

УДК 519.6  
ББК 22.162  
А23

Агошков В. И., Дубовский П. Б., Шутяев В. П. **Методы решения задач математической физики** / Под ред. Г. И. Марчука. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 320 с. — ISBN 5-9221-02457-5.

Изложены основные сведения по методам решения задач математической физики, которые стали классическими и общепринятыми (методы теории потенциала, метод собственных функций, методы интегральных преобразований, методы дискретизации, методы расщепления). Отдельная глава посвящена методам решения нелинейных уравнений. Представлены многочисленные примеры применения рассматриваемых методов к решению конкретных задач математической физики, которые имеют прикладное значение и применяются в таких областях науки и деятельности общества, как энергетика, охрана окружающей среды, гидродинамика, теория упругости и др.

Для студентов, аспирантов, научных работников, инженеров, специализирующихся в области вычислительной и прикладной математики и математического моделирования.

Библиогр. 127 назв.



# Оглавление

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Предисловие .....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 8   |
| Глава 1. <b>Основные задачи математической физики</b> .....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 9   |
| 1. Введение .....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 10  |
| 2. Понятия и предложения из теории функций и функционального анализа..                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 11  |
| 2.1. Точечные множества. Классы функций $C^p(\Omega)$ , $C^p(\overline{\Omega})$ (11). 2.2. Сведения из теории линейных пространств. Пространства $C(\Omega)$ , $C^\lambda(\Omega)$ , $L_p(\Omega)$ (13). 2.3. Пространство $L_2(\Omega)$ . Ортонормальные системы (18). 2.4. Линейные операторы и функционалы (21). 2.5. Обобщенные производные. Пространства Соболева (28). |     |
| 3. Основные уравнения и задачи математической физики .....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 32  |
| 3.1. Основные уравнения математической физики (32). 3.2. Постановка основных задач математической физики (41). 3.3. Обобщенные постановки и решения задач математической физики (46). 3.4. Вариационные постановки задач (54). 3.5. Интегральные уравнения (58).                                                                                                              |     |
| Библиографический комментарий .....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 63  |
| Глава 2. <b>Методы теории потенциала</b> .....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 64  |
| 1. Введение .....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 65  |
| 2. Основы теории потенциала .....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 66  |
| 2.1. Вспомогательные сведения из математического анализа (66). 2.2. Потенциал объемных масс или зарядов (69). 2.3. Логарифмические потенциалы (71). 2.4. Потенциал простого слоя (73). 2.5. Потенциал двойного слоя (75).                                                                                                                                                     |     |
| 3. Применение теории потенциала в классических задачах математической физики .....                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 79  |
| 3.1. Решение уравнений Лапласа и Пуассона (79). 3.2. Функция Грина оператора Лапласа (84). 3.3. Решение уравнения Лапласа для сложных областей (87).                                                                                                                                                                                                                          |     |
| 4. Другие применения методов потенциала .....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 90  |
| 4.1. Применение методов потенциала к уравнению Гельмгольца (90). 4.2. Нестационарные потенциалы (95).                                                                                                                                                                                                                                                                         |     |
| Библиографический комментарий .....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 101 |
| Глава 3. <b>Методы разложений по собственным функциям</b> .....                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 102 |
| 1. Введение .....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 102 |

|                                                                                            |            |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 2. Задачи на собственные значения .....                                                    | 103        |
| 2.1. Постановка и физический смысл задач на собственные значения (103).                    |            |
| 2.2. Задачи на собственные значения для дифференциальных операторов (106).                 |            |
| 2.3. Свойства собственных значений и собственных функций (107).                            |            |
| 2.4. Ряды Фурье (108).                                                                     |            |
| 2.5. Собственные функции некоторых одномерных задач (110).                                 |            |
| 3. Специальные функции .....                                                               | 111        |
| 3.1. Сферические функции (112).                                                            |            |
| 3.2. Полиномы Лежандра (113).                                                              |            |
| 3.3. Цилиндрические функции (114).                                                         |            |
| 3.4. Полиномы Чебышева, Лагерра и Эрмита (115).                                            |            |
| 3.5. Функции Матье и гипергеометрические функции (117).                                    |            |
| 4. Метод собственных функций .....                                                         | 118        |
| 4.1. Общая схема метода собственных функций (118).                                         |            |
| 4.2. Метод собственных функций для дифференциальных уравнений математической физики (119). |            |
| 4.3. О решении задач с неоднородными граничными условиями (122).                           |            |
| 5. Метод собственных функций для задач теории электромагнитных явлений .....               | 123        |
| 5.1. Задача об ограниченной телеграфной линии (123).                                       |            |
| 5.2. Электростатическое поле внутри бесконечной призмы (125).                              |            |
| 5.3. Задача об электростатическом поле внутри цилиндра (125).                              |            |
| 5.4. Поле внутри шара при заданном потенциале на его поверхности (126).                    |            |
| 5.5. Поле заряда, индуцированного на сфере (127).                                          |            |
| 6. Метод собственных функций для задач теплопроводности .....                              | 128        |
| 6.1. Теплопроводность в ограниченном стержне (128).                                        |            |
| 6.2. Стационарное распределение температуры в бесконечной призме (129).                    |            |
| 6.3. Распределение температуры в однородном цилиндре (130).                                |            |
| 7. Метод собственных функций для задач теории колебаний .....                              | 131        |
| 7.1. Свободные колебания однородной струны (131).                                          |            |
| 7.2. Колебания струны с подвижным концом (133).                                            |            |
| 7.3. Задача акустики о свободных колебаниях газа (133).                                    |            |
| 7.4. Колебания мембраны с закрепленным краем (134).                                        |            |
| 7.5. Задача о колебании круглой мембраны (135).                                            |            |
| Библиографический комментарий .....                                                        | 136        |
| <b>Глава 4. Методы интегральных преобразований .....</b>                                   | <b>137</b> |
| 1. Введение .....                                                                          | 138        |
| 2. Основные интегральные преобразования .....                                              | 139        |
| 2.1. Преобразование Фурье (139).                                                           |            |
| 2.2. Преобразование Лапласа (142).                                                         |            |
| 2.3. Преобразование Меллина (143).                                                         |            |
| 2.4. Преобразование Ханкеля (144).                                                         |            |
| 2.5. Преобразование Мейера (145).                                                          |            |
| 2.6. Преобразование Конторовича–Лебедева (146).                                            |            |
| 2.7. Преобразование Мелера–Фока (147).                                                     |            |
| 2.8. Преобразование Гильберта (147).                                                       |            |
| 2.9. Преобразования Лагерра и Лежандра (148).                                              |            |
| 2.10. Преобразования Бохнера и свертки, всплески и цепные преобразования (149).            |            |
| 3. Применение интегральных преобразований в задачах теории колебаний ..                    | 151        |
| 3.1. Электрические колебания (151).                                                        |            |
| 3.2. Поперечные колебания струны (151).                                                    |            |
| 3.3. Поперечные колебания бесконечной круглой мембраны (154).                              |            |

|                                                                                                                                                                                                                                                                     |            |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 4. Применение интегральных преобразований в задачах теплопроводности . .                                                                                                                                                                                            | 155        |
| 4.1. Решение задачи теплопроводности с помощью преобразования Лапласа (155). 4.2. Решение задачи теплопроводности с помощью преобразования Фурье (156). 4.3. Задача о температурном режиме шара (157).                                                              |            |
| 5. Применение интегральных преобразований в теории диффузии нейтронов . . . . .                                                                                                                                                                                     | 157        |
| 5.1. Решение уравнения замедления нейтронов для замедлителя бесконечных размеров (158). 5.2. Задача о диффузии тепловых нейтронов (158).                                                                                                                            |            |
| 6. Применение интегральных преобразований к задачам гидродинамики . . .                                                                                                                                                                                             | 159        |
| 6.1. Двумерный безвихревой поток идеальной жидкости (159). 6.2. Течение идеальной жидкости через щель (160). 6.3. Истечение идеальной жидкости через круглое отверстие (161).                                                                                       |            |
| 7. Применение интегральных преобразований в теории упругости . . . . .                                                                                                                                                                                              | 163        |
| 7.1. Осесимметричные напряжения в цилиндре (163). 7.2. Задача Буссинеска для полупространства (165). 7.3. Нахождение напряжений в клине (166).                                                                                                                      |            |
| 8. Применение интегральных преобразований в кинетике коагуляции . . . . .                                                                                                                                                                                           | 167        |
| 8.1. Точное решение уравнения коагуляции (167). 8.2. Нарушение закона сохранения массы (169).                                                                                                                                                                       |            |
| Библиографический комментарий . . . . .                                                                                                                                                                                                                             | 170        |
| <b>Глава 5. Методы дискретизации задач математической физики . . . . .</b>                                                                                                                                                                                          | <b>171</b> |
| 1. Введение . . . . .                                                                                                                                                                                                                                               | 172        |
| 2. Конечноразностные методы . . . . .                                                                                                                                                                                                                               | 173        |
| 2.1. Метод сеток. (174). 2.2. Метод прямых (189). 2.3. Метод сеток для интегральных уравнений (метод квадратур) (194).                                                                                                                                              |            |
| 3. Вариационные методы . . . . .                                                                                                                                                                                                                                    | 195        |
| 3.1. Основные понятия вариационных постановок задач и вариационных методов (195). 3.2. Метод Ритца. (197). 3.3. Метод наименьших квадратов (202). 3.4. Методы Канторовича, Куранта, Третьяка (203). 3.5. Вариационные методы в проблеме собственных значений (205). |            |
| 4. Проекционные методы . . . . .                                                                                                                                                                                                                                    | 208        |
| 4.1. Метод Бубнова–Галеркина (208). 4.2. Метод моментов (211). 4.3. Проекционные методы в гильбертовых и банаховых пространствах (212). 4.4. Основные понятия проекционно-сеточных методов (214).                                                                   |            |
| 5. Методы интегральных тождеств . . . . .                                                                                                                                                                                                                           | 216        |
| 5.1. Основные идеи метода (216). 5.2. Метод интегрального тождества Марчука (217). 5.3. Обобщенная формулировка метода интегральных тождеств (219). 5.4. Приложения методов интегральных тождеств к задачам математической физики (223).                            |            |
| Библиографический комментарий . . . . .                                                                                                                                                                                                                             | 228        |
| <b>Глава 6. Методы расщепления . . . . .</b>                                                                                                                                                                                                                        | <b>229</b> |
| 1. Введение . . . . .                                                                                                                                                                                                                                               | 229        |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |            |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 2. Сведения из теории эволюционных уравнений и разностных схем . . . . .                                                                                                                                                                                                                          | 230        |
| 2.1. Эволюционные уравнения (230). 2.2. Операторные уравнения в конечномерных пространствах (235). 2.3. Понятия и сведения из теории разностных схем (238).                                                                                                                                       |            |
| 3. Методы расщепления . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                   | 247        |
| 3.1. Методы покомпонентного расщепления (методы дробных шагов) (247).                                                                                                                                                                                                                             |            |
| 3.2. Методы двуциклического многокомпонентного расщепления (249).                                                                                                                                                                                                                                 |            |
| 3.3. Методы расщепления с факторизацией операторов (251). 3.4. Метод предиктор–корректор (254). 3.5. Метод переменных направлений и метод стабилизирующей поправки (256). 3.6. Метод слабой аппроксимации. (258). 3.7. Методы расщепления — итерационные методы решения стационарных задач (259). |            |
| 4. Методы расщепления для прикладных задач математической физики . . . . .                                                                                                                                                                                                                        | 261        |
| 4.1. Методы расщепления для уравнения теплопроводности (262).                                                                                                                                                                                                                                     |            |
| 4.2. Методы расщепления для задач гидродинамики (266). 4.3. Метод расщепления для модели динамики морских и океанических течений (272).                                                                                                                                                           |            |
| Библиографический комментарий . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                           | 276        |
| <b>Глава 7. Методы решения нелинейных уравнений . . . . .</b>                                                                                                                                                                                                                                     | <b>277</b> |
| 1. Введение . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                             | 278        |
| 2. Элементы нелинейного анализа . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                         | 280        |
| 2.1. Непрерывность и дифференцируемость нелинейных отображений (280). 2.2. Сопряженные нелинейные операторы (283). 2.3. Выпуклые функционалы и монотонные операторы (284). 2.4. Вариационный метод исследования нелинейных уравнений (286). 2.5. Минимизирующие последовательности (288).         |            |
| 3. Метод наискорейшего спуска . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                           | 290        |
| 3.1. Нелинейное уравнение и его вариационная формулировка (290). 3.2. Основная идея метода наискорейшего спуска (290). 3.3. Сходимость метода (291).                                                                                                                                              |            |
| 4. Метод Рунта . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                          | 293        |
| 4.1. Приближения и системы Рунта (293). 4.2. Разрешимость систем Рунта (294). 4.3. Сходимость метода Рунта (295).                                                                                                                                                                                 |            |
| 5. Метод Ньютона–Канторовича . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                            | 296        |
| 5.1. Описание итерационного процесса Ньютона (296). 5.2. Сходимость итерационного процесса Ньютона (296). 5.3. Модифицированный метод Ньютона (297).                                                                                                                                              |            |
| 6. Метод Галеркина–Петрова для нелинейных уравнений . . . . .                                                                                                                                                                                                                                     | 298        |
| 6.1. Приближения и системы Галеркина (298). 6.2. Связь с проекционными методами (298). 6.3. Разрешимость систем Галеркина (299). 6.4. Сходимость метода Галеркина–Петрова (299).                                                                                                                  |            |
| 7. Метод возмущений . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                     | 300        |
| 7.1. Формулировка алгоритмов возмущений (301). 7.2. Обоснование алгоритмов возмущений (303). 7.3. Связь с методом последовательных приближений (305).                                                                                                                                             |            |

---

|                                                                                                                                                                                                                              |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 8. Приложения к некоторым задачам математической физики .....                                                                                                                                                                | 307 |
| 8.1. Метод возмущений для квазилинейной задачи нестационарной теплопроводности (307). 8.2. Метод Галеркина для задач динамики атмосферных процессов (310). 8.3. Метод Ньютона в задачах вариационного усвоения данных (312). |     |
| Библиографический комментарий .....                                                                                                                                                                                          | 315 |
| Список литературы .....                                                                                                                                                                                                      | 316 |

## Предисловие

Цель настоящей книги состоит в том, чтобы дать широкому кругу читателей (студентам, аспирантам, научным работникам, инженерам и практикам) основные сведения по такому направлению математики, как *методы решения задач математической физики*.

Авторы старались отобрать для книги те методы, которые стали уже классическими и общепринятыми. Однако некоторые из современных версий этих методов могут отсутствовать в книге, поскольку знакомство с ними требует специальных знаний.

Настоящая книга носит справочно-учебный характер. С одной стороны, в ней даны основные определения, идеи рассматриваемых методов и подходы, используемые в них, а также получаемые в каждом конкретном случае результаты и утверждения. С другой стороны, доказательства большинства этих результатов отсутствуют, и только в простейших случаях (носящих методологический характер) эти доказательства приводятся.

Еще одной особенностью книги является наличие многих примеров применения рассматриваемых методов к решению конкретных задач математической физики, которые носят прикладной характер и применяются в таких областях науки и деятельности общества, как энергетика, охрана окружающей среды, гидродинамика, теория упругости и др., что будет способствовать лучшему представлению о возможных приложениях рассматриваемых методов.

Для полноты изложения авторы включили в книгу главу, посвященную основным задачам математической физики, где также приводятся необходимые для чтения книги сведения из функционального анализа и теории краевых задач для уравнений с частными производными.

Главы I, V, VI написаны В. И. Агошковым, главы II, IV – П. Б. Дубовским, главы III, VII – В. П. Шутяевым. Для удобства чтения в каждой главе приведен библиографический комментарий к литературе, использованной при ее написании и рекомендуемой для углубленного изучения соответствующих разделов.

Авторы выражают глубокую благодарность редактору книги Гурию Ивановичу Марчуку, под руководством которого в Институте вычислительной математики РАН на протяжении ряда лет ведутся работы в области методов вычислительной математики и математического моделирования, за внимание к работе, замечания и пожелания.

Авторы признательны также многим сотрудникам института за дискуссии и всестороннюю поддержку.

## Глава 1

### Основные задачи математической физики

*Ключевые слова:* точечные множества, линейные пространства, банахово пространство, гильбертово пространство, ортонормальные системы, линейные операторы, собственные значения, собственные функции, обобщенные производные, пространства Соболева, основные задачи математической физики, уравнение Лапласа, уравнение Пуассона, уравнение колебаний, уравнение Гельмгольца, уравнение диффузии, уравнение теплопроводности, уравнения Максвелла, телеграфные уравнения, уравнение переноса, уравнения газо- и гидродинамики, граничные условия, начальные условия, классификация уравнений, постановка задач, обобщенное решение, вариационная постановка задач, интегральные уравнения, теоремы Фредгольма, теорема Гильберта–Шмидта.

### Основные понятия и обозначения

*Область* — открытое связное множество.

*Компакт* — замкнутое ограниченное множество.

$\mathbb{R}^n$  —  $n$ -мерное евклидово пространство.

$\partial\Omega$  — граница ограниченного множества  $\Omega$ .

$\|f\|_X$  — норма элемента  $f$  из нормированного пространства  $X$ .

$C(T)$  — банахово пространство непрерывных на  $T$  функций.

$C^p(T)$  — банахово пространство функций, непрерывных на  $T$  вместе с производными  $p$ -го порядка.

$C^\lambda(T)$ ,  $0 < \lambda < 1$ , — пространство непрерывных по Гельдеру функций.

$L_2(\Omega)$  — гильбертово пространство функций, квадратично интегрируемых по Лебегу.

$L_p(\Omega)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , — банахово пространство с нормой

$$\|f\|_p \equiv \|f\|_{L_p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{1/p}.$$

$L_\infty(\Omega)$  — банахово пространство с нормой  $\|f\|_{L_\infty(\Omega)} = \sup \operatorname{vrai}_{x \in \Omega} |f(x)|$ .

$W_p^l(\Omega)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , — пространство Соболева, состоящее из функций  $f(x)$  с обобщенными производными вплоть до порядка  $l$ .

$C^\infty(\Omega)$  — множество бесконечно дифференцируемых в  $\Omega$  функций.

$C_0^\infty(\Omega)$  — множество бесконечно дифференцируемых, финитных в  $\Omega$  функций.

$\text{supp } f$  — носитель  $f(x)$ .

$D(A)$  — область определения оператора  $A$ .

$R(A)$  — область значений оператора  $A$ .

$\bar{f}(x)$  — функция, комплексно сопряженная к  $f(x)$ .

$L(X, Y)$  — пространство линейных непрерывных операторов, действующих из пространства  $X$  в пространство  $Y$ .

Собственное значение — числовой параметр, являющийся вместе с собственной функцией  $\varphi$  решением уравнения  $A\varphi = \lambda\varphi$ .

$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$  — оператор Лапласа.

$\square_a = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta$  — оператор Даламбера.

$D(f) = \|\nabla f\|_{L_2(\Omega)}^2 = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 dx$  — интеграл Дирихле.

$\int_{\Omega} K(x, y)u(y) dy = f(x)$  — уравнение Фредгольма 1-го рода.

$u(x) = \lambda \int_{\Omega} K(x, y)u(y) dy + f(x)$  — уравнение Фредгольма 2-го рода.

## 1. Введение

Математическая физика изучает математические модели физических явлений. Она и ее методы начали формироваться в XVIII веке при изучении колебаний струны и стержней, задач акустики, гидродинамики, аналитической механики (Ж. Даламбер, Л. Эйлер, Ж. Лагранж, Д. Бернулли, П. Лаплас). Идеи математической физики получили новое развитие в XIX веке в связи с задачами теплопроводности, диффузии, упругости, оптики, электродинамики, нелинейными волновыми процессами, теорией устойчивости движения (Ж. Фурье, С. Пуассон, К. Гаусс, О. Коши, М. В. Остроградский, П. Дирихле, Б. Риман, С. В. Ковалевская, Д. Стокс, А. Пуанкаре, А. М. Ляпунов, В. А. Стеклов, Д. Гильберт). Новый этап математической физики начинается в XX веке, когда в нее включаются задачи теории относительности, квантовой физики, новые проблемы газовой динамики, кинетических уравнений, теории ядерных реакторов, физики плазмы (А. Эйнштейн, Н. Н. Боголюбов, П. Дирак, В. С. Владимиров, В. П. Маслов).

Многие задачи классической математической физики сводятся к крайним задачам для дифференциальных (интегро-дифференциальных) уравнений — уравнений математической физики, которые совместно с соответствующими граничными (или начальными и граничными) условиями образуют математические модели рассматриваемых физических процессов.

Основными классами таких задач являются эллиптические, гиперболические, параболические задачи и задача Коши. Среди постановок дан-

ных задач различают классические и обобщенные постановки. Важная концепция обобщенных постановок задач и обобщенных решений базируется на понятии обобщенной производной с применением пространств С. Л. Соболева.

Одной из проблем, изучаемых в математической физике, является задача на собственные значения. Собственные функции конкретных операторов и разложения по ним в ряды Фурье решений задач часто используются при теоретическом анализе задач, а также для построения их решений (метод собственных функций).

Основными математическими средствами исследования задач математической физики служит теория дифференциальных уравнений с частными производными, интегральных уравнений, теория функций и функциональных пространств, функциональный анализ, приближенные методы и вычислительная математика.

Ниже приводятся некоторые сведения из ряда разделов математики, которые используются при изучении задач математической физики и методов построения их решений [13, 25, 69, 70, 75, 84, 91, 95].

## 2. Понятия и предложения из теории функций и функционального анализа

### 2.1. Точечные множества. Классы функций $C^p(\Omega)$ , $C^p(\overline{\Omega})$ .

2.1.1. *Точечные множества.* Пусть  $R^n$  ( $R^1 = R$ ) есть  $n$ -мерное вещественное евклидово пространство,  $x = (x_1, \dots, x_n)$  — точка в  $R^n$ , где  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , — координаты точки  $x$ . *Скалярное произведение* и *норму (длину)* в  $R^n$  обозначим соответственно через  $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ ,  $|x| = (x, x)^{1/2} = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$ . Тогда число  $|x - y|$  есть евклидово расстояние между точками  $x$  и  $y$ .

Множество точек  $x$  из  $R^n$ , удовлетворяющих неравенству  $|x - x_0| < R$ , называется *открытым шаром* радиуса  $R$  с центром в точке  $x_0$ . Этот шар будем обозначать  $U(x_0; R)$ ,  $U_R = U(0; R)$ .

Множество называется *ограниченным* в  $R^n$ , если существует шар, содержащий это множество.

Точка  $x_0$  называется *внутренней* точкой множества, если существует шар  $U(x_0; \epsilon)$ , содержащийся в этом множестве. Множество называется *открытым*, если все его точки внутренние. Множество называется *связным*, если любые две его точки можно соединить кусочно гладкой кривой, лежащей в этом множестве. Связное открытое множество называется *областью*. Точка  $x_0$  называется *предельной точкой* множества  $A$ , если существует последовательность  $x_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , такая, что  $x_k \in A$ ,  $x_k \neq x_0$ ,  $x_k \rightarrow x_0$ ,  $k \rightarrow \infty$ . Если к множеству  $A$  добавить все его предельные точки, то полученное множество называется *замыканием* множества  $A$  и обозначается  $\bar{A}$ . Если множество совпадает со своим замыканием, то оно называется *замкнутым*. Замкнутое ограниченное множество называется *компактом*. *Окрестностью* множества  $A$  называется всякое открытое

множество, содержащее  $A$ ;  $\varepsilon$ -окрестностью  $A_\varepsilon$  множества  $A$  называется объединение шаров  $U(x; \varepsilon)$ , когда  $x$  пробегает  $A$ :  $A_\varepsilon = \bigcup_{x \in A} U(x; \varepsilon)$ .

Функция  $\chi_A(x)$ , равная 1 при  $x \in A$  и 0 при  $x \notin A$ , называется *характеристической функцией* множества  $A$ .

Пусть  $\Omega$  — область. Точки замыкания  $\bar{\Omega}$ , не принадлежащие  $\Omega$ , образуют замкнутое множество  $\partial\Omega$ , называемое *границей области*  $\Omega$ , так что  $\partial\Omega = \bar{\Omega} \setminus \Omega$ .

Будем говорить, что поверхность  $\partial\Omega$  принадлежит классу  $C^p$ ,  $p \geq 1$ , если в некоторой окрестности каждой точки  $x_0 \in \partial\Omega$  она представляется уравнением  $\omega_{x_0}(x) = 0$ , причем  $\text{grad} \omega_{x_0}(x) \neq 0$  и функция  $\omega_{x_0}(x)$  непрерывна вместе со всеми производными до порядка  $p$  включительно в упомянутой окрестности. Поверхность  $\partial\Omega$  называется *кусочно гладкой*, если она состоит из конечного числа поверхностей класса  $C^1$ . Если в окрестности любой точки  $x_0 \in \partial\Omega$  функция  $\omega_{x_0}(x)$  удовлетворяет условию Липшица  $|\omega_{x_0}(x) - \omega_{x_0}(y)| \leq C|x - y|$ ,  $C = \text{const}$ , то  $\partial\Omega$  называется *липшицевой границей* области  $\Omega$ .

Если  $\partial\Omega$  является кусочно гладкой класса  $C^1$  (или даже липшицевой), то почти во всех точках  $x \in \partial\Omega$  существует единичный вектор внешней нормали  $n(x)$  к  $\partial\Omega$ .

Пусть точка  $x_0$  лежит на кусочно гладкой поверхности  $\partial\Omega$ . *Окрестностью точки  $x_0$  на поверхности  $\partial\Omega$*  называется та связная часть множества  $\partial\Omega \cap U(x_0; R)$ , которая содержит точку  $x_0$ .

Ограниченная область  $\Omega'$  называется *подобластью*, строго лежащей в области  $\Omega$ , если  $\Omega' \subset \Omega$ ; при этом пишут  $\Omega' \in \Omega$ .

2.1.2. *Классы  $C^p(\Omega)$ ,  $C^p(\bar{\Omega})$ .* Пусть  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  — целочисленный вектор с неотрицательными составляющими  $\alpha_j$  (мультииндекс). Через  $D^\alpha f(x)$  обозначают производную функции  $f(x)$  порядка  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ :

$$D^\alpha f(x) = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n} f(x) = \frac{D^{|\alpha|} f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad D^0 f(x) = f(x);$$

$$D = (D_1, D_2, \dots, D_n), \quad D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Для низших производных употребляют обозначения  $f_{x_i}$ ,  $f_{x_i x_j}$ . Пользуются также следующими сокращенными обозначениями:

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}, \quad \alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!.$$

Множество (комплекснозначных) функций  $f$ , непрерывных вместе с производными  $D^\alpha f(x)$ ,  $|\alpha| \leq p$  ( $0 \leq p < \infty$ ), в области  $\Omega$ , образуют *класс функций  $C^p(\Omega)$* . Функции  $f$  класса  $C^p(\Omega)$ , у которых все производные  $D^\alpha f(x)$ ,  $|\alpha| \leq p$ , допускают непрерывное продолжение на замыкание  $\bar{\Omega}$ , образуют *класс функций  $C^p(\bar{\Omega})$* ; при этом под значением  $D^\alpha f(x)$ ,  $x \in \partial\Omega$ ,  $|\alpha| \leq p$ , понимают  $\lim D^\alpha f(x')$  при  $x' \rightarrow x$ ,  $x' \in \Omega$ . Класс функций, принадлежащих  $C^p(\Omega)$  при всех  $p$ , обозначают через  $C^\infty(\Omega)$ ; аналогично определяется и класс функций  $C^\infty(\bar{\Omega})$ . Класс  $C(\Omega) \equiv C^0(\Omega)$  состоит из

всех непрерывных функций в  $\Omega$ , а класс  $C(\overline{\Omega}) \equiv C^0(\overline{\Omega})$  можно отождествить с множеством всех непрерывных функций на  $\overline{\Omega}$ .

Пусть функция  $f(x)$  задана на некотором множестве, содержащем область  $\Omega$ . В этом случае принадлежность  $f$  классу  $C^p(\overline{\Omega})$  означает, что сужение  $f$  на  $\Omega$  принадлежит  $C^p(\overline{\Omega})$ .

Введенные классы функций представляют собой *линейные множества*, т. е. из принадлежности функций  $f$  и  $g$  какому-либо из этих классов следует принадлежность этому же классу и любой их линейной комбинации  $\lambda f + \mu g$ , где  $\lambda$  и  $\mu$  — произвольные комплексные числа.

Функция  $f$  называется *кусочно непрерывной* в  $R^n$ , если существует конечное или счетное число областей  $\Omega_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , без общих точек с кусочно гладкими границами таких, что каждый шар покрывается конечным числом замкнутых областей  $\{\Omega_k\}$  и  $f \in C(\overline{\Omega_k})$ ,  $k = 1, 2, \dots$

Кусочно непрерывная функция называется *финитной*, если она обращается в нуль вне некоторого шара.

Пусть  $\phi \in C(R^n)$ . *Носителем*  $\text{supp } \phi$  непрерывной функции  $\phi$  называется замыкание множества тех точек, где  $\phi(x) \neq 0$ .

Через  $C_0^\infty(R^n)$  обозначают множество бесконечно дифференцируемых функций с финитными носителями, а через  $C_0^\infty(\Omega)$  — те из них, носители которых принадлежат  $\Omega \subset R^n$ .

## 2.2. Сведения из теории линейных пространств. Пространства $C(\Omega)$ , $C^k(\Omega)$ , $L_p(\Omega)$ .

**2.2.1. Нормированные пространства.** Пусть  $X$  есть линейное множество. Говорят, что на  $X$  *введена норма*  $\|\cdot\|_X$ , если каждому элементу  $f \in X$  поставлено в соответствие неотрицательное число  $\|f\|_X$  (*норма*  $f$ ) так, что выполнены следующие три аксиомы:

- $\|f\|_X \geq 0$ ;  $\|f\|_X = 0$  тогда и только тогда, когда  $f = 0$ ;
- $\|\lambda f\|_X = |\lambda| \|f\|_X$ , где  $\lambda$  — любое комплексное число;
- $\|f + g\|_X \leq \|f\|_X + \|g\|_X$  (неравенство треугольника).

Всякое линейное множество, снабженное нормой, называется *линейным нормированным пространством*.

Пусть  $X$  — линейное нормированное пространство. Последовательность  $x_n \in X$  называется *фундаментальной (сходящейся в себе)*, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $N = N(\varepsilon)$ , что для любого  $n > N$  и для всех натуральных  $p$  выполняется неравенство  $\|f_{n+p} - f_n\| < \varepsilon$ . Пространство  $X$  называется *полным*, если в нем всякая фундаментальная последовательность сходится. Полное линейное нормированное пространство называется *банаховым*.

Пусть  $X$  — линейное нормированное пространство. Множество  $A \subset X$  называется *компактным*, если каждая последовательность его элементов содержит подпоследовательность, сходящуюся к элементу из  $X$ .

Две нормы  $\|f\|_1$  и  $\|f\|_2$  в линейном пространстве  $X$  называются *эквивалентными*, если существуют такие числа  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ , что для любого  $f \in X$  выполняется неравенство  $\alpha \|f\|_1 \leq \|f\|_2 \leq \beta \|f\|_1$ .

Линейные нормированные пространства  $X$  и  $Y$  называются *изоморфными*, если на всем  $X$  определено отображение  $J: X \rightarrow Y$ , являющееся линейным, осуществляющее изоморфизм  $X$  и  $Y$  как линейных пространств и такое, что существуют такие постоянные  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ , что для любого  $f \in X$  выполняется неравенство  $\alpha \|f\|_X \leq \|J(f)\|_Y \leq \beta \|f\|_X$ . Если  $\|J(f)\|_Y = \|f\|_X$ , то пространства  $X$  и  $Y$  называются *изометричными*.

Линейное нормированное пространство  $X$  называется *вложенным* в линейное нормированное пространство  $Y$ , если на всем  $X$  определено отображение  $J: X \rightarrow Y$ , являющееся линейным и взаимно однозначным на области значений, причем существует такая постоянная  $\beta > 0$ , что для любого  $f \in X$  выполняется неравенство  $\|J(f)\|_Y \leq \beta \|f\|_X$ .

Банахово пространство  $\hat{X}$  называется *пополнением* линейного нормированного пространства  $X$ , если  $X$  — линейное многообразие, всюду плотное в пространстве  $\hat{X}$ .

**Теорема 1.** *Каждое линейное нормированное пространство  $X$  имеет пополнение, и это пополнение единственно с точностью до изометрического отображения, переводящего  $X$  в себя.*

2.2.2. *Пространство непрерывных функций  $C(\bar{\Omega})$ .* Пусть  $\Omega$  — область из  $\mathbb{R}^n$ . Множество непрерывных на  $\bar{\Omega} = \partial\Omega \cup \Omega$  функций, для которых конечна норма

$$\|f\|_{C(\bar{\Omega})} = \sup_{x \in \bar{\Omega}} |f(x)|,$$

называют *нормированным пространством  $C(\bar{\Omega})$* . Известно, что пространство  $C(\bar{\Omega})$  банахово. Очевидно, сходимость  $f_k \rightarrow f$ ,  $k \rightarrow \infty$ , в  $C(\bar{\Omega})$  эквивалентна *равномерной сходимости* последовательности функций  $f_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , к функции  $f(x)$  на множестве  $\bar{\Omega}$ . Справедлива также следующая

**Теорема 2** (теорема Вейерштрасса). *Если  $\Omega$  — ограниченная область и  $f \in C^p(\bar{\Omega})$ , то для любого  $\varepsilon > 0$  существует полином  $P$  такой, что*

$$\|D^\alpha f - D^\alpha P\|_C < \varepsilon \quad \text{при всех} \quad |\alpha| \leq p.$$

Ряд, составленный из функций  $f_k \in C(\bar{\Omega})$ , называется *регулярно сходящимся* на  $\bar{\Omega}$ , если ряд из абсолютных величин  $|f_k(x)|$  сходится в  $C(\bar{\Omega})$ , т. е. сходится равномерно на  $\bar{\Omega}$ .

Множество  $M \subset C(\bar{\Omega})$  называется *равнотепенно непрерывным* на  $\bar{\Omega}$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое число  $\delta_\varepsilon$ , что при всех  $f \in M$  имеет место неравенство  $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ , как только  $|x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon$ ,  $x_1, x_2 \in \bar{\Omega}$ .

Условия компактности множества из  $C(\bar{\Omega})$  определяются следующей теоремой.

**Теорема 3** (теорема Арцела–Асколи). *Для компактности множества  $M \subset C(\bar{\Omega})$  необходимо и достаточно, чтобы оно было:*

- а) равномерно ограниченным, т. е.  $\|f\| \leq K$  для любой функции  $f \in M$ ;  
 б) равностепенно непрерывным на  $\overline{\Omega}$ .

2.2.3. *Пространства  $C^\lambda(\Omega)$ .* Пусть  $\Omega$  — ограниченная связная область. Определим пространство  $C^\lambda(\Omega)$ , где  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ ,  $0 < \lambda_i \leq 1$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Пусть  $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ , где единица стоит на  $i$ -м месте. Обозначим через  $[x_1, x_2]$  отрезок, соединяющий точки  $x_1, x_2 \in E_n$ . Положим

$$\Delta_i(h)f(x) = \begin{cases} f(x + he_i) - f(x) & \text{при } [x, x + e_i h] \subset \Omega, \\ 0 & \text{при } [x, x + e_i h] \not\subset \Omega. \end{cases}$$

Определим норму

$$\|f\|_{C^\lambda(\Omega)} = \|f\|_{C(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \sup_{x \in \Omega, |h| \leq \delta} \frac{|\Delta_i(h)f(x)|}{|h|^{\lambda_i}}.$$

Множество функций  $f \in C(\overline{\Omega})$ , для которых норма  $\|f\|_{C^\lambda(\Omega)}$  конечна, образует *гёльдерово пространство  $C^\lambda(\Omega)$* . Из теоремы Арцела–Асколи следует, что множество функций, ограниченное в  $C^\lambda(\Omega)$ , будет компактно в  $C(\Omega_\delta)$ , где  $\Omega_\delta$  — множество точек  $x \in \Omega$ , для которых  $\rho(x, \partial\Omega) \equiv \inf_{y \in \partial\Omega} |x - y| > \delta = \text{const} > 0$ .

Если  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \lambda = 1$ , то функция  $f(x)$  называется *непрерывной по Липшицу на  $\Omega$*  ( $f(x)$  *липшицева на  $\Omega$* ).

2.2.4. *Пространство  $L_p(\Omega)$ .* Множество  $M \subset [a, b]$  имеет меру нуль, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такая конечная или счетная система отрезков  $[\alpha_n, \beta_n]$ , что  $M \subset \bigcup_n [\alpha_n, \beta_n]$ ,  $\sum_n (\beta_n - \alpha_n) < \varepsilon$ . Если для последовательности  $f_n(t)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) всюду на  $[a, b]$ , за исключением, быть может, множества меры нуль, существует предел, равный  $f(t)$ , то говорят, что  $f_n(t)$  сходятся к  $f(t)$  *почти всюду* на  $[a, b]$ , и записывают  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} f(t)$ .

Пусть  $\tilde{L}_1[a, b]$  — пространство непрерывных на  $[a, b]$  функций с нормой

$$\|f\| = \int_a^b |f(t)| dt;$$

сходимость по этой норме называется *сходимостью в среднем*. Пространство  $\tilde{L}_1[a, b]$  не полное; его пополнение называется *пространством Лебега* и обозначается  $L_1[a, b]$ . Функция  $f(t)$  называется *интегрируемой по Лебегу* на отрезке  $[a, b]$ , если существует такая фундаментальная в среднем последовательность непрерывных функций  $f_n(t)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} f(t).$$

Тогда *интегралом Лебега* по  $[a, b]$  от функции  $f(t)$  называется число

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dt.$$

Элементы пространства  $L_1[a, b]$  — это функции  $f(t)$ , для которых

$$\int_a^b |f(t)| dt < \infty.$$

Рассмотрим теперь множество  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Говорят, что  $A$  имеет *меру нуль*, если для любого  $\varepsilon > 0$  оно может быть покрыто шарами суммарного объема меньше  $\varepsilon$ .

Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  есть область. Говорят, что некоторое свойство выполняется *почти всюду* в  $\Omega$ , если множество точек области  $\Omega$ , которое не обладает этим свойством, имеет меру нуль.

Функция  $f(x)$  называется *измеримой*, если она совпадает почти всюду с пределом почти всюду сходящейся последовательности кусочно непрерывных функций.

Множество  $A \subset \mathbb{R}^n$  называется *измеримым*, если его характеристическая функция  $\chi_A(x)$  измерима.

Пусть  $\Omega$  есть измеримое множество из  $\mathbb{R}^n$ . Тогда по аналогии с рассмотренным ранее случаем функций от одной независимой переменной можно ввести понятие *интегрируемой по Лебегу функции*  $f(x)$ ,  $x \in \Omega$  на  $\Omega$ , определить интеграл Лебега от  $f(x)$  и *пространство  $L_1(\Omega)$  интегрируемых (по Лебегу) функций* — банахово пространство функций  $f(x)$ , для которых конечна норма

$$\|f\|_{L_1(\Omega)} = \int_{\Omega} |f(x)| dx,$$

где  $\int_{\Omega}$  есть интеграл Лебега.

Функция  $f(x)$  называется *локально интегрируемой по Лебегу в области  $\Omega$* ,  $f \in L_{\text{loc}}(\Omega)$ , если  $f \in L_1(\Omega')$  для всех измеримых  $\Omega' \subset \Omega$ .

Пусть  $1 \leq p < \infty$ . Множество измеримых по Лебегу функций  $f(x)$ , определенных на  $\Omega$ , для которых конечна норма

$$\|f\|_p \equiv \|f\|_{L_p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

образует пространство  $L_p(\Omega)$ . Перечислим некоторые свойства пространств  $L_p$ .

**Теорема 4.** Пусть  $\Omega$  — ограниченная область в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда:

- 1)  $L_p(\Omega)$  является полным нормированным пространством;
- 2) множество финитных функций  $C_0^\infty(\Omega)$  плотно в  $L_p(\Omega)$ ;
- 3) множество финитных функций  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  плотно в  $L_p(\mathbb{R}^n)$ ;

4) всякий линейный непрерывный функционал  $l(\varphi)$  в  $L_p(\Omega)$ ,  $1 < p < \infty$ , представим в виде

$$l(\varphi) = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x) dx,$$

где  $f \in L_{p'}(\Omega)$ ,  $1/p + 1/p' = 1$ ;

5) функция  $f(x) \in L_p(\Omega)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , непрерывна в целом, т. е. для любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $\delta(\varepsilon) > 0$  такое, что

$$\left( \int_{\Omega} |f(x+y) - f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \varepsilon,$$

как только  $|y| \leq \delta(\varepsilon)$  (здесь  $f(x) = 0$  для  $x \notin \Omega$ ).

**Теорема 5 (теорема Рисса).** Для компактности множества  $M \subset L_p(\Omega)$ , где  $1 \leq p < \infty$ ,  $\Omega$  — ограниченная область в  $\mathbb{R}^n$ , необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

a)  $\|f\|_{L_p(\Omega)} \leq K$ ,  $f \in M$ ;

б) множество  $M$  равномерно непрерывно в целом, т. е. для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $\delta(\varepsilon) > 0$ , что

$$\left( \int_{\Omega} |f(x+y) - f(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \varepsilon$$

для всех  $f \in M$ , если только  $|y| \leq \delta(\varepsilon)$  (здесь  $f(x) = 0$  для  $x \notin \Omega$ ).

Для функций из пространств  $L_p$  справедливы следующие неравенства.

1) **Неравенство Гёльдера.** Пусть  $f_1 \in L_p(\mathbb{R}^n)$ ,  $f_2 \in L_{p'}(\mathbb{R}^n)$ ,  $1/p + 1/p' = 1$ . Тогда  $f_1 \cdot f_2$  интегрируема на  $\mathbb{R}^n$  и

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_1 \cdot f_2| dx \leq \|f_1\|_p \|f_2\|_{p'} \quad (\|\cdot\|_{L_p} = \|\cdot\|_p).$$

2) **Обобщенное неравенство Минковского.** Пусть  $f(x,y)$  — измеримая по Лебегу функция, заданная на  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ , тогда

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^m} f(x,y) dy \right\|_p \leq \int_{\mathbb{R}^m} \|f(x,y)\|_p dy, \quad 1 \leq p < \infty.$$

3) **Неравенство Юнга.** Пусть  $p, r, q$  — вещественные числа,  $1 \leq p \leq q < \infty$ ,  $1 - 1/p + 1/q = 1/r$ , функции  $f \in L_p$ ,  $K \in L_r$ . Рассмотрим свертку

$$f * K = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)K(x-y) dy.$$

Тогда

$$\|f * K\|_q \leq \|K\|_r \|f\|_p.$$

4) *Неравенство Харди*. Пусть  $1 < p < \infty$ . Тогда

$$\int_0^{\infty} x^{-r} \left| \int_0^x f(t) dt \right|^p dx \leq c \int_0^{\infty} x^{p-r} |f(x)|^p dx \quad \text{при } r > 1,$$

$$\int_0^{\infty} x^{-r} \left| \int_x^{\infty} f(t) dt \right|^p dx \leq c \int_0^{\infty} x^{p-r} |f(x)|^p dx \quad \text{при } r < 1.$$

### 2.3. Пространство $L_2(\Omega)$ . Ортонормальные системы.

2.3.1. *Гильбертовы пространства*. Пусть  $X$  есть линейное множество (вещественное или комплексное). Каждой паре элементов  $f, g$  из  $X$  поставим в соответствие комплексное число  $(f, g)_X$ , удовлетворяющее следующим аксиомам:

- а)  $(f, f)_X \geq 0$ ;  $(f, f)_X = 0$  при  $f = 0$  и только в этом случае;
- б)  $(f, g)_X = \overline{(g, f)_X}$  (черта означает комплексное сопряжение);
- в)  $(\lambda f, g)_X = \lambda (f, g)_X$  для любого числа  $\lambda$ ;
- г)  $(f + g, h)_X = (f, h)_X + (g, h)_X$ .

При выполнении аксиом а)–г) число  $(f, g)_X$  называется *скалярным произведением* элементов  $f, g$  из  $X$ .

Если  $(f, g)_X$  есть скалярное произведение, то на  $X$  можно ввести норму, положив  $\|f\|_X = (f, f)_X^{1/2}$ . Аксиомы нормы а), б), очевидно, выполнены, а третья аксиома вытекает из *неравенства Коши–Буняковского*

$$|(f, g)_X| \leq \|f\|_X \|g\|_X,$$

справедливого для произвольного скалярного произведения  $(f, g)_X$  и нормы  $\|f\|_X = (f, f)_X^{1/2}$ , порожденной скалярным произведением  $(f, g)_X$ .

Если линейное пространство  $X$  с нормой  $\|f\|_X = (f, f)_X^{1/2}$  является полным относительно этой нормы, то  $X$  называется *гильбертовым*.

Пусть  $X$  — пространство со скалярным произведением  $(f, g)_X$ . Если  $(f, g)_X = 0$ , то элементы  $f, g$  называются *ортogonalными* и пишут  $f \perp g$ . Очевидно, что нуль пространства  $X$  ортogonalен любому элементу из  $X$ .

Рассмотрим в  $X$  элементы  $f_1, \dots, f_m$ , все не равные нулю. Если  $(f_k, f_l)_X = 0$  при любых  $k, l = 1, \dots, m$  ( $k \neq l$ ), то система элементов  $f_1, \dots, f_m$  называется *ортogonalной системой*. Данная система называется *ортogonalизированной* (*ортogonalной*), если

$$(f_k, f_l)_X = \delta_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{при } k = l, \\ 0 & \text{при } k \neq l. \end{cases}$$

Заметим, что если  $f_1, \dots, f_m$  — ортogonalная система, то  $f_1, \dots, f_m$  *линейно независимы*, т. е. из соотношения  $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_m f_m = 0$ , где  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  — некоторые числа, следует, что  $\lambda_k = 0$ ,  $k = 1, \dots, m$ . Если задана «бесконечная» система  $f_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, m \rightarrow \infty$ , то она называется *линейно независимой*, если при любом конечном  $m$  система  $f_1, \dots, f_m$  линейно независима.

**Теорема 6.** Пусть  $h_1, h_2, \dots \in X$  — линейно независимая система элементов. Тогда в  $X$  существует такая ортогональная система элементов  $f_1, f_2, \dots$ , что

$$f_k = a_{k1}h_1 + a_{k2}h_2 + \dots + a_{kk}h_k, \quad a_{kl} \in \mathbb{C}, \quad a_{kk} \neq 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$h_j = b_{j1}f_1 + b_{j2}f_2 + \dots + b_{jj}f_j, \quad b_{ji} \in \mathbb{C}, \quad b_{jj} \neq 0, \quad j = 1, 2, \dots,$$

где  $\mathbb{C}$  есть множество комплексных чисел.

Построение ортогональной системы по заданной линейно независимой системе называется *ортогонализацией*.

Ортогональная система  $\varphi_1, \varphi_2, \dots \in X$  называется *полной*, если любой элемент из  $X$  может быть представлен в виде так называемого *ряда Фурье*  $f = \sum_k c_k \varphi_k$ , где  $c_k = (f, \varphi_k) / \|\varphi_k\|^2$  — коэффициенты Фурье (т. е. ряд  $\sum_k c_k \varphi_k$  сходится по норме  $X$ , и его сумма равна  $f$ ). Полная ортогональная система называется *ортогональным базисом* пространства  $X$ .

**Теорема 7.** Пусть  $M$  — замкнутое выпуклое множество в гильбертовом пространстве  $X$  и элемент  $f \notin M$ . Тогда существует такой единственный элемент  $g \in M$ , что  $\rho(f, M) = \|f - g\| \equiv \inf_{\tilde{g} \in M} \|f - \tilde{g}\|_X$ .

Элемент  $g$  называется *проекцией* элемента  $f$  на  $M$ .

Приведем некоторые примеры гильбертовых пространств.

**Пример 1.** *Евклидово пространство  $R^n$ .* Элементами  $R^n$  являются вещественные векторы  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , а скалярное произведение задается по формуле  $(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k$ .

**Пример 2.** *Пространство  $l_2$ .* В линейном пространстве вещественных последовательностей  $x = (x_k)_{k=1}^\infty$ ,  $y = (y_k)_{k=1}^\infty$ , таких, что  $\sum_{k=1}^\infty x_k^2 < \infty$ ,  $\sum_{k=1}^\infty y_k^2 < \infty$ , скалярное произведение определяется по формуле  $(x, y) = \sum_{k=1}^\infty x_k y_k$ .

**Пример 3.** *Пространство  $L_2[a, b]$ .* В линейном пространстве комплекснозначных функций, определенных (почти всюду) на  $[a, b]$ , скалярное произведение задается так:  $(x, y) = \int_a^b x(t) \bar{y}(t) dt$ , где  $\bar{y}(t)$  — функция, комплексно сопряженная к  $y(t)$ .

**2.3.2. Пространство  $L_2(\Omega)$ .** Совокупность всех функций  $f(x)$ , для которых функция  $|f(x)|^2$  интегрируема по Лебегу на области  $\Omega$ , обозначается через  $L_2(\Omega)$ . Скалярное произведение и норма в  $L_2(\Omega)$  определяются соответственно по формулам

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(x) \bar{g}(x) dx, \quad \|f\| = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} = (f, f)^{1/2},$$

после чего  $L_2(\Omega)$  превращается в линейное нормированное пространство.

Последовательность функций  $f_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , из  $L_2(\Omega)$  называется *сходящейся* к функции  $f \in L_2(\Omega)$  в пространстве  $L_2(\Omega)$  (или в среднем в  $L_2(\Omega)$ ), если  $\|f_k - f\| \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ ; при этом пишут  $f_k \rightarrow f$ ,  $k \rightarrow \infty$  в  $L_2(\Omega)$ .

Следующая теорема выражает свойство полноты пространства  $L_2(\Omega)$ .

**Теорема 8** (теорема Рисса–Фишера). *Если последовательность функций  $f_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , из  $L_2(\Omega)$  сходится в себе в  $L_2(\Omega)$ , т. е.  $\|f_k - f_p\| \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ ,  $p \rightarrow \infty$ , то существует функция  $f \in L_2(\Omega)$  такая, что  $\|f_k - f\| \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ ; при этом функция  $f$  единственна с точностью до значений меры нуль.*

Пространство  $L_2(\Omega)$  является гильбертовым пространством.

Множество функций  $M \subset L_2(\Omega)$  называется *плотным* в  $L_2(\Omega)$ , если для любой  $f \in L_2(\Omega)$  существует последовательность функций из  $M$ , сходящаяся к  $f$  в  $L_2(\Omega)$ . Например, множество  $C(\overline{\Omega})$  плотно в  $L_2(\Omega)$ ; отсюда следует, что и множество полиномов плотно в  $L_2(\Omega)$ , если  $\Omega$  — ограниченная область (в силу теоремы Вейерштрасса).

**2.3.3. Ортонормальные системы.** Согласно общему определению в  $L_2(\Omega)$  для гильбертовых пространств система функций  $\{\varphi_k(x)\}$  из  $L_2(\Omega)$  называется *ортонормальной*, если  $(\varphi_k, \varphi_l) = \int_{\Omega} \varphi_k(x) \overline{\varphi_l(x)} dx = \delta_{kl}$ . Всякая ортонормальная в  $L_2(\Omega)$  система  $\{\varphi_k(x)\}$  состоит из линейно независимых функций. А если  $\psi_1, \psi_2, \dots$  есть система линейно независимых в  $L_2(\Omega)$  функций, то она преобразуется в ортонормальную систему  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  следующим процессом ортогонализации Гильберта–Шмидта:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{\psi_1}{\|\psi_1\|}, \quad \varphi_2 = \frac{\psi_2 - (\psi_2, \varphi_1)\varphi_1}{\|\psi_2 - (\psi_2, \varphi_1)\varphi_1\|}, \quad \dots \\ \dots, \quad \varphi_k &= \frac{\psi_k - (\psi_k, \varphi_{k-1})\varphi_{k-1} - \dots - (\psi_k, \varphi_1)\varphi_1}{\|\psi_k - (\psi_k, \varphi_{k-1})\varphi_{k-1} - \dots - (\psi_k, \varphi_1)\varphi_1\|} \quad \dots \end{aligned}$$

Пусть система функций  $\varphi_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , ортонормальна в  $L_2(\Omega)$  и  $f \in L_2(\Omega)$ . Числа  $(f, \varphi_k)$  называются *коэффициентами Фурье*, а формальный ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k) \varphi_k(x)$  — *рядом Фурье* функции  $f$  по ортонормальной системе  $\{\varphi_k(x)\}$ .

Если система функций  $\varphi_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , ортонормальна в  $L_2(\Omega)$ , то для каждой  $f \in L_2(\Omega)$  и любых (комплексных) чисел  $a_1, a_2, \dots, a_N$ ,  $N = 1, 2, \dots$ , справедливо равенство

$$\left\| f - \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k \right\|^2 = \left\| f - \sum_{k=1}^N (f, \varphi_k) \varphi_k \right\|^2 + \sum_{k=1}^N |(f, \varphi_k) - a_k|^2.$$

Полагая в этом равенстве  $a_k = 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ , получаем следующее равенство:

$$\left\| f - \sum_{k=1}^N (f, \varphi_k) \varphi_k \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^N |(f, \varphi_k)|^2,$$

из которого вытекает *неравенство Бесселя*

$$\sum_{k=1}^N |(f, \varphi_k)|^2 \leq \|f\|^2.$$

Кроме того, замечаем: для того чтобы ряд Фурье сходил к функции  $f$  в  $L_2(\Omega)$ , необходимо и достаточно, чтобы было выполнено равенство Парсеваля–Стеклова (уравнение замкнутости)

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(f, \varphi_k)|^2 = \|f\|^2.$$

Пусть система  $\varphi_k$ ,  $k \geq 1$ , ортонормальна в  $L_2(\Omega)$ . Если для любой  $f \in L_2(\Omega)$  ее ряд Фурье по системе  $\{\varphi_k\}$  сходится к  $f$  в  $L_2(\Omega)$ , то эта система называется *полной (замкнутой) в  $L_2(\Omega)$  (ортонормальным базисом в  $L_2(\Omega)$ )*. Из этого определения и сформулированных ранее в данном разделе утверждений вытекает

**Теорема 9.** Для того чтобы ортонормальная система  $\{\varphi_k\}$  была *полной в  $L_2(\Omega)$* , необходимо и достаточно, чтобы для любой функции  $f$  из  $L_2(\Omega)$  было выполнено равенство Парсеваля–Стеклова (уравнение замкнутости).

Справедлива также следующая теорема.

**Теорема 10.** Для того чтобы ортонормальная система  $\{\varphi_k\}$  была *полной в  $L_2(\Omega)$* , необходимо и достаточно, чтобы каждую функцию  $f$  из множества  $M$ , плотного в  $L_2(\Omega)$ , можно было сколь угодно точно приблизить в  $L_2(\Omega)$  линейными комбинациями функций этой системы.

**Следствие.** Если  $\Omega$  — ограниченная область, то в  $L_2(\Omega)$  существует счетная полная ортонормальная система полиномов.

Сформулируем следующее утверждение, дающее одну из возможностей построения ортонормальных систем в случае  $G \subset \mathbb{R}^n$  при большом значении  $n$ .

**Лемма 1.** Пусть области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  и  $D \subset \mathbb{R}^m$  ограничены, система функций  $\psi_j(y)$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , ортонормальна и полна в  $L_2(D)$  и при каждом  $j = 1, 2, \dots$  система функций  $\varphi_{kj}(x)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , ортонормальна и полна в  $L_2(\Omega)$ . Тогда система функций  $\chi_{kj} = \varphi_{kj}(x)\psi_j(y)$ ,  $k, j = 1, 2, \dots$ , ортонормальна и полна в  $L_2(\Omega \times D)$ .

**Замечание.** Все сказанное о пространстве  $L_2(\Omega)$  переносится и на пространство  $L_2(\Omega; \rho)$  или  $L_2(\partial\Omega)$  со скалярными произведениями

$$(f, g)_\rho = \int_{\Omega} \rho(x) f(x) \bar{g}(x) dx, \quad (f, g) = \int_{\partial\Omega} f(x) \bar{g}(x) d\Gamma,$$

где вес  $\rho \in C(\overline{\Omega})$ ,  $\rho(x) > 0$ ,  $x \in \overline{\Omega}$  и  $\partial\Omega$  — кусочно гладкая граница области  $\Omega$ .

## 2.4. Линейные операторы и функционалы.

**2.4.1. Линейные операторы и функционалы.** Пусть  $X, Y$  — линейные нормированные пространства,  $D(A)$  — некоторое линейное множество из  $X$ , а  $R(A)$  — линейное множество из  $Y$ . Пусть по некоторому правилу (закону) элементы из  $D(A)$  переводятся в элементы  $R(A)$ . Тогда говорят, что задан оператор  $A$  с областью определения  $D(A)$  и областью значе-

ний  $R(A)$ , действующий из  $X$  в  $Y$ , т. е.  $A: X \rightarrow Y$ . Если  $Af = f$  при всех  $f \in D(A)$ , то  $A$  называется *тождественным* (*единичным*) оператором, и он обозначается через  $I$ .

Пусть  $X, Y$  — линейные нормированные пространства,  $A: X \mapsto Y$  — отображение, или *оператор*, определенный в окрестности точки  $f_0 \in X$ . Он называется *непрерывным в точке  $f_0$* , если  $A(f) \rightarrow A(f_0)$  при  $f \rightarrow f_0$ .

Пусть  $A$  — оператор с областью определения  $D(A) \subset X$  и с областью значений  $R(A) \subset Y$ . Он называется *ограниченным*, если переводит любое ограниченное множество из  $D(A)$  в множество, ограниченное в пространстве  $Y$ .

Пусть  $X, Y$  — линейные нормированные пространства, оба вещественные или оба комплексные. Оператор  $A: X \rightarrow Y$  с областью определения  $D(A) \subset X$  называется *линейным*, если  $D(A)$  — линейное многообразие в  $X$  и для любых  $f_1, f_2 \in D(A)$  и любых  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  ( $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ ) выполняется равенство  $A(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 A f_1 + \lambda_2 A f_2$ .

Множество  $N(A) = \{f \in D(A): A(x) = 0\}$  называется *множеством нулей* или *ядром* оператора  $A$ .

**Теорема 11.** *Линейный оператор  $A: X \mapsto Y$ , заданный на всем  $X$  и непрерывный в точке  $0 \in X$ , непрерывен в любой точке  $f_0 \in X$ .*

Линейный оператор  $A: X \mapsto Y$  с  $D(A) = X$  называется *непрерывным*, если он непрерывен в точке  $0 \in X$ . Линейный оператор  $A: X \rightarrow Y$  с  $D(A) = X$  называется *ограниченным*, если существует  $c \in \mathbb{R}$ ,  $c > 0$ , такое, что для любого  $f \in \bar{S}_1(0) = \{f: \|f\|_X \leq 1\}$  справедливо неравенство  $\|Af\| \leq c$ .

**Теорема 12.** *Линейный оператор  $A: X \mapsto Y$  с  $D(A) = X$  ограничен тогда и только тогда, когда для любого  $f \in X$  выполняется неравенство  $\|Af\| \leq c\|f\|$ .*

**Теорема 13.** *Линейный оператор  $A: X \mapsto Y$  с  $D(A) = X$  непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен.*

*Нормой* ограниченного линейного оператора  $A: X \mapsto Y$  с  $D(A) = X$  называется число  $\|A\| = \sup_{f \in X, \|f\| \leq 1} \|Af\|$ .

Совокупность операторов из  $X$  в  $Y$  с конечной нормой образует линейное нормированное пространство ограниченных линейных операторов  $L(X, Y)$ .

Линейный оператор из  $X$  в  $Y$  называется *вполне непрерывным*, если он переводит каждое ограниченное множество из  $X$  в компактное множество из  $Y$ .

Пусть  $A$  — линейный оператор, определенный на множестве  $D(A) \subset X$  и действующий в  $Y$ . Оператор  $A$  называется *замкнутым*, если для любой последовательности  $\{f_n\}$  элементов  $D(A)$  такой, что  $f_n \rightarrow f_0 \in X$ ,  $Af_n \rightarrow g_0 \in Y$ , будет  $f_0 \in D(A)$  и  $Af_0 = g_0$ . Оператор  $A$  называют *слабо замкнутым*, если для любой последовательности элементов  $\{f_n\}$  такой, что  $f_n$  слабо сходится к  $f_0 \in X$ , а  $Af_n$  слабо сходится к  $g_0 \in Y$ , следует, что  $f_0 \in D(A)$  и  $Af_0 = g_0$ .

Частным случаем линейных операторов являются линейные функционалы. Если линейный оператор  $I$  преобразует множество элементов  $M \subset X$

в множество комплексных чисел  $lf$ ,  $f \in M$ , т.е.  $l: X \rightarrow \mathbb{C}$ , то  $l$  называется *линейным функционалом* на множестве  $M$ , значение функционала  $l$  на элементе  $f$  — комплексное число  $lf$  — будем обозначать через  $(l, f) \equiv l(f) \equiv \langle f, l \rangle$ . Непрерывность линейного функционала  $l$  означает следующее: если  $f_k \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ , в  $M$ , то последовательность комплексных чисел  $(l, f_k)$ ,  $k \rightarrow \infty$ , стремится к нулю.

Пусть на линейном пространстве всех линейных функционалов на  $X$  вводится норма  $\|l\| = \sup_{\|x\|=1} |(l, x)|$ . Тогда совокупность ограниченных функционалов на  $X$ , т.е. таких функционалов, у которых норма конечна, образует банахово пространство, называемое *сопряженным к  $X$*  и обозначаемое через  $X^*$ .

Будем говорить, что последовательность  $l_1, l_2, \dots$  линейных функционалов на  $M$  *слабо сходится* к (линейному) функционалу  $l$  на  $M$ , если она сходится к  $l$  на каждом элементе  $f$  из  $M$ , т.е.  $(l_k, f) \rightarrow (l, f)$ ,  $k \rightarrow \infty$ .

Последовательность  $\{f_n\}$  элементов из  $X$  называется *слабо сходящейся* к  $f_0 \in X$ , если  $\lim_{n \rightarrow \infty} (l, f_n) = (l, f_0)$  для любого  $l \in X^*$ .

Приведем некоторые примеры линейных операторов и функционалов.

**Пример 1.** Линейный оператор вида

$$Kf = \int_{\Omega} K(x, y) f(y) dy, \quad x \in \Omega,$$

называется (линейным) *интегральным оператором*, а функция  $K(x, y)$  — его *ядром*. Если ядро  $K \in L_2(\Omega \times \Omega)$ , т.е.

$$\int_{\Omega \times \Omega} |K(x, y)|^2 dx dy = C^2 < \infty,$$

то оператор  $K$  ограничен (и, следовательно, непрерывен) из  $L_2(\Omega)$  в  $L_2(\Omega)$ .

**Пример 2.** Линейный оператор вида

$$Af = \sum_{|\alpha| \leq m} a_{\alpha} D^{\alpha} f(x), \quad \sum_{|\alpha| = m} |a_{\alpha}(x)| \equiv 0, \quad m > 0,$$

называется (линейным) *дифференциальным оператором порядка  $m$* , а функция  $a_{\alpha}(x)$  — его *коэффициентами*. Если коэффициенты  $a_{\alpha}(x)$  — непрерывные функции на области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , то оператор  $A$  переводит  $C^m(\bar{\Omega}) = D(A)$  в  $C(\bar{\Omega}) = R(A)$ . Однако оператор  $A$  не является непрерывным из  $C(\bar{\Omega})$  в  $C(\bar{\Omega})$ . Отметим также, что оператор  $A$  определен не на всем пространстве  $C(\bar{\Omega})$ , а лишь на его части — на множестве функций  $C^m(\bar{\Omega})$ .

**Пример 3.** Линейный оператор

$$Af = \sum_{|\alpha| \leq m} \left[ \int_{\Omega} K_{\alpha}(x, y) f(y) dy + a_{\alpha}(x) D^{\alpha} f(x) \right]$$

называется (линейным) *интегро-дифференциальным* оператором.

**Пример 4.** Примером линейного непрерывного функционала  $l$  на  $L_2(\Omega)$  служит скалярное произведение  $(l, f) = (f, g)$ , где  $g$  — фиксированная функция из  $L_2(\Omega)$ . Линейность этого функционала следует из линейности скалярного произведения по первому аргументу, а в силу неравенства Коши–Буняковского он ограничен:  $|(l, f)| = |(f, g)| \leq \|g\| \cdot \|f\|$ , и, следовательно, непрерывен.

**2.4.2. Обратные операторы.** Пусть  $X, Y$  — линейные нормированные пространства,  $A: X \rightarrow Y$  — линейный оператор, отображающий  $D(A)$  на  $R(A)$  взаимно однозначно. Тогда существует *обратный оператор*  $A^{-1}: Y \rightarrow X$ , отображающий  $R(A)$  на  $D(A)$  взаимно однозначно и также являющийся линейным.

Линейный оператор  $A: X \rightarrow Y$  называется *непрерывно обратимым*, если  $R(A) = Y$ ,  $A^{-1}$  существует и ограничен, т. е.  $A^{-1} \in L(Y, X)$ .

**Теорема 14.** *Оператор  $A^{-1}$  существует и ограничен на  $R(A)$  тогда и только тогда, когда для некоторой постоянной  $m > 0$  и любого  $x \in D(A)$  выполняется неравенство  $\|Ax\| \geq m\|x\|$ .*

**Теорема 15.** *Пусть  $X, Y$  — банаховы пространства,  $A \in L(Y, X)$ ,  $R(A) = Y$  и  $A$  обратим. Тогда  $A$  непрерывно обратим.*

**2.4.3. Сопряженные, симметричные и самосопряженные операторы.** Пусть  $X, Y$  — линейные нормированные пространства,  $A: X \rightarrow Y$  — линейный оператор с областью определения  $D(A)$ , плотной в  $X$ , возможно, неограниченный. Введем множество  $D^* \subset Y^*$  таких  $f \in Y^*$ , для которых при  $\varphi \in X^*$  имеет место равенство  $\langle Ax, f \rangle = \langle x, \varphi \rangle$ . Оператор  $A^*f = \varphi$  с областью определения  $D(A^*) = D^* \subset Y^*$  и со значениями в  $X^*$  называется *сопряженным* к оператору  $A$ . Таким образом,  $\langle Ax, f \rangle = \langle x, A^*f \rangle$  для любого  $x$  из  $D(A)$  и любого  $f$  из  $D(A^*)$ .

Линейный оператор  $A$  называется *симметричным*, если  $A \subset A^*$  (т. е.  $D(A) \subset D(A^*)$  и  $A = A^*$  на  $D(A)$ ) и замыкание  $D(A)$  совпадает с  $X$ , т. е.  $\overline{D(A)} = X$ . Линейный оператор  $A$  с  $\overline{D(A)} = X$  называется *самосопряженным*, если  $A = A^*$ .

**Теорема 16.**  *$A^*$  — замкнутый линейный оператор.*

**Теорема 17.** *Равенство  $D(A^*) = Y^*$  имеет место тогда и только тогда, когда  $A$  ограничен на  $D(A)$ . В этом случае  $A^* \in L(X^*, Y^*)$ ,  $\|A^*\| = \|A\|$ .*

**2.4.4. Положительные операторы и энергетическое пространство.** Симметричный оператор  $A$ , действующий в некотором гильбертовом пространстве, называется *положительным*, если для любого элемента из области определения оператора справедливо неравенство  $(Au, u) \geq 0$ , причем знак равенства имеет место только тогда, когда  $u = 0$ , т. е. когда  $u$  — нулевой элемент пространства.

Если  $A$  — положительный оператор, то скалярное произведение  $(Au, u)$  называется *энергией* элемента  $u$  по отношению к  $A$ .

Симметричный оператор  $A$  называется *положительно определенным*, если существует такая положительная постоянная  $\gamma$ , что для любого элемента  $u$  из области определения оператора  $A$  справедливо неравенство  $(Au, u) \geq \gamma^2 \|u\|^2$ . Со всяким положительным (в частности, положительно определенным) оператором можно связать особое гильбертово пространство, которое называют *энергетическим пространством*. Пусть  $A$  — положительный оператор, действующий в некотором гильбертовом пространстве  $H$ , и пусть  $M = D(A)$  — область определения этого оператора. Введем на  $M$  новое скалярное произведение (которое будем обозначать квадратными скобками): если  $u$  и  $v$  — элементы  $M$ , то положим  $[u, v] = (Au, v)$ . Величину  $[u, v]$  назовем *энергетическим произведением* элементов  $u$  и  $v$ . Легко проверяется, что энергетическое произведение удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения.

В общем случае  $M$  неполное, по норме  $|u| = [u, u]^{1/2}$  пополним его. Построенное таким образом новое гильбертово пространство называют *энергетическим пространством* и обозначают через  $H_A$ .

Норму в энергетическом пространстве называют *энергетической нормой* и обозначают символом  $|u|$ . Для элементов области определения  $M$  оператора  $A$  энергетическая норма определяется формулой  $|u| = \sqrt{(Au, u)}$ . Сходимость в энергетическом пространстве называется *сходимостью по энергии*.

Важную роль играет вопрос о природе тех элементов, которые служат для пополнения и построения энергетического пространства. Если оператор  $A$  положительно определенный, то имеет место теорема, в силу которой все элементы пространства  $H_A$  принадлежат также исходному гильбертову пространству  $H$ ; если  $u$  — элемент пространства  $H_A$ , то имеет место неравенство  $\|u\| \leq (1/\gamma)|u|$ , где символ  $\|\cdot\|$  означает норму в исходном пространстве  $H$ .

На элементы из  $M$  часто накладываются те или иные граничные условия. Элементы из  $H_A$ , которые служат для пополнения  $M$  до  $H_A$ , могут не удовлетворять некоторым из граничных условий, которые в данном случае называются *естественными*. Те из граничных условий, которым удовлетворяют как элементы из  $M$ , так и все элементы из  $H_A$ , называются *главными*.

Если  $A$  — положительно определенный оператор, то из сходимости некоторой последовательности по энергии вытекает также ее сходимость в норме исходного пространства: если  $u_n \in H_A$ ,  $u \in H_A$  и  $|u_n - u| \rightarrow 0$ , то и  $\|u_n - u\| \rightarrow 0$ .

Симметричные положительные операторы и соответствующие им энергетические пространства играют важную роль при исследовании вариационных постановок задач математической физики.

**2.4.5. Линейные уравнения.** Пусть  $A$  — линейный оператор с областью определения  $D(A) \subset X$  и областью значений  $R(A) \subset Y$ . Уравнение

$$Au = F \quad (1)$$

называется *линейным* (неоднородным) уравнением. В уравнении (1) заданный элемент  $F$  называется *свободным членом* (или *правой частью*), а неизвестный элемент  $u$  из  $D(A)$  — *решением* этого уравнения. Если в уравнении (1) свободный член  $F$  положить равным нулю, то полученное уравнение

$$Au = 0 \quad (2)$$

называется *линейным однородным уравнением*, соответствующим уравнению (1). В силу линейности оператора  $A$  совокупность решений однородного уравнения (2) образует линейное множество; в частности,  $u = 0$  всегда является решением этого уравнения.

*Всякое решение  $u$  линейного неоднородного уравнения (1) (если оно существует) представляется в виде суммы частного решения  $u_0$  этого уравнения и общего решения  $\tilde{u}$  соответствующего линейного однородного уравнения (2):*

$$u = u_0 + \tilde{u}. \quad (3)$$

Отсюда непосредственно заключаем: для того чтобы решение уравнения (1) было единственным в  $D(A)$ , необходимо и достаточно, чтобы соответствующее однородное уравнение (2) имело только нулевое решение в  $D(A)$ .

Пусть однородное уравнение (2) имеет только нулевое решение в  $D(A)$ . Тогда для любого  $F \in R(A)$  уравнение (1) имеет единственное решение  $u \in D(A)$ , и тем самым задан оператор  $A^{-1}$  — оператор, обратный к  $A$ , так что

$$u = A^{-1}F. \quad (4)$$

Из соотношений (1), (4) заключаем:

$$AA^{-1}F = F, \quad F \in R(A), \quad A^{-1}Au = u, \quad u \in D(A),$$

т. е.  $AA^{-1} = I$  и  $A^{-1}A = I$ .

2.4.6. *Задачи на собственные значения.* Рассмотрим линейное однородное уравнение

$$Au = \lambda u, \quad (5)$$

где  $\lambda$  — числовой параметр. Это уравнение имеет нулевое решение при всех  $\lambda$ . Может случиться, что при некоторых  $\lambda$  оно имеет ненулевые решения из  $D(A)$ . Те комплексные значения  $\lambda$ , при которых уравнение (5) имеет ненулевые решения из  $D(A)$ , называются *собственными значениями* оператора  $A$ , а соответствующие решения — *собственными элементами* (функциями), соответствующими этому собственному значению. Полное число  $r$  ( $1 \leq r \leq \infty$ ) линейно независимых собственных элементов, соответствующих данному собственному значению  $\lambda$ , называется *кратностью* этого собственного значения; если кратность  $r = 1$ , то  $\lambda$  называется *простым* собственным значением.

Совокупность собственных значений (чисел) оператора  $A$  называется его *точечным спектром*.

Если собственному числу  $\lambda$  соответствуют собственные элементы  $u_1, u_2, \dots, u_n$  уравнения (5), то их любая отличная от нулевого элемента линейная комбинация  $c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n$ , где  $c_1, \dots, c_n$  — произвольные постоянные, также есть собственный элемент того же уравнения, соответствующий тому же собственному числу  $\lambda$ . Таким образом, дополненное нулевым элементом множество собственных элементов данного уравнения, соответствующих данному собственному числу, линейно.

В весьма широких условиях (если оператор  $A - \lambda I$  замкнут) это множество есть подпространство, называемое *собственным подпространством* уравнения (5), соответствующим собственному числу  $\lambda$ ; размерность этого подпространства равна кратности собственного числа.

Если кратность  $r$  собственного значения  $\lambda$  оператора  $A$  конечна и  $u_1, u_2, \dots, u_r$  — соответствующие линейно независимые собственные элементы, то любая их линейная комбинация

$$u_0 = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_r u_r \quad (6)$$

также является собственным элементом, соответствующим этому собственному значению, и формула (6) дает общее решение уравнения (5). Отсюда и из формулы (3) вытекает: *если решение уравнения*

$$Au = \lambda u + f \quad (7)$$

*существует, то его общее решение представляется формулой*

$$u = u^* + \sum_{k=1}^r c_k u_k, \quad (8)$$

где  $u^*$  — частное решение (7) и  $c_k, k = 1, 2, \dots, r$ , — произвольные постоянные.

Предположим, что множество собственных значений симметричного оператора  $A$  не более чем счетно, а каждое собственное значение конечной кратности. Перенумеруем все его собственные значения:  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ , повторяя  $\lambda_k$  столько раз, какова его кратность. Соответствующие собственные функции обозначим через  $u_1, u_2, \dots$  так, чтобы каждому собственному значению соответствовала только одна собственная функция  $u_k$ :

$$Au_k = \lambda_k u_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Собственные функции, соответствующие одному и тому же собственному значению, можно выбрать ортонормальными, используя процесс ортогонализации Гильберта–Шмидта. При этом опять получаются собственные функции, соответствующие тому же самому собственному значению.

Перечислим основные свойства собственных чисел и собственных элементов симметричных операторов.

1. Собственные числа симметричного оператора вещественны.
2. Собственные элементы симметричного оператора, соответствующие различным собственным числам, ортогональны.
3. Если данному собственному числу соответствует несколько линейно независимых собственных элементов, то можно, применив к этим эле-

ментам процесс ортогонализации, сделать их ортогональными. Имея это в виду, можно считать, что совокупность всех собственных элементов симметричного оператора образует ортогональную систему.

4. Симметричный оператор может иметь либо конечное, либо счетное множество собственных чисел, которые можно поэтому записать в виде конечной или счетной последовательности  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ . Разумеется, возможен и такой случай, когда симметричный оператор вовсе не имеет собственных чисел.

5. Собственные элементы положительно определенного оператора ортогональны в энергетическом пространстве.

6. Собственные числа положительно определенного оператора положительны.

*З а м е ч а н и е.* Многие из перечисленных свойств собственных чисел и собственных элементов остаются справедливыми при рассмотрении *общей задачи на собственные значения*

$$Au = \lambda Bu, \quad (9)$$

где  $A$  и  $B$  — симметричные положительно определенные операторы, причем  $D(A) \subset D(B)$ .

## 2.5. Обобщенные производные. Пространства Соболева.

2.5.1. *Обобщенные производные.* Следуя С. Л. Соболеву, определим для локально суммируемой функции обобщенную производную.

Локально суммируемую на  $\Omega$  функцию  $\omega_\alpha$  назовем *обобщенной производной функции*  $f \in L_{\text{loc}}(\Omega)$  *порядка*  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $\alpha_k$  целые неотрицательные,  $k = 1, \dots, n$ , если для любой функции  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  имеет место равенство

$$\int_{\Omega} f D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \omega_\alpha \varphi dx. \quad (10)$$

В дальнейшем будем обозначать  $\omega_\alpha = D^\alpha f$ .

Рассмотрим некоторые свойства обобщенных производных. Равенство (10) ставит в соответствие локально суммируемой функции  $f$  единственную обобщенную производную порядка  $\alpha$ . Это следует из леммы дю Буа-Реймонда.

*Лемма 2 (лемма дю Буа-Реймонда).* Для того чтобы локально суммируемая функция  $f$  была равна нулю почти всюду в области  $\Omega$ , необходимо и достаточно, чтобы для любой функции  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  выполнялось

$$\int_{\Omega} f \varphi dx = 0.$$

**Теорема 18** (слабая замкнутость оператора обобщенного дифференцирования). Пусть  $f_n$  — последовательность локально суммируемых на  $\Omega$  функций. Если существуют такие  $\omega_0, \omega_\alpha \in L_{\text{loc}}$ , что для любых

финитных функций  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  выполняются равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n \varphi dx = \int_{\Omega} \omega_0 \varphi dx, \quad (11)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \omega_\alpha \varphi dx, \quad (12)$$

то локально суммируемая функция  $\omega_\alpha$  является обобщенной производной порядка  $\alpha$  функции  $\omega_0$ .

**Следствие.** Пусть последовательность  $f_n \in L_p(\Omega)$ ,  $1 < p < \infty$ , слабо сходится к  $f_0 \in L_p(\Omega)$ , а последовательность обобщенных производных  $D^\alpha f_n \in L_p(\Omega)$  слабо сходится к  $\omega_\alpha \in L_p(\Omega)$ . Тогда  $f_0$  имеет обобщенную производную порядка  $\alpha$  и

$$D^\alpha f_0 = \omega_\alpha. \quad (13)$$

**2.5.2. Пространства Соболева.** Из теоремы 18 следует, что обобщенные производные по Соболеву можно рассматривать как предельные элементы сходящихся в  $L_p(\Omega)$  последовательностей производных от гладких функций. Это свойство обобщенных производных широко используется в различных краевых задачах математической физики. Рассматриваемые задачи, как правило, сводятся к исследованию некоторого оператора, первоначально заданного на гладких функциях, который надо расширить до замкнутого оператора в некотором нормированном пространстве. Широкие классы дифференциальных операторов, рассматриваемых в пространстве типа  $L_p$ , будут замкнутыми, если их расширить на функции, имеющие обобщенные производные. Эта методика, предложенная в работах С. Л. Соболева и К. О. Фридрикса, позволила решить много трудных задач в теории дифференциальных уравнений и стала в настоящее время классической. Особенно важную роль здесь получили введенные С. Л. Соболевым классы функций  $W_p^l(\Omega)$ .

Определим классы  $W_p^l(\Omega)$  Соболева, где  $l = (l_1, \dots, l_n)$ ,  $l_i > 0$ , — целые числа,  $1 < p < \infty$ . Пусть функция  $f \in L_p(\Omega)$  имеет несмешанные обобщенные производные  $D^i f \in L_p(\Omega)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Для таких функций определим норму

$$\|f\|_{W_p^l(\Omega)} = \|f\|_{L_p(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left\| D^i f \right\|_{L_p(\Omega)}. \quad (14)$$

Множество функций  $f \in L_p(\Omega)$ , имеющих обобщенные производные  $D^i f$ ,  $i = 1, \dots, n$ , для которых норма (14) конечна, назовем *пространством  $W_p^l(\Omega)$  Соболева*. Впервые пространства  $W_p^l(\Omega)$  были введены и изучены С. Л. Соболевым при  $l_j = l$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ .

Сформулируем некоторые из свойств пространств  $W_p^l(\Omega)$ , считая  $\Omega$  ограниченной областью из  $\mathbb{R}^n$ .

**Теорема 19.** *Пространство  $W_p^l(\Omega)$ ,  $l = (l_1, \dots, l_n)$ , является полным нормированным пространством.*

Множество  $M \subset L_p(\Omega)$ ,  $1 < p < \infty$ , называется *слабо компактным*, если каждая последовательность  $f_n \subset M$  содержит подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторой функции  $f_0 \in L_p(\Omega)$ .

**Лемма 3.** *Всякое ограниченное множество  $M \subset L_p(\Omega)$ ,  $1 < p < \infty$ , слабо компактно.*

Будем говорить, что последовательность  $f_m \in W_p^l(\Omega)$ ,  $l = (l_1, \dots, l_n)$ ,  $1 < p < \infty$ , *слабо сходится* в  $W_p^l(\Omega)$  к  $f_0 \in W_p^l(\Omega)$ , если:

- 1)  $f_m$  слабо сходится в  $L_p(\Omega)$  к  $f_0 \in L_p(\Omega)$ ;
- 2) обобщенные производные  $D^i f_m$  слабо сходятся в  $L_p(\Omega)$  к  $D^i f_0 \in L_p(\Omega)$  для  $i = 1, \dots, n$ .

Множество  $M \subset W_p^l(\Omega)$ ,  $l = (l_1, \dots, l_n)$ ,  $1 < p < \infty$ , называется *слабо компактным*, если каждая последовательность  $f_m \subset M$  содержит подпоследовательность, слабо сходящуюся в  $W_p^l(\Omega)$  к некоторой функции  $f_0 \in W_p^l(\Omega)$ .

**Теорема 20.** *Всякое ограниченное множество  $M \subset W_p^l(\Omega)$ ,  $l = (l_1, \dots, l_n)$ ,  $1 < p < \infty$ , слабо компактно.*

Обозначим через  $\mathring{W}_p^k(\Omega)$  подпространство из  $W_p^k(\Omega)$ , состоящее из пределов последовательностей функций из  $C_0^\infty(\Omega)$  по норме  $\|\cdot\|_{W_p^k(\Omega)}$ . При  $p=2$  пространства  $W_p^k(\Omega), \mathring{W}_p^k(\Omega)$  являются гильбертовыми со скалярным произведением

$$(u, v)_{W_2^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int D^\alpha u \overline{D^\alpha v} dx$$

и нормой

$$\|u\|_{W_2^k(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L_2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$$

(которая эквивалентна норме для  $W_2^k(\Omega)$ , введенной ранее).

**Теорема 21.** *Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  есть ограниченная область с липшицевой границей  $\partial\Omega$ .*

1. *Если  $1 < p$ , то существует постоянная  $C$  такая, что*

$$\|u\|_{L_p(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{W_p^1(\Omega)} \quad \forall u \in C^1(\overline{\Omega}).$$

2. *Если  $n < kp$ ,  $\lambda < k - n/p$ , то существует  $C$  такая, что*

$$\|u\|_{C^\lambda(\Omega)} \leq C \|u\|_{W_p^k(\Omega)} \quad \forall u \in W_p^k(\Omega).$$

3. *Если  $u \in W_p^k(\Omega)$  и  $D^\alpha u = 0$  на  $\partial\Omega$  для  $|\alpha| \leq k-1$ , то  $u \in \mathring{W}_p^k(\Omega)$ .*

4. *Существует линейный ограниченный оператор  $L_{\text{ext}}$ , отображающий  $W_p^k(\Omega)$  в  $\mathring{W}_p^k(\mathbb{R}^n)$ , так что  $L_{\text{ext}} u(x) = u(x)$  при  $x \in \Omega$ .*

5. Существует постоянная  $C = C(\Omega, k)$  такая, что

$$\|u\|_{W_2^k(\Omega)} \leq C \|u\|_{W_2^m(\Omega)}^{k/m} \|u\|_{L_2(\Omega)}^{1-k/m} \quad \forall u \in W_2^m(\Omega), \quad 0 \leq k \leq m.$$

2.5.3. *Формула Грина.* Пусть  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  есть ограниченная область с липшицевой границей  $\partial\Omega$ ,  $n(x)$  — единичный вектор внешней нормали к  $\partial\Omega$ . Рассмотрим функцию  $u(x)$  из класса  $C^1(\overline{\Omega})$  (или даже из  $W_1^1(\Omega)$ ). Тогда справедлива формула интегрирования по частям

$$\int_{\Omega} D_j u dx = \int_{\partial\Omega} u n_j d\Gamma \quad (15)$$

где  $n_j$  —  $j$ -я координата вектора  $n(x)$ .

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор  $A$  порядка  $m$ :

$$A = \sum_{|\alpha| \leq m} a_{\alpha} D^{\alpha}. \quad (16)$$

Пусть  $m = 2$  и оператор  $A$  представим в виде

$$A = \sum a^{jk} D_j D_k + \sum a^j D_j + a, \quad a^{jk} = a^{kj}. \quad (17)$$

Тогда формально сопряженный (транспонированный) оператор есть

$$A^T = \sum D_j (a^{jk} D_k) + D_j (a^j) + a, \quad (18)$$

где  $a^{jk} \in C^2$ ,  $a^j \in C^1$  и  $a^j = \sum D_k a^{jk} - a^j$ . Везде суммирование осуществляется по  $j$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Поскольку

$$vAu - uA^T v = \sum (D_j (v a^{jk} D_k u - u a^{jk} D_k v) + D_j ((-D_k a^{jk} + a^j) uv)),$$

то, применяя формулу интегрирования по частям, получаем следующее известное утверждение.

**Теорема 2.2.** Если  $\Omega$  есть ограниченная область с липшицевой границей и коэффициентами  $a_{\alpha}$  в дифференциальном операторе второго порядка  $A$  из класса  $C^{|\alpha|}(\overline{\Omega})$ , то для произвольных функций  $u, v \in W_2^1(\Omega)$  справедлива формула Грина

$$\int_{\Omega} (vAu - uA^T v) dx = \int_{\partial\Omega} \left( a_0 \left( v \frac{\partial u}{\partial N} - u \frac{\partial v}{\partial N} \right) + a_* uv \right) d\Gamma, \quad (19)$$

где  $a_0 = \left( \sum \left( \sum a^{jk} n_j \right)^2 \right)^{1/2}$ ,  $a_* = - \sum a^j n_j$  и  $N_k = \sum a^{jk} n_j / a_0$  есть компоненты кономали к  $\partial\Omega$ , соответствующей оператору  $A$ .

Формула Грина широко используется при анализе и разработке численных методов решения самых разнообразных задач математической физики.

### 3. Основные уравнения и задачи математической физики

**3.1. Основные уравнения математической физики.** Рассмотрим характерные физические процессы, описываемые различными математическими моделями, и дифференциальные уравнения в частных производных вместе с типичными граничными условиями, входящие в эти модели.

*Дифференциальными уравнениями* называются такие уравнения, в которых неизвестными являются функции одного или нескольких переменных, причем в уравнения входят не только сами функции, но и их производные. Если неизвестными являются функции многих (не менее двух) переменных, то уравнения называются *уравнениями в частных производных*.

Уравнение в частных производных от неизвестной функции  $u$  переменных  $x_1, \dots, x_n$  называется уравнением  $N$ -го порядка, если оно содержит хотя бы одну производную порядка  $N$  и не содержит производных более высокого порядка, т. е. уравнение вида

$$A\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^N u}{\partial x_n^N}\right) = 0. \quad (20)$$

Уравнение (20) называется *линейным*, если  $A$  как функция переменных  $u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial^N u}{\partial x_n^N}$  является линейной.

Важный класс уравнений в частных производных описывается линейным уравнением второго порядка, имеющим вид

$$Au \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x)u = F(x); \quad (21)$$

здесь  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Функции  $a_{ij}(x)$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ ,  $a_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $a(x)$  называются *коэффициентами* уравнения (21), а функция  $F(x)$  — *свободным членом*.

**3.1.1. Уравнения Лапласа и Пуассона.** Уравнение Лапласа имеет вид

$$\Delta u = 0, \quad (22)$$

где  $u = u(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$  — оператор Лапласа в  $\mathbb{R}^n$ . Соответствующее неоднородное уравнение

$$-\Delta u = F \quad (23)$$

( $F$  — известная функция) называется *уравнением Пуассона*. Уравнения Лапласа и Пуассона возникают в разнообразных задачах. Например, стационарное (т. е. не меняющееся со временем) распределение температуры в однородной среде и установившаяся форма натянутой мембраны удовлетворяют уравнению Лапласа, а аналогичное распределение температуры при наличии источников тепла (с плотностью, не меняющейся во времени) и форма мембраны при наличии стационарных внешних сил удовлетворя-

ют уравнению Пуассона. Потенциал электростатического поля удовлетворяет уравнению Пуассона с функцией  $F$ , пропорциональной плотности зарядов (тем самым, в области, где нет зарядов, он удовлетворяет уравнению Лапласа).

Уравнения Лапласа и Пуассона описывают стационарное состояние тех или иных объектов. Для них не нужно задавать начальных условий, а типичными граничными условиями в случае ограниченной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  являются краевое условие Дирихле (условие первого рода)

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi, \quad (24)$$

условие Неймана (условие второго рода)

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = \varphi \quad (25)$$

и третье краевое условие (условие третьего рода)

$$\left( \frac{\partial u}{\partial n} + \gamma u \right) \Big|_{\partial\Omega} = \varphi, \quad (26)$$

где  $\gamma, \varphi$  — заданные функции на  $\partial\Omega$ .

3.1.2. *Уравнение колебаний.* Многие задачи механики (колебания струн, стержней, мембран и трехмерных объемов) и физики (электромагнитные колебания) описываются уравнением колебаний вида

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu + F(x, t), \quad (27)$$

где неизвестная функция  $u(x, t)$  зависит от  $n$  ( $n = 1, 2, 3$ ) пространственных координат,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , и времени  $t$ ; коэффициенты  $\rho$ ,  $p$  и  $q$  определяются свойствами среды, где происходит колебательный процесс; свободный член  $F(x, t)$  выражает интенсивность внешнего возмущения. В уравнении (27) в соответствии с определением операторов  $\operatorname{div}$  и  $\operatorname{grad}$

$$\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( p \frac{\partial u}{\partial x_i} \right).$$

В случае *малых поперечных колебаний струны*, представляющей собой натянутую нить, не сопротивляющуюся изгибу (т. е.  $|T(x, t)| = T_0 = \text{const}$ ), уравнение (27) принимает вид

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F, \quad (28)$$

где  $(x, u)$  есть координаты плоскости, в которой струна совершает поперечные колебания около своего положения равновесия, совпадающего с осью  $x$ .

При  $F \neq 0$  колебания струны называются *вынужденными*, а при  $F = 0$  — *свободными*.

Если плотность  $\rho$  постоянна,  $\rho(x) = \rho$ , то уравнение колебаний струны принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f, \quad (29)$$

где  $f = F/\rho$ , а  $a^2 = T_0/\rho$  — постоянная. Уравнение (29) называют также *одномерным волновым уравнением*.

Уравнение вида (27) описывает также *малые продольные колебания упругого стержня*

$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( ES \frac{\partial u}{\partial x} \right) + F(x, t), \quad (30)$$

где  $S(x)$  — площадь поперечного сечения стержня и  $E(x)$  — модуль Юнга в точке  $x$ .

Из физических соображений следует, что для однозначного описания процесса колебаний струны или стержня необходимо дополнительно задать величины смещения  $u$  и скорости  $u_t$  в начальный момент времени (*начальные условия*) и режим на концах (*граничные условия*).

*Примеры граничных условий.*

а) Если конец  $x_0$  струны или стержня движется по закону  $\mu(t)$ , то

$$u|_{x=x_0} = \mu(t).$$

б) Если на правый конец  $x_0$  струны действует заданная сила  $v(t)$ , то

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=x_0} = \frac{v(t)}{T_0}.$$

в) Если правый конец  $x_0$  стержня закреплен упруго и  $\alpha$  — коэффициент жесткости закрепления, то

$$E \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha u \Big|_{x=x_0} = 0$$

в соответствии с законом Гука.

Частным случаем уравнения (27) является также *уравнение малых поперечных колебаний мембраны*

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) + F. \quad (31)$$

Если плотность  $\rho$  постоянна, то уравнение колебаний мембраны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) + f, \quad a^2 = \frac{T_0}{\rho}, \quad f = \frac{F}{\rho}, \quad (32)$$

называют также *двумерным волновым уравнением*.

*Трехмерное волновое уравнение*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \right) + f \quad (33)$$

описывает процессы распространения звука в однородной среде и электромагнитных волн в однородной непроводящей среде. Этому уравнению удовлетворяют плотность газа, его давление и потенциал скоростей, а так-

же составляющие напряженности электрического и магнитного полей и соответствующие потенциалы.

Волновые уравнения (29), (32), (33), можно записать единой формулой:

$$\square_a u = f, \quad (34)$$

где  $\square_a$  — волновой оператор (оператор Даламбера),

$$\square_a = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta \quad (\square = \square_1).$$

3.1.3. *Уравнение Гельмгольца.* Пусть в волновом уравнении (34) внешнее возмущение  $f(x, t)$  периодическое с частотой  $\omega$  и амплитудой  $a^2 f(x)$

$$f(x, t) = a^2 f(x) e^{i\omega t}.$$

Если искать периодические возмущения  $u(x, t)$  с той же частотой и неизвестной амплитудой  $u(x)$ :  $u(x, t) = u(x) e^{i\omega t}$ , то для функции  $u(x)$  получим стационарное уравнение

$$\Delta u + k^2 u = -f(x), \quad k^2 = \frac{\omega^2}{a^2}, \quad (35)$$

называемое *уравнением Гельмгольца*.

К краевым задачам для уравнения Гельмгольца приводят задачи на рассеяние (дифракцию). Например, пусть задана приходящая (из бесконечности) плоская волна  $e^{i\omega(a, x)}$ ,  $|a| = 1$ ,  $k > 0$ , которая подвергается изменению из-за наличия некоторого препятствия на границе  $\partial\Omega$  ограниченной области  $\Omega$ . Препятствие можно задавать, например, с помощью условия  $u|_{\partial\Omega} = 0$  или  $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0$ . Это препятствие порождает рассеянную волну  $v(x)$ . Эта волна вдали от рассеивающих центров будет близка к расходящейся сферической волне

$$v(x) = f\left(\frac{x}{|x|}\right) \frac{e^{ik|x|}}{|x|} + o(|x|^{-1}). \quad (36)$$

Поэтому при  $|x| \rightarrow \infty$  волна  $v(x)$  должна удовлетворять условиям вида

$$v(x) = O(|x|^{-1}), \quad \frac{\partial v(x)}{\partial |x|} - ikv(x) = o(|x|^{-1}), \quad (37)$$

называемым *условиями излучения Зоммерфельда*. Суммарное же возмущение  $u(x)$  вне области  $\Omega$  складывается из плоской и рассеянной волн:

$$u(x) = e^{ik(a, x)} + v(x). \quad (38)$$

Отметим также, что функция  $f(s)$ ,  $s = \frac{x}{|x|}$ , из (36) называется *амплитудой рассеяния*.

3.1.4. *Уравнения диффузии и теплопроводности.* Процессы распространения тепла и диффузии частиц в среде описываются следующим общим уравнением диффузии:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu + F(x, t), \quad (39)$$

где  $\rho$  — коэффициент пористости среды, а  $p$  и  $q$  характеризуют ее свойства.

Если рассматривается процесс распространения тепла, то  $u(x, t)$  есть температура среды в точке  $x = (x_1, x_2, x_3)$  в момент времени  $t$ . Считая среду изотропной, обозначим через  $\rho(x)$ ,  $c(x)$  и  $k(x)$  соответственно ее плотность, удельную теплоемкость и коэффициент теплопроводности, а через  $F(x, t)$  — интенсивность источников тепла. Процесс распространения тепла описывается функцией, удовлетворяющей уравнению вида

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + F(x, t). \quad (40)$$

Если среда однородна, т. е.  $c$ ,  $\rho$  и  $k$  — постоянные, то уравнение (40) принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f, \quad (41)$$

где

$$a^2 = \frac{k}{c\rho}, \quad f = \frac{F}{c\rho}.$$

Уравнение (41) называется *уравнением теплопроводности*. Число  $n$  пространственных переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  в этом уравнении может быть любым.

Как и в случае уравнения колебаний, для полного описания процесса распространения тепла необходимо задать начальное распределение температуры  $u$  в среде (начальное условие) и режим на границе этой среды (граничное условие).

*Примеры граничных условий.*

а) Если на границе  $\partial\Omega$  поддерживается заданное распределение температуры  $u_0$ , то

$$u|_{\partial\Omega} = u_0. \quad (42)$$

б) Если на  $\partial\Omega$  поддерживается заданный поток тепла  $u_1$ , то

$$-k \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = u_1. \quad (43)$$

в) Если на  $\partial\Omega$  происходит теплообмен согласно закону Ньютона, то

$$k \frac{\partial u}{\partial n} + h(u - u_0) \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (44)$$

где  $h$  — коэффициент теплообмена и  $u_0$  — температура среды, окружающей  $\Omega$ .

**3.1.5. Уравнения Максвелла и телеграфные уравнения.** Уравнения Максвелла — это система уравнений для векторов  $E = (E_1, E_2, E_3)$ ,  $H = (H_1, H_2, H_3)$ , задающих напряженности электрического и магнитного

полей в какой-либо среде. Она имеет (в гауссовой системе единиц СГС) вид

$$\begin{aligned} \operatorname{div} D &= 4\pi\rho, & \operatorname{rot} E &= -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}, \\ \operatorname{div} B &= 0, & \operatorname{rot} H &= \frac{4\pi}{c} j + \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t}, \end{aligned} \quad (45)$$

где  $\rho$  — плотность электрических зарядов,  $c$  — скорость света в вакууме и в случае полей в вакууме  $D = E$ ,  $B = H$ ,  $j = 0$ , а для любых изотропных сред  $D = \varepsilon E$ ,  $B = \mu H$ ,  $j = \sigma E + j_s$ , где  $\varepsilon$  — диэлектрическая проницаемость среды,  $\mu$  — магнитная проницаемость среды,  $\sigma$  — удельная электропроводность ( $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$  могут быть функциями от  $t$ ,  $x$ ),  $j_s$  — плотность сторонних токов, т. е. токов, поддерживаемых любыми силами, кроме сил электрического поля (например, магнитным полем или диффузией).

Система Максвелла (45) является основой теории электромагнитных волн и служит базой для всех радиотехнических расчетов, например для теории волноводов. Граничные и начальные условия для нее обычно задаются из физических соображений.

Из уравнений Максвелла, в частности, выводятся важные для электротехники *телеграфные уравнения*, описывающие изменение силы тока и напряжения в проводе:

$$\begin{aligned} \frac{\partial i}{\partial x} + C \frac{\partial v}{\partial t} + Gv &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial x} + L \frac{\partial i}{\partial t} + Ri &= 0, \end{aligned} \quad (46)$$

где  $x$  — координата вдоль провода,  $v$  — напряжение в данной точке провода (отсчитываемое от произвольного начального уровня),  $i$  — сила тока,  $R$  — удельное сопротивление (на единицу длины),  $L$  — удельная самоиндукция,  $C$  — удельная емкость,  $G$  — удельная утечка.

3.1.6. *Уравнение переноса.* Для описания процесса распространения частиц вместо уравнения диффузии используются также более точные уравнения — так называемые *уравнения переноса* (*кинетические уравнения*). Одним из представителей этого класса уравнений является *односкоростное уравнение переноса* вида

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (s, \operatorname{grad}) \varphi + \sigma \varphi = \frac{\sigma_s}{4\pi} \int_{S_1} \varphi(x, s', t) ds' + F, \quad (47)$$

где  $\varphi = vN(x, s, t)$  — поток частиц, летящих с (одной и той же) скоростью  $v$  в направлении  $s = (s_1, s_2, s_3)$ ,  $|s| = 1$ ;  $N(x, s, t)$  — плотность частиц;  $F(x, s, t)$  — плотность источников, коэффициенты  $\sigma(x, t)$ ,  $\sigma_s(x, t)$  характеризуют свойства среды;  $S_1$  — сфера единичного радиуса в  $R^3$ .

Для полного описания процесса переноса частиц необходимо задать начальное распределение потока частиц  $\varphi$  в области  $\Omega \subset R^3$  (начальное условие) и режим на границе этой области (граничное условие). Например, если область  $\Omega$ , где происходит процесс переноса, выпуклая, то граничное

условие вида

$$\varphi(x, s, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (s, n) < 0, \quad (48)$$

где  $n = n(x)$  — единичный вектор внешней нормали к границе области  $\Omega$ , выражает отсутствие падающего потока частиц на область извне.

Отметим, что уравнение переноса описывает процессы переноса нейтронов в ядерном реакторе, переноса лучистой энергии, прохождения  $\gamma$ -квантов через вещество, движения газов и другие.

**3.1.7. Уравнения газо- и гидродинамики.** Рассмотрим движение идеальной жидкости (газа), т.е. жидкости, в которой отсутствует вязкость. Пусть  $V(x, t) = (v_1, v_2, v_3)$  — вектор скорости движения жидкости,  $\rho(x, t)$  — ее плотность,  $p(x, t)$  — давление,  $f(x, t)$  — интенсивность источников и  $F(x, t) = (F_1, F_2, F_3)$  — интенсивность массовых сил. Тогда эти величины удовлетворяют следующей нелинейной системе уравнений, называемых *уравнениями гидродинамики (газовой динамики)*:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho V) = f, \quad (49)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V, \operatorname{grad})V + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = F. \quad (50)$$

Уравнения (49) и (50) называются соответственно *уравнением неразрывности* и *уравнением движения Эйлера*. Чтобы замкнуть эту систему уравнений, необходимо еще задать связь между давлением и плотностью:

$$\Phi(p, \rho) = 0, \quad (51)$$

так называемое *уравнение состояния*. Например, для несжимаемой жидкости уравнение состояния имеет вид  $\rho = \text{const}$ , а для адиабатического движения газа

$$p\rho^{-\kappa} = \text{const}, \quad \kappa = \frac{c_p}{c_v},$$

где  $c_p$  и  $c_v$  — удельные теплоемкости газа при постоянном давлении и постоянном объеме соответственно.

В частности, если жидкость несжимаема ( $\rho = \text{const}$ ) и ее движение потенциально ( $V = -\operatorname{grad} u$ ), то из уравнения неразрывности (49) следует, что потенциал  $u$  удовлетворяет уравнению Пуассона.

**3.1.8. Классификация линейных дифференциальных уравнений.** При изучении линейных дифференциальных уравнений с частными производными в математической физике выделяются три основных типа уравнений: эллиптические, параболические и гиперболические. Простейшими уравнениями этих типов являются соответственно уравнение Лапласа, уравнение теплопроводности и волновое уравнение.

Рассмотрим общее линейное уравнение второго порядка в  $\mathbb{R}^n$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \dots = 0, \quad (52)$$

где коэффициенты  $a_{ij}(x) \equiv a_{ji}(x)$  вещественны, а многоточие обозначает

младшие члены (члены, содержащие только  $u$  и  $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ , но не вторые производные по  $u$ ). Введем ассоциированную с уравнением (52) квадратичную форму

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j. \quad (53)$$

Непосредственными вычислениями проверяется, что при замене независимых переменных  $y = f(x)$  она не меняется, если преобразовывать вектор  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  с помощью матрицы  $T'^{-1}$ , транспонированной и обратной к матрице Якоби  $T = f'(x)$ , рассматриваемой в точке  $x$ . В частности, инварианты линейных преобразований квадратичной формы (ранг, число положительных коэффициентов и число отрицательных коэффициентов при квадратах в ее каноническом виде) не меняются при заменах независимых переменных в уравнении. Канонический вид квадратичной формы (53) определяется собственными значениями симметричной матрицы  $\|a_{ij}(x)\|_{i,j=1}^n$ . А именно, эллиптичность уравнения (52) в точке  $x$  равносильна тому, что все эти собственные значения одного знака, гиперболичность — тому, что  $n-1$  собственных значений одного знака, а одно имеет противоположный знак; наконец, параболичность в точке  $x$  означает, что имеется одно нулевое значение, а все остальные одного знака.

Фиксируя точку  $x$ , можно линейной заменой независимых переменных в уравнении (52) добиться того, чтобы квадратичная форма (53) приобрела канонический вид. Это означает, что само уравнение в точке  $x$  приобретет следующий канонический вид:

$$\sum_{j=1}^r \pm \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + \dots = 0, \quad (54)$$

где  $r$  — ранг квадратичной формы (53). В частности, если исходное уравнение было эллиптическим, то все знаки в (54) будут одинаковыми, так что, меняя в случае необходимости знак, мы придем к уравнению с главной частью в точке  $x$ , которая такая же, как у уравнения Лапласа. Для гиперболического уравнения главная часть в каноническом виде в точке  $x$  совпадает с главной частью волнового уравнения в  $R^n$ , а для параболического главная часть станет лапласианом по  $n-1$  переменным в  $R^n$ . (Отметим, что приведение уравнения к виду (54) описанными преобразованиями не в одной точке, а в целой области, вообще говоря, невозможно.)

Если разрешить еще умножать уравнение (52) на вещественное число, отличное от нуля (или на нигде не обращающуюся в нуль вещественнозначную функцию), то при этом еще могут поменяться местами положительные и отрицательные коэффициенты канонического вида формы (53). Это придает смысл следующему определению.

**Определение 1.** а) Уравнение (52) называется *эллиптическим* в точке  $x$ , если канонический вид квадратичной формы (53) содержит  $n$  положительных или  $n$  отрицательных коэффициентов, т.е. форма поло-

жительно или отрицательно определена.

б) Уравнение (52) называется *гиперболическим в точке  $x$* , если квадратичная форма (53) имеет ранг  $n$  и ее канонический вид содержит (после возможного изменения знака)  $n - 1$  положительных и один отрицательный коэффициентов.

в) Уравнение (52) называется *параболическим в точке  $x$* , если квадратичная форма (53) имеет ранг  $n - 1$  и после возможного изменения знака становится неотрицательно определенной, т. е. ее канонический вид содержит  $n - 1$  положительных коэффициентов или  $n - 1$  отрицательных коэффициентов.

Если какое-то из условий а), б), в) имеет место при всех  $x \in \Omega$ , где  $\Omega$  — область в  $\mathbb{R}^n$ , то говорят об *эллиптичности, гиперболичности и параболичности в области  $\Omega$* .

В математической физике встречаются также *уравнения смешанного типа*, т. е. уравнения, имеющие различный тип в разных точках рассматриваемой области. Например, *уравнение Трикоми*

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (55)$$

рассматриваемое в  $\mathbb{R}^2$ , является эллиптическим при  $y > 0$ , гиперболическим при  $y < 0$  и параболическим на прямой  $y = 0$ . Это уравнение возникает при описании движения тела в газе с околосвуковой скоростью: область гиперболичности  $y < 0$  соответствует движению с дозвуковой скоростью, а область эллиптичности  $y > 0$  — движению со сверхзвуковой скоростью.

Рассмотрим общий линейный дифференциальный оператор

$$A = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha \quad (56)$$

в области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  и соответствующее уравнение

$$Au = F. \quad (57)$$

Введем *главный символ* оператора  $A$ , определяемый формулой

$$a_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) \xi^\alpha. \quad (58)$$

**Определение 2.** Оператор (56) и уравнение (57) называются *эллиптическими в точке  $x$* , если  $a_m(x, \xi) \neq 0$  при всех  $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Если это выполнено при всех  $x \in \Omega$ , то оператор  $A$  и уравнение (57) называются *эллиптическими в области  $\Omega$*  или просто *эллиптическими*.

Гиперболичность уравнения или системы обычно определяется при наличии выделенной переменной (обычно это время) или хотя бы выделенного направления (при наличии выделенной переменной в качестве такого направления берется направление оси  $t$ ).

**Определение 3.** Оператор  $A$  вида (56) и уравнение (57) называются *гиперболическими в направлении вектора  $v$  (в точке)  $x$* , если

$a_m(x, v) \neq 0$  (т.е. направление  $v$  нехарактеристично) и для любого вектора  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , не пропорционального  $v$ , все корни  $\lambda$  уравнения

$$a_m(x, \xi + \lambda v) = 0 \quad (59)$$

вещественны. Оператор  $A$  и уравнение (57) называются *строго гиперболическими в направлении вектора  $v$  (в точке  $x$ )*, если все корни уравнения (59) (их  $m$  штук, в силу условия характеристичности) вещественны и различны.

Аналогично определяется гиперболичность для матричного оператора  $A$  вида (56) (размером  $N \times N$ ) и соответствующей системы (57): условие нехарактеристичности имеет вид  $\det a_m(x, v) \neq 0$ , а вместо уравнения (59) в этом случае надо рассматривать уравнение

$$\det a_m(x, \xi + \lambda v) = 0.$$

Часто встречаются системы первого порядка с выделенной переменной  $t$ , имеющие вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + Bu = F, \quad (60)$$

где  $u$  —  $N$ -компонентная вектор-функция,  $A_j, B$  — матрицы  $N \times N$  (зависящие от  $t, x$ ),  $F$  — известная вектор-функция от  $t, x$ . Условие гиперболичности (строгой гиперболичности) такой системы (относительно направления оси  $t$ ) означает, что для любых вещественных  $\xi_1, \dots, \xi_n$  все собственные значения матрицы  $\sum_{j=1}^n \xi_j A_j$  вещественны (соответственно вещественны и различны). В частности, если все матрицы  $A_j$  являются симметрическими, то система (60) гиперболична (такие системы называются *симметрическими гиперболическими системами*).

**3.2. Постановка основных задач математической физики.** Сформулируем постановки основных краевых (начально-краевых) задач математической физики.

**3.2.1. Классификация краевых задач.** Как отмечалось ранее, линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu + F(x, t) \quad (61)$$

описывает процессы колебаний, уравнение

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu + F(x, t) \quad (62)$$

описывает процессы диффузии и, наконец, уравнение

$$-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = F(x) \quad (63)$$

описывает соответствующие стационарные процессы.

Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  — область, где происходит физический процесс, а  $\partial\Omega$  — ее граница, которую считаем кусочно гладкой поверхностью. Область изменения аргументов  $x$  — область  $\Omega$  — в случае уравнения (63) есть *область*

задания уравнения. Временную переменную  $t$  считаем из  $(0, T)$ .

Будем предполагать, что коэффициенты  $\rho$ ,  $p$  и  $q$  уравнений (61)–(63) не зависят от  $t$ . Далее, в соответствии с их физическим смыслом, считаем, что  $\rho(x) > 0$ ,  $p(x) > 0$ ,  $q(x) > 0$ ,  $x \in \Omega$ . Кроме того, в соответствии с математическим смыслом уравнений (61)–(63) необходимо считать, что  $\rho \in C(\bar{\Omega})$ ,  $p \in C^1(\bar{\Omega})$  и  $q \in C(\bar{\Omega})$ .

При сделанных предположениях, согласно введенной классификации, уравнение колебаний (61) — гиперболического типа, уравнение диффузии (62) — параболического типа и стационарное уравнение (6) — эллиптического типа.

Как уже упоминалось, чтобы полностью описать тот или иной физический процесс, необходимо кроме самого уравнения, описывающего этот процесс, задать начальное состояние этого процесса (*начальные условия*) и режим на границе той области, в которой происходит этот процесс (*граничные условия*). Математически это связано с неединственностью решения дифференциальных уравнений. Поэтому, чтобы выделить решение, описывающее реальный физический процесс, необходимо задавать дополнительные условия. Такими дополнительными условиями и являются *краевые условия*: начальные и граничные условия. Соответствующая задача называется *краевой задачей*. Таким образом, краевая задача математической физики — это дифференциальное (интегро-дифференциальное) уравнение (или система уравнений) с заданными краевыми условиями.

Различают, таким образом, следующие три основных типа краевых задач для дифференциальных уравнений.

а) *Задача Коши* для уравнений гиперболического и параболического типов: задаются начальные условия, область  $\Omega$  совпадает со всем пространством  $\mathbb{R}^n$ , граничные условия отсутствуют.

б) *Краевая задача* эллиптического типа: задаются граничные условия на границе  $\partial\Omega$ , начальные условия отсутствуют.

в) *Смешанная задача* для уравнений гиперболического и параболического типов: задаются начальные и граничные условия,  $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ .

Опишем подробнее постановку каждой из перечисленных краевых задач для рассматриваемых уравнений (61)–(63).

