любом ограниченном подмножестве $D \subset \Pi$.

Функция f от переменных t и x удовлетворяет условию Гёльдера по x равномерно на D, если существуют такие чис ла $H > 0$ и $\alpha \in (0, 1)$, что для любых $\{(t, x), (t, y)\} \subset D$ выполняется неравенство

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leqslant H|x - y|^{\alpha}.$$

2.3. Однородная функция Грина. Чтобы получить формулу для решений задачи (2.1) — (2.3) в случае, когда $\varphi = 0$ и $g_j = 0$, $1 \leqslant j \leqslant m$, дадим следующее определение.

Определение 2. *Однородной функцией Грина граничной задачи* (2.1) — (2.3) *называется такая функция* $G_0(t, x, \xi)$, $t > 0$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n_+$, *что формула*

$$u(t, x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n_+} G_0(t - \tau, x, \xi) f(\tau, \xi)\, d\xi, \quad (t, x) \in \Pi^+, \tag{2.27}$$

определяет решение задачи (2.1) — (2.3) *с* $\varphi = 0$ *и* $g_j = 0$, $1 \leqslant j \leqslant m$, *для любой бесконечно дифференцируемой и финитной функции* $f\colon \Pi^+ \to K_{N1}$.

Функция Грина G_0 определяется также как решение в пространстве обобщенных функций задачи

$$A_0 G_0 = I\delta(t, x - \xi),$$

$$B_{j0} G_0|_{x_n=0} = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant m, \quad G_0 = 0, \quad t < 0,$$

где $\delta(t, x - \xi)$ — дельта-функция, сосредоточенная в точке $(0, \xi)$.

Будем искать функцию G_0 в виде

$$G_0(t, x, \xi) = Z(t, x - \xi) - V(t, x, \xi), \; t > 0, \; \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n_+, \tag{2.28}$$

где Z — фундаментальное решение задачи Коши для системы (2.1). Учитывая его свойства, изложенные в п. 2.2, получаем, что функция V должна быть решением при любом фиксированном $\xi \in \mathbb{R}^n_+$ задачи

$$A_0 V(t, x, \xi) = 0, \; (t, x) \in \Pi^+, \; V(t, x, \xi)|_{t=0} = 0, \; x \in \mathbb{R}^n_+, \tag{2.29}$$

$$B_{j0} V(t, x, \xi)|_{x_n=0} = B_{j0} Z(t, x - \xi)|_{x_n=0}, \quad (t, x') \in \Pi',$$

$$1 \leqslant j \leqslant m.$$

Например, для задачи 1, § 1, задача (2.29) имеет вид

$$(D_t^1 - a^2 \Delta_x) V(t, x, \xi) = 0, \; (t, x) \in \Pi^+, \; V(t, x, \xi)|_{t=0} = 0,$$

$$x \in \mathbb{R}^n_+,$$

$$V(t, x, \xi)|_{x_n=0} = Z(t, x' - \xi', \xi_n), \; (t, x') \in \Pi'.$$

Легко проверить, что решением этой задачи является функция $V(t, x, \xi) = Z(t, x' - \xi', x_n + \xi_n)$, $t > 0$, $\{x, \xi\} \subset \subset \mathbb{R}^n_+$. Учитывая выражение (2.22), для задачи 1, § 1, получаем

$$G_0(t, x, \xi) = (2a\sqrt{\pi t})^{-n} \exp\left\{-\frac{|x' - \xi'|^2}{4a^2 t}\right\} \times$$
$$\times \left(\exp\left\{-\frac{(x_n - \xi_n)^2}{4a^2 t}\right\} - \exp\left\{-\frac{(x_n + \xi_n)^2}{4a^2 t}\right\}\right), \ t > 0, \ \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n_+. \tag{2.30}$$

В случае задачи 2, § 1, аналогично имеем

$$G_0(t, x, \xi) = (2a\sqrt{\pi t})^{-n} \exp\left\{-\frac{|x' - \xi'|^2}{4a^2 t}\right\} \times$$
$$\times \left(\exp\left\{-\frac{(x_n - \xi_n)^2}{4a^2 t}\right\} + \exp\left\{-\frac{(x_n + \xi_n)^2}{4a^2 t}\right\}\right), \ t > 0,$$
$$\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n_+. \tag{2.31}$$

Вообще, задача (2.29) того же типа, что и задача, рассмотренная в п. 2.1. Поэтому ее решение представляется в виде (2.4) через ядра Пуассона. Следовательно, функция V определяется формулой

$$V(t, x, \xi) = \sum_{j=1}^{m} \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} G_j(t - \tau, x - y')\, g_j(\tau, y' - \xi)\, dy',$$
$$t > 0, \ \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n_+, \tag{2.32}$$

где

$$g_j(\tau, y' - \xi) = B_{j0}(D_\tau, D_y)\, Z(\tau, y - \xi)\big|_{y_n = 0}, \tag{2.33}$$
$$1 \leqslant j \leqslant m.$$

Предлагаем читателю самостоятельно вывести формулы (2.30) и (2.31), исходя из равенства (2.32), для V и выражений (2.7), (2.8) для ядер Пуассона.

Теорема 1. *Для функций G_0 и V справедливы оценки*

$$|D_t^{k_0} D_x^k D_\xi^l G_0(t, x, \xi)| \leqslant C_{k_0 k l}\, t^{-\frac{n + 2bk_0 + |k| + |l|}{2b}} \exp\left\{-c\frac{|x - \xi|^q}{t^{q-1}}\right\}, \tag{2.34}$$

$$|D_t^{k_0} D_x^k D_\xi^l V(t, x, \xi)| \leqslant C_{k_0 k l}\, t^{-\frac{n + 2bk_0 + |k| + |l|}{2b}} \times$$
$$\times \exp\left\{-c\frac{(|x - \xi| + \xi_n)^q}{t^{q-1}}\right\}, \tag{2.35}$$

$$t>0,\ \{x,\ \xi\}\subset\mathbb{R}^n_+,\ k_0\geqslant 0,\ |k|\geqslant 0,\ |l|\geqslant 0,\ C_{k_0kl}>0,$$
$$c>0.$$

Имеет место следующее дивергентное представление, аналогичное (2.12):

$$G_0(t,\ x,\ \xi)=(D_t^1+(1+\delta_1)(-\Delta_{x'})^b)^r\times$$
$$\times\, G_0^{(r)}(t,\ x,\ \xi),\ t>0,\ \{x,\ \xi\}\subset\mathbb{R}^n_+, \qquad (2.36)$$

где r — целое положительное число и функция $G_0^{(r)}$ удовлетворяет оценкам, получающимся из оценок (2.34) *заменой k_0 на k_0-r.*

Доказательство. Оценки (2.34) являются следствием оценок (2.23) для Z и оценок (2.35). Докажем последние оценки. Из формулы (2.32) вытекает, что функция V зависит от разности $x'-\xi'$, поэтому достаточно получить оценки производных

$$D_t^{k_0}D_x^kD_{\xi_n}^lV(t,\ x,\ \xi)=\sum_{j=1}^m\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^{n-1}}D_t^{k_0}D_x^kG_j(t-\tau,\ x-y')\times$$
$$\times\, D_{\xi_n}^lg_j(\tau,\ y'-\xi)\,dy',\ t>0,\ \{x,\ \xi\}\subset\mathbb{R}^n_+,$$
$$k_0\geqslant 0,\quad |k|\geqslant 0,\quad l\geqslant 0.$$

Учитывая выражения (2.33), с помощью системы, решением которой при $t>0$ является Z, представим (см. замечание 1, § 1) $D_{\xi_n}^lg_j(\tau,\ y'-\xi)$ в виде линейной комбинации производных вида $D_\tau^{p_0}D_y^pZ(\tau,\ \ y-\xi)|_{y_n=0}$, где $2bp_0+|p|=r_j+l$, $p_n<2b$. Следовательно, доказательство сводится к оценке интеграла

$$J\equiv\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^{n-1}}D_t^{k_0}D_x^kG_j(t-\tau,\ x-y')\,D_\tau^{p_0}D_y^p\times$$
$$\times\, Z(\tau,\ y-\xi)|_{y_n=0}dy'.$$

Для удобства этот интеграл представим в виде суммы интегралов J_1 и J_2, где интегрирование по τ в J_1 будем вести от 0 до $t_1=\frac{t}{2}$, в J_2 — от t_1 до t, а по y' область интегрирования в обоих интегралах $\mathbb{R}^{n-1}$. Чтобы записи были менее громоздкими, будем считать, что $k_0=p_0=0$.

Всюду в дальнейшем различные постоянные, величины которых нас не интересуют, обозначаются одинаковыми буквами. Будем пользоваться неравенством

$$\frac{|x-y|^q}{(t-\tau)^{q-1}}+\frac{|y-\xi|^q}{\tau^{q-1}}\geqslant\frac{|x-\xi|^q}{t^{q-1}},\quad t>\tau\geqslant 0,\qquad(2.37)$$

$$\{x,\ y,\ \xi\}\subset\mathbb{R}^n,$$

которое доказывается непосредственным подсчетом.

Если $r_j+l\leqslant 2b-2$, то с помощью оценок (2.13) и (2.23) имеем

$$|J_1|\leqslant C\int_0^{t_1}d\tau\int_{\mathbb{R}^{n-1}}(t-\tau)^{-\frac{n+2b-r_j-1+|k|}{2b}}\tau^{-\frac{n+r_j+l}{2b}}\times$$

$$\times\exp\left\{-c_1\left(\frac{|x-y'|^q}{(t-\tau)^{q-1}}+\frac{|y'-\xi|^q}{\tau^{q-1}}\right)\right\}dy'.$$

Поскольку $t-\tau\geqslant\frac{t}{2}$ для $0\leqslant\tau\leqslant t_1$ и

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\tau^{-\frac{n-1}{2b}}\exp\left\{-(c_1-c)\frac{|y'-\xi|^q}{\tau^{q-1}}\right\}dy'\leqslant C,\quad 0<c<c_1,$$

то в силу неравенства (2.37) получаем

$$|J_1|\leqslant Ct^{-\frac{n+2b-r_j-1+|k|}{2b}}\exp\left\{-c\frac{|x-\xi^*|^q}{t^{q-1}}\right\}\int_0^{t_1}\tau^{-\frac{r_j+l+1}{2b}}d\tau=$$

$$=Ct^{-\frac{n+|k|+l}{2b}}\exp\left\{-c\frac{|x-\xi^*|^q}{t^{q-1}}\right\},\quad \xi^*=(\xi',\ -\xi_n).$$

Случай $r_j+l\geqslant 2b$ сводится к уже рассмотренному или к случаю $r_j+l=2b-1$, если интегрированием по частям перенести в интеграле J_1 часть производных по y' от Z к G_j.

В случае $r_j+l=2b-1$ представляем J_1 в виде

$$J_1=\int_0^{t_1}d\tau\int_{\mathbb{R}^{n-1}}(D_x^kG_j(t-\tau,\ x-y')-D_x^kG_j(t-\tau,\ x-\xi'))\times$$

$$\times D_y^pZ(\tau,\ y-\xi)|_{y_n=0}dy'+\int_0^{t_1}D_x^kG_j(t-\tau,\ x-\xi')\times$$

$$\times\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}}D_y^pZ(\tau,\ y-\xi)|_{y_n=0}dy'\right)d\tau\equiv J_1'+J_1''.$$

Из оценок (2.13) вытекает неравенство

$$|D_x^k G_j(t-\tau,\ x-y') - D_x^k G_j(t-\tau,\ x-\xi')| \leqslant$$

$$\leqslant C|y'-\xi'|(t-\tau)^{-\frac{n+2b-r_j+|k|}{2b}} \times$$

$$\times \left(\exp\left\{-c_1 \frac{|x-y'|^q}{(t-\tau)^{q-1}}\right\} + \exp\left\{-c_1 \frac{|x-\xi'|^q}{(t-\tau)^{q-1}}\right\}\right).$$

Используя это неравенство, оценки (2.23) и (2.37) и учитывая, что

$$|y'-\xi'|\exp\left\{-c_1 \frac{|y'-\xi|^q}{\tau^{q-1}}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant C_\varepsilon \tau^{\frac{1}{2b}} \exp\left\{-(c_1-\varepsilon)\frac{|y'-\xi|^q}{\tau^{q-1}}\right\},\quad 0<\varepsilon<c_1,$$

аналогично предыдущему получаем

$$|J_1'| \leqslant Ct^{-\frac{n+2b-r_j+|k|}{2b}} \exp\left\{-c\frac{|x-\xi^*|^q}{t^{q-1}}\right\} \int_0^{t_1} \tau^{-\frac{r_j+l}{2b}}\, d\tau =$$

$$= Ct^{-\frac{n+|k|+l}{2b}} \exp\left\{-c\frac{|x-\xi^*|^q}{t^{q-1}}\right\}.$$

Чтобы оценить интеграл J_1'', воспользуемся следующей леммой.

Лемма 1. *Пусть функция* $\Gamma(t,\ x) = t^{-1-\frac{n-1}{2b}}\Omega\left(\frac{x}{t^{\frac{1}{2b}}}\right)$, $(t,\ x)\in\Pi^+$, *является решением параболической системы* (2.14) *и функция* Ω *удовлетворяет неравенствам*

$$|D_z^k\Omega(z)| \leqslant C\exp\{-c|z|^q\},\quad z\in\mathbb{R}_+^n,\quad |k|\geqslant 0. \qquad (2.38)$$

Тогда справедливо равенство

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Omega(z',\ 0)\, dz' = 0. \qquad (2.39)$$

Докажем лемму 1. Очевидно, что при $|k'|>0,\ t>0$ и $x_n>0$ справедливы равенства

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} D_{z'}^{k'}\Omega\left(z',\ \frac{x_n}{t^{\frac{1}{2b}}}\right) dz' = 0,$$

$$\int_0^\infty D_t^1\left(\frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Omega\left(z',\ \frac{x_n}{t^{\frac{1}{2b}}}\right) dz'\right) dt = 0.$$

Тогда на основании того, что Г является решением системы (2.14), имеем

$$\int_0^\infty \frac{1}{t}\left(D_{x_n}^{2b}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\Omega\left(z', \frac{x_n}{t^{\frac{1}{2b}}}\right)dz'\right)dt = 0, \quad x_n > 0.$$

Рассмотрим функции

$$\varphi_\nu(x_n) \equiv \int_0^\infty \frac{1}{t}\left(D_{x_n}^{\nu}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\Omega\left(z', \frac{x_n}{t^{\frac{1}{2b}}}\right)dz'\right)dt, \; x_n > 0,$$

$$1 \leqslant \nu \leqslant 2b.$$

Для них, очевидно, справедливы равенства $\varphi_\nu(x_n) = x_n^{-\nu} \times \varphi_\nu(1)$, $x_n > 0$, $1 \leqslant \nu \leqslant 2b$. Дифференцируя эти равенства, получаем, что $\varphi_{\nu+1}(x_n) = -\nu x_n^{-\nu-1}\varphi_\nu(1)$, $x_n > 0$, $1 \leqslant \nu \leqslant 2b-1$. Но $\varphi_{2b} = 0$, поэтому $\varphi_\nu = 0$, $1 \leqslant \nu \leqslant 2b-1$. Итак, при $x_n > 0$

$$0 = \int_0^\infty \frac{1}{t}\left(D_{x_n}^{1}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\Omega\left(z', \frac{x_n}{t^{\frac{1}{2b}}}\right)dz'\right)dt =$$

$$= \int_0^\infty t^{-1-\frac{1}{2b}}\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} D_{z_n}^1\Omega(z)\Big|_{z_n=\frac{x_n}{t^{\frac{1}{2b}}}} dz'\right)dt.$$

Кроме того,

$$\int_0^R D_t^1\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\Omega\left(z', \frac{x_n}{t^{\frac{1}{2b}}}\right)dz'\right)dt = \int_{\mathbb{R}^{n-1}}\Omega\left(z', \frac{x_n}{R^{\frac{1}{2b}}}\right)dz' =$$

$$= -\frac{x_n}{2b}\int_0^R t^{-1-\frac{1}{2b}}\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} D_{z_n}^1\Omega(z)\Big|_{z_n=\frac{x_n}{t^{\frac{1}{2b}}}} dz'\right)dt,$$

поэтому $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\Omega\left(z', \frac{x_n}{R^{\frac{1}{2b}}}\right)dz' = 0$. Лемма 1 доказана.