3.2.2. *Задача Коши*. Для уравнения колебаний (61) (гиперболический тип) задача Коши ставится следующим образом: найти функцию  $u(x, t)$  класса  $C^2(t > 0) \cap C^1(t \geq 0)$ , удовлетворяющую уравнению (61) в полупространстве  $t > 0$  и начальным условиям при  $t = +0$ :

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = u_1(x). \quad (64)$$

При этом необходимо, чтобы  $F \in C(t > 0)$ ,  $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $u_1 \in C(\mathbb{R}^n)$ .

Для уравнения диффузии (62) (параболический тип) задача Коши ставится так: найти функцию  $u(x, t)$  класса  $C^2(t > 0) \cap C(t \geq 0)$ , удовлетворяющую уравнению (62) в полупространстве  $t > 0$  и начальному условию

при  $t = +0$ :

$$u|_{t=0} = u_0(x). \quad (65)$$

При этом необходимо, чтобы  $F \in C(t > 0)$ ,  $u_0 \in C(\mathbb{R}^n)$ .

Приведенная постановка задачи Коши допускает следующее обобщение. Пусть даны квазилинейное дифференциальное уравнение второго порядка гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n a_{i0} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial t} + \Phi\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial u}{\partial t}\right), \quad (66)$$

кусочно гладкая поверхность  $\Sigma = [t = \sigma(x)]$  и функции  $u_0, u_1$  на  $\Sigma$  (данные Коши). Задача Коши для уравнения (66) состоит в нахождении в некоторой части области  $t > \sigma(x)$ , примыкающей к поверхности  $\Sigma$ , решения  $u(x, t)$ , удовлетворяющего на  $\Sigma$  краевым условиям

$$u|_{\Sigma} = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Sigma} = u_1, \quad (67)$$

где  $n$  — нормаль к  $\Sigma$ , направленная в сторону возрастающих значений  $t$ .

3.2.3. *Краевая задача для уравнения эллиптического типа.* Краевая задача для уравнения (63) (эллиптический тип) состоит в нахождении функции  $u(x)$  класса  $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ , удовлетворяющей в области  $\Omega$  уравнению (63) и граничному условию на  $\partial\Omega$  вида

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = v, \quad (68)$$

где  $\alpha, \beta$  и  $v$  — заданные кусочно непрерывные функции на  $\partial\Omega$ , причем  $\alpha(x) \geq 0$ ,  $\beta(x) \geq 0$ ,  $\alpha(x) + \beta(x) > 0$ ,  $x \in \partial\Omega$ . Выделяют следующие типы граничных условий (68): граничное условие первого рода ( $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0$ )

$$u|_{\partial\Omega} = u_0; \quad (69)$$

граничное условие второго рода ( $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$ )

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = u_1; \quad (70)$$

граничное условие третьего рода ( $\alpha \geq 0$ ,  $\beta = 1$ )

$$\alpha u + \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = u_2. \quad (71)$$

Соответствующие краевые задачи называются *краевыми задачами первого, второго и третьего рода*.

Для уравнений Лапласа и Пуассона краевая задача первого рода

$$\Delta u = -f, \quad u|_{\partial\Omega} = u_0 \quad (72)$$

называется *задачей Дирихле*; краевая задача второго рода

$$\Delta u = -f, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = u_1 \quad (73)$$

называется *задачей Неймана*.

Аналогично ставятся краевые задачи для уравнения (63) и во внешне-сти ограниченной области  $\Omega$  (*внешние краевые задачи*). Отличие состоит в том, что помимо граничного условия (68) на  $\partial\Omega$  задаются еще условия на бесконечности. Такими условиями, например, могут быть: условия излучения Зоммерфельда — для уравнения Гельмгольца; условия вида

$$u(x) = O(1) \quad \text{или} \quad u(x) = o(1), \quad |x| \rightarrow \infty, \quad (74)$$

для уравнения Пуассона.

**3.2.4. Смешанные задачи.** Для уравнения колебаний (61) (гиперболический тип) смешанная задача ставится следующим образом: найти функцию  $u(x, t)$  класса  $C^2(Q_T) \cap C^1(\overline{Q}_T)$ , где  $Q_T \equiv \Omega \times (0, T)$ , удовлетворяющую уравнению (61) в цилиндре  $Q_T$ , начальным условиям (64) при  $t = 0$ ,  $x \in \overline{\Omega}$  (на нижнем основании цилиндра  $Q_T$ ) и граничному условию (68) (на боковой поверхности цилиндра  $Q_T$ ). При этом должны быть выполнены условия гладкости

$$F \in C(Q_T), \quad u_0 \in C^1(\overline{\Omega}), \quad u_1 \in C(\overline{\Omega}),$$

$v$  — кусочно непрерывна на  $\partial\Omega \times [0, T]$  и условия согласованности

$$\alpha u_0 + \beta \frac{\partial u_0}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = v \Big|_{t=0}, \quad \alpha u_1 + \beta \frac{\partial u_1}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{t=0}. \quad (75)$$

(Второе из равенств (75) имеет смысл, если решение  $u(x, t)$  достаточно гладко вплоть до нижнего основания  $Q_T$ .)

Аналогично для уравнения диффузии (62) (параболический тип) смешанная задача ставится так: найти функцию  $u(x, t)$  класса  $C^2(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$ ,  $\text{grad}_x u \in C(\overline{Q}_T)$ , удовлетворяющая уравнению (62) в  $Q_T$ , начальному условию (65) и граничному условию (68).

В математической физике часто встречаются другие краевые задачи, отличающиеся от сформулированных выше (например, *задача Гурса для линейного уравнения гиперболического типа, задача Зарембы для уравнения Лапласа и другие*).

**3.2.5. Корректность постановок задач. Теорема Коши–Ковалевской.** Поскольку задачи математической физики представляют собой математические модели реальных физических процессов, то к их постановкам часто предъявляют следующие естественные требования:

- а) решения должны *существовать* в каком-то классе функций  $X_1$ ;
- б) решение должно быть *единственным* в некотором классе функций  $X_2$ ;
- в) решение должно *непрерывно* зависеть от данных задачи (начальных и граничных данных, свободного члена, коэффициентов уравнения и т. д.).

Непрерывная зависимость решения  $u$  от данных задачи  $F$  означает следующее: пусть последовательность данных  $F_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) в каком-то смысле стремится к  $F$  и  $u_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ),  $u$  — соответствующие решения задачи; тогда должно быть  $u_k \rightarrow u$ ,  $k \rightarrow \infty$ , в смысле сходимости, выбранной надлежащим образом. Например, пусть задача приводится к

уравнению  $Au = F$ , где  $A$  — линейный оператор, переводящий  $X$  в  $Y$ , где  $X$  и  $Y$  — линейные нормированные пространства. В этом случае непрерывная зависимость решения  $u$  от свободного члена  $F$  будет обеспечена, если оператор  $A^{-1}$  существует и ограничен из  $Y$  в  $X$ . Требование непрерывной зависимости решения обуславливается тем обстоятельством, что физические данные, как правило, определяются из эксперимента приближенно, и поэтому нужно быть уверенным в том, что решение задачи в рамках выбранной математической модели не будет существенно зависеть от погрешностей измерений.

Задача, удовлетворяющая перечисленным требованиям, называется *корректно поставленной* (по Адамару), а множество функций  $X_1 \cap X_2$  — классом корректности. Задача, не удовлетворяющая хотя бы одному из условий а)–в), называется *некорректно поставленной*.

К некорректно поставленным задачам часто приводят *обратные задачи математической физики*: по некоторой информации о решении прямой задачи восстановить некоторые неизвестные физические величины (источники, краевые условия, коэффициенты уравнения и т. д.), определяющие эту задачу.

Выделим довольно общий класс задач Коши, для которых решение существует и единственно. Но сначала введем два определения.

1. Система  $N$  дифференциальных уравнений с  $N$  неизвестными функциями  $u_1, u_2, \dots, u_n$

$$\frac{\partial^{k_i} u_i}{\partial t^{k_i}} = \Phi_i(x, t, u_1, u_2, \dots, u_n, \dots, D_t^{\alpha_0} D_x^{\alpha} u_j, \dots), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (76)$$

называется *нормальной относительно переменной  $t$* , если правые части  $\Phi_i$  не содержат производных порядка выше  $k_i$  и производных по  $t$  порядка выше  $k_i - 1$ , т. е.

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq k_i, \quad \alpha_0 \leq k_i - 1.$$

Например, волновое уравнение, уравнение Лапласа и уравнение теплопроводности нормальны относительно каждой переменной  $x$ ; волновое уравнение, кроме того, нормально относительно  $t$ .

2. Функция  $f(x)$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , называется *аналитической в точке  $x_0$* , если в некоторой окрестности этой точки она представляется в виде равномерно сходящегося степенного ряда

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \geq 0} c_\alpha (x - x_0)^\alpha = \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{D^\alpha f(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha$$

(точка  $x_0$  может быть и комплексной). Если функция  $f(x)$  аналитична в каждой точке области  $\Omega$ , то говорят, что она *аналитична в  $\Omega$* .

Для нормальной относительно  $t$  системы уравнений (76) поставим следующую задачу Коши: найти решение  $u_1, u_2, \dots, u_N$  этой системы, удо-

влетворяющее начальным условиям при  $t = t_0$

$$\frac{\partial^k u_i}{\partial t^k} \Big|_{t=t_0} = \varphi_{ik}(x), \quad k = 0, 1, \dots, k_i - 1; \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (77)$$

где  $\varphi_{ik}(x)$  — заданная функция в некоторой области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ .

**Теорема 23** (теорема Коши–Ковалевской). *Если все функции  $\varphi_{ik}(x)$  аналитичны в некоторой окрестности точки  $x_0$  и все функции  $\Phi_i(x, t, \dots, (u_j)_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n}, \dots)$  аналитичны в некоторой окрестности точки  $(x_0, t_0, \dots, D^\alpha \varphi_{j\alpha}(x_0), \dots)$ , то задача Коши (76), (77) имеет аналитическое решение в некоторой окрестности точки  $(x_0, t_0)$  и притом единственное в классе аналитических функций.*

Заметим, что теорема Коши–Ковалевской, несмотря на ее общий характер, полностью не решает вопроса о корректности постановки задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений. Эта теорема гарантирует лишь существование и единственность решения в достаточно малой окрестности, или, как говорят, *в малом*; обычно же эти факты требуется установить в наперед заданных (и отнюдь не малых) областях, или, как говорят, *в целом*. Далее, начальные данные и свободный член уравнения, как правило, оказываются неаналитическими функциями. Наконец, может вовсе не быть непрерывной зависимости решения от начальных данных (на что указывает известный пример Адамара).

**3.3. Обобщенные постановки и решения задач математической физики.** Изложенные в предыдущих пунктах постановки краевых задач характеризуются тем, что решения их предполагаются достаточно гладкими и они должны удовлетворять уравнению в каждой точке области задания этого уравнения. Такие решения мы будем называть *классическими*, а постановку соответствующей краевой задачи — *классической постановкой*. Таким образом, классические постановки задач уже предполагают достаточную гладкость входящих в задачу данных. Однако в наиболее интересных задачах эти данные могут иметь довольно сильные особенности. Поэтому для таких задач классические постановки уже оказываются недостаточными. Чтобы поставить такие задачи, приходится отказываться (частично или полностью) от требования гладкости решения в области или вплоть до границы, вводить так называемые *обобщенные решения* и *обобщенные постановки задач* математической физики.

Одно из направлений в теории обобщенных решений и постановок краевых задач базируется на использовании функциональных пространств Соболева. При этом теоремы вложения и теоремы существования следов (граничных значений), установленные для этих пространств, позволяют придать смысл граничным условиям для уравнений математической физики, рассматривая эти условия как дополнительные уравнения в соответствующих пространствах («пространствах следов»). В ряде задач даже можно исключить явное присутствие граничных условий в обобщенной постановке задач, «включив» их вместе с основным уравнением в некоторое интегральное тождество (так называемые «естественные граничные условия»).

Сформулируем основные подходы введения обобщенных постановок задач и обобщенных решений на примерах некоторых основных задач математической физики, используя при этом пространства Соболева.

### 3.3.1. Обобщенные постановки и решения эллиптических задач.

**Задача Дирихле.** Рассмотрим простейшую эллиптическую краевую задачу — задачу Дирихле для уравнения Лапласа или уравнения Пуассона — и дадим ее обобщенную постановку. Вначале обсудим задачу для уравнения Пуассона с нулевыми граничными условиями:

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= f(x), \quad x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned} \quad (78)$$

Вместо граничного условия  $u|_{\partial\Omega} = 0$  будем писать  $u \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$  (это включение в случае ограниченных областей с гладкой (или кусочно гладкой) границей равносильно тому, что  $u \in W_2^1(\Omega)$  и  $u|_{\partial\Omega} = 0$ ). Умножая обе части уравнения  $-\Delta u = f$  на  $\bar{v}(x)$ , где  $v \in C_0^\infty(\Omega)$ , и интегрируя по частям, получаем

$$[u, v] = (f, v), \quad (79)$$

где  $(\cdot, \cdot)$  означает скалярное произведение в  $L_2(\Omega)$ , а

$$[u, v] = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j} dx,$$

так что  $[\cdot, \cdot]$  — форма, непрерывная на пространстве  $W_2^1(\Omega)$ , т. е.  $|[u, v]| \leq C \|u\|_{W_2^1(\Omega)} \|v\|_{W_2^1(\Omega)}$ , где постоянная  $C > 0$  не зависит от  $u, v$ . Величина

$$D(u) = [u, u] = \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right|^2 dx$$

называется *интегралом Дирихле*.

Равенство (79) имеет смысл для любых функций  $u, v \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$  и для  $f \in L_2(\Omega)$ . Оно и будет рассматриваться вместо задачи (78). При этом можно брать лишь такие функции  $v$ , что  $v \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$ . В случае классического решения  $u$  (т. е. решения  $u \in C^2(\Omega)$  задачи (78)) равенство (79) получается описанной выше процедурой при  $v \in C_0^\infty$  и затем с использованием предельного перехода при  $v \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$ .

Итак, приходим к следующей *обобщенной постановке задачи (78)*: при заданной функции  $f \in L_2(\Omega)$  найти такую функцию  $u \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$ , что для любой функции  $v \in C_0^\infty(\Omega)$  выполнено (79).

Как уже указывалось, вместо  $v \in C_0^\infty(\Omega)$  можно писать  $v \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$ , что приводит к эквивалентной постановке. Кроме того, перебрасывая производные с  $v$  на  $u$  интегрированием по частям, получаем, что (79) равносильно уравнению  $-\Delta u = f$ , понимаемому в смысле обобщенных функций, так

что сформулированная обобщенная постановка задачи эквивалентна следующей: дана функция  $f \in L_2(\Omega)$ ; найти такую функцию  $u \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$ , что  $-\Delta u = f$  в смысле обобщенных функций.

Всякое решение  $u$  задачи (79) будем называть *обобщенным* или *слабым решением* (в отличие от классического решения, о котором имеет смысл говорить при  $f \in C(\Omega)$ ). С другой стороны, всякое классическое решение  $u \in C^2(\Omega)$  является обобщенным.

Заметим, что  $[\cdot, \cdot]$  можно считать скалярным произведением в пространстве  $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ . Это равносильно тому, что выражение  $\|u\|_1 = \sqrt{D(u)} = [u, u]^{1/2}$  является нормой, эквивалентной норме  $\|\cdot\|_{W_2^1(\Omega)}$  на  $C_0^\infty(\Omega)$ . Ввиду очевидного соотношения  $\|u\|_{W_2^1}^2 = \|u\|^2 + D(u)$  эквивалентность норм  $\|\cdot\|_{W_2^1}$  и  $\|\cdot\|_1$  вытекает из так называемого *неравенства Стеклова*

$$\|u\|^2 \leq CD(u), \quad u \in C_0^\infty(\Omega), \quad (80)$$

где  $C > 0$  не зависит от  $u$ , а  $\|\cdot\|$  — норма в  $L_2(\Omega)$ .

Пользуясь эквивалентностью норм  $\|\cdot\|_{W_2^1(\Omega)}$  и  $\|\cdot\|_1$  для функций из  $\mathring{W}_2^1(\Omega)$  и привлекая теорему Рисса о представлении линейного ограниченного функционала, нетрудно установить следующее утверждение.

**Теорема 24.** Если  $\Omega$  — любая ограниченная область в  $\mathbb{R}^n$  и  $f \in L_2(\Omega)$ , то обобщенное решение задачи (78) существует и единственно.

Рассмотрим теперь кратко задачу Дирихле для уравнения Лапласа:

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= 0, \quad x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} &= \varphi. \end{aligned} \quad (81)$$

При переходе к обобщенной постановке прежде всего возникает вопрос об интерпретации граничного условия. Если граница  $\partial\Omega$  является гладкой и если  $\varphi \in W_2^{3/2}(\partial\Omega)$ , то, по теореме о существовании следа, существует такая функция  $v \in W_2^2(\Omega)$ , что  $v|_{\partial\Omega} = \varphi$ . Но тогда если  $u \in W_2^1(\Omega)$  является решением задачи (81), то для  $w = u - v$  мы получим задачу вида (78) с  $f = -\Delta v \in L_2(\Omega)$ , так что можно перейти к обобщенной постановке (79) и в случае ограниченной области  $\Omega$  воспользоваться теоремой 24, из которой теперь следует существование и единственность решения задачи (81). Если граница  $\partial\Omega$  негладкая, то можно сразу зафиксировать функцию  $v \in W_2^1(\Omega)$ , задающую граничное условие, и ставить задачу следующим образом: дана функция  $v \in W_2^1(\Omega)$ ; найти функцию  $u$  такую, что  $u - v \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$ , а также  $\Delta u(x) = 0$  при  $x \in \Omega$ .

**Теорема 25.** Если  $\Omega$  — любая ограниченная область в  $\mathbb{R}^n$  и  $v \in W_2^1(\Omega)$ , то обобщенное решение  $u$  задачи (81) существует и единственно. Это решение имеет строго минимальный интеграл Дирихле  $D(u)$  среди всех функций  $u \in W_2^1(\Omega)$ , для которых  $u - v \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$ . Обратно, если  $u$  является стационарной точкой интеграла Дирихле в

классе всех функций  $u \in W_2^1(\Omega)$ , для которых  $u - v \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ , то  $u$  — обобщенное решение задачи (81) ( $u$ , тем самым, интеграл Дирихле имеет строгий минимум на функции  $u$ ).

**Задача Неймана.** Однородная задача Неймана для уравнения Пуассона имеет вид

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= f(x), \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned} \quad (82)$$

Для перехода к ее обобщенной постановке будем считать, что  $\Omega$  — ограниченная область с гладкой границей, и пусть сначала  $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ . Умножая обе части уравнения  $-\Delta u = f$  на функцию  $\bar{v}$ , где  $v \in C^\infty(\bar{\Omega})$ , и затем, интегрируя по  $\Omega$ , воспользуемся формулой Грина

$$\int_{\Omega} \Delta u(x) \bar{v}(x) dx = - \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla \bar{v}(x) dx + \int_{\partial\Omega} \bar{v}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial n} dS_x,$$

где  $dS_x$  — элемент площади поверхности границы. Отсюда находим, в силу (82),

$$[u, v] = (f, v). \quad (83)$$

По непрерывности здесь вместо  $v \in C^\infty(\bar{\Omega})$  можно брать  $v \in W_2^1(\Omega)$  даже в том случае, когда известно лишь, что  $u \in W_2^1(\Omega)$  и  $f \in L_2(\Omega)$ . Это дает *обобщенную постановку задачи Неймана: по функции  $f \in L_2(\Omega)$  найти такую функцию  $u \in W_2^1(\Omega)$ , чтобы (83) выполнялось для любой функции  $v \in W_2^1(\Omega)$ .*

Решение этой задачи единственно с точностью до произвольной постоянной: если  $u_1$  — другое решение задачи Неймана (с той же функцией  $f$ ) и  $w = u_1 - u$ , то  $[w, v] = 0$  для любой функции  $v \in W_2^1(\Omega)$ . Полагая  $v = w$ , получаем, что  $[w, w] = 0$ . Это значит, что все обобщенные производные  $\frac{\partial w}{\partial x_j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , обращаются в нуль и  $w = \text{const}$ .

Обобщенное решение задачи Неймана существует для тех и только тех функций  $f \in L_2(\Omega)$ , для которых выполнено условие

$$(f, 1) = \int_{\Omega} f(x) dx = 0,$$

т.е. для функций с нулевым средним значением. Необходимость этого условия сразу вытекает из (83) при  $v \equiv 1$ .

Для доказательства существования обобщенного решения задачи Неймана можно воспользоваться *неравенством Пуанкаре*

$$\|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq C \left( D(u) + \left( \int_{\Omega} u dx \right)^2 \right), \quad u \in C^\infty(\Omega), \quad (84)$$

где  $C = \text{const}$  не зависит от  $u$ , в силу которого на функциях из  $W_2^1(\Omega)$ , ортогональных единице, нормы

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega)}, \quad \|u\|_1 = \left( D(u) + \left( \int_{\Omega} u dx \right)^2 \right)^{1/2}$$

эквивалентны. Привлекая теперь известную теорему Рисса, получаем существование единственного обобщенного решения  $u \in W_2^1(\Omega)$  задачи Неймана при условиях  $f \in L_2(\Omega)$ ,  $\int_{\Omega} f(x) dx = 0$ .

Краевые задачи для общих эллиптических уравнений 2-го порядка могут быть переформулированы и исследованы подходами, которые продемонстрированы выше на примере задач Дирихле и Неймана для оператора Лапласа.

**3.3.2. Обобщенные постановки и решения гиперболических задач.** Пусть  $\Omega$  — некоторая ограниченная область  $n$ -мерного пространства  $R^n$  ( $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  — точка этого пространства). В  $(n+1)$ -мерном пространстве  $R^{n+1} = R^n \times \{-\infty < t < +\infty\}$  рассмотрим ограниченный цилиндр  $Q_T = \{x \in \Omega, 0 < t < T\}$  высоты  $T > 0$ . Обозначим через  $\Gamma_T$  боковую поверхность  $\{x \in \partial\Omega, 0 < t < T\}$  цилиндра  $Q_T$ , а через  $\Omega_{\tau}$  — сечение  $\{x \in \Omega, t = \tau\}$  этого цилиндра плоскостью  $t = \tau$ ; в частности, верхнее основание цилиндра  $Q_T$  есть  $\Omega_T = \{x \in \Omega, t = T\}$ , а нижнее его основание —  $\Omega_0 = \{x \in \Omega, t = 0\}$ .

В цилиндре  $Q_T$  при некотором  $T > 0$  рассмотрим гиперболическое уравнение

$$Lu \equiv u_{tt} - \text{div}(k(x)\nabla u) + a(x)u = f(x, t), \quad (85)$$

где  $k(x) \in C^1(\overline{Q}_T)$ ,  $a(x) \in C(\overline{Q}_T)$ ,  $k(x) \geq k_0 = \text{const} > 0$ .

Функция  $u(x, t)$ , принадлежащая пространству  $C^2(Q_T) \cap C^1(Q_T \cup \Gamma_T \cup \Omega_0)$ , удовлетворяющая в  $Q_T$  уравнению (85), на  $\Omega_0$  начальным условиям

$$u|_{t=0} = \varphi, \quad (86)$$

$$u_t|_{t=0} = \psi, \quad (87)$$

а на  $\Gamma_T$  — одному из граничных условий

$$u|_{\Gamma_T} = \chi$$

или

$$\left( \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u \right) \Big|_{\Gamma_T} = \chi,$$

где  $\sigma$  — некоторая непрерывная на  $\Gamma_T$  функция, называется (классическим) решением первой или соответственно третьей смешанной задачи для уравнения (85). Если  $\sigma \equiv 0$  на  $\Gamma_T$ , то третья смешанная задача называется второй смешанной задачей.

Так как случай неоднородных граничных условий легко сводится к случаю однородных граничных условий, то ограничимся рассмотрением

случая однородных граничных условий

$$u|_{\Gamma_T} = 0 \quad (88)$$

и

$$\left( \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u \right) \Big|_{\Gamma_T} = 0. \quad (89)$$

Будем считать, что коэффициент  $a(x)$  в уравнении (85) неотрицателен в  $Q_T$ , а функция  $\sigma$  в граничном условии (89) зависит лишь от  $x$  и неотрицательна на  $\Gamma_T$ .

Пусть функция  $u(x, t)$  является решением одной из задач (85)–(88) или (85), (86), (87), (89), причем правая часть  $f(x, t)$  уравнения (85) принадлежит  $L_2(Q_T)$ . Умножая (85) на  $v(x, t) \in W_2^1(Q_T)$ , для которых выполнены условия (88) и  $v|_{Q_T} = 0$ , проинтегрируем по  $Q_T$  с применением формулы интегрирования по частям и формулы Грина. В результате получаем тождество

$$\int_{Q_T} (k \nabla u \nabla v + a u v - u_t v_t) dx dt = \int_{\Omega_0} \psi v dx + \int_{Q_T} f v dx dt \quad (90)$$

при всех  $v \in W_2^1(Q_T)$ , для которых выполнены условия (88) и условие

$$v|_{\Omega_T} = 0, \quad (91)$$

или

$$\int_{Q_T} (k \nabla u \nabla v + a u v - u_t v_t) dx dt + \int_{\Gamma_T} k \sigma u v dS dt = \int_{\Omega_0} \psi v dx + \int_{Q_T} f v dx dt \quad (92)$$

при всех  $v \in W_2^1(Q_T)$ , для которых выполнено условие (91).

С помощью полученных тождеств введем понятие обобщенных решений рассматриваемых смешанных задач. Будем предполагать, что  $f(x, t) \in L_2(Q_T)$ , а  $\psi(x) \in L_2(\Omega)$ .

Принадлежащая пространству  $W_2^1(Q_T)$  функция  $u$  называется *обобщенным решением в  $Q_T$  первой смешанной задачи* (85)–(88), если она удовлетворяет начальному условию (86), граничному условию (88) и тождеству (90).

Принадлежащая пространству  $W_2^1(Q_T)$  функция  $u$  называется *обобщенным решением в  $Q_T$  третьей (второй при  $\sigma = 0$ ) смешанной задачи* (85)–(87), (89), если она удовлетворяет условию (86) и тождеству (92).

Заметим, что, как и классические решения, обобщенные решения обладают следующими свойствами. Если  $u$  — обобщенное решение задачи (85)–(88) или задачи (85)–(87), (89) в цилиндре  $Q_T$ , то оно является обобщенным решением соответствующей задачи и в цилиндре  $Q_{T'}$  при  $T' < T$ .

**Теорема 26.** Пусть  $f \in L_2(Q_T)$ ,  $\psi \in L_2(\Omega)$ , а  $\varphi \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$  в случае первой смешанной задачи (85)–(88) и  $\varphi \in W_2^1(\Omega)$  в случае третьей (второй) смешанной задачи (85)–(87), (89). Тогда обобщенное решение

и соответствующей задачи существует и единственно. При этом имеет место неравенство

$$\|u\|_{W_2^1(Q_T)} \leq C(\|\varphi\|_{W_2^1(\Omega)} + \|\psi\|_{L_2(\Omega)} + \|f\|_{L_2(Q_T)}), \quad (93)$$

В котором положительная постоянная  $C$  не зависит от  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $f$ .

### 3.3.3. Обобщенные постановки и решения параболических задач.

Пусть  $\Omega$  — ограниченная область  $n$ -мерного пространства  $\mathbb{R}^n$ , а  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  — точка этого пространства. Подобно смешанным задачам для гиперболических уравнений, рассмотрим в  $(n+1)$ -мерном пространстве  $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \{-\infty < t < +\infty\}$  ограниченный цилиндр  $Q_T = \{x \in \Omega, 0 < t < T\}$  высоты  $T > 0$ , и пусть  $\Gamma_T$  — боковая поверхность этого цилиндра  $\Gamma_T = \{x \in \partial\Omega, 0 < t < T\}$ , а  $\Omega_\tau$ ,  $\tau \in [0, T]$ , — множество  $\{x \in \Omega, t = \tau\}$ , в частности, верхнее основание цилиндра  $Q_T$  есть  $\Omega_T = \{x \in \Omega, t = T\}$ , а нижнее его основание —  $\Omega_0 = \{x \in \Omega, t = 0\}$ . Через  $C^{2,1}(Q_T)$  обозначим совокупность непрерывных в  $Q_T$  функций, имеющих непрерывные в  $Q_T$  производные  $u_t, u_{x_i}, u_{x_i x_j}, C^{1,0}(Q_T \cup \Gamma_T)$  есть множество непрерывных в  $(Q_T \cup \Gamma_T)$  функций с непрерывными производными  $u_{x_i}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ).

Рассмотрим в цилиндре  $Q_T$  при некотором  $T > 0$  параболическое уравнение

$$Lu \equiv u_t - \operatorname{div}(k(x)\nabla u) + a(x)u = f(x, t), \quad (94)$$

где  $k(x) \in C^1(\overline{Q_T})$ ,  $a(x) \in C(\overline{Q_T})$ ,  $k(x) \geq k_0 = \operatorname{const} > 0$ .

Функция  $u(x, t)$ , принадлежащая пространству  $C^{2,1}(Q_T) \cap C(Q_T \cup \Gamma_T \cup \overline{\Omega_0})$ , удовлетворяющая в  $Q_T$  уравнению (94), на  $\overline{\Omega_0}$  — начальному условию

$$u|_{t=0} = \varphi, \quad (95)$$

а на  $\Gamma_T$  — граничному условию

$$u|_{\Gamma_T} = \chi,$$

называется *классическим решением первой смешанной задачи для уравнения* (94).

Функция  $u(x, t)$ , принадлежащая пространству  $C^{2,1}(Q_T) \cap C(Q_T \cup \Gamma_T \cup \overline{\Omega_0}) \cap C^{1,0}(Q_T \cup \Gamma_T)$ , удовлетворяющая в  $Q_T$  уравнению (94), на  $\overline{\Omega_0}$  — начальному условию (95), а на  $\Gamma_T$  — граничному условию

$$\left( \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x)u \right) \Big|_{\Gamma_T} = \chi,$$

где  $\sigma(x)$  — некоторая непрерывная на  $\Gamma_T$  функция, называется *классическим решением третьей смешанной задачи для уравнения* (94). Если  $\sigma \equiv 0$ , то третья смешанная задача называется *второй смешанной задачей*.

Так как случай неоднородных граничных условий сводится к случаю однородных граничных условий, то будем рассматривать только однородные граничные условия

$$u_t|_{\Gamma_T} = 0 \quad (96)$$

и

$$\left( \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x)u \right) \Big|_{\Gamma_T} = 0. \quad (97)$$

Будем считать, что коэффициент  $a(x)$  в уравнении (94) неотрицателен в  $Q_T$ , а функция  $\sigma(x)$  в граничном условии (97) неотрицательна на  $\Gamma_T$ .

Пусть функция  $u$  является классическим решением третьей (второй) смешанной задачи (94), (95), (97) или принадлежащим  $C^{1,0}(Q_T \cup \Gamma_T)$  классическим решением первой смешанной задачи (94)–(96), причем функция  $f(x, t) \in L_2(Q_T)$ . Умножим (95) на произвольную функцию  $v(x, t) \in C^1(\bar{Q}_T)$ , удовлетворяющую условию

$$v|_{\Omega_T} = 0, \quad (98)$$

и проинтегрируем полученное равенство по цилиндру  $Q_T$ . Применяя формулы интегрирования по частям и Грина, получаем следующие утверждения.

*Принадлежащее  $C^{1,0}(Q_T \cup \Gamma_T)$  классическое решение  $u(x, t)$  первой смешанной задачи удовлетворяет интегральному тождеству*

$$\int_{Q_T} (-uv_t + k\nabla u \nabla v + auv) dx dt = \int_{\Omega_0} \varphi v dx + \int_{Q_T} f v dx dt \quad (99)$$

при всех  $v \in C^1(\bar{Q}_T)$ , удовлетворяющих условиям (98) и  $v|_{\Gamma_T} = 0$ , а следовательно, и для всех  $v \in W_2^1(Q_T)$ , удовлетворяющих условиям (98) и  $v|_{\Gamma_T} = 0$ .

*Классическое решение  $u(x, t)$  третьей (второй при  $\sigma = 0$ ) смешанной задачи удовлетворяет интегральному тождеству*

$$\int_{Q_T} (-uv_t + k\nabla u \nabla v + auv) dx dt + \int_{\Gamma_T} k\sigma uv dS dt = \int_{\Omega_0} \varphi v dx + \int_{Q_T} f v dx dt \quad (100)$$

при всех  $v \in C^1(\bar{Q}_T)$ , удовлетворяющих условию (98), а следовательно, и для всех  $v \in W_2^1(Q_T)$ , удовлетворяющих условию (98).

С помощью полученных тождеств можно ввести понятие обобщенных решений рассматриваемых смешанных задач.

Будем предполагать, что  $f(x, t) \in L_2(Q_T)$ , а  $\varphi(x) \in L_2(\Omega)$ . Функция  $u(x, t)$ , принадлежащая пространству  $W_2^{1,0}(Q_T)$ , определяемому как

$$(u, v)_{W_2^{1,0}(Q_T)} = \int_{Q_T} (uv + \nabla u \nabla v) dx, \quad \|u\|_{W_2^{1,0}(Q_T)} = (u, u)_{W_2^{1,0}(Q_T)}^{1/2},$$

называется *обобщенным решением первой смешанной задачи* (94)–(96), если она удовлетворяет граничному условию (96) и тождеству (99) для всех  $v(x, t) \in W_2^1(Q_T)$ , удовлетворяющих условиям (96) и (98).

Принадлежащая пространству  $W_2^{1,0}(Q_T)$  функция  $u(x, t)$  называется *обобщенным решением третьей (второй при  $\sigma = 0$ ) смешанной зада-*

чи (94), (95), (97), если она удовлетворяет тождеству (100) при всех  $v(x, t) \in W_2^1(Q_T)$ , удовлетворяющих условию (98).

Отметим еще, что обобщенное решение смешанной задачи для параболического уравнения так же, как и классическое решение, обладает следующим свойством: если  $u(x, t)$  есть обобщенное решение смешанной задачи (94)–(96) или задачи (94), (95), (97) в цилиндре  $Q_T$ , то оно является обобщенным решением соответствующей задачи и в цилиндре  $Q_{T'}$  при любом  $T'$ ,  $0 < T' < T$ .

**Теорема 27.** Пусть  $f \in L_2(Q_T)$ ,  $\varphi \in L_2(\Omega)$ , то каждая из смешанных задач (94)–(96) или (94), (95), (97) имеет обобщенное решение  $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$ . При этом имеет место неравенство

$$\|u\|_{W_2^{1,0}(Q_T)} \leq C(\|\varphi\|_{L_2(\Omega)} + \|f\|_{L_2(Q_T)}), \quad (101)$$

в котором положительная постоянная  $C$  не зависит от  $\varphi, f$ .

**3.4. Вариационные постановки задач.** Многие задачи математической физики могут быть переформулированы как *вариационные задачи*, представляющие собой один из подходов к введению обобщенных постановок исходных краевых задач. Рассмотрим этот подход к исследованию обобщенных постановок задач, известный еще как *энергетический метод*.

**3.4.1. Вариационные постановки задач в случае положительно определенных операторов.** Пусть задача математической физики сведена к уравнению в вещественном гильбертовом пространстве  $H$  и записана в виде

$$Au = f, \quad (102)$$

где  $u$  — искомый элемент некоторого функционального пространства,  $A$  — оператор краевой задачи, область определения которого плотна в  $H$ ,  $f$  — заданный элемент.

Если оператор  $A$  симметричен и положителен, то решение уравнения (102) можно свести к решению некоторой вариационной задачи, как это вытекает из следующей теоремы.

**Теорема 28.** Пусть  $A$  — симметричный и положительный оператор. Если уравнение  $Au = f$  имеет решение, то это решение сообщает функционалу

$$J(u) = (Au, u) - 2(u, f) \quad (103)$$

наименьшее значение. Обратно, если существует элемент, реализующий минимум функционала (103), то этот элемент удовлетворяет уравнению  $Au = f$ .

Метод решения краевых задач, состоящий в замене уравнения (102) задачей о минимуме функционала (103), носит в литературе название *энергетического метода*. Функционал (103) будем называть *функционалом энергетического метода*.

Теорема 28 не дает указаний ни на условия существования решения вариационной задачи, ни на то, как такое решение можно строить. Такие

указания могут быть даны, если оператор краевой задачи положительно определенный. В этом случае введем в рассмотрение энергетическое пространство  $H_A$ , в котором  $(Au, u) = |u|^2$ . Далее, по неравенству Коши–Буняковского и неравенству  $\|u\| \leq (|u|/\gamma)$  имеем  $|(u, f)| \leq \|f\| \|u\| \leq \|f\|/(\gamma|u|)$ . Это означает, что линейный функционал  $(u, f)$  ограничен в  $H_A$ ; по теореме Рисса существует элемент  $u_0 \in H_A$  такой, что  $(u, f) = [u, u_0]$ , если только  $u \in H_A$ . Теперь функционал (103) приводится к виду

$$J(u) = |u|^2 - 2(u, f) = |u - u_0|^2 - |u_0|^2. \quad (104)$$

Из формулы (104) вытекают два простых и важных следствия:

1) эта формула позволяет определить функционал  $J(u)$  не только на элементах области определения оператора  $A$ , но и на всех элементах энергетического пространства  $H_A$ ;

2) в пространстве  $H_A$  функционал  $J(u)$  достигает минимума при  $u = u_0$ .

Если  $u_0 \in D(A)$ , то по теореме 28  $u_0$  есть решение уравнения  $Au = f$ ; однако энергетическое пространство  $H_A$ , вообще говоря, шире, чем  $D(A)$ , и может случиться, что элемент  $u_0$ , построенный по теореме Рисса и реализующий в энергетическом пространстве минимум функционала  $F(u)$ , не попадет в  $D(A)$ . В этом случае можно рассматривать  $u_0$  как обобщенное решение уравнения  $Au = f$ .

**3.4.2. Вариационная постановка задачи в случае положительных операторов.** Рассмотрим уравнение  $Au = f$ , предполагая, что в выбранном гильбертовом пространстве симметричный оператор  $A$  положителен, но не положительно определен. По теореме 28 наше уравнение по-прежнему равносильно задаче о минимуме функционала (103), однако в данном случае эта вариационная задача, вообще говоря, неразрешима даже в обобщенном смысле. Укажем необходимое и достаточное условие разрешимости этой задачи.

Как и в случае положительно определенного оператора, можно построить энергетическое пространство  $H_A$ ; на этот раз оно содержит не только элементы исходного пространства, но и некоторые новые элементы. Имеем  $(Au, u) = |u|^2$ , так что

$$J(u) = |u|^2 - 2(u, f).$$

Для того чтобы задача о минимуме функционала  $F(u)$  имела решение в  $H_A$ , необходимо и достаточно, чтобы в этом пространстве был ограничен линейный функционал  $(u, f)$ . В этом случае по теореме Рисса существует такой элемент  $u_0 \in H_A$ , что  $(u, f) = [u, u_0]$ , если  $u \in H_A$ ; элемент  $u_0$  реализует минимум функционала  $J(u)$  в пространстве  $H_A$ .

К положительным операторам часто приводят краевые задачи для бесконечных областей.

То обстоятельство, что  $u_0 \in H_A$ , можно интерпретировать физически так, что этот элемент имеет конечную энергию; если выполнено условие ограниченности функционала  $(u, f)$  в  $H_A$ , то соответствующий элемент  $u_0$

будем называть *решением с конечной энергией* для уравнения  $Au = f$ .

3.4.3. *Вариационные постановки основных эллиптических задач.* Рассмотрим в  $L_2(\Omega)$  самосопряженное уравнение эллиптического типа второго порядка

$$Au = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left( A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + C(x)u = f(x), \quad A_{ij} = A_{ji}. \quad (105)$$

Коэффициенты  $A_{ij}$  и  $C$  в общем случае суть функции координат  $x_1, x_2, \dots, x_n$  переменной точки  $x$ ; в частных случаях эти коэффициенты могут быть и постоянными. Будем считать, что искомая функция должна быть определена в некоторой конечной области  $\Omega$ .

Для эллиптических уравнений чаще всего ставятся следующие задачи, различающиеся по типу краевых условий, которые будем считать однородными.

*Задача Дирихле, или первая краевая задача:*

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (106)$$

*Задача Неймана, или вторая краевая задача:*

$$\left[ \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cos(n, x_i) \right] \bigg|_{\partial\Omega} = 0. \quad (107)$$

*Третья краевая задача:*

$$\left[ \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cos(n, x_i) + \sigma u \right] \bigg|_{\partial\Omega} = 0. \quad (108)$$

Здесь  $n$  — внешняя нормаль к поверхности  $\partial\Omega$ ,  $\sigma$  — неотрицательная и отличная от тождественного нуля функция, определенная на поверхности  $\partial\Omega$ .

Если коэффициент  $C(x) \geq 0$ , то при краевых условиях (106) и (108) оператор  $A$  положительно определенный. Задача Дирихле сводится к задаче о минимуме функционала

$$J(u) = \int_{\Omega} \left( \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + Cu^2 - 2fu \right) dx \quad (109)$$

( $dx$  — элемент объема) на множестве функций, удовлетворяющих условию (106); третья краевая задача сводится к задаче о минимуме несколько иного функционала

$$J(u) = \int_{\Omega} \left( \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + Cu^2 - 2fu \right) dx + \int_{\partial\Omega} \sigma u^2 dS \quad (110)$$

в классе функций, на которых этот функционал имеет конечное значение, т. е. в классе  $W_2^1(\Omega)$ . Краевому условию (108) подчинять эти функции нет необходимости, так как это условие *естественное*.

Если коэффициент  $C(x)$  не только неотрицателен, но и отличен от нуля, то оператор  $A$  положительно определенный, и на множестве функций, удовлетворяющих условию (107), задача Неймана равносильна вариационной задаче о минимуме интеграла (109) на функциях класса  $W_2^1(\Omega)$ . Краевое условие (107) естественное.

Особо остановимся на задаче Неймана в случае, когда  $C \equiv 0$ . Уравнение (105) принимает вид

$$A_0 u = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left( A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = f(x). \quad (111)$$

Задача Неймана для этого уравнения в общем случае неразрешима; необходимым и достаточным условием ее разрешимости является равенство

$$(f, 1) = \int_{\Omega} f(x) dx = 0. \quad (112)$$

С другой стороны, если задача Неймана разрешима, то она имеет бесчисленное множество решений, которые различаются на постоянное слагаемое. Можно это слагаемое подобрать так, чтобы  $(u, 1) = 0$ . Теперь можно в уравнении (111) рассматривать данную функцию  $f(x)$  и искомую  $u(x)$  как элементы подпространства, ортогонального к единице. В этом подпространстве оператор  $A_0$  положительно определен на множестве функций, удовлетворяющих условию (107). Задача Неймана равносильна задаче о минимуме интеграла

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx$$

на множестве функций из  $W_2^1(\Omega)$ , удовлетворяющих условию

$$(u, 1) = \int_{\Omega} u(x) dx = 0; \quad (113)$$

эта вариационная задача разрешима и имеет единственное решение.

Иногда рассматриваются краевые условия смешанного типа: граница  $\partial\Omega$  разбивается на две, части  $\partial\Omega'$  и  $\partial\Omega''$ , искомое решение подчиняется условиям

$$u|_{\partial\Omega'} = 0, \quad \left[ \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos(n, x_j) + \sigma u \right] \Big|_{\partial\Omega''} = 0. \quad (114)$$

Оператор  $A$  в уравнении (105) при этом положительно определенный, и «смешанная» краевая задача равносильна задаче о минимуме функционала

$$J(u) = \int_{\Omega} \left( \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + C u^2 - 2 f u \right) dx + \int_{\partial\Omega''} \sigma u^2 dS$$

на множестве функций, удовлетворяющих первому из условий (114); второе из этих условий естественное.

**Замечание.** Энергетический метод можно часто использовать и в том случае, когда краевые условия (107), (108) исходной задачи неоднородны.

В заключение отметим, что помимо рассмотренных выше вариационных постановок задач в математической физике широко используется ряд других вариационных принципов и вариационных методов исследования задач (*метод наименьших квадратов, метод Третьяка* и другие).

**3.5. Интегральные уравнения.** *Интегральными уравнениями* называются уравнения, содержащие неизвестную функцию под знаком интеграла.

3.5.1. *Интегральные уравнения Фредгольма 1-го и 2-го рода.* Многие задачи математической физики сводятся к линейным интегральным уравнениям вида

$$\int_{\Omega} K(x, y) \varphi(y) dy = f(x), \quad (115)$$

$$\varphi(x) = \lambda \int_{\Omega} K(x, y) \varphi(y) dy + f(x) \quad (116)$$

относительно неизвестной функции  $\varphi(x)$  в области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Уравнения (115) и (116) называются *интегральными уравнениями Фредгольма* 1-го и 2-го родов соответственно. Известные функции  $K(x, y)$  и  $f(x)$  называются соответственно *ядром* и *свободным членом* интегрального уравнения;  $\lambda$  — комплексный параметр.

Интегральное уравнение (116) при  $f = 0$

$$\varphi(x) = \lambda \int_{\Omega} K(x, y) \varphi(y) dy \quad (117)$$

называется *однородным* интегральным уравнением Фредгольма второго рода, соответствующим уравнению (116). Интегральные уравнения Фредгольма второго рода

$$\psi(x) = \bar{\lambda} \int_{\Omega} K^*(x, y) \psi(y) dy + g(x), \quad (118)$$

$$\psi(x) = \bar{\lambda} \int_{\Omega} K^*(x, y) \psi(y) dy, \quad (119)$$

где  $K^*(x, y) = \overline{K(y, x)}$ , называются *союзнными* к уравнениям (116) и (117) соответственно. Ядро  $K^*(x, y)$  называется *эрмитово сопряженным* (союзнным) ядром к ядру  $K(x, y)$ .

Запишем интегральные уравнения (116), (117), (118) и (119) сокращенно, в операторной форме:

$$\varphi = \lambda K \varphi + f, \quad \varphi = \lambda K \varphi, \quad \psi = \bar{\lambda} K^* \psi + g, \quad \psi = \bar{\lambda} K^* \psi,$$

где интегральные операторы  $K$  и  $K^*$  определяются ядрами  $K(x, y)$  и  $K^*(x, y)$  соответственно:

$$(Kf)(x) = \int_{\Omega} K(x, y)f(y) dy, \quad (K^*f)(x) = \int_{\Omega} K^*(x, y)f(y) dy.$$

Тогда значение  $\lambda$ , при котором однородное интегральное уравнение (117) имеет ненулевые решения из  $L_2(\Omega)$ , называется *характеристическим числом* ядра  $K(x, y)$ , а соответствующие решения — *собственными функциями* этого ядра, соответствующими этому характеристическому числу. Таким образом, характеристические числа ядра  $K(x, y)$  и собственные значения оператора  $K$  взаимно обратны, а их собственные функции совпадают.

**3.5.2. Интегральные уравнения Вольтерра.** Пусть  $n = 1$ , область  $\Omega$  есть интервал  $(0, a)$  и ядро  $K(x, y)$  обращается в нуль в треугольнике  $0 < x < y < a$ . Такое ядро называется *ядром Вольтерра*. Интегральные уравнения (115) и (116) с ядром Вольтерра принимают вид

$$\int_0^x K(x, y)\varphi(y) dy = f(x), \quad \varphi(x) = \lambda \int_0^x K(x, y)\varphi(y) dy + f(x)$$

и называются *интегральными уравнениями Вольтерра* 1-го и 2-го родов соответственно.

Интегральные уравнения Вольтерра 1-го рода дифференцированием можно свести к уравнениям 2-го рода

$$K(x, x)\varphi(x) + \int_0^x \frac{\partial K(x, y)}{\partial x} \varphi(y) dy = f'(x),$$

если  $K(x, y)$  и  $K_x(x, y)$  непрерывны при  $0 \leq y \leq x \leq a$ ,  $K(x, x) \neq 0$ ,  $x \in [0, a]$ ,  $f \in C^1([0, a])$  и  $f(0) = 0$ .

**3.5.3. Интегральные уравнения с полярным ядром.** Ядро

$$K(x, y) = \frac{H(x, y)}{|x - y|^\alpha}, \quad \alpha < n,$$

где  $H(x, y) \in C(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$ , называется *полярным ядром*; если  $\alpha < n/2$ , то  $K(x, y)$  называется *слабо полярным ядром*.

Известно, что:

1) для того чтобы ядро  $K(x, y)$  было полярным, необходимо и достаточно, чтобы оно было непрерывным при  $x \neq y$ ,  $x \in \overline{\Omega}$ ,  $y \in \overline{\Omega}$  и удовлетворяло оценке

$$|K(x, y)| \leq \frac{A}{|x - y|^\alpha}, \quad \alpha < n, \quad x \in \Omega, \quad y \in \Omega;$$

2) если  $K_i(x, y)$  — полярные ядра,

$$|K_i(x, y)| \leq \frac{A_i}{|x - y|^{\alpha_i}}, \quad \alpha_i < n, \quad i = 1, 2,$$

и область  $\Omega$  ограничена, то ядро

$$K_3(x, y) = \int_{\Omega} K_2(x, y') K_1(y', y) dy'$$

также полярно, причем

$$|K_3(x, y)| \leq \frac{A_3}{|x - y|^{\alpha_1 + \alpha_2 - n}}, \quad \text{если } \alpha_1 + \alpha_2 > n,$$

$$|K_3(x, y)| \leq A_4 |\ln |x - y|| + A_5, \quad \text{если } \alpha_1 + \alpha_2 = n;$$

$K_3(x, y)$  непрерывно на  $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$ , если  $\alpha_1 + \alpha_2 < n$ .

**3.5.4. Теоремы Фредгольма.** Основу теории интегральных уравнений Фредгольма

$$\varphi = \lambda K\varphi + f \tag{120}$$

с непрерывным ядром  $K(x, y)$  и союзных к ним уравнений

$$\psi = \lambda K^* \psi + g \tag{121}$$

составляют *теоремы Фредгольма*, совокупность которых называется *альтернативой Фредгольма*.

**Альтернатива Фредгольма.** Если интегральное уравнение (120) с непрерывным ядром разрешимо в  $C(\overline{\Omega})$  при любом свободном члене  $f \in C(\overline{\Omega})$ , то и союзное к нему уравнение (121) разрешимо в  $C(\overline{\Omega})$  при любом свободном члене  $g \in C(\overline{\Omega})$ , причем эти решения единственны (первая теорема Фредгольма).

Если интегральное уравнение (120) разрешимо в  $C(\overline{\Omega})$  не при любом свободном члене  $f$ , то:

1) однородные уравнения (120) и (121) имеют одно (конечное) число линейно независимых решений (вторая теорема Фредгольма);

2) для разрешимости уравнения (120) необходимо и достаточно, чтобы свободный член  $f$  был ортогонален ко всем решениям союзного однородного уравнения (121) (третья теорема Фредгольма);

3) в каждом круге  $|\lambda| \leq R$  может находиться лишь конечное число характеристических чисел ядра  $K(x, y)$  (четвертая теорема Фредгольма).

Переформулируем альтернативу Фредгольма в терминах характеристических чисел и собственных функций.

Если  $\lambda \neq \lambda_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , то интегральные уравнения (120) и (121) однозначно разрешимы при любых свободных членах.

Если  $\lambda = \lambda_k$ , то однородные уравнения

$$K\varphi = \lambda_k \varphi \quad \text{и} \quad K^* \psi = \bar{\lambda}_k \psi$$

имеют одно (конечное) число  $r_k \geq 1$  линейно независимых решений — собственных функций  $\varphi_k, \varphi_{k+1}, \dots, \varphi_{k+r_k-1}$  ядра  $K(x, y)$  и собственных функций  $\psi_k, \psi_{k+1}, \dots, \psi_{k+r_k-1}$  ядра  $K^*(x, y)$ , соответствующих характеристическим числам  $\lambda_k$  и  $\bar{\lambda}_k$  ( $r_k$  — кратность  $\lambda_k$  и  $\bar{\lambda}_k$ ).

Если  $\lambda = \lambda_k$ , то для разрешимости уравнения (120) необходимо и достаточно, чтобы

$$(f, \psi_{k+i}) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, r_k - 1.$$

**Замечание.** Теоремы Фредгольма переносятся и на интегральные уравнения с полярным ядром, а все собственные функции полярного ядра  $K(x, y)$ , принадлежащие  $L_2(\Omega)$ , принадлежат  $C(\overline{\Omega})$ .

**3.5.5. Интегральные уравнения с эрмитовым ядром.** Ядро  $K(x, y)$  называется эрмитовым, если оно совпадает со своим эрмитово сопряженным ядром,  $K(x, y) = K^*(x, y)$ . Соответствующее интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{\Omega} K(x, y) \varphi(y) dy + f(x) \quad (122)$$

при вещественных  $\lambda$  совпадает со своим союзным, ибо  $K = K^*$ . Это уравнение удобно рассматривать в пространстве  $L_2(\Omega)$ .

Пусть  $K$  — интегральный оператор с эрмитово непрерывным ядром  $K(x, y)$ . Этот оператор переводит  $L_2(\Omega)$  ( $\Omega$  — ограниченная область) в  $L_2(\Omega)$  и эрмитов:

$$(Kf, g) = (f, Kg), \quad f, g \in L_2(\Omega). \quad (123)$$

Обратно, если интегральный оператор  $K$  с непрерывным ядром  $K(x, y)$  эрмитов, то это ядро эрмитово.

**Теорема 29.** Всякое эрмитово непрерывное ядро  $K(x, y) \not\equiv 0$  имеет по крайней мере одно характеристическое число, и наименьшее по модулю характеристическое число  $\lambda_1$  удовлетворяет вариационному принципу

$$\frac{1}{|\lambda_1|} = \sup_{f \in L_2(\Omega)} \frac{\|Kf\|}{\|f\|}. \quad (124)$$

**Теорема 30.** Множество характеристических чисел  $\{\lambda_k\}$  не пусто, расположено на вещественной оси, не имеет конечных предельных точек; каждое характеристическое число имеет конечную кратность, система собственных функций  $\{\varphi_k\}$  может быть выбрана ортонормальной,

$$(\varphi_k, \varphi_l) = \delta_{kl}. \quad (125)$$

Если  $\lambda \neq \lambda_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , то уравнение (122) однозначно разрешимо при любом свободном члене  $f \in C(\overline{\Omega})$ . Если  $\lambda = \lambda_k$ , то для разрешимости уравнения (122) необходимо и достаточно, чтобы

$$(f, \varphi_{k+i}) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, r_k - 1, \quad (126)$$

где  $\varphi_k, \varphi_{k+1}, \dots, \varphi_{k+r_k-1}$  — собственные функции, соответствующие характеристическому числу  $\lambda_k$ , и  $r_k$  — кратность  $\lambda_k$ .

**Замечание.** Все сформулированные выше утверждения для интегральных уравнений с эрмитовым непрерывным ядром остаются справедливыми и для интегральных уравнений с эрмитовым полярным ядром.

Пусть  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  — характеристические числа эрмитова непрерывного ядра  $K(x, y) \not\equiv 0$ , расположенные в порядке возрастания их модуля,  $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots$  и  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  — соответствующие ортонормальные собственные функции,  $(\varphi_k, \varphi_l) = \delta_{kl}$ .

Говорят, что функция  $f(x)$  истокообразно представима через ядро  $K(x, y)$ , если существует функция  $h \in L_2(\Omega)$  такая, что

$$f(x) = \int_{\Omega} K(x, y)h(y) dy, \quad x \in \Omega. \quad (127)$$

**Теорема 31** (теорема Гильберта–Шмидта). *Если функция  $f(x)$  истокообразно представима через эрмитово непрерывное ядро  $K(x, y)$ ,  $f = Kh$ , то ее ряд Фурье по собственным функциям ядра  $K(x, y)$  сходится регулярно (и, значит, равномерно) на  $\bar{\Omega}$  к этой функции:*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(h, \varphi_k)}{\lambda_k} \varphi_k(x). \quad (128)$$

Рассмотрим неоднородное интегральное уравнение

$$\varphi = \lambda K\varphi + f \quad (129)$$

с эрмитовым непрерывным ядром  $K(x, y)$ .

На основе теоремы Гильберта–Шмидта устанавливается следующее утверждение: *если  $\lambda \neq \lambda_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , и  $f \in C(\bar{\Omega})$ , то (единственное) решение  $\varphi$  интегрального уравнения (129) представляется в виде равномерно сходящегося на  $\bar{\Omega}$  ряда (формулой Шмидта)*

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k - \lambda} \varphi_k(x) + f(x). \quad (130)$$

Формула (130) остается справедливой и при  $\lambda = \lambda_j$ , если в соответствии с третьей теоремой Фредгольма

$$(f, \varphi_{i+j}) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, r_j - 1.$$

В этом случае решение уравнения (129) не единственно, и его общее решение дается формулой

$$\varphi(x) = \lambda_j \sum_{\substack{k=1 \\ \lambda_k \neq \lambda_j}}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k - \lambda_j} \varphi_k(x) + f(x) + \sum_{i=0}^{r_j-1} c_i \varphi_{j+i}(x), \quad (131)$$

где  $c_i$  — произвольные постоянные.

Многие задачи математической физики сводятся к интегральным уравнениям с вещественным эрмитовым ядром. Такие ядра называются *симметричными*; они удовлетворяют соотношению  $K(x, y) = K(y, x)$ . Для этих интегральных уравнений справедливы утверждения, сформулированные ранее для уравнений с эрмитовым ядром. Однако здесь имеет место ряд специфических результатов. Так, в частности, *собственные функции*

симметричного ядра  $K(x, y)$  можно выбрать вещественными.

З а м е ч а н и е. Теорема Гильберта–Шмидта переносится и на интегральные уравнения с эрмитовым слабо полярным ядром

$$K(x, y) = \frac{H(x, y)}{|x - y|^\alpha}, \quad \alpha < \frac{n}{2}, \quad H^*(x, y) = H(x, y).$$

### Библиографический комментарий

Основные разделы современной математической физики изложены в [13], где широко используется понятие обобщенного решения. Обзор результатов классической теории линейных дифференциальных уравнений с частными производными, а также краткое описание специальных функций приведены в [25]. Сведения об основных задачах математической физики, методах их решения (в том числе метод Фурье) даны в [91]. В [110] изложены основы теории задач на собственные значения, специальные функции и метод собственных функций для задач математической физики; дано обоснование теории рядов Фурье.

Вариационным постановкам задач и энергетическому методу особое внимание уделяется в книгах [70, 71], где приведены также элементы вариационного исчисления. Обобщенные постановки задач математической физики приводятся в [69], где также приводятся сведения о функциональных пространствах, теоремах вложения Соболева, даются основы краевых задач для уравнений в частных производных и задач на собственные значения. Классическим трудом по теории пространств Соболева и их приложений к задачам математической физики является монография [84]. Основные разделы современной теории функций, функциональных пространств и теорем вложения даются в [75]. В [95] изложены теория вложений пространств дифференцируемых функций и приложения к дифференциальным уравнениям. Приводятся результаты по теории следов для неизотропных классов функций и разрешимость смешанных краевых задач для уравнений, не разрешенных относительно старшей производной.

## Глава 2

### Методы теории потенциала

*Ключевые слова:* потенциал, объемный потенциал, ньютонов потенциал, потенциал простого слоя, потенциал двойного слоя, логарифмический потенциал, уравнение Фредгольма, метод Шварца, цилиндрические координаты, сферические координаты, уравнение Пуассона, задача Дирихле, задача Неймана, функция Грина, метод выметания, уравнения Гельмгольца, запаздывающие потенциалы, уравнение теплопроводности, телеграфное уравнение.

#### Основные понятия и обозначения

*Векторное поле* — вектор-функция, заданная в каждой точке рассматриваемой области.

*Скалярное поле* — функция, заданная в каждой точке рассматриваемой области.

*Фундаментальное решение дифференциального оператора  $L$*  — обобщенная функция, удовлетворяющая уравнению  $Lu = \delta(x)$ , где  $\delta(x)$  — дельта-функция Дирака.

*Потенциал* — скалярная функция, представимая в виде интеграла от произведения некоторой функции (плотности потенциала) и фундаментального решения либо его производной.

*Уравнение Лапласа* — уравнение  $\Delta u = 0$ , где  $\Delta$  — оператор Лапласа.

*Уравнение Пуассона* — уравнение  $-\Delta u = f$ .

*Уравнение Гельмгольца* — уравнение  $\Delta u + \chi^2 u = 0$ .

*Ньютонов (объемный) потенциал* — интеграл  $u(A) = \iiint_V \frac{\rho(P)}{r} dV$ , где  $r$  — расстояние между фиксированной точкой  $A$  и переменной точкой  $P$ ,  $\rho$  — плотность потенциала,  $V \subset \mathbb{R}^3$ .

*Потенциал простого слоя* — интеграл  $u(A) = \iint_S \frac{\rho(P)}{r} dS$ ,  $S = \partial V$ ,  $V \subset \mathbb{R}^3$ .

*Потенциал двойного слоя* — интеграл  $u(A) = \iint_S \frac{\rho(P) \cos \theta_{PA}}{r^2} dS = \iint_S \rho(P) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) dS$ , где  $\theta$  — угол между нормалью  $\mathbf{n}$  к поверхности  $S = \partial V$  в точке  $P \in S$  и направлением  $PA$ .

*Логарифмический потенциал* — интеграл  $u(A) = \iint_S \rho(P) \ln\left(\frac{1}{r}\right) dS$ ,  $S \in \mathbb{R}^2$ .

*Логарифмический потенциал простого слоя* — интеграл

$$u(A) = \int_L \rho(P) \ln\left(\frac{1}{r}\right) dl, \quad L = \partial S, \quad S \in \mathbb{R}^2.$$

*Логарифмический потенциал двойного слоя* — интеграл

$$u(A) = \int_L \rho(P) \frac{\partial}{\partial n} \ln\left(\frac{1}{r}\right) dl = \int_L \frac{\rho(P) \cos \theta}{r} dl,$$

где  $\theta$  — угол между нормалью  $\mathbf{n}$  к контуру  $L = \partial S$  в точке  $P \in L$  и направлением  $PA$ .

*Основная интегральная формула Грина* — представление дважды дифференцируемой функции  $u$  в виде суммы трех потенциалов: объемного с плотностью  $\Delta u$ , потенциала простого слоя с поверхностной плотностью  $du/dn$  и потенциала двойного слоя с плотностью  $u$ .

*Гармоническая функция* — дважды дифференцируемая функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа.

## 1. Введение

Впервые понятие ньютоновского потенциала было введено в конце XVIII века П. Лапласом и Ж. Лагранжем, а затем для задач гидродинамики Л. Эйлером. Рассмотрение понятия потенциала как функции, градиент которой равен векторному полю, принадлежит Гауссу. Свойства потенциала простого слоя впервые исследовались Кулоном и С. Пуассоном, большой вклад в развитие теории потенциала был сделан Гринном. В настоящее время теория потенциала — активно развиваемый метод исследования и решения задач в разных областях математической физики.

Пусть дано векторное поле  $\mathbf{F} = \sum_{i=1}^3 F_i \mathbf{e}_i$ , где  $F_i = F_i(x, y, z)$  — координаты вектора  $\mathbf{F}$ , приложенного в точке  $(x, y, z)$ ,  $\mathbf{e}_i$  — направляющие орты ортогональной системы координат; пусть  $u(x, y, z)$  — скалярная функция (скалярное поле). *Потенциалом векторного поля  $\mathbf{F}$*  называется скалярное поле  $u(x, y, z)$ , градиент которого равен  $\mathbf{F}$ :  $\text{grad } u = \nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \mathbf{F}$ . Поэтому знание потенциальной функции (потенциала) позволяет рассчитать действующие силы. Во многих задачах электромагнетизма, гидродинамики и акустики, теплопроводности и диффузии возникают краевые задачи для эллиптических уравнений, простейшими и важными представителями которых являются уравнения Лапласа  $\Delta u = 0$  и Пуассона  $-\Delta u = f$ .

Ключевую роль в методах теории потенциала играют фундаментальные решения уравнения Лапласа, равные  $1/(4\pi r)$  в трехмерном и  $(1/(2\pi)) \ln(1/r)$  в двумерном случаях.

На основании этих решений строятся потенциалы, которые представляются в виде интеграла от произведения некоторой функции (плотности потенциала) и фундаментального решения (или его производной). В зависимости от области интегрирования и использования фундаментального решения или его нормальной производной различают объемные потенциалы, потенциалы простого и двойного слоя. Если искать потенциал (решение соответствующего эллиптического уравнения) в виде интеграла от плотности, то относительно неизвестной плотности возникает интегральное уравнение, а поскольку решение можно искать в виде разных потенциалов, то стараются подобрать такой потенциал, чтобы возникающее интегральное уравнение было наиболее простым. Так, для получения уравнения Фредгольма 2-го рода задачу Дирихле решают с помощью потенциала двойного слоя, а Неймана — потенциала простого слоя. Ниже рассмотрены потенциалы для уравнений Лапласа, Гельмгольца, волнового, теплопроводности — основных уравнений математической физики, возникающих в различных прикладных задачах [5, 13, 20, 47, 49, 83, 85–87, 91].

## 2. Основы теории потенциала

### 2.1. Вспомогательные сведения из математического анализа.

2.1.1. *Основные ортогональные координаты.* Пусть задана система трех (однозначных) функций от трех переменных каждая

$$\begin{aligned}x_1 &= \varphi_1(u_1, u_2, u_3), \\x_2 &= \varphi_2(u_1, u_2, u_3), \\x_3 &= \varphi_3(u_1, u_2, u_3).\end{aligned}\tag{1}$$

Если предположить, что каждой системе значений  $u_1, u_2, u_3$  соответствует определенная точка  $M$  в пространстве с декартовыми координатами  $x_1, x_2, x_3$ , то можно считать числа  $u_1, u_2, u_3$  криволинейными координатами точки  $M$ . Определенная ими система координат называется *криволинейной*. Система координат называется *ортогональной*, если в каждой точке координатные линии, проходящие через эту точку, попарно пересекаются под прямыми углами.

Рассмотрим два основных примера криволинейных ортогональных координат.

1°. *Цилиндрические координаты:*

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z \quad (\varphi \in [0, 2\pi], \quad r > 0)$$

(здесь вместо  $x_1, x_2, x_3$  записано  $x, y, z$ , а вместо  $u_1, u_2, u_3$  —  $r, \varphi, z$ ). В двумерном случае при независимости от  $z$  цилиндрические координаты называются полярными.

2°. *Сферические координаты:*

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta \\(\theta &\in [0, \pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad r > 0).\end{aligned}$$

2.1.2. *Основные дифференциальные операции векторного поля.* Пусть  $\varphi = \varphi(u_1, u_2, u_3)$  — скалярное,  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(u_1, u_2, u_3)$  — векторное поле,  $\mathbf{F} = \sum_{i=1}^3 F_i \mathbf{e}_i$ . В декартовых прямоугольных координатах определяются следующие операции:

*градиент*—

$$\text{grad } \varphi = \nabla \varphi = \sum_{i=1}^3 \partial_i \varphi \mathbf{e}_i;$$

*дивергенция* —

$$\text{div } \mathbf{F} = (\nabla, \mathbf{F})_3 = \sum_{i=1}^3 \partial_i F_i;$$

*ротор (вихрь)* —

$$\text{rot } \mathbf{F} = [\nabla, \mathbf{F}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix};$$

*оператор Лапласа (лапласиан)* —

$$\Delta \varphi = \text{div grad } \varphi = \sum_{i=1}^3 \partial_i^2 \varphi;$$

для удобства введено обозначение  $\partial_i = \frac{\partial}{\partial u_i}$ ,  $\partial_i^2 = \frac{\partial^2}{\partial u_i^2}$ ,  $\nabla = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$ .

Оператор Лапласа в *цилиндрических координатах* имеет вид

$$\Delta v = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}. \quad (2)$$

В *сферических координатах*

$$\Delta v = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}. \quad (3)$$

2.1.3. *Формулы из теории поля.* Пусть  $u$  и  $v$  — две произвольные функции, обладающие непрерывными частными производными до второго порядка включительно. Вместо того чтобы писать  $u = u(x, y, z)$ , будем писать  $u = u(A)$ , где точка  $A$  имеет координаты  $(x, y, z)$ . Расстояние между точкой  $A(x, y, z)$  и точкой  $P(\xi, \eta, \zeta)$  равно

$$r_{AP} = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}.$$

Символы дифференциальных операторов от функций  $A$  и  $P$  мы будем снабжать индексами  $A$  или  $P$  в зависимости от того, производится дифференцирование по  $x, y, z$  или  $\xi, \eta, \zeta$ ; так, например,

$$\Delta_A u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad \text{grad}_P u = \frac{\partial u}{\partial \xi} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \mathbf{k}.$$

Далее, символ  $\left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_P$  обозначает производную в направлении нормали к

поверхности  $\mathbf{n}$ , проходящей через  $P$ :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_P = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \cos \gamma,$$

где  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$  — направляющие косинусы нормали  $\mathbf{n}$ .

Запишем формулу *Остроградского–Гаусса*

$$\iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS,$$

где косинусы являются направляющими косинусами внешней нормали  $\mathbf{n}$ . Полагая в ней  $P = u \partial_1 v$ ,  $Q = u \partial_2 v$ ,  $R = u \partial_3 v$ , приходим к *первой формуле Грина*

$$\iiint_V (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v) dV + \iiint_V u \Delta v dV = \iint_S u \frac{\partial v}{\partial n} dS. \quad (4)$$

Поменяем в формуле (4)  $u$  и  $v$  местами и полученную формулу вычтем из (4). Тогда получим *вторую формулу Грина*

$$\iiint_V \{u \Delta v - v \Delta u\} dV = \iint_S \left\{ u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right\} dS. \quad (5)$$

Если  $A \in V$ , то непосредственно подставить в (5)  $v = 1/r_{AP}$  нельзя. Окружая точку  $A$  сферой с малым радиусом, применяя вторую формулу Грина (5) к функциям  $u$  и  $v$  вне сферы и устремляя радиус вспомогательной сферы к нулю, получаем *основную интегральную формулу Грина*

$$\Omega \cdot u(A) = \iint_S \left\{ \frac{1}{r_{AP}} \frac{\partial u}{\partial n} - u(P) \frac{\partial(1/r_{AP})}{\partial n} \right\} dS_P - \iiint_V \frac{\Delta u(P)}{r_{AP}} dV_P. \quad (6)$$

В зависимости от местоположения точки  $A$  коэффициент  $\Omega$  принимает значения  $\Omega = 4\pi$ ,  $A \in V$ ,  $\Omega = 2\pi$ ,  $A \in \partial V$ ,  $\Omega = 0$ ,  $A \notin V$ . Аналогично, обозначим в двумерном случае через  $D$  некоторую область плоскости  $(x, y)$ , ограниченную гладкой замкнутой кривой  $L$  (или несколькими такими кривыми). Тогда для произвольных функций  $u$  и  $v$ , обладающих непрерывными частными производными до второго порядка включительно, имеют место следующие выражения:

$$\iint_D \left\{ \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right\} dS + \iint_D u \Delta v dS = \oint_L u \frac{\partial v}{\partial n} dl, \quad (7)$$

$$\iint_D \{u \Delta v - v \Delta u\} dS = \oint_L \left\{ u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right\} dl, \quad (8)$$

$$u(A) = \frac{1}{2\pi} \oint_L \left\{ \ln \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u(P) \frac{\partial \left( \ln \frac{1}{r} \right)}{\partial n} \right\} dl - \frac{4}{2\pi} \iint_D \Delta u \ln \frac{1}{r} dS, \quad (9)$$

где  $\frac{\partial}{\partial n}$  — оператор дифференцирования в направлении внешней нормали к  $L$ ,  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$ ,  $r = r_{AP}$  — расстояние между точкой  $A$  и переменной точкой  $P$ .

2.1.4. *Основные свойства гармонических функций.* Функциями, гармоническими в области  $V$ , называются функции, удовлетворяющие в этой области уравнению Лапласа

$$\Delta u = 0.$$

Справедливы следующие свойства гармонической функции  $U$ .

1°.

$$\iint_S \frac{\partial U}{\partial n} dS = 0,$$

т. е. интеграл от нормальной производной гармонической функции по поверхности области равен нулю.

2°. Значение гармонической функции в любой точке внутри области выражается через значения этой функции и ее нормальной производной на поверхности области формулой

$$U(A) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial(1/r)}{\partial n} \right] dS.$$

3°. Значение гармонической функции в центре  $A$  сферы  $S_R$  радиуса  $R$  равно среднему арифметическому значению этой функции на поверхности сферы, т. е. интегралу от значений функции по поверхности сферы, деленному на площадь этой поверхности:

$$U(A) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{S_R} U dS.$$

4°. Из 3° вытекает принцип максимума: функция, гармоническая внутри области и непрерывная вплоть до ее границы, достигает своего наибольшего и наименьшего значения на границе области.

## 2.2. Потенциал объемных масс или зарядов.

2.2.1. *Ньютонов (кулонов) потенциал.* Пусть  $V$  — некоторая конечная область пространства, ограниченная кусочно гладкой замкнутой поверхностью  $S$ . Пусть в  $V$  задана функция  $\rho(P)$ , которую мы предполагаем непрерывной и ограниченной в  $V$ . Тогда

$$u(A) = \iiint_V \frac{\rho(P)}{r} dV \quad (10)$$

называется потенциалом бесконечных масс или ньютоновым потенциалом масс, распределенных по объему  $V$  с плотностью  $\rho$ . Функция  $u(A)$  может также трактоваться как кулонов потенциал объемно-распределенных зарядов.

2.2.2. *Свойства ньютонова потенциала* Во всех точках  $A$  вне  $V$  функция  $u(A)$  из (10) непрерывна и любое число раз дифференцируема по  $x, y, z$  под знаком интеграла. В частности,

$$\operatorname{grad} u(A) = \iiint_V \rho(P) \operatorname{grad} \left( \frac{1}{r} \right) dV = - \iiint_V \rho(P) \left( \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) dV, \quad (11)$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{AP} = (x - \xi)\mathbf{i} + (y - \eta)\mathbf{j} + (z - \zeta)\mathbf{k}$ ,  $A = A(x, y, z)$ ,  $P = P(\xi, \eta, \zeta)$ . Поскольку  $\Delta(1/r_{AP}) = 0$ ,  $A \notin V$ ,  $P \in V$ , то

$$\Delta u(A) = \iiint_V \rho(P) \Delta \left( \frac{1}{r_{AP}} \right) dV = 0, \quad A \notin V.$$

Таким образом, потенциал  $u(A)$  масс или зарядов, распределенных по объему  $V$ , удовлетворяет уравнению Лапласа во всех точках вне  $V$ .

На очень большом расстоянии от начала или, что то же самое, от области  $V$  имеет место приближенное равенство

$$u(A) \approx \frac{1}{r} \iiint_V \rho(P) dV = \frac{M}{r}, \quad (12)$$

где  $M = \iiint_V \rho dV$  — полная масса тела. Другими словами, на бесконечности потенциал объемно-распределенных масс (или зарядов) ведет себя как потенциал материальной точки (или точечного заряда), расположенной в начале координат, причем сосредоточенная там масса (или заряд) равна всей массе (или заряду), распределенной в объеме  $V$ . В частности,  $u(A) \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$ . Для частных производных потенциала объемно-распределенных масс имеют место оценки

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| < \frac{C}{r^2}, \quad \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| < \frac{C}{r^2}, \quad \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| < \frac{C}{r^2}, \quad (13)$$

где  $C$  — некоторая постоянная.

2.2.3. *Потенциал однородного шара.* Пусть  $V$  — шар радиуса  $R$  с центром в начале координат с постоянной плотностью  $\rho = \text{const}$ . Переходя к сферическим координатам  $r, \varphi, \theta$ , где  $\xi = r \sin \theta \cos \varphi$ ,  $\eta = r \sin \theta \sin \varphi$ ,  $\zeta = r \cos \theta$ , получаем потенциал однородного шара в точке  $r$ :

$$u(r) = \begin{cases} \frac{M}{r}, & \text{если } r > R, \\ \frac{M}{2R} \left\{ 3 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right\}, & \text{если } r < R. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что  $u(r)$  и ее первая производная  $u'(r)$  непрерывны для всех  $r \geq 0$ , однако вторая производная  $u''(r)$  претерпевает разрыв в точке  $r = R$ .

Во всех внешних точках потенциал однородного шара равен потенциалу материальной точки той же массы, помещенной в его центр, и удовлетворяет уравнению Лапласа. Во всех внутренних точках шара потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона  $\Delta u = -4\pi\rho$ .

2.2.4. *Свойства потенциала объемно-распределенных масс.* Потенциалы конечных тел произвольной формы и переменной Ограниченной плотности имеют следующие два характерных свойства.

1°.  $u$  и  $\text{grad} u$  непрерывны во всем пространстве.

2°.  $u(A) \rightarrow 0$  при  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty$  и  $r^2 |\text{grad} u| < C$ .

Обратно, если некоторая функция  $u(A)$  обладает этими двумя свойствами, то найдется такой объем  $V$ , что

$$u(A) = \iiint_V \frac{\rho(P)}{r} dV,$$

т. е. она является ньютоновым потенциалом масс. Здесь  $\rho = -(1/(4\pi))\Delta u$ .

### 2.3. Логарифмические потенциалы.

2.3.1. *Определение логарифмического потенциала.* Пусть  $D$  — некоторая конечная область плоскости  $Oxy$ , ограниченная кусочно гладкой замкнутой кривой  $L$ . Пусть в  $D$  задана непрерывная функция  $\rho(P)$  — плотность области  $D$ . Тогда

$$u(A) = \iint_D \rho(P) \ln \frac{1}{r} dS \quad (14)$$

называется логарифмическим потенциалом области с плотностью  $\rho$ . Потенциал  $u(A)$  обладает тем свойством, что его градиент приближенно равен силе ньютонова (или кулонова) притяжения в точке  $A$  со стороны цилиндра плотности  $(1/2)\rho$  (постоянной вдоль каждой прямой, параллельной оси  $z$ ). Функция  $\ln(1/r)$  является фундаментальным решением двумерного уравнения Лапласа.

2.3.2. *Свойства логарифмического потенциала.* Во всех точках  $A$  плоскости, не принадлежащих  $D$ ,  $u(A)$  является непрерывной функцией от  $A$ , любое число раз дифференцируемой по  $x$  и  $y$  под знаком интеграла. В частности,

$$\text{grad}_A u = \iint_D \rho(P) \text{grad}_A \ln \frac{1}{r_{AP}} dS = - \iint_D \rho(P) \frac{\mathbf{r}}{r^2} dS, \quad (15)$$

где  $\mathbf{r} = (x - \xi)\mathbf{i} + (y - \eta)\mathbf{j}$ . Далее, поскольку

$$\Delta_A u = \iint_D \rho(P) \Delta_A \left( \ln \frac{1}{r_{AP}} \right) dS,$$

то логарифмический потенциал области удовлетворяет уравнению Лапласа во всех точках, не принадлежащих этой области. Напомним, что аналогичным свойством обладает ньютонов потенциал (п. 2.2.2).

Логарифмический потенциал области представим в виде суммы логарифмического потенциала точки, помещенной в начале координат с массой, равной массе всей области, и некоторой функции, которая ведет себя на бесконечности как потенциал объемно-распределенных масс, т. е.

$$u(A) = M \ln(1/r) + u^*(A), \quad \text{где} \quad u^*(N) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty,$$

и имеет место неравенство  $r^2 |\operatorname{grad}_A u^*| < C$ , где  $C$  — некоторая постоянная. В частности, при удалении точки  $A$  в бесконечность абсолютная величина логарифмического потенциала области растет как  $\ln r$ .

Логарифмический потенциал области и его частные производные первого порядка непрерывны на всей плоскости, причем формула (15) остается в силе и для точек  $A$ , принадлежащих  $D$ .

Если первые производные функции  $\rho$  непрерывны, то внутри области  $D$  логарифмический потенциал удовлетворяет двумерному уравнению Пуассона

$$\Delta u = -2\pi\rho,$$

а снаружи — уравнению Лапласа.

Логарифмические потенциалы области удовлетворяют следующим трем свойствам.

1°.  $u(A)$  и  $\operatorname{grad} u$  непрерывны на всей плоскости.

2°.  $\Delta u$  существует и равен нулю вне некоторой конечной области  $D$ , ограниченной кусочно гладкой кривой  $L$ , а внутри  $D$  лапласиан  $\Delta u$  непрерывен и имеет непрерывные производные первого порядка.

Обозначим  $\rho(A) = -\Delta u/(4\pi)$ .

3°. Если

$$M = \iint_D \rho(P) dS$$

и  $u^*(A) = u(A) - M \ln(1/r)$ , где  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , то  $u^*(A) \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$ , и  $r^2 |\operatorname{grad}_A u^*| < C$ , где  $C$  — некоторая постоянная.

Обратно, если некоторая функция  $u(A)$  обладает свойствами 1°–3°, то она является логарифмическим потенциалом некоторой области  $D$  с плотностью  $\rho(P)$ , т. е.

$$u(A) = \iint_D \rho(P) \ln \frac{1}{r} dS.$$

**2.3.3. Логарифмический потенциал круга с постоянной плотностью.** Рассмотрим круг  $K_R$  радиуса  $R$ :  $\xi^2 + \eta^2 \leq R^2$  и положим  $\rho = \text{const}$ . Тогда вне  $K_R$

$$u(A) = \pi R^2 \rho \ln \frac{1}{r} = M \ln \frac{1}{r},$$

где  $M = \pi R^2 \rho$  — полная масса круга  $K_R$ .

Внутри  $K_R$

$$u(A) = M \left\{ \frac{1}{2} - \ln R - \frac{1}{2} \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right\}.$$

Таким образом, логарифмический потенциал вне круга равен логарифмическому потенциалу точки, помещенной в центр круга с массой, равной массе всего круга. Это свойство совпадает с соответствующим результатом для объемного потенциала вне шара (п. 2.2.3).

## 2.4. Потенциал простого слоя.

2.4.1. *Определение потенциала простого слоя в пространстве.* Пусть  $V$  — ограниченная область трехмерного пространства,  $\rho(P)$  — непрерывная функция точки в этой области и  $r$  — расстояние от точки  $A$  до переменной точки  $P \in V$ . Потенциал объемных масс определяется, как известно (п. 2.9.1), формулой

$$u(A) = \iiint_V \frac{\rho(P)}{r} dV.$$

Точно так же потенциал простого слоя, распределенного по поверхности  $S$  с плотностью  $\rho(P)$ , определяется формулой

$$u(A) = \iint_S \frac{\rho(P)}{r} dS, \quad (16)$$

где  $S$  — конечная гладкая поверхность, на которой задана непрерывная ограниченная функция  $\rho(P)$ . Обычно на «извилистость» (фрактальность) поверхности  $S$  налагаются дополнительные ограничения; такие поверхности называются *поверхностями Ляпунова*.

Потенциал (14) называется *ньютоновым потенциалом масс* (или *кулоновым потенциалом зарядов*), распределенных на  $S$  с поверхностной плотностью  $\rho$ . Потенциал  $u(A)$  принято называть *потенциалом простого слоя*, а поверхность  $S$  — *несущей поверхностью слоя*. Если несущая поверхность не замкнута, то мы будем предполагать, что она ограничена кусочно гладкой кривой.

2.4.2. *Свойства потенциала простого слоя.* Потенциал простого слоя удовлетворяет уравнению Лапласа во всех точках пространства, не лежащих на несущей поверхности слоя.

На бесконечности потенциал простого слоя ведет себя как потенциал материальной точки, расположенной в начале координат, причем сосредоточенная там масса равна всей массе, распределенной по  $S$ . Для частных производных первого порядка потенциала простого слоя имеют место, как и для потенциала объемно-распределенных масс, неравенства

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| < \frac{C}{r^2}, \quad \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| < \frac{C}{r^2}, \quad \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| < \frac{C}{r^2}.$$

Потенциал простого слоя непрерывен во всем пространстве. Нормальная производная потенциала простого слоя претерпевает разрыв при пересечении слоя, причем величина скачка при пересечении слоя в точке  $A$  в направлении дифференцирования равна

$$\left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_{A+} - \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_{A-} = -4\pi\rho(A). \quad (17)$$

Значение нормальной производной в точке  $A$  равно

$$\left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_A = \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_{A+} + \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_{A-} \right\}.$$

Заметим, что в точках слоя, в которых плотность равна нулю, нормальная производная потенциала простого слоя непрерывна. Равенство (17) можно уточнить следующим образом:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_{A+} = \iint_S \rho(P) \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} dS + 2\pi\rho(A), \quad (18)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_{A-} = \iint_S \rho(P) \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} dS - 2\pi\rho(A), \quad (19)$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней нормали к поверхности  $S$  в точке  $A$ ,  $\mathbf{r} = \overrightarrow{AP}$ . Отметим, что в данном случае нормаль  $\mathbf{n}$  фиксирована.

**2.4.3. Потенциал однородной сферы.** Потенциал однородной сферы (простого слоя) постоянной плотности  $\rho$  непрерывен и равен

$$u(r) = \begin{cases} 4\pi R^2 \rho \frac{1}{r} = \frac{M}{r}, & \text{если } r > R, \\ 4\pi R \rho = \frac{M}{R}, & \text{если } r < R, \end{cases}$$

где  $M = 4\pi R^2 \rho$  — масса, распределенная по сфере.

Этот результат непосредственно показывает, что при пересечении простого слоя нормальная производная потенциала терпит разрыв. Если при этом слой пересекается в направлении дифференцирования, т. е. в направлении возрастания  $r$ , то скачок нормальной производной равен

$$\lim_{r \rightarrow R+0} u'(r) - \lim_{r \rightarrow R-0} u'(r) = -4\pi\rho.$$

**2.4.4. Потенциал простого слоя на плоскости.** Пусть в плоскости  $x, y$  дана гладкая кривая  $L$  (замкнутая или не замкнутая) и на ней непрерывная функция  $\rho(P)$ . Поскольку логарифмический потенциал области записывается в виде (14), то выражение

$$u(A) = \int_L \rho(P) \ln \frac{1}{r_{AP}} dl \quad (20)$$

называется *логарифмическим потенциалом простого слоя*. Кривая  $L$  называется *несущей линией слоя*, а  $\rho(P)$  — его *плотностью*. Подобно логарифмическому потенциалу области в данном случае можно рассматривать  $\text{grad} u$  как предел силы притяжения в точке  $A$ , лежащей в плоскости  $z = 0$ , от простого слоя, распределенного с плотностью  $(1/2)\rho$ , не зависящей от  $z$ , по боковой поверхности цилиндра высоты  $2h$ , восстановленного на  $L$  перпендикулярно к плоскости  $Oxy$  и симметричного относительно нее. Предел рассматривается при  $h \rightarrow \infty$ . Сам потенциал простого слоя этого цилиндра стремится при этом к бесконечности, но его градиент стремится к конечному пределу.

В точках  $A$ , не лежащих на  $L$ , потенциал (20) является непрерывной функцией от  $A$ , любое число раз дифференцируемой по  $x$  и  $y$  под знаком

интеграла. В частности,

$$\operatorname{grad} u = - \int_L \rho(P) \frac{\mathbf{r}}{r^2} dl, \quad \Delta u = \int_L \rho(P) \Delta \left( \ln \frac{1}{r} \right) dl = 0.$$

Если на несущую линию слоя  $L$  наложить условия непрерывности кривизны, то логарифмический потенциал непрерывен при пересечении слоя, т. е. непрерывен во всей плоскости.

На бесконечности логарифмический потенциал простого слоя ведет себя так же, как и логарифмический потенциал области, т. е. удовлетворяет условию

$$u(A) = M \ln \frac{1}{r} + u^*(A),$$

где  $M = \int_L \rho(P) dl$  и  $u^*(A) \rightarrow 0$  при  $r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$ , а также  $|\operatorname{grad}_A u^*| < C/r^2$ . В качестве примера рассмотрим логарифмический потенциал простого слоя отрезка  $[-a, a]$  оси абсцисс с постоянной плотностью  $\rho = \text{const}$ . Из (20) получаем

$$u(x, y) = \rho \int_{\xi=-a}^a \ln \frac{1}{\sqrt{(\xi-x)^2 + y^2}} d\xi = -\frac{1}{2} \rho \int_{\xi=-a}^a \ln \{(\xi-x)^2 + y^2\} d\xi.$$

## 2.5. Потенциал двойного слоя.

2.5.1. *Потенциал диполя.* Пусть даны два равных по величине, но противоположных по знаку электрических заряда  $+e$  и  $-e$ , находящихся на расстоянии  $h$  друг от друга (диполь). Прямую, проходящую через них, снабдим направлением от отрицательного заряда к положительному. Это будет *ось диполя*  $\mathbf{n}$ .

Пусть  $P$  — точка, лежащая посередине между зарядами,  $A$  — произвольная точка, а  $\theta$  — угол между осью  $\mathbf{n}$  и направлением  $PA$ . Записывая потенциал в точке  $A$  и переходя к пределу при  $h \rightarrow 0$  так, чтобы заряды устремлялись в точку  $P$  вдоль соединяющей их прямой, причем произведение  $eh$  стремилось к некоторому конечному пределу  $v$ , называемому *коэффициентом диполя*, получаем выражение

$$u(A) = v \frac{\cos \theta}{r^2} = v \frac{\partial(1/r)}{\partial n}, \quad (21)$$

которое называется *потенциалом диполя момента*  $v$ , расположенного в точке  $P$  и имеющего своей осью ориентированную прямую  $\mathbf{n}$ .

2.5.2. *Потенциал двойного слоя в пространстве и его свойства.* Обобщим метод нахождения потенциала диполя для определения *потенциала двойного слоя*. Возьмем некоторую гладкую поверхность Ляпунова  $S$ , которая будет несущей поверхностью потенциала, и на ней зададим непрерывную функцию  $v(P)$  — плотность моментов двойного слоя. Относительно  $S$  предположим еще, что она является *ориентируемой поверхностью*, т. е. на ней указаны внешняя и внутренняя стороны. Это означает, что если

в некоторой точке  $P$  на  $S$  выбрано положительное направление нормали  $\mathbf{n}$  и точка  $P$  переносится по  $S$  вдоль произвольной замкнутой кривой, причем направление  $n$  при этом изменяется непрерывно, то при возвращении в исходную точку направление нормали совпадает с исходным. На ориентируемой поверхности нужно в каждой точке определить положительное направление нормали так, что единичный вектор  $\mathbf{n}$  этого направления будет непрерывным на ней.

Из выражения (21) заключаем, что пространственный потенциал диполя удовлетворяет уравнению Лапласа во всех точках  $A \neq P$ .

Проведем следующее построение. На нормали в каждой точке  $P$  поверхности  $S$  отложим в обе стороны от  $P$  отрезки длины  $(1/2)h$ , где  $h$  — достаточно малая величина. В конце этих отрезков поместим заряды  $\pm(1/h)v(P)$  так, что направление от отрицательного заряда к положительному совпадает с направлением положительной нормали. Таким образом, получаем два простых слоя с поверхностными плотностями  $\pm(1/h)v(P)$ , лежащих на близком расстоянии по обе стороны от  $S$ . В пределе при  $h \rightarrow 0$  получаем двойной слой на несущей поверхности  $S$  с плотностью моментов  $v$  с потенциалом

$$u(A) = \iint_S v(P) \frac{\cos \theta}{r^2} dS = \iint_S v(P) \frac{\partial(1/r)}{\partial n} dS. \quad (22)$$

Здесь  $\theta$  обозначает угол между единичным вектором нормали  $\mathbf{n}$  в точке  $P$  и направлением  $PA$  ( $A$  — произвольная точка).

Этот потенциал является непрерывной функцией от  $A$  во всех точках, не лежащих на несущей поверхности  $S$ , и в таких точках  $u(A)$  можно любое число раз дифференцировать по  $x, y, z$  под знаком интеграла. В частности,

$$\begin{aligned} \text{grad}_A u &= \iint_S v(P) \text{grad}_A \left( \frac{\cos \theta_{PA}}{r_{AP}^2} \right) dS_P, \\ \Delta_A u &= \iint_S v(P) \Delta_A \left( \frac{\partial(1/r_{AP})}{\partial n} \right)_P dS_P = 0, \end{aligned}$$

так что потенциал двойного слоя удовлетворяет уравнению Лапласа во всех точках, не лежащих на несущей поверхности.

Из (22) нетрудно установить поведение потенциала двойного слоя на бесконечности:  $r^2|u(A)| < C$ ,  $r^3|\text{grad}_A u| < C$ , где  $C$  — некоторая постоянная. Таким образом, потенциал двойного слоя убывает на бесконечности не медленнее, чем  $C/r^2$ , а его первые частные производные не медленнее, чем  $C/r^3$ . В частности, для потенциала двойного слоя  $\lim_{r \rightarrow \infty} ru(A) = 0$ .

Рассмотрим важный частный случай, когда плотность моментов слоя постоянна. Пусть  $v = \text{const}$ . Тогда

$$u(A) = v \iint_S \frac{\cos \theta}{r^2} dS = \pm v \sigma,$$

где  $\sigma$  — телесный угол, под которым поверхность  $S$  видна из точки  $A$ . Знак правой части совпадает со знаком  $\cos \theta$ , т.е. зависит от выбора положительного направления нормали. Если точка  $A$  оказывается внутри замкнутой поверхности, то потенциал двойного слоя постоянной плотности моментов  $v$  имеет внутри этой поверхности постоянное значение  $4\pi v$  (если положительной считать внутреннюю нормаль). Во всех точках, лежащих вне этой поверхности, потенциал равен нулю и равен  $2\pi v$  во всех точках слоя (т.е. когда точка  $A$  лежит на поверхности).

В общем случае оказывается, что потенциал двойного слоя при пересечении слоя претерпевает разрыв, причем величина скачка при пересечении в направлении положительной нормали через точку  $A$  слоя равна

$$u_+(A) - u_-(A) = 4\pi v(A),$$

прямое значение потенциала в точке  $A$  равно

$$u_0(A) = \frac{1}{2} \{u_+(A) + u_-(A)\},$$

а нормальная производная потенциала двойного слоя остается непрерывной при пересечении слоя. Точнее,

$$u_+(A) = \iint_S \rho(P) \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} dS + 2\pi\rho(A), \quad (23)$$

$$u_-(A) = \iint_S \rho(P) \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} dS - 2\pi\rho(A). \quad (24)$$

Здесь  $\mathbf{r} = \overrightarrow{AP}$ ,  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль в переменной точке  $P$ ,  $u_+(A)$  — внутренний предел значений потенциала в точке  $A$ ,  $u_-(A)$  — внешний предел.

**2.5.3. Логарифмический потенциал двойного слоя и его свойства.** Рассматривая логарифмический потенциал двух точек,  $P_1$  и  $P_2$ , с равными по величине, но противоположными по знаку зарядами  $\pm\rho$ , расположенными друг от друга на расстоянии  $h$ , записывая потенциал в точке  $A$  и переходя к пределу  $h \rightarrow \infty$  при условии  $h\rho = v$ , получаем

$$u(A) = v \frac{\cos \theta}{r} = v \frac{\partial \ln(1/r)}{\partial n}. \quad (25)$$

Это выражение является логарифмическим потенциалом диполя с моментом  $v$ . Из выражения (25) заключаем, что логарифмический потенциал диполя удовлетворяет уравнению Лапласа во всех точках  $A \neq P$ .

На основании логарифмического потенциала диполя (25) вводится выражение

$$u(A) = \int_L v(P) \frac{\cos \theta}{r} dl = \int_L v(P) \frac{\partial}{\partial n} \left( \ln \frac{1}{r} \right) dl, \quad (26)$$

где  $L$  — гладкая кривая с непрерывной кривизной, а  $v(P)$  — функция, непрерывная на  $L$ . Выражение (26) называется логарифмическим потен-

циалом двойного слоя, распределенного по несущей линии  $L$  с плотностью моментов  $v(P)$ . Его физическое толкование, аналогичное толкованиям рассмотренных выше логарифмических потенциалов, может быть легко дано.

В случае  $v = \text{const}$  интеграл (26) имеет простой геометрический смысл, а именно

$$v \int_L \frac{\cos \theta}{r} dL_P = \pm v \varphi,$$

где  $\varphi$  — угол, под которым хорда кривой  $L$  видна из точки  $A$ . Знак зависит от выбора направления нормали к  $L$ . В частности, если  $L$  — замкнутая кривая, то для точек  $A$ , лежащих вне  $L$ ,

$$v \oint_L \frac{\cos \theta}{r} dl = 0,$$

а для точек  $A$ , лежащих внутри  $L$ ,

$$v \oint_L \frac{\cos \theta}{r} dl = \pm 2\pi v,$$

причем положительный знак имеет место, если нормаль направлена внутрь  $L$ , а отрицательный — при противоположном направлении нормали, так как в первом случае  $\theta$  — острый угол, а во втором — тупой. При достаточно больших  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$|u(A)| \leq v_m \int_L \frac{dl}{r} < \frac{C}{r},$$

где  $v_m$  — наибольшее значение  $|v(P)|$  на  $L$  и  $C > 0$  — некоторая постоянная. Для градиента логарифмического потенциала двойного слоя (26) справедливо неравенство

$$|\text{grad}_A u| < 2v_m \int_L \frac{dl}{r^2} < \frac{C}{r^2}.$$

Логарифмический потенциал двойного слоя (26) непрерывен во всех точках  $A$ , не лежащих на  $L$ , и в этих точках неограниченное число раз дифференцируем по  $x$  и  $y$  под знаком интеграла, а при пересечении слоя в направлении положительной нормали он претерпевает разрыв со скачком  $2\pi v(A)$ , где  $v(A)$  — плотность в точке пересечения слоя. Если обозначить через  $u_0(A)$  значение логарифмического потенциала двойного слоя в точке слоя  $A$ , а через  $u_+(A)$  и  $u_-(A)$  — пределы  $u(B)$  при стремлении точки  $B$  к  $A$  со стороны положительной и соответственно отрицательной нормали, то

$$u_+(A) = u_0(A) + \pi v(A), \quad u_-(A) = u_0(A) - \pi v(A).$$

Поведение нормальных производных логарифмических потенциалов простого и двойного слоя также аналогично поведению соответствующих

производных ньютоновых потенциалов. Именно, нормальная производная *логарифмического потенциала простого слоя* претерпевает при пересечении слоя в точке  $A$  в направлении положительной нормали разрыв со скачком  $-2\pi\rho(A)$ :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_{A+} - \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_{A-} = -2\pi\rho(A)$$

(ср. (17)), а нормальная производная *логарифмического потенциала двойного слоя* остается при пересечении слоя непрерывной.

### 3. Применение теории потенциала в классических задачах математической физики

#### 3.1. Решение уравнений Лапласа и Пуассона.

3.1.1. *Постановка краевых задач для уравнения Лапласа.* Уравнение Лапласа

$$\Delta u = 0 \tag{27}$$

возникает во многих разделах теории электричества, теплопроводности, диффузии, астрофизики, океанологии и физики атмосферы, при анализе других глобальных процессов.

Математически уравнение Лапласа имеет бесконечно много решений, так что для того, чтобы выделить из них одно физически осмысленное решение, необходимо на границе  $S$  рассматриваемой области  $V$  наложить дополнительные краевые условия. Обычно краевые условия на  $S$  получаются исходя из физической постановки задачи. Если заданы краевые условия первого рода, т. е. известны значения неизвестной функции  $u$  на границе

$$u|_S = g, \tag{28}$$

то говорят, что для функции  $u$  поставлена задача Дирихле. Если решение ищется внутри ограниченной области  $V$ , то говорят о внутренней краевой задаче, если же снаружи, то речь идет о внешней краевой задаче. Имеет место единственность решения внутренней задачи Дирихле (27), (28). Единственность решения внешней задачи Дирихле имеется лишь при дополнительном условии на решение: в трехмерном случае это — условие стремления к нулю на бесконечности, а в двумерном случае это более слабое условие стремления функции к конечному пределу на бесконечности.

Нетрудно видеть, что в случае трехмерного пространства для определенности внешней задачи Дирихле недостаточно требовать, чтобы  $u$  имела конечный предел на бесконечности. Действительно, положим, что некоторое количество электричества находится в равновесии на проводящей поверхности  $S$ . Такой электростатический потенциал простого слоя будет иметь некоторое постоянное значение  $C$  на поверхности  $S$ , причем нетрудно показать, что  $u(A)$  будет давать гармоническую функцию вне  $S$  и будет стремиться к нулю на бесконечности. Сама постоянная  $C$  будет также гармонической функцией вне  $S$  и будет иметь на  $S$  те же краевые значения, но она уже не стремится к нулю на бесконечности и,

следовательно, возникает неединственность решения. Для случая плоскости это рассуждение уже неприменимо, ибо электростатический потенциал простого слоя на линии  $L$  обращается в бесконечность в бесконечно удаленной точке.

3.1.2. *Решение задачи Дирихле в пространстве.* Рассмотрим внутреннюю задачу Дирихле для области  $V$ , ограниченной поверхностью  $S$ . Будем искать ее решение в виде потенциала двойного слоя:

$$u(A) = \iint_S \rho(P) \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} dS, \quad r = |AP|, \quad (29)$$

где  $\mathbf{r} = \vec{AP}$ ,  $\mathbf{n}$  — направление внешней нормали в точке  $P$  поверхности. Искомой является плотность  $\rho(P)$ . Согласно (23) внутренняя задача Дирихле с краевым значением  $u|_S = f(P)$  равносильна следующему интегральному уравнению для плотности  $\rho(P)$ :

$$f(A) = \iint_S \rho(P) \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} dS + 2\pi\rho(A), \quad \mathbf{r} = \vec{AP}.$$

Вводя ядро

$$K(A; P) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2},$$

можно переписать последнее уравнение в виде

$$\rho(A) = \frac{1}{2\pi} f(A) + \iint_S \rho(P) K(A; P) dS. \quad (30)$$

Отметим, что ядро  $K(A; P)$  несимметрично, поскольку нормаль берется в точке  $P$  и  $\mathbf{r}$  обозначает направление  $\vec{AP}$ . Интегральное ядро сопряженного уравнения определится, таким образом, формулой

$$K^*(A; P) = K(P; A) = \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{2\pi r^2}.$$

Нахождение  $\rho(A)$  сводится, следовательно, к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода (30).

Аналогично, решение внешней задачи Дирихле сводится к решению интегрального уравнения

$$\rho(A) = -\frac{1}{2\pi} f(A) - \iint_S \rho(P) K(A; P) dS. \quad (31)$$

В качестве примера рассмотрим первую краевую задачу для уравнения Лапласа в полупространстве  $z \geq 0$  с краевым условием  $u|_S = f(P)$ , где  $S = \{(x, y, 0)\}$ . Будем искать ее решение в виде потенциала двойного слоя

$$u(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\xi, \eta) \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} d\xi d\eta, \quad r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2.$$

В данном случае  $\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})/r^2 = z/r^2$ , так что ядро интегрального уравнения (30) равно нулю, поскольку значения берутся на границе  $z = 0$ . Значит, плотность потенциала двойного слоя  $\rho(P) = f(P)/(2\pi)$  и искомое решение равно (ср. с (50))

$$u(x, y, z) = \frac{z}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi, \eta)}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2]^{3/2}} d\xi d\eta. \quad (32)$$

Отметим, что если искать решение задачи Дирихле в виде потенциала простого слоя, то для определения его плотности придем к интегральному уравнению Фредгольма 1-го рода, которое является некорректно поставленной задачей и гораздо сложнее, чем (30), (31). В случае простых областей  $V$  более удобным методом решения краевых задач является метод функции Грина (п. 3.2.3.).

3.1.3. *Решение задачи Дирихле на плоскости.* Рассматривается задача Дирихле  $\Delta u = 0$ ,  $u|_L = f$ . Подобно рассуждениям предыдущего пункта, ее решение ищется в виде потенциала двойного слоя

$$u(A) = \int_L \rho(P) \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r} dl.$$

Для плотности потенциала  $\rho$  получается интегральное уравнение

$$\pi \rho(A) = f(A) + \int_L \rho(P) K(A; P) dl. \quad (33)$$

Уравнение Фредгольма (33) соответствует внутренней задаче Дирихле, а при смене знака правой части — внешней задаче Дирихле. Здесь  $\mathbf{n}$  — переменная нормаль, восставленная в точке  $P$ ,  $\mathbf{r} = \vec{AP}$ ,  $K(A; P) = -(\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}))/r$ . Уравнение (33) может быть записано в виде

$$\pi \rho(l_0) = f(l_0) + \int_0^{|L|} \rho(l) K(l_0; l) dl, \quad (34)$$

где  $l$  и  $l_0$  — длины дуг  $LP$  и  $LA$  контура  $L$ , отсчитываемые от какой-либо фиксированной точки  $L$  в определенном направлении, а  $|L|$  — длина контура  $L$ .

В качестве примера решим задачу Дирихле для круга  $K_R$  радиуса  $R$  с центром в нуле. Если точки  $A$  и  $P$  находятся на окружности, то  $(\cos(\mathbf{r}_{AP}, \mathbf{n}))/r_{AP} = 1/(2R)$ . Интегральное уравнение (34) принимает вид

$$\rho(l_0) + \frac{1}{\pi} \int_{K_R} \frac{1}{2R} \rho(l) dl = \frac{1}{\pi} f(l_0),$$

а его решением является функция

$$\rho(l) = \frac{1}{\pi} f(l) - \frac{1}{4\pi^2 R} \int_{K_R} f(l) dl.$$

Соответствующее решение — потенциал двойного слоя — равно

$$u(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - 2\rho R \cos(t - \theta) + \rho^2} dt. \quad (35)$$

Это решение, называемое *интегралом Пуассона*, найдено также в п. 3.2.3 с помощью метода функции Грина.

3.1.4. *Решение задачи Неймана*. Краевая задача Неймана задается уравнением

$$\Delta u(A) = 0, \quad A \in V, \quad (36)$$

и краевым условием

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_S = f, \quad (37)$$

где  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к  $S$ .

Необходимым условием разрешимости внутренней задачи Неймана является равенство

$$\iint_S f(P) dS = 0. \quad (38)$$

Заметим, что если некоторая функция  $u(A)$  дает решение внутри задачи Неймана, то функция  $u(A) + C$ , где  $C$  — произвольная постоянная, также дает решение задачи при том же краевом условии  $f(P)$ . Теорема единственности решения внутренней задачи Неймана состоит в утверждении, что этим и исчерпывается все решение задачи, т. е. если  $u_1(A)$  и  $u_2(A)$  — два решения задачи Неймана при одном и том же краевом условии  $f(P)$ , то разность  $u_2(A) - u_1(A)$  должна быть постоянной в области  $V$ .

Для внешней трехмерной задачи Неймана условие (38) опущено, но, как и для внешней задачи Дирихле, на решение налагается условие стремления к нулю на бесконечности. Однако для двумерной внешней задачи Неймана необходимое условие (38) также должно быть выполнено наряду с условием существования конечного предела на бесконечности.

В отличие от задачи Дирихле решение задачи Неймана (36), (37) ищется в виде потенциала простого слоя

$$u(A) = \iint_S \frac{\rho(P)}{r} dS.$$

Пользуясь формулами (18), (19), приходим к интегральному уравнению, равносильному поставленной внутренней задаче:

$$2\pi\rho(A) = f(A) - \iint_S \rho(P) K^*(A; P) dS,$$

где

$$K^*(A; P) = \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2},$$

$\mathbf{n}$  — фиксированная внешняя нормаль в точке  $A$ ,  $\mathbf{r} = \vec{AP}$ . Правая часть интегрального уравнения для внешней задачи Неймана имеет обратный знак.

Если  $S$  есть *поверхность Ляпунова*, причем угол  $\Theta$  между нормальными в любых двух точках поверхности, расстояние между которыми  $r$ , не превышает величины  $\Theta \leq Cr$ , то ядра интегральных уравнений удовлетворяют оценке  $|K(A; P)| \leq C/r$  и для этих интегральных уравнений справедливы теоремы Фредгольма.

Что касается решения задачи Неймана на плоскости, то оно ищется в виде потенциала простого слоя

$$u(A) = \int_L \rho(P) \ln \frac{1}{r} dl,$$

и для искомой плотности  $\rho$  для внутренней задачи получается интегральное уравнение

$$\pi \rho(A) = f(A) - \int_L \rho(P) K^*(A; P) dl,$$

а для внешней его правая часть меняет знак. Здесь

$$K^*(A; P) = \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r},$$

где  $\mathbf{r} = \vec{AP}$ ,  $\mathbf{n}$  — фиксированная внешняя нормаль к  $L$ , восстановленная в точке  $A$ .

Аналогично уравнению (34) может быть записано соответствующее уравнение Фредгольма второго рода для нахождения плотности потенциала простого слоя.

Отметим, что возникающие интегральные уравнения однозначно разрешимы, если выполнены соответствующие условия существования и единственности решения исходной краевой задачи.

**3.1.5. Решение третьей краевой задачи для уравнения Лапласа.** Эта задача возникает, например, при исследовании теплового равновесия излучающего тела. В случае установившегося потока тепла температура  $u(A)$  внутри тела должна удовлетворять уравнению Лапласа, а на границе  $S$  должно быть выполнено условие

$$\frac{\partial u}{\partial n} + h(u - u_0) = 0,$$

где  $h$  — коэффициент внешней теплопроводности и  $u_0$  — температура внешней среды. В более общих случаях возникает краевое условие

$$\frac{\partial u(P)}{\partial n} + q(P)u(P) = f(P), \quad (39)$$

где  $q(P)$  и  $f(P)$  — заданные на  $S$  функции и  $q(P) > 0$ . Будем искать решение этой краевой задачи в виде потенциала простого слоя. Краевое условие (39) приводит к следующему интегральному уравнению для

плотности:

$$\rho(A) = \frac{1}{2\pi} f(A) - \iint_S \rho(P) \left( \frac{q(A)}{2\pi r} + \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{2\pi r^2} \right) dS. \quad (40)$$

В частности, если  $q(P)$  есть положительная постоянная  $h$ , а поверхность  $S$  — сфера единичного радиуса, то получаем из (40)

$$\rho(A) = \frac{1-2h}{4\pi} \iint_S \frac{\rho(P)}{r} dS + \frac{1}{2\pi} f(A).$$

Собственными значениями для этого уравнения будут  $h = 0, -1, -2, \dots$ , а соответствующими им собственными функциями будут сферические функции.

**3.1.6. Решение краевой задачи для уравнения Пуассона.** Рассмотрим уравнение Пуассона

$$-\Delta u = f. \quad (41)$$

Для того чтобы свести решение краевой задачи для уравнения Пуассона к задаче для уравнения Лапласа, достаточно найти его какое-нибудь непрерывное частное решение  $v$ . Положим  $u = v + w$  и получим краевую задачу для гармонической функции  $w$ , которую решаем одним из вышеописанных способов в зависимости от типа краевых условий. Отметим, что краевые условия для функции  $w$  зависят от значений (и/или их производных), которые принимает вспомогательная функция  $v$ . Искомым частным вспомогательным решением уравнения (41) является объемный потенциал

$$v(A) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_V f(P) \frac{1}{r} dV,$$

а для плоской задачи — логарифмический потенциал

$$v(A) = -\frac{1}{2\pi} \iint_S f(P) \ln \frac{1}{r} dS.$$

### 3.2. Функция Грина оператора Лапласа.

**3.2.1. Уравнение Пуассона.** Если непрерывная функция  $\rho(P)$  непрерывно дифференцируема в  $V$ , то потенциал

$$u(A) = \iiint_V \frac{\rho(P)}{r} dV$$

удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta u = -4\pi\rho.$$

На основании этой формулы (которая использовалась для построения вспомогательного решения в п. 3.1.6) вводится функция Грина.

**3.2.2. Функция Грина.** Если подставить во вторую формулу Грина (5) гармоническую функцию  $v$ , непрерывную во всем объеме  $V$  вместе с первыми производными, после чего сложить возникающее тождество

с основной интегральной формулой Грина (6), то получим

$$u(A) = \iint_S \left( G \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS - \iiint_V \Delta u \cdot G dV, \quad (42)$$

где  $G(A, P) = 1/(4\pi r_{AP}) + v$  — функция двух точек  $A$  и  $P$ , точка  $A$  фиксирована. Формула (42) содержит значения  $u$  и  $\partial u/\partial n$  на границе  $S$ . Между тем при решении первой краевой задачи задается лишь  $u|_S$ , а при решении второй — ее нормальная производная на границе  $S$ . Функция  $v$  выбирается так, чтобы  $G|_S = 0$  для первой краевой задачи и  $\partial G/\partial n|_S = 0$  для второй.

Рассмотрим уравнение Лапласа при одном из следующих однородных краевых условий

$$u|_S = 0, \quad (43)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + q(P)u \Big|_S = 0, \quad q(P) > 0. \quad (44)$$

**Определение.** Функцией Грина оператора Лапласа, соответствующей граничным условиям (43) или (44), называется функция  $G(A, P)$ , удовлетворяющая как функция  $P$  при произвольно фиксированной точке  $A \in V$  следующим условиям:

- 1) внутри  $V$ , кроме точки  $A$ , эта функция гармоническая;
- 2) она удовлетворяет краевому условию (43) или (44);
- 3) она может быть представлена в виде

$$G(A, P) = G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4\pi r} + v(A; P), \quad (45)$$

где  $r = |AP|$  и  $v(A, P)$  — гармоническая функция везде внутри  $V$ .

Функция Грина существует, если  $S$  — поверхность Ляпунова. Она симметрична и обращается в бесконечность при совпадении  $A$  и  $P$ .

Построение функции Грина сводится к нахождению гармонической функции  $v$ , удовлетворяющей уравнению Лапласа и конкретным краевым условиям. Таким образом, для нахождения решения  $u$  краевой задачи надо найти решение  $v$  той же задачи, но не с произвольными, а со специальными граничными условиями, что значительно проще.

В случае краевого условия (43) гармоническая внутри  $V$  функция  $v(A, P)$  должна на  $S$  иметь краевые значения

$$v(A, P) = -\frac{1}{4\pi r}, \quad P \in S, \quad (r = |AP|). \quad (46)$$

В случае (44) краевые условия для  $v(A, P)$  имеют вид

$$\left( \frac{\partial v(A, P)}{\partial n} \right) + q(P)v(A, P) = -\frac{1}{4\pi} \left[ \frac{\partial(1/r)}{\partial n} + \frac{q(P)}{r} \right], \quad P \in S. \quad (47)$$

В случае плоскости определение функции Грина совершенно аналогично, но только вместо (45) будет иметь место формула

$$G(A; P) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} + v(A; P). \quad (48)$$

Пусть  $u(A)$  есть решение внутренней задачи Дирихле для области  $V$ , ограниченной поверхностью  $S$ , с краевыми значениями  $f(P)$ . Тогда из формулы (42) получаем

$$u(A) = - \iint_S f(P) \frac{\partial G(A, P)}{\partial n} dS. \quad (49)$$

Эта формула дает решение задачи Дирихле при любом выборе непрерывной функции  $f(P)$ , входящей в краевое условие.

На основании (42) решение уравнения Пуассона  $\Delta u = -\varphi$  в ограниченной области  $V$  с однородными краевыми условиями первого рода имеет вид

$$u(A) = \iiint_V G(A, P) \varphi(P) dV.$$

**3.2.3. Решение задачи Дирихле для простых областей.** Можно искать решение задачи Дирихле  $\Delta u = 0$ ,  $u|_S = f$  путем представления решения в виде потенциала двойного слоя (п. 3.1.2) и решения возникающего интегрального уравнения (30). Однако в случае простых областей применение метода функции Грина может облегчить нахождение решения.

В случае полупространства функция Грина принимает значение

$$G(A, P) = \frac{1}{4\pi r} - \frac{1}{4\pi r_1},$$

где  $r$  — расстояние от переменной точки  $P$  до  $A$ ,  $r_1$  — расстояние от  $P$  до  $A'$ , симметричной относительно границы полупространства  $z = 0$ . Подставляя это выражение в (42) наряду с  $\Delta u = 0$ ,  $u|_S = f$ , получаем решение задачи Дирихле для полупространства (ср. с (32)):

$$u(x, y, z) = \frac{z}{2\pi} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi, \eta)}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2]^{3/2}} d\xi d\eta. \quad (50)$$

Для сферы радиуса  $R$  с центром в нуле функция Грина равна

$$G(A, P) = \frac{1}{r} - \frac{R}{\rho} \frac{1}{r_1},$$

где расстояние  $r_1$  определяется до точки  $A'$ , инверсной к  $A$  относительно данной сферы,  $\rho = |OA|$ ,  $r = |AP|$ ,  $|OA| \cdot |OA'| = R^2$ . Решение внутренней задачи Дирихле таково:

$$u(A) = \frac{1}{4\pi R} \iint_S f(P) \frac{R^2 - \rho^2}{r^3} dS.$$

Если ввести угол  $\gamma$ , образованный векторами  $\vec{OA}$  и  $\vec{OA'}$ , сферические координаты  $(\rho, \theta, \varphi)$  точки  $A$ , то решение внутренней задачи Дирихле для сферы примет вид

$$U(\rho, \theta, \varphi) = \frac{R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta', \varphi') \frac{R^2 - \rho^2}{(R^2 - 2\rho R \cos \gamma + \rho^2)^{3/2}} \sin \theta' d\theta' d\varphi'. \quad (51)$$

Решение внешней задачи Дирихле для сферы совпадает с (51), если в этой формуле изменить знак. Аналогичные рассуждения приводят к решению задачи Дирихле для круга — интегралу Пуассона

$$u(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - 2\rho R \cos(t - \theta) + \rho^2} dt. \quad (52)$$

Эта же формула с точностью до знака дает решение внешней задачи.

### 3.3. Решение уравнения Лапласа для сложных областей.

**3.3.1. Метод Шварца.** Предположим, что задача Дирихле для областей  $V_1$  и  $V_2$  при непрерывных краевых значениях решена, причем эти области имеют общую часть  $V_0$ . Метод Шварца дает возможность решить задачу Дирихле для объединенной области  $V = V_1 \cup V_2$ . Для определенности рассмотрим плоский случай. Контуры областей  $V_1$  и  $V_2$  точками их пересечения делятся на части  $\alpha_1$  и  $\beta_1$  для  $V_1$  и  $\alpha_2$  и  $\beta_2$  для  $V_2$ . Пусть на контуре  $l = \alpha_2 \cup \alpha_2$  области  $V$  задана некоторая непрерывная функция  $\omega(P)$ . Продолжим функцию  $\omega$  с  $\alpha_1$  на  $\beta_1$  с сохранением ее непрерывности. Получим функцию  $\omega_1$ . Решая задачу Дирихле для  $V_1$ , строим в  $V_1$  гармоническую функцию  $u_1(A)$ , равную  $\omega$  на  $\alpha_1$  и  $\omega_1$  на  $\beta_1$ . Значения этой функции на  $\beta_2$  вместе со значениями  $\omega$  на  $\alpha_2$  принимаем за краевые значения новой гармонической функции  $v_1$  в  $V_2$ . Теперь строим в  $V_1$  гармоническую функцию  $u_2$  с краевыми значениями  $\omega$  на  $\alpha_1$  и  $v_1$  на  $\beta_1$ , и т. д.

Метод Шварца применяется не только для уравнения Лапласа, но и для других уравнений эллиптического типа. Этот метод применим и для трехмерного случая.

Укажем еще на одну возможность применения метода Шварца. Рассмотрим решение внешней задачи Дирихле в трехмерном пространстве. Пусть в пространстве имеется  $n$  замкнутых поверхностей  $S_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), причем тела, ограниченные ими, не имеют общих точек. Обозначим через  $V$  часть пространства, находящуюся вне всех поверхностей  $S_k$ , и через  $V_k$  — часть пространства, находящуюся вне  $S_k$ . Предположим, что задача Дирихле решена для всех  $V_k$  при любых непрерывных значениях на  $S_k$ , и покажем, каким образом можно при этом решить задачу Дирихле для  $V$ . Все области  $V_k$  и область  $V$  содержат внутри себя бесконечно далекую точку, и, как обычно, при решении задачи Дирихле считается, что гармоническая функция равна нулю на бесконечности.

Итак, требуется найти функцию, гармоническую внутри  $V$  и принимающую на поверхностях  $S_k$  заданные непрерывные значения

$$u|_{S_k} = f_k(P) \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (53)$$

На первом шаге находим при каждом  $k$  функции  $u_{0,k}(A)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), гармонические внутри  $V_k$  и принимающие значения  $f_k(P)$  на  $S_k$ . Далее

находим гармонические внутри  $V_k$  функции  $u_{1,k}(A)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) с крайевыми значениями

$$u_{1,k}(A) = - \sum_{i \neq k} u_{0,i}(P) \quad \text{на } S_k \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (54)$$

причем суммирование производится по всем  $i$  от  $i = 1$  до  $i = n$ , кроме  $i = k$ .

Вообще, при всяком целом положительном  $m$  находим функции  $u_{m,k}(A)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), гармонические внутри  $V_k$ , с крайевыми значениями

$$u_{m,k}(P) = - \sum_{i \neq k} u_{m-1,i}(P) \quad \text{на } S_k \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (55)$$

Функции

$$\sum_{m=0}^p u_{m,k}(A) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

являются гармоническими внутри  $V_k$  с крайевыми значениями

$$\sum_{m=0}^p u_{m,k}(P) = f_k(P) - \sum_{m=0}^{p-1} \sum_{i \neq k} u_{m,i}(P) \quad \text{на } S_k \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Вычитая из обеих частей сумму

$$\sum_{m=0}^{p-1} u_{m,k}(P),$$

можно переписать предыдущее равенство в виде

$$\sum_{m=0}^{p-1} \sum_{i=1}^n u_{m,i}(P) = f_k(P) - u_{p,k}(P) \quad \text{на } S_k \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (56)$$

Если устремить  $P$  к бесконечности, то предельная функция

$$u(A) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=1}^n u_{m,i}(A) \quad (57)$$

дает решение рассматриваемой внешней краевой задачи. Отметим, что это построение неприменимо для внешней задачи в плоском случае.

**3.3.2. Метод выметания.** При решении задачи Дирихле методом потенциала на границу области приходилось налагать сравнительно жесткие ограничения. Изложим другой метод решения задачи Дирихле, пригодный при весьма общих предположениях о границе области и крайевых значениях на этой границе. Его часто называют «методом выметания». Он был предложен Пуанкаре, затем уточнен Перроном.

Рассмотрим случай плоскости (для пространства рассуждения аналогичны. Введем некоторые определения). Если  $\Delta f \geq 0$ , то функция  $f$  называется *субгармонической*. Если  $\Delta f \leq 0$ , то это — *супергармоническая функция*. Эти функции обладают следующими свойствами: субгармоническая функция принимает наибольшее значение на контуре. Более того, она не может иметь внутри максимума, в окрестности которого она непостоянна. Точно так же супергармоническая функция принимает наименьшее

значение на контуре.

Пусть  $f_k(M)$  ( $k = 1, \dots, m$ ) — функции, непрерывные в плоской области  $D$  и субгармонические внутри  $D$ . Построим функцию  $\varphi(A)$ , которая в каждой точке  $D$  равна наибольшему из значений  $f_k(A)$  ( $k = 1, \dots, m$ ):

$$\varphi(A) = \max[f_1(A), \dots, f_m(A)]. \quad (58)$$

Тогда  $\varphi(A)$  будет непрерывной в  $D$  и субгармонической внутри  $D$ . Аналогично, если  $f_k(A)$  супергармонические и

$$\psi(A) = \min[f_1(A), \dots, f_m(A)], \quad (59)$$

то и  $\psi(A)$  супергармоническая.

Пусть  $f(A)$  — субгармоническая внутри  $D$  и непрерывная в  $D$ ,  $K$  — круг, содержащийся в  $D$ , и  $u_K(A)$  — та гармоническая внутри  $K$  функция, значения которой на окружности круга  $K$  совпадают со значениями  $f(A)$ . Тогда

$$f(A) \leq u_K(A) \quad (\text{в } K). \quad (60)$$

Аналогично, если  $f(A)$  — супергармоническая функция, то

$$f(A) \geq u_K(A) \quad (\text{в } K). \quad (61)$$

Если заменить значения  $f(A)$  в круге  $K$  значениями  $u_K(A)$  и обозначить новую функцию через  $f_K(A)$ , то эта функция, непрерывная в  $D$ , будет субгармонической внутри  $D$ .

Такое же построение для субгармонической функции даст субгармоническую функцию  $f_K(A)$ .

Перейдем к изложению *метода Пуанкаре–Перрона*. Пусть на плоскости имеется ограниченная область  $D$  и  $L$  — ее граница, о которой пока не делается никаких предположений. Положим, что на  $L$  задана функция  $\omega(P) = \omega(x, y)$ , относительно которой пока только предполагается, что она ограничена, т. е. что существуют два таких числа  $a$  и  $b$ , что

$$a \leq \omega(P) \leq b. \quad (62)$$

Назовем *нижней функцией* всякую функцию  $\varphi(A)$ , которая является непрерывной функцией в замкнутой области, субгармонической внутри области, и на контуре удовлетворяет условию  $\varphi(N) \leq \omega(P)$ . Аналогично, *верхняя функция*  $\psi(A)$  должна быть супергармонической внутри и на контуре должна удовлетворять условию  $\psi(P) \geq \omega(P)$ .

Если  $f_1(A), f_2(A), \dots, f_m(A)$  — нижние функции, то и функция  $\varphi(A)$ , определяемая формулой (58), также нижняя функция. Аналогичное замечание имеет место и для верхних функций и формулы (59). Множество значений всевозможных верхних функций  $\psi(A)$  в любой фиксированной точке  $A$ , лежащей внутри  $D$ , имеет точную нижнюю границу  $u(A)$ , причем  $a \leq u(A) \leq b$  и функция  $u(A)$  гармоническая. Если  $\omega$  непрерывна, то такая верхняя граница нижних функций совпадает с  $u(A)$ , которая является решением (обобщенным) исходной внутренней краевой задачи Дирихле.

Обобщенное решение задачи Дирихле  $u(A)$  при непрерывности функции  $\omega(P)$  на границе  $L$  можно построить еще одним способом. Про-

должим функцию  $\omega(P)$  на всю плоскость, сохраняя ее непрерывность. Положим, далее, что  $D_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) есть последовательность областей, которые лежат вместе со своими границами  $L_n$  внутри  $D$  и стремятся к  $D$ , так что всякая точка  $A$ , лежащая внутри  $D$ , находится внутри всех областей  $D_n$ , начиная с некоторого номера  $n$ . Области  $D_n$  могут быть, например, составленными из конечного числа кругов. Положим, что для областей  $D_n$  мы умеем решать задачу Дирихле с непрерывными значениями на  $L_n$ .

Пусть  $u_n(A)$  — решение задачи Дирихле для  $D_n$ , причем краевые значения на  $L_n$  задаются как продолжение функции  $\omega(P)$ , о котором мы говорили. При беспредельном возрастании  $n$  функции  $u_n(A)$  стремятся к построенному выше обобщенному решению  $u(A)$  задачи Дирихле, причем это стремление равномерное по всякой замкнутой области, лежащей внутри  $D$ . Таким образом, предел  $u_n(A)$  не зависит ни от способа продолжения  $\omega(P)$ , ни от выбора областей  $D_n$ .

## 4. Другие применения методов потенциала

### 4.1. Применение методов потенциала к уравнению Гельмгольца.

4.1.1. *Основные факты.* Если искать решение однородного уравнения  $u_{\Pi} = a^2 \Delta u$  в виде установившегося синусоидального режима заданной частоты, то приходим к уравнению Гельмгольца

$$\Delta v + k^2 v = 0. \quad (63)$$

На бесконечности решения этого уравнения должны удовлетворять *принципу излучения*

$$v = O(r^{-1}), \quad \frac{\partial v}{\partial r} + ikv = o(r^{-1}),$$

а для двумерного случая —

$$v = O(r^{-1/2}), \quad \frac{\partial v}{\partial r} + ikv = o(r^{-1/2}).$$

В этом случае верна теорема единственности решения.

Фундаментальным решением, удовлетворяющим принципу излучения, в трехмерном случае является решение

$$v(A) = \frac{e^{-ikr}}{r}, \quad (64)$$

где  $r$  — расстояние, отсчитываемое от некоторой фиксированной точки  $O$  до точки  $A$ .

В плоском случае фундаментальным решением, удовлетворяющим принципу излучения, является решение  $H_0^{(2)}(kr)$ , где  $H_0^{(2)}$  — вторая функция Ганкеля.

Условие излучения выделяет единственное решение и для неоднородного уравнения

$$\Delta v + k^2 v = -F(A) \quad (k > 0), \quad (65)$$

определенное во всем пространстве. Будем считать  $F(A)$  непрерывно дифференцируемой функцией точки трехмерного евклидова пространства, определенной во всем пространстве и равной нулю вне некоторой конечной области  $V$ . Тогда указанное решение определяется равенством

$$v(A) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{e^{-ikr}}{r} F(P) d\tau \quad (r = |PQ|). \quad (66)$$

Аналогично краевым задачам для уравнения Пуассона (п. 3.1.6), для решения краевых задач для неоднородного уравнения (65) следует представить его решение в виде суммы решения краевой задачи для однородного уравнения (63) (уравнения Гельмгольца) и функции (66).

4.1.2. *Краевые задачи для уравнения Гельмгольца.* Решение (64) уравнения (63) имеет при  $r = 0$  полярность  $1/r$ , и это дает возможность построить для уравнения (63) теорию потенциала, совершенно аналогичную теории ньютонова потенциала для уравнения Лапласа. Обозначая через  $r$  расстояние между переменной точкой  $P$  поверхности  $S$  и точкой  $A$ , в трехмерном случае приходим к следующим аналогам потенциалов простого и двойного слоя:

$$v(A) = \iint_S \mu(P) \frac{e^{-ikr}}{r} dS, \quad w(A) = - \iint_S \mu(P) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-ikr}}{r} \right) dS, \quad (67)$$

где  $\mathbf{n}$  — направление внешней нормали к  $S$  в переменной точке  $P$ . Выделяя из ядра полярное слагаемое  $1/r$ , получим потенциалы, в которых предельный переход при стремлении  $A$  на поверхность совершается по формулам, совершенно аналогичным (18), (19), (23), (24):

$$\left( \frac{\partial v(A)}{\partial n} \right)_+ = 2\pi\mu(A) + \iint_S \mu(P) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-ikr}}{r} \right) dS, \quad (68)$$

$$\left( \frac{\partial v(A)}{\partial n} \right)_- = -2\pi\mu(A) + \iint_S \mu(P) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-ikr}}{r} \right) dS,$$

$$r = |AP|,$$

$$w_+(A) = 2\pi\mu(A) - \iint_S \mu(P) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-ikr}}{r} \right) dS,$$

$$w_-(A) = -2\pi\mu(A) - \iint_S \mu(P) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-ikr}}{r} \right) dS, \quad (69)$$

причем в (68) ядро является значением производной по направлению нормали  $\mathbf{n}$  в точке  $A$ , а в (69) — по направлению нормали  $\mathbf{n}$  в точке  $P$ .

В плоском случае потенциалы принимают вид

$$v(A) = \int_l \mu(P) \frac{\pi}{2i} H_0^{(2)}(kr) dS, \quad w(A) = \int_l \mu(P) \frac{\partial}{\partial n} \left[ \frac{\pi}{2i} H_0^{(2)}(kr) \right] dS, \quad (70)$$

и для них имеют место формулы, совершенно аналогичные формулам (68) и (69), причем справа множитель  $2\pi$  надо заменить на  $\pi$ . Написанные потенциалы удовлетворяют уравнению (63), и в силу специального выбора ядер каждый элемент написанных интегралов и сами эти интегралы удовлетворяют принципу излучения.

Введем ядро

$$K(A, P; k) = \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-ikr}}{2\pi r} \right) = -\frac{e^{-ikr}(ikr + 1)}{2\pi r^2} \cos \varphi_0,$$

где  $\varphi$  — угол, образованный направлением нормали в точке  $P$  с направлением  $AP$ . Транспонированное ядро будет иметь вид

$$K(P, A; k) = \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-ikr}}{2\pi r} \right) = -\frac{e^{ikr}(ikr + 1)}{2\pi r^2} \cos \psi,$$

где  $\psi$  — угол, образованный нормалью в точке  $A$  с направлением  $AP$ . Совершенно так же, как и для уравнения Лапласа, можно поставить задачи Дирихле и Неймана.

Внутренняя задача Дирихле состоит в отыскании внутри  $S$  решения уравнения (63), удовлетворяющего на  $S$  краевому условию

$$u|_S = f(A).$$

Аналогично формулируется и внешняя задача, причем на бесконечности должен быть выполнен принцип излучения. В случае задачи Неймана имеем краевое условие

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = f(A).$$

Из теоремы единственности вытекает, что внешние задачи могут иметь только одно решение. Для внутренних задач единственность имеет место не при всяких  $k$ .

Число  $k^2$  называется *собственным значением внутренней задачи Дирихле*, если существует внутри  $S$  решение уравнения (63), удовлетворяющее на  $S$  однородному предельному условию  $u|_S = 0$ . Аналогично определяются собственные значения внутренней задачи Неймана.

Если искать решение внешней задачи Дирихле в виде потенциала двойного слоя и внутренней задачи Неймана в виде потенциала простого слоя, то приходим к союзным интегральным уравнениям

$$\mu(A) + \iint_S \mu(P) K(A, P; k) dS = -\frac{1}{2\pi} f(A), \quad (71)$$

$$\mu(A) + \iint_S \mu(P) K(P, A; k) dS = \frac{1}{2\pi} f(A). \quad (72)$$

Если  $k^2$  не есть собственное значение внутренней задачи Неймана, то однородное уравнение (71) имеет только нулевое решение и, следовательно, неоднородное уравнение разрешимо при любом  $f(A)$ , т. е. при любом  $f(A)$

внешняя задача Дирихле имеет решение в виде потенциала двойного слоя. Совершенно аналогично, если  $k^2$  не есть собственное значение внутренней задачи Дирихле, внешняя задача Неймана имеет решение в виде потенциала простого слоя.

4.1.3. *Функции Грина.* Для уравнения (63) можно построить функцию Грина совершенно так же, как это делалось для уравнения Лапласа. В трехмерном случае фундаментальное решение этого уравнения можно записать в виде  $(\cos kr/r)$ . Функцию Грина, соответствующую условию

$$u|_S = 0, \quad (73)$$

надо искать в виде

$$G_1(A, P; k^2) = \frac{\cos kr}{4\pi r} + g_1(A, P; k^2) \quad (r = |AP|), \quad (74)$$

где  $g_1(A, P; k^2)$  удовлетворяет внутри  $V$  уравнению (63), а на  $S$  — краевому условию

$$g_1(A, P; k^2)|_S = - \frac{\cos kr}{4\pi r} \Big|_S. \quad (75)$$

Если  $k^2$  не есть собственное значение уравнения (63) при краевом условии (73), то такая функция Грина может быть построена.

В плоском случае решения уравнения (63), зависящие только от расстояния  $r = |AP|$ , имеют вид  $Z_0(kr)$ , где  $Z_0(z)$  — любое решение уравнения Бесселя нулевого порядка

$$Z_0''(z) + \frac{1}{z} Z_0'(z) + Z_0(z) = 0. \quad (76)$$

В качестве решения этого уравнения возьмем функцию Неймана

$$N_0(z) = \frac{2}{\pi} J_0(z) \left( \ln \frac{z}{2} + C \right) - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left( \frac{z}{2} \right)^{2k} \left( \frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + \dots + 1 \right). \quad (77)$$

Фундаментальным решением с полярностью  $(1/(2\pi)) \ln(1/r)$  является функция

$$-\frac{1}{4} N_0(kr). \quad (78)$$

Поэтому следует искать функцию Грина в виде

$$G_1(P, Q; k^2) = -\frac{1}{4} N_0(kr) + g_1(A, P; k^2). \quad (79)$$

Поскольку первое слагаемое в правой части удовлетворяет уравнению и имеет требуемую полярность, вопрос приводится к определению слагаемого  $g_1(A, P; k^2)$  так, чтобы оно не имело уже полярности, удовлетворяло уравнению (63), а на контуре  $L$  удовлетворяло бы следующему неоднородному краевому условию:

$$g_1|_L = \frac{1}{4} N_0(kr),$$

которое обеспечивает нулевое значение функции Грина на границе  $L$ .

4.1.4. Уравнение  $\Delta v - \lambda v = 0$ . Рассмотрим уравнение

$$\Delta v - \lambda v = 0, \quad (80)$$

где  $\lambda$  — заданное положительное число, и поставим внутреннюю задачу Дирихле с краевым условием

$$v|_S = f(A). \quad (81)$$

Решения уравнения (80) не могут иметь внутри  $V$  ни положительных максимумов, ни отрицательных минимумов, и отсюда следует единственность решения указанной задачи Дирихле.

Если функция  $f(A)$  удовлетворяет неравенству  $-a \leq f(A) \leq b$ , где  $a$  и  $b$  — некоторые положительные числа, то такому же неравенству в  $V$  должно удовлетворять и решение задачи Дирихле.

Рассмотрим неоднородное уравнение

$$\Delta v - \lambda v = -\varphi(A) \quad \text{внутри } V \quad (82)$$

с однородным краевым условием

$$v|_S = 0. \quad (83)$$

Пусть  $\varphi(A)$  непрерывна в замкнутой области  $V$  и имеет внутри  $V$  непрерывные производные. Тогда задача (82), (83) равносильна интегральному уравнению

$$v(A) = \lambda \iiint_V G(A, P) v(P) d\tau + \iiint_V G(A, P) \varphi(P) d\tau, \quad (84)$$

где  $G(A, P)$  — функция Грина уравнения Лапласа с краевым условием (83). Поскольку  $(-\lambda)$  — отрицательное число, а все собственные значения интегрального оператора с ядром  $G(A, P)$  положительны, то уравнение (84) имеет при любом свободном члене одно решение, которое является решением задачи (82), (83).

Перейдем теперь к решению задачи Дирихле (80) и (81). Пусть  $w(A)$  — решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа с краевым условием (81). Функция

$$u(A) = v(A) - w(A) \quad (85)$$

должна удовлетворять уравнению

$$\Delta u - \lambda u = \lambda w$$

и однородному краевому условию  $u|_S = 0$ . Решение этой задачи существует. Зная  $u(P)$ , можно теперь найти решение задачи Дирихле  $v(A)$  согласно формуле (85).

Фундаментальным решением уравнения (80) является функция

$$v_0(A) = \exp(-\sqrt{\lambda}r)/r, \quad (86)$$

где  $r$  — расстояние точки  $A$  до некоторой фиксированной точки  $O$ . Основываясь на этом решении, можно построить теорию потенциала совершенно так же, как это сделано ранее.

## 4.2. Нестационарные потенциалы.

4.2.1. *Потенциалы для одномерного уравнения теплопроводности.*  
Рассмотрим одномерное уравнение теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad (87)$$

и положим, что для промежутка  $0 \leq x \leq l$  поставлена краевая задача с крайвыми условиями

$$u|_{x=0} = \omega_1, \quad u|_{x=l} = \omega_2(t) \quad (88)$$

и, без ущерба общности, однородным начальным условием

$$u|_{t=0} = 0 \quad (0 \leq x \leq l). \quad (89)$$

Фундаментальным решением, соответствующим источнику, помещенному в момент  $t = \tau$  в точке  $x = \xi$ , является тепловой потенциал

$$u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp \left\{ -\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-\tau)} \right\}. \quad (90)$$

Аналогично построению потенциала диполя продифференцируем фундаментальное решение по  $\xi$  (по «нормальной» производной), что приводит к другому сингулярному решению — тепловому потенциалу «диполя». Умножая его на плотность потенциала  $\varphi(\tau)$  и интегрируя, получаем решение (87), соответствующее диполю в точке  $x = \xi$ , действующему от момента  $\tau = 0$  с интенсивностью  $\varphi(\tau)$ , в виде (см. [83])

$$u(x, t) = \int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)^{3/2}}} (x-\xi) \exp \left\{ -\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-\tau)} \right\} d\tau, \quad (91)$$

Если  $x$  стремится к  $\xi$  слева или справа (ср. с (23), (24)), то функция (91) удовлетворяет следующим крайвым соотношениям:

$$u(\xi+0, t) = \varphi(t), \quad u(\xi-0, t) = -\varphi(t). \quad (92)$$

Кроме того, решение (91) удовлетворяет, очевидно, однородному начальному условию

$$u|_{t=0} = 0. \quad (93)$$

Решение начально-краевой задачи (87), (88) следует искать в виде суммы двух потенциалов: одного, помещенного в точке  $x = 0$ , и другого — в точке  $x = l$ ; искомую плотность первого обозначим через  $\varphi(\tau)$ , а второго — через  $\psi(\tau)$ :

$$u(x, t) = \int_0^t \frac{x\varphi(\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)^{3/2}}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)} \right\} d\tau + \\ + \int_0^t \frac{(x-l)\psi(\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)^{3/2}}} \exp \left\{ -\frac{(l-x)^2}{4a^2(t-\tau)} \right\} d\tau. \quad (94)$$

Краевые условия (88), в силу (92), запишутся в виде

$$\begin{aligned} \varphi(t) - l \int_0^t \frac{\psi(\tau)}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{l^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} d\tau &= \omega_1(t), \\ -\psi(t) + l \int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{l^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} d\tau &= \omega_2(t). \end{aligned} \quad (95)$$

Эти уравнения представляют собой систему интегральных уравнений Вольтерра для  $\varphi(\tau)$  и  $\psi(\tau)$ , и ядра этих уравнений зависят только от разности  $t - \tau$ . Таким образом, в данном случае метод потенциалов приводит к решению системы двух интегральных уравнений.

Если на одном из концов задана не сама функция  $u$ , а ее производная  $du/dx$ , то потенциал, порожденный этим краевым условием, следует искать на основании запаздывающего потенциала (90), а не его производной. В этих рассуждениях несложно усмотреть сходство с анализом задачи Дирихле, решение которой ищется в виде потенциала двойного слоя, и задачи Неймана с решением в виде потенциала простого слоя.

Если, например, краевые условия имеют вид

$$u|_{x=0} = \omega_1(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = \omega_2(t), \quad (96)$$

то решение задачи с однородными начальными условиями следует искать в виде суммы двух потенциалов вида

$$\begin{aligned} u(x, t) = \int_0^t \frac{x\varphi(\tau)}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} d\tau + \\ + \int_0^t \frac{a\psi(\tau)}{\sqrt{\pi}\sqrt{t-\tau}} \exp\left\{-\frac{(l-x)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} d\tau. \end{aligned} \quad (97)$$

Первое из условий (96) даст

$$\varphi(t) + \int_0^t \frac{a\psi(\tau)}{\sqrt{\pi}\sqrt{t-\tau}} \exp\left\{-\frac{l^2}{2a^2(t-\tau)}\right\} d\tau = \omega_1(t).$$

Дифференцируя формулу (97) по  $x$  и устремляя  $x$  к  $l$ , получим, в силу (92) и второго из условий (96),

$$\begin{aligned} \psi(t) + \int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{l^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} d\tau - \\ - l^2 \int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{4a^3(t-\tau)^{5/2}} \exp\left\{-\frac{l^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} d\tau = \omega_2(t), \end{aligned}$$

так что снова для  $\varphi(\tau)$  и  $\psi(\tau)$  возникает система интегральных уравнений с ядрами, зависящими от разности  $t - \tau$ . Отметим, что подобный вид

ядер (в виде свертки) свидетельствует о целесообразности использования преобразования Лапласа для решения системы интегральных уравнений.

4.2.2. *Тепловые источники в многомерном случае.* Идея потенциала может быть применена и к многомерным задачам теплопроводности. Ограничимся указанием результатов, которые аналогичны предыдущим. Рассмотрим плоский случай, т. е. уравнение

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}). \quad (98)$$

Пусть на плоскости  $Oxy$  имеется область  $D$  с границей  $L$ . Фундаментальное решение, соответствующее источнику в точке  $(\xi, \eta)$ , действующему с момента времени  $\tau$ , имеет вид

$$u = \frac{1}{4\pi a^2(t-\tau)} \exp\left\{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}, \quad r^2 = (\xi-x)^2 + (\eta-y)^2.$$

Аналог потенциала простого слоя дается следующей формулой:

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t d\tau \int_L \frac{a(\sigma, \tau)}{t-\tau} \exp\left\{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} dl, \quad (99)$$

где  $l$  — длина дуги контура  $L$ , отсчитываемая от некоторой фиксированной точки, и  $a(l, \tau)$  — функция переменной точки  $l$  контура и параметра  $\tau$ . Через  $r$  обозначено расстояние от точки  $(x, y)$  до переменной точки  $l$  контура  $L$ . Тепловой потенциал двойного слоя представляется формулой

$$v(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t d\tau \int_L \frac{b(l, \tau)}{t-\tau} \frac{\partial}{\partial n} \exp\left\{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} dl, \quad (100)$$

где  $\mathbf{n}$  — направление внешней нормали в переменной точке интегрирования, или

$$v(x, y, t) = \int_0^t d\tau \int_L \frac{b(l, \tau)}{4\pi a^2(t-\tau)^2} \exp\left\{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} r \cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}) dl, \quad (101)$$

где направление  $\mathbf{r}$  считается из точки  $P$ , пробегающей при интегрировании по контуру  $L$ , в точку  $(x, y)$ . Если ввести угол  $d\varphi$ , под которым элемент длины  $dl$  виден из точки  $(x, y)$ , то предыдущую формулу можно переписать в виде

$$v(x, y, t) = - \int_L d\varphi \int_0^t \frac{b(\sigma, \tau)}{4\pi a^2(t-\tau)^2} \exp\left\{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} r^2 d\tau. \quad (102)$$

Краевые значения потенциала двойного слоя в точке  $A(x_0, y_0)$  контура определяются формулой

$$v(x_0, y_0, t) = (-1)^k b(A, t) + \int_0^t d\tau \int_l \frac{b(l, \tau)}{4\pi a^2(t-\tau)^2} \exp\left\{-\frac{r_0^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} r_0 \cos(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}) d\sigma, \quad (103)$$

где параметр  $k$  определяет смену знака:  $k = 1$  для внутренней и  $k = 2$  для внешней задачи;  $r_0$  — расстояние от переменной точки интегрирования до точки  $A(x_0, y_0)$ . Потенциал простого слоя (99) непрерывен при переходе через контур  $L$ , а его производная по нормали в точке  $A$  контура имеет в этой точке краевые значения, определяемые по формуле

$$\frac{\partial u(x_0, y_0, t)}{\partial n} = -a(A, t) - \int_0^t d\tau \int_L \frac{a(l, \tau)}{4\pi a^2(t - \tau)^2} \exp\left\{-\frac{r_0^2}{4a^2(t - \tau)}\right\} r_0 \cos(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}) dl. \quad (104)$$

Пользуясь указанными формулами, можно приводить решение краевых задач к интегральным уравнениям. Пусть, например, ищется функция  $v(x, y, t)$ , удовлетворяющая внутри  $D$  уравнению (98), имеющая на контуре  $L$  данные краевые значения:

$$v|_L = \omega(s, t), \quad (105)$$

где  $s$  — координата точки контура, определяемая длиной дуги  $s$ , отсчитываемой от некоторой точки. Начальные данные считаются равными нулю. Отыскивая решение в виде потенциала двойного слоя (100), получаем, в силу первого из равенств (103), интегральное уравнение для функции  $b(l, \tau)$ :

$$-b(s, t) + \int_0^t d\tau \int_L \frac{b(l, \tau)}{4\pi a^2(t - \tau)^2} \exp\left\{-\frac{r^2}{4a^2(t - \tau)}\right\} r \cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}) dl = \omega(s, t), \quad (106)$$

где  $r$  — расстояние между точками  $s$  и  $l$  контура  $L$  и направление  $\mathbf{r}$  считается от  $l$  и  $s$ . В написанном уравнении интегрирование по  $l$  совершается по фиксированному промежутку  $(0, |L|)$ , где  $|L|$  — длина контура  $L$ , а при интегрировании по  $\tau$  верхний предел является переменным. Иначе говоря, написанное интегральное уравнение имеет характер уравнений Фредгольма по отношению к переменной  $l$  и характер уравнений Вольтерра по отношению к переменной  $\tau$ . Несмотря на такой смешанный характер уравнения (106), обычный метод последовательных приближений для уравнений Вольтерра оказывается сходящимся и в случае уравнения (106). Метод применяется и для области, ограниченной несколькими контурами. Он легко обобщается и на трехмерный случай и применим к внешним задачам. Приведение начального условия  $u(x, y, 0) = f(x, y)$  к нулю совершается, как обычно, путем переноса неоднородности из начального условия в краевые при помощи представления искомого решения в виде суммы решения задачи с однородными начальными условиями и решения уравнения для всей плоскости или всего пространства. В двумерном случае решение для всей плоскости имеет вид

$$u(x, y, t) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \iint_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{r^2}{4a^2 t}\right\} f(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

4.2.3. *Краевая задача для волнового уравнения.* При решении краевых задач для уравнений эллиптического и параболического типов в основе всего построения лежало фундаментальное решение соответствующего дифференциального уравнения. Применим эту идею к уравнениям гиперболического типа.

Рассмотрим одномерное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c^2 u \quad (107)$$

на промежутке  $0 \leq x \leq l$  с однородными начальными условиями

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0 \quad (108)$$

и краевыми условиями

$$u|_{x=0} = \omega_1(t), \quad u|_{x=l} = \omega_2(t). \quad (109)$$

Отметим, что начальные условия могут быть всегда приведены к однородным. Функция Бесселя мнимого аргумента  $I_0(c\sqrt{t^2 - x^2})$  есть фундаментальное решение уравнения (107).

Помещая соответствующие этому решению непрерывно действующие источники на концах промежутка  $[0, l]$ , получим, как нетрудно непосредственно проверить, потенциалы «простого слоя» — решения уравнения (107)

$$\begin{aligned} & \int_0^{t-x} \varphi(\tau) I_0 \left( c \sqrt{(t-\tau)^2 - x^2} \right) d\tau, \\ & \int_0^{t-(l-x)} \psi(\tau) I_0 \left( c \sqrt{(t-\tau)^2 - (l-x)^2} \right) d\tau, \end{aligned}$$

где  $\varphi(\tau)$  и  $\psi(\tau)$  есть некоторые дифференцируемые функции. Поскольку краевые условия являются краевыми условиями первого рода, то аналогично решению задачи Дирихле и уравнения теплопроводности следует искать решение в виде потенциала диполя (двойного слоя). Для нахождения этого потенциала дифференцируем фундаментальные потенциалы «простого слоя» по  $x$  и ищем решение задачи (107)–(109) в виде суммы

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{t-x} \varphi(\tau) I_0 \left( c \sqrt{(t-\tau)^2 - x^2} \right) d\tau + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{t-(l-x)} \psi(\tau) I_0 \left( c \sqrt{(t-\tau)^2 - (l-x)^2} \right) d\tau, \quad (110) \end{aligned}$$

причем считается, что  $\varphi(\tau) = \psi(\tau) = 0$  при  $\tau < 0$ . Уравнение (107) и начальные условия (108) удовлетворяются при любом выборе  $\varphi(\tau)$  и  $\psi(\tau)$ . Краевые условия (109) приводят к следующей системе уравнений для  $\varphi(\tau)$  и  $\psi(\tau)$ :

$$\begin{aligned}
-\varphi(\tau) + \psi(\tau - l) + \int_0^{t-l} \psi(\tau) \frac{clI'_0 \left( c\sqrt{(t-\tau)^2 - l^2} \right)}{\sqrt{(t-\tau)^2 - l^2}} d\tau &= \omega_1(t), \\
-\varphi(t-l) + \psi(t) - \int_0^{t-l} \varphi(\tau) \frac{clI'_0 \left( c\sqrt{(t-\tau)^2 - l^2} \right)}{\sqrt{(t-\tau)^2 - l^2}} d\tau &= \omega_2(t).
\end{aligned} \tag{111}$$

Функции  $\omega_1(\tau)$  и  $\omega_2(t)$  считаем непрерывно дифференцируемыми. Обозначим

$$\psi(t) - \varphi(t) = \varphi_1(t), \quad \psi(t) + \varphi(t) = \psi_1(t).$$

Складывая и вычитая почленно уравнения (111), получаем отдельные уравнения для  $\varphi_1(t)$  и  $\psi_1(t)$ :

$$\begin{aligned}
\varphi_1(t) + \psi_1(t-l) + cl \int_0^{t-l} \psi_1(\tau) \frac{I'_0 \left( c\sqrt{(t-\tau)^2 - l^2} \right)}{\sqrt{(t-\tau)^2 - l^2}} d\tau &= \omega_1(t) + \omega_2(t), \\
-\psi_1(t) + \psi_1(t-l) + cl \int_0^{t-l} \psi_1(\tau) \frac{I'_0 \left( c\sqrt{(t-\tau)^2 - l^2} \right)}{\sqrt{(t-\tau)^2 - l^2}} d\tau &= \omega_1(t) - \omega_2(t),
\end{aligned} \tag{112}$$

причем  $\varphi_1(\tau) = \psi_1(\tau) = 0$  при  $\tau < 0$ .

В отличие от системы интегральных уравнений для уравнения теплопроводности в данном случае получается система интегральных уравнений с функциональной зависимостью. Ее можно решить при помощи последовательных шагов на промежутках  $[0, l]$ ,  $[l, 2l]$  и т. д.

Отметим, что при  $c = 0$  фундаментальными решениями волнового уравнения

$$u_{tt} = a^2 \Delta u$$

являются функции (в зависимости от размерности пространства)

$$\begin{aligned}
W_1(x, t) &= \frac{1}{2a} \theta(at - r), \quad W_2(x, t) = \frac{\theta(at - r)}{2\pi a \sqrt{a^2 t^2 - r^2}}, \\
W_3(x, t) &= \frac{\theta(t)}{2\pi a} \delta(a^2 t^2 - r^2).
\end{aligned}$$

Здесь  $r \equiv |x|$ ,  $\theta(z)$  — ступенчатая функция, равная нулю при  $z < 0$  и единице в противном случае. В трехмерном пространстве волновой потенциал выражается в виде обобщенной  $\delta$ -функции. Волновой потенциал определяется как свертка фундаментального решения и плотности потенциала  $\rho$ , которая также считается равной нулю при  $t < 0$ . Поэтому возникает интеграл по времени на промежутке  $[0, t]$ . В зависимости от размерности волновые потенциалы имеют вид

$$V_1(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \rho(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

$$V_2(x, t) = \frac{1}{2\pi a} \int_0^t \int_{K(a(t-\tau))} \frac{\rho(\xi, \tau) d\xi d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - |x-\xi|^2}},$$

$$V_3(x, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{K(at)} \frac{\rho\left(\xi, t - \frac{|x-\xi|}{a}\right)}{|x-\xi|} d\xi.$$

Здесь  $K(z)$  — круг с центром в точке  $x$  радиуса  $z$ . Трехмерный волновой потенциал  $V_3$  является запаздывающим, поскольку его значение в точке  $x$  в момент времени  $t > 0$  определяется значениями источника  $\rho(\xi, \tau)$ , взятыми в ранние моменты времени  $\tau = t - |x - \xi|/a$ , причем *время запаздывания*  $|x - \xi|/a$  — это то время, которое необходимо для прихода возмущения из точки  $\xi$  в точку  $x$ .

Дальнейшее изучение волновых потенциалов приводит к определению поверхностных волновых потенциалов простого и двойного слоя. Проведенное выше рассмотрение краевой задачи для волнового уравнения использует эти конструкции.

### Библиографический комментарий

История становления математической теории потенциала, начиная с работ Лапласа и Лагранжа, а также история теории краевых задач для уравнения Лапласа и уравнений, содержащих лапласиан, излагается в [86]; здесь также приводятся теоремы и описываются подходы теории потенциала в первичной формулировке и показано их постепенное уточнение и развитие.

Основы теории потенциала с подробными доказательствами излагаются в учебниках [83, 85, 91]. Методы запаздывающих потенциалов для параболических и гиперболических уравнений описывается в [83, 91]. Обзорно-справочный материал по основам теории потенциала приведен в [49].

Фундаментальным трудом по теории потенциала, в котором доказываются свойства потенциалов и описываются методы решения задач Неймана и Дирихле, является монография [20]. Теория потенциала применительно к эллиптическим задачам с подробными доказательствами излагается в [87]. Единый подход к введению и использованию понятия потенциала независимо от типа уравнения реализован в [13].

Современная теория потенциала излагается в [47], а ее абстрактное обобщение дается в [5]. Книга [97] является введением в современную теорию потенциала и находится на стыке прикладной и абстрактной теории потенциала; изложение в ней проводится для пространств размерности  $n \geq 3$ . Краевые задачи теории электромагнитных колебаний излагаются в книге [41], в которой также строятся антенные (волновые) потенциалы и другие нестационарные потенциалы теории колебаний. Основы теории гидродинамических потенциалов даются в [43].

## Глава 3

# Методы разложений по собственным функциям

*Ключевые слова:* собственные значения, собственные функции, метод Фурье, специальные функции, метод собственных функций, ортонормированные системы, ряды Фурье, сферические функции, цилиндрические функции, ортогональные полиномы, задача Штурма–Лиувилля, задачи теории электромагнитных явлений, задачи теплопроводности, задачи теории колебаний.

### Основные понятия и обозначения

*Собственные значения* — значения параметра  $\lambda$ , при которых однородное уравнение вида  $Au = \lambda u$ , где  $A$  — оператор, имеет ненулевые решения.

*Собственные функции* — ненулевые решения  $u$  однородных уравнений вида  $Au = \lambda u$ .

*Задача на собственные значения* — задача об отыскании собственных значений  $\lambda$  и собственных функций  $u$  как решений уравнения вида  $Au = \lambda u$ , где  $A$  — оператор.

*Метод собственных функций* — метод отыскания решений задач путем разложения по собственным функциям.

*Ортонормированная система* — конечная или бесконечная система функций, в которой все функции нормированы, а две любые функции ортогональны.

*Ряд Фурье* — ряд, составленный из функций ортонормированной системы со специальными коэффициентами — весами.

*Сферические функции* — собственные функции оператора Лапласа на сфере.

*Цилиндрические функции* — решения уравнения Бесселя  $x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$ .

*Ортогональные полиномы* — полиномы, которые образуют ортогональную систему.

## 1. Введение

Многие задачи математической физики приводят к так называемым задачам на собственные значения, которые представляют собой линейные однородные уравнения с параметром. Ненулевые решения этих уравне-

ний — собственные функции — играют важную роль для отыскания решений исходных задач. В ряде случаев используются специальные функции, которые зачастую являются собственными функциями конкретных специфических задач на собственные значения.

Одним из наиболее часто применяемых методов математической физики является метод собственных функций, который заключается в отыскании решений в виде разложений по собственным функциям операторов, тесно связанных с рассматриваемой задачей. Эти разложения являются, как правило, составленными из ортонормированных функций со специальными весами — рядами Фурье. Метод собственных функций позволяет решить широкий класс задач математической физики, среди которых — задачи теории электромагнитных явлений, задачи теплопроводности, задачи теории колебаний, в том числе акустики.

Отдельные применения метода собственных функций восходят еще к Л. Эйлеру, а общая его формулировка была впервые дана М. В. Остроградским. Строгое обоснование метода было получено В. А. Стекловым.

Метод собственных функций тесно связан с методом Фурье — методом разделения переменных, который предназначен для отыскания частных решений дифференциальных уравнений. Эти методы часто приводят к специальным функциям, которые являются решениями задач на собственные значения. Метод разделения переменных был предложен Ж. Д'Аламбером (J. D'Alembert, 1749 г.) и использовался еще в XVIII веке Л. Эйлером, Д. Бернулли и Ж. Лагранжем для решения задачи о колебании струны. С достаточной полнотой этот метод был развит в начале XIX века Ж. Фурье (J. Fourier) и применен им к задаче о распространении тепла. В полной общности метод был сформулирован М. В. Остроградским (1828 г.).

В настоящей главе излагаются основы метода разложений по собственным функциям и рассматриваются приложения метода для решения конкретных задач математической физики, среди которых — задачи теории электромагнитных явлений, задачи теплопроводности, задачи теории колебаний, в том числе акустики [1, 4, 13, 19, 26, 37, 49, 110].

## 2. Задачи на собственные значения

Многие задачи математической физики приводят к так называемым задачам на собственные значения, которые, как правило, представляют собой однородные уравнения с параметром. Значения параметра, при которых уравнение имеет ненулевые решения, называются собственными значениями, а соответствующие решения — собственными функциями.

Простейшие задачи на собственные значения решались Л. Эйлером, а широкое внимание эти задачи получили в XIX веке при формировании классической теории уравнений математической физики.

**2.1. Постановка и физический смысл задач на собственные значения.** Рассмотрим простейший пример, который приводит к задаче на собственные значения. Пусть имеется однородная струна длины  $l$ , концы которой закреплены и на которую не действуют никакие внешние силы.

Выберем начало координат в одном из концов струны, а ось  $x$  направим по струне. Функция  $u(x; t)$ , описывающая свободные малые колебания такой струны, удовлетворяет однородному дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

и однородным краевым условиям

$$u(0; t) = 0; \quad u(l; t) = 0.$$

Каждое конкретное движение струны определяется, кроме уравнения и краевых условий, еще некоторыми начальными условиями.

Изучим простейшие возможные движения рассматриваемой струны — так называемые стоячие волны. *Стоячей волной* называется такое движение, при котором формы струны в различные моменты времени подобны между собой. Стоячая волна задается функцией, имеющей вид

$$u(x; t) = X(x)T(t),$$

где функция  $T(t)$ , зависящая только от времени  $t$ , называется *законом колебания* и описывает характер движения отдельных точек струны, а функция  $X(x)$ , зависящая только от координаты  $x$ , описывает форму струны в различные моменты времени, одинаковую с точностью до множителя  $T(t)$ .

Для струны с закрепленными концами, прежде всего, очевидно, что функция  $X(x)$  должна удовлетворять условиям  $X(0) = 0$ ;  $X(l) = 0$ . Кроме того,  $X(x)$  и  $T(t)$  должны удовлетворять некоторым уравнениям, вытекающим из уравнения (1). Чтобы получить эти уравнения, подставим в выражение  $u$  через  $X$  и  $T$ ; в результате придем к равенству

$$X(x)T''(t) = a^2 T(t)X''(x).$$

Разделив обе части этого равенства на  $a^2 X(x)T(t)$ , получим

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Так как левая часть этого равенства зависит только от  $t$ , а правая часть от  $t$  не зависит, то эта левая часть, а значит, и правая равны одной и той же постоянной. Обозначим эту постоянную через  $-\lambda$ :

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda,$$

откуда  $T'' + \lambda a^2 T = 0$ ,  $X'' + \lambda X = 0$ . Это и есть простейшие задачи на собственные значения. Легко видеть, что постоянная  $\lambda$  может принимать только значения  $\lambda_n = \pi^2 n^2 / l^2$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), и у струны с закрепленными концами возможны только стоячие волны следующей формы:

$$X_n(x) = c \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad c = \text{const.}$$

Теперь найдем функции  $T_n(t)$ , соответствующие форме волны  $X_n(x)$ . Для этого подставим значение  $\lambda_n$  в уравнение для  $T$ :

$$T_n'' + \frac{a^2 \pi^2}{l^2} n^2 T_n = 0.$$

Общий интеграл этого уравнения имеет вид

$$T_n(t) = B_n \sin \frac{\pi a n}{l} t + C_n \cos \frac{\pi a n}{l} t = A_n \sin \left( \frac{\pi a n}{l} t + \varphi_n \right),$$

где  $B_n$  и  $C_n$  или  $A_n$  и  $\varphi_n$  — произвольные постоянные.

Используя  $X_n$  и  $T_n$ , можно написать окончательное выражение для всех возможных стоячих волн:

$$u_n(x; t) = A_n \sin \left( \frac{\pi a n}{l} t + \varphi_n \right) \sin \frac{\pi n x}{l},$$

где  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Таким образом,  $n$ -я стоячая волна описывает такое движение струны, при котором каждая ее точка совершает гармоническое колебание с одинаковой для всех точек частотой  $\pi a n / l$ . Амплитуды этих колебаний изменяются от точки к точке и равны  $A_n |\sin(\pi n x / l)|$  ( $A_n$  произвольно).

Так как свободные колебания рассматриваемой струны однозначно определяются ее начальной формой  $u|_{t=0}$  и начальными скоростями ее точек  $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}$ , то очевидно, что стоячая волна возникает тогда и только тогда, когда начальное отклонение и начальная скорость имеют вид

$$u|_{t=0} = D \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = E \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad D, E = \text{const.}$$

Этой стоячей волной будет

$$u(x; t) = \left( \frac{l}{\pi a n} E \sin \frac{\pi a n}{l} t + D \cos \frac{\pi a n}{l} t \right) \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

Величины  $\lambda_n$  называются также *собственными значениями*, а функции  $X_n(x)$  — *собственными функциями*.

Введем общее определение собственных значений и собственных функций. Пусть  $L$  — линейный оператор с областью определения  $D(L)$ . Рассмотрим линейное однородное уравнение

$$Lu = \lambda u, \tag{2}$$

где  $\lambda$  — комплексный параметр. Это уравнение имеет нулевое решение при всех  $\lambda$ . Может случиться, что при некоторых  $\lambda$  оно имеет ненулевые решения из  $D(L)$ . Те комплексные значения  $\lambda$ , при которых уравнение (2) имеет ненулевые решения из  $D(L)$ , называются *собственными значениями* оператора  $L$ , а соответствующие решения — *собственными элементами* (функциями), соответствующими этому собственному значению. Полное число  $r$  ( $1 \leq r \leq \infty$ ) линейно независимых собственных элементов, соответствующих данному собственному значению  $\lambda$ , называется *кратностью* этого собственного значения; если кратность  $r = 1$ , то  $\lambda$  называется *простым* собственным значением.

Если кратность  $r$  собственного значения  $\lambda$  оператора  $L$  конечна и  $u_1, u_2, \dots, u_r$  — соответствующие линейно независимые собственные эле-

менты, то любая их линейная комбинация  $u_0 = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_r u_r$  также является собственным элементом, соответствующим этому собственному значению, и эта формула дает общее решение уравнения (2). Отсюда вытекает: *если решение уравнения  $Lu = \lambda u + f$  существует, то его общее решение представляется формулой*

$$u = u^* + \sum_{k=1}^r c_k u_k,$$

где  $u^*$  — частное решение, а  $c_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, r$ , — произвольные постоянные.

Собственные значения и собственные функции часто имеют четко выраженный физический смысл: в рассмотренном выше примере собственные значения  $\lambda_n$  определяют частоту гармонических колебаний струны, а собственные функции  $X_n$  — амплитуды колебаний.

**2.2. Задачи на собственные значения для дифференциальных операторов.** Рассмотрим более общий случай смешанной задачи для однородных дифференциальных уравнений и однородных краевых условий.

Пусть дана ограниченная область  $\Omega$  в пространстве одного, двух или трех измерений. Через  $P$  обозначим произвольную точку из области  $\Omega$  и через  $u(P)$  — функцию от координат этой точки. Рассмотрим линейный дифференциальный оператор от функции  $u$  вида

$$L[u] \equiv \operatorname{div} p \operatorname{grad} u - qu,$$

где  $p(P)$  и  $q(P)$  — функции, непрерывные внутри  $\Omega$  и на ее границе  $\partial\Omega$ . Сверх того будем предполагать, что  $p(P) > 0$  внутри и на границе области  $\Omega$ .

Если задача одномерна, то область  $\Omega$  сводится к интервалу  $(a, b)$  оси  $x$ . В этом случае под операторами  $\operatorname{grad}$  и  $\operatorname{div}$  следует понимать  $\frac{d}{dx}$ , а следовательно,

$$L[u] = \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{du}{dx} \right] - q(x)u \equiv p(x) \frac{d^2 u}{dx^2} + p'(x) \frac{du}{dx} - q(x)u.$$

На границе  $\partial\Omega$  области  $\Omega$  будем рассматривать однородные краевые условия вида где  $\Lambda[u] \equiv p \frac{\partial u}{\partial n} - \gamma u$ , или  $\Lambda[u] \equiv u$ . В первом случае говорят о *краевых условиях третьего рода* (или, если  $\gamma = 0$ , второго рода), во втором случае — о *краевых условиях первого рода*. Здесь  $\gamma$  означает непрерывную и неотрицательную функцию, заданную на  $\partial\Omega$ , а  $n$  — направление внутренней нормали к  $\partial\Omega$ .

В одномерном случае граница области состоит из двух концов интервала  $a$  и  $b$  и под производной  $\frac{\partial}{\partial n}$  следует понимать  $\frac{d}{dx}$  в точке  $a$  и  $-\frac{d}{dx}$  в точке  $b$ . Задание функции  $\gamma$  сводится тогда к заданию двух неотрицательных чисел  $\gamma_a$  и  $\gamma_b$ , а задание оператора  $\Lambda[u]$  — к операторам

$$\Lambda_a[u] = p(a) \frac{du(a)}{dx} - \gamma_a u(a), \quad \Lambda_b[u] = -p(b) \frac{du(b)}{dx} - \gamma_b u(b).$$

Иногда рассматриваются краевые условия иного типа — так называемые *условия периодичности*. Например, в одномерном случае такие условия задаются равенствами  $u(a) = u(b)$ ,  $p(a)u'(a) = p(b)u'(b)$ . Эти краевые условия также однородны, но их существенное отличие состоит в том, что в каждое из равенств входят обе точки  $a$  и  $b$ .

Рассмотрим следующую задачу:

$$L[u] + \lambda \rho u = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (3)$$

$$\Lambda[u] = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (4)$$

где  $\rho = \rho(P)$  — неотрицательная непрерывная в области  $\Omega$  функция, которая называется *весовой функцией* данной задачи или просто *весом*. Как мы видели в случае струны, решения  $u$ , удовлетворяющие краевым условиям, возможны при всех значениях  $\lambda$ .

Значения параметра  $\lambda$ , при которых существуют не тождественно равные нулю решения уравнения (3), удовлетворяющие краевым условиям (4), являются собственными значениями, а соответствующие им решения  $u$  — собственными функциями оператора  $L$ . Если собственных функций так «много», что любую функцию, заданную в области  $\Omega$  (удовлетворяющую некоторым естественным условиям гладкости), можно разложить в ряд по этим собственным функциям, то можно будет находить решение неоднородных задач в виде ряда по соответствующим собственным функциям.

В следующем пункте приведем ряд хорошо известных свойств задачи на собственные значения (3), (4).

**2.3. Свойства собственных значений и собственных функций.** Рассмотрим задачу (3), (4) и приведем ряд свойств собственных значений и собственных функций (в предположении, что они существуют).

1. Если существует собственное значение  $\lambda_0$ , то соответствующая ему собственная функция непрерывна вместе со своими производными до второго порядка в области  $\Omega$ .

Это свойство следует из общих теорем теории дифференциальных уравнений, если принять во внимание, что  $u_0$  является решением уравнения (3).

2. Если существует собственное значение  $\lambda$  и соответствующая ему собственная функция  $u_0$ , то при любой постоянной  $C$  функция  $Cu_0$  также является собственной функцией, соответствующей тому же собственному значению  $\lambda$ .

3. Если существует собственное значение  $\lambda$  и ему соответствуют две (или несколько) собственные функции  $u_1$  и  $u_2$ , то их сумма снова есть собственная функция, соответствующая тому же собственному значению.

Так как собственные функции определяются с точностью до постоянного множителя, то целесообразно ввести соглашение о выборе этого множителя. Часто бывает удобно выбрать этот множитель так, чтобы удовлетворялось соотношение

$$\int_{\Omega} \rho u_0^2 d\mu = 1. \quad (5)$$

(Здесь и в дальнейшем интеграл по области  $\Omega$  произвольного числа измерений обозначается одним знаком  $\int$ , а элемент длины, площади или объема этой области обозначается  $d\mu$ .)

Функцию, удовлетворяющую условию (5), называют *нормированной с весом  $\rho$* . В дальнейшем будем предполагать (если не оговорено противное), что все рассматриваемые собственные функции *нормированы с весом  $\rho$* .

4. Две собственные функции  $u_1$  и  $u_2$ , соответствующие различным собственным значениям  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , ортогональны между собой в области  $\Omega$  с весом  $\rho$ , т. е.  $\int_{\Omega} \rho(P) u_1(P) u_2(P) d\mu = 0$ .

5. Если нормированная собственная функция  $u_0$  соответствует собственному значению  $\lambda_0$ , то  $K[u_0, u_0] = \lambda_0$ , где

$$K[u, v] = - \int_{\Omega} L[u] v d\mu.$$

Так как по предположению всегда  $\rho > 0$  и  $\gamma \geq 0$ , то

$$K[u, u] \geq \int_{\Omega} \rho u^2 d\mu,$$

и если функция  $q/\rho$  ограничена снизу числом  $m$ , то для нормированных собственных функций имеем

$$\lambda = K[u, u] \geq m.$$

Последнее неравенство дает простую оценку снизу собственных значений. В частности, если функция  $q$  неотрицательна, то (так как  $\rho > 0$ ) все собственные значения неотрицательны. Если функция  $q$  ограничена снизу положительным числом, то все собственные значения положительны.

**2.4. Ряды Фурье.** Теоретической базой метода собственных функций является теория рядов Фурье.

Пусть  $\Omega$  — ограниченная область, а  $\rho$  — заданная в ней весовая функция непрерывная и неотрицательная в  $\Omega$  и на ее границе и строго положительная внутри  $\Omega$ .

Конечная или бесконечная система функций  $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ , заданных в области  $\Omega$ , называется *ортонормированной системой с весом  $\rho$* , если:

а) все функции  $u_n$  нормированы с весом  $\rho$ :  $\int_{\Omega} \rho u_n^2 d\mu = 1$ ;

б) любые две функции  $u_i$  и  $u_k$  ( $i \neq k$ ) ортогональны между собой с весом  $\rho$ .

Если вес равен единице, то обычно говорят, что система *ортонормирована* (не указывая веса).

Пусть дана ортонормированная с весом  $\rho$  система  $u_1, u_2, \dots$  и функция  $f$ , заданная в  $\Omega$ , представима в виде линейной комбинации функций этой системы:  $f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i u_i$ .

Выражение  $a_k = \int_{\Omega} f u_k \rho d\mu$  называется *коэффициентом Фурье функции  $f$  по системе  $\{u_k\}$* . Ряд  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i u_i$ , у которого коэффициентами  $a_i$  служат коэффициенты Фурье функции  $f$ , называется *рядом Фурье этой функции по ортонормированной системе  $\{u_i\}$* .

В различных вопросах важную роль играет следующая проблема. Дана функция  $f$  в области  $\Omega$ , вообще говоря, не представимая в виде линейной комбинации конечного числа функций  $\{u_i\}$ . Требуется при фиксированном  $n$  подобрать числа  $c_i$  так, чтобы функция  $\sum_{i=1}^n c_i u_i$  наилучшим образом приближенно представляла функцию  $f$ , и найти погрешность этого приближенного представления. Часто используется так называемая квадратичная погрешность.

*Квадратичной погрешностью с весом  $\rho$  при замене функции  $f$  другой функцией  $\phi$  называется выражение*

$$\delta = \sqrt{\int_{\Omega} [f - \phi]^2 \rho d\mu}.$$

Таким образом, приходим к задаче: подобрать коэффициенты  $c_i$  в сумме  $\sum_{i=1}^n c_i u_i$  так, чтобы выражение

$$\delta_n^2 = \int_{\Omega} \left[ f - \sum_{i=1}^n c_i u_i \right]^2 \rho d\mu$$

было наименьшим, и вычислить  $\delta_n^2$  для этих значений  $c_i$ .

Известно, что *наилучшее в смысле квадратичной погрешности с весом  $\rho$  приближение функции  $f$  линейной комбинацией функций  $u_i$  ортонормированной системы получается, если коэффициенты линейной комбинации равны коэффициентам Фурье функции  $f$  по системе  $u_i$* . Погрешность этого приближения определяется по формуле

$$\delta_n^2 = \int_{\Omega} f^2 \rho d\mu - \sum_{i=1}^n a_i^2.$$

Отсюда получаем весьма важное неравенство

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \leq \int_{\Omega} f^2 \rho d\mu.$$

Переходя теперь к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , получим неравенство

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \leq \int_{\Omega} f^2 \rho d\mu,$$

обычно называемое *неравенством Бесселя*.

Условие  $\delta_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  эквивалентно требованию, чтобы в неравенстве Бесселя имел место знак равенства. Тогда приходим к *равенству Парсеваля*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 = \int_{\Omega} f^2 \rho \, d\mu.$$

Если средняя квадратичная погрешность представления функции  $n$ -й частичной суммой ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k$  стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ , то говорят, что ряд этот *сходится в среднем* к функции  $f$  или что функция  $f$  разложена в ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k$  в смысле сходимости в среднем. Таким образом, равенство Парсеваля является необходимым и достаточным условием разложимости функции  $f$  в свой ряд Фурье в смысле сходимости в среднем.

Следуя В. А. Стеклову, ортонормированную систему  $\{u_k\}$  называют *замкнутой в области  $\Omega$* , если любую функцию  $f$ , для которой сходится  $\int_{\Omega} f^2 \rho \, d\mu$ , можно сколь угодно точно (в смысле квадратичной погрешности) представить линейной комбинацией функций этой системы, или, другими словами, если каждая функция  $f$  может быть разложена в сходящийся в среднем ряд Фурье по функциям данной системы. Из вышесказанного следует, что *требование замкнутости ортонормированной системы эквивалентно требованию, чтобы для любой функции  $f$  выполнялось равенство Парсеваля*. Поэтому это равенство, следуя опять-таки В. А. Стеклову, называют *условием замкнутости*.

**2.5. Собственные функции некоторых одномерных задач.** Приведем несколько важных примеров собственных значений и собственных функций одномерных задач вида  $L[u] + \lambda u = 0$ .

**Пример 1.** Интервал  $(0, l)$ . Оператор  $L[u] = u''$ . Краевые условия  $u(0) = u(l) = 0$ . Вес  $\rho = 1$ . Уравнение  $u'' + \lambda u = 0$ . Собственные значения имеют вид  $\lambda_n = \pi^2 n^2 / l^2$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Соответствующие собственные функции определяются по формуле  $u_n = \sin(\pi n x / l)$ .

**Пример 2.** Интервал  $(0, l)$ . Оператор  $L[u] = u''$ . Краевые условия  $u'(0) = u'(l) = 0$ . Вес  $\rho = 1$ . Собственные значения  $\lambda_n$  определяются по формуле  $\lambda_n = b(n-1)^2 \pi^2 / l^2$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), а собственные функции имеют вид  $u_1 = \text{const}$ ,  $u_n = \cos((n-1)\pi x / l)$ ,  $n = 2, 3, \dots$

**Пример 3.** Интервал  $(0, l)$ . Оператор  $L[u] = u''$ . Краевые условия  $u(0) = u'(l) = 0$ . Вес  $\rho = 1$ . Собственные значения определяются по формуле  $\lambda_n = \pi^2 (n-1/2)^2 / l^2$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , а собственные функции имеют вид  $u_n = \sin(\pi(n-1/2)x / l)$ ,  $n = 1, 2, \dots$

**Пример 4.** Интервал  $(0, l)$ . Оператор  $L[u] = u''$ . Краевые условия  $u(0) = 0$ ,  $u'(l) + \beta u(l) = 0$  (где  $\beta > 0$ ). Вес  $\rho = 1$ . Собственные значения  $\lambda_n$  определяются как решения уравнения  $\text{tg} l \sqrt{\lambda} = -\sqrt{\lambda} / \beta$ , при этом

$$\frac{\pi^2}{l^2} \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 < \lambda_n < \frac{\pi^2}{l^2} n^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Собственные функции определяются по формуле  $u_n = \sin \sqrt{\lambda_n} x$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Аналогично рассматривается случай  $u'(0) - \alpha u(0) = 0$ ,  $u(l) = 0$ .

**Пример 5.** Интервал  $(0, l)$ . Оператор  $L[u] = u''$ . Краевые условия  $u'(0) - \alpha u(0) = u'(l) + \beta u(l) = 0$ , где  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$ ,  $\alpha + \beta > 0$ . Вес  $\rho = 1$ . Собственные значения  $\lambda_n$  определяются как решения уравнения

$$\operatorname{ctg} l \sqrt{\lambda} = \frac{\lambda - \alpha \beta}{\sqrt{\lambda}(\alpha + \beta)},$$

при этом

$$\frac{\pi^2}{l^2} (n-1)^2 < \lambda_n < \frac{\pi^2}{l^2} n^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Собственные функции имеют вид  $u_n = \sin(\sqrt{\lambda_n} x + \varphi_n)$ , где  $\varphi_n = \arctg \sqrt{(\lambda_n/\alpha)}$ ,  $n = 1, 2, \dots$

**Пример 6.** Интервал  $(0, l)$ . Оператор  $L[u] = u''$ , краевые условия периодические:  $u(0) = u(l)$ ;  $u'(0) = u'(l)$ . Вес  $\rho = 1$ . Собственные значения определяются по формулам  $\lambda_0 = 0$ ,  $\lambda_n = \{\pi^2(n+1)^2/l^2, n \text{ нечетное}; \pi^2 n^2/l^2, n \text{ четное}\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , а соответствующие собственные функции имеют вид  $u_0 = \text{const}$ ,  $u_n = \{\sin(\pi(n+1)x/l), n \text{ нечетное}; \cos(\pi nx/l), n \text{ четное}\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Более сложные примеры приводят к собственным функциям специального вида — так называемым специальными функциями, которые рассмотрим в следующем разделе.

### 3. Специальные функции

При решении уравнений математической физики и краевых задач для них не всегда удается обойтись запасом стандартных элементарных функций. Каждое уравнение порождает класс решений, которые не всегда являются элементарными функциями. При этом среди неэлементарных функций, встречающихся при решении наиболее простых и наиболее важных уравнений, есть функции, появляющиеся многократно, и потому хорошо исследованные и получившие те или иные названия. Такие функции принято называть *специальными функциями*. Как правило, они являются собственными функциями конкретных задач математической физики. Чаще всего это функции одного переменного, возникающие при разделении переменных, как, например, собственные функции оператора Штурма–Лиувилля  $L$  вида

$$Ly = -(k(x)y')' + q(x)y$$

на некотором конечном или бесконечном интервале. Особенно часто встречается случай, когда функция  $k(x)$  обращается в нуль по крайней мере на одном из концов этого интервала. В этом разделе рассматриваются некоторые наиболее важные специальные функции [25].

**3.1. Сферические функции.** *Сферической функцией* порядка  $k = 1, 2, \dots$  называется сужение на единичную сферу  $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  однородного гармонического в  $\mathbb{R}^n$  полинома степени  $k$ . Вид сферических функций можно найти с помощью метода разделения переменных.

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Лапласа в единичном шаре пространства  $\mathbb{R}^3$ :

$$\Delta u = 0 \quad \text{при } r < 1, \quad u(r, \theta, \varphi) = f(\theta, \varphi) \quad \text{при } r = 1.$$

Здесь  $(r, \theta, \varphi)$  — сферические координаты в  $\mathbb{R}^3$ .

Рассмотрим решения уравнения Лапласа, имеющие вид  $u(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi)$ . Для определения  $R$  получаем уравнение Эйлера

$$r^2 R'' + 2rR' - \lambda R = 0,$$

а для определения  $Y(\theta, \varphi)$  — уравнение

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + \lambda Y = 0,$$

причем функция  $Y$  должна быть ограниченной при  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$  и периодической по  $\varphi$ .

Решение такой задачи для функции  $Y(\theta, \varphi)$  также ищем методом разделения переменных, полагая  $Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ . Это приводит к уравнениям

$$\Phi'' + \mu\Phi = 0,$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left( \lambda - \frac{\mu}{\sin^2 \theta} \right) \Theta = 0.$$

Из условия периодичности функции  $\Phi(\varphi)$  следует, что  $\mu = m^2$  и  $\Phi(\varphi) = c_1 \cos m\varphi + c_2 \sin m\varphi$ , где  $m = 0, 1, \dots$ . Функция  $\Theta$  должна быть ограниченной при  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$ . Пусть  $\cos \varphi = t$ ,  $\Theta(\theta) = X(t)$ . Получаем уравнение

$$\frac{d}{dt} \left[ (1-t^2) \frac{dX}{dt} \right] + \left( \lambda - \frac{m^2}{1-t^2} \right) X = 0, \quad -1 \leq t \leq 1.$$

Решения этого уравнения, ограниченные при  $|t| \leq 1$ , существуют только при  $\lambda = k(k+1)$ , где  $k$  — целое число,  $m = 0, +1, \dots, +k$ , и называются *присоединенными функциями Лежандра*  $P_k^{(m)}(t)$ . Эти функции (при каждом фиксированном  $m = 0, 1, \dots$ ) образуют полную ортогональную систему на отрезке  $\{t : |t| \leq 1\}$ .

Каждое решение уравнения Лапласа в шаре вида  $R(r)Y(\theta, \varphi)$  совпадает с одной из *шаровых* функций  $u = r^k Y_k(\theta, \varphi)$ , где  $Y_k(\theta, \varphi)$  — *сферические функции*:  $Y_k(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^k (A_{km} \cos m\varphi + B_{km} \sin m\varphi) P_k^{(m)}(\cos \theta)$ . Таким образом, сферические функции являются сужениями на единичную сферу шаровых функций.

Решение задачи Дирихле имеет вид  $u(r, \theta, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k Y_k(\theta, \varphi)$ , где коэффициенты  $A_{km}$  и  $B_{km}$  подобраны так, что  $\sum_{k=0}^{\infty} Y_k(\theta, \varphi) = f(\theta, \varphi)$ .

Функции  $Y_k(\theta, \varphi)$  образуют ортогональную систему на сфере. Сферические функции в  $R^n$  обладают аналогичными свойствами.

Если записать оператор Лапласа в сферических координатах:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \delta,$$

где  $\delta$  — оператор Лапласа–Бельтрами на сфере:

$$\delta v = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{q_j \sin^{n-j-1} \theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \left( \sin^{n-j-1} \theta_j \frac{\partial v}{\partial \theta_j} \right),$$

$$q_1 = 1; \quad q_j = (\sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{j-1})^2, \quad j \geq 2,$$

то получим, что сферические функции  $Y_{k,n}(w)$  удовлетворяют уравнению  $\delta Y_{k,n}(w) - k(k+n-2)Y_{k,n}(w) = 0$ . Таким образом,  $Y_{k,n}(w)$  являются собственными функциями оператора  $\delta$  с собственным значением  $\lambda_k = k(k+n-2)$ . Кратность этого собственного значения равна  $m_{k,n}$ . Будучи собственными функциями симметричного оператора  $\delta$ , сферические функции различных порядков ортогональны в  $L_2(S^{n-1})$ . Система сферических функций полна в  $L_p(S^{n-1})$  при любом  $p$ ,  $1 \leq p < \infty$ .

**3.2. Полиномы Лежандра.** Полиномы Лежандра тесно связаны с оператором Лапласа и могут быть определены следующим способом.

Пусть  $x, y$  — точки в  $R^3$  и  $\theta$  — угол между их радиусами-векторами. Тогда  $|x-y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2|x||y|\cos\theta$ . Положим  $|x| = r$ ,  $y = r_0$ ,  $\cos\theta = t$ . Фундаментальное решение оператора Лапласа в  $R^3$  имеет вид  $-\frac{1}{4\pi|x-y|}$ .

Функция  $\Psi(\rho, t) = (1 + \rho^2 - 2\rho t)^{-1/2}$ , где  $0 < \rho < 1$ ,  $-1 \leq t \leq 1$ , называется производящей функцией полиномов Лежандра. Если разложить ее в ряд по степеням  $\rho$ :

$$\Psi(\rho, t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) \rho^k,$$

то коэффициенты  $P_k(t)$  и будут полиномами Лежандра.

Справедливы рекуррентные формулы  $(k+1)P_{k+1}(t) - t(2k+1)P_k(t) + kP_{k-1}(t) = 0$ ,  $P'_{k+1}(t) - 2tP'_k(t) + P'_{k-1}(t) = P_k(t)$ , откуда следует, что  $(1-t^2)P''_k(t) - 2tP'_k(t) + k(k-1)P_k(t) = 0$ . Таким образом, полиномы  $P_k(t)$  являются собственными функциями в задаче Штурма–Лиувилля для оператора  $L$ :

$$Ly = \frac{d}{dt} \left( (1-t^2) \frac{dy}{dt} \right), \quad -1 \leq t \leq 1,$$

с собственными значениями  $-k(k+1)$ . Роль граничных условий здесь играет условие конечности  $y(1)$  и  $y(-1)$ , т.е. условие ограниченности решения при  $t \rightarrow 1-0$  и при  $t \rightarrow -1+0$ .

Степень полинома  $P_k(t)$  равна  $k$  при  $k = 0, 1, \dots$ . Поэтому полиномы  $P_k(t)$  образуют полную систему на  $[-1, 1]$ . При этом справедливо

равенство  $\int_{-1}^1 P_k(t)P_l(t)dt = 0$  при  $k \neq l$ . Отсюда следует, что уравнение  $Ly = \lambda y$  не имеет нетривиального ограниченного на  $[-1, 1]$  решения при  $\lambda \neq k(k+1)$ .

Непосредственной проверкой можно убедиться, что верна формула Родрига

$$P_k(t) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dt^k} [(t^2 - 1)^k].$$

Функции  $P_k^{(m)}(t) = (1 - t^2)^{m/2} \frac{d^m}{dt^m} P_k(t)$ ,  $m = 0, 1, \dots, k$ , удовлетворяют уравнению Лежандра  $(1 - t^2)y'' - 2ty' + \lambda y = 0$  и ограничены при  $|t| \leq 1$ , если  $\lambda = k(k+1)$ . Функции  $\{P_k^{(m)}(t)\}$  при  $k = m, m+1, \dots$  образуют полную ортогональную систему функций на отрезке  $[-1, 1]$ .

**3.3. Цилиндрические функции.** Многие задачи математической физики приводят к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0, \quad (6)$$

которое называется *уравнением Бесселя*. Решения этого уравнения называются *цилиндрическими функциями*  $n$ -го порядка.

Рассмотрим уравнение Бесселя (6), где  $n = \nu$  — произвольное вещественное число. Его решение можно искать в виде  $y = x^\sigma \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ . Подставляя этот ряд в уравнение, получим

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{a_0}{4^k k! (\nu+1)(\nu+2) \dots (\nu+k)}, \quad a_{2k-1} = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Если  $\nu \neq -m$ , где  $m$  — натуральное число, то коэффициенты  $a_{2k}$  определены для всех  $k$ . Положим  $a_0 = 1/(2^\nu \Gamma(\nu+1))$ . Тогда

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{1}{2^{2k+\nu} \Gamma(k+1) \Gamma(k+\nu+1)}.$$

При  $\nu \geq 0$  ряд

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\Gamma(k+1) \Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \quad (7)$$

сходится на всей прямой (и даже на всей комплексной плоскости). Его сумма  $J_\nu(x)$  называется *функцией Бесселя первого рода*  $\nu$ -го порядка.

Наиболее часто в приложениях встречаются функции

$$J_0(x) = 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^6 + \dots,$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{(2!)} \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{1}{(2!3!)} \left(\frac{x}{2}\right)^5 - \dots$$

Функция  $J_\nu(x)$  при  $\nu > 0$  имеет в точке  $x = 0$  нуль порядка  $\nu$ , а функция  $J_{-\nu}(x)$  — полюс порядка  $\nu$ . При  $\nu = 0$  функция  $J_0(x)$  принимает в точке

$x = 0$  конечное значение. Каждое решение уравнения Бесселя при  $n = 0$ , линейно независимое с  $J_0(x)$ , имеет в точке  $x = 0$  логарифмическую особенность.

Можно выделить другие важные классы цилиндрических функций. Так, функцией Неймана, или цилиндрической функцией второго рода, называется решение  $N_\nu(x)$  уравнения Бесселя, для которого при  $x \rightarrow \infty$

$$N_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi \nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right).$$

Функциями Ханкеля первого и второго рода  $H_\nu^{(1)}(x)$  и  $H_\nu^{(2)}(x)$  называются цилиндрические функции, для которых при  $x \rightarrow \infty$

$$H_\nu^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\left\{i\left(x - \frac{\pi \nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right\} + O\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right),$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\left\{-i\left(x - \frac{\pi \nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right\} + O\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right).$$

Важную роль в математической физике играют функции Бесселя от мнимого аргумента. Функция  $I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix)$  может быть определена как сумма ряда:

$$I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$

или как решение уравнения

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0,$$

ограниченное при  $x = 0$  (при  $\nu = 0$  накладывается условие  $I_\nu(0) = 1$ ).

### 3.4. Полиномы Чебышева, Лагерра и Эрмита. Решения уравнения

$$(1-z^2)\frac{d^2w}{dz^2} - z\frac{dw}{dz} + n^2z = 0, \quad -1 < z < 1,$$

имеющие вид

$$T_n(z) = \cos(n \arccos z),$$

$$U_n(z) = \sin(n \arccos z),$$

называются полиномами Чебышева 1-го и 2-го рода.

Полиномы Чебышева 1-го рода могут быть определены с помощью производящей функции

$$\frac{1-t^2}{1-2tz+t^2} = T_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} T_n(z)t^n.$$

Они удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$T_{n+1}(z) - 2zT_n(z) + T_{n-1}(z) = 0$$

и соотношениям ортогональности

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(z) T_m(z)}{\sqrt{1-z^2}} dz = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{если } m = n \neq 0, \\ \pi & \text{если } m = n = 0. \end{cases}$$

Среди всех полиномов  $n$ -й степени со старшим коэффициентом 1 полином  $2^{1-n}T_n(z)$  выделяется тем, что он менее всего уклоняется от нуля на отрезке  $[-1, 1]$ .

Приведем несколько первых полиномов Чебышева:

$$\begin{aligned} T_0(z) &= 1, & T_1(z) &= z, & T_2(z) &= 2z^2 - 1, \\ T_3(z) &= 4z^3 - 3z, & T_4(z) &= 8z^4 - 8z^2 + 1. \end{aligned}$$

Полиномы  $T_n(z)$  образуют полную систему на отрезке  $[-1, 1]$ .

Полиномиальные решения дифференциального уравнения

$$z \frac{d^2 w}{dz^2} + (\alpha + 1 - z) \frac{dw}{dz} + nw = 0,$$

где  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ , называются *полиномами Лагерра*. В частности, этому уравнению удовлетворяет функция

$$L_n^{(\alpha)}(z) = e^z z^{-\alpha} \frac{d^n}{dz^n} (e^{-z} z^{n+\alpha}).$$

Например, при  $\alpha = 0$  получаем решение

$$L_n(z) = 1 - C_n^1 \frac{z}{1!} + C_n^2 \frac{z^2}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{z^n}{n!}.$$

Полиномы Лагерра можно найти с помощью производящей функции:

$$e^{-t} (1+t)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha-n)}(z) \frac{t^n}{n!}.$$

Дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 w}{dz^2} - 2z \frac{dw}{dz} + 2nw = 0$$

при  $n = 0, 1, 2, \dots$  определяет *полиномы Эрмита*

$$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n}{dz^n} (e^{-z^2}).$$

Полиномы Эрмита связаны с полиномами Лагерра соотношениями:

$$H_{2m}(z) = (-1)^m 2^{2m} L_m^{(-1/2)}(z^2), \quad H_{2m+1}(z) = (-1)^m 2^{2m+1} L_m^{(1/2)}(z^2).$$

Производящей функцией для полиномов Эрмита служит функция

$$e^{2zt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(z) \frac{t^n}{n!}.$$

## Функции

$$D_n(z) = 2^{-n/2} e^{-z^2/4} H_n\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)$$

называются *функциями параболического цилиндра*. Они удовлетворяют уравнению

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \left(n + \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4}\right) w = 0.$$

Эти функции, как и полиномы Эрмита, образуют полную ортогональную систему функций на прямой.

**3.5. Функции Матье и гипергеометрические функции.** *Функции Матье*, или *функции эллиптического цилиндра*, — это решения уравнения Матье

$$\frac{1}{4} \frac{d^2 w}{dz^2} + (\alpha - 4q \cos(2z)) w = 0.$$

*Периодическими функциями Матье* называются решения этого уравнения, имеющие период  $2\pi$ . В этом случае  $\alpha$  можно рассматривать как собственное значение оператора  $\frac{1}{4} \frac{d^2}{dz^2} - 4q \cos(2z)$  с периодическими условиями. Для каждого вещественного  $q$  имеется бесконечная последовательность собственных значений, которым соответствуют собственные функции  $\varphi_n(z, q)$ . Эти функции являются целыми по  $z$  и образуют на отрезке  $[0, 2\pi]$  полную ортогональную систему.

*Конфлюэнтными гипергеометрическими функциями* называются решения вырожденного гипергеометрического уравнения

$$z \frac{d^2 w}{dz^2} + (c - z) \frac{dw}{dz} - aw = 0.$$

При  $c = 2a$  эти функции являются функциями Бесселя, при  $c = 1/2$  — функциями параболического цилиндра, при  $a = -n$  — полиномами Лагерра.

Если  $c \neq 0, -1, -2, \dots$ , то этому уравнению удовлетворяет функция Куммера

$$\Phi(a, c, z) = 1 + \frac{a}{c} \frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)} \frac{z^2}{2!} + \frac{a(a+1)(a+2)}{c(c+1)(c+2)} \frac{z^3}{3!} + \dots$$

*Гипергеометрические функции* — это решения гипергеометрического уравнения

$$z(1-z) \frac{d^2 w}{dz^2} + (c - (a+b+1)z) \frac{dw}{dz} - abw = 0,$$

где  $a, b, c$  — комплексные параметры. Это уравнение изучалось Эйлером, Гауссом, Риманом, Клейном и многими другими. Ему удовлетворяет гипергеометрический ряд Гаусса

$$F(a, b, c, z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n (1)_n} z^n,$$

сходящийся при  $|z| < 1$ . Здесь

$$(a)_0 = 1, \quad (a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = a(a+1)\dots(a+n-1), \quad n = 1, 2, \dots$$

Функция Куммера получается из  $F$  предельным переходом:

$$\Phi(a, c, z) = \lim_{b \rightarrow \infty} F(a, b, c, z/b).$$

Отметим, что  $F(n+1, -n, 1, 1/2 - z/2)$  при натуральном  $n$  совпадает с полиномом Лежандра. Присоединенные функции Лежандра получаются из  $F$ , если  $2c = a + b + 1$ .

## 4. Метод собственных функций

Метод собственных функций состоит в отыскании решений задач математической физики в виде рядов по собственным функциям операторов, входящих в исходную задачу.

**4.1. Общая схема метода собственных функций.** Предположим, что рассматривается задача математической физики, записанная в виде линейного (неоднородного) уравнения

$$Lu = F, \tag{8}$$

где  $L$  — линейный оператор с областью определения  $D(L)$ ,  $F$  — заданная функция,  $u \in D(L)$  — искомое решение.

Рассмотрим задачу на собственные значения  $Lu = \lambda u$  и предположим, что нам известны ортонормированные функции  $\{u_n\}$  оператора  $L$ , соответствующие собственным значениям  $\lambda_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , причем  $\lambda_n$  не обращаются в нуль. Пусть правая часть  $F$  уравнения (8) представима в виде ряда (конечного или бесконечного) по этим собственным функциям:  $F = \sum_n F_n u_n$ , где  $F_n$  — известные коэффициенты.

Метод собственных функций заключается в следующем. Ищем решение задачи (8) в виде ряда по собственным функциям  $u_n$ :  $u = \sum_n c_n u_n$ . Подставляя этот ряд в уравнение (8), получаем  $\sum_n c_n L u_n = \sum_n F_n u_n$ . Поскольку  $Lu_n = \lambda_n u_n$ , то, используя ортогональность  $\{u_n\}$ , приходим к соотношению  $c_n \lambda_n = F_n$ . Значит,  $c_n = F_n / \lambda_n$ , и решение  $u$  имеет вид

$$u = \sum_n \frac{F_n}{\lambda_n} u_n.$$

Если в бесконечном ряде ограничиться  $N$  первыми слагаемыми, то функция вида

$$u^{(N)} = \sum_{n=1}^N \frac{F_n}{\lambda_n} u_n$$

называется *приближением  $N$ -го порядка к  $u$* .

В случае, если при некотором  $n = m$  собственное значение  $\lambda_m$  есть нуль кратности  $r$  и  $F_m = 0$ , то общее решение уравнения (8) представляется формулой

$$u = \sum_{n \neq m} \frac{F_n}{\lambda_n} u_n + \sum_{k=1}^r c_k u_{m_k},$$

где  $c_k$  — произвольные постоянные, а  $u_{m_k}$ ,  $k = 1, 2, \dots, r$ , — линейно независимые собственные функции, соответствующие  $\lambda_m$ .

Таким образом, метод собственных функций дает возможность представить решение задачи (8) в виде ряда по собственным функциям оператора  $L$ , входящего в исходное уравнение.

Метод собственных функций применяется для широкого класса смешанных задач математической физики.

#### 4.2. Метод собственных функций для дифференциальных уравнений математической физики. Рассматриваются:

1) *дифференциальное уравнение*

$$\left[ \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial u}{\partial t} \right] - \frac{L[u]}{\rho(P)} = f(P; t), \quad (9)$$

где  $L[u]$  — эллиптический оператор описанного в разделе 2 вида, заданный в области  $\Omega$  пространства одного, двух или трех измерений,  $P$  — точка области  $\Omega$ ,  $\rho(P)$  — функция, заданная в  $\Omega$ . Через  $I_\alpha$  обозначим интервал оси  $t$ , а именно:  $(0, \infty)$ , если  $\alpha \geq 0$ , и  $(0, T)$ , если  $\alpha < 0$ . Коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  — функции от  $t$ , заданные и не меняющие знака на  $I_\alpha$ . Правая часть уравнения  $f(P; t)$  — функция, определенная для точек  $P$  из  $\Omega$  и значений  $t$  из  $I_\alpha$ ;

2) *краевое условие на границе  $\partial\Omega$  области  $\Omega$* :

$$\Lambda[u] = \chi(P; t), \quad (10)$$

где функция  $\chi(P; t)$  задана для точек  $P$  на  $\partial\Omega$  и значений  $t$  из  $I_\alpha$ . Оператор  $\Lambda[u]$  описанного в разделе 2 вида задан на  $\partial\Omega$ , его вид и коэффициенты не зависят от  $t$ ;

3) при  $\alpha < 0$  *краевые условия*

$$\Lambda_1[u]|_{t=0} = \varphi(P), \quad \Lambda_2[u]|_{t=T} = \psi(P); \quad (11)$$

при  $\alpha = 0$  *начальное условие*

$$u|_{t=0} = \varphi(P) \quad (12)$$

и при  $\alpha > 0$  *начальные условия*

$$u|_{t=0} = \varphi(P), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi(P), \quad (13)$$

где функции  $\varphi(P)$  и  $\psi(P)$  заданы и непрерывны в  $\Omega$ ,  $\Lambda_1[u]$  и  $\Lambda_2[u]$  — одномерные операторы по переменной  $t$  с постоянными коэффициентами описанного в разделе 2 вида, заданные в  $\Omega$ .

Системы уравнений (9)–(13) задают следующие задачи:

а) при  $\alpha > 0$  уравнение (9) является *гиперболическим*, задача является *смешанной* с краевым условием (10) и начальными условиями (13);

б) при  $\alpha = 0$ ,  $\beta > 0$  уравнение (9) *параболическое*, и имеем для него такую же *смешанную* задачу, но с одним начальным условием (12);

в) при  $\alpha = \beta = 0$  имеем *краевую* задачу для области  $\Omega$  с краевым условием (10) на ее границе;

г) при  $\alpha < 0$  уравнение (9) является *эллиптическим*. Этот случай может представиться, когда  $t$  обозначает одну из пространственных координат, а область  $\Omega$  менее чем трехмерна. Область  $\Omega$  и интервал  $I_\alpha$  определяют (если область  $\Omega$  двумерна) цилиндр с образующими, параллельными оси  $t$ , и основаниями в плоскостях  $t = 6$  и  $t = T$  или (если  $\Omega$  одномерна) прямоугольник. Для этого эллиптического уравнения имеем краевую задачу в области  $\Omega$  с краевыми условиями (10) на боковой поверхности цилиндра (или боковых сторонах прямоугольника) и (11) на его основаниях.

Предположим, что задача о собственных функциях для области  $\Omega$ , оператора  $L[u]$ , веса  $\rho$  и краевого условия  $\Lambda[v] = 0$  решена; обозначим через  $\lambda_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) собственные значения и через  $v_k$  — (нормированные) собственные функции.

Допустим, что  $u(P; t)$  является решением одной из перечисленных выше задач. Разложим это решение в ряд Фурье по функциям  $\{v_k\}$ . Коэффициенты этого разложения будут, очевидно, функциями от  $t$ , и обозначим их через  $w_k(t)$ , так что

$$u(P; t) = \sum_{k=2}^{\infty} w_k(t) v_k(P), \quad w_k(t) = \int_{\Omega} u(P; t) v_k(P) \rho(P) d\mu.$$

Для нахождения коэффициентов  $w_k(t)$  умножим уравнение (9) на функцию  $v_k(P) \rho(P)$  и проинтегрируем полученное равенство по области  $\Omega$ . Тогда получаем

$$\alpha w_k'' + \beta w_k' + \lambda_k w_k = a_k(t) + X_k(t), \quad (14)$$

где

$$a_k(t) = \int_{\Omega} f v_k \rho d\mu,$$

$$X_k(t) = \begin{cases} - \int_{\partial\Omega} v_k \chi d\sigma & \text{в случае краевого условия третьего рода,} \\ \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v_k}{\partial n} \chi d\sigma & \text{в случае краевого условия первого рода.} \end{cases}$$

Таким образом, получено *обыкновенное дифференциальное уравнение для  $k$ -го коэффициента Фурье  $w_k$  искомой функции  $u$* . Это дифференциальное уравнение является следствием исходного дифференциального уравнения в частных производных (9) и краевого условия (10). Рассмотрим

рим, как в каждом из четырех случаев, объединенных нашей схемой, удовлетворить добавочным условиям задачи.

Случай а) и б). Если  $\alpha > 0$ , или  $\alpha = 0$  и  $\beta > 3$ , т. е. в случае смешанной задачи, начальные условия (12) и (13) дают начальные условия для  $w_k$ . Действительно,

$$w_k(0) = \int_{\Omega} u(P; 0) v_k \rho \, d\mu = \int_{\Omega} \varphi v_k \rho \, d\mu = b_k$$

и

$$\left. \frac{dw_k}{dt} \right|_{t=0} = \int_{\Omega} \left. \frac{\partial u(P, 0)}{\partial t} \right|_{t=0} v_k \rho \, d\mu = \int_{\Omega} \psi v_k \rho \, d\mu = c_k,$$

где через  $b_k$  обозначены коэффициенты Фурье функции  $\varphi$ , а через  $c_k$  — функции  $\psi$  (если  $\alpha > 0$ ). При  $\alpha > 0$  уравнение (14) и два начальных условия определяют единственное решение. При  $\alpha = 0$ ,  $\beta > 0$  уравнение (14) первого порядка и одного (первого) условия достаточно для однозначного определения  $w_k$ .

Случай j). При  $\alpha = \beta = 0$  уравнение (14) не является дифференциальным, и поэтому, естественно, нет более никаких добавочных условий. Остановимся подробнее на исследовании уравнения (14) в этом случае. Если ни одно  $\lambda_k$  не равно нулю, то это уравнение, очевидно, разрешимо при любом  $k$  и  $w_k = \frac{1}{\lambda_k} (a_k + X_k)$ . Коэффициенты  $w_k$  оказываются постоянными, и ряд Фурье дает искомое решение. Если же одно из  $\lambda_k$ , например,  $\lambda_j$ , равно нулю, то уравнение (14) может иметь решение при  $k = j$  только при условии, что  $a_j + X_j = 0$ . Если это условие выполнено, то  $w_k$  произвольно, и потому ряд Фурье дает бесчисленное множество решений, отличающихся друг от друга на собственные функции, соответствующие нулевым собственным значениям.

Таким образом, краевая задача оказывается корректной не всегда. Именно, она корректна, если нуль не является собственным значением оператора  $L[u]$  при рассматриваемом краевом условии и весе. В противном случае, т. е. если какое-нибудь  $\lambda_j = 0$ , краевая задача имеет решения, и притом бесчисленное множество, лишь для таких правых частей уравнения (9) и краевого условия (10), при которых  $a_j + X_j = 0$ . В применении к оператору  $L[u] \equiv \Delta u$  отсюда можно сделать следующие выводы. Оператор  $\Delta u$  имеет нулевое собственное значение только при краевом условии  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ . В этом последнем случае соответствующая собственная функция постоянна. Поэтому краевая задача для оператора Лапласа корректна для любых краевых условий, кроме  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$  на границе. Следовательно, за исключением этого случая, ее единственное решение при любой правой части уравнения  $-\Delta u = f$  и краевого условия (10) может быть записано в форме ряда  $u = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} v_k (a_k + X_k)$ , где  $v_k$  — собственные функции задачи, а  $a_k$  — коэффициенты Фурье функции  $f$ , а  $X_k$  определены

выше. В случае краевого условия  $\frac{\partial u}{\partial n} = \chi$  задача некорректна. Она будет разрешима, только если функция  $f$  и  $\chi$  удовлетворяют соотношению

$$\int_{\Omega} f \rho \, d\mu + \int_{\partial\Omega} \chi \, d\sigma = 0.$$

В этом случае решение определяется формулой

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} z_k(a_k + X_k) + c,$$

где  $v_k$  — собственные функции задачи, отличные от постоянной, а  $c$  — произвольная постоянная.

Случай г). При  $\alpha < 0$  уравнение (14) рассматривается на интервале  $(0, T)$ , и на концах этого интервала из (11) получаются краевые условия для  $w_k$ . Действительно,

$$\Lambda_1[w] \Big|_{t=0} = \left\{ \Lambda_1 \left[ \int u(P; d) u_k \rho \, d\mu \right] \right\}_{t=0} = \int_{\Omega} \Lambda_1[u] \Big|_{t=0} v_k \rho \, d\mu = b_k,$$

$$\Lambda_2[w] \Big|_{t=T} = \int_{\Omega} \Lambda_2[u] \Big|_{t=T} v_k \rho \, d\mu = \int_{\Omega} \psi v_k \rho \, d\mu = c_k.$$

Таким образом, для  $w_k$  имеем краевую задачу на интервале  $(0, T)$ . Для ее исследования удобно представить первые два слагаемых  $\alpha \frac{d^2 w}{dt^2} + \beta \frac{dw}{dt}$  в форме  $\tilde{L}[u] = \frac{d}{dt} \left( \tilde{p} \frac{du}{dt} \right)$ . Для этого достаточно, очевидно, умножить (14) на  $-\tilde{p} = \frac{1}{\alpha} \exp \left( \int \frac{\beta}{\alpha} dt \right)$  и положить  $\tilde{p} = \exp \left( \int \frac{\beta}{\alpha} dt \right)$ . Тогда уравнение примет вид  $\tilde{L}[u] - \lambda_k \tilde{p} u = -\tilde{p}(a_k + X_k)$ . На основании сказанного по поводу задачи в) можно теперь заметить, что задача отыскания  $w_k$  однозначно разрешима для всех  $k$  при любых  $a_k, X_k, b_k$  и  $c_k$ , если нуль не является собственным значением для оператора  $\tilde{L}[w] + \lambda_k \tilde{p} w$ , или, что то же самое, ни одно  $-\lambda_k$  не является собственным значением для оператора  $\tilde{L}[w]$  при весе  $\tilde{p}$  и краевых условиях  $\Lambda_1[w] \Big|_{t=0} = \Lambda_2[w] \Big|_{t=T} = 0$ . При соблюдении этого условия рассматриваемая задача корректна.

Заметим еще, что все собственные значения оператора  $\tilde{L}$  неотрицательны, а наименьшее собственное значение может равняться нулю только в том случае, когда  $\Lambda_1[w] = \Lambda_2[w] \equiv \frac{\partial w}{\partial t}$ .

#### 4.3. О решении задач с неоднородными граничными условиями.

В случае неоднородной задачи нельзя применять оператор  $L[u]$  почленно к ряду Фурье. Это можно делать в случае, если  $u$  удовлетворяет однородным краевым условиям. Поэтому задачи с неоднородными краевыми условиями иногда целесообразно решать другими методами. Изложим схему некоторых из них.

*Краевые задачи.* Здесь можно применить еще следующие два метода.

1°. Выбрать систему координат так, чтобы область  $\Omega$  превратилась в прямоугольник или параллелепипед. Расщепить задачу на несколько задач так, чтобы в каждой из них неоднородность краевого условия сохранилась только на одной паре противоположных сторон или граней. Затем к каждой из этих задач применить метод решения задачи в) настоящего раздела (если это окажется возможным).

2°. Найти какую-нибудь дважды дифференцируемую в  $\Omega$  функцию  $u_0$ , удовлетворяющую краевому условию, и ввести новую искомую функцию  $\bar{u}$ , положив  $u = u_0 + \bar{u}$ . Для  $\bar{u}$  получается аналогичная краевая задача, но уже с однородным краевым условием (и с другой правой частью уравнения).

*Смешанные задачи.* Здесь имеются следующие возможности.

1°. Так же как, в методе 2° решения чисто краевых задач, описанном выше, найти какую-нибудь функцию  $u_0$ , удовлетворяющую краевому условию. Сделать замену  $u = u_0 + \bar{u}$ . Для функции  $\bar{u}$  получится однородное краевое условие и измененные правые части уравнения и начальных условий.

2°. Решить предварительно краевую задачу, которая получается, если отбросить в уравнении члены с производной по времени и начальные условия. Решение этой задачи обозначить через  $u_0$  и применить предыдущий метод. Этот метод применим, если решение  $u_0$ , которое будет зависеть от  $t$  как параметра, когда  $\chi$  и  $f$  зависят от  $t$ , дважды дифференцируемо по  $t$ .

## 5. Метод собственных функций для задач теории электромагнитных явлений

**5.1. Задача об ограниченной телеграфной линии.** Рассмотрим ограниченную телеграфную линию длины  $l$  с распределенными постоянными  $C$ ,  $L$ ,  $R$ ,  $G$ . Начало координат поместим в ее левом конце. Правый конец линии заземлен, а левый в момент  $t = 0$  включен на заданную э. д. с.  $V$ . При  $t = 0$  в линии ни тока, ни напряжения нет. Напряжение  $u$  в такой линии удовлетворяет уравнению

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\beta \frac{\partial u}{\partial t} + \gamma^2 u - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

где  $\alpha^2 = CL$ ,  $\beta = \frac{CR + LG}{2}$ ,  $\gamma^2 = RG$ ; начальным условиям

$$u(x; 0) = \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0$$

и краевым условиям  $u(l; t) = 0$ ,  $u(0; t) = V$ . Уравнение соответствующей задачи о собственных значениях имеет вид  $v'' - \gamma^2 v + \lambda v = 0$ , а краевые условия — вид  $v(0) = v(l) = 0$ . Эта задача о собственных значениях сводится к задаче, решенной в разделе 2, если обозначить  $\lambda - \gamma^2$  через  $\mu$ . Поэтому  $\mu_n = (n^2 \pi^2 / l^2)$  и, следовательно,  $\lambda_n = \gamma^2 + (n^2 \pi^2) / l^2$ , а  $v_n = \sin(n\pi x / l)$ .

Ищем решение в виде ряда Фурье  $u(x; t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \sin(n\pi x/l)$ . Умножая уравнение на  $(2/l) \sin(n\pi x/l)$  и интегрируя по  $x$  в пределах от 0 до  $l$ , получим уравнение

$$\alpha^2 w_n'' + 2\beta w_n' + \left(\gamma^2 + \frac{\pi^2 n^2}{l^2}\right) w_n = \frac{2n\pi}{l^2} V$$

с начальными условиями  $w_n(0) = w_n'(0) = 0$ . Интегрируя его, находим  $w_n$  и решение  $u$  нашей задачи.

Для конкретности рассмотрим случай  $V = \text{const}$ . Характеристическое уравнение имеет вид  $\alpha^2 r^2 + 2\beta r + (\gamma^2 + (\pi^2 n^2)/l^2) = 0$ . Его корни  $r_{1,2} = -\lambda \pm i\omega_n$ , где  $\lambda = \beta/\alpha^2 = (1/2)((R/L) + (G/C))$  и

$$\omega_n = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4\pi^2 n^2}{l^2 CL} - \left(\frac{R}{L} - \frac{G}{C}\right)^2}.$$

Если  $(R/L) - (G/C) = 0$ , т. е. линия «без искажения», то  $\omega_n = (\pi n)/(l\sqrt{LC})$ . Очевидно, общим решением уравнения будет

$$w_n(t) = (C_n' \cos(\omega_n t) + C_n'' \sin(\omega_n t)) e^{-\lambda t} + \frac{2n\pi}{n^2 \pi^2 + l^2 \gamma^2} V.$$

Начальные условия дают

$$C_n' = -\frac{2n\pi}{n^2 \pi^2 + l^2 \gamma^2} V, \quad C_n'' = -\frac{2n\pi \lambda}{\omega_n (n^2 \pi^2 + l^2 \gamma^2)} V,$$

откуда

$$w_n(t) = \frac{2n\pi}{n^2 \pi^2 + l^2 \gamma^2} \left\{ 1 - e^{-\lambda t} \left( \cos(\omega_n t) + \frac{\lambda}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \right) \right\} V.$$

Таким образом, решение нашей задачи задается рядом

$$u(x; t) = V \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\pi}{n^2 \pi^2 + l^2 \gamma^2} \left\{ 1 - e^{-\lambda t} \left( \cos(\omega_n t) + \frac{\lambda}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \right) \right\} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Заметим, что для первых значений  $n$  (при  $n < \frac{\sqrt{LC}l}{2\pi} \left| \frac{R}{L} - \frac{G}{C} \right|$ ) частоты  $\omega_n$  могут оказаться мнимыми. Тогда мнимым будет и  $\sin \omega_n t$ . Обозначая  $\omega_n$  для таких  $n$  через  $i\xi_n$ , будем иметь

$$\cos \omega_n t = \text{ch } \xi_n t, \quad \frac{\sin \omega_n t}{\omega_n} = \frac{\text{sh } \xi_n t}{\xi_n}$$

и

$$w_n(t) = \frac{2n\pi V}{n^2 \pi^2 + l^2 \gamma^2} \left\{ 1 - e^{-\lambda t} \left( \text{ch } \xi_n t + \lambda \frac{\text{sh } \xi_n t}{\xi_n} \right) \right\},$$

а соответствующие слагаемые ряда Фурье будут иметь вид

$$\frac{2n\pi V}{n^2 \pi^2 + l^2 \gamma^2} \left\{ 1 - e^{-\lambda t} \left( \text{ch } \xi_n t + \lambda \frac{\text{sh } \xi_n t}{\xi_n} \right) \right\} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

**5.2. Электростатическое поле внутри бесконечной призмы.** Рассмотрим прямоугольную бесконечную призму, каждая грань которой является проводящим электродом, а друг от друга эти грани изолированы. Потенциалы граней обозначим соответственно через  $u_1, u_2, u_3, u_4$ . Потенциал поля  $u$  не зависит от  $z$ . Этот потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа  $\Delta u = 0$  и краевым условиям

$$u|_{x=0} = u_1, \quad u|_{y=0} = u_2, \quad u|_{x=a} = u_3, \quad u|_{y=b} = u_4.$$

Соответствующая задача о собственных значениях будет иметь вид

$$\Delta v + \lambda v = 0, \quad v|_{x=0} = v|_{y=0} = v|_{x=a} = v|_{y=b} = 0.$$

Собственные значения этой задачи определяются по формулам

$$\lambda_{m,n} = \frac{\pi^2 m^2}{a^2} + \frac{\pi^2 n^2}{b^2},$$

а собственные функции имеют вид

$$v_{m,n} = \sin \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi n y}{b}.$$

Ищем решение в виде ряда Фурье

$$u = \sum_{m,n=1}^{\infty} w_{m,n} \sin \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi n y}{b}.$$

Умножая уравнение  $\Delta u = 0$  на  $(4/ab) \sin(\pi m x/a) \sin(\pi n y/b)$ , интегрируя по прямоугольнику  $\Omega$ , получаем выражение для  $w_{m,n}$ :

$$w_{m,n} = \frac{4}{nm \left[ \frac{\pi^2 m^2}{a^2} + \frac{\pi^2 n^2}{b^2} \right]} \left\{ \frac{m^2}{a^2} [1 + (-1)^{n+1}] [u_1 + (-1)^{m+1} u_3] + \right. \\ \left. + \frac{n^2}{b^2} [1 + (-1)^{m+1}] [u_2 + (-1)^{n+1} u_4] \right\}.$$

**5.3. Задача об электростатическом поле внутри цилиндра.** Рассмотрим бесконечный круглый цилиндр радиуса  $R$ . Потенциал стенки цилиндра задан и постоянен вдоль каждой образующей цилиндра.

Направим ось  $z$  вдоль оси цилиндра. Очевидно, потенциал  $u$  не будет зависеть от  $z$ , и имеем снова плоскую задачу. Обозначим круг, полученный в сечении цилиндра плоскостью  $(x, y)$ , через  $\Omega$ , а его контур — через  $\partial\Omega$ . Потенциал  $u$  удовлетворяет уравнению  $\Delta u = 0$  и краевому условию  $u|_{\partial\Omega} = f$ , где  $f$  — заданная функция на окружности  $\partial\Omega$ .

Введем полярные координаты  $r$  и  $\varphi$ . Область  $\Omega$  будет координатным четырехугольником в переменных  $r, \varphi$ . Уравнение примет вид

$$r \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0.$$

На двух сторонах четырехугольника будем иметь краевые условия

$$u|_{\varphi=0} = u|_{\varphi=2\pi}, \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi}|_{\varphi=0} = \frac{\partial u}{\partial \varphi}|_{\varphi=2\pi}.$$

Кроме того, вблизи начала координат, т. е. вблизи  $r = 0$ , функция  $u$  должна оставаться ограниченной.

Рассмотрим систему собственных функций оператора  $\Delta v$  в круге  $\Omega$  с краевым условием  $v|_{\partial\Omega} = 0$ . Собственные функции имеют вид

$$\begin{aligned} v_{0,n} &= \frac{1}{2} J_0 \left( \varkappa_n^0 \frac{r}{R} \right) \quad (n = 1, 2, \dots), \\ v_{2m-1,n} &= J_m \left( \varkappa_n^m \frac{r}{R} \right) \sin m\varphi, \quad v_{2m,n} = J_m \left( \varkappa_n^m \frac{r}{R} \right) \cos m\varphi \\ &\quad (n = 1, 2, 3, \dots, \quad m = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

где  $J_m$  — функция Бесселя,  $\varkappa_n^m$  —  $n$ -й корень уравнения  $J_m(\varkappa) = 0$ , а соответствующее собственное значение равно  $\lambda_{2m-1,n} = \lambda_{2m,n} = (\varkappa_n^m)^2 / R^2$ . Будем искать решение нашей задачи в виде ряда Фурье по функциям этой системы  $u = \sum_{k=0,n=1}^{\infty} w_{k,n} v_{k,n}$ . Для определения коэффициентов  $w_{k,n}$  умножим уравнение на  $v_{k,n}$  и проинтегрируем по  $\Omega$ . Получим

$$w_{0,n} = -\frac{2a_0}{\varkappa_n^0 J_0'(\varkappa_n^0)}, \quad w_{2m-1,n} = -\frac{2a_{2m-1}}{\varkappa_n^m J_m(\varkappa_n^m)}, \quad w_{2m,n} = -\frac{2a_{2m}}{\varkappa_n^m J_m(\varkappa_n^m)},$$

где  $a_0, a_{2m-1}, a_{2m}$  — коэффициенты Фурье функции  $f$  по системе  $1/2, \sin m\varphi, \cos m\varphi$ . Поэтому решением разбираемой задачи будет функция  $u$ , записанная в виде ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{-a_0}{\varkappa_n^0 J_0'(\varkappa_n^0)} J_0 \left( \varkappa_n^0 \frac{r}{R} \right) - 2 \sum_{m=1}^{\infty} (a_{2m-1} \sin m\varphi + a_{2m} \cos m\varphi) \frac{J_m \left( \varkappa_n^m \frac{r}{R} \right)}{\varkappa_n^m J_m'(\varkappa_n^m)} \right].$$

**5.4. Поле внутри шара при заданном потенциале на его поверхности.** Рассмотрим следующую задачу: *найти функцию, удовлетворяющую внутри шара радиуса  $R$  уравнению Лапласа и принимающую на сфере заданное значение  $f$*  (т. е. определить электростатическое поле внутри шара, если потенциал на его поверхности задан).

Расположив начало координат в центре сферы и введя сферические координаты, приведем уравнение Лапласа к виду

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right] = 0.$$

При  $r = \text{const}$  функция  $u$  задана на сфере радиуса  $r$ , поэтому ее можно разложить по сферическим функциям в ряд, коэффициенты которого зависят от  $r$ :

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} w_{n,0} P_n(\cos \theta) + \sum_{k=1}^{\infty} [w_{n,2k-1} \sin k\varphi + w_{n,2k} \cos k\varphi] P_{n,k}(\cos \theta) \right\}.$$

Определим сначала коэффициенты  $w_{n,0}$ . Умножим исходное уравнение на  $((2n+1)/(2\pi))P_n(\cos\theta)\sin\theta$  и проинтегрируем по  $\theta$  от 0 до  $\pi$  и по  $\varphi$  от 0 до  $2\pi$ . Тогда получим, что

$$w_{n,0} = a_{n,0} \left(\frac{r}{R}\right)^n = \frac{2n+1}{2\pi} \left(\frac{r}{R}\right)^n \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f P_n(\cos\theta) \sin\theta d\theta d\varphi.$$

Зная эти коэффициенты, можно найти значение  $u$  в точках положительной полуоси  $z$  (т. е. при  $\theta = 0$ ). Действительно, так как  $P_n(\cos 0) = 1$  и при  $k > 0$ ,  $P_{n,k}(\cos 0) = 0$ , то  $u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n,0}}{2} \left(\frac{r}{R}\right)^n$ .