Теперь оценим J_1''. В книге [2] доказано, что

$$D_y^p Z(\tau, y-\xi) = \tau^{-1-\frac{n-1}{2b}}\Omega\left(\frac{y-\xi}{\tau^{\frac{1}{2b}}}\right), \; \tau > 0, \; \{y, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad (2.40)$$

где функция Ω удовлетворяет неравенствам (2.38). В силу леммы 1 для нее справедливо равенство (2.39). С помощью (2.38) — (2.40) имеем

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} D_y^p Z(\tau, y-\xi)\big|_{y_n=0} dy' \right| =$$

$$= \tau^{-1} \left| \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \Omega\left(\frac{y'-\xi'}{\tau^{\frac{1}{2b}}}, \frac{-\xi_n}{\tau^{\frac{1}{2b}}} \right) \tau^{-\frac{n-1}{2b}} dy' \right| =$$

$$= \tau^{-1} \left| \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \Omega\left(z', -\frac{\xi_n}{\tau^{\frac{1}{2b}}} \right) dz' \right| =$$

$$= \tau^{-1} \left| \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\Omega\left(z', -\frac{\xi_n}{\tau^{\frac{1}{2b}}} \right) - \Omega(z', 0) \right) dz' \right| \leqslant$$

$$\leqslant C\xi_n \tau^{-1-\frac{1}{2b}} \exp\left\{ -c_1 \frac{\xi_n^q}{\tau^{q-1}} \right\}, \quad \tau > 0, \quad \xi_n > 0.$$

Далее, используя оценки (2.13) и (2.37), получаем

$$|J_1''| \leqslant Ct^{-\frac{n+|k|+l}{2b}} \exp\left\{ -c \frac{|x-\xi^*|^q}{t^{q-1}} \right\} \times$$

$$\times \int\limits_0^{t_1} \xi_n \tau^{-1-\frac{1}{2b}} \exp\left\{ -(c_1 - c) \frac{\xi_n^q}{\tau^{q-1}} \right\} d\tau \leqslant$$

$$\leqslant Ct^{-\frac{n+|k|+l}{2b}} \exp\left\{ -c \frac{|x-\xi^*|^q}{t^{q-1}} \right\}, \quad 0 < c < c_1,$$

так как с помощью замены $\xi_n \tau^{-\frac{1}{2b}} = \beta$ последний интеграл преобразуется к интегралу

$$2b \int\limits_{\xi_n t_1^{-\frac{1}{2b}}}^{\infty} \exp\{-(c_1 - c)\beta^q\} d\beta \leqslant$$

$$\leqslant 2b \int\limits_0^{\infty} \exp\{-(c_1 - c)\beta^q\} d\beta = C.$$

Переходим к оценке интеграла J_2. С помощью равенства (2.12) и интегрирования по частям J_2 можно преобразовать к линейной комбинации интегралов вида

$$J_2' \equiv \int_{t_1}^{t} d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} D_x^k G_j^{(r)}(t-\tau,\ x-y') \times$$

$$\times \left(D_\tau^1 + (1+\delta_1)(-\Delta_{y'})^b\right)^r D_y^p Z(\tau,\ y-\xi)\,|_{y_n=0}\, dy',$$

$$J_2'' \equiv \int_{\mathbb{R}^{n-1}} D_t^{m_0} D_x^m G_j^{(r)}(t-t_1,\ x-y')\, D_\tau^{s_0} D_y^s Z(t_1,\ y-\xi)\,|_{y_n=0} dy',$$

где $m_0 \geqslant 0$, $|m| \geqslant |k|$, $s_0 \geqslant 0$, $|s| \geqslant |p|$, $2b\,(m_0 + s_0) + |m| + |s| = |k| + |p| + 2b\,(r-1)$. Используя неравенства (2.13), (2.23) и (2.37) и выбирая r достаточно большим, получаем

$$|J_2'| \leqslant Ct^{-r-\frac{n+r_j+l}{2b}} \int_{t_1}^{t} d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (t-\tau)^{r-1-\frac{n-r_j-1+|k|}{2b}} \times$$

$$\times \exp\left\{-c_1\left(\frac{|x-y'|^q}{(t-\tau)^{q-1}} + \frac{|y'-\xi|^q}{\tau^{q-1}}\right)\right\} dy' \leqslant$$

$$\leqslant Ct^{-\frac{n+|k|+l}{2b}} \exp\left\{-c\frac{|x-\xi^*|^q}{t^{q-1}}\right\},$$

$$|J_2''| \leqslant Ct^{-\frac{n+|k|+l}{2b}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (t-t_1)^{-\frac{n-1}{2b}} \times$$

$$\times \exp\left\{-c_1\left(\frac{|x-y'|^q}{(t-t_1)^{q-1}} + \frac{|y'-\xi|^q}{t_1^{q-1}}\right)\right\} dy' \leqslant$$

$$\leqslant Ct^{-\frac{n+|k|+l}{2b}} \exp\left\{-c\frac{|x-\xi^*|^q}{t^{q-1}}\right\}.$$

Поскольку $|x-\xi^*| \geqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}(|x-\xi| + \xi_n)$, то из полученных оценок интегралов J_1 и J_2 следуют оценки (2.35).

Чтобы убедиться в справедливости формулы (2.36), заметим, что функцию Z можно представить в виде

$$Z(t,\ x) = \left(D_t^1 + (1+\delta_1)(-\Delta_{x'})^b\right)^r Z^{(r)}(t,\ x), \quad (t,\ x) \in \Pi,$$

где

$$Z^{(r)}(t, x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} Z_r(t-\tau, x'-y') Z(\tau, y', x_n)\, dy',$$

$$Z_r(t, x') = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} Z_0(t-\tau, x'-y') Z_{r-1}(\tau, y')\, dy', r \geqslant 1,$$

Z_0 — фундаментальное решение задачи Коши для уравнения

$$(D_t^1 + (1+\delta_1)(-\Delta_{x'})^b)\, u = 0.$$

В силу формул (2.32) и (2.12) имеет место равенство

$$V(t, x, \xi) = (D_t^1 + (1+\delta_1)(-\Delta_{x'})^b)^r V^r(t, x, \xi),$$
$$t > 0, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n_+,$$

где

$$V^{(r)}(t, x, \xi) = \sum_{j=1}^m \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} G_j^{(r)}(t-\tau, x-y')\, g_j(\tau, y'-\xi)\, dy'.$$

Поэтому для G_0 справедливо представление (2.36), в котором

$$G_0^{(r)}(t, x, \xi) = Z^{(r)}(t, x-\xi) - V^{(r)}(t, x, \xi).$$

Оценки для $G_0^{(r)}$ доказываются аналогично доказательству оценок (2.34). Теорема доказана.

Теперь убедимся в том, что функция G_0, которую мы определили формулами (2.28) и (2.32) и для которой доказали теорему 1, действительно является однородной функцией Грина задачи (2.1) — (2.3) в смысле определения 2.

Рассмотрим формулу (2.27), где f: $\Pi^+ \to K_{N1}$ — достаточно гладкая функция, которая вместе со своими производными ограничена и равна нулю при $t = 0$. В силу свойств Z, равенств (2.28), (2.29) и оценок (2.34), функция (2.27) является решением системы (2.1), удовлетворяющим нулевому условию. Кроме того, если $r_j < 2b$, то

$$B_{j0}u(t, x)|_{x_n=0} =$$
$$= \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n_+} B_{j0}G_0(t-\tau, x, \xi)|_{x_n=0} f(\tau, \xi)\, d\xi = 0, \quad (t, x') \in \Pi'.$$

В случае $r_j \geqslant 2b$ применять выражение B_{j0} и переходить к пределу при $x_n \to 0$ под знаком интеграла, вообще говоря, нельзя. В этом случае поступим следующим образом.

Рассмотрим $B_{j0}(p, \sigma)$ и $A_0(p, \sigma)$ как матричные многочлены от σ_n. В силу замечания 1, § 1, из условия параболичности системы (2.1) следует, что определитель матрицы, являющейся коэффициентом при σ_n^{2b} в $A_0(p, \sigma)$, отличен от нуля. Поэтому существуют такие матричные многочлены $C_j(p, \sigma)$ и $B_j'(p, \sigma)$, степени по σ_n которых не превышают соответственно $r_j - 2b$ и $2b - 1$, что справедливо равенство

$$B_{j0}(p, \sigma) = C_j(p, \sigma) A_0(p, \sigma) + B_j'(p, \sigma).$$

Переходя к дифференциальным выражениям, получаем равенство

$$B_{j0}(D_t, D_x) = C_j(D_t, D_x) A_0(D_t, D_x) + B_j'(D_t, D_x), \quad (2.41)$$

в котором C_j и B_j' — выражения, содержащие дифференцирования по x_n порядка не выше $r_j - 2b$ и $2b - 1$ соответственно.

Для функции (2.27), в силу равенств (2.41) и (2.1), теперь имеем

$$B_{j0}u|_{x_n=0} = C_j f|_{x_n=0} + B_j'u|_{x_n=0}.$$

Используя представление (2.36) и интегрируя по частям, при достаточно большом r получаем

$$B_j'u(t, x)|_{x_n=0} = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n_+} B_j'G_0^{(r)}(t-\tau, x, \xi)|_{x_n=0} \times$$
$$\times (D_\tau^1 + (1+\delta_1)(-\Delta_{\xi'})^b)^r f(\tau, \xi)\, d\xi.$$

На основании (2.41) и того, что $A_0G_0^{(r)} = 0$, в последнем интеграле B_j' заменим на B_{j0}. Если этот интеграл представить как предел при $\varepsilon \to 0$ интеграла по $\{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \xi_n \geqslant \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, а затем интегрированием по частям выражение $(D_\tau^1 + (1+\delta_1)(-\Delta_{\xi'})^b)^r$ перенести на $G_0^{(r)}$, то получим, что он равен нулю. Следовательно,

$$B_{j0}u|_{x_n=0} = C_j f|_{x_n=0}.$$

Заметим, что $C_j = 0$, если наибольший порядок производных по x_n в B_{j0} меньше $2b$.

Таким образом, функция (2.27) является решением задачи (2.1) — (2.3) с $\varphi = 0$ и $g_j = C_j f|_{x_n=0}$, $1 \leqslant j \leqslant m$. При этом, если функция f финитна в Π^+, то $C_j f|_{x_n=0} = 0$, $1 \leqslant j \leqslant m$, и G_0 действительно удовлетворяет требованиям определения 2. Если f не обязательно финитна, то, в силу результатов п. 2.1, решение задачи (2.1) — (2.3) с $\varphi = 0$ определяется формулой

$$u(t, x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n_+} G_0(t-\tau, x, \xi) f(\tau, \xi) d\xi +$$

$$+ \sum_{j=1}^m \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} G_j(t-\tau, x-\xi') \times$$

$$\times (g_j(\tau, \xi') - C_j(D_\tau, D_\xi) f|_{\xi_n=0}) d\xi', \quad (t, x) \in \Pi^+. \quad (2.42)$$

Замечание 2. Используя замечание 1, можно доказать, что формула (2.42) определяет решение в области Π_T^+, если $f \in C_{0N}^l(\Pi_T^+)$ и $g_j \in C_0^{2b-r_j+l}(\Pi_T')$, $1 \leqslant j \leqslant m$, где число l то же, что и в п. 2.1.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Пусть b_j, $0 \leqslant j \leqslant n$,— заданные вещественные числа, причем $b_0 \neq 0$ и $b_n \neq 0$. Для ядра Пуассона G_1 параболической граничной задачи

$$D_t^1 u - a^2 \Delta_x u = f, \quad u|_{t=0} = \varphi, \quad \left.\left(\sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + b_0 u\right)\right|_{x_n=0} = g \quad (2.43)$$

получить формулу, аналогичную формуле (2.9). Из этой формулы вывести оценки для функции G_1 и ее производных.

Указание. Аналогичные рассуждения для случая $b_0 = 0$ см. в [4, с. 310—320].

2. Получить оценки однородной функции Грина и ее производных для задачи (2.43).

Указание. Воспользоваться оценками ядра Пуассона, полученными в задаче 1, и методикой доказательства теоремы 1.

3. Пусть функции

$$G_0(t, x, \xi), \quad G_j(t, x), \quad t > 0, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n_+, \quad 1 \leqslant j \leqslant m, \quad (2.44)$$

являются соответственно однородной функцией Грина и ядрами Пуассона задачи (2.1) — (2.3) и пусть λ — заданное комплексное число. Доказать, что однородная функция Грина и ядра Пуассона задачи

$$A_0(D_t+\lambda,\ D_x)\,u=f,\ u|_{t=0}=\varphi,\quad B_{j0}(D_t+\lambda,\ D_x)\,u|_{x_n=0}=g_j,$$
$$1\leqslant j\leqslant m,$$

получаются умножением функций (2.44) на $\exp\{-\lambda t\}$.

4. Пусть $L_p(\mathbb{R}^n,\ K_{N1})$, $p\geqslant 1$, — пространство измеримых функций φ: $\mathbb{R}^n\to K_{N1}$, для которых конечна величина

$$\|\varphi\|_p\equiv\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Предположим, что $\varphi\in L_p(\mathbb{R}^n,\ K_{N1})$. Доказать, что формула (2.16) определяет решение u системы (2.14), удовлетворяющее условиям:

а) существует такая постоянная $C>0$, что для любого $t>0$

$$\|u(t,\ \cdot)\|_p\leqslant C\|\varphi\|_p;$$

б) $\lim\limits_{t\to 0}\|u(t,\ \cdot)-\varphi(\cdot)\|_p=0;$

в) если $p>1$, то для любого $\gamma>0$ и почти всех $x\in\mathbb{R}^n$.

$$\lim_{\Gamma_\gamma(x)\ni(t,y)\to(0,x)}u(t,\ y)=\varphi(x),$$

где $\Gamma_\gamma(x)=\{(t,y)\,|\,t>0,\,|x-y|<\gamma t^{\frac{1}{2b}}\}$.