Пусть теперь требуется вычислить  $u$  в произвольной точке  $(r, \theta, \varphi)$ . Проведем из центра через эту точку луч и примем его за ось  $z_1$  новой системы координат. Тогда

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{n,0}}{2} \left(\frac{r}{R}\right)^n,$$

$$b_{n,0} = \frac{2n+1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta_1, \varphi_1) P_n(\cos\gamma) \sin\theta_1 d\theta_1 d\varphi_1,$$

где  $\gamma$  — угол между лучами, направленными в точку  $(r, \theta, \varphi)$  и переменную точку  $(r_1, \theta_1, \varphi_1)$ . Этот угол является широтой в нашей новой системе координат. Для  $b_{n,0}$  получим

$$b_{n,0} = a_{n,0} P_n(\cos\theta) + 2 \sum_{k=1}^n [a_{n,2k} \cos k\varphi + a_{n,2k-1} \sin k\varphi] P_{n,k}(\cos\theta),$$

где  $a_{n,i}$  — коэффициенты Фурье разложения функции  $f$  по основным сферическим функциям. Тогда формула для  $u(r, \theta, \varphi)$ , имеющая вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} a_{n,0} P_n(\cos\theta) + \sum_{k=1}^n [a_{n,2k-1} \sin k\varphi + a_{n,2k} \cos k\varphi] P_{n,k}(\cos\theta) \right\} \left(\frac{r}{R}\right)^n,$$

дает решение поставленной задачи. Заметим, что слагаемые этой суммы являются основными внутренними шаровыми функциями.

Этот результат можно сформулировать так: *гармоническая внутри шара радиуса  $R$  функция  $u$ , непрерывная вплоть до его поверхности, может быть разложена в ряд по основным шаровым внутренним функциям. Коэффициентами этого разложения являются коэффициенты Фурье значения разлагаемой функции на поверхности шара, разделенные на  $R^n$ .*

**5.5. Поле заряда, индуцированного на сфере.** Рассмотрим электростатическое поле, образованное зарядом  $\varepsilon$ , расположенным на расстоянии  $a$  от центра проводящего шара радиуса  $R$  ( $a > R$ ), а также плотность индуцированных на поверхности этого шара зарядов.

Расположим начало координат в центре шара и ось  $z$  направим через точку  $P$ , в которой расположен заряд. Введем сферические координаты.

Потенциал  $u$  поля можно представить в виде суммы двух Потенциалов  $u = u_1 + u_2$ , где  $u_1$  — потенциал заряда  $\varepsilon$ , расположенного в точке  $P$ ,

а  $u_2$  — потенциал зарядов, индуцированных на поверхности шара.

Потенциал  $u_1$  внутри сферы радиуса  $a$  может быть представлен рядом

$$u_1 = \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{a^{n+1}} P_n(\cos \theta),$$

а вне ее — рядом

$$u_1 = \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta),$$

где  $P_n$  — полиномы Лежандра.

Что касается  $u_2$ , то (ввиду осевой симметрии поля) он может быть представлен внутри сферы радиуса  $R$  рядом

$$u_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} a_{n,0} \left(\frac{r}{R}\right)^n P_n(\cos \theta),$$

а вне ее — рядом

$$u_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} a_{n,0} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos \theta),$$

где коэффициенты  $a_{n,0}$  подлежат определению. Но внутри шара радиуса  $R$  суммарный потенциал  $u = u_1 + u_2$  постоянен ( $u = C$ ) (шар проводящий). Поэтому мы получаем  $(1/2)a_{n,0} = -\varepsilon(R^n/a^{n+1})$  ( $n > 0$ ),  $(1/2)a_{0,0} = C - (\varepsilon/a)$ , где  $C$  пока остается неопределенным. Подставляя эти коэффициенты в выражение для  $u_2$ , найдем  $u_2$  вне шара радиуса  $R$ . Поэтому в слое между сферами радиусов  $R$  и  $a$  ( $R < r < a$ ) мы имеем

$$u = \left[ \left( C - \frac{\varepsilon}{a} \right) \frac{R}{r} + \frac{\varepsilon}{a} \right] + \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} [r^{2n+1} - R^{2n+1}] \frac{P_n(\cos \theta)}{(ar)^{n+1}},$$

а вне сферы радиуса  $a$

$$u = \left( CR - \frac{\varepsilon R}{a} + \varepsilon \right) \frac{1}{r} + \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} [a^{2n+1} - R^{2n+1}] \frac{P_n(\cos \theta)}{(ar)^{n+1}}.$$

Отсюда получается  $\lim_{r \rightarrow \infty} (ur) = CR - \frac{\varepsilon R}{a} + \varepsilon$ . Известно, что этот предел равен суммарному заряду  $\varepsilon$ , имеющемуся в поле. Поэтому  $C = \varepsilon/a$ , следовательно, искомая плотность  $\rho$  зарядов на сфере будет иметь вид

$$\rho = \frac{\varepsilon}{4\pi a R} - \frac{\varepsilon}{4\pi R} \frac{a^2 - R^2}{(R^2 - 2aR \cos \theta + a^2)^{3/2}}.$$

## 6. Метод собственных функций для задач теплопроводности

**6.1. Теплопроводность в ограниченном стержне.** Рассмотрим однородный цилиндрический стержень длины  $l$ , один конец  $x = 0$  которого поддерживается при температуре  $u_0 = \chi(t)$ , а другой,  $x = l$ , охлажда-

ется по закону Ньютона. Температуру внешней среды положим равной нулю. Температура  $u(x; t)$  в сечении  $x$  стержня в момент времени  $t$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b^2 u = 0,$$

где  $a^2 = k/(c\rho)$ ,  $b^2 = (h\rho)/(c\rho q)$ . Предположим, что начальная температура в стержне равнялась  $\varphi(x)$ , где  $\varphi(x)$  — заданная функция от  $x$ . Тогда имеем начальное условие  $u|_{t=0} = \varphi(x)$  и краевые условия

$$u|_{x=0} = \chi(t), \quad k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = -hu|_{x=l}.$$

Соответствующая задача о собственных значениях будет иметь уравнение  $v'' - (b^2/a^2)v + \lambda v = 0$  и краевые условия  $v|_{x=0} = 0$ ,  $\left[\frac{\partial v}{\partial x} + \gamma v\right] \Big|_{x=l} = 0$ , где  $\gamma = h/k$ . Согласно разделу 2 собственными функциями задачи будут:  $v_n = \sin \mu_n x$ , где  $\mu_n$  определяется из уравнения  $\operatorname{tg} l\mu = -\mu/\gamma$ . Будем искать решение нашей задачи в виде ряда  $u = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \sin \mu_n x$ . Умножим уравнение на  $\sin \mu_n x$  и проинтегрируем от 0 до  $l$ . Тогда для определения  $w_n$  получаем дифференциальное уравнение

$$w'_n + (b^2 + a^2 \mu_n^2) w_n = \frac{\mu_n a^2}{N_n^2} \chi(t)$$

и начальное условие

$$w_n(0) = \frac{1}{N_n^2} \int_0^l \varphi(x) \sin \mu_n x \, dx = b_n.$$

Для конкретности предположим, что  $\chi(t) = U_0 = \text{const}$ , а  $\varphi(x) = 0$ . Тогда  $b_n = 0$  и

$$w_n = U_0 \frac{a^2 \mu_n}{N_n^2 (a^2 \mu_n^2 + b^2)} [1 - \exp(-(b^2 + a^2 \mu_n^2)t)].$$

Решение нашей задачи получим в виде

$$U = U_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^2 \mu_n}{N_n^2 (a^2 \mu_n^2 + b^2)} [1 - \exp(-(b^2 + a^2 \mu_n^2)t)] \sin \mu_n x.$$

**6.2. Стационарное распределение температуры в бесконечной призме.** Пусть вдоль линии  $(l)$ , проходящей внутри призмы параллельно ее ребрам, равномерно распределены источники тепла с плотностью  $Q$ . Температура внешнего пространства принимается равной нулю, а коэффициент теплопроводности  $k$  постоянным.

Направим ось  $z$  по одному из ребер призмы, а оси  $x$ ,  $y$  по ее граням. Обозначим через  $a$  и  $b$  размеры поперечного сечения  $\Omega$  призмы, а через  $x_0$  и  $y_0$  — координаты линии  $(l)$ . Будем считать источники тепла распределенными в бесконечной призме поперечного сечения  $\partial\Omega$  с

малым диаметром  $\delta$ , содержащей прямую ( $l$ ). Плотность распределения источников тепла в рассматриваемой призме обозначим через  $q(x, y)$ . При этом  $q(x, y) = 0$  вне  $\partial\Omega$  и  $\iint_{\partial\Omega} q(x, y) dx dy = Q$ . Очевидно, температура  $u$  призмы одинаково распределена в любом поперечном сечении, т. е.  $u$  не зависит от  $z$ . Таким образом, это есть двумерная задача для уравнения  $k\Delta u = -q$  с краевым условием вида  $k\frac{\partial u}{\partial n} - hu = 0$ , которые можно переписать так:  $\Delta u = -q/k$  и  $\frac{\partial u}{\partial n} - \gamma u = 0$ , где  $\gamma = h/k$ .

Соответствующая задача о собственных значениях с уравнением  $\Delta v + \lambda v = 0$  была решена в разделе 2. В соответствии со сказанным там собственными значениями будут числа  $\lambda_{m,n} = \mu_m + \nu_n$ , где  $\mu_m$  и  $\nu_n$  — корни уравнения

$$\frac{\mu_m - \gamma^2}{2\gamma\sqrt{\mu_m}} = \operatorname{ctg} a\sqrt{\mu_m}, \quad \frac{\nu_n - \gamma^2}{2\gamma\sqrt{\nu_n}} = \operatorname{ctg} b\sqrt{\nu_n}.$$

Собственными функциями будут  $v_{m,n} = \sin(x\sqrt{\mu_m} + \varphi_m) \sin(y\sqrt{\nu_n} + \psi_n)$ ,  $\varphi_m = \operatorname{arctg}(\gamma/\mu_m)$ ,  $\psi_n = \operatorname{arctg}(\gamma/\nu_n)$ . Вычислим коэффициенты Фурье  $c_{m,n}$  функции  $q$  по системе  $v_{m,n}$ :

$$c_{m,n} = \frac{4Q}{\left[a + \frac{2\gamma}{\gamma^2 + \mu_m}\right] \left[b + \frac{2\gamma}{\gamma^2 + \nu_n}\right]} \sin(x_0\sqrt{\mu_m} + \varphi_m) \sin(y_0\sqrt{\nu_n} + \psi_n).$$

Теперь будем искать решение нашей задачи в виде ряда по функциям  $v_{m,n}$ :

$$u(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} w_{m,n} \sin(x\sqrt{\mu_m} + \varphi_m) \sin(y\sqrt{\nu_n} + \psi_n).$$

Для определения коэффициента  $w_{m,n}$  умножим исходное уравнение на  $v_{m,n}$  и проинтегрируем по прямоугольнику  $\Omega$ . Тогда выражение для  $w_{m,n}$  имеет вид

$$w_{m,n} = \frac{4Q \sin(x_0\sqrt{\mu_m} + \varphi_m) \sin(y_0\sqrt{\nu_n} + \psi_n)}{k(\mu_m + \nu_n) \left[a + \frac{2\gamma}{\gamma^2 + \mu_m}\right] \left[b + \frac{2\gamma}{\gamma^2 + \nu_n}\right]}.$$

**6.3. Распределение температуры в однородном цилиндре.** Рассмотрим однородный цилиндр радиуса  $R$  и высоты  $H$ . Коэффициент внешней теплопроводности на одном из оснований цилиндра равен  $h_1$ , а на боковой поверхности  $h_2$ , где  $h_1, h_2$  постоянны. Второе основание поддерживается при температуре  $U_0$ . Температура внешней среды равна нулю. Внутри цилиндра источники тепла отсутствуют. Температура  $u$  внутри цилиндра определяется уравнением  $\Delta u = 0$  и краевыми условиями

$$u|_{z=0} = U_0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \beta u|_{z=H} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial r} + \gamma u|_{r=R} = 0,$$

где  $\beta = h_1/k$ ,  $\gamma = h_2/k$ . Собственные функции и собственные значения оператора Лапласа в цилиндре при краевых условиях  $v|_{z=0} = 0$ ,  $\frac{\partial v}{\partial z} +$

$+\beta v\Big|_{z=H}=0, \frac{\partial v}{\partial r}+\gamma v\Big|_{r=R}=0$  имеют следующий вид:

$$v_{0,m,n}=\frac{1}{2}J_0\left(\chi_m^0\frac{r}{R}\right)\sin\sqrt{v_n}z, \quad v_{2k-1,m,n}=J_k\left(\chi_m^k\frac{r}{R}\right)\sin k\varphi\sin\sqrt{v_n}z, \\ v_{2k,m,n}=J_k\left(\chi_m^k\frac{r}{R}\right)\cos k\varphi\sin\sqrt{v_n}z,$$

где  $\chi_m^k$  и  $v_n$  — соответственно  $m$ -й и  $n$ -й корни уравнений  $\chi J_k'(\chi)=-\gamma R J_k(\chi)$  и  $\operatorname{tg} H\sqrt{v}=-\sqrt{v}/\beta$ . Соответствующие собственные значения равны

$$\lambda_{2k-1,m,n}=\lambda_{2k,m,n}=\frac{(\chi_m^n)^2}{R^2}+v_n.$$

Ищем  $U$  в виде

$$U=\sum_{m,n=1}^{\infty}\left\{\frac{w_{0,m,n}}{2}J_0\left(\chi_m^0\frac{r}{R}\right)+\right. \\ \left.+\sum_{k=1}^{\infty}J_k\left(\chi_m^k\frac{r}{R}\right)(w_{2k-1,m,n}\sin k\varphi+w_{2k,m,n}\cos k\varphi)\right\}\sin\sqrt{v_n}z.$$

Для определения  $w_{i,m,n}$  умножим исходное уравнение на  $v_{i,m,n}$ , проинтегрируем по объему цилиндра. Получаем

$$w_{i,m,n}=0, \quad i>0, \\ w_{0,m,n}=\frac{8U_0\gamma R\sqrt{v_n}}{(\chi_m^0)^2J_0(\chi_m^0)\left[1+\frac{R^2\gamma^2}{(\chi_m^0)^2}\right]\left[H+\frac{\beta}{\beta^2+v_n}\right]\left[\frac{(\chi_m^0)^2}{R^2}+v_n\right]}.$$

Отсюда

$$u=\frac{1}{2}\sum_{m,n=1}^{\infty}w_{0,m,n}J_0\left(\chi_m^0\frac{r}{R}\right)\sin\sqrt{v_n}z.$$

## 7. Метод собственных функций для задач теории колебаний

**7.1. Свободные колебания однородной струны.** Вернемся теперь к задаче о струне и рассмотрим более детально решение этой задачи не только для свободных, но и для *вынужденных колебаний*.

Функция  $u(x;t)$ , описывающая колебания струны длины  $l$  с закрепленными концами, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x;t),$$

где  $f(x;t)$  — плотность внешней силы, однородным краевым условиям первого рода и начальным условиям  $u|_{t=0}=\varphi(x)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x)$ . Соответствующая задача о собственных значениях имеет уравнение  $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\lambda v=0$ .

Для такого уравнения и краевых условий Дирихле задача о собственных значениях была решена в разделе 2. Собственные значения и собственные функции имеют вид  $\lambda_n = \pi^2 n^2 / l^2$ ,  $v_n = \sin(n\pi x / l)$ . Будем искать решение нашей задачи в виде ряда Фурье

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Умножим исходное уравнение на  $(2/l) \sin(n\pi x / l)$  и проинтегрируем от 0 до  $l$ . Тогда

$$\frac{d^2 w_n}{dt^2} + \frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2} w_n = a_n(t),$$

где  $a_n$  — коэффициенты Фурье правой части  $f$ . Начальные условия для  $w_n$  имеют вид

$$w_n(0) = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = b_n, \quad \frac{\partial w_n(0)}{\partial t} = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = c_n.$$

Решая уравнение для  $w_n$ , найдем решение  $u$  нашей задачи в виде ряда Фурье. Каждое отдельное слагаемое ряда Фурье является стоячей волной на нашей струне. Разберем несколько конкретных примеров.

**Пример 1.**  $f(x; t) = \psi(x) = 0$ , т. е. задача о свободных колебаниях струны, вызванных только начальной деформацией. В этом случае  $w_n = b_n \cos(n\pi a / l) t$  и  $u(x; t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(n\pi a / l) t \sin(n\pi x / l)$ .

**Пример 2.**  $\varphi(x) = \psi(x) = 0$ ,  $f(x; t) = F(x) \sin \omega t$ , т. е. колебания струны, вынуждаемые синусоидальной силой с плотностью амплитуды  $F(x)$ . В этом случае

$$u(x; t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l},$$

где

$$w_n(t) = \frac{\tilde{a}_n l^2}{a^2 n^2 \pi^2 - \omega^2 l^2} \left[ \sin \omega t - \frac{\omega l}{n\pi a} \sin \frac{n\pi a t}{l} \right], \quad \omega \neq \frac{n\pi a}{l},$$

$$\tilde{a}_n = \frac{2}{l} \int_0^l F(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Если же  $\omega = (k\pi a / l)$  при некотором  $n = k$ , то  $w_k = (\tilde{a}_k / 2\omega^2) [\sin \omega t - \omega t \cos \omega t]$ . В этом случае говорят, что внешняя сила находится в резонансе с  $k$ -й частотой струны.

**Пример 3.**  $\varphi(x) = 0$ ,  $f(x; t) = 0$ ,

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & x < x_0 - \delta, \\ \psi(x) > 0, & x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, \\ 0, & x > x_0 + \delta, \end{cases}$$

причем  $\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \psi(x) dx = A$ . Задача описывает свободные колебания струны, возникшие под влиянием начального импульса  $A$ , сосредоточенного вблизи точки  $x_0$  ( $\delta$  считаем весьма малым). В этом случае решение задачи представится в виде ряда

$$u(x; t) = \frac{2A}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x_0}{l} \sin \frac{n\pi a t}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

**7.2. Колебания струны с подвижным концом.** Перейдем к задаче с неоднородными краевыми условиями. Рассмотрим колебания струны, находившейся в покое при  $t = 0$ , правый конец которой при  $t > 0$  вынужден двигаться по закону  $u(l, t) = \chi(t)$ , в то время как левый конец ее закреплен. Никаких сил, распределенных по длине струны, нет.

Собственные значения и собственные функции здесь те же, что и в предыдущей задаче, и решение ищем по-прежнему в виде ряда Фурье. Уравнение для  $w_n$  будет иметь вид

$$w_n'' + \frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2} w_n = -\frac{2n\pi a^2}{l^2} (-1)^n \chi(t),$$

а начальные условия будут  $w_n(0) = w_n'(0) = 0$ .

Пусть для конкретности  $\chi(t) = A \sin \omega t$ . Тогда, если  $\omega \neq n\pi a/l$ , будем иметь

$$w_n(t) = -\frac{2n\pi a^2 A}{a^2 n^2 \pi^2 - \omega^2 l^2} (-1)^n \left[ \sin \omega t - \frac{\omega l}{n\pi a} \sin \frac{n\pi a t}{l} \right],$$

$$u(x; t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Если же одна из собственных частот, например,  $k$ -я, резонирует с вынужденным колебанием конца струны (т. е. если  $\omega = k\pi a/l$ ), то соответствующими слагаемыми ряда будут

$$w_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l} = (-1)^{k+1} \frac{a}{l\omega} A \left[ \sin \omega t - \omega t \cos \omega t \right] \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

**7.3. Задача акустики о свободных колебаниях газа.** Разберем теперь задачу о свободных колебаниях газа в закрытой тонкой трубке. Математическая модель этой задачи отличается от предыдущей только краевыми условиями, которые теперь имеют вид

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0.$$

В этой задаче функция  $u$  означает уплотнение газа. Задача о собственных значениях при таких краевых условиях решена в разделе 2. Собственные значения и собственные функции будут иметь вид  $\lambda_n = (n^2 \pi^2 / l^2)$ ,  $n = 0, 1, \dots$ ,  $u_0 = 1/2$ ,  $u_n = \cos(n\pi x/l)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Поэтому для  $n = 0, 1, 2, \dots$  имеем

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad c_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Решение  $u$  будем искать в форме

$$u(x; t) = \frac{1}{2} w_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \cos \frac{n\pi x}{l}.$$

Как и в п. 7.1, для коэффициентов  $w_n$  получим уравнение и начальные условия.

Рассмотрим простой конкретный пример колебаний, вызванных только начальным уплотнением ( $\psi(x) = 0$ ). В этом случае  $w_n = b_n \cos(n\pi a t / l)$ , и поэтому

$$u(x; t) = \frac{1}{2} b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos \frac{n\pi a t}{l} \cos \frac{n\pi x}{l}.$$

Заметим, что колебания газа можно рассматривать как результат наложения прямых и обратных полуволн, отражающихся от концов трубы, однако здесь отражение происходит без изменения знака.

**7.4. Колебания мембраны с закрепленным краем.** Рассмотрим прямоугольную мембрану со сторонами  $p$  и  $q$  с закрепленным краем. Функция  $u$ , описывающая колебания такой мембраны, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = F(x, y),$$

где  $F$  — плотность внешней силы, краевым условиям

$$u|_{x=0} = u|_{x=p} = u|_{y=0} = u|_{y=q} = 0$$

и начальным условиям

$$u|_{t=0} = f_1(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = f_2(x, y),$$

где  $f_1$  (начальная деформация) и  $f_2$  (начальная скорость частиц мембраны) — заданные функции.

Соответствующая прямоугольнику и краевым условиям система собственных функций имеет вид

$$v_{m,n} = \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q}.$$

Найдем коэффициенты Фурье функций  $F$ ,  $f_1$ ,  $f_2$  по функциям этой системы и обозначим их через  $a_{m,n}$ ,  $b_{m,n}$ ,  $c_{m,n}$  соответственно. Будем искать решение задачи в виде ряда Фурье по этим же функциям

$$u = \sum_{m,n=1}^{\infty} w_{m,n} \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q}.$$

Умножая уравнение на  $(4/pq) \sin(m\pi x/p) \sin(n\pi y/q)$  и интегрируя по прямоугольнику  $\Omega$ , найдем после обычных преобразований уравнение для  $w_{m,n}(t)$

$$\frac{d^2 w_{m,n}}{dt^2} + a^2 \pi^2 \left[ \frac{m^2}{p^2} + \frac{n^2}{q^2} \right] w_{m,n} = a_{m,n}$$

и начальные условия

$$w_{m,n} \Big|_{t=0} = b_{m,n}, \quad \frac{dw_{m,n}}{dt} \Big|_{t=0} = c_{m,n}.$$

Определив отсюда  $w_{m,n}$  и подставив его в ряд Фурье, получим искомое решение.

В качестве примера рассмотрим *свободное колебание мембраны под влиянием одной только начальной деформации*:  $F = 0$ ,  $f_2 = 0$ .

В этом случае  $a_{m,n} = c_{m,n} = 0$  уравнение для  $w_{m,n}$  сведется к следующему виду:

$$w''_{m,n} + a^2 \pi^2 \left[ \frac{m^2}{p^2} + \frac{n^2}{q^2} \right] w_{m,n} = 0.$$

Его общее решение имеет вид

$$w_{m,n} = A_{m,n} \cos a\pi \sqrt{\frac{m^2}{p^2} + \frac{n^2}{q^2}} t + B_{m,n} \sin a\pi \sqrt{\frac{m^2}{p^2} + \frac{n^2}{q^2}} t.$$

Начальные условия дают  $B_{m,n} = 0$ ,  $A_{m,n} = b_{m,n}$ . Поэтому

$$u = \sum_{m,n=1}^{\infty} b_{m,n} \cos a\pi \sqrt{\frac{m^2}{p^2} + \frac{n^2}{q^2}} t \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q}.$$

Таким образом, частотами, соответствующими каждой стоячей волне, являются числа

$$\omega_{m,n} = a\pi \sqrt{\frac{m^2}{p^2} + \frac{n^2}{q^2}}.$$

Если  $\omega_{m,n}$  одинаковы при двух различных парах  $m$  и  $n$ , то имеем две стоячие волны с одинаковой частотой. Их сумма также дает стоячую волну с той же частотой.

**7.5. Задача о колебании круглой мембраны.** Рассмотрим *колебание круглой мембраны радиуса  $R$  с закрепленным краем*. Эта задача решается так же, как и предыдущая, с той лишь разницей, что для круга будем иметь систему собственных функций

$$v_{0,n} = \frac{1}{2} J_0 \left( \varkappa_n^0 \frac{r}{R} \right),$$

$$v_{2m-1,n} = J_m \left( \varkappa_n^m \frac{r}{R} \right) \sin m\varphi, \quad v_{2m,n} = J_m \left( \varkappa_n^m \frac{r}{R} \right) \cos m\varphi,$$

соответствующих собственным значениям  $\lambda_{2m-1,n} = \lambda_{2m,n} = (\varkappa_n^m)^2 / R^2$ , где  $\varkappa_n^m$  — корень уравнения  $J_m(\varkappa) = 0$ . Будем искать  $u$  в форме

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{w_{0,n}(t)}{2} J_0 \left( \chi_n^0 \frac{r}{R} \right) + \sum_{m=1}^{\infty} [w_{2m-1,n}(t) \sin m\varphi + w_{2m,n}(t) \cos m\varphi] J_m \left( \chi_n^m \frac{r}{R} \right) \right\}.$$

Для  $w_{k,n}$  получаем уравнение

$$w''_{k,n}(t) + a^2 \frac{(\chi_n^m)^2}{R^2} w_{k,n}(t) = a_{k,n} \quad (k = 2m - 1; \quad k = 2m)$$

и начальное условие  $w_{k,n}(0) = b_{k,n}$ ,  $w'_{k,n}(0) = c_{k,n}$ .

Если внешняя сила отсутствует, то  $a_{k,n} = 0$ , и поэтому

$$w_{k,n}(t) = A_k \cos a \frac{\chi_n^m}{R} t + B_k \sin a \frac{\chi_n^m}{R} t \quad (k = 2m - 1, \quad k = 2m).$$

Таким образом, числа  $a\chi_n^m/R$  являются частотами собственных колебаний мембраны.

Заметим теперь, что если начальная деформация, начальная скорость и внешняя сила обладают центральной симметрией (т. е. не зависят от  $\varphi$ ), то при  $k > 0$   $a_{k,n}$ ,  $b_{k,n}$ ,  $c_{k,n}$  оказываются равными нулю. Поэтому равны нулю и все  $w_{k,n}$  при  $k > 0$ , а ряд Фурье сводится к

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w_{0,n}(t)}{2} J_0 \left( \chi_n^0 \frac{r}{R} \right).$$

## Библиографический комментарий

Основы теории задач на собственные значения и специальных функций, а также метод собственных функций для задач математической физики, излагается в классическом труде [110], где также дано обоснование теории рядов Фурье и их приложений к решению краевых задач. Методы решения задач математической физики, в том числе и метод собственных функций и их обоснование даются в [13, 49, 70, 88, 91].

Основы теории специальных функций дается в [76], а также в отдельных главах книг [1, 85]. Краткое описание специальных функций, встречающихся в математической физике, дано также в [25].

Систематическое изложение основных методов решения задач математической физики, относящихся к расчету электрических, магнитных и волновых полей, дается в [19], где значительное место уделено также методу собственных функций для решения задач с неотрицательными краевыми условиями. Постановки и методы решения задач на собственные значения с приложениями из технической механики приводятся в [37]. В [26] рассматривается ряд уравнений нелинейной механики и теоретической физики и приводятся точные решения линейных и нелинейных уравнений, полученных различными методами, в том числе методом собственных функций. Метод разложения по собственным функциям для задач теории колебаний, задач теплопроводности и эллиптических задач излагаются в [4, 69].

## Глава 4

### Методы интегральных преобразований

*Ключевые слова:* интегральное преобразование, преобразование Фурье, преобразование Лапласа, преобразование Меллина, преобразование Ханкеля, преобразование Мейера, преобразование Конторовича–Лебедева, преобразование Мелера–Фока, преобразование Гильберта, преобразование Лагеррера, преобразование Лежандра, преобразование свертки, преобразование Бохнера, цепные преобразования, «всплесковые» преобразования,  $Z$ -преобразование, производящая функция, задачи теории колебаний, задачи теплопроводности, задача теории замедления нейтронов, задачи гидродинамики, задачи теории упругости, задача Буссинеска, уравнение коагуляции, физическая кинетика.

#### Основные понятия и обозначения

*Интегральное преобразование* — функциональное преобразование вида  $F(x) = \int_{\Gamma} K(x, t) f(t) dt$ , где  $f(t)$  — оригинал,  $F(x)$  — образ (преобразование),  $\Gamma$  — область комплексного евклидова пространства.

*Преобразование Фурье* — интегральное преобразование при  $K(x, t) = e^{-ixt}$ ,  $\Gamma = \mathbb{R}^n$ .

*Синус-преобразование Фурье* — интегральное преобразование, в котором  $K(x, t) = \sin(xt)$ ,  $\Gamma = \mathbb{R}_+^1$ .

*Косинус-преобразование Фурье* — интегральное преобразование при  $K(x, t) = \cos(xt)$ ,  $\Gamma = \mathbb{R}_+^1$ .

*Преобразование Лапласа* — интегральное преобразование при  $K(x, t) = e^{-xt}$ ,  $\Gamma = \mathbb{R}_+^1$ .

*Дискретное преобразование Лапласа* последовательности  $f(n)$ ,  $0 \leq n < \infty$ , — функция комплексной переменной  $F(z) = \sum_n f(n) e^{-nz}$ , периодическая с периодом  $2\pi$ .

*Производящая функция* последовательности  $\{f(n)\}_{n=0}^{\infty}$  — функция  $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n f(n)$ ; если положить  $z = e^{-x}$ , то получаем дискретное преобразование Лапласа.

*$Z$ -преобразование* последовательности  $\{f(n)\}_{n=0}^{\infty}$  — функция  $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} f(n)$ ; если положить  $z = e^x$ , то получаем дискретное преобразование Лапласа.

*Преобразование Меллина* — интегральное преобразование при  $K(x, t) = t^{x-1}$ ,  $\Gamma = \mathbb{R}_+^1$ .

*Преобразование Ханкеля* — интегральное преобразование при  $K(x, t) = J_\nu(xt)t$ ,  $J_\nu$  — функция Бесселя,  $\Gamma = \mathbb{R}_+^\infty$ .

*Преобразование Мейера* — интегральное преобразование при  $K(x, t) = K_\nu(xt)(xt)^{1/2}$ ,  $K_\nu$  — функция Макдональда,  $\Gamma = \mathbb{R}_+^\infty$ .

*Преобразование Конторовича–Лебедева* — интегральное преобразование при  $K(x, t) = \sqrt{2x \operatorname{sh}(\pi x)} K_{ix}(t)/\sqrt{t}$ ,  $K_\nu$  — функция Макдональда,  $\Gamma = \mathbb{R}_+^\infty$ .

*Преобразование Мелера–Фока* — интегральное преобразование при  $K(x, t) = \sqrt{t \operatorname{th}(\pi t)} P_{-1/2+i\pi}(x)$ ,  $P_\nu(x)$  — сферическая функция Лежандра первого рода,  $\Gamma = \mathbb{R}_+^\infty$ .

*Преобразование Гильберта* — интегральное преобразование при  $K(x, t) = (t-x)^{-1}$  или  $K(x, t) = \operatorname{ctg}((t-x)/2)$ ,  $\Gamma = \mathbb{R}^1$ .

*Преобразование Лагерра* — интегральное преобразование при  $K(n, t) = e^{-t} L_n(t)$ ,  $L_n$  — полином Лагерра,  $\Gamma = \mathbb{R}_+^1$ .

*Преобразование Лежандра* — интегральное преобразование при  $K(n, t) = P_n(t)$ ,  $P_n$  — полином Лежандра,  $\Gamma = [-1, 1]$ .

*Преобразование Бохнера* — интегральное преобразование при  $K(r, t) = 2\pi r^{1-n/2} J_{n/2-1}(2\pi r t) t^{n/2}$ ,  $\Gamma = \mathbb{R}_+^1$ .

*Преобразование свертки* — интегральное преобразование при  $K(x, t) = G(x-t)$ ,  $\Gamma = \mathbb{R}^1$ .

*Всплесковое преобразование* — интегральное преобразование при  $K(a, b, t) = \psi((t-b)/a)$ ,  $\Gamma = \mathbb{R}^n$ , где  $\psi$  — «всплеск», т. е. функция с нулевым средним, достаточно быстро убывающая на бесконечности.

## 1. Введение

Под *интегральными преобразованиями* понимаются функциональные преобразования вида

$$F(x) = \int_{\Gamma} K(x, t) f(t) dt,$$

где  $\Gamma$  — конечный или бесконечный контур в комплексной плоскости,  $K(x, t)$  — ядро преобразования. Наиболее часто рассматриваются интегральные преобразования, для которых  $K(x, t) = K(xt)$  и  $\Gamma$  — действительная ось или ее часть  $(a, b)$ . Если  $-\infty < a, b < \infty$ , то преобразование называется *конечным интегральным преобразованием*. Формулы, позволяющие восстановить функцию  $f(t)$  по известной  $F(x)$ , называются *формулами обращения* интегральных преобразований.

Если  $x, t \in \mathbb{R}^n$ , а  $\Gamma$  — область  $n$ -мерного евклидова пространства, то рассматриваются *кратные (многомерные) интегральные преобразования*.

Методы интегральных преобразований являются эффективными методами решения и исследования дифференциальных и интегральных уравнений математической физики, заключающиеся в интегрировании урав-

нения с некоторой весовой функцией, зависящей от двух аргументов, что часто приводит к упрощению исходной задачи. Основным условием для применения интегральных преобразований является наличие теоремы обращения, позволяющей найти исходную функцию, зная ее образ. В зависимости от весовой функции и области интегрирования рассматриваются преобразования Фурье, Лапласа, Меллина, Ханкеля, Мейера, Гильберта и др. С помощью этих преобразований могут быть решены многие задачи теории колебаний, теплопроводности, диффузии и замедления нейтронов, гидродинамики, теории упругости, физической кинетики.

Интегральные преобразования наиболее часто применяются при решении дифференциальных и интегральных уравнений, причем их подбор зависит от вида исследуемого уравнения [21, 57, 89, 93, 96]. Основным обстоятельством при выборе интегрального преобразования является возможность преобразования дифференциального или интегрального выражения в более простое дифференциальное уравнение (или, еще лучше, в алгебраическое соотношение) для функции  $F(x)$ , при этом подразумевается, что известна формула обращения. Если контур  $\Gamma$  конечен (например, отрезок), то преобразование  $F(x)$  является конечным преобразованием  $f(t)$ . Очевидно, что число интегральных преобразований может быть значительно увеличено за счет новых ядер.

Ниже будут в основном рассматриваться преобразования, в которых контур  $\Gamma$  — вещественная ось или полуось, а также предполагается, что все возникающие интегралы конечны.

## 2. Основные интегральные преобразования

**2.1. Преобразование Фурье.** Преобразованием Фурье функции  $f(t)$  называется выражение

$$F(x) \equiv F[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\tau} f(\tau) d\tau.$$

Функция  $F(x)$  называется *образом Фурье* функции  $f$ . *Обратное преобразование Фурье* имеет вид

$$f(t) \equiv F^{-1}[F(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} F(x) dx.$$

Объединяя эти выражения, приходим к *экспоненциальной формуле Фурье*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\tau} f(\tau) d\tau dx, \quad (1)$$

которая эквивалентна *интегральной формуле Фурье*

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos(x(\tau - t)) d\tau. \quad (2)$$

Раскладывая косинус разности, получаем тождество

$$f(t) = \int_0^{\infty} [a(x) \cos(tx) + b(x) \sin(tx)] dx, \quad (3)$$

где

$$a(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos xt \, dt, \quad b(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin xt \, dt.$$

Если  $f(t)$  — четная функция, то формула (3) принимает вид

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos tx \, du \int_0^{\infty} f(\tau) \cos x\tau \, d\tau. \quad (4)$$

Аналогично, если  $f(t)$  — нечетная функция, то

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin tx \, dx \int_0^{\infty} f(\tau) \sin x\tau \, d\tau. \quad (5)$$

Условия на функцию  $f$ , при которых справедливы формулы (1), (2), а также прямое и обратное преобразования Фурье, определены в следующей теореме, в которой  $L(-\infty, +\infty)$  обозначает пространство функций, интегрируемых по Лебегу на  $(-\infty, +\infty)$ .

**Теорема 1.** Пусть  $f$  принадлежит  $L(-\infty, +\infty)$  и является функцией ограниченной вариации на всяком конечном интервале. Тогда формулы (1), (2) имеют место, если в точках разрыва функции  $f(t)$  заменить их левые части на  $(1/2)\{f(t+0) + f(t-0)\}$ .

**2.1.1. Основные свойства преобразования Фурье.** Если функция  $f(t)$  интегрируема в интервале  $(-\infty, \infty)$ , то функция  $F(x)$  существует для всех  $x$ . Функции  $F(x)$  и  $f(t)$ , являющиеся преобразованиями Фурье одна другой, называются *парой преобразований Фурье*. Полагая

$$F_c(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos xt \, dt, \quad (6)$$

из формулы (4) получаем

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_c(x) \cos tx \, dx. \quad (7)$$

Функции, связанные указанным образом, называются *парой косинус-преобразований Фурье*. Аналогично, из формулы (5) можно получить *пару синус-преобразований Фурье*:

$$F_s(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin xt \, dt, \quad (8)$$

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_s(x) \sin tx \, dx. \quad (9)$$

Если  $f(t)$  — четная функция, то

$$F(x) = F_c(x);$$

если  $f(t)$  — нечетная функция, то

$$F(x) = iF_s(x).$$

Пусть функции  $F(x)$  и  $G(x)$  — преобразования Фурье соответственно функций  $f(t)$  и  $g(t)$ , определенных формулами (6), (7).

Функции

$$F(u)G(u) \quad \text{и} \quad h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)f(t-\tau) \, d\tau$$

являются парой преобразований Фурье. Функция  $h(t)$  называется *сверткой функций*  $f(t)$  и  $g(t)$  и обозначается  $h = f * g = g * f$ .

**Теорема 2 (о свертке).** Пусть  $f, g \in L(-\infty, \infty)$ . Тогда  $h(t) = f * g(t)$  принадлежит  $L(-\infty, \infty)$ , и ее преобразованием Фурье является функция  $\sqrt{2\pi}F(x)G(x)$ . Обратно, произведение  $\sqrt{2\pi}F(x)G(x)$  принадлежит  $L(-\infty, \infty)$ , и его преобразование Фурье определяется формулой  $f * g(t)$ .

**Формулы Парсеваля.** Пусть  $f(t) \in L(-\infty, \infty)$ ,  $g(t)$  интегрируема на каждом конечном интервале, и пусть

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{-l}^l g(\tau)e^{-ix\tau} \, d\tau$$

для всех  $x$ , причем  $G(x)$  всюду конечна и принадлежит  $L(-\infty, \infty)$ . Тогда имеет место равенство Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)G(x) \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(-t) \, dt. \quad (10)$$

В частности, при  $f = g$  имеем формулу Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^2 \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt. \quad (11)$$

2.1.2. Кратные преобразования Фурье. По определению имеем

$$F(x) \equiv F[f(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} f(t) \, dt,$$

где  $x = (x_1, x_2)$ ,  $t = (t_1, t_2)$ ,  $xt = x_1t_1 + x_2t_2$ ,  $dt = dt_1dt_2$ . Функция  $F(x)$  называется *преобразованием Фурье функции двух переменных*  $f(t)$ . Для

функций  $f(t)$  и  $F(x)$ , принадлежащих  $L(R^2)$ , имеет место следующая формула обращения:

$$f(t) \equiv F^{-1}[F(x)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} F(x) dx.$$

Если  $x, t \in R^n$ , то

$$F(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{R^n} e^{-ixt} f(t) dt, \quad f(t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{R^n} e^{ixt} F(x) dx.$$

## 2.2. Преобразование Лапласа.

2.2.1. *Интеграл Лапласа.* Обозначим через  $f(t)$  функцию действительного переменного  $t$ ,  $0 \leq t < +\infty$ , интегрируемую по Лебегу на любом конечном интервале  $(0, A)$ . Пусть  $p$  — комплексное число. Функция

$$F(p) \equiv L[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad (12)$$

называется *преобразованием Лапласа* функции  $f(t)$ .

2.2.2. *Формула обращения для преобразования Лапласа.* Пользуясь определением преобразования Лапласа и полагая  $p = \gamma + i\eta$ , имеем из (1), (12):

$$\int_{\gamma-i\omega}^{\gamma+i\omega} e^{pt} F(p) dp = ie^{\eta t} \int_{-\omega}^{+\omega} e^{\eta y} dy \int_0^{\infty} e^{-\eta \tau} [e^{-\gamma \tau} f(\tau)] d\tau. \quad (13)$$

Но при  $\omega \rightarrow \infty$  двойной интеграл в правой части уравнения (13) согласно (1) равен  $2\pi e^{-\eta t} f(t)$  для  $t > 0$  и нулю для  $t < 0$ . Поэтому (13) дает

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{\gamma-i\omega}^{\gamma+i\omega} e^{pt} F(p) dp \quad (14)$$

для  $t > 0$  и нуль для  $t < 0$ . Выражение (14) является *формулой обращения* для преобразования Лапласа. На  $f(t)$  должны налагаться условия, обеспечивающие существование преобразования Лапласа (12), а  $\gamma$  должно быть больше действительных частей всех особых точек образа Лапласа  $F(p)$ .

2.2.3. *Основные формулы и предельные теоремы.* При  $\operatorname{Re} p > \gamma$  справедливы следующие утверждения:

$$\begin{aligned} L[f(\alpha t)] &= \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right), & L[f * g(t)] &= F(p)G(p), \\ L\left[\frac{f(t)}{t}\right] &= \int_p^{\infty} F(q) dq, & L[f(0)g(t) + (f' * g)(t)] &= pF(p)G(p), \\ L[f'(t)] &= pF(p) - f(0), & L\left[\int_0^t f(s) ds\right] &= \frac{F(p)}{p}. \end{aligned}$$

Если  $F(p)$  — преобразование Лапласа и  $L(f'(t))$  существует, то

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = f(0+0);$$

если, кроме того, существует предел  $f(t)$  при  $t \rightarrow \infty$ , то

$$\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t).$$

### 2.3. Преобразование Меллина. Преобразование Меллина

$$F(s) \equiv M[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)t^{s-1} dt, \quad s = \sigma + i\tau, \quad (15)$$

тесно связано с преобразованиями Фурье и Лапласа.

Преобразование Меллина может быть успешно применено к решению определенного класса плоских гармонических задач в секториальной области, задач теории упругости, а также при изучении специальных функций, суммировании рядов и вычислении интегралов. Теоремы, относящиеся к преобразованию Меллина, могут быть получены из соответствующих теорем для преобразований Фурье и Лапласа путем замены переменной.

**Теорема 4.** Пусть  $t^{\sigma-1}f(t) \in L(0, +\infty)$ . Тогда имеет место формула обращения

$$\frac{f(t+0) + f(t-0)}{2} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{\sigma-i\lambda}^{\sigma+i\lambda} F(s)t^{-s} ds. \quad (16)$$

**Теорема 5.** Пусть  $F = M[f]$ ,  $G = M[g]$ . Пусть либо  $t^{k-1}f(t) \in L(0, +\infty)$  и  $G(1-k-ix) \in L(-\infty, +\infty)$ , либо  $F(k+ix) \in L(-\infty, +\infty)$ ,  $t^k g(t) \in L(0, +\infty)$ . Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} F(s)G(1-s) ds = \int_0^{\infty} f(t)g(t) dt. \quad (17)$$

Также имеет место соотношение

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} F(s)G(s) ds = \int_0^{\infty} g(t)f\left(\frac{1}{t}\right) \frac{dt}{t}. \quad (18)$$

**Теорема 6** (о свертке). Пусть  $t^k f(t)$  и  $t^k g(t)$  принадлежат пространству  $L(0, +\infty)$  и

$$h(t) = \int_0^{\infty} f(\tau)g\left(\frac{t}{\tau}\right) \frac{d\tau}{\tau}.$$

Тогда функция  $t^k h(t)$  принадлежит  $L(0, +\infty)$ , а ее преобразование Меллина есть  $F(s)G(s)$ .

## 2.4. Преобразование Ханкеля. Интегральные преобразования вида

$$F(\lambda) = \int_0^{\infty} f(t)K(\lambda t) dt,$$

где  $K(z)$  — функции Бесселя, известны под названием *преобразований Бесселя*. К этому виду принадлежат интегральные преобразования Ханкеля, Мейера, Конторовича–Лебедева и др.

Формулы типа (1), (2), дающие разложение произвольной функции  $f(x)$  в интеграл Фурье, представляют значительный интерес во многих проблемах математики и физики. К числу разложений подобного типа относится разложение по цилиндрическим функциям, известное как *интеграл Фурье–Бесселя*:

$$f(t) = \int_0^{\infty} J_{\nu}(xt)x dx \int_0^{\infty} f(\tau)J_{\nu}(x\tau)\tau d\tau \quad (0 < t < \infty), \quad (19)$$

где  $J_{\nu}$  — функция Бесселя,  $\nu > -1/2$ .

**Теорема 7.** Пусть  $f(t)$  — функция ограниченной вариации на всяком конечном интервале и

$$\int_0^{\infty} |f(t)|t^{1/2} dt < \infty.$$

Тогда при  $\nu > -1/2$

$$\frac{1}{2} [f(t+0) + f(t-0)] = \int_0^{\infty} J_{\nu}(xt)x dx \int_0^{\infty} f(\tau)J_{\nu}(x\tau)\tau d\tau. \quad (20)$$

В точках непрерывности имеет место формула (19).

Преобразованием Ханкеля называется интеграл

$$F_{\nu}(x) = H_{\nu}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)tJ_{\nu}(xt) dt \quad (0 < x < +\infty). \quad (21)$$

Из интегрального разложения (19) следует формула обращения

$$f(t) = H_{\nu}^{-1}[F_{\nu}(x)] = \int_0^{\infty} F_{\nu}(x)J_{\nu}(xt)x dx \quad (0 < t < +\infty). \quad (22)$$

Заметим, что если функция  $f(t)$  такая, что  $f(t) = O(t^{\alpha})$  при  $t \rightarrow 0$ ,  $\alpha + \nu + 2 > 0$  и  $f(t) = O(t^{\beta})$  при  $t \rightarrow \infty$ ,  $\beta + (3/2) < 0$ , то интеграл (21) сходится.

К разложению (19) можно добавить еще одно разложение аналогичного типа

$$f(t) = \int_0^{\infty} H_{\nu}(tx)(tx)^{1/2} dx \int_0^{\infty} Y_{\nu}(x\tau)(x\tau)^{1/2} f(\tau) d\tau, \quad (23)$$

где  $Y_v$  — функция Бесселя второго рода,  $H_v$  — функция Струве. Формула (23) представляет основу для введения соответствующего интегрального преобразования.

Обобщением интегрального разложения (19) является формула

$$f(t) = \int_0^\infty \frac{\varphi_x(t)x dx}{J_v^2(ax) + Y_v^2(ax)} \int_a^\infty f(\tau)\varphi_x(\tau)\tau d\tau \quad (a < t < +\infty), \quad (24)$$

где  $\varphi_x(t) = J_v(ax)Y_v(xt) - Y_v(ax)J_v(xt)$ ,  $v > -1/2$ , — линейная комбинация функций Бесселя первого и второго рода  $v$ -го порядка. Разложение (24) имеет место, если  $f(t)$  — кусочно непрерывная функция ограниченной вариации во всяком конечном интервале  $(a, R)$  и интеграл

$$\int_a^\infty |f(t)|t^{1/2} dt < \infty.$$

Формула (24) приводит к соответствующему интегральному преобразованию, которое называется *преобразованием Вебера*:

$$F(x, a) = \int_a^\infty c_v(tx, ax)tf(t)dt, \quad a \leq t < \infty,$$

где  $c_v(\alpha, \beta) \equiv J_v(\alpha)Y_v(\beta) - Y_v(\alpha)J_v(\beta)$ . Формула обращения такова:

$$f(t) = \int_0^\infty \frac{c_v(tx, ax)}{J_v^2(ax) + Y_v^2(ax)} xF(x, a) dx.$$

При  $a \rightarrow 0$  преобразование Вебера переходит в *преобразование Ханкеля*, которое при  $v = \pm(1/2)$  сводится к синус- и косинус-преобразованиям Фурье. Имеет место также равенство Парсеваля: если  $v \geq -(1/2)$ ,  $F(x)$  и  $G(x)$  — преобразования Ханкеля функций  $f(t)$  и  $g(t)$ , причем  $f, G \in L_1(0, \infty)$ , то

$$\int_0^\infty f(t)g(t)dt = \int_0^\infty F(x)G(x)dx.$$

Преобразования Ханкеля и Вебера могут быть успешно применены к решению краевых задач для уравнений Лапласа, Гельмгольца и некоторых задач теории упругости.

**2.5. Преобразование Мейера.** При решении дифференциальных уравнений типа Бесселя важное значение имеет *интегральное преобразование Мейера*. Последнее определяется посредством интеграла

$$F(s) \equiv M[f(t)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty K_v(st)(st)^{1/2}f(t)dt, \quad (25)$$

где  $K_v(st)$  — функция Макдональда. Формула обращения имеет вид

$$f(t) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{\beta - i\lambda}^{\beta + i\lambda} I_\nu(ts) (ts)^{1/2} F(s) ds. \quad (26)$$

Здесь  $I_\nu$  — функция Бесселя мнимого аргумента.

**Теорема 8.** Пусть  $f(t)$  — функция действительного переменного,  $0 \leq t < +\infty$ , интегрируемая и имеющая ограниченную вариацию на любом конечном интервале. Пусть также

$$\int_0^\infty e^{-\beta t} |f(t)| dt < \infty, \quad \beta > a \geq 0.$$

Тогда

$$\frac{f(t+0) + f(t-0)}{2} = \frac{1}{i\pi} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{\beta - i\lambda}^{\beta + i\lambda} I_\nu(ts) (xs)^{1/2} ds \int_0^\infty K_\nu(st) (st)^{1/2} f(t) dt. \quad (27)$$

**2.6. Преобразование Конторовича–Лебедева.** При решении некоторых задач математической физики важное значение имеет ряд интегральных преобразований, содержащих интегрирование по индексу функций Бесселя. Впервые подобная форма интегральных преобразований рассматривалась М. И. Конторовичем и Н. Н. Лебедевым в 1938 г. Основное значение в теории преобразований Конторовича–Лебедева имеет разложение типа интеграла Фурье

$$tf(t) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^\infty K_{i\tau}(t) \tau \operatorname{sh} \pi \tau d\tau \int_0^\infty K_{i\tau}(t') f(t') dt', \quad (28)$$

где  $K_\nu(t)$  — функция Макдональда,  $t > 0$ ,  $f(t)$  — произвольная непрерывная вместе с производной функция, удовлетворяющая условиям

$$t^2 f(t), \quad tf(t) \in L(0, +\infty).$$

Введем преобразование Конторовича–Лебедева

$$F(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty f(t) \frac{\sqrt{2\tau \operatorname{sh}(\pi\tau)} K_{i\tau}(t)}{\sqrt{t}} dt, \quad 0 \leq \tau < +\infty. \quad (29)$$

Непосредственно из (28) вытекает следующая формула обращения:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sqrt{2\tau \operatorname{sh}(\pi\tau)} K_{i\tau}(t)}{\sqrt{t}} F(\tau) d\tau, \quad t > 0. \quad (30)$$

Для вычисления некоторых типов определенных интегралов большое значение имеют формулы, аналогичные формулам Парсевала в теории рядов и интегралов Фурье. Приведем следующие теоремы.

**Теорема 9.** Пусть  $f(t)$  — произвольная действительная функция такая, что  $f(t)t^{-3/4} \in L(0, +\infty)$ ,  $f(t) \in L_2(0, +\infty)$ . Тогда

$$\int_0^{\infty} [F(\tau)]^2 d\tau = \int_0^{\infty} [g(t)]^2 dt. \quad (31)$$

**Теорема 10.** Пусть  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  — произвольные вещественные функции, удовлетворяющие условиям предыдущей теоремы. Тогда

$$\int_0^{\infty} F_1(\tau)F_2(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} f_1(x)f_2(x) dx.$$

**2.7. Преобразование Мелера–Фока.** Интегральное преобразование Мелера–Фока определяется посредством выражения

$$F(x) = \int_0^{\infty} \sqrt{t \operatorname{th}(\pi t)} P_{-1/2+\pi}(x) f(t) dt, \quad 1 \leq x < \infty, \quad (32)$$

где  $P_\nu(x)$  — сферическая функция Лежандра первого рода. Если  $f(t) \in L(0, \infty)$ ,  $|f'(t)|$  локально интегрируема на  $[0, \infty)$  и  $f(0) = 0$ , то имеет место формула обращения

$$f(t) = \sqrt{t \operatorname{th}(\pi t)} \int_1^{\infty} P_{-1/2+\pi}(x) F(x) dx, \quad t \geq 0. \quad (33)$$

При выполнении дополнительных условий имеет место равенство Парсеваля

$$\int_0^{\infty} f_1(t)f_2(t) dt = \int_1^{\infty} F_1(x)F_2(x) dx.$$

**2.8. Преобразование Гильберта.** Рассмотрим интегральную формулу Фурье (3). Заменяя формально  $a$  на  $b$  и  $b$  на  $-a$ , приходим к преобразованию Гильберта

$$g_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t} dt. \quad (34)$$

Если  $f \in L(-\infty, +\infty)$ , то функция  $g_1$  существует почти для всех значений  $x$ . Если  $f \in L_p(-\infty, +\infty)$ ,  $1 < p < \infty$ , то  $g_1 \in L_p(-\infty, +\infty)$  и почти всюду справедливо обратное преобразование Гильберта

$$f(t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{g_1(x+t) - g_1(x-t)}{t} dt. \quad (35)$$

Формулы (34), (35) эквивалентны формулам

$$g_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-x} dt, \quad f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_1(t)}{t-x} dt, \quad (36)$$

в которых интегралы понимаются в смысле главного значения.

Преобразованием Гильберта называется также рассмотренный в смысле главного значения интеграл

$$g_2(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \operatorname{ctg} \frac{t-x}{2} dt. \quad (37)$$

В теории рядов Фурье функцию  $g_2$  называют *сопряженной* с  $f$ . Интегральные операторы, порождаемые преобразованиями Гильберта, являются ограниченными в пространствах  $L_p$ .

Если  $f$  удовлетворяет условию Липшица или  $f \in L_p(0, 2\pi)$  и, кроме того,

$$\int_0^{2\pi} g_2(x) dx = 0,$$

то справедлива формула обращения

$$f(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_2(x) \operatorname{ctg} \frac{x-t}{2} dx, \quad (38)$$

причем

$$\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0.$$

Отметим, что между интегральными ядрами преобразований Гильберта существует простая связь:

$$\frac{d\tau}{\tau - \xi} = \frac{1}{2} \left( \operatorname{ctg} \frac{t-x}{2} + i \right) dt, \quad (39)$$

где  $\xi = e^{ix}$ ,  $\tau = e^{it}$ .

**2.9. Преобразования Лагерра и Лежандра.** Интегральное преобразование

$$F(n) \equiv T_1[f(t)] = \int_0^\infty e^{-t} L_n(t) f(t) dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (40)$$

где  $L_n(t)$  — многочлены Лагерра  $n$ -го порядка, называется *преобразованием Лагерра*. Последнее применяется для решения дифференциального уравнения Лагерра

$$Lf + nf = 0, \quad Lf(t) = tf''(t) + (1-t)f'(t). \quad (41)$$

Применение преобразования Лагерра сводит дифференциальную операцию  $Lf$  к алгебраической по формуле

$$T_1[Lf(t)] = -nF(n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Интегральное преобразование вида

$$F(n) \equiv T_2[f(t)] = \int_{-1}^1 P_n(t) f(t) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $P_n(t)$  — многочлен Лежандра порядка  $n$ , называется *преобразованием Лежандра*. Формула обращения имеет вид

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) P_n(t) F(n), \quad -1 < t < 1,$$

если ряд сходится. Преобразование Лежандра сводит дифференциальную операцию  $d(1-t^2)d$  к алгебраической по формуле

$$T_2 \left\{ \frac{d}{dt} (1-t^2) \frac{df(t)}{dt} \right\} = -n(n+1)F(n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

**2.10. Преобразования Бохнера и свертки, всплески и цепные преобразования.** Преобразование Бохнера имеет вид

$$B[f](r) = 2\pi r^{1-n/2} \int_0^{\infty} J_{n/2-1}(2\pi r \rho) \rho^{n/2} f(\rho) d\rho,$$

где  $J_\nu(x)$  — цилиндрическая функция первого рода порядка  $\nu$ ,  $\rho$  — расстояние в  $R^n$ . Справедлива формула обращения  $f = B^2 f$ . Равенство Парсеваля в этом случае принимает вид

$$\int_0^{\infty} |B[f](r)|^2 r^{k-1} dr = \int_0^{\infty} |f(\rho)|^2 \rho^{k-1} d\rho.$$

Преобразование свертки с ядром  $G(x-t)$  имеет вид

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-t) f(t) dt.$$

Предполагается, что для ядра  $G$  существует последовательность операторов дифференцирования и сдвига  $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ , которая переводит  $G(x-t)$  в дельтаобразную последовательность  $G_n(x-t) = P_n G(x-t)$ , т.е. в последовательность функций, сходящуюся в некотором смысле к дельта-функции  $\delta(x-t)$ . Тогда при некоторых предположениях о ядре  $G$  формула обращения для преобразования свертки имеет вид  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} (P_n F)$ , где предел понимается в некотором обобщенном смысле. Отметим, что некоторые рассмотренные интегральные преобразования могут быть рассмотрены как частный случай преобразования свертки. Например, при  $G(t) = e^t \exp(-e^t)$  и замене переменных  $y = e^x$ ,  $\tau = e^{-t}$  получаем  $G(x-t) = y^\tau e^{y^\tau}$  и

$$y^{-1} F(\ln y) = \int_0^{\infty} f(-\ln \tau) e^{-y^\tau} d\tau, \quad 0 < y < \infty.$$

Последнее выражение можно отождествить с преобразованием Лапласа. Последние 15 лет активно развивается теория *всплесков* (wavelets), которые могут использоваться в качестве ядра *всплескового интегрального преобразования*. *Всплеском* в самом общем виде называют определенную на числовой оси функцию  $\psi$ , имеющую нулевое среднее и достаточно быстрое убывание на бесконечности. Точнее, предполагается, что

$$\psi \in L_1(\mathbb{R}^n), \quad \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) dx = 0$$

и преобразование Фурье  $\Psi(\omega)$ ,  $\omega \in \mathbb{R}^n$ , удовлетворяет условию

$$\int_0^\infty |\Psi(t\omega)|^2 \frac{dt}{t} = 1 \quad \text{для любых } \omega \neq 0. \quad (42)$$

Например, если  $\psi$  достаточно регулярна, локализована, имеет нулевое среднее и радиальна, то существует константа  $c > 0$  такая, что  $c\psi(x)$  удовлетворяет (42).

Положим

$$\psi_a(x) = a^{-n/2} \psi(x/a) \quad \text{и} \quad \psi_{a,b}(x) = a^{-n/2} \psi((x-b)/a).$$

Классическим примером всплесковой системы является система Хаара базисных функций на прямой, для которой в качестве исходного всплеска выступает функция  $\psi(t)$ , равная единице при  $t \in (0, 1/2)$ ,  $\psi(t) = -1$ ,  $t \in (1/2, 1)$  и равная нулю в остальных случаях. Определим всплесковое интегральное преобразование:

$$F(a, b) \equiv W_\psi[f(t)] = \int_{\mathbb{R}^n} f(t) \psi_{a,b}(t) dt, \quad b \in \mathbb{R}^n, \quad a > 0.$$

Тогда имеет место следующая формула обращения:

$$f(x) = \int_0^\infty \left[ \int_{\mathbb{R}^n} F(a, b) \psi_{a,b}(x) db \right] \frac{da}{a^{n+1}}.$$

Интегральное всплесковое преобразование дает одновременно локальную информацию о функции и ее преобразовании Фурье, причем для анализа высокочастотных составляющих функции локализация более сильная (для повышения точности), а для низкочастотных локализация более слабая (для получения полной информации). Этим объясняется популярность всплесков в приложениях, связанных с анализом свойств акустических и сейсмических сигналов, при обработке и синтезе различных сигналов, например, речевых, при анализе изображений и т. д. Помимо ядра интегрального преобразования всплески используются в качестве генерирующей функции для построения базиса при помощи дилатаций, т. е. сжатий с сохранением нормы в  $L_2(\mathbb{R})$ :  $\psi_j(t) \equiv \psi_{j0}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t)$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , и сдвигов  $\psi_{jk}(t) \equiv \psi_j(t - k2^{-j}) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Рассмотренные выше интегральные преобразования являются частным случаем (при  $n = 2$ ) *ценных преобразований*, для которых

$$f_{i+1}(x) = \int_0^{\infty} f_i(t) K_i(xt) dt, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

причем  $f_{n+1}(x) = f_1(x)$ . Такая последовательность интегральных преобразований называется цепочкой интегральных преобразований.

### 3. Применение интегральных преобразований в задачах теории колебаний

**3.1. Электрические колебания.** Рассмотрим электрические колебания в цепи, содержащей сопротивление  $R$ , индуктивность  $L$ , емкость  $C$  и источник э. д. с.  $e(t)$ . Для определения заряда  $q$  на пластинках конденсатора имеет место следующее дифференциальное уравнение:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = e(t). \quad (43)$$

Предположим, что в начальный момент времени заряд на пластинках конденсатора равен  $q_0$ , а ток, текущий в цепи, равен  $i_0$ . Воспользуемся преобразованием Лапласа и введем образы  $Q(p)$  и  $S(p)$  функций  $q$ ,  $s$ . Несложно убедиться, что

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{dq}{dt} dt = -q_0 + pQ(p), \quad \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{d^2 q}{dt^2} dt = -i_0 - pq_0 + p^2 Q(p).$$

Поэтому после умножения обеих частей уравнения (43) на  $e^{-pt}$  и интегрирования по  $t$  от 0 до  $\infty$ , решения возникающего алгебраического уравнения и применения формулы обращения для преобразования Лапласа находим окончательное решение рассматриваемой задачи

$$q(t) = \exp(-Rt/2L) \left[ q_0 \cos \omega t + \frac{1}{\omega} \left( i_0 + \frac{Rq_0}{2L} \right) \sin \omega t \right] + \frac{1}{\omega L} \exp(-Rt/2L) \int_0^t e(\tau) \exp(R\tau/2L) \sin \omega(t - \tau) d\tau. \quad (44)$$

В частности, если сопротивление цепи равно нулю, т. е. если  $R = 0$ , то это равенство принимает вид

$$q(t) = q_0 \cos \omega t + \frac{i_0}{\omega} \sin \omega t + \frac{1}{\omega L} \int_0^t e(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau. \quad (45)$$

**3.2. Поперечные колебания струны.** Малые свободные поперечные колебания струны описываются уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (46)$$

где  $u(x, t)$  — отклонение струны в точке  $x$  в момент  $t$  от положения равновесия.

Рассмотрим движение бесконечной струны  $-\infty \leq x \leq \infty$  в отсутствии внешних сил, т.е. когда функция  $f(x, t)$  тождественно равна нулю. Зададим начальные условия  $u(x, 0) = \varphi(x)$ ,  $\partial u(x, 0)/\partial t = \psi(x)$ . Чтобы решить уравнение (46), воспользуемся преобразованием Фурье. Умножим (46) (предварительно положив  $f \equiv 0$ ) на  $e^{-i\xi x}$  и проинтегрируем по  $x$  от  $-\infty$  до  $\infty$ . Тогда, предполагая, что  $u$  и  $\partial u/\partial x$  стремятся к нулю при  $|x| \rightarrow \infty$ , и введя обозначения

$$U(\xi, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-i\xi x} dx, \quad (47)$$

можно переписать (46) в виде

$$\frac{d^2 U}{dt^2} + a^2 \xi^2 U = 0. \quad (48)$$

Таким образом, при помощи преобразования Фурье (47) удастся свести задачу решения дифференциального уравнения в частных производных к задаче решения обыкновенного дифференциального уравнения (48). Воспользовавшись начальными условиями, получаем его решение

$$U(\xi, t) = \frac{1}{2} \Phi(\xi) (e^{iat\xi} + e^{-iat\xi}) + \frac{\Psi(\xi)}{2ia\xi} (e^{iat\xi} - e^{-iat\xi}),$$

где  $\Phi$ ,  $\Psi$  — образы Фурье начальных функций  $\varphi$  и  $\psi$ . Соотношение между функциями  $u$  и  $U$  выражается формулой обращения Фурье

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U(\xi, t) e^{i\xi x} d\xi.$$

Поэтому, подставляя вместо функции  $U(\xi, t)$  ее значение, находим

$$\begin{aligned} u(x, t) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi) [e^{i\xi(x-at)} + e^{i\xi(x+at)}] d\xi \right\} + \\ + \frac{1}{2a} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Psi(\xi)}{i\xi} [e^{i\xi(x+at)} - e^{i\xi(x-at)}] d\xi \right\}. \end{aligned} \quad (49)$$

Так как  $\varphi(x)$  и  $\Phi(\xi)$  связаны между собой преобразованием Фурье, то

$$\varphi(x \pm at) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi) e^{i\xi(x \pm at)} d\xi. \quad (50)$$

Из тех же самых соображений имеем

$$\int_{x-at}^{x+at} \psi(y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Psi(\xi)}{i\xi} [e^{i\xi(x+at)} - e^{i\xi(x-at)}] d\xi. \quad (51)$$

Подставляя (50), (51) в выражение (49), окончательно найдем решение

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x + at) + \varphi(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(y) dy. \quad (52)$$

Теперь рассмотрим случай, когда струна закреплена в начале координат и растянута вдоль положительной полуоси  $x \geq 0$ . Свободные поперечные колебания описываются при помощи уравнения

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \geq 0, \quad (53)$$

причем предполагается, что  $u(x, 0) = \varphi(x)$  и  $\partial u / \partial t|_{t=0} = \psi(x)$ . Поскольку отклонения при  $x = 0$  нулевые, то целесообразно воспользоваться синус-преобразованием Фурье ( $\sin 0 = 0$ ). Умножим обе части уравнения (53) на  $\sin(\xi x)$  и проинтегрируем по  $x$  от 0 до  $\infty$ .

Считая, что при стремлении  $x$  к бесконечности  $u$  и  $\partial u / \partial x$  стремятся к нулю, можно написать

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sin(\xi x) dx = -\xi^2 U_s(\xi),$$

где

$$U_s(\xi, t) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^\infty u(x, t) \sin(\xi x) dx.$$

Таким образом, уравнение (53) эквивалентно уравнению

$$\frac{1}{a^2} \frac{d^2 U_s}{dt^2} + \xi^2 U_s = 0,$$

решение которого равно

$$U_s(\xi, t) = \Phi_s(\xi) \cos(a\xi t) + \frac{\Psi_s(\xi)}{a\xi} \sin(a\xi t),$$

где  $\Phi_s$ ,  $\Psi_s$  — синус-преобразования начальных функций.

Воспользовавшись формулой обращения для синус-преобразования Фурье, получим

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \Phi_s(\xi) [\sin \xi(x + at) + \sin \xi(x - at)] d\xi + \\ + \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \Psi_s(\xi) [\cos \xi(x - at) - \cos \xi(x + at)] \frac{d\xi}{\xi}.$$

Если  $x > at$ , то получаем из формул (8), (9) аналогично (50), (51)

$$\varphi(x \pm at) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^\infty \Phi_s(\xi) \sin \xi(x \pm at) d\xi, \quad (54)$$

$$\int_{x-at}^{x+at} \Psi(y) dy = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^{\infty} \frac{\Psi_s(\xi)}{\xi} [\cos \xi(x-at) - \cos \xi(x+at)] d\xi. \quad (55)$$

Следовательно, при  $x \geq at$  решение  $u(x, t)$  выражается формулой (52). Если же  $x < at$ , то в (54), (55) сделаем замену  $\sin(x-at) = -\sin(at-x)$  и получим с учетом четности косинуса решение

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x+at) - \varphi(at-x)] + \frac{1}{2a} \left\{ \int_0^{at-x} \Psi(y) dy + \int_0^{x+at} \Psi(y) dy \right\}.$$

Отметим, что если в нуле струна не закреплена, что соответствует краевому условию второго рода  $\partial u / \partial x|_{x=0} = 0$ , то следует применять не синус-, а косинус-преобразование Фурье, поскольку косинусы удовлетворяют данному краевому условию.

**3.3. Поперечные колебания бесконечной круглой мембраны.** Свободные двух- и трехмерные колебания описываются уравнением

$$u_{tt}(x, y, t) = a^2 \Delta u, \quad (56)$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа, который в декартовых координатах в двумерном случае имеет вид  $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ . В том случае, когда колебания происходят симметрично относительно оси, проходящей через начало координат перпендикулярно к плоскости, совпадающей с мембраной в положении равновесия, удобно перейти к полярным координатам  $r, \varphi$ . В силу симметричности зависимости от угла  $\varphi$  нет, и уравнение (56) принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (57)$$

Это уравнение описывает свободные колебания в случае их симметричного распределения.

Чтобы решить уравнение (57), введем образ Ханкеля  $U(\xi, t)$  смещения  $u(r, t)$ . Несложно убедиться, что

$$\int_0^{\infty} r \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) J_0(\xi r) dr = -\xi^2 U(\xi, t), \quad (58)$$

считая, что  $r \cdot \partial u / \partial r$  стремится к нулю при  $r = 0$  и  $r = \infty$ . Умножая обе части уравнения (57) на  $r J_0(\xi r)$  и интегрируя по  $r$  от 0 до  $\infty$ , приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 U}{dt^2} + a^2 \xi^2 U = 0,$$

которое имеет решение

$$U(\xi, t) = A(\xi) \cos(a\xi t) + B(\xi) \sin(a\xi t). \quad (59)$$

Пусть в начальный момент  $t = 0$   $u = \varphi(r)$ ,  $\partial u / \partial t = \psi(r)$ . Тогда  $A = \Phi(\xi)$ ,  $B = \Psi(\xi) / (a\xi)$ . Следовательно, подставляя эти значения в реше-

ние (59) и используя формулу обращения Ханкеля (22), получаем

$$u(r, t) = \int_0^{\infty} \xi \Phi(\xi) \cos(a\xi t) J_0(\xi r) d\xi + \frac{1}{a} \int_0^{\infty} \Psi(\xi) \sin(a\xi t) J_0(\xi r) d\xi. \quad (60)$$

Чтобы выразить  $u(r, t)$  явно через функции  $\phi(r)$  и  $\psi(r)$ , можно воспользоваться теоремой Парсеваля для образов Ханкеля, при этом необходимо вычислить интегралы вида

$$\int_0^{\infty} \xi J_0(\xi \eta) J_0(\xi r) \cos(a\xi t) d\xi,$$

которые достаточно сложны. Однако можно получить общее решение по-другому. Так, воспользовавшись кратным преобразованием Фурье, аналогично предыдущим рассуждениям получаем для решения двумерного уравнения (56) формулу

$$u(x, y, t) = -\frac{1}{2\pi a} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\phi(\alpha, \beta) d\alpha d\beta}{[a^2 t^2 - (x - \alpha)^2 - (y - \beta)^2]^{1/2}} - \\ - \frac{1}{2\pi a} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(\alpha, \beta) d\alpha d\beta}{[a^2 t^2 - (x - \alpha)^2 - (y - \beta)^2]^{1/2}}, \quad (61)$$

где  $u(x, y, 0) = \phi(x, y)$ ,  $u_t(x, y, 0) = \psi(x, y)$ .

## 4. Применение интегральных преобразований в задачах теплопроводности

**4.1. Решение задачи теплопроводности с помощью преобразования Лапласа.** Рассмотрим классическую задачу теплопроводности для полубесконечного твердого тела  $x > 0$  при условии, что граница  $x = 0$  поддерживается при постоянной температуре  $T$ , а начальная температура равна нулю.

Пусть  $u(x, t)$  означает температуру в точке  $x$  в момент времени  $t$ , а  $k$  — коэффициент теплопроводности. Задача сводится к решению дифференциального уравнения в частных производных

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad x > 0, \quad t > 0, \quad (62)$$

при краевом условии  $u(0, t) = T$  и нулевом начальном условии. Умножая дифференциальное уравнение и краевое условие на ядро  $e^{-pt}$  преобразования Лапласа и интегрируя по  $t$  в пределах от 0 до  $\infty$ , получаем для образа Лапласа  $U(p, t) = \int_0^{\infty} e^{-pt} u(x, t) dt$  уравнение

$$k \frac{d^2 U}{dx^2} = pU, \quad x > 0, \quad (63)$$

и соответствующее краевое условие

$$U(p, t) = \int_0^{\infty} e^{-pt} T dt = \frac{T}{p}. \quad (64)$$

Таким образом, задача сведена к решению *обыкновенного дифференциального уравнения*. Ограниченное на бесконечности решение этого уравнения при условии (64) имеет вид

$$U(p, t) = \frac{T}{p} e^{-x\sqrt{p/k}}. \quad (65)$$

Переходя от  $U$  к функции  $u$  при помощи формулы обращения или при помощи таблиц преобразований Лапласа, получим

$$u = T \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{kt}} \right). \quad (66)$$

Это и есть искомое решение задачи. Здесь  $\operatorname{erfc} x$  означает функцию, дополнительную к плотности распределения нормальной случайной величины и определяемую интегралом

$$\operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-u^2} du. \quad (67)$$

**4.2. Решение задачи теплопроводности с помощью преобразования Фурье.** Рассмотрим задачу теплопроводности для полубесконечного твердого тела  $x > 0$  при условии, что граница  $x = 0$  поддерживается при постоянной температуре  $T$ , а начальная температура равна нулю.

Эта задача была решена в п. 4.1 при помощи преобразования Лапласа. Как ясно из физических соображений,  $u \rightarrow 0$  и  $du/dx \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ . Данное краевое условие является краевым условием первого рода. Поэтому для решения задачи можно воспользоваться синус-преобразованием Фурье  $U(\xi, t) = \int_0^{\infty} \sin(\xi x) u(x, t) dx$ . Умножая дифференциальное уравнение (62) на ядро  $\sin(\xi x)$  и интегрируя по  $x$  в пределах от 0 до  $\infty$ , получим вспомогательное уравнение

$$\frac{dU}{dt} = k(\xi T - \xi^2 U), \quad t > 0, \quad (68)$$

с нулевым начальным условием. Таким образом, синус-преобразование снова сводит решение нашей задачи к решению обыкновенного дифференциального уравнения. Решение этого уравнения, ограниченное при  $t > 0$  и удовлетворяющее начальному условию, имеет вид  $U = T(1 - e^{-\xi^2 kt})/\xi$ . Формула обращения дает

$$u(x, t) = \frac{2T}{\pi} \int_0^{\infty} (1 - e^{-\xi^2 kt}) \sin(x\xi) \frac{d\xi}{\xi} = T \left[ 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\xi^2 kt} \sin(x\xi) \frac{d\xi}{\xi} \right], \quad (69)$$

что совпадает с ранее полученным представлением (66). Отметим, что переход от  $U$  к функции  $u$  в случае синус-преобразования осуществляется значительно легче, чем в случае использования преобразования Лапласа.

**4.3. Задача о температурном режиме шара.** Предположим, что однородный шар единичного радиуса симметрично подогревается снизу продолжительное время, так что можно рассматривать стационарный температурный режим. В результате для определения температуры  $u$  внутри шара возникает внутренняя задача Дирихле, причем в сферической системе координат

$$\{(r, \theta, \varphi) : 0 \leq r < 1, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi\}$$

зависимость от “долготы”  $\varphi$  отсутствует, так что  $u = u(r, \theta)$ . Полагая  $\mu = \cos \theta$ , можно переписать уравнение Лапласа в виде

$$r\partial_r^2(ru) + \partial_\mu(1 - \mu^2)\partial_\mu u = 0, \quad u = u(r, \arccos \mu), \quad 0 < r < 1, \quad -1 < \mu < 1.$$

Краевое условие имеет вид  $u(1, \arccos \mu) = f(\mu)$ . Применим преобразование Лежандра по  $\mu$  к уравнению Лапласа. Переставляя операции  $T_2$  и  $r\partial_r^2$  и полагая

$$U(r, n) = T_2 u(r, \arccos \mu), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

приходим к уравнению

$$r\partial_r^2(rU) - n(n+1)U = 0,$$

ограниченное решение которого имеет вид  $U(r, n) = A(n)r^n$ . Функции  $A(n)$  определяются из преобразованного по Лежандру краевого условия,  $A(n) = T_2 f(t)$ . Отсюда вытекает равенство

$$U(r, n) = r^n \int_{-1}^1 f(\mu) P_n(\mu) d\mu \equiv (f, \psi_n) r^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $\psi_n(\mu) = \sqrt{n+1/2} P_n(\mu)$ ,  $P_n$  — многочлены Лежандра. Применяя обратное преобразование Лежандра, получаем решение

$$u(r, \theta) = u(r, \arccos \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} (f, \psi_n) r^n \psi_n(\cos \theta).$$

## 5. Применение интегральных преобразований в теории диффузии нейтронов

Стационарное уравнение переноса нейтронов при некоторых упрощающих предположениях можно привести к уравнению

$$\frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x^2} + S(x, \tau), \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad \tau > 0, \quad (70)$$

где функция  $S$  описывает источники нейтронов, искомая величина  $u(x, \tau)$  представляет собой концентрацию нейтронов в единицу времени, достигающих возраста  $\tau$ ; ввиду этого  $u$  называется *плотностью замедления*. Через  $\tau$  обозначается символический возраст нейтронов.

**5.1. Решение уравнения замедления нейтронов для замедлителя бесконечных размеров.** Исследуем решение уравнения в частных производных (70) в случае, когда среда безгранична и функция источника в терминах обобщенных функций имеет вид  $S\delta(x)\delta(\tau)$ ,  $S = \text{const}$ . При  $\tau = 0$  плотность замедления  $u(x, \tau)$  согласована с уравнением (70) и равна  $S\delta(x)$ . Краевое условие, налагаемое на плотность замедления, заключается в том, что она должна стремиться к нулю при стремлении  $|x|$  к бесконечности.

Решение (70) можно найти при помощи введения образа Фурье  $U(\xi, \tau)$  плотности замедления  $u(x, \tau)$ . Учитывая поведение плотности замедления на бесконечности и интегрируя по частям, получаем, что уравнение (70) эквивалентно обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{dU}{d\tau} + \xi^2 U = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \delta(\tau).$$

Решение его равно  $U(\xi, \tau) = (2\pi)^{-1/2} e^{-\xi^2 \tau}$ . Используя теорему обращения, получаем решение

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} e^{-x^2/4\tau}. \quad (71)$$

**5.2. Задача о диффузии тепловых нейтронов.** После того как нейтроны достигнут определенной скорости, они перестанут терять энергию и можно описывать их движение при помощи классической теории диффузии. Если через  $\rho(\mathbf{r}, t)$  обозначить плотность нейтронов, то получим уравнение диффузии

$$\Delta \rho - \frac{\rho}{\Lambda^2} = \frac{\tau}{\Lambda^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\tau}{\Lambda^2} q(\mathbf{r}), \quad (72)$$

где  $\Lambda$  называется *диффузионной длиной*. Поэтому в одномерном стационарном случае ( $\rho$  не зависит от времени) будем иметь уравнение

$$\frac{d^2 \rho}{dz^2} - \frac{\rho}{\Lambda^2} = -\frac{\tau}{\Lambda^2} q(z). \quad (73)$$

Если среда бесконечна, то можно решить это уравнение, введя для  $\rho$  и  $q$  образы Фурье; тогда оно принимает вид

$$R(\xi) = \frac{\tau}{\Lambda^2} \frac{Q(\xi)}{\xi^2 + 1/\Lambda^2}.$$

При помощи теоремы обращения будем иметь

$$\rho(z) = \frac{\tau/\Lambda^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\xi) e^{i\xi z}}{(\xi^2 + 1/\Lambda^2)} d\xi. \quad (74)$$

Значение этого интеграла на основании теоремы о свертках для преобразования Фурье можно выразить через значение функции  $q(z)$ . В результате получим

$$\rho(z) = \frac{\tau}{2\Lambda} \int_{-\infty}^{\infty} q(u) e^{-|z-u|/\Lambda} du. \quad (75)$$

## 6. Применение интегральных преобразований к задачам гидродинамики

**6.1. Двумерный безвихревой поток идеальной жидкости.** Рассмотрим безвихревой двумерный поток идеальной жидкости, заполняющей полуплоскость  $y \geq 0$ , компоненты скорости обозначим  $u$  и  $v$ . Как известно,

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad (76)$$

где скалярный потенциал скорости  $\varphi$  удовлетворяет двумерному уравнению Лапласа

$$\Delta \varphi \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (77)$$

Будем считать, что жидкость втекает в рассматриваемую полуплоскость через отрезок  $|x| \leq a$  границы  $y = 0$ . Сначала предположим, что жидкость втекает с заданной скоростью, направленной перпендикулярно к отрезку, через который она втекает. Таким образом, граничное условие вдоль линии  $y = 0$  имеет вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \begin{cases} -f(x), & 0 < |x| < a, \\ 0, & |x| > a, \end{cases} \quad (78)$$

где  $f(x)$  — заданная функция точки. Далее, сделаем предположение, что на большом расстоянии от линии  $y = 0$  жидкость находится в покое, т. е.  $(u, v) \rightarrow 0$  при  $y \rightarrow \infty$ . Легко показать, что уравнения (77) и (78) сводятся к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 \Phi}{dy^2} - \xi^2 \Phi = 0$$

при граничном условии  $d\Phi(\xi, 0)/dy = -F(\xi)$ . Здесь  $\Phi$ ,  $F$  — образы Фурье функций  $\varphi$ ,  $f$ . Решение рассматриваемой задачи, очевидно, имеет вид  $\Phi = (F(\xi) e^{-|\xi|y})/|\xi|$ , откуда, на основании теоремы обращения, следует

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\xi)}{|\xi|} e^{i\xi x - |\xi|y} d\xi. \quad (79)$$

В частности, если

$$f(x) = \begin{cases} U, & 0 < |x| < a, \\ 0, & |x| > a, \end{cases}$$

то

$$F(\xi) = \frac{U}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin \xi a}{\xi},$$

и поэтому

$$\varphi(x, y) = \frac{U}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\xi a)}{\xi} \frac{e^{i\xi x}}{|\xi|} e^{-|\xi|y} d\xi.$$

Компонент скорости жидкости в направлении оси  $y$  дает выражение

$$v(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{U}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\xi a)}{\xi} e^{-|\xi|y + i\xi x} d\xi.$$

Учитывая значение интеграла  $\int_0^{\infty} \frac{\sin \xi a}{\xi} e^{-\xi y} d\xi = \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{y}{a}$ , находим

$$v(x, y) = \frac{U}{2\pi} (\theta_1 - \theta_2), \quad \theta_1 = \arctg \frac{y}{x-a}, \quad \theta_2 = \arctg \frac{y}{x+a}.$$

Точно таким же способом для компонента скорости жидкости в направлении оси  $x$  найдем выражение

$$u(x, y) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{U}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1},$$

где  $r_2^2 = (x+a)^2 + y^2$  и  $r_1^2 = (x-a)^2 + y^2$ .

Если ввести комплексный потенциал  $w(z) = \varphi + i\psi$ ,  $z = x + iy$ , то

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -u + iv, \quad (80)$$

и поэтому, принимая во внимание значения компонентов скорости, получаем

$$\frac{dw}{dz} = \frac{U}{2\pi} \ln \frac{z-a}{z+a}.$$

Проинтегрировав это выражение по  $z$ , найдем выражение для комплексного потенциала

$$w(z) = \frac{U}{2\pi} [2a + (z-a) \ln(z-a) - (z+a) \ln(z+a)].$$

**6.2. Течение идеальной жидкости через щель.** Рассмотрим установившийся двумерный поток идеальной жидкости через щель в жесткой плоской границе. Начало координат поместим в центр щели, а ось  $z$  направим перпендикулярно к плоскости перегородки. Задача, таким образом, сводится к решению дифференциального уравнения (77) в случае следующих граничных условий:

$$\text{при } y = 0 \text{ и } |x| \leq a$$

$$\varphi = \text{const},$$

$$\text{при } y = 0 \text{ и } |x| > a$$

$$v = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

Если при  $y = 0$

$$v = \begin{cases} (a^2 - x^2)^{-1/2}, & 0 < |x| < a, \\ 0, & |x| > a, \end{cases}$$

то на основании предыдущих результатов заключаем, что потенциал скорости дается выражением

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2} \int_{-a}^a \frac{J_0(a\xi)}{|\xi|} e^{i\xi x - |\xi|y} d\xi,$$

и, следовательно, из формул (76) вытекают следующие выражения для компонентов вектора скорости:

$$v(x, y) = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \int_0^\infty e^{-\xi y} J_0(a\xi) \cos(\xi x) d\xi, \quad (81)$$

$$u(x, y) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \int_0^\infty e^{-\xi y} J_0(a\xi) \sin(\xi x) d\xi. \quad (82)$$

Таким образом, при  $y = 0$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = - \int_0^\infty \sin(\xi x) J_0(a\xi) d\xi = 0, \quad \text{если } |x| < a,$$

а это означает, что  $\varphi$  — постоянная на отрезке  $y = 0$ ,  $|x| < a$ . Подставляя выражения для компонентов скорости в уравнение (80), находим, что комплексный потенциал потока в рассматриваемом случае является решением уравнения

$$\frac{dw}{dz} = i \int_0^\infty e^{i\xi z} J_0(a\xi) d\xi = (z^2 - a^2)^{-1/2}.$$

Интегрируя это уравнение, получаем  $z = a \operatorname{ch} w$ .

### 6.3. Истечение идеальной жидкости через круглое отверстие.

Пусть начало координат находится в центре круглого отверстия и ось  $z$  направлена перпендикулярно к плоскости тонкого жесткого экрана. Любую точку жидкости можно задать при помощи цилиндрических координат  $r, z$ . Решение задачи об установившемся течении жидкости сводится к нахождению потенциала скоростей  $\varphi(r, z)$ , удовлетворяющего уравнению Лапласа в рассматриваемых координатах, т. е.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (83)$$

при краевых условиях на плоскости  $z = 0$

$$\varphi = g(r), \quad r < a, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad r > a. \quad (84)$$

Функция  $g(r)$  является заданной функцией.

Умножим обе части уравнения (83) на  $r J_0(\xi r)$  и проинтегрируем по  $r$  от 0 до  $\infty$ , находим, что это уравнение эквивалентно обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{d^2 \Phi}{dz^2} - \xi^2 \Phi = 0, \quad (85)$$

где  $\Phi(\xi, z)$  — образ Ханкеля потенциала скорости. Если через рассматриваемое отверстие жидкость втекает в полупространство  $z \geq 0$ , то потенциал скорости должен стремиться к нулю при  $z \rightarrow \infty$ , и поэтому решение уравнения (85) следует взять в форме

$$\Phi = A(\xi)e^{-\xi z}, \quad (86)$$

где  $A(\xi)$  должно быть определено при помощи условий (84). Дифференцируя последнее равенство по  $z$ , получаем

$$\int_0^{\infty} r \frac{\partial \Phi}{\partial z} J_0(\xi r) dr = -\xi A(\xi)e^{-\xi z}.$$

Применяя теорему обращения для преобразования Ханкеля, находим Соотношения

$$\Phi(r, z) = \int_0^{\infty} \xi A(\xi) e^{-\xi z} J_0(\xi r) d\xi, \quad \frac{\partial \Phi(r, z)}{\partial z} = - \int_0^{\infty} \xi^2 A(\xi) e^{-\xi z} J_0(\xi r) d\xi.$$

Подставляя эти соотношения в условия (84) и полагая

$$\rho = \frac{r}{a}, \quad A_1(u) = u A\left(\frac{u}{a}\right), \quad g_1(\rho) = a^2 g(r),$$

будем иметь следующие дуальные интегральные уравнения для определения функции  $F(u)$ :

$$\int_0^{\infty} A_1(u) J_0(\rho u) du = g_1(\rho), \quad 0 < \rho < 1; \quad \int_0^{\infty} u A_1(u) J_0(\rho u) du = 0, \quad \rho > 1.$$

Функция  $A(\xi)$  выражается через  $A_1(u)$  по формуле  $A(\xi) = A_1(a\xi)/(a\xi)$ . Решение системы уравнений для  $A_1(u)$  имеет вид

$$A_1(u) = \frac{2}{\pi} \cos u \int_0^1 \frac{y g_1(y) dy}{(1-y^2)^{1/2}} + \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{y dy}{(1-y^2)^{1/2}} \int_0^1 g_1(yx) x u \sin(xu) dx.$$

В частном случае, когда функция  $g_1(\rho)$  сводится к постоянной  $C$ , имеем

$$A_1(u) = \frac{2C \sin u}{\pi u}.$$

При этом функция  $g(r)$  равна постоянной  $\gamma$ , где  $\gamma = C/a^2$ , и

$$A(\xi) = \frac{2\gamma \sin(\xi a)}{(\pi \xi^2)}.$$

Следовательно,

$$\Phi(r, z) = \frac{2\gamma}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \xi a}{\xi} e^{-\xi z} J_0(\xi r) d\xi. \quad (87)$$

Точно так же можно рассмотреть случай, когда значение  $\partial \Phi / \partial z$  задано по всей плоскости  $z = 0$ . Если  $\partial \Phi / \partial z = -f(r)$  (предполагается, что  $\partial \Phi / \partial z$  обращается в нуль для значений  $r$ , превосходящих  $a$ ) и если образ Ханкеля

нулевого порядка этой функции обозначается через

$$F(\xi) = \int_0^a r f(r) J_0(\xi r) dr,$$

то легко показать, что  $\Phi(\xi) = -F(\xi)/\xi$ . Отсюда

$$\varphi(r, z) = - \int_0^\infty F(\xi) e^{-\xi z} J_0(\xi r) d\xi.$$

Если отверстие достаточно мало, то можно положить в терминах обобщенных функций  $f(r) = S\delta(r)/(2\pi r)$ , причем образ Ханкеля этой функции равен  $F(\xi) = S/(2\pi)$ . Отсюда окончательно имеем

$$\varphi(r, z) = - \frac{S}{2\pi} \int_0^\infty e^{-\xi z} J_0(\xi r) d\xi = - \frac{S}{2\pi(r^2 + z^2)^{1/2}}. \quad (88)$$

## 7. Применение интегральных преобразований в теории упругости

**7.1. Осесимметричные напряжения в цилиндре.** Рассмотрим напряжения, возникающие в неограниченном круглом цилиндре с радиусом, равным единице, когда к боковой поверхности этого цилиндра приложено нормальное напряжение, равное единице при  $z > 0$  и нулю при  $z < 0$ . Метод решения этой задачи с незначительными изменениями может быть применен для решения более сложной задачи, когда приложенные давления представляют собой функции экспоненциального типа. Воспользуемся цилиндрической системой координат. Ось цилиндра совместим с осью  $z$ . Начало координат поместим в центральном сечении. Введем обозначения для напряжений:

- 1)  $\sigma_r$  — нормальные напряжения по направлениям радиусов, или радиальные напряжения;
- 2)  $\sigma_\theta$  — нормальные напряжения в перпендикулярном направлении, или тангенциальные напряжения;
- 3)  $\sigma_z$  — нормальные напряжения, параллельные оси  $z$ ;
- 4)  $\tau_{rz}$  — касательные напряжения, направленные параллельно оси  $z$  в касательных плоскостях к цилиндру.

Других касательных напряжений по условиям симметрии не может быть. Как известно, все указанные напряжения могут быть выражены через функции напряжений  $u$  по формулам

$$\sigma_r = \frac{\partial}{\partial z} \left( \sigma \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) u, \quad \tau_{rz} = \frac{\partial}{\partial r} \left( (1 - \sigma) \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u, \quad (89)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial}{\partial z} \left( \sigma \nabla^2 - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) u, \quad \sigma_z = \frac{\partial}{\partial z} \left( (2 - \sigma) \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u. \quad (90)$$

Здесь  $\sigma = \text{const}$  означает коэффициент Пуассона для материала цилиндра,  $u = u(r, z)$  — функция напряжений, удовлетворяющая бигармоническому уравнению

$$\nabla^4 u = 0, \quad -\infty < z < \infty, \quad r < 1. \quad (91)$$

Решение задачи сводится к интегрированию данного уравнения при граничных условиях

$$\sigma_r(1, z) = -1, \quad 0 < z < \infty, \quad \sigma_r(1, z) = 0, \quad -\infty < z < 0, \quad (92)$$

$$\tau_{rz}(1, z) = 0, \quad -\infty < z < +\infty, \quad (93)$$

где  $\sigma_r$ ,  $\tau_{rz}$  зависят от функции напряжений  $u$  согласно (89).

В данном случае искомая функция  $u$  не исчезает, когда  $z \rightarrow +\infty$ . Поэтому применение обычного преобразования Фурье приводит к появлению расходящихся интегралов, так что следует использовать комплексное преобразование Фурье

$$U(r, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi z} u(r, z) dz,$$

где мнимая часть  $\xi$  отрицательна, чтобы указанный интеграл сходился. Умножая уравнение и граничные условия на ядро  $e^{-i\xi z}$ , интегрируя по  $z$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  и обозначая  $L = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \xi^2$ , получим вспомогательное обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка для  $U(r, \xi)$

$$L^2 \bar{u} = 0, \quad r < 1, \quad (94)$$

и соответствующие граничные условия

$$\left[ \sigma L - \frac{d^2}{dr^2} \right] U(1, \xi) = \xi^{-2}, \quad \frac{d}{dr} [(1 - \sigma)L + \xi^2] U(1, \xi) = 0. \quad (95)$$

Решение уравнения (94), ограниченное при  $r = 0$ , имеет вид

$$U(r, \xi) = A I_0(\xi r) + B \xi r I_1(\xi r), \quad (96)$$

где  $A$ ,  $B$  — постоянные. Пользуясь рекуррентной формулой для функций Бесселя, находим

$$L U(r, \xi) = 2B \xi^2 I_0(\xi r). \quad (97)$$

Подставив (96) и (97) в (95), определим постоянные  $A$  и  $B$ . Подставив их в (96), получим преобразованную функцию напряжений  $U(r, \xi)$ . Для нахождения напряжений (89), (90) можно воспользоваться двумя способами: либо путем формулы обращения найти  $u(r, z)$  и подставить ее в (89), (90); либо умножить равенства (89), (90) на  $e^{-i\xi z}$ , проинтегрировать их по  $z$ , найдя тем самым выражения для фурье-образов напряжений, и только после этого воспользоваться обратным преобразованием Фурье. Обычно второй способ предпочтительнее; например, для образа  $\Sigma_\theta$  в этом случае получается

$$\Sigma_\theta(r, \xi) = -i\xi \left[ \sigma L - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right] U(r, \xi). \quad (98)$$

Образы остальных напряжений получаются аналогично.

**7.2. Задача Буссинеска для полупространства.** Рассмотрим задачу теории упругости для следующего частного случая распределенной нагрузки. К круговой области единичного радиуса, расположенной на поверхности  $z = 0$  упругого полупространства  $z > 0$ , приложена распределенная нагрузка интенсивности, равной единице. Остальная часть поверхности  $z = 0$  свободна от нагрузки. Требуется найти величину напряжения на оси круговой области в точке, расположенной на расстоянии  $z$  от поверхности.

Как и ранее, нормальное напряжение  $\sigma_z$  и касательное напряжение  $\tau_{rz}$  могут быть выражены через функцию напряжений  $u$  по формулам (89) и (90). Задача сводится к интегрированию бигармонического уравнения (91) при граничных условиях

$$\sigma_z(r, 0) = -1, \quad 0 < r < 1, \quad \sigma_z(r, 0) = 0, \quad r > 1, \quad (99)$$

$$\tau_{rz}(r, 0) = 0, \quad 0 < r < \infty. \quad (100)$$

Умножая уравнение (91) и граничные условия (99) на  $rJ_0(pr)$  и интегрируя по  $r$  в пределах от 0 до  $\infty$ , получим обыкновенное дифференциальное уравнение для образа Ханкеля  $U(\xi, z) = \int_0^\infty rJ_0(\xi r)u(r, z)dr$

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - \xi^2\right)^2 U(\xi, z) = 0, \quad (101)$$

и, с учетом (90), (99), соответствующее краевое условие при  $z = 0$

$$(1 - \sigma) \frac{d^3 U}{dz^3} - (2 - \sigma) \xi^2 \frac{dU}{dz} = - \int_0^1 rJ_0(\xi r) dr = - \frac{J_1(\xi)}{\xi}. \quad (102)$$

Равенства (89<sub>2</sub>), (100) дают при  $z = 0$  второе краевое условие

$$\sigma \frac{d^2 U}{dz^2} + (1 - \sigma) \xi^2 U = 0. \quad (103)$$

Итак, задача сведена к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка (101) при граничных условиях (102), (103). Общее решение дифференциального уравнения (101), конечное при больших положительных  $z$ , имеет вид  $U(\xi, z) = (A + Bz)e^{-\xi z}$ . Полагая  $z = 0$  и подставляя полученные выражения в (102), (103), получим  $A = -2\sigma\xi^{-4}J_1(\xi)$ ,  $B = -\xi^{-3}J_1(\xi)$ . Тогда

$$\Sigma_z(\xi, z) = -(z + \xi^{-1})J_1(\xi)e^{-\xi z}. \quad (104)$$

Воспользовавшись теперь формулой обращения для преобразования Ханкеля, находим

$$\sigma_z = - \int_0^\infty (1 + \xi z)e^{-\xi z} J_1(\xi) J_0(\xi r) d\xi. \quad (105)$$

В частности, при  $r = 0$  имеем  $\sigma_z = -1 + z^3(z^2 + 1)^{-3/2}$ . Напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  находятся аналогично. Образ напряжения для  $\tau_{rz}$  можно получить,

применив преобразование Ханкеля с ядром  $rJ_1(pr)$ ; в этом случае формула обращения имеет ядро  $\xi J_1(r\xi)$ .

**7.3. Нахождение напряжений в клине.** Пусть на каждую из плоских поверхностей бесконечного клина с углом  $2\alpha$  приложена распределенная нагрузка с напряжением, равным единице вдоль полосы шириной  $a$ . Требуется найти касательные напряжения в клине. В этом случае нормальные и касательные напряжения могут быть выражены через функцию напряжений  $u(r, \theta)$  следующим образом:

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}, \quad (106)$$

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right), \quad (107)$$

где функция  $u$  удовлетворяет бигармоническому уравнению

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 u = 0, \quad 0 < r < \infty, \quad -\alpha < \theta < \alpha. \quad (108)$$

Задача сводится к решению уравнения при краевых условиях

$$\sigma_\theta(r, \pm\alpha) = -1, \quad 0 < r < a, \quad \sigma_\theta(r, \pm\alpha) = 0, \quad r > a, \quad (109)$$

$$\sigma_{r\theta}(r, \pm\alpha) = 0, \quad 0 < r < \infty. \quad (110)$$

Предположим, что функция  $u$  такова, что

$$r^{p+n} \frac{\partial^n u}{\partial r^n}, \quad r^p \frac{\partial^n u}{\partial \theta^n} \quad (n = 0, 1, 2) \quad \text{и} \quad r^{p+1} \frac{\partial^3 u}{\partial r \partial \theta^2}$$

стремятся к нулю, когда  $r \rightarrow \infty$ , и обозначим  $U(p, \theta)$  преобразование Меллина функции  $u(r, \theta)$ :

$$U(p, \theta) = \int_0^\infty r^{p-1} u(r, \theta) dr. \quad (111)$$

Умножая бигармоническое уравнение на  $r^{p+3}$  и интегрируя по  $r$  от 0 до  $\infty$ , находим обыкновенное дифференциальное уравнение относительно преобразованной функции

$$\frac{d^4 U}{d\theta^4} + [(p+2)^2 + p^2] \frac{d^2 U}{d\theta^2} + p^2(p+2)^2 U = 0. \quad (112)$$

Соответствующие граничные условия для  $U$  получим, если подставим в (109) и (110) выражения (106), (107), умножим полученный результат на  $r^{p+1}$  и проинтегрируем по  $r$  от 0 до  $\infty$ .

Общее решение данного обыкновенного дифференциального уравнения (112) имеет вид

$$U(p, \theta) = A \sin p\theta + B \cos p\theta + C \sin(p+2)\theta + D \cos(p+2)\theta, \quad (113)$$

где  $A, B, C, D$  зависят от  $p$  и  $\alpha$ . Так как решение должно быть симметричным относительно плоскости  $\theta = 0$ , то  $A = C = 0$ . Постоянные  $B, D$

определим из граничных условий.

Теперь обратимся к касательным напряжениям. Согласно (107) имеем

$$r^2(\sigma_{r\theta}) = \frac{\partial u}{\partial \theta} - r \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta}.$$

Преобразование Меллина этой функции равно  $(p+1) \frac{dU}{d\theta}$ . После некоторых вычислений находим

$$\frac{\pi r}{a} \sigma_{r\theta} = \int_0^\infty R(p) \cos \left[ p \ln \frac{a}{r} \right] dp, \quad (114)$$

где

$$R(p) = \frac{\sin(\alpha - \theta) \operatorname{sh}(\alpha + \theta)p - \sin(\alpha + \theta) \operatorname{sh}(\alpha - \theta)p}{p \sin 2\alpha + \operatorname{sh} 2\alpha p}. \quad (115)$$

В частности, при  $\alpha = \pi/2$ , когда клин становится полубесконечным твердым телом, полученный интеграл удастся вычислить в конечном виде, пользуясь выражением

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} qx}{\operatorname{sh}(\pi x/2)} \cos(mx) dx = \frac{\sin 2q}{\cos 2q + \operatorname{ch} 2m}.$$

В результате получаем

$$\sigma_{r\theta}(r, \theta) = \frac{2ar \cos \theta}{\pi} \left( \frac{a^2 \cos 2\theta}{r^4 + 2a^2 r^2 \cos 2\theta + a^4} \right). \quad (116)$$

Для остальных значений  $\alpha$  напряжение может быть найдено путем приближенного вычисления интеграла в (114).

## 8. Применение интегральных преобразований в кинетике коагуляции

**8.1. Точное решение уравнения коагуляции.** Пусть рассматривается дисперсная система, представляющая собой некоторую смесь, находящуюся в двух фазах, причем одна из фаз распределена в другой в виде мелких частиц (кристалликов, капель, пузырьков и т. д.). Одним из основных механизмов эволюции такой системы является процесс коагуляции (слияния) частиц, который описывается следующим кинетическим уравнением коагуляции:

$$\frac{\partial c(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \int_0^x K(x-y, y) c(x-y, t) c(y, t) dy - c(x, t) \int_0^\infty K(x, y) c(y, t) dy, \quad (117)$$

при начальном условии

$$c(x, 0) = c_0(x) \geq 0, \quad x \geq 0. \quad (118)$$

Здесь  $c(x, t)$  — функция распределения частиц с массами  $x \in [0, \infty)$  в момент времени  $t \geq 0$ ,  $K(x, y)$  — так называемое ядро коагуляции, характеризующее интенсивность слияния частиц с массой  $x$  и  $y$  и известное из физики процесса.

Для решения уравнения воспользуемся преобразованием Лапласа. Пусть  $C(p, t)$  — образ Лапласа функции  $c(x, t)$  и пусть  $K = \text{const}$ . Умножая (117) на  $\exp(-px)$  и интегрируя, получаем для образа обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial C(p, t)}{\partial t} = \frac{K}{2} C(p, t)^2 - KC(p, t)C(0, t) \quad (119)$$

с начальным условием  $C_0(p) = C(p, 0)$ . Подставляя в (119)  $p = 0$ , сначала находим  $C(0, t)$ , после чего получаем решение в образах Лапласа

$$C(p, t) = \left(1 + \frac{1}{2} t K C_0(0)\right)^{-2} \left(\frac{1}{C_0(p)} - \frac{1}{C_0(0)} + \frac{1}{1 + (1/2) t K C_0(0)}\right)^{-1}.$$

Подставляя конкретные начальные распределения, можно найти решение уравнения коагуляции (117), (118). В частности, при

$$c_0(x) = \exp(-ax)$$

имеем

$$c(x, t) = \frac{1}{\left(1 + Kt/(2a)\right)^2} \exp\left(-\frac{ax}{1 + Kt/(2a)}\right). \quad (120)$$

Если предположить, что размеры частиц кратны некоторой минимальной величине с массой  $x_0$  (по аналогии с полимерами такая частица называется *мономером*), то интегралы в уравнении (117) преобразуются в суммы:

$$\frac{dc_i(t)}{dt} = \frac{K}{2} \sum_{j=1}^{i-1} c_{i-j}(t) c_j(t) - K c_i(t) \sum_{j=1}^{\infty} c_j(t), \quad x \geq 0, \quad t > 0, \quad (121)$$

где  $c_i(t)$ ,  $i \geq 1$ , — функция распределения частиц массой  $ix_0$ . Для такого дискретного уравнения преобразование Лапласа трансформируется в построение *производящей функции*  $C(z, t)$ , являющейся дискретным аналогом преобразования Лапласа:

$$C(z, t) = \sum_{i=1}^{\infty} z^{i-1} c_i(t).$$

Умножая (121) на  $z^{i-1}$  и суммируя, получаем после решения возникающего дифференциального уравнения выражение для производящей функции в виде ряда по  $z^{i-1}$ . Коэффициенты при степенях  $z$  дают исконое решение. В частности, если начальное распределение состоит только из мономеров, т. е.  $c_1(0) = A$ ,  $c_i(0) = 0$ ,  $i \geq 2$ , то имеем сходное с (120) выражение

$$c_i(t) = \frac{1}{(1 + Kt/(2A))^2} A^i \left(\frac{Kt}{2(1 + Kt/(2A))}\right)^{i-1}, \quad i \geq 1.$$

**8.2. Нарушение закона сохранения массы.** Ключевым свойством уравнения коагуляции (117) является справедливость закона сохранения полной массы системы, которая математически равна первому моменту решения:

$$M_1(t) = \int_0^{\infty} xc(x, t) dx.$$

Умножая (117) на  $x$  и интегрируя, получаем, в предположении ограниченности возникающих двойных интегралов, постоянство полной массы:  $dM_1/dt = 0$ . Однако указанные двойные интегралы не всегда ограничены. В ряде физико-химических процессов (например, при поликонденсации) ядро коагуляции мультипликативно:  $K(x, y) = Axy$ , и несложно убедиться, что тогда существует некий критический момент времени  $t_{cr}$ , при котором второй момент решения  $M_2$  обращается в бесконечность. Для исследования решения уравнения коагуляции с мультипликативным ядром воспользуемся преобразованием Лапласа при вещественных  $p$ . Обозначим

$$\frac{\partial C(p, t)}{\partial p} = F(p, t)$$

и учтем, что  $F(0, t) = -M_1(t)$ . Выписывая квазилинейное уравнение в частных производных, возникающее для функции  $F(p, t)$ , и решая его методом характеристик, получаем функциональное уравнение

$$F(p, t) = F_0 \left( p + A \int_0^t M_1(s) ds + AtF(p, t) \right). \quad (122)$$

Воспользуемся тем, что  $M_1(t) = -F(0, t)$ , и введем обозначение для аргумента функции  $F_0$  при  $p = 0$ :

$$\rho(t) = A \int_0^t M_1(s) ds - AtM_1(t).$$

Отметим, что из (122) имеем  $M_1 = -F_0(\rho)$ . Дифференцируя по  $t$ , получаем

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -At \frac{dM_1(t)}{dt}. \quad (123)$$

С другой стороны, при  $p = 0$  из (122) после дифференцирования по  $t$  приходим к соотношению

$$\frac{dM_1(t)}{dt} = -F'_0(\rho)\dot{\rho}(t). \quad (124)$$

Сопоставляя два последних равенства, получаем

$$\dot{\rho} \left( 1 - AtF'_0(\rho) \right) = 0. \quad (125)$$

Особенности коагулирующей системы существенным образом зависят от того, имеет или не имеет корень уравнение

$$1 - AtF'_0(\rho) = 0 \quad (126)$$

при условии  $\rho(t) \rightarrow 0$ ,  $t \rightarrow 0$ . Если второй момент начального распределения конечен, то имеет место разложение в ряд Тейлора  $F'_0(p) = (1/2)M_2(0) + o(p)$ ,  $p \rightarrow 0$ . Подставляя это выражение в формулу (126), приходим к выводу, что для интервала времени  $0 \leq t \leq t_{cr}$  уравнение (126) корней не имеет. Следовательно, чтобы выполнялось равенство (125), необходимо положить  $\dot{\rho} = 0$ . Значит,  $\rho(t) = 0$ ,  $0 \leq t \leq t_{cr}$ , и поэтому  $M_1 = \text{const}$ . Совершенно иная ситуация возникает при  $t \geq t_{cr}$ , когда у уравнения (126) возникает единственный корень, расположенный на действительной оси и со временем монотонно смещающийся вдоль этой оси вправо (напомним, что преобразование Лапласа при вещественных  $p$  является монотонно убывающей функцией). Однако если  $\rho(t)$  монотонно увеличивается со временем, то масса системы  $M_1$  в соответствии с ранее отмеченной зависимостью  $M_1 = -F_0(\rho)$  монотонно убывает при  $t > t_{cr}$ . Обобщая описанные результаты, приходим к заключению, что кинетическое уравнение коагуляции при мультипликативном ядре для всех начальных распределений с конечным вторым моментом обладает единственным непрерывным неотрицательным решением, полная масса которого монотонно убывает начиная с критического момента времени  $t_{cr}$ .

### Библиографический комментарий

Преобразование Фурье используется при решении краевых задач математической физики для неограниченных областей: плоскости, полуплоскости, квадранта, полосы, полуполосы, бесконечного цилиндра, полуцилиндра и т. д. Применяется оно и при решении интегральных уравнений с разностными ядрами, причем основную роль играют теоремы о свертках. Большую роль в теории сингулярных интегральных уравнений играют результаты о преобразованиях Фурье аналитических функций [13, 21, 89, 96].

Преобразование Лапласа применяется при решении нестационарных задач операционным методом. Кроме того, теорема о свертке для преобразования Лапласа позволяет решать интегральные уравнения Вольтерра с разностными ядрами [13, 89, 93].

Преобразование Меллина применяется при решении плоских гармонических задач в секториальной области, в теории упругости, при решении сингулярных интегральных уравнений на полуоси с ядром, зависящим от отношения аргументов, и при решении парных интегральных уравнений [93, 96].

Преобразование Гильберта находит применение в краевых задачах теории аналитических функций.

Преобразование Ханкеля наиболее часто применяется при решении уравнений с оператором Лапласа для цилиндрических областей в полярных или цилиндрических координатах (осесимметричные задачи), а преобразование Лежандра — для решения уравнений в сферических координатах [96].

## Глава 5

# Методы дискретизации задач математической физики

*Ключевые слова:* конечноразностные методы, метод сеток, метод прямых, метод квадратур, вариационные методы, метод Рунге, метод наименьших квадратов, метод Канторовича, метод Куранта, метод Третьяка, проекционные методы, метод Бубнова–Галеркина, метод моментов, проекционные методы в гильбертовых пространствах, проекционные методы в банаховых пространствах, проекционно-сеточные методы, методы интегральных тождеств, метод интегрального тождества Марчука, обобщенная формулировка метода интегральных тождеств, метод конечных элементов.

### Основные понятия и обозначения

*Сетка* — совокупность точек в области задания дифференциального уравнения и граничных условий, на которых строится соответствующая аппроксимация задачи.

*Разностная схема* — система уравнений, аппроксимирующая дифференциальное уравнение и граничные условия на точном решении задачи.

*Метод прогонки (факторизации)* — метод исключения Гаусса решения системы линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей.

$Au = f$  — символическая (операторная) форма записи задачи математической физики с оператором  $A$ .

$D(A)$  — область определений оператора  $A$ .

$R(A)$  — область значений оператора  $A$ .

*Вариационная задача* — задача об отыскании функций, доставляющих экстремум некоторого функционала  $J(u)$ .

*Вариационные (прямые) методы* — методы отыскания функций, приближенно реализующие экстремум функционала и не использующие сведения вариационной задачи к дифференциальным уравнениям.

*Минимизирующая последовательность* — последовательность функций  $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$  такая, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = d \equiv \inf_u J(u)$ .

*Проекционные методы* — класс методов отыскания приближенных решений  $u_N = \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i$ , представляемых в форме  $P_N(Au_N - f) = 0$ , где  $P_N$  — проектор на некоторую систему базисных функций  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N$ .