5. Пусть u — решение системы (2.14) в Π_T, удовлетворяющее условию: существует такая постоянная $C>0$, что для всех $t\in(0,\ T]$ выполняется неравенство $\|u(t,\ \cdot)\|_p\leqslant C$, $p>1$. Доказать существование такой функции $\varphi\in L_p(\mathbb{R}^n,\ K_{N1})$, с помощью которой решение u представляется в виде (2.16).

Указание. Рассмотреть последовательность $\left\{u\left(\frac{1}{k},\ \cdot\right),\ k\geqslant 1\right\}\subset L_p(\mathbb{R}^n,\ K_{N1})$. Воспользоваться теоремой о слабой компактности ограниченных множеств в $L_p(\mathbb{R}^n,\ K_{N1})$, тем, что при $t>0$ $Z(t,\ \cdot)\in L_{p'}(\mathbb{R}^n,\ K_{NN})$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, и теоремой единственности решения задачи Коши из [2], с. 238.

§ 3. КОРРЕКТНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ПРОСТЕЙШИХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ В ПРОСТРАНСТВАХ ГЁЛЬДЕРА

3.1. Леммы об ограниченности операторов Грина. Установим корректную разрешимость в пространствах Гёльдера граничных задач, рассмотренных в § 2. Для этого сначала докажем ограниченность в пространствах Гёльдера операторов $\mathcal{G}_j$, $0 \leqslant j \leqslant m$, называемых *операторами Грина* и действующих по следующим формулам:

$$v(t, x) = (\mathcal{G}_0 f)(t, x) \equiv \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n_+} G_0(t-\tau, x, \xi) f(\tau, \xi)\, d\xi,$$

$$w_j(t, x) = (\mathcal{G}_j f)(t, x) \equiv \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} G_j(t-\tau, x-\xi') f(\tau, \xi')\, d\xi', \tag{3.1}$$

$$(t, x) \in \Pi_T^+, \quad 1 \leqslant j \leqslant m.$$

Как показано в § 2, с помощью интегралов (3.1) определяются решения соответствующих граничных задач.

Лемма 1. *Для любого нецелого $l > 0$ является ограниченным оператор*

$$\mathcal{G}_0 : C^l_{0N}(\Pi_T^+) \to C^{2b+l}_{0N}(\Pi_T^+).$$

Доказательство. Проведем доказательство для случая $l < 1$. При $l > 1$ следует использовать представление (2.36) и методику, аналогичную изложенной ниже.

Необходимо доказать, что для любой функции $f \in C^l_{0N}(\Pi_T^+)$ функция v из (3.1) принадлежит пространству $C^{2b+l}_{0N}(\Pi_T^+)$ и справедлива оценка

$$\| v \|^{2b+l}_{\Pi_T^+} \leqslant CF, \quad F \equiv \| f \|^l_{\Pi_T^+}, \tag{3.2}$$

где постоянная C не зависит от f.

Заметим, что из принадлежности функции f указанному пространству вытекают неравенства

$$| f(t, x) | = | \Delta^0_l f(t, x) | \leqslant F t^{\frac{l}{2b}},$$

$$| f(\tau, \xi) - f(t, x) | \leqslant F \left(| t-\tau |^{\frac{l}{2b}} + | x-\xi |^l \right),$$

$$\{(t, x), (\tau, \xi)\} \subset \overline{\Pi}_T^+. \tag{3.3}$$

Производные от функции v в точке $(t, x) \in \Pi_T^+$ находятся по формулам

$$D^k_x v(t, x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n_+} D^k_x G_0(t-\tau, x, \xi) f(\tau, \xi)\, d\xi, \quad |k| < 2b; \tag{3.4}$$

$$D_x^k v(t, x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}_+^n} D_x^k G_0(t-\tau, x, \xi)(f(\tau, \xi) - f(t, x))\, d\xi +$$

$$+ \delta_{k, \bar{k}} a_{\bar{k}}^{-1} w(t, x) f(t, x), \quad |k| = 2b; \tag{3.5}$$

$$D_t^l v(t, x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}_+^n} D_t^l G_0(t-\tau, x, \xi)(f(\tau, \xi) - f(t, x))\, d\xi +$$

$$+ (I + w(t, x)) f(t, x). \tag{3.6}$$

Здесь $\bar{k} = (0, \ldots, 0, 2b)$, $a_{\bar{k}}^{-1}$ — матрица, обратная к матрице $a_{\bar{k}}$, являющейся коэффициентом при $D_{x_n}^{2b}$ в дифференциальном выражении $A_0(D_t, D_x)$, и

$$w(t, x) = -\int_{\mathbb{R}_-^n} Z(t, x-\xi)\, d\xi - \int_{\mathbb{R}_+^n} V(t, x, \xi)\, d\xi, \tag{3.7}$$

где $\mathbb{R}_-^n \equiv \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n < 0\}$, а Z и V — функции из выражения (2.28).

Легко проверить с помощью оценок (2.23), (2.34), (2.35) и (3.3), что интегралы в правых частях равенств (3.3) — (3.5) сходятся на множестве Π_T^+, причем равномерно на каждом его ограниченном подмножестве.

Справедливость равенств (3.4) очевидиа. Докажем формулы (3.5) и (3.6). Для этого рассмотрим при $0 < h < t$ функции

$$v_h(t, x) = \int_0^{t-h} d\tau \int_{\mathbb{R}_+^n} G_0(t-\tau, x, \xi) f(\tau, \xi)\, d\xi.$$

Очевидно, что $\lim\limits_{h \to 0} v_h(t, x) = v(t, x)$, $(t, x) \in \Pi_T^+$. Докажем существование пределов $\lim\limits_{h \to 0} D_x^k v_h(t, x)$, $|k| = 2b$, и $\lim\limits_{h \to 0} D_t^l v_h(t, x)$, равных соответственно правым частям формул (3.5) и (3.6). В силу равномерной сходимости отсюда будет следовать справедливость этих формул.

Имеем

$$D_x^k v_h(t, x) =$$

$$= \int_0^{t-h} d\tau \int_{\mathbb{R}_+^n} D_x^k G_0(t-\tau, x, \xi)(f(\tau, \xi) - f(t, x))\, d\xi +$$

$$+ \int_0^{t-h} d\tau \int_{\mathbb{R}_+^n} D_x^k G_0(t-\tau, x, \xi)\, d\xi f(t, x). \qquad (3.8)$$

Обозначим через J_h последний интеграл из (3.8). Поскольку $D^1_{x_j} G_0(t, x, \xi) = -D^1_{\xi_j} G_0(t, x, \xi)$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$, то с помощью интегрирования по частям и оценок (2.34) получаем, что при $k \neq \bar{k}$ и любом $h \in (0, t)$ $J_h = 0$. Если $k = \bar{k}$, то на основании замечания 1, § 1, $D^{2b}_{x_n} G_0$ выражается в виде линейной комбинации производных $D^1_t G_0$ и $D^k_x G_0$ с $|k| = 2b$ и $k_n < 2b$, причем коэффициент при $D^1_t G_0$ равен $a_{\bar{k}}^{-1}$. Поэтому в этом случае

$$J_h = -a_{\bar{k}}^{-1} \int_0^{t-h} d\tau \int_{\mathbb{R}_+^n} D^1_\tau G_0(t-\tau, x, \xi)\, d\xi =$$

$$= a_{\bar{k}}^{-1} \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} G_0(t, x, \xi)\, d\xi - \int_{\mathbb{R}_+^n} G_0(h, x, \xi)\, d\xi \right).$$

Используя равенства (2.24) и (2.28), отсюда получаем, что

$$J_h = a_{\bar{k}}^{-1} (w(t, x) - w(h, x)).$$

Так как при фиксированном $x \in \mathbb{R}_+^n$ $|x - \xi| \geqslant x_n$ для любых $\xi \in \mathbb{R}_-^n$ и $|x - \xi| + \xi_n \geqslant x_n$ для любых $\xi \in \mathbb{R}_+^n$, то в силу оценок (2.23) и (2.35) имеем $\lim\limits_{h \to 0} w(h, x) = 0$ и поэтому $\lim\limits_{h \to 0} J_h = a_{\bar{k}}^{-1} w(t, x)$. Следовательно, предел при $h \to 0$ выражения (3.8) равен правой части равенства (3.5).

Совершенно аналогично находим, что

$$D^1_t v_h(t, x) = \int_0^{t-h} d\tau \int_{\mathbb{R}_+^n} D^1_t G_0(t-\tau, x, \xi) \times$$

$$\times (f(\tau, \xi) - f(t, x))\, d\xi + (I + w(t, x)) f(t, x) +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}_+^n} G_0(h, x, \xi)(f(t-h, \xi) - f(t, x))\, d\xi.$$

При $h \to 0$ предел этого выражения равен правой части формулы (3.6).

Из выражений (3.4) — (3.6) видно, что все производные от v равны нулю при $t = 0$. Напомним при этом, что $f|_{t=0} = 0$.

Докажем оценку (3.2). Будем пользоваться оценками (2.34) и (3.3), а также следующими неравенствами для функции (3.7), вытекающими из оценок (2.23) и (2.35):

$$|w(t, x)| \leqslant C, \quad (t, x) \in \Pi_T^+;$$

$$|\Delta_x^{\bar{x}} w(t, x)| \leqslant C|x-\bar{x}|^l t^{-\frac{l}{2b}}, \ \{(t, x), (t, \bar{x})\} \subset \Pi_T^+; \quad (3.9)$$

$$|\Delta_t^{\bar{t}} w(t, x)| \leqslant C(\bar{t}-t)^{\frac{l}{2b}} t^{-\frac{l}{2b}}, \quad 0 < t < \bar{t} \leqslant T, \quad x \in \mathbb{R}_+^n.$$

Используя формулы (3.4) — (3.6), для $(t, x) \in \Pi_T^+$ обычным способом получаем

$$|D_x^k v(t, x)| \leqslant CFt^{\frac{2b-|k|}{2b}}, \ |k| < 2b;$$

$$|D_t^{k_0} D_x^k v(t, x)| \leqslant CFt^{\frac{l}{2b}}, \quad 2bk_0 + |k| = 2b. \quad (3.10)$$

Если $|x-\bar{x}|^{2b} \geqslant \frac{t}{2}$ и $\bar{t}-t \geqslant \frac{t}{2}$, то отсюда непосредственно следуют неравенства

$$|\Delta_x^{\bar{x}} D_t^{k_0} D_x^k v(t, x)| \leqslant CF|x-\bar{x}|^l, \quad 2bk_0 + |k| = 2b;$$

$$|\Delta_t^{\bar{t}} D_t^{k_0} D_x^k v(t, x)| \leqslant CF(\bar{t}-t)^{\frac{2b(1-k_0)-|k|+l}{2b}}, \ 0 < 2bk_0 + + |k| \leqslant 2b. \quad (3.11)$$

Эти неравенства справедливы также, когда $|x-\bar{x}|^{2b} < \frac{t}{2}$ и $0 < \bar{t}-t < \frac{t}{2}$. Докажем это для случая $k_0 = 1$. Для остальных случаев доказательство аналогичное.

Используя формулу (3.6) и обозначения $|x-\bar{x}|^{2b} \equiv \beta$ и $\bar{t}-t \equiv \gamma$, запишем представления

$$\Delta_x^{\bar{x}} D_t^1 v(t, x) = \int_0^{t-\beta} d\tau \int_{\mathbb{R}_+^n} \Delta_x^{\bar{x}} D_t^1 G_0(t-\tau, x, \xi) \times$$

$$\times (f(\tau, \xi) - f(t, x))\, d\xi +$$

$$+\int\limits_{t-\beta}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} D_t^1 G_0(t-\tau, x, \xi)(f(\tau, \xi)-f(t, x))\,d\xi -$$

$$-\int\limits_{t-\beta}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} D_t^1 G_0(t-\tau, \bar{x}, \xi)(f(\tau, \xi)-f(t, \bar{x}))\,d\xi +$$

$$+(I+w(\beta, \bar{x}))\,\Delta_x^{\bar{x}} f(t, x)+\Delta_x^{\bar{x}} w(t, x)\, f(t, x), \qquad (3.12)$$

$$\Delta_t^{\bar{t}} D_t^1 v(t, x)=$$

$$=\int\limits_{0}^{t-\gamma} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \Delta_t^{\bar{t}} D_t^1 G_0(t-\tau, x, \xi)(f(\tau, \xi)-f(t, x))\,d\xi +$$

$$+\int\limits_{t-\gamma}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} D_t^1 G_0(t-\tau, x, \xi)(f(\tau, \xi)-f(t, x))\,d\xi -$$

$$-\int\limits_{t-\gamma}^{\bar{t}} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} D_{\bar{t}}^1 G_0(\bar{t}-\tau, x, \xi)(f(\tau, \xi)-f(\bar{t}, x))\,d\xi +$$

$$+(I+w(\bar{t}-t+\gamma, x))\,\Delta_t^{\bar{t}} f(t, x)+\Delta_t^{\bar{t}} w(t, x)\, f(t, x). \qquad (3.13)$$

Все слагаемые из формул (3.12) и (3.13) легко оцениваются с помощью неравенств (2.34), (3.3) и (3.9). Оценим, например, первые два интеграла из (3.12), их обозначим соответственно через P_1 и P_2. Имеем

$$|P_1| \leqslant CF\beta^{\frac{1}{2b}} \int\limits_{0}^{t-\beta} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} (t-\tau)^{-\frac{n+1}{2b}-1}\left(\exp\left\{-c\frac{|x-\xi|^q}{(t-\tau)^{q-1}}\right\}+\right.$$

$$\left.+\exp\left\{-c\frac{|\bar{x}-\xi|^q}{(t-\tau)^{q-1}}\right\}\right)\left((t-\tau)^{\frac{l}{2b}}+|x-\xi|^l\right)d\xi \leqslant$$

$$\leqslant CF\beta^{\frac{1}{2b}} \int\limits_{0}^{t-\beta} \left((t-\tau)^{\frac{l-1}{2b}-1}+\beta^{\frac{l}{2b}}(t-\tau)^{-\frac{1}{2b}-1}\right)d\beta =$$

$$=CF\beta^{\frac{1}{2b}}\left(\frac{2b}{1-l}\left(\beta^{\frac{l-1}{2b}}-t^{\frac{l-1}{2b}}\right)+2b\beta^{\frac{l}{2b}}\left(\beta^{-\frac{1}{2b}}-t^{-\frac{1}{2b}}\right)\right)\leqslant$$

$$\leqslant CF\beta^{\frac{l}{2b}},$$

$$|P_2| \leqslant CF \int\limits_{t-\beta}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} (t-\tau)^{-\frac{n}{2b}-1} \times$$

$$\times \exp\left\{-c\frac{|x-\xi|^q}{(t-\tau)^{q-1}}\right\}\left((t-\tau)^{\frac{l}{2b}} + |x-\xi|^l\right) d\xi \leqslant$$

$$\leqslant CF \int\limits_{t-\beta}^{t} (t-\tau)^{\frac{l}{2b}-1} d\tau = CF\beta^{\frac{l}{2b}}.$$

Из неравенств (3.10) и (3.11) следует требуемая оценка (3.2).