*Метод интегральных тождеств* — совокупность методов приближенного решения задачи  $Au = f$ , состоящая в построении системы интегральных тождеств исходя из точной постановки задачи  $Au = f$  и последующей аппроксимации этих тождеств.

*Метод квадратур* — метод сеток, применяемый к приближенному решению интегральных уравнений.

*Проекционно-сеточный метод (метод конечных элементов)* — модификация соответствующего проекционного метода, в котором базисные функции имеют носители порядка шага сетки.

## 1. Введение

Различные разделы вычислительной математики, ее идеи и подходы посвящены конструированию и исследованию численных методов решения задач математической физики.

Отметим одну из черт методов вычислительной математики: они, как правило, могут дать только приближенные результаты. Другой чертой этих методов является то, что при любых вычислениях можно производить операции только с конечным числом чисел и после вычислений получить лишь конечное число результатов. Поэтому каждая задача, которую предстоит решить численным путем, должна быть предварительно приведена к такому виду, чтобы можно было получить все результаты после конечного числа арифметических действий. При этом исходная задача приближенно заменяется решением новой задачи, в которой неизвестными являются конечное число параметров, знание которых позволяет приближенно вычислить искомое решение. Такой процесс замены решения исходной задачи новой задачей с конечным числом неизвестных параметров называют *дискретизацией* поставленной задачи математической физики.

Дискретизацию задачи математической физики можно осуществить многими методами, которые часто называют также соответствующими методами приближенного решения исходной задачи.

Остановимся на некоторых требованиях, которые предъявляются к методам дискретизации (приближенным методам вычислительной математики) с точки зрения вычислений. Одним из них является требование *аппроксимации* (например, насколько точно исходное решаемое уравнение может быть аппроксимировано конечной системой уравнений, решения которых в последующем принимаются за приближенное решение исходного уравнения). Исследование проблемы аппроксимации в методах дискретизации тесно связано с особым разделом математики, носящим название теории приближения функций, которая имеет очень большое значение для вычислительной математики.

Другим среди основных требований к методу дискретизации является требование возможности найти искомые величины с выбранной степенью точности. Особое значение для вычислений имеют поэтому такие приближенные методы и процессы, которые позволяют находить результаты со сколь угодно большой степенью точности. Такие методы называют *сходящимися*. Так, пусть  $u$  есть точное решение рассматриваемой задачи, и

пусть с помощью выбранного метода построена последовательность приближений  $u_1, \dots, u_N$  к решению  $u$ . Теперь одной из первых проблем выбранного метода будет установление сходимости приближений к точному решению  $u_N \rightarrow u$  при  $N \rightarrow \infty$ , и если эта сходимость осуществляется не всегда, то к выяснению тех условий, при которых она имеет место.

Когда сходимость установлена, возникает более трудная задача об оценке *быстроты сходимости*, т.е. оценке того, насколько быстро  $u_N$  стремится к решению  $u$  при  $N \rightarrow \infty$ . Быстрота сходимости метода является одним из факторов, определяющих общие вычислительные затраты на решение задачи с необходимой точностью. Чтобы оценить быстроту сходимости  $u_N$  к  $u$ , часто стремятся оценить абсолютную величину погрешности  $u - u_N$ , т.е. строят величину  $\varepsilon(N)$  такую, чтобы было  $|u - u_N| \leq \varepsilon(N)$ , и называют ее *оценкой погрешности*. При этом, чтобы оценка отражала действительную степень близости  $u_N$  к  $u$ , нужно, чтобы  $\varepsilon(N)$  мало отличалась от  $|u - u_N|$ . Кроме того, оценка  $\varepsilon(N)$  должна быть эффективной, т.е. такой, чтобы ее можно было на самом деле найти, иначе она не может быть использована.

Вычисления предъявляют к теории приближенных методов еще одно требование — *требование устойчивости вычислительного процесса*. Суть возникающей здесь проблемы в следующем. Каждый приближенный метод приводит к некоторой вычислительной схеме. Часто оказывается, что для получения всех необходимых результатов надо проделать длительный шаг вычислений по этой схеме. Вычисления на каждом шаге выполняются не совсем точно, а только на определенное число значащих цифр, и поэтому на каждом шаге совершается некоторая малая погрешность. Все эти погрешности будут сказываться на последующих результатах. Принятая вычислительная схема может оказаться настолько неудачной, что малые ошибки, допущенные в самом начале расчетов, по мере продолжения вычислений будут оказывать на результаты все более и более сильное влияние и могут вызвать сильные отклонения от точных значений, что говорит о неустойчивости выбранной вычислительной схемы к малым погрешностям на ее промежуточных шагах. Если же вычисления по выбранной схеме могут быть продолжены на сколь угодно большом числе шагов и можно будет получать требуемые результаты, то это позволит судить об устойчивости выбранной схемы проведения вычислений.

В последующих разделах представлено несколько классов методов дискретизации задач математической физики и приведен ряд результатов по теории этих методов [3, 29, 35, 40, 60, 64, 65, 71, 72, 79, 81].

## 2. Конечноразностные методы

Одними из самых распространенных методов численного решения различных задач математической физики являются *конечноразностные методы* (*методы конечных разностей*). В различных вариантах этих методов в области определения искомых функций вводится сетка и решение ищется на этой сетке. Для значений искомой сеточной функции (т.е. функции, заданной в узлах сетки) строится система скалярных уравнений, решение

которой и служит таблицей приближенных значений решения исходной задачи. Один из способов построения этой системы скалярных уравнений состоит в приближенной замене производных, входящих в решаемое дифференциальное уравнение и в краевые условия, разностными соотношениями, чем и объясняется название данного класса методов вычислительной математики.

## 2.1. Метод сеток.

2.1.1. *Основные понятия и идеи метода.* Изложим основные идеи метода сеток, рассмотрев его сначала применительно к простейшей линейной граничной задаче для обыкновенного дифференциального уравнения. Пусть при  $a \leq x \leq b$  рассматривается граничная задача вида

$$Au \equiv -u'' + q(x)u = f(x), \quad x \in (a, b), \quad u(a) = u(b) = 0, \quad (1)$$

где  $q(x) \geq q_0 = \text{const} > 0$ . Будем считать, что граничная задача (1) имеет единственное решение, это решение непрерывно на  $[a, b]$  и имеет непрерывные производные на этом отрезке до четвертого порядка включительно.

Метод сеток для решения граничной задачи (1), равно как и для многих других задач, состоит в следующем.

1. Область задания дифференциального уравнения (1), т.е. отрезок  $[a, b]$ , заменяется некоторой дискретной (сеточной) областью. Это означает, что на отрезке  $[a, b]$  выбирается некоторая система точек. Совокупность этих точек называется *сеткой*. Если положение каждой точки определяется по правилу  $x_k = a + kh$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$ ,  $h = (b - a)/N$ , то сетку называют *равномерной*. Точки  $x_k$  есть *узлы* сетки.

2. Граничная задача (1) на множестве узлов, принадлежащих сетке, заменяется некоторой сеточной задачей. Под термином *сеточная задача* понимают некоторые соотношения между приближенными значениями решения граничной задачи (1) в узлах сетки. В рассматриваемом случае это будет система линейных алгебраических уравнений.

3. Полученная сеточная задача решается по какому-либо численному методу и тем самым находятся приближенные значения решения граничной задачи в узлах сетки. Это и является конечной целью метода сеток.

Можно указать на следующие вопросы как на основные в методе сеток.

а) Как заменить область задания дифференциальных уравнений, а в случае дифференциальных уравнений в частных производных еще и границу области некоторой сеточной областью?

б) Как заменить дифференциальное уравнение и граничные условия некоторыми сеточными соотношениями?

в) Будет ли полученная сеточная задача однозначно разрешимой, будет ли она устойчивой, сходящейся?

Поясним смысл последних двух понятий и дадим ответы на поставленные вопросы в применении к (1).

*Построение разностной схемы.* Выберем равномерную сетку:

$$x_k = a + kh, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad h = \frac{(b - a)}{N}.$$

Дифференциальное уравнение из (1) рассмотрим только во внутренних узлах сетки, т. е. будем рассматривать его в точках  $x_k$ ,  $k = 1, \dots, N-1$ :

$$Au|_{x=x_k} = -u''(x_k) + q(x_k)u(x_k) = f(x_k), \quad k = 1, 2, \dots, N-1.$$

Выразим производные, входящие в это равенство, через значения  $u(x_k)$  в узлах сетки, пользуясь для них соответствующими конечноразностными представлениями:

$$u'(x_k) = \frac{u(x_k) - u(x_{k-1}))}{h} + r_k^{(1)}(h), \quad r_k^{(1)}(h) = \frac{h}{2} u''(x_k^{(1)}), \quad x_{k-1} < x_k^{(1)} < x_k;$$

$$u'(x_k) = \frac{u(x_{k+1}) - u(x_k)}{h} + r_k^{(2)}(h), \quad r_k^{(2)}(h) = -\frac{h}{2} u''(x_k^{(2)}), \quad x_k < x_k^{(2)} < x_{k+1};$$

$$u'(x_k) = \frac{u(x_{k+1}) - u(x_{k-1}))}{2h} + r_k^{(3)}(h), \quad r_k^{(3)}(h) = -\frac{h^2}{6} u'''(x_k^{(3)}),$$

$$x_{k-1} < x_k^{(3)} < x_{k+1};$$

$$u''(x_k) = \frac{u(x_{k+1}) - 2u(x_k) + u(x_{k-1}))}{h^2} + r_k^{(4)}(h),$$

$$r_k^{(4)}(h) = -\frac{h^2}{12} u^{IV}(x_k^{(4)}), \quad x_{k-1} < x_k^{(4)} < x_{k+1}.$$

Заметим, что если бы рассматривались граничные условия более сложного вида, содержащие производные  $u'(x_0)$ ,  $u'(x_N)$ , то при необходимости можно было бы использовать также следующие конечноразностные представления:

$$u'(x_0) = \frac{-u(x_2) + 4u(x_1) - 3u(x_0))}{2h} + O(h^2),$$

$$u'(x_N) = \frac{3u(x_N) - 4u(x_{N-1}) + u(x_{N-2}))}{2h} + O(h^2).$$

С учетом конечноразностных представлений (применительно к (1) только для  $u''(x_k)$ ) получим

$$Au|_{x=x_k} \equiv A_h u(x_k) - R_k(h) = f(x_k),$$

где

$$A_h u(x_k) = \frac{-u(x_{k-1}) + 2u(x_k) - u(x_{k+1}))}{h^2} + q(x_k)u(x_k), \quad R_k(h) = r_k^{(4)}(h).$$

Если для  $R_k(h)$  выполняется условие  $|R_k(h)| \leq Mh^2$ ,  $k = 1, 2, \dots, N-1$ , где  $M = \text{const}$  не зависит от  $h$ , то говорят, что разностный оператор  $A_h$  аппроксимирует на решении дифференциальный оператор  $A$  с погрешностью второго порядка относительно  $h$ .

Пусть  $h$  достаточно мало; тогда величиной  $R_k(h)$  можно пренебречь и получим

$$A_h u_k = f(x_k), \quad k = 1, 2, \dots, N-1, \quad (2)$$

где при выполнении некоторых условий можно предположить, что  $u \approx u(x_i)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, N$ . Вообще говоря, всегда  $u_i \neq u(x_i)$ , и только при  $R_k(h) \equiv 0$  можно ожидать, что будет  $u_i = u(x_i)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, N$ . Равенство (2) называют *разностной схемой*, аппроксимирующей уравнение  $Au = f(x)$ .

Отметим еще, что (2) есть система линейных алгебраических уравнений, число таких уравнений  $N - 1$ , а матрица этой системы трехдиагональная. Неизвестными являются  $u_0, u_1, \dots, u_N$ . Число этих неизвестных в системе равно  $N + 1$ .

Обратимся к граничным условиям из (1). Используя граничные условия, получим простейшие (в данной задаче) дополнительные уравнения

$$u_0 = 0, \quad u_N = 0. \quad (3)$$

Формулы (2), (3) образуют систему  $N + 1$  линейных алгебраических уравнений с неизвестными  $u_0, u_1, \dots, u_N$ . Иногда (как в случае рассматриваемой задачи) некоторые из этих неизвестных можно определить из «граничных уравнений» типа (3), и в результате получаем уже задачу для  $N - 1$  неизвестных  $u_1, u_2, \dots, u_{N-1}$ . В других случаях можно из граничных уравнений выразить  $u_0, u_N$  через  $u_1, u_2, \dots, u_{N-1}$ . Подставив эти выражения в уравнения (3) вместо  $u_0, u_N$ , снова приходим к системе уравнений для  $u_1, u_2, \dots, u_{N-1}$ . Однако заметим, что в последнем случае оператор  $A_h$  и выражения правых частей в (2) могут видоизменяться.

Если теперь решить систему (2), (3) по какому-либо алгоритму, то после этого можно принять  $u(x_k) \approx u_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$ .

*О разрешимости систем разностных уравнений.* В методе сеток приближенное решение рассматриваемой задачи вычисляется как решение системы разностных уравнений.

Выясним условия разрешимости этих уравнений на примере системы (2), (3). Здесь из «граничных уравнений» имеем  $u_0 = 0$ ,  $u_N = 0$ . Поэтому будем рассматривать (2) для  $u_1, \dots, u_{N-1}$ . Матрица этой системы будет с *диагональным преобладанием*. Отметим, что некоторая матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется матрицей с *диагональным преобладанием* величины  $\delta > 0$ , если  $|a_{ii}| \geq \sum_{j, j \neq i}^n |a_{ij}| + \delta$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Для такой матрицы существует обратная  $A^{-1}$ , причем ее норма, связанная с нормой  $\|x\|_\infty = \max_j |x_j|$ , удовлетворяет оценке  $\|A^{-1}\|_\infty \leq 1/\delta$ .

Таким образом, если  $q(x) \geq q_0 = \text{const} > 0$ , то матрица системы (2) является матрицей с диагональным преобладанием; при любых  $\{f(x_k)\}$  система (2) имеет единственное решение  $\{y_k\}$ , причем

$$\max_j |y_k| \leq \frac{1}{q_0} \max_k |f(x_k)|.$$

Данное неравенство одновременно доказывает, что схема (2) *устойчива* к возможным ошибкам в значениях  $\{f(x_k)\}$ .

Решение системы (2) может быть найдено известным *методом исключения Гаусса*, который в применении к системам уравнений с трехдиагональными матрицами называют также *методом прогонки* или *методом факторизации*.

*Оценка погрешности и сходимость метода сеток.* Рассмотрим эти вопросы на примере задачи (1). Пусть

$$\varepsilon_k = u(x_k) - u_k, \quad \varepsilon(h) = \max_{0 \leq k \leq N} |\varepsilon_k|.$$

Метод сеток называется *равномерно сходящимся*, если при  $h \rightarrow 0$  выполняется условие  $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ . Для задачи (1) имеем систему вида

$$A_h \varepsilon_k = R_k(h), \quad k = 1, 2, \dots, N-1, \quad \varepsilon_0 = \varepsilon_N = 0.$$

Считая, что точное решение (1) имеет ограниченные четвертные производные, получаем  $|R_k(h)| \leq Mh^2$ . А поскольку матрица системы для ошибок  $\{\varepsilon_k\}$  является с диагональным преобладанием, заключаем, что справедлива оценка

$$\max_k |\varepsilon_k| \leq \frac{1}{q_0} Mh^2 \rightarrow 0,$$

которая гарантирует также сходимость метода сеток в рассматриваемом случае задачи со скоростью  $O(h^2)$ .

Исследование основных вопросов обоснования метода сеток в более сложных случаях задачи осуществляется с привлечением различных специальных подходов и утверждений, развитых и полученных в теории данного метода (*принцип максимума, теоремы сравнения и др.*).

2.1.2. *Общие определения метода сеток. Теорема сходимости.* Приведем основные определения и понятия теории метода сеток в более общих формулировках.

Пусть рассматривается некоторая краевая задача, которую запишем символическим равенством

$$Au = f \quad \text{в } D, \tag{4}$$

где исходные данные и точное решение  $u(x)$  определены в областях  $D$  и  $\bar{D} = D \cup \partial D$  соответственно. (В рассмотренной в п. 2.1.1 задаче для обыкновенного дифференциального уравнения имеем  $D = \{a < x < b\} \subset \mathbb{R}$ ,  $\bar{D} = \{a \leq x \leq b\}$ .) Будем предполагать, что решение задачи (4) существует и оно достаточно гладкое в  $\bar{D}$ . Для вычисления этого решения с помощью метода конечных разностей, или метода сеток, надо прежде всего выбрать на отрезке  $\bar{D}$  конечное число точек, совокупность которых будем называть *сеткой* и обозначать через  $D_h$ , а затем искать искомым не решение  $u(x)$  задачи (4), а таблицу  $[u]_h$  значений этого решения в точках сетки  $D_h$ . Предполагается, что сетка  $D_h$  зависит от параметра  $h$ , который может принимать сколь угодно малые положительные значения. При стремлении шага сетки  $h$  к нулю сетка должна становиться все гуще. Искомая сеточная функция  $[u]_h$  в этом случае в точке  $x_n$  сетки принимает значение, которое

будем обозначать  $u_n$ .

Пусть для приближенного вычисления решения дифференциальной краевой задачи (4), т. е. для приближенного вычисления сеточной функции  $[u]_h$  на основе использования равенства (4) составлена некоторая система уравнений — *разностная схема*, которую будем символически записывать аналогично уравнению (4) в форме равенства

$$A_h u^{(h)} = f^{(h)}. \quad (5)$$

Решение  $u^{(h)} = (u_0^{(h)}, u_1^{(h)}, \dots, u_N^{(h)})$  системы (5) определено на той же сетке  $D_h$ , что и искомая сеточная функция  $[u]_h$ . Его значения  $u_0^{(h)}, u_1^{(h)}, \dots, u_N^{(h)}$  в точках  $x_0, x_1, \dots, x_N$  последовательно вычисляются из (5) при  $n = 0, 1, \dots, N$ . Для краткости в уравнении (5) значок  $h$  при  $u_n^{(h)}$  не пишется. Способом построения и исследования сходящихся разностных схем (5) посвящено целое направление вычислительной математики, носящее название *теория разностных схем*. Придадим точный смысл понятию «сходящейся схемы» и требованию сходимости  $u^{(h)} \rightarrow [u]_h$ . Для этого рассмотрим линейное нормированное пространство функций, определенных на сетке  $D_h$ . Норма  $\|u^{(h)}\|_{U_h}$  сеточной функции  $u^{(h)} \in U_h$  есть неотрицательное число, которое принимается за меру отклонения функции  $u^{(h)}$  от тождественного нуля.

Норма может быть определена различными способами. Можно, например, принять за норму функции точную верхнюю грань модуля ее значений в точках сетки, положив

$$\|u^{(h)}\|_{U_h} = \max_n |u_n|.$$

Если  $D \subset \mathbb{R}^n$ , то часто используют также норму, определенную равенством

$$\|u^{(h)}\|_{U_h} = \left( h^n \sum_{k=0}^N u_k^2 \right)^{1/2},$$

где  $N+1$  — число узлов сетки и неизвестных  $u_0, u_1, \dots, u_N$ , определяемых разностной схемой. Эта норма аналогична норме  $\|u\| = \left( \int_D |u|^2 dx \right)^{1/2}$  для функций  $u(x)$ , интегрируемых на  $D$  с квадратом.

После того как введено нормированное пространство  $U_h$ , приобретает смысл понятие отклонения одной функции от другой. Если  $a^{(h)}, b^{(h)}$  — произвольные сеточные функции из  $U_h$ , то мерой их отклонения друг от друга считается норма их разности, т. е. число  $\|b^{(h)} - a^{(h)}\|_{U_h}$ .

Дадим теперь строгое определение сходящейся разностной схемы.

Система (5), как видим, зависит от  $h$  и должна быть выписана для всех тех  $h$ , для которых рассматриваются сетка  $D_h$  и сеточная функция  $[u]_h$ . Таким образом, разностная краевая задача (5) это не одна система, а семейство систем, зависящее от параметра  $h$ . Будем предполагать, что при каждом рассматриваемом достаточно малом  $h$  существует решение  $u^{(h)}$

задачи (5), принадлежащее пространству  $U_h$ .

Говорят, что решение  $u^{(h)}$  разностной краевой задачи (5) при измельчении сетки *сходится* к решению дифференциальной краевой задачи (4), если  $\| [u]_h - u^{(h)} \|_{U_h} \rightarrow 0$ ,  $h \rightarrow 0$ . Если сверх того выполнено неравенство  $\| [u]_h - u^{(h)} \|_{U_h} \leq ch^k$ , где  $c > 0$ ,  $k > 0$  — некоторые постоянные, не зависящие от  $h$ , то говорят, что имеет место *сходимость порядка  $h^k$* , или что *разностная схема имеет  $k$ -й порядок точности*.

Обладание свойством сходимости является фундаментальным требованием, которое предъявляется к разностной схеме (5) для численного решения дифференциальной краевой задачи (4). Если оно имеет место, то с помощью разностной схемы (5) можно вычислить решение  $[u]_h$  с любой наперед заданной точностью, выбирая для этого  $h$  достаточно малым.

Придадим теперь точный смысл понятию «аппроксимация задачи (4) на решении  $u(x)$ » разностной схемой (5).

Условимся считать, что правые части уравнений, записанных символическим равенством (5), являются компонентами вектора  $f^{(h)}$  из некоторого линейного нормированного пространства  $F_h$ . Тогда на  $A_h$  можно смотреть как на оператор, ставящий в соответствие каждой сеточной функции  $u^{(h)}$  из  $U_h$  некоторый элемент  $f^{(h)}$  из  $F_h$ . В таком случае имеет смысл выражение  $A_h[u]_h$ , возникающее в результате применения оператора  $A$  к сеточной функции  $[u]_h$  из  $U_h$  и являющееся элементом пространства  $F_h$ . Невязка  $\delta f^{(h)} = A_h[u]_h - f^{(h)}$  принадлежит пространству  $F_h$  как разность двух элементов этого пространства. Под величиной невязки следует понимать  $\| \delta f^{(h)} \|_{F_h}$ .

**Определение 1.** Будем говорить, что разностная схема  $A_h u^{(h)} = f^{(h)}$  *аппроксимирует задачу  $Au = f$  на решении  $u$* , если  $\| \delta f^{(h)} \|_{F_h} \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ . Если сверх того имеет место неравенство  $\| \delta f^{(h)} \|_{F_h} \leq ch^k$ , где  $c > 0$ ,  $k > 0$  — некоторые постоянные, то будем говорить, что имеет место *аппроксимация порядка  $h^k$* , или *порядка  $k$  относительно величины  $h$* .

Обратимся к общему определению устойчивости схемы (5), которая аппроксимирует задачу (4) на решении  $u(x)$  с некоторым порядком  $h^k$ .

**Определение 2.** Будем называть разностную схему (5) *устойчивой*, если существуют числа  $h_0 > 0$ ,  $\delta > 0$  такие, что при любом  $h < h_0$  и любом  $\varepsilon^{(h)} \in F_h$ ,  $\| \varepsilon^{(h)} \|_{F_h} < \delta$  разностная задача

$$A_h z^{(h)} = f^{(h)} + \varepsilon^{(h)},$$

полученная из задачи (5) добавлением к правой части возмущения  $\varepsilon^{(h)}$ , имеет одно и только одно решение  $z^{(h)}$ , причем это решение отклоняется от решения  $u^{(h)}$  невозмущенной задачи (5) на сеточную функцию  $z^{(h)} - u^{(h)}$ , удовлетворяющую оценке

$$\| z^{(h)} - u^{(h)} \|_{U_h} \leq c_1 \| \varepsilon^{(h)} \|_{F_h},$$

где  $c_1$  — некоторая постоянная, не зависящая от  $h$ .

В частности, последнее неравенство означает, что малое возмущение  $\varepsilon^{(h)}$  правой части разностной схемы (5) вызывает равномерно относительно  $h$  малое возмущение  $z^{(h)} - u^{(h)}$  решения.

Пусть оператор  $A_h$ , отображающий  $U_h$  в  $F_h$ , линейный. Тогда приведенное выше определение устойчивости равносильно следующему определению.

**Определение 3.** Будем называть разностную схему (5) с линейным оператором  $A_h$  *устойчивой*, если при любом  $f^{(h)} \in F_h$  уравнение  $A_h u^{(h)} = f^{(h)}$  имеет единственное решение  $u^{(h)} \in U_h$ , причем

$$\|u^{(h)}\|_{U_h} \leq c_1 \|f^{(h)}\|_{F_h}, \quad (6)$$

где  $c_1$  — некоторая постоянная, не зависящая от  $h$ .

Можно показать, что определения 2 и 3 эквивалентны.

Теперь докажем один из фундаментальных результатов теории разностных схем, а именно докажем, что из аппроксимации и устойчивости следует сходимости.

**Теорема сходимости.** Пусть разностная схема  $A_h u^{(h)} = f^{(h)}$  аппроксимирует задачу  $Au = f$  на решении с порядком  $h^k$  и устойчива. Тогда решение  $u^{(h)}$  разностной задачи  $A_h u^{(h)} = f^{(h)}$  сходится к  $[u]_h$ , причем имеет место оценка

$$\|[u]_h - u^{(h)}\|_{U_h} \leq c c_1 h^k,$$

где  $c, c_1$  — числа, входящие в оценки в определениях аппроксимации и устойчивости.

**Доказательство.** Положим  $\varepsilon^{(h)} = \delta f^{(h)}$ ,  $[u]_h = z^{(h)}$ . Тогда из определения 2 имеем

$$\|[u]_h - u^{(h)}\|_{U_h} \leq c_1 \|\delta f^{(h)}\|_{F_h}.$$

Учитывая оценку из определения 1, сразу получаем доказываемое неравенство.  $\square$

В заключение подчеркнем, что схема доказательства сходимости решения задачи (5) к решению задачи (4) путем проверки аппроксимации и устойчивости носит общий характер. При этом под  $Au = f$  можно понимать любое функциональное уравнение, на основе которого строится «разностная задача» (5).

**2.1.3. Метод сеток для дифференциальных уравнений в частных производных.** Дифференциальные уравнения в частных производных имеют широкие приложения в математической физике, гидродинамике, акустике и других областях знаний. В большинстве своем такие уравнения в явном виде не решаются. Поэтому широкое распространение получили методы приближенного их решения, в частности метод сеток.

Построение различных схем метода сеток в случае уравнений в частных производных зависит от типа уравнений и вида граничных (начальных) условий, присоединяемых к уравнениям. Частными примерами данных уравнений являются следующие:

уравнение Пуассона (эллиптическое уравнение)

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = f(x, y);$$

уравнение теплопроводности (параболическое уравнение)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t);$$

волновое уравнение (гиперболическое уравнение)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t).$$

Изложим некоторые подходы к построению разностных схем применительно к этим уравнениям.

Разностные схемы для уравнения параболического типа. Рассмотрим задачу Коши для уравнения теплопроводности

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varphi(x, t), \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= \psi(x), \quad -\infty < x < +\infty. \end{aligned} \quad (7)$$

Будем считать, что задача (7) имеет единственное решение  $u(x, t)$ , непрерывное вместе со своими производными  $\frac{\partial^i u}{\partial t^i}$ ,  $i = 1, 2$ , и  $\frac{\partial^k u}{\partial x^k}$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ . Запишем задачу (7) в виде

$$Au = f.$$

Для этого достаточно положить

$$\begin{aligned} Au &\equiv \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0), & -\infty < x < +\infty, \quad t = 0; \end{cases} \\ f &\equiv \begin{cases} \varphi(x, t), & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ \psi(x), & -\infty < x < +\infty, \quad t = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Будем далее считать, что  $t$  изменяется в пределах  $0 \leq t \leq T < +\infty$ .

В рассматриваемом случае  $D = \{-\infty < x < +\infty, \quad 0 \leq t \leq T < \infty\}$ ,  $\Gamma$  — объединение прямых  $t = 0$  и  $t = T$ .

Выберем прямоугольную сетку и заменим  $\bar{D} = D \cup \Gamma$  сеточной областью  $D_h$ . К области  $D_h$  отнесем совокупность точек (узлов)  $(x_m, t_n)$ , координаты которых определяются по правилу

$$x_m = mh, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad h > 0,$$

$$t_n = n\tau, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad \tau > 0, \quad N\tau \leq (N+1)\tau.$$

Заменим задачу  $Au = f$  разностной схемой вида  $Au^{(h)} = f^{(h)}$ . Обозначим через  $u(x_m, t_n)$  точное значение решения задачи  $Au = f$  в узле  $(x_m, t_n)$ ,

через  $u_m^n$  — соответствующее приближенное сеточное значение. Имеем

$$Au|_{(x_m, t_n)} \equiv \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}|_{(x_m, t_n)} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|_{(x_m, t_n)}, & m = 0, \pm 1, \dots, \quad n = 1, \dots, N, \\ u(x, 0)|_{(x_m, t_n)}; \end{cases}$$

$$f|_{(x_m, t_n)} \equiv \begin{cases} \varphi(x, t)|_{(x_m, t_n)}, & m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad n = 1, 2, \dots, N, \\ \psi(x)|_{(x_m, t_n)}. \end{cases}$$

Для замены выражений  $\frac{\partial u}{\partial t}|_{(x_m, t_n)}$  и  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|_{(x_m, t_n)}$  разностными отношениями воспользуемся формулами численного дифференцирования. Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t}|_{(x_m, t_n)} = \frac{u(x_m, t_{n+1}) - u(x_m, t_n)}{\tau} - \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}|_{(x_m, t_n^{(1)})}, \quad t_n < t_n^{(1)} < t_{n+1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}|_{(x_m, t_n)} = \frac{u(x_m, t_n) - u(x_m, t_{n-1})}{\tau} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}|_{(x_m, t_n^{(2)})}, \quad t_{n-1} < t_n^{(2)} < t_n,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}|_{(x_m, t_n)} = \frac{u(x_m, t_{n+1}) - u(x_m, t_{n-1})}{2\tau} - \frac{\tau^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}|_{(x_m, t_n^{(3)})}, \quad t_{n-1} < t_n^{(3)} < t_{n+1},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|_{(x_m, t_n)} = \frac{u(x_{m+1}, t_n) - 2u(x_m, t_n) + u(x_{m-1}, t_n)}{h^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}|_{(x_m, t_n)}.$$

Рассмотрим следующую двухслойную разностную аппроксимацию:

$$Au|_{(x_m, t_n)} \equiv$$

$$\equiv \begin{cases} \frac{u(x_m, t_{n+1}) - u(x_m, t_n)}{\tau} - \frac{u(x_{m+1}, t_n) - 2u(x_m, t_n) + u(x_{m-1}, t_n)}{h^2} + r_{mn}^{(h)}, \\ u(x_m, 0), \quad n = 0, \end{cases}$$

где

$$r_{mn}^{(h)} = -\frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}|_{(x_m, t_n^{(1)})} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}|_{(x_m, t_n)}.$$

Введем следующее обозначение:

$$f^{(h)} \equiv \begin{cases} \varphi(x_m, t_n), \\ \psi(x_m) \end{cases}$$

и запишем разностную схему для задачи  $Au = f$ :

$$A_h^{(1)} u^{(h)} = f^{(h)}, \quad (8)$$

где разностный оператор  $A_h^{(1)}$  определяется по правилу

$$A_h^{(1)} u^{(h)} \equiv \begin{cases} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2}, \\ u_m^0, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \end{cases}$$

Аналогично можно получить разностную схему вида

$$A_h^{(2)} u^{(h)} = f^{(h)}, \quad (9)$$

где

$$A_h^{(2)} u^{(h)} \equiv \begin{cases} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2}, & f^{(h)} \equiv \begin{cases} \varphi(x_m, t_n), \\ \psi(x_m). \end{cases} \\ u_m^0, & m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \end{cases}$$

Замечаем, что

$$A_h^{(1)} u_h(x, y) = f^{(h)} + \delta^{(1)} f^{(h)}, \quad A_h^{(2)} u_h(x, y) = f^{(h)} + \delta^{(2)} f^{(h)},$$

где

$$\delta^{(1)} f^{(h)} \equiv \begin{cases} r_{mn}^{(h)}, \\ 0, \end{cases} \quad \delta^{(2)} f^{(h)} = \begin{cases} \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{(x_m, t_n^{(2)})} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{(x_m, t_{n+1})}, \\ 0. \end{cases}$$

Выясним порядок аппроксимации разностных схем (8) и (9). В качестве  $F_h$  возьмем линейное множество всех пар ограниченных функций

$$g^{(h)} = \begin{cases} \alpha_m^n, \\ \beta_m. \end{cases}$$

Норму в  $F_h$  определим по правилу

$$\|g^{(h)}\| = \max_{m,n} |\alpha_m^n| + \max_m |\beta_m|.$$

Если  $\max_{m,n} |\alpha_m^n|$  или  $\max_m |\beta_m|$  не достигается, то будем под нормой понимать величину  $\|g^{(h)}\| = \sup_{m,n} |\alpha_m^n| + \sup_m |\beta_m|$ .

Пусть  $\tau = rh^s$ ,  $r, s$  — некоторые положительные числа. Предположим, что для  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  и  $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$  верны оценки

$$\max_{(x,t) \in D} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right| \leq M_2, \quad \max_{(x,t)} \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right| \leq M_4.$$

Тогда легко получить

$$\begin{aligned} \|\delta^{(1)} f^{(h)}\|_{F_h} &= \max_{m,n} |r_{mn}^{(1)}(h)| \leq \left( \frac{r}{2} M_2 + \frac{h^{2-s}}{12} M_4 \right) \cdot h^s, \\ \|\delta^{(2)} f^{(h)}\| &= \max_{m,n} |r_{mn}^{(2)}(h)| \leq \left( \frac{r}{2} M_2 + \frac{h^{2-s}}{12} M_4 \right) \cdot h^s. \end{aligned}$$

В случае схемы (8) здесь можно взять  $s = 2$ , в случае схемы (9) можно взять  $s = 1$ . Из этих формул следует, что разностные схемы (8), (9) аппроксимируют задачу  $Au = f$  на  $u(x, y)$  с погрешностью порядка  $s$  ( $1 \leq s \leq 2$ ) относительно  $h$ .

Разностная схема (8) позволяет по значениям решения на нулевом слое, т. е. по значениям  $u_m^0$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , вычислить значения на первом слое  $u_m^1$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Для этого достаточно в (8) положить  $n = 0$  и произвести вычисления, носящие рекурсивный характер. Потом по значениям  $u_m^1$  можно аналогично при  $n = 1$  вычислить значения  $u_m^2$  и т. д. В силу таких вычислительных свойств разностную схему (8) называют *явной*.

Разностная схема (9) упомянутыми выше свойствами не обладает. Действительно, если в (9) положить  $n = 0$ , то в левой части полученной формулы будет линейная комбинация из значений  $u_{m-1}^1$ ,  $u_m^1$ ,  $u_{m+1}^1$ ,  $u_m^0$ , в правой части будут значения известной функции  $\varphi(x_m, 0)$  и  $\psi(x_m)$ . Для вычисления значений на первом слое  $\dots$ ,  $u_{-2}^1$ ,  $u_{-1}^1$ ,  $u_0^1$ ,  $u_1^1$ ,  $u_2^1$ ,  $\dots$  в этом случае необходимо решать бесконечную систему линейных уравнений. По этой причине разностную схему (9) называют *неявной*.

Изучим вопрос устойчивости схем (9), (10), определив норму в пространстве  $U_h$  по правилу

$$\|u^{(h)}\|_{U_h} = \max_{m,n} |u_m^n|.$$

Рассмотрим разностную схему (8). Выясним, при каких значениях  $r$ ,  $\tau = rh^2$ , возможна устойчивость этой схемы.

Для доказательства устойчивости надо показать, что разностная схема однозначно разрешима и при любых

$$g^{(h)} = \begin{cases} \alpha_m^n, \\ \beta_m, \end{cases} \quad g^{(h)} \in F_h,$$

имеет место оценка

$$\|z^{(h)}\|_{U_h} \leq M \|g^{(h)}\|_{F_h},$$

где  $M$  — постоянная, не зависящая от  $h$  и  $g^{(h)}$  и  $A_h^{(1)} z^{(h)} = g^{(h)}$ .

Разностная схема (8), явная, и ее однозначная разрешимость очевидна.

Перепишем формулу  $A_h^{(1)} z^{(h)} = g^{(h)}$  в виде

$$z_m^{n+1} = r(z_{m+1}^n + z_{m-1}^n) + (1 - 2r)z_m^n + \tau \alpha_m^n, \quad z_m^0 = \beta_m,$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

Из этих уравнений при выполнении ограничения вида  $r \equiv (\tau/h^2) \leq 1/2$  получаем неравенство

$$\max_m |z_m^{n+1}| \leq \max_m |z_m^n| + \tau \max_{m,n} |\alpha_m^n|$$

— *принцип максимума*. Полагая  $n = 0, 1, \dots, N-1$  и суммируя получаемые соотношения, получим

$$\begin{aligned} \max_m |z_m^N| &\leq \max_m |\beta_m| + N \tau \max_{m,n} |\alpha_m^n| \leq \max_m |\beta_m| + T \max_{m,n} |\alpha_m^n| \leq \\ &\leq \max(1, T) \left( \max_{m,n} |\alpha_m^n| + \max_m |\beta_m| \right) = M \cdot \|g^{(h)}\|_{L_h}, \end{aligned}$$

где обозначено  $M = \max(1, T)$ ;  $M = 1$ , если  $T < 1$ , и  $M = T$ , если  $T \geq 1$ . Следовательно,

$$\|z^{(h)}\|_{U_h} \leq M \cdot \|g^{(h)}\|_{L_h}.$$

Таким образом, схема (8) устойчива при выполнении ограничения  $r \leq 0,5$ . Отметим, что это ограничение налагает жесткие ограничения на выбор  $\tau$ :  $\tau \leq 0,5h^2$ , и оно приводит к тому, что если необходимо сохранить устойчивость, при вычислениях по схеме (8) шаг по времени приходится выбирать очень малым.

Обратимся к разностной схеме (9) и перепишем ее в виде

$$\begin{aligned} -r(u_{m+1}^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}) + (1 + 2r)u_m^{n+1} &= u_m^n + \tau \varphi(x_m, t_n), \\ u_m^0 &= \psi(x_m), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (10)$$

Данная схема представляет собой бесконечную систему линейных уравнений относительно неизвестных  $\dots, u_{-1}^h, u_0^1, u_1^1, \dots$ . Решение таких систем является сложной и трудоемкой задачей, поэтому разностные схемы (9) неудобны для задач Коши на бесконечных отрезках и применяются редко. Однако если отрезок оси  $x$ , на котором рассматривается задача Коши, конечен:  $a \leq x \leq b$ ,  $b - a \leq K$ , а на прямых  $x = a$  и  $x = b$  дополнительно заданы некоторые ограничения на решение  $u(x, t)$ , то разностные схемы вида (9) оказываются весьма эффективными. В частности, такие схемы являются *абсолютно устойчивыми*, т. е. устойчивыми при любых значениях  $r = \tau/h^2$ .

Если, например, на отрезках прямых  $x = a$  и  $x = b$  заданы условия  $u(a, t) = \gamma_0(t)$ ,  $u(b, t) = \gamma_1(t)$ , то вид системы (10) при  $n = 0$  существенно изменится:

$$\begin{aligned} -r(u_{m+1}^1 + u_{m-1}^1) + (1 + 2r)u_m^1 &= \psi(x_m) + \tau \varphi(x_m, 0), \\ u_0^1 &= \gamma_0(t_1), \quad u_M^1 = \gamma_1(t_1), \quad m = 1, 2, \dots, M-1, \quad h = (b - a)/M. \end{aligned} \quad (11)$$

Формулы (11) представляют собой систему  $M + 1$  линейных алгебраических уравнений относительно  $u_0^1, u_1^1, \dots, u_M^1$ . Эту систему можно решить по методу прогонки, а затем определить все  $u_m^n$  при других значениях  $n$ .

Приведенные рассуждения показывают, что реализация неявных разностных схем требует больших вычислительных затрат для вычисления решения на одном временном слое, но таких временных слоев может быть немного из-за того, что в этом случае отсутствуют ограничения на соотношение  $\tau/h^2$ . Если пользоваться явной разностной схемой, то вычисление решения на следующем слое осуществляется по рекурсионному правилу и связано с минимальными вычислительными затратами, однако из-за ограничения  $\tau/h^2 \leq 1/2$  число временных слоев в случае явных схем может

быть существенно большим по сравнению с числом временных слоев для неявных схем.

Отметим следующее утверждение о сходимости разностной схемы (8). Эта схема аппроксимирует задачу (7) на решении  $u(x, t)$  с погрешностью порядка  $O(\tau + h^2)$  и устойчива при  $r \leq 1/2$ . Поэтому схема (8) будет сходящейся; при этом погрешность для приближенного решения будет величиной порядка  $O(\tau + h^2)$ .

Разностная схема для задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Пусть в области  $D = \{0 < x < a, 0 < y < b\}$  рассматривается уравнение Пуассона с условием Дирихле на границе  $\Gamma$  области  $D$ :

$$Au \equiv -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = f(x, y), \quad u|_{\Gamma} = 0. \quad (12)$$

Будем считать, что (12) имеет единственное решение  $u(x, y)$  в  $\bar{D} = D \cup \Gamma$ , и это решение имеет непрерывные в  $D$  производные  $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$  и  $\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}$ .

Возьмем прямоугольную сетку, положив  $x_m = mh$ ,  $m = 0, 1, \dots, M$ ,  $h = a/M$ ;  $y_n = nl$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ ,  $l = b/N$ . Отнесем к множеству внутренних узлов  $D_h^0$  все узлы, лежащие в  $D$ , а к множеству граничных узлов  $\Gamma_h$  отнесем узлы, лежащие на  $\Gamma$ .

Пусть узел  $(m, n) \in D_h^0$ . Замену дифференциального уравнения из (12) разностным будем осуществлять только во внутренних узлах. Имеем

$$\begin{aligned} & -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{(x_m, y_n)} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big|_{(x_m, y_n)}\right) = f(x_m, y_n), \\ & -\frac{u(x_{m+1}, y_n) - 2u(x_m, y_n) + u(x_{m-1}, y_n))}{h^2} + \frac{h^2}{12} \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\Big|_{(x_m^{(1)}, y_n)} - \\ & -\frac{u(x_m, y_{n+1}) - 2u(x_m, y_n) + u(x_m, y_{n-1}))}{l^2} + \frac{l^2}{12} \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\Big|_{(x_m, y_n^{(1)})} = f(x_m, y_n), \\ & (m, n) \in D_h^0, \quad x_{m-1} < x_m^{(1)} < x_{m+1}, \quad y_{n-1} < y_n^{(1)} < y_{n+1}. \end{aligned}$$

Пусть функции  $\frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial x^4}$  и  $\frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial y^4}$  ограничены по абсолютной величине в области  $\bar{D}$ ; тогда при достаточно малых  $h$  и  $l$  можно пренебречь членами, содержащими в качестве множителей  $h^2$  и  $l^2$ , и получим искомое разностное уравнение

$$A_h u^{(h)} = f^{(h)}, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} A_h u^{(h)} & \equiv \frac{-u_{m+1, n} + 2u_{mn} - u_{m-1, n}}{h^2} + \frac{-u_{m, n+1} + 2u_{m, n} - u_{m, n-1}}{l^2}, \\ f^{(h)} & \equiv f(x_m, y_n), \quad (m, n) \in D_h^0, \quad u^{(h)}|_{\Gamma_h} \equiv 0. \end{aligned}$$

Здесь через  $u_{mn}$  обозначается приближенное сеточное значение решения задачи (12) так, что  $u_{mn} \approx u(x_m, y_n)$ .

В силу определений и понятий, введенных в пп. 2.1.1, 2.1.2, получаем

$$A_h u_h(x, y) = f^{(h)} + \delta f^{(h)},$$

где

$$\delta f^{(h)} \equiv -\frac{h^2}{12} \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{(x_m^{(1)}, y_n)} - \frac{l^2}{12} \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \Big|_{(x_m, y_n^{(1)})}, \quad (m, n) \in D_h^0.$$

Следовательно, при сделанных выше предположениях относительно  $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$  и  $\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}$  имеет место оценка

$$\|\delta f^{(h)}\|_{F_h} \leq C(h^2 + l^2) \quad \left( \|u^{(h)}\|_{F_h} \equiv \left( \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{l=1}^{N-1} hl |u_{mn}|^2 \right)^{1/2} \right),$$

где  $C$  — постоянная, не зависящая от  $h$ . Данная оценка означает, что схема (13) аппроксимирует задачу (12) на решении  $u(x, y)$  с погрешностью  $O(h^2 + l^2)$ .

Заметим, что оператор  $A_h$  является симметричным и положительно определенным в вещественном гильбертовом пространстве  $F_h$  с нормой  $\|\cdot\|_{F_h}$  и скалярным произведением  $(u^{(h)}, v^{(h)})_{F_h} = \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{l=1}^{N-1} hl u_{mn} v_{ml}$ . Собственные значения этого оператора имеют вид

$$\lambda_h^{(m,n)} = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi m h}{2a} + \frac{4}{l^2} \sin^2 \frac{\pi l}{2b}, \quad 1 \leq m \leq M-1, \quad 1 \leq n \leq N-1.$$

Точными собственными значениями для задачи  $Au = \lambda u$ ,  $u|_{\Gamma} = 0$  являются числа

$$\lambda^{(m,n)} = \left( \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right) \pi^2, \quad 1 \leq m \leq \infty, \quad 1 \leq n \leq \infty.$$

Нетрудно видеть, что

$$\lambda_h^{(m,n)} = \lambda^{(m,n)} = -\frac{\pi^4}{12} \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^4 h^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^4 l^2 \right] + O(h^4 + l^4).$$

Если воспользоваться методом разложения по собственным функциям оператора  $A_h$ , то для решения задачи (13) несложно получить оценку

$$\|u^{(h)}\|_{F_h} \leq C \cdot \|f^{(h)}\|_{F_h},$$

где  $C = 1/\lambda_h^{(1,1)}$ , которая гарантирует устойчивость схемы (13).

На основе утверждений об устойчивости и аппроксимации для (13) заключаем, что данная схема является сходящейся и справедлива оценка  $\|u^{(h)} - [u]_h\|_{F_h} \leq C \cdot (h^2 + l^2)$ , где  $[u]_h$  есть таблица значений точного решения на  $D_h^0$ , а постоянная  $C$  не зависит от  $h$  и  $l$ .

Разностная схема для уравнения гиперболического типа. Рассмотрим задачу Коши для одного из простейших гиперболи-

ческих уравнений — уравнения колебаний струны (волновое одномерное уравнение)

$$\begin{aligned} Au \equiv \square u &\equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} &= \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = g(x), \end{aligned} \quad (14)$$

где  $f(x, t)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $g(x)$  — заданные функции. Решение задачи (14) определяется формулой (решение Даламбера)

$$u(x_0, t_0) = \frac{\varphi(x_0 - t_0) + \varphi(x_0 + t_0)}{2} + \frac{1}{2} \int_{(x_0 - t_0)}^{(x_0 + t_0)} g(x) dx + \frac{1}{2} \iint_{D(x_0, t_0)} f dx dt,$$

где  $D(x_0, t_0)$  — треугольник плоскости  $Oxt$ , ограниченный осью  $t = 0$  и прямыми («характеристиками»)  $x + t = x_0 + t_0$ ,  $x - t = x_0 - t_0$ , проходящими через  $(x_0, t_0)$ . Из этой формулы следует, что  $u(x, t)$  определяется значениями  $\varphi$  и  $g$  в точках основания треугольника  $D(x_0, t_0)$  и значениями  $f$  внутри и на контуре треугольника.

Рассмотрим прямоугольную сетку  $x_k = kh$ ,  $t_j = j\tau$  ( $k = 0, \pm 1, \dots$ ;  $j = 0, 1, 2, \dots$ ). Совокупность узлов  $(k, j)$  ( $-\infty < k < \infty$ ) назовем  $j$ -м рядом сетки. Наиболее простая замена задачи (14) сеточной такова:

$$\begin{aligned} \square_h u_h &\equiv \frac{u_{k,j+1} - 2u_{k,j} + u_{k,j-1}}{\tau^2} - \frac{u_{k+1,j} - 2u_{k,j} + u_{k-1,j}}{h^2} = (f)_{k,j}, \\ u_{k,0} &= \varphi(kh), \quad \frac{u_{k,1} - u_{k,0}}{\tau} = g(kh). \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ;  $j = 1, 2, \dots$ . Из уравнений (15)  $u_n$  определяется в нулевом и первом рядах сетки:  $u_{k,0} = \varphi(kh)$ ,  $u_{k,1} = \varphi(kh) + \tau g(kh)$ . Уравнения (15) таковы, что  $u_{k,j+1}$  однозначно определяется через значения сеточной функции  $u_h$  в узлах  $j$ -го и  $(j-1)$ -го рядов ( $j = 1, 2, \dots$ ). Отсюда следует однозначная разрешимость системы (15).

Введем обозначения:  $\tau/h = r$ ,  $D_r(x_0, t_0)$  — треугольник, ограниченный осью  $t = 0$  и прямыми  $rx + t = rx_0 + t_0$ ,  $rx - t = rx_0 - t_0$ , проходящими через  $(x_0, t_0)$ . Нетрудно видеть, что значение сеточного решения  $u_h$  системы (15) в узле  $(k_0, j_0)$  однозначно определяется значениями  $\varphi$ ,  $g$  в узлах, лежащих на основании треугольника  $D_r(k_0h, j_0\tau)$ , и значениями  $f$  в узлах внутри и на границе  $D_r(k_0h, j_0\tau)$ .

Пусть имеется последовательность сеток таких, что  $h \rightarrow 0$ ,  $\tau = rh$ ,  $r = \text{const} > 1$ , и некоторая точка  $(x_0, t_0)$  ( $t_0 > 0$ ) является узлом каждой сетки последовательности. Если  $u_h(x_0, t_0)$  имеет предел  $u_0(x_0, t_0)$  при  $h \rightarrow 0$ , то последний определяется значениями  $f$ ,  $\varphi$ ,  $g$  в  $D_r(x_0, t_0)$  и, вообще говоря, отличен от  $u(x_0, t_0)$  — значения в  $(x_0, t_0)$  решения задачи (14), определяемого значениями  $f$ ,  $\varphi$ ,  $g$  в треугольнике  $D(x_0, t_0)$ , содержащем  $D_r(x_0, t_0)$  как часть в случае  $r > 1$ . Поэтому в случае  $r > 1$  последовательность  $u_h$ , вообще говоря, не сходится к точному решению задачи (14).

Пусть функции  $f(x, t)$ ,  $\varphi(x)$  и  $g(x)$  достаточно гладкие соответственно в полуплоскости  $t \geq 0$  и на оси  $-\infty < x < \infty$ . Тогда справедливо следующее утверждение: *если  $r = \text{const} \leq 1$ , то при  $h \rightarrow 0$  последовательность  $u_h$  решений задачи (15) сходится равномерно к точному решению  $u(x, t)$  задачи (14) во всякой конечной области полуплоскости.*

Подходы к построению разностных схем, изложенные выше в применении к простейшим уравнениям в частных производных, могут быть распространены на более сложные уравнения (на уравнения с переменными коэффициентами, многомерные и/или нелинейные уравнения, на системы уравнений).

**2.2. Метод прямых.** Основная идея *метода прямых* состоит в том, что производные по одним независимым переменным заменяются их приближенными выражениями через конечные разности, тогда как производные по остальным переменным остаются без изменения. Рассмотрим некоторые варианты данного метода в применении к линейным дифференциальным уравнениям второго порядка.

**2.2.1. Метод прямых для уравнений параболического типа.** Пусть в полуполосе  $0 \leq x \leq 1$ ,  $t \geq 0$  поставлена следующая граничная задача:

$$\begin{aligned} u_t &= Au + f(x, t) & u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u(0, t) &= \psi_0(t), & u(1, t) &= \psi_1(t). \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь

$$Au = a(x, t)u_{xx} + b(x, t)u_x + c(x, t)u.$$

Предполагаются существование и единственность достаточно гладкого решения рассматриваемой задачи. Будем искать его приближенно методом прямых в прямоугольнике  $\Pi = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T < \infty\}$ . В зависимости от того, аппроксимируются производные по  $x$  или по  $t$ , получают *продольный* или *поперечный вариант метода*. Рассмотрим сначала поперечный его вариант.

Обозначим через  $\Pi_\tau$  решеточную область  $0 < x < 1$ ,  $t = t_n = n\tau$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$  ( $N\tau = T$ ), а под ее границей  $\Gamma_\tau$  будем понимать множество, состоящее из отрезка  $0 \leq x \leq 1$  прямой  $t = 0$  и точек  $(0, t_N)$ ,  $(1, t_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ .

Рассмотрим задачу (16) на  $\Pi_\tau + \Gamma_\tau$ . Производную  $u_t(x, t)$  при  $t = t_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ , заменим приближенно левосторонним разностным отношением  $u_t(x, t_n) \approx (u(x, t_n) - u(x, t_{n-1}))/\tau$ . Тогда для решеточной функции, задаваемой системой функций  $u_n = u_n(x)$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ , приближенно представляющих функцию  $u(x, t)$  на отрезках  $0 \leq x \leq 1$  прямых  $t = t_n$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ , в  $\Pi_\tau + \Gamma_\tau$  можно поставить следующую дифференциально-разностную граничную задачу:

$$\begin{aligned} \frac{u_n(x) - u_{n-1}(x)}{\tau} &= A_n u_n + f_n(x), \\ u_0(x) &= \varphi(x), \quad u_n(0) = \psi_0(t_n), \quad u_n(1) = \psi_1(t_n), \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$A_n u_n = a_n(x) u_n''(x) + b_n(x) u_n'(x) + c_n(x) u_n(x),$$

$$a_n(x) = a(x, t_n), \quad b_n(x) = b(x, t_n), \quad c_n(x) = c(x, t_n), \quad f_n(x) = f(x, t_n).$$

Задача (17) распадается на  $N$  граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, так как функция  $u_0(x)$  известна из начального условия, а неизвестные функции  $u_n(x) \approx u(x, t_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ , можно находить последовательно, решая при каждом значении  $n = 1, 2, \dots, N$  одно обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с соответствующими граничными условиями.

Построенная вычислительная схема метода прямых достаточно четко поясняет геометрический смысл названия метода. В силу этого в многомерном случае рассматриваемый метод часто называют *методом плоскостей*.

Рассмотрим одну из продольных схем метода прямых для задачи (16). Здесь при построении вычислительных схем метода прямых аппроксимируют операцию дифференцирования не по времени  $t$ , а по пространственной переменной  $x$ . Для этого, подобно случаю поперечных схем, предварительно исходную область приближенно заменим решеточной областью, проведя прямые  $x = x_n = nh$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$  ( $Nh = 1$ ). На каждой из внутренних прямых  $x = x_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N-1$ , производные  $u_{xx}$  и  $u_x$  аппроксимируем через значения функции  $u$  на нескольких соседних прямых. Если для этих целей использовать простейшие симметричные выражения, то, подобно случаю поперечных схем метода, можно записать

$$\begin{aligned} u_n' &= a_n(t) \frac{u_{n+1}(t) - 2u_n(t) + u_{n-1}(t)}{h^2} + b_n(t) \frac{u_{n+1}(t) - u_{n-1}(t)}{2h} + \\ &\quad + c_n(t) u_n(t) + f_n(t), \quad t > 0, \\ u_0(t) &= \psi_0(t), \quad u_N(t) = \psi_1(t), \quad t \geq 0, \\ u_n(0) &= \psi(x_n), \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (18)$$

где  $u_n(t) \approx u(x_n, t)$ ,  $a_n(t) = a(x_n, t)$ ,  $b_n(t) = b(x_n, t)$ ,  $c_n(t) = c(x_n, t)$ ,  $f_n(t) = f(x_n, t)$ . Тем самым нахождение приближенных значений  $u_n(t)$  на прямых  $x = x_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N-1$ , сводится к решению задачи Коши для системы  $N-1$  линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

Погрешность аппроксимации задачи (16) задачей (18) предопределяется неточностью замены производных  $u_{xx}$ ,  $u_x$  соответствующими простейшими симметричными выражениями через значения функции  $u$  и будет, очевидно, величиной порядка  $h^2$ , если решение  $u(x, t)$  обладает достаточной гладкостью.

Следует заметить, что в случае продольных схем при аппроксимации дифференциального уравнения на прямых, близких к граничным, обычно возникают трудности, связанные с нарушением однородности процесса приближения. В некоторых частных случаях, правда, эти трудности удастся существенно ослабить за счет использования граничных данных.

2.2.2. *Метод прямых для уравнений гиперболического типа.* Пусть в полуполосе  $0 \leq x \leq 1, t \geq 0$  поставлена следующая граничная задача:

$$\begin{aligned} u_{tt} + g(x, t)u_t &= Au + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \Phi(x), \\ u(0, t) &= \psi_0(t), \quad u(1, t) = \psi_1(t). \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь  $Au$  имеет такой же вид, как и в (16). Будем считать, что  $a(x, t) \geq a > 0$ . Существование и единственность достаточно гладкого решения задачи (19) предполагаются. Будем искать это решение методом прямых в прямоугольнике  $\Pi = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T < \infty\}$ .

Как и в случае параболических уравнений, здесь также можно говорить о продольном и поперечном вариантах метода. Приведем сначала пример поперечной схемы.

Прямоугольник  $\Pi$  аппроксимируем решеточной областью  $\Pi_\tau + \Gamma_\tau$ ; при этом, в отличие от параболического случая (см. п. 2.2.1), к границе  $\Gamma_\tau$  рассматриваемой области отнесем также и интервал  $0 < x < 1$  прямой  $t = t_1 = \tau$ . На каждой прямой  $t = t_{n+1}$  для  $n = 1, 2, \dots, N-1$  производные  $u_t$  и  $u_{tt}$  заменим следующими левосторонними разностными отношениями первого и второго порядков соответственно:

$$\begin{aligned} u(x, t_{n+1}) &\approx \frac{u(x, t_{n+1}) - u(x, t_n)}{\tau}, \\ u_{tt}(x, t_{n+1}) &\approx \frac{u(x, t_{n+1}) - 2u(x, t_n) + u(x, t_{n-1}))}{\tau^2}. \end{aligned}$$

Кроме того, на прямой  $t = 0$  для аппроксимации производной  $u_t$  используем правостороннюю замену  $u_t(x, 0) \approx (u(x, \tau) - u(x, 0))/\tau$ . Это позволит для решеточной функции, задаваемой системой функций  $u_n(x) \approx u(x, t_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots, N-1$ , поставить в области  $\Pi_\tau + \Gamma_\tau$  следующую дифференциально-разностную граничную задачу:

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}(x) - 2u_n(x) + u_{n-1}(x)}{\tau^2} + g_{n+1}(x) \frac{u_{n+1}(x) - u_n(x)}{\tau} &= A_{n+1}u_{n+1} + f_{n+1}(x), \\ u_0(x) = \varphi(x), \quad \frac{u_1(x) - u_0(x)}{\tau} &= \Phi(x), \\ u_{n+1}(0) = \psi_0(t_{n+1}), \quad u_{n+1}(1) &= \psi_1(t_{n+1}). \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь использованы обозначения, совершенно аналогичные применяемым в параболическом случае.

Процесс решения аппроксимирующей задачи (20) очевидным образом может быть расчленен на следующие этапы. Сначала по заданной функции  $u_0(x) = \varphi(x)$  непосредственно получают  $u_1(x) = \varphi(x) + \tau\Phi(x)$ . После этого последовательно находят функции  $u_2(x), u_3(x), \dots, u_N(x)$ ; при этом нахождение каждой из них сводится к решению одного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с граничными условиями первого рода.

Построенная вычислительная схема характеризуется только первым порядком погрешности аппроксимации. Если при аппроксимации дифференциального уравнения для замены производной  $u_t$  использовать более точное равенство

$$u_t(x, t_{n+1}) \approx \frac{3u(x, t_{n+1}) - 4u(x, t_n) + u(x, t_{n-1}))}{2\tau},$$

погрешность которого есть  $O(\tau^2)$ , то при малых значениях  $\tau > 0$ , как правило, удастся уменьшить часть погрешности аппроксимации исходного уравнения, зависящую от неточности замены первой производной по времени.

Процесс построения поперечных схем метода прямых для гиперболических уравнений во многом схож со случаем уравнений параболического типа. Подобные аналогии еще более сильно проявляются в случае продольных схем метода. Так, если в рассматриваемой области вместо прямых, параллельных оси  $x$ , провести прямые  $x = x_n = nh$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$  ( $Nh = 1$ ), то для задачи (19) можно построить следующую продольную схему метода прямых:

$$\begin{aligned} u''_n(t) + g_n(t)u'_n(t) &= a_n(t) \frac{u_{n+1}(t) - 2u_n(t) + u_{n-1}(t)}{h^2} + \\ &+ b_n(t) \frac{u_{n+1}(t) - u_{n-1}(t)}{2h} + c_n(t)u_n(t) + f_n(t), \quad t > 0, \quad (21) \\ u_0(t) &= \psi_0(t), \quad u_N(t) = \psi_1(t), \quad t \geq 0, \\ u_n(0) &= \varphi(x_n), \quad u'_n(0) = \Phi(x_n), \quad n = 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned}$$

При записи этой схемы использованы обозначения, вполне аналогичные принятым ранее.

Аппроксимирующая задача (21) может быть истолкована как задача Коши для системы  $N-1$  линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций  $u_n(t)$ ,  $n = 1, 2, \dots, N-1$ , приближенно представляющих искомую функцию  $u(x, t)$  на прямых  $x = x_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N-1$ .

**2.2.3. Метод прямых для эллиптических уравнений.** Рассмотрим данный метод применительно к эллиптической задаче Дирихле частного вида.

Пусть в прямоугольнике  $\Pi = \{0 \leq x \leq X, 0 \leq y \leq Y\}$  существует и единственно решение задачи Дирихле

$$\begin{aligned} u_{yy} + Au &= f(x, y), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad u(x, Y) = \Phi(x), \\ u(0, y) &= \psi(y), \quad u(X, y) = \Psi(y), \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$Au = a(x, y)u_{xx} + b(x, y)u_x + c(x, y)u, \quad a(x, y) \geq a > 0.$$

Предполагаем решение достаточно гладким и будем искать его приближенно методом прямых.

Прямоугольник  $\Pi$  аппроксимируют решеточной областью, проведя прямые  $y = y_n = nh$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$  ( $Nh = Y$ ). Производную  $u_{yy}$  при  $y = y_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N-1$ , выражаем приближенно через значения функции  $u$ , опираясь на известную формулу

$$u_{yy}(x, y_n) = \frac{u(x, y_{n+1}) - 2u(x, y_n) + u(x, y_{n-1}))}{h^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u(x, y_n + \theta h)}{\partial y^4},$$

где  $-1 < \theta < 1$ . Тогда, используя обозначения, совершенно аналогичные применяемым ранее, можно записать

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}(x) - 2u_n(x) + u_{n-1}(x)}{h^2} + A_n u_n &= f_n(x), \quad 0 < x < X, \\ u_0(x) &= \varphi(x), \quad u_N(x) = \Phi(x), \quad 0 \leq x \leq X, \\ u_n(0) &= \psi(y_n), \quad u_n(X) = \Psi(y_n), \quad n = 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (23)$$

Дифференциально-разностная задача (23) аппроксимирует исходную задачу Дирихле с погрешностью порядка  $h^2$ . Она сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с граничными условиями первого рода.

Вопрос построения вычислительных схем метода прямых обсуждался выше на примере ориентированных по осям прямоугольных областей. В случае областей более сложной формы применение этого метода может быть сопряжено с определенными осложнениями. В самом деле, проекции  $g_n$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ , на ось координат внутренних сечений области избранными прямыми совпадут при любом числе прямых только для соответствующим образом ориентированного прямоугольника. В общем случае  $n$ -е уравнение рассматриваемой вычислительной схемы метода, связывающее приближенные значения искомого решения на соседних прямых с номерами от  $n-p$  до  $n+q$ , без дополнительных предположений определено лишь на пересечении

$$G_n = \bigcap_{-p \leq i \leq q} g_{n+i}.$$

Если же считать такие уравнения выполняющимися и вне  $G_n$ , то даже для очень простых областей аппроксимирующая задача при некоторых  $N$  может оказаться неразрешимой. Чтобы преодолеть подобные затруднения, иногда предпочитают продолжать непрерывно внутри области функцию, задающую граничные условия, а уравнения аппроксимирующей системы рассматривают лишь на соответствующих пересечениях  $G_n$ , при этом вычислительный алгоритм приходится строить специальным образом. Часто удается избежать подобных затруднений, разбивая рассматриваемую область на полосы не прямыми, а кривыми линиями, избранными с учетом формы области.

Заметим также, что метод прямых применяется для численного решения дифференциальных уравнений более высоких порядков, нелинейных задач и систем уравнений.

### 2.3. Метод сеток для интегральных уравнений (метод квадратур).

Метод сеток в применении к интегральным уравнениям называют также *методом квадратур* (*методом механических квадратур*). Рассмотрим основные идеи этого метода для вычисления решения интегрального уравнения

$$Au \equiv u(x) - \int K(x, y)u(y) dy = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

с гладким ядром  $K(x, y)$ , предполагая, что  $|K(x, y)| < \rho < 1$ .

Зададим  $N$ , положим  $h = 1/N$  и будем искать таблицу  $[u]_h$  значений решения на сетке

$$x_n = nh \quad (n = 0, 1, \dots, N).$$

Для получения разностной схемы в равенстве

$$u(x_n) - \int K(x_n, y)u(y) dy = f(x_n), \quad n = 0, 1, \dots, N,$$

приблизительно заменим интеграл суммой, пользуясь, например, квадратурной формулой трапеций

$$\int \varphi(y) dy \approx h \left( \frac{\varphi_0}{2} + \varphi_1 + \dots + \varphi_{N-1} + \frac{\varphi_N}{2} \right), \quad h = \frac{1}{N},$$

погрешность которой есть величина  $O(h^2)$ , если  $\varphi(y)$  является дважды непрерывно дифференцируемой функцией. После указанной замены интеграла получим

$$u_n - h \left( \frac{K(x_n, 0)}{2} u_0 + K(x_n, h) u_1 + \dots + K(x_n, y_{N-1}) u_{N-1} + \frac{K(x_n, 1)}{2} u_N \right) = f_n, \quad n = 0, 1, \dots, N,$$

или

$$A_h u^{(h)} = f^{(h)}, \quad (24)$$

где

$$A_h u^{(h)} = \begin{cases} g_0, \\ g_1, \\ \dots \\ g_N, \end{cases} \quad f^{(h)} = \begin{cases} f(0), \\ f(h), \\ \dots \\ f(Nh), \end{cases}$$

$$g_n = u_n - h \left[ \frac{K(x_n, 0)}{2} u_0 + K(x_n, h) u_1 + \dots + \frac{K(x_n, 1)}{2} u_N \right].$$

Построенная разностная схема  $A_h u^{(h)} = f^{(h)}$  аппроксимирует задачу  $Au = f$  на решении  $u$  со вторым порядком относительно шага  $h$ , поскольку квадратурная формула трапеций имеет второй порядок точности.

Пусть  $u^{(h)} = (u_0, u_1, \dots, u_N)$  — какое-нибудь решение системы (24), и пусть  $u_s$  — один из тех компонентов решения, которые по модулю не меньше каждого из остальных  $|u_s| \geq |u_n|$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ . Из уравнения с

номером  $n = s$  системы (24) следует неравенство

$$\begin{aligned} |f(x_s)| &= \left| u_s - h \left( \frac{K(x_s, 0)}{2} u_0 + K(x_s, h) u_1 + \dots + \frac{K(x_s, 1)}{2} u_N \right) \right| \geq \\ &\geq |u_s| - h \left( \frac{\rho}{2} + \rho + \dots + \rho + \frac{\rho}{2} \right) |u_s| = (1 - nh\rho) |u_s| = (1 - \rho) |u_s|. \end{aligned}$$

Поэтому схема (24) устойчива:

$$\|u^{(h)}\|_{U_h} = \max_n |u_n| = |u_s| \leq \frac{1}{1 - \rho} |f(x_s)| \leq \frac{1}{1 - \rho} \|f^{(h)}\|_{F_h}.$$

В частности, при  $f(x_n) \equiv 0$  отсюда следует, что система (24) не имеет нетривиальных решений, а следовательно, однозначно разрешима при любой правой части. Решение  $u^{(h)}$  задачи  $A_h u^{(h)} = f^{(h)}$  в силу теоремы о сходимости удовлетворяет неравенству

$$\|[u]_h - u^{(h)}\|_{U_h} = \max_n |u(mh) - u_n| \leq ch^2,$$

где  $c$  — некоторая постоянная.

Аналогично изложенному метод сеток применяется для решения многомерных интегральных уравнений.

### 3. Вариационные методы

Сущность многих из вариационных методов состоит в формулировке рассматриваемой задачи математической физики в вариационной форме как задачи об отыскании функции, реализующей минимум (или, в общем случае, экстремум) некоторого функционала, и в последующем нахождении приближений к этой функции.

#### 3.1. Основные понятия вариационных постановок задач и вариационных методов.

3.1.1. *Вариационные постановки задач.* Многие задачи математической физики могут быть сформулированы как *вариационные задачи*, т. е. как задачи об отыскании функций, доставляющих экстремум некоторым функционалам. Выписывая необходимые условия экстремумов этих функционалов, получают уравнения, которые называют *уравнениями Эйлера* и которые можно символически записать  $Au = f$ , где  $u$  — функция, реализующая экстремум конкретного функционала  $J(u)$ , рассматриваемого на множестве  $D(A)$ .

С другой стороны, пусть в некотором вещественном гильбертовом пространстве  $H$  со скалярным произведением  $(\cdot, \cdot)$  и нормой  $\|\cdot\| = (\cdot, \cdot)^{1/2}$  рассматривается задача, которую запишем как уравнение

$$Au = f, \quad f \in H, \quad (25)$$

где  $f$  — заданный элемент,  $A$  — линейный, симметричный и положительно определенный оператор с областью определения  $D(A)$ , плотной в  $H$ . Тогда если (25) имеет решение  $u \in D(A)$ , то, полагая  $J(u) \equiv (Au, u) - 2(u, f)$ , нетрудно проверить, что  $u$  является также решением вариационной задачи

вида

$$J(u) = \inf_{v \in D(J)} J(v), \quad (26)$$

где  $D(J) \equiv D(A)$ . Таким образом, задачи (25), (26) эквивалентны.

Эквивалентность задач (25), (26) открывает новые возможности исследования (25), (26), а также построения приближенных решений этих задач *вариационными (прямыми) методами*.

**3.1.2. Понятия о прямых методах вариационного исчисления.** Одним из методов доказательства существования и фактического нахождения решения той или иной вариационной задачи является сведение этого вопроса к вопросу о существовании решения некоторого дифференциального уравнения или системы дифференциальных уравнений (уравнений Эйлера). Однако этот путь не всегда приводит к желаемому результату. Возникающие здесь трудности заставили искать в вариационном исчислении другие, так называемые *прямые методы*, т. е. методы, не использующие сведение вариационной задачи к дифференциальным уравнениям. Кроме того, интегрирование получаемых дифференциальных уравнений вариационных задач осуществимо в конечном виде лишь в редких случаях. Поэтому возникает потребность в приближенном решении этих задач. Сделать это можно, рассматривая вариационную постановку (минуя задачи типа (25)) или сводя их к задачам вида (26)) и применяя *прямые методы*, которые называют также *вариационными методами*.

Развитие прямых методов вариационного исчисления оказалось полезным не только непосредственно для вариационных задач, но и для других областей математики, в частности, они нашли широкое применение в теории дифференциальных уравнений. Основная идея использования вариационных методов в дифференциальных уравнениях состоит в следующем.

Если данное дифференциальное уравнение можно рассматривать как уравнение Эйлера для некоторого функционала и если установлено тем или иным путем, что этот функционал имеет экстремум в классе некоторого класса функций, то тем самым устанавливается, что исходное уравнение имеет решение, удовлетворяющее краевым условиям, отвечающим рассматриваемой вариационной задаче. Прямые методы вариационного исчисления дают возможность не только доказывать существование соответствующего решения, но и фактически находить его с любой степенью точности.

Существует много различных приемов, объединяемых общим названием *прямые методы*, однако большинство всех этих методов следуют общей идее, которая состоит в следующем.

Рассмотрим для определенности задачу о нахождении минимума некоторого функционала  $J(u)$ , определенного на каком-то классе  $D(J)$  допустимых функций. Чтобы задача имела смысл, предполагается, что в классе  $D(J)$  существуют функции, для которых  $J(u) < +\infty$ , и что  $\inf J(u) = d > -\infty$ . В этом случае, по определению точной нижней грани, существует такая последовательность функций  $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$  (ее называют *минимизирующей последовательностью*), что  $\lim_{n \rightarrow \infty} J(u_n) = d$ . Если

для последовательности  $\{u_n\}$  существует предельная функция  $u^{(0)}$  и если предельный переход  $J(u^{(0)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} J(u_n)$  окажется законным, то тогда  $J(u^{(0)}) = d$ , т. е. предельная функция  $u^{(0)}$  и будет решением рассматриваемой задачи.

Таким образом, решение вариационной задачи (или задачи (25)) после сведения ее к соответствующей вариационной задаче прямым методом получается из:

- 1) построения минимизирующей последовательности  $\{u_n\}$ ;
- 2) доказательства существования у этой последовательности предельной функции  $u^{(0)}$ ;
- 3) доказательства законности предельного перехода

$$J(u^{(0)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} J(u_n).$$

Сами члены минимизирующей последовательности при этом можно рассматривать как приближенные решения соответствующей вариационной задачи. Способ построения минимизирующих последовательностей, собственно говоря, характеризует каждый из прямых методов, употребляемых в вариационном исчислении, и соответствующий алгоритм построения приближенных решений рассматриваемых вариационных задач.

### 3.2. Метод Ритца.

3.2.1. *Классический метод Ритца.* Пусть в вещественном гильбертовом пространстве  $H$  со скалярным произведением  $(\cdot, \cdot)$  и нормой  $\|\cdot\| = (\cdot, \cdot)^{1/2}$  рассматривается задача, записанная в виде операторного уравнения (25), где  $A$  — линейный, симметричный, положительно определенный оператор, т. е.  $A$  линейный, а также  $(Au, v) = (v, Au)$ ,  $(Au, u) \geq \gamma^2 \|u\|^2$ ,  $\gamma = \text{const} > 0$ , при любых  $u, v$  из области определения  $D(A)$  оператора  $A$ , предполагаемой плотной в  $H$ . Наряду с (25) рассмотрим задачу

$$J(u) = \inf_{v \in D(A)} J(v), \quad J(v) \equiv (Au, u) - 2(u, f). \quad (27)$$

Имеет место следующее утверждение.

**Теорема 1.** *Для того чтобы некоторый элемент  $u_0 \in D(A)$  сообщал минимальное значение функционалу  $J(u)$ , необходимо и достаточно, чтобы этот элемент удовлетворял уравнению  $Au_0 = f$ . Такой элемент единственный.*

Из этой теоремы следует, что задачи (25), (27) эквивалентны.

Зададим функции  $\varphi_1^{(N)}, \varphi_2^{(N)}, \dots, \varphi_N^{(N)}$ ,  $N = 1, 2, \dots$ , каждая из которых принадлежит  $D(A)$ . Обозначим через  $H_N$  линейную оболочку функций  $\varphi_i^{(N)}$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Считаем, что выполнены следующие условия:

- 1) при любом  $N$  функции  $\varphi_1^{(N)}, \dots, \varphi_N^{(N)}$  линейно независимы;
- 2) последовательность подпространств  $\{H_N\}$  предельно плотна в  $H$ , т. е. для любой функции  $u \in H$  существуют такие элементы  $\tilde{u}_N \in H_N$ ,  $N = 1, 2, \dots$ , что  $\|u - \tilde{u}_N\|_A = \inf_{v \in H_N} \|u - v\|_A \leq \varepsilon(u, N) \rightarrow 0$ ,  $N \rightarrow \infty$ , где

$\|u\|_A = (Au, u)^{1/2}$ , а  $\varepsilon(u, N)$  — оценка погрешности аппроксимации функции  $u$  посредством  $\{\varphi_i^{(N)}\}$ .

Набор функций  $\varphi_1^{(N)}, \dots, \varphi_N^{(N)}$ , удовлетворяющих отмеченным условиям, называют *базисом* в  $H_N$ , а входящие в него функции  $\varphi_i^{(N)}$  — *базисными* или *координатными*.

Метод Рунта построения минимизирующей последовательности  $u_N$ ,  $N = 1, 2, \dots$ , т.е. последовательности приближенных решений задачи (25) (соответственно задачи (27)), формулируется следующим образом. Пусть  $H_N$  — линейная оболочка системы  $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ . Поставим задачу об отыскании минимума функционала  $J(u)$  на  $H_N$ , т.е. о нахождении функции  $u_N \in H_N$ , для которой

$$J(u_N) = \min_v J(v), \quad v \in H_N.$$

Так как  $v = \sum_{i=1}^N b_i \varphi_i$ , то  $J(u_N) = \min_{b_i} J(v)$ , где

$$J(v) = J(b_1, \dots, b_N) = \sum_{i,j=1}^N b_i b_j (A\varphi_i, \varphi_j) - 2 \sum_{i=1}^N b_i (f, \varphi_i).$$

Чтобы найти минимум функционала  $J(v)$ , вычисляем его производные по  $b_i$  и приравняем эти производные нулю. Приходим к системе уравнений

$$\frac{\partial J(v)}{\partial b_i} = 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

которая эквивалентна системе уравнений вида

$$(Au_N, \varphi_i) = (f, \varphi_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (28)$$

или, что то же самое, системе

$$\hat{A}a = f,$$

где  $\hat{A}$  — матрица с элементами  $A_{ij} = (A\varphi_j, \varphi_i)$ ,  $a = (a_1, \dots, a_N)^T$ ,  $f = (f_1, \dots, f_N)^T$ ,  $f_i = (f, \varphi_i)$ .

Поскольку  $A$  — положительно определенный оператор и  $\{\varphi_i\}$  — линейно независимая система, то при  $v_N = \sum_{i=1}^N b_i \varphi_i$ ,  $b = (b_1, \dots, b_N)^T \neq 0 = (0, \dots, 0)^T$  имеем

$$(\hat{A}b, b)_2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N A_{ij} b_i b_j = (Av_N, v_N) \geq \gamma^2 \|v_N\|^2 > 0,$$

т.е.  $\hat{A}$  — положительно определенная матрица, а значит, невырожденная. Следовательно, система (28) имеет единственное решение  $a$ , определяя тем самым единственную функцию  $u_N$ .

Для  $u_N$  можно получить априорную оценку. Умножив уравнения (28) на  $a_i$  и просуммировав их по  $i$ , получим  $(Au_N, u_N) = (f, u_N)$ ; но  $(Au_N, u_N) \geq \gamma^2 \|u_N\|^2$ , следовательно,

$$\|u_N\|^2 \leq \frac{|(f, u_N)|}{\gamma^2} \leq \frac{\|f\| \cdot \|u_N\|}{\gamma^2}.$$

Таким образом, справедлива оценка  $\|u_N\| \leq \|f\|/\gamma^2$ .

Пусть  $u_0 \in D(A)$  есть точное решение уравнения (25) (задачи (27)). Тогда при произвольной функции  $v \in D(A)$  справедливо равенство

$$(A(u_0 - v), u_0 - v) = J(v) - J(u_0).$$

Тогда (поскольку  $u_N$  минимизирует  $J(v)$  на  $H_N$ ) при произвольной функции  $v_N = \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i$  из  $H_N$

$$\begin{aligned} (A(u_0 - u_N), u_0 - u_N) &= J(u_N) - J(u_0) \leq J(v_N) - J(u_0) = \\ &= (A(u_0 - v_N), u_0 - v_N). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|u_0 - u_N\|_A \leq \inf_{v_N} \|u_0 - v_N\|_A \leq \varepsilon(u_0, N) \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty. \quad (29)$$

Таким образом, последовательность  $u_1, u_2, \dots, u_N, \dots$  является минимизирующей, а функции  $u_N$ ,  $N = 1, 2, \dots$ , являются приближенными решениями задачи (25) (соответственно задачи (27)), и имеет место оценка (29).

**3.2.2. Метод Рунца в энергетических пространствах.** Теорема 1 устанавливает эквивалентность задач (25) и (27), но в ней нет никаких утверждений о самом существовании решения  $u_0 \in D(A)$  этих задач. В п. 3.2.1 рассматривалась классическая постановка задачи, когда решение уравнения  $Au = f$  есть функция, принадлежащая области определения  $D(A)$  оператора  $A$  и удовлетворяющая этому уравнению. Оказывается, что в такой постановке это решение может не существовать. Однако оно существует в несколько более широком (чем  $D(A)$ ) пространстве. Поэтому необходимо изменить постановку вариационной задачи о минимизации  $J(u)$ , чтобы можно было гарантировать существование ее решения.

Пусть при рассмотрении (25)  $A$  — симметричный положительно определенный оператор с областью определения  $D(A)$ , плотной в  $H$ . Введем в  $D(A)$  скалярное произведение и норму:  $[\varphi, \psi] = (A\varphi, \psi)$ ,  $[\varphi] = [\varphi, \varphi]^{1/2}$ . Пополняя  $D(A)$  по введенной норме, приходим к полному гильбертову пространству  $H_A$ , которое называется *энергетическим пространством*, порождаемым оператором  $A$ . Каждая функция из  $D(A)$  принадлежит пространству  $H_A$ , однако в результате пополнения в  $H_A$  могут появиться элементы, не входящие в  $D(A)$  (поэтому представление скалярного произведения  $[\varphi, \psi]$  при произвольных  $\varphi, \psi \in H_A$  в виде  $(A\varphi, \psi)$  уже не имеет места).

Пусть  $u \in D(A)$ ; представим  $F(u)$  в виде

$$J(u) = [u, u] - 2(f, u). \quad (30)$$

Такая форма записи позволяет рассматривать  $F(u)$  не только на области определения оператора  $A$ , но и на всех элементах энергетического пространства  $H_A$ . Поэтому расширим функционал (30) (оставив за ним

прежнее обозначение  $J(u)$  на все пространство  $H_A$  и будем искать его минимум на этом пространстве. Так как оператор предполагается положительно определенным, т. е.  $(Au, u) = [u, u] \geq \gamma^2 \|u\|^2$ ,  $u \in D(A)$ ,  $\gamma > 0$ , то при пополнении  $D(A)$  в  $H_A$  соотношение знакоопределенности  $[u, u] \geq \gamma^2 \|u\|^2$  останется справедливым для любого элемента  $u \in H_A$ .

Функционал  $(f, u)$  ограничен в  $H_A$ :

$$|(f, u)| \leq \|f\| \cdot \|u\| \leq \|f\| \frac{\|u\|}{\gamma} = c\|u\|.$$

Следовательно, по теореме Рисса о представлении линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве существует элемент  $u_0 \in H_A$ , однозначно определяемый элементом  $f$  и такой, что для любого  $u \in H_A$  справедливо равенство  $(f, u) = [u, u_0]$ . Но тогда  $J(u)$  можно представить в виде

$$J(u) = [u, u] - 2(f, u) = [u, u] - 2[u, u_0] = [u - u_0]^2 - [u_0]^2.$$

Следовательно, в пространстве  $H_A$  функционал  $F(u)$  достигает минимума при  $u = u_0$ . Как уже отмечалось,  $u_0$  единственный и принадлежит  $H_A$ . Может оказаться, что  $u_0 \in D(A)$ ; тогда  $u_0$  будет также классическим решением рассматриваемой задачи, т. е. будет удовлетворять (25). Если же  $u_0 \in H_A$ , но  $u_0 \notin D(A)$ , то назовем его обобщенным решением уравнения (25).

Итак, исходная задача сведена к задаче минимизации функционала  $J(u)$  в энергетическом пространстве  $H_A$ . Рассмотрим теперь метод Ритца для приближенного решения последней вариационной задачи, который в данном случае назовем *методом Ритца в энергетических пространствах*.

Пусть заданы линейно независимые функции  $\{\varphi_i\} \subset H_A$ ; обозначим через  $H_N$  их линейную оболочку. Предположим, что последовательность подпространств  $\{H_N\}$ ,  $N = 1, 2, \dots$ , предельно плотна в  $H_A$ , т. е. для любой функции  $u \in H_A$  существуют такие элементы  $\tilde{u}_N \in H_N$ ,  $N = 1, 2, \dots$ , что

$$\|u - \tilde{u}_N\| = \inf_w \|u - w\| \leq \varepsilon(u, N) \rightarrow 0,$$

$N \rightarrow \infty$ ,  $w \in H_N$ , где  $\varepsilon(u, N)$  — оценки погрешности аппроксимации. Теперь *метод Ритца* можно сформулировать следующим образом: требуется найти элемент  $u_N \in H_N$ , минимизирующий  $F(u)$  на подпространстве  $H_A$ . Реализация этого алгоритма состоит в следующем:

1) задаются конкретные  $N$  и  $\{\varphi_i\}$ ,  $\varphi_i \in H_A$ ;

2) приближенное решение ищется в виде  $u_N = \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i$ ;

3) коэффициенты  $a_i$  находятся из условий минимизации функционала  $J(u_N)$ , которые приводят к системе уравнений  $\partial F(u_N) / \partial a_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Эту систему можно записать также в виде

$$\hat{A}a = f \quad \text{или} \quad [u_N, \varphi_i] = (f, \varphi_i), \quad i = 1, \dots, N,$$

где  $a = (a_1, \dots, a_N)^T$  и  $f = (f_1, \dots, f_N)^T$  —  $N$ -мерные векторы, причем  $f_i = (f, \varphi_i)$ , а  $\hat{A}$  — матрица Грама системы  $\{\varphi_i\}$  в скалярном произведе-

дении пространства  $H_A$  с элементами  $A_{ij} = [\varphi_j, \varphi_i]$ ,  $1 \leq i, j \leq N$ . Но  $A_{ij} = [\varphi_j, \varphi_i] = [\varphi_i, \varphi_j] = A_{ji}$ , так что  $\hat{A}$  симметрична, а в силу неравенства

$$(\hat{A}b, b)_2 = \sum_{i,j=1}^N A_{ij} b_i b_j = \left[ \sum_{i=1}^N b_i \varphi_i \right]^2 \geq \gamma^2 \left| \sum_{i=1}^N b_i \varphi_i \right|^2 > 0$$

при  $b = (b_1, \dots, b_N)^T \neq 0$  матрица  $\hat{A}$  является также положительно определенной. Поэтому система  $\hat{A}a = f$  имеет единственное решение  $a$ , однозначно определяющее элемент  $u_N$ , для которого справедливо неравенство  $\|u_N\| \leq \|f\|/\gamma$ .

Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 2.** *Если последовательность подпространств  $\{H_N\}$  предельно плотна в  $H_A$ , то приближенные решения  $u_N$ , построенные методом Рунца, сходятся при  $N \rightarrow \infty$  к обобщенному решению задачи  $u_0$  в метрике пространства  $H_A$ , причем справедлива оценка*

$$\|u_0 - u_N\| \leq \varepsilon(u_0, N) \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

**3.2.3. Естественные и главные краевые условия.** Принадлежность элемента  $u$  к области определения  $D(A)$  оператора  $A$  часто подразумевает, что  $u$  удовлетворяет краевым условиям, которые записываются в виде  $T_k u = 0$ ,  $k = 1, \dots, K$  (здесь  $T_k$  — оператор, определяющий  $k$ -е краевое условие). В результате пополнения  $D(A)$  по норме  $[\cdot]$  в полученном энергетическом пространстве  $H_A$  могут появиться элементы, которые будут удовлетворять не всем условиям  $T_k u = 0$ . Если в  $H_A$  окажутся элементы, не удовлетворяющие некоторому условию  $T_k u = 0$ , то это краевое условие называется *естественным* для оператора  $A$ . Краевое условие, которому удовлетворяют как элементы из  $D(A)$ , так и элементы из  $H_A$ , называется *главным*.

Практическая важность умения отличать эти условия состоит в том, что базисные функции  $\{\varphi_i\}$  не обязательно подчинять естественным краевым условиям, так как их достаточно брать из энергетического пространства (и не обязательно из  $D(A)$ ). Это обстоятельство в значительной степени облегчает выбор  $\varphi_i$  при решении многих практически важных задач, особенно в случае многомерной области со сложной формой границы. Отметим, что в случае главных краевых условий проблема построения функций  $\varphi_i$ , удовлетворяющих этим условиям, остается.

Укажем подход, который позволяет для конкретной задачи установить, является ли то или иное краевое условие естественным. Рассмотрим задачу о минимизации функционала  $J(u)$  и предположим, что существует функция  $u_0$ , реализующая минимум  $J(u)$  в классе функций, вообще говоря, не удовлетворяющих данному условию. Используя средства вариационного исчисления, можно найти необходимые условия реализации минимума функционала  $J(u)$  функцией  $u_0$ . Если окажется, что к ним относится и рассматриваемое краевое условие, то оно естественное.

Наконец, приведем простой признак (без его теоретического обоснования), позволяющий отличать естественные краевые условия от главных

и применимый для ряда краевых задач. Пусть в (25)  $A$  — дифференциальный оператор порядка  $2m$ , удовлетворяющий некоторому краевому условию вида  $T_k u = 0$ . Тогда краевое условие будет естественным, если выражение  $T_k u$  содержит производные от  $u$  порядка  $m$  и выше (при этом в  $T_k u$  могут входить производные порядков, меньших  $m$ , а также сама функция  $u$  с некоторыми весами). Если  $T_k u$  не содержит производных от  $u$  порядка  $m$  и выше, то условие  $T_k u = 0$  является главным.

**3.3. Метод наименьших квадратов.** Пусть  $A$  — линейный оператор, определенный на некотором линейном множестве  $D(A)$ , плотном в данном гильбертовом пространстве  $H$ , и пусть требуется решить уравнение

$$Au = f, \quad (31)$$

где  $f$  — данный элемент из  $H$ . Для этого может быть использован метод наименьших квадратов, который состоит в следующем: выбираем последовательность линейно независимых координатных элементов ( $\varphi_k \in D(A) \forall k$ ); приближенное решение уравнения (31) строим в виде  $u_N = \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k$ , где  $a_k$  — постоянные, которые определяются из требования, чтобы величина функционала невязки  $J(u_N) \equiv \|Au_N - f\|^2$  приняла минимальное значение.

Последовательность  $\{\varphi_k\}$  предполагается  $A$ -плотной, т.е. выполнено следующее условие: каковы бы ни были  $u \in D(A)$  и число  $\varepsilon > 0$ , можно найти  $N$  и постоянные  $c_1, \dots, c_N$  такие, что  $\|Au - \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k\| < \varepsilon$ , где  $u_N = \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k$ .

Условие минимизации  $J(u_N)$  приводит к системе линейных уравнений для неизвестных  $a_1, a_2, \dots, a_N$ . Чтобы установить вид этой системы, достаточно продифференцировать  $J(u_N)$  по  $\bar{a}_m$ . В результате получим систему уравнений для  $a_1, a_2, \dots, a_N$ :

$$\sum_{k=1}^n a_k (A\varphi_k, A\varphi_m) = (f, A\varphi_m), \quad m = 1, 2, \dots, N. \quad (32)$$

Отметим, что система (32) симметричная. Определитель матрицы этой системы есть определитель Грама элементов  $A\varphi_1, A\varphi_2, \dots, A\varphi_N$ .

**Лемма.** Если однородное уравнение  $Au = 0$  имеет только тривиальное решение, то приближенные решения по методу наименьших квадратов могут быть построены при любом  $N$  и определяются единственным образом.

Достаточные условия сходимости приближенных решений, получаемых по методу наименьших квадратов, даются следующей теоремой.

**Теорема 3.** Метод наименьших квадратов дает последовательность приближенных решений, сходящуюся к точному решению, если выполнены следующие условия:

- 1) последовательность координатных элементов —  $A$  плотная;
- 2) уравнение (32) разрешимо;
- 3) существует такая постоянная  $K$ , что  $\|u\| \leq K\|Au\|$  для любого  $u \in D(A)$ .

Если условия теоремы 3 выполнены, то  $Au_N$  есть приближенное решение уравнения (31). Тогда

$$\|u_N - u\| \leq K \|Au_N - Au\| = K \|Au_N - f\|.$$

Следовательно, если  $u_N$  найдено по методу наименьших квадратов, то  $Au_N \rightarrow f$  при  $N \rightarrow \infty$ , и последняя формула позволяет судить на самом деле о погрешности приближенного решения.

### 3.4. Методы Канторовича, Куранта, Трефца

3.4.1. *Метод Канторовича.* Данный метод решения вариационных задач существенно отличается от метода Ритца. Изложим его идею применительно к задаче

$$Au = f(x, y) \quad \text{в } \Omega, \quad u|_{\Gamma} = 0, \quad (33)$$

где  $A$  — эллиптический оператор второго порядка,  $\Omega = \{(x, y) : \Phi_1(x) < y < \Phi_2(x), x \in (a, b)\}$ ,  $\Phi_1, \Phi_2$  — гладкие по  $x \in [a, b]$  функции,  $\Gamma \equiv \partial\Omega$  — граница области  $\Omega$ . Считаем, что оператор  $A$  действует в гильбертовом пространстве  $H \equiv L_2(\Omega)$  и что он симметричный и положительно определенный. Тогда задача (33) сводится к задаче о минимуме функционала

$$J(u) = (Au, u) - (u, f) - (f, u).$$

Приближенное решение ищется в виде

$$u_N(x, y) = \sum_{k=1}^N f_k(x) \phi_k(x, y),$$

где  $\phi_k(x, y)$  — известные функции, равные нулю на  $\Gamma$ , кроме, может быть, прямых  $x = a$  и  $x = b$ . Функции одной переменной  $f_k(x)$  определяют из требования, чтобы функционал  $J(u_N)$  имел минимальное значение. Обычными для вариационного исчисления методами получают для  $f_k(x)$  систему дифференциальных уравнений; к ним добавляются краевые условия при  $x = a$  и  $x = b$ , вытекающие из краевых условий задачи  $f_k(a) = f_k(b) = 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ .

Таким образом, сущность метода Л. В. Канторовича состоит в том, чтобы свести (приближенно) интегрирование уравнения в частных производных к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

3.4.2. *Метод Куранта.* Р. Курант предложил метод построения минимизирующей последовательности, которая при известных условиях сходится не только в среднем, но и равномерно вместе с последовательностями производных до некоторого порядка.

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$Au = f \quad (34)$$

и требуется найти его решение, определенное в некоторой конечной области  $\Omega$   $m$ -мерного пространства  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$  и удовлетворяющее на границе  $\Gamma$  этого объема некоторым однородным краевым условиям. Введем в рассмотрение гильбертово пространство  $L_2(\Omega)$ . Допустим, что

оператор  $A$  положительно определенный на линейном множестве достаточно гладких функций, удовлетворяющих краевым условиям нашей задачи. Тогда уравнение (34) имеет решение, удовлетворяющее (возможно, в обобщенном смысле) заданным краевым условиям; это решение реализует минимум функционала

$$J(u) = (Au, u) - (u, f) - (f, u).$$

Допустим теперь, что  $f$  имеет непрерывные производные по  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$  до порядка  $k-1$  включительно и по крайней мере квадратично-суммируемые производные порядка  $k$ . Составим функционал

$$\Phi(u) = J(u) + \sum_{j=0}^k \sum_{a_1+a_2+\dots+a_m=j} \left\| \frac{\partial^j (Au - f)}{\partial x_1^{a_1} \partial x_2^{a_2} \dots \partial x_m^{a_m}} \right\|^2.$$

Очевидно,  $\Phi(u) \geq J(u)$ . Далее, функция  $u$ , реализующая минимум  $J(u)$ , реализует также минимум  $\Phi(u)$ , так как эта функция делает наименьшим в  $\Phi(u)$  как первое слагаемое, так и второе, которое она обращает в нуль. Отсюда следует, что решение нашей краевой задачи можно найти, отыскивая решение задачи о минимуме  $\Phi(u)$ . Построим для этого функционала минимизирующую последовательность  $\{u_N\}$ , например по методу Ритца. Тогда, очевидно,

$$\left\| \frac{\partial^j (Au_N - f)}{\partial x_1^{a_1} \partial x_2^{a_2} \dots \partial x_m^{a_m}} \right\|_{n \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Эти соотношения позволяют сделать дополнительные заключения о сходимости минимальной последовательности.

Введение добавочных слагаемых в  $\Phi(u)$  усложняет вычисления по методу Ритца; это усложнение, однако, может быть оправдано, если по смыслу задачи желательно получить равномерно сходящуюся последовательность.

**3.4.3. Метод Треффта.** Метод Ритца дает величину минимального функционала с избытком. Было бы желательно иметь также метод построения приближенного решения, дающего указанную величину с недостатком. Е. Треффт предложил метод, который в некоторых случаях позволяет построить последовательность функций, дающих приближение к искомому минимуму функционала снизу. Идея метода Треффта состоит в следующем. В то время как в методе Ритца приближенное решение ищется в классе функций, точно удовлетворяющих краевым условиям, но не дифференциальному уравнению, в методе Треффта приближенное решение точно удовлетворяет дифференциальному уравнению, но, вообще говоря, не удовлетворяет поставленным краевым условиям. Изложим идею этого метода применительно к задаче Дирихле для уравнения Лапласа (хотя его можно применить к значительно более обширному классу задач).

Пусть требуется найти гармоническую в области  $\Omega$  функцию, удовлетворяющую краевому условию

$$u|_{\Gamma} = f(x), \quad (35)$$

где  $f(x)$  — функция, которую для простоты предположим непрерывной на границе  $\Gamma$ . Искомую функцию можно определить как функцию, минимизирующую интеграл

$$J(u) = J_1(u, u) = \int_{\Omega} \{\text{grad } u\}^2 d\Omega$$

по сравнению с любой другой функцией, удовлетворяющей условию (35). Метод Третьяка состоит в следующем.

Допустим, что дана последовательность линейно независимых гармонических в  $\Omega$  функций  $\varphi_k$ , полная в следующем смысле: какова бы ни была гармоническая в  $\Omega$  функция  $\varphi$ , квадратично-суммируемая в  $\Omega$  вместе со своими первыми производными, можно по заданному числу  $\varepsilon > 0$  найти натуральное число  $N$  и постоянные  $a_1, a_2, \dots, a_N$  такие, что

$$J\left(\varphi - \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k\right) = \int_{\Omega} \left\{ \text{grad} \left( \varphi - \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k \right) \right\}^2 d\Omega < \varepsilon.$$

Будем искать приближенное решение нашей задачи в виде

$$u_N = \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k,$$

где  $N$  — произвольно выбранное число; коэффициенты  $a_k$  найдем из условия  $J(u - u_N) = \min$ , где  $u$  — искомое решение задачи. Приравнявая нулю производные  $\partial J(u - u_N) / \partial a_k$ , приходим к системе уравнений

$$J_1(u_N - u, \varphi_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Выполняя интегрирование по частям, получаем

$$\sum_{j=1}^N a_j \int_{\Gamma} \varphi_j \frac{\partial \varphi_k}{\partial \nu} d\Gamma = \int_{\Gamma} f \frac{\partial \varphi_k}{\partial \nu} d\Gamma, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Данная система имеет единственное решение  $\{a_j\}$ , определяющее однозначное приближенное решение  $u_N$ . Можно доказать, что  $(u - u_N) \rightarrow 0$  равномерно в любой замкнутой области, целиком лежащей внутри  $\Omega$ , а производные любого порядка от  $u_N$  равномерно сходятся к соответствующим производным от  $u$ .

Известным недостатком метода Третьяка является трудность фактического построения полной системы гармонических функций. Если область  $\Omega$  плоская односвязная с достаточно гладкой границей, то полной будет система гармонических полиномов; если  $\Omega$  многосвязная, то полную систему образуют некоторые гармонические рациональные функции. В многомерных областях такую систему указать гораздо труднее.

**3.5. Вариационные методы в проблеме собственных значений.** Вариационные методы успешно применяются для приближенного решения проблемы о собственных значениях, а именно задачи

$$Au = \lambda u. \quad (36)$$

Рассмотрим некоторые используемые здесь подходы, привлекая для решения (36) метод Ритца.

Пусть  $A$  есть линейный, самосопряженный, ограниченный снизу оператор, действующий в гильбертовом пространстве  $H$ . Положим

$$d = \inf \frac{(Au, u)}{(u, u)}. \quad (37)$$

Число  $d$  будет наименьшим собственным значением оператора  $A$ , если существует элемент  $u_0$  такой, что

$$d = \frac{(Au_0, u_0)}{(u_0, u_0)}.$$

Если допустить, что такой элемент существует, то определение наименьшего собственного числа оператора  $A$  сводится к определению нижней грани величин (37), или, что то же, к задаче определения нижней грани величины  $(Au, u)$  при дополнительном условии  $(u, u) = 1$ .

Покажем, что эту задачу можно решить по методу Ритца. Возьмем последовательность линейно независимых элементов  $\{\varphi_n\}$ , входящих в область определения оператора  $A$ , и допустим, что эта последовательность обладает следующими свойствами:

1) она полна в  $H$ ;

2) каков бы ни был элемент  $u$  из области определения оператора  $A$ , можно найти такое натуральное число  $N$  и такие постоянные  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ , чтобы  $(A(u - u_N), (u - u_N)) < \varepsilon$ , где  $u_N = \sum_{k=1}^N \alpha_k \varphi_k$ ,  $\varepsilon$  — произвольное положительное число.

Положим  $u_N = \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k$  и выберем постоянные коэффициенты  $a_k$  так, чтобы  $u_N$  удовлетворяло соотношению  $(u_N, u_N) = 1$  и чтобы величина  $(Au_N, u_N)$  была минимальной. Тогда чтобы найти минимум функции  $N$  переменных (вообще говоря, комплексных)

$$(Au_N, u_N) = \sum_{k,m=1}^N (A\varphi_k, \varphi_m) a_k \bar{a}_m,$$

связанных уравнением  $(u_N, u_N) = 1$ , воспользуемся методом неопределенных множителей Лагранжа. Составим функцию  $\Phi = (Au_N, u_N) - \lambda(u_N, u_N)$ , где  $\lambda$  — не определенный пока численный множитель, и приравняем нулю ее частные производные по  $\alpha_m$  и по  $\beta_m$ , где  $\alpha_m$  и  $\beta_m$  означают соответственно вещественную и мнимую части коэффициента  $a_m$ . В результате приходим к системе уравнений  $\partial\Phi/\partial a_m = 0$ ,  $m = 1, 2, \dots, N$ , или, в раскрытом виде, к системе

$$\sum_{k=1}^N a_k [(A\varphi_k, \varphi_m) - \lambda(\varphi_k, \varphi_m)] = 0, \quad m = 1, 2, \dots, N. \quad (38)$$

Система (38) линейная однородная относительно неизвестных  $a_k$ , которые не могут одновременно обратиться в нуль, в противном случае было бы нарушено уравнение  $(u_N, u_N) = 1$ . Отсюда следует, что определитель

системы (38) должен обратиться в нуль; это дает нам уравнение для  $\lambda$

$$\begin{vmatrix} (A\varphi_1, \varphi_1) - \lambda(\varphi_1, \varphi_1) & \dots & (A\varphi_N, \varphi_1) - \lambda(\varphi_N, \varphi_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ (A\varphi_1, \varphi_N) - \lambda(\varphi_1, \varphi_N) & \dots & (A\varphi_N, \varphi_N) - \lambda(\varphi_N, \varphi_N) \end{vmatrix} = 0. \quad (39)$$

Уравнение (39) имеет ровно  $N$  корней. Пусть  $\lambda_0$  — какой-либо из этих корней. Подставив его в систему (38), делаем ее определитель равным нулю, и эта система будет иметь нетривиальные решения. Пусть  $a_k^{(0)}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , — такое решение. Тогда  $\mu a_k^{(0)}$ , где  $\mu$  — произвольный численный множитель, также удовлетворяет системе (38). Подставив  $\mu a_k^{(0)}$  в уравнение  $(u_N, u_N) = 1$ , найдем значение  $\mu$ . Заменив теперь обозначение  $\mu a_k^{(0)}$  на  $a_k^{(0)}$ , можем в последующем под  $a_k^{(0)}$  понимать то решение (38), которое удовлетворяет уравнению  $(u_N, u_N) = 1$ . Подставив в (38)  $\lambda = \lambda_0$  и  $a_k = a_k^{(0)}$ , получаем тождество, которое можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^N a_k^{(0)} (A\varphi_k, \varphi_m) = \lambda_0 \sum_{k=1}^N a_k^{(0)} (\varphi_k, \varphi_m), \quad m = 1, 2, \dots, N.$$

Умножив его на  $a_m^{(0)}$  и просуммировав во всем  $m$ , а также учитывая равенство  $(u_N, u_N) = 1$ , получаем

$$\lambda_0 = (Au_N^{(0)}, u_N^{(0)}), \quad (40)$$

$$\text{где } u_N^{(0)} = \sum_{k=1}^N a_k^{(0)} \varphi_k.$$

Формула (40) показывает, что:

- 1) уравнение (39) имеет только вещественные корни, если оператор  $A$  самосопряженный;
- 2) один из элементов  $u_N^{(0)}$  реализует минимум  $(Au_N, u_N)$ ;
- 3) этот минимум равен наименьшему из корней уравнения (39).

С возрастанием  $N$  указанный минимум, который ниже будем обозначать через  $\lambda_N^{(0)}$ , не возрастает; в то же время он не меньше величины  $d$ . Отсюда следует, что при  $N \rightarrow \infty$  величина  $\lambda_N^{(0)}$  стремится к пределу, который больше или равен  $d$ . Более того, можно доказать, что этот предел равен  $d$ ;  $\lambda_N^{(0)} \rightarrow d$ ,  $N \rightarrow \infty$ , что и оправдывает применение метода Ритца в проблеме собственных значений.

Чтобы получить приближенное значение второго собственного числа, ищут минимум скалярного произведения  $(Au_N, u_N)$  при дополнительных условиях  $(u_N, u_N) = 1$  и  $(u_N^{(0)}, u_N) = 0$ , где  $u_N^{(0)} = \sum_{k=1}^N a_k^{(0)} \varphi_k$  есть приближенное значение первой нормированной собственной функции оператора  $A$ . Решение этой задачи можно осуществить вновь методом Лагранжа.

Аналогично можно строить приближенные значения следующих собственных чисел; все они суть корни уравнения (39).

## 4. Проекционные методы

Обширный класс методов приближенного решения уравнений вида  $Au = f$  использует следующий подход: решение ищется в виде  $u_N = \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i$ , где коэффициенты  $a_i$  определяются из условия равенства нулю проекции невязки  $r_N = Au_N - f$  на линейную оболочку базисных функций  $\psi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , вообще говоря, отличных от  $\varphi_i$ . Одним из частных случаев этого условия является требование ортогональности  $r_N$  ко всем  $\psi_i$ :  $(r_N, \psi_i) = (Au_N - f, \psi_i) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Поскольку подобные методы не связаны непосредственно с минимизацией какого-либо функционала, то их относят к классу *проекционных методов*. Одними из наиболее часто применяемых в практических вычислениях являются такие представители этого класса, как методы Бубнова–Галеркина, Галеркина–Петрова, метод моментов, метод коллокаций.

**4.1. Метод Бубнова–Галеркина.** Основным недостатком метода Ритца является то, что он применим только для уравнений с симметричными положительно определенными операторами. От этого недостатка свободен *метод Бубнова–Галеркина* (иногда его называют просто *методом Галеркина*).

4.1.1. *Метод Бубнова–Галеркина (общий случай).* Пусть в гильбертовом пространстве  $H$  рассматривается уравнение

$$Au = f, \quad f \in H, \quad (41)$$

где  $A$  — линейный оператор с областью определения  $D(A)$ , который может не быть симметричным, ограниченным и положительно определенным. Метод Бубнова–Галеркина построения приближенного решения уравнения (41) состоит в следующем:

- 1) выбираются базисные функции  $\{\varphi_i\}$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $\varphi_i \in D(A)$ ;
- 2) приближенное решение ищется в виде  $u_N = \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i$ ;
- 3) коэффициенты  $a_i$  определяются из условия ортогональности невязки  $Au_N - f$  к  $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ :  $(Au_N - f, \varphi_i) = 0$ ,  $i = 1, \dots, N$ , или

$$\sum_{k=1}^N (\varphi_i, A\varphi_k) a_k = (f, \varphi_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (42)$$

Отметим, что уравнения (42) по форме совпадают с соответствующими уравнениями алгоритма Ритца (если  $\varphi_i \in D(A)$ ). Таким образом, если  $A$  — симметричный положительно определенный оператор, то методы Бубнова–Галеркина и Ритца совпадают.

Обозначим через  $H_N$  линейную оболочку системы  $\{\varphi_i\}$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $\varphi_i \in D(A)$ , а через  $AH_N$  — линейную оболочку функций  $\{A\varphi_i\}$ . Заметим, что если однородное уравнение  $Au = 0$  имеет только нулевое решение, то функции  $A\varphi_1, \dots, A\varphi_N$  линейно независимы. Обозначим через  $P_N$  оператор ортогонального проектирования на  $H_N$ . Нетрудно показать, что *требование равенства нулю ортогональной проекции*  $\Phi_1 \equiv P_N \Phi$  *некоторого*

элемента  $\Phi \in H$  эквивалентно системе  $(\Phi, \varphi_i) = 0, i = 1, 2, \dots, N$ . Таким образом, система (42) эквивалентна одному уравнению

$$P_N A u_N = P_N f,$$

которое широко используется при изучении сходимости общего случая алгоритма Бубнова–Галеркина.

Пусть  $P_N^{(1)}, P_N^{(2)}$  — операторы ортогонального проектирования на  $H_N$ ,  $AH_N$  соответственно. Введем обозначение

$$\tau_N = \min_{v_N} \frac{\|P_N^{(1)} v_N\|}{\|v_N\|},$$

где  $v_N \in AH_N, v_N \neq 0$ .

**Теорема 4.** Пусть:

- 1)  $\tau_N \geq \tau > 0$ , где постоянная  $\tau$  не зависит от  $N$ ;
- 2) система  $\{\varphi_i\}$   $A$ -плотная.

Тогда последовательность  $\{Au_N\}$  сходится к  $Au$  при любом  $f \in H$ ; при этом имеет место оценка

$$\|Au - Au_N\| \leq \left(1 + \frac{1}{\tau_N}\right) \|f - P_N^{(2)} f\| \leq \left(1 + \frac{1}{\tau}\right) \|f - P_N^{(2)} f\|.$$

Если же существует ограниченный оператор  $A^{-1}$ , то имеет место сходимость  $u_N$  к  $u$  при  $N \rightarrow \infty$  и справедлива оценка погрешности

$$\|u - u_N\| \leq \|A^{-1}\| \left(1 + \frac{1}{\tau}\right) \|f - P_N^{(2)} f\|.$$

Таким образом, если в общем алгоритме Бубнова–Галеркина удастся оценить снизу величину  $\tau_N > \tau > 0$ , то можно доказать сходимость невязки  $r_N = Au_N - f$  к нулю, а также  $u_N \rightarrow u, N \rightarrow \infty$  по норме  $\|\cdot\|$  и норме вида  $\|u\|_A = \|Au\|$  при условии обратности оператора  $A$ .

**4.1.2. Метод Бубнова–Галеркина (случай  $A = A_0 + B$ ).** Пусть оператор в (41) представим в виде  $A = A_0 + B$ , где  $A_0$  («главная часть» оператора  $A$ ) — самосопряженный положительно определенный оператор с областью определения  $D(A)$ , плотной в  $H$ . Введем энергетическое пространство  $H_A$  оператора  $A_0$  со скалярным произведением  $[u, v]$  и нормой  $[u] = [u, u]^{1/2}$ . Умножим (41) на произвольную функцию  $v \in H_A$ . Тогда получаем равенство

$$[u, v] + (Bu, v) = (f, v) \quad \forall v \in H_A, \quad (43)$$

которое допускает введение обобщенной постановки задачи (41).

**Определение.** Функцию  $u \in H_A$  назовем *обобщенным решением* уравнения (41), если  $u$  удовлетворяет (43).

Предположим, что такое обобщенное решение существует. Если при этом окажется, что  $u \in D(A)$ , то в силу соотношения  $[u, v] = (A_0 u, v)$  получим  $(A_0 u + Bu - f, v) = 0$ . Поскольку по предположению  $D(A_0)$  плотно в  $H$ , то плотным в  $H$  будет и  $H_A$ . Поэтому из последнего соотношения делаем заключение, что  $u$  удовлетворяет также (41).

Сформулируем метод Бубнова–Галеркина для решения рассматриваемой здесь задачи:

1) в  $H_A$  выбираются базисные функции  $\{\varphi_i\}$ , т.е. здесь достаточно, чтобы  $\varphi_i$  принадлежали  $H_A$  (а не  $D(A)$ );

2) приближенное решение  $u_N$  ищется в виде  $u_N = \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i$ ;

3) коэффициенты  $a_i$  определяются из системы уравнений вида

$$[u_N, \varphi_i] + (Bu_N, \varphi_i) = (f, \varphi_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (44)$$

или, в матричной форме,  $\hat{A}a = f$ , где  $\hat{A} = (A_{ij})$ ,  $A_{ij} = [\varphi_j, \varphi_i] + (B\varphi_j, \varphi_i) = (f, \varphi_i)$ ,  $a = (a_1, \dots, a_N)^T$ ,  $f = (f_1, \dots, f_N)^T$ ,  $f_i = (f, \varphi_i)$ . После определения  $a$  из системы  $\hat{A}a = f$  строим приближенное решение по формуле

$$u_N = \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i.$$

**Теорема 5.** Пусть (41) имеет единственное обобщенное решение и оператор  $T = A^{-1}B$  вполне непрерывен в  $H_A$ . Предположим также, что последовательность подпространств  $H_N$ , являющихся линейными оболочками  $\{\varphi_i\}$ , предельно плотна в  $H_A$ . Тогда при достаточно больших  $N$  метод Бубнова–Галеркина дает единственное приближенное решение  $u_N$ . Последовательность  $u_N$  сходится по норме  $H_A$  к обобщенному решению  $u$ , а также справедливы оценки вида

$$\min_{c_i} \left[ u - \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i \right] \leq [u_N - u] \leq (1 + \varepsilon_N) \min_{c_i} \left[ u - \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i \right],$$

где  $\varepsilon_N \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ .

Справедливо также следующее утверждение.

**Теорема 6.** Пусть:

1) уравнение (41) имеет единственное обобщенное решение  $u \in H_A$ ;

2) форма  $a(u, v) = [u, v] + (Bu, v)$  является  $H_A$ -определенной и  $H_A$ -ограниченной, т.е. для нее выполнены соотношения

$$a(u, u) \geq \gamma_0^2 [u]^2, \quad a(u, v) \leq \gamma_1^2 [u][v], \quad \gamma_0, \gamma_1 = \text{const};$$

3) последовательность подпространств  $\{H_N\}$ , где  $H_N$  — линейная оболочка функций  $\{\varphi_i\}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , предельно плотна в  $H_A$ , т.е.

$$\min_{c_i} \left[ u - \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i \right] \leq \varepsilon(u, N) \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty,$$

где  $\varepsilon(u, N)$  — оценка погрешности аппроксимации.

Тогда при любом конечном  $N$  система (43) однозначно разрешима, приближенное решение  $u_N$  сходится к  $u$  при  $N \rightarrow \infty$  в метрике  $[\cdot]$ , а также справедлива оценка погрешности  $[u - u_N] \leq c\varepsilon(u, N)$ , где постоянная  $c$  не зависит от  $N$ .

Заметим, что в рассматриваемом случае метода Бубнова–Галеркина базисные функции (так же, как и в методе Ритца) можно выбирать не удовлетворяющими краевым условиям, если они оказываются естественными.

**4.2. Метод моментов.** Пусть в гильбертовом пространстве  $H$  (которое предполагается комплексным) рассматривается уравнение

$$Au + Bu = f, \quad f \in H, \quad (45)$$

где оператор  $A$  является  $K$ -положительно определенным (или положительно определенным в обобщенном смысле), т. е.

$$(Au, Ku) \geq \gamma^2 \|u\|^2, \quad (Au, Ku) \geq \beta^2 \|Ku\|^2,$$

где  $\beta, \gamma$  — постоянные,  $\beta, \gamma > 0$ ,  $u \in D(A)$ .

Метод моментов приближенного решения (45) состоит в следующем:

- 1) выбирается базисная система  $\{\varphi_i\} \subset D(A)$ ;
- 2) приближенное решение  $u_N$  ищется в виде  $u_N = \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i$ ;
- 3) коэффициенты  $a_i$  определяются из системы уравнений

$$(Au_N + Bu_N - f, K\varphi_j) = 0, \quad j = 1, \dots, N. \quad (46)$$

Отмечаем, что в силу  $K$ -положительной определенности оператор  $A$  обладает ограниченным обратным оператором:  $\|A^{-1}\| \leq 1/(\gamma\beta)$ , а также число  $(Au, Ku)$  вещественно и имеет место свойство

$$(Au, Kv) = (Ku, Av) \quad \forall u, v \in D(A).$$

На основании этих свойств на  $D(A)$  можно ввести скалярное произведение  $(u, v)_K = (Au, Kv)$ ,  $u, v \in D(A)$ , в силу чего  $D(A)$  после пополнения превращается в гильбертово пространство  $H_K$  с нормой

$$\|u\|_K = (u, u)_K^{1/2}.$$

**Определение.** Элемент  $u \in H_K$  назовем *обобщенным решением* уравнения (45), если он удовлетворяет равенству

$$(u, v)_K + (Tu, v)_K = (f, v)_K \quad \forall v \in H_K. \quad (47)$$

Очевидно, что если элемент  $u$  удовлетворяет (45), то он является также и обобщенным решением (обратное, вообще говоря, неверно).

Теперь систему (46) можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^N [(f, \varphi_i)_K + (B\varphi_i, K\varphi_j)] a_i = (f, K\varphi_j), \quad j = 1, \dots, N. \quad (48)$$

Алгоритм (48) можно рассматривать как процесс определения приближенного обобщенного решения  $u_N$ .

**Теорема 7.** Пусть уравнение (45) имеет единственное обобщенное решение и оператор  $T = A^{-1}B$  вполне непрерывен в  $H_K$ .

Тогда:

- 1) существует такое целое  $N_0$ , что при любом  $N \geq N_0$  система (48) имеет единственное решение  $a_i$ ;
- 2) приближенные решения  $u_N$  сходятся в  $H_K$  (а также в  $H$ ) к решению уравнения (45).

### 4.3. Проекционные методы в гильбертовых и банаховых пространствах.

4.3.1. *Проекционный метод в гильбертовом пространстве.* Пусть в гильбертовом пространстве  $H$  рассматривается уравнение

$$Au = f, \quad f \in H, \quad (49)$$

где  $A$  — вообще говоря, неограниченный оператор, действующий в  $H$  и обладающий ограниченным обратным оператором  $A^{-1}$ . Предположим, что множество определения  $D(A)$  и множество значений  $R(A)$  плотны в  $H$ .

Введем в  $H$  линейно независимую систему  $\{\varphi_i\}$ . Соответствующие  $N$ -мерные подпространства, порождаемые  $\{\varphi_i\}$ , обозначим через  $M_N$ . Предположим, что последовательность  $\{M_N\}$  предельно плотна в  $H$ . Зададим последовательность проекционных операторов  $P_N$ , каждый из которых отображает  $H$  на соответствующее пространство  $M_N$ . Предположим в дальнейшем, что  $\|P_N\| \leq c$ ,  $N = 1, 2, \dots$  (Здесь  $P_N$  не обязательно являются ортопроекторами, т. е. от них требуется лишь выполнение свойств  $P_N^2 = P_N$ ,  $P_N H = M_N$ .)

Введем также линейно независимую систему  $\{\varphi_i\}$ ,  $\varphi_i \in D(A)$ . Подпространства, порождаемые  $\{\varphi_i\}$ , обозначим через  $H_N$ , а линейную оболочку системы  $\{A\varphi_i\}$  — через  $AH_N$ . Предположим, что последовательность подпространств  $\{AH_N\}$  предельно плотна в  $H$  и для любого элемента  $u \in H$

$$\varepsilon_N(u, N) = \inf_{u_N} \|u - u_N\| \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty, \quad u_N \in AH_N.$$

Приближенное решение задачи (49) ищем в виде  $u_N = \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i$ , где  $a_i$  определяется из уравнения

$$P_N A u_N = P_N f. \quad (50)$$

**Теорема 8.** Пусть для любого  $N$  и любого элемента  $v \in AH_N$  имеет место неравенство  $\tau \|v\| \leq \|P_N v\|$ , где постоянная  $\tau > 0$  не зависит от  $N$ . Тогда при любом  $N$  уравнение (50) имеет единственное решение  $u_N = \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i$ , причем невязка  $Au_N - f$  стремится к нулю при  $N \rightarrow \infty$  и справедливы оценки

$$\varepsilon(f, N) \leq \|Au_N - f\| \leq (1 + c/\tau) \varepsilon(f, N),$$

где  $\varepsilon(f, N) = \inf_{f_N} \|f - f_N\|$ ,  $f_N \in AH_N$ .

4.3.2. *Метод Галеркина–Петрова.* Рассмотрим уравнение (49). Алгоритм приближенного решения этого уравнения состоит в следующем:

1) задаются два, вообще говоря, различных базиса  $\{\varphi_i\} \subset D(A)$ ,  $\{\psi_i\} \subset H$ ;

2) приближенное решение  $u_N$  ищется в виде  $u_N = \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i$ ;

3) коэффициенты  $a_i$  определяются из системы уравнений

$$(Au_N + Bu_N - f, \psi_i) = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (51)$$

Этот метод является также частным случаем сформулированного в п. 4.3.1 проекционного метода. Действительно, пусть в (50) оператор  $P_N$  есть ортопроектор на линейную оболочку  $M_N$  функций  $\{\psi_i\}$ . Тогда уравнение (50) эквивалентно системе уравнений  $(Au_N - f, \psi_i) = 0$ ,  $i = 1, \dots, N$ , т. е. системе (51). Итак, метод Галеркина–Петрова есть частный случай проекционного метода, рассматриваемого в гильбертовом пространстве при условии, что  $P_N$  есть оператор ортогонального проектирования. В силу этого теорема из п. 4.3.1 остается справедливой и в данном случае.

Рассмотрим теперь специальный набор базисных функций  $\{\psi_i\}$  в методе Галеркина–Петрова (при котором этот метод иногда называют *методом интегрирования по подобластям*).

Пусть  $H = L_2(\Omega)$ , где  $\Omega$  — область  $m$ -мерного евклидова пространства,  $H_N$  — линейная оболочка  $\{\varphi_i\}$ . Базис  $\{\psi_i\}$  здесь уже имеет конкретный вид. Разобьем  $\Omega$  на  $N$  подобластей  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$  так, чтобы  $\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega$ ,  $\Omega_j \cap \Omega_i = \emptyset$  при  $i \neq j$ . Обозначим через  $\tilde{\psi}_k(x)$ ,  $x \in \Omega$ , характеристическую функцию области  $\Omega_k$ :  $\tilde{\psi}_k(x)$  равно 1 при  $x \in \Omega_k$  и 0 при  $x \notin \Omega_k$ . Введем функцию  $\psi_k(x) = (1/\sqrt{\text{mes}(\Omega_k)})\tilde{\psi}_k(x)$ ,  $k = 1, \dots, N$ , и примем за  $M_N$  подпространство, являющееся линейной оболочкой системы  $\{\psi_k\}$ . В этом случае (51) эквивалентна системе

$$\sum_{i=1}^N a_i \int_{\Omega_j} A \varphi_i dx = \int_{\Omega_j} f dx, \quad j = 1, \dots, N. \quad (52)$$

Сходимость метода интегрирования по подобластям вытекает из теоремы 8.

**4.3.3. Проекционный метод в банаховом пространстве.** Пусть  $E$  и  $F$  — банаховы пространства (комплексные или вещественные). Рассмотрим уравнение

$$Au = f, \quad (53)$$

где  $A$  — линейный (вообще говоря, неограниченный) оператор с областью определения  $D(A) \subset E$  и областью значений  $R(A) \subset F$ . *Проекционный метод* решения (53) заключается в следующем. Задаются две последовательности  $\{E_N\}$  и  $\{F_N\}$ :  $E_N \subset D(A) \subset E$ ,  $F_N \subset F$  ( $N = 1, 2, \dots$ ), а также линейные проекционные операторы (проекторы)  $P_N$ , проектирующие  $F$  на  $F_N$ :  $P_N^2 = P_N$ ,  $P_N f = F_N$  ( $N = 1, 2, \dots$ ). Уравнение (53) заменяется приближенным уравнением

$$P_N A u_N = P_N f, \quad u_N \in E_N. \quad (54)$$

Поскольку проектор  $P_N$  имеет вид  $P_N u = \sum_{k=1}^N l_k(u) \psi_k$ , где  $\psi_1, \dots, \psi_N$  — базис подпространства  $F_N$ , а  $l_k(u)$  — линейные ограниченные в  $F$  функционалы, то, обозначая через  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$  базис в  $E_N$ , уравнение (54) сведем к системе линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^N l_j(A \varphi_k) a_k = l_j(f), \quad j = 1, 2, \dots, N; \quad (55)$$

при такой записи нет необходимости явно указывать подпространство  $F_N$ , достаточно указать функционалы.

Определив  $u_N$  из уравнения (54) (или из уравнений (55)), его принимают за приближенное решение уравнения (53).

Говорят, что последовательность подпространств  $\{E_N\}$  предельно плотна в  $E$ , если для каждого  $w \in E$  имеем  $P(w, E_N) \rightarrow 0$ ,  $N \rightarrow \infty$ , где  $P(w, E_N) = \inf_{w_N \in E_N} \|w - w_N\|$ .

Следующая теорема, установленная Г. М. Вайникко, дает обоснование сформулированному алгоритму.

**Теорема 9.** Пусть область определения  $D(A)$  оператора  $A$  плотна в  $E$ , а  $R(A) -$  в  $F$ , и пусть  $A$  переводит  $D(A)$  на  $R(A)$  взаимно однозначно. Пусть подпространства  $AE_N$  и  $F_N$  замкнуты в  $F$ , а проекторы  $P_N$  ограничены относительно  $N$ :  $\|P_N\| \leq C$  ( $N = 1, 2, \dots$ ).

Тогда для того, чтобы при любом  $f \in F$ , начиная с некоторого  $N = N_0$ , существовало единственное решение  $u_N$  уравнения (54) и чтобы  $\|Au_N - f\| \rightarrow 0$ ,  $N \rightarrow \infty$ , необходимо и достаточно, чтобы соблюдались следующие условия:

- 1) последовательность подпространств  $AE_N$  предельно плотна в  $F$ ;
- 2) при  $N \geq N_0$  оператор  $P_N$  переводит  $AE_N$  взаимно однозначно на  $F_N$ ;

- 3)  $\tau \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \tau_N > 0$ , где  $\tau_N = \inf_{w_N \in AE_N, \|w_N\|=1} \|P_N w\|$ .

Быстрота сходимости при соблюдении условий 1)–3) характеризуется неравенствами

$$P(f, AE_N) \leq \|Au_N - f\| \leq \left(1 + \frac{C}{\tau_N}\right) P(f, AE_N).$$

(В случае, когда подпространства  $E_N, F_N$  конечномерные и их размерности совпадают, условие 2) является следствием условия 3).)

**4.3.4. Метод коллокаций.** Пусть в уравнении (53) оператор  $A$  есть дифференциальный оператор порядка  $s$ ,  $E = C^{(s)}(\Omega)$ ,  $F = C(\Omega)$ . Выберем последовательность линейно независимых функций  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$ , удовлетворяющих всем краевым условиям задачи. Натянутое на  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$  подпространство примем за  $E_N$ , и пусть  $u_N = \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k$ . В области  $\Omega$  выберем теперь  $N$  точек  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$  и положим  $l_j(u) = u(\xi_j)$ . Система (55) в данном случае примет вид

$$\sum_{k=1}^N a_k (A\varphi_k)(\xi_j) = f(\xi_j), \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (56)$$

а проекционный алгоритм в банаховом пространстве называется *методом коллокаций*. Для обоснования метода коллокаций может быть использована теорема 9. Этот метод широко используется для приближенного решения интегральных и дифференциальных уравнений.

**4.4. Основные понятия проекционно-сеточных методов.** Естественной и привлекательной является идея конструирования таких алгоритмов приближенного решения задач математической физики, которые, с

одной стороны, по форме были бы вариационными или проекционными, а с другой — приводили бы к системам уравнений, подобным возникающим в разностных методах (т.е. незначительное число элементов матриц этих систем были бы ненулевыми). Такими алгоритмами являются *проекционно-сеточные методы* (которые называют также *методами конечных элементов*).

Чтобы прийти к этим алгоритмам, достаточно в вариационных или проекционных методах в качестве базисных функций  $\{\varphi_i\}$  брать *функции с конечными носителями (финитные функции)*, т.е. такие функции, которые отличны от нуля лишь на небольшой части той области, на которой определено искомое решение задачи. Так, пусть рассматривается задача

$$-\frac{d^2 u}{dx^2} + u = f(x), \quad x \in (0, 1), \quad u(0) = u(1) = 0, \quad (57)$$

где  $f \in L_2(0, 1)$ , которая сводится к следующей вариационной задаче:

$$J(u) = \inf_{v \in \overset{\circ}{W}_2^1(0,1)} J(v), \quad \text{где} \quad J(v) = \int_0^1 \left( \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 + v^2 - 2vf \right) dx.$$

Введем на  $[0, 1]$  сетку  $x_i = ih$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ ,  $h = 1/N$ , и функции вида

$$\varphi_i(x) = \frac{1}{\sqrt{h}} \cdot \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h}, & x \in (x_{i-1}, x_i), \\ \frac{x_{i+1} - x}{h}, & x \in (x_i, x_{i+1}), \\ 0, & x \notin (x_{i-1}, x_{i+1}), \end{cases} \quad i = 1, \dots, N-1,$$

которые и примем в качестве базисных. Будем искать приближенное решение в виде  $u_N(x) = \sum_{i=1}^{N-1} a_i \varphi_i(x)$ , где коэффициенты определим с помощью вариационного алгоритма. В данном случае это можно сделать исходя из условий минимизации функционала  $J(u_N)$ , т.е. методом Ритца в пространстве  $\overset{\circ}{W}_2^1(0, 1)$  (которое является здесь и энергетическим пространством). Тогда для  $a_1, \dots, a_{N-1}$  получаем систему уравнений

$$\sum_{j=1}^{N-1} A_{ij} a_j = f_i, \quad i = 1, \dots, N-1. \quad (58)$$

Учитывая специфику выбранных базисных функций, легко вычислить вид элементов  $A_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, N-1$ :

$$A_{ij} = \begin{cases} \frac{2}{h^2} + \frac{4}{6}, & i = j, \\ -\frac{1}{h^2} + \frac{1}{6}, & j = i-1, i+1, \\ 0, & |j-i| > 1. \end{cases}$$

Таким образом, применение вариационного алгоритма с рассмотренными выше финитными функциями привело нас к тому, что система уравнений (58) является системой некоторых разностных уравнений, близкой к

системе, возникающей в разностном методе. Матрица системы здесь также является трехдиагональной и, следовательно, удобна для численного решения (58). Кроме того, так как при построении приближенного решения мы исходили из вариационного алгоритма, то матрица  $\hat{A}$  здесь будет заведомо симметричной. Кроме того, она положительно определена:

$$\sum_{i,j=1}^{N-1} A_{ij} a_i a_j \geq \lambda_{\min} \sum_{i=1}^{N-1} a_i^2, \quad \text{где} \quad \lambda_{\min} = \frac{4 \sin^2 \pi h/2}{h^2} > 0.$$

Таким образом, свойства положительной определенности и симметричности оператора задачи здесь при применении проекционно-сеточного метода сохраняются, и *проекционно-сеточный алгоритм обладает рядом хороших качеств как вариационного, так и разностного метода.*

Отметим другие привлекательные черты проекционно-сеточных методов. Так, коэффициенты  $a_i$  в системе (58) зачастую несут ясную смысловую интерпретацию. Например, в рассмотренной задаче коэффициент  $a_i$  равен значению приближенного решения в узле  $x_i$ , умноженному на коэффициент  $\sqrt{h}$ . Далее, оказалось, что финитные базисные функции в ряде случаев легко можно «приспособить» к геометрии области; тем самым устраняется одна из трудностей, возникающих в разностном методе. Кроме того, обращаем внимание на то, что если при решении рассматриваемой задачи надлежащим образом выбраны проекционный алгоритм и его базисные функции, то дальнейший процесс построения решения задачи происходит «автоматически» с применением электронно-вычислительных машин. Эти обстоятельства и ряд других обуславливают широкое применение проекционно-сеточных алгоритмов для решения самых различных задач математической физики: многомерных задач в областях со сложной геометрией границ, линейных и нелинейных задач, задач гидродинамики и аэродинамики, уравнений электродинамики и волновых процессов и многих других. И в большинстве случаев сохраняется основная идея этих методов, заключающаяся в *применении проекционных (в том числе и вариационных) методов с использованием в них различного рода финитных функций*, нашедших в настоящее время широкие приложения в теории аппроксимации.

## 5. Методы интегральных тождеств

Метод интегральных тождеств (интегро-интерполяционный метод, метод баланса) традиционно относился к разностным методам. В настоящее время получены проекционные формы интегральных тождеств, позволяющие рассматривать этот метод как одну из модификаций проекционного метода.

**5.1. Основные идеи метода.** Суть метода интегральных тождеств изложим на примере уравнения

$$-\frac{d}{dx} p(x) \frac{du}{dx} + q(x)u = f(x), \quad a < x < b, \quad (59)$$

с некоторыми краевыми условиями. Сущность метода интегральных тождеств для решения этого уравнения состоит в следующем: вводится сетка  $a = x_0 < x_{1/2} < x_1 < \dots < x_{N-1/2} < x_N = b$  и уравнение (59) интегрируется в интервале  $(x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$ . В результате приходим к интегральным тождествам

$$-(W_{i+1/2} - W_{i-1/2}) + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} (qu(x) - f(x)) dx = 0,$$

где  $W_{i+1/2} = W(x_{i+1/2})$ ,  $W(x) = p(x) (du/dx)(x)$ . Затем, используя приближения входящих в эти тождества производных и интегралов, а также краевых условий, получаем соответствующие разностные схемы.

Однако этот алгоритм можно переформулировать следующим образом. Введем систему  $\{\psi_i(x)\}$  ступенчатых функций

$$\psi_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in (x_{i-1/2}, x_{i+1/2}), \\ 0 & \text{при } x \notin (x_{i-1/2}, x_{i+1/2}). \end{cases}$$

Тогда полученные тождества — не что иное, как результат проектирования в  $L_2(a, b)$  уравнения (59) на систему  $\{\psi_i\}$ , т. е. тождества можно представить в виде системы

$$-\left(\frac{d}{dx} p \frac{du}{dx}, \psi_i\right) + (qu, \psi_i) = (f, \psi_i).$$

Этот этап построения приближенного решения совпадает с этапом в проекционно-сеточном методе, а тождества являются результатом проектирования рассматриваемого уравнения на некоторую базисную систему.

Итак, если задана некоторая система базисных функций  $\{\psi_i(x)\}$ , то интегральные тождества можно получать путем проектирования уравнений, описывающих задачу, на данную систему.

На следующем этапе построения численного решения задачи интегральные тождества можно приближать двумя способами: а) либо приближенно вычислять интегралы с помощью квадратур и т. п.; либо б) искать приближенное решение  $u_h$  в виде разложения, вообще говоря, уже по другим базисным функциям  $\{\phi_i(x)\}$ . Второй способ позволяет в ряде случаев трактовать метод интегральных тождеств как одну из модификаций проекционного алгоритма и привлекать для обоснования процесса решения задачи теорию проекционных методов.

**5.2. Метод интегрального тождества Марчука.** Для численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений широко применяется метод интегральных тождеств, разработанный Г. И. Марчуком. Сущность этого метода состоит в следующем.

Рассмотрим краевую задачу для одномерного уравнения диффузии вида

$$-\frac{d}{dx} p(x) \frac{du}{dx} + q(x)u = f(x), \quad x \in (a, b), \quad u(a) = u(b) = 0. \quad (60)$$

Предполагается, что  $p(x), q(x) \in L_\infty(a, b)$ ,  $f(x) \in L_2(a, b)$ ,  $p(x) > 0$ ,  $q(x) \geq 0$ .

Метод интегральных тождеств, применяемый для решения задачи, состоит в том, что, исходя из (60), получают тождества

$$\begin{aligned} & (u(x_k) - u(x_{k+1})) \left( \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{dx}{p(x)} \right)^{-1} + (u(x_k) - u(x_{k-1})) \left( \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{dx}{p(x)} \right)^{-1} + \\ & + \int_{x_{k-1/2}}^{x_{k+1/2}} (qu - f) dx = - \left( \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{dx}{p(x)} \right)^{-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{dx}{p(x)} \int_{x_{k+1/2}}^x (qu - f) d\xi + \\ & + \left( \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{dx}{p(x)} \right)^{-1} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{dx}{p(x)} \int_{x_{k-1/2}}^x (qu - f) d\xi, \quad k = 1, \dots, N-1, \quad (61) \end{aligned}$$

где  $a = x_0 < x_{1/2} < x_1 < x_{3/2} < \dots < x_{N-3/2} < x_{N-1} < x_{N-1/2} < x_N = b$  — некоторый набор точек. Используя теперь ту или иную аппроксимацию входящих в (61) интегралов, получаем соответствующую разностную схему.

Тождества (61) были получены Г. И. Марчуком и широко использовались для построения разностных схем. Однако затем было замечено, что (61) эквивалентны каждому из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} & (u(x_k) - u(x_{k+1})) \left( \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{dx}{p(x)} \right)^{-1} + (u(x_k) - u(x_{k-1})) \left( \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{dx}{p(x)} \right)^{-1} + \\ & + (qu, Q_k) = (f, Q_k), \quad k = 1, \dots, N-1, \quad (62) \end{aligned}$$

$$\left( p(x) \frac{du}{dx}, \frac{dQ_k}{dx} \right) + (qu, Q_k) = (f, Q_k), \quad k = 1, \dots, N-1, \quad (63)$$

$$\left( p(x) \frac{du_I}{dx}, \frac{dQ_k}{dx} \right) + (qu, Q_k) = (f, Q_k), \quad k = 1, \dots, N-1, \quad (64)$$

где  $(\varphi, \psi) = \int_a^b \varphi \psi dx$ ,  $\|\varphi\| = (\varphi, \varphi)^{1/2}$ ,  $u_I(x)$  — некоторый интерполант функции  $u(x)$  такой, что  $u_I(x_i) = u(x_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ , и имеет смысл производная  $du_I/dx$ . Функция  $Q_k(x)$  ( $k = 1, 2, \dots, N-1$ ) имеет вид

$$Q_k(x) = \begin{cases} 1 - \int_x^{x_k} \frac{d\xi}{p(\xi)} \left( \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{d\xi}{p(\xi)} \right)^{-1}, & x \in (x_{k-1}, x_k), \\ 1 - \int_{x_k}^x \frac{d\xi}{p(\xi)} \left( \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{d\xi}{p(\xi)} \right)^{-1}, & x \in (x_k, x_{k+1}), \\ 0, & x \notin (x_{k-1}, x_{k+1}). \end{cases} \quad (65)$$

Отмечаем, что соотношение (63) есть не что иное, как известное равенство, применяемое в методе Бубнова–Галеркина для построения при-

ближенного решения на основе использования  $\{Q_k(x)\}$  в качестве базисных функций. Если воспользоваться соотношениями (62), то замечаем, что здесь становится возможным использование разрывных базисных функций  $\{\varphi_l(x)\}$ . Действительно, пусть функции  $\varphi_l(x)$  кусочно непрерывны с возможными разрывами первого рода в точках, не совпадающих с узлами сетки  $x_k$ ,  $k = 1, \dots, N-1$ . Тогда каждая из этих функций имеет конечное значение в  $x_k$ , а значит, и их линейная комбинация  $u_h = \sum_{k=0}^N a_k \varphi_k(x)$  с произвольными постоянными  $a_k$  будет принимать конечное значение в узлах  $x_j$ , т. е.  $u_h(x_j) = \sum_{k=0}^N a_k \varphi_k(x_j) < \infty$ ,  $j = 1, \dots, N-1$ . Таким образом, функции  $\{\varphi_k(x)\}$  допустимы для построения приближенного решения с использованием соотношений (62), хотя  $\{\varphi_j(x)\}$  — система разрывных функций.

Применение тождеств в форме (64) позволяет видеть, как достаточно просто исследовать вопросы сходимости и, в частности, получать оценки скорости сходимости в равномерной метрике.

Таким образом, метод интегральных тождеств может рассматриваться как один из проекционных алгоритмов, а соотношения (62)–(64) могут использоваться наравне с тождеством (61), с достаточно широким выбором базисных функций для приближения  $u(x)$ .

### 5.3. Обобщенная формулировка метода интегральных тождеств.

Изложим метод интегральных тождеств в общей формулировке, получая тождества путем проектирования на систему некоторых базисных функций.

5.3.1. *Алгоритм построения интегральных тождеств.* В гильбертовом пространстве  $H$  рассмотрим уравнение

$$Au + Bu = f, \quad f \in H, \quad (66)$$

где  $A$  — линейный (в общем случае неограниченный) оператор, действующий в  $H$ , с областью определения  $D(A) \subset H$ , плотный в  $H$  и с областью значений  $R(A) \subseteq H$ ,  $B$  — линейный, симметричный, ограниченный в  $H$  оператор с  $D(B) = H$ ,  $R(B) \subseteq H$ . Предполагается в дальнейшем, что операторы  $A+B$  и  $B$  являются  $H$ -определенными:  $((A+B)v, v) \geq \gamma_0^2 \|v\|^2$ ,  $v \in D(A)$ ,  $(Bv, v) \geq \gamma_1^2 \|v\|^2$ ,  $v \in H$ ,  $\gamma_i > 0$ , а также что уравнение (66) имеет единственное решение  $u \in D(A)$  при заданной функции  $f \in H$ .

Введем в  $H$  систему линейно независимых функций  $\{\psi_i\}$ , плотную в  $H$ . Линейную оболочку системы  $\{\psi_i\}$  обозначим через  $H_\psi^{(N)}$ . Спроектируем уравнение (66) ортогонально на  $H_\psi^{(N)}$ . В результате получаем систему интегральных тождеств

$$A_i^{(N)} u + (Bu, \psi_i) = (f, \psi_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (67)$$

где  $A_i^{(N)} u + (Au, \psi_i)$ .

Может оказаться, что оператор  $A^{(N)}$ , задаваемый как система операторов  $A_i^{(N)}: A^{(N)} = \{A_i^{(N)}, i = 1, \dots, N\}$ , будет иметь область определения,

более широкую по сравнению с  $D(A)$ , и поэтому можно расширить  $A^{(N)}$ , т. е. построить такой оператор  $A^{(N)}$  с областью определения  $D(A^{(N)})$ , что  $D(A^{(N)}) \subset D(\bar{A}^{(N)})$  и  $\bar{A}^{(N)}u = A^{(N)}u$  при  $u \in D(A^{(N)})$ . Отметим, что если  $v \in D(A)$ , то согласно определению расширения оператора будем иметь  $\bar{A}^{(N)}v = A^{(N)}v = \{A_i^{(N)}v, i = 1, \dots, N\} = \{(Av, \psi_i), i = 1, \dots, N\}$ . Если же  $v \in D(\bar{A}^{(N)})$ , но  $v \notin D(A)$ , то в общем случае нельзя представить  $\bar{A}^{(N)}$  как совокупность операторов  $\{A_i^{(N)}v\} = \{(Av, \psi_i)\}$ , а сделать это можно только через систему  $\{\bar{A}_i^{(N)}\}$ , для которой представления  $(Au, \psi_i)$  уже не имеют места.

По предположению  $u \in D(A)$  и  $\bar{A}_i^{(N)}u = A_i^{(N)}u$ , поэтому система (67) оказывается эквивалентна системе

$$\bar{A}_i^{(N)}u + (Bu, \psi_i) = (f, \psi_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (68)$$

которая является основной системой интегральных тождеств.

Для построения приближенного решения теперь можно воспользоваться именно этой системой, благодаря чему появляется возможность использовать для построения приближенного решения базисные системы, не принадлежащие  $D(A)$ , т. е. можно искать приближение  $u_N = \sum_{i=1}^N a_i \phi_i \approx u$ , где функции  $\phi_i$  могут принадлежать лишь  $D(\bar{A}^{(N)})$ . Последний путь построения приближенного решения с помощью  $\phi_i$  называют *проекционным подходом* в методе интегральных тождеств. Но можно воспользоваться и классическим алгоритмом аппроксимации входящих в (68) выражений с помощью разностных отношений и квадратурных формул. Такой подход называют *разностным*.

### 5.3.2. Разностный метод аппроксимации интегральных тождеств.

Рассмотрим разностный подход к построению приближенных решений задачи на основе интегральных тождеств (68). Для этого введем в области задания функций сетку и определим сеточные функции:  $u_h$  — проекция точного решения на сетку,  $u^h$  — вектор приближенного решения задачи. Предполагается, что размерности  $u_h$  и  $u^h$  совпадают и равны  $N$ . Пусть для слагаемых, входящих в (68), определены аппроксимации

$$\bar{A}_i^{(N)}u = \sum_{j=1}^N \bar{A}_{ij}^{(N)}u_{h,j} + \varepsilon_i^{(1)}, \quad (Bu, \psi_i) = \sum_{j=1}^N B_{ij}u_{h,j} + \varepsilon_i^{(2)},$$

где  $\varepsilon_i^{(k)}$  — ошибки аппроксимации. Определим матрицы и векторы вида

$$\hat{A}_h = (A_{ij}^{(N)}), \quad \hat{B}_h = (B_{ij}),$$

$$f = ((f, \psi_1), \dots, (f, \psi_n))^T, \quad \varepsilon^{(k)} = (\varepsilon_1^{(k)}, \dots, \varepsilon_N^{(k)})^T.$$

Тогда система уравнений для определения приближенного сеточного решения  $u^h$  имеет вид

$$\hat{A}_h u^h + \hat{B}_h u^h = f. \quad (69)$$

Пусть введены сеточное пространство  $H_{1,h}$  — пространство решений с нормой  $\|\cdot\|_{1,h}$  и сеточное пространство  $H_h$  с нормой  $\|\cdot\|_h$ . Теперь к

исследованию схемы (69) можно применить общую теорию разностных схем, из которой вытекают следующие утверждения: если система (69) имеет единственное решение при любом  $N$ , причем справедлива априорная оценка  $\|u^h\|_{1,h} \leq c\|f\|_h$ , то при выполнении условий аппроксимации  $\|\varepsilon^{(1)}\|_h \leq \varepsilon_1(N) \rightarrow 0$ ,  $\|\varepsilon^{(2)}\|_h \leq \varepsilon_2(N) \rightarrow 0$ ,  $N \rightarrow \infty$ , приближенные решения  $u^h$  сходятся к  $u_h$  при  $N \rightarrow \infty$ ; при этом справедливы оценки погрешности

$$\|u^h - u_h\|_{1,h} \leq O(\varepsilon_1 + \varepsilon_2).$$

Отметим, что по сравнению с обычными разностными методами (когда не осуществляется предварительная проекция исходного уравнения на  $H_\Psi^{(N)}$ ) здесь осуществляется аппроксимация интегральных тождеств (68), в силу чего для обоснования алгоритма может потребоваться меньше ограничений на гладкость решения уравнения (66), чем это имеет место в разностных методах. Однако в рассмотренном здесь алгоритме остается одна из основных трудностей разностных методов: необходимо строить  $A_{ij}^{(N)}$ ,  $B_{ij}^{(N)}$  так, чтобы получить «хорошую» аппроксимацию, не потеряв при этом устойчивости.

Заметим также, что при выполнении аппроксимаций тождеств может сказаться, что  $\varepsilon_i^{(1)} = 0$ . В этом случае остается проблема получения оценки  $\varepsilon_i^{(2)}$ , которая решается, как правило, проще и при более слабых ограничениях на точное решение исходного уравнения (66).

**5.3.3. Проекционный метод аппроксимации интегральных тождеств.** Введем еще одну систему линейно независимых функций  $\{\varphi_i\}$  таких, что  $\varphi_i \in D(\bar{A}_i^{(N)})$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Линейную оболочку  $\{\varphi_i\}$  обозначим через  $H_\Phi^{(N)}$ . Предполагается, что последовательность подпространств  $\{H_\Phi^{(N)}\}$  предельно плотна в  $H$ . Очевидно, что  $H_\Phi^{(N)} \subset D(\bar{A}^{(N)})$  и система  $\{D(\bar{A}^{(N)})\}$  плотна в  $H$ . Оператор проектирования на  $H_\Phi^{(N)}$  обозначим через  $P_\Phi^{(N)}$ . Предполагается, что  $D(P_\Phi^{(N)}) = H$ . Отметим, что здесь пока нет ограничений в выборе  $P_\Phi^{(N)}$ , а требуется лишь, чтобы  $P_\Phi^{(N)}v \in H_\Phi^{(N)} \quad \forall v \in H$ . Предполагается, что размерности  $H_\Phi^{(N)}$  и  $H_\Psi^{(N)}$  совпадают.

Рассмотрим общую схему проекционного подхода построения приближенного решения. Будем искать его в  $H_\Phi^{(N)}$  в виде  $u_N = \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i$ , где  $a_i$  определим из системы уравнений

$$\sum_{j=1}^N (\bar{A}_i^{(N)} \varphi_j + (B\varphi_j, \psi_i)) a_j = (f, \psi_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (70)$$

Сформулируем некоторые условия, при выполнении которых имеет место однозначная разрешимость (70) и сходимости  $u_N$  к  $u$  при  $N \rightarrow \infty$ . Предположим, что базисы удовлетворяют условию равномерной линейной независимости, т. е.

$$d_1 \|c\|_2 \leq \left\| \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i \right\| \leq d_2 \|c\|_2, \quad d_3 \|c\|_2 \leq \left\| \sum_{i=1}^N c_i \psi_i \right\| \leq d_4 \|c\|_2,$$

где  $d_1, \dots, d_4 > 0$  — постоянные, не зависящие от  $c = (c_1, \dots, c_N)^T$ , и

$$\|c\|_2 = \left( \sum_{i=1}^N c_i^2 \right)^{1/2}.$$

Будем также пользоваться обозначениями

$$(u, v)_B = (Bu, v), \quad \|u\|_B = (u, u)_B^{1/2}.$$

Введем следующие условия.

**Условие 1.** Матрица  $\hat{A} = (A_{ij})$  с элементами  $A_{ij} = \bar{A}_i^{(N)} \varphi_j + (\varphi_i, \varphi_j)_B$  положительно определена и

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N A_{ij} c_i c_j \geq \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_i c_j (\varphi_i, \varphi_j)_B.$$

**Условие 2.** Базисы  $\{\varphi_i\}, \{\psi_i\}$  удовлетворяют ограничению

$$\sup_{c \neq 0} \frac{\left| \sum_{i,j=1}^N c_i c_j (\varphi_i, \varphi_j - \psi_j)_B \right|}{|c|_{A,N}^2} \leq \theta < 1,$$

где постоянная  $\theta$  не зависит от  $c = (c_1, \dots, c_N)^T$  и  $N$ , а норма  $|c|_{A,N}$  имеет вид

$$|c|_{A,N} = \left[ \sum_{i,j=1}^N c_i c_j (\bar{A}_i^{(N)} \varphi_j + (\varphi_i, \varphi_j)_B) \right]^{1/2}.$$

**Условие 3.** В  $H_\Phi^{(N)}$  можно найти такую функцию

$$u_\Phi = \sum_{i=1}^N b_i(u) \varphi_i$$

с некоторыми постоянными  $b_i$ , что для любого ненулевого вектора  $c = (c_1, \dots, c_N)^T$

$$\frac{\left| \sum_{i=1}^N c_i (A_i^{(N)} (u_\Phi - u) + (u_\Phi - u, \psi_i)_B) \right|}{|c|_{A,N}} \leq \varepsilon_1(N) \rightarrow 0,$$

$$\|u - u_\Phi\|_B \leq \varepsilon_1(N) \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

**Теорема 10.** Если выполнены условия 1–3, то:

- 1) система (70) имеет единственное решение  $a$ ;
- 2) справедлива априорная оценка

$$|a|_{A,N} \leq \frac{c \|f\|}{(1 - \theta)};$$

## 3) приближенные решения

$$u_N = \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i$$

сходятся к точному при  $N \rightarrow \infty$  и справедливы оценки погрешности

$$\left[ \sum_{i,j=1}^N \bar{A}_i^{(N)} \varphi_j (b_i - a_i)(b_j - a_j) + \|u_\varphi - u_N\|_B^2 \right]^{1/2} \leq O\left(\frac{\varepsilon_1}{1-\theta}\right),$$

$$\|u - u_N\| \leq O\left(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{1-\theta}\right).$$

**Замечание 1.** Может оказаться, что  $A_i^{(N)} u_\varphi = \bar{A}_i^{(N)} u$ ,  $i = 1, \dots, N$ . В этом случае проблема аппроксимации сводится к более простой задаче получения соотношений

$$\left| \sum_{i=1}^N c_i (u_\varphi - u, \psi_i) \right| \leq \varepsilon_1(N) |c|_{A,N}, \quad \|u - u_\varphi\|_B \leq \varepsilon_2(N).$$

**Замечание 2.** Если  $\varphi_i \in D(A)$ , то рассматриваемый алгоритм совпадает с методом Галеркина–Петрова. Оценки погрешности в этом случае принимают вид

$$((A(u_\varphi - u_N), u_\varphi - u_N) + \|u_\varphi - u_N\|_B^2)^{1/2} \leq O\left(\frac{\varepsilon_1}{1-\theta}\right),$$

$$\|u - u_\varphi\| \leq O\left(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{1-\theta}\right).$$

Отметим, что здесь в слагаемое  $(A(u_\varphi - u_N), u_\varphi - u_N)$  входит функция  $u_\varphi$  (а не точное решение  $u$ ).

#### 5.4. Приложения методов интегральных тождеств к задачам математической физики.

5.4.1. *Метод интегральных тождеств для уравнения диффузии.* Рассмотрим применение тождеств (62)–(64) для приближенного решения задачи (59), используя при этом два базиса: один — из ступенчатых функций, являющихся примером разрывных на  $(a, b)$  базисных функций; второй — из функций  $\{Q_i(x)\}$ , которые непрерывны на  $(a, b)$ .

Пусть  $h_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$ ,  $h = \max_i h_i$ , и пусть через  $\varphi_i(x)$  обозначена характеристическая функция интервала  $(x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$ , через  $\varphi_0(x)$  — интервала  $(x_0, x_{1/2})$ , через  $\varphi_N(x)$  — интервала  $(x_{N-1/2}, x_0)$ . Примем  $\{\varphi_i\}$  в качестве базисных функций и будем искать приближенное решение в виде  $u^h(x) = \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i(x)$ , где полагаем  $a_0 = a_N = 0$ . Тогда  $u^h(x) = \sum_{i=1}^{N-1} a_i \varphi_i(x)$ , где  $\{a_i\}$  определим из соотношений (полученных на основе (62))

$$(u^h(x_k) - u^h(x_{k+1})) \left( \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{dx}{p(x)} \right)^{-1} + (u^h(x_k) - u^h(x_{k-1})) \left( \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{dx}{p(x)} \right)^{-1} +$$

$$+ (qu^h, Q_k) = (f, Q_k), \quad k = 1, \dots, N-1. \quad (71)$$

Система (71) в матричной форме имеет вид

$$\hat{A}a = f,$$

где

$$a = (a_1, \dots, a_{N-1})^T, \quad f = (f_1, \dots, f_{N-1})^T, \quad \hat{A} = (A_{ij}), \quad f_i = (f, Q_i),$$

$$A_{ij} = (\varphi_j(x_i) - \varphi_j(x_{i+1})) \left( \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx}{p(x)} \right)^{-1} + (\varphi_j(x_i) - \varphi_j(x_{i-1})) \left( \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{p(x)} \right)^{-1} + \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_j(x) Q_i(x) q(x) dx, \quad i, j = 1, \dots, N-1.$$

Вычислив  $A_{ij}$  и  $f_i$  и решив систему, найдем коэффициенты  $a_1, \dots, a_{N-1}$ , с помощью которых строится кусочно постоянное восполнение приближенного решения

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^{N-1} a_i \varphi_i(x), \quad a_0 = a_N = 0.$$

Считая, что  $p(x)$ ,  $q(x)$  суть ограниченные функции, а  $f(x) \in L_2(a, b)$ , можно доказать, что *при достаточно малых  $h$  система (71) имеет единственное решение, причем*

$$\max_i |u(x_i) - u^h(x_i)| + (q(u - u^h), u - u^h)^{1/2} \leq ch,$$

где  $c = \text{const} > 0$ .

Можно строить приближенное решение также в виде

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^{N-1} a_i Q_i(x),$$

где неизвестные  $\{a_i\}$  определяются из (71). Нетрудно заметить, что в данном случае алгоритм совпадает с методом Бубнова–Галеркина, а значит, справедливы соответствующие результаты о сходимости метода. Однако, используя специфику метода интегральных тождеств, здесь просто устанавливается оценка погрешности вида

$$\max_i |u(x_i) - u^h(x_i)| + \left[ \left( p(x) \frac{d}{dx} (u_l - u^h), \frac{d}{dx} (u_l - u^h) \right) + (q(u - u^h), u - u^h) \right]^{1/2} \leq O(h^2),$$

которая, вообще говоря, не следует из теории метода Бубнова–Галеркина.

**5.4.2. Решение вырождающихся уравнений.** Рассмотрим задачу для уравнения с вырождением

$$-\frac{d}{dx} x^\alpha p(x) \frac{du}{dx} + q(x)u = f(x), \quad x \in (0, 1), \quad u(0) = u(1) = 0. \quad (72)$$

где  $\alpha > 0$ ,  $p(x) \in L_\infty(0, 1)$ ,  $q(x) \in L_\infty(0, 1)$ ,  $f(x) \in L_2(0, 1)$ ,  $0 < p_0 \leq p(x) \leq p_1$ ,  $p_0, p_1$  — постоянные,  $q(x) \geq 0$ .

При построении приближенных решений ограничимся простейшими базисными функциями  $\{\varphi_i\}$  (характеристическими) и случаем  $0 < \alpha < 1$  (слабое вырождение).

Введем функции

$$Q_k(x) = \begin{cases} 1 - \int_x^{x_k} \frac{d\xi}{\xi^\alpha p(\xi)} \left( \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{d\xi}{\xi^\alpha p(\xi)} \right)^{-1}, & x \in (x_{k-1}, x_k), \\ 1 - \int_{x_k}^x \frac{d\xi}{\xi^\alpha p(\xi)} \left( \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{d\xi}{\xi^\alpha p(\xi)} \right)^{-1}, & x \in (x_k, x_{k+1}), \\ 0, & x \notin (x_{k-1}, x_{k+1}), \end{cases}$$

$$k = 1, \dots, N-1,$$

и с помощью известных преобразований получим тождества

$$\begin{aligned} & (u(x_k) - u(x_{k+1})) \left( \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{d\xi}{\xi^\alpha p(\xi)} \right)^{-1} + \\ & + (u(x_k) - u(x_{k-1})) \left( \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{d\xi}{\xi^\alpha p(\xi)} \right)^{-1} + (qu, Q_k) = (f, Q_k). \end{aligned} \quad (73)$$

Пусть, как и в п. 5.4.1, введены характеристические функции  $\varphi_i(x)$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ . Будем искать приближенное решение в виде

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i(x),$$

где принимаем  $a_0 = a_N = 0$ , а остальные постоянные определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned} & (u^h(x_k) - u^h(x_{k+1})) \left( \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{d\xi}{\xi^\alpha p(\xi)} \right)^{-1} + (u^h(x_k) - u^h(x_{k-1})) \left( \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{d\xi}{\xi^\alpha p(\xi)} \right)^{-1} + \\ & + (qu^h, Q_k) = (f, Q_k), \quad k = 1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (74)$$

Эту систему можно представить в матричной форме:

$$\hat{A}a = f,$$

где

$$\hat{A} = (A_{ij}), \quad a = (a_1, \dots, a_{N-1})^T, \quad f = (f_1, \dots, f_{N-1})^T, \quad f_i = (f, Q_i),$$

$$A_{ij} = \begin{cases} - \left( \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d\xi}{\xi^\alpha p(\xi)} \right)^{-1} + (qQ_i, \varphi_{i+1}), & j = i+1, \\ - \left( \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{d\xi}{\xi^\alpha p(\xi)} \right)^{-1} + (qQ_i, \varphi_{i-1}), & j = i-1, \\ \left( \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d\xi}{\xi^\alpha p(\xi)} \right)^{-1} + \left( \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{d\xi}{\xi^\alpha p(\xi)} \right)^{-1} + (qQ_i, \varphi_i), & j = i, \\ 0, & |j-i| > 1. \end{cases}$$

Система (73) однозначно разрешима при достаточно малых  $h$  и справедлива априорная оценка для  $u^h$ :

$$\left( x^\alpha p(x) \frac{du_i^h}{dx}, \frac{du_i^h}{dx} \right) + (qu^h, u^h) \leq \frac{c\|f\|^2}{1 - \varepsilon^2(h)},$$

где

$$\varepsilon^2(h) = O(h) \max_i \frac{x_{i+1/2}^{1-\alpha} - x_{i-1/2}^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \quad x_{-1/2} = x_0 = 0, \quad x_{N+1/2} = x_N = 1,$$

а  $u_i^h(x) \equiv \sum_{i=1}^{N-1} a_i Q_i(x)$  — интерполянт приближенного решения:  $u_i^h(x_k) = u^h(x_k)$ ,  $k = 1, \dots, N-1$ . Оценка погрешности здесь имеет вид

$$\max_i |u(x_i) - u^h(x_i)| + (q(u - u^h), u - u^h)^{1/2} \leq c \frac{\varepsilon(h)\|f\|}{(1-\alpha)^{1/2}(1-\varepsilon(h))}.$$

**З а м е ч а н и е.** Аналогичным образом может быть рассмотрен случай задачи с сильным вырождением, когда  $\alpha \geq 1$  и краевое условие имеет вид  $u(1) = 0$ . Здесь можно ввести сетку  $0 = x_{1/2} < x_1 < x_{3/2} < \dots < x_{N-1/2} < x_N = 1$ . Пусть

$$Q_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in (x_{1/2}, x_1), \\ 1 - \int_{x_1}^x \frac{d\xi}{\xi p(\xi)} \left( \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\xi}{\xi p(\xi)} \right)^{-1}, & x \in (x_1, x_2), \\ 0, & x \notin (x_{1/2}, x_2), \end{cases}$$

а остальные  $Q_i$ ,  $i = 2, \dots, N-1$ , те же, что и раньше. Дальнейший ход построения приближенного решения  $u^h(x) = \sum_{i=1}^{N-1} a_i \varphi_i(x)$ , где  $\varphi_i(x)$  — характеристическая функция интервала  $(x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$  при  $i = 1, \dots, N-1$  остается прежним.

**5.4.3. Метод интегральных тождеств для задачи на собственные значения.** Рассмотрим задачу об отыскании чисел  $\lambda$  и ненулевых функций  $u(x)$  таких, что

$$-\frac{d}{dx}p(x)\frac{du}{dx}+q(x)u=\lambda u, \quad a < x < b, \quad u(a)=u(b)=0, \quad \|u\|_{L_2(a,b)}^2=1, \quad (75)$$

где  $p(x)$ ,  $q(x)$  — положительные ограниченные функции. Для приближенного решения задачи (75) применим метод интегральных тождеств. Для этого введем сетку  $a = x_0 < x_{1/2} < x_1 < \dots < x_{N-1/2} < x_N = b$  и поставим в соответствие каждому узлу  $x_i$  функцию  $Q_i(x)$  вида (65) и функцию  $\varphi_i(x)$  (вообще говоря, отличную от  $Q_i(x)$ ), для которой выполнены условия  $\varphi_i(x_j) < \infty$ ,  $j = 1, \dots, N-1$ . Предположим, что  $\{\varphi_j(x)\}$  есть базис. Спроектируем уравнение из (75) в  $L_2(a, b)$  на функции  $\{Q_j(x)\}$ . В результате приходим к тождествам

$$(u(x_i) - u(x_{i+1})) \left( \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx}{p(x)} \right)^{-1} + (u(x_i) - u(x_{i-1})) \left( \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{p(x)} \right)^{-1} + (qu, Q_i) = \lambda(u, Q_i), \quad i = 1, \dots, N-1. \quad (76)$$

Приближение к собственной функции  $u(x)$ , соответствующей  $\lambda$ , будем искать в виде  $u_h(x) = \sum_{i=1}^{N-1} a_i \varphi_i(x)$ . Поскольку краевые условия  $u(a) = u(b) = 0$  являются главными, предполагается, что базисные функции  $\{\varphi_i(x)\}$ , по которым раскладывается  $u_h(x)$ , удовлетворяют им. Коэффициенты  $\{a_i\}$  определяются из системы

$$(u_h(x_i) - u_h(x_{i+1})) \left( \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx}{p(x)} \right)^{-1} + (u_h(x_i) - u_h(x_{i-1})) \left( \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{p(x)} \right)^{-1} + (qu_h, Q_i) = \lambda^h(u_h, Q_i), \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (77)$$

или, в матричной форме,

$$\hat{L}a = \lambda^h \hat{M}a, \quad (78)$$

где

$$a = (a_1, \dots, a_{N-1})^T, \quad \hat{M} = (M_{ij}), \quad \hat{L} = (L_{ij}), \quad M_{ij} = (\varphi_i, Q_j), \\ L_{ji} = (\varphi_i(x_j) - \varphi_i(x_{j+1})) \left( \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{dx}{p(x)} \right)^{-1} + (\varphi_i(x_j) - \varphi_i(x_{j-1})) \left( \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{dx}{p(x)} \right)^{-1} + (q\varphi_i, Q_j), \quad i, j = 1, \dots, N-1.$$

Отыскивая собственные числа  $\lambda_i^h$ ,  $i = 1, \dots, N-1$ , матричной задачи (78) и соответствующие им собственные векторы  $a_i$  с помощью подходящего численного метода, можно принять  $\lambda_i^h$  в качестве приближений к некоторым точным собственным значениям  $\lambda_k$  задачи (75), а функции  $u_i^h(x) = \sum_{j=1}^{N-1} a_{ij} \varphi_j(x)$ , построенные на основе векторов  $a_i$ , — в качестве приближений к собственным функциям  $u_i(x)$ . Пусть в дальней-

шем для упрощения изучения сходимости  $\lambda_i^h$  к  $\lambda_k$  принимается, что  $\varphi_i(x) = Q_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, N-1$ . В этом случае матрицы  $\hat{L}, \hat{M}$  будут симметричными и положительно определенными. Следовательно, приближенные собственные значения  $\lambda_i^h$  будут вещественными и положительными.

Пусть  $\{u_i^h\}$  — последовательность приближенных собственных функций, соответствующих  $\{\lambda_i^h\}$  и подчиненных условию нормировки  $\|u_i^h\| = 1$ . Тогда при  $h \rightarrow 0$  справедливы оценки вида

$$\lambda_1 \leq \lambda_1^h \leq \lambda_1 + ch^2(q_1 + \lambda_1)^2, \quad \|u_1 - u_1^h\|_{C(a,b)} \leq \frac{ch^2}{\lambda_2 - \lambda_1},$$

где  $c = \text{const} > 0$ ,  $q_1 \equiv \|q\|_{L_\infty(a,b)}$ .

Метод интегральных тождеств нашел широкое применение также при решении уравнений более высоких порядков, систем уравнений, уравнений переноса, эллиптических уравнений, уравнений газовой динамики и ряда других уравнений математической физики.

## Библиографический комментарий

Знакомство со многими понятиями и идеями вычислительной математики можно осуществить по учебникам [79, 81]. Основные численные методы решения широкого круга задач математической физики, возникающих при исследовании физических и технических проблем, изложены в [29], где также даны практические рекомендации по применению каждого рассматриваемого метода. Последовательное изложение численных методов осуществлено в книге [3], в которой, как правило, приводятся теоретическое обоснование этих методов; существенное внимание уделяется проблеме оптимизации алгоритмов. Значительное внимание методам решения обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных и интегральных уравнений уделяется в [40]. Книга [60] содержит изложение численных методов решения задач математической физики, которые в процессе решения сводятся, как правило, к более простым, допускающим реализацию алгоритмов на ЭВМ; рассмотрены многие современные подходы к конструированию численных алгоритмов, специальная глава книги посвящена обзору основных идей и подходов вычислительной математики, приводится обширная библиография, систематизированная по основным разделам вычислительной математики. Монография [65] посвящена различным методам повышения точности решений разностных и вариационно-разностных схем; теоретическое обоснование предлагаемых методов иллюстрируется численными примерами.

Описание многих современных проекционных и вариационных методов дается в [35, 64, 71, 72]. Книга [35] посвящена исследованию приближенных методов операторных уравнений; основное внимание здесь уделяется систематическому построению теории проекционных методов в гильбертовых и банаховых пространствах; изучаются также приближенные методы решения нелинейных операторных уравнений.

# Глава 6

## Методы расщепления

*Ключевые слова:* эволюционные уравнения, задача Коши, разностные схемы, аппроксимация, устойчивость, сходимость, метод прогонки, методы расщепления, уравнение диффузии, уравнение теплопроводности, уравнение Навье–Стокса, уравнения мелкой воды, динамика морских течений, динамика океанических течений.

### Основные понятия и обозначения

*Задача Коши* — задача вида  $\frac{d\varphi}{dt} + A\varphi = f, t \in (0, T), \varphi|_{t=0} = g$ .

$\frac{d\varphi_h}{dt} + A_h\varphi_h = f_h, \varphi_h|_{t=0} = g_h$  — аппроксимация задачи Коши по пространственным переменным.

$\tilde{L}_{h\tau}\tilde{\Phi}_{h\tau} = \tilde{f}_{h\tau}$  — аппроксимация задачи Коши по всем переменным (включая временную переменную  $t \in [0, T]$ ).

$A = \sum_{\alpha=1}^n A_\alpha$  — «расщепление» оператора  $A$  на семейство операторов  $\{A_\alpha\}$  более простой структуры, чем  $A$ .

$\Phi, F, \dots, G$  — гильбертовы пространства, в которых ставится исходная задача.

$\Phi_h, F_h, \dots, G_h$  — конечномерные гильбертовы пространства, которым принадлежат решения разностных схем при  $t \in [0, T]$  (или в точках  $t_j = j\tau, j = 0, 1, 2, \dots$ ),  $\tau$  — шаг сетки по  $t$ .

$\Omega_h$  — сеточная аппроксимация области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ .

$\partial\Omega_h$  — сеточная аппроксимация границы  $\partial\Omega$ .

$\|\cdot\|_X, (\cdot, \cdot)_X$  — норма и скалярное произведение в гильбертовом пространстве  $X$ .

### 1. Введение

Методы расщепления (методы дробных шагов) основаны на идее приближенного сведения исходных эволюционных задач со сложными операторами к решению последовательности задач с операторами более простой структуры, которые могут быть эффективно решены, например, методами конечных разностей, конечных элементов, проекционными методами.

Основа решения сложных задач математической физики методами расщепления была заложена в 50-е и 60-е годы XX века при решении одномерных задач с помощью методов факторизации (В. С. Владимиров, М. В. Келдыш, И. М. Гельфанд, О. В. Локуцкий, В. В. Русанов, С. К. Годунов, А. А. Абрамов, В. Б. Андреев).

В начале 60-х годов Дуглас, Писман, Рэчфорд предложили метод переменных направлений, суть которого состояла в редукции многомерных задач к последовательности одномерных задач с трехдиагональными матрицами, легко обрабатываемыми на ЭВМ методами факторизации. Данный метод оказал существенное влияние на построение теории родственных методов и всего класса методов, которые в настоящее время называют *методами расщепления* (*методы дробных шагов*). Теория методов расщепления и их приложения к решению сложных прикладных задач математической физики содержится в работах Г. И. Марчука, А. А. Самарского, Н. Н. Яненко, Е. Г. Дьяконова, Дж. Дугласа, Дж. Ганна, Г. Стрэнга, Г. Биркгофа, Р. Варги, Д. Янга и многих других исследователей [38, 61, 62, 67, 80, 90, 102].

Класс методов расщепления (методов дробных шагов) широк: методы покомпонентного расщепления, двуциклические методы многокомпонентного расщепления, метод предиктор-корректор, методы переменных направлений и другие.

Методы расщепления широко используются для приближенного решения многих прикладных задач гидродинамики, охраны окружающей среды, метеорологической теории климата, играющих важную роль в современном обществе. Часто эти методы являются единственными, с помощью которых удастся решить эти задачи.

## 2. Сведения из теории эволюционных уравнений и разностных схем

Многие методы расщепления формулируются в применении к нестационарным задачам математической физики, возможно, приближенным, полученным путем применения разностных схем и сведенным к задаче Коши для эволюционных уравнений. Поэтому основные положения теории задачи Коши для данных уравнений полезны при изучении и обосновании многих из методов расщепления. Ниже приводятся некоторые из этих положений, а также даются основные понятия теории разностных схем.

### 2.1. Эволюционные уравнения.

2.1.1. *Задача Коши.* Рассмотрим в банаховом пространстве  $X$  уравнение

$$\frac{d\varphi}{dt} + A\varphi = 0, \quad t \in (0, T) \quad (1)$$

с линейным оператором  $A$ , не зависящим от  $t$  и имеющим всюду плотную в  $X$  область определения  $D(A)$ .

*Решением уравнения* на отрезке  $[0, T]$  называется функция  $\varphi(t)$ , удовлетворяющая условиям:

- 1) значения функции  $\varphi(t)$  принадлежат  $D(A)$  при всех  $t \in [0, T]$ ;
- 2) в каждой точке  $t \in [0, T]$  существует *сильная* производная функ-

ции  $\varphi'(t)$ , т. е.

$$\left\| \varphi'(t) - \frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} \right\|_X \rightarrow 0, \quad \Delta t \rightarrow 0,$$

где  $\|\cdot\| \equiv \|\cdot\|_X$ ;

3) уравнение (1) удовлетворяется при всех  $t \in [0, T]$ .

Очевидно, что решение  $\varphi(t)$  уравнения (1) является непрерывной на  $[0, T]$  функцией, т. е.  $\|\varphi(t) - \varphi(t_0)\| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow t_0 \quad \forall t_0 \in [0, T]$ .

Под *задачей Коши* для уравнения (1) на  $[0, T]$  понимают задачу о нахождении решения уравнения (1) на  $[0, T]$ , удовлетворяющего начальному условию

$$\varphi(0) = \varphi_0 \in D(A). \quad (2)$$

Говорят, что задача Коши *поставлена корректно* на  $[0, T]$ , если: (I) при любом  $\varphi_0 \in D(A)$  существует ее единственное решение и (II) это решение непрерывно зависит от начальных данных в том смысле, что из  $\varphi_n(0) \rightarrow 0$  ( $\varphi_n(0) \in D(A)$ ) для соответствующих решений  $\varphi_n(t)$  следует  $\varphi_n(t) \rightarrow 0$  при каждом  $t \in [0, T]$ .

**З а м е ч а н и е.** В силу постоянства оператора  $A$  из корректности задачи Коши на каком-либо отрезке  $[0, T]$  следует ее корректность на любом отрезке  $[0, T_1]$  ( $T_1 > 0$ ), т. е. корректность на всей полуоси  $[0, \infty)$ .

Введем в рассмотрение оператор  $U(t)$ , ставящий в соответствие элементу  $\varphi_0 \in D(A)$  значение решения  $\varphi(t)$  задачи Коши ( $\varphi(0) = \varphi_0$ ) в момент времени  $t > 0$ .

Если задача Коши корректно поставлена, то оператор  $U(t)$  определен на  $D(A)$ . В силу линейности уравнения (1) и свойства (I) он аддитивен и однороден, а в силу свойства (II) он непрерывен. Так как  $D(A)$  плотно в  $X$ , то оператор  $U(t)$  может быть по непрерывности расширен до линейного ограниченного оператора, определенного на всем пространстве  $X$ , который также обозначается через  $U(t)$ .

Говорят, что семейство линейных ограниченных операторов  $U(t)$ , зависящих от параметра  $t$  ( $0 < t < \infty$ ), называется *полугруппой*, если

$$U(t_1 + t_2) = U(t_1)U(t_2) \quad (0 < t_1, t_2 < \infty). \quad (3)$$

Можно показать, что операторы  $U(t)$ , порожденные корректной задачей (1), (2), образуют полугруппу.

Рассмотрим теперь функцию  $U(t)\varphi_0$  при любом  $\varphi_0 \in X$  и  $t > 0$ . Поскольку  $D(A)$  плотно в  $X$ , то существует последовательность элементов  $\varphi_0^{(n)} \in D(A)$  такая, что  $\varphi_0^{(n)} \rightarrow \varphi_0$ , и, следовательно,  $\varphi_n(t) = U(t)\varphi_0^{(n)} \rightarrow U(t)\varphi_0$  в силу ограниченности оператора  $U(t)$ . Таким образом, функция  $U(t)\varphi_0$  является пределом последовательности решений уравнения (1) на  $(0, \infty)$  и может быть названа *обобщенным решением* этого уравнения.

Если  $U(t)\varphi_0$  есть обобщенное решение, то  $\|U(t)\varphi_0\|$  измерима (как предел последовательности непрерывных функций). Полугрупповое свойство операторов  $U(t)$  позволяет усилить это утверждение.

**Лемма 1.** Если задача Коши для уравнения (1) корректна, то все обобщенные решения этого уравнения непрерывны на  $(0, \infty)$ .

**Теорема 1.** Если задача Коши для уравнения (1) корректна, то ее решение дается формулой

$$\varphi(t) = U(t)\varphi_0 \quad (\varphi_0 \in D(A)), \quad (4)$$

где  $U(t)$  — сильно непрерывная при  $t > 0$  полугруппа операторов.

**Теорема 2.** Если задача Коши для уравнения (1) корректна, то каждое его обобщенное решение растет на бесконечности не быстрее экспоненты, причем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \|U(t)\|}{t} = \omega < \infty, \quad (5)$$

где число  $\omega$  называется типом полугруппы  $U(t)$  и типом задачи Коши (1), (2).

Среди обобщенных решений уравнения (1), не являющихся решениями задачи Коши, могут быть, вообще говоря, дифференцируемые функции. Обозначим через  $D$  совокупность тех элементов  $\varphi_0$ , для которых  $U(t)\varphi_0$ , доопределяемая в нуле как  $\varphi_0$ , дифференцируема (справа) в нуле. На элементах из  $D$  определен линейный оператор

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{U(t)\varphi_0 - \varphi_0}{t} = U'(0)\varphi_0. \quad (6)$$

Оператор  $U'(0)$  называется производящим оператором полугруппы.

**Лемма 2.** Если  $\varphi_0 \in D$ , то обобщенное решение  $U(t)\varphi_0$  имеет непрерывную производную при  $t > 0$ .

**Теорема 3.** Если задача Коши для уравнения (1) корректна, то  $D(A) \subset D$ ,  $U'(0)\varphi_0 = -A\varphi_0$  при  $\varphi_0 \in D(A)$  и оператор  $A$ , порождающий корректную задачу Коши, может быть расширен до производящего оператора  $U'(0)$  сильно непрерывной полугруппы  $U(t)$ .

Важными в теории задачи Коши являются следующие два понятия. Корректно поставленная задача Коши называется *равномерно корректной*, если из  $\varphi_n(0) \rightarrow 0$  следует, что  $\varphi_n(t) \rightarrow 0$  равномерно по  $t$  на каждом конечном промежутке  $[0, T]$ . Полугруппа  $U(t)$  принадлежит классу  $C_0$ , если она сильно непрерывна при  $t > 0$  и удовлетворяет условию  $\lim_{t \rightarrow +0} U(t)\varphi = \varphi$  при любом  $\varphi \in X$ .

**Теорема 4.** Для равномерно корректной задачи Коши при любом  $\varphi \in X$   $\lim_{t \rightarrow +0} U(t)\varphi = \varphi$ , т. е. полугруппа  $U(t)$ , порождаемая равномерно корректной задачей Коши, принадлежит классу  $C_0$ .

**Теорема 5.** Если полугруппа принадлежит классу  $C_0$ , то для нее справедлива оценка

$$\|U(t)\| \leq Me^{\omega t},$$

где  $M = \sup_{0 \leq t \leq 1} \|U(t)\|$ .

Если  $\|U(t)\| \leq 1$  ( $0 \leq t < \infty$ ), то полугруппа называется *сжимающей*.

**Теорема 6.** Если полугруппа принадлежит классу  $C_0$ , то область определения  $D$  производящего оператора  $U'(0)$  всюду плотна в пространстве  $X$ , более того, всюду плотно в  $X$  множество элементов, на которых определены все степени оператора  $U'(0)$ .

**Теорема 7.** Если полугруппа принадлежит классу  $C_0$ , то производящий оператор ее замкнут.

**Теорема 8.** Если задача Коши для уравнения (1) равномерно корректна, то замыкание оператора  $-A$  совпадает с оператором  $U'(0)$ .

**Теорема 9.** Для того чтобы задача (1), (2), где  $A$  есть замкнутый оператор, была равномерно корректной, необходимо и достаточно, чтобы  $-A$  был производящим оператором полугруппы класса  $C_0$ .

Таким образом, если ограничиться рассмотрением уравнений с замкнутыми операторами, то класс уравнений (1), для которых задача Коши равномерно корректна, совпадает с классом уравнений, у которых оператор  $-A$  является производящим для полугруппы класса  $C_0$ .

**2.1.2. Неоднородное эволюционное уравнение.** Рассмотрим задачу Коши для неоднородного уравнения вида

$$\frac{d\varphi}{dt} + A\varphi = f(t), \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad (7)$$

где  $f(t)$  — заданная непрерывная функция со значениями в  $X$  и  $\varphi_0 \in D(A)$ .

**Теорема 10.** Если для уравнения (1) задача Коши равномерно корректна, то формула

$$\varphi(t) = U(t)\varphi(0) + \int_0^t U(t-s)f(s)ds \quad (8)$$

дает решение задачи (7) при  $\varphi \in D(A)$  и функции  $f(t)$ , удовлетворяющей одному из двух условий:

- 1) значения  $f(t) \in D(A)$  и функция  $Af(t)$  непрерывна;
- 2) функция  $f(t)$  непрерывно дифференцируема.

Формула (8) при любом  $\varphi_0 \in X$  и непрерывной функции  $f(t)$  дает непрерывную функцию, которую естественно назвать обобщенным решением задачи Коши (7).

**2.1.3. Эволюционные уравнения с ограниченными операторами.** Рассмотрим важный (в частности, в теории и приложениях методов расщепления) класс задач (1), (2) и (7), когда оператор  $A$  ограничен. В этом случае очевидно, что задача Коши для уравнения (1) равномерно корректна, и полугруппа  $U(t)$  представима в виде

$$U(t) = e^{-tA}, \quad (9)$$

где функция  $e^{JB}$ , определяемая рядом

$$e^{JB} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (tB)^n, \quad (10)$$

обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} e^{(t_1+t_2)B} &= e^{t_1B} e^{t_2B}, \quad \frac{d}{dt}(e^{tB}) = B e^{tB}, \\ e^{(A+B)t} - e^{At} e^{Bt} &= (BA - AB) \frac{t^2}{2} + \dots, \\ e^{(A+B)t} &= e^{At} e^{Bt}, \quad \text{если } AB = BA. \end{aligned} \quad (11)$$

Решение задач (1), (2) и (7) в данном случае соответственно задается формулами

$$\varphi(t) = e^{-tA} \varphi_0. \quad (12)$$

$$\varphi(t) = e^{-tA} \varphi_0 + \int_0^t e^{(-t-s)A} f(s) ds. \quad (13)$$

Отметим одно простое следствие представления (12) и свойств (11). Пусть оператор  $A$  представим в виде суммы двух коммутирующих операторов:  $A = A_1 + A_2$ , где  $A_1 A_2 = A_2 A_1$ . Тогда согласно (12) и последнему свойству из (11) имеем  $\varphi(T) = e^{-TA_2} \tilde{\varphi}$ , где  $\tilde{\varphi} = e^{-TA_1} \varphi_0$ . Таким образом, чтобы найти решение задачи (1), (2) (в которой  $A = A_1 + A_2$ ,  $A_1 A_2 = A_2 A_1$ ) при  $t = T$ , достаточно последовательно решить задачи вида

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{dt} + A_1 \varphi_1 &= 0, \quad t \in [0, T], \quad \varphi_1(0) = \varphi_0, \\ \frac{d\varphi_2}{dt} + A_2 \varphi_2 &= 0, \quad t \in [0, T], \quad \varphi_2(0) = \varphi_1(T) \end{aligned} \quad (14)$$

и принять  $\varphi(T) = \varphi_2(T)$ . Легко заметить, что если  $A_1, A_2$  имеют более простую структуру, чем  $A$ , и нас интересует функция  $\varphi(T)$ , то ее отыскание путем решения двух задач (14) может оказаться предпочтительным по сравнению с нахождением  $\varphi(T)$  путем решения непосредственно задач (1), (2).

В дополнение к свойствам (11) приведем еще две формулы (играющие важную роль в теории методов расщепления).

Пусть ограниченный оператор  $A$  является суммой двух положительно определенных операторов  $A_1$  и  $A_2$ :

$$A = A_1 + A_2, \quad (A, \varphi, \varphi) \geq \gamma_i^2 \|\varphi\|^2, \quad i = 1, 2. \quad (15)$$

Тогда справедлива формула Троттера

$$e^{-tA} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ e^{-\frac{t}{N} A_2} e^{-\frac{t}{N} A_1} \right\}^N \quad (16)$$

и близкая к ней формула Чернова:

$$e^{-tA} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \left( I + \frac{t}{N} A_2 \right)^{-1} \left( I + \frac{t}{N} A_1 \right)^{-1} \right\}^N, \quad (17)$$

где  $I$  — тождественный оператор (который часто обозначают также через  $E$ ).

Формулы (16), (17) позволяют находить решение задачи (1), (2) при  $t = T$ . Действительно, пусть рассматривается задача (1), (2), в которой имеют место соотношения (15). Выбрав  $N$  достаточно большим, получим что функция

$$\varphi^N(T) \equiv \left\{ e^{-\frac{T}{N}A_2} e^{-\frac{T}{N}A_1} \right\}^N \varphi_0$$

будет приближать  $\varphi(T) = e^{-TA} \varphi_0$  (в силу (16)). Отыскание  $\varphi^N(T)$  сводится к решению последовательности задач вида (14).

Если же принять

$$\varphi^N(T) \equiv \left\{ \left( I + \frac{T}{N} A_2 \right)^{-1} \left( I + \frac{T}{N} A_1 \right)^{-1} \right\}^N \varphi_0,$$

то  $\varphi^N(T)$  можно считать приближением к  $\varphi(T)$  согласно (17). Нахождение  $\varphi^N(T)$  в данном случае можно осуществить следующим образом. Разделим интервал  $[0, T]$  на  $N$  интервалов равной длины  $\Delta t = T/N$  и определим рекуррентным образом семейство элементов, которые обозначим  $\varphi^{n+1/2}$ . Эти элементы определяются последовательно для возрастающих значений  $n + i/2$  ( $n = 0, \dots, N-1$ ,  $i = 1, 2$ ). Начиная процесс вычислений с  $\varphi^0 \equiv \varphi_0$  и считая, что к  $(n+1)$ -му шагу  $\varphi^0, \dots, \varphi^n$  известны, элементы  $\varphi^{n+1/2}, \varphi^{n+1}$  определим как решение уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\varphi^{n+1/2} - \varphi^n}{\Delta t} + A_1 \varphi^{n+1/2} &= 0, \\ \frac{\varphi^{n+1} - \varphi^{n+1/2}}{\Delta t} + A_2 \varphi^{n+1} &= 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Поскольку  $\varphi^{n+1/2} = (I + \Delta t A_1)^{-1} \varphi^n$ ,  $\varphi^{n+1} = (I + \Delta t A_2)^{-1} \varphi^{n+1/2}$ , то заключаем, что  $\varphi^N = \varphi^N(T)$ . Таким образом, элемент  $\varphi^N$  приближенно равен в момент  $t = T$  решению  $\varphi(t)$  задачи (1), (2), а отыскание  $\varphi^N$  состоит в последовательном решении задач (18), что можно сделать эффективно и экономично, если каждый из операторов  $A_1, A_2$  имеет простую или «специальную» структуру по сравнению с оператором  $A$  в исходной задаче (1), (2). Следовательно, формулы (16), (17) и алгоритмы их реализации путем решения задачи типа (14) или (18) лежат в основе класса методов расщепления (методов дробных шагов), частными случаями которых являются алгоритмы (14) и (18).

## 2.2. Операторные уравнения в конечномерных пространствах.

2.2.1. Эволюционная система. Пусть  $X \equiv \mathbb{R}^N$  —  $N$ -мерное евклидово пространство векторов  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_N)$  с некоторым скалярным произведением  $(\varphi, \psi)$  и нормой  $\|\varphi\| = (\varphi, \varphi)^{1/2}$ . Отметим, что поскольку в любом конечномерном пространстве все нормы эквивалентны, то норма  $\|\varphi\|$  эквивалентна евклидовой норме  $\|\varphi\|_2 \equiv |\varphi| = \left( \sum_{j=1}^N |\varphi_j|^2 \right)^{1/2}$ .

Рассмотрим задачу Коши (7), где оператор  $A$  есть матрица  $A = \{a_{ij}\}$  размера  $N \times N$  с элементами  $a_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, N$ , не зависящими от  $t$ . Тогда решение задачи (7) существует, единственно и задается формулой (13).

Пусть также матрица  $A$  невырождена, т. е. существует  $A^{-1}$ , а вектор  $f$  не зависит от  $t$ . Тогда, учитывая, что  $A^{-1}e^{-tA} = e^{-tA}A^{-1}$ , из (13) получаем следующее выражение для  $\varphi(t)$ :

$$\varphi(t) = e^{-tA}\varphi_0 + A^{-1}(1 - e^{-tA})f. \quad (19)$$

Предположим, что матрица симметрична:  $a_{ij} = a_{ji}$ ,  $i, j = 1, \dots, N$  (т. е.  $A = A^T$ ), и положительно определена:  $(A\varphi, \varphi) \geq \alpha\|\varphi\|^2 \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}^N$ , где  $\alpha = \text{const} > 0$ . Обозначим через  $\{\varphi^{(k)}\}, \{\lambda_k\}$  собственные векторы и собственные значения  $A$ :  $A\varphi^{(k)} = \lambda_k\varphi^{(k)}$ ,  $k = 1, \dots, N$ . Собственные векторы любой симметричной матрицы могут быть выбраны таким образом, чтобы они образовывали ортонормальную систему в  $\mathbb{R}^N$ . Поэтому будем считать, что

$$(\varphi^{(k)}, \varphi^{(l)}) = \delta_{kl} \equiv \begin{cases} 1 & \text{при } k = l, \\ 0 & \text{при } k \neq l. \end{cases}$$

Обозначим через  $Q$  матрицу, столбцами которой являются собственные векторы матрицы  $A$ . Тогда очевидно, что  $Q^T Q = I$  — единичная матрица, т. е. матрица, внедиагональные элементы которой  $(I)_{kl}$ ,  $k \neq l$ , равны нулю, а элементы главной диагонали равны единице. (Отметим, что часто для единичной матрицы используется также обозначение  $E$ .) Следовательно,  $Q^T = Q^{-1}$ , т. е.  $Q$  является ортогональной матрицей.

Привлекая свойства матрицы  $Q$  и собственных векторов  $\{\varphi^{(l)}\}$ , легко получаем следующее представление для  $A$  и  $e^{-tA}$ :

$$A = Q^T \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_N \end{bmatrix} Q, \quad e^{-tA} = Q^T \begin{bmatrix} e^{-t\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t\lambda_N} \end{bmatrix} Q, \quad (20)$$

а формула (13) принимает вид

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^N \beta_k(t) \varphi^{(k)}, \quad (21)$$

где

$$\beta_k(t) = e^{-\lambda_k t} (\varphi_0, \varphi^{(k)}) + \int_0^t e^{-\lambda_k(t-s)} (f(s), \varphi^{(k)}) ds, \quad (22)$$

$$\varphi_0 = \sum_{k=1}^N (\varphi_0, \varphi^{(k)}) \varphi^{(k)}, \quad f(t) = \sum_{k=1}^N (f(t), \varphi^{(k)}) \varphi^{(k)},$$

т. е. формула (21) есть представление решения системы (7), полученное методом собственных функций (векторов).

Если  $f$  не зависит от  $t$ , то

$$\beta_k(t) = e^{-\lambda_k t} (\varphi_0, \varphi^{(k)}) + \frac{(f, \varphi^{(k)})}{\lambda_k} (1 - e^{-\lambda_k t}), \quad k = 1, \dots, N.$$

Отметим, что все собственные значения любой симметричной положительно определенной матрицы положительны. Поэтому в случае матрицы  $A$  имеем  $\lambda_k \geq \alpha = \text{const} > 0$ ,  $k = 1, \dots, N$ . Учитывая это, из (21), (22) получаем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta_k(t) = \beta_k \equiv \frac{(f, \varphi^{(k)})}{\lambda_k}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \varphi \equiv \sum_{k=1}^N \beta_k \varphi^{(k)}, \quad (23)$$

причем  $\varphi$  есть решение системы линейных алгебраических уравнений

$$A\varphi = f \quad (24)$$

с симметричной положительно определенной матрицей  $A$ .

Для разности  $\varphi(t) - \varphi$  справедлива оценка

$$\|\varphi(t) - \varphi\| \leq \|\varphi_0 - \varphi\| e^{-\omega t}, \quad (25)$$

из которой следует, что независимо от начального условия  $\varphi_0$   $\varphi(t) \rightarrow \varphi$  при  $t \rightarrow \infty$ . Этот факт играет фундаментальную роль для построения приближенных решений систем линейных алгебраических уравнений с симметричными положительно определенными матрицами методом стационарирования и методами расщепления (рассматриваемыми уже как методы решения систем типа (24)).

2.2.2. Метод стационарирования. Пусть требуется найти решение

$$\varphi = A^{-1}f$$

системы (24) с симметричной положительно определенной матрицей  $A$ . Сделать это можно, например, методом исключения неизвестных (метод Гаусса), относящимся к классу прямых методов решения систем типа (24), т. е. таких, которые за конечное число операций (возможно, большое, если  $N$  велико) позволяют найти точное (теоретически) решение  $\varphi = A^{-1}f$ . Однако в практических вычислениях присутствуют различного рода погрешности (в задании  $f$ , ошибки вычислений на компьютере и др.) Поэтому  $\varphi = A^{-1}f$  реально вычисляется приближенно. А тогда естественно возникает предположение о разумности постановки задачи о построении заведомо приближенного решения системы (24) с любой наперед заданной точностью. Решение этой задачи можно осуществить целым классом итерационных алгоритмов, основа многих из которых заключается в методе стационарирования. Изложим идею этого метода применительно к системе (24).

Пусть  $A$  симметрична и положительно определена. На основании (25) заключаем, что при  $t \rightarrow \infty$  решение  $\varphi(t)$  задачи (7) сходится в  $R^N$  к решению задачи (24) т. е.  $\|\varphi(t) - \varphi\| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  (на самом деле это утверждение верно также в более общих случаях: бесконечномерные пространства, нелинейные и неограниченные операторы и др., но эти случаи здесь не рассматриваются). Следовательно, для достаточно большого  $t = T$  и «разумного»  $\varphi_0$  ошибка  $\|\varphi(T) - \varphi\|$  может быть сделана сколь угодно малой (хотя и положительной). Таким образом, если будет найдено решение  $\varphi(t)$  задачи Коши (7) при  $t = T$  — достаточно большое число, то  $\varphi(T)$  может быть принято в качестве приближенного решения системы (24).

Поэтому для построения приближенного решения системы (24) можно:

- 1) рассмотреть эволюционную задачу (7) (с произвольным, но «разумным» начальным элементом  $\varphi_0$ );
- 2) найти решение  $\varphi(t)$  при  $t = T$  — достаточно большое число (отыскание  $\varphi(T)$  можно осуществить также приближенно);
- 3) принять в качестве приближенного к  $\varphi$  элемент  $\varphi(T)$  (или приближение к  $\varphi(T)$ ).

Этапы 1)–3) составляют суть *метода стационарирования* приближенного решения системы типа (24) путем рассмотрения эволюционных систем и построения их решений.

В свою очередь построение  $\varphi(T)$  можно осуществить различными методами. Так, предположим, что  $A = A_1 + A_2$ , где  $A_1, A_2$  — положительно определенные матрицы простой структуры. Если  $A_1 A_2 = A_2 A_1$ , то построение  $\varphi(t)$  сводится к последовательному решению задач (14) с матрицами  $A_1, A_2$  более простыми, чем  $A$ . Другой метод приближенного построения  $\varphi(T)$  задается уравнениями (18). Таким образом, *методы расщепления* (14), (18) *выступают здесь уже как методы решения систем уравнений вида* (24).

### 2.3. Понятия и сведения из теории разностных схем.

2.3.1. *Аппроксимация.* Напомним некоторые понятия теории конечно-разностных методов, используемые в дальнейшем. Рассмотрим стационарную задачу математической физики в операторной форме

$$A\varphi = f \text{ в } \Omega, \quad \Omega \in \mathbb{R}^n, \quad a\varphi = g \text{ на } \partial\Omega, \quad (26)$$

где  $A$  — линейный оператор,  $\varphi \in \Phi, f \in F$ . Здесь  $\Phi, F$  — вещественные пространства, элементы которых определены на  $\Omega \cup \partial\Omega = \bar{\Omega}$  и  $\Omega$  соответственно,  $a$  — линейный оператор граничного условия,  $g \in G$ , где  $G$  — вещественное гильбертово пространство функций, определенных на  $\partial\Omega$ . Для определенности и упрощения обозначений будем здесь считать, что функции из  $\Phi, F, G$  зависят лишь от двух переменных  $x$  и  $y$  (которые можно считать пространственными переменными).

Осуществим построение конечномерного приближения задачи (26), например, конечно-разностным методом. Для этого рассмотрим множество точек  $(x_k, y_l)$ , где  $k, l$  — произвольные целые числа. Множество точек такого вида назовем *сеткой*, а сами точки — *узлами сетки*. Расстояние между узлами сетки будем характеризовать числом  $h$  — *шагом сетки* (естественно, это расстояние можно оценивать и двумя параметрами  $h_x, h_y$  — шагами сетки по  $x$  и  $y$  соответственно). Обозначим через  $\Omega_h$  множество узлов сетки, приближающее (в каком-либо смысле) множество точек области  $\Omega$ , а через  $\partial\Omega_h$  — множество узлов, приближающих границу  $\partial\Omega$ . Функции, областью определения которых является сетка, будем называть *сеточными функциями*. Множество сеточных функций  $\varphi^h$  с областью определения  $\Omega_h$  обозначим  $\Phi_h$ . Каждой функции  $\varphi \in \Phi$  можно поставить в соответствие сеточную функцию  $(\varphi)_h$  по правилу: значение  $(\varphi)_h$  в узле  $(x_k, y_l)$  равно  $\varphi(x_k, y_l)$  (конечно, если имеет смысл значения  $\{\varphi(x_k, y_l)\}$ ). Указанное соответствие является линейным оператором, действующим из  $\Phi$  в  $\Phi_h$ ;

этот оператор называют *проектированием* функции  $\varphi$  на сетку. Функцию  $\psi \equiv A\varphi$  также можно спроектировать на сетку, положив  $(\psi)_h = (A\varphi)_h$ . Соответствие между  $(\varphi)_h$  и  $(A\varphi)_h$  будет линейным оператором, определенным на сеточных функциях.

Рассмотрим задачу в конечномерном пространстве сеточных функций

$$A^h \varphi^h = f^h \text{ в } \Omega_h, \quad a^h \varphi^h = g^h \text{ на } \partial\Omega_h, \quad (27)$$

— конечно-разностный аналог задачи (26). Здесь  $A^h$ ,  $a^h$  — линейные операторы, зависящие от шага сетки  $h$ ,  $\varphi^h \in \Phi_h$ ,  $f^h \in F_h$ ,  $g^h \in G_h$ , а  $\Phi_h$ ,  $F_h$ ,  $G_h$  — пространства вещественных сеточных функций.

Введем в  $\Phi_h, F_h, G_h$  соответственно нормы  $\|\cdot\|_{\Phi_h}, \|\cdot\|_{F_h}, \|\cdot\|_{G_h}$ . Пусть  $(\cdot)_h$  есть обозначение линейного оператора, который элементу  $\varphi \in \Phi$  ставит в соответствие элемент  $(\varphi)_h \in \Phi_h$ , так что  $\lim_{h \rightarrow 0} \|(\varphi)_h\|_{\Phi_h} = \|\varphi\|_{\Phi}$ . Будем говорить, что задача (27) *аппроксимирует* задачу (26) с *порядком*  $n$  на решении  $\varphi$ , если существуют такие положительные постоянные  $\bar{h}$ ,  $M_1$ ,  $M_2$ , что для всех  $h < \bar{h}$  выполняются неравенства

$$\left\| A^h(\varphi)_h - f^h \right\|_{F_h} \leq M_1 h^{n_1}, \quad \left\| a^h(\varphi)_h - g^h \right\|_{G_h} \leq M_2 h^{n_2}$$

и  $n = \min(n_1, n_2)$ .

В дальнейшем будем считать, что редукция задачи (26) к задаче (27) осуществлена. Если граничное условие из (27) использовать для исключения значений решения в граничных точках области  $\Omega_h \cup \partial\Omega_h$ , то приходим к эквивалентной задаче

$$\tilde{A}^h \tilde{\varphi}^h = \tilde{f}^h. \quad (28)$$

При этом значения решения в граничных точках могут быть найдены из уравнения (27) после того, как будет построено решение уравнения (28). В некоторых случаях удобно пользоваться записью аппроксимационной задачи в форме (26), а в некоторых — в форме (27). В теории разностных схем часто используются вещественные гильбертовы пространства сеточных функций с нормами  $\|\varphi^h\|_{\Phi_h} = (\varphi^h, \varphi^h)_{\Phi_h}^{1/2}$ ,  $\|f^h\|_{F_h} = (f_h, f_h)_{F_h}^{1/2}$  и др. Однако отметим, что многие из вводимых понятий (аппроксимация и т. д.) можно перенести на случай банаховых пространств, и в ряде утверждений и иллюстрационных примеров будут введены нормы сеточных функций, которые не связаны со скалярным произведением указанным выше соотношением.

Проиллюстрируем изложенное на примере задачи

$$-\Delta\varphi = f \text{ в } \Omega, \quad \varphi = 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad (29)$$

где  $\Omega = \{(x, y): 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ ,  $f = f(x, y)$  — гладкая функция,  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ . Пусть  $F$  есть гильбертово пространство вещественных

функций  $L_2(\Omega)$  со скалярным произведением  $(u, v) = \int_{\Omega} uv \, dx \, dy$  и нормой  $\|u\| = (u, u)^{1/2}$ . Через  $\Phi$  обозначим множество непрерывных в  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$

функций, обладающих непрерывными в  $\Omega$  первыми и вторыми производными, с той же, что и в  $F$ , нормой  $\|\cdot\|_\Phi = \|\cdot\|$ . В качестве  $G$  выберем гильбертово пространство функций  $L_2(\partial\Omega)$ , определенных на  $\partial\Omega$ , с нормой  $\|g\|_{L_2(\partial\Omega)} = \left(\int_{\partial\Omega} |g|^2 d\Gamma\right)^{1/2}$ . Если ввести операторы  $A\varphi = -\Delta\varphi$ ,

$a\varphi = \varphi|_{\partial\Omega}$ , то задачу (29) можно представить в форме (26) при  $g \equiv 0$ .

Введем конечномерную аппроксимацию задачи (29). Для этого квадрат  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$  покроем равномерной по  $x$  и  $y$  сеткой с шагом  $h$ . Узлы области будем отмечать индексами  $k, l$ , где индекс  $k$  ( $0 \leq k \leq N$ ) соответствует точкам деления по координате  $x$ , а индекс  $l$  ( $0 \leq l \leq N$ ) — по  $y$ . Рассмотрим следующие аппроксимации:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \equiv \varphi_{xx} \cong \Delta_x \nabla_x(\varphi)_h, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \equiv \varphi_{yy} \cong \Delta_y \nabla_y(\varphi)_h,$$

где  $\Delta_x, \Delta_y, \nabla_x, \nabla_y$  — разностные операторы, определенные на сеточных функциях  $\varphi^h$  (с компонентами  $\varphi_{kl}^h$ ) следующим образом:

$$(\Delta_x \varphi^h)_{kl} = \frac{1}{h} (\varphi_{k+1,l}^h - \varphi_{kl}^h), \quad (\nabla_x \varphi^h)_{kl} = \frac{1}{h} (\varphi_{kl}^h - \varphi_{k-1,l}^h),$$

$$(\Delta_y \varphi^h)_{kl} = \frac{1}{h} (\varphi_{k,l+1}^h - \varphi_{kl}^h), \quad (\nabla_y \varphi^h)_{kl} = \frac{1}{h} (\varphi_{kl}^h - \varphi_{k,l-1}^h).$$

Тогда задача (29) может быть аппроксимирована конечно-разностной задачей

$$A^h \varphi^h \equiv -\Delta^h \varphi^h \equiv -[\Delta_x \nabla_x \varphi^h + \Delta_y \nabla_y \varphi^h] = f^h \quad \text{в } \Omega_h, \quad \varphi^h = 0 \quad \text{на } \partial\Omega_h,$$

где  $\partial\Omega_h$  — множество узлов, принадлежащих границе  $\partial\Omega$ , а  $\Omega_h$  — множество внутренних в  $\Omega$  узлов сетки. Здесь

$$A^h = A_x + A_y, \quad A_x = -\Delta_x \nabla_x, \quad A_y = -\Delta_y \nabla_y,$$

т. е.  $A^h$  есть разностный аналог оператора  $-\Delta$ :  $A^h \equiv -\Delta^h$ , а  $\varphi^h$  и  $f^h$  — векторы с компонентами  $\varphi_{kl}^h$  и  $f_{kl}^h$  и

$$(\Delta^h \varphi^h)_{kl} = \frac{1}{h^2} (\varphi_{k+1,l}^h + \varphi_{k-1,l}^h + \varphi_{k,l+1}^h + \varphi_{k,l-1}^h - 4\varphi_{kl}^h),$$

$$f_{kl}^h = \frac{1}{h^2} \int_{x_{k-1/2}}^{x_{k+1/2}} \int_{y_{l-1/2}}^{y_{l+1/2}} f \, dx \, dy, \quad x_{k\pm 1/2} = x_k \pm \frac{h}{2}, \quad y_{l\pm 1/2} = y_l \pm \frac{h}{2}.$$

В приведенных здесь и ниже схемах в качестве  $f_{kl}^h$  берется усреднение функции  $f(x, y)$ , вычисленное по приведенной выше формуле. (Это, вообще говоря, позволяет рассматривать разностные схемы при функции  $f(x, y)$ , не обладающей достаточной гладкостью.)

Введем в рассмотрение пространство  $\Phi_h$ . За область определения сеточных функций из  $\Phi_h$  примем  $\bar{\Omega}_h = \Omega_h \cup \partial\Omega_h = \{(x_k, y_l) : x_k = hk, y_l = hl, 0 \leq k \leq N = 1/h, 0 \leq l \leq N = 1/h\}$ . Скалярное произведение и норму в  $\Phi_h$  определим так:

$$(\varphi^h, \psi^h)_{\Phi_h} = \sum_{k,l=0}^N h^2 \varphi_{kl}^h \psi_{kl}^h, \quad \|\varphi^h\|_{\Phi_h} = \left( \sum_{k,l=0}^N h^2 (\varphi_{kl}^h)^2 \right)^{1/2}.$$

В качестве  $F_h$  выберем пространство сеточных функций, определенных на множестве

$$\Omega_h = \{(x_k, y_l) : x_k = hk, y_l = hl, 1 \leq k \leq N-1, 1 \leq l \leq N-1\},$$

со скалярным произведением и нормой:

$$(\varphi^h, \psi^h)_{F_h} = \sum_{k,l=1}^{N-1} h^2 \varphi_{kl}^h \psi_{kl}^h, \quad \|\varphi^h\|_{F_h} = \left( \sum_{k,l=1}^{N-1} h^2 (\varphi_{kl}^h)^2 \right)^{1/2}.$$

Подобным же образом вводится пространство  $G_h$  сеточных функций, определенных на  $\partial\Omega_h$ .

Примем в качестве  $(\varphi)_h$  вектор, компонентами которого являются значения функции в соответствующем узле сетки. Тогда, используя разложение в ряды Тейлора функций  $\varphi(x, y)$  и  $f(x, y)$ , получим

$$\|-\Delta^h(\varphi)_h - f^h\|_{F_h} \leq M_1 h^2,$$

где  $M_1 = \text{const} < \infty$ . Аппроксимация граничных условий на  $\partial\Omega_h$  в данном примере осуществляется без погрешностей. С учетом последней оценки это означает, что рассмотренная конечно-разностная задача аппроксимирует задачу (29) со вторым порядком на решениях задачи (29), имеющих ограниченные четвертые производные.

Отмечаем, что если потребовать, чтобы сеточные функции из  $\Phi_h$  удовлетворяли условию  $\varphi^h|_{\partial\Omega_h} = 0$ , то в этом случае для таких функций скалярные произведения в  $\Phi_h$  и  $F_h$  (а значит, и порождаемые ими нормы) совпадают. Рассмотрим следующие тождества, аналогичные первой и второй формулам Грина:

$$\begin{aligned} - \sum_{k=1}^{N-1} (\Delta_x \nabla_x \varphi^h)_{kl} \psi_{kl}^h &= \sum_{k=1}^N (\nabla_x \varphi^h)_{kl} (\nabla_x \psi^h)_{kl}, \\ - \sum_{k=1}^{N-1} (\Delta_x \nabla_x \varphi^h)_{kl} \psi_{kl}^h &= - \sum_{k=1}^N (\Delta_x \nabla_x \psi^h)_{kl} \varphi_{kl}^h, \quad \varphi^h, \psi^h \in \Phi_h. \end{aligned}$$

Используя их и аналогичные тождества для сумм по индексу  $l$ , нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} (A^h \varphi^h, \psi^h)_{F_h} &= (\varphi^h, A^h \psi^h)_{F_h}, \\ (A^h \varphi^h, \varphi^h)_{F_h} &= h^2 \sum_{k,l=1}^N [((\nabla_x \varphi^h)_{kl})^2 + ((\nabla_y \varphi^h)_{kl})^2] > 0 \end{aligned}$$

при  $\varphi^h \not\equiv 0$ , т. е. оператор  $A^h$  на функциях из  $\Phi_h$ , удовлетворяющих условию  $\varphi^h|_{\partial\Omega_h} = 0$ , является самосопряженным положительно определенным оператором. Заметим также, что оператор  $A^h$  здесь представим в виде суммы симметричных положительно определенных коммутирующих опе-

раторов  $A_x, A_y$ :  $A^h = A_x + A_y$ ,  $A_x A_y = A_y A_x$ .

Рассмотрим теперь задачу аппроксимации эволюционного уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + A\varphi &= f \quad \text{в } \Omega \times \Omega_t, \quad \Omega_t = (0, T), \\ a\varphi &= g \quad \text{на } \partial\Omega \times \Omega_t, \quad \varphi = \varphi_0 \quad \text{в } \Omega \quad \text{при } t = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Аппроксимацию задачи (30) проведем в два этапа. Сначала аппроксимируем ее в области  $(\Omega_h \cup \partial\Omega_h) \times \Omega_t$  по пространственным переменным. В результате приходим к уравнению, дифференциальному по времени и разностному по пространственным переменным.

В полученной дифференциально-разностной задаче в ряде случаев легко исключить решения в граничных точках области  $(\Omega_h \cup \partial\Omega_h) \times \Omega_t$  с помощью разностных аппроксимаций граничных условий. Предполагая, что это сделано, приходим к эволюционному уравнению вида

$$\frac{d\varphi^h}{dt} + \Lambda\varphi^h = f^h, \quad (31)$$

где  $\Lambda \equiv \tilde{A}^h f^h$  и  $\varphi^h$  — функция времени  $t$ . Уравнение (31) является системой обыкновенных дифференциальных уравнений для компонентов вектора  $\varphi^h$ . Для упрощения обозначений индекс  $h$  в задаче (31) можно опустить, предполагая, что (31) есть разностный аналог по пространственным переменным исходной задачи математической физики.

С учетом изложенного рассмотрим задачу Коши

$$\frac{d\varphi}{dt} + \Lambda\varphi = f, \quad \varphi = g \quad \text{при } t = 0. \quad (32)$$

Предположим, что оператор  $\Lambda$  не зависит от времени. Рассмотрим простейшие методы аппроксимации задачи (32) по времени. Наиболее употребительными разностными схемами в настоящее время являются схемы первого и второго порядка аппроксимации по  $t$ .

Одна из них — *явная схема первого порядка аппроксимации* на сетке  $\Omega_\tau$  (т. е. на совокупности узлов  $\{t_j\}$  по переменной  $t$ ):

$$\frac{\varphi'^{j+1} - \varphi^j}{\tau} + \Lambda\varphi^j = f^j, \quad \varphi^0 = g, \quad (33)$$

где  $\tau = t_{j+1} - t_j$ , а в качестве  $f^j$  здесь можно принять  $f^j = f(t_j)$ .

*Неявная схема первого порядка аппроксимации* имеет вид

$$\frac{\varphi'^{j+1} - \varphi^j}{\tau} + \Lambda\varphi'^{j+1} = f^j, \quad \varphi^0 = g \quad (34)$$

при  $f^j$ , равном  $f(t_{j+1})$ . Схемы (33) и (34) — первого порядка аппроксимации по времени. В этом легко убедиться с помощью разложения по формуле Тейлора по времени, допустив, например, существование ограниченных производных (по времени) второго порядка от решения.

Разрешая схемы (33) и (34) относительно  $\varphi'^{j+1}$ , приходим к рекуррентному соотношению

$$\varphi^{j+1} = T\varphi^j + \tau S f^j, \quad (35)$$

где  $T$  — оператор шага,  $S$  — оператор источника, определяемые следующим образом: для схемы (33)  $T = E - \tau\Lambda$ ,  $S = E$ ; для схемы (34)  $T = (E + \tau\Lambda)^{-1}$ ,  $S = T$ .

Разностные схемы типа (35) для эволюционных уравнений называют *двухслойными*.

Большое применение в приложениях имеет схема второго порядка аппроксимации — *схема Кранка–Николсона*:

$$\frac{\varphi^{j+1} - \varphi^j}{\tau} + \Lambda \frac{\varphi^{j+1} + \varphi^j}{2} = f^j, \quad \varphi^0 = g, \quad (36)$$

где  $f^j = f(t_{j+1/2})$ . Схему (36) также можно представить в форме (35) при

$$T = \left(E + \frac{\tau}{2}\Lambda\right)^{-1} \left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda\right), \quad S = \left(E + \frac{\tau}{2}\Lambda\right)^{-1}.$$

В некоторых случаях разностные уравнения (33), (34) и (36) удобно записывать в форме системы двух уравнений, из которых одно аппроксимирует само уравнение в  $\Omega_{h\tau}$ , а другое — граничное условие на  $\partial\Omega_{h\tau}$ . В этом случае разностный аналог задачи (30) имеет вид

$$L^{h\tau}\varphi^{h\tau} = f^{h\tau} \text{ в } \Omega_{h\tau}, \quad l^{h\tau}\varphi^{h\tau} = g^{h\tau} \text{ на } \partial\Omega_{h\tau}, \quad (37)$$

$$\Omega_{h\tau} = \Omega_h \times \Omega_\tau, \quad \partial\Omega_{h\tau} = \Omega_h \times \{0\} \cup \partial\Omega_h \times \Omega_\tau,$$

где операторы  $L^{h\tau}$ ,  $l^{h\tau}$  и  $f^{h\tau}$ ,  $g^{h\tau}$  удовлетворяют неравенствам

$$\|L^{h\tau}(\varphi)_{h\tau} - f^{h\tau}\|_{F_{h\tau}} \leq M_1 h^n + N_1 \tau^p,$$

$$\|l^{h\tau}(\varphi)_{h\tau} - g^{h\tau}\|_{G_{h\tau}} \leq M_2 h^n + N_2 \tau^p.$$

В этих неравенствах  $(\dots)_{h\tau}$  есть оператор проектирования на соответствующее сеточное пространство.

Разностные уравнения (37) с помощью вектор-функций, определенных на  $\Omega_h \times \Omega_\tau$  (где  $\Omega_\tau$  есть совокупность  $\{t_j\}$ ), и новых операторов можно записать также в виде

$$\tilde{L}^{h\tau}\tilde{\varphi}^{h\tau} = \tilde{f}^{h\tau}. \quad (38)$$

Таким образом, эволюционное уравнение с учетом граничных условий и начальных данных может быть приближенно редуцировано к задаче линейной алгебры (38) в конечномерном пространстве.

**2.3.2. Устойчивость.** Обратимся к еще одному важному понятию теории конечно-разностных методов — *устойчивости*. С этой целью рассмотрим задачу

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + A\varphi = f \text{ в } \Omega \times \Omega_t, \quad \varphi = g \text{ при } t = 0, \quad (39)$$

которая аппроксимируется разностной задачей

$$\varphi^{j+1} = T\varphi^j + \tau S f^j \text{ на } \Omega_h \times \Omega_\tau, \quad \varphi^0 = g. \quad (40)$$

Будем говорить, что разностная схема (40) *устойчива*, если при любом параметре  $h$ , характеризующем разностную аппроксимацию, и  $j \leq T/\tau$  имеет место соотношение

$$\|\Phi'\|_{\Phi_h} \leq C_1 \|g\|_{G_h} + C_2 \|f^{h\tau}\|_{F_{h\tau}}, \quad (41)$$

где константы  $C_1$  и  $C_2$  равномерно ограничены на  $0 \leq t \leq T$  и не зависят от  $\tau, h, g$  и  $f$ ; через  $G_h$  обозначено пространство, которому принадлежит  $g$  в (40).

Определение устойчивости тесно связано с понятием корректности задач с непрерывным аргументом. Можно сказать, что устойчивость устанавливает непрерывную зависимость решения от входных данных в случае задач с дискретным аргументом. Легко видеть, что определение устойчивости в смысле выполнения (41) уже связывает само решение с априорными сведениями о входных данных задачи.

Нетрудно показать, что разностные схемы (34), (36) устойчивы в смысле определения (41), если  $\lambda > 0$  и  $\|\Phi'\|_{\Phi_h} = [\sum_{k,l} |\Phi'_{kl}|^2 h^2]^{1/2}$ . Сделать это можно на основе оценки  $\|(E + \tau\Lambda)^{-1}\| \leq 1$  при  $\Lambda \geq 0, \tau > 0$ , вытекающей из соотношений

$$\begin{aligned} \frac{\|(E + \tau\Lambda)^{-1}\Phi\|_{\Phi_h}^2}{\|\Phi\|_{\Phi_h}^2} &= \frac{\|\Psi\|_{\Phi_h}^2}{\|(E + \tau\Lambda)\Psi\|_{\Phi_h}^2} = \\ &= \frac{\|\Psi\|_{\Phi_h}^2}{\|\Psi\|_{\Phi_h}^2 + \tau((\Lambda + \Lambda^*)\Psi, \Psi)_{\Phi_h} + \tau^2 \|\Lambda\Psi\|_{\Phi_h}^2} \leq 1 \end{aligned}$$

и следующей теоремы, которая полезна при анализе устойчивости многих схем.

**Теорема 11** (теорема Келлога). *Если оператор  $A$ , действующий в вещественном гильбертовом пространстве  $\Phi$ , положительно полуопределен, а числовой параметр  $\sigma$  не отрицателен, то*

$$\|(E - \sigma A)(E + \sigma A)^{-1}\| \leq 1.$$

**Замечание.** При  $A > 0$  и  $\sigma > 0$  в теореме 11 имело бы место неравенство

$$\|(E - \sigma A)(E + \sigma A)^{-1}\| < 1.$$

При рассмотрении схемы (33) несложно установить, что она будет устойчива при дополнительном условии вида  $\|T\| < 1$ , которое, например, выполняется, если  $\Lambda$  — симметричная положительно определенная матрица с собственными числами из интервала  $[\alpha, \beta]$ , а  $\tau$  удовлетворяет соотношениям  $0 < \tau < 2/\beta$ .

При решении разностных аналогов эволюционных задач математической физики приходится иметь дело с аппроксимацией как по времени (с шагом  $\tau$ ), так и по пространству (с характерным шагом  $h$ ). Это значит, что оператор перехода  $T = T(\tau, h)$  зависит как от  $\tau$ , так и от  $h$ .

Проблема конструирования устойчивого алгоритма при заданном способе аппроксимации обычно сводится к установлению связи между  $\tau$  и  $h$ , обеспечивающей устойчивость. Если разностная схема оказывается устойчивой при любых значениях  $\tau$  и  $h$ , то она объявляется *абсолютно устойчивой*. Если же схема оказывается устойчивой только при определенной связи между  $\tau$  и  $h$ , то она называется *условно устойчивой*. (Таким образом, схемы (34), (36) абсолютно устойчивы, а схема (33) условно устойчива.)

**З а м е ч а н и е.** Если аппроксимация эволюционного уравнения исследуется в пространствах сеточных функций, определенных на  $\Omega_h \times \Omega_\tau$ , то и определение устойчивости часто полезно давать в терминах тех же пространств. В самом деле, пусть разностная задача имеет вид

$$L^{h\tau}\varphi^{h\tau} = f^{h\tau} \text{ в } \Omega_h \times \Omega_\tau, \quad l^{h\tau}\varphi^{h\tau} = g^{h\tau} \text{ на } \partial\Omega_h \times \Omega_\tau.$$

Введем критерий устойчивости

$$\|\varphi^{h\tau}\|_{\Phi_{h\tau}} \leq C_1 \|f^{h\tau}\|_{F_{h\tau}} + C_2 \|g^{h\tau}\|_{G_{h\tau}},$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — константы, не зависящие от  $h, \tau, f^{h\tau}, g^{h\tau}$ .

Если же исходная задача математической физики аппроксимируется с помощью разностного уравнения так, что граничные и начальные условия уже учтены при его построении, то критерий устойчивости удобно ввести в следующей форме:

$$\|\varphi^{h\tau}\|_{\Phi_{h\tau}} \leq C \|f^{h\tau}\|_{F_{h\tau}}.$$

**2.3.3. Сходимость.** Сформулируем основной результат конечно-разностных алгоритмов — *теорему сходимости*. Исследование сходимости разностного решения к решению исходной задачи как для стационарных, так и для эволюционных задач математической физики осуществляется на основе одних и тех же принципов. Поэтому сформулируем теорему сходимости при рассмотрении стационарной задачи (26), которая аппроксимируется *разностной схемой* (27) (т. е. системой уравнений, аппроксимирующих как уравнение, так и граничное условие из (26)).

**Теорема 12.** Пусть:

- 1) разностная схема (27) аппроксимирует исходную задачу (26) на решении  $\varphi$  с порядком  $n$ ;
- 2)  $A^h$  и  $a^h$  — линейные операторы;
- 3) разностная схема (27) устойчива в смысле (41), т. е. существуют положительные константы  $\bar{h}$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  такие, что для всех  $h < \bar{h}$ ,  $f^h \in F^h$ ,  $g^h \in G_h$  существует и притом единственное решение  $\varphi^h$  задачи (27), удовлетворяющее неравенству

$$\|\varphi^h\|_{\Phi_h} \leq C_1 \|f^h\|_{F_h} + C_2 \|g^h\|_{G_h}.$$

Тогда решение разностной задачи  $\varphi^h$  сходится к решению  $\varphi$  исходной задачи, т. е.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|(\varphi)_h - \varphi^h\|_{\Phi_h} = 0,$$

причем имеет место следующая оценка скорости сходимости:

$$\left\| (\varphi)_h - \varphi^h \right\|_{\Phi_h} \leq (C_1 M_1 + C_2 M_2) h^n,$$

где  $M_1$  и  $M_2$  — константы из оценок аппроксимации.

Таким образом, используя метод конечных разностей и аппроксимируя исходную эволюционную задачу по всем переменным (кроме переменной  $t$ ), можно свести эту задачу к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\varphi}{dt} + A\varphi = f \quad \text{в } \Omega_t, \quad \varphi = g \quad \text{при } t = 0. \quad (42)$$

К решению этой системы теперь уже можно применить методы расщепления. (Заметим, что именно такой подход последовательной аппроксимации задач часто применяется в практических расчетах.)

**2.3.4. Метод прогонки.** Пусть требуется найти решение следующей системы трехточечных уравнений:

$$\begin{aligned} c_0 y_0 - b_0 y_1 &= f_0, & i = 0, \\ -a_i y_{i-1} + c_i y_i - b_i y_{i+1} &= f_i, & 1 \leq i \leq N-1, \\ -a_N y_{N-1} + c_N y_N &= f_N, & i = N. \end{aligned}$$

Системы такого вида возникают при трехточечной аппроксимации краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, например, методами конечных разностей, а также при реализации разностных схем для уравнений в частных производных. В последнем случае обычно требуется решить не одну, а серию таких задач с различными правыми частями. Поэтому необходимы эффективные методы решения подобных систем. Одним из таких методов является *метод прогонки (метод факторизации)*, который задается следующими формулами.