Лемма 2. *Для любого нецелого числа $l > 0$ являются ограниченными операторы*

$$\mathcal{G}_j : C_0^l(\Pi_T') \to C_{0N}^{r_j+l}(\Pi_T^+), \quad 1 \leqslant j \leqslant m.$$

Доказательство. Пусть $f \in C_0^l(\Pi_T')$. Докажем, что тогда функция ω_j из (3.1) принадлежит пространству $C_{0N}^{r_j+l}(\Pi_T^+)$ и имеет место оценка

$$\|\omega_j\|_{\Pi_T^+}^{r_j+l} \leqslant CF, \quad F \equiv \|f\|_{\Pi_T'}^{l}, \tag{3.14}$$

с постоянной C, не зависящей от f.

Предположим вначале, что $l < 2b$. Функция f и ее производные равны нулю при $t = 0$ и удовлетворяют неравенствам

$$\begin{gathered} |\Delta_t^{\tau} D_{x'}^{k'} f(t, x')| \leqslant F|t-\tau|^{\frac{l-|k'|}{2b}}, \quad |k'| \leqslant [l], \\ |\Delta_{x'}^{\xi'} D_{x'}^{k'} f(t, x')| \leqslant F|x'-\xi'|^{\alpha}, \quad |k'| = [l], \\ \{(t, x'), (\tau, x'), (t, \xi')\} \subset \overline{\Pi}_T^+. \end{gathered} \tag{3.15}$$

При $(t, x) \in \Pi_T^+$ имеем

$$D_t^{k_0} D_x^k \omega_j(t, x) =$$

$$= \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} D_t^{k_0} D_x^k G_j(t-\tau, x-\xi') \Delta_\tau^t f(\tau, \xi') d\xi' +$$

$$+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} D_t^{k_0} D_x^k G_j(t-\tau, x-\xi') f(t, \xi') d\xi' \equiv$$

$$\equiv J_1(t, x) + J_2(t, x), \quad 2bk_0 + |k| \leqslant r_j + l. \tag{3.16}$$

Преобразуем $J_2(t, x)$ к виду, удобному для оценок. Если воспользоваться представлением (2.12) при $r = 1$, то с помощью интегрирования по частям и оценок (2.13) получим, что

$$J_2(t, x) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} D_t^{k_0} D_x^k G_j^{(1)}(t, x-\xi') f(t, \xi')\, d\xi' +$$

$$+ \sum_{\nu', \mu'} c_{\nu'\mu'} J_2^{(\nu', \mu')}(t, x), \tag{3.17}$$

где суммирование проводится по таким мультииндексам ν' и μ', что $|\nu'| = 2b - l$ и $|\mu'| = l$, $c_{\nu'\mu'}$ — некоторые постоянные и

$$J_2^{(\nu', \mu')}(t, x) \equiv \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} D_t^{k_0} D_x^k D_{x'}^{\nu'} G_j^{(1)}(t-\tau, x-\xi') \times$$

$$\times \Delta_{\xi'}^{x'} D_{\xi'}^{\mu'} f(t, \xi')\, d\xi'. \tag{3.18}$$

Отметим, что при этом мы использовали следующие очевидные равенства:

$$\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} D_t^{k_0+1} D_x^k G_j^{(1)}(t-\tau, x-\xi') f(t, \xi')\, d\xi' =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} D_t^{k_0} D_x^k G_j^{(1)}(t, x-\xi') f(t, \xi')\, d\xi',$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} D_t^{k_0} D_x^k D_{x'}^{\nu'} G_j^{(1)}(t, x-\xi')\, d\xi' = 0, \quad |\nu'| > 0.$$

На основании неравенств (2.13) и (3.15) все интегралы из (3.16) — (3.18) легко оцениваются и в результате получаем оценки

$$|D_t^{k_0} D_x^k w_j(t, x)| \leqslant CFt^{\frac{r_j + l - 2bk_0 - |k|}{2b}}, \quad (t, x) \in \Pi_T^+, \tag{3.19}$$
$$2bk_0 + |k| \leqslant r_j + [l].$$

Для производных от w_j справедливы также следующие оценки разностей:

$$|\Delta_x^{\bar{x}} D_t^{k_0} D_x^k w_j(t, x)| \leqslant CF\beta^{\frac{l-[l]}{2b}}, \quad 2bk_0 + |k| = r_j + [l], \tag{3.20}$$

$$|\Delta_t^{\bar{t}} D_t^{k_0} D_x^k w_j(t, x)| \leqslant CF\gamma^{\frac{r_j + l - 2bk_0 - |k|}{2b}}, \quad 0 < r_j + l - 2bk_0 - |k| < 2b,$$

где величины β и γ те же, что и в доказательстве леммы 1.

Если $\beta \geqslant \frac{t}{2}$ и $\gamma \geqslant \frac{t}{2}$, то оценки (3.20) непосредственно следуют из оценок (3.19). При других значениях β и γ так же, как и при доказательстве леммы 1, нужно получить удобные представления рассматриваемых разностей, а затем оценить выражения из этих представлений с помощью неравенств (2.13) и (3.15).

Выпишем требуемые представления разностей для случая $2bk_0 + |k| = r_l + [l]$. Чтобы сократить записи, введем обозначения

$$H(t, x) \equiv D_t^{k_0} D_x^k G_l(t, x), \quad H^{(\nu')}(t, x) \equiv D_t^{k_0} D_x^k D_{x'}^{\nu'} G_l^{(1)}(t, x'),$$

$$f^{(\mu')}(t, x') \equiv D_{x'}^{\mu'} f(t, x').$$

Имеем

$$\Delta_x^{\bar{x}} D_t^{k_0} D_x^k \omega_l(t, x) =$$

$$= \int_0^{t-\beta} d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Delta_x^{\bar{x}} H(t-\tau, x-\xi') \Delta_t^{\tau} f(\tau, \xi') d\xi' +$$

$$+ \int_{t-\beta}^{t} d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} H(t-\tau, x-\xi') \Delta_t^{\tau} f(\tau, \xi') d\xi' -$$

$$- \int_{t-\beta}^{t} d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} H(t-\tau, \bar{x}-\xi') \Delta_t^{\tau} f(\tau, \xi') d\xi' +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Delta_x^{\bar{x}} H^{(0)}(t, x-\xi') f(t, \xi') d\xi' +$$

$$+ \sum_{\nu', \mu'} c_{\nu'\mu'} \left(\int_0^{t-\beta} d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Delta_x^{\bar{x}} H^{(\nu')}(t-\tau, x-\xi') \times \right.$$

$$\times \Delta_{\xi'}^{x'} f^{(\mu')}(t, \xi') d\xi' +$$

$$+ \int_{t-\beta}^{t} d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} H^{(\nu')}(t-\tau, x-\xi') \Delta_{\xi'}^{x'} f^{(\mu')}(t, \xi') d\xi' -$$

$$\left. - \int_{t-\beta}^{t} d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} H^{(\nu')}(t-\tau, \bar{x}-\xi') \Delta_{\xi'}^{\bar{x}'} f^{(\mu')}(t, \xi') d\xi' \right),$$

$$\Delta_t^{\bar{t}} D_t^{k_0} D_x^k \omega_l(t, x) =$$

$$= \int\limits_0^{t-\gamma} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \Delta_t^t H(t-\tau,\ x-\xi')\,\Delta_\tau^t f(\tau,\ \xi')\,d\xi' +$$

$$+ \int\limits_{t-\gamma}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} H(t-\tau,\ x-\xi')\,\Delta_\tau^t f(\tau,\ \xi')\,d\xi' -$$

$$- \int\limits_{t-\gamma}^{\bar t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} H(\bar t-\tau,\ x-\xi')\,\Delta_\tau^{\bar t} f(\tau,\ \xi')\,d\xi' +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \Delta_t^{\bar t} H^{(0)}(t,\ x-\xi')\,f(t,\ \xi')\,d\xi' +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} H^{(0)}(\bar t-t+\gamma,\ x-\xi')\,\Delta_t^{\bar t} f(t,\ \xi')\,d\xi' +$$

$$+ \sum_{\nu',\mu'} c_{\nu'\mu'} \Bigg(\int\limits_0^{t-\gamma} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \Delta_t^{\bar t} H^{(\nu')}(t-\tau,\ x-\xi') \times$$

$$\times \Delta_{\xi'}^{x'} f^{(\mu')}(t,\ \xi')\,d\xi' + \int\limits_{t-\gamma}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} H^{(\nu')}(t-\tau,\ x-\xi') \times$$

$$\times \Delta_{\xi'}^{x'} f^{(\mu')}(t,\ \xi')\,d\xi' -$$

$$- \int\limits_{t-\gamma}^{\bar t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} H^{(\nu')}(\bar t-\tau,\ x-\xi')\,\Delta_{\xi'}^{x'} f^{(\mu')}(\bar t,\xi',)\,d\xi' \Bigg).$$

Оценки слагаемых, содержащих интегрирование по τ, аналогичны оценкам интегралов P_1 и P_2, проведенным при доказательстве леммы 1. Оценки остальных слагаемых трудностей не вызывают.

Оценок (3.19) и (3.20) достаточно, чтобы сделать вывод о справедливости оценки (3.14) и, следовательно, утверждения леммы для случая $l < 2b$.

Если $l > 2b$, то, используя представление (2.12) с $r = \left[\frac{l}{2b}\right]$ и свойства функции f, интегрированием по частям получаем

$$\omega_j(t,\ x) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} G_j^{(r)}(t-\tau,\ x-\xi') \times$$

$$\times (D_\tau^1 + (1+\delta_1)(-\Delta_{\xi'})^b)^r f(\tau,\ \xi')\,d\xi', \quad (t,\ x) \in \Pi_T^+. \quad (3.21)$$

Поскольку $l - 2br < 2b$, то доказательство леммы для случая $l > 2b$ сводится к повторению предыдущего доказательства для интегралов (3.21).

3.2. О продолжении функций из пространств Гёльдера. Будем использовать следующие утверждения о продолжении функций, принадлежащих пространствам Гёльдера (во всех приведенных ниже леммах l — фиксированное нецелое положительное число).

Лемма 3. Пусть $\varphi \in C_N^l(\mathbb{R}_+^n)$. *Тогда существует продолжение* φ^* *функции* φ *на* $\mathbb{R}^n$ *такое, что* $\varphi^* \in C_N^l(\mathbb{R}^n)$ *и справедливо неравенство*

$$\|\varphi^*\|_{\mathbb{R}^n}^{l+\alpha} \leqslant C\|\varphi\|_{\mathbb{R}_+^n}^{l+\alpha}, \qquad (3.22)$$

где C *— положительная постоянная, не зависящая от* φ.

Доказательство. Согласно конструкции продолжения, предложенной Хестенсом и Уитни (см., например, [14]), положим

$$\varphi^*(x', x_n) = \begin{cases} \varphi(x', x_n), & x' \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad x_n \geqslant 0, \\ \sum\limits_{j=1}^{[l]+1} \lambda_j \varphi\left(x', -\frac{x_n}{j}\right), & x' \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad x_n < 0, \end{cases}$$

где λ_j, $1 \leqslant j \leqslant [l]+1$,— числа, определяемые из системы линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{[l]+1} \lambda_j \left(-\frac{1}{j}\right)^s = 1, \quad 0 \leqslant s \leqslant [l]. \qquad (3.23)$$

Непосредственно проверяется, что так определенная функция φ^* имеет в $\mathbb{R}^n$ непрерывные производные до порядка $[l]$ включительно и выполняется неравенство (3.22).

Лемма 4. Для любой функции $u \in C_{0N}^l(\Pi_T^+)$ *существует продолжение* u^* *на* Π^+, *принадлежащее пространству* $C_{0N}^l(\Pi^+)$, *равное нулю при* $t \geqslant \left(2 + \left[\frac{l}{2b}\right]\right) T$, $x \in \mathbb{R}_+^n$ *и удовлетворяющее неравенству*

$$\|u^*\|_{\Pi^+}^l \leqslant C\|u\|_{\Pi_T^+}^l$$

с постоянной $C > 0$, *не зависящей от* u.

Доказательство. Требуемое продолжение определяется следующим образом:

$$u^*(t, x) = \begin{cases} u(t, x), & 0 \leqslant t \leqslant T, \quad x \in \mathbb{R}^n_+, \\ \sum\limits_{j=1}^{\left[\frac{l}{2b}\right]+1} \lambda_j u\left(T - \dfrac{t-T}{j}, x\right), & t > T, \quad x \in \mathbb{R}^n_+, \end{cases}$$

где числа λ_j, $1 \leqslant j \leqslant \left[\frac{l}{2b}\right] + 1$, находятся из системы уравнений, получающейся из (3.23) заменой $[l]$ на $\left[\frac{l}{2b}\right]$. При этом считаем, что $u(t, x) = 0$ при $t < 0$, $x \in \mathbb{R}^n_+$.

Лемма 5. Пусть заданы функции $\varphi_j \in C_N^{l-2bj}(\mathbb{R}^n)$, $0 \leqslant \leqslant j \leqslant \left[\frac{l}{2b}\right]$. *Тогда для любого фиксированного* $T > 0$ *существует функция* $u \in C_N^l(\Pi_T)$ *такая, что*

$$D_t^j u|_{t=0} = \varphi_j, \quad 0 \leqslant j \leqslant \left[\frac{l}{2b}\right], \tag{3.24}$$

$$\|u\|^l_{\Pi_T} \leqslant C \sum_{j=0}^{\left[\frac{l}{2b}\right]} \|\varphi_j\|^{l-2bj}_{\mathbb{R}^n}, \tag{3.25}$$

где $C > 0$ *не зависит от* φ_j, $0 \leqslant j \leqslant \left[\frac{l}{2b}\right]$.

Доказательство. Если $l < 2b$, то можно взять $u(t, x) = \varphi_0(x)$, $(t, x) \in \Pi_T$.

Пусть $l > 2b$. Как и в книге [4], введем функции

$$\psi_j(x) = \sum_{s=0}^{j} C_j^s (-\Delta_x)^{bs} \varphi_{j-s}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \leqslant j \leqslant \left[\frac{l}{2b}\right],$$

где C_j^s — число сочетаний из j элементов по s. Всякая функция u: $\Pi_T \to K_{N1}$, удовлетворяющая условиям (3.24), удовлетворяет также условиям

$$L^j u|_{t=0} = \psi_j, \quad 0 \leqslant j \leqslant \left[\frac{l}{2b}\right], \quad L \equiv D_t^1 + (-\Delta_x)^b, \tag{3.26}$$

которые равносильны равенствам

$$\sum_{s=0}^{j} C_j^s (-\Delta_x)^{bs} (D_t^{j-s} u|_{t=0} - \varphi_{j-s}) = 0, \ 0 \leqslant j \leqslant \left[\frac{l}{2b}\right]. \tag{3.27}$$

Справедливо также обратное утверждение. Действительно, пусть функция u удовлетворяет равенствам (3.27). Тогда из равенства с номером $j=0$ получаем, что $u|_{t=0}=\varphi_0$. Пользуясь этим условием, из равенства (3.27) с номером $j=1$ получим, что $D_t^1 u|_{t=0}=\varphi_1$, и так далее.

Определим функции $u^{(j)}:\overline{\Pi}_T\to K_{N1}$, $0\leqslant j\leqslant\left[\frac{l}{2b}\right]$, как решения следующих задач Коши:

$$Lu^{(j)}=u^{(j+1)},\quad u^{(j)}|_{t=0}=\psi_j,\quad 0\leqslant j\leqslant\left[\frac{l}{2b}\right],$$

где $u^{(j)}\equiv 0$ при $j=\left[\frac{l}{2b}\right]+1$.

Поскольку $u^{(j)}=L^j u^{(0)}$, $1\leqslant j\leqslant\left[\frac{l}{2b}\right]$, то функция $u\equiv$ $\equiv u^{(0)}$ удовлетворяет условиям (3.26) и, следовательно, (3.24). Докажем справедливость для нее оценки (3.25). Для этого достаточно доказать неравенства

$$\|u^{(j)}\|_{\Pi_T}^{l-2bj}\leqslant C\,(\|u^{(j+1)}\|_{\Pi_T}^{l-2b(j+1)}+\|\psi_j\|_{\mathbb{R}^n}^{l-2bj}),\ 0\leqslant j\leqslant\left[\frac{l}{2b}\right]. \tag{3.28}$$

Действительно, поскольку

$$\|\psi_j\|_{\mathbb{R}^n}^{l-2bj}\leqslant C\sum_{s=0}^{j}\|\varphi_s\|_{\mathbb{R}^n}^{l-2bs},\quad 0\leqslant j\leqslant\left[\frac{l}{2b}\right],$$

то, последовательно используя неравенства (3.28), получаем оценку (3.25). Таким образом, следует доказать для решений задачи Коши

$$Lu=f,\quad u|_{t=0}=\varphi$$

оценки

$$\|u\|_{\Pi_T}^{r}\leqslant CF_{r-2b},\quad F_{r-2b}\equiv\|f\|_{\Pi_T}^{r-2b}+\|\varphi\|_{\mathbb{R}^n}^{r}, \tag{3.29}$$

где r — некоторое положительное число.

Из п. 2.2 известно, что решение такой задачи определяется формулой (2.26). Поскольку для $r>2b+1$

$$D_x^k u(t,x)=\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^n}Z(t-\tau,x-\xi)\,D_\xi^k f(\tau,\xi)\,d\xi+$$
$$+\int_{\mathbb{R}^n}Z(t,x-\xi)\,D_\xi^k\varphi(\xi)\,d\xi,\ (t,x)\in\Pi_T,\ |k|\leqslant[r]-2b,$$

то оценку (3.29) достаточно доказать для $r<2b+1$. Рассмотрим самый трудный случай, когда $0<r-2b<1$.

Учитывая то, что производная $D_t^1 u$, в силу равенства $Lu = f$, выражается через f и $D_x^k u$, $|k| = 2b$, оценим лишь производные $D_x^k u$, $|k| \leqslant 2b$.

С помощью методики, использованной при доказательстве леммы 1, на основании оценок (2.23) и равенств (2.24) имеем

$$D_x^k u(t, x) =$$

$$= \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} D_x^k Z(t-\tau, x-\xi)(f(\tau, \xi) - f(t, x))\, d\xi +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^n} Z(t, x-\xi)\, \Delta_\xi^x D_\xi^k \varphi(\xi)\, d\xi + D_x^k \varphi(x), \ (t, x) \in \Pi_T, \ |k| \leqslant 2b,$$

откуда

$$|D_x^k u(t, x)| \leqslant CF_{r-2b} t^{\frac{r-|k|}{2b}} + |D_x^k \varphi(x)| \leqslant CF_{r-2b}, \quad |k| \leqslant 2b. \tag{3.30}$$

Следовательно, при $|\bar{x} - x|^{2b} \geqslant \frac{t}{2}$ и $\bar{t} - t \geqslant \frac{t}{2}$ справедливы неравенства

$$|\Delta_x^{\bar{x}} D_x^k u(t, x)| \leqslant CF_{r-2b} |x - \bar{x}|^{r-2b}, \quad |k| = 2b, \tag{3.31}$$

$$|\Delta_t^{\bar{t}} D_x^k u(t, x)| \leqslant CF_{r-2b} (\bar{t} - t)^{\frac{r-|k|}{2b}}, \quad 0 < |k| \leqslant 2b.$$

Справедливость таких оценок для случаев $|x - \bar{x}|^{2b} < \frac{t}{2}$ и $\bar{t} - t < \frac{t}{2}$ вытекает из представлений для разностей $\Delta_x^{\bar{x}} D_x^k u$ и $\Delta_t^{\bar{t}} D_x^k u$, аналогичных (3.12) и (3.13).

Требуемая оценка (3.29) является следствием оценок (3.30) и (3.31).

3.3. Граничная задача с нулевыми начальными данными. Рассмотрим параболическую граничную задачу (2.1) — (2.3) при специальных предположениях относительно f, φ и g_j, $1 \leqslant j \leqslant m$, а именно следующую задачу в области Π_T^+:

$$A_0 u = f, \ u|_{t=0} = 0, \ B_{j0} u|_{x_n=0} = g_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant m, \tag{3.32}$$

где

$$f \in C_{0N}^l(\Pi_T^+), \quad g_j \in C_0^{2b-r_j+l}(\Pi_T'), \quad 1 \leqslant j \leqslant m, \tag{3.33}$$

l — нецелое число, большее числа (1.15)

Такая задача называется *граничной задачей с нулевыми начальными данными.*

Согласно замечанию 2, § 2, решение задачи (3.32) определяется формулой (2.42), которая с помощью обозначений (3.1) записывается в виде

$$u = \mathcal{G}_0 f + \sum_{j=1}^{m} \mathcal{G}_j (g_j - C_j f|_{x_n=0}) \equiv u_1 + u_2. \qquad (3.34)$$

В силу лемм 1 и 2 $u \in C_{0N}^{2b+l}(\Pi_T^+)$ и справедлива оценка

$$\|u\|_{\Pi_T^+}^{2b+l} \leqslant C\left(\|f\|_{\Pi_T^+}^{l} + \sum_{j=1}^{m} \|g_j\|_{\Pi_T'}^{2b-r_j+l}\right), \qquad (3.35)$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от f и g_j, $1 \leqslant j \leqslant m$.

Докажем, что решение (3.34) задачи (3.32) единственно в пространстве $C_{0N}^{2b+l}(\Pi_T^+)$. Сначала доказательство проведем для финитных решений.

Лемма 6. *Если $u \in C_{0N}^{2b+l}(\Pi_T^+)$ — решение задачи* (3.32), *равное нулю при достаточно больших $|x|$, то для него справедливо представление* (3.34).

Доказательство. На основании леммы 4 продолжим функцию u на Π^+ так, чтобы ее продолжение u^* принадлежало пространству $C_{0N}^{2b+l}(\Pi^+)$ и было равно нулю вне множества $\Omega_R \equiv \{(t, x) \in \Pi^+ \mid t \in (0, R^{2b}), \ |x| \leqslant \leqslant R\}$, где R — достаточно большое число. Тогда равенства (3.32) определят соответствующие продолжения f^* и $\overset{*}{g}_j$ функций f и g_j, $1 \leqslant j \leqslant m$. Эти продолжения также будут равны нулю вне Ω_R.

Пусть

$$u_1^* \equiv \mathcal{G}_0 f^*, \ u_2^* \equiv \sum_{j=1}^{m} \mathcal{G}_j (g_j^* - C_j f^*|_{x_n=0}), \quad w \equiv u^* - u_1^*.$$

Достаточно доказать равенство $w = \overset{*}{u}_2$. Действительно, если оно выполнено, то $u^* = \overset{*}{u}_1 + \overset{*}{u}_2$ и в области Π_T^+ $u = = u_1 + u_2$.

Из рассуждений, проведенных в п. 1.2 и 2.1, вытекает, что функция $\overset{*}{u}_2$ определяется формулой (1.15), в которой v — решение задачи

$$\begin{gathered} A_0(p, \sigma', D_{x_n}) v(p, \sigma', x_n) = 0, \quad |v(p, \sigma', x_n)| \to 0, \\ x_n \to \infty, \\ B_{j0}(p, \sigma', D_{x_n}) v(p, \sigma', x_n)|_{x_n=0} = \\ = (LF_{n-1})[g_j^* - C_j f^*|_{x_n=0}](p, \sigma'), \quad 1 \leqslant j \leqslant m. \end{gathered} \qquad (3.36)$$

Заметим, что для функции w при $(t, x) \in \Pi^+$, $|x| \geqslant 2R$ справедливы неравенства

$$|D_t^{k_0} D_x^k w(t, x)| \leqslant C \exp\left\{-c \frac{|x|^q}{t^{q-1}}\right\}, \quad 2bk_0 + |k| \leqslant 2b + [l]. \tag{3.37}$$

Из-за финитности u^* достаточно доказать эти неравенства для u_1^*. Так как при $|x| \geqslant 2R$ и $|\xi| \leqslant R$ $|x - \xi| \geqslant \frac{|x|}{2}$ и $|x - \xi| \geqslant R$, то с помощью оценок (2.34) имеем

$$|D_t^{k_0} D_x^k u_1^*(t, x)| \leqslant$$

$$\leqslant \max |f^*| \int_0^{\min(t, R^{2b})} d\tau \int_{\mathbb{R}_+^n \cap \{|\xi| \leqslant R\}} |D_t^{k_0} D_x^k G_0(t - \tau, x, \xi)| d\xi \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \max |f^*| \int_0^{R^{2b}} d\tau \int_{\mathbb{R}_+^n \cap \{|\xi| \leqslant R\}} (t - \tau)^{-\frac{n + 2bk_0 + |k|}{2b}} \times$$

$$\times \exp\left\{-c_1 \frac{|x - \xi|^q}{(t - \tau)^{q-1}}\right\} d\xi \leqslant C_2 \int_0^{R^{2b}} (t - \tau)^{-k_0 - \frac{|k|}{2b}} \times$$

$$\times \exp\left\{-\varepsilon \frac{R^q}{(t - \tau)^{q-1}}\right\} d\tau \exp\left\{-c \frac{|x|^q}{t^{q-1}}\right\} \leqslant C \exp\left\{-c \frac{|x|^q}{t^{q-1}}\right\}.$$

В силу неравенств (3.37) функция w представима в виде (1.18) через свое преобразование Фурье по x' и преобразование Лапласа по t, которое обозначено через v. Но эта функция является решением задачи

$$A_0 w = 0, \quad w|_{t=0} = 0, \quad B_{j0} w|_{x_n=0} = g_j^* - C_j f^*|_{x_n=0}, \quad 1 \leqslant j \leqslant m,$$

поэтому v есть решение задачи (3.36). Отсюда на основании единственности решения задачи (3.36) получаем, что $w = \overset{*}{u}_2$. Лемма доказана.

Докажем, что всякое решение u задачи (3.32) из пространства $C_{0N}^{2b+l}(\Pi_T^+)$ представимо в виде (3.34). Для этого рассмотрим бесконечно дифференцируемую функцию $\zeta : \mathbb{R}_+^1 \to \mathbb{R}$ такую, что $\zeta(t) = 1$ при $t \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ и $\zeta(t) = 0$ при $t \geqslant 1$. Функция $u_R(t, x) \equiv \zeta\left(\frac{|x|}{R}\right) u(t, x)$, $(t, x) \in \Pi_T^+$, $R \geqslant 1$, является решением задачи (3.32), в которой f заменено на f_R, а g_j — на g_{jR}, где

$$f_R(t, x) = \zeta\left(\frac{|x|}{R}\right) f(t, x) +$$

$$+ \left(A_0 \zeta\left(\frac{|x|}{R}\right) - \zeta\left(\frac{|x|}{R}\right) A_0\right) u(t, x),$$

$$g_{jR}(t, x') = \zeta\left(\frac{|x'|}{R}\right) g_j(t, x') +$$

$$+ \left(B_{j0} \zeta\left(\frac{|x|}{R}\right) - \zeta\left(\frac{|x|}{R}\right) B_{j0}\right) u(t, x)|_{x_n=0}.$$

На основании леммы 6 имеем равенство

$$u_R = \mathscr{G}_0 f_R + \sum_{j=1}^{m} \mathscr{G}_j (g_{jR} - C_j f_R|_{x_n=0}), \quad R \geqslant 1.$$

Используя свойства функции ζ и абсолютную сходимость интегралов из (3.34), перейдем в последнем равенстве к пределу при $R \to \infty$, в результате чего получим представление (3.34).

Итак, доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Для любых функций f и g_j, $1 \leqslant j \leqslant m$, удовлетворяющих условиям* (3.33), *формула* (3.34) *определяет единственное решение задачи* (3.32), *которое принадлежит пространству $C_{0N}^{2b+l}(\Pi_T^+)$ и для которого справедлива оценка* (3.35).

3.4. Общий случай задачи (2.1) — (2.3). Пусть u — решение задачи (2.1) — (2.3) в общем случае, принадлежащее пространству $C_N^{2b+l}(\Pi_T^+)$, где l — нецелое число, большее r_0. Тогда в силу определения пространств Гёльдера

$$f \in C_N^l(\Pi_T^+), \ \varphi \in C_N^{2b+l}(\mathbb{R}_+^n), \ g_j \in C^{2b-r_j+l}(\Pi_T'), \ 1 \leqslant j \leqslant m, \tag{3.38}$$

при этом существует такая постоянная $C > 0$, не зависящая от u, что

$$\|f\|_{\Pi_T^+}^{l} + \|\varphi\|_{\mathbb{R}_+^n}^{2b+l} + \sum_{j=1}^{m} \|g_j\|_{\Pi_T'}^{2b-r_j+l} \leqslant C \|u\|_{\Pi_T^+}^{2b+l}.$$

Функции f, φ и g_j, кроме того, связаны определенными условиями при $t = 0$ и $x_n = 0$, называемыми *условиями согласования*. Чтобы сформулировать эти условия, введем обозначения

$$\varphi_j \equiv D_t^j u|_{t=0}, \quad P(D_x) \equiv \sum_{|k|=2b} a_k D_x^k.$$

Из системы (2.1) и начального условия (2.2) определим функции φ_j, $0 \leqslant j \leqslant \left[\frac{l}{2b}+1\right]$. Очевидно, что

$$\varphi_0 = \varphi, \quad \varphi_1 = P(D_x)\varphi + f|_{t=0},$$

$$\varphi_j = P(D_x)\varphi_{j-1} + D_t^{j-1} f|_{t=0}, \quad 2 \leqslant j \leqslant \left[\frac{l}{2b}+1\right]. \quad (3.39)$$

Условия согласования заключаются в том, что функции φ_j, $0 \leqslant j \leqslant \left[\frac{l}{2b}+1\right]$, удовлетворяют следующим соотношениям, полученным из равенств (2.3):

$$\sum_{2bk_0+|k|=2b} b_{jk_0k} D_x^k \varphi_{k_0+i}|_{x_n=0} = D_t^i g_j|_{t=0},$$

$$0 \leqslant i \leqslant \left[\frac{l-r_j}{2b}+1\right], \quad 1 \leqslant j \leqslant m.$$

Такие условия называются *условиями согласования порядка* $\left[\frac{l}{2b}+1\right]$.