1) *Прямой ход прогонки* (находятся прогоночные коэффициенты  $\alpha_i$  и  $\beta_i$ ):

$$\begin{aligned} \alpha_{i+1} &= \frac{b_i}{c_i - a_i \alpha_i}, & i = 1, 2, \dots, N-1, & \quad \alpha_1 = \frac{b_0}{c_0}, \\ \beta_{i+1} &= \frac{f_i + a_i \beta_i}{c_i - a_i \alpha_i}, & i = 1, 2, \dots, N, & \quad \beta_1 = \frac{f_0}{c_0}. \end{aligned}$$

2) *Обратный ход* (находятся значения  $y_i$ ):

$$y_i = \alpha_i y_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = N-1, N-2, \dots, s, 0, \quad y_N = \beta_{N+1}.$$

Условия корректности и устойчивости данного метода формулируются так: пусть коэффициенты системы трехточечных уравнений действительны и удовлетворяют условиям  $|b_0| \geq 0$ ,  $|a_N| \geq 0$ ,  $|c_0| > 0$ ,  $|c_N| > 0$ ,  $|a_i| > 0$ ,  $|b_i| > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, N-1$ , а также  $|c_i| \geq |a_i| + |b_i|$ ,  $i = 1, 2, \dots, N-1$ ,  $|c_0| \geq |b_0|$ ,  $|c_N| \geq |a_N|$ , причем хотя бы в одном из последних соотношений выполняется строгое неравенство. Тогда для метода прогонки имеют место неравенства  $c_i - a_i \alpha_i \neq 0$ ,  $|\alpha_i| \leq 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , гарантирующие корректность и устойчивость метода.

При решении систем разностных уравнений используются другие типы метода прогонки (*метод встречной прогонки, потоковый вариант метода прогонки, метод циклической прогонки, метод матричной прогонки* и др.).

### 3. Методы расщепления

Далее будут рассмотрены алгоритмы, широко используемые в настоящее время при решении сложных многомерных задач математической физики. Чтобы сосредоточить основное внимание на их формулировках, в качестве основного объекта исследования рассматривается эволюционная задача математической физики

$$\frac{d\varphi}{dt} + A\varphi = f \quad \text{в } \Omega \times \Omega_t, \quad \varphi = g \quad \text{в } \Omega \quad \text{при } t = 0$$

с положительно полуопределенным оператором  $A \geq 0$  (т. е.  $(A\varphi, \varphi) \geq 0$ ). При этом предполагается, что уже осуществлена аппроксимация исходной задачи по всем переменным (за исключением  $t$ ),  $\Omega$  есть сеточная область,  $A$  — матрица,  $\varphi, f, g$  — сеточные функции. Индекс параметра сетки  $h$  для простоты опущен. Решение задачи на  $\partial\Omega$  удовлетворяет заданным граничным условиям, и с учетом этого построены  $A, f$ . Пусть также пространства сеточных функций  $\Phi$  и  $F$  совпадают и, если не оговорено особо, имеют одну и ту же норму

$$\|\varphi\|_{\Phi} = (\varphi, \varphi)_{\Phi}^{1/2}.$$

Рассматриваемую задачу можно также записать в виде

$$\frac{d\varphi}{dt} + A\varphi = f \quad \text{в } \Omega_t, \quad \varphi = g \quad \text{при } t = 0, \quad (43)$$

подразумевая при этом, что первое уравнение рассматривается в  $\Omega \times \Omega_t$ , а второе — в  $\Omega \times \{0\}$ . Условимся в дальнейшем использовать в основном последнюю запись задачи.

Заметим, что при желании приведенные выше уравнения можно рассматривать как уравнения исходной задачи без какой-либо предварительной их аппроксимации и относить формулируемые ниже алгоритмы непосредственно к этой задаче. Однако изложение данных алгоритмов зачастую следует считать формальным, и их теоретическое обоснование в этом случае значительно сложнее.

#### 3.1. Методы покомпонентного расщепления (методы дробных шагов).

3.1.1. *Метод расщепления, основанный на неявных схемах первого порядка точности.* Рассмотрим задачу (43), где

$$A = \sum_{\alpha=1}^n A_{\alpha}, \quad A_{\alpha} \geq 0, \quad \alpha = 1, \dots, N$$

(т. е.  $\{A_{\alpha}\}$  — положительно полуопределенные операторы). Пусть операторы  $A_{\alpha}$  не зависят от времени. Алгоритм расщепления, основанный на



откуда на основе теоремы 11 имеем  $\|\Phi^{j+1}\| \leq \|\Phi^j\| \leq \dots \leq \|g\|$ . Если операторы  $\Lambda_\alpha^j$  *кососимметричные*, т.е.  $(\Lambda_\alpha^j \varphi, \varphi) = 0$ , то  $\|\Phi^{j+1}\| = \|\Phi^j\| = \dots = \|g\|$ . Таким образом, схема (45) абсолютно устойчива.

Для того чтобы определить порядок аппроксимации, разложим по степеням малого параметра  $\tau$  выражение (полагая  $(\tau/2)\|\Lambda_\alpha\| < 1$ )

$$T^j = \prod_{\alpha=1}^n \left( E + \frac{\tau}{2} \Lambda_\alpha^j \right)^{-1} \left( E - \frac{\tau}{2} \Lambda_\alpha^j \right).$$

Поскольку  $T^j = \prod_{\alpha=1}^n T_\alpha^j$ , то сначала разложим в ряд операторы  $T_\alpha^j$ :

$$T_\alpha^j = E - \tau \Lambda_\alpha^j + \left( \frac{\tau^2}{2} \right) (\Lambda_\alpha^j)^2 + \dots$$

В результате имеем

$$T^j = E - \tau \Lambda^j + \frac{\tau^2}{2} \left[ (\Lambda^j)^2 + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=\alpha+1}^n (\Lambda_\alpha^j \Lambda_\beta^j - \Lambda_\beta^j \Lambda_\alpha^j) \right] + O(\tau^3).$$

В случае когда операторы  $\Lambda_\alpha^j$  коммутативны, выражение, стоящее под знаком двойной суммы, обращается в нуль. Тогда

$$T^j = E - \tau \Lambda^j + \frac{\tau^2}{2} (\Lambda^j)^2 + O(\tau^3).$$

Сравнивая это разложение с разложением оператора

$$T^j = \left( E + \left( \frac{\tau}{2} \right) \Lambda^j \right)^{-1} \left( E - \left( \frac{\tau}{2} \right) \Lambda^j \right)$$

в ряд по степеням  $\tau \Lambda^j$ , где  $\Lambda^j$  определяются с помощью одного из следующих соотношений:  $\Lambda^j = A(t_j) + (\tau/2)A(t_j)$ ;  $\Lambda^j = A((t_j + t_{j+1})/2)$ ;  $\Lambda^j = (1/2)(A(t_{j+1}) + A(t_j))$ , убеждаемся, что схема (45) имеет второй порядок аппроксимации по  $\tau$ . Если операторы  $\Lambda_\alpha^j$  некоммутируют, то схема расщепления имеет только первый порядок точности по  $\tau$ .

### 3.2. Методы двуциклического многокомпонентного расщепления.

#### 3.2.1. Метод двуциклического многокомпонентного расщепления.

Рассмотрим задачу (43), где

$$A(t) = \sum_{\alpha=1}^n A_\alpha(t), \quad A_\alpha(t) \geq 0.$$

Будем аппроксимировать  $A_\alpha(t)$  не на  $t_j \leq t \leq t_{j+1}$ , а на большем интервале  $t_{j-1} \leq t \leq t_{j+1}$ . Положим  $\Lambda_\alpha^j = A_\alpha(t_j)$ , при этом требование коммутативности операторов  $\{\Lambda_\alpha\}$  отсутствует.

Другими примерами выбора  $\Lambda_\alpha^j$  являются следующие аппроксимации:

$$\Lambda_\alpha^j = A_\alpha(t_j) + \frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial t} A_\alpha(t_j), \quad \Lambda_\alpha^j = \frac{1}{2} (A_\alpha(t_{j+1}) + A_\alpha(t_j)),$$

обладающие вторым порядком аппроксимации.

Для задачи (43) на интервале  $t_{j-1} \leq t \leq t_{j+1}$  схема двуциклического многокомпонентного расщепления имеет вид

$$\begin{aligned}
 \left(E + \frac{\tau}{2} \Lambda_1^j\right) \varphi^{j-(n-1)/n} &= \left(E - \frac{\tau}{2} \Lambda_1^j\right) \varphi^{j-1}, \\
 &\dots\dots\dots \\
 \left(E + \frac{\tau}{2} \Lambda_n^j\right) (\varphi^j - \tau f^j) &= \left(E - \frac{\tau}{2} \Lambda_n^j\right) \varphi^{j-1/n}, \\
 \left(E + \frac{\tau}{2} \Lambda_n^j\right) \varphi^{j+1/n} &= \left(E - \frac{\tau}{2} \Lambda_n^j\right) (\varphi^j + \tau f^j), \\
 &\dots\dots\dots \\
 \left(E + \frac{\tau}{2} \Lambda_1^j\right) \varphi^{j+1} &= \left(E - \frac{\tau}{2} \Lambda_1^j\right) \varphi^{j+(n-1)/n},
 \end{aligned} \tag{46}$$

где

$$\Lambda_\alpha^j = A_\alpha(t_j).$$

Эта схема в предположении необходимой гладкости имеет второй порядок аппроксимации по  $\tau$  и абсолютно устойчива.

Многокомпонентную систему уравнений (46) можно записать в эквивалентной форме:

$$\begin{aligned}
 \left(E + \frac{\tau}{2} \Lambda_\alpha\right) \varphi^{j-(n+1-\alpha)/(n+1)} &= \left(E - \frac{\tau}{2} \Lambda_\alpha\right) \varphi^{j-(n+1-\alpha+1)/(n+1)}, \\
 \alpha &= 1, 2, \dots, n, \\
 \varphi^{j+1/(n+1)} &= \varphi^{j-1/(n+1)} + 2\tau f^j, \\
 \left(E + \frac{\tau}{2} \Lambda_{n-\alpha+2}\right) \varphi^{j+\alpha/(n+1)} &= \left(E - \frac{\tau}{2} \Lambda_{n-\alpha+2}\right) \varphi^{j+(\alpha-1)/(n+1)}, \\
 \alpha &= 2, 3, \dots, n+1,
 \end{aligned}$$

которая может оказаться предпочтительней, чем форма (46).

**3.2.2. Метод двуциклического покомпонентного расщепления для квазилинейных задач.** Рассмотрим эволюционную задачу с оператором  $A$ , зависящим от времени и от решения задачи,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \varphi}{\partial t} + A(t, \varphi) \varphi &= 0 \quad \text{в } \Omega \times \Omega_t, \\
 \varphi &= g \quad \text{в } \Omega \quad \text{при } t = 0.
 \end{aligned}$$

Относительно оператора  $A(t, \varphi)$  предположим, что он неотрицателен, имеет вид

$$A(t, \varphi) = \sum_{\alpha=1}^n A_\alpha(t, \varphi), \quad A_\alpha(t, \varphi) \geq 0,$$

и обладает достаточной гладкостью. Предположим, далее, что решение  $\varphi$  также является достаточно гладкой функцией времени. Рассмотрим на интервале  $t_{j-1} \leq t \leq t_{j+1}$  схему расщепления

$$\begin{aligned}
& \frac{\varphi^{j+1/n-1} - \varphi^{j-1}}{\tau} + A'_1 \frac{\varphi^{j+1/n-1} + \varphi^{j-1}}{2} = 0, \\
& \dots\dots\dots \\
& \frac{\varphi^j - \varphi^{j-1/n}}{\tau} + A'_n \frac{\varphi^j + \varphi^{j-1/n}}{2} = 0, \\
& \frac{\varphi^{j+1/n} - \varphi^j}{\tau} + A'_n \frac{\varphi^{j+1/n} + \varphi^j}{2} = 0, \\
& \dots\dots\dots \\
& \frac{\varphi^{j+1} - \varphi^{j+(n-1)/n}}{\tau} + A'_1 \frac{\varphi^{j+1} + \varphi^{j+(n-1)/n}}{2} = 0,
\end{aligned} \tag{47}$$

где

$$A^j = A(t_j, \tilde{\varphi}^j), \quad \tilde{\varphi}^j = \varphi^{j-1} - \tau A(t_{j+1}, \varphi^{j-1}) \varphi^{j-1}, \quad \tau = t_j - t_{j-1}.$$

Методами, изложенными выше для линейных операторов, зависящих только от времени, можно доказать, что схема расщепления (47) имеет второй порядок аппроксимации по  $\tau$  и абсолютно устойчива. Аналогично определяется метод расщепления для неоднородных квазилинейных уравнений.

**3.3. Методы расщепления с факторизацией операторов.** Идея данного класса методов состоит в следующем. Предположим, что для решения задачи (43) используется разностная схема по времени, которая записана в виде

$$B\varphi^j = F^j, \quad j = 1, 2, \dots,$$

где

$$F^j = F^j(\varphi^{j-1}, \varphi^{j-2}, \dots; \tau)$$

— известная функция от  $\tau, \varphi^{j-1}, \varphi^{j-2}, \dots$  (в случае двухслойной схемы  $F^j = F^j(\tau, \varphi^{j-1})$ ), а  $B$  — некоторый оператор, построенный таким образом, что допускает (факторизованное) представление

$$B = B_1 B_2 \dots B_p.$$

Причем здесь операторы  $B_\alpha$  являются операторами более простой, чем оператор  $B$ , структуры и могут быть эффективно обращены. Разностные схемы, допускающие такое представление  $B$ , называют *факторизованными схемами* или *схемами факторизации* разностного оператора.

Численная реализация решения уравнения  $B\varphi^j = F^j$  на каждом временном слое может быть проведена путем последовательного решения более простых уравнений

$$B_1 \varphi^{j+1/p} = F^j, \quad B_2 \varphi^{j+2/p} = \varphi^{j+1/p}, \quad B_p \varphi^{j+1} = \varphi^{j+(p-1)/p}.$$

Если, например,  $p = 2$ , а  $B_1, B_2$  — треугольные матрицы, то эти уравнения представляют собой известную схему явного (бегущего) счета.

3.3.1. *Неявная схема расщепления с приближенной факторизацией оператора.* Пусть для задачи (43) с оператором  $A \geq 0$  и  $f = 0$  рассматривается неявная схема вида

$$\frac{\varphi^{j+1} - \varphi^j}{\tau} + \Lambda \varphi^{j+1} = 0, \quad j = 0, 1, \dots; \quad \varphi^0 = g,$$

где  $\Lambda = \sum_{\alpha=1}^n \Lambda_\alpha$ ,  $\Lambda_\alpha \geq 0$ , которую запишем в форме  $(E + \tau\Lambda)\varphi^{j+1} = \varphi^j$ . Факторизуем оператор  $(E + \tau\Lambda)$  приближенно с точностью до членов порядка  $O(\tau^2)$ . Для этого заменим оператор  $(E + \tau\Lambda)$  на факторизованный

$$(E + \tau\Lambda_1)(E + \tau\Lambda_2) \dots (E + \tau\Lambda_n) = E + \tau\Lambda + \tau^2 R,$$

где

$$R = \sum_{i < j} \Lambda_i \Lambda_j + \tau \sum_{i < j < k} \Lambda_i \Lambda_j \Lambda_k + \dots + \tau^{n-2} \Lambda_1 \dots \Lambda_n.$$

В результате приходим к неявной схеме с приближенной факторизацией оператора

$$B\varphi^{j+1} = \varphi^j, \quad j = 0, 1, \dots; \quad \varphi^0 = g,$$

где  $B = \prod_{\alpha=1}^n B_\alpha$ ,  $B_\alpha = E + \tau\Lambda_\alpha$ .

Решение этих уравнений можно осуществить путем последовательного решения уравнений

$$\begin{aligned} (E + \tau\Lambda_1)\varphi^{j+1/n} &= \varphi^j, \\ (E + \tau\Lambda_2)\varphi^{j+2/n} &= \varphi^{j+1/n}, \\ &\dots\dots\dots \\ (E + \tau\Lambda_n)\varphi^{j+1} &= \varphi^{j+(n-1)/n}, \\ j &= 0, 1, \dots; \\ \varphi^0 &= g. \end{aligned} \tag{48}$$

Если операторы  $\Lambda_\alpha$  в представлении  $\Lambda = \sum_{\alpha=1}^n \Lambda_\alpha$  имеют простую структуру и допускают экономичное обращение, то достаточно просто решить и систему (48).

Схема (48) обладает первым порядком аппроксимации по  $\tau$ . Она абсолютно устойчива при  $\Lambda_\alpha \geq 0$  в метрике пространства сеточных функций  $\Phi_h$ , поскольку в этом случае  $\|(E + \tau\Lambda_\alpha)^{-1}\|_{\Phi_h} \leq 1$ .

3.3.2. *Метод стабилизации (явно-неявные схемы с приближенной факторизацией оператора).* Рассмотрим однородную задачу (43), где  $A = A_1 + A_2$ ,  $A_\alpha \geq 0$ ,  $f \equiv 0$ , и следующую двухслойную схему:

$$\left(E + \frac{\tau}{2} A_1\right) \left(E + \frac{\tau}{2} A_2\right) \frac{\varphi^{j+1} - \varphi^j}{\tau} + A\varphi^j = 0, \quad j = 0, 1, \dots; \quad \varphi^0 = g. \tag{49}$$

Если  $A_1 \geq 0$ ,  $A_2 \geq 0$ , то при достаточной гладкости решения задачи (43) эта схема имеет второй порядок аппроксимации по  $\tau$  и абсолютно устойчива,

причем справедлива оценка

$$\|\varphi^{j+1}\|_{C_2} \leq \|g\|_{C_2}, \quad j = 0, 1, \dots,$$

где

$$\|\Psi\|_{C_2} = (C_2 \Psi, \Psi)_{\Phi}^{1/2}, \quad C_2 = \left(E + \frac{\tau}{2} A_2^*\right) \left(E + \frac{\tau}{2} A_2\right).$$

Разностная схема (49) допускает удобную реализацию на ЭВМ:

$$\begin{aligned} F^j &= A\varphi^j, \quad \left(E + \frac{\tau}{2} A_1\right) \xi^{j+1/2} = -F^j, \\ \left(E + \frac{\tau}{2} A_2\right) \xi^{j+1} &= \xi^{j+1/2}, \quad \varphi^{j+1} = \varphi^j + \tau \xi^{j+1}. \end{aligned}$$

Здесь  $\xi^{j+1/2}$  и  $\xi^{j+1}$  — некоторые вспомогательные векторы, обеспечивающие редукцию задачи (49) к последовательности простейших задач, первое и последнее уравнения из которых являются явными соотношениями. Это значит, что обращаться операторы нужно во втором и третьем уравнениях, в которых присутствуют только простейшие операторы  $A_1$  и  $A_2$ .

Рассмотрим неоднородную задачу (43), где  $A = A_1 + A_2$ ,  $A_1 \geq 0$ ,  $A_2 \geq 0$ ,  $f \neq 0$ . Схема метода стабилизации запишется следующим образом:

$$\left(E + \frac{\tau}{2} A_1\right) \left(E + \frac{\tau}{2} A_2\right) \frac{\varphi^{j+1} - \varphi^j}{\tau} + A\varphi^j = f^j, \quad \varphi^0 = g,$$

где  $f^j = f(t_{j+1/2})$ . Если элементы матриц  $A_\alpha$  не зависят от времени, то при достаточной гладкости решения и функции  $f$  задачи (43) данная схема абсолютно устойчива и аппроксимирует исходную задачу со вторым порядком точности по  $\tau$ .

**Замечание.** Схема метода стабилизации может быть получена путем введения в схему Кранка–Николсон (т. е. в явно-неявную схему) оператора

$$B = E + \left(\frac{\tau^2}{4}\right) A_1 A_2,$$

после чего оператор задачи становится факторизуемым. Поэтому схему стабилизации можно назвать также *явно-неявной схемой с приближенной факторизацией оператора*.

Сформулируем схему стабилизации для неоднородной задачи (43), в которой

$$A = \sum_{\alpha=1}^n A_\alpha, \quad n > 2, \quad A_\alpha \geq 0,$$

и операторы  $A_\alpha$  не зависят от  $t$ . В этих предположениях метод стабилизации может быть представлен в виде

$$\prod_{\alpha=1}^n \left(E + \frac{\tau}{2} A_\alpha\right) \frac{\varphi^{j+1} - \varphi^j}{\tau} + A\varphi^j = f^j, \quad \varphi^0 = g, \quad (50)$$

где  $f^j = f(t_{j+1/2})$ . Схема реализации алгоритма имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
F^j &= -A\varphi^j + f^j, \\
\left(E + \frac{\tau}{2}A_1\right)\xi^{j+1/n} &= F^j, \\
\left(E + \frac{\tau}{2}A_2\right)\xi^{j+2/n} &= \xi^{j+1/n}, \\
&\dots\dots\dots \\
\left(E + \frac{\tau}{2}A_n\right)\xi^{j+1} &= \xi^{j+(n-1)/n}, \\
\varphi^{j+1} &= \varphi^j + \tau\xi^{j+1}.
\end{aligned}$$

При достаточной гладкости метод стабилизации (43) имеет второй порядок аппроксимации по  $\tau$ . Счетная устойчивость будет обеспечена при выполнении условия:  $\|T\| \leq 1$ , где  $T$  — оператор шага, определяемый формулой

$$T = E - \tau \prod_{\alpha=n}^1 \left(E + \frac{\tau}{2}A_\alpha\right)^{-1} A.$$

Заметим, что здесь из условия  $A_\alpha \geq 0$  не следует устойчивость в какой-нибудь норме, как это имело место в случае  $n = 2$ . Поэтому условие  $\|T\| \leq 1$  здесь рассматривается как дополнительное условие для обеспечения устойчивости схемы (50).

**З а м е ч а н и е.** Н. Н. Яненко получены также схемы приближенной факторизации, возникающие из многослойных схем

$$A_1\varphi'^{+1} + A_0\varphi' + A_{-1}\varphi'^{-1} + \dots + A_{-p+1}\varphi'^{-p+1} + f^j = 0,$$

которые могут возникать при аппроксимациях уравнений вида

$$B_1 \frac{\partial \varphi}{\partial t} + B_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \dots + B_p \frac{\partial^p \varphi}{\partial t^p} + A\varphi = f,$$

где  $B_1, B_2, \dots, B_p$  — линейные операторы.

**3.4. Метод предиктор–корректор.** Еще один класс методов расщепления — метод предиктор–корректор (схема аппроксимационной поправки), так же, как и схема с факторизацией оператора, будет рассматриваться в применении к матричным эволюционным уравнениям (43) с оператором, не зависящим от  $t$ .

**3.4.1. Метод предиктор–корректор. Случай  $A = A_1 + A_2$ .** Идея метода предиктор–корректор состоит в следующем. Весь интервал  $0 \leq t \leq T$  разбивается на частичные промежутки и в пределах каждого из элементарных промежутков  $t_j \leq t \leq t_{j+1}$  задача (43) решается в два приема. Сначала по схеме первого порядка точности и с довольно значительным «запасом» устойчивости находится приближенное решение задачи в момент времени  $t_{j+1/2} = t_j + \tau/2$  — этот этап обычно называется *предиктором*. После этого на всем интервале  $(t_j, t_{j+1})$  расписывается исходное уравнение со вторым порядком аппроксимации, которое служит *корректором*.

Для неоднородной задачи метод предиктор–корректор имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{\varphi^{j+1/4} - \varphi^j}{\tau/2} + A_1 \varphi^{j+1/4} &= f^j, \\ \frac{\varphi^{j+1/2} - \varphi^{j+1/4}}{\tau/2} + A_2 \varphi^{j+1/2} &= 0, \\ \frac{\varphi^{j+1} - \varphi^j}{\tau} + A \varphi^{j+1/2} &= f^j,\end{aligned}\tag{51}$$

где  $f^j = f(t_{j+1/2})$ . При таком выборе  $f^j$  эта схема аппроксимирует исходную задачу со вторым порядком по  $\tau$  и справедлива оценка

$$\left\| \varphi^j + \frac{\tau}{2} f^j \right\|_{C_1^{-1}} \leq \left\| g + \frac{\tau}{2} f^0 \right\|_{C_1^{-1}} + \tau j \|f\|_{C_1^{-1}},$$

где

$$\begin{aligned}\|f\|_{C_1^{-1}} &= \max \|f^j\|_{C_1^{-1}}, \quad C_1^{-1} = \left(E + \frac{\tau}{2} A_1^*\right)^{-1} \left(E + \frac{\tau}{2} A_1\right)^{-1}, \\ \|\varphi\|_{C_1^{-1}} &= (C_1^{-1} \varphi, \varphi)_{\Phi}^{1/2},\end{aligned}$$

т.е. при  $0 \leq t_j \leq T$  снова имеем устойчивость разностной схемы. Таким образом, если  $A_1 \geq 0$ ,  $A_2 \geq 0$  и элементы матриц  $A_1, A_2$  не зависят от времени, то при достаточной гладкости решения и правой части  $f$  задачи (43) разностная схема (51) абсолютно устойчива и позволяет получать решения второго порядка точности по  $\tau$ .

**3.4.2. Метод предиктор–корректор. Случай**  $A = \sum_{\alpha=1}^n A_{\alpha}$ . Пусть в (43)  $A = \sum_{\alpha=1}^n A_{\alpha}$ ,  $A_{\alpha} \geq 0$ ,  $n > 2$ . Схема метода предиктор–корректор в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned}\left(E + \frac{\tau}{2} A_1\right) \varphi^{j+1/(2n)} &= \varphi^j + \frac{\tau}{2} f^j, \\ \left(E + \frac{\tau}{2} A_2\right) \varphi^{j+2/(2n)} &= \varphi^{j+1/(2n)}, \\ &\dots\dots\dots \\ \left(E + \frac{\tau}{2} A_n\right) \varphi^{j+1/2} &= \varphi^{j+(n-1)/(2n)}, \\ \frac{\varphi^{j+1} - \varphi^j}{\tau} + A \varphi^{j+1/2} &= f^j,\end{aligned}\tag{52}$$

где снова предполагается, что  $A_{\alpha} \geq 0$  и  $f^j = f(t_{j+1/2})$ . Система уравнений (52) сводится к одному уравнению вида

$$\frac{\varphi^{j+1} - \varphi^j}{\tau} + A \prod_{\alpha=n}^1 \left(E + \frac{\tau}{2} A_{\alpha}\right)^{-1} \left(\varphi^j + \frac{\tau}{2} f^j\right) = f^j, \quad \varphi^0 = g.$$

Отсюда заключаем, что метод предиктор–корректор при достаточной гладкости решения имеет второй порядок аппроксимации по  $\tau$ .

Последнее уравнение можно записать в виде

$$\Phi^{j+1} = T\Phi^j + \frac{\tau}{2}(E + T)f^j,$$

где  $T$  — оператор шага:

$$T = E - \tau A \prod_{\alpha=n}^1 \Phi^{j+1} \left( E + \frac{\tau}{2} A_{\alpha} \right)^{-1}.$$

Требование счетной устойчивости в конечном итоге сводится к оценке нормы оператора  $T$ . К сожалению, и в этом случае конструктивное условие  $A_{\alpha} \geq 0$  не позволяет доказать устойчивость схемы. В случае, когда операторы  $A_{\alpha}$  коммутируют друг с другом и имеют общий базис, из условия  $A_{\alpha} \geq 0$  следует устойчивость рассмотренных схем.

### 3.5. Метод переменных направлений и метод стабилизирующей поправки.

3.5.1. *Метод переменных направлений.* Рассмотрим матричную однородную эволюционную задачу (43) (т. е. при  $f = 0$ ), где  $A = A_1 + A_2$ . Схема метода переменных направлений для данной задачи имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\Phi^{j+1/2} - \Phi^j}{\tau} + \frac{1}{2}(A_1\Phi^{j+1/2} + A_2\Phi^j) &= 0, \\ \frac{\Phi^{j+1} - \Phi^{j+1/2}}{\tau} + \frac{1}{2}(A_1\Phi^{j+1/2} + A_2\Phi^{j+1}) &= 0, \\ j = 0, 1, 2, \dots, \quad \Phi^0 &= g. \end{aligned} \quad (53)$$

В такой форме она была предложена Писманом, Рэчфордом и Дугласом в применении к параболической задаче с двумя пространственными переменными. При этом оператор  $A_{\alpha}$  являлся разностной аппроксимацией одномерного дифференциального оператора  $-a^2\partial^2/\partial x_{\alpha}^2$ . Отметим, что схема (53) в этом случае симметрична, т. е. в ней  $x_1$  и  $x_2$  меняются ролями от первого дробного шага ко второму (чем и обусловлено название метода). Решение каждого из уравнений в параболической задаче легко реализуется методом прогонки, поэтому схему (53) называют также *схемой продольно-поперечной прогонки*. Если в (53) исключить  $\Phi^{j+1/2}$ , то получим

$$\frac{\Phi^{j+1} - \Phi^j}{\tau} + A \left( \frac{\Phi^{j+1} + \Phi^j}{2} \right) + \frac{\tau^2}{4} A_1 A_2 \left( \frac{\Phi^{j+1} - \Phi^j}{\tau} \right) = 0.$$

Сравнивая это уравнение со схемой Кранка–Николсон, заключаем, что она обладает вторым порядком аппроксимации по  $\tau$ . Далее, если рассматривать (53), когда  $A_{\alpha}$  есть трехточечная аппроксимация оператора  $-a^2\partial^2/\partial x_{\alpha}^2$ :  $A_{\alpha} = -a^2(\Delta_{x\alpha}\nabla_{x\alpha})/h_{\alpha}^2$ , то легко установить, что данная схема абсолютно устойчива. Однако Н. Н. Яненко показал, что схема метода переменных направлений непригодна для трехмерной параболической задачи. Так, показывается, что в этом случае схема (при  $A_{\alpha} = -a^2(\Delta_{x\alpha}\nabla_{x\alpha})/h_{\alpha}^2$ )

$$\begin{aligned}\frac{\varphi^{j+1/3} - \varphi^j}{\tau} + \frac{1}{3}(A_1\varphi^{j+1/3} + A_2\varphi^j + A_3\varphi^j) &= 0, \\ \frac{\varphi^{j+2/3} - \varphi^{j+1/3}}{\tau} + \frac{1}{3}(A_1\varphi^{j+1/3} + A_2\varphi^{j+2/3} + A_3\varphi^{j+1/3}) &= 0, \\ \frac{\varphi^{j+1} - \varphi^{j+2/3}}{\tau} + \frac{1}{3}(A_1\varphi^{j+2/3} + A_2\varphi^{j+2/3} + A_3\varphi^{j+1}) &= 0\end{aligned}$$

не является абсолютно устойчивой. Поэтому во многих задачах предпочтительны схемы метода стабилизирующей поправки (которые вместе со схемой метода переменных направлений иногда называют также *неявными схемами переменных направлений*).

3.5.2. *Метод стабилизирующей поправки.* Если в (43)  $A = A_1 + A_2 + A_3$ ,  $f = 0$ , то схема стабилизирующей поправки для решения трехмерного уравнения теплопроводности имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{\varphi^{j+1/3} - \varphi^j}{\tau} + A_1\varphi^{j+1/3} + A_2\varphi^j + A_3\varphi^j &= 0, \\ \frac{\varphi^{j+2/3} - \varphi^{j+1/3}}{\tau} + A_2(\varphi^{j+2/3} - \varphi^j) &= 0, \\ \frac{\varphi^{j+1} - \varphi^{j+2/3}}{\tau} + A_3(\varphi^{j+1} - \varphi^j) &= 0, \\ j = 0, 1, 2, \dots, \quad \varphi^0 &= g.\end{aligned}$$

Исключая  $\varphi^{j+1/3}$ ,  $\varphi^{j+2/3}$ , приходим к уравнению

$$\begin{aligned}\frac{\varphi^{j+1} - \varphi^j}{\tau} + A\varphi^{j+1} + \tau^2(A_1A_2 + A_1A_3 + A_2A_3) \left( \frac{\varphi^{j+1} - \varphi^j}{\tau} \right) + \\ + \tau^3 A_1A_2A_3 \left( \frac{\varphi^{j+1} - \varphi^j}{\tau} \right) = 0.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что эта схема имеет первый порядок точности по  $\tau$ . Рассматривая ее для уравнения теплопроводности, легко установить и абсолютную устойчивость. Кроме того, здесь структура схемы такова: первый дробный шаг дает полную аппроксимацию уравнения теплопроводности, следующие дробные шаги являются поправочными и служат цели улучшения устойчивости. Поэтому такие схемы называются *схемами стабилизирующей поправки* или *схемами с поправкой на устойчивость*.

**З а м е ч а н и е.** Метод переменных направлений, предложенный Писманом, Дугласом, Рэчфордом, обычно связывают с разбиением оператора  $A$  на одномерные операторы  $A_\alpha$ , при этом на каждом дробном шаге для решения уравнения используется метод прогонки. Однако распространение данного метода на задачи с тремя пространственными переменными встречает трудности. С другой стороны, можно отказаться от требования одномерности операторов  $A_\alpha$ . Поэтому представляет интерес расщепление оператора  $A$  на такие, которые позволили бы экономично реализовать

решение задачи на каждом шаге и сохранили бы основные преимущества метода переменных направлений. Таким расщеплением является разбиение матричного оператора  $A = A^*$  на две матрицы  $A_1$  и  $A_2$  такие, что  $A_1 = A_2^*$ ,  $A_1 + A_2 = A$ . Если после этого формально записать схемы переменных направлений, то получим схемы *попеременно-треугольного метода*, предложенные и обоснованные для ряда задач математической физики А. А. Самарским и В. П. Ильиным. В работах В. П. Ильина предложены также схемы, обобщающие методы переменных направлений, в которых  $A_1$  и  $A_2$  — уже произвольные матрицы (в частности, треугольные) и которые называются схемами *метода переменных операторов*.

### 3.6. Метод слабой аппроксимации.

3.6.1. *Основная система задач.* Пусть в некотором гильбертовом пространстве  $\Phi$  рассматривается абстрактная задача Коши (43), где  $A = A(t)$  — линейный оператор с плотной в  $\Phi$  областью определения и областью значений из  $\Phi$ . Пусть, кроме того, оператор  $A$  представлен в виде суммы  $A = \sum_{i=1}^n A_i$  линейных операторов  $A_i(t)$ , имеющих ту же область определения, что и  $A$ , а также  $f = \sum_{i=1}^n f_i$ . Данную задачу заменим следующей системой:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{dt} + A_1\varphi_1 &= f_1(t), \quad t \in \theta_j \equiv (t_j, t_{j+1}], \quad \varphi_1(t_j) = v(t_j), \\ \frac{d\varphi_2}{dt} + A_2\varphi_2 &= f_2(t), \quad t \in \theta_j, \quad \varphi_2(t_j) = \varphi_1(t_{j+1}), \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{d\varphi_n}{dt} + A_n\varphi_n &= f_n(t), \quad t \in \theta_j, \quad \varphi_n(t_j) = \varphi_{n-1}(t_{j+1}) \end{aligned} \quad (54)$$

и положим

$$v(t_{j+1}) = \varphi_n(t_{j+1}), \quad j = 0, \dots, n-1, \quad v(0) = g.$$

Тогда процесс нахождения приближенного решения  $v(t)$  исходной задачи по времени на интервале  $[t_j, t_{j+1}]$  сводится к последовательному решению каждого из уравнений (54) для  $\varphi_i, i = \overline{1, n}$ , на данном интервале  $[t_j, t_{j+1}]$ . Для попарно коммутирующих операторов

$$A_i(t'), A_j(t''), \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j, \quad t', t'' \in [0, T]$$

при условии на точное решение задачи (43) вида  $\|A_i A_j \varphi\| \leq M \leq \infty$ , можно установить, что задача (54) аппроксимирует (43) в суммарном смысле, т. е.

$$\left\| \sum_{i=1}^n \psi_i \right\| = o(\tau),$$

где

$$\psi_i = f_i(t) - A_i(t)\varphi(t_{j+1}), \quad i > 1, \quad \psi_1 = f_1(t) - A_1(t)\varphi(t) - \frac{d\varphi}{dt}.$$

Система задач (54) составляет суть *метода слабой аппроксимации* задачи (43).

3.6.2. *Двуциклический метод слабой аппроксимации.* Расщепление задачи (43) на систему задач Коши, аппроксимирующую с порядком  $O(\tau^2)$  задачу (43), можно осуществить, используя двуциклическую процедуру. Приведем одну из возможных схем. На интервале  $t_{j-1} < t \leq t_j$  имеем

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_i}{dt} + A_i \varphi_i &= 0, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \frac{d\varphi_n}{dt} + A_n \varphi_n &= f + \frac{\tau}{2} A_n f, \end{aligned} \quad (55)$$

а на интервале  $t_j < t \leq t_{j+1}$

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_{n+1}}{dt} + A_n \varphi_{n+1} &= f - \frac{\tau}{2} A_n f, \\ \frac{d\varphi_{n+i}}{dt} + A_{n-i+1} \varphi_{n+i} &= 0, \quad i = 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (56)$$

при условиях

$$\begin{aligned} \varphi_1(t_{j-1}) &= v(t_{j-1}), \quad \varphi_{i+1}(t_{j-1}) = \varphi_i(t_j), \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \varphi_{n+1}(t_j) &= \varphi_n(t_j), \quad \varphi_{k+1}(t_j) = \varphi_k(t_{j+1}), \quad k = n+1, \dots, 2n-1. \end{aligned} \quad (57)$$

При этом аппроксимация задачи (43) с помощью (55)–(57) рассматривается на двойном интервале  $[t_{j-1}, t_{j+1}]$  и полагается  $v(t_{j+1}) = \varphi_{2n}(t_{j+1})$ .

### 3.7. Методы расщепления — итерационные методы решения стационарных задач.

3.7.1. *Общие понятия теории итерационных методов.* Решение многих стационарных задач с положительными операторами можно рассматривать как предельное при  $t \rightarrow \infty$  решение нестационарной задачи. При решении стационарных задач методами асимптотического стационарирования не обращается внимание на промежуточные значения решения, поскольку они не представляют интереса, тогда как при решении нестационарных задач эти промежуточные значения имеют физический смысл.

Пусть имеется система линейных алгебраических уравнений (являющаяся, например, результатом аппроксимации конечно-разностным методом некоторой стационарной задачи математической физики)

$$A\varphi = f,$$

где  $\varphi \in \Phi$ ,  $f \in F$ .

Рассмотрим также нестационарную задачу

$$\frac{d\psi}{dt} + A\psi = f, \quad \psi(0) = 0.$$

В предположении, что  $A \equiv A^T > 0$ , ранее было доказано, что  $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi = \varphi$ . (Если оператор стационарной задачи имеет спектр произвольной структуры, то в этом случае такой простой и прозрачной связи между решениями  $\psi, \varphi$  уже может не быть.)

Нестационарную задачу для новой функции  $\psi$  можно решать разностными методами по  $t$ , например,

$$\frac{\psi^{j+1} - \psi^j}{\tau} + A\psi^j = f.$$

Тогда

$$\psi^{j+1} = \psi^j - \tau(A\psi^j - f).$$

Если нашей целью является решение стационарной задачи, то при определенном соотношении между  $\tau$  и  $\beta(A)$ , где  $\beta \equiv \beta(A)$  — максимальное собственное значение  $A$ , имеем  $\lim_{j \rightarrow \infty} \psi^j = \varphi$ . Параметр  $\tau$  может быть величиной как не зависящей, так и зависящей от номера  $j$ , который при решении стационарной задачи удобно считать номером шага итерационного процесса.

Здесь имеет место еще одна особенность: в нестационарных задачах для обеспечения точности решения значения  $\tau$  должны быть достаточно малы, в стационарных же оптимальные итерационные параметры  $\tau$  выбираются из условия минимизации числа итераций и могут принимать относительно большие значения.

Большинство итерационных методов, которые применяются для решения линейных систем, могут быть объединены формулой

$$B_j \frac{\varphi^{j+1} - \varphi^j}{\tau_j} = -\alpha(A\varphi^j - f), \quad (58)$$

где  $\alpha$  — некоторое положительное число,  $\{B_j\}$  — последовательность невырожденных матриц, а  $\{\tau_j\}$  — последовательность вещественных параметров.

**3.7.2. Итерационные алгоритмы.** Для эффективной реализации метода (58) оператор  $B_j$  должен иметь более простое строение по сравнению с  $A$ . Во многих практически интересных случаях оператор  $B_j$  имеет вид

$$B_j = \prod_{i=1}^m (E + \tau_j \tilde{B}_i),$$

где  $\tilde{B}_i$  — некоторые матрицы того же порядка  $N$ , что и матрица  $A$ . Эти матрицы выбираются так, чтобы матрицы  $(E + \tau_j \tilde{B}_i)$  были легко обратимы, т. е. чтобы обращение всей матрицы  $B_j$  осуществлялось проще, чем обращение матрицы  $A$ . Часто выбор  $\{\tilde{B}_i\}$  производится с учетом

$$A = \sum_{k=1}^n A_k.$$

Положим сначала  $n = m = 2$ ,  $\tau_j = \tau$  и, обращаясь к приведенным в предыдущих разделах схемам расщепления и переменных направлений, приведем соответствующие итерационные алгоритмы решения системы  $A\varphi = f$ .

**Метод переменных направлений.** При  $\alpha = 2$ ,  $\tilde{B}_i = A_i$  из (58) имеем алгоритм вида

$$(E + \tau_j A_1)(E + \tau_j A_2) \frac{\varphi^{j+1} - \varphi^j}{\tau_j} = -2(A\varphi^j - f),$$

который после простых преобразований можно записать также в «дробных шагах»:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi^{j+1/2} - \varphi^j}{\tau_j} + (A_1 \varphi^{j+1/2} + A_2 \varphi^j) &= f, \\ \frac{\varphi^{j+1} - \varphi^{j+1/2}}{\tau_j} + (A_1 \varphi^{j+1/2} + A_2 \varphi^{j+1}) &= f. \end{aligned}$$

Метод стабилизирующей поправки получаем при  $\alpha = 1$ ,  $\tilde{B}_i = A_i$ :

$$(E + \tau_j A_1)(E + \tau_j A_2) \frac{\varphi^{j+1} - \varphi^j}{\tau_j} = -(A\varphi^j - f).$$

Его можно записать в виде

$$\frac{\varphi^{j+1/2} - \varphi^j}{\tau_j} + (A_1 \varphi^{j+1/2} + A_2 \varphi^j) = f, \quad \frac{\varphi^{j+1} - \varphi^{j+1/2}}{\tau_j} + A_2(\varphi^{j+1} - \varphi^j) = 0.$$

Метод расщепления (дробных шагов) для произвольного значения  $m = n \geq 2$  может быть представлен в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi^{j+1/n} - \varphi^j}{\tau_j} + A_1(\varphi^{j+1/n} - \varphi^j) &= -\alpha_j \left( \sum_{k=1}^n A_k \varphi^j - f \right), \\ \frac{\varphi^{j+k/n} - \varphi^{j+(k-1)/n}}{\tau_j} + A_k(\varphi^{j+1/n} - \varphi^j) &= 0, \quad k = 2, \dots, n, \end{aligned}$$

или, эквивалентно,

$$B_j \frac{\varphi^{j+1} - \varphi^j}{\tau_j} = -\alpha_j(A\varphi^j - f),$$

где  $B_j = \prod_{k=1}^n (E + \tau_j A_k)$ , а  $\tau_j$  и  $\alpha_j$  — некоторые итерационные параметры. Аналогично могут быть сформулированы и другие итерационные алгоритмы.

Ускорение сходимости сформулированных итерационных алгоритмов достигается либо путем специального выбора параметров  $\tau_j, \alpha_j$ , либо путем применения к этим алгоритмам какой-либо ускоряющей процедуры.

#### 4. Методы расщепления для прикладных задач математической физики

Методы расщепления широко используются для численного решения разнообразных задач математической физики. При этом можно следовать двумя путями. Первый из них заключается в аппроксимации исходной задачи по пространственным переменным на первом этапе решения задачи и в последующем применении методов расщепления для аппроксимации

задачи по временной переменной, т. е. метод расщепления применяется к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Второй путь состоит в том, что сначала метод расщепления используется для редуцирования исходной задачи к системе подзадач с более простыми операторами, которые затем решаются известными численными методами.

Преимущество первого подхода к решению задач методами расщепления — в том, что не возникает проблем с граничными условиями для подзадач на «дробных шагах». Однако здесь сохраняются трудности с построением подходящих аппроксимаций по пространственным переменным, которые значительно возрастают в многомерных задачах.

Второй подход в настоящее время широко применяется для решения сложных задач математической физики. Поскольку в нем операторы краевых подзадач на дробных (промежуточных) шагах имеют более простую структуру, то построение их численных аппроксимаций значительно проще и нередко осуществляется хорошо изученными численными методами. Однако в данном подходе одна из трудностей связана с выбором граничных условий для «промежуточных подзадач». Следует отметить, что проблема выбора граничных условий для задач на дробных шагах и корректная аппроксимация граничных условий из исходной постановки вообще свойственны методам расщепления.

Ниже приводятся некоторые из методов расщепления для уравнений теплопроводности, Навье–Стокса, мелкой воды, а также при численном моделировании морских и океанических течений.

#### 4.1. Методы расщепления для уравнения теплопроводности.

4.1.1. *Метод дробных шагов.* Рассмотрим трехмерную задачу для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta \varphi = 0 \quad \text{в } \Omega \times \Omega_t, \quad (59)$$

$$\varphi = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad \varphi = g \quad \text{в } \Omega \quad \text{при } t = 0,$$

где  $\Omega = \{(x, y, z) : 0 < x, y, z < 1\}$ ,  $\Omega_t = (0, T)$ ,  $g$  — заданная функция,  $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ . Выполняя аппроксимацию (59) методом конечных разностей по переменным  $x, y, z$  и учитывая при этом заданные граничные условия из (59), приходим к матричной эволюционной задаче

$$\frac{d\varphi}{dt} + A\varphi = 0 \quad \text{в } \Omega_t, \quad \varphi = g \quad \text{при } t = 0,$$

где (см. также пример из п. 2.3.1)

$$A = A_x + A_y + A_z,$$

$A_x = -(\Delta_x \nabla_x) \equiv \Lambda_1$ ,  $A_y = -(\Delta_y \nabla_y) \equiv \Lambda_2$ ,  $A_z = -(\Delta_z \nabla_z) \equiv \Lambda_3$ , а  $g, \varphi$  — векторы, причем при формировании  $\varphi = \varphi(t)$  учитываются заданные граничные условия. Оператор  $A$  рассматривается в гильбертовом пространстве  $\Phi = F$  с нормой

$$\|\varphi\|_{\Phi} = \left( \sum_{k=1}^{N_x-1} \sum_{l=1}^{N_y-1} \sum_{p=1}^{N_z-1} h_x h_y h_z \varphi_{klp}^2 \right)^{1/2}.$$

Схема (44) в применении к задаче (59) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\varphi^{j+1/3} - \varphi^j}{\tau} + \Lambda_1 \varphi^{j+1/3} &= 0, \\ \frac{\varphi^{j+2/3} - \varphi^{j+1/3}}{\tau} + \Lambda_2 \varphi^{j+2/3} &= 0, \\ \frac{\varphi^{j+1} - \varphi^{j+2/3}}{\tau} + \Lambda_3 \varphi^{j+1} &= 0. \end{aligned} \quad (60)$$

Решение каждого уравнения из (60) можно просто осуществить методом факторизации (прогонки). Схема (60) абсолютно устойчива и имеет первый порядок аппроксимации по  $\tau$ , а значит, имеет место соответствующая теорема сходимости.

4.1.2. *Локально-одномерные схемы.* Если в (43) операторы  $A_{\alpha}$  (или их аппроксимации) одномерные дифференциальные, то соответствующую разностную схему называют еще *локально-одномерной*.

Теория локально-одномерных схем для ряда дифференциальных уравнений разработана А. А. Самарским. Сформулируем такую схему в применении к задаче для уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + A\varphi = f \quad \text{в } \Omega \times \Omega_t, \quad (61)$$

$$\varphi|_{\partial\Omega} = \varphi_{(\Gamma)}(x, t), \quad \varphi = g \quad \text{в } \Omega \quad \text{при } t = 0,$$

где  $A = \sum_{\alpha=1}^n A_{\alpha}$ ,  $A_{\alpha} = -\partial^2/\partial x_{\alpha}^2$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega = \{0 < x_{\alpha} < 1, \alpha = 1, \dots, n\}$ . Предполагается, что задача (61) имеет единственное достаточно гладкое решение.

В случае  $t \in \theta_j = \{t_j \leq t \leq t_{j+1}\}$  будем вместо (61) решать последовательность уравнений

$$\frac{\partial \varphi_{\alpha}}{\partial t} + A_{\alpha} \varphi_{\alpha} = f_{\alpha} \quad x \in \Omega, \quad t \in \theta_j, \quad \alpha = 1, \dots, n, \quad (62)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, 0) &= g, \quad \varphi_1(x, t_j) = \varphi_n(x, t_j), \quad j = 1, 2, \dots, \\ \varphi_{\alpha}(x, t_j) &= \varphi_{\alpha-1}(x, t_{j+1}), \quad j = 0, 1, \dots, \quad \alpha = 2, 3, \dots, n, \end{aligned}$$

где полагаем  $\varphi(x, t_{j+1}) = \varphi_n(x, t_{j+1})$ . Здесь  $f_{\alpha}$  — некоторые функции, такие, что  $\sum_{\alpha=1}^n f_{\alpha} = f$ . Граничные условия для  $\varphi_{\alpha}$  задаются лишь на части  $\partial\Omega_{\alpha}$  границы  $\partial\Omega$ , состоящей из граней  $x_{\alpha} = 0$  и  $x_{\alpha} = 1$ . Введем в  $\Omega$  равномерную сетку по каждой переменной с шагом  $h$ . Определим разностную аппроксимацию оператора  $A_{\alpha}$ :  $\Lambda_{\alpha} = -(\Delta_{x\alpha} \nabla_{x\alpha})/(h^2)$ ,  $\alpha = 1, \dots, n$ . Переходя от (62) к разностным аппроксимациям задач по пространственным переменным, когда  $\varphi_{\alpha}, f_{\alpha}$  — векторы,  $\Lambda_{\alpha}$  — матрицы,  $\Omega$  — сеточная

область, а  $\partial\Omega_\alpha$  — сетка на гранях  $x_\alpha = 0$  и  $x_\alpha = 1$ , и выполняя аппроксимацию по  $t$  с помощью двухслойной неявной схемы первого порядка точности по  $\tau$ , приходим к локально-одномерной схеме

$$\frac{\varphi_\alpha^{j+1} - \varphi_\alpha^j}{\tau} + \Lambda_\alpha \varphi_\alpha^{j+1} = f_\alpha(t_{j+1/2}), \quad \alpha = 1, \dots, n, \quad j = 0, 1, \dots, \quad (63)$$

с начальными условиями

$$\varphi_1^0 = g, \quad \varphi_1^j = \varphi_n^j \quad j = 1, 2, \dots, \quad (64)$$

$$\varphi_\alpha^j = \varphi_{\alpha-1}^{j+1}, \quad \alpha = 2, 3, \dots, n, \quad j = 0, 1, \dots,$$

и граничными условиями

$$\varphi_\alpha^{j+1}|_{\partial\Omega_\alpha} = \varphi(\Gamma)(t_{j+1}). \quad (65)$$

Каждая из задач (63)–(65) при каждом фиксированном  $\alpha$  есть одномерная первая краевая задача, и решить ее можно методом прогонки.

Чтобы найти приближенные значения решения исходной задачи на слое  $t_{j+1}$  по данным на слое  $t_j$ , надо последовательно решить  $n$  одномерных задач. Локально одномерная схема (63)–(65) устойчива по начальным и граничным данным и по правой части в метрике  $\|\varphi\|_C = \max_{x_j \in \Omega} |\varphi_j|$ , т. е. равномерно. Если же решение задачи (61) имеет единственное непрерывное в  $\Omega \times \Omega_t$  решение  $\varphi = \varphi(x, t)$  и в  $\Omega \times \Omega_t$  существуют производные

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x_\alpha^2 \partial x_\beta^2}, \quad \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t \partial x_\alpha^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha^2}, \quad 0 \leq \alpha, \quad \beta \leq n,$$

то схема (63)–(65) равномерно сходится со скоростью  $O(h^2 + \tau)$ , т. е. имеет первый порядок точности по  $\tau$ , поэтому

$$\|\varphi' - \varphi(t_j)\|_C \leq M(h^2 + \tau), \quad j = 1, 2, \dots,$$

где  $M = \text{const}$  не зависит от  $\tau$  и  $h$ .

**4.1.3. Схемы переменных направлений.** Пусть требуется решить следующую краевую задачу для уравнения теплопроводности без смешанных производных:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + A\varphi = f \quad \text{в } \Omega \times \Omega_t, \quad (66)$$

$$\varphi|_{\partial\Omega} = \varphi(\Gamma)(x, t), \quad \varphi = g(x) \quad \text{в } \Omega \quad \text{при } t = 0,$$

где

$$A = \sum_{\alpha=1}^2 A_\alpha, \quad A_\alpha = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha} k_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha},$$

$$x = (x_1, \dots, x_2) \in \Omega = \{0 < x_\alpha < 1, \quad \alpha = 1, 2\}, \quad k_\alpha > 0.$$

Предполагается, что задача (66) имеет единственное достаточно гладкое решение.

В  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$  построим равномерную по  $x_\alpha$  сетку  $\bar{\Omega}^h$  с шагами  $h_\alpha$ . Операторы  $A_\alpha$  заменим разностными операторами

$$\Lambda_\alpha: \Lambda_\alpha \varphi = -(\Delta_{x_\alpha} k_\alpha^h \nabla x_\alpha \varphi) / (h_\alpha^2).$$

В отличие от случая постоянных коэффициентов операторы  $\Lambda_\alpha$  положительные и самосопряженные, но не перестановочные. Вместо задачи (66) рассмотрим аппроксимирующую ее задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \Lambda \varphi &= f \quad \text{в } \Omega^h, \quad \Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2, \\ \varphi|_{\partial\Omega^h} &= \varphi_\Gamma^h, \quad \varphi = g^h \quad \text{в } \Omega^h \quad \text{при } t = 0. \end{aligned} \quad (67)$$

В соотношениях (67)  $\varphi$  и  $f$  — теперь векторы, а  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  — матрицы. Будем считать, что решение  $\varphi$  принадлежит пространству  $\Phi$  сеточных функций. В слое  $t_j \leq t \leq t_{j+1}$  для решения задачи (67) запишем схему переменных направлений

$$\begin{aligned} \frac{\varphi^{j+1/2} - \varphi^j}{\tau} + \frac{1}{2} (\Lambda_1^{j+1/2} \varphi^{j+1/2} + \Lambda_2^j \varphi^j) &= \frac{1}{2} f^j, \\ \frac{\varphi^{j+1} - \varphi^{j+1/2}}{\tau} + \frac{1}{2} (\Lambda_1^{j+1/2} \varphi^{j+1/2} + \Lambda_2^{j+1} \varphi^{j+1}) &= \frac{1}{2} f^j, \end{aligned} \quad (68)$$

$$j = 0, 1, 2, \dots,$$

с начальными условиями

$$\varphi_1^0 = g. \quad (69)$$

К уравнениям (68), (69) надо добавить разностные краевые условия, которые могут быть записаны, например, в виде

$$\varphi^{j+1}|_{\partial\Omega_1^h} = \varphi_\Gamma(t_{j+1}), \quad \varphi^{j+1/2}|_{\partial\Omega_2^h} = \bar{\varphi}_\Gamma, \quad (70)$$

где  $\partial\Omega_\alpha^h$  — сетка на гранях  $x_\alpha = 0$  и  $x_\alpha = 1$ ,

$$\bar{\varphi}_\Gamma = \frac{1}{2} [\varphi_\Gamma(t_{j+1}) + \varphi_\Gamma(t_j)] + \frac{\tau}{4} \Lambda_2 [\varphi_\Gamma(t_{j+1}) - \varphi_\Gamma(t_j)].$$

Перепишем (68) в виде

$$\begin{aligned} \frac{2}{\tau} \varphi^{j+1/2} + \Lambda_1^{j+1/2} \varphi^{j+1/2} &= F^j, \quad F^j = \frac{2}{\tau} \varphi^j - \Lambda_2^j \varphi^j + f^j, \\ \frac{2}{\tau} \varphi^{j+1} + \Lambda_2^{j+1} \varphi^{j+1} &= F^{j+1/2}, \quad F^{j+1/2} = \frac{2}{\tau} \varphi^{j+1/2} - \Lambda_2^{j+1/2} \varphi^{j+1/2} + f^j. \end{aligned} \quad (71)$$

Каждая из задач (71) с соответствующими условиями из (70) является одномерной первой краевой задачей, и ее можно решить методом прогонки.

Если значение  $k_\alpha^h$  в узле  $i_\alpha$  рассчитывается, например, по формуле  $(k_\alpha^h)_{i_\alpha} = [k_\alpha(x_{i_\alpha}) + k_\alpha(x_{i_\alpha+1})]/2$ ,  $1 \leq i_\alpha < I_\alpha$ , то оператор  $\Lambda_\alpha$  аппроксимирует оператор  $A_\alpha$  со вторым порядком, т. е.  $\Lambda_\alpha \varphi - A_\alpha \varphi = O(h_\alpha^2)$ . Пусть  $k_\alpha \equiv \text{const}$ . Оператор  $\Lambda$  самосопряжен и положителен в  $\Phi$ . Введем метрику

$$\|\varphi\|_\Lambda^2 = \sum_{i_1=1}^{I_1-1} \sum_{i_2=1}^{I_2} (\Delta_{i_1} \varphi)^2 h_1 h_2 + \sum_{i_1=1}^{I_1} \sum_{i_2=1}^{I_2-1} (\Delta_{i_2} \varphi)^2 h_1 h_2.$$

В этой метрике схема (68)–(70) устойчива по начальным и краевым условиям и по правой части.

Пусть решение задачи (66) имеет единственное непрерывное в  $\Omega \times \Omega_t$  решение  $\varphi = \varphi(x, t)$  и существуют в  $\Omega \times \Omega_t$  ограниченные производные

$$\frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^3}, \quad \frac{\partial^5 \varphi}{\partial x_\alpha^2 \partial x_\beta^2 \partial t}, \quad \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x_\alpha^4}, \quad 0 \leq \alpha, \beta \leq 2.$$

Тогда схема (68)–(70) сходится в сеточной норме со скоростью  $O(\tau^2 + |h|^2)$ , так что

$$\|\varphi' - \varphi(t_j)\|_\Lambda \leq M(|h|^2 + \tau^2),$$

где  $m = \text{const}$  не зависит от  $\tau$  и  $|h|$ .

## 4.2. Методы расщепления для задач гидродинамики.

4.2.1. Методы расщепления для уравнений Навье–Стокса. Рассмотрим нестационарную задачу для уравнений Навье–Стокса

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \\ \mathbf{u} &= 0 \quad \text{на } \Gamma \times [0, T], \\ \mathbf{u}(x, 0) &= \mathbf{u}_0(x) \quad \text{в } \Omega, \end{aligned} \quad (72)$$

где  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  — ограниченная область с границей  $\Gamma$ ,  $\nu = \text{const} > 0$ ,  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$  — вектор-функция (вектор скорости),  $p$  — скалярная функция (давление),  $\mathbf{f} \in (L_2(\Omega \times (0, T)))^n$  (причем почти при всех  $t \in (0, T)$  функция  $f$  принадлежит замыканию гладких вектор-функций  $v = (v_1, \dots, v_n)$  с компактным носителем в  $\Omega$  таких, что  $\operatorname{div} v \equiv \partial v_i / \partial x_i = 0$ ).

Считаем, что  $\mathbf{u}_0(x) \in (\dot{W}_2^1)^n$ , а также  $\operatorname{div} \mathbf{u}_0 = 0$ .

Сформулируем некоторые из схем расщепления для (72).

*Первая схема:*

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{u}^{n+1/2} - \mathbf{u}}{\tau} - \nu \Delta \mathbf{u}^{n+1/2} + (\mathbf{u}^{n+1/2}, \nabla) \mathbf{u}^{n+1/2} + \frac{1}{2} (\operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1/2}) \mathbf{u}^{n+1/2} &= \mathbf{f}^n \quad \text{в } \Omega, \\ \mathbf{u}^{n+1/2} &= 0 \quad \text{на } \Gamma, \\ \Delta p^{n+1} &= \frac{1}{\tau} \operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1/2} \quad \text{в } \Omega, \quad \frac{\partial p^{n+1}}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \Gamma, \\ \mathbf{u}^{n+1} &= \mathbf{u}^{n+1/2} - \tau \nabla p^{n+1} \quad \text{в } \Omega, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N, \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{f}^n = \frac{1}{\tau} \int_{(n-1)\tau}^{n\tau} \mathbf{f}(t, x) dt, \quad \tau = \frac{T}{N}.$$

Здесь задача для  $\mathbf{u}^{n+1/2}$  есть «обычная» нелинейная задача Дирихле, а задача для  $p^{n+1}$  есть задача Неймана для уравнения Пуассона.

Отметим, что граничные условия  $\partial p / \partial n$  на  $\Gamma$  для «истинного давления»  $p(t, x)$  не выполняются. Появление его для  $p^{n+1}$  обусловлено ошибками аппроксимации в принятой схеме расщепления.

Численное решение задач для  $\mathbf{u}^{n+1/2}$ ,  $p^{n+1}$  может быть осуществлено методами конечных разностей или конечных элементов с использованием подходов, применяемых к решению нелинейных уравнений.

*Вторая схема (схема переменных направлений):*

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1/2} - \mathbf{u}^n}{\tau/2} - \nu \Delta \mathbf{u}^{n+1/2} + \nabla p^{n+1/2} + (\mathbf{u}^n, \nabla) \mathbf{u}^n = \mathbf{f}^{n+1/2} \quad \text{в } \Omega,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1/2} = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad \mathbf{u}^{n+1/2} = 0 \quad \text{на } \Gamma,$$

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^{n+1/2}}{\tau/2} + (\mathbf{u}^{n+1/2}, \nabla) \mathbf{u}^{n+1} - \nu \Delta \mathbf{u}^{n+1/2} + \nabla p^{n+1/2} = \mathbf{f}^{n+1} \quad \text{в } \Omega,$$

где  $\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}_0$ . Здесь задача для  $\mathbf{u}^{n+1/2}$  есть линейная задача — «обобщенная задача Стокса», для решения которой разработаны многие эффективные алгоритмы, тогда как уравнение для  $\mathbf{u}^{n+1}$  имеет первый порядок и может быть решено методом характеристик.

*Третья схема (схема переменных направлений с весом):*

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1/2} - \mathbf{u}^n}{\tau/2} - \theta \nabla \nu \Delta \mathbf{u}^{n+1/2} + p^{n+1/2} - (1 - \theta) \nu \Delta \mathbf{u}^n + (\mathbf{u}^n, \nabla) \mathbf{u}^n = \mathbf{f}^{n+1/2},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1/2} = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad \mathbf{u}^{n+1/2} = 0 \quad \text{на } \Gamma,$$

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^{n+1/2}}{\tau/2} - (1 - \theta) \nu \Delta \mathbf{u}^{n+1} + (\mathbf{u}^{n+1}, \nabla) \mathbf{u}^{n+1} - \theta \nu \Delta \mathbf{u}^{n+1/2} +$$

$$+ \nabla p^{n+1/2} = \mathbf{f}^{n+1} \quad \text{в } \Omega, \quad \mathbf{u}^{n+1} = 0 \quad \text{на } \Gamma.$$

где  $\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}_0$ , а «вес»  $\theta$  выбирается из интервала  $(0, 1)$ .

Дальнейшая реализация данной схемы состоит в численном решении обобщенной задачи Стокса и нелинейной задачи Дирихле.

Исследование приведенных и ряда других схем расщепления для уравнений Навье–Стокса и разработка численных алгоритмов их реализации осуществлялись в работах А. Чорина, Р. Темама, Ф. Харлоу, Р. Гловинского, О. М. Белоцерковского, В. А. Гущина, В. В. Щенникова, В. М. Ковени, Г. А. Тарнавского, С. Г. Черного и многих других исследователей.

**4.2.2. Метод дробных шагов для уравнений мелкой воды.** Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  есть ограниченная область (в некоторой горизонтальной плоскости — «плоскости отсчета») с границей  $\Gamma \equiv \partial\Omega$ ,  $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$  — единичный вектор внешней нормали к  $\Gamma$ ,  $\tau = (-n_y, n_x)$ . Через  $x, y \in \Omega \equiv \Omega \cup \partial\Omega$  обозначим пространственные переменные, а  $t \in [0, T]$  есть временная переменная. Предполагается, что  $\Gamma = \Gamma_{\text{ор}} \cup \Gamma_C$  ( $\Gamma_{\text{ор}} \cap \Gamma_C = \emptyset$ ), где  $\Gamma_{\text{ор}} = \bigcup_{m=1}^M \Gamma_{\text{ор},m}$  ( $M < \infty$ ) есть *открытая часть границы* («жидкая граница»), тогда как  $\Gamma_C$  — *замкнутая часть границы* («твердая граница»).

Пусть  $\mathbf{v}(x, y, t) = (u, v)^T$  представляет собой вектор скорости,  $\xi(x, y, t)$  есть уровень жидкости в  $\Omega$  относительно плоскости отсчета,  $-h_0(x, y)$  — глубина жидкости под этой плоскостью,  $h = \xi + h_0$ . Рассмотрим уравнения мелкой воды в консервативной форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial(h\mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (h\mathbf{v}\mathbf{v}) - \nabla \cdot (\mu_1 h \nabla \mathbf{v}) + gh \nabla h &= hF(\mathbf{v}, h), \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (h\mathbf{v}) &= 0, \end{aligned} \quad (73)$$

где

$$\begin{aligned} F(\mathbf{v}, h) &= f(\mathbf{v}, h) - l \times \mathbf{v} - \frac{g|\mathbf{v}|\mathbf{v}}{hC^2}, \\ f(\mathbf{v}, h) &= g \nabla h_0 + \frac{\mathbf{w}}{\rho h} - \frac{\nabla P_a}{\rho} \equiv (f_1, f_2)^T, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} \equiv \operatorname{div} \mathbf{v}, \\ l \times \mathbf{v} &= (-lv, lu)^T, \end{aligned}$$

$g$  — ускорение силы тяжести,  $l$  — параметр Кориолиса,  $C$  — коэффициент Шези,  $\mathbf{w} = (w_x, w_y)^T$  — напряжение силы ветра,  $P_a$  — атмосферное давление на свободной поверхности,  $\rho = \text{const}$  — плотность воды. Отметим, что влияние изменений глубины жидкости будет иметь место, если в (73) член  $\mathbf{F}(\mathbf{v}, h)$  задается в виде

$$F(\mathbf{v}, h) = f(\mathbf{v}, h) - l \times \mathbf{v} - \frac{g|\mathbf{v}|\mathbf{v}}{K^2 h^{1/3}},$$

где  $K$  — коэффициент Стриккера.

В качестве граничных условий для  $\mathbf{v}$ ,  $h$  выберем следующие:

$$\begin{aligned} v_n &= 0, \quad \mu_1 h \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial n} \tau = 0 \quad \text{на } \Gamma_C \times (0, T), \\ \mu_1 \left( h \frac{\partial v_n}{\partial n} + \frac{\partial h(\Gamma)}{\partial t} \right) &= 0, \quad \mu_1 h \frac{\partial v_\tau}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \Gamma_{\text{op}} \times (0, T), \end{aligned} \quad (74)$$

$$(|v_n| - v_n)(h(\Gamma) - h) = 0 \quad \text{на } \Gamma_{\text{op}} \times (0, T),$$

где  $v_n = (\mathbf{v}, \mathbf{n})$ ,  $v_\tau = (\mathbf{v}, \tau)$ ,  $h(\Gamma)$  — заданная функция.

Начальные условия для  $\mathbf{v}$ ,  $h$  есть

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{(0)}, \quad h = h_{(0)} \quad \text{при } t = 0, \quad (x, y) \in \Omega. \quad (75)$$

Запишем (73)–(75) в слабой форме: найти

$$\varphi \equiv (\mathbf{v}, h) \in X \equiv W \times W_2^1(\Omega) \quad \forall t,$$

чтобы выполнялись равенства

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} B(h) \varphi, \hat{\varphi} \right) + \sum_{i=1}^3 a_i(\varphi; \varphi, \hat{\varphi}) &= \sum_{i=1}^3 f_i(\varphi, \hat{\varphi}) \quad \forall t \in (0, T), \\ \varphi &= \varphi_{(0)} \quad \text{при } t = 0, \quad \forall \hat{\varphi} \in W \times W_2^1(\Omega), \end{aligned} \quad (76)$$

где использованы следующие обозначения:

$$\varphi = (\mathbf{v}, h)^T, \quad \hat{\varphi} = (\hat{\mathbf{v}}, \hat{h})^T = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{h})^T, \quad \bar{\varphi} = (\bar{\mathbf{v}}, \bar{h})^T = (\bar{u}, \bar{v}, \bar{h})^T,$$

$$W = \{\hat{\mathbf{v}} = (\hat{u}, \hat{v})^T: \hat{u}, \hat{v} \in W_2^1(\Omega), (\hat{\mathbf{v}}, \mathbf{n}) = 0 \text{ на } \Gamma_C, (\hat{\mathbf{v}}, \boldsymbol{\tau}) = 0 \text{ на } \Gamma_{\text{op}}\},$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} B(\bar{h}) \varphi, \hat{\varphi} \right) = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \bar{h} u}{\partial t} \hat{u} + \frac{\partial \bar{h} v}{\partial t} \hat{v} + g \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} \hat{h} \right) d\Omega,$$

$$\begin{aligned} a_1(\bar{\varphi}; \varphi, \hat{\varphi}) = & - \int_{\Omega} \bar{h} \mathbf{v}(\bar{\mathbf{v}}, \nabla) \hat{\mathbf{v}} d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \bar{h} ((\bar{\mathbf{v}}, \mathbf{n}) + |(\bar{\mathbf{v}}, \mathbf{n})|) \mathbf{v} \hat{\mathbf{v}} d\Gamma - \\ & - \frac{\alpha}{2} \int_{\Gamma} \nabla \cdot (\bar{h} \bar{\mathbf{v}}) \mathbf{v} \hat{\mathbf{v}} d\Omega, \quad \alpha \in [-2, 2], \end{aligned}$$

$$a_2(\bar{\varphi}; \varphi, \hat{\varphi}) = \int_{\Omega} \left( \mu_1 \bar{h} \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla (\hat{\mathbf{v}} + (C(\bar{\varphi}) + \frac{\alpha}{2} \nabla \cdot (\bar{h} \bar{\mathbf{v}})) \mathbf{v} \hat{\mathbf{v}} \right) d\Omega, \quad C(\bar{\varphi}) = \frac{g|\mathbf{v}|}{C^2},$$

$$\begin{aligned} a_3(\bar{\varphi}; \varphi, \hat{\varphi}) = & \int_{\Omega} (g \bar{h} \nabla \cdot (h \hat{\mathbf{v}}) - g \bar{h}(\mathbf{v}, \nabla) \hat{h} + l \hat{h}(u \hat{v} - v \hat{u})) d\Omega + \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} g(|(\bar{\mathbf{v}}, \mathbf{n})| + (\bar{\mathbf{v}}, \mathbf{n})) h \hat{h} d\Gamma, \end{aligned}$$

$$f_1(\bar{\varphi}; \hat{\varphi}) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} h_{(\Gamma)} (|(\bar{\mathbf{v}}, \mathbf{n})| - (\bar{\mathbf{v}}, \mathbf{n})) \bar{\mathbf{v}} \hat{\mathbf{v}} d\Gamma,$$

$$f_2(\bar{\varphi}; \hat{\varphi}) = \int_{\Omega} \left( \frac{\bar{h}}{\rho} \nabla (g h_0 \rho - P_a) + \frac{\mathbf{w}}{\rho} \right) \hat{\mathbf{v}} d\Omega - \int_{\Gamma} \mu_1 \frac{\partial h_{(\Gamma)}}{\partial t} (\hat{\mathbf{v}}, \mathbf{n}) d\Gamma,$$

$$f_3(\bar{\varphi}; \hat{\varphi}) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} g(|(\bar{\mathbf{v}}, \mathbf{n})| - (\bar{\mathbf{v}}, \mathbf{n})) h_{(\Gamma)} \hat{h} d\Gamma,$$

$$\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_{\text{op}, \text{inf}} \cup \Gamma_{\text{op}, \text{out}}, \quad \Gamma_0 = \{x \in \Gamma: (\bar{\mathbf{v}}(x), \mathbf{n}(x)) = 0\}, \quad \alpha \in [0, 2],$$

$$\Gamma_{\text{op}, \text{inf}} = \{x \in \Gamma: (\bar{\mathbf{v}}(x), \mathbf{n}(x)) < 0\}, \quad \Gamma_{\text{op}, \text{out}} = \{x \in \Gamma: (\bar{\mathbf{v}}(x), \mathbf{n}(x)) > 0\}.$$

Принимая  $\bar{\varphi} \equiv \varphi$ , равенства (76) можно переписать в операторной форме вида

$$\frac{\partial}{\partial t} B(\bar{h}) \varphi + \sum_{i=1}^3 \Lambda_i(\bar{\varphi}) \varphi = \sum_{i=1}^3 f_i(\bar{\varphi}), \quad t \in (0, T), \quad \varphi(0) = \varphi_{(0)},$$

где оператор  $\{\Lambda_i\}$  и функции правых частей  $\{f_i\}$  определяются с помощью следующих соотношений:

$$(\Lambda_i(\bar{\varphi}) \tilde{\varphi}, \hat{\varphi}) \equiv a_i(\bar{\varphi}; \tilde{\varphi}, \hat{\varphi}), \quad (f_i, \hat{\varphi}) \equiv f_i(\bar{\varphi}; \hat{\varphi}) \quad \forall \tilde{\varphi}, \hat{\varphi} \in X, \quad i = 1, 2, 3.$$

Пусть  $\Delta t > 0$  есть шаг по временной переменной,  $t_j = j \Delta t$ , ( $j = 0, 1, \dots, J$ ), а также  $\varphi^j, \mathbf{v}^j, \dots$  есть значения  $\varphi, \mathbf{v}, \dots$  при  $t = t_j$ . Предположим, что  $\varphi^{j-1}$  известна,  $\varphi^0 \equiv \varphi_{(0)}$ . Тогда начально-краевую задачу для

уравнений мелкой воды можно переформулировать следующим образом: найти  $\varphi \in X$  ( $\forall t \in (t_j, t_{j+1})$ ), удовлетворяющую уравнениям вида

$$\frac{\partial}{\partial t} B(\bar{h})\varphi + \sum_{i=1}^3 \Lambda_i(\bar{\varphi})\varphi = \sum_{i=1}^3 f_i, \\ t \in (t_j, t_{j+1}), \quad \varphi(t_j) = \varphi', \quad j = 0, 1, \dots, J-1.$$

Легко проверить, что если  $\alpha = 1$ ,  $\bar{h}_0 \geq 0$  и  $C(\varphi) + \nabla \cdot (\bar{h}\bar{\mathbf{v}})/2 \geq 0$ , то  $(\Lambda_i(\bar{\varphi})\varphi, \varphi) \geq 0 \quad \forall \varphi \in X$ . Эти свойства операторов  $\{\Lambda_i\}$  позволяют сформулировать схему дробных шагов:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} B(\bar{h})\varphi^{j+1/3} + \Lambda_1(\bar{\varphi})\varphi^{j+1/3} &= f_1(\bar{\varphi}), \quad t \in (t_j, t_{j+1}), \\ \varphi^{j+1/3}(t_j) &= \varphi'(t_j), \\ \frac{\partial}{\partial t} B(\bar{h})\varphi^{j+2/3} + \Lambda_2(\bar{\varphi})\varphi^{j+2/3} &= f_2(\bar{\varphi}), \quad t \in (t_j, t_{j+1}), \\ \varphi^{j+2/3}(t_j) &= \varphi^{j+1/3}(t_{j+1}), \\ \frac{\partial}{\partial t} B(\bar{h})\varphi^{j+1} + \Lambda_3(\bar{\varphi})\varphi^{j+1} &= f_3(\bar{\varphi}), \quad t \in (t_j, t_{j+1}), \\ \varphi^{j+1}(t_j) &= \varphi^{j+2/3}(t_{j+1}), \\ j = 0, 1, \dots, J-1, \quad \varphi^0(t_0) &\equiv \varphi_{(0)}, \end{aligned} \tag{77}$$

где  $\bar{\varphi} = (\bar{\mathbf{v}}, \bar{h})^T$  есть аппроксимация  $\varphi$  на  $(t_j, t_{j+1})$ . Пусть  $\bar{\varphi} = \varphi'(t_j)$  на  $(t_j, t_{j+1})$ . В этом случае схема (77) обладает точностью  $O(\Delta t)$  на всем интервале  $(0, T)$ .

Если функции  $\varphi^{j+1/3}$ ,  $\varphi^{j+2/3}$ ,  $\varphi^{j+1}$ , определяемые посредством (77), достаточно гладкие, то схема (77) может быть переписана в терминах дифференциальных операторов с соответствующими граничными условиями в следующей форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{h}\mathbf{v}^{j+1/3}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{h}\bar{\mathbf{v}}\mathbf{v}^{j+1/3}) - \frac{\alpha}{2} \nabla \cdot (\bar{h}\bar{\mathbf{v}})\mathbf{v}^{j+1/3} &= 0 \quad \text{в } \Omega \times (t_j, t_{j+1}), \\ \bar{h}\mathbf{v}^{j+1/3} \Big|_{t_j} &= \bar{h}\mathbf{v}^j \Big|_{t_j}, \quad \mathbf{v}^{j+1/3} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{на } \Gamma_C \times (t_j, t_{j+1}), \\ \bar{h}\mathbf{v}^{j+1/3} &= h_{(\Gamma)}\bar{\mathbf{v}} \quad \text{на } \Gamma_{\text{inf}}(\bar{\mathbf{v}}) \times (t_j, t_{j+1}), \\ \frac{\partial \bar{h}\mathbf{v}^{j+2/3}}{\partial t} - \nabla \cdot (\mu_1 \bar{h} \nabla \mathbf{v}^{j+2/3}) + \left( C(\bar{\varphi}) + \frac{\alpha}{2} \nabla \cdot (\bar{h}\bar{\mathbf{v}}) \right) \mathbf{v}^{j+2/3} &= \\ &= \frac{h}{\rho} \nabla (gh_0 \rho - P_a) + \frac{\mathbf{w}}{\rho} \quad \text{в } \Omega \times (t_j, t_{j+1}), \\ \bar{h}\mathbf{v}^{j+2/3} \Big|_{t_j} &= \bar{h}\mathbf{v}^{j+1/3} \Big|_{t_{j+1}}, \quad \mu_1 \bar{h} \frac{\partial \mathbf{v}^{j+2/3}}{\partial n} \tau = 0, \quad \mathbf{v}^{j+2/3} \cdot \mathbf{n} \quad \text{на } \Gamma_C \times (t_j, t_{j+1}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mu_1 \left( \bar{h} \frac{\partial \mathbf{v}^{J+2/3}}{\partial n} \mathbf{n} + \frac{\partial h_{(\Gamma)}}{\partial t} \right) &= 0, \quad \mu_1 \bar{h} \frac{\partial \mathbf{v}^{J+2/3}}{\partial n} \tau = 0 \quad \text{на } \Gamma_{\text{op}} \times (t_j, t_{j+1}), \\
 \frac{\partial \bar{h} u^{J+1}}{\partial t} - l \bar{h} v^{J+1} + g \bar{h} \frac{\partial h^{J+1}}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial \bar{h} v^{J+1}}{\partial t} + l \bar{h} u^{J+1} + g \bar{h} \frac{\partial h^{J+1}}{\partial y} = 0 \\
 &\quad \text{в } \Omega \times (t_j, t_{j+1}), \\
 g \frac{\partial h^{J+1}}{\partial t} + g \nabla \cdot (\bar{h} \mathbf{v}^{J+1}) &= 0 \quad \text{в } \Omega \times (t_j, t_{j+1}), \\
 \bar{h} \mathbf{v}^{J+1} \Big|_{t_j} &= \bar{h} \mathbf{v}^{J+2/3} \Big|_{t_{j+1}}, \quad h^{J+1} \Big|_{t_j} = h^{J+2/3} \Big|_{t_{j+1}}, \\
 \bar{h} (\mathbf{v}^{J+1} \cdot \mathbf{n}) &= h^{J+1} \left( \frac{|\bar{v}_n| + \bar{v}_n}{2} \right) - h_{(\Gamma)} \left( \frac{|\bar{v}_n| - \bar{v}_n}{2} \right) \quad \text{на } \Gamma_{\text{op}} \times (t_j, t_{j+1}), \\
 \mathbf{v}^{J+1} \cdot \mathbf{n} &= 0 \quad \text{на } \Gamma_C \times (t_j, t_{j+1}) \quad (j = 0, 1, 2, \dots, J-1).
 \end{aligned} \tag{78}$$

Если принять  $\alpha = 2$  и пренебречь членами, включающими  $l$ , то уравнения для  $\mathbf{v}^{J+1/3}$ ,  $\mathbf{v}^{J+1}$ ,  $h^{J+1}$  из (78) сводятся соответственно к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{v}^{J+1/3}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{v}}, \nabla) \mathbf{v}^{J+1/3} &= 0 \quad \text{в } \Omega \times (t_j, t_{j+1}), \quad \mathbf{v}^{J+1/3} \Big|_{t_j} = \mathbf{v}^j \Big|_{t_j}, \\
 \mathbf{v} &= \bar{\mathbf{v}} \quad \text{на } \Gamma_{\text{inf}} \times (t_j, t_{j+1}), \quad \mathbf{v}^{J+1/3} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{на } \Gamma_C \times (t_j, t_{j+1}), \\
 h_t^{J+1} - \nabla \cdot (\bar{h} \nabla h^{J+1}) &= 0 \quad \text{в } \Omega \times (t_j, t_{j+1}), \\
 h^{J+1} \Big|_{t_j} &= h^{J+2/3} \Big|_{t_{j+1}}, \quad \frac{\partial h^{J+1}}{\partial t} \Big|_{t_j} = -\nabla \cdot (\bar{h} \mathbf{v}^{J+2/3}) \Big|_{t_{j+1}}, \\
 g \bar{h} \frac{\partial h^{J+1}}{\partial n} + \frac{\partial}{\partial t} \left( h^{J+1} \frac{|\bar{v}_n| + \bar{v}_n}{2} - h_{(\Gamma)} \frac{|\bar{v}_n| - \bar{v}_n}{2} \right) &= 0 \quad \text{на } \Gamma_{\text{op}} \times (t_j, t_{j+1}), \\
 g \bar{h} \frac{\partial h^{J+1}}{\partial n} &= 0 \quad \text{на } \Gamma_C \times (t_j, t_{j+1}), \\
 \frac{\partial \bar{h} \mathbf{v}^{J+1}}{\partial t} &= -g \bar{h} \nabla h^{J+1} \quad \text{в } \Omega \times (t_j, t_{j+1}), \\
 \bar{h} \mathbf{v}^{J+1} \Big|_{t_j} &= \bar{h} \mathbf{v}^{J+2/3} \Big|_{t_{j+1}}, \quad \mathbf{v}^{J+1} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{на } \Gamma_C \times (t_j, t_{j+1}),
 \end{aligned} \tag{79}$$

а задача для  $\mathbf{v}^{J+2/3}$  имеет тот вид, что и в (78) (при  $\alpha = 2$ ). (Обратим внимание на тот факт, что в схемах расщепления (78), (79) решена также проблема выбора граничных условий для задач на «дробных шагах».)

Следующий этап численного решения исходной задачи состоит в решении начально-краевых задач из (78), (79). Для этого могут быть применены хорошо известные разностные схемы по  $t$  (явные или неявные, схемы расщепления и др.) и подходящие аппроксимации этих задач по пространственным переменным (метод конечных элементов, методы ко-

нечных разностей, и т. д.). На основе результатов по теории данных схем и аппроксимаций могут быть сформулированы соответствующие утверждения для всего численного алгоритма решения уравнений мелкой воды.

Приведенные выше схемы расщепления для уравнений мелкой воды предложены и исследовались В. И. Агошковым и Ф. Салери, которыми рассмотрены также и другие типы краевых условий.

### 4.3. Метод расщепления для модели динамики морских и океанических течений.

4.3.1. *Нестационарная модель динамики морских и океанических течений.* Рассмотрим систему уравнений динамики океана

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - l v + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \Delta u + \frac{\partial}{\partial z} v \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + l u + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} &= \mu \Delta v + \frac{\partial}{\partial z} v \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= g \rho, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (80)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} + \gamma_T w &= \mu_T \Delta T + \frac{\partial}{\partial z} v_T \frac{\partial T}{\partial z}, \\ \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} + w \frac{\partial S}{\partial z} + \gamma_S w &= \mu_S \Delta S + \frac{\partial}{\partial z} v_S \frac{\partial S}{\partial z}, \end{aligned}$$

$$\rho = \alpha_T T + \alpha_S S.$$

В качестве граничных и начальных условий для системы (80) примем условия

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{-\tau_x}{\nu \rho_0}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{-\tau_y}{\nu \rho_0}, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = f_3, \quad \frac{\partial S}{\partial z} = f_4, \quad w = 0 \quad \text{при } z = 0, \quad (81)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad w = 0 \quad \text{при } z = H,$$

$$u = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \Sigma, \quad (82)$$

$$u = u^0, \quad v = v^0, \quad T = T^0, \quad S = S^0 \quad \text{при } t = t_j.$$

Отметим, что для системы (80) с граничными и начальными Условиями (81), (82) (а также при ряде других постановок граничных условий) имеет место единственность классического решения.

Исключим из (80) функцию  $\rho$  и линеаризуем полученную систему уравнений на интервале времени  $t_{j-1} \leq t \leq t_{j+1}$ ; тогда ее можно записать

в операторном виде:

$$B \frac{\partial \varphi}{\partial t} + A \varphi = 0, \quad B \varphi = B F \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (83)$$

Здесь

$$\varphi = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ p \\ T \\ S \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} R_1 & -\rho_0 l & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ \rho_0 l & R_2 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & -g\alpha_T E & -g\alpha_S E \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g\alpha_T E & 0 & R_3 & 0 \\ 0 & 0 & g\alpha_S E & 0 & 0 & R_4 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} \rho_0 E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_0 E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{g\alpha_T}{\gamma_T} E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{g\alpha_S}{\gamma_S} E \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} u^0 \\ v^0 \\ 0 \\ 0 \\ T^0 \\ S^0 \end{bmatrix},$$

$$R_i = D_0 + D_i, \quad D_0 = \operatorname{div} \mathbf{u}^{i-1},$$

$$D_1 = D_2 = -\rho_0 \left( \mu \Delta + \frac{\partial}{\partial z} v \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

$$D_3 = -\frac{g\alpha_T}{\gamma_T} \left( \mu_T \Delta + \frac{\partial}{\partial z} v_T \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

$$D_4 = -\frac{g\alpha_S}{\gamma_S} \left( \mu_S \Delta + \frac{\partial}{\partial z} v_S \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Предполагается, что решение задачи (83) принадлежит множеству непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих граничным условиям (81). Введем скалярное произведение соотношением

$$(\bar{a}, \bar{b}) = \sum_{i=1}^6 \int_{\Omega} a_i b_i d\Omega,$$

где  $a_i$  и  $b_i$  — компоненты вектор-функций  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$ . Можно убедиться, что на функциях из этого подпространства оператор  $A$  является неотрицательным.

4.3.2. *Метод расщепления.* Представим оператор  $A$  в виде суммы двух операторов:

$$A_1 = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_4 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\rho_0 l E & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ \rho_0 l E & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & -g\alpha_T E & -g\alpha_S E \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g\alpha_T E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g\alpha_S E & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

первый из которых — положительно полуопределенный, а второй — *антиэрмитов*:  $A = A_1 + A_2$ ,  $(A_1 \varphi, \varphi) \geq 0$ ,  $(A_2 \varphi, \varphi) = 0$ .

Рассмотрим теперь весь временной интервал  $0 \leq t \leq T$  и разобьем его на равные интервалы  $t_{j-1} \leq t \leq t_j$  длины  $t_j - t_{j-1} = \tau$ . На каждом расширенном интервале  $t_{j-1} \leq t \leq t_j$  для решения задачи (83) применим двуциклический метод расщепления. Тогда если предположить, что  $\varphi'^{-1}$  — решение задачи (80)–(82) в момент времени  $t_{j-1}$ , то на интервале  $t_{j-1} \leq t \leq t_j$  имеем

$$B \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + A_1 \varphi_1 = 0, \quad B \varphi_1'^{-1} = B \varphi'^{-1}, \quad (84)$$

на интервале  $t_{j-1} \leq t \leq t_j$  имеем

$$B \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + A_2 \varphi_2 = 0, \quad B \varphi_2'^{-1} = B \varphi_1'^{-1} \quad (85)$$

и на интервале  $t_{j-1} \leq t \leq t_j$  решаем задачу

$$B \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} + A_1 \varphi_3 = 0, \quad B \varphi_3' = B \varphi_2'^{-1}. \quad (86)$$

В покомпонентной форме задача (84) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{u}'^{-1} u_1 &= \mu \Delta u_1 + \frac{\partial}{\partial z} v_1 \frac{\partial u_1}{\partial z}, \\ \frac{\partial v_1}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{u}'^{-1} v_1 &= \mu \Delta v_1 + \frac{\partial}{\partial z} v_1 \frac{\partial v_1}{\partial z}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial T_1}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{u}'^{-1} T_1 &= \mu \Delta T_1 + \frac{\partial}{\partial z} v_T \frac{\partial T_1}{\partial z}, \\ \frac{\partial S_1}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{u}'^{-1} S_1 &= \mu \Delta S_1 + \frac{\partial}{\partial z} v_S \frac{\partial S_1}{\partial z}\end{aligned}$$

при условии

$$\operatorname{div} \mathbf{u}'^{-1} = 0,$$

а также при граничных условиях (81) и начальных данных

$$u_1'^{-1} = u'^{-1}, \quad v_1'^{-1} = v'^{-1}, \quad T_1'^{-1} = T'^{-1}, \quad S_1'^{-1} = S'^{-1};$$

на интервале  $t_{j-1} \leq t \leq t_j$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_2}{\partial t} - l v_2 + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_2}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} - l u_2 + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_2}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial T_2}{\partial t} + \gamma_T w_2 &= 0, \\ \frac{\partial p_2}{\partial z} &= g(\alpha_T T_2 + \alpha_S S_2), & \frac{\partial S_2}{\partial t} + \gamma_S w_2 &= 0\end{aligned}$$

при условиях

$$w_2 = 0 \quad \text{при} \quad z = 0,$$

$$w_2 = 0 \quad \text{при} \quad z = H,$$

$$(u_2)_n = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma$$

и начальных данных

$$u_2'^{-1} = u_1', \quad v_2'^{-1} = v_1', \quad T_2'^{-1} = T_1', \quad S_2'^{-1} = S_1'.$$

На последнем шаге расщепления ( $t_{j-1} \leq t \leq t_j$ ) получаем

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_3}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{u}'^{-1} u_3 &= \mu_1 \Delta u_3 + \frac{\partial}{\partial z} v_1 \frac{\partial u_3}{\partial z}, \\ \frac{\partial v_3}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{u}'^{-1} v_3 &= \mu_2 \Delta v_3 + \frac{\partial}{\partial z} v_1 \frac{\partial v_3}{\partial z}, \\ \frac{\partial T_3}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{u}'^{-1} T_3 &= \mu_T \Delta T_3 + \frac{\partial}{\partial z} v_T \frac{\partial T_3}{\partial z}, \\ \frac{\partial S_3}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{u}'^{-1} S_3 &= \mu_S \Delta S_3 + \frac{\partial}{\partial z} v_S \frac{\partial S_3}{\partial z}\end{aligned}$$

при условии

$$\operatorname{div} \mathbf{u}'^{-1} = 0,$$

а также при граничных условиях (81) и начальных данных

$$u_3' = u_2'^{+1}, \quad v_3' = v_2'^{+1}, \quad T_3' = T_2'^{+1}, \quad S_3' = S_2'^{+1}.$$

Решение подзадач, входящих во все этапы метода расщепления, можно осуществить методом конечных разностей или другими подходящими методами вычислительной математики.

### **Библиографический комментарий**

Одной из первых монографий по теории и приложениям методов расщепления является книга Н. Н. Яненко [102]. Систематическое изложение методов расщепления содержится в монографии Г. И. Марчука [61], где рассмотрены приложения этих методов к различным задачам математической физики, задачам гидродинамики, океанологии и метеорологии, а также приведена обширная библиография. Значительное внимание методам расщепления уделено в книге [80].

Применение методов расщепления к задачам для уравнений Навье–Стокса и их теоретическое обоснование даются в [90]. В книге [67] рассмотрены разнообразные математические модели динамики вод в океанах и морях и описываются методы расщепления для их реализации. В статье В. И. Агошкова и Ф. Салери (Математическое моделирование, 1996, т. 6, №9, с. 3–24) получен ряд схем расщепления для уравнений мелкой воды и решена проблема граничных условий для этих схем. Математическое моделирование проблем, связанных с охраной окружающей среды, с применением методов расщепления, осуществлено в книге [62]. Другие разнообразные приложения методов расщепления и обширная библиография изложены в [61].

## Глава 7

### Методы решения нелинейных уравнений

*Ключевые слова:* вариация функционала, дифференциал Гато, градиент функционала, выпуклый функционал, монотонный оператор, нелинейная краевая задача, критическая точка функционала, вариационный метод, метод Ритца, метод Ньютона–Канторовича, метод Галеркина–Петрова, метод возмущений.

#### Основные понятия и обозначения

*Вариация функционала* — предел

$$Vf(u, h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(u + th) - f(u)}{t},$$

где  $f(u)$  — нелинейный функционал, заданный на нормированном пространстве  $E$ ,  $u, h \in E$ .

*Дифференциал Гато* — вариация  $Df(u, h) = Vf(u, h)$ , если она линейна по  $h$ .

*Производная Гато* — отображение  $f'(x)$  из представления  $Df(u, h) = f'(u)h$ .

*Градиент функционала* — производная Гато  $f'(u)$ , являющаяся линейным ограниченным функционалом.

*Выпуклый функционал* — вещественный дифференцируемый функционал  $f(u)$ , для которого при всех  $u, u_0$  выполняется неравенство

$$f(u) - f(u_0) - Df(u_0, u - u_0) \geq 0.$$

*Монотонный оператор* — отображение  $F: E \rightarrow E^*$ , для которого справедливо неравенство  $\langle u - v, F(u) - F(v) \rangle \geq 0$ , где  $E$  — нормированное пространство,  $E^*$  — сопряженное к нему, а  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — отношение двойственности.

*Полунепрерывный снизу функционал* — вещественный функционал  $f(u)$ , заданный в нормированном пространстве  $E$ ; является полунепрерывным снизу в точке  $u_0 \in E$ , если для любой последовательности  $u_n \in E$  такой, что  $u_n \rightarrow u_0$ , имеет место неравенство  $f(u_0) \leq \liminf_n f(u_n)$ .

*Критическая точка функционала* — точка  $u_0$ , в которой дифференциал Гато обращается в нуль:  $Df(u_0, h) = 0$ .

*Вариационный метод* — метод исследования нелинейных уравнений, который заключается в сведении нелинейного уравнения к задаче нахождения критических точек некоторого функционала.

*Минимизирующая последовательность* — последовательность  $u_n$ , удовлетворяющая условию  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = d$ , где  $f(u)$  — функционал, а  $d = \inf f(x)$ .

*Метод Рунца* — метод отыскания минимума функционала путем построения приближений в виде линейных комбинаций специальных базисных функций.

*Метод Ньютона–Канторовича* — итерационный процесс  $u_{n+1} = u_n - [F'(u_n)]^{-1} F(u_n)$  для решения уравнения  $F(u) = 0$ .

*Метод Галеркина–Петрова* — метод решения нелинейных уравнений путем проектирования уравнения на конечномерное подпространство и построения приближений в виде линейных комбинаций из этого подпространства.

*Метод возмущений* — метод решения нелинейных уравнений с малым параметром путем построения приближений в виде ряда по степеням этого параметра.

## 1. Введение

При математическом моделировании физических процессов и явлений часто возникают нелинейные задачи математической физики, среди которых хорошо известные уравнения Монжа–Ампера, Навье–Стокса, Колмогорова–Петровского и др. Вместе с граничными и начальными условиями нелинейные уравнения приводят к постановкам нелинейных краевых задач. Нелинейные краевые задачи могут быть сформулированы в свою очередь как операторные уравнения в функциональных пространствах. Для решения нелинейных операторных уравнений в последние годы разработан мощный аппарат в нелинейном функциональном анализе. Одним из основных методов исследования нелинейных уравнений является вариационный метод, с помощью которого решение исходного уравнения сводится к задаче отыскания критических точек некоторого функционала. Важную роль играют и методы минимизирующих последовательностей, среди которых метод наискорейшего спуска, метод Рунца, метод Ньютона–Канторовича. Одним из наиболее распространенных методов исследования и численного решения нелинейных задач является метод Галеркина–Петрова, суть которого состоит в том, что исходное уравнение проектируется на конечномерное подпространство, а приближения к решению ищутся в (возможно) другом подпространстве. Классический метод возмущений позволяет находить решения нелинейных задач путем разложения их по малому параметру. Эти методы находят широкое применение к решению нелинейных задач математической физики.

Для описания физических явлений и процессов часто используют дифференциальные или интегро-дифференциальные уравнения, которые вместе с набором исходных данных составляют математическую модель рассматриваемого процесса.

Однако математическое описание физических явлений нередко влечет некоторые упрощения. Если бы при описании учитывались все факторы, то часто возникали бы математически неразрешимые задачи. Поэтому математическое описание является по сути не более чем приближением к физической реальности. Описание, приводящее к линейному уравнению, является в некотором роде первым приближением, преимущество которого кроется в том, что оно приводит к математическим задачам, разрешимым с помощью имеющегося на настоящий момент математического аппарата. Более точное описание физических явлений привело бы к нелинейным уравнениям. Таким образом, нелинейное описание является следующим приближением, позволяющим рассмотреть дополнительные факторы. Проиллюстрируем это на примере. Уравнение Пуассона является частным случаем уравнения

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( k(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( k(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) = f(x, y) \quad \text{в } \Omega,$$

где заданная функция  $k = k(x, y)$  характеризует, например, теплопроводность материала в точке  $(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$ , а функция  $u = u(x, y)$  представляет собой распределение температуры. Если теплопроводность материала постоянна, то получаем уравнение Пуассона

$$-k \Delta u = f \quad \text{в } \Omega,$$

$k = \text{const}$ ,  $\Delta$  — оператор Лапласа. Однако известно, что теплопроводность материала может меняться не только с местоположением, но и с действующей на материал температурой, т.е. функция  $k$  может зависеть от  $u$ , а в конечном счете и от ее производных  $k = k\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$ . Тогда распределение температуры описывается уравнением

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( k\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( k\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \frac{\partial u}{\partial y} \right) = f(x, y). \quad (1)$$

Но это уравнение уже нелинейное. Нелинейное уравнение (1) является частным случаем уравнения

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( a_1(x, y; u, \text{grad} u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( a_2(x, y; u, \text{grad} u) \frac{\partial u}{\partial y} \right) + a_0 = f(x, y), \quad (2)$$

где  $a_0 = a_0(x, y; u, \text{grad} u)$ . Если положить в уравнении (2)

$$a_1(x, y; \xi_0, \xi_1, \xi_2) = a_2(x, y; \xi_0, \xi_1, \xi_2) = k(x, y; \xi_0, \xi_1, \xi_2), \quad a_0 = 0,$$

то получим уравнение (1). В уравнении (2)  $a_i = a_i(x, y; \xi_0, \xi_1, \xi_2)$  — заданные функции, определенные для  $(x, y) \in \Omega$ ,  $\xi_0, \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^3$ , а  $f = f(x, y)$  — заданная на  $\Omega$  функция. Уравнение вида (2) часто встречается на практике.

Вместе с граничными и начальными условиями нелинейные уравнения приводят к постановкам нелинейных краевых задач. Нелинейные краевые задачи могут быть сформулированы в свою очередь как операторные уравнения в банаховых пространствах.

Рассмотрим, например, задачу (2) с краевым условием  $u_i|_{\partial\Omega} = 0$ . Пусть  $a_i$ ,  $i = 0, 1, 2$ , — достаточно гладкие функции. Обозначим через  $v$  левую

часть уравнения (2). Тогда каждой функции  $u \in C^2(\overline{\Omega})$  ставится в соответствие функция  $v \in C^0(\overline{\Omega})$ . Это соответствие определяет оператор  $A$ , отображающий банахово пространство  $C^2(\overline{\Omega})$  в банахово пространство  $C^0(\overline{\Omega})$ . В качестве области определения этого оператора можно взять  $D(A) = \{u \in C^2(\overline{\Omega}) : u|_{\partial\Omega} = 0\}$ . Тогда рассматриваемая краевая задача может быть записана в виде операторного уравнения

$$Au = f,$$

т. е. для данной функции  $f \in C^0(\overline{\Omega})$  требуется найти функцию  $u \in D(A)$  такую, что  $Au = f$ . Таким образом, нелинейная краевая задача может быть сведена к операторному уравнению вида  $Au = f$ .

Отметим, что явные формулы, дающие решение краевой задачи для нелинейных дифференциальных уравнений, могут быть найдены только в исключительных случаях. По этим причинам тут находят широкое применение приближенные методы исследования и численного решения нелинейных задач. В последние годы математики разработали в нелинейном функциональном анализе мощный аппарат для решения таких задач [7, 9, 10, 17, 36, 42, 50, 77, 94, 99, 116].

## 2. Элементы нелинейного анализа

### 2.1. Непрерывность и дифференцируемость нелинейных отображений.

#### 2.1.1. Основные определения.

**Определение 1.** Пусть  $E_x$  и  $E_y$  — нормированные пространства. Оператор  $F: E_x \rightarrow E_y$  называется *слабо непрерывным* в точке  $u_0 \in E_x$ , если из  $u_n \rightarrow u_0$  следует  $F(u_n) \rightarrow F(u_0)$ , где символ  $\rightarrow$  означает слабую сходимость.

**Определение 2.** Оператор  $F: E_x \rightarrow E_y$  называется *компактным*, если он преобразует всякое ограниченное множество пространства  $E_x$  в относительно компактное множество пространства  $E_y$ .

**Определение 3.** Оператор  $F: E_x \rightarrow E_y$  называется *вполне непрерывным*, если он непрерывен и компактен.

**Определение 4.** Оператор  $F: E_x \rightarrow E_y$  называется *усиленно непрерывным*, если он преобразует всякую слабо сходящуюся последовательность в сильно сходящуюся, т. е.  $u_n \rightarrow u_0 \implies F(u_n) \rightarrow F(u_0)$ .

**Определение 5.** Оператор  $F: E_x \rightarrow E_y$  называется *коэрцитивным*, если

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\langle u, F(u) \rangle}{R} = +\infty \quad (R = \|u\|).$$

Отметим, что в рефлексивных пространствах  $E_x$  из усиленной непрерывности оператора  $F: E_x \rightarrow E_y$  следует, что этот оператор вполне непрерывен. Известны, однако, примеры нелинейных вполне непрерывных отображений в  $L_2$ , не являющихся усиленно непрерывными.

**Теорема 1.** Для линейных операторов полная непрерывность совпадает с усиленной непрерывностью.

2.1.2. *Производная и градиент функционала.* Пусть  $f(u)$  — нелинейный функционал, заданный на всюду плотном линейном подпространстве  $D(f)$  вещественного нормированного пространства  $E$ . Допустим, что в точке  $u \in D(f)$  для всех  $h \in D(f)$  существует предел

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(u+th) - f(u)}{t} = Vf(u, h);$$

он называется *вариацией функционала  $f$* . Эта вариация есть однородный функционал от  $h$ , ибо  $Vf(u, \alpha h) = \alpha Vf(u, h)$ , но она может и не быть аддитивным по  $h$  функционалом. Если вариация  $Vf(u, h)$  — линейный по  $h$  функционал, то ее называют *дифференциалом Гато* и пишут  $Vf(u, h) = Df(u, h)$ . Этот линейный функционал от  $h$  записывают так же, как  $Df(u, h) = f'(u)h$ , и говорят, что  $f'(u)$  — *производная Гато* от функционала  $f$  в точке  $u$ . Аналогично вводится понятие производной Гато от оператора  $F$ , действующего из  $D(F) \subset E_x$  в  $E_y$ .

Если при данном фиксированном  $u$  производная  $f'(u)$  есть ограниченный линейный функционал, т. е.  $f'(u) \in E^*$ , то ее называют *градиентом функционала  $f$*  и обозначают  $\text{grad} f(u)$ . В этом случае  $Df(u, h) = \langle h, \text{grad} f(u) \rangle$ . Здесь  $\langle h, \text{grad} f(u) \rangle$  означает значение непрерывного линейного функционала  $f'(u) = \text{grad} f(u)$  на векторе  $h \in D(f)$ . Так как  $D(f)$  плотно в  $E$ , то по непрерывности функционал можно продолжить с  $D(f)$  на все  $E$ . Это продолжение также обозначается  $\text{grad} f(u)$ . (Здесь  $u$  — фиксированный вектор из  $E$ .) Итак, по определению градиента имеем

$$\langle h, \text{grad} f(u) \rangle = \frac{d}{dt} f(u+th) \Big|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(u+th) - f(u)}{t},$$

где  $\langle h, v \rangle$  — значение линейного функционала  $v \in E^*$  на векторе  $h \in E$ .

Если  $\text{grad} f(u)$  определен для любого  $u \in \omega \subset E$ , то  $\text{grad} f(u)$  отображает  $\omega$  на некоторое множество из  $E^*$ .

Если функционал  $f(u)$  дифференцируем по Гато в каждой точке открытого выпуклого множества  $\omega$  нормированного пространства  $E$ , то для любых  $u$ ,  $u+h \in \omega$  существует такое  $\tau$ ,  $0 < \tau < 1$ , что выполнена *формула Лагранжа*

$$f(u+h) - f(u) = Df(u + \tau h, h),$$

В случае ограниченности производной Гато будем иметь

$$f(u+h) - f(u) = \langle h, \text{grad} f(u + \tau h) \rangle,$$

так что в случае ограниченности  $\text{grad} f(u)$  на  $\omega$ , т. е. если  $\|\text{grad} f(u)\| \leq c = \text{const}$ , из последней формулы получим *неравенство Литшица*

$$|f(u+h) - f(u)| \leq \|\text{grad} f(u + \tau h)\| \|h\|,$$

т. е.

$$|f(u+h) - f(u)| \leq c \|h\|, \quad c = \text{const} > 0.$$

2.1.3. *Дифференцируемость по Фреше.* Пусть  $E_x$  и  $E_y$  — нормированные пространства и  $F$  — отображение открытого множества  $\omega \subset E_x$  в  $E_y$ .

**Определение 6.** Если при фиксированном  $u \in \omega$  и всех  $h \in E_x$ , для которых  $u + h \in \omega$ ,  $F(u + h) - F(u) = g(u, h) + \omega(u, h)$ , где  $g(u, h)$  — линейный непрерывный по  $h$  оператор, а

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\omega(u, h)}{\|h\|} = 0,$$

то  $g(u, h)$  называется *дифференциалом Фреше* оператора  $F$  в точке  $u$ , а  $\omega(u, h)$  — остатком этого дифференциала. Пишут  $g(u, h) = dF(u, h)$ . Пишут также  $dF(u, h) = F'(u)h$ , где  $F'(u) \in L(E_x, E_y)$  называется *производной Фреше* оператора  $F$  в точке  $u$ . Здесь  $L(E_x, E_y)$  обозначает пространство линейных непрерывных операторов из  $E_x$  в  $E_y$ . Если  $E_y = \mathbb{R}^1$ , то  $F = f$  — функционал. В этом случае имеем  $f(u + h) - f(u) = f'(u)h + \omega(u, h)$ , где производная Фреше  $f'(u)$  как ограниченный линейный функционал есть  $\text{grad} f(u)$ .

Из определения производных Гато и Фреше следует, что если отображение дифференцируемо по Фреше, то оно дифференцируемо по Гато, и производные совпадают. Обратное утверждение не всегда справедливо. Известны отображения, которые всюду дифференцируемы по Гато, но нигде не дифференцируемы по Фреше. В связи с последним представляет интерес следующая

**Теорема 2.** Если производная Гато  $F'$  существует в некоторой окрестности точки  $u_0$ , ограничена и непрерывна в точке  $u_0$  в смысле нормы пространства  $L(E_x, E_y)$ , то в точке  $u_0$  существует производная Фреше  $F'$ , так что  $DF(u_0, h) = dF(u_0, h)$ .

2.1.4. *Производные высших порядков и ряд Тейлора.* Пусть  $X, Y$  — банаховы пространства и  $F_k(u_1, \dots, u_k)$  — оператор, зависящий от  $k$  переменных  $u_1, \dots, u_k \in X$ , со значениями в  $Y$ . Оператор  $F_k(u_1, \dots, u_k)$  называется  *$k$ -линейным*, если он линеен по каждому своему аргументу  $u_i$  при фиксированных остальных аргументах. Далее,  $k$ -линейный оператор  $F_k(u_1, \dots, u_k)$  называется *ограниченным*, если существует постоянная  $m \in \mathbb{R}$ ,  $m > 0$  такая, что

$$\|F_k(u_1, \dots, u_k)\| \leq m \|u_1\| \dots \|u_k\|.$$

Наименьшая из таких постоянных называется *нормой*  $F_k$  и обозначается  $\|F_k\|$ . Линейный по каждому аргументу оператор  $F_k(u_1, \dots, u_k)$  называется *симметричным*, если его значения не меняются при любой перестановке его аргументов. Пусть  $F_k(u_1, \dots, u_k)$  —  $k$ -линейный симметричный оператор. Оператор  $F_k(u, \dots, u)$  называется  *$k$ -степенным* оператором и обозначается  $F_k u^k$ . Далее  $k$ -линейный оператор записывается в виде  $F_k u_1, \dots, u_k$ .

Пусть оператор  $F(u)$  дифференцируем в окрестности  $S$ , а дифференциал  $dF(u, h)$  также дифференцируем в точке  $u_0$ :

$$F'(u_0 + g)h - F'(u_0)h = (Bg)h + \rho(g)h,$$

где  $\|\rho(g)\| = o(\|g\|)$  при  $g \rightarrow 0$ . При этом оператор

$$B = F''(u_0) \in L(X, L(X, Y))$$

называется *второй производной* оператора  $F(u)$  в точке  $u_0$ . Из определения  $F''(u_0)$  следует, что  $F''(u_0)hg$  есть ограниченный билинейный симметричный оператор. Далее,

$$d^2F(u_0; h) = d[dF(u, h); u_0, g] \Big|_{g=h},$$

откуда  $d^2F(u_0; h) = F''(u_0)h^2$  — квадратичный или двухстепенной оператор, получающийся из билинейного при  $g = h$ .

Если  $d^n F(u; h) = F^{(n)}(u)h^n$  уже определен, то в предположении его дифференцируемости в точке  $u_0$  полагают

$$d^{n+1}F(u_0; h) = d[d^n F(u, h); u_0, g] \Big|_{g=h},$$

откуда  $d^{n+1}F(u_0; h) = F^{(n+1)}(u_0)h^{n+1}$ . Оператор  $F^{(n)}(u_0)h_1, \dots, h_n$  является  $n$ -линейным симметричным оператором, а  $d^n F(u_0, h)$  —  $n$ -степенным оператором.

Пусть  $F_k u^k$  —  $k$ -степенные операторы из  $X$  в  $Y$  ( $k \in \mathbb{N}$ ), а  $F_0 \in Y$ . Образует формальный степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} F_k u^k \quad (F_0 u^0 = F_0).$$

Предположим, что числовой ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|F_k\| \|u\|^k,$$

мажорирующий рассматриваемый степенной, имеет *радиус сходимости*  $\bar{\rho} > 0$ . Тогда в любом шаре  $S_{\rho}$ , где  $\rho \in (0, \bar{\rho})$ , исходный степенной ряд сходится абсолютно и равномерно. Пусть  $\bar{\rho} > 0$ , а  $F(u)$  — сумма исходного степенного ряда, т. е.

$$\sum_{k=0}^n F_k u^k \rightarrow F(u)$$

при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда оператор  $F(u)$  называется *аналитическим оператором* в точке  $u = 0$ .

Если дан бесконечно дифференцируемый оператор  $F(u)$ , то степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_k(0)}{k!} u^k$$

называется *рядом Тейлора*  $F(u)$  в точке  $u = 0$ . Поскольку разложение оператора  $F(u)$  в степенной ряд единственно, то всякий степенной ряд аналитического оператора является его рядом Тейлора.