Итак, если $u \in C_N^{2b+l}(\Pi_T^+)$ есть решение задачи (2.1) — (2.3), то правые части задачи удовлетворяют условиям (3.38) и условиям согласования порядка $\left[\frac{l}{2b}+1\right]$. Оказывается, что эти условия являются и достаточными для существования решения из указанного пространства.

Теорема 2. *Пусть l — нецелое число, большее числа* (1.15). *Если правые части f, φ и g_j, $1 \leqslant j \leqslant m$, параболической граничной задачи* (2.1) — (2.3) *удовлетворяют условиям* (3.38) *и условиям согласования порядка* $\left[\frac{l}{2b}+1\right]$ *то эта задача имеет единственное решение $u \in C_N^{2b+l}(\Pi_T^+)$. При этом существует такая постоянная $C>0$, не зависящая от f, φ и g_j, $1 \leqslant j \leqslant m$, что справедлива оценка*

$$\|u\|_{\Pi_T^+}^{2b+l} \leqslant C\left(\|f\|_{\Pi_T^+}^{l} + \|\varphi\|_{\mathbb{R}_+^n}^{2b+l} + \sum_{j=1}^{m} \|g_j\|_{\Pi_T'}^{2b-r_j+l}\right). \quad (3.40)$$

Доказательство. Теорему 2 можно вывести из теоремы 1. Чтобы это сделать, нужно свести задачу (2.1) — (2.3) к задаче с нулевыми начальными данными (3.32). Для этого рассмотрим функции φ_j, $0 \leqslant j \leqslant \left[\frac{l}{2b}+1\right]$, определенные формулами (3.39). В силу условий (3.38) $\varphi_j \in C_N^{2b(1-j)+l}(\mathbb{R}_+^n)$ и справедливы неравенства

$$\|\varphi_j\|_{\mathbb{R}_n^+}^{2b(1-j)+l} \leqslant C\left(\|f\|_{\Pi_T^+}^{l} + \|\varphi\|_{\mathbb{R}_+^n}^{2b+l}\right),\quad 0 \leqslant j \leqslant \left[\frac{l}{2b}+1\right]. \qquad (3.41)$$

Пользуясь леммой 3, продолжим функции φ_j на $\mathbb{R}^n$ так, чтобы для их продолжений φ_j^* выполнялись неравенства

$$\|\varphi_j^*\|_{\mathbb{R}^n}^{2b(1-j)+l} \leqslant C\|\varphi_j\|_{\mathbb{R}_+^n}^{2b(1-j)+l},\quad 0 \leqslant j \leqslant \left[\frac{l}{2b}+1\right]. \qquad (3.42)$$

В силу леммы 5 можно построить функцию $v \in C_N^{2b+l}(\Pi_T)$, удовлетворяющую начальным условиям

$$D_t^j v|_{t=0} = \varphi_j,\quad 0 \leqslant j \leqslant \left[\frac{l}{2b}+1\right],$$

и неравенству

$$\|v\|_{\Pi_T}^{2b+l} \leqslant C \sum_{j=0}^{\left[\frac{l}{2b}+1\right]} \|\varphi_j^*\|_{\mathbb{R}^n}^{2b(1-j)+l} \leqslant C \sum_{j=0}^{\left[\frac{l}{2b}+1\right]} \|\varphi_j\|_{\mathbb{R}_+^n}^{2b(1-j)+l} \leqslant$$
$$\leqslant C\left(\|f\|_{\Pi_T^+}^{l} + \|\varphi\|_{\mathbb{R}_+^n}^{2b+l}\right) \qquad (3.43)$$

(здесь мы воспользовались также неравенствами (3.34) и (3.35)).

Если ввести новую неизвестную функцию $u' = u - v$, то задача (2.1) — (2.3) перейдет в задачу

$$A_0 u' = f',\ u'|_{t=0} = 0,\ B_{j0}u'|_{x_n=0} = g_j',\quad 1 \leqslant j \leqslant m, \qquad (3.44)$$

где $f' = f - A_0 v$, $g_j' = g_j - B_{j0}v|_{x_n=0}$. Из свойств функции v, условий (3.38) и условий согласования следует, что $f' \in C_{0N}^{l}(\Pi_T^+)$, $g_j' \in C_0^{2b-r_j+l}(\Pi_T')$, $1 \leqslant j \leqslant m$. Кроме того, в силу неравенства (3.43),

$$\|f'\|_{\Pi_T^+}^{l} + \sum_{j=1}^{m} \|g_j'\|_{\Pi_T'}^{2b-r_j+l} \leqslant$$
$$\leqslant C\left(\|f\|_{\Pi_T^+}^{l} + \|\varphi\|_{\mathbb{R}_+^n}^{2b+l} + \sum_{j=1}^{m} \|g_j\|_{\Pi_T'}^{2b-r_j+l}\right).$$

Следовательно, (3.44) является задачей с нулевыми начальными данными и для нее справедливы утверждения теоремы 1, из которых следует существование решения задачи (2.1) — (2.3) со всеми требуемыми свойствами.

3.5. Необходимость условий параболичности. Из теоремы 2 следует, что выполнение алгебраических условий параболичности задачи (2.1) — (2.3) достаточно, чтобы имела место оценка (3.40) для любого решения u этой задачи из пространства $C_N^{2b+l}(\Pi_T^+)$. Оказывается, что эти условия являются и необходимыми для справедливости оценки (3.40).

Теорема 3. *Пусть система* (2.1) *имеет структуру параболической по Петровскому системы порядка* $2b$ *и число граничных условий в* (2.3) $m = bN$. *Для того чтобы граничная задача* (2.1) — (2.3) *была параболической, необходимо и достаточно, чтобы для некоторого нецелого числа* $l > r_0$ *существовала такая постоянная* $C > 0$, *что для любых функций* $u \in C_N^{2b+l}(\Pi_T^+)$ *справедливо неравенство*

$$\| u \|_{\Pi_T^+}^{2b+l} \leqslant C \left(\| A_0 u \|_{\Pi_T^+}^{l} + \| u |_{t=0} \|_{\mathbb{R}_+^n}^{2b+l} + \sum_{j=1}^{m} \| B_{j0} u |_{x_n=0} \|_{\Pi_T'}^{2b-r_j+l} \right). \tag{3.45}$$

Доказательство. Докажем, что из справедливости неравенства (3.45) для любых функций u из указанного пространства следует выполнение условия параболичности системы (2.1) и условия дополнительности. Будем использовать методику доказательства из работ [4; 15].

Предположим, что система (2.1) не является параболической. Тогда существуют такие $\sigma_0 \in \mathbb{R}^n$ и $p_0 \in \mathbb{C}$, что $|p_0| + |\sigma_0| > 0$, $\operatorname{Re} p_0 \geqslant 0$ и

$$\det A_0 (p_0, \sigma_0) = 0. \tag{3.46}$$

При любом фиксированном $\lambda > 0$ рассмотрим матрицу-столбец высоты N $v_\lambda(t, x)$, все элементы которой равны $\exp \{\lambda^{2b} p_0 t + i\lambda (x, \sigma_0)\}$. Пусть $\zeta : \Pi_T^+ \to K_{11}$ — бесконечно дифференцируемая и финитная функция, не равная тождественно нулю. Возьмем функцию

$$u_\lambda (t, x) \equiv [\hat{A}_0 (D_t, D_x) v_\lambda (t, x)]\, \zeta (t, x), \quad (t, x) \in \Pi_T^+,$$

где $\hat{A}_0$ — матрица, взаимная для A_0. Так как $u_\lambda |_{t=0} = 0$ и $B_{j0} u_\lambda |_{x_n=0} = 0$, $1 \leqslant j \leqslant m$, то, согласно предположению, имеем

$$\| u_\lambda \|_{\Pi_T^+}^{2b+l} \leqslant C \| A_0 u_\lambda \|_{\Pi_T^+}^{l}. \tag{3.47}$$

Но это неравенство не может выполняться при достаточно больших $\lambda > 0$. Действительно, наиболее быстро растущий при $\lambda \to \infty$ член в левой части неравенства (3.47) равен

$$C \lambda^{2bN+l} \exp \{\lambda^{2b} \tau \operatorname{Re} p_0\}, \quad \tau \in (0, T].$$

А поскольку в силу (3.46)

$$A_0 (D_t, D_x) [\hat{A}_0 (D_t, D_x) v_\lambda] = \lambda^{2bN} \det A_0 (p_0, \sigma_0) v_\lambda = 0,$$

то аналогичный член в правой части указанного неравенства равняется

$$C\lambda^{2bN+l-1}\exp\{\lambda^{2b}\tau\operatorname{Re} p_0\}.$$

Следовательно, неравенство (3.47) нарушается при больших λ.

Теперь докажем, что выполняется условие дополнительности. Предположим, что это не так. Тогда существуют такие $\sigma_0' \in \mathbb{R}^{n-1}$ и $p \in \mathbb{C}$, что $|p_0| + |\sigma_0'| > 0$, $\operatorname{Re} p_0 \geqslant 0$ и задача

$$A_0(p_0, \sigma_0', D_{x_n})v = 0, \quad B_{j0}(p_0, \sigma_0', D_{x_n})v|_{x_n=0} = 0,$$
$$1 \leqslant j \leqslant m,$$

имеет ненулевое решение $v_0(x_n)$, $x_n > 0$, удовлетворяющее условию (1.23).

Пусть λ — произвольно фиксированное положительное число. Рассмотрим функцию

$$u_\lambda(t, x) \equiv \lambda^{-2b-l}\exp\{\lambda^{2b}p_0(t-T) + i\lambda(x', \sigma_0')\}\, v_0(\lambda x_n),$$
$$(t, x) \in \Pi_T^+.$$

Легко проверить, что $A_0 u_\lambda = 0$, $B_{j0}u_\lambda|_{x_n=0} = 0$, $1 \leqslant j \leqslant m$, и $u_\lambda|_{t=0} = \varphi_\lambda$, где $\varphi_\lambda(x) = \lambda^{-2b-l}\exp\{-\lambda^{2b}p_0 T + i\lambda(x', \sigma_0')\}\, v_0(\lambda x_n)$, $x \in \mathbb{R}_+^n$.

Предположим сначала, что $\operatorname{Re} p_0 > 0$. В этом случае при достаточно больших $\lambda > 0$ имеем

$$\|\varphi_\lambda\|_{\mathbb{R}_+^n}^{2b+l} \leqslant C\exp\{-\lambda^{2b}T\operatorname{Re} p_0\},$$

в то время как

$$\|u_\lambda\|_{\Pi_T^+}^{2b+l} \geqslant \|u_\lambda(T, \cdot)\|_{\mathbb{R}_+^n}^{2b+l} \geqslant H(u_\lambda(T, \cdot)) = H(u_1(T, \cdot)),$$

где

$$H(w) \equiv \sum_{|k|=2b+[l]}\ \sup_{\{x,y\}\subset\overline{\mathbb{R}}_+^n} \frac{|\Delta_x^y D_x^k w(x)|}{|x-y|^{l-[l]}}.$$

Поскольку $H(u_1(T, \cdot)) > 0$ не зависит от λ, то отсюда вытекает, что оценка (3.45) не имеет места для функции u_λ при больших λ.

Нетрудно проверить, что при $\operatorname{Re} p_0 = 0$ неравенство (3.45) нарушается при больших λ для функции $w_\lambda(t, x) = \zeta\left(\frac{3t}{2T}\right)u_\lambda(t, x)$, $(t, x) \in \Pi_T^+$, где $\zeta : \mathbb{R} \to [0, 1]$ — бесконечно дифференцируемая функция такая, что $\zeta(t)=0$ при $t\leqslant\frac{1}{2}$ и $\zeta(t)=1$ при $t\geqslant 1$.

3.6. Матрица Грина граничной задачи. Рассмотрим вопрос об интегральном представлении решений общей граничной задачи (2.1) — (2.3). В п. 3.3 этот вопрос был решен для граничной задачи с нулевыми начальными данными.

Предположим вначале, что порядки r_j граничных выражений B_{j0}, $1\leqslant j\leqslant m$, меньше порядка $2b$ системы (2.1). Пусть u — решение задачи (2.1) — (2.3), принадлежащее пространству $C_N^{2b+l}(\Pi_T^+)$, $l>r_0$.

При фиксированном $h\in\left(0,\ \frac{T}{2}\right)$ рассмотрим функцию

$$u_h(t,\ x)=\zeta_h(t)\,u(t,\ x),\quad (t,\ x)\in\Pi_T^+,\tag{3.48}$$

где $\zeta_h(t)=\zeta\left(\frac{t}{h}\right)$, ζ — функция, введенная в п. 3.5. Очевидно, что $u_h\in C_{0N}^{2b+l}(\Pi_T^+)$ и

$$A_0u_h=\zeta_hf+\zeta_h'u,\ \ u_h|_{t=0}=0,\ \ B_{j0}u_h|_{x_n=0}=\zeta_hg_j,\ \ 1\leqslant j\leqslant m.$$

Поэтому в силу теоремы 1 для u_h справедлива формула вида (3.34):

$$u_h=\mathcal{G}_0(\zeta_hf+\zeta_h'u)+\sum_{j=1}^{m}\mathcal{G}_j(\zeta_hg_j).\tag{3.49}$$

Здесь же учтено, что в рассматриваемом случае $C_j=0$, $1\leqslant j\leqslant m$.

Считая точку $(t,\ x)\in\Pi_T^+$ фиксированной и $h\in(0,\ t)$, перейдем в (3.49) к пределу при $h\to 0$. При этом в левой части получим $u\ (t,\ x)$. Найдем предел правой части. Имеем

$$(\mathcal{G}_0(\zeta_hf))(t,\ x)=(\mathcal{G}_0f)(t,\ x)+\int_0^h d\tau\int_{\mathbb{R}_+^n}G_0(t-\tau,\ x,\ \xi)\times$$

$$\times(\zeta_h(\tau)-1)\,f(\tau,\ \xi)\,d\xi\to(\mathcal{G}_0f)(t,\ x),\quad h\to 0.$$

Аналогично доказывается, что $(\mathcal{G}_j(\zeta_hg_j))\ (t,\ x)\to(\mathcal{G}_jg_j)\times$ $\times\ (t,\ x)$, $h\to 0$, $1\leqslant j\leqslant m$. Учитывая свойства ζ_h и интегрируя по частям, получаем

$$(\mathcal{G}_0(\zeta_h'u))(t,\ x)=\int_{h/2}^{h}d\tau\int_{\mathbb{R}_+^n}G_0(t-\tau,\ x,\ \xi)\,\zeta_h'(\tau)\,u(\tau,\ \xi)\,d\xi=$$

$$=\int_{\mathbb{R}_+^n}G_0(t-h,\ x,\ \xi)\,u(h,\ \xi)\,d\xi-$$

$$-\int_{h/2}^{h} d\tau \int_{\mathbb{R}_+^n} D_\tau^1 (G_0(t-\tau, x, \xi) u(\tau, \xi)) \zeta_h(\tau)\, d\xi \to$$

$$\to \int_{\mathbb{R}_+^n} G_0(t, x, \xi) \varphi(\xi)\, d\xi, \quad h \to 0.$$

Таким образом, справедливо следующее представление для решения задачи (2.1) — (2.3):

$$u(t, x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}_+^n} G_0(t-\tau, x, \xi) f(\tau, \xi)\, d\xi +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}_+^n} G_0(t, x, \xi) \varphi(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} G_j(t-\tau, x-\xi') g_j(\tau, \xi')\, d\xi', \ (t, x) \in \Pi_T^+. \tag{3.50}$$

Матрица, составленная из ядер этого представления, называется *матрицей Грина задачи* (2.1) — (2.3).

Аналогично выводится формула (3.50) и в случае, когда для некоторых или всех j, $1 \leqslant j \leqslant m$, $r_j \geqslant 2b$, но в выражения B_{j0} не входят дифференцирования по t, а также дифференцирования по x_n порядков, больших $2b-1$.

Если же последнее условие нарушается, то можно вывести представление

$$u(t, x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}_+^n} \tilde{G}_0(t, \tau, x, \xi) f(\tau, \xi)\, d\xi +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}_+^n} \tilde{G}_{m+1}(t, x, \xi) \varphi(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} G_j(t-\tau, x-\xi') g_j(\tau, \xi')\, d\xi', \quad (t, x) \in \Pi_T^+,$$

в котором

$$\tilde{G}_0(t, \tau, x, \xi) = G_0(t-\tau, x, \xi) +$$

$$+ G_0'(t-\tau, x, \xi) + G_0''(t, \tau, x, \xi),$$

$$\tilde{G}_{m+1}(t, x, \xi) = G_0(t, x, \xi) +$$

$$+ G_0'(t, x, \xi) + G_{m+1}'(t, x, \xi),$$

где G_0', G_0'' и G_{n+1}' являются линейными комбинациями производных от дельта-функций, сосредоточенных в точках $\xi_n = 0$ и $\tau = 0$.

Таким образом, не все элементы матрицы Грина задачи (2.1) — (2.3) в общем случае есть обычные функции. Структура матрицы Грина задачи (2.1) — (2.3) и более общих задач подробно исследована в работе [16].

В заключение приведем две простейшие задачи, не все элементы матриц Грина которых являются обычными функциями.

Рассмотрим задачу 4, § 1. Как было отмечено в п. 2.1, эта задача эквивалентна задаче (2.10). Для ее решений, в силу доказанного выше, справедлива формула (3.50), которая в данном случае имеет вид

$$u(t, x) = \int_0^t d\tau \int_0^\infty G_0(t-\tau, x, \xi) f(\tau, \xi)\, d\xi +$$

$$+ \int_0^\infty G_0(t, x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \int_0^t G_1^1(t-\tau, x)\left(\varphi(0) + \int_0^\tau g(\beta)\, d\beta\right) d\tau, \quad t \in (0, T], \quad x > 0,$$

где G_0 и G_1^1 определяются равенствами (2.30) и (2.7) при $n = 1$. Если использовать выражение (2.11) для ядра Пуассона G_1 задачи 4, § 1, и положить

$$\tilde{G}_2(t, x, \xi) \equiv G_0(t, x, \xi) + 2\int_0^t G_1^1(t-\tau, x)\, d\tau\, \delta(\xi),$$

то предыдущая формула приобретает вид

$$u(t, x) = \int_0^t d\tau \int_0^\infty G_0(t-\tau, x, \xi) f(\tau, \xi)\, d\xi +$$

$$+ \int_0^\infty \tilde{G}_2(t, x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi + \int_0^t G_1(t-\tau, x)\, g(\tau)\, d\tau,$$

$$t \in (0, T], \quad x > 0.$$

Рассмотрим теперь задачу 5, § 1. Пусть вначале $\varphi = 0$, $f|_{t=0} = 0$ и $g|_{t=0} = 0$. В этом случае она сводится к задаче (считаем $a^2 = 1$)

$$D_t^1 u - \Delta_x u = f, \; u|_{t=0} = 0, \; (D_t^1 - \Delta_{x'})\, u|_{x_n=0} = g + f|_{x_n=0},$$

для решений которой, в силу теоремы 1, справедливо представление

$$u(t, x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n_+} G_0(t-\tau, x, \xi) f(\tau, \xi)\, d\xi +$$

$$+ \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} G_1(t-\tau, x-\xi')(g(\tau, \xi') + f(\tau, \xi', 0))\, d\xi', \tag{3.51}$$

$$(t, x) \in \Pi_T^+.$$

Чтобы получить представление в интегральной форме решения u задачи 5, § 1, в общем случае, рассмотрим функцию (3.48). В силу (3.51) для нее имеет место равенство

$$u_h(t, x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n_+} G_0(t-\tau, x, \xi) \times$$

$$\times (\zeta_h(\tau) f(\tau, \xi) + \zeta_h'(\tau) u(\tau, \xi))\, d\xi +$$

$$+ \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} G_1(t-\tau, x-\xi') \{\zeta_h(\tau)(g(\tau, \xi') + f(\tau, \xi', 0)) +$$

$$+ \zeta_h'(\tau) u(\tau, \xi', 0)\}\, d\xi', \quad (t, x) \in \Pi_T^+.$$

Если теперь перейти к пределу при $h \to 0$, то получим формулу

$$u(t, x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n_+} G_0(t-\tau, x, \xi) f(\tau, \xi)\, d\xi +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^n_+} G_0(t, x, \xi) \varphi(\xi)\, d\xi + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} G_1(t-\tau, x-\xi') \times$$

$$\times (g(\tau, \xi') + f(\tau, \xi', 0))\, d\xi' +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^n_+} G_1(t, x-\xi') \varphi(\xi', 0)\, d\xi', \quad (t, x) \in \Pi_T^+,$$

которую можно записать в виде

$$u(t, x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}_+^n} \tilde{G}_0(t, \tau, x, \xi) f(\tau, \xi)\, d\xi +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}_+^n} \tilde{G}_0(t, x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} G_1(t-\tau, x-\xi')\, g(\tau, \xi')\, d\xi', \quad (t, x) \in \Pi_T^+,$$

где

$$\tilde{G}_0(t, \tau, x, \xi) \equiv G_0(t-\tau, x, \xi) + 2G_1(t-\tau, x-\xi')\, \delta(\xi_n).$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Пусть правые части f, φ и g_j, $1 \leqslant j \leqslant m$, задачи (2.1) — (2.3), для которой $r_j < 2b$, $1 \leqslant j \leqslant m$, являются достаточно гладкими и удовлетворяют неравенствам

$$|f(t, x)| \leqslant C \exp\{\gamma |x|^q\}, \quad (t, x) \in \Pi_T^+,$$
$$|\varphi(x)| \leqslant C \exp\{\gamma |x|^q\}, \quad x \in \mathbb{R}_+^n, \tag{3.52}$$
$$|g_j(t, x')| \leqslant C \exp\{\gamma |x'|^q\}, \quad (t, x') \in \Pi_T', \quad 1 \leqslant j \leqslant m,$$

с некоторыми постоянными $C > 0$ и $\gamma > 0$. Доказать, что формула (3.50) определяет решение задачи (2.1) — (2.3) в $\Pi_{T_0}^+$ с некоторым $T_0 \in \in (0, T]$ и это решение удовлетворяет неравенству вида (3.52).

2. Доказать следующий аналог теоремы Тэклинда (см. [2; 6]). Пусть u — решение в Π_T^+ задачи (2.1) — (2.3) с $f = 0$, $\varphi = 0$, $g_j = 0$ и $r_j < 2b$, $1 \leqslant j \leqslant m$. Если $u \in C_N^{2b+l}((0, T] \times \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid |x| \leqslant R\})$, $0 < l < 1$, R — любое положительное число и выполняются неравенства

$$|D_x^k u(t, x)| \leqslant \exp\{|x|\, h(|x|)\}, \quad (t, x) \in \Pi_T^+, \quad |k| < 2b,$$

с функцией h такой, что интеграл

$$\int_0^\infty h^{1-2b}(r)\, dr \tag{3.53}$$

расходится, то $u = 0$ в Π_T^+.

Указание. Для любого фиксированного числа $R > 3$ рассмотреть функцию $u_R(t, x) \equiv \zeta_R(|x|)\, u(t, x)$, $(t, x) \in \Pi_T^+$, где ζ_R — бесконечно дифференцируемая на $(0, \infty)$ функция, равная единице на $(0, R-2)$ и нулю на (R, ∞). Заметить, что при любом $t_0 \in [0, T)$ u_R является решением задачи типа (2.1) — (2.3) в $(t_0, T] \times \mathbb{R}_+^n$ с финитными празыми частями. Для функции u_R записать представление вида (3.50) и оценить ее. Далее воспользоваться рассуждениями из книги [2], с. 258—261.

3. Доказать, что в классе функций, удовлетворяющих неравенству

$$|u(t, x)| \leqslant \exp\{|x| h(|x|)\}, \quad (t, x) \in \Pi_T^+,$$

с функцией h такой, что интеграл (3.53) сходится, нет единственности решения задачи 1, § 1.

Аналогичное утверждение доказать для задачи 2, § 1.

Указание. Решение задачи 1, § 1, с $f = 0$, $\varphi = 0$ и $g = 0$ искать в виде

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) \frac{x_n^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad (t, x) \in \Pi_T^+,$$

и воспользоваться методикой рассуждений из работ [2; 6].

4. Пусть λ — заданное комплексное число с $\operatorname{Re}\lambda > 0$ и пусть задача

$$A_0(D_t + \lambda, D_x) u(t, x) = f(t, x), \quad (t, x) \in \Pi^+, \tag{3.54}$$

$$u(t, x)|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}_+^n, \quad B_{j0}(D_x) u(t, x)|_{x_n=0} = g_j(t, x'),$$

$$(t, x') \in \Pi', \quad 1 \leqslant j \leqslant m,$$

параболическая, причем $r_j < 2b$, $1 \leqslant j \leqslant m$. Найти интегральное представление решения $v \in C_N^{2b+l}(\mathbb{R}_+^n)$, l — нецелое положительное число, эллиптической граничной задачи

$$\begin{gathered} -\sum_{|k|=2b} a_k D_x^k v(x) + \lambda v(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}_+^n, \\ B_{j0}(D_x) v(x)|_{x_n=0} = g_j(x'), \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad 1 \leqslant j \leqslant m, \end{gathered} \tag{3.55}$$

порожденной задачей (3.54). Получить оценки ядер из этого представления, составляющих матрицу Грина задачи (3.55).

Указание. Заметить, что функция $u(t, x) = e^{\lambda t} v(x)$, $(t, x) \in \Pi^+$, является решением задачи (3.54) с $\lambda = 0$, $f(t, x) = e^{\lambda t} f(x)$, $\varphi(x) = v(x)$, $g_j(t, x') = e^{\lambda t} g_j(x')$. Записать для функции u представление (3.50), из него получить выражение для v, в котором перейти к пределу при $t \to \infty$.

5. Положим $\Pi_{\tau,T}^+ \equiv (\tau, T] \times \mathbb{R}_+^n$, $\Pi'_{\tau,T} \equiv (\tau, T] \times \mathbb{R}^{n-1}$ и рассмотрим параболическую граничную задачу без начальных условий

$$A_0 u(t, x) = f(t, x), \quad (t, x) \in \Pi_{-\infty,T}^+,$$

$$B_{j0} u(t, x)|_{x_n=0} = g_j(t, x'), \quad (t, x') \in \Pi'_{-\infty,T}, \quad 1 \leqslant j \leqslant m,$$

для которой $r_j < 2b$, $1 \leqslant j \leqslant m$.

а) Пусть u — такое решение задачи (3.56), что при любом $t_0 < T$ $u \in C_N^{2b+l}(\Pi_{t_0,T}^+)$, $0 < l < 1$, и выполняются неравенства $|u(t_0, x)| \leqslant Ce^{\beta t_0}$, $|f(t_0, x)| \leqslant Ce^{\beta t_0}$, $x \in \mathbb{R}_+^n$, $|g_j(t_0, x')| \leqslant Ce^{\beta t_0}$, $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $1 \leqslant j \leqslant m$, где C и β — положительные постоянные, не зависящие от

t_0. Доказать справедливость формулы

$$u(t, x) = \int\limits_{-\infty}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} G_0(t-\tau, x, \xi) f(\tau, \xi) d\xi +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{-\infty}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} G_j(t-\tau, x-\xi') g_j(\tau, \xi') d\xi', \quad (t, x) \in \Pi^+_{-\infty,T}. \tag{3.57}$$

б) Для каких функций f и g_j, $1 \leqslant j \leqslant m$, формула (3.57) определяет решение задачи (3.56)?

Указание. Воспользоваться тем, что для функции $u(t, x)$, $(t, x) \in \Pi^+_{t_0,T}$, справедлива формула (3.50), в которой $\tau = 0$ замеиено на $\tau = t_0$, а $\varphi(\xi)$ — на $u(t_0, \xi)$.

§ 4. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ ОБЩИХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ

4.1. Шаудеровская теория. Результаты, аналогичные изложенным в § 3, справедливы для общей граничной задачи (1.11) — (1.13). Эти результаты составляют основу шаудеровской теории параболических граничных задач, названной так в честь польского математика Ю. П. Шаудера (1896—1943), который впервые получил ее основные результаты в случае задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка.

Приведем основные результаты шаудеровской теории для задачи (1.11) — (1.13). Будем искать решения этой задачи, принадлежащие пространству $\mathcal{U}^l \equiv C_N^{2b+l}(Q_T)$, где l — некоторое нецелое число, большее числа r_0, определяемого равенством (1.15).

Предположим, что для коэффициентов задачи (1.11) — (1.13) и границы $\partial\Omega$ выполняются следующие условия:

$$\{a_k \mid |k| \leqslant 2b\} \subset C^l(Q_T, K_{NN}), \ \{b_{jk_0k} \mid 2bk_0 + |k| \leqslant r_j\} \subset$$
$$\subset C^{2b-r_j+l}(S_T, K_{1N}), \quad 1 \leqslant j \leqslant m, \quad \partial\Omega \in C^{2b+l}. \tag{4.1}$$

Как и в § 3, устанавливается, что для существования решения $u \in \mathcal{U}^l$ необходимо, чтобы

$$f \in C_N^l(Q_T), \ \ \varphi \in C_N^{2b+l}(\Omega), \ \ g_j \in C^{2b-r_j+l}(S_T), \ \ 1 \leqslant j \leqslant m, \tag{4.2}$$

и выполнялись условия согласования порядка $\left[\frac{l}{2b} + 1\right]$.