## 2.2. Сопряженные нелинейные операторы.

2.2.1. *Сопряженные нелинейные операторы и их свойства.* Пусть  $E$  — рефлексивное вещественное банахово пространство и  $F: E \rightarrow E^*$  — нели-

нейное непрерывно дифференцируемое по Гато, а значит, и по Фреше отображение, т.е.  $F' \in L(E, E^*)$ , причем для каждого фиксированного  $u \in E$

$$\|F'(u) - F'(v)\|_{L(E, E^*)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \|u - v\| \rightarrow 0.$$

Будем предполагать также, что  $F(0) = 0$ . Из этой совокупности операторов  $\{F\}$  выделим класс  $D$  таких, что каждому  $F \in D$  отвечает такое отображение  $G$  из той же совокупности, что  $\langle G'(u)v, w \rangle = \langle F'(u)v, w \rangle$  (для всех  $u, v, w \in E$ ). При выполнении последнего равенства будем писать [10]  $G'(u) = (F'(u))^*$  и называть  $G$  оператором, сопряженным с  $F$ . Итак, множество  $D$  содержит все непрерывно дифференцируемые по Гато операторы, обращающиеся в нуль в нуль и имеющие сопряженные операторы  $G$ , обладающие такими же свойствами.

Сопряженный оператор, если он существует, является единственным. Ввиду единственности сопряженного оператора  $G$  можно писать  $G = F^*$ . Для линейных операторов  $F$  и  $G$  последнее равенство совпадает с обычным определением сопряженного оператора.

Переходим к рассмотрению свойств сопряженных операторов.

1. Если  $F$  имеет сопряженный оператор, то  $F^*$  также имеет сопряженный оператор, и  $F^{**} \equiv (F^*)^* = F$ . Это свойство прямо следует из определения.

2. Если операторы  $F$  и  $G$  имеют сопряженные, то  $F + G$  имеет сопряженный оператор, причем  $(aF + bG)^* = aF^* + bG^*$  для любых вещественных чисел  $a, b$ .

3. Если  $F$  имеет сопряженный оператор, то  $F^*(u) = \int_0^1 (F'(tu))^* u dt$  (для всех  $u \in E$ ).

4. Если оператор  $F$  имеет сопряженный, то  $\langle F(u), u \rangle = \langle F^*(u), u \rangle$ .

Другие определения сопряженного оператора можно найти в [116].

**2.2.2. Симметрия и кососимметрия.** Оператор  $F \in D$  называется симметрическим, если  $F = F^*$ . Если  $F \in D$  и  $F^* = -F$ , то  $F$  называется кососимметрическим. Из свойств 1<sup>0</sup> и 2<sup>0</sup> непосредственно следует, что если  $F \in D$ , то  $(F + F^*)$  — симметрический оператор, а  $(F - F^*)$  — кососимметрический оператор.

**Теорема 3.** Оператор  $F \in D$  является симметрическим тогда и только тогда, когда он сильно потенциален, т.е. существует такой дифференцируемый по Фреше функционал  $f \in E^*$ , что  $F(u) = \text{grad} f(u)$ .

**Теорема 4.** Оператор  $F \in D$  является кососимметрическим тогда и только тогда, когда он линейный и для любого  $u \in E$  выполняется равенство  $\langle F(u), u \rangle = 0$ .

### 2.3. Выпуклые функционалы и монотонные операторы.

**Определение 7.** Вещественный дифференцируемый функционал  $f(u)$ , заданный на открытом выпуклом множестве  $\omega$  нормированного пространства  $E$ , называется выпуклым на  $\omega$ , если для любых  $u, u_0 \in \omega$  выполняется неравенство  $f(u) - f(u_0) - Df(u_0, u - u_0) \geq 0$ , и строго выпуклым, если равенство возможно лишь при  $u = u_0$ .

Если дифференциал  $Df(u, h)$  ограничен по  $h$ , то последнее неравенство принимает вид  $f(u) - f(u_0) - \langle F(u_0), u - u_0 \rangle \geq 0$ , где  $F(u) = \text{grad } f(u)$ . Известно еще и следующее определение.

**Определение 8.** Если для всех  $u_1, u_2 \in \omega$  и  $\lambda \in (0, 1)$  выполняется неравенство  $f(\lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2) \leq \lambda f(u_1) + (1 - \lambda)f(u_2)$ , то  $f$  называется *выпуклым функционалом*.

Для дифференцируемых по Гато функционалов определения 7 и 8 эквивалентны.

**Определение 9.** Отображение  $F: E \rightarrow E^*$  называется *монотонным* на множестве  $\sigma \subset E$ , если для любых  $u, v \in \sigma$  выполняется неравенство  $\langle u - v, F(u) - F(v) \rangle \geq 0$ , и строго монотонным, если равенство выполняется лишь при  $u = v$ .

**Теорема 5.** Для монотонности (строгой монотонности)  $F(u) = \text{grad } f(u)$  на открытом выпуклом множестве  $\omega \in E$  необходимо и достаточно, чтобы функционал  $f$  был выпуклым ( строго выпуклым).

**Определение 10.** Вещественный функционал  $f$ , заданный в нормированном пространстве  $E$ , называется *полунепрерывным (слабо полунепрерывным) снизу в точке  $u_0$* , если какова бы ни была последовательность  $(u_n) \in E$  такая, что  $u_n \rightarrow u_0$  ( $u_n \rightharpoonup u_0$ ), имеет место неравенство  $f(u_0) \leq \liminf_n f(u_n)$ .

Функционал  $f$  называется *полунепрерывным (слабо полунепрерывным) снизу на  $\sigma$* , если он обладает этим свойством в каждой точке  $\sigma$ . Так же, как для вещественных функций, можно показать, что сумма полунепрерывных (слабо полунепрерывных) снизу функционалов представляет собой полунепрерывный (слабо полунепрерывный) снизу функционал.

**Теорема 6.** Пусть на открытом выпуклом множестве  $\omega$  нормированного пространства задан выпуклый и дифференцируемый по Гато функционал  $f$ . Тогда если  $Df(u, h)$  непрерывен по  $h$ , то  $f$  слабо полунепрерывен снизу на  $\omega$ .

Приведем теперь критерий слабой полунепрерывности снизу функционалов.

**Теорема 7.** Для того чтобы функционал  $f$ , заданный в нормированном пространстве, был слабо полунепрерывен снизу, необходимо и достаточно выполнения условия: каково бы ни было вещественное число  $c$ , множество  $E_c = \{u: f(u) \leq c\}$  секвенциально слабо замкнуто.

**Теорема 8.** Для слабой полунепрерывности снизу выпуклого функционала, заданного в банаховом пространстве, необходимо и достаточно, чтобы он был полунепрерывен снизу.

Вопрос о слабой полунепрерывности снизу также связан с понятием опорного функционала.

**Определение 11.** Линейный функционал  $v_0 \in E^*$  называется *опорным (или субградиентом)* к функционалу  $f$  в точке  $u_0 \in E$ , если  $f(u) - f(u_0) \geq \langle v_0, u - u_0 \rangle$ .

Из этого неравенства вытекает слабая полунепрерывность  $f$  снизу. Для формулировки очередной теоремы нам потребуется следующее понятие. Пусть  $F$  — отображение одного нормированного пространства в другое нормированное пространство. Если существует предел

$$V_+F(u, h) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{F(u + th) - F(u)}{t}$$

для любого  $h \in D(F)$ , то  $V_+F(u, h)$  называется *вариацией  $F$  в точке  $u$  по направлению  $h$* .

**Теорема 9.** Если  $E$  — нормированное пространство и конечный выпуклый функционал  $f$ , заданный на открытом выпуклом множестве  $\omega \subset E$ , имеет непрерывную по  $h$  вариацию  $V_+f(u, h)$  для любого  $u \in \omega$ , то он имеет опорный функционал в каждой точке  $u \in \omega$ .

## 2.4. Вариационный метод исследования нелинейных уравнений.

**2.4.1. Экстремальные и критические точки функционалов.** Пусть  $f$  — вещественный функционал, заданный в нормированном пространстве  $E$ . Точка  $u_0 \in E$  называется *экстремальной точкой функционала  $f$* , если в некоторой окрестности  $V(u_0)$  этой точки выполняется одно из следующих неравенств:

- 1)  $f(u) \leq f(u_0)$ ;
- 2)  $f(u) \geq f(u_0)$  для всех  $u \in V(u_0)$ .

Если второе неравенство справедливо для всех  $u \in E$ , то  $u_0$  называется *точкой абсолютного минимума функционала  $f$* . Далее, если  $f$  дифференцируем по Гато в точке  $u_0$ , то при выполнении условия  $Df(u_0, h) = 0$  точка  $u_0$  называется *критической точкой функционала  $f$* . Так как из равенства нулю дифференциала следует его непрерывность по  $h$ , то последнее равенство принимает вид  $\langle \text{grad} f(u_0), h \rangle = 0$ , и так как это равенство справедливо для произвольного  $h \in E$ , то можно сказать, что  $u_0$  — критическая точка  $f$ , если  $\text{grad} f(u_0) = 0$ .

**Теорема 10.** Пусть функционал  $f$  задан в области  $\omega$  нормированного пространства  $E$  и  $u_0$  — внутренняя точка области  $\omega$ , в которой существует линейный дифференциал Гато.

Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Для того чтобы точка  $u_0$  была экстремальной, необходимо, чтобы она была критической, т. е. чтобы

$$\text{grad} f(u_0) = 0. \quad (3)$$

2. Если дополнительно в некоторой выпуклой окрестности  $U(u_0)$  точки  $u_0$  функционал  $f$  выпуклый (или  $\text{grad} f(u)$  — монотонный оператор), то равенство (3) необходимо и достаточно для того, чтобы точка  $u_0$  была точкой минимума функционала  $f$ .

**Теорема 11** (обобщенная теорема Вейерштрасса) Если на ограниченном слабо замкнутом множестве  $\sigma$  в рефлексивном банаховом пространстве  $E$  задан конечный слабо полунепрерывный снизу функционал  $f$ , то он ограничен снизу и достигает на  $\sigma$  своей нижней грани.

### 2.4.2. Теоремы существования критических точек.

**Теорема 12** (элементарный принцип критической точки). Пусть  $K = \{u: u \in E, \|u\| \leq r, r > 0\}$  — шар рефлексивного банахова пространства  $E$  и  $S$  — поверхность этого шара.

Тогда если слабо полунепрерывный снизу на  $K$  функционал  $f$  дифференцируем по Гато на открытом шаре  $\|u\| < r$  и  $\inf_{\|u\|=r} f(u) > f(u^*)$ , где  $\|u^*\| < r$ , то в точке минимума  $u_0 \in K$  этого функционала  $\text{grad} f(u_0) = 0$ .

**Теорема 13.** Пусть вещественный функционал  $f$ , заданный в вещественном рефлексивном банаховом пространстве  $E$ , дифференцируем по Гато и  $\text{grad} f = F$  удовлетворяет условиям:

- 1) функция  $\langle F(tu), u \rangle$  непрерывна по  $t$  на  $[0, 1]$  при любом  $u \in E$ ;
- 2)  $\langle F(u+h) - F(u), h \rangle \geq 0$  (при всех  $u, h \in E$ );
- 3)  $\lim_{\|u\| \rightarrow \infty} (\langle F(u), u \rangle / \|u\|) = +\infty$ , т. е.  $F$  коэрцитивен.

Тогда существует точка минимума  $u_0$  функционала  $f$  и  $\text{grad} f(u_0) = 0$ . Если в условии 2) знак равенства возможен лишь при  $h = 0$ , т. е.  $F$  — строго монотонный оператор, то точка минимума функционала единственная, и в ней  $f$  принимает абсолютный минимум.

**Теорема 14.** Пусть дифференцируемый по Гато вещественный функционал  $f$ , заданный в рефлексивном вещественном банаховом пространстве, слабо полунепрерывен снизу и удовлетворяет на некоторой сфере  $S = \{u: u \in E, \|u\| = R > 0\}$  условию  $\langle F(u), u \rangle > 0$ .

Тогда существует внутренняя точка  $u_0$  шара  $\|u\| \leq R$ , в которой  $f$  имеет локальный минимум, а следовательно,  $\text{grad} f(u_0) = 0$ .

**Теорема 15.** Пусть монотонный потенциальный оператор  $F(u)$ , заданный в рефлексивном вещественном банаховом пространстве  $E$ , удовлетворяет условию  $\langle F(u), u \rangle \geq \|u\| \gamma(\|u\|)$ , где функция  $\gamma(t)$  интегрируема на отрезке  $[0, R]$  при любом  $R > 0$  и

$$\overline{\lim}_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R \gamma(t) dt = c > 0.$$

Тогда потенциал  $f$  оператора  $F$  имеет точку минимума. Эта точка минимума единственна, и в ней  $f$  принимает абсолютный минимум, если  $F$  — строго монотонный оператор.

**2.4.3. Основная идея вариационного метода.** Пусть  $\Phi$  — потенциальный оператор, т. е. существует такой функционал  $\phi$ , что  $\Phi = \text{grad} \phi$ . Вариационный метод доказательства существования решения уравнения  $\Phi(u) = 0$  сводится к нахождению критических точек функционала  $\phi$ . Так, если  $u_0$  — критическая точка функционала  $\phi$ , т. е.  $\text{grad} \phi(u_0) = 0$ , то  $u_0$  есть решение уравнения  $\Phi(u) = 0$ . Вот почему вопрос о безусловном минимуме функционалов представляет интерес для нелинейных уравнений с потенциальными операторами.

Если  $\Phi$  не является потенциальным оператором, то возможны следующие приемы.

1. Уравнение  $\Phi(u) = 0$  заменяется эквивалентным уравнением  $\Psi(u) = 0$ , где  $\Psi$  — потенциальный оператор.

2. Ищется минимум функционала  $\|\Phi(u)\| = f(u)$ .

2.4.4. Разрешимость уравнений с монотонными операторами. С помощью вариационного метода доказываются следующие утверждения [10].

**Теорема 16.** Пусть потенциальный монотонный оператор  $F$ , заданный в рефлексивном вещественном банаховом пространстве  $E$ , удовлетворяет условию коэрцитивности

$$\lim_{\|u\| \rightarrow \infty} \frac{\langle F(u), u \rangle}{\|u\|} = +\infty,$$

причем  $\langle F(tu), u \rangle$  непрерывно по  $t$  на  $[0, 1]$  при любом  $u \in E$ .

Тогда уравнение  $F(u) = v$  имеет решение при любом  $v \in E^*$ , т. е.  $F$  — сюръективное отображение  $E \rightarrow E^*$  (отображение  $E$  на  $E^*$ ). Если  $F$  — строго монотонный оператор, то он представляет собой биективное (сюръективное и взаимно однозначное) отображение  $E \rightarrow E^*$ .

**Теорема 17.** Пусть потенциальный монотонный оператор  $F$ , заданный в рефлексивном вещественном банаховом пространстве  $E$ , удовлетворяет условиям:

1) при любом  $u \in E$  существует  $\int_0^1 \langle F(tu), u \rangle dt$ ;

2)  $\langle F(u), u \rangle \geq \|u\| \gamma(\|u\|)$ , где  $\gamma(t)$  — функция, интегрируемая на отрезке  $[0, R]$ , при любом  $R > 0$  и

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \int_0^R \gamma(t) dt = +\infty.$$

Тогда отображение  $F: E \rightarrow E^*$  сюръективно. Если  $F$  — строго монотонный оператор, то  $F: E \rightarrow E^*$  биективно.

**2.5. Минимизирующие последовательности.** Конструктивным способом доказательства существования безусловного минимума функционала является построение сходящихся минимизирующих последовательностей, которые в свою очередь могут быть использованы для построения приближенного решения задачи.

2.5.1. Минимизирующие последовательности и их свойства. Пусть  $E$  — вещественное векторное пространство,  $f$  — вещественный функционал, заданный на  $E$ , и  $\sigma$  — некоторое множество из  $E$ .

**Определение 12.** Всякая последовательность  $(u_n) \subset \sigma$ , удовлетворяющая условию  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = d$ , где  $d = \inf_{\sigma} f(u)$ , называется минимизирующей (для  $f$  на  $\sigma$ ). Это определение сохраняется и тогда, когда  $d = f(u_0)$ , где  $u_0$  — точка условного минимума  $f$  относительно  $\sigma$  или безусловного минимума  $f$ , т. е. точка локального или абсолютного минимума  $f$  относительно пространства  $E$ .

Важным является вопрос о сходимости минимизирующих последовательностей к точке безусловного минимума функционала. При изучении этого вопроса известную роль играют выпуклые функционалы, обладающие некоторыми дополнительными свойствами. Если  $E$  — конечномерное пространство, то в силу компактности в нем любого замкнутого шара можно утверждать следующее: если вещественная функция  $f$  растёт вдоль каждого луча, выходящего из точки  $u_0$ , то  $f(u) - f(u_0)$  обладает монотонной минорантой  $c(t)$  для  $t \geq 0$ ,  $c(0) = 0$ , которую можно считать непрерывной, строго возрастающей и удовлетворяющей условию  $f(u) - f(u_0) \geq c(\|u - u_0\|)$ . Разумеется, если это неравенство имеет место для функционала  $f$ , то  $u_0$  — точка минимума  $f(u)$ , и всякая минимизирующая последовательность сходится к этой точке  $u_0$ . Однако в бесконечномерных пространствах существуют строго выпуклые функционалы, имеющие в точке  $u_0$  минимум, а значит, растущие вдоль всякого луча, выходящего из  $u_0$ , для которых тем не менее неравенство не имеет места.

Возникает вопрос об условиях, обеспечивающих ограниченность всякой минимизирующей последовательности. Приведем такое условие, использующее следующее определение.

**Определение 13.** Конечный вещественный функционал  $f$ , заданный в нормированном пространстве  $E$ , называется *возрастающим*, если для любого числа  $c$  множество  $\{u: u \in E, f(u) \leq c\}$  ограничено.

**Теорема 18.** Если  $f$  — *возрастающий функционал*, то всякая минимизирующая его последовательность ограничена.

Из последнего утверждения вытекает, что если возрастающий функционал задан в рефлексивном банаховом пространстве и  $d = f(u_0)$ , то из всякой минимизирующей последовательности  $d = \inf f = f(u_0)$  можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся к  $u_0$ .

**2.5.2. Корректная постановка задачи минимизации.** Следующее определение принадлежит А. Н. Тихонову.

**Определение 14.** Задача минимизации вещественного функционала, заданного на некотором подмножестве нормированного пространства, *поставлена корректно*, если она разрешима, имеет единственное решение и к нему сходится в смысле нормы пространства любая минимизирующая последовательность.

Приведем достаточное условие корректности задачи минимизации функционала.

**Теорема 19.** Пусть  $\gamma(t)$  — неотрицательная функция, интегрируемая на  $[0, R]$  при любом  $R > 0$  и такая, что  $c(R) = \int_0^R \gamma(t) dt$  возрастает и при некотором  $R$ :  $c(R) > R\|F(0)\|$ .

Тогда если оператор  $F = \text{grad } f$ , заданный в рефлексивном банаховом пространстве  $E$ , удовлетворяет условиям: для любых  $h, v \in E$  функция  $\langle F(v + th), h \rangle$  интегрируема по  $t$  на  $[0, 1]$  и  $\langle F(v + h) - F(v), h \rangle \geq \|h\| \gamma(\|h\|)$ , то задача минимизации функционала  $f$  поставлена корректно.

Ниже перейдем к рассмотрению некоторых методов построения минимизирующих последовательностей. Из известных методов минимизации нелинейных функционалов рассмотрим метод наискорейшего спуска, метод Ритца и метод Ньютона — именно они широко используются для решения нелинейных уравнений.

### 3. Метод наискорейшего спуска

#### 3.1. Нелинейное уравнение и его вариационная формулировка.

Пусть  $F$  — потенциальный оператор, действующий из банахова пространства  $E$  в сопряженное пространство  $E^*$ . Это означает, что существует такой функционал  $f \in E^*$ , что  $F = \text{grad } f$ .

Поставим задачу отыскания решений нелинейного уравнения

$$F(u) = 0. \quad (4)$$

Как следует из теоремы 10, эта задача сводится к нахождению критических точек функционала  $f$ . Поставим вопрос о безусловном минимуме функционала  $f$ , а именно: найти  $u_0 \in E$  такое, что

$$f(u_0) = \inf_{u \in E} f(u). \quad (5)$$

Формулировка задачи в таком виде называется *вариационной*.

Если оператор  $f$  не является потенциальным, то вместо (5) рассматривают следующую задачу о минимизации функционала  $\|F(u)\|$ : найти  $u_0 \in E$  такое, что

$$\|F(u_0)\| = \inf_{u \in E} \|F(u)\|. \quad (6)$$

Вариационные формулировки в виде (5), (6) часто используются для исследования и численного решения исходной нелинейной задачи (4). Ниже для этой цели применяется метод наискорейшего спуска, который позволяет находить приближенные решения вариационных постановок.

**3.2. Основная идея метода наискорейшего спуска.** Пусть в вещественном гильбертовом пространстве  $H$  задан дифференцируемый по Гато вещественный и ограниченный снизу нелинейный функционал  $f$ . Положим  $d = \inf_{u \in H} f$  и  $F = \text{grad } f$ . Возьмем произвольный вектор  $u_1 \in H$  и допустим, что  $F(u_1) \neq 0$ . Разумеется, если  $f$  — строго выпуклый функционал, то он может иметь лишь единственную точку минимума и принимает в ней значение, равное  $d$ ; поэтому требование  $F(u_1) \neq 0$  означает, что  $u_1$  не есть точка минимума  $f$ . Выберем вектор  $h \in H$  так, чтобы его длина  $\|h\| = \|F(u_1)\|$ , и выясним, как можно выбрать направление  $h$ , чтобы производная

$$\frac{d}{dt} f(u_1 + th) = \langle F(u_1 + th), h \rangle$$

имела наименьшее значение при  $t = 0$ , т. е. чтобы  $h$  было направлением наибольшего убывания  $f(u)$  в точке  $u_1$ . С этой целью сначала выберем направление  $h$  так, чтобы  $(F(u_1), h)$  имело наибольшее значение, а затем изменим знак вектора  $h$ , так что  $(F(u_1), -h)$  будет иметь наимень-

шее значение. Так как  $(F(u_1), h) \leq \|F(u_1)\| \|h\| = \|F(u_1)\|^2$ , то  $(F(u_1), h)$  примет наибольшее значение лишь при  $h = F(u_1)$  и наименьшее при  $h = -F(u_1)$ , т.е. когда направление  $h$  совпадает с направлением антиградиента  $f$ . Положим  $h_1 = -F(u_1)$  и рассмотрим вещественную функцию  $\varphi(t) = f(u_1 + th_1)$ ,  $t \geq 0$ . По построению функция  $\varphi(t)$  убывает в некоторой правой полуокрестности точки  $t = 0$ . Пусть существует  $\min \varphi(t)$  и  $t_1$  — наименьшее положительное значение  $t$ , для которого  $\varphi(t_1) = \min \varphi(t)$ . Положим  $u_2 = u_1 + t_1 h_1 = u_1 - t_1 F(u_1)$ . По построению  $f(u_2) = f(u_1 + t_1 h_1) < f(u_1)$ . Считая  $F(u_2) \neq 0$ , можно повторить предыдущие рассуждения. Таким образом, если для каждого  $k$  выполнено  $F(u_k) \neq 0$ , то приходим к следующему процессу:

$$u_{n+1} = u_n - t_n F(u_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (7)$$

который называется *процессом наискорейшего спуска*, или *процессом градиентного спуска*. Хотя последовательность (7) и такова, что

$$f(u_{n+1}) < f(u_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (8)$$

она может и не быть минимизирующей.

**Определение 15.** Всякая последовательность  $\{u_n\}$ , для которой выполняется неравенство (8), называется *релаксационной*, а числа  $t_n$ , входящие в (7), называются *релаксационными множителями*.

Отметим, что даже в случае гильбертова пространства возникают трудности при определении релаксационных множителей. Лишь в простейших случаях удается эффективно их вычислить. Ввиду этого числа  $t_n$  заменяются положительными числами  $\varepsilon_n$ , которые либо задаются априорно, либо для них указываются границы, в которых они могут изменяться произвольно. В том случае, когда  $t_n$  заменяются на  $\varepsilon_n$ , процесс (7) называется *процессом типа спуска (градиентного типа)*.

Рассмотрим теперь более общий случай, когда дифференцируемый по Гато вещественный и ограниченный снизу функционал  $f$  задан в рефлексивном вещественном банаховом пространстве  $E$ . Пусть  $F = \text{grad } f$  и  $u_1$  — произвольный вектор из  $E$  такой, что  $F(u_1) \neq 0$ . Выберем вектор  $h_1 \in E$  так, что  $h_1 = -UF(u_1)$ , где  $U$  — оператор, действующий из  $E^*$  в  $E$  и удовлетворяющий условиям  $\|Uv\| = \|v\|$ ,  $\langle v, Uv \rangle = \|v\|^2$ . Тогда процесс наискорейшего спуска имеет вид

$$u_{n+1} = u_n - t_n UF(u_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

где  $t_n$  — наименьшее положительное значение  $t$ , для которого  $\varphi(t_n) = \min \varphi(t)$  при  $\varphi(t) = f(u_n + th_n)$ .

Обычно  $t_n$  не вычисляют, а рассматривают процесс

$$u_{n+1} = u_n - \varepsilon_n UF(u_n). \quad (9)$$

Причем на выбор  $\varepsilon_n$  накладываются такие ограничения, чтобы процесс типа наискорейшего спуска сходился.

### 3.3. Сходимость метода. Справедливо следующее утверждение.

**Лемма 1.** Пусть вещественный функционал  $f$ , заданный в рефлексивном вещественном банаховом пространстве  $E$ , дифференцируем по

Гато и его градиент  $F$  удовлетворяет условию

$$\langle F(u+h) - F(u), h \rangle \leq M \|h\|^2 \quad \text{при } u, u+h \in D_r = \{u \in E: \|u\| \leq r\}, \quad (10)$$

где  $M = M(r)$  — произвольная положительная возрастающая функция на полуоси  $r \geq 0$  и норма  $E^*$  пространства дифференцируема по Гато.

Тогда если  $\varepsilon_n M_n \leq 1/2$ , где  $M_n = \max[1, M(R_n)]$ ,  $R_n = \|u_n\| + \|F(u_n)\|$ , то процесс (9) будет релаксационным.

Отметим, что для выполнения неравенства (10) достаточно, чтобы оператор  $F$  удовлетворял условию Липшица

$$\|F(u+h) - F(u)\| \leq M(r) \|h\|, \quad (11)$$

причем константа Липшица может быть и возрастающей функцией от  $r = \|u\|$ .

**Лемма 2.** Пусть выполнены условия:

1)  $E$  — рефлексивное вещественное банахово пространство, причем норма в  $E^*$  дифференцируема по Гато;

2) дифференцируемый по Гато вещественный функционал  $f$  на  $E$  ограничен снизу и является возрастающим (или множество  $E_1$  ограничено), а его градиент удовлетворяет условию Липшица (11);

3) релаксационные множители  $\varepsilon_n$  удовлетворяют неравенствам  $1/4 \leq \varepsilon_n M_n \leq 1/2$ .

Тогда итерационный процесс (9) будет релаксационным и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(u_n) = 0.$$

Заметим, что если в дополнение к условиям леммы 2 потребовать, чтобы  $f(u) - d \leq \|F(u)\|^\alpha$  ( $\alpha > 0$ ), где  $d = \inf f(u)$ , то последовательность  $u_n$  будет минимизирующей.

**Теорема 20.** Пусть выполнены условия:

1)  $E$  — рефлексивное вещественное банахово пространство, причем норма в  $E^*$  дифференцируема по Гато;

2) вещественный функционал  $f$ , заданный на  $E$ , дифференцируем по Гато, и его градиент  $F$  обладает тем свойством, что  $\langle F(tu), u \rangle$  — интегрируемая по  $t \in [0, 1]$  функция, удовлетворяющая неравенствам

$$\|F(u+h) - F(u)\| \leq M(r) \|h\|, \quad u, u+h \in K_r, \quad (K_r = \{u: u \in E, \|u\| \leq r\}), \\ \langle F(u+h) - F(u), h \rangle \geq \|h\| \gamma(\|h\|),$$

где  $M(r)$  — непрерывная возрастающая неотрицательная функция, заданная для  $r \geq 0$ , и  $\gamma(t)$ ,  $t \geq 0$ , — возрастающая непрерывная функция такая, что  $\gamma(0) = 0$ , причем функция

$$c(R) = \frac{1}{R} \int_0^R \gamma(w) dw$$

возрастает и при некотором  $R$  справедливо неравенство  $c(R) > \|F(0)\|$ ;

3)  $1/4 \leq \varepsilon_n M_n \leq 1/2$ ,  $M_n = \max[1, M(R_n)]$ ,  $R_n = \|u_n\| + \|F(u_n)\|$ .

Тогда последовательность  $u_{n+1} = u_n - \varepsilon_n U F(u_n)$  оказывается релаксационной, минимизирующей и сходящейся к точке абсолютного минимума функционала  $f$ .

В условиях теоремы 20 метод наискорейшего спуска (9) можно использовать для отыскания приближенного решения задачи (4). Остановим процесс (9) при  $n = N$  и назовем  $u_N$   $N$ -м приближением к точному решению  $u_0$  задачи. Согласно теореме 20 для любого  $\varepsilon > 0$  существует номер  $N$  такой, что  $\|u_N - u_0\| < \varepsilon$ . Это означает, что, используя алгоритм (9), можно приблизиться к точному решению нелинейной задачи (4) с любой наперед заданной точностью.

#### 4. Метод Рунца

Пусть  $F$  — потенциальный оператор, действующий из банахова пространства  $E$  в сопряженное  $E^*$ , т. е. существует такой функционал  $f \in E^*$ , что  $F = \text{grad } f$ .

Предположим, что рассматривается некоторая задача математической физики, которая сводится к нелинейному операторному уравнению  $F(u) = 0$ . Как следует из 3.1, эта задача может быть сформулирована в вариационной постановке (5): найти  $u_0 \in E$  такой, что  $f(u_0) = \inf_{u \in E} f(u)$ . В этом разделе предполагается, что  $E$  — сепарабельное вещественное нормированное пространство и  $f$  — конечный вещественный функционал, заданный на  $E$ . Лишь во второй половине раздела потребуются полнота  $E$ . Для минимизации функционала  $f$ , если он ограничен снизу на  $E$ , воспользуемся методом Рунца. В. Рунц применил свой метод к решению конкретных задач. В дальнейшем его метод был развит в работах С. Г. Михлина и других авторов.

При формулировке различных предложений о методе Рунца потребуются следующее определение.

**Определение 16.** Функционал  $f$  называется *полунепрерывным сверху (снизу)* в точке  $u_0 \in E$ , если каждому  $\varepsilon > 0$  соответствует  $\delta > 0$  такое, что как только  $\|u - u_0\| < \delta$ , то

$$f(u_0) - f(u) > -\varepsilon \quad (f(u_0) - f(u) < \varepsilon).$$

Функционал  $f$  называется *полунепрерывным сверху (снизу)* на множестве  $M \subset E$ , если он полунепрерывен сверху (снизу) в каждой точке  $u \in M$ .

**4.1. Приближения и системы Рунца.** Пусть  $f$  — ограниченный снизу вещественный функционал, заданный на нормированном пространстве  $E$ . Метод Рунца минимизации функционала  $f$  заключается в следующем. Сначала в  $E$  задается так называемая координатная система, т. е. линейно независимая система векторов  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$ , множество всевозможных линейных комбинаций которых плотно в  $E$ . Затем строится последовательность конечномерных подпространств  $\{E_n\}$ , где  $E_n$  —  $n$ -мерное пространство, натянутое на векторы  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ . Из ограниченности снизу

$f$  на  $E$  следует, что  $f$  ограничен снизу на  $E_n$ . Пусть  $d_n = \inf_{u \in E_n} f(u)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ). По построению  $d_1 \geq d_2 \geq d_3 \geq \dots \geq d_n \dots$ . Допустим, что при каждом  $n$  существует  $u_n \in E_n$ , что  $f(u_n) = d_n$ . Тогда

$$u_n = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k, \quad (12)$$

где коэффициенты  $a_k$  зависят от  $n$ . Векторы  $u_n$  называются *приближениями Ритца*.

Пусть  $f$  дифференцируем по Гато на  $E$  и  $F = \text{grad } f$ . Тогда  $f$  дифференцируем по Гато и на  $E_n$ , причем для произвольных векторов  $u, h \in E_n$ , т. е. для  $u = \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k$ ,  $h = \sum_{k=1}^n \beta_k \varphi_k$ , где  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  произвольны, имеем

$$\left. \frac{d}{dt} f(u + th) \right|_{t=0} = \langle F(u), h \rangle = \sum_{i=1}^n \beta_i \left\langle F \left( \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k \right), \varphi_i \right\rangle.$$

Отсюда согласно теореме 10 следует, что если  $u_n$  — точка абсолютного минимума  $f$  на  $E_n$ , то

$$\left\langle F \left( \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k \right), \varphi_i \right\rangle = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (13)$$

Система (13), определяющая коэффициенты  $a_k$ , называется *системой Ритца*.

Отметим, что в случае выпуклости  $f$  всякое решение системы (13) дает по формуле (12) приближение Ритца, т. е. точку абсолютного минимума  $f$  на  $E_n$ .

**Лемма 3.** Если выпуклый функционал  $f$ , заданный в линейном пространстве (не обязательно нормированном), имеет две различные точки минимума, то его значения в этих точках совпадают.

**4.2. Разрешимость систем Ритца.** Если на  $E$  задан выпуклый и дифференцируемый по Гато функционал, то для того, чтобы векторы  $u_n$ , заданные формулой (12), представляли собой приближения Ритца, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты  $a_k$  удовлетворяли системе Ритца (13). Если  $f$  — строго выпуклый на  $E$  функционал, то он будет строго выпуклым и на  $E_n \subset E$ , а потому система (13) не может иметь более одного решения.

Решение  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  системы (13) может дать по формуле (12) критическую точку  $f$ , т. е. точку, в которой градиент  $f$  обращается в нуль, и только если это — точка абсолютного минимума  $f$  на  $E_n$ , то решение системы (13) определит приближение Ритца. Но если  $f$  — выпуклый функционал, то всякая его критическая точка будет и точкой абсолютного минимума (см. теорему 10).

Исследовать разрешимость системы Ритца (13) можно в предположении, что вещественный сильно возрастающий (т. е.  $\lim_{\|u\| \rightarrow \infty} f(u) = +\infty$ ) и дифференцируемый по Гато функционал  $f$ , заданный на  $E$ , полунепрерывен снизу на каждом подпространстве  $E_n \subset E$ .

Так как  $f$  — сильно возрастающий функционал, то найдется такое  $r > 0$ , что  $f(u) > f(0)$ , как только  $\|u\| > r$ . Рассмотрим в  $E_n$  шар  $K_r^n =$

$= \{u: u \in E_n, \|u\| < r\}$ . В силу полунепрерывности снизу  $f$  на  $K_r^n$  (согласно известной теореме классического анализа) существует точка  $u_0 \in K_r^n$ , в которой  $f$  принимает наименьшее значение, т. е.

$$f(u_0) = \inf_{u \in K_r^n} f(u), \quad u_0 = \sum_{k=1}^n a_k^{(0)} \Phi_k.$$

Эта точка не может принадлежать поверхности шара  $K_r^n$ , ибо там  $f(u) > f(0)$ . Но вне шара  $K_r^n$  имеем  $f(u) > f(0) \geq f(u_0)$ . Следовательно,  $f(u_0) = \inf_{u \in E_n} f(u)$  и  $a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \dots, a_n^{(0)}$  удовлетворяют (13).

**Лемма 4.** Если вещественный сильно возрастающий и дифференцируемый по Гато функционал  $f$ , заданный на  $E$ , полунепрерывен снизу на каждом подпространстве  $E_n \subset E$ , то система Ритца (13) разрешима при любом  $n$ .

**Лемма 5.** Если заданный на  $E$  дифференцируемый по Гато вещественный функционал  $f$  с градиентом  $F$  полунепрерывен снизу на каждом подпространстве  $E_n \subset E$  и при некотором  $r > 0$  выполнено

$$\langle F(u), u \rangle > 0 \quad \text{для всех } u \text{ с нормой } \|u\| = r, \quad (14)$$

то система Ритца (13) разрешима при любом  $n$ .

**4.3. Сходимость метода Ритца.** Пусть приближения Ритца (12) для функционала  $f$ , заданного и ограниченного снизу на  $E$ , существуют при любом  $n$ , и пусть  $f(u)$  полунепрерывен сверху. Пусть  $d = \inf_{u \in E} f$  и  $(u^{(n)}) \subset E$  — какая-нибудь минимизирующая последовательность, удовлетворяющая неравенствам

$$f(u^{(n)}) \leq d + 1/n \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

В силу полноты координатной системы  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n, \dots$  каждому вектору  $u^{(n)}$  и положительному числу  $\delta_n$  соответствует такой вектор  $v^{(m)} \in E_m$ , что

$$v^{(m)} = \sum_{k=1}^m a_k^{(m)} \Phi_k \quad (m = m(n) \geq n), \quad \|u^{(n)} - v^{(m)}\| \leq \delta_n.$$

Так как  $f$  полунепрерывен сверху, то  $\delta_n$  можно выбрать столь малым, чтобы для произвольного вектора  $w \in E$ , удовлетворяющего неравенству  $\|u^{(n)} - w\| \leq \delta_n$ , было  $f(u^{(n)}) - f(w) \geq -1/n$ . Полагая  $w = v^{(m)}$ , отсюда и из предыдущего находим, что

$$f(v^{(m)}) \leq f(u^{(n)}) + 1/n \leq d + 2/n.$$

Из этого неравенства следует, что  $(v^{(m)})$  — минимизирующая последовательность. Но так как для приближений Ритца (12)  $f(u_m) = d_m = \inf_{u \in E_m} f(u)$ , то  $f(u_m) \leq f(v^{(m)}) \leq d + 2/n$ . Учитывая, что  $f(u_m) \geq d$ , заключаем, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = d$ .

Отсюда следует

**Лемма 6.** Пусть приближения Ритца (12) для функционала  $f$ , заданного и ограниченного снизу на  $E$ , существуют при любом  $n$ . Тогда

если  $f(u)$  полунепрерывен сверху, то его приближения Рунца образуют минимизирующую последовательность.

В условиях леммы 6 метод Рунца можно использовать для отыскания приближенного решения задачи  $F(u) = 0$ . Назовем вектор  $u_n$  при  $n = N$   $N$ -м приближением к точному решению  $u_0$  задачи. Согласно лемме 6 для любого  $\varepsilon > 0$  существует номер  $N$  такой, что  $\|u_N - u_0\| < \varepsilon$ . Это означает, что, используя метод Рунца, можно найти приближенное решение  $u_N$  с любой наперед заданной точностью.

## 5. Метод Ньютона–Канторовича

**5.1. Описание итерационного процесса Ньютона.** И. Ньютон предложил эффективный метод вычисления решений уравнения

$$F(u) = 0 \quad (15)$$

для случая функции  $F(u)$  с вещественными значениями, зависящей от вещественной переменной  $u$ . Впоследствии метод Ньютона был перенесен на системы уравнений (когда  $F(u) \in \mathbb{R}^m$ ), а затем обобщен в работах Л. В. Канторовича на уравнения в банаховых пространствах.

Пусть  $F(u)$  — нелинейный оператор, определенный в окрестности  $S$  решения  $u^*$  уравнения (15) и непрерывно дифференцируемый в  $S$  в смысле Фреше. Пусть, далее, в  $S$  оператор  $F'(u)$  непрерывно обратим. Итерационный процесс Ньютона состоит в следующем. Выбирается начальное приближение  $u_0 \in S$ , лежащее достаточно близко к  $u^*$ . Дальнейшие приближения  $u_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , предлагается вычислять по формуле

$$u_n = u_{n-1} - [F'(u_{n-1})]^{-1} F(u_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots \quad (16)$$

Метод Ньютона является в настоящее время одним из наиболее употребительных вычислительных методов. Главное его достоинство — это (в определенных предположениях) очень быстрая сходимость последовательных приближений (16) к решению  $u^*$ . Метод применим также и в случае, когда уравнение (15) имеет несколько решений.

Пусть  $u$ ,  $F(u) \in \mathbb{R}^m$ . Если  $f_i(x_1, \dots, x_m)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , — координатные функции  $F(u)$ , то уравнение (15) является краткой записью системы уравнений  $f_i(x_1, \dots, x_m) = 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Производная  $F'(u) = \left( \frac{\partial f_i(u)}{\partial x_j} \right)_{i,j=1}^m$  — это матрица Якоби, а  $[F'(u)]^{-1}$  — обратная матрица. Формулы (16) представляют собой, таким образом, матричную запись итерационного процесса Ньютона в  $\mathbb{R}^m$ .

**5.2. Сходимость итерационного процесса Ньютона.** Приведем один из наиболее удобных в приложениях вариантов теоремы о методе Ньютона. Существование решения  $u^*$  здесь не предполагается, а доказывается. Вопрос о единственности решения в рассматриваемом шаре здесь не обсуждается.

**Теорема 21.** Пусть в шаре  $S_r(u_0)$  оператор  $F(u)$  дифференцируем, и его производная удовлетворяет в этом шаре условию Литвица с

постоянной  $l$ . Пусть в  $S_r(u_0)$  оператор  $F'(u)$  непрерывно обратим и существует постоянная  $m > 0$  такая, что в  $S_r(u_0)$

$$\|[F'(u)]^{-1}\| \leq m. \quad (17)$$

Пусть также  $\|F(u_0)\| \leq \eta$ .

Тогда если  $q = m^2 l \eta / 2 < 1$  и

$$r' = m\eta \sum_{k=0}^{+\infty} q^{2^k-1} < r, \quad (18)$$

то уравнение  $F(u) = 0$  имеет решение  $u^* \in \overline{S_{r'}(u_0)}$ , к которому сходится итерационный процесс Ньютона, начатый с  $u_0$ . Скорость сходимости  $u_n$  к  $u^*$  дается неравенством

$$\|u_n - u^*\| \leq m\eta \frac{q^{2^n-1}}{1 - q^{2^n}}.$$

**5.3. Модифицированный метод Ньютона.** Рассмотрим видоизменение, или, как говорят, модификацию итерационного метода Ньютона:

$$u_{n+1} = u_n - [F'(u_0)]^{-1} F(u_n), \quad n = 1, 2, \dots \quad (19)$$

Преимущество формул (19) заключается в том, что упрощаются вычисления (обратный оператор вычисляется только один раз). Недостаток формул (19), как увидим ниже, состоит в том, что ухудшается по сравнению с итерационным методом Ньютона скорость сходимости.

**Теорема 22.** Пусть в шаре  $S_r(u_0)$  оператор  $F(u)$  дифференцируем, и его производная удовлетворяет в  $S_r(u_0)$  условию Липшица с постоянной  $l$ . Пусть  $F'(u_0)$  непрерывно обратим и  $\|[F'(u_0)]^{-1}\| \leq m$ . Пусть, кроме того,  $\|F(u_0)\| \leq \eta$ .

Тогда если  $2m^2 l \eta < 1$  и

$$r' = \frac{1 - \sqrt{1 - 2m^2 l \eta}}{ml} < r, \quad (20)$$

то уравнение  $F(u) = 0$  имеет решение  $u^* \in \overline{S_{r'}(u_0)}$ , к которому сходится модифицированный итерационный процесс Ньютона (19), начатый с  $u_0$ . Скорость сходимости  $u_n$  к  $u^*$  дается неравенством

$$\|u_n - u^*\| \leq \frac{(1 - \sqrt{1 - 2m^2 l \eta})^n}{\sqrt{1 - 2m^2 l \eta}} m\eta.$$

В условиях теорем 21, 22 метод Ньютона или его модификацию можно использовать для приближенного решения нелинейного уравнения  $F(u) = 0$ . Остановим процесс (16) при  $n = N$  и назовем  $u_N$   $N$ -м приближением к точному решению  $u^*$ . Согласно теореме 21, для любого  $\varepsilon > 0$  существует номер  $N$  (например, любое  $N$ , удовлетворяющее неравенству

$m\eta \frac{q^{2^n-1}}{1 - q^{2^n}} < \varepsilon$ ) такой, что  $\|u_N - u^*\| < \varepsilon$ . Это означает, что, используя итерационный процесс (16), мы можем приблизиться к точному решению нелинейной задачи  $F(u) = 0$  с любой наперед заданной точностью.

## 6. Метод Галеркина–Петрова для нелинейных уравнений

**6.1. Приближения и системы Галеркина.** Пусть  $E$  — сепарабельное нормированное пространство с базисом и  $F$  — отображение  $E$  в  $E^*$ . Метод Галеркина приближенного решения уравнения  $F(u) = 0$  заключается в следующем. Сначала в пространстве  $E$  задается базис, т. е. линейно независимая система векторов  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ , обладающая тем свойством, что всякий вектор из  $E$  представляется единственным образом в виде  $u = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(u) \varphi_k$ . При помощи этого базиса строится последовательность конечномерных подпространств  $(E_n)$ , где  $E_n$  —  $n$ -мерное подпространство, натянутое на векторы  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ .

Приближением Галеркина решения уравнения  $F(u) = 0$  называется вектор  $u_n \in E_n$ , т. е.

$$u_n = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k, \quad (21)$$

удовлетворяющий системе уравнений

$$\left\langle F \left( \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k \right), \varphi_i \right\rangle = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (22)$$

Эта система, решение которой определяет приближение Галеркина  $u_n$ , называется *системой Галеркина*. Отметим, что, несмотря на то, что система (22) совпадает с системой (13), вопрос о ее разрешимости решается здесь иначе. В четвертом разделе этой главы использовались свойства функционала  $f$ , а здесь при изучении системы (22) будут использованы свойства отображения  $F$ .

**6.2. Связь с проекционными методами.** Пусть  $P_n$  — оператор проектирования  $E$  на  $E_n$  и  $P_n^*$  — сопряженный оператор, который, как известно, проектирует  $E^*$  на  $n$ -мерное подпространство  $E_n^*$ . Проекционный метод приближенного решения уравнения  $F(u) = 0$ , где  $F$  — отображение  $E$  в  $E^*$ , заключается в том, что данное уравнение заменяется уравнением в конечномерном пространстве

$$P_n^* F(P_n u) = 0, \quad (23)$$

причем решение последнего уравнения называется *приближенным решением исходного уравнения*. Покажем, что уравнение (23) эквивалентно системе (22). Действительно, если  $h$  — произвольный вектор из  $E^*$ , то уравнение (23) эквивалентно уравнению

$$\begin{aligned} 0 &= \langle P_n^* F(P_n u), h \rangle = \langle F(P_n u), P_n h \rangle = \\ &= \left\langle F \left( \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k \right), \sum_{i=1}^n \beta_i \varphi_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n \beta_i \left\langle F \left( \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k \right), \varphi_i \right\rangle, \end{aligned}$$

а это уравнение в силу произвольности  $\beta_i$  эквивалентно системе (22). Таким образом, метод Галеркина решения рассматриваемого нами уравнения  $F(u) = 0$  совпадает с проекционным методом решения этого уравнения.

Отметим еще, что если  $P$  — отображение  $E_x$  в  $E_y$ , где  $E_x$  и  $E_y$  — нормированные пространства, то проекционный метод решения уравнения  $P(u) = 0$  заключается в следующем. Задаются две последовательности подпространств  $(E_x^{(n)})$  и  $(E_y^{(n)})$  (где  $n$  — указатель размерности), объединения которых соответственно плотны в  $E_x$  и  $E_y$ , а также последовательности проекторов  $(P_n)$  и  $(Q_n)$ , где  $P_n E_x = (E_x^{(n)})$ ,  $Q_n E_y = (E_y^{(n)})$ . Затем уравнение  $P(u) = 0$  заменяется уравнением

$$Q_n P(P_n u) = 0, \quad (24)$$

решение которого рассматривается как приближенное решение исходного уравнения.

Если  $E_x = E_y = H$ , где  $H$  — гильбертово пространство, то проекционный метод называется *методом Бубнова–Галеркина*; в общем случае проекционный метод носит название *метода Галеркина–Петрова*.

В заключение этого пункта отметим, что в силу (24), если  $F$  — отображение  $E$  в  $E$ , то приближения Галеркина для уравнения  $F(u) = 0$  найдутся из уравнения в конечномерном подпространстве

$$P_n F(P_n u) = 0. \quad (25)$$

**6.3. Разрешимость систем Галеркина.** Пусть  $F: E \rightarrow E^*$  — монотонный непрерывный оператор, где  $E$  — вещественное сепарабельное нормированное пространство, удовлетворяющий на сфере  $\|u\| = r > 0$  условию

$$\langle F(u), u \rangle > 0 \quad (\|u\| = r). \quad (26)$$

В этих условиях можно показать разрешимость системы (22). В силу эквивалентности систем (22) и (23) достаточно показать, что уравнение (23) имеет решение. Положим  $P_n u = w \in E_n$ . Тогда в силу монотонности  $F$  и конечномерности  $E_n$ ,  $\Phi_n(w) = P_n^* F(w)$  есть непрерывное отображение  $E_n$  в  $E_n^* = P_n^* E^*$ , т. е. непрерывное отображение  $n$ -мерного пространства в  $n$ -мерное. отождествляя  $E_n$  и  $E_n^*$ , находим, что  $\Phi_n$  — непрерывное отображение  $n$ -мерного пространства в себя. Далее, так как при  $\|w\| = r$

$$\langle \Phi_n(w), w \rangle = \langle P_n^* F(w), w \rangle = \langle F(w), w \rangle > 0,$$

то на сфере  $\|w\| = r$  будем иметь  $\|\Phi_n(w)\| > 0$ . Отсюда находим, что уравнение  $\Phi_n(w) = 0$  имеет решение, принадлежащее шару  $\|w\| < r$ .

**Лемма 7.** Пусть монотонный непрерывный оператор  $F: E \rightarrow E^*$ , где  $E$  — вещественное сепарабельное нормированное пространство, удовлетворяет на сфере  $\|u\| = r > 0$  условию (26).

Тогда система Галеркина (22) разрешима при любом  $n$  и приближения Галеркина  $u_n$  удовлетворяют неравенству  $\|u_n\| < r$ .

**6.4. Сходимость метода Галеркина–Петрова.** Здесь будем предполагать, что  $u_n$  — приближения Галеркина решения уравнения  $F(u) = 0$ , где  $F$  — отображение нормированного пространства  $E$  в  $E^*$ . В данном случае приближения  $u_n$  находятся из системы (22) или из уравнения (23).

**Лемма 8.** Пусть приближения Галеркина  $u_n$ , удовлетворяющие системам (22), существуют при любом  $n$ , причем  $\|u_n\| \leq r$ . Тогда если  $F$  — ограниченный оператор, то последовательность  $(F(u_n))$  сходится  $E$ -слабо к нулю.

Пусть  $E$  — сепарабельное нормированное пространство с базисом  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ ;  $(E_n)$  — последовательность подпространств, рассмотренных в п. 6.1;  $(P_n)$  — последовательность проекторов ( $P_n E = E_n$ ) и  $(P_n^*)$  — последовательность сопряженных проекторов. Как было отмечено в п. 6.2,  $P_n^*$  проектирует  $E^*$  на  $n$ -мерное подпространство  $E_n^*$ .

Пусть  $h$  — произвольный вектор из  $E^*$ ,  $h_n = P_n^* h$  и  $h^{(n)} = h - h_n$ . Говорят, что последовательность  $\{E_n^*\}$  предельно плотна в  $E^*$ , если для всякого  $h \in E^*$   $h^{(n)} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

**Лемма 9.** Пусть приближения Галеркина  $u_n$ , удовлетворяющие уравнениям (25), существуют при любом  $n$  и  $\|u_n\| \leq r = \text{const}$ . Тогда если  $F: E \rightarrow E$  есть ограниченный оператор и последовательность  $(E_n^*)$  предельно плотна в  $E^*$ , то последовательность  $(F(u_n))$  сходится слабо к нулю.

В дальнейшем используется следующее определение.

**Определение 17.** Отображение  $G: E \rightarrow E^n$  называется *равномерно монотонным*, если  $\langle G(u) - G(v), u - v \rangle \geq \|u - v\| \gamma(\|u - v\|)$ , где  $t\gamma(t)$  — возрастающая вещественная функция, обращающаяся в нуль в нуле.

Справедлива следующая теорема сходимости.

**Теорема 23.** Пусть  $E$  — рефлексивное вещественное банахово пространство с базисом  $\{\varphi_k\}$ , а непрерывный равномерно монотонный и ограниченный оператор  $F: E \rightarrow E^*$  удовлетворяет неравенству  $\langle F(u), u \rangle > 0$ , если  $\|u\| \geq r > 0$ .

Тогда приближения Галеркина  $u_n$  существуют при любом  $n$  и сходятся к единственному решению  $u_0$  уравнения  $F(u) = 0$ .

В условиях теоремы 23 метод Галеркина–Петрова можно использовать для отыскания приближенного решения уравнения  $F(u) = 0$ . Назовем вектор  $u_n$  при  $n = N$  из (21)  $N$ -м приближением к точному решению  $u_0$ . Согласно теореме 23 для любого  $\varepsilon > 0$  существует номер  $N$  такой, что  $\|u_N - u_0\| < \varepsilon$ . Таким образом, используя метод Галеркина–Петрова, мы можем найти приближенное решение  $u_N$  с любой наперед заданной точностью.

## 7. Метод возмущений

Одним из мощных методов решения нелинейных задач математической физики является *метод возмущений*, или *метод малого параметра*. Математическая теория возмущений была сформулирована в работах А. Пуанкаре и А. М. Ляпунова. В том виде, в котором алгоритмы возмущений применяются в задачах на собственные значения, они были разработаны в трудах Рэлея и Шрёдингера. Математически строгая теория возмущений, по-видимому, начинается с работ Ф. Реллиха. Дальнейшее развитие

математическая теория возмущений получила в работах К. О. Фридрикса, Т. Като, Н. Н. Боголюбова и Ю. А. Митропольского, А. Б. Васильевой и В. Ф. Бутузова, М. И. Вишика и Л. А. Люстерника, Б. Секефальви-Надя, Ж.-Л. Лионса, С. А. Ломова, Н. Н. Моисеева, В. П. Маслова, В. А. Треногина, Р. Беллмана, А. Н. Филатова, М. Д. ван Дейка и многих других. Эти работы продолжили пути развития теории возмущений в применении к широким классам задач математической физики. Однако объединяющей идеей всех этих работ, как правило, являлась возможность разложения решения по малому параметру и обоснования сходимости полученного ряда к точному решению задачи [116].

**7.1. Формулировка алгоритмов возмущений.** Пусть  $X$  и  $Y$  — гильбертовы пространства. Предполагается, что  $X$  вложено в  $Y$  плотно и непрерывно. Рассмотрим нелинейный оператор  $\Phi(u, \varepsilon)$ , действующий из  $X$  в  $Y$  и зависящий от числового параметра  $\varepsilon$ , где  $\varepsilon \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ ,  $\varepsilon > 0$ . Область определения  $D(\Phi)$  этого оператора предполагается линейным множеством, плотным в  $X$ . Пусть оператор  $\Phi$  при любом фиксированном  $\varepsilon$  имеет непрерывную производную Гато  $\Phi'(u, \varepsilon) \equiv \partial\Phi/\partial u$  в каждой точке  $u \in D(\Phi)$ , причем  $\Phi'$  рассматривается как оператор из  $X$  в  $Y$ . Предполагается также, что область определения  $D(\Phi')$  оператора  $\Phi'$  содержит  $D(\Phi)$ .

Рассмотрим уравнение

$$\Phi(U, \varepsilon) = 0, \quad (27)$$

которое будем называть *возмущенной задачей*. Зафиксируем элемент  $U_0 \in D(\Phi)$ , положим  $f(\varepsilon) \equiv -\Phi(U_0, \varepsilon)$  и перейдем от (27) к уравнению

$$A(u, \varepsilon)u = f(\varepsilon), \quad (28)$$

где

$$A(u, \varepsilon) = \int_0^1 \Phi'(U_0 + tu, \varepsilon) dt, \quad u = U - U_0.$$

Оператор  $A(u, \varepsilon)$  действует из  $X$  в  $Y$  с областью определения  $D(A) = D(F)$ . Сопряженный к нему оператор имеет вид

$$A^*(u, \varepsilon) = \int_0^1 (\Phi'(U_0 + tu, \varepsilon))^* dt, \quad u \in D(F).$$

Этот оператор является оператором из  $Y^*$  в  $X^*$ ; область его определения обозначим через  $D(A^*)$ . Оператор  $A^*$  называется *сопряженным оператором, соответствующим  $\Phi(U, \varepsilon)$* ; он является одним из сопряженных операторов, которые можно вводить при рассмотрении уравнения (27).

Далее наряду с (28) рассмотрим сопряженное уравнение

$$A^*(u, \varepsilon)u^* = g(\varepsilon), \quad (29)$$

где элемент  $g(\varepsilon) \in X^*$  является аналитическим по  $\varepsilon$ :

$$g(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i g_i, \quad g_i = \frac{1}{i!} \frac{d^i g}{d\varepsilon^i} \Big|_{\varepsilon=0}, \quad g_i \in X^*.$$

В дальнейшем будем предполагать, что оператор  $\Phi(U, \varepsilon)$  аналитичен по всем своим переменным, и уравнение (28) имеет единственное решение, представляющееся в виде ряда по степеням  $\varepsilon$ , сходящегося при  $|\varepsilon| < \bar{\varepsilon}$ ,  $\bar{\varepsilon} > 0$ :  $u = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i u_i$ . В качестве  $U_0$  выберем решение уравнения

$$\Phi(U_0, 0) = 0,$$

которое будем называть *невозмущенной задачей*. Тогда  $u_0 = 0$ , и

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i u_i \quad (30)$$

является решением уравнения (28).

Алгоритм возмущений для решения задачи (28) состоит в последовательном отыскании поправок  $u_i$  в разложении (29). Для нахождения вида уравнений для  $u_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) разложим  $f(\varepsilon)$  в ряд по степеням параметра  $\varepsilon$ :

$$f(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i f_i = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i f_i,$$

где

$$f_0 = f(0) = 0, \quad f_i = \frac{1}{i!} \frac{d^i f}{d\varepsilon^i} \Big|_{\varepsilon=0}, \quad i = 1, 2, \dots$$

В частности,

$$f_1 = -\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Phi(U_0, \varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0}, \quad f_2 = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi(U_0, \varepsilon)}{\partial \varepsilon^2} \Big|_{\varepsilon=0}$$

$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon} \text{ и } \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon^2}\right)$  есть частные производные от  $\Phi(U, \varepsilon)$  по  $\varepsilon$  при фиксированном  $U$ . Подставляя (30) в (28) и выполняя сокращение на  $\varepsilon$ , получаем уравнение

$$A \left( \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i u_i, \varepsilon \right) \left( \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^{i-1} u_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^{i-1} f_i. \quad (31)$$

Отсюда при  $\varepsilon = 0$  получается уравнение для  $u_1$ . Затем, дифференцируя последовательно уравнение (31) по  $\varepsilon$  и полагая  $\varepsilon = 0$ , получим бесконечную систему уравнений для определения  $u_i$

$$\begin{aligned} A_0 u_1 &= f_1, \\ A_0 u_2 &= f_2 - A_1(U_0, u_1) u_1, \\ A_0 u_3 &= f_3 - A_1(U_0, u_1) u_2 - \frac{1}{2} A_2(U_0, u_1, u_2) u_1, \\ &\dots \end{aligned} \quad (32)$$

где

$$A_0 = A(0, 0) = \Phi'(U_0, 0),$$

$$A_1(U_0, u_1) = \frac{d}{d\varepsilon} A \left( \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i u_i, \varepsilon \right) \Big|_{\varepsilon=0} = \int_0^1 \Phi''(U_0, t u_1, 0) dt + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Phi(U_0, 0),$$

$$A_2(U_0, u_1, u_2) = \frac{d^2}{d\varepsilon^2} A \left( \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i u_i, \varepsilon \right) \Big|_{\varepsilon=0}.$$

Формулы (32) и составляют суть алгоритма возмущений для отыскания поправок  $u_i$ . Последовательно решая эти уравнения, получаем

$$U = U_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i u_i.$$

Элемент вида

$$U_{(N)} = U_0 + \sum_{i=0}^N \varepsilon^i u_i \quad (33)$$

называется *приближением  $N$ -го порядка к  $U$* .

Аналогично формулируется алгоритм возмущений для решения сопряженного уравнения (29). В предположении, что  $u^* = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i u_i^*$ , уравнения для отыскания поправок  $u_i^*$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) будут иметь вид

$$\begin{aligned} A_0^* u_0^* &= g_0, & A_0^* &= (\Phi'(U_0, 0))^*, \\ A_0^* u_1^* &= g_1 - \frac{d}{d\varepsilon} A^* \Big|_{\varepsilon=0} u_0^*, \\ A_0^* u_2^* &= g_2 - \frac{d}{d\varepsilon} A^* \Big|_{\varepsilon=0} u_1^* - \frac{1}{2} \frac{d^2 A^*}{d\varepsilon^2} \Big|_{\varepsilon=0} u_0^*, \\ &\dots \end{aligned} \quad (34)$$

Решив первые  $N+2$  уравнений, можно найти приближение  $N$ -го порядка к  $u^*$  по формуле

$$U_{(N)}^* = u_0^* + \sum_{i=1}^N \varepsilon^i u_i^*.$$

Алгоритмы возмущений вида (32), (34) называются в литературе *алгоритмами регулярных возмущений*, поскольку они предполагают наличие у решения задачи аналитической зависимости от параметра возмущения.

**7.2. Обоснование алгоритмов возмущений.** Пусть  $X$ ,  $Y$  — гильбертовы пространства, введенные выше, а исходный оператор  $\Phi(U, \varepsilon)$  задается по формуле

$$\Phi(U, \varepsilon) = AU + \varepsilon F(U) - f,$$

где  $f \in Y$ ,  $A: X \rightarrow Y$  — линейный замкнутый оператор с областью определения  $D(A)$ , плотной в  $X$ , а  $F(U)$  — некоторый нелинейный оператор, действующий из  $X$  в  $Y$  с областью определения  $D(F) = D(A)$ . Тогда возмущенная задача (27) принимает вид

$$AU + \varepsilon F(U) = f. \quad (35)$$

Невозмущенная задача получается из (35) при  $\varepsilon = 0$ :

$$AU_0 = f. \quad (36)$$

Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 26.** Пусть:

1) оператор  $A$  непрерывно обратим и  $R(A) = Y$ , т.е. для любого  $y \in S$  существует единственное решение  $x \in D(A)$  уравнения  $Ax = y$  такое, что

$$\|x\|_X \leq c_0 \|y\|_Y, \quad c_0 = \text{const} > 0;$$

2) оператор  $F$  удовлетворяет условию Липшица

$$\|F(u) - F(v)\|_Y \leq k \|u - v\|_X, \quad k = \text{const} > 0, \quad \forall u, v \in D(F).$$

Тогда при условии  $|\varepsilon| < \bar{\varepsilon}$ , где  $\bar{\varepsilon} = 1/(c_0 k)$ , возмущенная задача (35) имеет единственное решение  $U \in D(F)$ .

Если, к тому же,  $F$  — аналитический оператор, то решение задачи (35) представляется в виде ряда

$$U = U_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i u_i, \quad (37)$$

сходящегося при  $|\varepsilon| < \bar{\varepsilon}$ , где функции  $u_i$  могут быть вычислены с помощью алгоритма возмущений. Скорость сходимости алгоритма возмущений определяется формулой

$$\|U - U_{(N)}\|_X \leq c \left| \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right|^{N+1}, \quad c = \text{const} > 0, \quad |\varepsilon| < \varepsilon_0,$$

где  $U_{(N)}$  — приближение  $N$ -го порядка из (33),  $\varepsilon_0 < \bar{\varepsilon}$ .

Эта теорема вытекает из хорошо известных результатов по нелинейному анализу; ее доказательство может быть получено, например, как следствие нижеследующей теоремы 25.

Условие 2) теоремы 24 является довольно жестким и редко выполняется на практике. Однако зачастую это условие выполняется в некотором шаре. Тогда можно доказать аналогичную теорему, где условие на  $\varepsilon$  будет зависеть от радиуса этого шара. Так, справедлива

**Теорема 25.** Пусть:

1) оператор  $A$  непрерывно обратим и  $R(A) = Y$ , т.е. для любого  $y \in Y$  существует единственное решение  $x \in D(A)$  уравнения  $Ax = y$  такое, что

$$\|x\|_X \leq c_0 \|y\|_Y, \quad c_0 = \text{const} > 0;$$

2) для некоторого  $R > 0$  оператор  $F$  удовлетворяет условию

$$\|F(u) - F(v)\|_Y \leq k \|u - v\|_X \quad \forall u, v \in B(U_0, R),$$

где  $B(U_0, R) = \{u \in D(F) : \|u - U_0\|_X \leq R\}$ ,  $U_0$  — решение невозмущенной задачи (36).

Тогда при  $|\varepsilon| \leq \bar{\varepsilon}$ , где

$$\bar{\varepsilon} = \left[ c_0 \left( k + \frac{1}{R} \|F(U_0)\|_Y \right) \right]^{-1},$$

задача (35) имеет единственное решение  $U \in D(F)$ , удовлетворяющее условию  $\|U - U_0\|_X \leq R$ . Если, к тому же,  $F$  — аналитический оператор, то решение задачи (35) представляется в виде ряда

$$U = U_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i u_i, \quad (38)$$

сходящегося при  $|\varepsilon| < \bar{\varepsilon}$ , где функции  $u_i$  могут быть вычислены с помощью алгоритма возмущений. Скорость сходимости алгоритма возмущений определяется формулой

$$\|U - U_{(N)}\|_X \leq c \left| \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right|^{N+1}, \quad c = \text{const} > 0, \quad |\varepsilon| < \varepsilon_0,$$

где  $U_{(N)}$  — приближение  $N$ -го порядка из (33),  $\varepsilon_0 < \bar{\varepsilon}$ .

Если постоянная  $k$  в условии 2) теоремы 25 не зависит от  $R$  и это условие выполнено для любого  $R$ , то (при переходе к пределу при  $R \rightarrow \infty$ ) теорема 25 превращается в теорему 24.

Используя доказательство теоремы 25, можно получить утверждение о разрешимости задачи (35) и при  $\varepsilon = 1$ . Пусть  $F(0) = 0$ .

**Теорема 26.** Пусть:

- 1) выполнено условие 1) теоремы 25;
- 2) для любых  $R > 0$  справедливо условие Литвица

$$\|F(u) - F(v)\|_Y \leq k \|u - v\|_X \quad \forall u, v \in B(U_0, R),$$

где  $B(U_0, R) = \{u \in D(F), \|u - U_0\|_X \leq R\}$ ,  $k = k(U_0, R) = \text{const} > 0$ ;

- 3) при  $R = \|U_0\|_X$  выполнено неравенство  $c_0 k < 1/2$ .

Тогда задача (35) при  $\varepsilon = 1$  имеет единственное решение  $U \in D(F)$ , для которого справедлива оценка  $\|U\|_X \leq c \|f\|_Y$ ,  $c = \text{const} > 0$ .

**7.3. Связь с методом последовательных приближений.** В условиях теорем 24, 25 для приближенного решения задачи (35) можно воспользоваться алгоритмом возмущений. Уравнения для отыскания поправок  $u_i$  из (37), (38) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} AU_0 &= f, \\ Au_1 &= -F(U_0), \\ Au_2 &= -F'(U_0)u_1, \\ &\dots\dots\dots \\ Au_i &= f_{i-1} \equiv f_{i-1}(U_0, u_1, \dots, u_{i-1}), \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (39)$$

где правые части  $f_{i-1}$  зависят от производных оператора  $F$  в точке  $U_0$  до  $(i-1)$ -го порядка. Скорость сходимости этого алгоритма в условиях теорем 24, 25 определяется по формуле

$$\|U - U_{(N)}\|_X \leq c \left| \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right|^{N+1}, \quad |\varepsilon| < \varepsilon_0 < \bar{\varepsilon}, \quad (40)$$

где  $U_{(N)} = U_0 + \sum_{i=1}^N \varepsilon^i u_i$  — приближение  $N$ -го порядка к точному решению  $U$ .

Рассмотрим одновременно метод последовательных приближений для решения задачи (35) в виде

$$AU^{N+1} = -\varepsilon F(U^N) + f \quad (41)$$

при начальном приближении  $U^0 = U_0$ , где  $U_0$  — решение невозмущенной задачи (36). Как следует из доказательства теоремы 25, при  $|\varepsilon| \leq \bar{\varepsilon}$  справедлива оценка скорости сходимости

$$\|U - U^N\|_X \leq c_1 \frac{(K|\varepsilon|)^{N+1}}{1 - K|\varepsilon|}, \quad c_1 = \text{const} > 0,$$

причем  $K = c_0 k < 1/\varepsilon_0$ , где  $\varepsilon_0$  — постоянная из (40). Из (40) следует, что  $U^N$  и  $U_{(N)}$  являются приближениями к  $U$  одного порядка  $O(|\varepsilon/\varepsilon_0|^{N+1})$ . Кроме того, можно показать, что приближение  $U^N$  представимо в виде

$$U^N = U_{(N)} + \sum_{i=N+1}^{\infty} \varepsilon^i U_i^{(N)}, \quad (42)$$

где  $U_{(N)}$  — приближение  $N$ -го порядка согласно алгоритму возмущений (39). В самом деле, как следует из доказательства теоремы 25, при фиксированном  $N$  функция  $U^N$  из (41) аналитична по  $\varepsilon$  при  $|\varepsilon| < \varepsilon_0$  и справедливо разложение в ряд  $U^N = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i U_i^{(N)}$  с некоторыми  $U_i^{(N)} \in D(F)$ . Подставляя эти разложения в (41), находим уравнения для  $U_i^{(N)}$ . Сравнивая эти уравнения с уравнениями (39), последовательно устанавливаем, что  $U_0^{(N)} = U_0$ ,  $U_1^{(N)} = u_1$ , ...,  $U_N^{(N)} = u_N$ , так как совпадают соответствующие уравнения для  $U_i^{(N)}$  и  $u_i$ . Тем самым убеждаемся в справедливости формулы (42). Отсюда следует

**Теорема 27.** Пусть выполнены условия теоремы 24 или 25 и рассматривается метод последовательных приближений (41) с начальным приближением (36). Тогда приближение  $U^N$  представимо в виде

$$U^N = U_{(N)} + \sum_{i=N+1}^{\infty} \varepsilon^i U_i^{(N)},$$

где  $U_{(N)}$  — приближение  $N$ -го порядка алгоритма возмущений, и справедлива оценка

$$\|U^N - U_{(N)}\|_X \leq c \left| \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right|^{N+1}, \quad c = \text{const} > 0, \quad \varepsilon_0 < \bar{\varepsilon}.$$

Отметим, что в некоторых случаях метод последовательных приближений может быть предпочтительнее для вычислений по сравнению с алгоритмом возмущений [116].

## 8. Приложения к некоторым задачам математической физики

**8.1. Метод возмущений для квазилинейной задачи нестационарной теплопроводности.** Рассмотрим начально-краевую задачу для квазилинейного уравнения теплопроводности вида

$$\begin{aligned} C(T) \frac{\partial T}{\partial t} - \operatorname{div} (L \operatorname{grad} T) &= f(t, \bar{x}), \quad t \in (0, T), \quad \bar{x} \in \Omega, \\ T|_{t=0} &= T_0(\bar{x}), \quad T|_{\gamma_1} = T_1(t), \quad \left. \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} \right|_{\gamma_2} = 0, \end{aligned} \quad (43)$$

где  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$  ( $1 \leq m \leq 3$ ) — ограниченная область с кусочно гладкой границей  $\delta\Omega = \gamma_1 \cup \gamma_2$ ,  $T = T(t, \bar{x})$  — неизвестная функция температуры. Коэффициенты теплопроводности  $L = L(t, \bar{x})$  и теплоемкости  $C(T)$ , а также функции  $f(t, \bar{x})$ ,  $T_0(\bar{x})$ ,  $T_1(t)$  предполагаются вещественными и достаточно гладкими,  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_m)^T \in \Omega$ ,  $\vec{n}$  — единичный вектор внешней нормали к  $\delta\Omega$ ,  $T < \infty$ . (В случае  $m = 1$ , когда  $\Omega$  — отрезок с концами  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , роль  $\frac{\partial T}{\partial \vec{n}}$  играет производная  $\frac{\partial T}{\partial x}$ .)

Задачи вида (43) возникают при описании процесса распространения тепла в ограниченных областях (стержнях, пластинах и т. п.), нагреваемых за счет тепловых потоков на границах, при наличии также внутренних источников или стоков [32]. В ряде задач коэффициент теплопроводности  $L(T)$  задается как функция температуры. В этом случае с использованием подстановки Кирхгофа уравнение теплопроводности легко сводится к виду (43), где  $L \equiv 1$ .

Получим сначала возмущенную задачу. Представим теплоемкость в виде

$$C(T) = D(T)R(T),$$

где  $R(T) = 1 + \beta T$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ . Используя эту замену переменных, уравнение теплопроводности из (43) перепишем в виде

$$D(T)R(T) \frac{dT}{dR} \frac{\partial R}{\partial t} - \operatorname{div} \left( L \frac{dT}{dR} \operatorname{grad} R \right) = f(t, \bar{x}). \quad (44)$$

Пусть  $N \in \mathbb{R}$  — некоторая постоянная такая, что  $N/\beta > 0$ , которую определим ниже. Полагая

$$\psi(T) = D(T)R(T) \frac{dT}{dR} - \frac{1}{N}$$

и заменяя  $D(T)R(T) \frac{dT}{dR}$  из (44) на  $(1/N) + \varepsilon\psi(T)$ ,  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ , из (43) и (44), приходим к возмущенной задаче

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{N} + \varepsilon\psi(T) \right) \frac{\partial R}{\partial t} - \frac{1}{\beta} \operatorname{div} (L \operatorname{grad} R) &= f(t, \bar{x}), \quad t \in (0, T), \quad \bar{x} \in \Omega, \\ R|_{t=0} &= f_0(\bar{x}) \equiv 1 + \beta T_0(\bar{x}), \quad R|_{\gamma_1} = f_1(t) \equiv 1 + \beta T_1(t), \quad \left. \frac{\partial R}{\partial \vec{n}} \right|_{\gamma_2} = 0, \end{aligned}$$

или, в другой записи,

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial t} - \frac{N}{\beta} \operatorname{div} (L \operatorname{grad} R) + \varepsilon \left( \frac{N}{\beta} C \left( \frac{R-1}{\beta} \right) - 1 \right) \frac{\partial R}{\partial t} &= N f(t, \bar{x}), \\ R|_{t=0} &= f_0(\bar{x}), \quad R|_{\gamma_1} = f_1(t), \quad \frac{\partial R}{\partial \vec{n}} \Big|_{\gamma_2} = 0. \end{aligned} \quad (45)$$

При  $\varepsilon = 1$  из (45) получаем исходную задачу (43), а задачу, получающуюся из (45) при  $\varepsilon = 0$ , будем называть *невозмущенной*.

В предположении достаточной гладкости исходных данных невозмущенная задача имеет единственное решение  $R_0$ , удовлетворяющее задаче

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_0}{\partial t} - \frac{N}{\beta} \operatorname{div} (L \operatorname{grad} R_0) &= N f(t, \bar{x}), \quad t \in (0, T), \quad \bar{x} \in \Omega, \\ R_0|_{t=0} &= f_0(\bar{x}), \quad R_0|_{\gamma_1} = f_1(t), \quad \frac{\partial R_0}{\partial \vec{n}} \Big|_{\gamma_2} = 0. \end{aligned} \quad (46)$$

Вычитая (46) из (45), запишем задачу для разности  $\tilde{R} = R - R_0$  между решениями возмущенной и невозмущенной задач:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{R}}{\partial t} - \frac{N}{\beta} \operatorname{div} (L \operatorname{grad} \tilde{R}) + \varepsilon F(\tilde{R} + R_0) &= 0, \quad t \in (0, T), \quad \bar{x} \in \Omega, \\ \tilde{R}|_{t=0} &= 0, \quad \tilde{R}|_{\gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \vec{n}} \Big|_{\gamma_2} = 0, \end{aligned} \quad (47)$$

где  $F(R) = \left( \frac{N}{\beta} C \left( \frac{R-1}{\beta} \right) - 1 \right) \frac{\partial R}{\partial t}$ .

Введем конкретные ограничения на функции  $L(t, \bar{x})$ ,  $C(T)$ . Пусть  $L(t, \bar{x})$  не зависит от  $t$ , т. е.  $L(t, \bar{x}) = L(\bar{x})$  и

$$0 < L_0 \leq L(\bar{x}) \leq L_1 < \infty, \quad 0 < C_0 \leq C(T) \leq C_1 < \infty, \quad (48)$$

где  $L_i$ ,  $C_i = \text{const}$ ,  $i = 1, 2$ .

Чтобы записать задачу в операторной формулировке, введем в рассмотрение пространство  $H = L_2(\Omega)$  вещественных функций  $u(\bar{x})$ , интегрируемых по Лебегу с квадратом на  $\Omega$ , и пространство  $X = \{u(\bar{x}) \in W_2^2(\Omega) : u|_{\gamma_1} = 0\}$ , где  $W_2^2(\Omega)$  — пространство Соболева функций из  $L_2(\Omega)$ , которые обладают интегрируемыми с квадратом первыми и вторыми обобщенными производными. Введем в рассмотрение также  $Y = L_2(0, T; H)$ ,  $Y_1 = L_2(0, T; X)$  — пространства абстрактных функций  $v(t)$  со значениями в  $H$ ,  $X$  и пространства  $W = \{v \in Y_1 : dv/dt \in Y\}$ ,  $W_T = \{w \in W : w|_{t=T} = 0\}$ . Предполагается, что пространства  $H$  и  $Y$  отождествляются со своими сопряженными:  $H \equiv H^*$ ,  $Y^* = Y$ ,  $(\cdot, \cdot)_{L_2(0, T; H)} \equiv (\cdot, \cdot)$ .

Введем *обобщенную формулировку* для возмущенной задачи (47) в виде: найти функцию  $\tilde{R} \in Y$  такую, что

$$-\left(\tilde{R}, \frac{dw}{dt}\right) + (\tilde{R}, Aw) + \varepsilon(F(\tilde{R} + R_0), w) = 0 \quad \forall w \in W_T. \quad (49)$$

Здесь  $A$  — линейный оператор, действующий из  $Y$  в  $Y$  с областью определения  $D(A) = Y_1$  и определенный формулой

$$AR = -\frac{N}{\beta} \operatorname{div} (L \operatorname{grad} R), \quad R \in Y_1,$$

а  $F(R)$  — оператор, определенный равенством

$$(F(R), w) = \left(R, \frac{dw}{dt}\right) - \frac{N}{\beta} \left(\tilde{C}(R), \frac{dw}{dt}\right),$$

где

$$w \in W_T, \quad \tilde{C}(R) = \int_0^R C\left(\frac{R' - 1}{\beta}\right) dR'.$$

(Считаем, что функция  $C(T)$  определена при почти всех  $T \in (-\infty, +\infty)$  и  $f_0 = 0$ .)

*Лемма 10. Оператор  $F$  ограничен из  $Y$  в  $W_T^*$ .*

*Лемма 11. Оператор  $F$  в любой точке  $R \in Y$  имеет производную Гато  $F'(R)$ , определенную соотношением*

$$(F'(R)v, w) = \left(v, \frac{dw}{dt}\right) - \frac{N}{\beta} \left(C\left(\frac{R-1}{\beta}\right)v, \frac{dw}{dt}\right), \quad v \in Y, \quad \forall w \in W_T.$$

*Оператор  $F'(R)$  ограничен из  $Y$  в  $W_T^*$ , причем*

$$\|F'(R)v\|_{W_T^*} \leq k \|v\|_Y,$$

где

$$k = \sup_{t, x} \left| 1 - \frac{N}{\beta} C\left(\frac{R-1}{\beta}\right) \right| = \max \left( \left| 1 - \frac{N}{\beta} C_0 \right|, \left| 1 - \frac{N}{\beta} C_1 \right| \right),$$

а постоянные  $C_0, C_1$  определены в (48).

**Теорема 28.** Пусть  $R_0 \in Y$  — решение невозмущенной задачи (46) и выполнены ограничения (48). Тогда при  $0 < \varepsilon < 1/k$ , где

$$k = \max \left( \left| 1 - \frac{N}{\beta} C_0 \right|, \left| 1 - \frac{N}{\beta} C_1 \right| \right), \quad (50)$$

возмущенная задача имеет единственное решение  $\tilde{R} \in Y$  в смысле (49). Если к тому же функция  $C(T)$  аналитическая, то решение  $\tilde{R}$  задачи (47) представляется в виде ряда по степеням  $\varepsilon$

$$\tilde{R} = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i \tilde{R}_i, \quad \tilde{R}_i \in Y, \quad (51)$$

сходящегося при  $\varepsilon < 1/k$ , где функции  $\tilde{R}_i$  могут быть вычислены с помощью алгоритма возмущений.

Теорема 28 дает фактически обоснование метода возмущений в применении к задаче (47). Формула (50) есть достаточное условие на  $\varepsilon$ , при котором возмущенная задача имеет единственное решение, представляющееся в виде ряда (51). При  $k < 1$ , т. е. при

$$\max \left( \left| 1 - \frac{N}{\beta} C_0 \right|, \left| 1 - \frac{N}{\beta} C_1 \right| \right) < 1, \quad (52)$$

теорема остается справедливой, если положить  $\varepsilon = 1$ .

Условие (52) может быть использовано для выбора постоянных  $N$  и  $\beta$ , которые до сих пор считались произвольными. Если, например, положить  $\xi = N/\beta$  и  $g(\xi) = \max(|1 - C_0\xi|, |1 - C_1\xi|)$ ,  $\xi > 0$ , то решением неравенства  $g(\xi) < 1$  является

$$0 < \xi < 2/C_1. \quad (53)$$

Это означает, что, выбирая в качестве  $N/\beta$  любое число из интервала (53), можно утверждать, что при  $\varepsilon = 1$  возмущенная задача (47) имеет единственное решение, представляющееся в виде сходящегося ряда, и для ее решения можно воспользоваться алгоритмом возмущений.

Подставляя ряд (51) в (47) и приравнявая члены при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получим систему уравнений для определения поправок  $\tilde{R}_i$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{R}_1}{\partial t} - \frac{N}{\beta} \operatorname{div} (L \operatorname{grad} \tilde{R}_1) &= - \left( \frac{N}{\beta} C \left( \frac{R_0 - 1}{\beta} \right) - 1 \right) \frac{\partial R_0}{\partial t}, \\ \tilde{R}_1|_{t=0} &= 0, \quad \tilde{R}_1|_{\gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{R}_1}{\partial \vec{n}} \Big|_{\gamma_2} = 0, \\ \frac{\partial \tilde{R}_2}{\partial t} - \frac{N}{\beta} \operatorname{div} (L \operatorname{grad} \tilde{R}_2) &= - \left( \frac{N}{\beta} C \left( \frac{R_0 - 1}{\beta} \right) - 1 \right) \frac{\partial \tilde{R}_1}{\partial t} - \frac{N}{\beta^2} C' \tilde{R}_1 \frac{\partial R_0}{\partial t}, \\ \tilde{R}_2|_{t=0} &= 0, \quad \tilde{R}_2|_{\gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{R}_2}{\partial \vec{n}} \Big|_{\gamma_2} = 0 \end{aligned}$$

и т. д. Вычислив  $N$  поправок  $\tilde{R}_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , можно найти приближение  $N$ -го порядка к  $\tilde{R}$  по формуле

$$\tilde{R}_{(N)} = R_0 + \sum_{i=0}^N \varepsilon^i \tilde{R}_i,$$

при этом согласно теореме 28  $\|\tilde{R} - \tilde{R}_{(N)}\|_Y \leq c\varepsilon^{n+1}$ ,  $c = \text{const} > 0$ .

**8.2. Метод Галеркина для задач динамики атмосферных процессов.** Пусть  $S$  — сфера радиуса  $r$ . Рассмотрим задачу для двумерного уравнения баротропной атмосферы на сфере в виде [23]

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v(-\Delta)^s \varphi + J(\Delta^{-1} \varphi, \varphi) = f, \quad t \in (0, T), \quad \varphi(0) = u, \quad (54)$$

где

$$J(v, w) = \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial v}{\partial \lambda} \frac{\partial w}{\partial \mu} - \frac{\partial v}{\partial \mu} \frac{\partial w}{\partial \lambda} \right),$$

$$\varphi = \varphi(t, \lambda, \mu), \quad \mu = \sin \psi, \quad (\lambda, \psi) \in S, \quad 0 \leq \lambda \leq 2\pi, \quad -\pi/2 \leq \psi \leq \pi/2,$$

$\Delta$  — оператор Лапласа–Бельтрами на сфере

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \left( \frac{1}{1 - \mu^2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial}{\partial \mu} (1 - \mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} \right). \quad (55)$$

Здесь  $\varphi = \varphi(t, \lambda, \mu)$  — функция вихря,  $\lambda$  — долгота,  $\psi$  — широта,  $t \in [0, T]$ ,  $v = \text{const} > 0$ ,  $s \geq 1$ , член  $v(-\Delta)^s \varphi$  описывает турбулентную вязкость,

$f(\lambda, t, \mu)$  — внешний источник завихренности,  $u = u(\lambda, \mu)$  — функция начального условия.

В рамках этой модели атмосфера рассматривается как слой несжимаемой жидкости постоянной плотности, толщина которого мала по сравнению с горизонтальным масштабом движения. Несмотря на относительную простоту, данное уравнение учитывает такие важные динамические процессы как нелинейное взаимодействие и дисперсия волн. Учет мелкомасштабных движений атмосферы в рамках этой модели осуществляется через турбулентный член и внешний источник завихренности.

В случае, когда  $s = 1$ , уравнение (54) получается из обычных уравнений Навье–Стокса на сфере. «Искусственная вязкость», когда  $s > 0$ , используется часто для доказательства теорем существования и единственности, а также при численном решении задачи.

Введем  $H = \dot{L}_2(S)$  — гильбертово пространство вещественных функций, определенных на  $S$ , интегрируемых с квадратом и ортогональных константе, с обычным скалярным произведением  $(\cdot, \cdot)$  и нормой  $\|\cdot\| = (\cdot, \cdot)^{1/2}$ . Оператор Лапласа–Бельтрами будем рассматривать как оператор, действующий из  $H$  в  $H$  с областью определения  $D(A) = \{u \in H : \Delta u \in H\}$ .

С помощью степеней оператора Лапласа можно ввести пространства Соболева  $\dot{H}^\gamma(S)$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$ , со скалярным произведением и нормой:

$$\begin{aligned} (u, v)_{\dot{H}^\gamma(S)} &= ((-\Delta)^{\gamma/2} u, (-\Delta)^{\gamma/2} v) = \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda_j^\gamma u_j v_j, \\ \|u\|_{\dot{H}^\gamma(S)} &= (u, u)_{\dot{H}^\gamma(S)}^{1/2} = \|(-\Delta)^{\gamma/2} u\| = \left( \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda_j^\gamma u_j^2 \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (56)$$

где  $\Lambda_j$  — собственные значения оператора  $-\Delta$ , отвечающие собственным функциям  $\omega_j$ ,  $u_j = (u, \omega_j)$ . При этом  $D(\Delta) = \dot{H}^2(S)$ ,  $H = \dot{H}^0(S)$ .

Определим оператор  $A$  по формуле

$$A\varphi = v(-\Delta)^s \varphi; \quad (57)$$

он действует в  $H$  с областью определения  $D(A) = \dot{H}^{2s}(S)$ . Для  $\gamma \in \mathbb{R}$  введем пространства  $X^\gamma = \dot{H}^{2\gamma}$ ,  $Y^\gamma = L_2(0, T; X^\gamma)$ , и  $W^\gamma = \left\{ \varphi \in Y^{\gamma+1/2} : \frac{d\varphi}{dt} \in Y^{\gamma-1/2} \right\}$  с нормами

$$\|\varphi\|_{Y^\gamma} = \left( \int_0^T \|\varphi\|_{X^\gamma}^2 dt \right)^{1/2}, \quad \|\varphi\|_{W^\gamma} = \left( \left\| \frac{d\varphi}{dt} \right\|_{Y^{\gamma-1/2}}^2 + \|\varphi\|_{Y^{\gamma+1/2}}^2 \right)^{1/2}.$$

Для  $\varphi \in W^\gamma$  определим нелинейный оператор  $F(\varphi)$  по формуле

$$F(\varphi) = J(\Delta^{-1} \varphi, \varphi).$$

Известно, что если  $s \geq 1$ ,  $\gamma \geq 1/(2s)$  или  $0 \leq \gamma < (s-1)/(2s)$  при  $s > 1$ , то оператор  $F$  действует из  $Y^{\gamma+1/2}$  в  $Y^{\gamma-1/2}$  с областью определения  $D(F) =$

$= W^\gamma$ , он непрерывно дифференцируем по Фреше, причем

$$\|F'(\varphi)\|_{Y^{\gamma+1/2} \rightarrow Y^{\gamma-1/2}} \leq c_3 \|\varphi\|_{W^\gamma}, \quad c_3 = \text{const} > 0.$$

С учетом вышесказанного задачу (54) можно записать в операторной форме

$$\frac{d\varphi}{dt} + A\varphi + F(\varphi) = f, \quad t \in (0, T), \quad \varphi(0) = u. \quad (58)$$

Это абстрактное нелинейное эволюционное уравнение. Эту задачу можно записать и в виде  $A\varphi = f$ , выбрав в качестве  $A$  оператор  $A\varphi = \frac{d\varphi}{dt} + A\varphi + F(\varphi)$ , действующий из  $Y^{\gamma+1/2}$  в  $Y^{\gamma-1/2}$  с областью определения  $D(A) = \{\varphi \in W^\gamma: \varphi(0) = u\}$ .

Как известно, при  $f \in Y^{-1/2} = L_2(0, T; \mathring{H}^{-s})$ ,  $s \geq 1$ ,  $U \in \mathring{L}_2(S)$  существует единственное решение  $\varphi \in W^0$  задачи (58).

Рассмотрим метод Галеркина для решения задачи (54). В качестве базисных функций рассмотрим конечный набор собственных функций  $\{\omega_j\}_{j=1, \dots, N}$  оператора Лапласа–Бельтрами. Приближенное решение уравнения (58) будем искать в виде

$$\varphi_N(t) = \sum_{j=1}^N \varphi_{Nj}(t) \omega_j. \quad (59)$$

Введя оператор проектирования  $P_N$  по формуле

$$P_N \xi = \sum_{j=1}^N \xi_j \omega_j, \quad \xi_j = (\xi, \omega_j)$$

и применяя его к уравнению (58), находим

$$\frac{\partial \varphi_N}{\partial t} + P_N J(\Delta^{-1} \varphi_N, \varphi_N) = \nu \Delta \varphi_N + P_N f. \quad (60)$$

Отсюда получается система обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций  $\varphi_{Nj}(t)$

$$\begin{aligned} \varphi'_{Nj} + \nu \Delta_j \varphi_{Nj} + \sum_{i,k=1}^N (J(\Delta^{-1} \omega_i, \omega_k), \omega_j) \varphi_{Ni} \varphi_{Nk} &= (f, \omega_j), \\ j &= 1, \dots, N. \quad \varphi_{Nj}(0) = (u, \omega_j). \end{aligned} \quad (61)$$

Существование решения системы (61) следует из теории обыкновенных дифференциальных уравнений и априорных оценок. На основе разрешимости системы (61) устанавливается существование и единственность решения исходной задачи (54).

### 8.3. Метод Ньютона в задачах вариационного усвоения данных.

В настоящее время в связи с исследованиями глобальных изменений очень важной является проблема получения и рационального использования данных измерений с целью ретроспективного анализа в различных областях знаний. Математическая модель данной проблемы может быть сформулирована как задача об усвоении и обработке многомерных (включаю-

щих зависимость от временной и пространственных переменных) данных, представляющая собой одну из задач оптимального управления.

Пусть рассматривается некоторый физический процесс, математическая модель которого записывается в виде нелинейной эволюционной задачи

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = F(\varphi), \quad t \in (0, T), \quad \varphi|_{t=0} = u, \quad (62)$$

где  $\varphi = \varphi(t)$  — неизвестная функция, принадлежащая для каждого  $t$  гильбертову пространству  $X$ ,  $u \in X$ ,  $F$  — нелинейный оператор, действующий из  $X$  в  $X$ . Пусть  $Y = L_2(0, T; X)$ ,  $(\cdot, \cdot)_{L_2(0, T; X)} = (\cdot, \cdot)$ ,  $\|\cdot\| = (\cdot, \cdot)^{1/2}$ . Введем функционал

$$S(u) = \frac{\alpha}{2} \|u - u_{\text{obs}}\|_X^2 + \frac{1}{2} \int_0^T \|C\varphi - \varphi_{\text{obs}}\|_X^2 dt, \quad (63)$$

где  $\alpha = \text{const} \geq 0$ ,  $u_{\text{obs}} \in X$ ,  $\varphi_{\text{obs}} \in Y_{\text{obs}}$  — заданные функции (данные наблюдений),  $Y_{\text{obs}}$  — подпространство  $Y$ ,  $C: Y \rightarrow Y_{\text{obs}}$  — линейный оператор.

Рассмотрим следующую задачу об усвоении данных с целью восстановления начального условия: найти  $u$  и  $\varphi$  такие, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = F(\varphi), \quad t \in (0, T), \quad \varphi|_{t=0} = u, \quad S(u) = \inf_v S(v). \quad (64)$$

Необходимое условие оптимальности сводит задачу (64) к системе

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = F(\varphi), \quad t \in (0, T), \quad \varphi|_{t=0} = u, \quad (65)$$

$$-\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} - (F'(\varphi))^* \varphi^* = -C^*(C\varphi - \varphi_{\text{obs}}), \quad t \in (0, T), \quad \varphi^*|_{t=T} = 0, \quad (66)$$

$$\alpha(u - u_{\text{obs}}) - \varphi^*|_{t=0} = 0 \quad (67)$$

с неизвестными  $\varphi$ ,  $\varphi^*$ ,  $u$ , где  $(F'(\varphi))^*$  — оператор, сопряженный к производной Фреше от оператора  $F$ , а  $C^*$  — сопряженный к  $C$  оператор.

Предполагая, что решение задачи (65)–(67) существует, рассмотрим для его отыскания метод Ньютона.

Систему (65)–(67) с тремя неизвестными  $\varphi$ ,  $\varphi^*$ ,  $u$  можно рассматривать как операторное уравнение вида

$$F(U) = 0, \quad (68)$$

где  $U = (\varphi, \varphi^*, u)$ . Для применения метода Ньютона необходимо вычислить  $F'(U)$ . Будем предполагать, что исходный оператор  $F$  дважды непрерывно дифференцируем по Фреше. Тогда метод Ньютона

$$U_{n+1} = U_n - [F'(U_n)]^{-1} F(U_n), \quad U_n = (\varphi_n, \varphi_n^*, u_n) \quad (69)$$

заключается в выполнении следующих шагов.

1. Находим  $V_n = [F'(U_n)]^{-1} F(U_n)$  как решение задачи  $F'(U_n)V_n = -F(U_n)$  при  $V_n = (\psi_n, \psi_n^*, v_n)$

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial t} - F'(\varphi_n) \psi_n = \frac{\partial \varphi_n}{\partial t} - F(\varphi_n), \quad \psi_n|_{t=0} = v_n + \varphi_n|_{t=0} - u_n, \quad (70)$$

$$-\frac{\partial \psi_n^*}{\partial t} - (F'(\varphi_n))^* \psi_n^* = p_1^n, \quad \psi_n^*|_{t=T} = \varphi_n^*|_{t=T}, \quad (71)$$

$$\alpha v_n - \psi_n^*|_{t=0} = \alpha(u_n - u_{\text{obs}}) - \varphi_n^*|_{t=0}, \quad (72)$$

где  $p_1^n = (F''(\varphi_n) \psi_n)^* \varphi_n^* - C^* C \psi_n - \frac{\partial \varphi_n^*}{\partial t} - (F'(\varphi_n))^* \varphi_n^* + C^*(C \varphi_n - \varphi_{\text{obs}})$ .  
2. Полагаем  $U_{n+1} = U_n - V_n$ , т. е.

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n - \psi_n, \quad \varphi_{n+1}^* = \varphi_n^* - \psi_n^*, \quad u_{n+1} = u_n - v_n. \quad (73)$$

Поскольку  $U_{n+1} = U_n - V_n$ , то два шага (70)–(72) можно переформулировать так: при заданных  $\varphi_n, \varphi_n^*, u_n$  найти  $\varphi_{n+1}, \varphi_{n+1}^*, u_{n+1}$  такие, что

$$\frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial t} - F'(\varphi_n) \varphi_{n+1} = F(\varphi_n) - F'(\varphi_n) \varphi_n, \quad \varphi_{n+1}|_{t=0} = u_{n+1}, \quad (74)$$

$$-\frac{\partial \varphi_{n+1}^*}{\partial t} - (F'(\varphi_n))^* \varphi_{n+1}^* = p_2^n, \quad \varphi_{n+1}^*|_{t=T} = 0, \quad (75)$$

$$\alpha(u_{n+1} - u_{\text{obs}}) - \varphi_{n+1}^*|_{t=0} = 0, \quad (76)$$

где  $p_2^n = (F''(\varphi_n)(\varphi_{n+1} - \varphi_n))^* \varphi_n^* - C^*(C \varphi_{n+1} - \varphi_{\text{obs}})$ .

Зафиксируем точку  $\varphi_0 \in Y$ , вещественное число  $R > 0$  и рассмотрим шар  $S_R(\varphi_0) = \{\varphi \in Y : \|\varphi - \varphi_0\| \leq R\}$ . Будем предполагать, что исходная математическая модель удовлетворяет при всех  $\varphi \in S_R(\varphi_0)$  следующим условиям:

1) решение задачи

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - F'(\varphi) \psi = f, \quad \psi|_{t=0} = v$$

удовлетворяет неравенству

$$\|\psi\| \leq c_1(\|f\| + \|v\|_X), \quad c_1 = c_1(R, \varphi_0) > 0; \quad (77)$$

2) для решения сопряженной задачи

$$-\frac{\partial \psi^*}{\partial t} - (F'(\varphi))^* \psi^* = p, \quad \psi^*|_{t=T} = g$$

справедливо

$$\|\psi^*\| + \|\psi^*\|_{t=0} \leq c_1^*(\|p\| + \|g\|_X), \quad c_1^* = c_1^*(R, \varphi_0) > 0; \quad (78)$$

3) оператор  $F$  трижды непрерывно дифференцируем по Фреше, и

$$\|F''(\varphi)\| \leq c_2, \quad \|F'''(\varphi)\| \leq c_3, \quad c_k = c_k(R, \varphi_0) > 0, \quad k = 1, 2. \quad (79)$$

**З а м е ч а н и е 1.** Для билинейного оператора  $F$  постоянная  $c_2$  не зависит от  $R$ ,  $\varphi_0$  и  $c_3 \equiv 0$ .

Будем искать решение задачи (65)–(67) в шаре

$$S_r = \{(\varphi, \varphi^*, u) : \|\varphi - \varphi_0\| + \|\varphi^*\| + \|u - u_0\|_X \leq r\},$$

$$u_0 \in X, \quad r = \min(c_2^{-1}, R).$$

В условиях полного наблюдения ( $C \equiv E$ ), справедлива

**Теорема 29.** Пусть  $u_0 \in X$ ,  $\varphi_0 \in Y$ ,  $R > 0$ ,  $\varphi_0^* = 0$  и

$$B\eta \left(1 + \frac{B(c_2 + c_3 r)r}{2}\right) \leq r, \quad (80)$$

где

$$\eta = \left\| \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} - F(\varphi_0) \right\| + \|\varphi_0|_{t=0} - u_0\|_X + \|\varphi_0 - \varphi_{\text{obs}}\| + \alpha \|u_0 - u_{\text{obs}}\|_X,$$

$$B = \max(\beta_1, \beta_2, \beta_3), \quad \beta_1 = \alpha^{-1}(2c_1 c_1^* + 2c_1^2 c_1^* + 4c_1^2 c_1^{*2}) + c_1 + 2c_1 c_1^*,$$

$$\beta_2 = \alpha^{-1}(c_1^* + c_1 c_1^* + 2c_1 c_1^{*2}) + c_1^*, \quad \beta_3 = \alpha^{-1}(1 + c_1 + 2c_1 c_1^*).$$

Тогда система (65)–(67) имеет в шаре  $S_r$  единственное решение  $\varphi$ ,  $\varphi^*$ , и. Начиная с  $\varphi_0$ ,  $\varphi_0^*$ ,  $u_0$ , метод Ньютона сходится к  $\varphi$ ,  $\varphi^*$ , и. Справедлива следующая оценка скорости сходимости:

$$\|\varphi - \varphi_n\| + \|\varphi^* - \varphi_n^*\| + \|u - u_n\|_X \leq B\eta \frac{(h/2)^{2^n-1}}{1 - (h/2)^{2^n}}, \quad (81)$$

где  $h = B^2\eta(c_2 + c_3 r) < 2$ .

**Замечание 2.** Условие (80) имеет место при достаточно малых  $\eta$ , что означает, что  $\varphi_0$ ,  $\varphi_0^*$ ,  $u_0$  достаточно близко к точному решению.

## Библиографический комментарий

Основные определения нелинейного функционального анализа и его приложений к решению нелинейных уравнений приводятся в [10, 94]. Детальное изложение вариационных методов к исследованию нелинейных операторных уравнений дается в [7, 9, 17]. Применения топологических методов к изучению нелинейных дифференциальных и интегральных уравнений рассмотрены в [77]. Основы теории косинусов и методов исследования уравнений, содержащих нелинейности, дается в [36].

Книга [42] является введением в теорию нелинейных дифференциальных уравнений. Книга [99] посвящена качественной теории нелинейных параболических уравнений, изложение которой иллюстрировано примерами конкретных задач из разных научных областей — гидродинамики, химической кинетики, популяционной генетики. Классической книгой по решению нелинейных дифференциальных уравнений является монография Ж.-Л. Лионса [50].

Различные аспекты теории сопряженных уравнений и алгоритмов возмущений в связи с приложениями в нелинейных задачах излагаются в [116].

## Список литературы

1. *Арсенин В. Я.* Методы математической физики и специальные функции. — М.: Наука, 1984.
2. *Бахвалов Н. С.* Численные методы. — М.: Наука, 1973.
3. *Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.* Численные методы. — М.: Наука, 1987.
4. *Бицадзе А. В.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1982.
5. *Брело М.* Основы классической теории потенциала. — М.: ИЛ, 1964.
6. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974.
7. *Вайнберг М. М.* Вариационные методы исследования нелинейных уравнений. — М.: Гостехиздат, 1956.
8. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. — М.: Наука, 1969.
9. *Вайнберг М. М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. — М.: Наука, 1972.
10. *Вайнберг М. М.* Функциональный анализ. — М.: Просвещение, 1979.
11. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Некоторые вопросы возмущений краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных // ДАН СССР. — 1959. — Т. 129, №. 6.
12. *Владимиров В. С.* Математические задачи односкоростной теории переноса частиц. Труды МИАН. 1961. Вып. 61.
13. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1988.
14. *Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.* Матрицы и вычисления. — М.: Наука, 1984.
15. *Волков Е. А.* Численные методы. — М.: Наука, 1982.
16. *Волощук В. М.* Кинетическая теория коагуляции. — Л.: Гидрометеониздат, 1984.
17. *Гаевский Х., Греггер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1978.
18. *Годунов С. К.* Современные аспекты линейной алгебры. — Новосибирск: Научная книга, 1997.
19. *Гринберг Г. А.* Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. — М.: Изд-во АН СССР, 1948.
20. *Гюнтер Н. М.* Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. — М.: Гостехиздат, 1953.
21. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. — М.: Наука, 1974.

22. Дымников В. П. Вычислительные методы в геофизической гидродинамике. — М.: ОВМ АН СССР, 1984.
23. Дымников В. П., Филатов А. Н. Основы математической теории климата. — М.: ВИНТИ, 1994.
24. Дьяконов Е. Г. Разностные методы решения краевых задач. — М.: МГУ, 1971.
25. Егоров Ю. В., Шубин М. А. Линейные дифференциальные уравнения с частными производными. Основы классической теории // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 30. — М.: ВИНТИ, 1987.
26. Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными. Точные решения. — М.: Международная программа образования, 1996.
27. Зеленьяк Т. И. Качественная теория краевых задач для квазилинейных уравнений второго порядка параболического типа. — Новосибирск: НГУ, 1972.
28. Иосида К. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967.
29. Калиткин Н. Н. Численные методы. — М.: Наука, 1978.
30. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. — М.: Наука, 1977.
31. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
32. Коздоба Л. А. Методы решения нелинейных задач теплопроводности. — М.: Наука, 1975.
33. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1981.
34. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. — М.: Наука, 1984.
35. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутецкий Я. Б., Стеценко В. Я. Приближенное решение операторных уравнений. — М.: Наука, 1969.
36. Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений. — М.: ГТТЛ, 1962.
37. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. — М.: Наука, 1968.
38. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
39. Крейн С. Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1971.
40. Крылов В. И., Бобков В. В. Вычислительные методы. Т. II. — М.: Наука, 1977.
41. Купрадзе В. Д. Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения. — М.-Л.: Гостехиздат, 1950.
42. Куфнер А., Фучек С. Нелинейные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1980.
43. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. — М.: Наука, 1970.
44. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973.
45. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967.
46. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. — М.: Наука, 1973.

47. Ландкоф Н. С. Основы современной теории потенциала. — М.: Наука, 1966.
48. Лебедев В. И. Функциональный анализ и вычислительная математика. — М.: ВИНТИ, 1994.
49. Левин В. И., Гросберг Ю. И. Дифференциальные уравнения математической физики. — Л.: ГИТТЛ, 1951.
50. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972.
51. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971.
52. Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. — М.: Наука, 1981.
53. Льюис Дж. Ценность. Сопряженная функция. — М.: Атомиздат, 1972.
54. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. — М.: Наука, 1965.
55. Ляпунов А. М. Общая проблема устойчивости движения. — Харьков: Харьк. мат. об., 1892.
56. Ляпунов А. М. Собрание сочинений. Т. 2. — М.-Л.: Гостехиздат, 1956.
57. Манжиров А. В., Полянин А. Д. Справочник по интегральным уравнениям: Методы решения. — М.: Факториал Пресс, 2000.
58. Марчук Г. И. Методы расчета ядерных реакторов. — М.: Атомиздат, 1961.
59. Марчук Г. И. Численное решение задач динамики атмосферы и океана. — Л.: Гидрометеоиздат, 1974.
60. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. — М.: Наука, 1989.
61. Марчук Г. И. Методы расщепления. — М.: Наука, 1988.
62. Марчук Г. И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. — М.: Наука, 1982.
63. Марчук Г. И. Сопряженные уравнения и анализ сложных систем. — М.: Наука, 1992.
64. Марчук Г. И., Агошков В. И. Введение в проекционно-сеточные методы. — М.: Наука, 1981.
65. Марчук Г. И., Шайдуров В. В. Повышение точности решений разностных схем. — М.: Наука, 1979.
66. Маслов В. П. Теория возмущений и асимптотические методы. — М.: МГУ, 1965.
67. Математические модели циркуляции в океане / Под. ред. Г. И. Марчука, А. С. Саркисяна. — Новосибирск: Наука, 1980.
68. Мизохата С. Теория уравнений с частными производными. — М.: Мир, 1977.
69. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. — М.: Наука, 1983.
70. Михлин С. Г. Курс математической физики. — М.: Наука, 1968.
71. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. — М.: Наука, 1970.
72. Михлин С. Г., Смолицкий Х. Л. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. — М.: Наука, 1965.
73. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. — М.: Наука, 1981.

74. *Найфэ А. Ю.* Методы возмущений. — М.: Мир, 1976.
75. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. — М.: Наука, 1969.
76. *Никифоров А. Ф., Уваров В. Б.* Специальные функции математической физики. — М.: Наука, 1984.
77. *Ниренберг Л.* Лекции по нелинейному функциональному анализу. — М.: Мир, 1977.
78. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений. — М.: Наука, 1968.
79. *Рябенкий В. С.* Введение в вычислительную математику. — М.: Наука, 1994.
80. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. — М.: Наука, 1982.
81. *Самарский А. А.* Введение в численные методы. — М.: Наука, 1982.
82. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Численные методы. — М.: Наука, 1989.
83. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. IV. Часть 2. — М.: Наука, 1981.
84. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1950.
85. *Соболев С. Л.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1966.
86. *Сологуб В. С.* Развитие теории эллиптических уравнений в XVIII и XIX столетиях. — Киев: Наукова думка, 1975.
87. *Сретенский Л. Н.* Теория ньютоновского потенциала. — М.-Л.: Гостехиздат, 1946.
88. *Стеклов В. А.* Основные задачи математической физики. — М.: Наука, 1983.
89. *Снеддон И.* Преобразования Фурье. — М.: ИЛ, 1955.
90. *Темам Р.* Уравнения Навье–Стокса. — М.: Мир, 1981.
91. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1977.
92. *Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г.* Дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1980.
93. *Трантер К. Дж.* Интегральные преобразования в математической физике. — М.: Гостехиздат, 1956.
94. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1980.
95. *Успенский С. В., Демиденко Г. И., Перепелкин В. Т.* Теоремы вложения и приложения к дифференциальным уравнениям. — Новосибирск: Наука, 1984.
96. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. — М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1963.
97. *Уэрмер Дж.* Теория потенциала. — М.: Мир, 1980.
98. *Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. — М.-Л.: Физматгиз, 1963.
99. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. — М.: Мир, 1985.
100. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. — М.: ИЛ, 1962.
101. *Шайдуров В. В.* Многосеточные методы конечных элементов. — М.: Наука, 1989.
102. *Яненко Н. Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. — Новосибирск: Наука, 1967.

103. *Agoshkov V.I.* Boundary Value Problems for Transport Equations. — Basel: Birkhäuser, 1998.
104. *Ashyralyev A., Sobolevskii P.E.* Well-Posedness of Parabolic Difference Equations. — Basel: Birkhäuser, 1994.
105. *Bellman R.* Perturbation Techniques in Mathematics, Physics and Engineering. — New York: Holt, 1964.
106. *Bellman R., Kalaba R.E.* Quasilinearization and Nonlinear Boundary-Value Problems. — New York: American Elsevier Publishing Company, 1965.
107. *Bensoussan A., Lions J.L., Papanicolaou G.* Asymptotic Methods in Periodic Structures. — Amsterdam: North Holland, 1978.
108. *Ciarlet P.G.* Introduction to Numerical Linear Algebra and Optimization. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989.
109. *Collatz L.* Functional Analysis and Numerical Mathematics. — New York: Academic Press, 1974.
110. *Courant R., Hilbert D.* Methoden der mathematischen Physik. — Berlin: Springer, 1931.
111. *Dubovskii P.B.* Mathematical Theory of Coagulation. — Seoul: Seoul National University, GARC-KOSFF, 1994.
112. *Dunford N., Schwartz J.T.* Linear operators. I, II, III. — New York: Wiley-Interscience, 1958.
113. *Friedrichs K.O.* Perturbation of Spectra in Hilbert Space. — Providence: American Math. Society, 1965.
114. *Glowinski R.* Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems. — New York: Springer, 1984.
115. *Lions J.L.* Contrôlabilité Exacte Perturbations et Stabilisation de Systèmes Distribués. — Paris: Masson, 1988.
116. *Marchuk G.I., Agoshkov V.I., Shutyaev V.P.* Adjoint Equations and Perturbation Algorithms in Nonlinear Problems. — New York: CRC Press Inc., 1996.
117. *Maslova N.B.* Nonlinear Evolution Equations. Kinetic Approach. — New York: World Scientific, 1993.
118. *Poincaré H.* Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste. — Paris: Gauthier — Villars, 1892.
119. *Rayleigh L., Strutt J.W.* Theory of Sound. — London: McMillan, 1926.
120. *Rellich F.* Störungstheorie des Spektralzerlegung // Math. Ann. 1936. V. 117.
121. *Rellich F.* Perturbation Theory of Eigenvalue Problems. — New York: Gordon and Breach Sci. Publ., 1969.
122. *Samarskii A.A., Vabishchevich P.N.* Computational Heat Transfer. — Chichester: Wiley, 1995.
123. *Schrödinger E.* Quantisierung als Eigenwertproblem // Ann. Phys. — 1926. — V. 80.
124. *Schwartz L.* Théorie des Distributions. — Paris: Hermann, 1966.
125. *Strang G., Fix G.J.* An Analysis of the Finite Element Method. — New York: Prentice-Hall, 1973.
126. *Van Dyke M.D.* Perturbation Methods in Fluid Mechanics. — New York: Academic Press, 1964.
127. *Whitham G.B.* Linear and Nonlinear Waves. — New York: John Wiley, 1974.