Последние условия заключаются в том, что производные $D_t^s u|_{t=0}$, $0 \leqslant s \leqslant \left[\frac{l}{2b} + 1\right]$, определяемые из системы

1.11) и начального условия (1.12), удовлетворяют соотношениям, полученным из равенств (1.13) следующим образом: в j-м равенстве и в результатах его дифференцирования по t до порядка $\left[\frac{l-r_j}{2b}+1\right]$ ставится $t=0$.

Если правые части задачи (1.11) — (1.13) удовлетворяют условиям (4.2) и условиям согласования порядка $\left[\frac{l}{2b}+1\right]$, то скажем, что набор функций $F=(f, \varphi, g_1, \ldots, g_m)$ принадлежит пространству $\mathcal{F}^l$. В этом пространстве введем норму с помощью равенства

$$\|F\|^l \equiv \|f\|^l_{Q_T}+\|\varphi\|^{2b+l}_{\Omega}+\sum_{j=1}^{m}\|g_j\|^{2b-r_j+l}_{S_T}.$$

Содержание шаудеровской теории для задачи (1.11) — 1.13) раскрывают утверждения следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (4.1). *Тогда справедливы утверждения:*

1) *если задача* (1.11) — (1.13) *параболическая, то есть выполнены условия* 1 *и* 2, § 1, *то для существования единственного решения $u \in \mathcal{U}^l$ необходимо и достаточно, чтобы набор F правых частей задачи принадлежал пространству $\mathcal{F}^l$. При этом существует такая постоянная $C>0$, не зависящая от F, что справедливы неравенства*

$$C^{-1}\|F\|^l \leqslant \|u\|^{2b+l}_{Q_T} \leqslant C\|F\|^l; \tag{4.3}$$

2) *если для каждой функции $u \in \mathcal{U}^l$ выполняется второе из неравенств* (4.3), *в котором*

$$F=(Au,\ u|_{t=0},\ B_1u|_{S_T},\ \ldots,\ B_mu|_{S_T})$$

и постоянная C не зависит от u, то задача (1.11) — (1.13) *параболическая.*

Сделаем некоторые замечания относительно доказательства теоремы 1.

Необходимость условия $F \in \mathcal{F}^l$ и справедливость первого неравенства из (4.3), как уже отмечалось выше, очевидным образом следуют из свойств пространств Гёльдера и смысла условий согласования.

Наиболее трудным является доказательство достаточности указанного условия и справедливости второго из неравенств (4.3). Оно подробно проведено в работе [3].

Доказательство второго утверждения теоремы 1 имеется в работах [4; 15]. Для модельной граничной задачи оно приведено в п. 3.5.

4.2. L_p-теория. Кроме шаудеровской теории имеется сходная с ней L_p-теория параболических граничных задач. В рамках этой теории установлена корректная разрешимость общих параболических граничных задач в соболевских пространствах $W_p^{l,l/2b}(Q_T)$, то есть банаховых пространствах функций, имеющих обобщенные в смысле С. Л. Соболева производные определенных порядков, принадлежащие пространству $L_p(Q_T)$, $p > 1$ (см. [3; 4; 9; 17]). Наиболее простой и обозримый вид L_p-теория имеет в случае $p = 2$, когда все рассматриваемые пространства являются гильбертовыми и можно со всей полнотой использовать преобразование Фурье. Подробное изложение L_2-теории общих параболических граничных задач приводится в работах [9; 15].

4.3. Матрица Грина. В теореме 1 приведены условия, при которых существует единственное решение параболической граничной задачи (1.11) — (1.13), принадлежащее пространству $C_N^{2b+l}(Q_T)$. Оказывается, что при некоторой дополнительной гладкости коэффициентов задачи и границы $\partial\Omega$ это решение представимо в виде

$$u(t, x) = \int_0^t d\tau \int_\Omega G_0(t, \tau, x, \xi) f(\tau, \xi)\, d\xi +$$
$$+ \sum_{j=1}^m \int_0^t d\tau \int_{\partial\Omega} G_j(t, \tau, x, \xi)\, g_j(\tau, \xi)\, d\xi +$$
$$+ \int_\Omega G_{m+1}(t, x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi, \quad (t, x) \in Q_T. \tag{4.4}$$

Матрица, составленная из ядер G_j, $0 \leqslant j \leqslant m + 1$, называется *матрицей Грина задачи* (1.11) — (1.13).

Как и для задачи (2.1) — (2.3), функции G_j, $1 \leqslant j \leqslant m$, являются обычными всегда, а G_0 и G_{m+1} могут быть обобщенными функциями. Вывод формулы (4.4), детальное исследование свойств матрицы Грина и получение для нее точных оценок в случае общих параболических граничных задач приведены в работе [16], содержащей подробную библиографию по данному вопросу.

4.4. Дальнейшие результаты. Некоторые нерешенные проблемы. Сделаем краткий обзор некоторых дальнейших результатов, касающихся корректной разрешимости параболических граничных задач в пространствах Гёльдера и $W_p^{l,l/2b}(Q_T)$, а также представления их решений в интегральной форме.

В работах [3; 4; 16; 17] доказано, что изложенные в предыдущих пунктах результаты для граничной задачи в цилиндрической области Q_T справедливы также для случая, когда Q_T является нецилиндрической областью, принадлежащей определенному классу областей. Основание Ω цилиндра Q_T может быть как ограниченной, так и неограниченной областью. В случае неограниченной области Ω разрешимость граничных задач естественно исследовать в пространствах функций, растущих при $|x| \to \infty$. Вопросам существования и единственности решений в пространствах растущих функций посвящена обширная литература. Обзор результатов о единственности решений параболических граничных задач имеется в работе [18]. Теоремы существования решений в пространствах растущих функций доказаны в работах [19—23]. При этом в [21; 23] для решений получено представление в интегральной форме и доказано, что оператор L, естественно порождаемый параболической граничной задачей, устанавливает изоморфизм между специальными пространствами Гёльдера решений задачи $\mathcal{U}^s_{k(t,a)}$ и набором ее правых частей $\mathcal{F}^s_{k(t,a)}$. Функции из этих пространств вместе со своими производными при $|x| \to \infty$ растут не быстрее, чем $\exp\{k(t, a)|x|^q\}$, где k — некоторая функция, определяемая задачей.

В цитированных выше работах корректная разрешимость общих параболических граничных задач в пространствах достаточно гладких функций (как в шаудеровской теории, так и L_p-теории) исследована достаточно полно. Гораздо меньше она изучена в пространствах негладких и обобщенных функций. В этой связи ограничимся упоминанием лишь работ [24—26]. В работе [24] доказаны теоремы о полном наборе изоморфизмов в L_2-теории параболических граничных задач. В них определены два семейства пространств $\tilde{\mathcal{H}}^s$ и $\mathcal{K}^s$, зависящих от вещественного параметра s, и доказано, что замыкание по непрерывности оператора L, порождаемого общей граничной задачей, осуществляет изоморфизм между пространствами $\tilde{\mathcal{H}}^s$ и $\mathcal{K}^s$ при любом $s \in \mathbb{R}$, если коэффициенты задачи и граница в области Ω бесконечно гладкие. В работах [25; 26] с помощью матриц Грина параболических граничных задач установлена корректная разрешимость таких задач в негативных пространствах Гёльдера (пространствах обобщенных функций, сопряженных к гёльдеровым) и доказаны соответствующие теоремы об изоморфизмах для нецелых значений параметра s, достаточно больших по абсолютной величине.

Ранее предполагалось, что коэффициенты граничной задачи и граница области достаточно гладкие, причем коэффициенты ограничены. Нарушение этих условий, то есть наличие вырождения, приводит к появлению у решений особенностей в окрестности тех точек, где имеется вырождение. Типы вырождения могут быть самыми разнообразными. К ним относятся, в частности, случаи, когда коэффициенты уравнений растут при удалении точки на бесконечность либо при ее стремлении к границе рассматриваемой области. Здесь нет возможности анализировать многочисленные работы в этом направлении. Отметим лишь, что представление о современном состоянии теории параболических граничных задач в областях с негладкой границей можно получить из обзорной статьи [27] и что в работах [28—30] установлена корректная разрешимость, построены и исследованы матрицы Грина общих граничных задач в неограниченных областях для некоторых параболических систем с растущими при $|x| \to \infty$ коэффициентами.

В заключение укажем ряд нерешенных проблем, связанных с затронутыми здесь вопросами теории линейных параболических граничных задач. Их решение представляет несомненный интерес.

1. Доказать теоремы о полном наборе изоморфизмов в L_p-теории параболических граничных задач ($p \neq 2$).

2. Доказать теоремы о полном наборе изоморфизмов в шаудеровской теории параболических граничных задач.

3. Доказать теоремы об изоморфизмах, осуществляемых операторами, порожденными параболическими граничными задачами в неограниченных областях с растущими коэффициентами.

4. Изучить зависимость классов единственности решений и классов корректной разрешимости общих параболических граничных задач в неограниченных областях от характера поведения границы области в окрестности бесконечно удаленной точки.

5. Построить и исследовать матрицы Грина общих параболических граничных задач при минимальных предположениях о гладкости коэффициентов задачи и границы области.

6. Изучить влияние группы младших членов параболической граничной задачи на характер поведения при $t \to \infty$ элементов матрицы Грина и решений задачи.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Петровский И. Г.* Избранные труды : Системы уравнений с частными производными. Алгебраическая геометрия.— М. : Наука, 1986.— 500 с.
2. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы.— М. : Наука, 1964.— 443 с.
3. *Солонников В. А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР.— 1965.— Т. 83.— С. 3—162.
4. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.— М. : Наука, 1967.— 736 с.
5. *Лыков А. В.* Тепломассообмен : Справочник.— М. : Энергия, 1978.— 480 с.
6. *Ивасишен С. Д., Эйдельман С. Д.* Параболические уравнения : примеры, задача Коши, свойства решений // Математика сегодня. 1987 : Науч.-метод. сб.— К., 1987.— С. 74—108.
7. *Тихонов А. Н.* О краевых задачах, содержащих производные порядка, превышающего порядок уравнения // Математический сб.— 1950.— Т. 26, № 1.— С. 35—56.
8. *Загорский Т. Я.* Смешанная задача для систем дифференциальных уравнений с частными производными параболического типа.— Львов : Изд-во Львов. ун-та, 1961.— 115 с.
9. *Агранович М. С., Вишик М. И.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // Успехи мат. наук.— 1964.— Т. 19, № 3.— С. 53—161.
10. *Шилов Г. Е.* Математический анализ : Спец. курс.— М. : Физматгиз, 1960.— 388 с.
11. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного.— М. : Физматгиз, 1958.— 678 с.
12. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике.— М. : Наука, 1976.— 280 с.
13. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа.— М. : Мир, 1968.— 427 с.
14. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления.— М. : Наука, 1966.— Т. 1.— 607 с.
15. *Агранович М. С., Сухорутченко В. В.* О необходимости алгебраических условий параболичности нестационарных задач // Математические заметки.— 1967.— Т. 2, № 6.— С. 615—625.
16. *Ивасишен С. Д.* Матрицы Грина граничных задач для параболических по И. Г. Петровскому систем общего вида // Математический сб.— 1981.— Т. 114, № 1.— С. 110—166; № 4.— С. 523—565.
17. *Солонников В. А.* Об оценках в L_p решений эллиптических и параболических систем // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР.— 1967.— Т. 102.— С. 137—160.

18. *Олейник О. А., Радкевич Е. В.* Метод введения параметра для исследования эволюционных уравнений // Успехи мат. наук.— 1978.— Т. 33, № 5.— С. 7—76.
19. *Липко Б. Я., Эйдельман С. Д.* К теории параболических потенциалов // Докл. АН СССР.— 1966.— Т. 166, № 5.— С. 1050—1053.
20. *Івасишен С. Д., Лавренчук В. П.* Про розв'язність задачі Коші та деяких крайових задач для загальних параболічних систем у класі зростаючих функцій // Доп. АН УРСР.— 1967.— № 4.— С. 299—303.
21. *Івасишен С. Д.* Інтегральні зображення розв'язків загальних параболічних крайових задач і коректна розв'язність у просторах зростаючих функцій // Доп. АН УРСР. Сер. А.— 1973.— № 7.— С. 596—599.
22. *Маринов М. Л.* Существование решения краевой задачи для общих параболических систем в неограниченной области // Вестн. Моск. ун-та. Математика и механика.— 1977.— № 6.— С. 56—63.
23. *Ивасишен С. Д.* О корректной разрешимости параболических граничных задач в пространствах растущих функций // Укр. мат. журн.— 1982.— Т. 34, № 1.— С. 25—30.
24. *Житарашу Н. В.* Теоремы о полном наборе изоморфизмов в L_2-теории обобщенных решений граничных задач для одного параболического по И. Г. Петровскому уравнения // Математический сб.— 1985.— Т. 128, № 4.— С. 451—473.
25. *Ивасишен С. Д.* О корректной разрешимости общих параболических граничных задач в негативных пространствах Гёльдера // Докл. АН УССР.— Сер. А.— 1977.— № 5.— С. 396—400.
26. *Ивасишен С. Д.* Сопряженные операторы Грина и корректная разрешимость параболических граничных задач в негативных пространствах Гёльдера // Дифференц. уравнения.— 1984.— Т. 20, № 3.— С. 470—481.
27. *Кондратьев В. А., Олейник О. А.* Краевые задачи для уравнений с частными производными в негладких областях // Успехи мат. наук.— 1983.— Т. 38, № 2.— С. 3—76.
28. *Лавренчук В. П.* Загальні крайові задачі для параболічних систем зі зростаючими коефіцієнтами // Доп. АН УРСР. Сер. А.— 1968.— № 3.— С. 238—242.
29. *Ивасишен С. Д., Лавренчук В. П.* О корректной разрешимости общих граничных задач для параболических систем с растущими коэффициентами // Укр. мат. журн.— 1978.— Т. 30, № 1.— С. 100—106.
30. *Ивасишен С. Д., Лавренчук В. П.* О матрице Грина параболических граничных задач с растущими коэффициентами // Общая теория граничных задач : Сб. науч. тр.— К., 1983.— С. 81—89.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Научное издание

Современные достижения математики
и ее приложений

Степан Дмитриевич Ивасишен

**ЛИНЕЙНЫЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ
ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ**

Редактор *Л. П. Онищенко*
Художественный редактор *С. В. Анненков*
Технический редактор *Л. Ф. Волкова*
Корректор *И. И. Лях*

Информ. бланк № 12032

Сдано в набор 17.02.87. Подп. в печать 07.08.87. БФ 27147. Формат 84×108/32. Бумага типогр. № 3. Лит. гарн. Выс. печать. Усл. печ. л. 3,78. Усл. кр.-отт 4,04. Уч.-изд. л. 3,80. Тираж 1000 экз. Изд. № 8112. Зак № 7—971. Цена 25 к.

Головное издательство издательского объединения «Вища школа», 252054, Киев-54, ул. Гоголевская, 7.

Отпечатано с матриц Головного предприятия республиканского производственного объединения «Полиграфкнига», 252057, Киев, ул. Довженко, 3, в Харьковской городской типографии № 16, ул Университетская, 16. Зак. 1304.